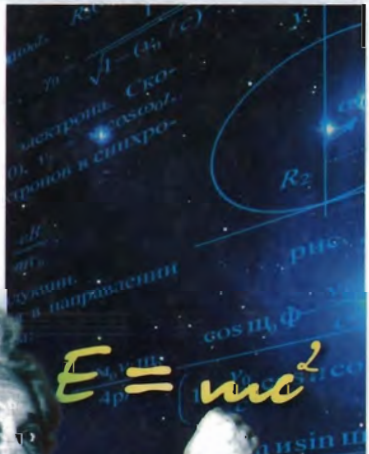
АБИТУРИЕНТ

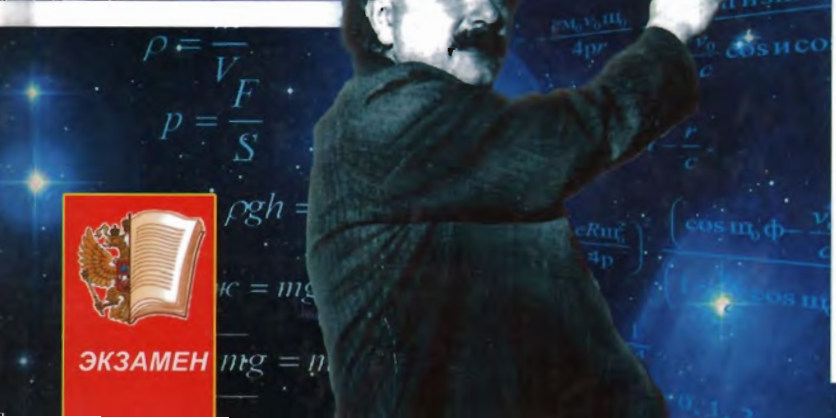
Ю.Г. ПАВЛЕНКО

НАЧАЛА ФИЗИКИ

ПОВТОРЕНИЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И АБИТУРИЕНТОВ





ЭКЗАМЕН

Ю.Г. Павленко

НАЧАЛА ФИЗИКИ

Учебник

Издание четвертое, стереотипное

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА

УДК 53
ББК 22.3
П12

Павленко, Ю.Г.

П12 Начала физики: Учебник / Ю.Г. Павленко. — 4-е изд., стереотип. — М.: Издательство «Экзамен», 2007. — 862, [2] с. (Серия «Абитуриент»)

ISBN 978-5-377-00559-9

В основу учебника положены материалы лекций, которые в течение ряда лет читались учащимся физико-математической школы им. А.Н. Колмогорова при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. В нем подробно изложен теоретический материал по всем темам программы физики средней школы, а также приведены решения более 450 примеров и задач.

Достаточно полно обсуждаются разделы программы, которые, как показала практика преподавания в школе им. А.Н. Колмогорова и приемных экзаменов на естественные факультеты МГУ, наиболее сложны для учащихся.

Цель книги — помочь освоить материал программы, научить активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи, и приобрести уверенность в самостоятельной работе.

Учебник предназначен для учащихся средних школ, лицеев, гимназий, преподавателей и абитуриентов.

УДК 53
ББК 22.3

Подписано в печать с диапозитивов 27.02.2007. Формат 60x90/16.
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 36,79.
Усл. печ. л. 54. Тираж 50 000 экз. (2-й завод – 3000) экз. Заказ № 4724057.

Отпечатано на ОАО «Нижполиграф».
603006, Нижний Новгород, ул. Варварская, 32.

ISBN 978-5-377-00559-9

© Павленко Ю.Г., 2007
© Издательство *«ЭКЗАМЕН»*, 2007

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ 12

Часть I. МЕХАНИКА

Глава 1. Элементы математического анализа 15
1.1. Скаляры и векторы в евклидовом пространстве 15
1.2. Скалярное и векторное произведения 22
1.3. Производная и интеграл 24

Глава 2. Кинематика 29
2.1. Скорость частицы 29
2.2. Ускорение частицы 34
2.3. Путь, пройденный частицей 36
2.4. Движение по окружности 38

Глава 3. Движение частицы с постоянными скоростью или ускорением 40
3.1. Движение частицы с постоянной скоростью 40
3.2. Прямолинейное движение с постоянным ускорением 44
3.3. Свободное падение 46
3.4. Криволинейное движение с постоянным ускорением 49
3.5 Относительное движение 53

Глава 4. Законы Ньютона 57
4.1. Первый закон Ньютона 58
4.2. Второй закон Ньютона 59
4.3. Третий закон Ньютона 61
4.4. Активные силы и силы реакции 61
4.5. Общий метод решения задач по теме «Законы Ньютона» 64

Глава 5. Законы изменения и сохранения импульса системы частиц 76
5.1. Импульс системы тел 76
5.2. Центр масс системы частиц 76
5.3. Закон изменения импульса системы частиц 77
5.4. Движение тела переменной массы 78
5.5. Закон сохранения импульса системы частиц 80

Глава 6. Законы изменения и сохранения полной энергии системы частиц 85
6.1. Работа силы 85
6.2. Мощность, развиваемая силой 86
6.3. Работа сил тяжести и упругости 88
6.4. Потенциальная энергия 89
6.5. Теорема об изменении кинетической энергии 91
6.6. Закон изменения полной энергии 92
6.7. Закон сохранения полной энергии 96
6.8. Столкновение тел 100
6.9. Закон сохранения полной энергии в системе центра масс 104

Глава 7. Движение частицы по окружности 107
7.1. Уравнения движения частицы по окружности 107

Глава 8. Закон всемирного тяготения 115
8.1. Открытие Солнечной системы 115

8.2. Наша Галактика и Вселенная 119
8.3. Закон всемирного тяготения 122
8.4. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия частиц 122
8.5. Спутник на круговой орбите 124
8.6. Движение спутника по эллиптической орбите 126
8.7. Возмущенное движение спутника 129
8.8. Вторая космическая скорость 132
8.9. Третья космическая скорость 133
8.10. Четвертая космическая скорость 133

Глава 9. Космические исследования 134
9.1. Орбитальные полеты 134
9.2. Системы космической связи 136
9.3. Навигационные и геодезические спутники 136
9.4. Космическое землеведение 137
9.5 Исследовательские спутники 139
9.6. Исследования Луны 140
9.7. Полеты к ближним планетам 143
9.8. Исследования внешних планет 148
9.9. Космический вояж 149
9.10. Свидание с Эросом 153
9.11. Изучение комет 154
9.12. Космическая катастрофа в Солнечной системе 155
9.13. Ядерный щит Земли 155
9.14. Встреча с Леонидами 156
9.15. Наша планета — Земля 156

Глава 10. Статика 157
10.1. Первое условие равновесия твердого тела 158
10.2. Второе условие равновесия твердого тела 158
10.3. Равнодействующая сила 160
10.4. Центр тяжести твердого тела 160
10.5. Теория волока 170
10.6. Потенциальная энергия и момент силы 171
10.7. Критерий устойчивости положения равновесия консервативной системы 172

Глава 11. Движение в неинерциальных системах отсчета 173
11.1. Принцип относительности Галилея 173
11.2. Силы инерции в поступательно движущейся системе отсчета 174
11.3. Силы инерции во вращающейся системе отсчета 176
11.4. Силы инерции на Земле 177

Глава 12. Линейные колебания 178
12.1 Одномерные свободные колебания 178
12.2. Вынужденные колебания 185
Тест. Тест? Тест!… 187

Часть II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Глава 1. Атомно-молекулярная теория строения вещества 189
1.1. Основные положения атомно-молекулярной теории строения вещества 189
1.2. Взаимодействие атомов и молекул 194
1.3. Тепловое движение атомов и молекул 197
1.4. Агрегатные состояния вещества 198

Глава 2. Тепловое равновесие. Температура 198
2.1. Статистические закономерности 198
2.2. Тепловое равновесие 199
2.3. Свойства равновесного состояния 199
2.4. Температура 200
2.5. Измерение температуры 201
2.6. Уравнение состояния 202
2.7. Среднеквадратичная скорость 203
2.8. Флуктуации 204

Глава 3. Идеальный газ. Термодинамические процессы 205
3.1 Разреженный и идеальный газы 205
3.2. Уравнение состояния идеального газа 206
3.3. Закон Дальтона 209
3.4. Проблемы дыхания на больших высотах и глубинах 210
3.5. Осмотическое давление 211
3.6. Термодинамические процессы и газовые законы 212
3.7. Общий метод решения задач по теме «Газовые законы» и «Процессы» 215
3.8. Уравнение состояния неидеального газа 219

Глава 4. Первый закон термодинамики 219
4.1. Внутренняя энергия 220
4.2. Первый закон термодинамики 220
4.3. Термодинамическая работа 221
4.4. Количество теплоты 223
4.5. Теплоемкость 223
4.6. Первый закон термодинамики и процессы 226
4.7. Теплоемкость жидкостей и твердых тел 228
4.8. Передачи теплоты 229
4.9. Парниковый эффект 231
4.10. Метаболизм 232
4.11. Теплоотдача организма 232

Глава 5. Фазовые переходы вещества 233
5.1. Агрегатные состояния и фазы вещества 233
5.2. Плавление и кристаллизация 234
5.3. Испарение 237
5.4. Насыщенный пар 237
5.5. Конденсация 238
5.6. Кипение 239
5.7 Перегретая жидкость 241
5.8. Фазовые диаграммы 242
5.9. Изотермы фазовых переходов 245
5.10. Замедление фазовых переходов 247

Глава 6. Влажность воздуха 247
6.1 Абсолютная и относительная влажность 247
6.2 Точка росы 248
6.3. Камера Вильсона 249
6.4. Потеря воды при дыхании 250

Глава 7. Поверхностное натяжение 251
7.1 Коэффициент поверхностного натяжения 251
7.2. Поверхностное давление 252
7.3. Смачивание 253

Глава 8. Тепловые двигатели 254
8.1. Обратимый процесс 254
8.2. Второй закон термодинамики 254
8.3. Условия работы теплового двигателя 255
8.4. Цикл Карно 255
8.5. Коэффициент полезного действия 256
8.6. Паровые двигатели 258
8.7. Циклы Отто, Дизеля и Стирлинга 259
8.8. Тепловое загрязнение окружающей среды 260
8.9. Холодильная машина 261
8.10. Тепловой насос 262

Часть III. МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Глава 1. Аэростатика и гидростатика 263
1.1. Объемные и поверхностные силы 263
1.2. Закон Паскаля 264
1.3. Гидравлический пресс 265
1.4. Атмосферное давление 265
1.5. Условие равновесия жидкости и газа 267
1.6. Гидростатическое давление 267
1.7. Закон Архимеда 270
1.8. Условие плавания тела 272
1.9. Воздушные шары и дирижабли 274
1.10. Почему «плавают» облака? 276

Глава 2. Капиллярные явления 277
2.1. Условие равновесия жидкости в тонкой трубке 277

Глава 3. Деформация твердых тел. Тепловое расширение 279
3.1. Внутреннее напряжение 279
3.2. Деформация 280
3.3. Закон Гука 280
3.4. Поперечная деформация 283
3.5. Диаграмма деформации 284
3.6. Деформация при изменении температуры 286
3.7. Сплавы, запоминающие форму 287

Глава 4. Установившееся движение сплошной среды 288
4.1. Закон Бернулли 288
4.2. Уравнение непрерывности 289
4.3. Ветродвигатель 290
4.4. Адиабатическое движение воздуха с постоянной скоростью 291
4.5. Устойчивость атмосферы 292
4.6. Местные ветры — фен и чинук 295
4.7. Подъемная сила 296

Глава 5. Волновое движение в среде. Звук 297
5.1. Волны в упругой среде 297
5.2. Звук в воздухе 298
5.3. Взрыв 299
5.4. Образование ударной волны 299
5.5. Звуковые волны в трубах 300
5.6. Спектральный анализ звука 303

5.7. Белы и децибелы 305
5.8. Слышимый звук 305
5.9. Музыкальные звуки 306
5.10. Волны на воде 308
5.11. Пульсовая волна 309

Часть IV. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 1. Электростатика 310
1.1. Закон Кулона 310
1.2. Электростатическое поле. Напряженность и потенциал поля 315
1.3. Закон Гаусса 325
1.4. Проводники в электрическом поле 328
1.5. Диэлектрики в электрическом поле 333
1.6. Электрическая емкость. Конденсатор 335
1.7. Энергия электрического поля 337
1.8. Электрическая схема, содержащая конденсаторы 339
Тест. Тест? Тест!… 345

Глава 2. Постоянный ток 346
2.1. Закон Ома 346
2.2. Электрохимический элемент. Закон Ома для полной цепи 356
2.3. Правила расчета схем, содержащих резисторы, конденсаторы и источники напряжения 365
2.4. Тепловое действие тока 368
Тест. Тест? Тест!… 374

Глава 3. Магнитное поле 376
3.1. Магнитная индукция. Силы Лоренца и Ампера 377
3.2. Магнитное поле постоянного тока. Закон Био-Савара 385
3.3. Закон Максвелла-Ампера 390
3.4. Поток электромагнитной энергии в электрической цепи 392

Глава 4. Магнитные свойства вещества 395
4.1. Магнитный момент 395
4.2. Диамагнетики и парамагнетики 396
4.3. Ферромагнетики 397

Глава 5. Электрический ток в различных средах 400
5.1. Сверхпроводимость 400
5.2. Электрический ток в электролитах 402
5.3. Электрический ток в вакууме. Диод. Триод 405
5.4. Электрический ток в газах 413
5.5. Молния 423

Глава 6. Полупроводниковые приборы 425
6.1. Электрический ток в полупроводниках 425
6.2. Полупроводниковый диод 428
6.3. Транзистор 430
6.4. Необъятные горизонты микроэлектроники 433
6.5. Компьютер — инструмент познания 439

Глава 7. Электромагнитная индукция 441
7.1. Открытие Фарадея 441
7.2. Поток магнитной индукции 442
7.3. Универсальный закон электромагнитной индукции 442
7.4. Электрический двигатель и генератор 449

7.5. Индуктивность. Самоиндукция 452
7.6. Переходной процесс в *RL*-цепи 456
7.7. Взаимная индуктивность 459

Глава 8. Электромагнитные колебания 460
8.1. Свободные электромагнитные колебания 460
8.2. Генераторы электромагнитных колебаний 466
8.3. Вынужденные колебания в последовательном контуре 468
8.4. Трансформатор 472
8.5. Вынужденные колебания в параллельном контуре 475
8.6. Трехфазный ток 478
8.7. Трехфазный асинхронный двигатель 480
Тест. Тест? Тест!... 483

Глава 9. Электромагнитные волны 484
9.1. Основы теории электромагнитных волн 484
9.2. Эффект Доплера 493
9.3. Радио и телевидение 495
9.4. Интерференция 501
9.5. Интерференция при отражении от металлической поверхности 505
9.6. Принцип Гюйгенса-Френеля. Зоны Френеля 509
9.7. Дифракция 510
9.8. Дифракционная решетка 514

Часть V. ОПТИКА

Глава 1. Законы геометрической оптики 517
1.1. Геометрическая оптика 517
1.2. Отражение и преломление света 519
1.3. Радуга и глория 529

Глава 2. Формирование оптического изображения 531
2.1. Оптическое изображение 531
2.2. Тонкие линзы 535
2.3. Оптические системы 543
2.4. Оптические приборы 550
Тест. Тест? Тест!... 562

Часть VI. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Глава 1. Основы теории относительности 563
1.1. Принцип относительности Эйнштейна 563
1.2. Преобразование Лоренца 565
1.3. Релятивистские импульс и энергия 575
1.4. Масса системы частиц 577
1.5. Рождение новых частиц 578
1.6. Релятивистская динамика 582
Тест. Тест? Тест!... 584

Часть VII. АТОМНАЯ ФИЗИКА 586

Глава 1. Начало квантовой механики 586
1.1. Открытие квантовой физики 586
1.2. Фотон. Фотоэффект 589
1.3. Планетарная модель атома 592
1.4. Первая квантовая теория атома — атом Бора 593
1.5. Развитие квантовой механики 597

Глава 2. Прикладная атомная физика 600
2.1. Спектры испускания и поглощения 600
2.2. Ядерный магнитный резонанс (ЯМР) 601
2.3. Лазеры 602
2.4. Применение лазеров 606

Часть VIII. ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

Глава 1. Открытие радиоактивных элементов и элементарных частиц 610
1.1. Открытие радиоактивных элементов 610
1.2. Радиоактивный распад атомных ядер 613
1.3. Реакции деления тяжелых ядер 617

Глава 2. Ядерная энергетика 619
2.1. Цепная реакция деления 619
2.2. Ядерные реакторы 620
2.3. Термоядерные реакции 627
2.4. Биологические эффекты радиации 629
2.5. Ядерное и термоядерное оружие 631

Часть IX. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Глава 1. Мир элементарных частиц 634
1.1. Космические лучи 634
1.2. Открытие мюонов и пионов 636
1.3. Нейтрино 638
1.4. Физика высоких энергий 642
1.5. Классификация частиц и взаимодействий 644
1.6. Открытие странных частиц 646
1.7. Симметрия слабых взаимодействий 648

Глава 2. Кварковая модель строения вещества 650
2.1. Кварки 650
2.2. Квантовая хромодинамика (КХД) 654
2.3. В поисках единой теории 657

Дополнение I. МЕХАНИКА

Глава 1. Элементы математического анализа 664
1.4. Прямая и плоскость в пространстве 664
1.5. Элементарные дифференциальные уравнения 667

Глава 4. Законы Ньютона 671

Глава 5. Законы изменения и сохранения импульса системы частиц 672

Глава 6. Законы изменения и сохранения полной энергии системы частиц 673

Глава 8. Закон всемирного тяготения 673

Глава 10. Статика 674

Глава 11. Движение в неинерциальных системах отсчета 677
11.2. Силы инерции в поступательно движущейся системе отсчета 677
11.4. Силы инерции на Земле 681
11.5. «Гравитационный удар» как способ изменения гелиоцентрической скорости 682

Глава 12. Линейные колебания 684

Глава 13. Движение твердого тела 685
13.1. Кинематика твердого тела 685
13.2. Динамические переменные твердого тела 688
13.3. Уравнения движения твердого тела 689
13.4. Движение твердого тела вокруг неподвижной оси 690

13.5. Плоскопараллельное движение твердого тела 692
13.6. Быстрый волчок 694
13.7. Гироскоп 695

Дополнение II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Глава 2. Тепловое равновесие. Температура 698

Глава 5. Фазовые переходы вещества 699
5.11. Равновесие фаз растворителя 699

Глава 8. Тепловые двигатели 700
Глава 9. Энтропия 701
9.1. Количество теплоты и приращение энтропии 701
9.2. Энтропия 702
9.3. Энтропия и вероятность 705
9.4. Третий закон термодинамики 706
9.5. Открытые системы 707
9.6. Биологическая эволюция 707
9.7. Геном человека 710
9.8. Проблемы биотехнологии 712

Дополнение III. МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Глава 1. Аэростатика и гидростатика 714
1.11. Лунные приливы 714

Глава 2. Капиллярные явления 715
2.2. Давление пара над мениском 715

Глава 4. Установившееся движение сплошной среды 716

Глава 5. Волновое движение в среде. Звук 719
5.5. Звуковые волны в трубах 719
5.12. Летучие локаторы 721

Дополнение IV. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 1. Электростатика 724
1.1. Закон Кулона 724
1.4. Проводники в электрическом поле 724
1.5. Диэлектрики в электростатическом поле 726

Глава 3. Магнитное поле 729
3.1. Магнитная индукция. Силы Лоренца и Ампера 729
3.3. Закон Максвелла-Ампера 731

Глава 4. Магнитные свойства вещества 732
4.1. Диамагнетики и парамагнетики 732

Глава 5. Электрический ток в различных средах 735

Глава 7. Электромагнитная индукция 737
7.3. Универсальный закон электромагнитной индукции 737
7.5. Индуктивность. Самоиндукция 740
7.8. Электромеханика 741

Глава 8. Электромагнитные колебания 750
8.2. Генераторы электромагнитных колебаний 750
8.3. Вынужденные колебания в последовательном контуре 753
8.8. Представление уравнений Кирхгофа в комплексной форме 753

Глава 9. Электромагнитные волны 760
9.1. Основы теории электромагнитных волн 760

9.4. Интерференция 762
9.7. Дифракция 763

Дополнение V. ОПТИКА

Глава 1. Законы геометрической оптики 768
1.2. Отражение и преломление света 768
1.4. Отражение и преломление в анизотропной среде 769

Глава 3. Основы голографии 776
3.1. Голография 776
3.2. Радар бокового обзора 780

Дополнение VI. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Глава 2. Релятивистская динамика 785
2.1. Преобразование Лоренца электромагнитного поля 785

Глава 3. Ускорители заряженных частиц 787
3.1. Множественные процессы 787
3.2. Циклотрон 787
3.3. Бетатрон 788
3.4. Автофазировка 789
3.5. Электронный синхротрон 790
3.6. Фазотрон (синхроциклотрон) 791
3.7. Синхрофазотрон 791
3.8. Жесткая фокусировка 792
3.9. Ускорители на встречных пучках 792
3.10. Накопительные кольца 793

Глава 4. Эффекты теории относительности в электродинамике 794
4.1. Электродинамика движущихся сред 794
4.2. Преобразование поляризации и намагниченности 797
4.3. Материальные уравнения в движущейся среде 797
4.4. Излучение релятивистских частиц 799
4.5. Синхротронное излучение 803
4.6. Ондуляторное излучение 806
4.7. Черенковское излучение 807

Глава 5. Общая теория относительности 808
5.1. Гравитационная и инертная массы 809
5.2. Принцип эквивалентности 809
5.3. Основные идеи теории тяготения 810
5.4. Проверка теории Эйнштейна 811

Дополнение VII. АТОМНАЯ ФИЗИКА

Глава 1. Атомная физика 813
1.6. «Парадоксы» квантовой физики 813
1.7. Квантовая электродинамика 816

Глава 2. Прикладная атомная физика 818
2.4. Квантовая теория вещества 818
2.5. Квантовая жидкость — жидкий гелий 820

Ответы, указания, решения 824

Вопросы и блиц-ответы 832

Справочные данные 842

Предметный указатель 844

Что читать? 858

Посвящаю моим внучкам Наташе и Оле

Предисловие

Эта книга предназначена для учащихся средних школ, абитуриентов и преподавателей. В ее основу положены материалы лекций, которые в течение ряда лет читались учащимся физико-математической школы им. А.Н. Колмогорова при Московском Государственном Университете им. М.В. Ломоносова.

В настоящее время наука представляет собой главный компонент культуры нашей цивилизации. Достижения науки привели к созданию аэрокосмической промышленности, атомной энергетики, микроэлектроники, инженерной генетики. Впервые новые орудия труда — компьютеры — вторглись в сферу умственной деятельности человека. Бурный рост науки, новой техники и технологии привели к увеличению производительности труда — главного показателя прогресса экономики. Научно-технический потенциал стал решающим фактором международного сотрудничества.

В этой новой научно-технической революции физика играет ключевую роль. Основой физики являются экспериментальные и теоретические исследования явлений Природы. Теоретический анализ экспериментов, проверенный и подтвержденный независимыми исследователями, становится основой объективного, истинного знания. На основе успехов фундаментальных исследований идет непрерывный поиск практических приложений новых открытий, возникают новые отрасли промышленности. Созданы новые системы связи и транспорта, сблизившие людей и континенты, начато освоение космического пространства, осуществлено искусственное воспроизведение биологических особей. Физические методы исследования заняли доминирующее положение в биофизике, молекулярной биологии, квантовой химии, медицине, геологии. Такие «абстрактные» разделы физики, как квантовая механика и теория относительности, позволили предсказать поведение огромного числа физических систем — от биологических молекул до Галактик. В последнее столетие сделаны поражающие воображение открытия на переднем крае науки — в физике элементарных частиц. Мы становимся свидетелями сотворения нового мира, доступного ранее лишь писателям-фантастам. Однако страх человечества перед достижениями собственного интеллекта — футуршок — стал осознаваться как мировая проблема.

Не менее важны другие аспекты физики, которые должны отражать гуманитарный потенциал естественных наук, привнести образное эмоциональное и ассоциативное мышление, воспитать ценностные ориентиры. Рациональный научно-естественный метод все более проникает в гуманитарную сферу, формирует целостное представление о природе и обществе, способствует признанию приоритета человека и общечеловеческих ценностей. Курс физики должен внести вклад в формирование навыков адеват-

ного поведения в окружающем мире, формировать представления, необходимые для понимания явлений природы и технических приложений физических законов в бытовых устройствах, экологии человека, критического восприятия антинаучных теорий.

Наука является конструктивной альтернативой религии, представляющие собой синонимы понятий разум и вера. Научная теория — это не божественная истина. Ученый либо готов ответить на возражения, либо отказаться от теории, не объясняющей результаты реального эксперимента. Научная работа способствует развитию разума, свободного выбирать множество путей достижения истины.

В то же время вместо старых мифов о сотворении мира появляются новейшие суеверия и псевдорелигиозные культы, соединяющие иррациональный мистицизм и терминологию, заимствованную из точных наук, цель которых интеллектуальное порабощение одурманенных «посвященных». Если общество перестанет отличать научные факты от суеверий, наступит всеобщий хаос. Родственная проблема связана с бурным расцветом лженауки. «Больше одной истины быть не может» гласит латинский афоризм. Однако в нашей стране возникло 120 «академий», штампующих докторов наук и академиков с «большой дороги».

Новым фактором является та скорость, с какой растет объем новых знаний. Сейчас объем наших знаний удваивается каждые пять лет. Знания становятся организующей основой всего общества. Возрастает доля профессий, требующих высокой квалификации. Поэтому важнейшей задачей всей системы образования становится формирование личности, способной ориентироваться в потоке новой информации и критически относящейся к утверждениям, которые выходят за рамки научного анализа. Тот, кто хочет отвечать новым требованиям, должен, прежде всего, делать ставку на один решающий фактор: учебу в течение всей жизни. Знание — еще более мобильный фактор производства, чем капитал или рабочая сила. Переход к «обществу знаний» определяет необходимость трансформации современного образования в образование непрерывное.

Содержание этой книги соответствует программам по физике и математике, изучаемым в средней школе. Достаточно полно обсуждаются разделы программы, которые, как показала практика преподавания в школе им. А.Н. Колмогорова и приемных экзаменов на естественные факультеты МГУ, наиболее сложны для учащихся.

Наша цель — помочь читателю освоить материал программы, научить активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи и приобрести уверенность в самостоятельной работе. Для этого необходимо ясно представлять смысл физических понятий, изучить физические законы и овладеть математикой в рамках программы средней школы и математической культурой — техникой тождественных преобразований.

Каждый раздел книги содержит полное изложение теоретического материала, примеры и задачи. Здесь же можно найти материал, связанный с историей возникновения новых понятий, терминов и открытий выдающихся ученых — людей умственного труда, первооткрывателей, увлеченных творческим созидательным трудом, приносящим радость познания. Вторая часть книги включает Дополнения, содержащие более «сложный» материал, отражающий прикладные и научные аспекты физики.

В книге приведены решения более 450 задач и примеров. Некоторые из них предлагались на вступительных экзаменах по физике в различных вузах, другие — составлены так, чтобы заинтересовать читателя, помочь ответить на многочисленные «почему», возникающие при знакомстве с различными явлениями природы и техническими приложениями физики, ввести в мир, где физические законы отражают не математические символы, а реальность.

Решение задач — необходимый элемент изучения физики. Следует осознать, что решение любой задачи — результат решения системы уравнений. Однако в курсе физики изучают не уравнения, а физические законы, представляющие собой математическое описание явлений природы. Поэтому, изучив «теорию», невозможно не решить задачу. Вы записываете в математической форме физические законы, «управляющие» описанным в задаче явлением, несколько определений и конкретные следствия условия задачи, пока не получите систему уравнений, содержащую то же число неизвестных. Теперь остается найти корни системы уравнений — это и есть решение задачи. *Очевидно, задачи и теория — единое целое.*

Доктор физико-математических наук,
профессор Ю.Г. Павленко

Часть I. МЕХАНИКА

Глава 1. Элементы математического анализа

1.1. Скаляры и векторы в евклидовом пространстве

Физика, как и любая другая наука естествознания, основывается на наблюдениях. При описании различных явлений физики вынуждены вводить новые понятия. Следующий этап научного исследования — поиск причинно-следственных связей. т.е. закономерностей, лежащих в основе явления. Высшая ступень познания — математическая формулировка закона природы.

Какие же основные понятия математики используются в физике? В школьном курсе достаточно использовать объекты двух типов. Величины первого типа определяются только своими числовыми значениями в соответствующей системе единиц — их называют *скалярами*. Например, число молекул в некотором объеме, масса, температура, работа, энергия, путь, пройденный телом, плотность являются скалярами. Величины второго типа характеризуются числовым значением и направлением в пространстве — это *векторы*. Сила, перемещение, скорость, ускорение, напряженность электрического и магнитного полей являются векторами. Векторы изображаются в виде направленных отрезков (стрелок). Стрелка указывает направление вектора, а длина стрелки дает числовое значение вектора в выбранном масштабе. Определим теперь понятия системы координат и вектора.

1.1.1. Координаты. Евклидово пространство. Первичным понятием геометрии является понятие точки. Рассмотрим пространство М, которое состоит из точек. Каждой точке P некоторого подмножества $G \in$ М поставим в соответствие n вещественных чисел $(x_1, x_2, ..., x_n) = \vec{x}$, называемых *локальными координатами* точки. Соответствие $P \to \vec{x}$ должно взаимно однозначным отображением множества точек из G на подмножество N координатного пространства $\vec{R}^n$. Пусть (x_1,x_2,x_3), $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ — координаты точек P_1 и P_2. Если расстояние между ними задать выражением $(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$, то пространство называется *евклидовым*.

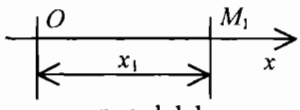


рис. 1.1.1

1.1.2. Система координат. Для задания положения точки, лежащей на прямой линии, выбирают произвольно начало отсчета (точка O на рис. 1.1.1), единицу масштаба и одно из двух возможных направлений в качестве поло-

жительного. Такая прямая называется *координатной*, или *числовой* осью. Полупрямая, идущая в положительном направлении, называется положительной полуосью; полупрямая, идущая в противоположном направлении, – отрицательной полуосью Координатой точки M_1, находящейся на числовой оси называют расстояние x_1, взятое от начала отсчета, взятое со знаком плюс, если точка лежит на положительной полуоси, или со знаком минус, если точка лежит на отрицательной полуоси. Для того чтобы задать числами положение точки на плоскости, выбирают на ней две координатные оси, пересекающиеся, вообще говоря, под произвольным углом (разумеется, отличным от 0 и 180°). Мы будем использовать две взаимно перпендикулярные числовые оси, образующие, как говорят, *декартову*, или прямоугольную, систему координат. Одну из осей назовем осью x, другую — осью y. Точку пересечения осей называют началом координат. Начало координат является началом отсчета каждой из координатных осей (рис. 1.1.2).

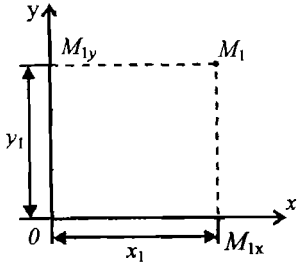


рис. 1.1.2

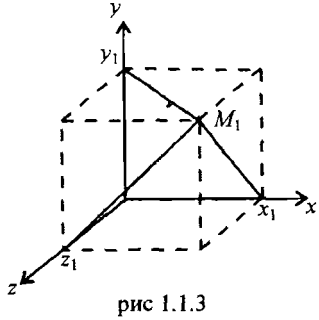


рис 1.1.3

Пусть M_1 — произвольная точка на плоскости. Спроектируем точку на координатные оси, т. е. проведем через M_1 перпендикуляры к прямым Ox и Oy и обозначим основания этих перпендикуляров соответственно M_{1x} и M_{1y}. Координатами x_1 и y_1 точки M_1 называют координаты точек M_{1x} и M_{1y}.

Положение точки M_1 в пространстве определяется координатами x_1, y_1, z_1 оснований перпендикуляров, опущенных из точки на три взаимно перпендикулярные координатные оси x, y, z. На рис.1.1.3 каждый перпендикуляр лежит в плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной соответствующей оси.

1.1.3. Определение вектора. Рассмотрим множество элементов, каждый из которых образован упорядоченными тройками чисел. Поскольку далее эти элементы станут векторами[1], то удобно обозначить их буквами со стрелкой над ними:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \ldots .$$

[1] Термин «вектор» (от лат. *vector* — несущий) ввел в 1845 г. выдающийся ирландский математик и физик У.Р. Гамильтон (1805—1865)

Способ, с помощью которого можно задать тройки чисел, зависит от конкретной задачи. Например, изучается распределение трех признаков организмов или каких-то предметов. Наличию признака соответствует число 1, а отсутствию — 0. Мы получим соответствие между предметами и элементами $\vec{a} = (0, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ и т. д. в пространстве признаков. Другая задача — определение численности трех возрастных групп по состоянию на 1 января каждого года — приводит к множеству элементов $\vec{a}$, $\vec{b}$,... Упорядоченные наборы чисел (не обязательно троек чисел) возникают естественным образом при описании протекания эпидемий, химических реакций, различных черт характера и т.д.

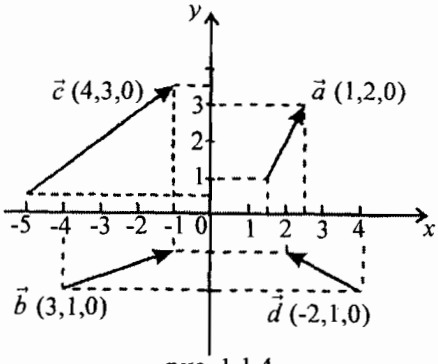


рис. 1.1.4

Нас будет интересовать способ описания направленных отрезков — стрелок расположенных (для упрощения рассмотрения) в плоскости. Введем прямоугольную систему координат, оси x и y которой лежат в указанной плоскости, а ось z проведена перпендикулярно к ней. Положительное направление оси z выбирается по правилу буравчика: буравчик движется в положительном направлении оси z, если его вращать против направления движения часовой стрелки — от оси x к оси y.

Поставим теперь в соответствие стрелке тройку чисел $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ по правилу: число a_x равно разности x-координат конца и начала стрелки, число a_y равно разности начала y-координат стрелки и т. д. Повторяя эту процедуру для каждой стрелки, получим множество элементов (рис. 1.1.4)

$$\vec{a} = (a_x, a_y, 0),\ \vec{b} = (b_x, b_y, 0), \dots .$$

Назовем элемент $\vec{c}$ суммой элементов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, если вектор $\vec{c}$ определен по правилу

$$c_x = a_x + b_x,\ c_y = a_y + b_y,\ c_z = a_z + b_z, \tag{1.1.1}$$

произведением элемента $\vec{a}$ на произвольное число λ, если определен вектор $\vec{g} = \lambda\vec{a}$ по правилу

$$g_x = \lambda a_x,\ g_y = \lambda a_y,\ g_z = \lambda a_z. \tag{1.1.2}$$

Понятие вектор вводится согласно определению: вектор — элемент линейного пространства.

Линейным векторным пространством V, называется множество элементов любой природы, в котором определены операции сложения и умножения на числа, удовлетворяющие следующим условиям.

Сложение коммутативно и ассоциативно:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}$.

Умножение на скаляр дистрибутивно и ассоциативно:

3. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

4. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$; $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

5. Для любого элемента $\vec{a}$ из V существует элемент $-\vec{a}$ из V, для которых

$$\vec{a}+(-\vec{a})=0.$$

6. Существует такой элемент $\vec{0}$ из V, что $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ для любого $\vec{a}$ из V.

7. Умножение на скаляр 1 не изменяет любой вектор: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Векторное исчисление впервые было изложено Д. Максвеллом в «Трактате об электричестве и магнетизме» (1873 г.) в связи с необходимостью «перевода» результатов экспериментальных работ М. Фарадея на язык математических символов. Благодаря этой работе векторный анализ стал разделом математики. Выдающийся американский физик-теоретик Уиллард Дж. Гиббс овладел методом Максвелла и создал, ставший классическим, курс векторного анализа (1879—84 гг.). Одновременно в 1882—85 гг. знаменитый английский физик-теоретик О. Хевисайд развил идеи Максвелла о применении векторов в электродинамике. С 1891 г. он опубликовал серию статей — первый напечатанный курс векторного анализа.

Пример 1.1.1. Почему вращение тела нельзя отобразить вектором ?

Положим книгу на стол и введем систему координат xyz с началом в «центре» книги. Оси координат направим перпендикулярно трем плоскостям: ось z вверх от обложки, ось x — в правую сторону, перпендикулярно боковому срезу, ось y — перпендикулярно верхнему срезу книги. Поверните книгу вокруг оси x в *положительном направлении*, вращая ее против направления движения часовой стрелки на угол равный 90°. Этому повороту поставим в соответствие «вектор» $\vec{n}_1$, параллельный оси x. Аналогичным образом зададим «векторы» $\vec{n}_2$ и $\vec{n}_3$. Теперь убедимся, что в результате двух последовательных поворотов на углы 90°, задаваемых «векторами» $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ и «векторами» $\vec{n}_2$, $\vec{n}_1$, конечные положения книги различаются. Следовательно, не выполняются условия 1 и 2.

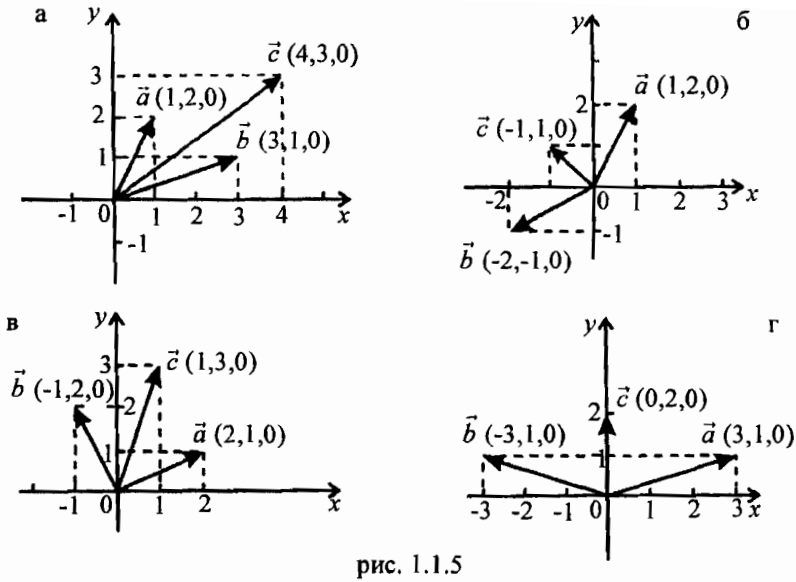


рис. 1.1.5

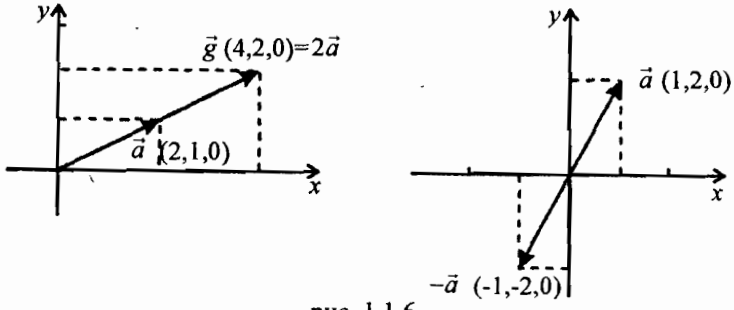


рис. 1.1.6

На рис. 1.1.5 и 1.1.6 изображены векторы $\vec{c}$ и $\vec{g}$, полученные в результате введенных операций. Применяя теорему Пифагора, найдем длину вектора (см. рис. 1.1.7):

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

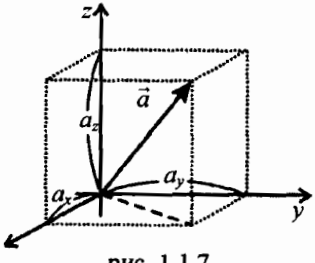


рис. 1.1.7

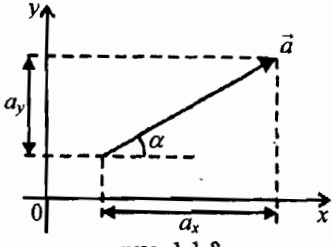


рис. 1.1.8

В дальнейшем абсолютную величину (длину) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ вектора $\vec{a}$ будем обозначать той же буквой без стрелки: $a \equiv |\vec{a}|$. Величина вектора – положительно определенное число. Три числа (a_x, a_y, a_z) называют проекциями вектора на оси x, y, z.

Нетрудно заметить, что проекция (от лат. *projectio* — бросание вперед) вектора на числовую ось равна произведению абсолютной величины вектора на косинус угла между положительным направлением оси и самим вектором. Для вектора $\vec{a}$ (a_x, a_y, a_z), изображенного на рис. 1.1.8, $a_x = a\cos\alpha$, $a_y = a\sin\alpha$, $a_z = 0$. Все проекции нулевого вектора $\vec{c} = 0$ равны нулю: $c_x = c_y = c_z = 0$. Умножая вектор на число $\lambda = -1$, получим новый вектор $\vec{g} = -\vec{a}$, который называют обратным вектору $\vec{a}$ (рис. 1.1.6).

Если два вектора равны друг другу, т. е. $\vec{a} = \vec{b}$, то это означает, что выполняются три условия:

$$a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z$$

Поэтому, в частности, из второго закона Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ следует не одно, а три уравнения:

$$ma_x = F_x,\ ma_y = F_y,\ ma_z = F_z.$$

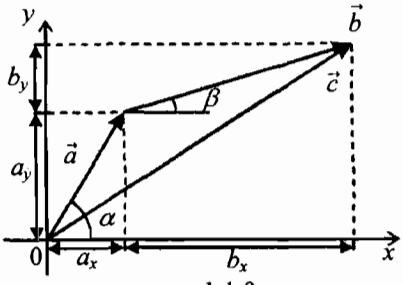


рис. 1.1.9

Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют равными, если они лежат на параллельных прямых, имеют одинаковое направление и длину. Заметим, что если $\vec{a} = \vec{b}$, то величины векторов одинаковы: $a = b$. Обратное заключение, конечно, недопустимо. Кроме того, понятия «больше», «меньше» применимы только к величинам векторов, но не к самим векторам.

1.1.3. Геометрический смысл суммы векторов. На рис. 1.1.9 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ имеет проекции $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z = 0$. Следовательно, сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть вектор $\vec{c}$, который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$ (правило треугольника).

По определению абсолютная величина вектора $\vec{c}$ равна $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$.

Учитывая, что векторы $\vec{a} = (a\cos\alpha, a\sin\alpha, 0)$, $\vec{b} = (b\cos\beta, b\sin\beta, 0)$, найдем

$$c^2 = (a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 = a^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta) + b^2. \qquad (1.1.3)$$

Этим соотношением, связывающим стороны $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторного треугольника, мы доказали теорему косинусов. Угол между вектором $\vec{c}$ и осью x определяется соотношениями

$$\cos\gamma = \frac{c_x}{c} = \frac{1}{c}(a\cos\alpha + b\cos\beta), \qquad \sin\gamma = \frac{c_y}{c} = \frac{1}{c}(a\sin\alpha + b\sin\beta)$$

Складывая полученный вектор $\vec{c}$ с некоторым вектором $\vec{d}$ аналогичным образом, получим сумму трех векторов. Продолжая этот процесс, можно определить сумму любого числа векторов. При этом компоненты результирующего вектора равны суммам компонент слагаемых векторов по соответствующим осям. Из этого построения следует полезный рецепт для нахождения величины и направления вектора $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \ldots$: достаточно найти сумму компонент слагаемых векторов по осям x, y и z.

Следствие. Сумма векторов $\vec{a} + \vec{b} + \ldots$ равна нулю, если равны нулю суммы компонент слагаемых векторов по осям x, y, z.

$$a_x + b_x + \ldots = 0, \qquad a_y + b_y + \ldots = 0, \qquad a_z + b_z + \ldots = 0. \qquad (1.1.4)$$

Соотношение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 1.1.9) можно понимать как разложение вектора $\vec{c}$ на два составляющих его вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1.1.4. Вычитание векторов. Разность $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно определить как результат сложения векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$. Вектор $\vec{d} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$. На рис.1.1.10 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$.

Пример 1.1.2. Упругое столкновение частицы с плоскостью. До столкновения скорость частицы равна $\vec{v}_1$, после столкновения $-\vec{v}_2$. Приращение скорости $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ направлено перпендикулярно плоскости (рис. 1.1.11).

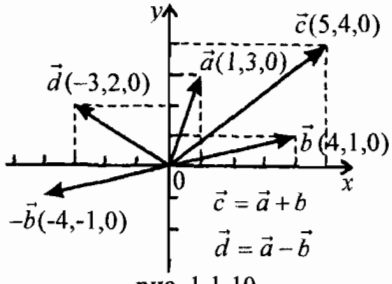


рис. 1.1.10

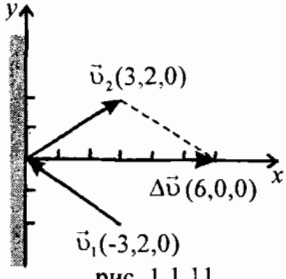


рис. 1.1.11

1.1.5. Единичный вектор. Поясним понятие единичного вектора $\vec{e}$. Абсолютная величина этого вектора равна единице. Если вектор имеет направ-

ление вектора $\vec{e}$, то вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде $\vec{a} = a\vec{e}$. Единичный вектор $\vec{e}$, параллельный вектору $\vec{a}$, равен $\vec{e} = \vec{a}/a$. Направляя, например, единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ параллельно осям x, y, z, можно записать вектор $\vec{a}$ в виде $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

Вектор называют постоянным, если в любой момент времени его длина и направление остаются неизменными: $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$. Очевидно, компоненты постоянного вектора не зависят от времени. В общем случае длина вектора и его направление в пространстве могут изменяться с течением времени. Компоненты такого вектора являются функциями времени.

Возникает вопрос: какое отношение имеют введенные здесь векторы — упорядоченные тройки чисел — к реальным физическим величинам, измеряемым в экспериментах? Ответ состоит в том, что если в природе существуют объекты, определяемые тремя числами, для которых выполняются соотношения (1.1.1) и (1.1.2) и условия принадлежности к линейному пространству, то их, естественно, назвать векторами. Более того, некоторые скалярные величины: работа силы на некотором перемещении; магнитный поток, пронизывающий плоскость, и другие — можно связать со скалярным произведением векторов.

1.2. Скалярное и векторное произведения

1.2.1. Скалярное произведение. Из двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно образовать скаляр по правилу:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (1.1.5)$$

Это выражение называется скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается одним из символов $\vec{a}\,\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и $(\vec{a}\,\vec{b})$. Следовательно, $\vec{a}\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

По определению скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$,

2) $\lambda\vec{a}\cdot\vec{b} = \lambda\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$,

3) $(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

Длина вектора или его модуль связаны со скалярным произведением соотношением

$$a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,.$$

Скалярное произведение вектора на самого себя часто обозначают символом $\vec{a}^2$. Следовательно, $a^2 = \vec{a}^2$, $a = \sqrt{\vec{a}^2}$. Скалярное произведение двух единичных векторов $\vec{e}\cdot\vec{e} = 1$. Заметим также, что формула (1.1.3) эквивалентна соотношениям

$$c^2 = \vec{c}^{\,2} = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^{\,2} = a^2 + 2\vec{a}\vec{b} + b^2.$$

Скалярное произведение имеет простой геометрический смысл. Возьмем в качестве векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы, изображенные на рис. 1.1.9. В полярных координатах $\vec{a} = (a\cos\alpha,\ a\sin\alpha,\ 0)$, $\vec{b} = (b\cos\beta,\ b\sin\beta,\ 0)$. Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = a\cos\alpha\cdot b\sin\beta + a\sin\alpha\cdot b\sin\beta = ab\cos(\alpha-\beta). \qquad (1.1.7)$$

Следствие. Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен

$$\cos(\alpha-\beta) = \vec{a}\vec{b} / ab.$$

Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то они взаимно перпендикулярны. Например, на рис. 1.1.5 *в* можно определить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендик0улярны друг другу. Действительно, в соответствии с (1.1.5): $\vec{a}\cdot\vec{b} = (2)(-1) + (1)(2) = 0$.

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ и единичного вектора $\vec{i}$, направленного по оси *x*, равно проекции вектора $\vec{a}$ на ось *x*: $\vec{a}\cdot\vec{i} = a_x$.

Задача 1.2.1. Точка *N* находится на отрезке *OC*, точка *P* принадлежит сфере радиусом а ($a < R$) с центром в точке *C*. Вектор *OC* обозначим буквой $\vec{R}$, вектор *CP* на поверхности сферы — $\vec{a}$. Вектор *NC* равен $\alpha\vec{R}$, где α — постоянный коэффициент. Образуем векторы $\vec{s}_{OP} = \vec{R} + \vec{a}$, $\vec{s}_{NP} = \alpha\vec{R} + \vec{a}$ (рис. 1.2.1). Найдите значение α, при котором отношение длин векторов $\vec{s}_{OP}$ и $\vec{s}_{NP}$ постоянно.

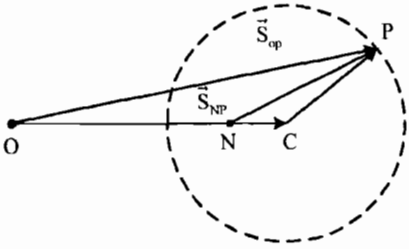


рис. 1.2.1

Решение. В этой задаче приведено неизвестное многим читателям определение сферы. Образуем квадраты векторов:

$$\vec{s}_{OP}^{\,2} = R^2 + 2\vec{R}\vec{a} + a^2,\ \vec{s}_{NP}^{\,2} = \alpha^2 R^2 + 2\alpha\vec{R}\vec{a} + a^2 = \alpha(\alpha R^2 + 2\vec{R}\vec{a} + a^2/\alpha).$$

Тогда очевидно, что $\alpha = (a/R)^2$. Этот результат позволил У. Томсону (с 1892 г. лорд Кельвин) найти решение задачи определения электрического поля, создаваемого системой заряд — металлическая сфера (см. IV. 1.4).

1.2.2. Векторное произведение. Из двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно образовать новый вектор

$$\vec{c} = (c_x,\ c_y,\ c_z),$$

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y,\ \ c_y = a_z b_x - a_x b_z,\ \ c_z = a_x b_y - a_y b_x. \qquad (1.2.8)$$

Эта операция называется векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается одним из символов $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$. Обозначения для скалярного и векторного произведений ввел американский физик-теоретик Д.У. Гиббс (1839—1903). В терминах векторного произведения выражаются момент силы, силы Ампера и Лоренца, вектор потока электромагнитной энергии и др.

Еще раз подчеркнем, что, говоря о векторе, мы всегда имеем в виду его компоненты. Вектор, в отличие от скаляра, определяется тремя числами. Поэтому такие операции как сложение, вычитание, скалярное и векторное произведения сводятся к привычным действиям с компонентами.

1.3. Производная и интеграл

1.3.1. Функция. При описании явлений природы и технических устройств мы встречаемся с такой ситуацией, когда значения некоторой величины y зависят от значений другой величины x. Мы говорим, что y представляет собой функцию (от лат. *functio* —исполнение, осуществление) независимой переменной x. Пусть каждому числу x из множества E поставлено в соответствие число y, обозначаемое $y = f(x)$. Тогда говорят, что на множестве E задана функция $y = f(x)$. Термин «поставлено в соответствие» означает, что указан способ, по которому для каждого $x \in E$ находится значение $y = f(x)$.

1.3.2. Производная функции. Рассмотрим задачу: задана функция $y = x^2/2R$; требуется найти уравнение касательной к кривой в точке x_0. Координаты точки касания $(x_0, y_0 = x_0^2/2R)$. Касательная к кривой — это прямая, имеющая с кривой только одну общую точку $(x_0, y_0 = x_0^2/2R)$. Уравнения этой прямой

$$y(x) = y_0 + k(x - x_0), \tag{1.3.1}$$

где k — угловой коэффициент или «наклон», представляющий собой тангенс угла между прямой и осью x. Для определения k найдем вначале наклон секущей k_c, проходящей через две точки параболы — точку $A(x_0, y_0)$ и точку $C(x_1, y_1)$, где $x_1 = x_0 + \Delta x$, и $y_1 = y(x_0 + \Delta x)$. Обозначим приращение функции символом Δy. Согласно определению приращения функции

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) =$$
$$= (1/2R)(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) - x_0^2/2R = x_0\Delta x/R + \Delta x^2/2R.$$

Из рис. 1.3.1 следует, что тангенс угла наклона секущей к оси x равен

$$k_c = \frac{\Delta y}{\Delta x} = x_0/R + \Delta x/2R.$$

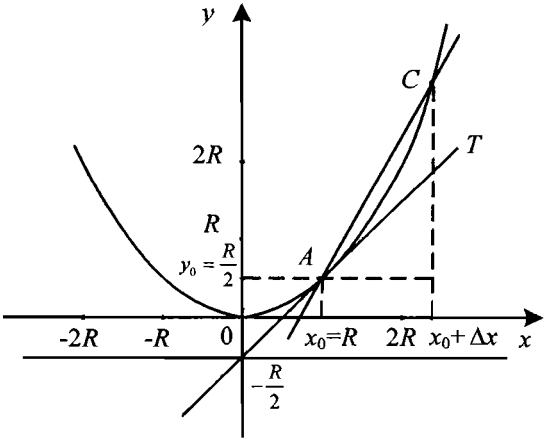


рис. 1.3.1

Очевидно, что чем ближе точка C к точке A, тем ближе секущая AC к касательной AT. Поэтому тангенс угла наклона касательной k равен пределу, к которому стремится тангенс угла наклона секущей k_c при стремлении точки С к точке A. Это утверждение можно записать в виде

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1.3.2)$$

Следовательно, $k = x_0/R$. Этот предел имеет специальное название: *производная функции*. Мы вычислили производную функции $y = x^2/2R$ в точке x_0. На рис 1.3.1 изображена касательная к параболе в точке $x_0 = R$. В произвольной точке x производная функции $y = x^2/2R$ равна x/R.

Производная любой непрерывной функции равна пределу отношения приращения функции к приращению независимой переменной Δx при стремлении Δx к нулю.

Раздел математики, в котором изучаются производные, называется *дифференциальным исчислением*. Оформление дифференциального исчисления в самостоятельную математическую дисциплину связано с именами выдающихся ученых — И. Ньютона (1643—1727) и Г.В. Лейбница (1646—1716). Первые результаты в этой области Ньютон получил в 1665 г. и опубликовал их в 1711 г. Лейбниц пришел к тем же результатам в 1675 г., но опубликовал из значительно раньше в 1684 г. Он придавал большое значение проблеме обозначений и терминологии в математике.

Лейбниц ввел краткий символ операции перехода к пределу — мы теперь используем простое обозначение для производной и произносим «д-игрек по д-икс»:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}. \qquad (1.3.3)$$

Главные заслуги в дальнейшем развитии дифференциального исчисления, как и всего математического анализа, принадлежат Л. Эйлеру (1707—1783). Список трудов Эйлера содержит более 850 названий.

Согласно Лейбницу производную функции $f(x) = x^2/2R$ следует записать в виде $df/dx = x/R$.

Большинству физиков, математиков и инженерам приходится вычислять, в основном, производные элементарных функций. Для будущих физиков и инженеров необходимо запомнить производные функций из приводимой ниже таблицы.

Функция $y(x)$	x^n	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$ctgx$	e^x	$\ln x$	a^x
Производная	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$1/\cos^2 x$	$-1/\sin^2 x$	e^x	$1/x$	$a^x \ln a$

Соотношение (1.3.3) является первой производной функции. Производная функции $g(x) = dy/dx$ называется второй производной функции $y(x)$:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Читаем — «д два игрек по д икс дважды». В случае рассмотренной выше параболы $y = x^2/2R$ имеем $d^2y/dx^2 = 1/R$.

Пример 1.3.1. Известно основное свойство или определение параболы: парабола является геометрическим местом точек равноудаленных от фокуса $F(0, R/2)$ и от *директриссы* — прямой $y = -R/2$ (рис. 1.3.1). Проведем касательную через точку $x_0 = R$, $y_0 = R/2$. Значение производной или тангенса угла наклона в этой точке $k = 1$ — угол наклона касательной к оси x равен $\pi/4$. Уравнение касательной (1.3.1) имеет вид $y_k(x) = x - R/2$. Следовательно, касательная пересекает директриссу в точке $(0, -R/2)$.

Отметим еще одно достоинство записи уравнения параболы в виде $y = x^2/2R$ — величина R представляет собой радиус окружности, которая касается параболы в точке (0, 0) (см. задачу 7.1.6).

1.3.3. Максимумы и минимумы функции. Если производная функции в точке x_0 обращается в нуль, то на графике функции $y = f(x)$ угол между касательной и осью x равен нулю. В этой точке непрерывная функция достигает *экстремума* (от лат. *extremum* — крайнее) — минимального или максимального значений. В окрестности точки, в которой функция достигает минимума, производная переходит от отрицательных значений к положительным значениям. Вторая производная в точке минимума — положительная величина.

1.3.4. Производная «сложной» функции. Преимущества обозначения Лейбница проявляются при вычислении производной «сложной» функции, аргумент которой представляет некоторую функцию, которая зависит от другой функции и т. д.

А. Пусть аргументом функции $h(x)$ является функция $g(x)$. Функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = h[g(x)]$. Производную df/dx следует вычислять согласно правилу:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dh}{dg}\frac{dg}{dx}. \qquad (1.3.4)$$

Например, $f(x) = \sin x^2$. В этом случае $h = \sin g$, $g = x^2$, $df/dg = \cos g$, $dg/dx = 2x$. Из (1.3.4) находим производную $df/dx = 2x\cos x^2$.

Б. Пусть аргументом функции $f(x)$ является функция $g(u)$, аргументом которой является функция $u(x)$. Функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = h[g(u(x))]$. Тогда производную df/dx следует вычислять согласно правилу:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dh}{dg}\frac{dg}{du}\frac{du}{dx}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

1. $f(x) = \sin(\cos x^2)$. Теперь $h = \sin g$, $g = \cos u$, $u = x^2$ и получаем $dh/dg = \cos g$, $dg/du = -\sin u$, $du/dx = 2x$. Следовательно, $df/dx = -(2x \sin x^2)[\cos(\cos x^2)]$.

2. $f(x) = \sin^2(\cos x)$. Теперь $h = g^2$, $g = \sin u$, $u = \cos x$ и получаем $dh/dg = 2g$, $dg/du = \cos u$, $du/dx = -\sin x$. Следовательно,

$$df/dx = -2[\sin(\cos x)][\cos(\cos x)]\sin x = -\sin x[\sin 2(\cos x)].$$

Правило Лейбница. Производная функции $P = fg$, представляющей собой произведение функций

$$\frac{dP}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}.$$

Производную функции $P = N/D$ проще получить как производную произведения. Поскольку

$dD^{-1}/dx = -D^{-2}dD/dx$, то

$$\frac{dND^{-1}}{dx} = \frac{dN}{dx}\frac{1}{D} - N\frac{1}{D^2}\frac{dD}{dx}.$$

1.3.5. Неопределенный интеграл (от лат. *integer* — целый). Ньютон и Лейбниц ясно указали на взаимообратный характер операций дифференцирования и интегрирования. *Первообразной* функции $f(x)$ называют функцию $g(x)$, которая удовлетворяет условию $dg/dx = f(x)$. Очевидно, что к функции $g(x)$ можно прибавить константу и вновь получить первообразную той же функции $g(x) + \text{const}$. Это общее выражение первообразных называют неопределенным интегралом, обозначение которого напоминает букву S (первая буква в слове сумма):

$$\int f(x)dx = g(x) + C. \qquad (1.3.5)$$

Отсюда следует рецепт вычисления интеграла (1.3.5) от произвольной функции f(x): если в результате обширных в общем случае преобразований (которые приводятся в учебниках по интегральному исчислению) удается привести функцию $f(x)$ к виду $f(x) = dg/dx$, то проблема решена. Однако для счетного числа интегралов реализация этой процедуры невозможна.

1.3.6. Определенный интеграл. Определенный интеграл функции $f(x) = dg/dx$ с нижним пределом a и верхним пределом b определяют как разность

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (1.3.6)$$

Следовательно, для вычисления интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

необходимо представить подинтегральную функцию $f(x)$ в виде производной от некоторой функции $g(x)$: $f(x) = dg(x)/dx$. Геометрический смысл определенного интеграла обсуждается в Гл.2.

Рассмотрим несколько полезных примеров.

1. $f(x) = x^n$. Тогда $g(x) = x^{n+1}/(n+1)$, $I = [b^{n+1} - a^{n+1}]/(n+1)$. Этот интеграл появляется при вычислении работы, совершаемой газом в адиабатическом процессе.

2. $f(x) = C/x$. Имеем $g(x) = Cd\ln x/dx$; $I = C[\ln b - \ln a] = C\ln(b/a)$, где $\ln x$ — функция, обозначающая натуральный логарифм аргумента x. Этот интеграл появляется при вычислении работы, совершаемой газом в изотермическом процессе.

3. $f(x) = C\sin kx$. Следовательно, $g(x) = -(C/k)\cos kx$, $I = (C/k)[\cos ka - \cos kb]$. Если $a = 0$, $b = 2\pi$, то $I = 0$ — площадь под кривой $f(x) = C\sin kx$ равна нулю.

4. $f(x) = c/(c^2 + x^2)^{3/2}$. В этом случае $g(x) = (x/c)/(c^2 + x^2)^{1/2}$,

$$I = [(b/c)/(c^2 + b^2)^{1/2} - (a/c)/(c^2 + a^2)^{1/2}].$$

Символ ∞ обозначает бесконечно большое значение одного из пределов интегрирования. Если $a = -\infty$, $b = \infty$, то $I = 2/c$. Этот интеграл появляется при вычислении индукции магнитного поля, создаваемого длинным проводом с током.

5. Пусть $f(x) = \sin^2 x$. Тогда $g(x) = x/2 - (1/4)\sin 2x$. Полагая $a = 0$, $b = 2\pi$, получим $I = \pi$. Этот интеграл появляется при вычислении среднего значения функции $\sin^2 x$, которое обозначают символом $<\sin^2 x>$.

1.3.7. Среднее значение периодической функции. Пусть $F(t) = \sin^2\omega t$, $T = 2\pi/\omega$ — период функции $\sin\omega t$. Согласно определению среднее значение

$$<\sin^2\omega t> = \frac{1}{T}\int_0^T dt \sin^2 \omega t.$$

Произведем в подинтегральном выражении замену переменных $x = \omega t$. Тогда нижний предел останется равным нулю, а значение верхнего предела равно 2π. В результате получим интеграл

$$<\sin^2\omega t> = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx \sin^2 x.$$

Далее пишем $\sin^2 x = (1/2)(1 - \cos 2x)$. Согласно (1.3.6)

$$\int_0^{2\pi} dx \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 0) = 0, \quad \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

Следовательно, $<\sin^2\omega t> = 1/2$ или $<\cos^2\omega t> = 1/2$. Отметим, что среднее значение $<\sin\omega t> = <\cos\omega t> = 0$.

Глава 2. Кинематика

2.1. Скорость частицы

2.1.1. Основные понятия механики. Объектом изучения механики (от греч. *mechanike* — орудие, сооружение) является простейшая форма движения — перемещение макроскопических тел (т. е. тел, состоящих из большого числа атомов и молекул) по отношению к другим телам. В механике рассматривают две модели реальных тел.

Материальная точка или частица — тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с характерными масштабами области движения.

Твердое тело — система материальных точек, расстояния между которыми постоянны.

При описании движения тел необходимо указать систему отсчета, относительно которой оно рассматривается. *Системой отсчета* называется твердое тело вместе с помещенными на него часами.

2.1.2. Кинематика. Начальным этапом изучения движения тел является установление способов задания положения тела в пространстве и определение характеристик движения. Этот раздел механики называется кинематикой (от греч. *kinetmatos* — движение).

Для математического описания движения частицы в выбранной системе отсчета вводят систему координат. *Декартова система координат* — совокупность трех взаимно перпендикулярных числовых осей с общим началом отсчета. Напомню, что числовой осью называется прямая линия, на которой заданы единица масштаба, начало отсчета и положительное направление. Координата точки на числовой оси — расстояние между началом отсчета и точкой, взятое со знаком плюс, если точка лежит на положительной полуоси, и со знаком минус, если точка лежит на отрицательной полуоси. Отметим, что термины «координата» тела или «расстояние» между телами не имеют смысла, поскольку определены только для точек.

Координаты частицы в декартовой системе координат xyz представляют собой координаты x_0, y_0, z_0 точек пересечения числовых осей и плоскостей, проведенных через частицу перпендикулярно числовым осям x, y, z.

Радиус-вектор. Положение частицы в произвольный момент времени t полностью определяется заданием трех функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, представляющих собой значения координат частицы в момент времени t. Эти функции являются проекциями или компонентами вектора $\vec{r}\,(t) = (x(t), y(t), z(t))$, идущего из начала координат в точку, где находится частица. По этой причине вектор $\vec{r}\,(t)$ называют *радиус-вектором.*

Вектор перемещения или приращение радиус-вектора $\Delta\vec{r}$ — вектор, соединяющий точку, в которой частица находилась в момент времени t, с точкой, в которой она находилась в момент времени $t + \Delta t$, $\Delta t > 0$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t + \Delta t) - \vec{r}\,(t).$$

Траектория частицы — кривая в пространстве, по которой движется частица.

Путь — длина участка траектории, по которому движется частица в течение рассматриваемого промежутка времени.

2.1.3. Скорость частицы в декартовых координатах. Необходимо отличать перемещение от пути – расстояния s, отсчитываемого вдоль траектории. Путь — скалярная величина, представляющая собой неубывающую функцию s. Нетрудно видеть, что если тело, двигаясь от некоторой точки, снова возвращается в нее в некоторый момент времени, то перемещение равно нулю (нулевому вектору), в то время как путь, проделанный частицей, отличен от нуля. Нужно ясно понимать различие между системой отсчета и системой координат. Систему отсчета образуют реальные тела. Перемещение, скорость, ускорение тела в выбранной системе отсчета — это та реальность, с которой мы имеем дело при решении конкретной задачи. Система координат является математической абстракцией. Один и тот же вектор в различных системах координат имеет различные компоненты, однако его положение относительно системы отсчета остается неизменным. Обычно выбор системы координат определяется соображениями удобства.

Рассмотрим частицу, движущуюся по прямой, параллельной оси x, и предположим, что зависимость координаты частицы — функция $x(t) = x_0 + v_0 t$, где x_0, $v_0 > 0$. На рис 2.1.1 изображен график этой функции. Важной характеристикой графика $x(t)$ является наклон прямой к оси времени. В момент времени t координата частицы равна $x(t)$, в другой момент времени $t + \Delta t$ координата стала равной $x(t + \Delta t)$. Перемещение частицы за интервал времени Δt равно приращению функции $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$. Наклон прямой определяется отношением

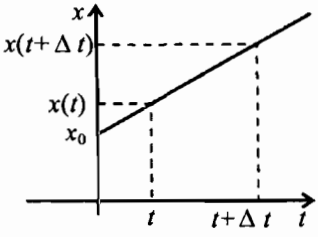


рис. 2.1.1

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

которое характеризует быстроту изменения координаты x и называется *проекцией* v_x, скорости частицы $\vec{v}$ на ось x:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0 . \qquad (2.1.1)$$

Поскольку отношение $\Delta x/\Delta t$ одинаково для любых пар точек $(t,\ t + \Delta t)$, то оно не зависит от выбора момента времени t и интервала Δt. Следовательно, проекция скорости $v_x(t)$ не зависит от времени.

Предположим теперь, что зависимость x-координаты частицы от времени, т. е. функция $x(t)$, имеет вид $x(t) = v_0 t - gt^2/2$, где $v_0, g>0$. На рис. 2.1.2 *а* изображена функция $x(t)$, которая определяет координату частицы, брошенной вверх в вертикальном направлении со скоростью $v_0 = 9{,}8$ м/с. Приращение функции $x(t)$ за интервал времени Δt равно $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, или

$$\Delta x = v_0(t + \Delta t) - g(t + \Delta t)^2/2 - v_0 t + gt^2/2 = (v_0 - gt)\Delta t - (g/2)\Delta t^2.$$

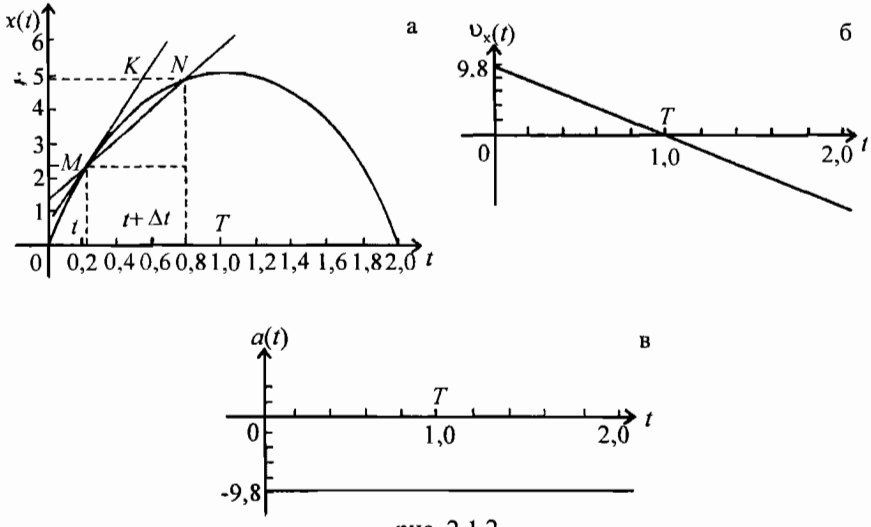


рис. 2.1.2

Каким образом в этом случае следует определить проекцию скорости тела на ось x? Мы покажем, что мгновенное значение скорости можно определить с помощью соотношения 2.1.1, если на Δt наложить дополнительное условие. С этой целью проведем касательную MK к кривой в точке M и прямую MN соединяющую точки M и N. Наклон прямой MN определяет среднее значение проекции скорости тела на ось x:

$$(v_x)_{cp} = \Delta x/\Delta t = v_0 - gt - (g/2)\Delta t$$

и зависит от интервала Δt. Секущая MN и касательная MK в интервале Δt заметно различаются. Однако, если промежуток Δt брать все меньше и меньше, то в интервале $(t,\ t + \Delta t)$ различие между ними становится настолько малым, что они становятся почти неразличимыми между собой. Это означает, что при $\Delta t \to 0$ секущая почти совпадает с касательной в точке M. Тем самым соотношение (2.1.1) позволяет определить мгновенную скорость тела при условии, что Δt стремится к нулю ($\Delta t \to 0$):

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0 - gt\,,$$

т. е. проекция мгновенной скорости на ось x равна пределу отношения проекции перемещениям на ось x к интервалу Δt, при стремлении Δt к нулю. Условие $\Delta t \to 0$ гарантирует независимость $v_x(t)$ от величины Δt. Согласно определению проекция скорости на ось x является производной по времени функции $x(t)$. Символически это утверждение записывают в виде

$$v_x = \frac{dx}{dt}. \qquad (2.1.2)$$

Последнее обозначение, введенное Г. Лейбницем, более удобно, особенно при вычислении производных от сложных функций (см. 1.3.4). Значения $v_x(t)$ могут быть как положительными, так и отрицательными (рис. 2.1.2 *б*). Например, в точке $t = T$ частица достигает максимального смещения. Здесь $v_x(T) = 0$. Затем проекция скорости становится отрицательной — частица движется в отрицательном направлении оси x.

Предположим теперь, что вектор $\vec{r}$ описывает в пространстве некоторую кривую, т.е. проекции $\vec{r}\,(t)$ на оси координат равны соответственно $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Вместо одной функции мы имеем три функции. Поэтому проекции скорости частицы на оси координат определяются аналогично (2.1.2). В обозначениях Лейбница

$$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt},\quad v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (2.1.3)$$

Соотношения (2.1.3) являются проекциями на оси координат одного векторного равенства

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad \Delta \vec{r} = \vec{r}\,(t + \Delta t) - \vec{r}(t), \qquad (2.1.4)$$

где $\Delta \vec{r}$ — приращение радиус-вектора, определяющее перемещение частицы за интервал Δt. Действительно, пусть в момент времени t радиус-вектор частицы занимал положение $\vec{r}(t)$, а в момент $t + \Delta t$ — положение $\vec{r}\,(t + \Delta T)$ (рис. 2.1.3). Тогда за промежуток времени Δt приращение радиус-вектора

частицы $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. Отношение $\Delta\vec{r}/\Delta t$ является вектором, расположенным на секущей. В пределе $\Delta t \to 0$ направление вектора $\Delta\vec{r}/\Delta t$ совладает с направлением касательной к траектории.

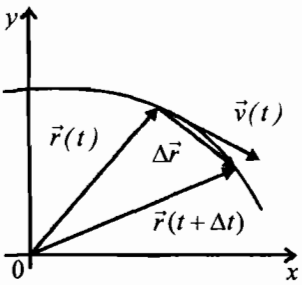


рис. 2.1.3

Приведем теперь задачу, решение которой обычно вызывает затруднения.

Задача 2.1.1. К ящику привязали веревку, другой конец ее перекинули через забор и тянут с постоянной величиной скорости u (рис. 2.1.4). В некоторый момент времени угол между горизонталью и куском веревки, привязанной к ящику, равен α. Найти скорость ящика.

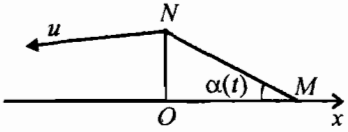


рис. 2.1.4

Решение. Проведем ось x с началом у основания забора. Тогда координата ящика $x(t) = h\mathrm{ctg}\alpha(t)$, где h – высота забора. Следуя определению, находим проекцию скорости ящика на ось x.

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{h}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt}. \qquad (1)$$

Для того чтобы вычислить производную $d\alpha/dt$, найдем длину части веревки $l(t) = MN$: $l = h/\sin\alpha$. Согласно условию скорость изменения длины веревки $dl/dt = -u$ (так как функция $l(t)$ убывает). Следовательно,

$$-u = dl/dt = (dl/d\sin\alpha)(d\sin\alpha/d\alpha)d\alpha/dt = (-h/\sin^2\alpha)\cos\alpha d\alpha/dt. \qquad (2)$$

Из (1), (2) находим $v_x = -u/\cos\alpha$.

Задача 2.1.2. Скорости концов стержня ab постоянной длины, движущегося в пространстве, равны соответственно $\vec{v}_a$ и $\vec{v}_b(t)$. Покажите, что проекции скоростей точек a и b на прямую ab одинаковы.

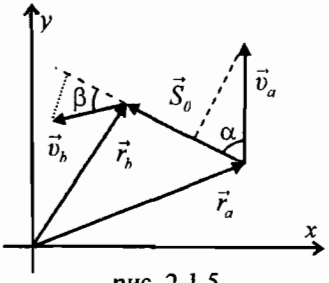


рис. 2.1.5

Решение. Рассмотрим для упрощения случай движения стержня в плоскости xy (рис. 2.1.5).

Радиус-векторы точек a и b равны

$$\vec{r}_a(t) = (x_a(t), y_a(t), 0),\ \vec{r}_b(t) = (x_b(t), y_b(t), 0).$$

Согласно условию расстояние s_0 между точками a и b постоянно:

$$[x_b(t) - x_a(t)]^2 + [y_b(t) - y_a(t)]^2 = s_0^2. \qquad (1)$$

Для того, чтобы перейти к скоростям точек a и b продифференцируем (1) по времени. В результате получим

$$[x_b(t) - x_a(t)]\,[v_{bx}(t) - v_{ax}(t)] + [y_b(t) - y_a(t)]\,[v_{by}(t) - v_{ay}(t)] = 0. \qquad (2)$$

Очевидно левая часть (2) представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{r}\,(t) = \vec{r}_b\,(t) - \vec{r}_a\,(t)$ и $\vec{v}_b\,(t) - \vec{v}_a\,(t)$: $\vec{r}(\vec{v}_b - \vec{v}_a) = 0$. Отсюда следует соотношение $\vec{r}\vec{v}_b = \vec{r}\vec{v}_a$ или $v_a\cos\alpha = v_b\cos\beta$, где α, β — углы между вектором $\vec{r}$ и векторами $\vec{v}_a$ и $\vec{v}_b$. Этот результат поясняет почему скорость человека на водных лыжах может быть больше скорости катера. Полезно найти решение задачи 2.1.1, исходя из полученного результата.

2.2. Ускорение частицы

Если при прямолинейном движении частицы график проекции скорости $v_x = v_0 - gt$ на ось x изображается прямой линией, то наклон этой прямой определяет проекцию ускорения на ось x:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t},\ \Delta v_x = v_x(t + \Delta t) - v_x(t).$$

В нашем случае $\Delta v_x = -g\Delta t$, $a_x = -g$. График этой функции изображен на рис. 2.1.2 *в*. Обратите внимание на то, что ускорение одинаково в каждой точке траектории. В точке наивысшего подъема (T = 1с) проекция скорости $v_x(t) = 0$, однако проекция ускорения по-прежнему равна $-g$. Причина в том, что значение функции $a_x(t)$ определяется не значением, функции $v_x(t)$, а ее производной, т.е. характером поведения в окрестности точки t. В общем случае, когда $v_x(t)$ произвольная функция времени, то проекция ускорения на ось x

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \equiv \frac{dv_x}{dt}. \qquad (2.2.1)$$

При криволинейном движении вектор ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad (2.2.2)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},\ \Delta\vec{v} = \vec{v}\,(t + \Delta t) - v(t).$$

Заметим, что векторы ускорения и скорости не связаны какой-либо алгебраической зависимостью: ускорение определяется производной скорости, а не ее значением в момент времени t.

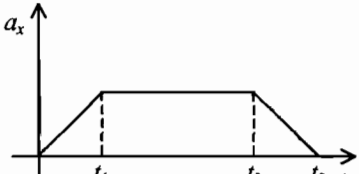


рис. 2.2.1

Задача 2.2.1. Частица движется по оси x с переменным ускорением. На рис. 2.2.1 изображена зависимость проекции ускорения $a_x(t)$ от времени. В какой момент времени проекция скорости частицы на ось x будет наибольшей?

Решение. Для достаточно малого интервала Δt: $v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + a_x(t)\Delta t$. Это соотношение, связывающее значения v_x в близких точках, позволяет сделать вывод, что v_x достигает максимального значения при $t = t_3$ и в дальнейшем не изменяется.

Задача 2.2.2. Частица движется по оси x со скоростью $v = kx^2$. В точке $x = x_0$ скорость $v = v_0$. Найдите ускорение частицы a_0 в точке x_0.

Решение. Ускорение частицы $a = dv/dt$. Дифференцируя $v = v(x(t))$ как сложную функцию, получим $a = 2kxv = 2v^2/x$. Следовательно, $a_0 = 2v_0^2/x_0$.

Задача 2.2.3. Концы стержня AB длины l скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. Скорость точки B равна $\vec{v}$. Найти траекторию точки C — середины стержня и скорость точки C. В начальный момент времени $t = 0$ стержень находился на вертикальной прямой.

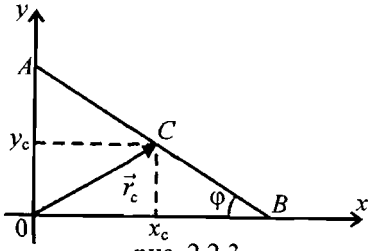


рис. 2.2.3

Решение. Введем оси координат (рис.2.2.3) и запишем проекции радиус-вектора $\vec{r}_c$ на оси x и y.

$$x_C(t) = (l/2)\cos\varphi(t),\ y_C(t) = (l/2)\sin\varphi(t), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — угол OBA. Исключая φ, находим

$$x_C^2 + y_C^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Следовательно, точка C движется по окружности радиусом $l/2$. Далее найдем скорость $\vec{v}$ точки C. Поскольку функции $x_C(t)$, $y_C(t)$ зависят от функции $\varphi(t)$, то

$$v_{Cx} = dx_C/dt = (dx_C/d\varphi)d\varphi/dt = -(l/2)\sin\varphi d\varphi/dt, \tag{2}$$

$$v_{Cy} = dy_C/dt = (dy_C/d\varphi)d\varphi/dt = (l/2)\cos\varphi d\varphi/dt.$$

Зависимость угла $\varphi(t)$ и его производной по времени можно найти, рассматривая движение точки B. По условию задачи $x_B = vt$,

$$l\cos\varphi = vt \tag{3}$$

Следовательно,

$$-l\sin\varphi(t)\frac{d\varphi}{dt} = v \tag{4}$$

Учитывая (4) и (3), находим из (2)

$$v_{Cx}(t) = \frac{v}{2}$$

$$v_{Cy}(t) = -\frac{v}{2}\operatorname{ctg}\varphi = -\frac{v}{2}\frac{vt}{\sqrt{l^2 - v^2t^2}} \qquad (5)$$

Докажите, что проекции скоростей точек С и В на прямую AВ совпадают (см. задачу 2.1.2). Найдите далее ускорение точки C.

2.3. Путь, пройденный частицей

2.3.1. Величина скорости. Пусть путь, пройденный частицей по некоторой траектории за время t, определяется функцией $s(t)$. Определяя путь, пройденный частицей по траектории за интервал времени Δt т. е. $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, и разделив его на этот промежуток, получим при $\Delta t \to 0$ мгновенное значение величины скорости

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}, \qquad v = \frac{ds}{dt} \qquad 2.3.1$$

Из определения (2.1.4) и (2.3.1) следует, что поскольку элемент дуги $\Delta s = |\Delta \vec{r}|$, то

$$v(t) = |\vec{v}(t)|.$$

Покажем, что путь, пройденный частицей за время $t_b - t_a$ равен площади фигуры, ограниченной отрезком $[t_a, t_b]$, кривой $v(t)$ и прямыми $t = t_a$, $t = t_b$ (рис. 2.3.1).

Обозначим расстояние, пройденное частицей от некоторой фиксированной точки траектории, через $s(t)$. Если бы скорость $v(t)$ была постоянна, то путь равнялся бы произведению $v(t_b - t_a)$. В случае переменной скорости путь можно определить следующим образом. Разобьем отрезок $[t_a, t_b]$ точками $t_0 = t_a, t_1, \ldots, t_n = t_b$, $(t_1 < t_2 < \ldots < t_n)$ на n одинаковых отрезков $[t_0\ t_1,]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, t_n]$, и выберем на каждом отрезке $\Delta t_i = [t_{i-1}, t_i]$ некоторую точку T_i, Скорость $v(t)$ на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ меняется от точки к точке, но если длина отрезка мала, то, ее значение мало отличается от значения в точке T_i (мы предполагаем, что функция $v(t)$ не имеет резких скачков), поэтому путь Δs_i, пройденный за время Δt_i, естественно считать приближенно равным пути, пройденному за то же время с постоянной скоростью $v(T_i)$:

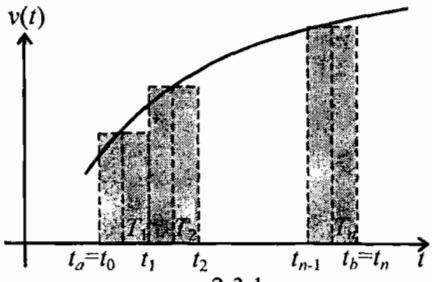


рис. 2.3.1

$$\Delta s_i = v(T_i)\Delta t_i$$

Выражение, стоящее в правой части, – площадь прямоугольника с основанием Δt_i и высотой $v(T_i)$. Проведя такие рассуждения для каждого отрезка деления, получим приближенно значение пути, пройденного за время $t_b - t_a$:

$$s = v(T_1)\Delta t_1 + v(T_2)\Delta t_2 + ... = \sum_{i=1}^{n} v(T_i)\Delta t_i$$

Греческая буква $\sum$ (сигма) означает сумму. Здесь правая часть – площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников. Точное значение пути получим в пределе $\Delta t \to 0$ при неограниченном увеличении числа отрезков деления:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v(T_i)\Delta t_i \ .$$

Этот предел равен площади криволинейной трапеции, образованной отрезком $[t_a, t_b]$ оси t, кривой $v(t)$ и прямыми $t = t_a$, $t = t_b$, и представляет собой определенный интеграл

$$s = \int_{t_a}^{t_b} v(t)dt \ .$$

Этот термин ввел Г. Лейбниц в 1686 г. Ему же принадлежат термины «координата», «функция», «дифференциальное», «интегральное» (исчисления); знаки равенства, умножения.

Пример 2.3.1. Две одинаковые полые трубки, согнутые в виде полуокружностей расположены в вертикальной плоскости (рис. 2.3.2). Поместим в точку A первой трубки шарик и сообщим ему скорость $v_{10} = v$, направленную вертикально вверх. Другой шарик запустим в точке C второй трубки со скоростью $v_{20} = v$, направленной вертикально вниз. Сравним время движения t_{AB} и t_{CD} шариков по первой и второй трубкам, пренебрегая силами трения.

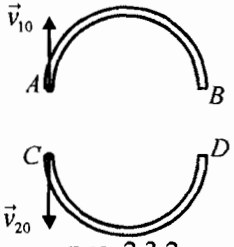


рис. 2.3.2

Используя закон сохранения полной энергии (см. Гл. 6), можно показать, что величины скоростей шариков в точках B и D равны v. Поскольку пути s_1 и s_2, пройденные каждым шариком, одинаковы, то для решения задачи необходимо рассмотреть уравнение $s_1 = s_2$. Изобразим графики функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$, следуя качественным соображениям: площади под кривыми $v_1(t)$ и $v_2(t)$ должны быть одинаковы. В результате получим $t_{AB} > t_{CD}$.

2.2.2. Величина средней скорости. Одной из приближенных характеристик движения является средняя величина скорости, за какой-то промежуток времени. Средняя величина скорости определяется отношением пути Δs, пройденного частицей, к промежутку времени Δt, в течение которого этот путь пройден:

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Задача 2.3.2. Автомобиль начинает двигаться из состояния покоя. Первую половину пути он движется с постоянным ускорением. На втором участке пути он движется с постоянной скоростью $u = 18$ м/с, которой достиг в конце первого участка. Найдем среднюю скорость автомобиля.

Решение. Пусть L — все пройденное расстояние. Согласно определению

$$v_{ср} = \frac{L}{t_1 + t_2}.$$

Здесь t_1, t_2 — интервалы времени движения по первой и второй половинам пути.

Согласно условию $s(t) = at^2/2$, $v(t) = at$, $0 \le t \le t_1$; $L/2 = at^2_1/2$, $u = at_1$. Следовательно, $t_1 = L/u$, $t_2 = L/2u$,

$$v_{ср} = 2u/3,\ v_{ср} = 12 \text{ м/с}.$$

2.4. Движение по окружности

Пусть частица движется по окружности радиусом R. Возьмем на ней произвольную точку A за начало отсчета и зададим положительное направление. Положение частицы на окружности определяется функцией $\varphi(t)$, где φ — угол (измеренный в радианах) между фиксированной прямой OA и прямой OM, проходящей через центр окружности и частицу в момент времени t (рис. 2.4.1). Дуговая координата частицы — функция $s(t)$ представляет собой длину дуги AM, пройденную частицей. По определению центральный угол равный одному радиану стягивает дугу длиной равной радиусу окружности R: $\varphi = s/R$.

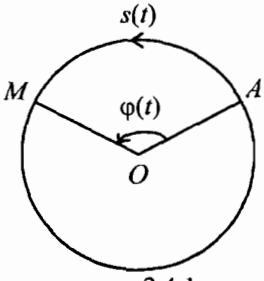


рис. 2.4.1

Производная функции $\varphi(t)$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ называется *угловой скоростью* $\omega(t)$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (2.4.1)$$

Единица угловой скорости 1 рад/с.

Равномерным вращением называется движение с постоянной угловой скоростью ω. В этом случае $\varphi(t) = \omega t$. Интервал времени, за который частица совершает один оборот, называется периодом вращения и обозначается обычно буквой T. За период приращение $\Delta\varphi = 2\pi$. Следовательно, $\omega = 2\pi/T$.

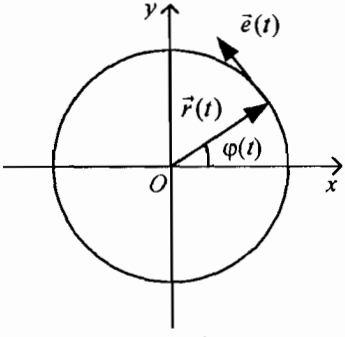


рис. 2.4.2

Получим теперь выражения для векторов скорости и ускорения частицы, движущейся по окружности радиусом R. Для полного описания движения введем систе-

му координат, изображенную на рис. 2.4.2. Оси координат x и y расположим в плоскости окружности, начало координат совместим с ее центром O. Радиус-вектор частицы $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. где $x(t) = R\cos\varphi$, $y(t) = R\sin\varphi$, $z(t) = 0$, $\varphi(t)$ — функция времени.

Согласно определению (1.2.4) скорость частицы $\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt$ вычисляется как производная сложной функции:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = R\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -R\omega\sin\varphi, \tag{2.4.1}$$

$$v_y = R\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = R\omega\cos\varphi, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Скорость частицы, как всегда, направлена по касательной к траектории - в нашем случае под прямым углом к радиус-вектору. Действительно, скалярное произведение $\vec{v}\vec{r} = 0$. Следовательно, скорость можно представить в виде $\vec{v} = v\vec{e}$, где $\vec{e} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ — единичный вектор, касательный к окружности, v — проекция скорости на вектор $\vec{e}$,

$$v = \omega R. \tag{2.4.2}$$

Найдем теперь ускорение частицы. Отметим вначале, что если $\vec{v}(t)$, $\vec{v}(t + \Delta t)$ — скорости частицы в моменты времени t и $t + \Delta t$, то $\vec{v}(t) \neq \vec{v}(t + \Delta t)$ даже в случае равномерного вращения с постоянной величиной скорости. При движении частицы по криволинейной траектории приращение скорости $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ никогда не обращается в нуль. Согласно определению (2.2.2) ускорение $\vec{a}(t) = d\vec{v}/dt$. Подставляя сюда $\vec{v} = v\vec{e}$, получим

$$\vec{a} = \frac{dv\vec{e}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e} + v\frac{d\vec{e}}{dt}. \tag{2.4.3}$$

Мы видим, что ускорение представляет собой сумму двух слагаемых. Если величина скорости постоянна, то первое слагаемое равно нулю. Второе слагаемое содержит производную единичного вектора с компонентами $e_x = -\sin\varphi$, $e_y = \cos\varphi$, $e_z = 0$. Вычисляя производные

$$\frac{de_x}{dt} = -\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\omega\cos\varphi,$$

$$\frac{de_y}{dt} = \frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\omega\sin\varphi,$$

представим ее в виде $d\vec{e}/dt = \omega\vec{n}$, где $\vec{n} = (-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)$ — единичный вектор, направленный к центру окружности. Очевидно, вектор $\vec{n}$ перпендикулярен вектору $\vec{e}$, поскольку скалярное произведение $\vec{n}\vec{e} = 0$. Введем еще

один единичный вектор $\vec{e}_3$, перпендикулярный плоскости, в которой лежат векторы $\vec{e}$ и $\vec{n}$. Подставляя $d\vec{e}/dt = (v/R)\ \vec{n}$ в (2.4.3), получим ускорение частицы, движущейся по окружности,

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e} + \frac{v^2}{R}\vec{n} + 0 \cdot \vec{e}_3. \qquad (2.4.4)$$

Следовательно, проекция ускорения на направление вектора $\vec{e}$ равна $a_t = dv/dt$. Эта компонента полного ускорения называется *касательной* или *тангенциальной*. Проекция ускорения на направление к центру окружности $a_n = v^2/R$ называется *центростремительным* или *нормальным* ускорением.

При движении частицы с постоянной величиной скорости ускорение $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$.

Глава 3. Движение частицы с постоянными скоростью или ускорением

3.1. Движение частицы с постоянной скоростью

Движение тела является равномерным, если его скорость не зависит от времени. Следовательно, $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$, где $\vec{v}_0$ — постоянный вектор. Подставляя в (2.1.4) $\vec{v}(t)$, получим уравнение, из которого можно найти зависимость радиус-вектора от времени.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0. \qquad (3.1.1)$$

Пример 3.1.1. Частица движется по оси x, проходя за каждую секунду по одному метру. Будет ли движение частицы равномерным?

В общем случае движение неравномерное, поскольку в течение каждой секунды частица может перемещаться как угодно, лишь бы к концу каждой секунды переместилась на один метр. Движение будет равномерным, если за *любые* равные промежутки времени приращения координаты тела одинаковы. Этому условию соответствует операция вычисления предела при стремлении $\Delta t \to 0$ в определении скорости (2.1.4).

Найдем теперь радиус-вектор $\vec{r}(t)$. Соотношение (3.1.1) является простейшим дифференциальным уравнением, поскольку в левой части стоит производная радиус-вектора по времени. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{c}, \qquad (3.1.2)$$

где $\vec{c}$ — постоянный вектор, удовлетворяет уравнению (3.1.1). Для того чтобы найти вектор $\vec{c}$, необходимо задать начальные условия: пусть в момент времени $t = t_0$ радиус-вектор $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$. Полагая в (3.1.2) $t = t_0$, получим $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 t_0 + \vec{c}$, из которого находим $\vec{c}_0 = \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t_0$. Следовательно

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0). \qquad (3.1.3)$$

Приведем некоторые справочные данные. Довольно сильный бросок сообщает легкому камню скорость 15—20 м/с. При подаче скорость мяча в бейсболе может превышать 100 км/ч, волана — 260 км/ч. Скорость ракетки в момент удара 50—60 м/с. Мировой рекорд скорости при спуске на лыжах 217,68 км/ч. В беге мужчин на дистанцию 100 м скорость максимальная спортсмена 43,37 км/ч; на дистанции 200 м скорость приближается к 10,5 м/с; на дистанции 800 м максимальная скорость — 28 км/ч, при спуске на лыжах — 241, 45 км/ч, в плавании — 8, 64 км/ч. Начальная скорость. пули ~1000 м/с, скорость истребителя МИГ-21 — 2200 км/ч. В 1976 г. Локхид SR-71 ВВС США развил скорость 3529,6 км/ч. Поезд Евростар (Франция-Великобритания) и поезда «Серия-50» (Япония) развивают скорость 300 км/ч.

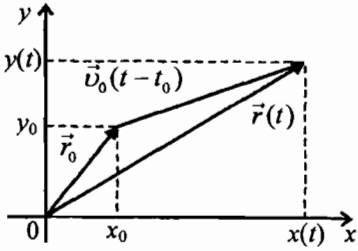


рис. 3.1.1

Соотношения (3.1.1) и (3.1.3) полностью описывают равномерное движение тела. Геометрический смысл (1.3.3) становится ясным при рассмотрении рис. 3.1.1. Действительно, если при $t = t_0$ радиус-вектор занимал положение $\vec{r}_0$, то за время $t - t_0$ перемещение тела $\Delta\vec{r} = \vec{v}_0(t - t_0)$. Направление вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ и скорости $\vec{v}_0$ совпадают — следовательно, тело движется по прямой линии. Положение тела в момент времени t определяется суммой векторов $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0(t-t_0)$.

Векторное соотношение (3.1.3) является символической формой записи, которая в координатной записи имеет вид

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0), \qquad y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0), \qquad z(t) = 0. \qquad (3.1.4)$$

Здесь $(x_0, y_0, 0)$ — компоненты радиус-вектора начального положения тела, $(v_{0x}, v_{0y}, 0)$ — компоненты вектора начальной скорости. Заметим, что в нашем примере прямолинейное равномерное движение выглядит сложным движением, т. е. «суммой» двух движений. Это обстоятельство связано с использованием «неудобной» системы координат (см. рис. 3.1.2). Поскольку движение точки прямолинейное, мы могли бы совместить с этой прямой, скажем, ось x (рис. 3.1.2). В этом случае вместо (3.1.4) мы получим более простую форму. Тогда, полагая $t_0 = 0$, имеем:

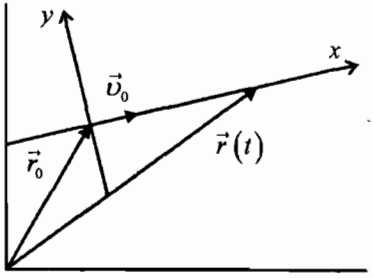


рис. 3.1.2

смена после встречи с тренером $x'_1(t) = -vt$. В момент времени $t = T$ значения функций равны соответственно $x_n(T) = x_т(T)$, $l = x_т(T) - x'_1(T)$. Учитывая явный вид функций, получим систему уравнений

$$-l_0 + vT = -uT,\ l = -uT + vT,$$

совпадающую с (1).

3.2. Прямолинейное движение с постоянным ускорением

3.2.1. Координаты и скорость частицы. Теперь мы рассмотрим движение частицы, ускорение которой постоянно: $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$. Наша задача — найти зависимость скорости и радиус- вектора частицы от времени. Примем момент времени $t = 0$ за начало отсчета и зададим начальные значения $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.

Согласно определению (2.2.1) имеем уравнение $d\vec{v}/dt = \vec{a}_0$. Поскольку в правой части $\vec{a}_0$ — постоянный вектор, то нетрудно проверить, что скорость $\vec{v}(t)$ должна иметь вид $\vec{v}(t) = \vec{a}_0 t + \vec{A}$, где $\vec{A}$ — произвольный постоянный вектор. Определим $\vec{A}$ из начальных условий $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$. Тогда имеем уравнение $\vec{v}_0 = 0 + \vec{A}$, или $\vec{A} = \vec{v}_0$. Следовательно,

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t. \qquad (3.2.1)$$

Далее, исходя из определения (2.1.4), получим уравнение $d\vec{r}/dt = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t$. Так же как и ранее, проверим, что подстановка $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{a}_0 t^2/2 + \vec{B}$ ($\vec{B}$ — произвольный постоянный вектор) обращает уравнение в тождество. Полагая $t = 0$, получим уравнение $\vec{r}(0) = \vec{B}$ или $\vec{B} = \vec{r}_0$. Итак,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a}_0 t^2/2. \qquad (3.2.2)$$

Шесть функций (3.2.1) и (3.2.2) определяют решение поставленной задачи.

Если начальные положение $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ и скорость $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ задаются в момент времени $t = t_0 \neq 0$, то зависимость $\vec{v}(t)$ и $\vec{r}(t)$ следует из (3.2.1) и (3.2.2) после замены в правой части t на $t - t_0$.

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 (t - t_0),\ \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \vec{a}_0 (t - t_0)^2/2. \qquad (3.2.3)$$

Задача 3.2.1. Пассажир, опоздавший на поезд, увидел, что предпоследний вагон прошел мимо него за интервал времени T_1, а последний — за интервал времени T_2. Найдите интервал T между моментами времени отправления поезда и выходом пассажира на перрон.

Решение 1. Пусть длина вагона — h, ускорение поезда — а. Расположим начало координат в точке выхода пассажира на платформу (рис. 3.2.1). Обозначим буквами x_A и x_B соответственно x-координаты переднего торца

предпоследнего вагона и переднего торца последнего вагона (рис. 3.2.1 *а*). В момент времени $t = 0$, соответствующий выходу пассажира на перрон, скорость поезда $v_0 = aT$. Тогда

$$x_A(t) = v_0t + at^2/2,\ x_B(t) = -h + v_0t + at^2/2. \qquad (1)$$

Согласно условию $x_A(T_1) = h$, $x_B(T_1 + T_2) = h$. Следовательно, имеем три уравнения

$$v_0 = aT,\ h = v_0T_1 + aT_1^2/2,\ h = -h + v_0(T_1 + T_2) + a(T_1 + T_2)^2/2,$$

из которых находим

$$T = (T_2^2 + 2T_1T_2 - T_1^2)/2(T_1 - T_2).$$

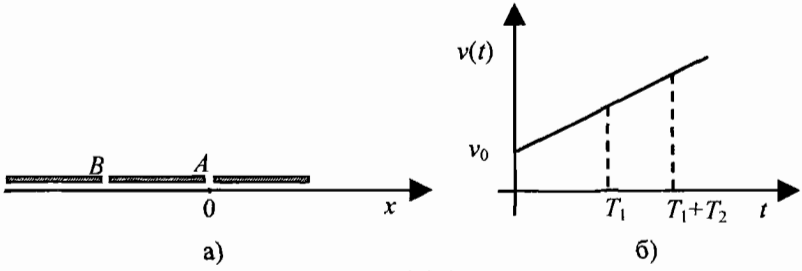


рис. 3.2.1

Решение 2. Скорость поезда $v(t) = v_0 + at$. Любая точка поезда перемещается на расстояния, равные h, за интервалы времени $[0, T_1]$ и $[T_1, T_1 + T_2]$. В момент времени $t = 0$ скорость точки A равна $v_0 = aT$, а в момент времени T_1 скорость $v_1 = v_0 + aT_1$. Величина пути численно равна площади трапеции: $h = T_1(2v_0 + aT_1)/2$. В момент времени $T_1 + T_2$ скорость точки A равна $v_0 + a(T_1 + T_2)$. Площадь под графиком скорости $h = T_2[2(v_0 + aT_1) + aT_2]/2$. Из условия равенства площадей, получим значение T.

Решение 3. Пусть проекции начальной скорости u и ускорения a больше нуля. Тогда путь, пройденный частицей за интервал времени τ равен $s = u\tau + a\tau^2/2$. Следовательно, имеем уравнение $aTT_1 + aT_1^2/2 = a(T + T_1)T_2 + aT_2^2/2$.

Задача 3.2.2. Две частицы движутся по оси x. Начальные положения частиц $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = s$, начальные скорости $v_{10} = 6$ м/с, $v_{20} = -4$ м/с. Проекции ускорения частиц $a_2 = -a_1 = a_0$, $a_0 = 1$ м/с^2. Найдите значение s, при котором частицы не столкнутся.

Решение. Зависимость координат и скоростей частиц от времени имеет вид

$$x_1(t) = v_{10}t - a_0t^2/2,\ x_2(t) = s + v_{20}t + a_0t^2/2,\ v_1(t) = v_{10} - a_0t,\ v_2(t) = v_{20} + a_0t.$$

Частицы не столкнутся, если в момент времени T, удовлетворяющий условию $x_1(T) = x_2(T)$, относительная скорость частиц равна нулю: $v_{отн}(T) = v_2(T) - v_1(T) = 0$. Из этих условий следуют два уравнения

$$v_{10}T - a_0T^2/2 = s + v_{20}T + a_0T^2/2,\ v_{10} - a_0T = v_{20} + a_0T,$$

из которых находим $s = 25$ м.

Задача 3.2.3. Пассажир первого вагона прогуливался по перрону. Когда он подошел к концу последнего вагона, поезд начал двигаться с ускорением $a = 0{,}072$ м/с^2. Пассажир сразу же побежал к своему вагону. Длина поезда $l = 250$ м. Найдите наименьшую величину скорости пассажира v_{min}, если он успел сесть в первый вагон.

Решение. Поместим начало координат в конец последнего вагона, ось x направим параллельно скорости поезда; v — проекция скорости пассажира на ось x. Координаты первого вагона и пассажира $x_в(t) = l + at^2/2$, $v_п(t) = vt$. Полезно изобразить графики этих функций. В момент времени $t = T$ имеем уравнение $x_в(T) = x_п(T)$: $l + aT^2/2 = vT$. Следовательно, $T_{1,2} = [v \pm (v^2 - 2al)^{1/2}]/a$. Отсюда находим $v_{min} = 2al$, $v_{min} = 6$ м/с.

3.3. Свободное падение

Важным частным случаем движения с постоянным ускорением является свободное падение — движение тела с ускорением $\vec{a}_0 = \vec{g}$. Вектор $\vec{g}$ — ускорение свободного падения — направлен к центру Земли (см. Гл. 8). Значение величины g в Москве равно 9,8152 м/с^2, на полюсе — 9,83 м/с^2. На высотах значительно меньших радиуса Земли можно пренебречь зависимостью g от высоты.

Задачи, которые могут быть предложены для решения, отличаются только различными значениями начальных условий $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0$. В этом параграфе мы рассмотрим задачи, в которых угол между начальной скоростью $\vec{v}_0$ и ускорением $\vec{a}_0$ равен 0 или π. В этом случае частица будет двигаться по прямой линии. Для описания движения удобно совместить с этой прямой одну из координатных осей. Направим вдоль нее ось y. Тогда функции (3.2.1) и (3.2.2) в координатной записи имеют вид

$$x(t) = 0, \qquad y(t) = y_0 + v_0t + a_0t^2/2, \qquad z(t) = 0, \tag{3.3.1}$$

$$v_x(t) = 0, \qquad v_y(t) = v_0 + a_0t, \qquad v_z(t) = 0. \tag{3.3.2}$$

Здесь y_0, v_0 и a_0 — проекции радиус-вектора в начальном положении, начальной скорости и ускорения на ось y. Эти функции содержат всю информацию, необходимую для решения задач о прямолинейном движении частицы с постоянным ускорением. Полезно следовать общему методу решения:

1. Выбрать систему координат.
2. Записать функции (3.3.1) и (3.3.2), учитывая условия задачи.
3. Представить данные о событиях, приведенных в задаче, в терминах значений функций. Используя явную зависимость функций от времени, получить систему уравнений.
4. Найти решение системы уравнений.

Задача 3.3.1. Камень падает с башни с нулевой начальной скоростью. Вторую половину пути он пролетел за интервал времени $\tau = 1$ с. Найдите высоту башни h.

Решение 1. Направим ось y вертикально вверх, начало координат поместим на поверхность Земли. Полагая в (3.3.1) $y_0 = h$, $v_0 = 0$, $a_0 = -g$, получим функцию $y(t) = h - gt^2/2$. График этой функции изображен на рис. 3.3.1.

Первое событие-камень на половине пути в некоторый момент времени $t = t_1$. Следовательно, y-координата камня $h/2$ равна значению функции $y(t_1)$:

$$y(t_1) = h/2, \rightarrow h - gt_1^2/2 = h/2. \qquad (1)$$

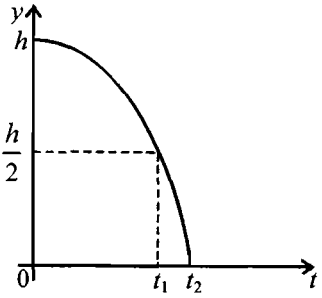


рис. 3.3.1

Для второго события — камень на поверхности Земли в момент времени $t = t_1 + \tau$, y-координата камня равна нулю:

$$y(t_1 + \tau) = 0, \rightarrow h - g(t_1 + \tau)^2/2 = 0. \qquad (2)$$

Система уравнений (1), (2) содержит две неизвестные величины h и t_1. Найдем корни системы. Представляя (1), (2) в виде $t_1 = (h/g)^{1/2}$, $t_1 + \tau = (2h/g)^{1/2}$, находим $h = g\tau^2(1 + \sqrt{2})^2$, $h = 56{,}8$ м.

Решение 2. Поместим начало координатной оси в точку бросания камня, положительное направление оси совпадает с направлением вектора $\vec{g}$. Полагая в (3.3.1) $y_0 = 0$, $v_0 = 0$, $a_0 = g$, получим функцию $y(t) = gt^2/2$. Рассматривая те же события, получим

$$y(t_1) = h/2, \rightarrow gt_1^2/2 = h/2. \qquad (3)$$

$$y(t_1 + \tau) = h, \rightarrow g(t_1 + \tau)^2/2 = h. \qquad (4)$$

Очевидно система (1), (2) совпадает с системой (4), (5).

Задача 3.3.2. Камень бросили вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Найдите максимальную высоту подъема камня.

Решение. Направим ось y по вертикали вверх, начало отсчета совместим с положением руки в момент бросания камня. Согласно условию функции (3.3.1), (3.3.2) имеют вид

$$y(t) = v_0t - gt^2/2, \qquad v_y(t) = v_0 - gt.$$

Пусть t_m — момент времени, в который камень находится на максимальной высоте h. В этой точке скорость камня равна нулю. Следуя общему рецепту, записываем

$$v_y(t_m) = 0, \rightarrow v_0 - gt_m = 0, \qquad (1)$$

$$y(t_m) = h, \rightarrow v_0t_m - gt_m^2/2 = h. \qquad (2)$$

Из системы уравнений (1), (2) находим $h = v_0^2/2g$, $t_m = v_0/g$. $h = 5{,}1$ м.

Задача 3.3.3. Камень брошен с поверхности Земли вертикально вверх. На высоте $h = 8{,}6$ м он побывал дважды с интервалом времени 2τ, $\tau = 1{,}5$ с. Определите начальную скорость камня.

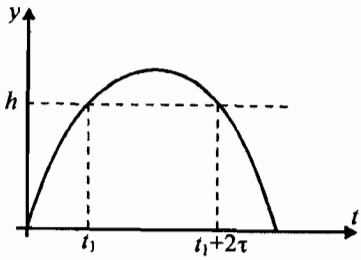


рис. 3.3.2

Решение. Направим ось y вертикально вверх, начало координат поместим на поверхность Земли. Для решения задачи достаточно использовать функцию (3.3.1): $y(t) = v_0t - gt^2/2$, график которой изображен на рис. 3.3.2. В условии задачи выделены два события. Первое событие — камень находится на высоте h в момент времени t_1:

$$y(t_1) = h, \rightarrow v_0t_1 - gt_1^2/2 = h. \qquad (1)$$

Второе событие — камень на высоте h в момент времени $t_1 + 2\tau$:

$$y(t_1 + 2\tau) = h, \rightarrow v_0(t_1 + 2\tau) - g(t_1 + 2\tau)^2/2 = h. \qquad (2)$$

Из системы (1), (2) находим $v_0 = [2gh + g^2\tau^2]^{1/2}$, $v_0 = 19{,}6$ м/с. Если переписать полученное соотношение в виде $v_0^2/2g = h + g\tau^2/2$, то оно имеет очевидный смысл: максимальная высота подъема $v_0^2/2g$ равна сумме высоты h и перемещения с максимальной высоты до уровня h в течение времени τ.

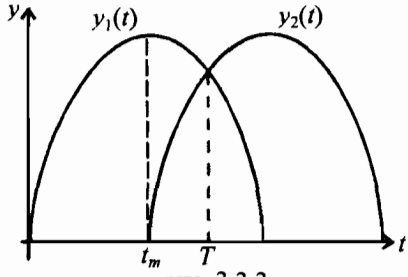


рис. 3.3.3

Задача 3.3.4. Жонглер бросает с одного уровня два шарика вертикально вверх с одинаковыми начальными скоростями. Когда первый шарик достиг максимальной высоты H_m, жонглер бросил второй шарик. Найдите значение высоты h, на которой шарики окажутся одновременно.

Решение. Выберем ось y, направленную вертикально вверх, с началом на уровне бросания шариков. Время отсчитывает секундомер, запущенный в момент бросания первого шарика. Из решения задачи 3.3.2 следует, что второй шарик брошен в момент времени $t_m = v_0/g$, когда первый шарик был на максимальной высоте $H_m = v_0^2/2g$. Зависимость координат первого и второго шариков от времени имеет вид, следующий из (3.3.1)

$$y_1(t) = v_0t - gt^2/2, y_2(t) = v_0(t - t_m) - g(t - t_m)^2/2.$$

На рис. 3.3.3. показаны графики функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$. В некоторый момент времени T оба шарика окажутся на одной высоте:

$$y_1(T) = y_2(T) \rightarrow v_0T - gT^2/2 = v_0(T - t_m) - g(T - t_m)^2/2.$$

Из этого уравнения находим $T = v_0/2g$. Значение высоты $h = y_1(T)$, $h = (3/4)H_m$.

Задача 3.3.5. Ракета стартует по вертикали с постоянным ускорением a. В момент времени T двигатель отключили. Найдите высоту подъема ракеты h. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Направим ось y вертикально вверх, начало расположим на поверхности Земли. В интервале $0 \le t \le T$ скорость и координата $v_y(t) = at$, $y(t) = at^2/2$. В интервале $t \ge T$ функции $v_y(t)$ и $y(t)$ имеют вид

$$v_y(t) = v_0 - g(t - T), \qquad y(t) = y_0 + v_0(t - T) - g(t - T)^2/2,$$

где $y_0 = aT^2/2$, $v_0 = aT$. Ракета достигнет максимальной высоты в момент времени t_m, удовлетворяющий условиям

$$v_y(t_m) = 0 \to aT - g(t_m - \mathrm{T}) = 0, \tag{1}$$

$$h = y(t_m), \to h = aT^2/2 + aT(t_m - T) - g(t_m - T)^2/2. \tag{2}$$

Из системы (1), (2) находим $h = aT^2(1 + a/g)/2$, $t_m = T(1 + a/g)$.

3.4. Криволинейное движение с постоянным ускорением

3.4.1. Координаты и скорость частицы. Шесть функций (3.2.1) и (3.2.2) позволяют определить скорость и координаты частицы в момент времени t при произвольных начальных условиях $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$. Тело движется прямолинейно, если вектор начальной скорости лежит на прямой параллельной вектору $\vec{a}_0$.Теперь рассмотрим ситуацию, в которой векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{a}_0$ образуют некоторый угол. Очевидно частица будет двигаться в плоскости, содержащей векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{a}_0$ и точку $\vec{r}_0$.

Здесь мы рассмотрим, представляющую наибольший интерес, задачу о движении тела с ускорением $\vec{a}_0 = \vec{g}$ в однородном поле тяжести. Для математического описания движения введем правую систему координат. Плоскость xy совместим с вертикальной плоскостью. Проведем ось x параллельно поверхности Земли, ось y направим вертикально вверх. Ось z перпендикулярна плоскости xy. Начальная скорость $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, 0)$. Начало координат выберем так, что радиус-вектор частицы в начальном положении $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$. Тогда координатное представление (3.2.1) и (3.2.2) имеет вид

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t, \qquad y(t) = y_0 + v_{0y}t - gt^2/2, \qquad z(t) = 0. \tag{3.4.1}$$

$$v_x(t) = v_{0x}, \qquad v_y(t) = v_{0y} - gt, \qquad v_z(t) = 0, \tag{3.4.2}$$

Отметим еще раз, что решение любой физической задачи приводит к необходимости найти решение системы уравнений. Однако (3.4.1), (3.4.2) представляют собой функции, а не уравнения. Для получения системы уравнений следует использовать общий рецепт, изложенный в п. 3.3.3. Необходимо рассмотреть события, которые ввел автор задачи в условии и вопросе, и записать их в терминах значений функций (3.4.1) и (3.4.2). Учитывая явную зависимость

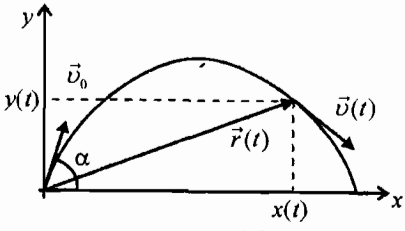


рис. 3.4.1

функций от времени, мы должны получить систему уравнений, содержашую то же число неизвестных. Теперь можно приступать к ее решению.

Пример 3.4.1. Камень брошен с поверхности Земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонтальной плоскости. Найдем максимальные значения высоты подъема H и дальности полета D камня. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Выберем начало координат в точке бросания камня, α — угол между вектором $\vec{v}_0$ и осью x (рис. 3.4.1). Полагая в (3.3.1), (3.3.2) $x_0 = y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0\cos\alpha$, $v_{0y} = v_0\sin\alpha$, запишем четыре функции

$$x(t) = v_0\cos\alpha\, t, \qquad y(t) = v_0\sin\alpha\, t - gt^2/2. \tag{1}$$

$$v_x(t) = v_0\cos\alpha, \qquad v_y(t) = v_0\sin\alpha - gt, \tag{2}$$

Рассмотрим первое событие — камень в высшей точке траектории в момент времени t_1. В этой точке проекция скорости на вертикаль — ось y — равна нулю. Величина H равна значению функции $y(t_1)$. Из (1), (2) получаем

$$v_y(t_1) = 0, \rightarrow v_0\sin\alpha - gt_1 = 0, \tag{3}$$

$$H = y(t_1), \rightarrow v_0\sin\alpha\, t_1 - gt_1^2/2 = H. \tag{4}$$

Из системы уравнений (3), (4) находим

$$t_1 = v_0\sin\alpha/g, \qquad H = v_0^2\sin^2\alpha/2g.$$

Найдем теперь дальность полета D. Эта величина связана со вторым событием — падением камня на Землю в момент времени t_2: $D = x(t_2)$, $y(t_2) = 0$. Учитывая (1), получим

$$y(t_2) = 0, \rightarrow v_0\sin\alpha\, t_2 - gt_2^2/2 = 0. \tag{5}$$

$$D = x(t_2), \rightarrow v_0\cos\alpha\, t_2 = D \tag{6}$$

Решение этой системы

$$t_2 = 2v_0\sin\alpha/g,\ D = v_0^2\sin2\alpha/g.$$

Отметим, что $t_2 = 2t_1$, т. е. время подъема равно времени спуска.

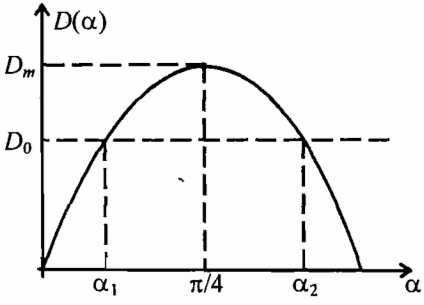


рис. 3.4.2

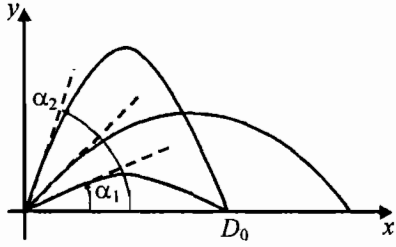


рис. 3.4.3

Зависимость дальности от угла α изображена на рис. 3.4.2. Как видно, при заданной величине начальной скорости дальность принимает значения в интервале $0 \le D \le D_m$, $D_m = v_0^2/g$. Дальность полета достигает максимального значения при $\alpha = \alpha_m$, $\alpha_m = \pi/4$. Максимальная высота подъема $H_m = D_m/4$. Значениям двух углов, со сторонами, смещенными симметрично относительно угла $\alpha_m = \pi/4$ на угол θ, соответствуют две различные траектории с одинаковой дальностью полета D_0: значению $\alpha_1 = \pi/4 - \theta$ — настильная траектория, значению $\alpha_2 = \pi/4 + \theta$ — навесная траектория (рис. 3.4.3). Очевидно $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$.

Задача 3.4.2. Дальность полета снаряда, летящего по навесной траектории, равна максимальной высоте подъема $H_2 = 3200$ м. Найдите максимальную высоту H_1 настильной траектории при том же значении дальности.

Решение. Используя решение примера 3.4.1, получим согласно условиям задачи систему уравнений

$$H_2/D = \sin\alpha_2/4\cos\alpha_2,\ H_2 = D,\ H_1/D = \sin\alpha_1/4\cos\alpha_1,\ \alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2,$$

из которой находим $H_1 = H_2/16$, $H_1 = 200$ м.

Задача 3.4.3. Продолжительность полета мяча, брошенного под углом к горизонтальной плоскости, $T = 2$ с. Найдите максимальную высоту подъема мяча.

Пример 3.4.4. Из точки O вылетает ядро, которое должно попасть в цель — камень, который начинает падать с высоты h в момент вылета ядра. Начальная скорость камня равна нулю. Найдем угол α между вектором начальной скорости ядра и горизонтальной плоскостью.

Расположим начало координатной системы xy в точке O, ось x — по горизонтали, ось y направим вертикально вверх. Начальная скорость ядра $\vec{v}_1(0) = (v_0\cos\alpha,\ v_0\sin\alpha,\ 0)$, начальное положение $\vec{r}_1(0) = (0, 0, 0)$. Согласно (3.4.1) координаты ядра

$$x_1(t) = v_0\cos\alpha\ t,\ y_1(t) = v_0\sin\alpha\ t - gt^2/2.$$

Пусть начальное положение цели задано вектором $\vec{r}_2(0) = (s, h, 0)$ (рис. 3.4.4). Закон движения цели в выбранной системе координат

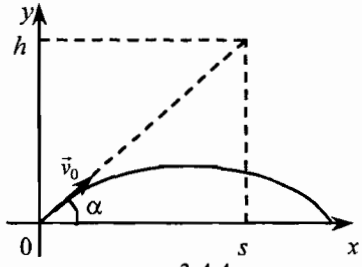


рис. 3.4.4

$$x_2(t) = s,\ y_2(t) = h - gt^2/2.$$

В момент попадания ядра в цель $t = T$ координаты ядра и цели совпадают:

$$x_1(T) = x_2(T),\ \rightarrow v_1\cos\alpha\ T = s, \qquad (1)$$

$$y_1(T) = y_2(T),\ \rightarrow v_0\sin\alpha\ T - gt^2/2 = h - gT^2/2. \qquad (2)$$

Разрешая систему (1), (2), находим $tg\alpha = h/s$.

Найдем теперь возможные ограничения на величины s и h. Очевидно

$$s \le v_0^2\sin2\alpha/g, \quad \text{или} \quad s^2 \le h(2v_0^2/g - h).$$

Задача 3.4.5. Спортсмен толкает ядро. Под каким углом должна быть направлена скорость, чтобы ядро упало как можно дальше? Величина начальной скорости ядра v_0 = 12 м/с, высота точки бросания H = 2 м.

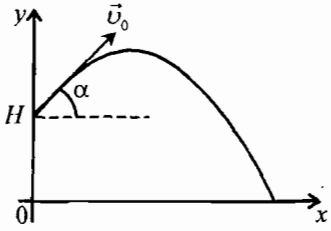


рис. 3.4.5

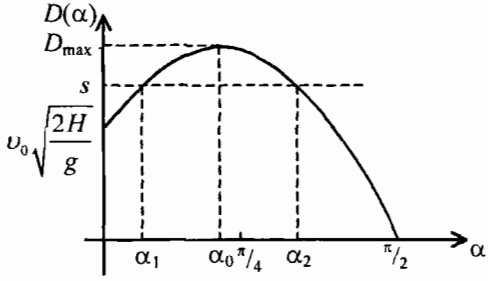


рис. 3.4.6

Решение. Расположим начало координат и положение осей xy, как показано на рис. 3.4.5. Начальное положение ядра задается вектором $\vec{r}_0$ = (0, H, 0). Согласно (3.4.1) координаты ядра в момент времени t определяются функциями

$$x(t) = v_0\cos\alpha\, t,\ y(t) = H + v_0\sin\alpha\, t - gt^2/2.$$

Пусть $t = T$ — момент падения ядра на землю: тогда $y(T) = 0$, дальность $D = x(T)$. Учитывая явный вид функций $x(t)$ и $y(t)$, получим систему

$$H + v_0\sin\alpha\, T - gT^2/2 = 0, \tag{1}$$

$$v_0\cos\alpha\, T = D, \tag{2}$$

из которой находим

$$D(\alpha)=\frac{v_0\cos\alpha}{g}\left(v_0\sin\alpha+\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2gH}\right) \tag{3}$$

Нам необходимо найти значение $\alpha = \alpha_0$, при котором функция $D(\alpha)$ достигает максимума. Для этого надо решить уравнение $dD/d\alpha = 0$, где $dD/d\alpha$ — производная функции $D(\alpha)$. Проще, однако, воспользоваться следующим приемом. Изобразим примерный вид графика функции $D(\alpha)$ (рис. 3.4.6) и найдем значения углов α_1 и α_2, при которых дальность равна s. Полагая в (3) $D = s$ и учитывая, что $\cos^{-2}\alpha = 1 + tg^2\alpha$, получим уравнение

$$tg^2\alpha-\frac{2v_0^2}{gs}\mathrm{tg}\alpha+1-\frac{2v_0^2H}{gs^2}=0\,,$$

корни которого

$$\mathrm{tg}\alpha_{1,2}=\frac{v_0^2}{gs}\left(1\pm\sqrt{1-\left(\frac{gs}{v_0^2}\right)^2+\frac{2gH}{v_0^2}}\right). \tag{5}$$

При $s = D_{max}$ уравнение (4) должно иметь один корень, определяющий значение искомого α_0. Следовательно,

$$1 - (gD_{max}/v_0^2)^2 + (2gH/v_0^2) = 0, \quad (6)$$

$$tg\alpha_0 = v_0^2/gD_{max}. \quad (7)$$

Из (6), (7) находим

$$D_{max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gH}, \quad (8)$$

$$\mathrm{tg}\alpha_0 = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}}. \quad (9)$$

При $H = 0$ получаем уже известный результат задачи 3.4.1. На основе формул (8) и (9) можно давать вполне обоснованные тренерские указания спортсмену. Для достижения максимальной дальности точка бросания ядра должна быть расположена как можно выше, угол бросания определяется формулой (9). Подставляя числовые данные, находим $\alpha_0 = 41°$, $D_{max} = 16{,}57$ м. Мировой рекорд — 23,12 м (1990 г.).

Используем формулу (3) для анализа прыжков в длину с разбега. В качестве горизонтальной составляющей начальной скорости возьмем максимальную скорость спринтера $v_0\cos\alpha = 10{,}5$ м/с. Вертикальную составляющую скорости найдем исходя из того, что, прыгая с места вертикально, человек поднимает центр тяжести на высоту 0,6 м: $v_0\sin\alpha = \sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}6} = 4{,}85$ м/с. Следовательно, $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}46$, $\alpha = 25°$. Величина $H = 0{,}6$ м равна расстоянию по вертикали между положениями центра тяжести на старте и при приземлении. В 1968 г. Боб Бимон прыгнул на 8,9 м, «как получилось», вопреки канонам техники. Его рекорд был перекрыт Майклом Пауэлом в 1991 г. — 8,95 м.

Задача 3.4.6. Тело брошено с высоты H под углом α к горизонтальной плоскости. К поверхности земли оно подлетает под углом β. Какое расстояние по горизонтали пролетит тело?

3.5 Относительное движение

3.5.1. Соотношение между скоростями частицы в двух системах отсчета. Абсолютного движения не существует, тело перемещается относительно другого тела или системы тел, которую мы называем системой отсчета и рассматриваем условно как неподвижную. Действительно, все данные о положении, скорости и ускорении тела будут иметь смысл только тогда, когда мы одновременно назовем систему отсчета, по отношению к которой, изучается его движение. Однако то же движущееся тело или другие явления может изучать наблюдатель, находящийся в другой системе отсчета, движущейся относительно первой. Его выводы о положении, скорости и ускорении тела будут иными, чем у первого наблюдателя. Выясним связь между утверждениями двух наблюдателей.

С этой целью рассмотрим движение частицы в «неподвижной» системе отсчета K и в системе отсчета K', движущейся *поступательно* относительно системы K со скоростью $\vec{u}$. Это означает, что оси декартовых систем координат xyz и $x'y'z'$ с началами отсчета в точке O системы K и в точке O' системы K' остаются параллельными друг другу. Радиус-вектор точки O' равен $OO' = \vec{R}(t)$. В системе K радиус-вектор частицы, находящейся в точке P, равен $OP = \vec{r}\,(t)$, скорость частицы — $\vec{v}\,(t)$. Другой наблюдатель, находящийся в системе отсчета K', определяет положение частицы радиус-вектором $O'P = \vec{r}\,'(t)$. Скорость частицы в системе K' равна $\vec{v}\,' = d\vec{r}\,'(t)/dt$. Очевидно $OP = OO' + O'P$ или $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$. Далее найдем приращение $\Delta\vec{r}(t) = \Delta\vec{R}(t) + \Delta\vec{r}'(t)$. Переходя в отношении $\Delta\vec{r}/\Delta t$ к пределу $\Delta t \to 0$, получим

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'. \qquad (3.5.1)$$

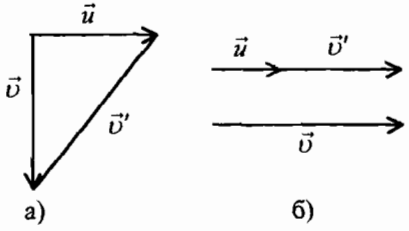


рис. 3.5.1

Мы видим, что *скорость частицы в неподвижной системе отсчета равна сумме скорости движущейся системы отсчета и скорости частицы относительно движущейся системы.*

Соотношение (3.5.1) позволяет без особых затруднений исследовать проблемы, для решения которых достаточно рассмотреть движение тел по отношению к движущейся системе отсчета. Например, если $\vec{v}$ — скорость капель дождя относительно Земли (рис. 3.5.1 *а*), $\vec{u}$ — скорость автомобиля, то $\vec{v}'$ — скорость капель относительно автомобиля; или $\vec{v}$ — скорость лодки относительно берегов, а $\vec{u}$ — скорость течения реки, то $\vec{v}'$ — скорость лодки в системе отсчета, связанной с водой (например, относительно плота на воде). При движении по течению скорость лодки равна скорости течения реки плюс скорость лодки относительно покоящейся воды (рис. 3.5.1 *б*) и т. д.

3.5.2. Соотношение между ускорениями частицы в двух системах отсчета. Дифференцируя (3.5.1), получим соотношение, связывающее ускорение частицы $\vec{a}$ в системе отсчета К и ускорение $\vec{a}'$ в системе отсчета К′, движущейся поступательно относительно системы К с ускорением $\vec{w}$:

$$\vec{a} = \vec{w} + \vec{a}'. \qquad (3.5.2)$$

Задача 3.5.1. Приборы, установленные на берегу, показывают, что ветер дует с юго-запада, а величина скорости ветра $v = 5$ м/с. Что покажут аналогичные приборы, установленные на корабле, идущем на запад со скоростью $u = 36$ км/ч.

Решение. В задаче идет речь об определении скорости ветра в двух системах отсчета: неподвижной системе, связанной с Землей, и системе, дви-

жущейся на запад со скоростью u. В неподвижной системе отсчета вектор скорости ветра известен и равен v. Из соотношения (3.5.1), связывающего скорости ветра в неподвижной и движущейся системах, находим вектор скорости ветра $\vec{v}'$ относительно корабля (рис 3.5.2):

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}. \qquad (1)$$

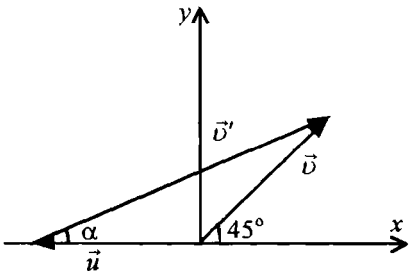


рис. 3.5.2

Соотношение (1) представляет два независимых уравнения, являющихся проекциями (1) на оси x и y прямоугольной системы координат. Пусть α – угол между вектором $\vec{v}'$ и осью x на рис. 3.5.2. Тогда из (1) получим систему уравнений

$$v'\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}v + u,\ v'\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}v.$$

Последнее соотношение можно получить непосредственно, применяя теорему косинусов к треугольнику, образованному векторами $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{v}'$. Подставляя числовые данные находим $\alpha = 15°$, $v = 14$ м/с

Задача 3.5.2. Проплывая под мостом против течения, гребец потерял соломенную шляпу. Обнаружив пропажу через $\tau = 10$ мин, он повернул назад и гребя по течению, подобрал шляпу в $s = 1$ км ниже моста. Определять скорость течения реки (предполагается, что гребец гребет одинаково интенсивно).

Решение. Очевидно, скорость течения реки $u = s/T$, где T — время, за которое шляпа проплыла путь s. Величину T проще всего найти, рассматривая движение в системе отсчета, связанной с водой. В этой системе вода неподвижна, а гребец в течение времени τ плыл от шляпы и подплывал к ней с одной и той же скоростью. Следовательно, $T = 2\tau$, $u = s/2\tau = 3$км/ч.

Пример 3.5.3. По палубе теплохода ходит пассажир от кормы к носу и обратно без остановок. Найдите условие, при котором пассажир окажется на уровне любой точки на берегу ровно три раза.

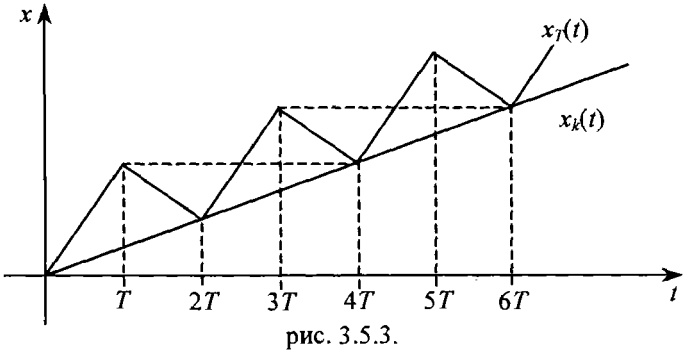


рис. 3.5.3.

Введем ось x, направленную параллельно скорости теплохода u. Скорость пассажира относительно теплохода — v_0. Координата кормы теплохода в системе координат, связанной с берегом $x_к(t) = ut$. Пусть T — интервал времени, в течение которого пассажир проходит палубу в одном направлении. В моменты времени $t = 2T, 4T, \ldots$ пассажир возвращается к корме — координаты пассажира $x_п(t)$ равны $2uT, 4uT, \ldots$. Очевидно координаты пассажира $x_п(T) = (u + v_0)T$, $x_п(3T) = 2uT + (u + v_0)T, \ldots$ (рис. 3.4.3). Согласно условию $x_п(T) = x_к(4T)$ или $(u + v_0)T = 4uT$. Следовательно, $v_0 = 3u$.

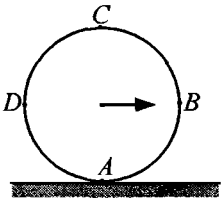


рис. 3.5.4 *а*

Задача 3.5.4. Колесо катится по горизонтальной поверхности со скоростью u без проскальзывания (рис. 3.5.4 *а*). Определить скорости точек A, B, C, D.

Решение. Скорость перемещения оси колеса u. Введем систему отсчета K', движущуюся поступательно вместе с осью колеса. В этой системе скорости $\vec{v}'$ точек обода направлены по касательной к ободу и одинаковы по величине.

Согласно (3.5.1) скорость любой точки колеса относительно Земли является суммой векторов скорости $\vec{u}$ и скорости $\vec{v}'$. Направление $\vec{v}'$ в каждой точке обода известно. Определим величину скорости $\vec{v}'$. Для этого рассмотрим точку A. Так как колесо движется без проскальзывания, то в любой момент времени точка касания колеса с поверхностью неподвижна относительно этой поверхности, т. е. скорость точки A в системе отсчета К равна нулю. Проецируя векторное равенство (3.5.1) на горизонтальное направление, находим

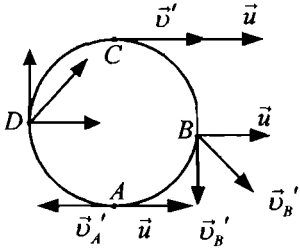


рис. 3.5.4 *б*

$$v_A = 0, \quad 0 = u - v'.$$

Следовательно, $v' = u$. Теперь нетрудно найти скорость точки В относительно Земли (рис. 3.5.3б) $\vec{v}_B = \vec{u} + \vec{v}_B'$, $v_B = \sqrt{2}\,u$; точки C: $\vec{v}_C = \vec{u} + \vec{v}_C'$, $v_C = 2u$; и скорость точки D: $\vec{v}_D = \vec{u} + \vec{v}_D'$, $v_D = \sqrt{2}\,u$.

Задача 3.5.4. Скоростъ бутсы футболиста в момент удара по неподвижному мячу равна u. Определить скорость мяча после удара. Удар абсолютно упругий. Предполагается, что скорость бутсы после удара не изменяется, т. е. масса бутсы значительно больше массы мяча (см. задачу 6.8.1).

Решение. После упругого столкновения мяча с бутсой его скорость изменится по направлению, оставаясь по величине неизменной. Это утверждение справедливо только в системе отсчета, относительно которой бутса неподвижна. Поэтому для решения задачи необходимо рассмотреть процесс соударения в системе отсчета, связанной с бутсой и движущейся со скоростью $\vec{u}$ относительно Земли. В этой системе мяч налетает на бутсу со скоростью $-\vec{u}$, а после удара скорость мяча становится равной $\vec{u}$. Таким

образом, после удара мяч летит со скоростью $\vec{u}$ относительно бутсы, а бутса движется со скоростью, $\vec{u}$ относительно Земли. Тем самым скорость мяча после удара относительно Земля равна $2\vec{u}$. т. е. по определению равна сумме скорости движущейся системы и скорости тела относительно движущейся системы.

Приведем общее решение задачи на определение скорости частицы после упругого столкновения с движущейся плоскостью. Пусть частица движется перпендикулярно плоскости со скоростью $\vec{v}_{in}$. В системе покоя плоскости ее скорость $\vec{v}'_{in} = \vec{v}_{in} - \vec{u}$. После столкновения скорость частицы стала равной $\vec{v}'_{out} = -\vec{v}'_{in} = \vec{u} - \vec{v}_{in}$. Переходя в исходную систему отсчета, найдем согласно (3.5.1) скорость частицы после столкновения

$$\vec{v}_{out} = \vec{u}. + \vec{v}'_{out} = 2\vec{u} - \vec{v}_{in}$$

Пример 3.5.5. Скорость струи пара перед попаданием на лопатки паровой турбины равна $\vec{v}$. Какова должна быть скорость $\vec{u}$ лопаток, чтобы вся кинетическая энергия струи пара могла перейти в энергию вращения турбины?

Для того чтобы вся кинетическая энергия струи пара перешла в энергию вращения турбины, скорость струи пара после отражения от лопатки должна равняться нулю. Предположим, что столкновение струи с лопаткой является упругим процессом. Полагая в полученном выше решении $\vec{v}_{out} = 0$, находим $u = v/2$. Это соотношение всегда выполняется в рабочем режиме турбины.

Глава 4. Законы Ньютона

Ученые и мыслители древности были первыми создателями философских учений, теоретических схем и моделей реальных процессов. Теперь мы знаем, что во многом они заблуждались. Но таков естественный путь познания природы.

Огромное влияние на развитие науки оказал величайший древнегреческий ученый и философ Аристотель (384—322 до н.э.) из Стагира. В 367 г. до н. э. он поступил в школу, основанную Платоном (428—348 до н. э.) — учеником Сократа (469—399 до н.э.) в местности Академия недалеко от Афин. После 20 лет учебы вернулся ко двору царя Филиппа и стал воспитателем его сына — будущего знаменитого полководца Александра. В 355 г. до н. э. основал в Афинах лицей и написал более 300 работ. Аристотель создал теорию познания, формальную логику, теорию поэзии, механику, описательную биологию и физиологию. Впоследствии был обвинен в безбожии и бежал на остров Эвбея, спасаясь от расправы.

Повседневный опыт создает впечатление, что движение тел с постоянной скоростью требует определенных усилий. В механике Аристотеля этот вывод получает теоретическое обоснование, не связанное с обращением

к эксперименту. Он формулирует принцип: «природа боится пустоты», т. е. пространство заполнено материей, которая оказывает сопротивление движению тел. Поэтому для движения тела с постоянной скоростью необходимо приложить силу. Отсюда вывод — в отсутствие сил движение невозможно. Авторитет Аристотеля в Древнем мире и в Средние века был настолько велик, что его утверждения почти две тысячи лет составляли основу механики. Нужны были значительные усилия, чтобы преодолеть сложившиеся веками догмы и взглянуть на проблему движения по-новому.

Эпоха Великих географических открытий, начавшаяся в XVI в. (Х. Колумб, 1492 г., Васко де Гама, 1497 г., Ф. Магеллан, 1519—21 гг.), привела к быстрому развитию оптики, астрономии и механики. Однако нужны были значительные усилия, чтобы преодолеть сложившиеся веками догмы и взглянуть на проблему движения по-новому.

4.1. Первый закон Ньютона

Первый шаг, в этом направлении сделал Галилео Галилей (1564—1642 гг.). Положив в основу своих выводов экспериментальные факты, Галилей разрушил систему Аристотеля и заложил фундамент научного подхода к изучению физических явлений. Соединение принципов научного мышления и опыта сделало Галилея «отцом» современной физики. Галилей экспериментально показал, что под действием постоянной силы свободное тело движется не равномерно, а равноускоренно: тело «сопротивляется» ускорению, а не движению с постоянной скоростью. Он утверждал, что «любая скорость, сообщенная телу, устойчиво сохраняется до тех пор, пока нет никаких причин к возникновению торможения или ускорения».

Первым результатом опытов Галилея было понимание, что важно не движение само по себе, а изменения в движении — ускорение. Придя к этому выводу, Галилей начал изучать падения тел. Здесь он столкнулся с трудной задачей измерения времени. Он сумел «замедлить» процесс падения, заставив тело скользить по наклонной плоскости, а взвешивая воду, вытекавшую из резервуара за время движения тел, он смог оценить короткие интервалы времени с точностью до 0,1 с. Изучая проблему падения тел, Галилей обнаружил, что масса падающего тела почти не влияет на его движение: более крупные предметы падают немного быстрее, чем мелкие. Это различие он понял как вторичный эффект, который следует приписать силе сопротивления со стороны воздуха. Факт падения тел с почти одинаковой скоростью оказался важнее небольших различий в движении. Результаты опытов, проведенных несовершенными методами, путем логических рассуждений были обобщены в 1632 г. на модели движения в отсутствие трения в пустоте. Галилей открыл один из самых удивительных законов природы. Он установил, что ускорение падающих тел не зависит от их массы (см. часть VI. 1.6).

Критикой механики Аристотеля Галилей не раз восстанавливал против себя университетские круги. Научная смелость Галилея представится еще

более значительной, если учесть, что его взгляды противоречили не только здравому смыслу современников, но и догматам церкви, имевшей в качестве основного аргумента суд инквизиции.

Позднее И. Ньютон, родившийся в год смерти Галилея — в 1642 г., придал ясность выводам Галилея, сформулировав *закон инерции*: если на тело не действуют другие тела, то оно движется прямолинейно с постоянной скоростью или остается в покое. Под телом в этой формулировке понимается материальная точка. Таким образом, в законе инерции речь идет о свободном, т. е. не подвергающемся внешним воздействиям, теле.

Почему о первом законе Ньютона говорят, как о законе инерции? (от лат. *inertia* — бездеятельность). Под инерцией следует понимать свойство тел сохранять свою скорость по величине и направлению или состояние покоя при отсутствии воздействия со стороны других тел.

В повседневной практике закон инерции непосредственно не проявляется. Ведь по закону инерции тело, которому сообщили начальную скорость, должно двигаться с этой же скоростью прямолинейно без конца. Однако из наблюдений нам известно, что любое тело, получив толчок, через некоторое время остановится. Причину этого замедления следует приписать трению о поверхности и воздух. Улучшая условия опыта, уменьшая силы трения, можно приблизиться к идеальным условиям, необходимым для наблюдения закона инерции.

В п. 3.5 мы уже отмечали, что для изучения движения тел необходимо выбрать определенную систему отсчета. Системы отсчета, в которых выполняется закон инерции, называются *инерциальными*. Все системы отсчета, движущиеся по отношению к инерциальной системе поступательно с постоянной скоростью, представляют собой инерциальные системы отсчета.

4.2. Второй закон Ньютона

4.2.1. Сила, действующая на тело. Величайший английский ученый Исаак Ньютон (1642—1727 гг.) оставил огромное научное наследие в разных областях наук. Его работы явились важнейшими этапами в развитии оптики, астрономии, математики и механики. Самым главным достижением Ньютона было создание основ механики, анализа и открытие закона всемирного тяготения. Исключительный авторитет приобрел Ньютон благодаря выдающемуся труду «Математические основы натуральной философии», вышедшему более трехсот лет назад в 1687 г. Эта работа превратила надолго механику в эталон науки. Только в начале прошлого века стало ясно, что классические понятия имеют ограниченную область применимости. На памятнике Ньютону в Вестминстерском аббатстве есть такие строки: «...пусть смертные радуются, что существовало такое украшение рода человеческого».

При движении различных тел обнаруживается одно общее свойство — движение тела с ускорением обусловлено взаимодействием с другими телами. Для количественной характеристики этого взаимодействия вводят понятие силы.

Сила, действующая на данное тело со стороны другого тела, является вектором, характеризующим взаимодействие двух тел. Все силы, исключая силы инерции, удовлетворяют этому определению. Если тело взаимодействует с системой N тел, то, как показывает опыт, сила $\vec{F}_1$, действующая на данное тело, равна сумме сил, действующих на него со стороны других тел системы:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots\ldots .$$

Отсюда следует полезный рецепт: *для того чтобы перечислить все силы, действующие на данное тело, необходимо перечислить все тела, с которыми оно взаимодействует.*

4.2.2. Основное уравнение механики. В своей фундаментальной работе «Математические начала натуральной философии» Ньютон установил соотношение между массой тела, ускорением и действующими на него силами

$$m\vec{a} = \vec{F}. \qquad (4.2.1)$$

Здесь $\vec{F}$ — сумма сил, действующих на тело, m — масса тела. В СИ единицей массы является килограмм, единицей силы — ньютон. Сила 1 H сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2. Внесистемная единица силы — 1кгс = 9,8 H — сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение g = 9,8 м/с^2.

Ньютон ввел понятие «масса» (от лат. *massa* — кусок, глыба) как меру количества вещества. Ее называют *инертной массой.* Природа массы, одна из важнейших еще не решенных задач физики. Неясно, почему массы элементарных частиц образуют дискретный (от лат. *discretus* — прерывистый) ряд значений. Понятие масса приобрело более глубокий смысл в теории относительности (см. ч. VI). Следует отметить, что термин «тело» в формулировке второго закона (4.2.1) означает материальную точку, которую мы называем частицей.

Поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{F}$ определяются своими компонентами, то уравнение (4.2.1) представляет собой символическую форму записи трех уравнений. В декартовых координатах имеем

$$ma_x = F_x, \qquad ma_y = F_y, \qquad ma_z = F_z. \qquad (4.2.2)$$

Поскольку ускорение является второй производной координат, то уравнения (4.2.2) представляют собой три дифференциальных уравнения.

Уравнения (4.2.1), составленные для каждой частицы системы, состоящей из N частиц, позволяют найти решение *основной задачи механики* — найти зависимость $3N$ координат частиц от времени по известным силам, начальным координатам и скоростям частиц. Поэтому второй закон Ньютона, являющийся основой классической физики, называют *уравнением движения.*

Здесь мы ограничимся более простой задачей о движении системы частиц, взаимодействующих с Землей, на движение которой они не оказывают существенного влияния. Тогда для полного решения задачи достаточно использовать только уравнения (4.2.1) для каждой частицы рассматриваемой системы.

4.3. Третий закон Ньютона

При взаимодействии двух тел сила $\vec{F}_{ab}$, действующая на частицу a со стороны частицы b, равна и противоположна по направлению силе $\vec{F}_{ba}$, действующей на частицу b со стороны частицы a. Запишем это утверждение в виде

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}. \qquad (4.3.1)$$

Следовательно, *все силы возникают «парами»*. Отметим, что согласно принципу относительности Галилея (см. 11.1) силы в механике Ньютона могут зависить только от относительных координат и относительных скоростей частиц.

4.4. Активные силы и силы реакции

В механике выделяют два класса сил, называемых условно активными силами и силами реакции. В отличие от активных сил, силы реакции определяются в результате решения уравнений движения (4.2.2).

4.4.1. Активные силы. 1. *Гравитационная сила притяжения.* Согласно закону всемирного тяготения, открытому И. Ньютоном в 1665—1666 гг., сила, действующая на частицу a со стороны частицы b, направлена по прямой ab от точки а к точке b; ее величина

$$F_{ab} = Gm_a m_b / r_{ab}^2. \qquad (4.4.1)$$

Здесь $G = 6{,}67 \quad 10^{-11}$ $Н \cdot м^2/кг^2$ — универсальная гравитационная постоянная, m_a, m_b — массы частиц, r_{ab} — расстояние между частицами. Позднее Ньютон доказал, что два однородных шара притягиваются как материальные точки, расположенные в центрах шаров.

Выберем в качестве модели Земли однородный шар радиусом $a = 6{,}35\ 10^6$ м, массой $M = 5{,}98\ 10^{24}$ кг. Величину силы притяжения GmM/a^2, действующую на частицу массой m на поверхности Земли, обозначим mg. Следовательно, $g = GM/a^2 \approx 9{,}8$ м/с^2. *Сила тяжести*, действующая на частицу со стороны Земли, $\vec{F} = m\vec{g}$, где $\vec{g}$ — вектор, направленный к центру Земли. Сила $\vec{F}'$, действующая на Землю со стороны частицы, приложена к центру Земли. В соответствии с третьим законом Ньютона $\vec{F}' = -\vec{F}$.

Если в каждой точке пространства на частицу действует сила со стороны других тел, то эту совокупность сил называют *силовым полем*. В том случае, когда в каждой точке пространства величина и направление сил одинаковы, то силовое поле называют *однородным постоянным полем*. На расстояниях, малых по сравнению с радиусом Земли, можно пренебречь кривизной земной поверхности и рассматривать поле тяготения Земли как *однородное поле*.

2. *Сила упругости.* На рис. 4.4.1 изображена пружина, один конец которой присоединен к частице массой m_a, а другой — к частице массой m_b. Радиус-векторы частиц равны соответственно $\vec{r}_a$ и $\vec{r}_b$. Свойства пружины определяются двумя характеристиками: k — коэффициент жесткости пру-

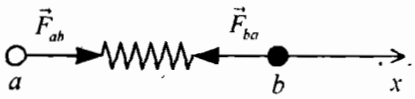


рис. 4.4.1

жины, l_0 — длина пружины в ненапряженном состоянии, размерность $[k]$ = Н/м. Если массой пружины можно пренебречь, то сила, действующая на частицу b со стороны частицы a, представляет собой функцию координат частиц

$$\vec{F}_{ba}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = -k(r_{ba} - l_0)\vec{r}_{ba}/r_{ba}, \qquad (4.4.2)$$

где вектор $\vec{r}_{ba} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$, $r_{ab} = |\vec{r}_{ab}|$.

В случае $m_a >> m_b$ смещением частицы а можно пренебречь. Выберем числовую ось x, проходящую через частицу b, с началом в точке закрепления пружины на частице a. Проекция на ось x силы, действующей на частицу b,

$$F_{bx}(x) = -k(|x| - l_0), \qquad (4.4.3)$$

где x — координата частицы b.

4.4.2. Силы реакции. Во многих случаях возможные положения тел в пространстве ограничены различными конструкциями. В этом случае говорят, что на систему тел наложены связи. Характерный пример — движение тела по некоторой поверхности, желобу или движение тела, прикрепленного к концу натянутой нерастяжимой нити. Реализация связей, ограничивающих значения координат и скорости тела, приводит к появлению сил, действующих на тело со стороны связей. Эти силы называются *силами реакции*. Силы реакции, в отличие от активных сил, заранее неизвестны. Они зависят от характера связей, активных сил, начальных условий и могут быть определены из второго закона Ньютона в ходе решения задачи.

1. *Нормальная сила реакции.* Сила реакции $\vec{N}$, действующая на частицу на *гладкой поверхности*, приложена в точке контакта и направлена по нормали к касательной плоскости, содержащей точку контакта (рис. 4.4.2). Согласно третьему закону Ньютона на поверхность действует сила $\vec{N}' = -\vec{N}$. Эту силу называют силой нормального давления.

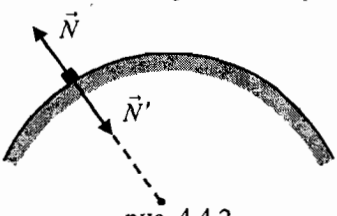


рис. 4.4.2

На тело, прикрепленное к натянутой нерастяжимой нити, действует сила реакции $\vec{T}$, называемая обычно *силой натяжения*. Эта сила направлена по нити. Если массой нити можно пренебречь, то на точку закрепления нити действует сила $\vec{T}' = -\vec{T}$.

2. *Сила трения скольжения.* При движении частицы по неподвижной шероховатой поверхности со стороны поверхности на нее действует сила трения скольжения $\vec{F}_т$. Если величина силы трения не зависит от скорости частицы, то ее называют *кулоновской силой трения скольжения*. В этом случае

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu N \vec{e}\,, \qquad (4.4.4)$$

где μ — коэффициент трения, $\vec{e} = \vec{v}/v$ — единичный вектор, направленный по скорости частицы $\vec{v}$, N — величина силы нормального давления. Величина силы трения $F_{\text{тр}} = \mu N$. Из третьего закона Ньютона следует, что сила трения, действующая на поверхность, $\vec{F}_{\text{тр}}' = -\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 4.4.3).

рис. 4.4.3

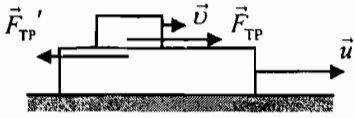


рис. 4.4.4

Рассмотрим теперь частицу на движущейся поверхности. Пусть $\vec{v}$ — скорость частицы, $\vec{n}$ — единичный вектор в точке поверхности, в которой находится частица, направленный по нормали наружу от поверхности, $\vec{u}$ — скорость этой точки поверхности. Сила трения, действующая на частицу,

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu N \vec{e}\,, \quad \vec{e} = \vec{v}_{\text{от}}/v_{\text{от}}, \qquad (4.4.5)$$

где $\vec{v}_{\text{от}} = \vec{v} - \vec{u}_{\text{к}}$ — скорость частицы относительно поверхности, вектор $\vec{u}_{\text{к}} = \vec{u} - \vec{n}(\vec{u}\vec{n})$ — компонента скорости точки поверхности $\vec{u}$, лежащая в плоскости, касательной к поверхности в точке контакта с частицей. На рис. 4.4.4 изображены силы трения в случае $v < u$, когда скорости частицы $\vec{v}$ и плоскости $\vec{u}$ имеют одно и то же направление.

Коэффициент трения зависит от степени обработки и материала соприкасающихся поверхностей. Например, при скольжении деревянных полозьев по льду $\mu = 0{,}035$, а при скольжении стальных — $\mu = 0{,}02$. Величина силы трения $F_{\text{тр}} = \mu N$ не зависит от площади соприкасающихся поверхностей. Например, сила трения, действующая на кирпич, одинакова независимо от того, какой гранью он прилегает к плоскости. При всей видимой простоте выражения для силы трения в настоящее время не существует полной теории, объясняющей природу трения.

Трение — неизбежное следствие молекулярной структуры тел и обусловлено образованием и разрывом молекулярных связей в зонах микроконтактов тела и поверхности. Возникающие при этом на молекулярно-атомном уровне многочисленные явления существенно затрудняют создание теории трения.

3. *Сила трения покоя.* Силы трения, действующие на твердые тела, обладают характерной особенностью — они не обращаются в нуль при относительной скорости соприкасающихся тел равной нулю, т. е. существует так называемая *сила трения покоя*. Величина и направление силы трения покоя, действующей на данное тело, определяются из уравнений движения (4.2.2) (см. задачи 4.5.9—4.5.13).

4.5. Общий метод решения задач по теме «Законы Ньютона»

В рамках программы средней школы второй закон Ньютона позволяет найти ускорения тел, силы трения и реакции. Для этого необходимо:

1. Выбрать инерциальную систему отсчета и систему координат.
2. Изобразить все силы, действующие на каждое тело системы.
3. Записать уравнения движения (4.2.1) для каждого тела системы
4. Перейти к записи уравнений движения в проекциях на оси координат.
5. Найти решение полученной системы уравнений.

Рассмотрим вначале несколько задач, предполагая, что силой трения можно пренебречь. В этом случае поверхность, на которой находится тело, называют абсолютно гладкой или просто гладкой поверхностью.

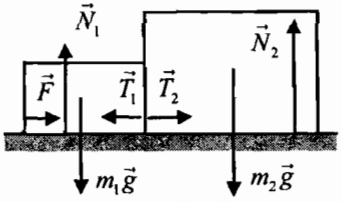


рис. 4.5.1

Задача 4.5.1. Два тела массой m_1 и m_2 движутся по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы $\vec{F}$, приложенной к телу m_1 (рис. 4.5.1). Определить силы, действующие на тело массой m_2.

Решение. На первое тело действует сила $\vec{F}$, сила притяжения $m_1\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}_1$ со стороны плоскости и сила реакции $\vec{T}_1$ со стороны второго тела. На второе тело — сила притяжения $m_2\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}_2$ со стороны плоскости и сила реакции $\vec{T}_2 = -\vec{T}_1$ со стороны первого тела, $\left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_1\right| = T$. Поскольку ускорения тел одинаковы, то второй закон Ньютона можно записать в виде

$$m_1\vec{a} = \vec{F} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1, \qquad (1)$$

$$m_2\vec{a} = \vec{T}_2 + m_2\vec{g} + \vec{N}_2. \qquad (2)$$

Выбирая положительное направление осей x, y декартовых координат по направлению скорости и вертикально вверх, из (1), (2) получим

$$m_1a = F - T, \quad m_1\cdot 0 = N_1 - m_1g,$$

$$m_2a = T, \quad m_2\cdot 0 = N_2 - m_2g.$$

Следовательно,

$$N_1 = m_1g, \quad N_2 = m_2g, \quad T = \frac{m_2}{m_1 + m_2}F.$$

Сделаем два замечания: 1. Силы реакции заранее неизвестны. Они найдены в результате решения системы четырех уравнений (1), (2). 2. Сила $\vec{F}$ не «передается» телу m_2.

Пример 4.5.2. Кубик массой m лежит на столе (рис. 4.5.2 *а*). На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Согласно второму закону Ньютона

$$m\cdot\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Следовательно, сила реакции $\vec{N} = -m\vec{g}$, ее величина $N = mg$.

Теперь приложим к кубику силу $\vec{F}$, направленную перпендикулярно поверхности грани (рис. 4.5.2 *б*). В этом случае на кубик действуют три силы: сила $\vec{F}$, сила реакции опоры $\vec{N}_1$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Из второго закона Ньютона

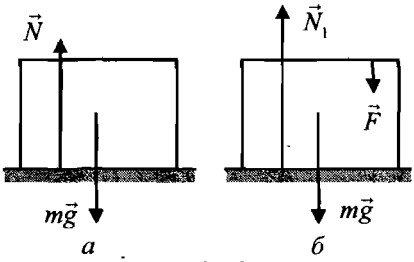


рис. 4.5.2

$$m\cdot\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}$$

находим $\vec{N}_1 = -m\vec{g} - \vec{F}$.

Величина силы реакции $N_1 = mg + F$ возросла. Этот простой пример приведен с целью показать, что силы не «передаются», вопреки широко распространенному заблуждению. Точка приложения силы $\vec{F}$ фиксирована на верхней грани кубика. Сила реакции заранее неизвестна и найдена в результате решения уравнений, следующих из второго закона Ньютона.

Пример 4.5.3. Динамометр находится на гладкой поверхности стола. К одному его концу приложена сила величиной $F_1 = 8$ Н, к другому — $F_2 = 5$ Н. Определить показание динамометра (рис. 4.5.3).

рис. 4.5.3

Пружина прикреплена к обойме динамометра массой M и к крюку массой m. Массой пружины пренебрегаем. Со стороны пружины на обойму и крюк действуют силы $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_1$, равные по величине T. Значение T определяет показания динамометра. Согласно второму закону Ньютона

$$Ma = T - F_2, \quad ma = F_1 - T.$$

Следовательно, ускорение динамометра

$$a = \frac{F_1 - F_2}{M + m}.$$

Динамометр будет показывать значение

$$T = \frac{MF_1 + mF_2}{M + m}. \qquad (1)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. $m = 0$. Из (1) находим $T = F_1 = 8$ Н. В этом случае сумма сил, действующих на крюк массой $m = 0$, равна нулю.

2. $M = m$. Из (1) следует значение $T = (F_1 + F_2)/2 = 6{,}5$Н. На обойму и крюк действуют одинаковые силы величиной 1,5 Н, сообщая одинаковое ускорение

3. $F_1 = F_2 = F_0$. Эта ситуация соответствует динамометру, прикрепленному к неподвижному или равномерно движущемуся телу. В этом случае $T = F_0$.

Задача 4.5.4. К двум телам, находящимся на гладком столе, прикреплен шнур, масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массами тел $m_1 = 4$ кг и $m_2 = 6$ кг. Шнур разрывается, если к телу массой m_1 приложить силу $F_1 = 200$ Н. Найдите минимальное значение силы F_2, которую необходимо приложить к телу массой m_2, чтобы разорвать шнур (рис. 4.5.4).

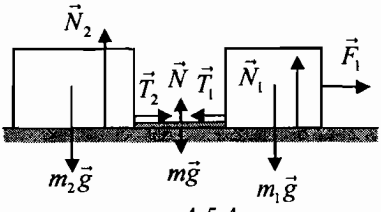


рис. 4.5.4

Решение. Найдем вначале максимальное значение силы натяжения шнура T_0. На рис. 4.5.4. изображены силы, действующие на оба тела системы. В горизонтальном направлении на первое тело действуют сила $\vec{F}_1$ и сила натяжения шнура $\vec{T}_1$, на второе тело-сила натяжения шнура $\vec{T}_2$. Так как массу шнура можно положить равной нулю, то величины сил натяжения T_1 и T_2 одинаковы. Действительно, для шнура массой m уравнение движения имеет вид

$$m\vec{a} = \vec{T}_1' + \vec{T}_2' + \vec{N} + m\vec{g},$$

где $\vec{T}_2' = -\vec{T}_2$, $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$ — силы, действующие на шнур со стороны второго и первого тел. Из этого уравнения следует, что при $m \neq 0$, $T_1 \neq T_2$. Поскольку $m = 0$, $\vec{a} \neq 0$, то $T_1 = T_2 = T$.

В проекции на горизонтальное направление уравнения движения первого и второго тел имеют вид

$$m_1 a = F_1 - T, \qquad m_2 a = T.$$

Из этой системы уравнений находим

$$T = m_2 F_1/(m_1 + m_2).$$

При $F_1 = 200$ Н сила натяжения достигает предельно допустимого значения $T_0 = 120$ Н.

Если теперь сила $\vec{F}_2$ приложена ко второму телу, то оба тела движутся с ускорением $\vec{a}'$. Из уравнений движения

$$m_2 a' = F_2 - T_0, \quad m_1 a' = T_0,$$

получим значение силы F_2, при котором шнур разорвется

$$F_2 = (m_1 + m_2)a' = (m_1 + m_2)T_0/m_1 = m_2F_1/m_1,\ F_2 = 300\ \text{Н}.$$

Задача 4.5.5. Коробка массой m_1, в которой находится груз массой m_2, скользит по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтальной плоскостью. Найдите силу давления груза на переднюю стенку коробки (рис. 4.5.5).

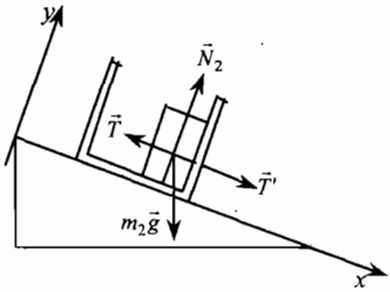


рис. 4.5.5

Решение. Перечислим силы, действующие на груз: $m_2\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{N}_2$, $\vec{T}$ — силы реакции со стороны дна и стенки. На стенку действует сила $\vec{T}' = -\vec{T}$. Из второго закона Ньютона

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}$$

в проекции на ось x получим уравнение

$$m_2a_{2x} = m_2g\sin\alpha - T. \qquad (1)$$

Коробка и груз как целое движутся с одинаковыми ускорениями $a_{2x} = a_{1x} = a$, $a = g\sin\alpha$. Подставляя это значение a в (1), находим $T = 0$. Груз касается стенки, но не деформирует стенку.

Пример 4.5.6. Космический корабль стартует вертикально с Земли или тормозится при спуске, входя по вертикали в плотные слои атмосферы. В обоих случаях вектор ускорения направлен вертикально вверх. Найдем вес космонавта.

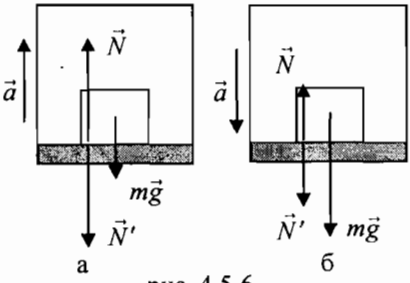


рис. 4.5.6

Благодаря гравитационному взаимодействию на все тела действует сила притяжения Земли $m\vec{g}$. Не следует путать эту силу, с силой веса. Как известно, *весом тела* называют силу, которая в системе покоя растягивает пружину, если к ней подвесить тело. Можно также определить вес тела как силу $\vec{N}'$, с которой тело давит на подставку. Следовательно, вес тела является силой, приложенной к подстановке, а не к телу.

Какие же силы действуют на тело в спускаемом аппарате? Таких сил две — сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$ (рис. 4.5.6 *а*).

Согласно третьему закону Ньютона сила веса $\vec{N}' = -\vec{N}$ приложена к плоскости опоры. Из (4.2.1) получим уравнение

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \qquad (1)$$

Из (1) следует

$$ma = N - mg$$

Поскольку $N' = N$, то сила веса космонавта $N' = m(a + g)$. Эта сила превосходит нормальный вес космонавта на величину ma. Выражение для веса можно записать в виде $N' = mg_{эфф}$, где эффективное ускорение $g_{эфф} = g + a$.

Человек может выдержать перегрузку $g_{эфф} = (10 \div 12)g$. В реальных условиях влияние перегрузок на организм человека зависит от того, под каким углом к горизонту движется спускаемый аппарат. При ускорении, равном $4g$, в направлении «голова-ноги» передвижение космонавта невозможно.

Значительные перегрузки испытывает пилот при посадке самолета на авианосец. Например, длина взлетной полосы авианосца «Теодор Рузвельт» (CVN-71) — 330 м. Натянутый канат может остановить самолет с начальной скоростью 240 км/ч за 2 секунды — тормозное ускорение 3,4 g. Самолет «выстреливается» с палубы катапультой: за те же 2 с она разгоняет 32-тонный аппарат до взлетной скорости 240 км/ч.

Невесомость. Рассмотрим теперь движение тела, ускорение которого параллельно вектору $\vec{g}$ (рис.4.5.6 *б*). Из уравнения

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

находим вес тела $\vec{N}' = m(g - a)$. Если тело вместе с кабиной находится в состоянии свободного падения ($\vec{a} = \vec{g}$), то вес тела равен нулю. Следовательно, для создания невесомости нет нужды выходить в космическое пространство за пределы сферы тяготения — тела почти невесомы, например в самолете, который движется в атмосфере с выключенным двигателем в поле тяготения Земли по траектории, близкой к параболе.

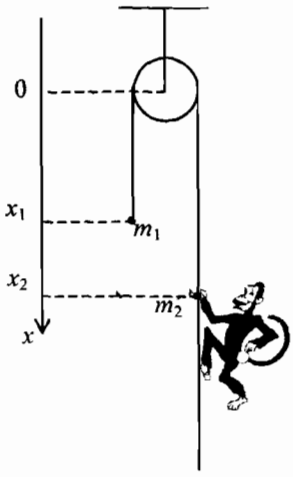


рис. 4.5.7

Пример 4.5.7. На одном конце нерастяжимой нити, переброшенной через блок, закреплена частица массой m_1, а по другой части нити перемещается частица массой m_2 (рис. 4.5.7). Найдем ускорения частиц и силу натяжения нити.

Направим ось x вертикально вниз, а начало координат поместим на уровне оси блока. Координаты частиц x_1 и x_2, проекции ускорения на ось x равны a_1 и a_2. На первую частицу действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_1$. На вторую частицу действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{T}_2$ со стороны другой части нити. При вращении блока проекция момента сил натяжения $T_1R - T_2R$ равна произведению массы блока на проекцию углового ускорения на прямую, параллельную оси блока. Если масса блока равна нулю, то $T_1 = T_2$. Предположим, что массы

блока и нити значительно меньше масс частиц. Тогда величины сил натяжения одинаковы $T_1 = T_2 = T$. Из второго закона Ньютона получим уравнения

$$m_1a_1 = m_1g - T, \qquad (1)$$

$$m_2a_2 = m_2g - T, \qquad (2)$$

в которые входят три неизвестные величины a_1, a_2 и T. Получим третье уравнение из соотношения, связывающего координаты частиц.

Пусть в начальный момент времени длина нити между точками, в которых находятся частицы, равна l_0. При смещении второй частицы вниз на расстояние $s(t)$ относительно нити, длина нити, связывающей частицы, станет равной $x_1 + x_2 = l_0 + s$. Следовательно, проекции скоростей частиц удовлетворяют соотношению $v_1 + v_2 = v$, где v — проекция на ось x скорости второй частицы относительно нити. Отсюда получим соотношение

$$a_1 + a_2 = w, \qquad (3)$$

где w —проекция на ось x ускорения второй частицы относительно нити. Из системы уравнений (1), (3) находим

$$g - \frac{T}{m_1} + g - \frac{T}{m_2} = w, \qquad T = \frac{(2g - w)m_1m_2}{m_1 + m_2},$$

$$a_1 = \frac{g(m_1 - m_2) + wm_2}{m_1 + m_2}, \qquad a_2 = \frac{-g(m_1 - m_2) + wm_1}{m_1 + m_2}.$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

А. Натяжение $T = 0$, если $w = 2g$. Проекции ускорения частиц $a_1 = a_2 = g$. Частицы находятся в состоянии свободного падения.

Б. $a_2 = 0$. В этом случае $w = (m_1\text{-}m_2)g/m_1 = a_1$, $T = m_2g$. Если $m_2 = 2m_1$, то $w = -g$.

В. $m_1 = m_2 = m$. Тогда $a_1 = a_2 = w/2$, $T = m(g - w/2)$.

Этот вариант задачи придумал Оксфордский профессор математики, автор книги «Алиса в стране чудес» Льюис Кэрролл: m_2 — масса обезьянки, m_1 — масса груза. При движении обезьянки вверх, груз поднимается.

Г. $w = 0$. Если блок заторможен, то величина силы, действующей на ось блока $N = (m_1 + m_2)g$. При движении частиц величина силы станет $N' = 2T$. Приращение $\Delta N = -(m_1 - m_2)^2g/(m_1 + m_2)$.

Пример 4.5.8. Три груза массой $m = 3$ кг каждый связаны нерастяжимой нитью через систему из трех блоков. Оси двух блоков висят на нитях, прикрепленных к балке (рис. 4.5.8). Найдите силу, действующую на балку. Массы нитей и блоков много меньше масс грузов.

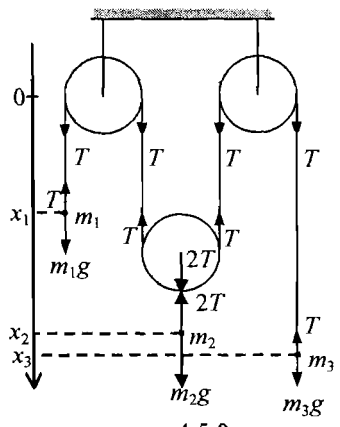


рис. 4.5.8

Пусть x_1, x_2, x_3 – координаты грузов на числовой оси x, изображенной на рис. 4.5.8, a_1, a_2, a_3 — проекции ускорений грузов, $\vec{T}$ — сила натяжения нити, действующая на первый груз. Поскольку массы блоков и нитей можно принять равными нулю, то из второго закона Ньютона следует система уравнений

$$ma_1 = mg - T, \quad (1)$$

$$ma_2 = mg - 2T, \quad (2)$$

$$ma_3 = mg - T. \quad (3)$$

Поскольку длина нити постоянна, то координаты грузов удовлетворяют условию $x_1 + 2x_2 + x_3 = \text{const}$. Отсюда находим соотношение между проекциями ускорений грузов

$$a_1 + 2a_2 + a_3 = 0. \quad (4)$$

Из системы (1) — (4) находим

$$g - T/m + 2(g - 2T/m) + g - T/m = 0, \rightarrow T = 2mg/3.$$

Величина силы, действующей на балку, $N = 4T = 8mg/3$, $N = 78{,}4$ Н.

Задача 4.5.9. К телу массой $m = 4$ кг, лежащему на горизонтальной шероховатой плоскости, приложена сила $\vec{F}$, направленная под углом α к горизонту ($mg > F\sin\alpha$), коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0{,}2$. а) Найдите ускорение тела, если $F = 1$ Н; $\alpha = 30°$; б) Найдите ускорение тела, если $F = 19{,}6$ Н, $\alpha = 30°$; в) При каком наименьшем значении величины силы F движение тела будет равномерным?

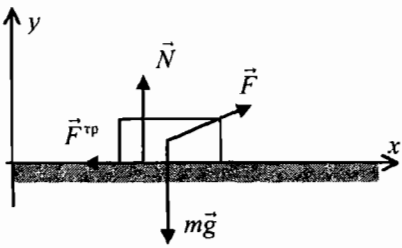


рис. 4.5.9 *а*

Решение. На тело кроме силы $\vec{F}$ действуют сила притяжения Земли $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}^{тр}$ (рис 4.5.9 *а*). Согласно второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}^{тр}$. Проектируя это векторное соотношение на оси координат, получим два уравнения

$$ma = F\cos\alpha + F_x^{тр}, \quad (1)$$

$$m_0 = F\sin\alpha + N - mg. \quad (2)$$

Обратим внимание на то, что величина силы реакции

$$N = mg - F\sin\alpha < mg.$$

Наиболее распространенная ошибка в решении системы (1), (2) в том, что $F_x^{тр} = -\mu N$ подставляют в (1), а затем находят ускорение. В действи-

тельности, система (1), (2) содержит три неизвестные величины: a, N, $F^{тр}_x$. Напомним, что сила трения относится к силам реакции и заранее не определена. Для решения задачи необходимо исследовать зависимость $F^{тр}_x$ от проекции суммы внешних сил F_x на ось x. В системе отсчета, в которой тело неподвижно, сила трения покоя всегда равна по величине и противоположна по направлению составляющей внешней силы F_x, касательной к поверхности. С ростом внешней силы растет величина силы трения покоя, пока не достигнет определенного значения, которое называют максимальным значением силы трения покоя $F_{max}^{тр} = \mu N$. Как только величина составляющей F_x достигнет значения μN, начинается скольжение. При дальнейшем увеличении внешней силы сила трения остается постоянной, равной по величине μN, независимо от скорости тела.

Зависимость проекции силы трения от проекции суммы внешних сил на ось x изображена на рис. 4.5.9 *б*. Область значений $F_x = F\cos\alpha$, удовлетворяющих условию $-\mu N < F_x < \mu N$, соответствует состоянию покоя. В этом случае из (2) находим силу трения покоя $F^{тр}_x = -F_x$. Две области значений $F_x > \mu N$ и $F_x < -\mu N$ соответствуют движению с постоянным ускорением. При значениях $F_x = -\mu N$, μN тело покоится или движется равномерно в зависимости от начальных условий.

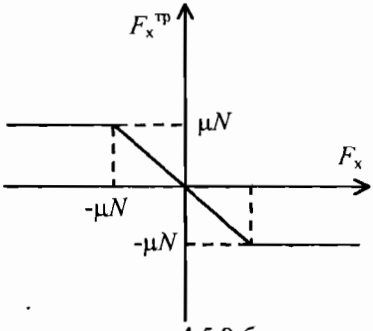


рис. 4.5.9 *б*

Возвращаясь к рис. 4.5.9 *а*, приходим к выводу, что из-за существования силы трения покоя тело будет покоиться, если проекция внешних сил на горизонтальное направление меньше величины максимальной силы трения скольжения, равной μN: $F\cos\alpha < \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$. При этом сила трения покоя $F^{тр}_x = -F\cos\alpha$, а ускорение $a = 0$. Если же $F\cos\alpha > \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$, то тело движется с ускорением, при этом в уравнении (1) $F^{тр}_x = -\mu N$. Если же величина силы удовлетворяет условию $F\cos\alpha = \mu N$, то тело движется с постоянной скоростью. В этом случае $F^{тр}_x = -\mu N$. Следовательно, возможны три ситуации:

$$0 < F\cos\alpha < \mu N,\ a = 0,\ F^{тр}_x = -F\cos\alpha,$$
$$F\cos\alpha = \mu N,\ a = 0,\ F^{тр}_x = -\mu N, \qquad (3)$$
$$F\cos\alpha > \mu N,\ a \neq 0,\ F^{тр}_x = -\mu N.$$

Найдем теперь решение системы уравнений (1)–(3).

а) Подставляя числовые данные, находим, $F\cos\alpha = 0{,}86$ Н, $N = 38{,}7$ Н, $\mu N = 7{,}74$ Н. Следовательно, ускорение тела равно нулю.

б) Подставляя числовые данные, находим, что $F\cos\alpha = 17$ Н, $N = 29{,}4$ Н, $\mu N = 5{,}88$ Н, т. е. $F\cos\alpha > \mu N$. Следовательно, уравнение (1) имеет вид

$$ma = F\cos\alpha - \mu\,(mg - F\sin\alpha),$$

$$a = (F/m)(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g,\ a = 2{,}7\ \text{м/с}^2. \qquad (4)$$

в) Найдем величину силы, которая, будучи приложена под углом α, обеспечивает движение тела с постоянной скоростью. Полагая в (4) $a = 0$, получим

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \qquad (5)$$

Подставляя числовые данные, находим $F = 8{,}15$ Н.

Теперь наша задача — исследовать зависимость величины силы (5) от угла α. Проще всего это сделать, записав знаменатель в виде одной тригонометрической функции. Вводя угол β соотношением $\mu = \mathrm{tg}\beta$, представим (5) в виде

$$F(\alpha) = mg\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Теперь очевидно, что функция $F(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = \beta$,

$$F(\beta) = mg\sin\beta = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Подставляя числовые значения, находим $\beta = 11°$, $F(\beta) = 1{,}196\ mg$.

Пример 4.5.10. Автомашина набирает скорость 100 км/ч ≈ 28 м/с за 10 с, двигаясь с ускорением $a \approx 2{,}8$ м/с^2. Какая сила сообщает машине ускорение?

На машину как целое действуют: сила тяжести, реакции (сумма которых равна нулю), сила трения качения (которой будем пренебрегать), сила сопротивления воздуха и … . Изучите вначале рис. 4.5.10, где изображено ведущее колесо. Если оно движется без проскальзывания, то скорость точек контакта шины с шоссе равна нулю. В этой области на покрытие шоссе действует сила трения покоя $\vec{F}_п$ со стороны шины. Согласно третьему закону Ньютона на прилегающий к шоссе участок поверхности шины действует со стороны покрытия сила $\vec{F}_т$. В технике ее называют силой сопротивления скольжению или *пробуксовке*. Величина этой силы равна μN, где N — величина силы нормального давления. Поэтому для увеличения силы, разгоняющей автомашину, необходимо увеличить коэффициент трения шин. Поставьте машину на лед, и она не тронется с места.

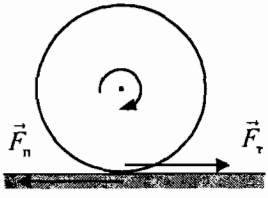


рис. 4.5.10

Задача 4.5.11. *Электровоз движется вверх по уклону с постоянным ускорением.* Найдите «силу тяги», действующей на электровоз.

Решение. На электровоз действуют сила тяжести, нормальная сила реакции и сила трения $\vec{F}$, возникающая вследствие сопротивления пробуксовке ведущих колес. Проекция этих сил на ось координат, направленную вверх по уклону

$$F(\alpha) = mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha),$$

где α — угол уклона, μ — коэффициент трения. Величина этой силы максимальна при движении по горизонтально расположенным рельсам: $F_{max} = \mu mg$ и быстро спадает с ростом угла α. Уже при значениях $\mu = 0{,}2$, $\alpha = \alpha_0 = 0{,}1$ (=6°) величина силы $F(\alpha_0) \approx 0{,}5\ F_{max}$, т. е. уменьшается в два раза. Предельный уклон соответствует углу α_m, удовлетворяющему условию $tg\alpha_m = \mu$. В этом случае $F(\alpha_m) = 0$. Учитывая, что реальное значение $\mu \approx 0{,}2$, находим $\alpha_m = 11°$. Следовательно, можно сделать вывод: для эффективного использования мощности двигателя полотно железной дороги не должно иметь больших уклонов, массу электровоза желательно увеличить.

Во Франции находится дорога с самым крутым уклоном $tg\alpha_m = 1/11$.

Задача 4.5.12. Тело массой m находится на горизонтально расположенной плоскости доски, движущейся в горизонтальном направлении с ускорением $\vec{a}$. Коэффициент трения между телом и доской равен μ. Найти зависимость силы трения от ускорения доски (рис. 4.5.11).

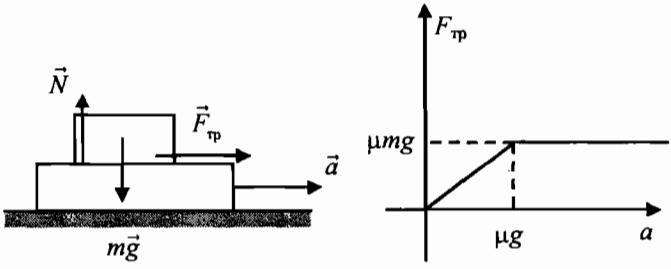


рис. 4.6.11

Решение. На тело действуют силы тяжести, реакции и сила трения, направленная в сторону движения доски. Выберем положительное направление оси x, параллельное вектору ускорения доски. Из второго законов Ньютона находим

$$ma_x = F^{тр}_x, \qquad 0 = N - mg,$$

где $a_x = a$ — проекция ускорения тела на ось x. Если тело неподвижно относительно доски, то $F^{тр}_x = ma$. При увеличении ускорения до значения $a_1 = \mu g$ возникает скольжение тела относительно доски. При этом $F^{тр}_x = \mu N$. Следовательно,

$$F_x^{тр} = \begin{cases} ma, & a \le \mu g, \\ \mu mg, & a \ge \mu g. \end{cases}$$

Задача 4.5.13. Тело массой m_2 находится на доске массой m_1, лежащей на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между телом и доской равен μ_2, коэффициент трения доски о плоскость равен μ_1. К доске приложена горизонтально направленная сила $\vec{F}$.

А. Найдите наименьшее значение величины силы, при котором вся система движется как целое.

Б. Найдите значение величины силы, при котором тело соскользнет с доски.

Решение. А. Запишем уравнения движения в проекции на горизонтальное направление

$$m_1 a = -\mu_1(m_1 + m_2)g + F - F_{тр}, \quad m_2 a = F_{тр},$$

где $F_{тр}$ — проекция силы трения, действующей на тело со стороны доски. Отсюда находим

$$(m_1 + m_2)a = -\mu_1(m_1 + m_2)g + F, \ \rightarrow \ F_{min} = \mu_1(m_1 + m_2)g$$

Б. Тело будет перемещаться относительно доски при условии $a \geq \mu_2 g$. Следовательно,

$$F \geq F_0, \quad F_0 = (\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)g.$$

Задача 4.5.14. Доска массой m_1 лежит на гладкой горизонтальной плоскости, по которой может двигаться без трения. На доске лежит тело массой m_2, к которому приложена в горизонтальном направлении сила $\vec{F}$. Найти наименьшее значение величины силы $\vec{F}$, при которой тело начнет скользить по доске?

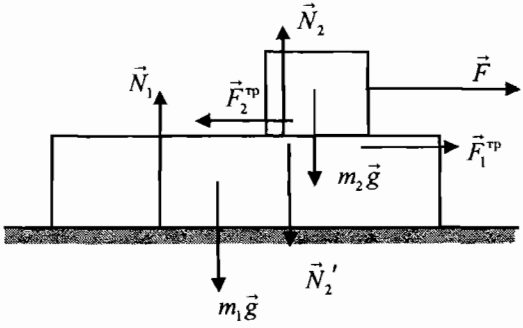


рис. 4.5.12

Решение. Силы, действующие на доску и тело, показаны на рис. 4.5.12. В горизонтальном направлениии на тело m_2 действуют сила $\vec{F}$, и противоположно направленная сила трения $\vec{F}_2^{тр}$ со стороны доски. Согласно третьему закону Ньютона на доску действует такая же по величине, но направленная в противоположную сторону сила $\vec{F}_1^{тр}$. В проекции на горизонтальное направление уравнения движения имеют вид

$$m_1 a_1 = F^{тр}, \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = F - F^{тр}. \quad (2)$$

Если тело не проскальзывает относительно доски ($F^{тр} \le \mu m_2 g$), то ускорения тела и доски совпадают: $a_1 = a_2 = a$. В этом случае из (1), (2) находим

$$F_{тр} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F \le \mu m_2 g .$$

Следовательно, скольжение возникает при значении силы

$$F > \mu \frac{m_2}{m_1}(m_2 + m_1) g .$$

Интересно рассмотреть предельный случай $m_1 >> m_2$. Тогда $F > \mu m_2 g$.

Задача 4.5.15. Грузовой автомобиль везет в кузове плиту. Скорость автомобиля — v_0, коэффициент трения между плитой и полом кузова — μ. Найдите минимальное значение тормозного пути, при котором плита не сместится относительно кузова.

Решение. Плита не будет перемещаться относительно кузова при условии $a \le \mu g$. Следовательно, $s = v_0^2/2a$, $s \ge v_0^2/2g\mu$.

Задача 4.5.16. Маляр работает в подвесном кресле, висящем на веревке, перекинутой через блок и закрепленной на перилах кресла. Масса маляра m_1, масса кресла m_2. Найдите величины силы давления маляра на кресло N и силы T, которую он прилагает к веревке, поднимаясь вверх с ускорением $\vec{w}$.

Задачи. Тест

N1. Сосулька падает с карниза. Первую половину пути она пролетела за интервал времени $T = 2$с. До поверхности земли осталось лететь:

А. 0,82 с, **Б.** 0,41 с, **В.** 1,41 с, **Г.** 2 с, **Д.** 2,41 с.

N2. Сосулька падает с карниза. За последнюю секунду движения она пролетела 3/4 часть всего пути. Интервал времени падения:

А. 4 с, **Б.** 0,5 с, **В.** 1 с, **Г.** 3 с, **Д.** 2 с.

N3. В лифте, движущемся вниз, вес тела массой $m = 100$ кг равен $P = 1100$ Н. Найдите значение величины ускорения лифта:

А. 2,2 м/с^2, **Б.** 1,6 м/с^2, **В.** 1 м/с^2, **Г.** 0,86 м/с^2, **Д.** 1,2 м/с^2.

N4. В лифте, движущемся вниз, вес тела массой $m = 100$ кг равен $P = 900$ Н. Найдите значение величины ускорения лифта:

А. 0,8 м/с^2, **Б.** 1,6 м/с^2, **В.** 1,2 м/с^2, **Г.** 0,9 м/с^2, **Д.** 4,5 м/с^2.

N5. Веревка выдерживает груз массой не более m_1 = 100 кг, если груз неподвижен. На этой веревке поднимают груз массой m_2 = 50 кг. За интервал времени T = 2 с груз можно поднять с постоянным ускорением на предельную высоту:

А. 4,9 м, **Б.** 9,8 м, **В.** 10 м, **Г.** 19,6 м, **Д.** 24,5 м.

N6*. Через три невесомых блока перекинута невесомая нерастяжимая нить, концы которой закреплены (рис. N6). К осям двух подвижных блоков прикреплены грузы массами $m_1 = m$ и $m_2 = 4m$. Ось третьего блока неподвижна. Величина силы, действующей на ось этого блока:

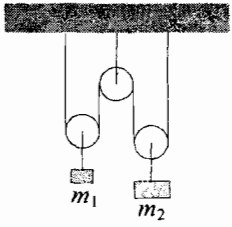


рис. N6

А. $0{,}8mg$, **Б.** $1{,}6mg$, **В.** $3{,}2mg$, **Г.** $2{,}4mg$, **Д.** $4{,}8mg$.

Глава 5. Законы изменения и сохранения импульса системы частиц

5.1. Импульс системы тел

В физике важную роль играет величина $\vec{p}$ равная произведению массы частицы на ее скорость: $\vec{p} = m\vec{v}$. Вектор $\vec{p}$ французский математик и физик Р. Декарт называл количеством движения или *импульсом* частицы (от лат. *impulsus* — побуждение, толчок). Импульсом системы $\vec{P}$, состоящей из N частиц, называется сумма импульсов всех частиц:

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots = \sum m_a\vec{v}_a . \qquad (5.1.1)$$

5.2. Центр масс системы частиц

Рассмотрим движение N частиц в неподвижной системе отсчета К и в системе отсчета, перемещающейся относительно системы К со скоростью $\vec{u}$. В этой системе скорость частицы a равна $\vec{v}'_a$. Согласно (3.5.1) скорости частицы a в двух системах отсчета $\vec{v}_a$ и $\vec{v}'_a$ связаны соотношением $\vec{v}_a = \vec{u} + \vec{v}'_a$. Подставляя $\vec{v}'_a$ в (5.1.1), получим

$$\vec{P} = m\vec{u} + \vec{P}', \quad \vec{P}' = \sum m_a\vec{v}'_a ,$$

где $m = m_1 + m_2 + \ldots$ — полная масса системы, $\vec{P}'$ — импульс N частиц в системе отсчета K'.

Всегда можно выбрать такую систему отсчета К′, в которой полный импульс обращается в нуль. Полагая $\vec{P}' = 0$, найдем скорость этой системы отсчета

$$\vec{u} = \vec{P}/m , \qquad (5.2.1)$$

Если полный импульс механической системы равен нулю, то говорят, что она покоится относительно соответствующей системы отсчета. Это определение является естественным обобщением понятия покоя отдельной частицы. Скорость (5.2.1) приобретает смысл скорости движения системы частиц «как целого» с импульсом $\vec{P}$ и массой m. Выражение в правой части (5.2.1) может быть представлено как производная по времени вектора $\vec{R}$: $\vec{u} = d\vec{R}/dt$,

$$\vec{R} = \sum m_a \vec{r}_a / m \qquad (5.2.2)$$

Можно сказать, что скорость системы как целого есть скорость движения в пространстве точки, радиус-вектор которой равен $\vec{R}$. Эту точку называют *центром масс* системы частиц.

Пример 5.2.1. Рассмотрим атом водорода, представляющий собой систему из электрона и протона. В системе отсчета K′, называемой *системой центра масс*, атом водорода покоится. Скорости частиц связаны соотношением $m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = 0$. Радиус — вектор центра масс атома водорода

$$\vec{R} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)/(m_1 + m_2).$$

5.3. Закон изменения импульса системы частиц

Изучая движение тела в поле тяжести Земли, мы предполагали, что сила $\vec{F}' \doteq -m\vec{g}$, действующая на Землю со стороны тела, не влияет на ее движение. Условия, при которых допустимо это приближение, мы получим в Гл. 6. Однако сейчас мы убедимся, что при движении тела импульс Земли должен изменяться.

Для решения основной задачи механики системы N частиц (или N материальных точек) — определения радиус-вектора каждой точки $\vec{r}_a(t)$ в любой момент времени по известному закону взаимодействия, начальным положениям $\vec{r}_a(0)$ и начальным скоростям $\vec{v}_n(0)$ — необходимо найти решение системы $3N$ уравнений, следующих из второго закона Ньютона

$$m_1 d\vec{v}_1/d\vec{t} = \vec{F}_1 + \vec{f}_{12} + \ldots, \qquad (5.3.1)$$

$$m_2 d\vec{v}_2/d\vec{t} = \vec{F}_2 + \vec{f}_{21} + \ldots, \ldots .$$

Здесь $\vec{f}_{ik}$, — сила, действующая со стороны k-ой частицы системы на i-ю частицу $\vec{F}_i$ — сила, действующая на i-ю частицу системы со стороны тел, не принадлежащих системе. Мы предполагаем, что рассматриваемая система не влияет на движение этих тел. Силы, действующие между частицами системы, называют внутренними силами, остальные силы, действующие на систему, называют внешними силами.

В настоящее время решение системы (5.3.1) может быть получено лишь с помощью электронно-вычислительных машин. Поэтому поставим ограни-

ченную задачу: попытаемся получить общую информацию о поведении системы. С этой целью, складывая все уравнения (5.3.1), получим

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} + \ldots .$$

Здесь $\vec{P} = \vec{m}_1\vec{v}_1 + \vec{m}_2\vec{v}_2 + \ldots$ — полный импульс системы. Первая сумма в правой части представляет собой равнодействующую внешних сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$, а вторая сумма — равнодействующая внутренних сил равна нулю, так как согласно третьему закону Ньютона $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$. Итак, мы получили закон изменения импульса системы частиц

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \qquad (5.3.2)$$

Если внешние силы зависят от координат, то уравнений (5.3.2) недостаточно для определения зависимости импульса $\vec{P}$ от времени. В этом случае зависимость $\vec{P}(t)$ определяется как внешними, так и внутренними силами.

Пример 5.3.1. Две частицы, соединенные пружиной, движутся по оси x. Пусть x_1, x_2 — координаты частиц ($x_2 > x_1 > 0$). Частицы взаимодействуют с третьей неподвижной частицей, находящейся в начале координат: проекции сил, действующих на частицы $F_{13} = F(x_1)$, $F_{23} = F(x_2)$. Из второго закона Ньютона следуют два уравнения, решения которых позволяют найти функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$m_1 a_1 = k_1 (x_2 - x_1 - l_0) + F(x_1), \qquad m_2 a_2 = -k\ (x_2 - x_1 - l_0) + F(x_2).$$

Складывая левые и правые части, получим уравнение (5.3.2)

$$dP/dt = F[x_1(t)] + F[x_2(t)].$$

5.4. Движение тела переменной массы

5.4.1. Уравнение Мещерского. Пусть в момент времени t ракета с топливом имеет массу m и движется со скоростью $\vec{v}$. В момент времени $t + \Delta t$ вследствие истечения газов массой $(-\Delta m) > 0$ масса ракеты стала равной $m + \Delta m$ (в соответствии с определением приращения функции $m(t)$), а скорость ракеты получила приращение $\Delta\vec{v}$, т. е. $\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta\vec{v}$. В этой же системе отсчета, связанной с Землей, скорость газов равна $\vec{c}$. Следовательно, приращение импульса системы ракета — газы с точностью до величин второго порядка малости

$$\Delta\vec{P} = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + (-\Delta m\vec{c}) - m\vec{v} \approx m\Delta\vec{v} - \Delta m(\vec{c} - \vec{v}). \qquad (5.4.1)$$

Разность скоростей $\vec{c} = \vec{c} - \vec{v}$ согласно (3.5.1) равна скорости газов относительно ракеты. В соответствии с гипотезой К.Э. Циолковского скорость газов относительно ракеты можно считать постоянной величиной.

Получим уравнение движения ракеты в поле тяжести Земли. Сумма внешних сил $(m + \Delta m)\vec{g} + (-\Delta m\,\vec{g}) + \vec{F}$, где $\vec{F}$ — сила сопротивления. Переходя к пределу $\Delta t \to 0$ в отношении $\Delta\vec{P}/\Delta t$, получим из (5.3.2) уравнение

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{c}'\frac{dm}{dt} + m\vec{g} + \vec{F}. \qquad (5.4.2)$$

Первое слагаемое в правой части (5.4.2) $\vec{F}_р = \vec{c}'(dm/dt)$ называется реактивной силой, действующей на ракету. Это уравнение впервые получено русским математиком И.В. Мещерским в 1897 г. и носит его имя. Для получения полной системы уравнение (5.4.2), содержащее четыре неизвестных функции m и $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, должно быть дополнено условием, которое задает явную или неявную зависимость массы от времени.

Отметим, что уравнение (5.4.2) позволяет исследовать не только движение ракеты, но и любых тел переменной массы, например капли воды в насыщенной влагой среде. В этом случае $(dm/dt)>0$, $\vec{c}' = -\vec{v}$. Уравнение Мещерского приобретает вид

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}. \qquad (5.4.3)$$

Пример 5.4.1. Ракета на старте. Направим ось z вертикально вверх. Тогда из (5.4.2) получим

$$mdv/dt = -c'dm/dt - mg + F_z.$$

Очевидно, при сгорании топлива $(dm/dt)<0$. Для подъема ракеты на старте необходимо выполнить условие $c'|dm/dt| > mg$.

Оценим скорость сгорания топлива при старте системы «S*atur*n-5» - «*Appolo*-11», впервые доставившей 20 июля 1969 г. астронавтов Нейла Армстронга и Эдвина Олдрина на Луну. Начальная масса системы $m(0) = 2950$ тонн, длина 111 м, скорость истечения $c_0 = 2{,}6 \cdot 10^3$ м/с. Шестого июля 1969 г. пять двигателей первой ступени развили силу тяги $F_0 = 3{,}4 \cdot 10^7$ Н, сжигая топливо со скоростью $|\Delta m/\Delta t| \approx F_0/c_0 = 13300$ кг/с. Через 12 мин после старта система массой 136 тонн вышла на орбиту высотой 188 км.

5.4.2. Две Кембриджские задачи. В 1979 г. вышел перевод книги «Образованный ученый», написанной сотрудником знаменитой Кавендишской лаборатории Кембриджского университета, выдающимся физиком-теоретиком Б. Пиппардом. Первым главой лаборатории, открытой в 1874 г., был великий Джеймс Клерк Максвелл, затем Дж. Дж. Томсон, Дж.У. Рэлей, Э. Резерфорд, ... Большая часть книги — экзаменационные задачи. Разберем задачу о движении цепи, решение которой известно с середины XIX в.

Задача 5.4.2. Однородная цепь свешивается с края стола. Остальная часть цепи сложена в кучу на крае стола. В начальный момент времени скорость цепи равна нулю. Найдите ускорение цепи.

Решение. Направим ось z вертикально вниз, начало координат — на уровне поверхности стола. Пусть z — координата нижнего конца цепи A, $v_z = v$ — проекция скорости точки A. Масса движущейся части цепи $m = \rho z$, ρ — линейная плотность цепи. Из (5.4.3) получим уравнение

$$d(zv)/dt = gz. \qquad (1)$$

Рассмотрим частный случай, соответствующий начальным условиям $z(0) = 0$, $v(0) = 0$: первоначальная длина свисающей части цепи ничтожно мала.

Для получения решения уравнения (1) умножим обе части на zv. Тогда уравнение можно представить в виде производной функции $F(z,v)$:

$$zv\frac{dzv}{dt} = gz^2v, \rightarrow \frac{dF}{dt} = 0, \quad F = \frac{1}{2}(zv)^2 - \frac{1}{3}gz^3.$$

Следовательно, $F = C$:

$$\frac{1}{2}(zv)^2 - \frac{1}{3}gz^3 = C. \qquad (2)$$

Согласно начальным условиям $C = 0$. Из (2) находим $v^2 = 2gz/3$. Дифференцируя по времени, получим ускорение движущейся части цепи

$$2v\frac{dv}{dt} = \frac{2g}{3}\frac{dz}{dt}, \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{g}{3}.$$

Интересный результат: ускорение в три раза меньше ускорения свободного падения.

Приведем другой интересный результат. Однородная цепь AB массой M висит вертикально, касаясь концом B поверхности пола. Цепь отпускают. В момент падения конца A на пол вес цепи равен $3Mg$ (см. Дополнение стр. 672).

Задача 5.4.3. Голова кобры поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью v. Покажите, что вес кобры возрастает на величину Mv^2/l, где M — масса кобры, l — длина кобры.

5.5. Закон сохранения импульса системы частиц

Систему частиц, взаимодействующих друг с другом и не взаимодействующих с окружающими телами, называют замкнутой системой. В замкнутой системе действуют только внутренние силы, в результате действия которых состояние системы непрерывно меняется, т. е. изменяются с течением времени скорости и координаты частиц системы. Однако для замкнутой системы существует величина, которая постоянна во времени, — *полный импульс системы*, Он представляет собой сумму импульсов каждой из частиц, входящей в состав замкнутой системы. Поскольку $\vec{F} = 0$, то согласно (5.3.2)

$$m_1\vec{v}_1(t) + m_2\vec{v}_2(t) + ... = \vec{P}_0, \qquad (5.5.1)$$

где $\vec{P}_0$ — постоянный вектор. Каждое из слагаемых в левой части (5.5.1) является функцией времени, однако их сумма от времени не зависит. Таким обра-

зом, если отсутствуют силы, действующие на систему извне, то внутренние силы никогда не смогут изменить полный импульс системы.

В соответствие с (5.2.1) закон сохранения импульса замкнутой системы можно сформулировать как утверждение о движении ее центра масс с постоянной скоростью. При изучении замкнутой системы удобно пользоваться системой отсчета, в которой ее центр масс покоится, не рассматривая равномерное и прямолинейное движение системы как целого.

Закон сохранения импульса системы «работает», т.е. позволяет получить информацию в задачах следующего типа: в момент времени t система находилась в некотором состоянии, затем в результате действия внутренних сил система в момент времени t' находится в другом состоянии. В силу закона сохранения полного импульса справедливо соотношение

$$m_1\vec{v}_1(t)+m_2\vec{v}_2(t)+\ldots=m_1\vec{v}_1(t')+m_2\vec{v}_2(t')+\ldots \qquad (5.5.2)$$

Необходимо подчеркнуть большую роль, которую играют законы сохранения импульса, энергии (часть I, гл. 6), электрического заряда (часть IV, гл. 1) и другие в современных физических исследованиях. Сейчас физики приходят к выводу, что законы сохранения являются наиболее важными законами природы. Например, природа сил взаимодействия между элементарными частицами еще не раскрыта и не существует уравнений, подобных второму закону Ньютона, с помощью которых можно было бы описать превращения и поведение частиц при взаимодействиях. Здесь на помощь приходят законы сохранения, позволяющие предсказать многие характерные особенности распадов, взаимодействий и превращений элементарных частиц (см. часть IX).

Пример 5.5.1. Рассмотрим распад неподвижного ядра массой M на два осколка массой m_1, m_2. Из (5.5.2) получим уравнение

$$M\cdot 0=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2,$$

из которого следует, что скорости осколков должны быть направлены по одной прямой в противоположные стороны. Если происходит распад на три частицы, то можно лишь утверждать, что векторы $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, удовлетворяющие уравнению

$$M\cdot 0=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+m_3\vec{v}_3,$$

лежат в одной плоскости. В частном случае частиц равных масс $m_1=m_2=m_3$ концы векторов $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ одинаковой величины лежат в вершинах правильного треугольника.

Если система не замкнута, полный импульс системы не сохраняется. Однако может случиться, что сумма проекций внешних сил на некоторое направление будет равна нулю. Тогда сохраняется проекция полного импульса системы на это же направление. Наибольший интерес представляет

движение систем в поле тяжести Земли. Если сумма проекций внешних сил на два взаимно перпендикулярных направления оси координат x и y в горизонтальной плоскости равна нулю, то из (5.3.2) следует, что сохраняются проекции полного импульса на те же оси координат.

$$m_1\vec{v}_{1x}(t)+m_2\vec{v}_{2x}(t)+\ldots=m_1\vec{v}_{1x}(t')+m_2\vec{v}_{2x}(t')+\ldots, \qquad (5.5.3)$$

$$m_1\vec{v}_{1y}(t)+m_2\vec{v}_{2y}(t)+\ldots=m_1\vec{v}_{1y}(t')+m_2\vec{v}_{2y}(t')+\ldots.$$

Задача 5.5.2. Снайперская винтовки 308 Винчестер (армейское название Т-65) подвешена на двух нитях. Дульная скорость пули максимальной массы m = 11,6 г равна v_0 = 850 м/с. Масса винтовки M = 3 кг. Найдите скорость отдачи.

Пример 5.5.3. Лодка массой M стоит в неподвижной воде. Насколько сместится лодка, если рыбак массой m переместится с кормы на нос лодки? Длина лодки l. Сопротивлением воды пренебречь.

Поскольку сохраняется проекция импульса системы рыбак — лодка на горизонтальное направление, то в любой момент времени

$$0 = Mu_x + mv_x, \qquad (1)$$

где u_x, v_x — проекции скоростей лодки и рыбака на расположенную горизонтально ось x. Умножая (1) на Δt получим уравнение $0 = M\Delta x_л + m\Delta x_р$, из которого найдем соотношение, связывающее перемещение лодки $\Delta x_л = u_x\Delta t$ и рыбака $\Delta x_р = v_x\Delta t$ за промежуток времени Δt

$$\Delta x_л = -(m/M)\Delta x_р. \qquad (2)$$

Суммируя элементарные перемещения за время, которое затратил рыбак, переходя с кормы на нос лодки на расстояние l, получим смещение лодки

$$L = -(m/M)l. \qquad (3)$$

Прежде чем читать следующий абзац, найдите допущенную ошибку, так как ответ (3) неверен. Дело в том, что скорости и перемещения относятся к системе отсчета, связанной с неподвижной водой или берегом. Ошибка состоит в замене перемещения рыбака относительно берега, перемещением относительно лодки. Для решения задачи необходимо использовать соотношение (3.5.1) $v_x = u_x + v_x'$, где v_x' — проекция скорости рыбака относительно лодки. Тогда уравнения (1), (2) приобретают вид

$$(M+m)u_x + mv_x' = 0,$$

$$\Delta x_л = -\frac{m}{m+M}\Delta x'_р. \qquad (4)$$

Таким образом, перемещение лодки

$$L = -\frac{m}{m+M}l.$$

Приведем «другое» решение этой задачи. Согласно (5.2.3)

$$(M + m)x_c = mx_р + Mx_л, \qquad (5)$$

где x_c — координата центра масс системы рыбак-лодка, $x_л$ — координата центра масс лодки. Введем систему координат K′ с началом в центре масс лодки и x' — координату рыбака в этой системе. Тогда $x_р = x_л + x'$. Если в начальный момент времени скорость центра масс равна нулю, то при любых перемещениях рыбака и лодки $\Delta x_c = 0$, $m\Delta x_р + M\Delta x_л = 0$. Поскольку $\Delta x_р = \Delta x_л + \Delta x'_р$, то из последнего уравнения следует (4).

Задача 5.5.4. Однородный тонкий стержень AB длиной l поставили концом A на гладкую горизонтальную плоскость. Угол между стержнем и плоскостью — α. Начальная скорость стержня равна нулю. Найдите уравнение траектории точки B в процессе «падения» стержня.

Решение. Введем систему координат xy с началом в точке O касания стержня с плоскостью в начальный момент времени (рис. 5.5.1). Координаты центра масс стержня $x_c = (l/2)\cos\alpha$, $y_c = (l/2)\sin\alpha$. Поскольку горизонтальные компоненты сил, действующих на стержень, равны нулю, то x — координата центра масс стержня остается постоянной. Пусть $\varphi(t)$ — угол между стержнем и плоскостью в момент времени t. Тогда координаты точки B

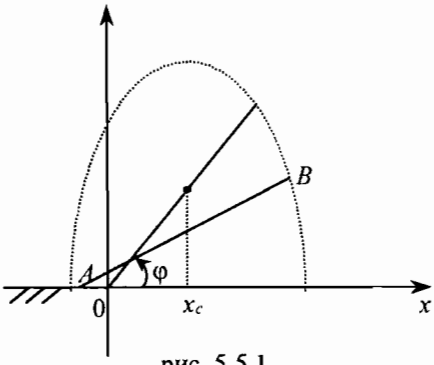


рис. 5.5.1

$$x = (l/2)\cos\alpha + (l/2)\cos\varphi, \qquad y = l\sin\varphi.$$

Исключая параметр φ, получим уравнение эллипса

$$\left[\frac{2(x-(l/2)\cos\alpha)}{l}\right]^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2 = 1$$

с полуосями $l/2$ и l. На рис. 5.5.1 эллипс изображен пунктирной линией.

Задача 5.5.5. Клин находится на гладкой горизонтальной плоскости. По гладкой плоскости клина движется частица. В начальный момент времени частица находится на расстоянии h от горизонтальной плоскости; скорости частицы и клина равны нулю. Найти интервал времени T, за который частица достигнет основания клина. Масса клина — m_1, масса частицы — m_2, угол наклона клина — α (рис. 5.5.2).

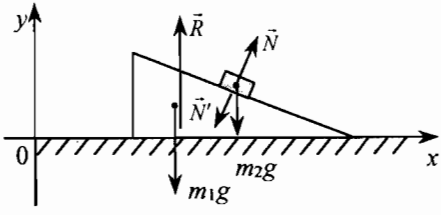


рис. 5.5.2.

Решение. На частицу действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. На клин действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила реакции $\vec{R}$ со стороны горизонтальной плоскости и сила нормального давления $\vec{N}' = -\vec{N}$ со стороны частицы. Уравнения движения клина и частицы идентичны уравнениям (5.3.1):

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{N}. \qquad (1)$$

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{R} - \vec{N}, \qquad (2)$$

Суммируя (1), (2), получим уравнение типа (5.3.2)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{R}. \qquad (3)$$

Следовательно, сохраняется горизонтальная компонента импульса системы (5.5.3). В системе координат, введенной на рис. 5.5.2, из (3) следует уравнение

$$m_1a_{1x} + m_2a_{2x} = 0. \qquad (4)$$

Интервал времени T найдем из уравнения $h/\sin\alpha = a_{20}T^2/2$, где a_{20} – величина ускорения частицы относительно клина. Согласно соотношению (3.5.2) $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{20}$. Отсюда получим

$$a_{2x} = a_{1x} + a_{20}\cos\alpha. \qquad (5)$$

Из (4), (5) следует уравнение

$$(m_1 + m_2)a_{1x} + m_2a_{20}\cos\alpha = 0. \qquad (6)$$

Далее из уравнения (1) в проекции на направление, параллельное наклонной плоскости, получим уравнение

$$a_{1x}\cos\alpha + a_{20} = g\sin\alpha. \qquad (7)$$

Из (6), (7) найдем

$$a_{20} = \frac{(m_1 + m_2)g\sin\alpha}{m_1 + m_2\sin^2\alpha}.$$

Интервал времени соскальзывания T,

$$T^2 = \frac{2h(m_1 + m_2\sin^2\alpha)}{(m_1 + m_2)g\sin^2\alpha}.$$

Пусть левая грань клина прилегает к вертикальной стенке. Покажите, что проекция силы реакции $\vec{G}$, действующей на клин со стороны стенки $G_x = m_2g\cos\alpha\sin\alpha$.

Задача 5.5.7. Дальность полета снаряда равна D. Пусть снаряд разрывается в наивысшей точке траектории на два одинаковых осколка. На каком расстоянии s по горизонтали от точки выстрела упадет один из осколков, если другой возвращается по траектории снаряда?

Решение. Запишем закон сохранения горизонтальной компоненты импульса системы до разрыва и после разрыва:

$$Mv_{0x} = mv_{1x}/2 + mv_{2x}/2.$$

Согласно условию $v_{1x} = -v_{0x}$. Следовательно, $v_{2x} = 3v_{0x}$. Далее используем решение задачи 3.4.1 и систему координат рис. 3.4.1. Координаты второго осколка

$$x_2(t) = D/2 + 3v_{0x}(t - t_1),\ y_2(t) = H - g(t - t_1)^2/2,\ t \geq t_1,$$

где $t_1 = v_{0y}/g$, $H = v_{0y}^2/2g$. Дальность $D = 2v_{0x}v_{0y}/g$. В момент времени T осколок падает на поверхность земли: $y_2(T) = 0$, $s = x_2(T)$. Подставляя значения функций, получим систему уравнений, из которой находим $s = 2D$.

Глава 6. Законы изменения и сохранения полной энергии системы частиц

6.1. Работа силы

6.1.1. Работа, совершаемая постоянной силой при движении по прямой. На рис. 6.1.1 изображено тело, находящееся на горизонтальной плоскости. К нему приложены четыре постоянные силы, под действием которых тело перемещается по прямой линии. Определим работу любой из этих сил при перемещении из положения 1 в положение 2 соотношением

$$A_{12} = F\cos\alpha \cdot s_{12}, \qquad (6.1.1)$$

где α — угол между направлением силы и скоростью тела, s_{12} — путь, пройденный телом по прямой. Произведение $F\cos\alpha$ является проекцией силы на направление скорости тела. Силы реакции и тяжести в соответствии с (6.1.1) работы не совершают, так как наплавлены под прямым углом к перемещению. Работа силы трения отрицательна, поскольку $\cos\alpha = -1$ при $\alpha = \pi$. Заметим, что в общем случае работа силы трения может быть как отрицательной так и положительной величиной.

Напомним некоторые энергетические единицы. В СИ единицей работы является джоуль (Дж). Один джоуль — работа силы 1Н при перемещении тела на расстояние 1 м в направлении действия силы. Размерность этой величины Н·м = кг·м·с$^{-2}$.

Внесистемные единицы энергии 1 Вт·ч = 3600 Дж; 1 кал = 4,1868 Дж.

С энергиями порядка одного — десяти джоулей мы имеем дело в повседневной практике: при перемещении вверх стакана с водой массой 200 г на 0,5 м сила реакции, действующая на тело $N = mg$, совершает работу $A_{12} = 0{,}98$ Дж; при опускании чемодана массой $m = 20$кг на 0,5 м — совершает работу $A_{12} = -98$ Дж.

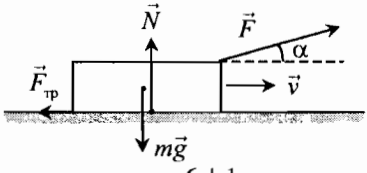


рис. 6.1.1

Найдем теперь работу, совершаемую силой $\vec{F}(x, y, z)$, зависящей от координат. Как теперь определить работу силы при перемещении тела из положения 1 в положение 2? Мы можем поступить следующим образом. Представим траекторию в виде последовательности N малых перемещений $\Delta\vec{r}_n$. Обозначим $\vec{F}_n$ — значение вектора $\vec{F}(x, y, z)$ в точке $\vec{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$. В пределах малого перемещения сила равна $\vec{F}_n$. Тогда работа на малом перемещении может быть вычислена в соответствии с определением (6.1.1). Мы назовем ее *элементарной работой* и обозначим единым символом δA,

$$\delta A = F_n|\Delta\vec{r}_n|\cos\alpha_n.$$

Здесь α_n — угол между векторами $\vec{F}_n$ и $\Delta\vec{r}_n$. Элементарную работу, совершаемую силой $\vec{F}$ при приращении радиус-вектора частицы, равного $\Delta\vec{r}_n$, можно записать в наиболее общем виде в форме скалярного произведения

$$\delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} \qquad (6.1.2)$$

векторов $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$ (см. 1.2).

Для того чтобы определить работу силы A_{12} на конечном участке траектории, необходимо сложить элементарные работы на всех бесконечно малых участках.

Следовательно,

$$A_{12} = \sum_{n=1}^{N}\vec{F}_n\Delta\vec{r}_n. \qquad (6.1.3)$$

6.2. Мощность, развиваемая силой

Мощность P, развиваемая силой F в момент времени t определяется соотношением $\delta A = P\Delta t$. Подставляя δA из (6.1.2), имеем $P\Delta t = \vec{F}\Delta\vec{r}$, где $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$, $\vec{v}$ — скорость тела. Следовательно,

$$P(t) = \vec{F}\vec{v}. \qquad (6.2.1)$$

Единица мощности в СИ - ватт — названа в честь английского механика Д. Уатта (1736—1819) : 1 Вт = 1 Дж/с. Внесистемная единица мощности — лошадиная сила: 1 л. с. = 735 Вт.

Мощность автомобиля «Волга» ~55кВт (75 л.с.), самолета ТУ-114 — 11000кВт (15 000 л. с.), ракеты-носителя космического корабля «Восток» — $14{,}7 \cdot 10^6$ кВт ($2 \cdot 10^7$ л. с.). Максимальная мощность серийного автомобиля 600 л. с. Мощность сердца, которое в спокойном состоянии перекачивает в минуту 5—6 л. крови, составляет приблизительно 2,5 Вт.

6.2.1. «Мощность» машины. Здесь следует отметить, вопреки распространенному мнению, что механическая мощность любого тягового устрой-

ства является величиной неопределенной. О конкретной мощности можно говорить, учитывая результат взаимодействия транспортного средства с окружающей средой. Рассмотрим, например, движение машины: в горизонтальном направлении на нее действуют сила «тяги» $\vec{F}$ — сила трения пробуксовки, возникающая при взаимодействии ведущих колес с дорогой, и сила $\vec{F}_c$ сопротивления движению. Величина этой силы растет с увеличением скорости машины v. Поэтому согласно второму закону Ньютона $ma = F - F_c(v)$, начиная с некоторого момента времени величина скорости достигает максимального значения v_m. Мощность силы «тяги» вначале растет со временем, а затем стремится к постоянному значению $P = F_c(v_m)v_m$. Изменяя внешние условия, будем получать различные значения мощности.

Обычно о трении судят как о вредном явлении, на борьбу с которым, по некоторым оценкам, уходит от одной четверти до одной трети всей энергии, используемой человеком. Значительно менее заметна полезная роль трения. Силы трения, приложенные в точках контакта колеса тепловоза с рельсом, подошвы ботинок с землей и т. д., совершают положительную работу. Другой пример – генерация незатухающих колебаний скрипичной струной в результате положительной работы силы трения, действующей со стороны смычка.

6.2.2. Геометрический смысл понятия работы силы.. Заметим, что на траектории частицы $\vec{r} = \vec{r}(t)$ мощность, развиваемая силой, является функцией времени $P(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t)$. Для того, чтобы найти работу, совершаемую силой в интервале времени $[t_1, t_2]$, представим его в виде последовательности N элементарных интервалов Δt. Обозначим $P(t_n)$ значение функции $P(t)$ на интервале $[t_i, t_i+\Delta t]$. Тогда выражение (6.1.3) можно представить в виде

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{N} P(t_i)\Delta t. \qquad (6.2.1)$$

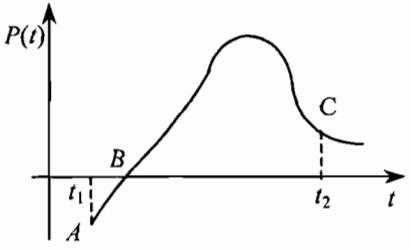


рис. 6.2.1.

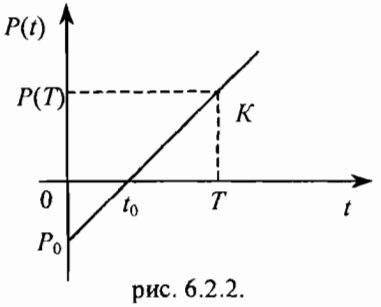


рис. 6.2.2.

Отсюда можно заключить, что работа силы на конечном перемещении равна площади фигуры, ограниченной на графике $P(t)$ (рис. 6.2.1) кривой ABC и прямыми At_1 и Ct_2, причем площадь фигуры, ограниченной кривой AB и осью t, входит в общее выражение работы со знаком «минус». Если функция $P(t)$ остается постоянной в любой момент времени, то работа силы равна площади соответствующего прямоугольника.

Пример 6.2.1. Найдем работу, совершаемую силой тяжести при свободном движении тела в однородном поле тяжести (рис. 3.4.1). В этом случае $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, $\vec{F} = m\vec{g}$. Из (6.2.1) находим $P(t) = P_0 + mg^2t$, $P_0 = m\vec{g}\,\vec{v}_0 < 0$. Функция $P(t)$ обращается в ноль при значении $t = t_0$, $t_0 = -\vec{g}\,\vec{v}_0/g^2$ (рис. 6.2.2). За интервал времени [0, T] работа силы тяжести равна сумме площадей треугольников $0P_0t_0$ и t_0KT на рис. 6.2.2:

$$A_{12} = (1/2)[P_0t_0 + P(T)(T-t_0)] = m\vec{g}\,\vec{v}_0\,T + mg^2T^2/2.$$

Полезно представить работу в виде $A_{12} = m\vec{g}\,[\vec{r}(T) - \vec{r}(0)]$, где $\vec{r}(T) - \vec{r}(0)$ — приращение радиус-вектора частицы. Очевидно, работа силы тяжести зависит только от начального и конечного значений радиус-векторов.

6.3. Работа сил тяжести и упругости

6.3.1. Работа силы тяжести. Если тело не поднимается до высот, сравнимых с радиусом Земли, то поле тяжести можно считать однородным. Предположим, что, на тело действуют несколько сил.

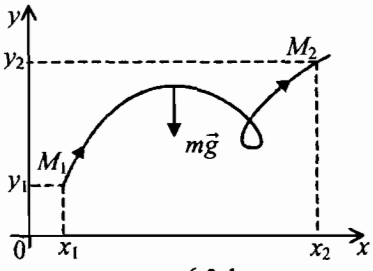


рис. 6.3.1

Нас интересует только работа силы тяжести при движении тела по криволинейной траектории из точки M_1 с радиус-вектором $\vec{r}_1$ в точку M_2, радиус-вектор которой $\vec{r}_2$. В этом случае можно воспользоваться соотношением (6.1.3). Для вычисления скалярного произведения введем систему координат xy (рис. 6.3.1). Если ось y направлена по вертикали вверх, то проекции вектора $\vec{g}$ равны $g_x = g_z = 0$, $g_y = -g$. В соответствии с определением скалярного произведения получим

$$A_{12} = \sum_{n=1}^{N} (-mg)\,\Delta y_n .$$

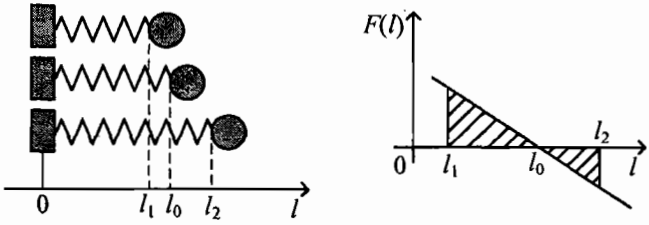
Полная работа, совершаемая силой тяжести при перемещении тела из точки M_1 в точку M_2,

$$A_{12} = -mg(y_2 - y_1) = -mgy_2 + mgy_1 . \qquad (6.3.1)$$

Мы видим, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории, а определяется только положениями, начальной и конечной точек траектории.

6.3.2. Работа сил упругости. Возьмем пружину, один конец которой присоединим к телу массой m, а другой — к неподвижной стенке (т. е. к телу массой $M >> m$). Характеристики пружины определяются двумя параметрами: длиной l_0 в ненапряженном состоянии и коэффициентом жесткости k. Запишем выражение для силы упругости, действующей тело массой m. Если

совместить начало координат с точкой закрепления пружины, то проекция силы упругости на ось l: $F_l = -k(l-l_0)$, где l – координата тела массой m. На рис. 6.3.2 *а* изображена пружина в трех состояниях: в первом состоянии $l < l_0$ $F_l > 0$, во втором $F_l = 0$, в третьем $F_l < 0$. Прямая линия на рис. 6.3.2 *б* — график зависимости проекции силы упругости от координаты тела массой m. Таким образом сила упругости не является постоянной силой, а зависит от координаты тела.



а б

рис. 6.3.2

Вычислим теперь работу сил упругости, действующих на тело при, его перемещении из положения l_1 в точку с координатой l_2. Из рис. 6.3.2 *б* следует, что искомая работа равна разности площадей двух треугольников

$$A_{12} = {}^1/_2\, k(l_1-l_0)^2 - {}^1/_2\, k(l_2-l_0)^2. \qquad (6.3.2)$$

Мы приходим к важному выводу, что работа силы упругости, как и работа силы тяжести, не зависит от характера движения тела, а определяется лишь его начальным и конечным положениями. Работа сил тяжести н упругости на замкнутой траектории равна нулю.

6.4. Потенциальная энергия

Понятие потенциальной энергии тела вводится для сил, работа которых определяется только положением начальной и конечной точек траектории. Такие силы называют *консервативными.* Работа неконсервативных сил зависит от формы траектории. Очевидно, к ним относится сила трения.

Пусть $\vec{F}(\vec{r})$ — консервативная сила, действующая на частицу со стороны тела, приращением энергии которого можно пренебречь, $\vec{r}$ — радиус-вектор частицы с началом на теле. A_{12} — работа, совершаемая силой при перемещении частицы из точки M_1 с координатами $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ в точку M_2 с координатами $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. В этом случае работу можно представить в виде разности значений $W_1 = W(\vec{r}_1)$, $W_2 = W(\vec{r}_2)$ одной и той же функции — $W(\vec{r})$ в точках $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$:

$$A_{12} = W(\vec{r}_1) - W(\vec{r}_2). \qquad (6.4.1)$$

Функция $W(x, y, z)$ называется *потенциальной энергией* частицы в точке с координатами $\vec{r} = (x, y, z)$. Если траекторию частицы представить как по-

следовательность малых перемещений $\Delta\vec{r}$, то согласно (6.4.1) элементарная работа на перемещении $\Delta\vec{r}$ приобретает вид

$$\delta A = -\Delta W(\vec{r}). \qquad (6.4.2)$$

Таким образом, для определения функции $W(x, y, z)$ необходимо вычислить работу, совершаемую консервативной силой при перемещении частицы. Очевидно, что эта функция определяется с точностью до константы. Из (6.4.1) или (6.4.2) следует, что работа связана не с потенциальной энергией, а с приращением функции называемой потенциальной энергией. В соответствии с (6.1.1) работа совершается силой при перемещении тела в течение некоторого интервала времени. В фиксированный момент времени понятие «работа» не определено. Поэтому определение потенциальной энергии как «запаса» работы не имеет смысла.

6.4.1. Потенциальная энергия частицы в однородном поле тяжести. Подставляя (6.3.1) в (6.4.1), получим соотношение

$$-mgy_2 + mgy_1 = W(y_1) - W(y_2).$$

Следовательно, согласно (6.4.1) потенциальная энергия частицы в поле тяжести

$$W(y) = mgy + \text{const} \qquad (6.4.3)$$

определяется неоднозначно, поскольку содержит произвольную константу. Мы убедимся далее, что наличие константы не проявляется в решении задач механики. Налагая произвольные условия на значение потенциальной энергии в произвольно выбранной точке, мы получим различные значения константы. В частности, полагая $W(0) = 0$, получим из (6.4.3) const = 0,

$$W(y) = mgy. \qquad (6.4.4)$$

Отметим, что y в выражении потенциальной энергии (6.4.4) обозначает координату частицы на числовой оси, направленной вертикально вверх.

Потенциальная энергия твердого тела определяется соотношением (6.4.4), где y — координата центра тяжести (см. Гл.10).

6.4.2. Потенциальная энергия частицы на пружине, прикрепленной к неподвижному телу. Подставляя (6.3.2) в (6.4.1), приходим к выводу, что потенциальная энергия частицы, прикрепленной к пружине,

$$W(l) = \frac{k}{2}(l - l_0)^2 + \text{const}.$$

Если выбрать значение потенциальной энергии $W(l_0) = 0$, то

$$W(l) = \frac{k}{2}(l - l_0)^2. \qquad (6.4.5)$$

Отметим, что потенциальная энергия (6.4.5), зависящая от одной координаты, получена при условии $M >> m$, где M и m — массы тела и частицы. В общем случае массы частиц a и b, прикрепленных к пружине, произволь-

ны. Тогда, учитывая (4.4.2), получим потенциальную энергию упругого взаимодействия частиц в виде функции, зависящей от шести координат

$$W(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = \frac{k}{2}(|\vec{r}_b - \vec{r}_a| - l_0)^2. \qquad (6.4.6)$$

6.4.3. Сила и потенциальная энергия. Переместим частицу из положения, заданного радиус-вектором $\vec{r}$ в положение $\vec{r} + \Delta\vec{r}$. Из (6.1.2) и (6.4.2) получим соотношение

$$\vec{F}\Delta\vec{r} = -\Delta W(\vec{r}). \qquad (6.4.6)$$

Полагая, например $\Delta\vec{r} = (\Delta x, 0, 0)$, получим $F_x = -\Delta W/\Delta x$. Направление силы параллельно направлению, в котором потенциальная энергия убывает. В общем случае

$$\vec{F}(x, y, z) = (-\frac{\Delta W}{\Delta x}, -\frac{\Delta W}{\Delta y}, -\frac{\Delta W}{\Delta z}).$$

6.5. Теорема об изменении кинетической энергии

6.5.1. Кинетическая энергия частицы. Кинетическая энергия частицы массой m, движущейся со скоростью $\vec{v}$, определяется скалярной положительной величиной

$$K = mv^2/2. \qquad (6.5.1)$$

Например, пуля массой 3,6 *г*, принятого в НАТО патрона 223 Remington калибра 5,56 × 45, покидает ствол со скоростью 1 000 м/с и имеет кинетическую энергию 1 800 Дж. С дистанции 300 м она навылет пробивает стальную каску. Отметим, что наименьшее значение энергии достаточное для необратимого повреждения живой ткани всего 80 Дж. С появлением недавно изобретенного алюминиевого пороха появилась возможность регулировать энергию пули в соответствии с конкретными условиями применения оружия.

6.5.2. Теорема об изменении кинетической энергии частицы. Если к частице приложена сила $\vec{F}$, то скорость и кинетическая энергия частицы изменяются. Представим траекторию частицы в виде последовательности N малых перемещений $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$ и найдем соотношение, связывающее приращение кинетической энергии с работой, совершаемой силой $\vec{F}$. С этой целью запишем второй закон Ньютона и образуем скалярное произведение

$$m\vec{v}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{v}\vec{F}.$$

Умножая обе части на Δt, получим $m\vec{v}\Delta\vec{v} = \vec{F}\vec{v}\Delta t = \vec{F}\Delta\vec{r}$. Правая часть представляет собой элементарную работу δA. Преобразуем левую часть, учитывая соотношения

$$\vec{v}\Delta\vec{v} = v\Delta v, \ \Delta v^2 = (v + \Delta v)^2 - v^2 \approx 2v\Delta v.$$

Тогда $m\vec{v}\Delta\vec{v} = \Delta(mv^2/2)$. Следовательно, производная кинетической энергии равна мощности, развиваемой силой $\vec{F}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = \vec{v}\vec{F}. \qquad (6.5.2)$$

Представим теперь траекторию частицы в виде последовательности N малых перемещений $\Delta\vec{r} = \vec{v}\,\Delta t$. Умножим обе части (6.5.2) на Δt и учтем, что элементарная работа $\delta A = \vec{F}\,\Delta\vec{r} = \vec{F}\,\vec{v}\,\Delta t$. Тогда получим приращение кинетической энергии при перемещении $\Delta\vec{r}$ в виде

$$\Delta K = \delta A.$$

Если в некоторой точке M_1 траектории кинетическая энергия частицы равна K_1, а в точке M_2 кинетическая энергия равна K_2, то, вычисляя сумму всех элементарных работ при перемещении частицы по траектории, получим

$$K_2 - K_1 = A_{12}, \qquad (6.5.3)$$

где A_{12} — работа всех сил, приложенных к частице на участке траектории, проходящей через точки 1 и 2.

Итак, формулируем важнейшую теорему механики: *приращение кинетической энергии частицы равно работе всех приложенных к ней сил.*

Силы, действующие на частицу, могут быть силами упругости, тяжести, трения и т. д.

Задача 6.5.1. Используя условия задачи 4.5.12, определите приращение кинетической энергии тела при перемещении доски на расстояние s.

Решение. Согласно закону изменения кинетической энергии (6.5.3) в случае $a \le \mu g$ имеем $K_2 - K_1 = F_{тр}s$ или $K_2 - K_1 = mas$. При $a \ge \mu g$ в результате действия силы трения μmg тело перемещается за интервал времени T относительно доски на $\Delta x_т = \mu gT^2/2$, доска — на $s = aT^2/2$. Следовательно, в этом случае $K_2 - K_1 = mas(\mu g/a)^2$, Отметим, что сила трения совершает положительную работу.

6.6. Закон изменения полной энергии

6.6.1. Полная энергия. Сумму кинетической и потенциальной энергий частицы называют *полной энергией* $E = K + W$. Полная энергия включает в себя кинетическую энергию, величина которой всегда положительна и потенциальную энергию, которая может быть как положительной, так и отрицательной. Следовательно, полная энергия может быть величиной положительной, отрицательной или равной нулю.

6.6.2. Закон изменения полной энергии частицы. Если из всех сил, действующих на частицу, выделить консервативные силы, работа которых выражается соотношением (6.4.1), то закон изменения кинетической энергии (6.5.3) удобно представить в другой форме:

$$K_2 - K_1 = W_1 - W_2 + A'_{12}, \rightarrow (K_2 + W_2) - (K_1 + W_1) = A'_{12},$$

где A'_{12} — работа неконсервативных сил. Следовательно,

$$E_2 - E_1 = A'_{12}, \qquad (6.6.1)$$

где $E = K + W$ — полная энергия. Это утверждение представляет собой важнейший закон механики: *приращение полной энергии на конечном участке траектории частицы равно работе неконсервативных сил.*

Если кинетическая энергия в начальном и конечном состояниях равна нулю, то $W_2 - W_1 = A'_{12}$.

Пример 6.6.1. При волоке груза массой m по наклонной шероховатой плоскости клина до высоты H относительно плоскости основания совершена работа A. Найдем величину скорости v, которую приобретет груз у основания, если его отпустить.

Согласно (6.6.1) имеем уравнение

$$[0 + mgH] - [0 + 0] = A + A_{тр}^{(1)}, \qquad (1)$$

где $A_{тр}^{(1)}$ — работа силы трения при втаскивании груза. Предположим, что коэффициент трения удовлетворяет условию $\mu \le \mathrm{tg}\alpha$, где α — угол наклона плоскости. Тогда груз может скользить вниз по наклонной плоскости клина. Используя еще раз закон изменения полной энергии, получим уравнение

$$[m\upsilon^2/2 + 0] - [0 + mgH] = A_{тр}. \qquad (2)$$

Поставленная задача может быть решена только при дополнительных условиях. Пусть груз втаскивают с помощью веревки, натянутой параллельно наклонной плоскости. Тогда $A_{тр} = A_{тр}^{(1)}$, $\upsilon = (4gH - 2A/m)^{1/2}$, а работа A удовлетворяет условию $A \le 2mgH$, эквивалентному неравенству $\mu \le \mathrm{tg}\alpha$. Действительно, в этом случае согласно (6.1.1) работа силы трения $A_{тр}^{(1)} = -\mu mgH\mathrm{ctg}\alpha$. Из (1) находим $A = mgH + \mu mgH\mathrm{ctg}\alpha \le 2\,mgH$.

Пример 6.6.2. Частица массой m висит на пружине, другой конец которой прикреплен к опоре.

А. Найдем работу, которую необходимо совершить для смещения частицы по вертикали на величину c. Выберем ось x с началом в точке подвеса и направим ее вертикально вниз. В положении равновесия сумма сил, действующих на частицу, равна нулю: $mg - k(x_1 - l_0) = 0$. Согласно (6.6.1) искомая работа равна разности потенциальных энергий в точках $x = x_1$ $x = x_1 + c$: $A = W(x_1 + c) - W(x_1)$, где $W(x) = -mgx + (k/2)(x - l_0)^2$. .

Для упрощения вычислений перейдем к новой координате z, полагая $x = x_1 + z$. В результате получим потенциальную энергию — функцию $w(z) = W(x_1 + z) = kz^2/2 + \mathrm{const}$, где $\mathrm{const} = -mgx_1 + (k/2)(x_1 - l_0)$. Следовательно, $A = w(c) - w(0) = kc^2/2$.

Б. Теперь отпустим частицу и найдем величину скорости $v(z)$. Поскольку величина A'_{12} в (6.6.1) равна нулю, то $0 + w(c) = mv^2/2 + w(z)$ или $v^2(z) = (k/m)(c^2 - z^2)$.

6.6.3. Приращение полной энергии, вследствие работы сил трения. Работа силы трения, действующей на частицу, может быть положительной (см. пример 6.5.1) или отрицательной величиной.

Если соприкасающиеся тела движутся относительно друг друга, то в результате действия сил трения полная энергия системы тел уменьшается. Однако это не означает исчезновения энергии. Для объяснения причины потерь энергии мы должны выйти за рамки механики. Действительно, в механике изучают движение тела как целого, не учитывая движения и взаимодействия молекул вещества. В системе отсчета, в которой тело как целое покоится, сумму кинетической энергии молекул и потенциальной энергии взаимодействия называют внутренней энергией тела (см. часть II, гл. 4). Полная энергия системы реальных упругих тел равна сумме полной энергии E механического движения тел и внутренней энергии U каждого тела. Уменьшение полной механической энергии системы тел сопровождается возрастанием внутренней энергии тел. Это утверждение — следствие закона сохранения полной энергии замкнутой системы.

Возникает вопрос: как система распорядится приращением внутренней энергии? Ответ известен: конечное состояние зависит от термодинамического процесса, который реализуется при взаимодействии движущихся тел. Поэтому, не изучив следующий раздел физики — термодинамику, нельзя понять особенности тепловых явлений в механических процессах. Например, если тела несжимаемы, то возможна передача теплоты, сопровождающаяся повышением температуры тел. С другой стороны, при адиабатическом сжатии температура тела повышается и без подвода теплоты.

Однако до середины XIX века механика представляла собой «изотермическую» науку, так как сложилось мнение, что достаточно устранить трение в механических процессах и температура окажется постоянной. Причина такого подхода в том, что изменение температуры при адиабатическом изменении объема упругих тел в окружающем нас мире достаточно мало. Благодаря этому обстоятельству стало возможным становление механики, как науки, изучающей движение твердых тел. Современное понимание тепловых явлений стало возможным только после появления работы немецкого физика Р. Клаузиуса (1865 г.), который ввел строгое определение понятия - количество теплоты (см. Дополнение II, гл. 9).

Задача 6.6.3. На гладкой горизонтальной плоскости покоится доска массой M. На доске лежит тело массой m, которому сообщили начальную скорость v. Коэффициент трения между телом и доской — μ. Найдите расстояние, на которое сместится тело относительно доски.

Решение. В горизонтальном направлении на тело действуют сила трения скольжения, проекция которой $F = -\mu mg$, а на доску — сила трения $F' = -F$. После того как скорость тела относительно доски станет равной нулю, доска и тело как целое движутся со скоростью u. Поскольку сумма проекций всех внешних сил (сил реакций и тяжести) на горизонтальное направления равна нулю, то сохраняется горизонтальная компонента импульса системы:

$$0 + mv = (M + m)u. \qquad (1)$$

Теперь в системе, связанной с Землей, запишем закон изменения полной энергии (6.6.1) каждого тела системы:

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -\mu mgx_2 < 0,$$

$$\frac{Mu^2}{2} - 0 = \mu mgx_1 > 0,$$

где x_2, x_1 — перемещения тела и доски относительно Земли. Отметьте, что сила трения, действующая на доску, совершает положительную работу. Складывая эти уравнения, получим закон изменения полной энергии системы

$$\frac{1}{2}(m+M)u^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu mg(x_2 - x_1) < 0. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) находим перемещение тела относительно доски

$$x_2 - x_1 = \frac{Mv^2}{2\mu g(m+M)}.$$

При $m << M$ перемещение тела $x_2 - x_1 = v^2/(2\mu g)$ оказывается таким же, как и в случае закрепленной доски.

Задача 6.6.4. Частица массой m с кинетической энергией К сталкивается с неподвижным атомом массой M. Найти энергию возбуждения атома Q в результате абсолютно неупругого столкновения.

Решение. После неупругого столкновения атом и частица движутся с одинаковой скоростью u. Согласно закону сохранения импульса системы

$$mv + 0 = (m+M)u, \qquad (1)$$

где v — скорость частицы до столкновения.

Из закона изменения полной энергии следует уравнение

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m+M)u^2}{2} + Q, \qquad (2)$$

где Q — энергия возбуждения атома (которая в дальнейшем может перейти в другие формы энергии). Из уравнений (1)—(2) находим

$$Q = \frac{M}{m+M}K.$$

Из этого соотношения следуют интересные предельные случаи:

$$Q = K,\ m << M,$$

$$Q = \frac{K}{2},\ m = M,$$

$$Q = \frac{M}{m}K << K,\ m >> M.$$

Мы приходим к выводу, что при неупругом столкновении легкой частицы (например электрона с атомом) происходит полная передач ее энергии атому — атом возбуждается и затем испускает фотон.

Если рассмотреть аналогичную задачу, в которой сталкиваются макроскопические тала массой m и M, то величина Q равна приращению внутренней энергии системы тел.

6.7. Закон сохранения полной энергии

6.7.1. Закон сохранения полной энергии частицы. Если неконсервативные силы отсутствуют или работа неконсервативных сил A'_{12} равна нулю, то согласно (6.6.1) полная энергия частицы сохраняется, т. е. имеет одно и то же значение в любой момент времени: E = const или

$$K_1+W_1 = K_2+W_2. \qquad (6.7.1)$$

В такой форме закон сохранения полной энергии в механике был получен в 1847 г. немецким ученым Г. Гельмгольцем (1821—1894). Имея в виду переход от (6.5.3) к (6.7.1) М. Планк писал: «Как ни незначительным нам кажется это преобразование — перспектива, которую оно открывает во всех областях физики, чрезвычайно велика, ибо возможность его обобщения для любых явлений природы легко бросается в глаза».

Задача 6.7.1. Тело массой m_1 соскальзывает по наклонной гладкой плоскости высотой H, образующей угол α_1, с горизонтом, а тело массой m_2 — по наклонной плоскости той же высоты H, но образующей с горизонтом угол α_2. Сравнить величины скоростей тел v_1 и v_2 у основания наклонных плоскостей. Трением пренебречь.

Решение. Примем основания горок за нулевой уровень потенциальной энергии. Поскольку трение отсутствует, полная энергия имеет одно и то же значение в любой точке траектории. Приравнивая значения полной энергии на вершине горки и у основания, получим уравнение для определения скорости v:

$$0 + mgH = \frac{mv^2}{2} + 0.$$

Отсюда находим, что величина скорости $v = \sqrt{2gH}$ зависит только от высоты горки и не зависит от массы тела и угла наклона плоскости. Итак, величина скоростей v_1 и v_2 одинаковы.

Задача 6.7.2. Небольшое тело начинает скользит с высоты H по наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = \pi/4$ с горизонтом. В конце наклонной плоскости тело встречает абсолютно упругую горизонтальную плоскость. Найти максимальную высоту подъема тела после упругого удара о горизонтальную плоскость. Начальная скорость тела равна нулю, трением пренебречь.

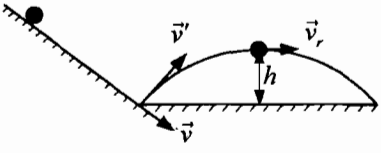


рис. 6.7.1

Решение. после отскока тело будет двигаться по параболе (рис. 6.7.1.). Для определения искомой высоты h проще всего воспользоваться законом сохранения полной энергии. На высоте h скорость тела имеет только горизонтальную составляющую υ_r. Приравнивая полные энергии в двух точках — на высоте H и в верхней точке параболы на высоте h, — получим уравнение

$$0 + mgH = \frac{mv_r^2}{2} + mgh.$$

Величина скорости тела у основания наклонной плоскости $v = \sqrt{2gH}$ (см. задачу 6.7.1), а горизонтальная составляющая скорость $v_r = \sqrt{2gH}\cos\alpha$ при отскоке не изменяется. Следовательно, $h = H\sin^2\alpha = {}^1/_2 H$.

Задача 6.7.3. Альпинист на вертикальной стене. На рис. 6.7.3 показаны этапы прохождения стенки связкой-двойкой. Веревка закреплена в точке S. Лидер с рюкзаком общей массой $m = 100$ кг поднялся на скалу до высоты h относительно напарника S, забил в точке страховки F крюк, продернул веревку через карабин и поднялся еще на расстояние h_1. Длина веревки в этом положении $l_0 = h + h_1$, $h = 5$ м, $h_1 = 3$ м. При срыве лидер падает до точки F_2, в которой скорость равна нулю. Качество веревки задается «модулем веревки» $f = kl_0$, где k — коэффициент жесткости веревки, $f = 40$ кН. Найдите удлинение веревки $\Delta l = l_2 - l_0$ ($l_2 = h + h_2$ — длина веревки в положении F_2) и величину силы $F = k\Delta l$, ($k = f/l_0$), действующей на лидера со стороны веревки в точке F_2.

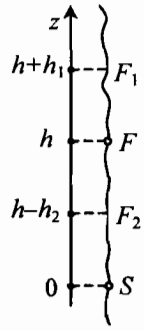


рис. 6.7.3

Решение. Выберем начало оси z в точке S. Потенциальная энергия альпиниста $W(z) = mgz + k(l - l_0)^2/2$, где l —длина веревки, $k = f/l_0$. Для оценок пренебрежем трением отдельных нитей веревки друг о друга. Тогда полные энергии груза в положениях $z = l_0$ и $z = l_2$ одинаковы. Из закона сохранения полной энергии получим уравнение

$$0 + mgl_0 + 0 = 0 + mg(h - h_2) + k(l_2 - l_0)^2/2. \qquad (1)$$

Удлинение веревки $\Delta l = h_2 - h_1$, $l_2 = l_0 + \Delta l$, $h - h_2 = 2h - l_0 - \Delta l$. Из (1) получим уравнение

$$k(\Delta l)^2 - 2mg[\Delta l + 2(l_0 - h)] = 0,$$

из которого находим

$$k\Delta l = mg[1 + \sqrt{1 + 2f\varepsilon_0/mg}\,],$$

где $\varepsilon_0 = 2(l_0 - h)/l_0$ — фактор падения, $2(l_0 - h)$ — «потеря» высоты. Полагая $\varepsilon_0 = 1{,}6$, получим удлинение веревки $\Delta l = 2{,}42$ м, относительное удлинение $\Delta l/l_0 = 0{,}3$. Величина силы, действующей на альпиниста со стороны веревки, $F = 12{,}18$ кН. Однако максимальное значение усилия, которое может выдержать тело человека $F_{max} = 5$ кН. Наиболее серьезное падение с фактором $\varepsilon_0 = 2$: высота падения равна удвоенной длине веревки. В этом случае $\Delta l/l_0 = 0{,}34$, $F = 13{,}4$ кН. Из второго закона Ньютона $ma_2 = -mg + k(l_2 - l_0)$ получим $a_2 = 12{,}71\,g$.

Современная альпинистская веревка содержит сердцевину с модулем f_1 при удлинении $\Delta l_1 = l_1 - l_0$ и модулем $f_2 < f_1$ при дальнейшем удлинении $\Delta l_2 = l_2 - l_0$. Такая веревка позволяет получить приемлемое значение величины силы $F = k_2\Delta l_2$.

Задача 6.7.4. Груз массой $m = 10^3$ кг опускается на тросе лебедки с постоянной скорость $\upsilon = 4$ м/с. Коэффициент жесткости троса $k = 4\ 10^5$ Н/м.

Покажите, что максимальная величина силы натяжения троса при внезапной остановке лебедки $T = mg + \upsilon(km)^{1/2}$, $T = 89{,}8 \cdot 10^3$ H.

Задача 6.7.5. Гибкая однородная цепь длиной L может двигаться по желобу, имеющему в сечении форму равнобедренного треугольника с углом 2α при вершине и расположенному в вертикальной плоскости. Трение отсутствует, предполагается, что цепь прилегает к желобу. Найти наименьшую начальную скорость цепи, необходимую для преодоления такой горки. В начальный момент времени расстояние между горизонтальными прямыми, проходящими через центр тяжести цепи и вершину желоба, равно H (рис. 6.7.5).

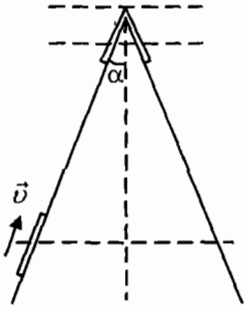


рис. 6.7.5

Цепь перевалит через горку, если в тот момент времени, когда середина цепи достигнет вершины желоба, скорость цепи обратится в нуль. Выберем в качестве нулевого уровня потенциальной энергии горизонтальную прямую, проходящую через вершину желоба. Тогда в начальном состоянии полная энергия цепи равна

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} + (-mgH).$$

В конечном состоянии центр тяжести цепи находится на расстоянии $(L/4)\cos\alpha$ от вершины треугольника; полная энергия

$$0 + (-mg\frac{L}{4}\cos\alpha).$$

$$\upsilon_0 = \sqrt{2gH(1 - \frac{L}{4H}\cos\alpha)}.$$

Заметим, что для точечного тела наименьшая скорость равна $\sqrt{2gH}$. В нашем примере $\upsilon < \sqrt{2gH}$.

Этот пример поясняет, почему прыгун в высоту, использующий технику «форсбери-флоп», может достичь большей высоты, чем при прыжке перекатом. Совершая прыжок, Дик Форсбери перенес через планку сначала корпус, голову и ноги; при этом центр тяжести оставался ниже уровня планки.

6.7.2. Закон сохранения полной энергии системы частиц в поле тяжести. Рассмотрим систему взаимодействующих N частиц, движущихся в однородном поле тяжести. Внутренние силы, т.е. силы взаимодействия частиц — консервативны. Импульс системы $\vec{P} = m\vec{u}$, где m — полная масса системы, $\vec{u}$ — скорость центра масс системы, связанная с радиус-вектором центра масс $\vec{R} = (x_c, y_c, z_c)$соотношением $\vec{u} = d\vec{R}/dt$. Подставляя вектор $\vec{P}$ из (5.2.1) в (5.3.2), получим уравнение

$$m\frac{d\vec{u}}{dt} = m\vec{g}.$$

Образуем далее скалярное произведение с вектором $\vec{u}$. В результате тождественных преобразований

$$m\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt} = m\vec{g}\vec{u}, \rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{mu^2}{2} - m\vec{g}\vec{R}) = 0,$$

получим закон сохранения полной энергии системы как целого

$$\frac{mu^2}{2} + W(\vec{R}) = \text{const}, \qquad (6.7.2)$$

где $W(\vec{R}) = -m\vec{g}\vec{R}$ — потенциальная энергия системы. Направим ось z вертикально вверх. Тогда $W = mgz_c$.

Пример 6.7.6. Модель прыжка в высоту без разгона. Невесомая пружина прикреплена к двум тонким дискам. Эту систему поставили на горизонтальную плоскость, затем пружину сжали на величину c и отпустили. Найдите наибольшую высоту, на которую подскочит центр масс системы (m_1 и m_2 — массы дисков, k — жесткость пружины, l_0 — длина пружины в ненапряженному состоянии).

Выберем на горизонтальной плоскости начало координатной оси z, направленной вертикально вверх. Обозначим z_1, z_2 координаты центров масс первого и второго дисков. Проекции на ось z сил упругости, действующих на первый и второй диски, равны соответственно $F_1 = k(z_2 - z_1 - l_0)$, $F_2 = -k(z_2 - z_1 - l_0)$. Рассмотрим вначале движение второго диска при значении $z_1(t) = 0$. Из второго закона Ньютон следуют два уравнения

$$0 = k(z_2 - l_0) - m_1g + N(t), \quad m_2a_2 = -k(z_2 - l_0) - mg. \qquad (1)$$

Здесь $N(t)$ — сила реакции, действующая на первый диск со стороны плоскости. В положении равновесия $z_2 = z_{2e}$, $N = N_e$ (рис. 6.7.6, *а*). Из (1) находим

$$z_{2e} = l_0 - m_2g/k, \quad N_e = mg, m = m_1 + m_2.$$

В начальный момент времени $t = 0$, когда второй диск отпустили, координаты дисков соответственно равны $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = z_{20}$, $z_{20} = z_{2e} - c$ (рис. 6.7.6, *б*). Система оторвется от плоскости в тот момент времени $t = t_s$, когда сила реакции $N(t) = m_1g - k(z_2 - l_0)$ обратится в ноль. Следовательно, координата второго диска в момент отрыва $z_{2s} = l_0 + m_1g/k$ (рис. 6.76 *в*). Величину скорости в этом положении v_{2s} найдем из закона сохранения полной энергии второго диска

$$0 + (k/2)(z_{20} - l_0)^2 + m_2gz_{20} =$$
$$= m_2\upsilon_{2s}^2/2 + (k/2)(z_{2s} - l_0)^2 + m_2gz_{2s} \rightarrow \upsilon_{2s}^2 = (k/m_2)[c^2 - (mg/k)^2].$$

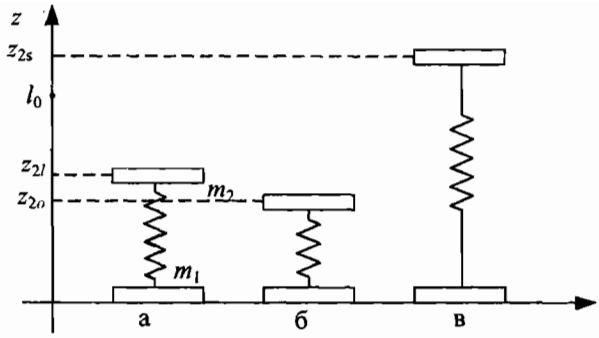


рис. 6.7.6

Следовательно, система подпрыгнет при условии $c > mg/k$. Отметим, что скорость υ_2 достигает наибольшего значения $(kc^2/m_2)^{1/2}$ при $z = z_{2e}$.

Найдем теперь максимальную высоту подъема центра масс системы z_{cm}. Согласно определению (5.2.2) координаты центра масс $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = (m_1z_1 + m_2z_2)/m$, проекция скорости центра масс на ось z равна $\upsilon_c = (m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2)/m$. Из уравнения (6.7.2) следует закон сохранения полной энергии системы как целого в однородном поле тяжести $m\upsilon_c^2/2 + mgz_c = \text{const}$. Найдем теперь максимальную высоту подъема центра масс системы z_{cm}. Из закона сохранения полной энергии центра масс получим уравнение

$$0 + mgz_{cm} = (m/2)(m_2\upsilon_{2s}/m)^2 + m_2gz_{2s}.$$

Подставляя значения z_{2s} и υ_{2s}, находим

$$z_{cm} = (m_2/m)(z_{2s} + (k/2mg)[c^2 - (mg/k)^2]).$$

Применим полученные результаты для оценки работы, совершаемой человеком, при прыжке в высоту с места. Приращение координаты центра масс $\Delta z_c = z_{cm} - (m_2/m)z_{2s} = (km_2/2m^2g)[c^2 - (mg/k)^2]$. Мышцы ног при перемещении $\Delta z_2 = z_{2s} - z_{20} = c + mg/k$ совершают работу $A = W(z_{20}) - W(z_{2s})$, $A = k(z_{20} - l_0)^2/2 - k(z_{2s} - l_0)^2/2 = (k/2)(c + mg/k)[c + (m_2 - m_1)g/k]$.

В лучшем прыжке в высоту центр масс поднимается приблизительно на величину $\Delta z_c = 0{,}6$ м при перемещении $\Delta z_2 = 0{,}3$ м. Полагая $m_1 \approx 0$, представим работу в виде $A = k\Delta z_2^2/2 = mg(\Delta z_2 + \Delta z_c)$. Для прыгуна массой $m = 70$ кг находим $A = 617$ Дж. Величина мышечного усилия в начальной стадии прыжка $F = k|\Delta z_2|$, $F = 6mg$.

6.8. Столкновение тел

Если в начальный момент времени два тела находятся достаточно далеко друг от друга, а их начальные скорости направлены так, что с течением времени происходит сближение тел, то в результате взаимодействия их скорости изменяется как по величине, так и по направлению. В этом случае говорят, что произошло столкновение тел. Столкновение тел определяется характером

их взаимодействия. Здесь мы будем предполагать, что тела взаимодействуют при непосредственном контакте. В зависимости от упругих свойств тел столкновения могут быть упругими, частично упругими и неупругими.

Столкновение двух тел называется упругим, если в процессе взаимодействия сохраняется полная механическая энергия и не изменяется внутреннее состояние тел. При абсолютно неупругом ударе тела объединяются — их относительная скорость равна нулю, т.е. системе центра масс тела неподвижны. В этом случае кинетическая энергия тел после удара меньше, чем до удара. Внутренняя энергия сталкивающихся тел после удара возрастает.

Пример 6.8.1. На идеально гладкой горизонтальной плоскости лежит шар массой m_2. На него налетает шар массой m_1, скорость которого $\vec{v}$. Между шарами происходит упругий центральный удар. Определим скорости шаров после столкновения и величину энергии, переданной первоначально покоящемуся шару.

Проведем ось x, параллельную вектору $\vec{v}$, и обозначим проекции скоростей первого и второго шаров после удара через u_1 и u_2. Из законов сохранения горизонтальной составляющей импульса и полной энергии системы следует, что

$$m_1 v + 0 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \tag{1}$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} + 0 = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \tag{2}$$

Из уравнения (1) найдем

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2}(v - u_1). \tag{3}$$

Подставляя это выражение в (2), получим уравнение, из которого найдем скорость первого шара после удара

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v. \tag{4}$$

Используя значение u_1, из (3) найдем скорость второго шара после удара

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v. \tag{5}$$

Энергия, переданная первоначально покоящемуся шару, равна его кинетической энергии после удара

$$K_2 = \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_1 v^2}{2}. \tag{6}$$

Кинетическая энергия первого шара после удара

$$K_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{m_1 v^2}{2}. \qquad (7)$$

Проанализируем полученные формулы. Из (4) видно, что налетающий шар отскакивает назад, если его масса $m_1 < m_2$. Если $m_1 > m_2$, то шар продолжает движение в направлении удара, но с меньшей скоростью. Если массы шаров равны, то налетающий шар остановится, а второй начнет движение со скоростью налетающего — шара обмениваются скоростями. Если $m_1 = {}^1/_3 m_2$, то $u_2 = -u_1 = {}^1/_2 \upsilon$. В этом случае шары движутся в противоположные стороны с одинаковыми по величине скоростями.

Интересно исследовать различные предельные случаи. Если масса первого шара $m_1 >> m_2$, то из (4) и (5) следует, что тяжелый налетающий шар почти не изменит свою скорость, в то время как первоначально покоящийся легкий шар начнет двигаться со скоростью, приблизительно равной 2υ (этот случай рассмотрен в задаче 3.5.4).

Если, наоборот, масса первого шара $m_1 << m_2$, то, как видно из (4), (5), он отскакивает назад, причем скорость этого шара после удара почти не изменяется по величине, а первоначально покоящийся массивный шар приобретает небольшую скорость $\approx(2m_1/m_2)\upsilon$. Поэтому энергия $K_2 \approx 2m^2{}_1\upsilon^2/m_2 << m_1\upsilon_2/2$, переданная шару массой m_2, незначительна. Итак,

$$u_1 \approx -\upsilon,\ u_2 \approx \frac{2m_1}{m_2}\upsilon,\ m_1 \ll m_2;$$

$$u_1 = -1/2v,\ u_2 = 1/2\upsilon,\ m_1 = 1/3m_3;$$

$$u_1 = 0,\ u_2 = \upsilon,\ m_1 = m_2;$$

$$u_1 \approx \upsilon,\ u_2 \approx 2\upsilon,\ m_1 \gg m_2.$$

Энергия (6), переданная покоящемуся шару, максимальная только в том случае, когда массы шаров равны. Этот вывод, полученный при рассмотрении центрального удара, справедлив также и при нецентральных соударениях. Поэтому, когда в ядерной технике возникает необходимость уменьшить скорость нейтронов, выделяющихся при ядерных реакциях, то для замедления нейтронов используют вещества с небольшим атомным весом. Например, из (7) следует, что при упругом лобовом ударе нейтрона с ядром дейтерия, масса которого равна удвоенной массе нейтрона ($m_2 = 2m_1$), энергия нейтрона уменьшится в 9 раз, а при столкновении с ядром углерода в блоке графита ($m_2 = 12m_1$) уменьшится только в 1,4 раза.

Задача 6.8.2. Два одинаковых гладких шара испытывают упругий нецентральный удар: скорости шаров не лежат на прямой прямой, соединяющей их центры. Второй шар до столкновения покоился. Определить угол разлета шаров.

Решение. Обозначим скорость первого шара до удара через $\vec{v}$, а скорости первого и второго шаров после удара через $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Угол между векторами $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ является искомым углом разлета шаров после удара.

Согласно закону сохранения энергии и импульса

$$m_1\vec{v} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Сократив на массу, получим

$$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \qquad (1)$$

$$\vec{v}^2 = u_1^2 + u_2^2 \qquad (2)$$

Из (1) следует, что векторы $\vec{v}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ образуют треугольник; из (2) ясно, что этот треугольник прямоугольный с катетами $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Возводя (1) в квадрат

$$v^2 = u_1^2 + 2\vec{u}_1\vec{u}_2 + u_2^2 \qquad (3)$$

находим из (2), (3), что $\vec{u}_1\vec{u}_2 = 0$. Поскольку скалярное произведение векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ равно нулю, то они образуют угол, равный 90°.

Этот результат можно понять из качественных соображений, разлагая скорость $\vec{v}$ на две составляющие, одна из которых, $\vec{v}_{\parallel}$, параллельна линии, соединяющей центры шаров, а другая, $\vec{v}_{\perp}$, перпендикулярна ей. Составляющая $\vec{v}_{\perp}$ не изменится при столкновении, так как шары гладкие, удар упругий. Составляющая $\vec{v}_{\parallel}$ обратится после столкновения в нуль, так как шары имеют равные массы (см. пример 6.8.1). Поэтому после удара налетающий шар будет иметь скорость $\vec{u}_1 = \vec{v}_{\perp}$, а второй шар — скорость, равную $\vec{u}_2 = \vec{v}_{\parallel}$: шары разлетаются под прямым углом.

Задача 6.8.3. На гладкой горизонтальной плоскости лежит частица массой m. На нее налетает частица массой m с кинетической энергией K. После неупругого нецентрального соударения величины скоростей частиц одинаковы, угол между скоростями $\alpha = \pi/3$. Найдите приращение внутренней энергии частиц Q.

Решение. Из закона сохранения импульса получим уравнение $m\vec{v} + 0 = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2$. Поскольку $u_1 = u_2 = u$, то скорости образуют треугольник, в котором угол между векторами $\vec{u}_1$ и $\vec{v}$ равен $\alpha/2$. Следовательно, $v = 2u\cos\alpha/2$. Из закона изменения энергии получим уравнение $mv^2/2 + 0 = mu^2/2 + mu^2/2 + Q$. После возведения в квадрат обеих частей первого уравнения находим $v^2 = u^2 + 2\vec{u}_1\vec{u}_2 + u^2$. Следовательно, $Q = m\vec{u}_1\vec{u}_2$, $Q = mu^2/2 = K/3$.

Представим (6.9.4) в виде

$$E_a' - E_a = K_b - K_b',$$

где $E_a = K_a + W_{ab}$, $E_a' = K_a' + W_{ab}'$ — полные энергии частицы массой m_a моменты времени t и t'. Если приращение кинетической энергии $|K_b - K_b'| << |E_a|, |E_a'|$, то правой частью можно пренебречь, и мы приходим к приближенной форме закона сохранения полной энергии частицы a (6.6.1). Однако в этом приближении должен выполняться закон сохранения импульса системы (6.9.3).

6.9.3. Движение частиц в системе центра масс. В соответствие с (6.9.3) закон сохранения импульса замкнутой системы можно сформулировать как утверждение о движении ее центра масс $\vec{R}$ с постоянной скоростью. При изучении замкнутой системы удобно пользоваться системой отсчета, в которой центр масс системы частиц покоится, не рассматривая равномерное и прямолинейное движение системы как целого. Ее называют *системой центра масс* (с. ц. м.). С этой целью перейдем к новым переменным, производя замену

$$\vec{r}_a = \vec{R} + \frac{m_b}{m}\vec{r}, \quad \vec{r}_b = \vec{R} - \frac{m_a}{m}\vec{r}, \quad m = m_a + m_b, \tag{6.9.5}$$

где $\vec{r} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$. Следовательно, скорости частиц связаны со скоростью центра масс $\vec{u}$ и относительной скоростью $\vec{v}_0 = \vec{v}_a - \vec{v}_b$ соотношениями

$$\vec{v}_a = \vec{u} + \frac{m_b}{m}\vec{v}_0, \quad \vec{v}_b = \vec{u} - \frac{m_a}{m}\vec{v}_0. \tag{6.9.6}$$

Подставляя $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$ в (6.9.2), получим

$$mu^2/2 + \mu v_0^2/2 + W(r) = \text{const},$$

где $\mu = m_a m_b/(m_a + m_b)$ — величина, называемая *приведенной массой*. Первое слагаемое — кинетическая энергия системы как целого, второе — энергия относительного движения в с. ц. м.

Закон сохранения полной энергии частиц в системе центра масс, движущейся со скоростью $\vec{u}$, приобретает форму

$$E_c = \text{const}, \quad E_c = \frac{\mu}{2}(\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 + W(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|), \tag{6.9.7}$$

явно удовлетворяющую принципу относительности Галилея (см. ч.VI).

Если на частицы действуют внутренние неконсервативные силы, то вместо (6.9.7) получим закон изменения полной энергии

$$E'_c - E_c = A', \tag{6.9.8}$$

где A' — работа неконсервативных сил.

Задача 6.9.1. Разрешение парадоксов. Человек сообщает неподвижному камню скорость $\vec{v}_0$ относительно Земли, совершая согласно (6.5.3) рабо-

ту $A' = mv_0^2/2$. В системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{u} = \vec{v}_0/2$, из закона изменения кинетической энергии (6.5.3) получим значение работы $A' = 0$. Объясните этот парадокс.

Если использовать законы сохранения импульса и изменения полной энергии системы, то парадоксы не появляются. Согласно правилу «сложения скоростей» $v_{рК} = v_{р3} + v_{3К}$, где $v_{рК}$ — проекция скорости камня в инерциальной системе отсчета K, $v_{р3}$ — в системе, связанной с Землей, $v_{3К}$ — проекция скорости Земли в системе К. В начальном состоянии проекция скорости камня $v_{р3} = 0$, в — конечном состоянии — $v'_{р3} = v_0$, проекция скорости Земли $v'_{3К} = v_3$. Тогда в неподвижной системе отсчета из закона сохранения импульса и закона изменения полной энергии следуют уравнения

$$0 = m(v_0 + v_3) + Mv_3, \quad m(v_0 + v_3)^2/2 + Mv_3^2/2 = A', \tag{1}$$

где M — масса Земли. Из (1) находим

$$A' = \mu v_0^2/2, \quad \mu = mM/(m + M). \tag{2}$$

Отметим, что при $m << M$, величина $\mu \approx m$.

Если использовать закон изменения полной энергии в системе центра масс, то получим (2), поскольку формулировка закона включает только относительные скорости и координаты. Однако полезно рассмотреть ситуацию в произвольной инерциальной системе отсчета.

В системе K, движущейся со скоростью u, проекция скорости Земли и камня в начальном состоянии $v_{3К} = -u$, $v_{рК} = -u$. В конечном состоянии $v'_{3К} = v_3$, $v'_{рК} = v_0 + v_3$. Из закона сохранения импульса и закона изменения полной энергии получим уравнения

$$-mu - Mu = m(v_0 + v_3) + Mv_3,$$
$$m(v_0 + v_3)^2/2 + Mv_3^2/2 - mu^2/2 - Mu^2/2 = A'.$$

Исключая скорость Земли v_3, получим соотношение (2), не зависящее от скорости системы отсчета u.

Рассмотрите движение куска мела вблизи поверхности Земли. Теперь очевидно, что в любой инерциальной системе отсчета величина скорости куска мела относительно Земли равна $v_0 = [2g\Delta h(1 + m/M)]^{1/2}$.

Глава 7. Движение частицы по окружности

7.1. Уравнения движения частицы по окружности

Мы уже убедились, что на основе второго закона Ньютона можно исследовать не только криволинейное движение частицы, но и получить важнейшие следствия: законы изменения и сохранения импульса и полной энергии. Теперь научимся применять уравнения, следующие из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \tag{7.1.1}$$

для анализа движения частицы по окружности. Напомним, что ускорение частицы следует представить в виде трех компонент (см. 2.4)

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e} + \frac{v^2}{R}\vec{n} + 0 \cdot \vec{e}_3. \qquad (7.1.2)$$

Проекция ускорения на направление вектора $\vec{e}$ представляет собой *касательную* или *тангенциальную* компоненту ускорения $a_t = dv/dt$. Проекция ускорения на направление к центру окружности $a_n = v^2/R$, представляющую собой *нормальную* компоненту ускорения часто называют *центростремительным* ускорением.

Из (7.1.1), (7.1.2) получим три уравнения движения:

$$m\frac{dv}{dt} = F_{1t} + F_{2t} + \dots, \qquad (7.1.3\ a)$$

$$m\frac{v^2}{R} = F_{1n} + F_{2n} \dots, \qquad (7.1.3\ б)$$

$$m \cdot 0 = F_{1\perp} + \dots. \qquad (7.1.3\ в)$$

Здесь F_n, F_t, $F_\perp$ — проекции сил на направления к центру вращения, касательное к окружности и перпендикулярное к плоскости, в которой лежит окружность. Уравнение (7.1.3 *б*) гласит: произведение массы тела на центростремительное ускорение равно сумме проекций всех действующих сил на направление к центру вращения (это направление считается положительным). Сумму проекций сил, стоящих в правой части (7.1.3 *б*), часто называют центростремительной силой. Отсюда видно, что центростремительной силы как «таковой» в природе нет, движение по окружности происходит под действием известных ранее сил — тяжести, реакции и силы трения. Из уравнения (7.1.3, *в*) следует, что сумма проекций сил на направление, перпендикулярное к плоскости окружности, равна нулю.

Рассмотрим подробнее равномерное вращение тела по окружности. Согласно второму закону Ньютона ускорение параллельно силе, приложенной к телу. Поэтому тело, вращающееся по окружности с постоянной по величине скоростью, должно находиться под действием силы, направленной по радиусу к центру окружности. Эта сила является результирующей всех сил, возникающих при взаимодействии рассматриваемого тела с какими-либо другими телами, и удерживает вращающееся тело на окружности. Так как при равномерном вращении составляющая ускорения a_t, равна нулю, то согласно (7.1.3 *а*) сумма проекций всех сил на направление, касательное к окружности, также равна нулю.

Мы видим, что решение задач на динамику вращательного движения аналогично решению задач на прямолинейное движение. Для решения задач по динамике вращательного движения необходимо:

а) перечислить все силы, приложенные к телу, движущемуся по окружности,

б) записать уравнения движения (7.1.3).

В связи с этим следует сделать важное замечание. При равномерном вращении уравнение (7.1.3, *а*) примет простой вид: $0 = F_{1t} + F_{2t} + \ldots$. При неравномерном вращении ($a_t \neq 0$) уравнение (7.1.3 *а*), если не использовать аппарат высшей математики, не дает существенной информации для решения задачи. В этом случае вместо уравнения (7.1.3 *а*) надо писать закон изменения (или сохранения) полной энергии (6.6.1), который является следствием всех уравнений (7.1.3).

Пример 7.1.1. Движение частицы, прикрепленной к нити. На нерастяжимой нити длиной l подвешен шарик массой m. Радиус шарика существенно меньше длины нити; поэтому шарик можно рассматривать как частицу — материальную точку. Если частица закреплена на невесомом стержне и движется в вертикальной плоскости, то систему называют *математическим маятником*.

Изучим движение шарика в вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса (рис. 7.1.1). Положение шарика определяет функция $\varphi(t)$ — угол отклонения натянутой нити от вертикали в момент времени t. В рамках программы физики средней школы не ставится задача определения функции $\varphi(t)$. Рассмотрим другие аспекты этой задачи.

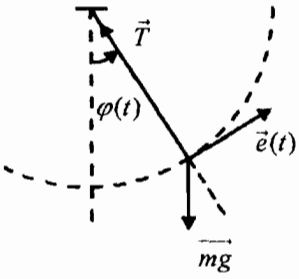


рис. 7.1.1

На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Второй закон Ньютона (7.1.1) имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Отсюда, в частности, следует, что при скорости шарика $\vec{v} \neq 0$ равнодействующая сила $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$ никогда не может быть направлена по касательной к окружности.

Согласно данному выше рецепту запишем уравнение (7.1.3б)

$$mv^2/l = T - mg\cos\varphi \qquad (1)$$

и закон сохранения полной энергии

$$mv^2/2 + W(\varphi) = E. \qquad (2)$$

Здесь $W(\varphi) = -mg\cos\varphi$ — потенциальная энергия частицы (нулевой уровень — горизонтальная прямая, проходящая через центр окружности), E — полная энергия — константа, определяемая начальными условиями. Пусть при значении угла $\varphi(0) = \varphi_0$ шарику сообщили скорость величиной $v(0) = v_0$. Тогда $E = mv_0^2/2 - mgl\cos\varphi_0$.

Уравнения (1), (2) позволяют ответить на все вопросы динамики шарика.

Из (1) следует, что $T(\varphi) \geq mg\cos\varphi$. Подставляя v^2 из (2) в (1), получим зависимость натяжения нити от угла:

$$T(\varphi) = 3mg\cos\varphi + 2E/l. \qquad (3)$$

Поскольку $v^2 = 2[E - W(\varphi)]/m \geq 0$, то границы движения по углу φ определяются неравенством $W(\varphi) \leq E$, из которого находим

$$\cos\varphi \geq -E/(mgl). \qquad (4)$$

Если бы шарик был прикреплен к невесомому стержню длиной l, то границы движения определялись бы неравенством (4). В нашем случае шарик будет двигаться по окружности при условии $T(\varphi) \geq 0$.

Рассмотрим теперь несколько характерных ситуаций или, по существу, задач.

А. Пусть $-mgl \leq E \leq 0$.

1. Наименьшее значение $E = -mgl$ реализуется единственным начальным условием $\varphi_0 = 0$, $v_0 = 0$. Тогда из (2) следует $v(\varphi) = 0$ — маятник находится в состоянии покоя.

2. Пусть значение полной энергии E_1 лежит в области $-mgl < E_1 < 0$. На рис. 7.1.2 изображен график функции $W(\varphi)$ и прямая $E = E_1$. Из (4) найдем область допустимых значений угла φ:

$$-\varphi_m \leq \varphi \leq \varphi_m, \quad \cos\varphi_m = -E_1/mgl, \ \varphi_m < \pi/2.$$

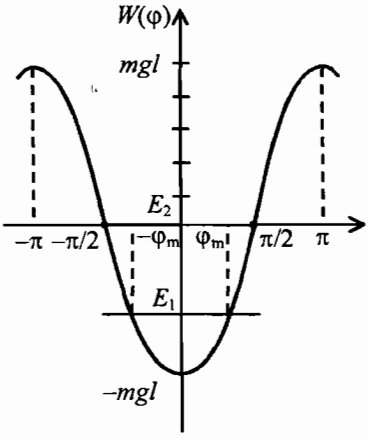


рис. 7.1.2

В этом случае говорят, что шарик движется в *потенциальной яме* между *точками поворота* $\varphi = -\varphi_m$, $\varphi = \varphi_m$, в которых скорость шарика равна нулю. Натяжение $T(\pm\varphi_m) = -E_1/l > 0$ принимает наименьшее значение. Полагая, например, $E_1 = -mgl/2$ получим $\varphi_m = \pi/3$, $T(\pi/3) = mg/2$, $T(0) = 2mg$.

Б. Пусть $E = E_2$, $E_2 = 0$. Допустимая область значений угла лежит в области $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Из уравнения $mv_0^2/2 - mgl = 0$ найдем значение начальной скорости $v_0 = (2gl)^{1/2}$, которую необходимо сообщить шарику в низшей точке траектории $\varphi_0 = 0$, чтобы он достиг положения $\varphi_m = \pi/2$. Из (3) следует, что $T(\varphi) = 3mg\cos\varphi \geq 0$. В положении $\varphi_m = \pi/2$ натяжение $T(\pi/2) = 0$, скорость шарика равна нулю, а ускорение $\vec{a} = \vec{g}$. При прохождении положения равновесия натяжение $T(0) = 3mg$, величина ускорения равна $2g$.

Ответим на вопрос: при каком значении угла $\varphi = \varphi_c$ вектор полного ускорения горизонтален? Согласно рис. 7.1.3 имеем $mg = T_c\cos\varphi_c$. Поскольку согласно (3) $T_c = 3mg\cos\varphi_c$, то $\cos\varphi_c = 1/(\sqrt{3})$.

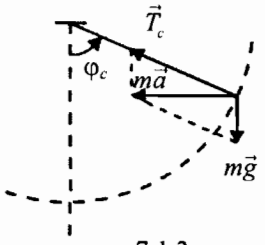


рис. 7.1.3

В. Пусть $E > 0$. Найдем условие, при котором нить натянута при движении частицы в интервале углов $\varphi \geq \pi/2$. Из условия $T(\pi) \geq 0$ получим неравенство $E \geq 3mgl/2$.

Найдем наименьшее значение скорости, которую необходимо сообщить шарику в положении $\varphi(0) = 0$, чтобы нить была натянута в любой точке траектории. Полагая $T(\pi) = 0$, получим систему

$$-3mg + 2E/l \geq 0,\ E = mv_0^2/2 - mgl,$$

из которой находим $v_0 \geq \sqrt{5gl}$. В верхней точке траектории $\varphi = \pi$ при значении $v_0 = \sqrt{5gl}$ величина силы натяжения $T(\pi) = mg$, величина скорости $v(\pi) = \sqrt{gl}$; натяжение в нижней точке траектории $T(0) = 6mg$. При значении $E = mgl$ сила натяжения нити обращается в нуль в положении φ_c: $\cos\varphi_c = -2/3$. Отметим, что частица, прикрепленная к невесомому стержню, совершает полный оборот при наименьшем значении полной энергии $E = mgl$.

Задача 7.1.2 Отношение величины ускорения шарика на конце невесомого стержня в положении наибольшего отклонения к величине ускорения в момент прохождения положения равновесия равно $\sqrt{3}/2$. Найдите угол наибольшего отклонения шарика от вертикали.

Решение. В положении равновесия $\varphi_0 = 0$ скорость шарика равна v_0, центростремительное ускорение $a_n = v_0^2/l$, касательная компонента ускорения $a_t = 0$. В положении максимального отклонения φ_m скорость шарика равна нулю, $a_n = 0$, $a_t = -g\sin\varphi_m$. Из равенства полных энергий в положении равновесия и в положении максимального отклонения получим уравнение

$$mv_0^2/2 - mgl = 0 - mgl\cos\varphi_m,\ \rightarrow v_0^2/l = 2g(1 - \cos\varphi_m).$$

Согласно условию

$$\frac{\sin\varphi_m}{2(1-\cos\varphi_m)} = \sqrt{3}/2,\ \rightarrow \mathrm{ctg}\varphi_m/2 = \sqrt{3},\ \varphi_m = \pi/3.$$

Задача 7.1.3. Шарик подвешен на нити длиной l к точке O. Найдите скорость $\vec{v}_0$, которую необходимо сообщить шарику в горизонтальном направлении, чтобы он достиг точки подвеса.

Решение. Введем систему координат xyz с началом в точке O (рис. 7.1.4). В начальном положении шарик находился в точке B. Пусть в точке $F(l\cos\alpha, l\sin\alpha, 0)$ сила натяжения нити обращается в нуль. Скорость шарика

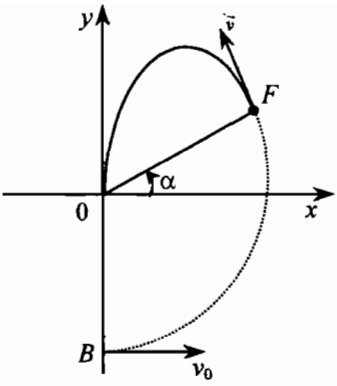


рис. 7.1.4.

$\vec{v} = (-v\sin\alpha,\ v\cos\alpha, 0)$. Далее шарик движется по участку параболы в поле тяжести:

$$x(t) = l\cos\alpha - v\sin\alpha t,$$

$$y(t) = l\sin\alpha + v\cos\alpha t - gt^2/2.$$

В момент времени $t = T$ шарик попадает в точку подвеса. Следовательно, $x(T) = 0$, $y(T) = 0$, или

$$l\cos\alpha - v\sin\alpha\ T = 0,$$

$$l\sin\alpha + v\cos\alpha\ T - gT^2/2 = 0.$$

Из этих уравнений находим соотношение между скоростью и углом α:

$$v^2 = gl\cos^2\alpha/(2\sin\alpha). \qquad (1)$$

Из второго закона Ньютона следует, что в точке F

$$mv^2/l = mg\sin\alpha, \qquad (2)$$

Решением уравнений (1), (2) являются корни

$$v^2 = gl/\sqrt{3}\ ,\ \cos^2\alpha = 2/3,\ \alpha \approx 35°. \qquad (4)$$

Приравнивая значения полной энергии в точках B и F, получим уравнение

$$mv_0^2/2 = mv^2/2 + mgl(1 + \sin\alpha).$$

Учитывая (4), найдем начальную скорость шарика $v_0 = [gl(2 + \sqrt{3}\ )]^{1/2}$.

Задача 7.1.4. Бусинка массой m надета на проволочное кольцо, поставленное вертикально, и находится в его верхней точке. Найти зависимость величины давления N бусинки на кольцо при ее соскальзывании от угла α между вертикалью и радиусом, проведенным через бусинку. Трением пренебречь.

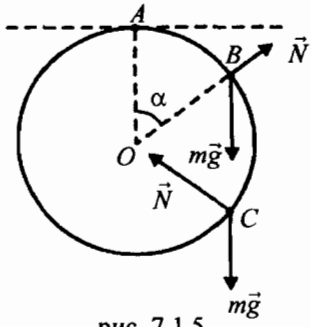


рис. 7.1.5

Решение. Рассмотрим бусинку в положении B (рис. 7.1.5). На нее действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. Под действием этих сил бусинка движется по окружности с возрастающей по величине скоростью. Составим уравнение движения бусинки:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

В положении B сумма проекций всех сил на направление к центру равна произведению массы бусинки на центростремительное ускорение:

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha - N. \qquad (1)$$

Здесь R — радиус кольца, v — скорость бусинки в положении B, которую можно найти, используя закон сохранения полной энергии. Для этого выберем в качестве нулевого уравнения отсчета потенциальной энергии горизонтальную прямую, проходящую через точку A. Тогда полная энергия равна сумме кинетической $mv^2/2$ и потенциальной энергии, равной $-mgR(1 - \cos\alpha)$. Следовательно

$$0 = \frac{mv^2}{2} - mgR(1 - \cos\alpha). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получим величину силы давления бусинки на кольцо

$$P(\alpha) = |N|, N = mg(3\cos\alpha - 2). \qquad (3)$$

Когда бусинка проходит положение, определяемое углом α_0 ($\cos\alpha_0 = 2/3$), она находится в невесомости, так как $P(\alpha_0) = 0$. При $0 \le \alpha < \alpha_0$ сила давления направлена к центру окружности, а при $\alpha_0 < \alpha \le \pi$ сила давления направлена по радиусу от центра. В нижней точке траектории ускорение $a = 4g$, а вес бусинки возрастает в пять раз: $P = 5mg$.

Задача 7.1.5. Мотоциклист на вертикальной стене. Какова должна быть наименьшая скорость мотоцикла, для того чтобы он мог ехать по внутренней поверхности вертикального кругового цилиндра радиусом $R = 6$ м по горизонтальной окружности. Коэффициент трения скольжения между шинами и поверхностью цилиндра $\mu = 0{,}4$.

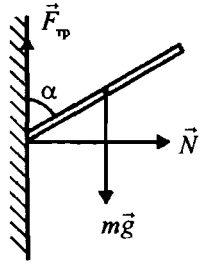


рис. 7.1.6

Решение. На систему человек-мотоцикл действуют три силы: сила реакции $\vec{N}$, перпендикулярная поверхности цилиндра, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ (рис. 7.1.6). Согласно второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}$. Запишем проекции этого уравнения на три взаимно перпендикулярные оси. Уравнение (7.1.3 *а*) имеет вид $0 = 0$, а два других — (7.1.3 *б*) и (7.1.3 *в*):

$$m\frac{v^2}{R} = N, \qquad (1)$$

$$0 = F_{тр} - mg. \qquad (2)$$

Уравнения (1), (2) содержат три неизвестные величины. Однако при движении с наименьшей скоростью мы должны положить $F_{тр}$ равной μN.

Подставляя это значение в (2), определим величину реакции; из (1) найдем наименьшую скорость движения

$$v_{min} = \sqrt{\frac{gR}{\mu}},\ v_{min} = 12{,}1 \text{ м/с}.$$

Задача 7.1.6. Тело массой m = 10 кг, имеющее скорость v = 5 м/с, скользит по желобу, расположенному в горизонтальной плоскости. Желоб состоит из прямолинейного участка AB и дуги параболы BC. В координатах xy уравнение кривой, образующей желоб,

$$y(x) = 0, x \le 0, \quad y(x) = kx^2/2, x \ge 0,$$

где k = 4 м$^{-1}$. Найти силу, действующую на тело в точке сопряжения прямой и параболы.

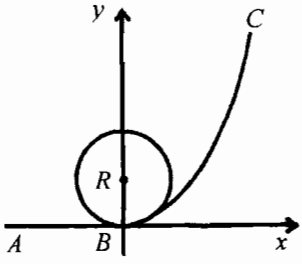


рис. 7.1.6

Решение. На прямолинейном участке желоба сумма сил тяжести $m\vec{g}$ и реакция $\vec{N}$ равна нулю. При движении по параболической части желоба сила реакции становится равной $\vec{N}+\vec{T}$, где $\vec{T}$ — вектор, лежащий в горизонтальной плоскости и перпендикулярный касательной к параболе в каждой точке траектории тела. В точке B вектор $\vec{T}$ направлен по оси y. Дуга параболы вблизи точки B может быть представлена как часть дуги окружности радиусом R, центр которой находится на оси y (рис. 7.1.6). Тогда из (7.1.3, *б*) следует

$$\frac{mv^2}{R} = T.$$

Найдем радиус этой окружности. Уравнение окружности в области $kx << 1$ должно иметь вид

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

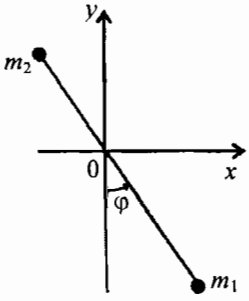


рис. 7.1.7

Подставляя сюда $y = kx^2/2$ и пренебрегая членом $\sim x^4$, найдем значение R = 1/k. Следовательно, при переходе на параболическую часть желоба тело испытает удар силой $T = kmv^2$. Подставляя числовые данные, находим T = 1000 $H \approx$ 100 кгс.

Задача 7.1.7. Невесомый стержень может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O и перпендикулярной стержню (рис. 7.1.7). На концах стержня закреплены частицы масс m_1 и m_2, находящиеся соответственно на

расстояниях l_1 и l_2 от точки O. В начальный момент времени стержень расположили горизонтально и отпустили. Найдите линейные скорости частиц при прохождении положения равновесия ($m_1 = m_2 = m$, $l_1 = 4a$, $l_2 = 3a$).

Решение. Предположим, что при вращении стержня трением можно пренебречь. Тогда для решения задачи достаточно записать уравнение, следующее из закона сохранения полной энергии. Положение стержня определяется углом отклонения от вертикали φ. Поскольку угловая скорость вращения частиц ω одинакова, то линейные скорости частиц $v_1 = \omega l_1$, $v_2 = \omega l_2$, кинетическая энергия частиц $K = I\omega^2/2$, $I = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$. Потенциальная энергия $W(\varphi) = (-m_1 l_1 + m_2 l_2)g\cos\varphi$.

Полная энергия $E = I\omega^2/2 + W(\varphi)$. В начальном положении полная энергия $E = 0$. При прохождении положения равновесия $\varphi = 0$ с угловой скоростью ω_0 полная энергия $E = I\omega^2/2 + (-m_1 l_1 + m_2 l_2)g$. Следовательно, $\omega_0^2 = 2(m_1 l_1 - m_2 l_2)g/(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)$, $\omega_0 = (2g/a)^{1/2}/5$. Линейные скорости частиц при прохождении положения равновесия $v_{10} = (4/5)(2ga)^{1/2}$, $v_{20} = (3/5)(2ga)^{1/2}$.

Задач 7.1.8. Небольшое тело начинает соскальзывать без начальной скорости из верхней точки неподвижной полусферы радиусом R. Как высоко оно подскочит после удара о поверхность, на которой находится полусфера? Удар считать абсолютно упругим, полусфера жестко закреплена на плоскости.

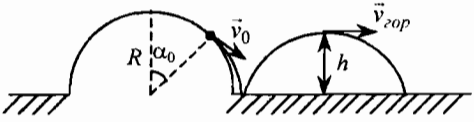


рис. 7.1.8

Решение. Приравнивая полные энергии в начальной точке траектории и в точке максимального подъема (рис. 7.1.8), получим уравнение

$$mgR = \frac{mv_{вб}^2}{2} + mgh. \qquad (1)$$

Используя результат задачи 7.1.4, находим, что сила реакции обратится в нуль при значении α_0, удовлетворяющем условию $\cos\alpha_0 = 2/3$. Далее тело будет свободно падать в поле тяжести. Поскольку горизонтальная составляющая скорости не изменяется, то $v_{гор} = v_0\cos\alpha_0$, $v_0 = \sqrt{2gR/3}$. Подставляя $v_{гор}$ в (1), получим $h = 23R/27$.

Глава 8. Закон всемирного тяготения

8.1. Открытие Солнечной системы

Первые, запечатленные наблюдения за движением Солнца на фоне звездного неба, относятся к эпохе IV—III тыс. до н. э. В III до н. э. шумерские астрономы определяли начало нового года — день весеннего равноденствия — по вступлению Солнца в созвездие Тельца. В этот день плоскость

экватора совпадает с плоскостью эклиптики. Интересно, что контур созвездия Тельца, похожий на букву *А*, послужил прообразом первой буквы алфавитов большинства языков индоевропейской группы. Почти за 2000 лет точка весеннего равноденствия сместилась навстречу видимому перемещению Солнца и во II в. до н. э. оказалась в созвездии Овен. Сейчас она находится в созвездии Рыб, передвигаясь ежегодно на 50,26″. Поэтому Солнце, последовательно проходя через все созвездия зодиака, вернется к исходному положению через 26 000 лет. Это явление обнаружил величайший астроном древности Гиппарх (II в. до н. э.) и назвал его *прецессией* — предварение равноденствий.

Происхождение прецессии объяснил И. Ньютон. Смена сезонов вызвана обращением Земли вокруг Солнца и наклоном ее оси к плоскости эклиптики на 23° 27′. Из-за того, что Земля сплюснута у полюсов, моменты сил, действующих на нее со стороны Солнца и Луны, приводят к вращению оси, вокруг нормали к плоскости эклиптики с периодом 26 000 лет.

С древнейших времен ночное небо было грандиозной лабораторией, открытой для каждого любознательного ума. Звезды казались неподвижными друг относительно друга, а пять светил — Меркурий, Венера, Марс, Юпитер, Сатурн — перемещались на фоне звезд, описывая петли и зигзаги. Отсюда и название — планета (греч. *planetes* — блуждающая).

Изучение движений планет и создание моделей, объясняющих их перемещения, сыграли решающую роль в развитии астрономии. По Аристотелю (384—322 до н. э.), Земля является центром мира, вокруг которого вращаются сферы с планетами и звездами. Первый «гелиоцентрист» Аристарх Самосский (310—250 до н.э.), опережая свое время почти на полторы тысячи лет, высказал гипотезу, согласно которой Земля вращается вокруг своей *оси и движется вокруг Солнца*. Кажущая неподвижность звезд связана с их очень большими расстояниями до Земли. Почти в то же время Эратосфен (276—194 до н. э.) нашел способ измерения длины меридиана. Однако эти идеи явно противоречили обыденным представлениям того времени и не сыграли заметной роли в античной науке.

Развитие практики кораблевождения требовало описания движения планет относительно Земли. На основе идей геоцентризма (Земля — центр мира) Птолемей (150 н. э.) создает новую систему движения планет, которая была основой астрономии до XVI в. Самым большим злом системы Птолемея оказалось то, что она была достаточно точно подогнана под известные данные о движении планет и во многих отношениях оставалась неуязвимой для опровержения.

После III—IV вв. античная астрономия приходит в упадок. Начавшаяся в XIV столетии в Италии экономическая, политическая и культурная активность, получившая название Ренессанса (от фр. *renaissance* — возрождение), привела к становлению гуманизма, развитию искусства и науки. Эпоха великих географических открытий стимулировала развитие оптики,

астрономии и механики. После открытия Америки Христофором Колумбом (1492 г.) и морского пути в Индию Васко да Гамой (1497 г.) Фернан Магеллан в 1519—1521 гг. открыл западный морской путь и доказал шарообразность Земли. Этот факт глубоко потряс веру средневекового человека. Люди стали сомневаться в достоверности принятой картины мира. Опасаясь потери своего влияния римско-католическая церковь привела в действие противоположный процесс — Контрреформацию. Главной опорой папства стал созданный в 1540 г. орден иезуитов. В 1564 г. был принят Индекс запрещенных книг (*Index librorum prohibitorum*). Свой вклад в борьбу с новыми ересями вносило и учреждение, известное с начала XIII в. как инквизиция (от лат. *inquisitio* — расследование).

Абсолютное господство принципа геоцентризма было нарушено Н. Коперником (1473—1543), создавшим теорию движения планет вокруг Солнца. Труд, над которым он работал почти 40 лет, вышел в свет в 1543 г. Теория, опрокидывающая догматы церкви, не была запрещена только потому, что в предисловии была представлена как абстрактная схема, предназначенная лишь для вычислений. Однако в XVII в. начинается настоящая борьба за новую теорию. В 1600 г. был сожжен на костре Джордано Бруно за распространение идей Коперника в назидание всем еретикам. Несколько позднее Г. Галилей и И. Кеплер окончательно добили идею геоцентризма.

21 августа 1609 г. Галилей впервые в истории астрономии наблюдал небо в подзорную трубу, которую он и изобрел. До этого дня все наблюдения проводились невооруженным глазом. Галилей обнаружил спутники Юпитера, фазы Венеры, лунные горы, пятна на Солнце. Открытия Галилея доказали ошибочность утверждения о Земле как единственном центре вращения во Вселенной. Идеи Коперника становятся достоянием широких слоев общества. Поэтому в 1616 г. учение Коперника объявляется еретическим. Но декрет не остановил Галилея в его защите идей Коперника. В 1632 г. он издает фундаментальную книгу «Диалог о двух системах мира птолемеевой и коперниковой». После этого события в 1633 г. семидесятилетний ученый был привлечен к суду инквизиции и оставался под домашним арестом до конца своей жизни.

В 1609 г. в Праге И. Кеплер опубликовал книгу «Новая астрономия», в которой изложил два закона движения планет:

1. Планеты движутся вокруг солнца по эллипсам, причем Солнце находится в фокусе эллипса.

2. Отрезок, соединяющий планету с центром Солнца, заметает равные площади за равные промежутки времени.

Еще десять лет напряженного труда привели к открытию третьего закона: отношение квадрата периода обращения к кубу длины большой полуоси эллипса одинаково для всех планет.

Нужно напомнить, что расчеты Кеплера основаны на обработке многолетних наблюдений движения Марса, сделанных Тихо Браге невооруженным глазом. Три закона Кеплера первые законы в истории науки. «Он жил — пи-

сал А. Эйнштейн — в эпоху, когда еще не было уверенности в существовании некоторой общей закономерности для всех явлений природы. Какой глубокой была у него вера в такую закономерность, если, работая в одиночестве. никем не поддерживаемый и непонятый, он на протяжении многих десятков лет черпал в ней силы для трудного и кропотливого эмпирического исследования движения планет и математических законов этого движения!»

После трудов Коперника, Галилея и Кеплера уже никто не сомневался в несостоятельности геоцентрической модели. Только церковь до 1835 г. запрещала распространение книг Коперника, Галилея и Кеплера. Остается добавить, что в 1968 г. на конгрессе лауреатов Нобелевской премии по физике представитель церкви сообщил, что рассматривается вопрос о «реабилитации» Галилея. В 1979 г. Ватикан признал несправедливость и ошибочность преследований Галилея и предпочел бы, чтобы эта история была поскорее забыта. В 1992 г. папа Иоанн Павел II реабилитировал Галилея.

Сейчас церковь перестроилась и современная религиозная доктрина почти признала науку и разум в качестве чего-то равноправного с верой, но считает, что достичь истины только разумом невозможно. В действительности разум и вера представляют собой диаметрально противоположные понятия. История каждой страны дает впечатляющие доказательства этого утверждения.

На вопрос, что заставляет планеты двигаться вокруг Солнца, ответ дал И. Ньютон. На основании геометрической картины движения планет, созданной Кеплером, ему удалось доказать, что планеты движутся под действием силы притяжения, обратно пропорциональной квадрату расстоянию между центрами планеты и Солнца. Этот закон был открыт И. Ньютоном в течение 1665—66 гг., когда он находился в своих родных местах, спасаясь от чумы, поразившей Кембридж. К этому времени относятся его идеи о сложном составе света, открытие общего метода дифференциального и интегрального исчислений. В истории науки нет равного примера таких достижений, как открытия Ньютона в течение этих двух золотых лет, — отмечали потом исследователи его творчества.

Первым подтверждением закона всемирного тяготения было возвращение кометы Галлея. Ее появление отмечали задолго до новой эры. Английский астроном Э. Галлей подметил сходство в описании хвостов комет в 1531, 1607 и 1682 гг. и предсказал ее возвращение через 76 лет в 1758 г. Из-за возмущений Юпитером и Сатурном она запоздала и появилась в 1759 г.

Дальнейшее развитие представлений о Солнечной системе связано с открытием В. Гершелем 13 марта 1781 г. планеты Уран. К 1820 г. были установлены элементы эллиптической орбиты, учитывающие возмущения известных планет. Однако последующие наблюдения расходились с теоретическими предсказаниями. В 1841 г. Д. Адамс — студент последнего курса Кембриджского университета, провел расчеты, доказывающие, что возмущения орбитального движения Урана вызваны неизвестной планетой. Когда

четыре года спустя он опубликовал свои результаты, никто из астрономов не взялся их проверить. Во Франции независимо этой проблемой заинтересовался У. Леверье. В 1845 г. он также опубликовал расчеты и определил положение неизвестной планеты. Леверье не удалось уговорить парижских астрономов прервать текущую работу для поиска новой планеты. Тогда он послал сообщение в Берлин молодому астроному И.Г. Галле. Используя эту информацию и изданный в Германии атлас звездного неба, Галле и его помощник — студент д'Аррест 23 сентября 1846 г. с первой попытки открыли новую планету — ее назвали Нептун. Это открытие явилось триумфом небесной механики, основанной на законе всемирного тяготения.

8.2. Наша Галактика и Вселенная

Любопытно, что только в двадцатые годы 20 столетия развеялось эгоцентрическое заблуждение человека относительно его места во Вселенной. Солнечная система — ничтожная часть звездной системы - нашей Галактики (от греч. *galaktikos* — млечный). Она содержит около 100 млрд звезд, распределенных в плоском слое - диске с центральным утолщенным ядром и отходящих от него спиральных ветвях. Радиус Галактики ~50 000 световых лет, причем Солнце отстоит от центра на 32 000 световых лет. С Земли Галактика предстает в виде Млечного Пути — совокупности наблюдаемых звезд, расположенных в главной плоскости. В 1996 г. ученые подтвердили существование в центре Млечного Пути черной дыры. Ближайшая к нам звезда — Проксима Центавра — удалена более чем на 4 световых года; в сфере радиусом 10 световых лет от Солнца звезд тоже немного. В Галактике наблюдаются шаровые звездные скопления, окружающие центр Галактики, и рассеянные скопления, которые находятся в ее спиральных рукавах.

В 1923 г. американский астроном Э. Хаббл обнаружил звездные системы, находящиеся вне Млечного Пути. Полученное Хабблом доказательство внегалактической природы этих систем явилось выдающимся событием в истории астрономии. Галактики — это основные строительные блоки Вселенной.

Оказалось, что Галактики часто образуют устойчивые системы. Наша Галактика входит в одну из таких систем, которую назвали *Местной группой*. В Местной группе, содержащей 24 члена, Галактика Андромеда (М31), содержащая около 200 млрд звезд, — самая крупная, а наша Галактика — вторая по величине. Расстояние между ними оценивается в 2,2 млн световых лет. Меньше по размерам Галактика в созвездии Треугольника и два Магеллановых облака — расстояние до каждого из них около 170 тыс. световых лет. Местная группа входит в крупное скопление галактик с центром в направлении на созвездие Девы. Это скопление служит ядром еще более крупного образования, называемого Местным сверхскоплением.

Расширяющаяся Вселенная. Вселенная в целом расширяется. В 1929 г. Хаббл установил, что скорость удаления двух объектов пропорциональна

расстоянию между ними. По последним оценкам коэффициент пропорциональности — постоянная Хаббла $H = 73$ км/(с ·Мпс). Тогда верхний предел возраста Вселенной примерно 10 млд лет. Однако возраст самых старых объектов — шаровых скоплений - оценивается в 12–13 млрд лет. По данным 2003 г., возраст Вселенной — 13,7 млд лет. В феврале 2004 г. была обнаружена самая старая галактика — ее возраст 13 млрд световых лет.

Возможно, когда-то Вселенная занимала область, намного меньшую, чем в настоящее время. Все вещество находилось в сверхплотном состоянии и история расширяющейся Вселенной согласно теории русского ученого Дж. Гамова началась с Большого Взрыва. В этом процессе силы притяжения тормозят расширение. Существует критическое значение плотности вещества $\rho_{кр} = 3H^2/8\pi G$, $\rho_{кр} = 10^{-26}$ кг/м^3: при значении $\rho > \rho_{кр}$ расширение сменится сжатием. Поэтому возраст Вселенной зависит от значения постоянной Хаббла и средней плотности вещества. Оценки плотности видимого вещества приводят к значению $\rho \sim 3 \cdot 10^{-28}$ кг/м^3. Наблюдаемое вещество составляет не более половины того количества, которое необходимо для того, чтобы снять противоречия в оценках.

Будет ли Вселенная вечно расширяться или в конце концов снова сожмется — одна из фундаментальных проблем науки.

Самая старая звезда. В ноябре 2002 г. две группы астрономов обнаружили в созвездии Феникс на расстоянии 36 000 световых лет от Земли одну из самых старых звезд — порождение Большого Взрыва. По химическому составу — это самый примитивный «недогоревший» объект с очень низким содержанием металлов и тяжелых элементов.

Существуют ли планетные системы подобные нашей? С ответом на этот вопрос связана проблема возникновения жизни и происхождения Солнечной системы. Совсем недавно обнаружили аминокислоты, углеводороды и даже уксусную кислоту там, где меньше всего ожидали, — в космических газовых облаках. Сейчас ученые приходят к выводу о неизбежности возникновения жизни — дорога к синтезу живого была «быстрой» и простой. Первые гены появились 3,6 млрд лет назад. Одноклеточные сине-зеленые господствовали 3 млрд лет, более сложные организмы появились к началу Кембрийской эпохи — 544 млн лет назад.

В мае 2001 г. итальянские ученые сообщили, что сумели найти в 50 образцах космического и земного происхождения «кристаллические микробы» — кримсы. Возраст находок — от нескольких тысяч до 2,3 млрд лет, размеры более древних меньше более поздних. Главной сенсацией стало то, выжив в экстремальных условиях, все образцы восстановили жизнедеятельность и дали потомство, достаточно близкое современным бактериям. Однако анализ показал системные отличия ДНК от всех известных науке земных микроорганизмов. Возможно жизнь зародилась во Вселенной и была принесена на Землю метеоритами и кометами.

40 лет назад был начат поиск осмысленных сигналов среди шумов Вселенной по программе *SETI* (*Search for Extra-Terrestrial Intelligence*).

Уфологи (от анг. *UFO — Unidentified Flying Object*, рус. — НЛО) утверждают, что нашу планету регулярно посещают инопланетяне. Однако специалисты по SETI честно признают, что до настоящего времени не получено ни одного оптимистического результата. К декабрю 1999 г. были открыты 28 планет за пределами Солнечной системы на расстояниях от 65 до 192 млн световых лет от Земли. Пять из них находятся в зоне, пригодной для возникновения жизни. В 2001 г. телескоп Хаббл обнаружил в созвездии Пегаса планету, на которой есть атмосфера при температуре поверхности 1000°. На планете, возможно, существует жизнь на основе кремния.

Для поиска сигналов из космоса будет закончено к 2005 г. строительство большого радиотелескопа — 350 антенн на площади 10 000 м^2 (Калифорния, США).

Квазары. В 1960 г. был открыт новый удивительный класс объектов, самых далеких (до 13,1 млрд световых лет) из всех известных, скорость удаления которых превосходит иногда половину скорости света. Эти объекты назвали *квазарами* (сокр. от *quasi-stellar radiosource* — квазизвездный источник радиоизлучения). Они появились тогда, когда возраст Вселенной не превосходил 1 млрд. лет. Яркий квазар может светить сильнее, чем целая галактика в 10^3—10^4 раз, причем основная часть энергии излучается из области размерами всего несколько световых дней. Наблюдая квазары, мы переносимся в прошлое, в ту эпоху, когда Вселенная не превышала 1/5 ее современного размера. Ближайший квазар находится на расстоянии 2 млрд световых лет от Земли.

Типичные квазары должны иметь массу ~100 млн Солнечных. Остаются непонятными процессы, приводящие к выделению такого гигантского количества энергии. Согласно одной из гипотез, мощное излучение квазаров возникает благодаря разогреву вещества, перетекающего от звезды-сверхгиганта к черной дыре. Черная дыра — компактный, сверхплотный объект, который не может покинуть материя, включая свет. Она возникает на поздней стадии эволюции звезды с массой, большей трех масс Солнца. В результате гравитационного сжатия звезды, в недрах которой угасли термоядерные реакции, звезда становится черной дырой радиуса $r_g = 2GM/c^2$ (M-масса звезды). При массе, равной трем массам Солнца, $r_g = 9$ км! В этом пределе должны стать существенными квантовые явления.

Одним из признаков черной дыры было бы обнаружение области с высокой концентрацией звезд. Другое явление связано с возможным наблюдением быстро движущихся звезд, отброшенных от черной дыры благодаря эффекту «гравитационной рогатки». Если двойная звезда приблизится к черной дыре, то один ее компонент захватывается на орбиту вокруг черной дыры, а другой — выбрасывается со скоростью до 10 000 км/с. Наблюдения со спутника в телескоп «Хаббл» (Hubble Space Telescop, 1990 г.) позволяют предположить, что в центре туманности Андромеды находится сверхмассивная черная дыра. К 2004 г. обнаружено около 20 массивных и 200 сверхмассивных черных дыр.

Черная дыра в нашей Галактике. В ноябре 2002 г. телескоп «Хаббл» обнаружил черную дыру, на расстоянии 6 тыс световых лет. Она приближается к нам из созвездия Скорпиона со скоростью 400 000 км/ч. Ее назвали *GROJ1655-40*. Сейчас она увеличивает массу, поглощая соседнюю звезду. В феврале 2004 г. радиотелескопы и орбитальная рентгеновская обсерватория НАСА впервые позволили получить доказательства поглощения звезды черной дырой в центре галактики Rx J 1242-1в созвездии Дева. Расстояние до «съеденной» звезды в 100 млн раз больше расстояния до нашего Солнца.

8.3. Закон всемирного тяготения

Рассмотрим две частицы массами m_a и m_b в точках, заданных радиус-векторами $\vec{r}_a$ и $\vec{r}_b$. Сила $\vec{F}_{ab}$, действующая на частицу a со стороны частицы b,

$$\vec{F}_{ab} = -Gm_a m_b \vec{r}\,/r^3, \qquad (8.3.1)$$

где $G = 6{,}67\ 10^{-11}$Н · м^2/кг^2 — гравитационная постоянная, $\vec{r} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$ — вектор, соединяющий частицу m_b с частицей m_a.

И. Ньютон доказал, что силу, действующую на частицу массой m со стороны однородного шара массой M, можно представить в виде (8.3.1), где r — расстояние между частицей и центром шара. Поэтому величина силы притяжения частицы шаром $F = mg(R/r)^2$, где $g = GM/R^2$, R — радиус шара.

Закон всемирного тяготения является одним из следствий общей теории относительности, созданной А. Эйнштейном в 1916 г. Он доказал, что выражение (8.3.1) является первым приближением теории в случае $v \ll c$. Последующие слагаемые $\sim(v/c)^2$.

8.4. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия частиц

Найдем теперь потенциальную энергию взаимодействия $W(\vec{r}\,)$ частиц масс m_a и m_b. Подставляя (8.3.1) в (6.9.1), получим уравнение

$$\Delta W(\vec{r}\,) = Gm_a m_b \vec{r}\,\Delta\vec{r}\,/r^3,\ r = |\,\vec{r}_a - \vec{r}_b\,|.$$

Поскольку $\vec{r}\,\Delta\vec{r} = r\Delta r$, то $\Delta W = Gm_a m_b \Delta r/r^2 = \Delta(-Gm_a m_b/r)$. Следовательно, $W(\vec{r}\,) = -Gm_a m_b/r + C$. Обычно нулевой уровень потенциальной энергии выбирают так, что он соответствует положению частиц, удаленных на бесконечно большое расстояние. Тогда произвольная постоянная $C = 0$,

$$W(\vec{r}\,) = -Gm_a m_b/r. \qquad (8.4.1)$$

Потенциальная энергия взаимодействия частицы и однородного шара определяется тем же выражением (8.4.1).

Далее везде в качестве модели Земли выбран однородный шар радиусом $R = 6{,}35\ 10^6$ м, массой $M = 5{,}98\ 10^{24}$ кг. Потенциальную энергию взаимодействия частицы и Земли удобно представить в виде

$$W(\vec{r}\,) = -mgR^2/r, \qquad (8.4.2)$$

где $\vec{r}$ — вектор, соединяющий центр Земли и частицу, $g = GM/R^2$, $g = 9{,}81$ м/с^2. Значение потенциальной энергии частицы на поверхности Земли $W(\vec{R}) = -mgR$).

Покажем, что из (8.4.2) следует выражение для потенциальной энергии частицы $W = mgz$, пригодное при условии $z << R$, где z — значение координаты на числовой оси z, направленной вертикально вверх с началом на поверхности Земли. Действительно, в этом случае имеем

$$R/r = R/(R + z) = 1/(1 + z/R) = (1 - z/R)/\,[1 - (z/R)^2] \approx 1 - z/R.$$

Учитывая это приближение, получим

$$w(z) = W(x, y, R + z) = -mgR + mgz.$$

Поскольку физический смысл имеет только разность потенциальных энергий, то постоянную величину $-mgR$ можно опустить.

Пример 8.4.1. Определим вес тела массой $m = 1$ кг на географической широте φ. Угловая скорость вращения Земли $\omega = 2\pi/(24{\cdot}60{\cdot}60) = 7{,}2921 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$.

Пусть тело лежит на поверхности Земли. Известно, что Земля не имеет формы шара. Земля сплюснута у полюсов: экваториальный радиус $a = 6\,378{,}16$ км больше полярного радиуса b на величину $c = 21{,}382$ км. В первом приближении ее представляют в виде эллипсоида вращения, напоминающего сплюснутый у полюсов шар. В гравиметрии — науки, исследующей поле тяготения Земли — поле притяжения, соответствующее эллипсоиду, называется нормальным. В точке M поверхности Земли, находящейся на широте φ, на расстоянии r от центра Земли, вектор ускорения свободного падения $\vec{g}$ расположен в меридиональной плоскости и определяется двумя компонентами. Компонента $\vec{g}$ в направлении центра Земли

$$g_r = g_0(1-\alpha)(a/r)^2 + g_0\alpha(a/r)^4(1-3\sin^2\varphi),$$

$$g_0 = 9{,}78 \text{ м/с}^2,\ \alpha = (1-b/a) = 1/298{,}2 \approx 1{,}1 \cdot 10^{-3}.$$

Другая компонента $g_m = g_0\alpha(a/r)^4\sin 2\varphi$ перпендикулярна радиус-вектору точки M и направлена к экватору.

Найдем теперь вес тела P. На него действуют сила притяжения Земли $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. Мы уже говорили, что вес тела равен силе давления тела на подставку, величина которой равна N. Тело вращается вместе с Землей с угловой скоростью ω. Согласно второму закону Ньютона имеем уравнение $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Сила реакции образует некоторый угол $\gamma \neq \varphi$ с прямой, перпендикулярной к оси вращения в меридиональной плоскости.

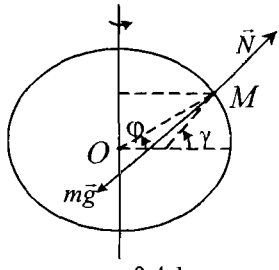


рис. 8.4.1

Выберем на рис. 8.4.1 начало координат в центре Земли, ось x лежит в плоскости экватора, ось y проходит через полюс. В проекции на оси x, y получим уравнения

$$m\omega^2 r\cos\varphi = mg_r\cos\varphi - mg_m\sin\varphi - N\cos\gamma,$$
$$0 = -mg_r\sin\varphi - mg_m\cos\varphi + N\sin\gamma.$$

Из этих уравнений, содержащих две неизвестные величины N и γ, найдем вес тела

$$P(\varphi) = m[g^2 - \omega^2 r(2g_r - \omega^2 r)\cos^2\varphi + g_m\omega^2 r\sin 2\varphi]^{1/2}.$$

Рассмотрим три предельных случая.

А. Тело находится на полюсе. Тогда $\varphi = \pi/2$ и вес тела $P = mg$.

Б. Тело находится на экваторе. В этом случае широта $\varphi = 0$ и вес тела $P \approx m(g - \omega^2 a)$ принимает наименьшее значение. Следовательно, тело массой 1 кг имеет вес $P = (1-0{,}0033)$ кгс. Из-за вращения Земли вес тела на экваторе на 0,3 % меньше веса на полюсе.

В. Если бы Земля вращалась с угловой скоростью $\omega = (g/a)^{1/2}$, то тела на экваторе были бы в состоянии невесомости. В этом случае линейная скорость тел на экваторе была бы равна первой космической скорости.

Отметим, что эллипсоид является не точной, а приближенной фигурой Земли. Обычно в качестве модели Земли принимают так называемый *геоид*. По современным данным расстояние между поверхностями геоида и эллипсоида не превосходят величины порядка 150 м, т. е. значительно меньше отклонения эллипсоида от сферы.

8.5. Спутник на круговой орбите

Отметим, что спутник Земли движется в плоскости, проходящей через центр Земли. Если в качестве модели Земли выбрать однородный шар, то ориентация плоскости не изменяется. В зависимости от начальных условий спутник будет двигаться по гиперболе, параболе, эллипсу или по отрезку прямой линии. Частный случай эллипса — окружность.

8.5.1. Первая космическая скорость. Рассмотрим движение спутника по окружности радиусом r с постоянной величиной скорости v, учитывая только силу притяжения $F = mg(R/r)^2$. Из второго закона Ньютона

$$mv^2/r = mg(R/r)^2 \qquad (8.5.1)$$

находим $v = R(g/r)^{1/2}$. Запишем этот результат, вводя в правую часть выражение для *первой космической скорости* v_I. Согласно определению v_I — наименьшая скорость, которую необходимо сообщить спутнику относительно Земли для того, чтобы он вращался по окружности радиусом, равным радиусу Земли R: $v_I = (gR)^{1/2}$, $v_I = 7{,}91$ км/с. Следовательно, $v = v_I(R/r)^{1/2}$ — для реальных спутников $v < v_I$. Величина $v = R(g/r)^{1/2}$ называется *местной первой космической скоростью* движения по окружности радиусом r.

Период обращения спутника $T = 2\pi/\omega$, $v = \omega r$. Подставляя значение v, получим $T = 2\pi(r/R)^{3/2}(R/g)^{1/2}$. Полагая $r = R$, получим наименьшее значение периода обращения $T_1 = 2\pi(R/g)^{1/2}$, $T_1 = 84{,}3$ мин.

Поскольку $T \sim r^{3/2}$, то отсюда следует частная форма третьего закона Кеплера: отношение квадратов периодов вращения двух спутников равны кубу отношения радиусов круговых орбит: $(T_1/T_2)^2 = (r_1/r_2)^3$ или $T^2/r^3 = (2\pi)^2/GM$.

Полная энергия спутника на круговой орбите радиусом r равна

$$E = mv^2/2 - mgR^2/r = -mv^2/2 \text{ или } E = -mgR^2/2r. \qquad (8.5.2)$$

Задача 8.5.1. Два спутника масс $m_1 = m_2 = m$, соединенные невесомым канатом длиной l, движутся по круговым орбитам вокруг Земли и находятся на прямой, проходящей через центр Земли. Расстояние между серединой каната и центром Земли равно r. Найдите силу натяжения каната.

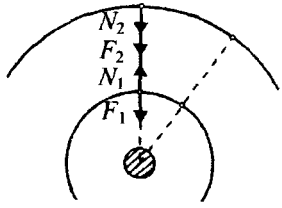


рис. 8.5.2

Решение. На каждый спутник действуют силы притяжения Земли и силы натяжения каната $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, одинаковой величины $N_1 = N_2 = N$. Силами гравитационного взаимодействия спутников пренебрегаем. Из второго закона Ньютона для первого и второго спутников получим уравнения

$$m\omega^2(r - l/2) = mg\left(\frac{R}{r - l/2}\right)^2 - N, \qquad (1)$$

$$m\omega^2(r + l/2) = mg\left(\frac{R}{r + l/2}\right)^2 + N. \qquad (2)$$

Из (1), (2) находим

$$\omega^2 = \frac{gR^2}{r}\frac{r^2 + (l/2)^2}{[r^2 - (l/2)^2]^2}, \qquad (3)$$

$$N = \frac{mglR^2}{2r}\frac{3r^2 + (l/2)^2}{[r^2 - (l/2)^2]^2}. \qquad (4)$$

Сделаем несколько замечаний. 1. Рассмотрим два связанных спутника как одно тело, движущееся по окружности радиусом r. Тогда для него не выполняется третий закон Кеплера — лишнее напоминание о том, что законы Кеплера имеют место только для материальных точек. Скорость первого спутника меньше, а второго — больше местной первой космической скорости. 2. Из (4) следует, что канат будет натянут. В случае $l \ll r$, получим значение

$$N = (3mglR^2/2r^3).$$

8.5.2. Геостационарный (или синхронный) спутник. Любой спутник движется в плоскости, проходящей через центр Земли. Синхронный спут-

ник должен «висеть» над одной и той же точкой на поверхности Земли. Поэтому он должен двигаться по круговой орбите в экваториальной плоскости в направлении вращения Земли с периодом $T_0 = 24$ ч.

Найдем радиус орбиты r_c синхронного спутника. Записывая левую часть (8.5.3) в виде $m(2\pi/T_0)^2 r_c$, получим

$$r_c = [g(\frac{RT_0}{2\pi})^2]^{1/3} = R(\frac{T_0}{T_l})^{3/2}.$$

Следовательно, $r_c = 6{,}7\ R$, $r_c = 42\ 160$ км, а расстояние от поверхности Земли около 35 800 км.

8.6. Движение спутника по эллиптической орбите

8.6.1. Второй и третий законы Кеплера. Спутник движется по эллиптической орбите. Центр Земли является фокусом эллипса F (рис. 8.6.1). Точка P, находящаяся на минимальном расстоянии от фокуса F называется *перигеем*, наиболее удаленная точка A — *апогеем*. Длина большой оси эллипса $PA = 2a$. Положение спутника определяется углом φ между отрезком FP и радиус-вектором спутника FC. Длина радиус-вектора — r, величина скорости спутника в точке С равна v. Угол между радиус-вектором и скоростью спутника — γ. Второй закон Кеплера можно записать в виде:

$$mrv\sin\gamma = \text{const} \qquad (8.6.1)$$

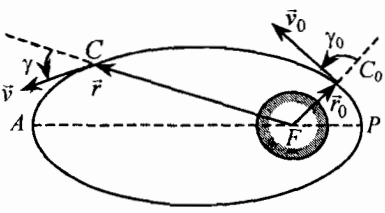


рис. 8.6.1.

для произвольной точки траектории. Здесь $v\sin\gamma = v_l$ — компонента скорости, перпендикулярная радиус-вектору. Второй закон Кеплера является следствием закона сохранения момента импульса спутника в центральном поле тяготения.

Из (8.6.1) можно получить третий закона Кеплера

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const}, \qquad (8.6.2)$$

где T — период обращения по эллиптической орбите, a — длина большой полуоси.

Пусть в точке C_0 на расстоянии r_0 от центра Земли спутнику сообщили начальную скорость $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, $v_0 < (2gR)^{1/2}$ под углом γ_0 к радиус-вектору $\vec{r}_0$ точки C_0. В этом случае второй закон Кеплера можно представить в виде

$$r_0 v_0 \sin\gamma_0 = rv\sin\gamma. \qquad (8.6.3)$$

Ориентация большой оси эллипса определяется *вектором Лапласа*, направленным от центра Земли к перигею

$$\vec{\varepsilon} = [(v_0/v_1)^2 - 1]\ \vec{r}_0/r_0 - (\vec{r}_0\ \vec{v}_0/r_0 v_1^2)\ \vec{v}_0 .$$

Его величина равна эксцентриситету эллипса ε. Для окружности ε=0.

Рассмотрим траектории спутника при значении $\gamma_0 = \pi/2$.

А. Если $v_0 = v_1$, $v_1 = R(g/r_0)^{1/2}$, то траектория спутника — окружность.

Б. В случае $v_0 > v_1$, согласно второму закону Кеплера, траектория — эллипс с перигеем в точке C (наименьшее удаление $r_p = r_0$).

В. Если $v_0 < v_1$, то траектория — эллипс с апогеем в точке C_0 (максимальное удаление $r_a = r_0$).

Г. При значении $v_0 = 0$ траектория — прямая линия, которую можно представить как вырожденный эллипс с длиной большой полуоси $a = r_0/2$.

Задача 8.6.1. Космический аппарат (*КА*) движется по круговой орбите на расстоянии $h \ll R$ от поверхности Земли, $h = 400$ км. В результате кратковременного изменения величины скорости он перешел на орбиту приземления (рис. 8. 6.2). Пренебрегая сопротивлением атмосферы, найти

А. приращение скорости, необходимое для этого маневра,

Б. время движения *КА* до поверхности Земли.

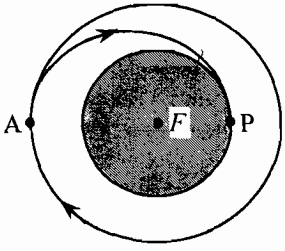


рис. 8.6.2.

Решение А. Начальная точка A эллиптической траектории является апогеем, конечная P — перигеем. Обозначим v_a, v_p — скорости *КА* в апогее и перигее. Приращение скорости $\Delta v = v_a - v$, $v = v_1(R/r)^{1/2}$, $r = R + h$. Из второго закона Кеплера (8.6.3) и закона сохранения полной энергии получим два уравнения

$$r v_a = R v_p,$$

$$\frac{v_a^2}{2} - \frac{gR^2}{r} = \frac{v_p^2}{2} - gR,$$

из которых находим

$$v_a^2 = \frac{2gR^2}{r(1 + r/R)}, \quad \rightarrow \Delta v \approx -v_1 h/4R,\ \Delta v = -124 \text{ м/с}.$$

Решение Б. Период обращения *КА* по круговой орбите $T = 2\pi(r/R)^{3/2}(R/g)^{1/2}$. Время спуска $\tau = T_e/2$, где T_e — период движения по эллиптической орбите. После изменения скорости *КА* движется по эллиптической орбите, большая полуось которого $a = (R + r)/2$, $r = R + h$. Тогда из (8.6.2) получим $T_e = T(a/r)^{3/2}$. Следовательно,

$$\tau = \frac{1}{2} T_1 (1 + \frac{h}{2R})^{3/2}, \quad \tau \approx \frac{1}{2} T_1 (1 + \frac{3h}{4R}), \quad \tau = 44{,}13 \text{ мин}.$$

Пример 8.6.2. Относительное движение в окрестности траектории космической станции (КС). Массивная *КС* движется по круговой орбите радиусом $r_0 = R + h$ со скоростью v. Один из космонавтов работает в открытом космосе. Пусть $h = 630$ км. Тогда $v_1 = 7{,}5$ км/с, $T_1 = 98$ мин.

А. Предположим, что космонавт оттолкнулся от станции и приобрел скорость $v_0 = v + u$ параллельную скорости станции. Скорость космонавта относительно станции $u = 1$ м/с. Тогда космонавт будет двигаться по эллипсу, охватывающему круговую орбиту, с перигеем в исходной точке. Длина большой полуоси эллипса $a > r_0$.

Сначала космонавт обгоняет станцию и поднимается по восходящей ветви эллипса. Однако поскольку период обращения космонавта T_k больше периода T_1, то в какой-то момент времени космонавт и станция окажутся на одной прямой, проходящей через центр Земли. Затем космонавт продолжает подниматься вверх и начинает отставать от станции. В своем апогее космонавт поднимется над круговой орбитой на 3,7 км. Корабль в этот момент времени будет уже далеко впереди. После завершения станцией полного витка отставание космонавта составит 17,6 км. Очевидно, что космонавт должен быть соединен с *КС* тросом. Иначе при потере контакта он не сможет вернуться на станцию.

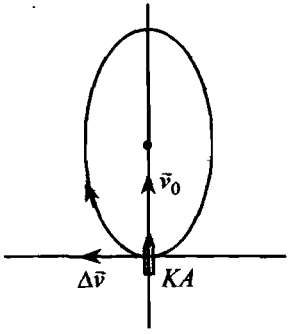


рис. 8.6.3.

Б. В 1965 г. космонавт А. Леонов при работе в открытом космосе отвинтил заглушку киноаппарата и бросил ее в сторону Земли. На рис. 8.6.3 $\vec{v}_0$ — скорость *КС*, $\Delta\vec{v}$ — скорость заглушки, $\Delta v = 10$ м/с, ($h = 400$ км, $T = 92{,}26$ мин). Заглушка перейдет на перейдет на новую эллиптическую орбиту, близкую к траектории *КС*. Периоды обращения *КС* и заглушки практически совпадают. Заглушка сначала будет опускаться вниз, обгоняя *КС*, потом поднимется на прежний уровень и, продолжая подниматься, вернется через период на *КС* сверху. Наблюдатель на *КС* увидит, что заглушка описала эллипс. Значения длин большой и малой полуосей $a = 17{,}72$ км, $b = 8{,}86$ км.

Проблемы относительного движения приходится решать при приеме грузовых кораблей.

Задача 8.6.3. Межконтинентальный перелет. Телу на поверхности Земли сообщили начальную скорость равную первой космической скорости, направленную под углом α к горизонту. Найдите максимальную высоту подъема над поверхностью Земли и дальность полета.

Решение. На рис. 8.6.4. точка C_0 — начальная точка эллиптической траектории, F — центр Земли. Вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен к перигею, C_0B — малая ось эллипса. В точке максимального подъема A на расстоянии r от центра Земли радиальная компонента скорости тела равна нулю. Из закона сохранения полной энергии имеем уравнение

$$mv_1^2/2 - mgR = mv_r^2/2 - mgR^2/r, \qquad (1)$$

где $v_I = (gR)^{1/2}$, v_t — компонента скорости, перпендикулярная к радиус-вектору. Согласно второму закону Кеплера компоненты скорости v_t и $v_I\cos\alpha$ в вершине траектории и на поверхности Земли связаны соотношением

$$rv_t = Rv_I\cos\alpha, \qquad (2)$$

Исключая v_t из (1), (2), и вводя обозначение $q = R/r$, получим уравнение

$$\cos^2\alpha q^2 - 2q + 1 = 0,$$

корни которого

$$r_{1,2} = R\,(1 \pm \sin\alpha).$$

Значению r_1 соответствует точка апогея $r_a = R(1 + \sin\alpha)$. Максимальное высота подъема тела $h_m = R\sin\alpha$.

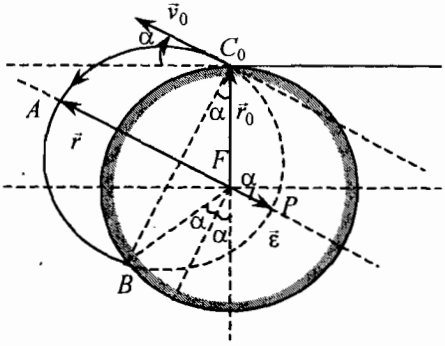


рис. 8.6.4.

Пусть φ_0 — угол между радиус-вектором $\vec{r}_0$ и вектором $\vec{\varepsilon}$ (рис. 8.6.3). Тогда $\varphi_0 = \pi/2 + \alpha$. Дальность полета тела по дуге большого круга $s(\alpha) = R(\pi - 2\alpha)$. В двух частных случаях $s(0) = R\pi$, $h_m = 0$; $s(\pi/2) = 0$, $h_m = R$.

Задача 8.6.4. Телу на поверхности Земли сообщили в вертикальном направлении начальную скорость, равную первой космической скорости. Найти интервал времени подъема тела до максимальной высоты.

Решение. В рассматриваемом случае траекторией является прямая, которую можно представить как вырожденный эллипс с длиной большой полуоси $a = R$. Согласно третьему закону Кеплера $T^2/a^3 = T_I^2/R^3$, где a — длина большой полуоси, T — период обращения, $T_I = 2\pi(R/g)^{1/2}$. Время падения $\tau = T/4$, $\tau = (\pi/2)(R/g)^{1/2}$.

8.7. Возмущенное движение спутника

8.7.1. Влияние поверхностных сил и несферичности Земли. Спутник или космический аппарат представляет собой протяженный объект, который, разумеется, нельзя считать материальной точкой. На него действуют два рода сил: гравитационные и поверхностные силы, обусловленные влиянием атмосферы, «отдачей» излучения при радиосвязи, давлением солнечного света, солнечного ветра и микрометеоритов.

Наиболее существенное возмущение вносит сплюснутость Земли у полюсов — полярный радиус Земли на 21 км короче экваториального. По этой причине гравитационное поле Земли не является сферически симметричным, а плоскость орбиты спутника вращается вокруг земной оси. Для спутников на низких орбитах смещение составляет 9° в сутки.

Влияние Луны и Солнца проявляется особенно сильно для спутника на полярной орбите, почти перпендикулярной плоскости эклиптики. 6 октября 1959 г. станция «Луна-3» обогнула Луну и стала спутником Земли с апогеем r_a = 480 000 км и перигеем r_p = 47 000 км. Период спутника T = 15 сут. В результате взаимодействия с Луной апогей с каждым оборотом возрастал, а перигей уменьшался. Через полгода после 11 оборотов станция вошла в земную атмосферу и сгорела.

8.7.2. Влияние атмосферы. Сила сопротивления в разреженной атмосфере $\vec{F}_c = -\rho S v \vec{v}$, где ρ — плотность воздуха, S — эффективная площадь поперечного сечения спутника. На высоте h = 20 км плотность ρ = 0,06 кг/м^3. Пусть масса спутника m = 100 кг, S = 1м^2. Тогда величина $F_c = \rho g S R$ = 3,78 10^6 Н на несколько порядков превышает величину силы притяжения 9,8 10^2 Н. На высоте h = 160 км плотность $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-9}$ кг/м^3, сила сопротивления F_c = 6,3 10^{-2} Н составляет примерно одну пятнадцатитысячную часть силы притяжения. И все же совершив один-два оборота, спутник начинает быстро снижаться и сгорает. Критическое значение высоты, при которой еще возможен орбитальный полет, равно 170 км. Время существования спутника на орбите высотой 260 км ($\rho = 8{,}11 \cdot 10^{-11}$ кг/м^3) составляет пять суток, на орбите высотой 400 км ($\rho = 5 \cdot 10^{-12}$ кг/м^3) — 160 суток.

8.7.3. Парадокс спутника. Размеры последней ступени ракеты-носителя значительно больше размеров спутника. Казалось, что поскольку ракета испытывает большее сопротивление, то ее скорость окажется меньше скорости спутника. Однако наблюдатели обнаружили, что ракета обогнала спутник. Для объяснения этого парадокса запишем закон изменения полной энергии

$$dE/dt = \vec{F}_c \vec{v}, \quad \text{или} \quad dE/dt = -\rho S v^3. \qquad (8.7.1)$$

Предположим, что спутник выведен на круговую орбиту. Действие силы сопротивления приводит к тому, что траектория становится спиралеобразной кривой. Поскольку в течение нескольких периодов траектория близка к окружности, то согласно (8.5.2) $E(t) = -mv^2(t)/2$. Подставляя $E(t)$ в (8.7.1), получим уравнение

$$m dv/dt = \rho S v^2.$$

Из него следует, что скорость спутника возрастает. Она растет тем быстрее, чем больше отношение $\rho S/m$. Оказывается, что для ракеты-носителя это отношение больше, чем для спутника. Вот почему ракета обгоняет спутник.

Действие силы сопротивления приводит к тому, что спутник «падает». Потенциальная и полная энергии убывают, однако приращение кинетической энергии оказывается положительным. Интересно отметить, что проекция силы притяжения $m\vec{g}$ на направление скорости спутника равна $2\rho S v^2$. Следовательно, сумма проекций силы тяжести и силы трения на направление скорости равна $\rho S v^2$ — сила трения ускоряет спутник!

8.7.4. Спутник, свободный от сноса. В отсутствие поверхностных сил спутник должен двигаться по траектории, называемой геодезической. Если

внутрь полого корпуса поместить пробное тело, то оно будет двигаться по геодезической, так как оболочка предохраняет его от внешних поверхностных сил. Как заставить спутник двигаться синхронно с пробным телом? С этой целью на оболочке размещают газовые двигатели и датчики, корректирующие ее положение так, чтобы пробное тело всегда оставалось в центре масс спутника. Первый спутник этого типа «Triad» запущен в США в 1972 г на высоту около 800 км. Его положение удалось прогнозировать с точностью до 100 м на две недели вперед. Для обычных спутников суточная поправка составляет сотни метров.

Пример 8.7.1. Гравилет. Два шара массами $m_1 = m_2 = m/2$, прикрепленные к концам стержня пренебрежимо малой массы, образуют гантель. Расстояние между центрами шаров — l. Найдем силу, действующую на гантель в поле тяжести Земли. Расстояние от центра Земли до середины гантели — r.

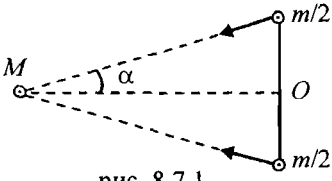


рис. 8.7.1

Очевидно сила, действующая на гантель, зависит от ориентации гантели относительно Земли. Пусть ось гантели перпендикулярна плоскости орбиты, по которой движется центр масс (рис. 8.7.1). Величины сил, действующих на массы m_1 и m_2 одинаковы и равны

$$F_1 = F_2 = f, \qquad f = \frac{GMm}{2[r^2 + (l/2)^2]}.$$

Равнодействующая сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ направлена по прямой, проходящей через центр Земли и центр масс гантели, величина силы

$$F(r) = 2f\cos\alpha, \quad F(r) = \frac{GMmr}{[r^2 + (l/2)^2]^{3/2}}. \qquad (1)$$

Пусть $l << r$, т.е. гантель является почти материальной точкой массы m. Используя разложение бинома Ньютона $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$, $\varepsilon << 1$, получим

$$\frac{1}{[r^2 + (l/2)^2]^{3/2}} = \frac{1}{r^3[1 + (l/2r)^2]^{3/2}} = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3l^2}{8r^2} + \ldots\right)$$

Следовательно,

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{3l^2}{8r^2} + \ldots\right). \qquad (2)$$

Второе слагаемое можно рассматривать как силу $\vec{f}$, возмущающую кеплерово движение тела массой m:

$$\vec{f} = GMm\frac{3l^2}{8r^4}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор центра масс тела.

Итак, величина силы притяжения, действующей на гантель (1), меньше величины силы притяжения, действующей на точечное тело той же массы. Это обстоятельство позволило предсказать новый эффект — в результате периодического изменения распределения массы внутри космического корабля появляется возможность целенаправленно изменять параметры кеплерова эллипса.

Пусть длина гантели представляет собой периодическую функцию. В течение каждого периода T:

$$l(t) = l_0,\ 0 \le t \le T/2;\ l(t) = 0,\ T/2 < t < T.$$

В интервале времени, когда выполняется условие $\vec{f}\vec{v} > 0$, длина гантели должна быть равна нулю. В течение остальной части периода, когда $\vec{f}\vec{v} < 0$, длина гантели должна быть максимальной. В результате работы внутренних сил полная энергия гантели E возрастает. Значению $E = 0$ соответствует вторая космическая скорость. Появляется возможность, подобно барону Мюнхаузену, вытащевшему себя за волосы из болота, покинуть сферу действия Земли. Этот эффект возможен только в неоднородном поле тяготения.

8.8. Вторая космическая скорость

Найдем наименьшее значение начальной скорости, которую необходимо сообщить космическому аппарату (*КА*) относительно Земли для того, чтобы он не «упал» на Землю.

При вычислении траектории *КА* необходимо учитывать силы. действующие со стороны Солнца и других планет. Мы найдем решение поставленной задачи приближенным методом, используя понятие *сферы действия* одного небесного тела относительно другого. Сфера действия Земли относительно Солнца представляет собой сферическую область радиусом r_s = 0,924 820 млн км, внутри которой влиянием Солнца на движение *КА* можно пренебречь. Вне этой сферы можно пренебречь силой, действующей со стороны Земли, учитывая только влияние Солнца. При переходе через поверхность необходимо «сшить» кеплеровы траектории.

Найдем предварительно значение начальной скорости v_0, которую необходимо сообщить телу относительно Земли, чтобы на расстоянии r от Земли оно приобрело скорость u. Полная энергия тела $E = mu^2/2 - mgR^2/r$ — постоянная величина. Полная энергия на поверхности Земли $E = mv_0^2/2 - mgR$. Силы сопротивления атмосферы не учитываем. Тогда из закона сохранения полной энергии следует уравнение

$$mv_0^2/2 - mgR = mu^2/2 - mgR^2/r. \qquad (8.8.1)$$

Полагая $E = 0$, получим значение $v_0 = v_{II}$, $v_{II} = (2gR)^{1/2}$, v_{II} = 11,186 км/с. Скорость v_{II} называют в*торой космической скоростью*. Очевидно, $v_{II} = \sqrt{2}v_I$.

Можно ли утверждать, что на бесконечно большом расстоянии от Земли скорость тела станет равной нулю? Нет, нельзя, т. к. на расстояниях $r > r_s$

основной силой, действующей на тело, является сила притяжения Солнца. Если телу на поверхности Земли сообщить вторую космическую скорость, то скорость тела на расстоянии r_s окажется равной $u \equiv v_s = (2gR^2/r_s)^{1/2}$, $v_s = 0{,}926$ км/с. Если скорости Земли и тела коллинеарны, то скорость тела относительно Солнца на 0,926 км/с больше скорости Земли относительно Солнца $v_{зс} = 29{,}785$ км/с. Следовательно, тело станет спутником Солнца. Афелий эллиптической орбиты тела находится за Солнцем на расстоянии 21 млн км от орбиты Земли.

8.9. Третья космическая скорость

Найдем начальную скорость v_0, которую следует сообщить *КА* относительно Земли, чтобы он покинул Солнечную систему.

Обозначим $\vec{v}_{ik}$ — скорость тела i относительно тела k. Очевидно, $\vec{v}_{ik} = \vec{v}_{ij} + \vec{v}_{jk}$. Из (8.8.1) при значении $r >> R$ находим

$$v_0 \approx (u^2 + 2gR)^{1/2}. \qquad (8.9.1)$$

«Первая местная космическая скорость» Земли относительно Солнца $v_{зс} = (Gm_c/r_{сз})^{1/2}$, $v_{зс} = 29{,}785$ км/с. Для того, чтобы покинуть Солнечную систему, скорость тела относительно Солнца на границе сферы действия Земли должна достичь «второй местной космической скорости» $v_т = \sqrt{2}v_{зс}$. Предполагая, что векторы $\vec{v}_{ОС}$, $\vec{v}_{ТЗ}$ коллинеарны, найдем необходимое значение величины скорости тела относительно Земли на расстоянии r_s от центра Земли $u = v_{тс} - v_{зс}$, или $u = (\sqrt{2} - 1)v_{зс}$. Подставляя u в (8.9.1), получим *третью космическую скорость* $v_0 \equiv v_{тз}$,

$$v_{тз} = [(\sqrt{2}-1)^2 v_{зс}^2 + 2gR]^{1/2},\ v_{тз} = 16{,}653 \text{ км/с}.$$

Задача 8.9.1. Найдите начальную скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно двигалось по орбите Земли в направлении, противоположном движению Земли.

Решение. В этом случае $\vec{v}_{тс} = -\vec{v}_{зс}$. Поскольку $\vec{v}_{тс} = \vec{v}_{тз} + \vec{v}_{зс}$, то $\vec{u} = \vec{v}_{тз} = -2\vec{v}_{зс}$. Из (8.9.1) находим $v_0 = v_{тз}$,

$$v_{тз} = [4v_{зс}^2 + 2gR]^{1/2},\ v_{тз} = 60{,}61 \text{ км/с}.$$

8.10. Четвертая космическая скорость

Найдем начальную скорость v_0, которую необходимо сообщить *КА* относительно Земли, чтобы он упал на Солнце. В этом случае скорость тела относительно Солнца $\vec{v}_{тс} = 0$, или $\vec{u} = -\vec{v}_{зс}$. Из (1.12.8) получим значение скорости тела относительно Земли $v_0 = v_{тз}$,

$$v_{тз} = [v_{зс}^2 + 2gR]^{1/2},\ v_{тз} = 31{,}816 \text{ км/с}.$$

Эту величину называют *четвертой космической скоростью*. «Непросто» упасть на Солнце.

Глава 9. Космические исследования

Околоземное пространство — часть окружающей человека среды, существенно влияющая на жизнь на Земле. Поэтому переход к активному исследованию межпланетного пространства — естественная фаза в развитии нашей цивилизации.

Среди великих достижений XX в. особое место занимает создание космических кораблей.

Приведем краткий обзор основных направлений и результатов космических исследований.

9.1. Орбитальные полеты

4 октября 1957 г. в Советском Союзе был запущен первый в мире искусственный спутник Земли массой 83,6 кг, созданный усилиями большого коллектива, возглавляемого основоположником практической космонавтики, выдающимся конструктором С.П. Королевым (1907—1966). Началась эра освоения космоса (от гр. *kosmos* — вселенная как целое).

31 января 1958 г. выведен на орбиту американский спутник «Эксплорер-1» массой 14 кг. В этом полете приборы обнаружили существование радиационного пояса Земли, предсказанного американским физиком Дж. ван Алленом.

Первый человек в космосе. 12 апреля 1961 г. с космодрома Байконур состоялся запуск космического корабля «Восток», пилотируемого Ю.А. Гагариным. Через 89 мин на 108-й мин после запуска он вернулся на Землю. 20 февраля 1962 г. в США первый космический полет осуществил Д. Гленн, который до посадки совершил 3 витка.

Первый выход человека в космос. Очередной триумф СССР в области пилотируемых полетов принес запуск двухместного корабля 18 марта 1965 г. Космонавт А.А. Леонов находился вне кабины корабля 20 мин, впервые доказав возможность работы в открытом космическом пространстве. Только сейчас стало известно, что испытал Леонов, когда раздувшийся скафандр помешал войти в люк корабля головой вперед — по инструкции.

9.1.1. Невесомость и другие проблемы. Для осуществления полетов в космос потребовалось преодолеть огромные технические трудности, связанные с созданием ракеты-носителя, топлива, стартового комплекса, космического корабля, систем ориентации и т. д. Каждый новый корабль совершеннее предыдущих. Однако и сейчас полет в космос — сложный процесс, требующий мужества и высокой профессиональной подготовки. Главное своеобразие полетов в космос — невесомость.

Человек не имеет отработанных реакций на невесомость, которая вызывает перестройку многих процессов в организме: он обезвоживается, возникает нагрузка на вестибулярный аппарат, мышцы слабеют и уменьшаются в объеме. Невесомость оказывает влияние и на психологическое состояние

космонавта: возникает ослабление памяти, постоянно приходится контролировать себя, многое надо записывать, Увеличивается время, затрачиваемое на выполнение операций по управлению кораблем. Большие проблемы возникают и с привыканием к земной тяжести после возвращения из полета.

В космосе существует несколько видов излучений, представляющих опасность для живых организмов. К ним относятся прежде всего космические лучи - протоны и ядра с энергией ≥ 107эВ.

Еще один источник опасности — радиационные пояса Земли. Учитывая их расположение, траекторию полета выбирают таким образом, чтобы не попасть в центральную часть поясов. Третий, наиболее опасный для космонавтов вид радиации — протоны и альфа-частицы, испускаемые во время солнечных вспышек. Доза радиации от одной вспышки создает непосредственную угрозу здоровью и жизни человека.

9.1.2. Орбитальная станция «Мир». 20 февраля 1986 г. был выведен базовый блок станции, летный ресурс которого 5 лет. В апреле 1987 г. к блоку с третьей попытки был пристыкован астрофизический модуль «Квант», в декабре 1989 г. появился модуль «Квант-2», а еще через семь месяцев — «Кристалл». Общий объем помещений станции достиг 335 м^3, длина по одной из осей — 30 м, масса станции — 130 т. За 13 лет на станции побывали 135 человек из 11 стран. Однако из-за того, что космические программы после развала СССР стали сворачиваться, станция так и не была заменена более современной. В 2000 г. Россия контролировала только 8% рынка космических коммуникаций.

В условиях рыночной экономики Россия оказалась неспособной поддерживать высокий потенциал аэрокосмической промышленности и, в частности, жизнеспособность станции. Было принято решение о затоплении «Мира». 28 августа 1999 г. последние космонавты покинули станцию. Специально посланный корабль пристыковался к станции для проведения маневров. 24 марта 2001 г. в результате трех тормозных импульсов она начала входить в атмосферу. Остатки «Мира» на 86331-м витке оказались на дне Тихого океана. Горячие дискуссии — как спасти станцию — можно характеризовать сентенцией: «Кто не сожалеет о «Мире», тот не имеет сердца, кто хотел бы оставить ее на орбите «еще на 2-3 года», не имеет разума».

9.1.3. Международная космическая станция. Человечество готово совершить огромный шаг в космос — построить станцию «Альфа» для ученых из Европы, Азии и Америки. США затратит на строительство МКС 84 млрд. долларов, Россия — 6,8 млрд. Полная стоимость — более 200 млд долларов. На МКС смогут работать 15 человек. Масса станции 454 тонны, рабочий объем — 1800 м^3, размах фермы для крепления модулей — 108,5 м. Мощность солнечной батареи на площади 2 500 м^3 достигнет 78 кВт. Решение этой задачи займет пять лет напряженной работы 100 тысяч человек на Земле и в космосе. За это время около 90 транспортных ракет и челноков доставят на орбиту свыше сотни элементов станции и десятки тонн научно-

го оборудования. 20 ноября 1998 г. с космодрома Байконур выведен на орбиту первый блок станции «Альфа».

Более ста астронавтов проведут в открытом космосе почти 1000 часов, чтобы к 2004 г. завершить полную сборку этого уникального сооружения. Первый экипаж начал работу в январе 2000 г. Эксплуатация МКС рассчитана на 15—20 лет.

9.1.4. Космический мусор. Каждый год на орбитах появляются более ста аппаратов. Срок их службы ограничен и они, как и последние ступени ракет-носителей, становятся космическим мусором. Сейчас отслеживаются 9 тысяч таких объектов, представляющих серьезную опасность для действующих станций. В июне 1999 г. было замечено приближение к МКС «элемента» космического мусора, который пролетел от нее на расстоянии 7 км.

С 1999 г. создается Инфракрасная система космического базирования (SBIRS), включающая сверхчувствительные инфракрасные камеры, которые будут отслеживать старт и траектории полета сотен ракет и передавать информацию о полете «холодных» объектов — ракет после отключения двигателей.

9.2. Системы космической связи

Космическая техника открыла новый этап в развитии и совершенствовании систем для обеспечения телевизионной, телеграфной и телефонной радиосвязи. Первые эксперименты проводились в США с пассивными ретрансляторами. К ним относился «пояс иголок» и спутники, покрытые слоем отражающего металла.

С ноября 1965 г. начались регулярные передачи программ телевидения через спутники серии «Молния». Они движутся по сильно вытянутым орбитам с высотой апогея почти 40 000 км, высотой перигея 500 км и периодом обращения, равным 12 ч. При наклонении орбиты 63,5° они быстро проходят Южное полушарие и обеспечивают связь на всей территории России в течение 6—8 ч на протяжении одного витка. Четыре спутника, апогеи орбит которых образуют квадрат, обеспечивают круглосуточную связь. Время жизни этих спутников порядка 10 лет.

Геостационарные спутники. Трех стационарных спутников, разделенных дугами 120°, достаточно для глобального охвата земного шара. 19 августа 1963 г. в США на экваториальную орбиту в точку над международной линией перемены даты был запущен первый *геостационарный спутник* «Syncom-II». 29 июля 1974 г. выведен на экваториальную орбиту первый советский спутник.

9.3. Навигационные и геодезические спутники

Навигационные спутники служат для точного определения географических координат любого объекта. *Геодезические спутники* во многом подобны навигационным и позволяют точно определять расстояния между наземными пунктами. Разрешающая способность оптических систем военных спутников — 10 см. На коммерческом рынке в 2003—04 годах появятся системы с четкостью 30—50 см.

Для быстрого определения координат наземной цели необходимо иметь 24 космических аппаратов. Россия имеет только 9, входящих в состав глобальной навигационной системы. К концу 2002 г. Россия имела 89 работоспособных спутников — из них 44 военного или двойного назначения, 70% функционируют за пределами гарантийных сроков. В 2002 г. США имели более 406 спутников, треть из которых военные спутники. По прогнозам экспертов Россия может быть вытеснена с мирового рынка коммерческих стартов и пилотируемой космонавтики.

В 2001 г. начала функционировать глобальная спутниковая система связи LEO (Low Earth Orbit) для Европы. 72 спутника будут вращаться вокруг Земли на восьми орбитах (по 9 спутников на орбите) на высоте около 800 км.

9.4. Космическое землеведение

Агрономы получили возможность быстро определять состояние сельскохозяйственных культур. Разные объекты отражают свет по-разному: можно различать влажную и сухую почвы, хвойные и лиственные леса, выявлять посевы, подверженные болезням, очаги поражения вредителями участков леса и т. д. Такая информация позволяет прогнозировать урожайность основных культур, более рационально использовать ресурсы.

Большое практическое значение имеет *космическая метеорология*, позволяя существенно уточнять прогнозы погоды. За сутки метеорологические спутники собирают объем сведений, во много раз превышающий информацию, которая поступает от всех десяти тысяч метеорологических станций земного шара. Спутники позволяют изучать облачный покров планеты, морские течения, образование ураганов, ледовую обстановку, определять толщину снежного покрова, чтобы предсказывать наводнения.

Картография. Космонавт видит целиком то, что поколениям картографов приходилось составлять по кусочкам. Для определения относительной высоты различных элементов рельефа земной поверхности используются новейшие варианты радиолокационных систем. В результате могут быть составлены геологические и топографические карты. Невероятно, но факт, что только из космоса были обнаружены глубинные разломы в оболочке Земли, которые можно связать с залежами полезных ископаемых. Выяснилось, например, что Уральская горная система проходит через пустыни Средней Азии, выявлены неизвестные кратеры вулканов, в бассейне Амазонки удалось обнаружить реку длиной несколько сотен километров и т. д.

Наиболее удивительными оказались открытия под слоем песка в Сахаре. В ходе исследований было обнаружено, что сигналы радиолокатора проникают на глубину до 4,5 м через слой рыхлого сухого песка, часто достигая коренной породы. По радиолокационным изображениям из космоса удалось найти следы протекавших когда-то здесь полноводных рек.

Инфракрасная революция в геологии. Сейчас появилось новое направление геологии, связанное с применением на спутниках многоканальных спе-

ктрографов, предназначенных для изучения природных ресурсов Земли. Съемка проводится со спутника, находящегося на полярной орбите высотой 500—955 км, плоскость которой почти перпендикулярна солнечным лучам. В этом случае освещенность различных участков земной поверхности, наблюдаемых под спутником, зависит только от времени года. Подобные орбиты называются *синхронно-солнечными*. Повторная съемка одного и того же объекта происходит при постоянных условиях освещенности.

Геологическая разведка ведется в видимом и инфракрасном диапазонах волн. Выбор средней ИК-области (8—14 мкм) связан с высокой прозрачностью атмосферы в этом «окне». Разные объекты — вода, растения, минералы — отражают солнечный свет по-разному. Чувствительные приемники, регистрирующие излучение с шестью длинами волн, реагируют на 128—256 градаций интенсивности отраженного излучения и кодируют изображение в цифровой форме. После обработки компьютер восстанавливает изображение в условных цветах. Здесь главная проблема состоит в том, чтобы правильно определить, какая комбинация цветов однозначно будет соответствовать данному типу пород или растительности.

Снимки из космоса позволили получить карты, которые раскрашены в соответствии с содержанием в породах основных соединений. Это привело к открытию ряда новых месторождений в нашей стране и за рубежом. Геологи-поисковики получили ценные данные о выходе на поверхность горных пород разного возраста и разного состава. Космические снимки особенно широко использовались при геологических съемках в труднодоступных горах Тянь-Шаня и Памира.

К большому сожалению геологов, семьдесят процентов поверхности земного шара скрыто под океанами и морями. Но ученые, используя радиолокационный высотомер, измеряющий расстояния с точностью до 0,5 см, впервые не только исследовали поверхность океана, но и смогли «проникнуть» сквозь водный покров Земли. Подтвердилось предположение о том, что поверхность океана, подобно суше, рельефна. В некоторых местах имеются возвышенности, высота которых по отношению к остальной части поверхности океана доходит до 180 м. Наличие выпуклостей и впадин объясняется различиями в силе тяготения из-за неравномерного распределения массы внутри земного шара и особенностями рельефа океанического дна. На основе информации, полученной со спутников, была составлена карта океанического дна. Ясно видны хребты, подводные горы, борозды, оставленные движущимися плитами, которые образуют поверхность земного шара.

Применение радаров (сокр. от *Radio Detection And Renging*) бокового обзора дает принципиально новые возможности для дистанционного зондирования Земли (*remote sensing*). Облака, дождь и туман, мешающие фотосъемкам, полностью прозрачны для излучения с длиной волны более 2 см. С экрана локатора изображение проектируется на движущуюся фотопленку. Экспонированная пленка представляет собой двухмерную голограмму. Если

осветить ее пучком света от лазера, то получим обычное изображение поверхности. Для восстановления изображения используется и цифровая запись параметров отраженных волн. Большая часть этих съемок проводилась в рамках проектов геологических исследований по поиску месторождений. В 1981 г. с борта первого космического челнока Space Shuttle Columbia впервые была осуществлена радиолокационная съемка с высоты 259 км. Ширина полосы обзора 50 км, разрешение 40х40м. Трудно поверить, но у России нет ни одного спутника дистанционного зондирования Земли. Остались только архивы с разрешением 1 м.

Предупреждение пришло из космоса. 13 мая 1998 г. англо-американская группа впервые поймала со спутников, оснащенных инфракрасными детекторами, «горячий» сигнал — прямое следствие движения горячей лавы к поверхности вулкана Пакая в Гватемале. 20 мая вулкан выплеснул на город облако пепла. Впоследствии ученые предсказали за три часа до начала извержение вулкана на Галапагосских островах.

Сейчас в мире около 700 активных вулканов, из которых 55—60 извергаются ежегодно. Вблизи потенциально опасных вулканов проживают 360 млн человек. Создание всемирной системы прогнозирования извержений крайне важно для спасательных служб, которые должны быстро реагировать при чрезвычайных обстоятельствах.

9.5 Исследовательские спутники

Можно условно выделить две большие группы — *геофизические спутники*, предназначенные для исследования околоземного пространства, *астрономические и астрофизические спутники,* оборудованные оптическими и рентгеновскими телескопами, задача которых — изучение звезд, галактик, межпланетной и межзвездной среды.

Исследования космического пространства. Проведены измерения плотности атмосферы в области высот от 70 км до 40 000 км. Исследованы структура и периодические изменения магнитного поля Земли. Открыты два радиационных пояса, в которых магнитное поле Земли удерживает заряженные частицы - электроны, протоны и ядра более тяжелых элементов. Внутренний пояс представляет собой «бублик», расположенный в плоскости орбиты Земли; с внешней стороны пояс ограничен оболочкой, которая достигает высоты, равной двум радиусам Земли, и пересекается с атмосферой Земли на широте 45°, нижняя граница проходит на высотах 200—300 км. Достигнуты значительные успехи в изучении потоков заряженных частиц, испускаемых Солнцем, — солнечного ветра и космических лучей. В 1998 г. приборы, установленные на европейско-американском спутнике «Сохо», впервые замерили параметры солнечного ветра — выбросов гигантских масс газа. Обнаружен эффект «солнечного динамо»: в короне над фотосферой слой газа толщиной 60 000 км движется в сферическом слое размером 216 000 км.

Земная атмосфера является фильтром, который пропускает только ограниченный диапазон электромагнитных излучений, идущих из космоса, - видимое излучение и радиоволны. Кроме того, она задерживает и тормозит частицы высоких энергий. В то же время коротковолновое излучение и частицы больших энергий представляют наибольший интерес для науки. Регистрация этих излучений за пределами атмосферы открывает совершенно новые возможности исследования структуры звезд и галактик.

9.6. Исследования Луны

Луна — самое близкое к Земле небесное тело радиусом 0,27 земного и массой, составляющей 0,01 массы Земли. Расстояние от Земли меняется между 356400 и 406800 км. Среднее расстояние составляет 60 земных радиусов. Период обращения Луны вокруг Земли 27,3 сут совпадает с периодом вращения Луны вокруг своей оси; поэтому она всегда обращена к Земле одной и той же стороной. Луну принято считать спутником Земли. Однако вследствие большой массы систему Земля—Луна было бы правильнее рассматривать как двойную планету. До настоящего времени проблема происхождения Луны еще не решена.

Систематические наблюдения Луны начаты Г. Галилеем в 1610 г. Серые области поверхности Луны были названы «морями». Это наименование сохранилось до сих пор, хотя давно известно, что в лунных морях нет воды. Полеты и экспедиции на Луну сделали ее доступной для непосредственного изучения. Полет до Луны при наименьшей скорости отлета (10,9 км/ч на высоте 200 км) продолжается 5 сут, а при второй космической — 2 сут. На начальном этапе исследования Луны даже аппараты, разрушающиеся при падении на лунную поверхность или движущиеся по пролетным траекториям, успели передать значительную научную информацию.

14 сентября 1959 г. советская автоматическая станция «Луна-2» достигла поверхности Луны. Это был первый перелет с Земли на другое небесное тело. 4 октября 1959г. стартовала станция «Луна-3». Пройдя 6 октября на минимальном расстоянии 7900 км, она обогнула Луну и оказалась над невидимой с Земли ее стороной. Впервые были сделаны фотоснимки обратной стороны Луны.

Первый успешный полет американского аппарата «Рейнджер-7» был осуществлен в июле 1964 г. Было передано более 4300 изображений перед падением на поверхность Луны.

Станция «Зонд-3» в 1965 г. успешно осуществила фотографирование Луны с расстояния 10000 км. Изображения высокого качества дали возможность получить детальные сведения о рельефе обратной стороны Луны. На основе полученных фотографий в СССР была составлена первая в мире полная карта Луны.

3 февраля 1966 г. впервые была осуществлена мягкая посадка на поверхность Луны станции «Луна-9». Ее камеры передали на Землю панораму за-

литой лавой равнины, усеянной мелкими кратерами и камнями размерами 10-20 см. Посадка «Луны-9» была особенно важной, так как окончательно опровергла гипотезу о том, что лунные моря заполнены пылью глубиной несколько сотен метров. Мягкая посадка показала, что верхний слой поверхности (реголит) достаточно тверд, чтобы выдержать вес космического аппарата. Прилунение осуществлялось с помощью тормозного двигателя для гашения конечной скорости 2,6 км/с. Четыре месяца спустя совершил мягкую посадку американский аппарат «Surveyor-I».

31 марта 1966 г. впервые в истории космонавтики станция «Луна-10» стала искусственным спутником Луны. В сентябре 1970 г. станция «Луна-16» совершила рейс Земля-Луна-Земля, доставив 105 г образцов лунной породы. Позднее в ноябре 1970 г. космический аппарат «Луна-17» доставил на Луну первый автоматический самоходный аппарат, работающий от солнечных батарей и управляемый с Земли.

Экспедиция на Луну. В 1961 г. в США была объявлена программа «Apollo», цель которой — высадить человека на Луну и благополучно вернуть его на Землю. За четыре года был разработан основной блок. К июню 1962 г. утвержден способ доставки человека на Луну с расстыковкой и стыковкой основного блока и лунной кабины, которая представляет собой самостоятельный двухступенчатый космический корабль. В то время как один из астронавтов будет оставаться в основном блоке, совершая полет вокруг Луны, два других достигнут лунной поверхности. Закончив здесь все работы, астронавты вернутся на орбиту, проведут сближение и стыковку с основным блоком. Этот вариант полета, позволяющий существенно уменьшить стартовую массу ракеты-носителя, был разработан в 1918 г. Ю.В. Кондратюком.

Одним из этапов подготовки был поиск и выбор места посадки. С этой целью пять спутников серии «Lunar-Orbiter» в течение 1966—1968 гг. произвели съемки обширных районов Луны. В 1967 г. состоялся запуск ракеты-носителя «Saturn-5», разработанной под руководством немецкого инженера Вернера фон Брауна. С декабря 1968 г. по март 1969 г. были осуществлены три пилотируемых полета к Луне с целью отработки маневров на орбите Луны.

Согласно программе полная начальная масса системы «Сатурн-5» — «Аполлон» 2950 т, общая длина 111 м. Через 12 мин после старта комплекс массой 135 т должен приобрести первую космическую скорость на высоте 190 км на расстоянии 2700 км от мыса Канаверал — места старта. Полезная нагрузка составляет 50 т, масса лунного отсека или лунного корабля 15 т. На Землю должен возвратиться командный отсек массой 5,4 т. Торможение осуществляется двукратным погружением в атмосферу. Сначала корабль должен войти в нее по узкому «коридору входа» шириной 40 км, затормозиться до скорости, несколько меньшей первой космической, и опять выйти в космическое пространство. При втором входе в атмосферу корабль движется к Земле так же, как при возвращении из орбитального полета.

Наконец все было готово к историческому запуску. 16 июля 1969 г. окутанная пламенем ракета-носитель стартовала с кораблем «Аполлон-11». 20 июля лунная кабина совершила посадку. Нейл Армстронг — первый человек на Луне — произнес историческую фразу: «Это небольшой шаг для человека, но огромный скачок для человечества». 24 июля командный отсек приводнился в Тихом океане.

Последующие лунные экспедиции доставили комплекты приборов— магнитометр, сейсмограф, детектор ионов и лазерные отражатели. В ноябре 1969 г. астронавты корабля «Аполлон-12» совершили прогулку к находившейся в 183 м от места прилунения станции «Сервейер-3», которая совершила мягкую посадку в апреле 1967 г.

Во время полета на Луну в апреле 1970 г. в служебном отсеке корабля «Аполлон-13» произошел взрыв кислородного бака. Посадка на Луну была отменена. Лунный отсек стал играть роль спасательной шлюпки. Благодаря мужеству и мастерству астронавтов и наземных операторов удалось предотвратить трагедию. После облета Луны аппарат приводнился в Тихом океане.

После первых трех полетов астронавты проходили карантин из-за возможности занесения на Землю чужеродных организмов. Далее стало ясно, что Луна стерильна, на ней не обнаружено никаких форм жизни.

Основными образованиями на поверхности Луны являются «моря» и светлоокрашенные материковые области, окаймляющие моря. Максимальная разность высот между морями и вершинами горных хребтов равна 9 км. Моря расположены в основном на видимой стороне. Вся поверхность Луны покрыта кратерами метеоритного происхождения. Только на видимой стороне насчитывается несколько сотен тысяч кратеров диаметром свыше 1 км. На обратной стороне их концентрация еще выше. Кратеры в этой области отражают период бомбардировки метеоритами на раннем этапе эволюции Луны. В 1994 г. на обратной стороне Луны был обнаружен самый большой кратер в Солнечной системе — Эйткен. Его диаметр — 2500 км, глубина воронки — 12 км.

Последний полет состоялся в декабре 1972 г. Астронавты проехали на луноходе 35 км, расставляя по пути гравиметры и собирая образцы грунта.

Шесть экспедиций собрали 384,2 кг образцов породы и грунта. Их изучение показало, что возраст Луны совпадает с возрастом Земли, равным примерно 4,5 млрд лет. Луна, подобно Земле, прошла через ряд периодов внутреннего разогрева. Она имеет кору толщиной от 60 до 150 км, под корой до глубины 1000 км расположена мантия, еще глубже — ядро в расплавленном состоянии. На Луне обнаружены области с повышенной плотностью. Эти образования получили название *масконов* (сокращение от *mass concentration*). Масконы заставляли корабль «Аполлон-8» неожиданно менять ускорение. В результате эллиптическая орбита высотой от 100 до 200 км за какие-то двенадцать часов превратилась в круговую высотой 111 км. Проблема происхождения масконов еще не решена. С геологической точки зрения тектонические процессы в недрах Луны закончились при-

мерно 1 млрд лет назад, конечная стадия лунной истории — состояние покоя. Интересно, что теперь гораздо больше данных о геологической эволюции Луны, чем Земли. В отличие от Земли, Луна не подвергалась эрозии и выглядит сегодня так, как почти 2 млрд лет назад.

Вопрос о происхождении Луны остался нерешенным. Относительное содержание химических элементов в горных породах Луны и Земли существенно различается. В лунных образцах чаще встречаются металлы с высокой температурой плавления. Возможно, Луна образовалась в более высокотемпературных условиях, чем Земля. Любая теория происхождения Луны должна объяснить и различие в плотностях Луны (3,36 г/см^3) и Земли (5,5 г/ см^3).

Луна — негостеприимный мир. Температура в центре видимого диска днем достигает 130°С, а ночью минус 170°С. На Луне нет воздуха и воды. Сейчас мы убеждены, что там никогда не было жизни. Однако, лишенная геологически активных внешних слоев коры и атмосферы, вызывающей эрозию, Луна сохранила свидетельства ранних событий истории Солнечной системы.

9.7. Полеты к ближним планетам

Все процессы, протекающие на Земле, ее климат, облачность, ледовый покров, озонный слой, магнитное поле ионосфера — связаны с процессами, протекающими в Солнечной системе. Наибольший интерес для понимания природы Земли и ее эволюции представляют исследования Венеры и Марса — планет, наиболее близких к Земле.

Почему наша планета так непохожа на своих небесных «сестер», которые развивались примерно в таких же условиях, но одна их которых представляет «раскаленную», а другая — «замороженную» пустыни?

Полеты к планетам. Для запуска автоматических межпланетных станций (АМС) к планетам требуется высокая точность и определенное взаимное расположение планеты и Земли. Наиболее оптимальная траектория перелета — орбита перехода Гомана — касается орбит планеты и Земли. Поэтому межпланетные перелеты должны быть рассчитаны так, чтобы АМС встретилась с планетой на половине оборота вокруг Солнца. Время, в течение которого выполняется это условие, называется «окном» запуска. Обычно «окно» открыто несколько недель.

9.7.1. Исследования Венеры. Венера — вторая по близости к Солнцу планета, ее масса равна 0,81 земной. Она окружена облаками бледно-желтого цвета. Атмосфера Венеры была открыта М. В. Ломоносовым в 1761 г. при наблюдении прохождения планеты по диску Солнца. Поверхность Венеры всегда скрыта под облаками и не поддается изучению с помощью телескопа. До последних лет ее называли «планетой тайн». Поскольку Венера — наша ближайшая соседка — почти такого же размера, как Земля, то предполагалось, что условия на поверхности Венеры должны напоминать земные. В 1932 г. спектральный анализ света, отраженного атмосферой, позволил установить наличие на Венере углекислого газа. Наиболее крупные успехи в исследованиях Венеры достигнуты в результате полетов космических аппаратов.

В октябре 1967 г., пройдя за четыре месяца 350 млн км, советская научная станция «Венера-4» вошла в атмосферу Венеры со скоростью 12 км/ч, впервые проникнув под облака, скрывающие планету. После расшифровки результатов измерений, переданных на Землю, оказалось, что по составу атмосфера Венеры существенно отличается от земной — она содержит 97% углекислого газа. Тот факт, что углекислый газ может быть основной составляющей атмосферы, стал новым фундаментальным открытием в физике планет.

Природа частиц, образующих облака, до конца не выяснена: с большой вероятностью облака состоят из капель серной кислоты. Обнаружена высокая грозовая активность: 35 разрядов в секунду на одном из участков. Средняя температура у поверхности достигает 480°С (напомним, что температура плавления свинца — 327°С, цинка — 420°С), а давление равно 9 МПа (≈90атм). На Земле такое давление создает слой воды толщиной ~1 км. Очевидно, высокие температура и давление делают пока невозможной высадку космонавтов на Венеру.

Следующий важный шаг был сделан в 1975 г., когда с двух советских станций «Венера-9» и «Венера-10» спускаемые аппараты совершили мягкую посадку на поверхность планеты. При спуске научная аппаратура выдержала перегрузки порядка 300 *g*. Передача информации с поверхности длилась почти час. Несмотря на плотную атмосферу (плотностью лишь в 14 раз меньшая плотности воды) и густую облачность, были отчетливо видны особенности рельефа на удалении до 100 м. Местность была похожа на каменистую пустыню, покрытую валунами размерами до 10м. Вопреки ожиданиям, оказалось, что атмосфера не обладает высокими преломляющими свойствами.

В 1979 г. радиолокационные наблюдения с орбитального аппарата «Pioneer Venus 1» обнаружили гигантское плато размером 3200 × 1600 км, лежащее на 5 км выше окружающей местности, и плоскогорья с крупными вулканическими конусами высотой до 10 км. В другом месте было обнаружено огромное ущелье протяженностью 1400 км, шириной до 280 км и глубиной 4,6 км. Было установлено, что период вращения Венеры вокруг оси равен 243 сут. Эта величина превосходит период обращения Венеры вокруг Солнца, равный 224,7 сут. Поэтому на Венере сутки длиннее года. Венера вращается с востока на запад, т. е. в обратном направлении по отношению к Земле и большинству других планет.

В 1986 г. с советских автоматических межпланетных станций «Вега-1» и «Вега-2» запущены аэростаты в атмосферу Венеры. Участие в эксперименте большинства радиотелескопов мира позволило запеленговать передатчик аэростата, перемещавшийся вместе с атмосферными потоками. Ветер у поверхности очень слабый, около 0,5 м/с. Скорость ветра растет с высотой. Измерения подтвердили наличие на высоте 50 км облачных слоев, вращающихся с огромной скоростью — около 100 м/с. Это удивительное явление, суперротация, было обнаружено с Земли. Пока ни одна модель этого явления не может объяснить имеющиеся данные.

Установленный на борту межпланетной американской станции «Магеллан» радиолокатор бокового обзора способен обнаружить детали поверхности размерами 120 м. В декабре 1990 г. началась съемка экваториальных областей Венеры. В течение следующих пяти лет «Магеллан» произвел съемку планеты восемь раз. Это позволило найти признаки эволюции рельефа.

9.7.2. Исследования Марса. Масса Марса составляет 0,1 земной, средняя плотность ~$3{,}95 \cdot 10^3$ кг/м^3 существенно меньше плотности Земли, экваториальный радиус, равный 3394 км, примерно в два раза больше лунного. Максимальное расстояние между Землей и Марсом равно 337,5 млн км, когда они оказываются в диаметрально противоположных точках своих орбит. Во время противостояний, происходящих с интервалом 780 сут, Солнце, Земля и Марс находятся на одной прямой. Расстояние от Земли до Марса в противостоянии - от 56 млн до 400 млн км. Противостояния, соответствующие минимуму этой величины, называются великими. Они наступают через 15—17 лет. На минимальном расстоянии Марс оказывается один раз за 60 тыс лет. Последний раз это событие произошло 27 августа 2003 г.

Марс давно привлекал внимание человека. В телескоп Марс виден как красный диск с белыми шапками на полюсах и выделяющимися темными пятнами. Первая зарисовка деталей поверхности Марса сделана Х. Гюйгенсом в 1659г. Последующие наблюдения мощными телескопами позволили обнаружить новые детали. В 1877 г. Дж. Скиапарелли составил карту, на которой видны прямые, получившие известность как марсианские каналы. Сразу же последовали гипотезы о существовании развитой цивилизации на Марсе. Там, где каналы пересекались, были видны небольшие пятна, которые считались населенными пунктами. Значительные изменения формы и яркости некоторых областей связывали с наличием растительности.

Эта гипотеза просуществовала до полета к Марсу первого космическою аппарата «Mariner-4», запущенного 28 ноября 1964 г. Он прошел на расстоянии 10000 км от Марса, успев передать 22 снимка. Оптимистические прогнозы о наличии растительности на Марсе не подтвердились. Не обнаружены также знаменитые «каналы», будоражившие воображение. Зато большим сюрпризом было открытие русел высохших рек и других доказательств существования в прошлом воды. Но откуда же могла появиться вода, если средняя температура на Марсе –40 °С, а плотность атмосферы в 100 раз меньше, чем земная? Эту загадку еще предстоит разрешить. Сейчас вся марсианская вода сосредоточена в виде льда в полярных шапках. Наиболее важной причиной этого обстоятельства является то, что Марс находится в 1,5 раза дальше от Солнца, чем Земля, и получает в 2 раза меньше солнечного тепла. По числу метеоритных кратеров, приходящихся на сеть каналов, можно оценить возраст речной сети примерно в 4 млрд лет.

Самые удивительные открытия были сделаны аппаратом «Mariner-9», запущенным 30 мая 1971 г. во время очередного «окна». 14 ноября 1971 г. он

стал первым искусственным спутником Марса. В это время на Марсе бушевала пылевая буря, начавшаяся 12 октября 1971 г., — одна из сильнейших среди наблюдавшихся за многие годы. Когда к 8 февраля 1972 г. пыль осела, было передано на Землю 7329 снимков (до ноября 1972 г.). Телевизионные изображения показали поистине удивительный мир. Наиболее впечатляющими формами марсианского ландшафта оказались высочайшие горы, похожие по форме на земные вулканы Гавайских островов, но намного превосходящие их по размерам. Обнаружено четыре больших потухших вулканов, из которых самый большой в Солнечной системе — Nix Olympica высотой 24 км. Диаметр его главного кратера 65 км, поперечник у подножия 550 км. Олимп виден с Земли как крошечная точка, окруженная обширной гладкой областью. Была открыта выдающаяся геологическая особенность Марса — долина Маринер — гигантский, самый большой в Солнечной системе каньон, простирающийся на 1/5 периметра планеты, протяженностью 4000 км, шириной примерно 600 км и глубиной от 3 до 8 км.

В самый разгар пылевой бури советская станция «Марс-2» вошла в атмосферу Марса. От спускаемого аппарата информации не поступило. 2 декабря 1971 г. вышла на орбиту станция «Марс-3». После отделения орбитальные аппараты свыше 8 месяцев исследовали поверхность и атмосферу Марса. В 1973 г. в результате отказа тормозного двигателя станция «Марс-4» не смогла перейти на околопланетную орбиту. Спускаемый блок станции «Марс-6» впервые успел передать данные о составе атмосферы, но вблизи поверхности связь прервалась. Станция «Марс-7» из-за неисправности прошла на расстоянии 1 300 км от планеты.

20 августа и 9 сентября 1975 г. стартовали аппараты «Viking-1,-2». 19 июня 1976 г. «Викинг-1» перешел на орбиту вокруг Марса. Только 20 июля после длительного маневрирования удалось найти подходящее место для посадки и совершить успешный спуск двух блоков на поверхность планеты. Орбитальный блок и оба посадочных блока продолжали работу до 1980 г. 7 августа «Викинг-2» добрался до Марса. 4 сентября два посадочных блока спустились на поверхность на равнине Утопия, а два других продолжали облет и съемку планеты.

В мае 1999 г. телескоп «Хаббл» зафиксировал в Северном полушарии вихрь диаметром 320 км. Разрушительный ураган в три раза превосходил мощную пылевую бурю 1971 года.

Рельеф планеты. Полный анализ полученной информации занял несколько лет. На первой цветной фотографии, переданной «Викингом-1» 20 июля 1976 г. через несколько минут после посадки, предстала местность с ржаво-красной почвой, усеянная камнями. Размеры камней доходят до метра. Тонкая красноватая пыль рассеяна по всей поверхности и в атмосфере. Небо — почти розового цвета. Наиболее удивительным оказалось разнообразие отдельных районов. Фотоснимки с высоты 1680 км показали, что большие площади покрыты кратерами, которые образовались вследствие

ударов метеоритов. Встречаются и низменные равнины, вовсе лишенные кратеров. Стенки гигантского каньона местами разрушены оползнями. Вершины гор возвышаются иногда на 5 км над густыми облаками. Когда движение орбитального отсека «Викинг-1» было изменено так, что аппарат мог исследовать различные области, удалось сделать еще одно открытие. Было обнаружено, что северная полярная шапка состоит из замерзшей воды, а не из сухого льда (CO_2), как считали большинство ученых. В некоторых местах толщина льда достигает 100—1000 м.

В составе грунта было обнаружено 13—15% железа, 12—15% кремния, кальций, алюминий, сера, титан, магний, цезий и калий. В атмосфере Марса содержится, в основном, углекислый газ (95%). Давление у поверхности примерно в сто раз меньше земного. Температура вблизи экватора днем 10—20°С, ночью минус 60—70°С, в полярных зонах до –130°С. Неожиданное атмосферное явление — пылевые бури со скоростью ветра до 100 м/с продолжаются иногда несколько месяцев. Эти бури настолько сильны, что пыль поднимается на высоту свыше 40 км и придает планете красноватую окраску. Пыль поглощает солнечное излучение, а перепады температур приводят к интенсивной циркуляции. Когда плотность пыли возрастает настолько, что нижние слои перестают получать достаточное количество тепла, буря стихает.

7 ноября 1996 г. к Марсу был направлен корабль Mars Global Surveyor. К 1999 г. станция произвела более 400 млн измерений относительных высот. По этим данным была составлена полная карта рельефа планеты. По-новому предстал облик самой знаменитой области Марса — страны вулканов Фарсиды. Оказалось, что она делится на два региона: на севере расположен большой вулкан Альба Патера, а на юге горы Арсия, Павлина и др. На новой карте высочайшая гора Солнечной системы — Олимп — оказалась в стороне от Фарсиды. Стала ясной и картина древнего рельефа. На планете обнаружены следы водных потоков и береговых контуров. Устье крупнейшей реки планеты находилось на юго-восточной части Фарсиды. В восточной части долины Маринер находилось озеро глубиной более километра. Как утверждают ученые, около 3,7 млрд лет назад на Марсе были океаны.

В октябре 2001 г. вышла на орбиту высотой 400 км станция Mars Odyssey. Анализ экспериментальных данных позволяет утверждать, что под метровым слоем песка находятся большие территории залегания вечной мерзлоты с гораздо большим чем на Земле содержанием воды — до 50 %. Исследования приполярных областей показали, что здесь могут быть сосредоточены большие запасы воды в жидком состоянии. Более того выявлено наличие двух загадочных областей на экваторе, возможно, содержащих воду.

Есть ли жизнь на Марсе? На каждом посадочном блоке были проведены эксперименты по обнаружению микроорганизмов. Результаты экспериментов приводили в замешательство. Не было обнаружено никаких органических соединений, но при воздействии света и воды из грунта выделялось аномально большое количество кислорода. Остается вероятность существования примитивной, экзотической формы жизни на Марсе.

Камень ALH 84001 — безжизненный камень или окаменевшая жизнь на Марсе. Не так давно в 1984 г. во льдах Антарктиды нашли камень, состав которого отличается от состава земных пород, однако очень похож на состав проб грунта, исследованных «Викингами» на поверхности Марса. Возраст породы, из которой состоит камень, приблизительно 3,6 млрд. лет. Ученые пришли к выводу, что около 15 млн. лет тому назад крупная комета столкнулась с Марсом и выбросила в космос кусок породы с его поверхности. Он «долго» путешествовал по Солнечной системе, пока примерно 13 000 лет назад не упал на Землю. Проведенные в 1996—99 гг. исследования дают убедительные «косвенные доказательства» того, что 3,6 млрд лет тому назад на Марсе имелись примитивные организмы, которые похожи на первобытные бактерии, существовавшие на Земле.

Спутники Марса. Марс обладает двумя спутниками; их назвали Фобос (от греч. — страх) и Деймос (от греч. — ужас). Оба имеют неправильную форму и весьма сильно отличаются от нашей Луны, возможно, это захваченные астероиды. Фобос имеет форму, напоминающую картофелину размерами 20×23×28 км с впадинами и выступом, всегда обращенным к Марсу. На его поверхности есть кратеры, наибольший из которых имеет диаметр 6,5 км. Уникальная особенность Фобоса – наличие системы параллельных борозд, покрывающих более половины поверхности. Ширина борозд — 100—200 м, глубина — 20—30 м. Одна из возможных причин образования борозд – гравитационное растяжение (см. ч. III, пример 3.5.2).

Битва за Марс? Последнюю посадку совершил американский аппарат «Пэтфайдер». С 1960 г. по 1999 г. были запущены 29 станций и только 5 из них попали на Марс. Две попытки посадки на Фобос, предпринятые в 1988 г., окончились потерей аппаратов. Аварийность земных аппаратов в окрестности Марса и Фобоса достигла 70 %. В конце декабря 2003 г. в рамках первой европейской экспедиции «Марс Экспресс» аппарат «Бигль-2» должен был опуститься на поверхность для поиска следов органической жизни. Однако, как предполагают специалисты, он разбился в районе кратера Изиды. 3 января 2004 г. американский аппарат «Spirit» опустился на планету и передал черно-белые изображения с места посадки в районе кратера Гусева. В конце января аппарат «Opportunity» присел на Марс. НАСА и японцы готовят новые проекты «завоевания» Марса. По планам США до 2005 года Марс посетят 10 беспилотных аппаратов, а 4 июля 2012 г. шесть астронавтов совершат посадку на строптивую планету.

9.8. Исследования внешних планет

Солнечная система делится на две основные части широким разрывом между внутренними планетами (Меркурий, Венера, Земля, Марс) и четырьмя внешними планетами-гигантами (Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун). Эти тела совершенно не похожи на планеты земной группы. По современным данным, они имеют жидкое ядро, непрерывно переходящее в атмосферу. Все гиганты окружены роем спутников. К 1986 г. было известно, что Юпитер имеет 16 спутников, Сатурн — 17, Уран — 15 и Нептун — 2. Ганимед

у Юпитера — самый большой спутник в Солнечной системе, его диаметр — 5268 км. Один из спутников Сатурна — Титан — уникален тем, что имеет красно-оранжевую атмосферу. Правда, Сатурн в 95 раз массивнее Земли, а Титан больше Луны или Меркурия. Любопытно, что Уран вращается «лежа на боку» — вокруг оси, расположенной в плоскости орбиты.

Особенности движения самой дальней планеты — Плутона — и ее малые размеры (радиус равен 0,18 радиуса Земли) позволяют сделать предположение, что она была спутником Нептуна (радиус равен 3,8 радиуса Земли). Недавно было сделано поразительное открытие — обнаружен астероидный пояс между орбитами Нептуна и Плутона, включающий более 300 тел диаметром 100-700 км. Пояс назван в честь американца Дж. Койпера, который предсказал существование малых планет за орбитой восьмой планеты. Эти тела могли бы образовать планету в эпоху рождения Солнечной Системы, однако, они остались без изменения. Радиус Харона — спутника Плутона — лишь в два раза меньше радиуса планеты. Плутон более похож на спутник Нептуна Тритон. Сейчас многие ученые предлагают отобрать статус девятой планеты у Плутона — самого крупного объекта в поясе Койпера. Планируемый в 2006 г. запуск аппарата к Плутону позволит более полно исследовать проблемы эволюции Солнечной Системы.

Самой загадочной планетой Солнечной системы, по мнению многих ученых, является самая большая из них — Юпитер (масса в 318 раз больше массы Земли и превышает массу всех остальных планет, комет и астероидов Солнечной системы). Он излучает в два раза больше энергии, чем получает ее от Солнца. Механизм генерации теплоты еще непонятен. Ясно выделяется большое Красное пятно — овал, размером (24—40 тыс. км) превосходящий Землю, который наблюдается уже более 300 лет. Согласно современным представлениям, пятно является устойчивым атмосферным возмущением.

Уникальной особенностью планет-гигантов являются кольца. Сатурн окружен семью кольцами, расположенными в экваториальной плоскости. С Земли хорошо видны три кольца. Ближе к планете находится слабое полупрозрачное кольцо *C*. К нему примыкает яркое кольцо *B* шириной 26000 км. Затем следует провал, называемый щелью Кассини, — шириной 4650 км. Внешнее кольцо *A* имеет ширину 14610 км. Кольца имеют толщину ~10 м и расположены в пределах от 1 до 2,3 радиуса планеты. Кольца состоят из ледяных глыб с небольшой примесью камней. Поэтому кольца обладают высокой отражающей способностью. В 1977—1989 гг. открыты 16 угольно-черных колец, окружающих Уран, три кольца Юпитера и два кольца Нептуна. Фактически за 12 лет был открыт и изучен новый класс объектов Солнечной системы. Исследование колец, возможно, дает ключ к пониманию процессов, протекавших на стадии образования планет и спутников планет. В настоящее время существует большое число моделей и гипотез, часто взаимоисключающих друг друга. Поэтому пока остаются неразрешенными проблемы образования, расслоения и устойчивости колец.

9.9. Космический вояж

20 августа и 5 сентября 1977 г. начался полет американских кораблей «Voyager-2» и «Voyager-1» по маршруту Земля — Юпитер — Сатурн —

Уран — Нептун. Этот полет получил название «Гран тур» — большое путешествие. Главная часть «Вояджера» — большая параболическая антенна с отражателем диаметром 3,7 м для связи с Землей. Мощность батареи на основе окисла плутония — 470 Вт. Научное оборудование закреплено на платформе. Здесь же расположены двигатели системы ориентации.

Исследования систем Юпитера и Сатурна. 5 марта 1979 г. «Вояджер-1» пролетел в окрестности Юпитера. Анализ изображений планеты и нескольких ее спутников привел к поразительным открытиям. Прежде всего, у Юпитера обнаружено кольцо, состоящее из обломков пород и глыб льда. Наиболее неожиданным было открытие действующих вулканов на спутнике Ио. Они являются единственными в Солнечной системе активными вулканами внеземного происхождения. У Ио обнаружена атмосфера и ионосфера. Поверхности других спутников покрыты слоем льда.

Есть ли жизнь в «Европе»? Огромное количество информации о Юпитере и его спутниках передал американский аппарат «Галилео», который 34 раза облетел этот газовый гигант. Аппарат был запущен шаттлом в 1989 г., приступил к работе в 1995 г. Спутник Юпитера Европа оказался шаром с поразительно гладкой ледяной поверхностью, самой гладкой из известных в Солнечной системе. В 1997 г. аппарат «Галилео» передал информацию о том, что под слоем льда может находиться жидкий океан и получил карту ледяной луны Юпитера с разрешением 100 м. Скоро Европу посетят «Стардаст», запущенный 6 февраля 1999 г., и «Айсклиппер». Эти корабли приблизятся к спутнику для исследования жизни, возможно, существующей в океане. NASA трижды продлевала срок действия «Галилео» — для того чтобы использовать уникальные возможности аппарата. Было принято решение прекратить его существование так, чтобы микробные формы с нашей планеты, возможно сохранившиеся на корабле, не попали бы на Европу и не могли бы исказить биологическую историю спутника. 21 сентября 2003 г. ветеран космоса был направлен к Юпитеру и сгорел в атмосфере. Конец исторической миссии можно было наблюдать на сайте NASA.

12 ноября 1979 г. «Вояджер-1» прошел на расстоянии 124200 км от поверхности Сатурна и всего лишь на расстоянии 4500 км от его самого большого спутника Титана. Слой дымки не позволил наблюдать поверхность. На изображении другого спутника — Мимаса — был обнаружен «глаз» Мимаса — гигантский кратер глубиной 9 км и диаметром 130 км, составляющим примерно треть диаметра самого спутника. Размеры кратера свидетельствуют о таком ударе метеорита, от которого Мимас едва не развалился на части. Из вновь открытых маленьких спутников два не имеют аналогов в Солнечной системе. Они находятся на почти одинаковых орбитах, периодически сближаются и «обмениваются» траекториями.

Близкое прохождение Титана — основной цели полета — сделало достижение Урана невозможным — аппарат устремился к Млечному Пути. Другой аппарат — «Вояджер-2» — совершил в июле 1979 г. пролет вблизи

Юпитера, а в августе 1982 г. — в окрестности Сатурна. Высококачественные изображения, переданные двумя аппаратами, позволили обнаружить тонкую структуру колец Сатурна. Оказалось, что каждое из них состоит из тысяч отдельных узких полосок. Внутри колец могут находиться небольшие «луны» — гиганты по сравнению с другими частицами. Не менее замечательной особенностью большого кольца явилось наблюдение радиальных возмущений плотности частиц. Но самый главный сюрприз — совершенно невероятная структура кольца *F* шириной 50 км, удаленного от Сатурна на 80 тыс. км. На снимках можно различить несколько отдельных нитей, местами переплетенных, местами идущих параллельно друг другу. По всей длине кольца распределены сгущения и узлы. Кольцо находится между орбитами двух маленьких спутников — гравитационных «пастухов» кольца. До сих пор не удается построить теорию, объясняющую удивительную структуру кольца *F*. Другая проблема относится к нескольким незамкнутым дуговым кольцам, существование которых остается загадкой.

Исследования систем Урана и Нептуна. После сближения с Юпитером и Сатурном программа «Вояджеров» была завершена. Тем не менее, учитывая уникальное расположение планет, называемое *парадом планет,* которое бывает один раз в 176 лет, удалось, используя *гравитационный разгон,* направить «Вояджер-2» к Урану и Нептуну. К этому времени обнаружились механические дефекты оборудования, вышел из строя основной радиоприемник, отказала одна микросхема. Дублирующий приемник работал на фиксированной частоте. Однако даже вращение магнитофонной катушки на борту приводило к смещению «Вояджера» и изменению частоты принимаемых сигналов. Сначала операторам пришлось выяснить, как изменяется частота при всех возможных смещениях, и создать программу подстройки частоты. Была создана новая программа кодирования массива данных, нейтрализующая дефектный чип. Можно сказать, что на пути к Урану была выполнена дистанционная пересадка мозга.

Исследования спутников планеты были связаны с огромными техническими препятствиями. «Вояджер» проходил Уран со скоростью 72000 км/час менее чем за сутки. Кратковременность сближения обусловлена необычной геометрией системы Урана: спутники вращаются в плоскости, перпендикулярной скорости аппарата. Движение «Вояджера» напоминало полет к мишени — он сближался со всеми спутниками почти одновременно. Другая проблема была связана со слабой освещенностью планеты. Однако выполненная бортовыми компьютерами операция по регулированию энергозатрат, подсказанная с Земли, позволила получить уникальную информацию.

В январе 1986 г. «Вояджер-2» прошел на расстоянии 81000 км от облачного покрова Урана. Детектор выявил необычное свечение в атмосфере планеты. Обнаружены также атмосферные вихри и существование мощных ветров. Имеются данные, что ядро планеты окружено океаном сверхгорячей воды в жидкой и газообразной фазах одинаковой плотности, находящихся под давлением мощной атмосферы. Толщина слоя достигает 8 тыс. км.

Были открыты одно новое кольцо и 10 спутников (теперь известны 21 спутник; последний открыт в 2001 г.), невидимых с земли из-за малых размеров. По традиции, имена спутникам Урана присваиваются в честь персонажей произведений Уильяма Шекспира (1564—1616) и английского поэта Александра Попа (1668—1744). По количеству известных спутников Уран занимает третье место после Юпитера с его 39 лунами и Сатурна — с тридцатью. Системы колец спутников Урана и Сатурна обнаружили поразительное сходство: несколько крупных спутников на удаленных орбитах и множество мелких, примыкающих к кольцам с внешней стороны. Этот переход находится вблизи зоны Роша (см. часть III, 3.5.2).

Миранда — небесная головоломка. Траектория станции прошла на расстоянии 18260 км от ближайшего к Урану спутника - Миранда. Положение аппарата определялось с точностью до 25 км на расстоянии почти 3 млрд км от Земли. Точная навигация и логическая программа компьютера, управляющего телекамерой, позволили держать слабоосвещенный спутник в фиксированном положении и избежать размытости изображения. Изображения Миранды, полученные с разрешением 0,5 км, относятся к лучшим снимкам, когда-либо полученным с помощью пролетных аппаратов.

Рельеф поверхности ошеломил ученых. На снимках видны глубокие разломы, извилистые долины, борозды, длина которых сравнима с радиусом спутника, равным 241 км. Наиболее интересная область, получившая название Шеврон, имеет трапециевидную форму. Резко выделяется светлый угол, окаймляющий «борозду» глубиной 20 км, — самое гигантское ущелье во всей Солнечной системе. С обеих сторон Шеврона расположены две овальные области — полосатая и складчатая. Остальная поверхность — относительно ровная, покрыта кратерами. Предполагают, что Миранда столкнулась с каким-то телом и разбилась на отдельные фрагменты, которые снова собрались в «комок» вследствие притяжения. Однако неясно, почему грубым рельефом обладают только три участка поверхности — самые уникальные образования по всей Солнечной системе.

Другим загадочным спутником является Умбриэль. В отличие от своих соседей, этот спутник диаметром 1100 км не имеет следов столкновений с метеоритами. На сероватом диске заметно лишь странное яркое пятно.

Сигналам с «Вояджера-2», находящегося на расстоянии 2869,6 млн км, требовалось 2 часа 45 минут, чтобы достичь Земли. Изменив под действием тяготения Урана траекторию, космический аппарат взял курс к Нептуну.

На краю Солнечной системы. В августе 1989 г., спустя 12 лет после запуска, он приблизился к Нептуну. Фотокамеры поймали изображения шести спутников и пяти колец, окружающих планету. Один из спутников — Тритон — уже был известен в качестве «астрономического ренегата»: он движется по орбите в направлении, противоположном направлению движения всех других спутников. У него обнаружены характерные признаки планеты — магнитное поле и атмосферу.

К Нептуну «Вояджер-2» подошел ближе, чем к другим планетам: он прошел под его облачным покровом. Для этой сверхсложной операции необходимо располагать точными данными о положении аппарата. Три больших радиотелескопа принимали и передавали кодированный сигнал на «Вояджер». Управляющие сигналы запаздывали на четыре часа шесть минут, проходя расстояние 4,5 млрд. км. Для достижения необходимой точности на каждом телескопе были установлены высокоточные часы, в качестве которых использован мазер на атомах водорода.

В отличие от безмятежного Урана, Нептун оказался динамичным миром. Огромная штормовая система размером с земной шар, получившая название Великого Темного Пятна, отмечена в Южном полушарии (радиус Нептуна 25 тыс. км). Остается загадкой, откуда берется энергия для образования ветров, движущихся со скоростью 650 км/ч, т. к. Нептун получает лишь одну тысячную долю от солнечной радиации, поступающей на Землю.

Где границы Солнечной системы? Плутон — внешняя, самая дальняя планета — находится на расстоянии 39 астрономических единиц от Солнца (1 а.е. — расстояние от Солнца до Земли). На расстоянии 80–130 а.е. солнечный ветер - поток частиц от Солнца — ослабевает в области, называемой гелиопаузой. В 1993 г. «Вояджер-1», находящийся на расстоянии 52 а.е. (7,8 млрд км), и «Вояджер-2» — на расстоянии 40 а.е. (5,95 млрд км) от Солнца — обнаружили интенсивное радиоизлучение на частотах 2–3 кГц. После анализа ученые пришли к выводу, что источником излучения является гелиопауза — область столкновения солнечного ветра и межзвездного газа. Это открытие позволит ответить на вопрос о положении внешней границы Солнечной системы. Через 15 лет «Вояджер-1» войдет в наиболее интересную область — на расстояние 100 а.е.

«Вояджеры» покидают Солнечную систему. Полный объем научных данных, полученных «Вояджерами», соответствует 6 тысячам Британских энциклопедий. За время путешествия «Вояджера-2» ученые узнали о планетах-гигантах больше, чем за все времена существования астрономии. Фактически «Вояджеры» обнаружили больше, чем ученые в состоянии понять и объяснить. Это самый выдающийся из космических зондов.

К 2015 г. «Вояджеры» подойдут к границе Солнечной системы. Со временем бортовые батареи истощатся и не позволят поддерживать связь с детьми тех, кто запустил их. Однако пеленгация аппаратов даст новые данные о распределении полей тяготения за пределами Солнечной системы. В 296000-е г. «Вояджер-2» окажется в пределах 4,3 светового года от Сириуса — звезды, находящейся на расстоянии 8,7 светового года от Земли. Шансы очень малы, но, может быть, кто-то, где-то, когда-то обнаружит этого посланца землян, отметивших мгновение своего существования в необозримости космического времени.

9.10. Свидание с Эросом

12 февраля 2001 г. совершена первая в истории освоения космоса посадка на астероид 433, известный с 1898 г. как Эрос. В этот момент он находился на рас-

стоянии 316 млн км от Земли. Американский аппарат «Шумейкер» был запущен в феврале 1996 г. и последний год находился в окрестности Марса вблизи орбиты астероида. На переданных на Землю 160 000 фотографиях виден вытянутый на 33 км монолит. Посадка не значилась в полетном задании. Однако после того, как аппарат полностью выработал свой ресурс, операторы решили рискнуть и «приастероидели» его. «Теперь очередь за кометами — говорят специалисты НАСА. — Они таят в себе ключ к проблемам мироздания».

9.11. Изучение комет

Современные космические эксперименты продолжают многовековую историю наблюдения комет. Комета (*aster kometas* — длинноволосая звезда) состоит из трех основных частей: атмосферы, хвоста и ядра. Видимая часть атмосферы, называемая комой или головой, состоит из ионизированного газопылевого облака диаметром от тысячи до 50 млн. км. За комой, в направлении противоположном Солнцу вытягиваются один или несколько хвостов, состоящих из ионов и космической пыли. Для частиц диаметром менее 1 мкм световое давление превалирует над гравитационным притяжением. Эти частицы уносятся в направлении от Солнца. Когда комета удаляется, она уходит хвостом вперед. Более крупные частицы благодаря притяжению Солнца остаются вблизи орбиты кометы. С течением времени формируется метеорный поток. При входе в атмосферу Земли он известен под названием *метеорного дождя.*

Согласно теории, созданной голландским астрономом Яном Оортом, кометы образовались в области внешних планет за пределами орбиты Юпитера. Гравитационные возмущения переводят их на околосолнечные орбиты. Известно множество комет с небольшими периодами, например комета Энке возвращается каждые 3,3 года. Другие кометы обращаются вокруг Солнца со значительно большим периодом. Наиболее известная из них — комета Галлея — наблюдается примерно через 76 лет (период непостоянен из-за возмущений, вызванных планетами). Ее появление отмечалось задолго до нашей эры.

Встреча с кометой Галлея. В марте 1986 г. произошло беспрецедентное по значимости событие — 5 зондов (два японских, два советских и европейский) встретились с кометой Галлея. Международная астрометрическая сеть, состоящая из более 100 станций, позволила определить время встречи с точностью всего 10 с. На расстоянии 1,1 млн. км от ядра была зарегистрирована ударная волна, возникающая вследствие взаимодействия плазмы, испускаемой Солнцем (солнечный ветер), и плазмы кометы. Европейский аппарат «Джотто» приблизился на расстояние 600 км к ядру — сильно запыленной ледяной глыбе, медленно вращающейся с периодом 53 ч. Размеры ядра оказались примерно $16 \times 8 \times 8$ км, плотность лежит в пределах от 0,1 до 0,3 т/м^3. Поверхность образована тонким слоем (около 1 см) тугоплавкого вещества, имеющего пористую структуру. Ее температура 30–130°С. Под действием солнечного излучения лед испаряется. Поэтому корка прорывается реактивными струями газа и пыли — джетами (англ. *jet* — струя). Прямые измерения

установили, что компонентами первичного вещества являются вода и двуокись углерода. Неожиданным фактом явилось то, что яркие джеты испускаются с небольшой части поверхности. Около 90% общей площади поверхности было неактивно. Стало ясно, что газ и пыль испускаются в количестве примерно 20 т в секунду. На каждом витке комета теряет около 100 млн. т своей массы. Поскольку масса кометы 100 млрд. т, то она вернется еще к нам несколько сотен раз, ближайшая встреча произойдет в 2062 году.

9.12. Космическая катастрофа в Солнечной системе

Мы стали очевидцами крупнейшей за всю историю цивилизации катастрофы — 16 июля 1994 г. комета Шумейкер-Леви столкнулась с Юпитером. Она была открыта 24 марта 1993 г. Годом раньше она близко подошла к Юпитеру и была разорвана приливными силами (см. часть III, 3.5.2) примерно на 20 осколков, растянувшихся на миллионы километров вдоль траектории. Поэтому последний осколок упал 22 июля. Размер наиболее крупного осколка порядка километра. История происхождения кометы остается неясной. Компьютерное моделирование орбиты показало, что почти 22 года назад она была захвачена Юпитером и успела совершить вокруг него 10 оборотов. Согласно расчетам российских астрономов, начало орбиты кометы находилось на поверхности Юпитера.

Когда стало ясно, что столкновение кометы с Юпитером неизбежно, экстрасенсы, астрологи и прочие шарлатаны стали предсказывать грядущий конец света. Из расчетов ученых следовало, что при столкновении большого осколка выделится около 10^{22} Дж энергии эквивалентное одновременному взрыву 250 миллионов атомных бомб, сброшенных на Хиросиму (20 кт, 6 августа 1945 г.). Благодаря большому расстоянию до Юпитера это столкновение проявилось на Земле в виде вспышки излучения в оптическом и радиодиапазонах. К сожалению, процесс столкновения происходил на невидимой стороне Юпитера. Осколки входили в плотные слои атмосферы на высоте 250 км. Ударная волна создавала плазму с температурой 30 тыс. градусов. Давление нарастало и через несколько секунд осколок дробился, а горячее облако газа всплывало в атмосфере. Торможение носило характер взрыва и сопровождалось вспышками, зарегистрированными американским аппаратом «Галилей». Другое совершенно неожиданное следствие столкновения — образование огромных пятен в атмосфере, особенно ярких в инфракрасном диапазоне.

9.13. Ядерный щит Земли

Столкновения с крупными астероидами представляет большую опасность для нашей планеты. Образование кольцевых структур на Земле — астроблем, имеющих несколько десятков или сотен километров в поперечнике, обязано падению очень крупных метеоритов, поток которых сейчас практически иссяк. Из космоса удалось обнаружить около 150 сильно сглаженных кольцевых структур диаметром до сотни километров. Метеориты

типа Тунгусского диаметром 60 м имеют энергию ~20 мегатонн тротилового эквивалента и приходят к Земле раз в 100–200 лет. Астероид радиусом 100 м, движущийся со скоростью 30 км/с, имеет кинетическую энергию около 1 млрд т тротилового эквивалента. Астероид диаметром около 60 км может стать причиной гибели жизни на Земле. В середине 2002 г. весь мир облетело сообщение о возможном столкновении с астероидом 2002NT7, которое должно произойти через 17 лет.

65 миллионов лет назад метеорит диаметром около 10 км упал на полуостров Юкатан. В результате взрыва две трети видов растений и животных исчезли, в том числе и динозавры. Согласно последним данным каждый год на расстоянии от Земли менее 0,1 а.е. пролетают 300 000 астероидов диаметром 100 м. Большую часть опасных астероидов можно обнаружить примерно за час до их встречи с Землей. Естественный рубеж обороны от астероидов размером 10—15 м — земная атмосфера. В настоящее время обсуждается проблема создания средств дальнего обнаружения и применения ракетно-ядерного оружия для разрушения астероидов.

9.14. Встреча с Леонидами

В 902 г. неизвестная комета пересекла орбиту Земли и небо осветилось множеством вспышек каждая длительностью до 2 секунд. Траектория кометы была рассчитана в 1866 г. Э. Темплом и Х. Таттлом. Период появления кометы равен 33 года. 17 ноября 1998 г. Земля оказалась вблизи орбиты гигантского роя частиц, оставленных кометой «Темпла-Татла», посетившей в январе окрестность орбиты нашей планеты. Облако пылинок размерами свыше 20 мк движется по эллиптической орбите с наклонением 26,4° к плоскости эклиптики. Эти метеороиды проявляются в виде звездного дождя, который можно наблюдать со стороны созвездия Льва. Именно поэтому они получили имя Леониды — «потомки Льва». Практически ни один из них не сможет превратиться в метеорит и достигнуть земной поверхности. Однако они представляют угрозу для орбитальных станций. Исследования химического состава метеороидов и веществ, образующихся при взаимодействии с атмосферой, позволят выяснить ряд проблем, связанных с разгадкой происхождения жизни на Земле.

9.15. Наша планета — Земля

Земля — самая крупная из внутренних планет и самая массивная. От других планет Землю отличает наличие богатой кислородом атмосферы и значительного количества воды. Сейчас средняя температура у поверхности составляет 15°С. На Марсе из-за низкого атмосферного давления не может быть океанов, их нет на Луне или Меркурии, где атмосфера отсутствует. На Венере температура слишком высока, чтобы там могла существовать жидкая вода.

Динамическое равновесие, которое включает обмен энергией и веществом между недрами, поверхностью, атмосферой и океанами, способствует поддержанию условий, благоприятных для существования различных форм жизни. Живые организмы оказывают огромное влияние на эволюцию зем-

ной коры и ее атмосферу. В современную эпоху ежегодно все растения Земли связывают 150 млрд т углерода с 25 млрд т водорода и выделяют 400 млрд т кислорода. При этом 90% кислорода поступает из океана в результате фотосинтеза в водорослях. Возможно, что поддержание стабильного узкого интервала температур, необходимого для существования жизни, осуществляется самими процессами жизнедеятельности.

Углекислый газ — сырье для фотосинтеза, обеспечивающее прирост биомассы. В начале XX в. концентрация углекислого газа составляла 280 ppm, т. е. 280 миллионных частей на единицу объема воздуха (pm — от лат. *pro mille* — за тысячу — тысячная часть числа). Сейчас она увеличилась до 368 ppm, а к середине XXI в. она удвоится. Опасен ли этот уровень? Уровень до 200 ppm ведет к оледенению земного шара — установлено учеными. А известен ли верхний предел? Наука пока не в состоянии ответить на этот вопрос.

За предыдущие сто лет температура в Северном полушарии увеличилась на 0,6°. Согласно оценкам экспертов рост температуры в XXI в. составит 2,5—3°. По мнению ученых потепление приведет к выделению метана в зоне вечной мерзлоты. Метан, как и углекислый газ, является парниковым газом.

Из всех живых существ, обитающих на Земле, человек оказывает наибольшее воздействие на природу. Расширение масштабов производственной деятельности человечества может вызвать серьезные отрицательные последствия для окружающей среды и повлиять на ход развития Земли как планеты. Только сейчас мы стали понимать, что необдуманные действия могут изменить тонкую оболочку атмосферы, океанов и растительности, которые делают возможным существование человечества.

Почти треть всех плодородных площадей нашей планеты, производящих биомассу, подвержена засухе и опустыниванию. Угроза полной потери плодородия грозит прежде всего многим регионам в Африке (две трети к 2025 г.), Центральной и Южной Азии, южной части Латинской Америки. Всемирный фонд защиты природы бьет тревогу: за 25 лет с 1970 по 1995 г.г. уничтожено более 30 процентов природных ресурсов планеты. Анализируя эту опасную тенденцию, организация «Гринпис» требует запретить пластиковые материалы, выделяющие токсины, опасные для жизни и разрушающие озоновый слой, необходимо запретить масштабную вырубку лесов и т. д.

Иоганн В. Гете писал: «Природа не любит шуток. Она всегда правдива, всегда серьезна, всегда права. Ошибки же и заблуждения исходят от людей».

Глава 10. Статика

Статика — раздел механики, в котором исследуют систему твердых тел в *состоянии равновесия:* в выбранной системе отсчета скорость каждой частицы равна нулю. На выделенное тело системы действуют сила тяжести и силы реакции в точках контакта с другими телами, причем ориентация твердых тел зависит от положения точек контакта. Очевидно, что в этом случае твердое

тело уже нельзя представлять в виде материальной точки. *Основная задача статики* — формулировка необходимых и достаточных условий равновесия, анализ устойчивости состояния равновесия и определение сил реакции, действующих на данное тело со стороны соприкасающихся с ним тел.

10.1. Первое условие равновесия твердого тела

Предположим, что система N частиц, рассмотренная в 5.2 является твердым телом. В положении равновесия твердое тело покоится, т.е. полный импульс тела $\vec{P} = 0$. Тогда из (5.3.2) следует, что сумма всех сил $\vec{F}$ также равна нулю. Мы получили *первое условие равновесия твердого тела:*

в положении равновесия сумма сил, действующих на тело равна нулю.

В декартовых координатах с началом в произвольной точке О имеем три уравнения

$$F_{1x} + F_{2x} + ... = 0, \qquad F_{1y} + F_{2y} + ... = 0, \qquad F_{1z} + F_{2z} + ... = 0. \quad (10.1.1)$$

Однако это условие не является достаточным для того, чтобы скорость каждой частицы тела равнялась нулю: твердое тело может вращаться.

10.2. Второе условие равновесия твердого тела

10.2.1. Момент силы. Для полной формулировки условия равновесия необходимо ввести новое понятие — *момент силы.* Точки приложения сил $\vec{F}_a$ (a = 1, 2, ...) зададим радиус — векторами $\vec{r}_a = (x_a, y_a, z_a)$ с началом в точке О. Из двух векторов $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ можно образовать векторное произведение — вектор

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad (10.2.1)$$

называемый *моментом силы относительно точки* О. Моментом силы относительно оси называют проекцию вектора $\vec{M}$ на эту ось. Согласно определению векторного произведения (1.2.8) проекции момента силы на оси x, y, z соответственно равны

$$M_x = yF_z - zF_y, \qquad M_y = zF_x - xF_z, \qquad M_z = xF_y - yF_x. \qquad (10.2.2)$$

Теперь можно сформулировать второе условие равновесия твердого тела: *в положении равновесия сумма моментов сил, действующих на тело относительно произвольной точки равна нулю.*

В декартовых координатах это условие имеет вид

$$M_{1x} + M_{2x} + ... = 0, \qquad M_{1y} + M_{2y} + ... = 0, \qquad M_{1z} + M_{2z} + ... = 0. \quad (10.2.3)$$

Уравнения (10.2.3) определяют также условия равновесия тела, которое может вращаться вокруг реальной оси.

Сделаем несколько замечаний о рациональном применении условий равновесия.

1. В курсе физики средней школы рассматриваются, в основном, системы тел, на которые действуют силы, расположенные в одной плоскости. В этом случае условие (10.2.3) упрощается. На рис. 10.2.1 изображены векторы $\vec{r} = (x, y, 0)$ и $\vec{F} = (F_x, F_y, 0)$ в плоскости xy. Подставляя в (10.2.3) $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $F_x = F\cos\beta$, $F_y = F\sin\beta$, получим $M_x = M_y = 0$,

$$M_z = rF(\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta) = rF\sin\gamma, \qquad (10.2.4)$$

где $\gamma = \beta - \alpha$ — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Очевидно, что $M_z > 0$, если $0 < \gamma < \pi$; $M_z < 0$, если $\pi < \gamma < 2\pi$; $M_z = 0$ при $\gamma = 0, \pi$. Теперь условие равновесия можно представить в виде

$$M_{1z} + M_{2z} + ... = 0. \qquad (10.2.5)$$

Опустим из точки O перпендикуляр на прямую BA, на которой лежит вектор $\vec{F}$. Из треугольника OAB находим длину перпендикуляра $h = r\sin\gamma$, называемую *плечом силы*. Тогда проекцию момента силы на ось z можно представить в виде

$$M_z = Fh, \qquad (10.2.6)$$

Поэтому можно сформулировать правило: проекция момента силы на ось z перпендикулярную плоскости xy, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, равна произведению величины силы на плечо, умноженному на (−1), если, глядя с положительной полуоси z, мы видим, что сила могла бы вращать тело в направлении хода часовой стрелки, или умноженному на +1, если сила могла бы вращать тело в направлении, противоположном ходу часовой стрелки.

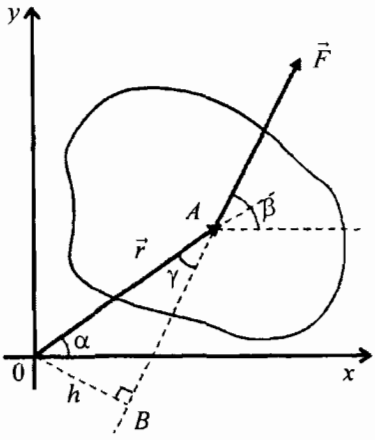


рис. 10.2.1

2. Пусть на тело действует N сил, приложенных в точках $\vec{r}_a$, (a = 1, 2,...). Введем вектор $\vec{c}$ из начала координатной системы K в начало системы K'. Подставляя координаты точки $\vec{r}_a = \vec{c} + \vec{r}_a'$ (a = 1, 2, ...) в левую часть уравнения (10.2.3)

$$0 = \sum_{a=1}^{N} (\vec{c} + \vec{r}_a) \times \vec{F}_a, \rightarrow 0 = \vec{c} \times \sum_{a=1}^{N} \vec{F}_a + \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a' \times \vec{F}_a .$$

убедимся, что при условии $\vec{F} = 0$ суммы моментов сил $\vec{M}$ и $\vec{M}'$ в системах K и K' равны нулю. Поэтому точку O, относительно которой определяется момент силы, можно выбрать произвольным образом. Выбирая точку O так, чтобы плечи нескольких сил обратились в нуль, можно существенно упростить уравнения, следующие из второго условия равновесия.

10.2.2. Теорема о трех силах. Если под действием трех сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, принадлежащих одной плоскости, тело находится в равновесии, то векторы сил принадлежат прямым, которые пересекаются в одной точке. Действительно, моменты сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно точки О пересечения прямых, на которых лежат эти силы, равны нулю. Из условия $\vec{M} = 0$ следует, что прямая, на которой лежит сила $\vec{F}_3$, проходит через точку O. Это утверждение, которое называют теоремой трех сил, поможет избежать возможных ошибок при решении задач.

10.3. Равнодействующая сила

Силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ..., приложенные к твердому телу, имеют *равнодействующую* силу $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...$, если ее момент относительно произвольной точки О равен сумме моментов сил относительно той же точки O.

Это определение имеет конструктивный характер и позволяет получить три уравнения для определения положения точки приложения равнодействующей силы $\vec{F}$.

Пара сил. Силы $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}_0$, приложенные к твердому телу называют парой сил. Сумма сил равна нулю. Момент пары сил отличен от нуля. Согласно определению пара сил не имеет равнодействующей.

10.4. Центр тяжести твердого тела

На каждую частицу a тела массой m_a действует сила тяжести $m_a\vec{g}$. Если размеры тела на несколько порядков меньше радиуса Земли, то эти силы параллельны друг другу. Тогда сумма всех сил тяжести равна $m\vec{g}$, где m — масса тела, $m = m_1 + m_2 + ...$.

Центром тяжести называется точка приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на каждую частицу тела. Следовательно, радиус-вектор точки приложения C равнодействующей силы $m\vec{g}$ определяется условием: момент силы $m\vec{g}$ относительно произвольной точки O равняется сумме моментов сил $m_a\vec{g}$ относительно той же точки. Это соотношение, эквивалентное равенствам момента силы $m\vec{g}$ и суммы моментов сил $m_a\vec{g}$ относительно трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через точку O, позволяет получить три уравнения для определения координат центра тяжести. Если точка O совпадает с центром тяжести, то сумма моментов сил тяжести $m_a\vec{g}$ относительно осей, проходящих через центр тяжести равна нулю.

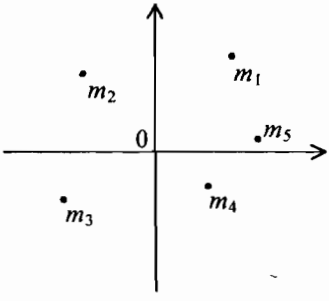


рис. 10.4

Вычисление координат центра тяжести тела произвольной формы — трудоемкая математическая операция. Для симметричных тел задача упрощается. Если тело имеет ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси. Например, центр тяжести однородного стержня, обладающего тремя осями симметрии, находится в его середине. Для того, чтобы убедиться в этом представим его в виде элементарных параллелепипедов масс Δm_a ($a = 1, 2, ...$), расположим под углом к горизонту и вычислим сумму моментов сил тяжести $\Delta m_a g$ относительно горизонтальной оси, перпендикулярной стержню. Очевидно, что она равна нулю только тогда, когда ось проходит через середину стержня, т.к. сумма моментов сил тяжести, действующих на симметрично расположенные элементы массой Δm равна нулю.

10.4.1. Координаты центра тяжести системы N частиц в плоскости. Пусть x_a, y_a, $z_a = 0$ — координаты частицы a массой m_a, $a = 1,2, ... N$ (рис. 10.4.1). Масса системы частиц $m = m_1 + m_2 + ... + m_N$. Найдем координаты центра тяжести x_c, y_c.

На каждую частицу действует сила тяжести $m_a\vec{g}$, $\vec{g} = (0, -g, 0)$. Момент силы тяжести относительно оси z, проходящей через начало координат, равен $M_{az} = -m_a g x_a$. Из условия равенства суммы моментов сил тяжести, действующих на каждую частицу, и момента результирующей силы $m\vec{g}$ относительно оси z получим уравнение

$$m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + ... + m_N g x_N = m g x_c,$$

из которого находим

$$x_c = (m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_N x_N)/m. \qquad (10.4.1)$$

Повернем теперь систему частиц вместе с осями координат xy вокруг оси z на угол $\pi/2$. Из условия, аналогичного предыдущему, получим

$$y_c = (m_1 y_1 + m_2 y_2 + ... + m_N y_N)/m. \qquad (10.4.2)$$

Отметим, что значения x_c и y_c совпадают с координатами центра масс (5.3.2). Причина этого в том, что мы нашли положение центра тяжести в однородном поле тяготения Земли. В реальном неоднородном поле тяготения положение центра тяжести твердого тела не совпадает с центром масс и зависит от ориентации тела.

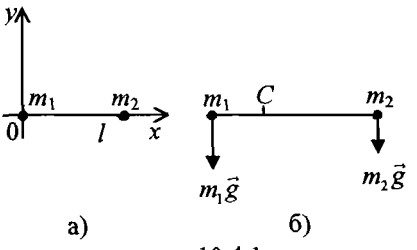


рис. 10.4.1

Пример 10.4.1. Найдем центр тяжести двух частиц (рис. 10.4.1 *а*). Массы частиц m_1 и m_2, расстояние между ними равно l.

А. Введем ось x так, чтобы на ней находились обе частицы, начало координат совместим с первой частицей (рис.10.4.2 *а*). Полагая в (10.4.1) $x_1 = 0$,

$x_2 = l$, получим $x_c = m_2 l/m$, где $m = m_1 + m_2$. Если $m_1 >> m_2$, то $x_c \approx m_2 l/m_1 << l$, т. е. центр тяжести почти совпадает с первой частицей.

Б. Найдем положение центра тяжести, не обращаясь к решению (10.4.1). Предположим, что центр тяжести находится на расстоянии l_1 от частицы m_1 (рис.10.4.2 *б*). Момент силы тяжести $m\vec{g}$ относительно оси, проходящей через центр тяжести, положение которого неизвестно, равен нулю. Но тогда равна нулю сумма моментов сил тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ относительно той же оси. Согласно (10.2.5) имеем уравнение

$$0 = m_1 g l_1 - m_2 g(l - l_1), \rightarrow l_1 = m_2 l/m.$$

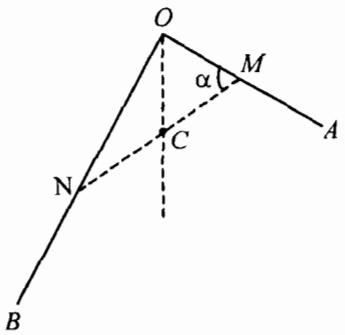


рис. 10.4.2.

Задача 10.4.2. Однородный стержень согнут в форму прямого угла со сторонами a, b (рис. 10.4.2). Найдите расстояние OC между вершиной угла O и центром тяжести C.

Решение. Центры тяжести отрезков OA и OB находятся в точках M и N — серединах отрезков. Центр тяжести угла находится на отрезке $MN = c$, $c = (1/2)(a^2 + b^2)^{1/2}$. Массы отрезков стержня OB и OA пропорциональны длинам отрезков: $m_a \sim a$, $m_b \sim b$. Поэтому согласно решению задачи 10.4.1 длина отрезка

$$CM = m_b c/(m_a + m_b) = bc/(a + b).$$

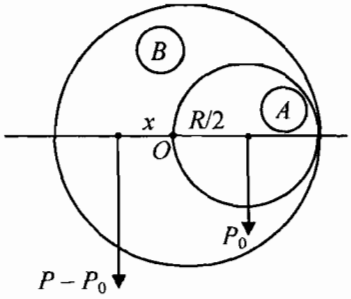


рис. 10.4.3

Искомое расстояние $OC = s$ найдем из треугольника OCM, в котором $\cos\alpha = a/2c$, α — угол OMC. Используя теорему косинусов получим $s = (a^4 + b^4)^{1/2}/[2(a + b)]$.

Задача 10.4.3. При выплавке в свинцовом шаре радиусом R образовалась сферическая полость радиусом $R/2$, поверхность которой касается поверхности шара и проходит через его центр. Найдите положение центра тяжести этого изделия.

Решение. Рассмотрим сплошной шар, и будем считать, что он образован двумя телами: шаром, который заполняет сферическую полость (тело A) и телом, остающимся после образования сферической полости (тело B). Масса шара C равна m_c, масса шара A равна m_a. Предполагая, что центр тяжести образовавшегося тела находится на расстоянии x от центра шара C, запишем условие равенства нулю моментов сил тяжести сил A и B относительно центра O (рис. 10.4.3).

$$(m_c - m_a)gx - m_a gR/2 = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$x = m_a R/[2(m_c - m_a)].$$

Учитывая, что массы m_c и m_a пропорциональны объемам

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \; v = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3$$

получим $x = R/14$. Решение аналогичной задачи для диска приводит к значению $x = R/6$.

Задача 10.4.4. Из заготовки в виде цилиндра радиусом R, длиной l токарь должен выточить цилиндр радиусом r. Токарь перемешает резец со скоростью v. Найдите наибольшее значение смещения центра тяжести в процессе обработки заготовки.

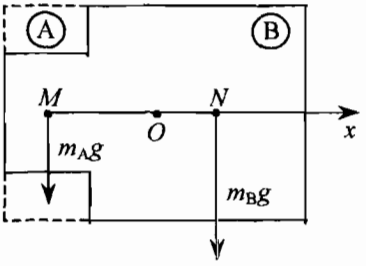


рис. 10.4.4.

Решение. Введем ось x с началом в точке O — середине осевой линии цилиндра. Пусть в момент времени t резец находится на расстоянии vt левого торца цилиндра (рис. 10.4.4). Для решения задач этого типа проще всего выделить в исходном цилиндре вырезанную часть — тело A и «остаток» — тело B. Центры тяжести исходного и вырезаемого тел обычно известны. Поскольку сумма моментов сил тяжести тел A и B относительно центра тяжести исходного тела равна нулю, то это уравнение позволяет найти центр тяжести тела В.

Координата центра тяжести тела B — функция $x(t)$. Учитывая, что $MO = (l - vt)/2$, получим уравнение

$$m_A g(l - vt)/2 - m_B g x = 0,$$

$$m_A = \rho\pi(R^2 - r^2)vt, \; m_B = \rho\pi[R^2 l - (R^2 - r^2)vt],$$

из которого находим

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{(l - vt)vt(R^2 - r^2)}{R^2 l - (R^2 - r^2)vt} \qquad (1)$$

Очевидно $x(0) = x(l/v) = 0$ — при полном прохождении резца центр тяжести возвращается в начальное положение.

Найдем теперь максимальное значение функции $x(t)$. С этой целью вычислим производную

$$\frac{dx}{dt} \sim [(l - 2vt) + \frac{(l - vt)vt(R^2 - r^2)}{[R^2 l - (R^2 - r^2)vt]}], \qquad (2)$$

и найдем корни уравнения $dx/dt = 0$ или

$$(vt)^2(R^2 - r^2) - 2vtR^2l + (Rl)^2 = 0, \rightarrow t_{1,2} = \frac{Rl}{v(R \pm r)}.$$

Второй корень должен быть отброшен, поскольку $vt_2 > l$. Учитывая (2), можно представить максимальное значение $x_m = x(t_1)$ в виде

$$x_m = vt_1 - \frac{l}{2} = \frac{l\,R - r}{2\,R + r}.$$

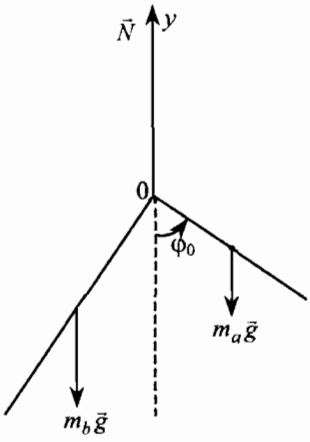


рис. 10.4.5.

Интересно отметить, что в момент времени t_1 резец и центр тяжести находятся в одной плоскости поперечного сечения: $l/2 + x_m = vt_1$.

Подобная особенность имеет место в следующей задаче. Возьмем стакан и начнем заполнять его песком. Центр тяжести стакана с песком займет наинизшее положение в тот момент времени, когда он будет находится на уровне песка в стакане.

Задача 10.4.5. Однородный стержень согнут в форму прямого угла со сторонами a, b и подвешен на гвоздь, вбитый в вертикальную стенку. Найдите угол φ_0, образуемый стороной a с вертикалью.

Решение А. Поскольку мы можем заменить любое тело одной частицей, помещенной в центр тяжести, то в положении равновесии эта частица находится на вертикали. Следовательно, для решения задачи достаточно найти координаты центра тяжести угла (см. задачу 10.4.2).

Найдем $\sin\varphi_0$. В треугольнике OMC на рис. 10.4.2 согласно теореме синусов имеем уравнение $\sin\varphi_0/CM = \sin\alpha/OC$:

$$\sin\varphi_0 = b^2/(a^4 + b^4)^{1/2}.$$

Решение Б. На угол действует сила реакции со стороны гвоздя и сила тяжести (рис. 10.4.5). В положении равновесия сумма моментов всех сил, действующих на систему относительно произвольной точки равна нулю. Выбирая ось, проходящую через точку O и перпендикулярную плоскости угла, получим уравнение

$$(m_a ga/2)\sin\varphi_0 - (m_b gb/2)\cos\varphi_0 = 0,$$

из которого находим $tg\varphi_0 = (b/a)^2$.

Пример 10.4.6. Модель стопы. На рис. 10.4.6 схематически изображена модель стопы: O — точка соприкосновения лодыжки и голени $OГ$, AO —

плюсна, OB — пятка, CB — ахилловы сухожилия. Перечислим силы, действующие на стопу: $\vec{R}$ — сила реакции пола, $R = mg$, $\vec{T}$ — сила упругости сухожилий, $\vec{N}$ — сила давления голени на лодыжку. Поскольку сумма сил равна нулю, то $N = mg + T$. Плечо силы $\vec{R}$ относительно оси, проходящей через точку O (равное в среднем 12 см), в два раза больше плеча силы T. Следовательно, $T = 2mg$. В наиболее уязвимом месте контакта голени и лодыжки величина силы давления $N = 3mg$ в три раза превосходит вес человека.

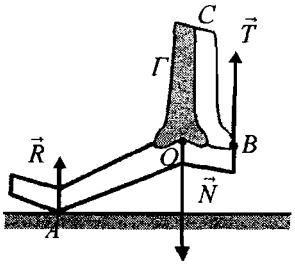


рис. 10.4.6

Задача 10.4.7. Однородный стержень AB массой m длиной l опирается одним концом на вертикальную стенку, а другим — в прямоугольную выемку (рис. 10.4.7). Расстояние OB равно a. Найдите силу реакции в точке B.

Решение. На стержень действуют сила тяжести и силы реакции $\vec{N}$ и $\vec{R}$ в точках A и B.

Пусть φ — угол между вектором $\vec{R}$ и горизонтальной плоскостью, α — угол между плоскостью стенки и стержнем, $\sin\alpha = a/l$. Следовательно, $\gamma = \varphi + \alpha - \pi/2$ — угол между стержнем и вектором $\vec{R}$. Из условия равенства нулю суммы сил получим уравнения

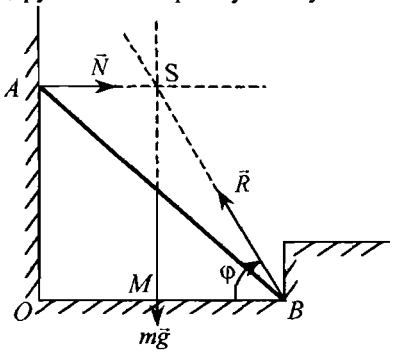


рис. 10.4.7.

$$N - R\cos\varphi = 0, \qquad R\sin\varphi - mg = 0. \qquad (1), (2)$$

Для записи второго условия равновесия выберем в качестве оси прямую, проходящую через центр тяжести стержня. Плечи сил $\vec{N}$ и $\vec{R}$ соответственно равны $(l/2)\cos\alpha$, $(l/2)\sin\gamma$. Сумма моментов сил

$$N\cos\varphi + R\cos(\varphi + \alpha) = 0. \qquad (3)$$

Из уравнений (1)—(3) получим

$$tg\varphi = 2ctg\alpha, \quad tg\varphi = (2/a)(l^2 - a^2)^{1/2}, \ .$$

$$R = 2mg(l^2 - a^2)^{1/2}/(4l^2 - 3a^2)^{1/2}.$$

Отметим, что угол φ можно найти, используя теорему о трех силах — силы принадлежат прямым, пересекающимся в точке S. Тогда из треугольника BSM находим $tg\varphi$.

Задача 10.4.8. Однородный цилиндр на рис. 10.4.8 опирается на гладкую стену и гладкую плоскость, образующую двухгранный угол $\alpha = \pi/4$. Диа-

метр основания цилиндра $D = a$, высота $H = 2a$. Найдите расстояние от точки O до точки приложения равнодействующей сил реакции плоскости.

Решение. На рис. 10.4.8 изображены сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная в центре тяжести C и силы реакции $\vec{T}$, $\vec{N}$, приложенные в точках A и P.

Из условия $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = 0$, записанного в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления, получим уравнения

$$T - \frac{N}{\sqrt{2}} = 0, \qquad -mg + \frac{N}{\sqrt{2}} = 0.$$

Отсюда находим $T = mg$, $N = mg\sqrt{2}$.

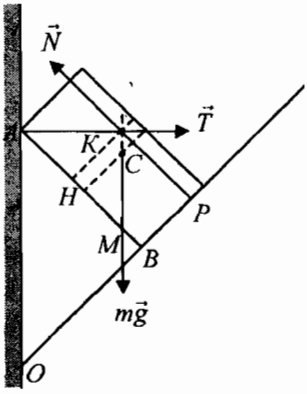


рис. 10.4.8

Далее запишем второе условие равновесия. В качестве оси выберем прямую, проходящую через точку M пересечения вертикали, на которой лежит центр тяжести, и образующей цилиндра AB. Плечо силы $\vec{T}$ равное длине отрезка MK найдем из равнобедренного треугольника MKA: $MK = AM/(2)^{1/2}$. Поскольку $MB = a/2$, то $AM = 2a - a/2 = 3a/2$. Плечо силы $\vec{N}$ равно BP. Сумма моментов сил относительно оси, проходящей через точку М равна нулю:

$$N \cdot BP - T\frac{3a\sqrt{2}}{4} = 0, \quad \rightarrow \quad BP = 3a/4.$$

Искомое расстояние $OP = 11a/4$.

В нашей задаче на цилиндр действуют три силы. Поэтому согласно теореме о трех силах, силы лежат на прямых, пересекающихся в точке K на рис. 10.4.8. Поэтому для определения длины отрезка BP можно рассмотреть треугольник MKA, где высота KH = ВР, сторона $AM = 3a/2$ и равнобедренный треугольник MKH, где $KH = AM/2$.

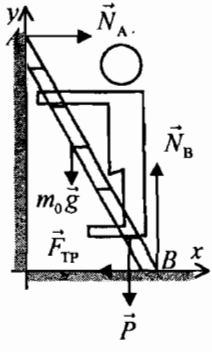


рис. 10.4.9

Задача 10.4.9. Лестница AB массой m_0 упирается в гладкую стену и опирается на шероховатый пол. Под каким наименьшим углом α к полу надо поставить лестницу, чтобы по ней до самого верха мог подняться человек массой m? Коэффициент трения скольжения лестницы о пол равен μ.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 10.4.9), принимая лестницу за стержень длиной l, изобразим приложенные к нему силы. Со стороны стены на лестницу действует реакция $\vec{N}_A$, со стороны пола — реакция $\vec{N}_B$ и сила трения покоя — $\vec{F}_{тр}$. При скольжении лестницы $F_{тр} = \mu N_B$.

Очевидно, лестница не будет скользить при условии

$$F_{тр} \le \mu N_B. \qquad (1)$$

Сила тяжести $m_0\vec{g}$ приложена в середине лестницы. Со стороны человека, стоящего на расстоянии s от конца B лестницы, действует сила давления, равная весу человека $\vec{P} = m\vec{g}$.

Выберем два взаимно перпендикулярных направления по горизонтали и вертикали (оси x и y) Тогда первое условие равновесия имеет вид

$$-m_0g - mg + N_B = 0, \qquad (2)$$

$$N_A - F_{тр} = 0. \qquad (3)$$

Запишем далее второе условие равновесия — приравняем нулю сумму моментов сил относительно оси, проходящей через точку B (в этом случае моменты сил $F_{тр}$ и N_B равны нулю):

$$mgs\cos\alpha + m_0g(l/2)\cos\alpha - N_A\sin\alpha = 0 \qquad (4)$$

Из уравнений (3)—(4) получим

$$F_{тр} = \left(\frac{1}{2}m_0 + \frac{s}{l}m\right)g\,\mathrm{ctg}\,\alpha \qquad (5)$$

Подставляя $F_{тр}$ и N_B из (2) в (1), находим, что человек может подняться наверх ($s = l$), если угол α удовлетворяет условию

$$\mathrm{tg}\,\alpha \ge \frac{2m + m_0}{2\mu(m + m_0)}.$$

Рассмотрим два частных случая:

1. «Легкая» лестница: $m_0 << m$, $\mathrm{tg}\alpha \ge 1/\mu$.
2. «Массивная» лестница $m_0 >> m$, $\mathrm{tg}\alpha \ge 1/2\mu$.

Пример 10.4.10. На рис. 10.4.10 изображен кубик, лежащий на шероховатой горизонтальной плоскости. Масса кубика m, коэффициент трения кубика о плоскость μ. Наша задача — опрокинуть его через ребро, прилагая горизонтально направленную силу $\vec{F}$. Найдем условие смещения кубика без проскальзывания.

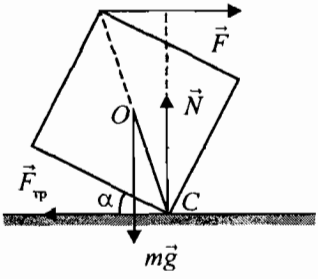


рис. 10.4.10

На кубик действуют сила $\vec{F}$, силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$. Из условия $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0$ находим $N = mg$, $F_{тр} = F$. Скольжение отсутствует при условии

$$F \le \mu N \quad \text{или} \quad F \le \mu mg.$$

Найдем теперь область возможных значений величины силы F в зависимости от угла α между нижней гранью кубика и горизонтальной плоскостью. Приравняем нулю сумму моментов сил относительно прямой, на которой лежит ребро кубика. Плечо силы тяжести $h_0 = R\cos(\alpha + \pi/4)$, плечо силы $\vec{F}$ равно $h = 2R\sin(\alpha + \pi/4)$, где $R = OC$. Из второго условия равновесия находим

$$-2R\sin(\alpha + \pi/4)\, F + R\cos(\alpha + \pi/4)mg = 0, \rightarrow F = (mg/2)tg(\pi/4 - \alpha).$$

Величина F изменяется от значения $mg/2$ при $\alpha = 0$ до значения $F = 0$ при $\alpha = \pi/4$.

Следовательно, кубик можно «кантовать» при условии $\mu \geq 1/2$.

А теперь попытаемся перевернуть через ребро призму, имеющую в сечении правильный $2n$-угольник. К ребру верхней грани приложим горизонтально направленную силу $\vec{F}$.

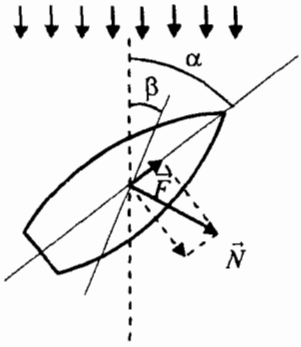


рис. 10.4.11

Покажите, что в этом случае $F = (mg/2)tg(\pi/2n - \alpha)$. Условие «качения» призмы приобретает вид $\mu \geq (1/2)tg(\pi/2n)$. При увеличении числа граней величина силы F уменьшается и условия качения становятся менее жесткими.

Пример 10.4.11. Объясните, почему яхта может идти против ветра курсом бейдевинд (от гол. *bijde wint*), когда угол между линией ветра и направлением корма-нос яхты меньше 90°.

На рис. 10.4.11 угол между направлением скорости ветра и осью яхты равен $\pi - \alpha$. Если плоскость паруса расположена перпендикулярно направлению скорости ветра, то величина силы давления ветра R, действующей на парус, максимальна. Если же плоскость паруса образует с направлением скорости ветра угол β, то сила давления на парус $N = R\sin\beta$. Эта сила заставляет яхту смещаться. Однако реальной движущей силой является проекция силы N на направление оси яхты равная $F = N\sin(\alpha - \beta)$, поскольку большая поверхность киля не позволяет яхте смещаться в направлении, перпендикулярном оси. Следовательно, $F(\beta) = R\sin\beta\sin(\alpha - \beta)$. Эта функция достигает максимального значения $F_m = R\sin^2(\alpha/2)$ при $\beta = \alpha/2$. В этом случае парус расположен так, что делит точно пополам угол между направлением скорости ветра и осью.

Задача 10.4.12. Плоская плита массой m представляет собой неправильный треугольник. Три человека удерживают плиту за вершины треугольника в горизонтальном положении. Найдите силы, прилагаемые каждым человеком к плите.

Решение. На плиту действуют силы $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3$ в точках A, B, C со стороны каждого человека и сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная в точке пересечения медиан *M*. Из первого условия равновесия получим уравнение

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + m\vec{g} = 0. \qquad (1)$$

В положении равновесия сумма моментов всех сил относительно произвольной точки *O* равна нулю. Выберем точку *O* в середине стороны *AB* и совместим с ней начало координатной системы *xyz*. Ось x направим по прямой *OC*, ось *z* — вертикально вверх (рис. 10.4.12). Радиус-векторы точек приложения сил *A*, *B*, *C*, M соответственно равны $\vec{u}$, $-\vec{u}$, $\vec{v}$, $1/3\,\vec{v}$. Второе условие равновесия приобретает вид

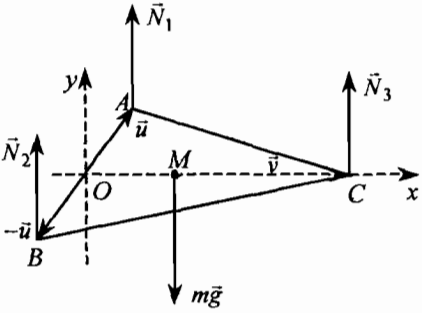


рис. 10.4.12.

$$\vec{u} \times \vec{N}_1 - \vec{u} \times \vec{N}_2 + \vec{v} \times \vec{N}_3 + (1/3)\,\vec{v} \times m\vec{g} = 0. \qquad (2)$$

В проекциях на оси *z*, *x*, *y* получим из (1), (2) систему уравнений

$$N_1 + N_2 + N_3 - mg = 0. \qquad (3)$$

$$u_y N_1 - u_y N_2 = 0, \qquad (4)$$

$$-u_x N_1 + u_x N_2 - vN_3 + (v/3)mg = 0, \qquad (5)$$

из которой находим $N_1 = N_2 = N_3 = mg/3$.

Задача 10.4.13. Однородный диск в горизонтальном положении подвешен на нити, закрепленной в центре диска *O*. В трех точках на ободке диска закрепили, не нарушая равновесия, три частицы массами m_1, m_2, m_3. Начало системы координат совместим с точкой *O*. Найдите косинусы углов между радиус-векторами частиц.

Решение. Направим ось *z* вертикально вверх, оси координат *x* и *y* расположим на поверхности диска. На диск действуют сила натяжения нити и силы веса частиц. Поскольку сумма моментов всех сил относительно точки *O* равна нулю, то имеем уравнение

$$m_1\vec{r}_1 \times \vec{g} + m_2 \times \vec{g} + m_3\vec{r}_3 \times \vec{g} = 0\,, \qquad (1)$$

где $\vec{r}_k = (x_k, y_k, 0)$, $x_k^2 + y_k^2 = R^2$, *R* — радиус диска, вектор $\vec{c}_k = \vec{r}_k \times \vec{g}/g = (-y_k, x_k, 0)$, $k = 1,2,3$.

Найдем вначале косинус угола α_{12} между векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$: $\cos\alpha_{12} = (\vec{r}_1\,\vec{r}_2)/R^2$. Из (1) имеем уравнение

$$m_1\vec{c}_1 + m_2\vec{c}_2 = -m_3\vec{c}_3\,, \qquad (2)$$

Поскольку $(\vec{c}_1\ \vec{c}_2) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$, то после возведения в квадрат получим

$$m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2(\vec{r}_1\ \vec{r}_2)/R^2 = m_3^2, \qquad (3)$$

Следовательно,

$$\cos\alpha_{12} = (m_3^2 - m_1^2 - m_2^2)/2m_1m_2. \qquad (4)$$

Переставляя индексы, найдем $\cos\alpha_{23}$ и $\cos\alpha_{31}$. Очевидно должны выполняться неравенства $m_1 + m_2 > m_3$, $m_2 + m_3 > m_1$, $m_3 + m_1 > m_2$.

10.5. Теория волока

Волокуша, с помощью которой можно перемещать большие грузы, — самый древний вид транспорта. Волок до сих пор используется при переброске мощными тягачами бурового оборудования по бездорожью. Обсудим основные закономерности этого способа транспортировки грузов.

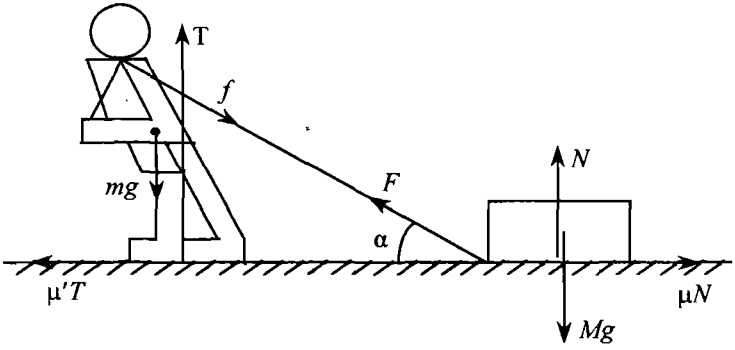


рис. 10.5.1.

На рис. 10.5.1 изображен человек массой m, который тянет канат, прикрепленный к грузу массой M. Скорости человека и груза постоянны. В этом случае из условий равенства нулю суммы сил, действующих на груз, находим величину силы, приложенной к грузу

$$F(\alpha) = \mu Mg/(\cos\alpha + \mu\sin\alpha), \quad \text{или} \quad F(\alpha) = \mu Mg\cos\alpha_0/\cos(\alpha - \alpha_0), \qquad (10.5.1)$$

где $\mathrm{tg}\alpha_0 = \mu$. Функция $F(\alpha)$ имеет минимум равный $\mu Mg/(1 + \mu^2)^{1/2}$ при $\alpha = \alpha_0$ и незначительно изменяется даже при больших значениях μ. Например, при $\mu = 0{,}3$, значения $\alpha_0 = 17°$, $F(\alpha_0) = 0{,}995F(0)$. Это облегчает волок всего на 5% по сравнению с горизонтальной тягой.

Положение меняется при рассмотрении условий, создающих силу $\vec{F}$. Из равенства нулю сил, действующих на человека, получим

$$f(\alpha) = \mu' mg/(\cos\alpha - \mu'\sin\alpha), \qquad (10.5.2)$$

где μ' — коэффициент проскальзывания подошв по грунту. Из (10.5.2) следует, что сила тяги f значительно возрастает с ростом угла α (т. к. с увели-

чением угла возрастает величина силы реакции T). Полагая $\alpha = 30°$, $\mu' = 0{,}3$, получим значение $f(\pi/6) = 1{,}43\ f(0)$. Величина силы $f(\pi/6)$ увеличивается на 43 % по сравнению с горизонтальным волоком. Приравнивая (10.5.1) и (10.5.2), получим значение массы тела, которое человек может волочить

$$M = \mu'(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)m/\mu(\cos\alpha - \mu'\sin\alpha).$$

Полагая массу человека $m = 100$ кг, $\alpha = 30°$, $\mu = \mu' = 0{,}3$, получим массу груза $M = 143$ кг. Это значительно больше массы, которую человек может нести на себе.

Однако существенное увеличение угла α приводит к ухудшению устойчивости человека — он вынужден сильно наклонятся вперед. Найдем угол отклонения корпуса φ от вертикали. Предположим, что центр тяжести находится на расстоянии $l/2$ от точки O соприкосновения подошв с землей. Запишем условие равенства нулю суммы моментов сил, действующих на человека относительно оси, проходящей через точку O

$$mg(l/2)\sin\varphi - fl\cos(\varphi + \alpha) = 0.$$

Учитывая (10.5.2), найдем, что угол отклонения человека от вертикали определяется соотношением

$$\mathrm{tg}\varphi = 2\mu'/(1 + \mu'\mathrm{tg}\alpha). \qquad (10.5.3)$$

С увеличением α угол φ быстро убывает. Вместе с этим ухудшается устойчивость человека. Для значений $\alpha = 30°$, $\mu' = 0{,}3$, получим согласно (10.5.3) $\varphi = 27°$.

10.6. Потенциальная энергия и момент силы

К невесомому стержню OA длины l прикреплена частица массы m. Стержень может вращаться в вертикальной плоскости xy вокруг горизонтальной оси z (рис. 10.6.1). Положение стержня определяется функцией $\varphi = \varphi(t)$ — углом отклонения стержня от вертикали, отсчитываемом в положительном направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки. Подставляя в выражение потенциальной энергии (6.4.4) $y_a = -l\cos\varphi$, получим $W(\varphi) = -mgl\cos\varphi$. Приращение потенциальной энергии при приращении угла $\Delta\varphi$ равное $\Delta W = mgl\sin\varphi\Delta\varphi$ связано с проекцией на ось z момента силы тяжести M_z соотношением

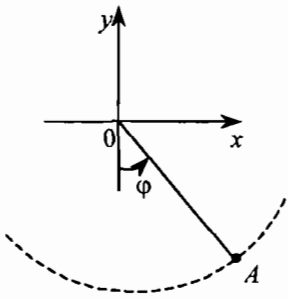


рис. 10.6.1.

$$\Delta W = -M_z\Delta\varphi, \qquad (10.6.1)$$

аналогичным соотношению (6.4.6). Действительно, из (10.6.1) в соответствии с (10.2.6) находим $M_z = -mgh$, где $h = l\sin\varphi$ — плечо силы тяжести.

Следствие. Если жесткая система твердых тел может вращаться вокруг горизонтальной оси, то положение равновесия определяется условием $dW/d\varphi = 0$, где $W(\varphi)$ — потенциальная энергия системы в однородном поле тяжести.

Задача 10.6.1. Пусть на рис. 10.4.5 φ — угол отклонения отрезка стержня длины a от вертикали. Получите момент сил тяжести и условие равновесия стержня.

Решение А. Потенциальная энергия стержня $W(\varphi) = m_a g y_a + m_b g y_b$, где $y_a = -(a/2)\cos\varphi$, $y_b = -(b/2)\sin\varphi$. Следовательно,

$$W(\varphi) = -m_a g(a/2)\cos\varphi - m_b g(b/2)\sin\varphi.$$

Согласно (10.6.1) z-компонента момента силы

$$M_z = -\frac{dW}{d\varphi},\ M_z = -m_a g(a/2)\sin\varphi + m_b g(b/2)\cos\varphi.$$

Полагая $M_z = 0$, $\varphi = \varphi_0$, получим условие равновесия (см. задачу 10.4.5).

Решение В. используя обозначения задачи 10.4.2, положим $m = m_a + m_b$,

$$\frac{m_a a}{2m} = s\cos\varphi_0,\ \frac{m_b b}{2m} = s\sin\varphi_0.$$

Тогда получим потенциальную энергию в виде

$$W(\varphi) = -mgs\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Положение равновесия находим из уравнения

$$dW/d\varphi = 0\colon \sin(\varphi-\varphi_0) = 0,\ \varphi = \varphi_0,\ \mathrm{tg}\varphi_0 = (b/a)^2.$$

10.7. Критерий устойчивости положения равновесия консервативной системы

Мерой устойчивости тела в положении равновесия является наименьшее значение работы, совершаемой внешней силой, для того, чтобы переместить тело в такое положение, откуда после действия силы оно уже не сможет вернуться в исходное состояние. Из двух тел более устойчивым является тело, для выведения которого из положения равновесия требуется совершение большей работы.

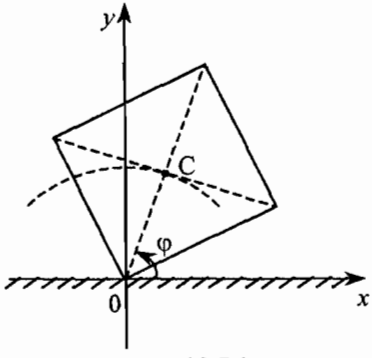


рис. 10.7.1.

Пример 10.7.1. На горизонтальной шероховатой плоскости лежат два свинцовых кубика. Длина ребра первого кубика $a_1 = a$, второго — $a_2 = 2a$. Центр тяжести первого кубика расположен на высоте $h_1 = a\sqrt{2}/2$, меньшей, чем центр тяжести второго. Однако второй кубик более ус-

тойчив. Для того, чтобы убедиться в этом утверждении, необходимо сравнить значения минимальной работы, которую совершит внешняя сила, выводя каждый кубик из положения равновесия. Согласно (6.6.1) работу внешней силы можно вычислить косвенным путем, используя закон изменения полной энергии.

На рис. 10.7.1 точка C — центр тяжести кубика. Обозначим φ — угол между осью x и отрезком OC. Потенциальная энергия кубика

$$W(\varphi) = mgR\sin\varphi,$$

где $R = OC$. В начальном положении $\varphi = \pi/4$, в конечном — $\varphi = \pi/2$. Следовательно,

$$A' = W(\pi/2) - W(\pi/4),\ A' = mgR(1 - \sqrt{2}/2) = \rho g a^3 R(1 - \sqrt{2}/2),$$

где ρ — плотность свинца. Работа по подъему центра тяжести первого кубика $A'_1 = \rho a^4 g(\sqrt{2} - 1)/2$. Работа, совершаемая при опрокидывании второго кубика $A'_2 = 8\rho a^4 g(\sqrt{2} - 1)$. Второй кубик более устойчив.

Глава 11. Движение в неинерциальных системах отсчета

11.1. Принцип относительности Галилея

Механика Ньютона выделила семейство систем отсчета, так называемые инерциальные системы, в которых ускорение тела возникает вследствие действия на него других тел. Если же сумма сил, действующих на тело равна нулю, то оно может покоиться или двигаться с постоянной скоростью. Любая другая система отсчета K', движущаяся относительно инерциальной системы K поступательно с постоянной скоростью $\vec{u}$ также представляет собой инерциальную систему отсчета. Координаты $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{r}' = (x', y', z')$ одной и той же точки пространства в системах отсчета K и K′ связаны соотношением:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t\,. \qquad (11.1.1)$$

При этом подразумевается, что ход времени одинаков в обеих системах отсчета: $t = t'$. Эти формулы называют *преобразованием Галилея.*

Легко проверить, что уравнения движения сохраняют свой вид при переходе в систему K'. В случае двух взаимодействующих частиц уравнения движения имеют вид

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{f}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),\ m_2\vec{a}_2 = -\vec{f}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \qquad (11.1.2)$$

где $\vec{r}_n(t)$ — радиус-вектор частицы массой m_n в момент времени t. Из (11.1.1) находим

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_1'(t) + \vec{u}t\,,\ \vec{r}_2(t) = \vec{r}_2'(t) + \vec{u}t\,.$$

Согласно определениям скорости и ускорения имеем

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{u}\,,\ \vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{u}\,,\ \vec{a}_1 = \vec{a}_1'\,,\ \vec{a}_2 = \vec{a}_2'\,.$$

Подставляя эти выражения в (11.1.2), убедимся, что в новых переменных форма уравнений не меняется:

$$m_1\vec{a}_1' = \vec{f}_{12\ 12}(\vec{r}_1' - \vec{r}_2'), \qquad m_2\vec{a}_2' = -\vec{f}_{\ 12}(\vec{r}_1' - \vec{r}_2').$$

Следовательно, законы механики одинаковы во всех инерциальных стемах отсчета. Это утверждение называют *принципом относительности Галилея.* Очевидно, из принципа относительности Галилея следует, что силы в (11.1.2) могут зависеть только от относительных координат и скоростей частиц.

11.2. Силы инерции в поступательно движущейся системе отсчета

Существует великое множество других преобразований, относительно которых уравнения движения не сохраняют форму. Эти преобразования задают переход к неинерциальным системам отсчета, в которых конкретные физические явления выглядят по-разному.

Очевидно необходимо найти уравнение движения в неинерциальной системе отсчета. Пусть в системе отсчета К на частицу массой m действует со стороны других частиц равнодействующая сила $\vec{F}$. Уравнение движения частицы

$$m\vec{a} = \vec{F}\,. \tag{11.2.1}$$

Перейдем в систему отсчета K', которая движется относительно системы K поступательно со скоростью $\vec{u}(t)$ и ускорением $\vec{w}(t) = d\vec{u}/d\vec{t}$. Ускорения частицы $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ относительно систем K и K' связаны друг с другом соотношением

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{w}(t)\,. \tag{11.2.2}$$

Подставляя (11.2.2) в (11.1.1), получим уравнение движения в системе K'

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{w}\,. \tag{11.2.3}$$

Если наблюдатель в системе K' называет уравнение (11.2.3) вторым законом Ньютона, то он должен кроме «истинных» сил ввести псевдосилу $\vec{F}_{ин} = -m\vec{w}$. Эта сила возникает вследствие ускоренного движения системы отсчета наблюдателя. Согласно общепринятому определению ее называют *силой инерции.*

Пример 11.2.1. Рассмотрим задачу о перегрузках, рассмотренную в примере 4.5.6, с точки зрения наблюдателя, находящегося в ракете.

Система отсчета K', связанная с ракетой, движущейся с ускорением $\vec{w}$, является неинерциальной. В системе K' на неподвижного космонавта действуют сила притяжения $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$ и сила инерции $\vec{F}_и = -m\vec{w}$.

Поскольку $\vec{a}' = 0$, то из (11.2.3) имеем уравнение

$$0 = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{w}, \rightarrow \vec{N} = -m\vec{g} + m\vec{w}.$$

Направляя ось z вертикально вверх, получим $N = m(g + w)$. Влияние ускорения эквивалентно дополнительному полю тяготения: ускорением свободного падения в ракете можно назвать вектор $\vec{g}_{эф} = \vec{g} - \vec{w}$.

Задача 11.2.2. Клин движется по горизонтальной плоскости стола с постоянным ускорением $\vec{w} = (w, 0, 0)$. Угол между наклонной плоскостью клина и поверхностью стола равен α. На клин положили тело массой m. Коэффициент трения между плоскостью клина и телом — μ. Найти значение w, при котором тело смещается вверх по плоскости клина.

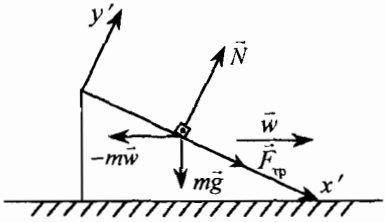


рис. 11.2.1

Решение. В системе отсчета, связанной с клином, на тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции клина $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила инерции — $m\vec{w}$ (рис. 11.2.1) В соответствие со вторым законом Ньютона (11.2.3) имеем уравнение

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} - m\vec{w}. \quad (1)$$

Свяжем с клином систему координат: ось x' направим вниз параллельно плоскости клина, ось y' — перпендикулярно плоскости клина. Из (1) в проекции на оси координат получим два уравнения

$$ma' = F_x + F_{тр}, \quad (2)$$

$$0 = N - mg\cos\alpha - mw\sin\alpha, \quad (3)$$

где $F_x = mg\sin\alpha - mw\cos\alpha$. Из (3) находим

$$N = mg\cos\alpha + mw\sin\alpha.$$

В решении задачи 4.5.9 изображена зависимость проекции $F_{тр}$ силы трения от проекции F_x суммы внешних сил. Если — $\mu N < F_x < \mu N$, то тело неподвижно относительно клина. Тело будет двигаться вверх по наклонной плоскости, если $a' < 0$. В этом случае $F_{тр} = \mu N$. Из (2) находим

$$F_x < -\mu N \quad \text{или} \quad w > \frac{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}. \quad (4)$$

Полагая $\mathrm{tg}\beta = \mu$, запишем (4) в виде $w > g\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$. Если $\alpha = 0$, то $w > \mu g$ (см. задачу 4.5.12).

Задача 11.2.3. Пусть Солнце, Луна и Земля находятся на одной прямой. Величина силы, действующей со стороны Солнца на Луну $F_{СЛ} = m_Л w_{СЛ}$,

$w_{СЛ} = 5{,}968 \cdot 10^{-3}$ м/с^2 более, чем в два раза превосходит величину силы, действующей на Луну со стороны Земли $F_{ЗЛ} = m_Л w_{ЗЛ}$, $w_{ЗЛ} = 2{,}697 \cdot 10^{-3}$ м/с^2. Величина силы, действующей на Землю со стороны Солнца $F_{СЗ} = m_З w_{СЗ}$, $w_{СЗ} = 5{,}938 \cdot 10^{-3}$ м/с^2. Почему же Солнце не существенно влияет на движение Луны вокруг Земли?

Решение. Потому что Земля и Луна движутся в поле тяготения Солнца с почти одинаковыми ускорениями. В системе отсчета, связанной с Землей, на Луну действуют силы притяжения Земли, Солнца и сила инерции, величина которой $m_Л w_{СЗ}$. Из второго закона Ньютона $m_Л \vec{a}_{ЗЛ} = \vec{F}_{ЗЛ} + \vec{F}_{СЛ} - m_Л \vec{w}_{СЗ}$ получим уравнение $\vec{a}_{ЗЛ} = \vec{w}_{ЗЛ} + \Delta\vec{w}$, $\Delta\vec{w} = \vec{w}_{СЛ} - \vec{w}_{СЗ}$. Величина $|\Delta\vec{w}| = 0{,}03 \cdot 10^{-3}$ м/с^2, отношение $|\Delta\vec{w}|/w_{ЗЛ} = 1{,}11 \cdot 10^{-2} << 1$. Поэтому траектория Луны в поле тяжести Земли близка к эллипсу.

В неинерциальной системе отсчета, связанной с Солнцем, второй закон Ньютона имеет вид $m_Л \vec{a}_{СЛ} = \vec{F}_{СЛ} + \vec{F}_{ЗЛ} - m_Л \vec{w}_{ЗС}$, где $\vec{w}_{ЗС}$ — ускорение сообщаемое Землей Солнцу, $w_{ЗС} = m_З w_{СЗ}/m_С = 1{,}792 \cdot 10^{-8}$ м/с^2. Тогда $\vec{a}_{СЛ} = \vec{w}_{СЛ} + \vec{w}_{ЗЛ} - \vec{w}_{ЗС}$, $\Delta\vec{w}' = \vec{w}_{ЗЛ} - \vec{w}_{ЗС}$. Поскольку $|\Delta\vec{w}'| \approx w_{ЗЛ}$, то из этого уравнения следует, что траектория Луны относительно Солнца не является эллипсом.

11.3. Силы инерции во вращающейся системе отсчета

Пусть система отсчета K' — диск, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр O перпендикулярно плоскости диска. Наблюдатель, находящийся на диске, установит, например, что нить маятника в положении равновесия образует с вертикалью некоторый угол. Учитывая только «истинные» силы, наблюдатель не сможет объяснить это явления. Для того чтобы условия равновесия позволили объяснить наблюдаемое отклонение частицы массой m, находящейся на расстоянии r от оси, необходимо ввести приложенную к частице *центробежную силу* инерции величиной $F = m\omega^2 r$. Она лежит на прямой перпендикулярной оси вращения и направлена по радиусу от центра окружности, по которой вращается частица (рис.11.3.1).

Пример 11.3.1. Мотоциклист на вертикальной стене. Вернемся к задаче 7.1.5 и найдем угол α между вертикалью и плоскостью колес мотоцикла. Перейдем в систему K', вращающуюся с угловой скоростью ω вокруг оси цилиндра. На систему человек-мотоцикл действуют сила реакции $\vec{N}$, сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и центробежная сила $\vec{F}$, приложенные в центре масс (рис. 11.3.2).

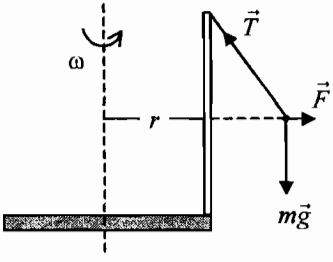


рис. 11.3.1

В системе K' условие равновесия $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F} = 0$ приводят к уравнени-

ям $mv^2/R - N = 0$, $F_{тр} - mg = 0$. Из условия равенства нулю суммы проекций моментов сил трения и реакции относительно оси, проходящей через центр масс находим уравнение

$$F_{тр}\sin\alpha - N\cos\alpha = 0, \rightarrow \mathrm{tg}\alpha = 1/\mu,\ \alpha = 68°12'.$$

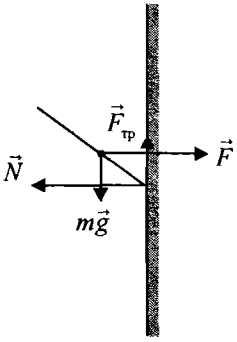


рис. 11.3.2

11.3.1. Космический лифт. Предположим, что на экваторе возведена конструкция, в которой действует лифт. Найдем высоту, на которой скорость груза массой m станет равной местным первой и второй космическим скоростям.

На груз действуют сила натяжения каната N, сила тяжести и центробежная сила инерции. Если груз находится на расстоянии r от центра Земли, то $N = mg(R/r)^2 - m\omega^2 r$ или $N = m\omega^2(r_{ст}^3/r^2 - r)$, где ω — угловая скорость вращения Земли, $r_{ст} = [gR^2/\omega^2]^{1/3}$ — величина, равная радиусу орбиты геостационарного спутника ($r_{ст} = 6{,}7R = 42\ 164$ км). Если $r < r_{ст}$, то для подъема с постоянной скоростью к грузу необходимо приложить силу величиной $N = mg(R/r)^2 - m\omega^2 r$, направленную вертикально вверх. Величина скорости груза в инерциальной системе отсчета $v = \omega r$. На расстоянии $r_{ст}$ от центра Земли $N = 0$: груз приобретет скорость $v_{ст} = \omega r_{ст}$ равную местной первой космической скорости. Если его не удерживать, то он будет неподвижен относительно лифта. При подъеме груза на расстояние $r > r_{ст}$ центробежная сила становится больше силы притяжения — груз необходимо удерживать. Из закона сохраненииия полной энергии найдем величину расстояния r_2, на котором груз приобретет местную вторую космическую скорость: $m(\omega r_2)^2/2 - mgR^2/r_2 = 0 + 0$, $r_2 = 2^{1/3}r_{ст}$, $r_2 = 53\ 123$ км; если его освободить, то он навсегда покинет Землю. Вот еще одна возможность запуска космических аппаратов.

Энтузиастом этой идеи выступает известный писатель-фантаст Артур Кларк. Сейчас он проживает на Цейлоне и уже нашел там место для привязки лифта. Конструкцию для лифта надо строить с крыши. Со стационарного спутника выпускают два троса — вверх и вниз. Затем подбирают их длину так, чтобы вся система вращалась как целое с угловой скоростью ω в процессе увеличения длины тросов. После зацепления нижнего конца за Землю можно заняться устройством лифта. Основная трудность — отсутствие материала необходимой прочности.

11.4. Силы инерции на Земле

Земля — «дважды» неинерциальная система отсчета, поскольку она движется вокруг Солнца и вращается вокруг своей оси. На тела, неподвижные во вращающейся системе отсчета, действует лишь центробежная сила. В 1829 г. французский физик Г. Кориолис показал, что на движущееся тело действует еще одна сила инерции. Ее называют силой Кориолиса. Эта сила всегда перпендикулярна к оси вращения и к направлению скорости $\vec{v}$.

Введем систему координат с началом в точке O на широте ϕ: ось z направим вертикально вверх, ось x — по меридиану к полюсу, ось y — на запад. Тогда сила Кориолиса $\vec{F}_k = -\vec{w} \times \vec{v}$:

$$\vec{F}_k = (2mv_y\omega\sin\phi,\ 2mv_z\omega\cos\phi - 2mv_x\omega\sin\phi,\ -2mv_y\omega\cos\phi).$$

Очевидно $\vec{v}\vec{F}_k = 0$.

Действие центробежной силы и силы Кориолиса позволяет объяснить многие интересные явления, происходящие на Земле. Например, если тело падает из точки $(0,\ 0,\ h)$, то оно отклонится к востоку и упадет в точке $(0, y_1, 0)$, где $y_1 = -(t_0^3/3)\, g\omega\cos\phi$, $t_0 \approx (2h/g)^{1/2}$ — время падения. На широте $\phi = 51$ при свободном падении в шахте глубиной $h = 158$ м получено значение $y_1 = -2{,}83$ см (1833 г.). Если тело бросить из начала координат вертикально вверх со скоростью v_0, то оно отклонится к западу и упадет в точке $(0, y_2, 0)$, где $y_2 = (4v_0^3/3g^2)\,\omega\cos\phi$.

Другой пример — поворот плоскости качаний маятника Фуко — шара массы 28 кг на тросе длиной 67 м, который французский физик Ж. Фуко установил в Пантеоне Парижа в 1851 г. Через 24 ч маятник не возвращается в исходное положение: плоскость качаний смещается на угол $2\pi\sin\phi$, называемый углом Ханнея. Такой же маятник массы 54 кг на тросе длиной 98 м был недавно демонтирован в Исаакиевском соборе Санкт-Петербурга в связи с передачей собора в собственность православной церкви.

Глава 12. Линейные колебания

12.1 Одномерные свободные колебания

12.1.1. Положение устойчивого равновесия. Рассмотрим механическую систему, состоящую из N частиц. Если движение частиц ограничено связями — поверхностями, стержнями, нерастяжимыми нитями, то возможна ситуация, в которой положение системы определяется заданием одной функции $q(t)$. Размерность $[q]$ — метр или радиан. Ее называют независимой или обобщенной координатой и говорят, что система имеет *одну степень свободы*. В этом случае движение системы называют *одномерным*. Величину dq/dt называют обобщенной скоростью системы. Кинетическая и потенциальная энергии системы зависят от обобщенных координаты и скорости: $K = G(q)(dq/dt)^2/2$, $W = W(q)$, где $G(q)$ — положительно определенная функция.

Устойчивому равновесию соответствует такое положение системы $q = q_0$, в котором ее потенциальная энергия $W(q)$ имеет минимум. Значение q_0 определяется из условия $dW/dq = 0$ (см. Гл. 10).

Введем функцию $x(t) = q(t) - q_0$, характеризующую отклонение от равновесного значения q_0 и ограничимся изучением периодического движения в

окрестности устойчивого положения равновесия. В окрестности положения равновесия потенциальная энергия системы

$$w(x) = W(q_0 + x) = W(q_0) + \frac{kx^2}{2} + \dots,$$

где $k = d^2W/dq^2$ — значение второй производной при $q = q_0$. В положении устойчивого равновесия $k > 0$. Кинетическая энергия

$$K \approx \frac{G_0}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

где $G_0 = G(q_0)$.

12.1.2. Гармонические колебания. Простейшим видом колебаний является гармоническое движение, которое описывается функцией

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha), \qquad (12.1.1)$$

Коэффициент A называется амплитудой колебаний, ω — циклической частотой, $\varphi(t) = \omega t + \alpha$ — фазой колебаний. Период колебаний $T = 2\pi/\omega$. Частота колебаний $\nu = 1/T$. Единица частоты колебаний в СИ – герц (Гц), 1 Гц = 1с$^{-1}$.

Проекции скорости и ускорения соответственно равны

$$v(t) = \frac{dx}{dt}, \qquad v(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha), \qquad (12.1.2)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha).$$

Мы видим, что в случае гармонических колебаний второй закон Ньютона приобретает вид $a(t) = -\omega^2 x(t)$ или форму дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

Это уравнение называют *уравнением гармонического осциллятора* (от лат. *oscillare* — колебаться). Функция (12.1.1) является решением этого уравнения, где A и α — произвольные постоянные. Они определяются заданием начальных условий $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$ в момент времени $t = t_0$.

Периодическая функция $f(t)$ с периодом T должна удовлетворять тождеству $f(t) = f(t + T)$ в интервале $-\infty < t < \infty$. Очевидно, последнее условие является очень сильным, поскольку для реальных систем оно никогда не выполняется. Поэтому колебаниями называют движение системы, удовлетворяющее условию $x(t) = x(T + t)$ для всех t в интервале $(t_0, t_0 + t_k)$, $t_k \gg T$, где t_0 — момент времени, в который заданы начальные положение $x(t_0) = x_0$ и скорость системы $dx/dt = v_0$ при $t = t_0$.

12.1.3. Свободные колебания. Если внешние силы не зависят от времени, то колебания системы называются *свободными*. Для исследования поведения системы в окрестности положения равновесия можно применить метод линеаризации уравнений движения. В этом приближении полная энергия системы приобретает вид

$$E = \frac{G_0}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{kx^2}{2}. \qquad (12.1.3)$$

Дифференцируя (12.1.3) по времени, получим *линейное* уравнение

$$G_0 d^2x/dt^2 = -kx \quad \text{или} \quad d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0, \qquad (12.1.4)$$

где $\omega^2 = k/G_0$.

Решение уравнения (12.1.4) может быть записано в виде (12.1.1). Постоянные A и α найдем, задавая начальные условия: $x(0) = q_0$, $dx/dt = v_0$. Тогда из системы $x_0 = A\sin\alpha$, $v_0 = A\omega\cos\alpha$ получим

$$A = [x_0^2 + (v_0/\omega)^2]^{1/2}, \ \cos\alpha = v_0/A\omega, \ \sin\alpha = x_0/A. \qquad (12.1.5)$$

Величина $\omega = (k/G_0)^{1/2}$, называемая *собственной частотой*, является основной характеристикой колебаний, не зависящей от начальных условий, в частности, от амплитуды. Это свойство линейных колебаний называется *изохронностью* (от греч. *isos* — равный, *chronos* — время).

Подставляя (12.1.1), (12.1.2) в (12.1.3), получим значение полной энергии

$$E = G_0\omega^2 A^2/2 = kA^2/2.$$

Замечание. Термин «малые колебания» неверно отражает эволюцию системы, которая описывается функцией (12.1.1). Значения координаты и скорости в окрестности устойчивого положения равновесия будут «малыми», если достаточно малы их начальные значения. Более точно, если полная энергия E меньше значения потенциальной энергии в ближайшем к координате q_0 максимуму функции $W(q)$ при $q = q_1$. Однако, оставаясь «малой» в области $\Delta q = |q_1 - q_0|$, координата x удовлетворяет нелинейному уравнению, описывающему *нелинейные колебания*. Поэтому термин «линейные колебания» наиболее точно соответствует движению системы у дна потенциальной ямы, где функция (12.1.1) удовлетворяет линейному уравнению (12.1.4). Важно отметить, что поведение реальных систем описывается нелинейными уравнениями.

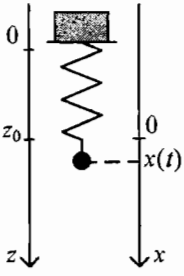


рис. 12.1.1

Пример 12.1.1. Вертикальные колебания груза, закрепленного на пружине; k — жесткость, пружины, l_0 — длина в нерастянутом состоянии. (рис.12.1.1)

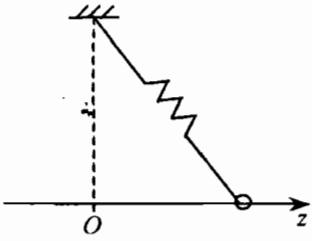
Определим сначала положение равновесия. Пусть z_0 — длина растянутой пружины. Из условия равенства, нулю суммы сил упругости и тяжести, получим $-k(z_0 - l_0) + mg = 0$.

Введем теперь координатную ось x так, что в положении равновесия координата, груза $x = 0$, т.е. $z = z_0 + x$. Из второго закона Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{упр}$ находим уравнение

$$ma = -k(z_0 + x - l_0) + mg, \quad \text{или} \quad md^2x/dt^2 + kx = 0.$$

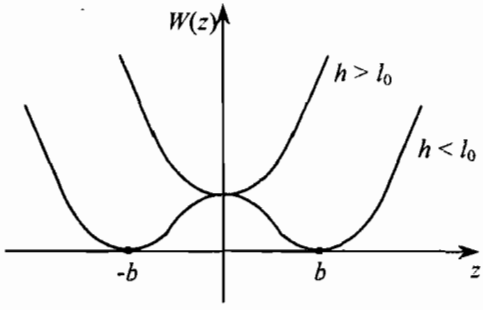
Следовательно, решение представляет собой функцию (12.1.1), где $\omega = \sqrt{k/m}$. Если в начальный момент времени $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$, то $A = x_0$, $\alpha = \pi/2$. Тогда $x(t) = x_0\cos\omega t$.

Задача 12.1.2. К частице, которая может перемещаться по гладкой горизонтальной прямой, прикреплена пружина. Другой конец пружины закреплен на расстоянии h от прямой (рис. 12.1.2 *а*). Найдите частоту линейных колебаний в окрестности положений устойчивого равновесия.



а

рис. 12.1.2



б

рис. 12.1.2

Решение. Выберем начало координат оси z в точке пересечения прямой и перпендикуляра, проведенного через точку закрепления пружины. Потенциальная энергия частицы $W(z) = (k/2)[(h^2 + z^2)^{1/2} - l_0]^2$. Сила, действующая на частицу $\vec{F} = (F, 0, 0)$, где $F(z) = -dW/dz$. Из второго закона Ньютона получим уравнение

$$md^2z/dt^2 = F(z), \qquad F(z) = -kz[1 - l_0(h^2 + z^2)^{-1/2}], \tag{1}$$

Координаты точек равновесия найдем из условия $F(z_{eq}) = 0$. Рассмотрим два случая: $z_{eq} = 0$ при значениях $h > l_0$ и $z_{eq} = \pm b$, $b = (l_0^2 - h^2)^{1/2}$ при значении $l_0 > h$. В окрестности z_{eq} функцию $F(z)$ можно представить в виде $F(z) \approx (z - z_{eq})(dF/dz)_{eq}$. Если $(d^2W/dz^2)_{eq} > 0$, то мы имеем устойчивое положение равновесия.

Рассмотрим теперь движение частицы в окрестности устойчивых положений равновесия, полагая $z = z_{eq} + x$.

А. $z_{eq} = 0$. Поскольку $dF/dz = -k[1 - h^2 l_0(h^2 + z^2)^{-3/2}]$, то $(dF/dz)_{eq} = -k[1 - l_0/h)$. При значениях $h > l_0$ правая часть (1) равна $-m\omega_0^2 x$, $\omega_0^2 = k(1 - l_0/h)/m$ — квадрат частоты линейных колебаний в окрестности точки $z_{eq} = 0$.

Б. $z_{eq} = b$. Если $l_0 > h$, то $(dF/dz)_{eq} = -k(1 - h^2/l_0^2)$. Тогда функция x удовлетворяет уравнению

$$d^2x/dt^2 + \omega_b^2 x = 0, \quad \omega_b^2 = k(1 - h^2/l_0^2)/m.$$

На рис.12.1.2 *б* изображены графики потенциальной энергии при различных соотношениях между параметрами h и l_0. Очевидно, что частица совершает гармонические колебания вблизи дна локальных «потенциальных ям».

Пример 12.1.3. Гармонические колебания математического маятника — небольшого шарика, прикрепленного к невесомому стержню длиной l, который движется в вертикальной плоскости.

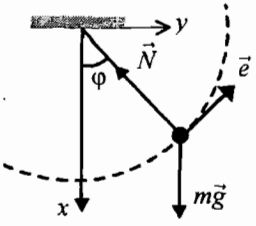


рис. 12.1.3

Положение шарика зададим углом φ отклонения нити от вертикали (рис. 12.1.3). Проекция скорости шарика на введенный в разделе 1.11.1. единичный вектор $\vec{e} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, направленный по касательной к окружности в точке $\vec{r} = (l\cos\varphi, l\sin\varphi, 0)$, равна $v = l d\varphi/dt$.

Получим уравнение движения шарика, используя закон сохранения полной энергии: $mv^2/2 + W(\varphi) = E$, где $W(\varphi) = -mgl\cos\varphi$. Дифференцируя это соотношение, находим

$$mvdv/dt + mgl\sin\varphi \cdot d\varphi/dt = 0, \quad \text{или} \quad d^2\varphi/dt^2 + \omega^2\sin\varphi = 0, \qquad (1)$$

где $\omega^2 = g/l$.

Отметим, что уравнение (1) можно получить из второго закона Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$, где $\vec{N}$ — сила реакции (рис. 12.1.3). Действительно, в проекции на направление скорости имеем уравнение $mdv/dt = -mg\sin\varphi$, $dv/dt = ld^2\varphi/dt^2$. Отсюда получаем уравнение (1). Сопоставляя это уравнение с (12.1.3), приходим к выводу, что движение шарика, не является гармоническим колебанием. Однако, если выбрать начальные условия так, чтобы шарик двигался в окрестности положения равновесия $\varphi = 0$, то при $\varphi << 1$ можно приближенно положить $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда уравнение (1) приобретает форму (12.1.4). Например, для угла 20° имеем $\varphi = 0{,}3491$, $\sin\varphi = 0{,}3420$. Следовательно, при $\varphi << 1$ маятник совершает гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{g/l}$. Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

При больших отклонениях от положения равновесия частота колебаний зависит от амплитуды a: $\omega = \sqrt{g/l}\,(1 - a^2/16)$.

Маятник в неоднородном поле тяжести. Если маятник находится на высоте h над поверхностью Земли, то в выражении для частоты колебаний

следует произвести замену $g \to g_{эф} = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$. В результате получим частоту колебаний

$$\omega_h = \sqrt{\frac{g}{l}}\frac{R}{R+h}.$$

Задача 12.1.4. На рис. 12.1.4 изображен маятник, представляющий собой невесомый стержень, на котором закреплены две частицы масс m_1 и m_2 на расстояниях l_1 и l_2 от оси вращения. Найдите частоту линейных колебаний маятника.

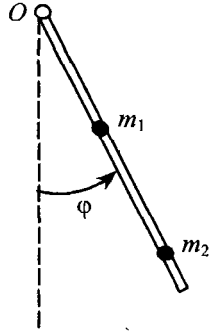


рис. 12.1.4.

Решение. Положение стержня зададим углом отклонения φ от вертикали. Скорости масс соответственно равны $v_1 = l_1\Omega$, $v_2 = l_2\Omega$, где $\Omega = d\varphi/dt$ — угловая скорость стержня. Полная энергия маятника

$$E = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\Omega^2 - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g\cos\varphi.$$

Учитывая решение задачи 12.1.3, получим квадрат частоты линейных колебаний

$$\omega^2 = \frac{g(m_1 l_1 + m_2 l_2)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}.$$

Пример 12.1.5. Новый способ транспортировки грузов. Два пункта A и B на поверхности Земли соединены гладким тоннелем, прорытым по хорде окружности радиусом, равным радиусу Земли R (рис. 12.1.5). Максимальная глубина тоннеля — h ($h \ll R$). В момент времени $t = 0$ в пункте A груз отпускают в тоннель с начальной скоростью равной нулю. Найдите время прибытия груза в пункт B.

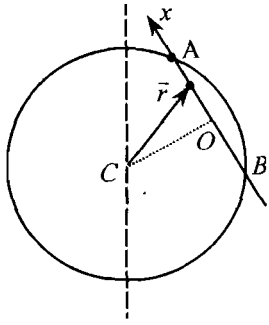


рис. 12.1.5

Пусть $\vec{r}$ — расстояние от центра Земли до частицы массой m. Потенциальная энергия взаимодействия частицы, находящейся внутри Земли, с массой Земли

$$W(\vec{r}) = -(mgR/2)[3 - (r/R)^2],\ r \le R. \qquad (1)$$

Если $r \ge R$, то $W(\vec{r}) = -mgR^2/r$. Направим ось x параллельно оси тоннеля, начало координат поместим в середине тоннеля. Тогда $r^2 = (R - h)^2 + x^2$. Начальные условия

$$x(0) = [R^2 - (R - h)^2]^{1/2} \approx (2hR)^{1/2}, \qquad v(0) = 0.$$

Отбрасывая в потенциальной энергии (1) постоянные величины, запишем закон сохранения полной энергии

$$E = mv^2/2 + mgx^2/2R. \qquad (2)$$

После дифференцирования обеих частей (2) по времени получим уравнение

$$d^2x/dt^2 + (g/R)x = 0. \qquad (3)$$

Учитывая (12.1.5), получим решение уравнения (3): $x(t) = (2hR)^{1/2}\cos\omega t$, $\omega^2 = g/R$. Время движения $t_k = T/2$, где $T = 2\pi(R/g)^{1/2}$ — период колебаний, равный периоду обращения спутника, движущегося с первой космической скоростью, $t_k = 42$ мин. Максимальное значение величины скорости $(2gh)^{1/2}$.

Задача 12.1.6. К машине прикреплен упругий шнур. Другой конец шнура прикреплен к грузовику. В момент времени $t = 0$ грузовик начинает двигаться со скоростью v_0. Найдите интервал времени, через который машина столкнется с грузовиком. Масса машины — m, жесткость шнура —k, длина шнура в ненапряженном состоянии — l_0.

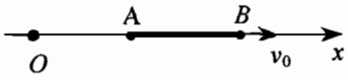


рис. 12.1.6

Решение. Пусть $x_A = x(t)$ — координата точки A закрепления шнура на машине. Координата точки B закрепления шнура на грузовике $x_B(t) = l_0 + v_0t$ (рис. 12.1.6).

Пренебрегая трением качения, запишем уравнение движения машины, следующее из второго закона Ньютона

$$md^2x/dt^2 = k[x_B - x - l_0]. \qquad (1)$$

Начальные условия $x(0) = 0$, $v(0) = 0$.

Перейдем к новой переменной z, совершая замену $x = v_0t+z$. Подставляя x и $x_B(t)$ в (1), получим уравнение

$$d^2z/dt^2+\omega^2z = 0, \qquad (2)$$

где $\omega^2 = k/m$. Начальное значение $z(0) = 0$. Поскольку скорость машины $v(t) = v_0+dz/dt$, то начальное значение производной $dz/dt = -v_0$. Согласно (12.1.1), (12.1.5) решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$z(t) = -(v_0/\omega)\sin\omega t. \qquad (3)$$

Скорость точки A равна

$$v(t) = v_0(1 - \cos\omega t). \qquad (4)$$

Расстояние между точками закрепления шнура

$$s(t) = x_B(t) - x(t) = l_0 + (v_0/\omega)\sin\omega t.$$

Сила натяжения шнура $F = k[x_B(t) - x - l_0]$ или $F(t) = (kv_0/\omega)\sin\omega t$.

В момент времени $t_1 = T/4$ ($T = 2\pi/\omega$) машина отстает от грузовика на максимальное расстояние $s(t_1) = l_0 + v_0/\omega > l_0$, а скорость машины достигает значения $v(t_1) = v_0$. В момент времени $t_2 = T/2$ сила натяжения шнура обращается в нуль; скорость машины достигает максимального значения $v(t_2) = 2v_0$. При $t \geq t_2$ шнур остается ненатянутым — машина движется с постоянной скоростью $2v_0$ до столкновения с грузовиком в момент времени $t_3 = t_2 + l_0/v_0$.

Задача 12.1.7. Один конец пружины жесткостью k, длиной l_0 в ненапряженном состоянии прикреплен к вертикальной стенке, на другом закреплена частица массой m, которая может двигаться по шероховатой горизонтальной плоскости. Коэффициент трения — μ. В начальном положении длина пружины $l_0 + A$, начальная скорость частицы $v(0) = 0$, $A > (2n + 1)\mu mg/k$, n — целое число. Найдите число колебаний N до остановки частицы.

Решение. Введем ось x с началом в точке закрепления пружины. На тело действуют сила упругости $F_x = -k(x - l_0)$, сила тяжести, сила реакции и сила трения $\vec{f} = -\mu mg\vec{v}/v$. Теперь необходимо перейти к новой координате z: $x = l_0 + z$. Потенциальная энергия частицы $W(z) = kz^2/2$. Если скорость и ускорение частицы равны нулю, то координата z удовлетворяет условию $-\mu mg < kz < \mu mg$. Уравнение движения имеет вид

$$ma = -kz + \mu mg, \quad v < 0; \quad ma = -kz - \mu mg, \quad v > 0. \qquad (1)$$

Начальные условия $z(0) = A$, $v(0) = 0$.

Поскольку $kA > \mu mg$, то $a < 0$; частица будет смещаться влево. В момент времени t_m, когда $a(t_m) = 0$, в точке $z(t_m) = z_0$, $z_0 = \mu mg/k$ ускорение обращается в нуль. При значениях $z < z_0$ ускорение $a > 0$ и частица останавливается в точке $z(t_1) = z_1$. Согласно закону изменения полной энергии имеем уравнение

$$0 + kz_1^2/2 - (0 + kA^2/2) = \mu mg(z_1 - A),$$

из которого находим $z_1 = -A + 2z_0 < 0$. Отметим, что решение уравнения $ma = -kz + \mu mg$ с начальными условиями $z(0) = A$, $v(0) = 0$ представляет собой функцию $z(t) = z_0 + (A - z_0)\cos\omega t$, $\omega = \sqrt{k/m}$, $0 \leq t \leq t_1$. Скорость частицы $v(t) = -(A - z_0)\sin\omega t$. Из уравнения $v(t_1) = 0$ находим $t_1 = \pi/\omega$.

В положении $z = z_1$ проекция на ось z силы упругости $-kz_1 > \mu mg$ при значениях $n > 1$. Следовательно, частица смещается вправо. Координату точки остановки z_2 найдем из закона изменения полной энергии

$$0 + kz_2^2/2 - (0 + kz_1^2/2) = -\mu mg(z_2 - z_1), \rightarrow z_2 = A - 4z_0 > 0.$$

После N колебаний координата точки остановки $0 = A - 4N\mu mg/k$.

Отметим, что решением уравнения (1) является функция $z(t)=a(t)\cos\omega t$, $a(t) = A - 2\mu gt/\pi\omega$, $\omega = \sqrt{k/m}$, $t \leq TkA/(4\mu mg)$, $T = 2\pi/\omega$.

12.2. Вынужденные колебания

12.2.1. Решение уравнения вынужденных колебаний. Рассмотрим в качестве примера колебания небольшого шарика прикрепленного к пружи-

не, на который действует внешняя сила, зависящая от времени. Такие колебания называют *вынужденными*.

Для анализа влияния среды на движение шарика учтем силу трения в наиболее простой линейной форме $\vec{F}_r = -c\vec{v}$, где c — постоянный коэффициент. Тогда одномерные колебания шарика в окрестности положения устойчивого равновесия описываются уравнением

$$md^2x/dt^2 = -k\,x - c\,dx/dt + F(t), \qquad (12.2.1)$$

следующим из второго закона Ньютона. Умножая (12.2.1) на скорость $v = dx/dt$, получим закон изменения полной энергии $E = mv^2/2 + kx^2/2$:

$$dE/dt = -cv^2 + Fv. \qquad (12.2.2)$$

В наиболее интересном случае проекция силы $F(t)$ представляет собой гармоническую функцию $F(t) = F_0\cos\omega t$, $t \geq 0$.

Введем новые обозначения $F_0 = mf_0$, $c = m\gamma$, $k = m\omega_0$, $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ — собственная частота. Тогда исходное уравнение принимает вид

$$d^2x/dt^2 + \omega_0^2x + \gamma dx/dt = f_0\cos\omega t,\ t \geq 0. \qquad (12.2.3)$$

Если внешняя сила отсутствует, то при $2\omega_0 >> \gamma$ это уравнение описывает затухающие свободные колебания, с амплитудой стремящейся к нулю в интервале $t >> 2/\gamma$. Наша задача - найти решение уравнения (12.2.3) при значениях $t >> 2/\gamma$, после того, как собственные колебания уже затухнут. В этом случае $x(t)$ представляет собой гармоническую функцию с постоянными амплитудой a и фазой φ. Следовательно, решение (12.2.3) следует искать в виде $x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$. Подставляя $x(t)$ в (12.2.3), получим тождество

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a\cos(\omega t + \varphi) - \gamma\omega\sin(\omega t + \varphi) = f_0\cos\omega t.$$

Для того, чтобы это соотношение выполнялось в любой момент времени, необходимо приравнять нулю коэффициенты при функциях $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$:

$$(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi + \gamma\omega\cos\varphi = 0,$$

$$[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi - \gamma\omega\sin\varphi]a = f_0.$$

Из этих уравнений находим

$$\cos\varphi = (\omega_0^2-\omega^2)/D, \quad \sin\varphi = -\gamma\omega/D, \qquad (12.2.4)$$

$$a(\omega) = f_0/D(\omega), \quad D = [(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^{1/2}. \qquad (12.2.5)$$

Рассматривая амплитуду колебаний как функцию параметра ω, можно установить, что $a(\omega)$ достигает максимума при частоте $\omega = \omega_m$,

$$\omega_m = (\omega_0^2 - \gamma^2/2)^{1/2} < \omega_0, \qquad a(\omega_m) = F_0/[m\gamma(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}].$$

При частоте $\omega << \omega_m$ значение $a(\omega) \approx (\gamma/\omega_m)a(\omega_m) << a(\omega_m)$. Еще слабее отклик шарика при частоте внешней силы $\omega >> \omega_m$: $a(\omega) \approx (\gamma\omega_0/\omega^2)a(\omega_m) << a(\omega_m)$.

12.2.2. Резонанс. График функции $a(\omega)$ называют *резонансной кривой*, а значение частоты ω_m — *резонансной частотой*. Функция $\varphi(\omega)$ в области $\omega \geq 0$ принимает значения в интервале $[0, -\pi]$ и проходит через значение $\varphi = -\pi/2$ при $\omega = \omega_0$. Термин *резонанс* означает избирательный отклик колебательной системы на периодическое воздействие внешней силы с частотой, близкой к собственной частоте. В случае слабого затухания $\gamma << \omega_0$ резонансная частота $\omega_m \approx \omega_0$.

В установившемся режиме сумма средних значений мощности внешней силы и мощности силы трения в правой части (12.2.2) равна нулю. Вследствие этого среднее значение полной энергии поддерживается на постоянном уровне.

Явление резонанса играет большую роль в природе, науке и технике. В механических системах резонанс можно использовать для реализации колебаний с постоянной амплитудой; в других случаях резонансные вынужденные колебания могут стать причиной разрушения различных конструкций — линий электропередач, мостов, турбин, элементов корпуса корабля и самолета, космических аппаратов.

Широко известный пример — разрушение Такомского моста. Мост через реку Такома в США имел третий в мире по длине пролет в 854 м, перекрытый висящей двухрядной проезжей частью шириной 12 м. Этот мост разрушился через четыре месяца после завершения строительства. В результате взаимодействия с ветром постоянного напора мост раскачивался. Причина в периодическом отрыве вихрей, возникающих при обтекании несущих конструкций моста. 7 ноября 1940 г. при скорости ветра около 19 м/с установились изгибно-крутильные колебания с периодом $T = 5$ с и такой амплитудой, что угол наклона проезжей части достигал 45°. Через час мост рухнул. Сейчас на прежнем месте стоит новый мост с конструктивными изменениями, устраняющими механизм образования вихрей.

Тест

F1*. Частица массой $m_1 = m$ и атом массой $m_2 = 4m$ имеют одинаковые кинетические энергии E и движутся навстречу друг другу. В результате абсолютно неупругого столкновения полная энергия атома возросла на величину

А. 2 E, **Б.** 2,8E, **В.** 2,4E, **Г.** 0,6E, **Д.** 1,8E.

F2. Пусть плотность некоторой планеты равна плотности Земли, радиус планеты в два раза меньше радиуса Земли. Отношение первых космических скоростей для планеты и Земли:

А. 2, **Б.** 1/4, **В.** 4, **Г.** 1/3, **Д.** 1/2.

F3*. Спутник запущен на круговую орбиту, расположенную в плоскости экватора, и вращается в направлении вращения Земли. Известно, что спутник

проходит над некоторой точкой экватора семь раз в сутки. Отношение радиуса орбиты спутника к радиусу орбиты геостационарного спутника:

А. 1/2, **Б.** 1/4, **В.** 1/3, **Г.** 2/5, **Д.** 3/4.

F4. В точках плоскости $A_1 = (a/2,\ a/2)$, $A_2 = (-a/2,\ a/2)$, $A_3 = (-a/2,\ -a/2)$, $A_4 = (a/2,\ -a/2)$, представляющих собой вершины квадрата $A_1 A_2 A_3 A_4$, находятся частицы масс $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг, $m_4 = 4$ кг. Центр тяжести системы расположен в точке С:

А. $(a/5,\ 0)$, **Б.** $(2a/10,\ a/5)$, **В.** $(a/10,\ -2a/10)$, **Г.** $(0,\ -2a/10)$, Д. $(2a/5,\ a/10)$.

F5. Центр тяжести С шара радиусом R находится на расстоянии $b = R/\sqrt{2}$ от геометрического центра шара O. Шар поставили на шероховатую наклонную плоскость, образующую угол $\alpha = \pi/6$ с горизонтальной плоскостью. Угол, образуемый отрезком CO с вертикалью в положении равновесия:

А. $\pi/8$, **Б.** $\pi/6$, **В.** $\pi/3$, **Г.** $3\pi/4$, Д. $\pi/4$.

F6-7. Удлинение пружины, к которой подвесили два груза массами $m_1 = 3m$ и $m_2 = 2m$, равно b.

F6. Амплитуда колебаний системы после того, как нижний груз m_2 оторвался:

А. $b/5$, **Б.** $2b/5$, **В.**$3b/5$, **Г.** $5b/2$, **Д.** $3b/2$.

F7. Частота колебаний оставшейся части груза:

А. $(k/3m)^{1/2}$, **Б.** $(3k/2m)^{1/2}$, **В.** $(k/5m)^{1/2}$, **Г.** $(2k/m)^{1/2}$, **Д.** $(k/m)^{1/2}$.

F8. Тело массой M, подвешенное к пружине, колеблется с частотой ν. После того, как к телу прикрепили груз массой $3M$, частота колебаний стала равной:

А. $\nu/4$, **Б.** 3ν, **В.** 2ν, **Г.** $\nu/3$, **Д.** $\nu/2$.

F9. Координата, определяющая смещение шарика от положения устойчивого равновесия, $x(t) = A\cos\omega t$. Отношение величин скоростей в точке, отстоящей от положения равновесия на три пятых амплитуды колебаний и в положении равновесия равно:

А. 1/5, **Б.** 3/5, **В.** 4/5, **Г.** 2/10, **Д.** 2/5.

Часть II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Глава 1. Атомно-молекулярная теория строения вещества

Самое важное из совершенных человеком открытий — это осознание того, что природу можно изучать только научными методами. Молекулярно-кинетическая теория строения вещества возникла в результате теоретического обобщения большого количества экспериментального материала, накопленного человечеством в течение многих столетий.

1.1. Основные положения атомно-молекулярной теории строения вещества

1.1.1 Атомы и молекулы. Все тела состоят из не очень большого числа простых веществ — химических элементов. Наименьшей частицей элемента является атом (от греч. *atomos* — неделимый). Несколько атомов могут образовать устойчивую систему, называемую молекулой.

1.1.2. Атомная единица массы (а. е. м.). В соответствии с соглашением, принятым в 1961 г., в качестве единицы массы выбрана масса $m_{ат}$, равная 1/12 массы изотопа углерода ${}^{12}_{6}C$. Здесь использовано обозначение ${}^{A}_{Z}X$, где X — символ элемента, Z-порядковый номер в таблице Менделеева, т. е. число протонов в ядре атома, A — массовое число, равное сумме чисел протонов и нейтронов. Атомная единица массы $m_{ат}$ = 1,660565 10^{-27} кг. Отметим, что существуют девять изотопов углерода — от ${}^{9}_{6}C$ до ${}^{17}_{6}C$, два из них (${}^{12}_{6}C$ и ${}^{13}_{6}C$) — стабильны.

1.1.3. Относительная атомная (или молекулярная) **масса** μ равна отношению массы атома m_a (или молекулы) к атомной единице массы: $\mu = m_a/m_{ат}$.

Моль (от лат. *moles* — толпа) — количество вещества, масса которого в граммах численно равна относительной массе. Эта масса имеет специальное название-молярная масса и обозначение

$$M = \mu \text{ г/моль} = \mu\ 10^{-3} \text{ кг/моль}. \qquad (1.1.1)$$

1.1.4. Число Авогадро. Покажем, что моль любого элемента содержит одинаковое число атомов (или моль молекулярного соединения — одинаковое число молекул) N_A. Пусть m г некоторого элемента содержит $N = \nu N_A$

атомов или ν молей: $m = Nm_a = \nu N_A m_a$. Полагая $m = \mu\ 10^{-3}$ кг, $\nu = 1$ моль, получим

$$N_A = \mu\ 10^{-3}/m_a \text{ кг/моль} = 10^{-3}/m_{ип} \text{ кг/моль} = 6{,}022\ 10^{-23} \text{ моль}^{-1}. \quad (1.1.2)$$

Очевидно, $N_A m_a = M$, $m = \nu M$. Постоянная N_A называется *числом Авогадро*.

Пример 1.1.1. Размеры атомов. Возьмем m кг вещества плотностью ρ объемом V, содержащим N атомов: $m = \rho V$. Если V_a — объем, занимаемый одним атомом, то $m = \rho N V_a$. С другой стороны поскольку масса атома $m_a = M/N_A$, то $m = NM/N_A$. Следовательно, $V_a = M/\rho N_A$. На каждый атом (или молекулу) приходится куб со стороной $L \sim (M/\rho N_A)^{1/3}$. В твердых телах атомы упакованы наиболее плотно. Поэтому величина L близка к верхнему пределу размера атома.

Оценим размер атома золота. Подставляя $M = 0{,}197$ кг/моль, $\rho = 19{,}32\ 10^3$ кг/м^3, получим $L = 0{,}26$ нм. (1 нм $= 10^{-9}$ м; приставка нано, образована от греч. *nanos* — карлик). С помощью электронного микроскопа с разрешением 0,12 нм при увеличении в 7 миллионов раз видны ряды атомов, находящихся друг от друга на расстоянии 0,235 нм.

Задача 1.1.2. Сколько молей кислорода содержится в одном моле воды?

Задача 1.1.3. Наиболее точное взвешивание можно произвести с точностью до 10^{-8}г. Сколько атомов содержится в крупинке железа массой $m = 10^{-8}$г?

Задача 1.1.4. Найдите массу $6{,}022 \cdot 10^{23}$ молекул CO.

1.1.5. Атомы Демокрита. Первая атомистическая теория возникла в Древней Греции. В то время зарождалась единая наука о развитии природы, человеческого общества и мышления — натурфилософия. Историки располагают весьма ограниченным числом документов. При осаде Александрии легионами Юлия Цезаря в 47 г. до н. э. сгорела знаменитая библиотека и были уничтожены практически все документы и книги, собранные Александром Македонским.

Основоположник диалектики — учения о развитии — Гераклит (544—483 гг. до н. э.) считал, что вечное движение является одновременно и причиной развития. Основатель древнегреческого материализма — Левкипп (V в. до н.э.) — сформулировал основное положение атомистики — все тела состоят из простых неделимых частиц. Это представление развил его ученик Демокрит, который и ввел понятия «атом». По учению Демокрита «истинная основа вещей — это атомы и пустота, все остальное мнение и видимость». Движение атомов безначально и вечно. Плотность и прочность веществ связаны с распределением пустот в них. Демокрит учил, что «истина» относительна.

Эпикур (340—270 гг. до н. э.) развил и дополнил эти взгляды учением о возможных формах движения атомов и совершенно новым понятием — притяжением атомов. Идеи Эпикура были изложены римским поэтом Лукрецием Каром (99—55 гг. до н. э.) в поэме «О природе вещей». Его поэма дошла до нас, если не считать копий XV в., в двух списках, переписанных в IX в. с ирландской рукописи, которые хранятся в библиотеке Лейденского

университета. Атомистика древних греков, признавая вечными материю и движение, была, по существу, конструктивной альтернативой религии.

После длительного средневекового застоя в науке стало формироваться новое материалистическое учение о природе. Идеи атомизма были возрождены работами Г. Галилея (1564—1642), Ф. Бекона (1561—1626), П. Гассенди (1592—1655), Р. Бойля (1627—1691), И. Ньютона (1642—1727).

1.1.6. Что такое воздух? Что такое вода? Современное представление об атомах возникло, когда алхимия превратилась в химию. Открытый в 1756 г. М.В. Ломоносовым (1711—1765) закон сохранения массы в химических реакциях стал одним из основных законов химии. В 1774 г. А. Лавуазье независимо открыл этот закон. Необходимо отметить, что вследствие изоляции российских ученых работы Ломоносова были незнакомы мировой научной общественности. Ломоносов занимался химией, физикой, металлургией, организовал производство цветного стекла и создавал мозаичные картины, проявил разносторонние дарования в поэзии и создании литературного русского языка. До начала XX в. Ломоносов был известен, в основном, как поэт и организатор науки. А.С. Пушкин был одним из немногих, кто видел в Ломоносове великого ученого. В своей неопубликованной статье он писал: «...Ломоносов был великий человек ... . Он создал первый университет. Он, лучше сказать, сам был первым нашим университетом». Лишь в 1904 г. в связи со 150-летием, созданной Ломоносовым химической лаборатории, проф. Б.М. Меншуткиным были переведены с латинского и немецкого языков его научные труды. И только тогда стало ясно, как талантлив был первый русский ученый.

Первой теорией, связавшей в единую систему огромный объем накопленных ранее знаний, была теория флогистона (от гр. *fhlogistos* — сжигаемый), созданная немецким ученым Г.Э. Шталем (1659—1734). Согласно Шталю все вещества, которые при обжигании дают окалины, содержат особый элемент — флогистон. Горение представлялось как процесс выделения флогистона. Это ошибочное предположение дало мощный толчок развитию химии.

В 1766 г. английский ученый Г. Кавендиш получил водород, названный горючим воздухом. Его отождествили с флогистоном. Вскоре независимо друг от друга швед К. В. Шееле и англичанин Дж. Пристли в 1774 г. открыли кислород — «огненный воздух». В рамках теории новый газ воспринимали как воздух, лишенный флогистона. В 1772 г. шотландец Д. Резерфорд открыл азот — «испорченный воздух», не поддерживающий горения.

Первооткрыватели не смогли разобраться в природе обнаруженных газов. Это удалось сделать выдающемуся французскому химику Антуану Лавуазье, который сочетал в своих исследованиях блестящую логику и смелое творческое воображение. Лавуазье пришел к выводу, что каждый из газов является самостоятельным химическим элементом. Он же дал им, известные теперь названия и получил первую количественную оценку состава воздуха.

Тогда еще никто не подозревал, что вода является химическим соединением — ее относили к простым элементам. В этом смысле вода оставалась

неизвестной, «неоткрытой» до 1781 г., когда Кавендиш случайно смешал водород и кислород и поднес к этой смеси пламя. Произошел взрыв; стенки сосуда покрылись капельками какой-то жидкости — это была вода. Однако только через два года Лавуазье установил, что в состав воды входят два элемента — водород и кислород.

Следует отметить, что вода обладает уникальными физическими свойствами. Причина аномальности свойств воды — в сильной водородной связи молекул. Атом кислорода имеет восемь электронов — на два меньше устойчивого атома неона. Поэтому два электрона атомов водорода принадлежат одновременно и внешней оболочке атома кислорода. В результате общий заряд нейтральной в целом молекулы воды перераспределяется: каждая молекула способна образовать четыре водородных связи, которые обуславливают сильные межмолекулярное взаимодействие и взаимодействие с веществами, содержащими молекулы кислорода, например стеклом.

Теория окисления, созданная Лавуазье, нанесла окончательный удар по теории флогистона, получившей всеобщее признание на протяжении целого столетия. В 1789 г. он издал первый учебник по химии — «Элементарный курс химии». Впервые появились термины, обозначавшие химические соединения.

1.1.7. Первая таблица атомных весов. В конце XVIII в. был открыт закон постоянства химического состава (Ж. Пруст, 1799 г.). Новый шаг в развитии атомистики был сделан Дж. Дальтоном. Согласно Дальтону, атом — неделимая частица материи, принимающая участие в химической реакции. В 1803 г. он опубликовал первую таблицу атомных весов. Конечно, она была несовершенна. Так, он утверждал, что частица воды состоит из одного атома водорода и одного атома кислорода. Однако работа Дальтона положила начало развитию современных представлений о строении вещества. В 1808 г. Дальтон открыл закон кратных соотношений: оказалось, что вещества соединяются в одних и тех же простых весовых отношениях, так что некоторое количество одного вещества может прореагировать только с определенным количеством другого.

Задача 1.1.5. Хорошей иллюстрацией закона кратных отношений служат соединения азота с кислородом. Установлено, что 7 г азота, соединяясь с

$1 \times 4 = 4$ г кислорода дают 11 г оксида азота (I) N_2O

$2 \times 4 = 8$ г кислорода дают 15г оксида азота (II) NO

$3 \times 4 = 12$ г кислорода дают 19г оксида азота (III) N_2O_3

Продолжите этот ряд.

Дальтон заметил, что законы *кратных отношений и постоянства состава* легко объяснить на основе атомистической теории: если атомы неделимы, то отношения масс атомов, входящих в состав химического соединения, должны быть вполне определенными величинами. Но для того чтобы определить это отношение, необходимо было узнать структуру реагирующих «атомов».

В то же время французский физик и химик Ж. Л. Гей-Люссак изучал соединения, измеряя объемы реагирующих газов. В 1801 г. он доказал, что 2 объема водорода, соединяясь с 1 объемом кислорода, образуют 2 объема

водяного пара и сформулировал «закон объемных отношений при постоянных температуре и давлении». Его результаты противоречили одному их положений теории Дальтона: отношения объемов и весов реагирующих газов оказались совершенно различными. По-видимому, и здесь проявляется атомная структура вещества. Но как именно?

Проблему решил А. Авогадро в 1811 г. Анализируя различные химические реакции, он предположил, что атомы, соединяясь друг с другом, образуют молекулы и высказал гипотезу: *равные объемы газов при одинаковых значениях температуры и давления содержат одинаковое число молекул.* Позднее стало ясно, что гипотеза Авогадро является следствием кинетической теории разреженных газов: при данной температуре равные числа молекул в равных объемах создают одинаковое давление.

Задача 1.1.6. Известно, что в любой реакции из одного объема водорода получается два объема нового газообразного вещества. Докажите, что молекула водорода состоит из двух атомов.

Пример 1.1.7. Установлено, что в результате соединения двух объемов водорода массой $m_1 = 1$ г, с одним объемом кислорода массой $m_2 = 8$ г образуются два объема водяного пара массой $m_3 = 9$ г.

Представим массы газов в виде $m_a = N_a m_{a0}$, где N_a — число молекул, m_{a0} — масса молекулы, $a = 1,2,3$. Из закона сохранения массы имеем

$$N_1 m_{10} + N_2 m_{20} = N_3 m_{30}.$$

Согласно закону Авогадро $N_1 = 2N_0$, $N_2 = N_0$, $N_3 = 2N_0$, N_0 — число молекул в объеме, занимаемом кислородом. Следовательно, мы имеем соотношение $2m_{10} + m_{20} = 2m_{30}$, связывающее массы молекул водорода, кислорода и воды.

А. Докажем, что молекула кислорода состоит из четного числа атомов. Пусть k_a — число атомов в молекуле, $a = 1,2,3$. Тогда $k_2 = 2(k_3 - k_1)$ — четное число. Уравнение реакции $2H_2 + O_2 = 2H_2O$.

Б. Найдем отношения масс молекул кислорода и воды к массе молекулы водорода. Имеем соотношения $m_{20}/m_{10} = 2N_0 m_{20}/2N_0 m_{10} = 2m_2/m_1 = 16$, $m_{30}/m_{10} = N_0 m_{30}/N_0 m_{10} = m_3/m_1 = 9$.

1.1.8. Молекула — реальный объект природы. Несмотря на то, что гипотеза Авогадро объясняла все известные в то время факты и была убедительно доказана в результате измерений относительных молекулярных масс, многие ученые придерживались старых взглядов. И только на конгрессе химиков в Карлсруэ 4 сентября 1858 г. была принята резолюция, закрепляющая понятия атома и молекулы. Закон Авогадро, справедливый только для разреженных газов, положил начало применению математических методов в химии.

Установив новые законы, ученые научились определять во сколько раз масса молекулы одного вещества больше или меньше массы молекулы другого. Другими словами научились определять относительные массы. В тоже время массы и размеры одной молекулы или атома так и не были определены. Это обстоятельство порождало скептицизм и недоверие к атомной гипотезе.

Известный австрийский физик Эрнст Мах считал представления об атомах продуктами чистой фантазии аналогичными ведьмам и привидениям. Действительно, в существовании атомов и молекул можно убедиться только тогда, когда появиться возможность измерить их массу и оценить размеры.

В 1865 г. И.Й. Лошмидт впервые определил размер молекулы — около 10^{-8} см и нашел число молекул газа $N \sim 10^{19}$, содержащихся в 1 см^3 при нормальных условиях. Теперь его называют *числом Лошмидта*. По современным данным $N_L = 2{,}68\ 10^{19}$ см$^{-3}$. Примерно через сорок лет Жан Перрен провел одно из самых замечательных исследований. Выполнив в течение нескольких лет серию экспериментов, и, преодолев множество трудностей, он первый с достаточной точностью получил в 1908 г. значение числа молекул в моле. Его работы окончательно убедили ученый мир в реальности молекул.

Задача 1.1.8. При нормальных условиях (температура 0°С, давление $p = 101{,}3$ кПа) один моль любого газа занимает объем $V = 22{,}4$ л. Получите соотношение, связывающее числа Лошмидта и Авогадро.

1.2. Взаимодействие атомов и молекул

Первые шаги к построению современной теории атомных явлений были сделаны в 1925—1927 гг. после создания квантовой механики. Для нас наиболее важным следствием является то, что эта теория не описывает движение электрона по траектории, а позволяет предсказать положение пространственной области наиболее вероятного местонахождения электрона и вычислить значение полной энергии атома. Эти области получили название орбит или *электронных орбиталей*, а значение полной энергии — энергетического уровня. В соответствии с принципом Паули на одной орбитали могут находиться не более двух электронов. Каждому энергетическому уровню соответствуют одна или несколько орбиталей, определяющие возможную *электронную конфигурацию* атома. В многоэлектронных атомах электроны заполняют орбитали нижних энергетических уровней. О совокупности электронов, заполняющих все орбитали данного энергетического уровня, говорят как о *заполненной оболочке*. Химические свойства элементов определяются электронной конфигурацией внешней оболочки.

1.2.1. Образование молекулы. Атом водорода представляет собой простейший химический элемент. Он состоит из ядра — положительно заряженной частицы, которую назвали *протоном* (от лат. *protos* — первый) и одного электрона. Обычно значение потенциальной энергии взаимодействия частиц, находящихся на достаточно больших расстояниях друг от друга, принимают равным нулю. Полная энергия атома $E = -E_{св} < 0$. Наиболее устойчивому — основному состоянию атома водорода с наименьшим значением полной энергии $E_0 = -13{,}6$ Эв (здесь эВ — внесистемная единица энергии *электрон-вольт*: 1 эВ = 1,6 10^{-19} Дж, 1 Дж = 6,24 10^{18} эВ) соответствует сферически-симметричная орбита — область пространства в окрестно-

сти поверхности сферы радиусом $r_0 = 0{,}053$ нм. Для того, чтобы «развалить» атом водорода, т. е. получить свободные протон и электрон, необходимо передать атому водорода энергию $E_c = -E_0 = 13{,}6$ эВ. Поэтому величину E_c называют *энергией связи*.

В настоящее время известны 116 элементов: 92 элемента (последний в этом ряду уран) встречаются в природе, остальные получены методами ядерной физики. Из этих элементов химики получили свыше полутора миллиона различных молекул.

Относительное содержание основных элементов на Земле: кислород (47,4%), кремний (27,7%), алюминий (8,2%), кальций, железо (4,1%), натрий, магний (2,3%). Представляет интерес относительное содержание основных элементов в теле человека: кислород (60%), углерод (20,2%), водород (10%), азот (2,5%), кальций (2%).

Возможны два вида молекул: молекулы, содержащие одинаковые атомы, и молекулы, содержащие два или более различных атомов. Структура молекулы определяется кулоновским взаимодействием атомов и электронов, валентностью атомов, направленностью и насыщенностью связей. При образовании молекулы заполненные оболочки атомов мало меняются. Электроны внешних оболочек атомов перестраиваются так, что валентности атомов насыщаются.

Простейшей молекулой является молекула водорода, состоящая из двух атомов водорода. Возникает система, которая может находиться в одном из двух электронных состояний с ненасыщенной и насыщенной валентностями. Потенциальная энергия взаимодействия атомов зависит от расстояния r между ядрами и характера электронных состояний. В первом случае потенциальная энергия монотонно уменьшается с увеличением r до значения равного нулю, что соответствует взаимному отталкиванию атомов. Во втором случае потенциальная энергия имеет глубокий отрицательный минимум и возрастает пропорционально $-1/r^6$ до нулевого значения. В этом состоянии увеличивается вероятность пребывания электронов между ядрами. Кулоновское притяжение электронов к ядрам приводит к образованию устойчивой молекулы H_2. Энергия связи основного состояния $E_c = 4{,}48$ эВ или 453,6 кДж/моль. Расстояние между ядрами в устойчивом состоянии $r_0 = 0{,}074$ нм. При $r < r_0$ ядра отталкиваются, а при $r > r_0$ — притягиваются. Расстояние между ядрами водорода и кислорода в молекуле воды $r_0 = 0{,}095$ нм.

Парная «водородная» связь с двумя электронами сильнее связи с одним электроном в ионе H_2^+ ($E_c = 2{,}65$ эВ, $r_0 = 0{,}106$ нм). Если в связи принимают участие три электрона, как в ионе H_2^-, то связь оказывается гораздо более слабой ($E_c = 0{,}75$ эВ), поскольку в состояние с наинизшей энергией можно поместить только два электрона.

Задача 1.2.1. Полная энергия двух свободных атомов водорода $E_1 > 0$. В связанном состоянии, соответствующем устойчивой молекуле водорода, полная энергия $E_0 = -4{,}48$ эВ < 0. Согласно закону сохранения полной энергии изолированной системы два свободных атома водорода никогда не смогут образовать молекулу. Как же образуется молекула водорода?

Графики потенциальной энергии взаимодействия атомов многоэлектронных двухатомных молекул, например кислорода O_2, представляют собой *семейство кривых*, каждая из которых соответствует определенному электронному состоянию молекулы.

Современная физика обладает приборами, позволяющими определить взаимное расположение атомов в любой молекуле. В молекуле CO_2 все три атома расположены на одной прямой, образуя последовательность O–C–O.

Молекула воды имеет форму угла величиной $104{,}5^0$, в вершине которого находится атом кислорода. В молекуле метана CH_4 атомы водорода находятся в вершинах четырехгранной фигуры с равными сторонами, которая называется тетраэдром, а атом углерода расположен внутри на равных расстояниях от вершин. Молекула ДНК состоит из 10^8-10^{10} атомов. Диаметр двойной спирали молекулы ~2 нм, контурная длина достигает 400 мкм.

В 1960 г. была впервые синтезирована молекула без химических связей — двухзвенный *катенан* (от лат. *catena* — цепь), представляющий собой два кольца — звенья цепочки.

1.2.2. Взаимодействие молекул. Межмолекулярное взаимодействие во многом похоже на взаимодействие атомов. Однако имеются и существенные различия. Например, атом кислорода в молекуле воды связан только с двумя атомами водорода и при взаимодействии с другим атомом не образуется новая молекула. Рассматривая взаимодействие молекул, мы обнаружим другую ситуацию — молекула притягивает всех своих соседей. Другая важная особенность: молекулы слабее связаны друг с другом, чем атомы в молекуле. Действительно, энергия, необходимая для разрыва связей между молекулами воды 0,72 10^{-19} Дж, значительно меньше энергии необходимой для разрушения молекулы воды равной 4,75 10^{-19} Дж = 2,963 эВ.

Пример 1.2.2. Распад и синтез молекул. В результате химической реакции «синтеза» два моля водорода и моль кислорода образуют два моля воды и выделяется энергия 136,6 ккал (*калория* — внесистемная единица энергии, 1 кал = 4,186 Дж). Эту реакцию можно записать в виде $H_2 + (1/2)\ O_2 = H_2O + 2{,}963$ эВ. Для реализации обратной реакции — разложения молекулы воды необходимо сообщить энергию 2,963 эВ.

Пример 1.2.3. Ускорение образования трещины в стекле в присутствии воды. Основной строительный элемент большинства форм кремнезема — плотноупакованная тетраэдрическая ячейка, которая состоит из атома кремния (Si), окруженного четырьмя атомами кислорода. Каждый атом кислорода в вершине тетраэдра образует связи с атомами Si, расположенными в центрах двух соседних тетраэдров. При образовании трещины в стекле ячейки отрываются друг от друга в результате разрыва части связей Si–O–Si (рис. 1.2.1 *а*). На фронте трещины открывается следующая связь Si–O–Si. Энергия, необходимая для разрыва связей Si–O в присутствии воды, резко снижается (примерно в 20 раз): для разрыва всех связей Si–O в вакууме требуется 1300 кал/г, в присутствии воды — 78 кал/г. Процесс взаимодействия

молекулы воды с ячейкой включает три стадии. В первой стадии электроны атома кислорода молекулы воды образуют связь с Si, переходя на незанятые орбитали этого атома. В результате один из атомов водорода молекулы воды притягивается к атому кислорода О ячейки. Во второй стадии разрывается связь атома водорода в молекуле воды и он переходит к атому О ячейки, образуя одну гидроксильную группу. Далее происходит распад связи Si O–Si и образуется вторая гидроксильная группа при захвате атомов кислорода и водорода молекулы воды атомом кремния соседней ячейки (рис. 1.2.1 *б*). Трещина продвигается на один элементарный шаг ~0,4—0,5 нм.

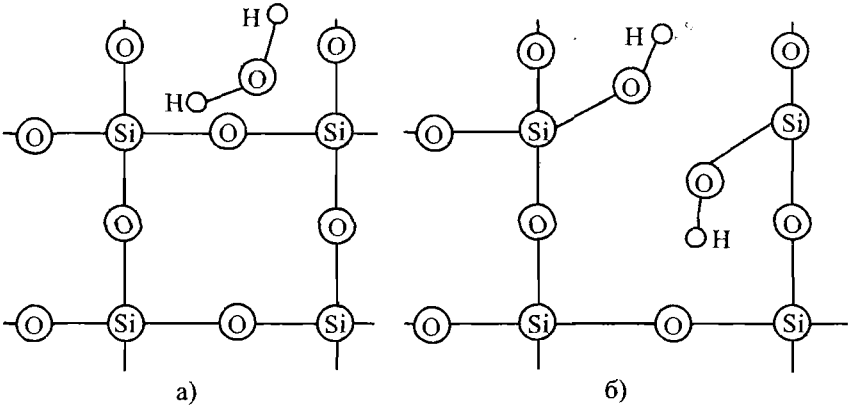


рис. 1.2.1

1.3. Тепловое движение атомов и молекул

Атомы или молекулы вещества находятся в неупорядоченном движении, которое называется тепловым. Неупорядоченность, хаотичность движения — эти термины требуют уточнения. Если траектория «оказывается чрезвычайно запутанной», то она хаотична? (Слово хаос происходит от греческого *chaos* — беспорядок, неразбериха).

В действительности необходимо выяснить имеем ли мы возможность предсказать положение частицы исходя из решений уравнений Ньютона и заданных начальных условий? Начальные положения и скорости частиц можно задать лишь с определенной точностью. Существуют системы, для которых неопределенность в начальных условиях не мешает с необходимой точностью найти конечное положение частиц.

Три десятилетия назад было сделано поразительное открытие. В 1963 г. американец Э. Лоренц обнаружил хаотическое поведение решения системы трех уравнений первого порядка. На языке механики — это система с полутора степенями свободы. Оказалось, что поведение системы непредсказуемо из-за сильной чувствительности решения к точности задания начальных условий. Истинное положение системы оказывается где-то на множестве точек в ограниченной области, которая получила название *странный ат-*

трактор (от англ. *attract* — притягивать). Непредсказуемое движение системы называют хаотическим или детерминированным хаосом. Его синонимы — стохастичность, нерегулярность. Совокупность атомов или молекул вещества в состоянии теплового равновесия типичная хаотическая система.

С другой стороны в возникновении странного аттрактора проявляются новые закономерности в поведении физических систем. Это утверждение имеет далеко идущие последствия. Уже найдены странные аттракторы, возникающие в механических установках и электрических схемах, химических реакциях, при работе сердца и в течениях жидкости. Даже рождение блестящей мысли, возможно, скрывает за собой хаотический процесс. С этой точки зрения хаос представляет нам механизм для проявления свободной воли в мире, управляемом детерминированными законами.

1.4. Агрегатные состояния вещества

Три состояния вещества — газ, жидкость и твердое тело — возникают при изменении внешних условий в результате «конкуренции» двух форм энергии — потенциальной энергии взаимодействия молекул и кинетической энергии теплового движения.

Основная особенность разреженного газа, с которой связано большинство его свойств, заключается в том, что величина потенциальной энергии взаимодействия молекул пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией молекул. Вот почему все разреженные газы должны иметь одни и те же свойства, не зависящие от характера сил взаимодействия между молекулами. Однако при увеличении плотности сходство в поведении различных газов исчезает.

В твердом теле, наоборот, величина потенциальной энергии взаимодействия атомов больше кинетической энергии теплового движения атомов. В жидкостях величина потенциальной энергии приблизительно равна кинетической энергии.

Глава 2. Тепловое равновесие. Температура

2.1. Статистические закономерности

Объектом изучения молекулярной физики являются макроскопические системы. Практически безнадежно пытаться описать движение системы с числом частиц более тысячи, вычисляя координаты и скорости каждой частицы на основе второго закона Ньютона. На первый взгляд может показаться, что такие системы не поддаются математическому описанию. В действительности в макросистемах проявляются закономерности особого типа, совершенно не свойственные системам с небольшим числом частиц. Эти — так называемые *статистические закономерности* не зависят от индивидуального поведения атомов и молекул вещества. Их специфичность проявляется в том, что они теряют смысл при переходе к системе с небольшим числом частиц.

2.2. Тепловое равновесие

Из экспериментов известно, что система многих частиц за небольшой промежуток времени, называемый временем релаксации (от лат. — *relaxatio* — ослабление), достигает состояния с максимальной степенью хаотичности. Подчеркнем, что благодаря взаимодействию между молекулами полностью стирается «память» о начальном состоянии — система переходит в равновесное состояние или в *состояние теплового равновесия*. Именно, хаотизация движения молекул позволяет подойти к изучению макросистем, не решая задачи механики с учетом начальных условий.

2.3. Свойства равновесного состояния

1. Равновесное состояние системы не зависит от предыстории.

2. Переход макросистемы в равновесное состояние необратим.

Рассмотрим сосуд, содержащий одну молекулу, которая движется и упруго сталкивается со стенками. Какова вероятность w_1 того, что молекула окажется в левой половине сосуда? Полное число возможных размещений молекулы в правой и левой частях сосуда равно двум. Поэтому $w_1 = 1/2$. Теперь поместим в сосуд две молекулы. Полное число возможных размещений молекул равно $4 = 2^2$. Вероятность найти две молекулы в левой части сосуда $w_2 = 1/4 = (1/2)^2$. Пусть в сосуде находятся N молекул. Тогда вероятность перехода молекул в левую часть сосуда $w_N = (1/2)^N$. Используя приближенное равенство $2^{10} \approx 10^3$, получим $w_N = (10)^{-0,3N}$. Если $N = 10$, то имеем $w_{10} = (10)^{-3}$, для $N = 100$ вероятность $w_{100} = (10)^{-30}$! Комната объемом 60 м^3 содержит около $\nu = 3 \cdot 10^3$ молей воздуха, состоящего, в основном, из $N = \nu N_A = 18 \cdot 10^{26}$ молекул кислорода и азота. В этом случае вероятность перехода молекул в левую половину w_N практически равна нулю. Именно необратимость характеризует определенную направленность процессов и задает стрелу времени.

3. Равновесное состояние может быть полностью описано при помощи нескольких макроскопических параметров.

4. В равновесном состоянии реализуется определенное распределение молекул по скоростям или по энергиям. Поместим N молекул в объем V. Пусть E — кинетическая энергия поступательного движения молекулы как целого. Разделим шкалу энергии на небольшие фиксированные интервалы ΔE. В состоянии теплового равновесия независимо от начальных условий устанавливается статистическое распределение молекул по энергиям E: каждая из ΔN_1 молекул имеет энергию в интервале значений между E_1 и $E_1 + \Delta E$, каждая из ΔN_2 молекул имеет энергию в интервале между E_2 и $E_2 + \Delta E$, и т. д. Полное число молекул $N = \Delta N_1 + \Delta N_2 + \ldots$. Статистические закономерности носят вероятностный характер. В результате взаимодействия молекул — «столкновений» — энергия молекул изменяется. Поэтому в каждый момент времени статистическое распределение реализуется совершенно различными индивидуальными распределениями. Однако число мо-

лекул ΔN_a в данном интервале значений энергии (E_a, $E_a + \Delta E$) остается постоянным. Величина $\Delta N_a/N$ (a = 1,2, ...) представляет собой вероятность того, что энергия произвольно выбранной молекулы лежит в интервале (E_a, $E_a + \Delta E$).

Если уменьшать интервал ΔE, то величина $N^{-1}(\Delta N/\Delta E)$ в пределе $\Delta E \to 0$ представляет собой непрерывную функцию $w(E)$, называемую *плотностью вероятности*. Поэтому вероятность того, что энергия некоторой молекулы лежит в интервале (E, $E + \Delta E$) можно записать в виде $w(E)\Delta E$. Выражение $\Delta N = Nw(E)\Delta E$ называют максвелловским распределением молекул по энергиям. Функция $w(E)$ впервые найдена Д. Максвеллом в 1859 г.

Основные характеристики случайной величины — *среднее значение* и *дисперсия*. Среднее значение энергии определяется равенством

$$E_{ср} = [E_1 w(E_1) + E_2 w(E_2) + ...]\Delta E. \qquad (2.3.1)$$

Согласно этому определению получим

$$E_{ср} = (E_1 \Delta N_1 + E_2 \Delta N_2 + ...)/N \qquad (2.3.2)$$

Часто для обозначения среднего значения используют угловые скобки $E_{ср} = \langle E \rangle$ или отмечают чертой над буквой E.

Дисперсия $D(E)$ характеризует отклонение случайной величины от среднего значения $D(E) = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \langle E^2 - 2E\langle E \rangle + \langle E \rangle^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$.

2.4. Температура

Две системы находятся в тепловом контакте, если они соприкасаются друг с другом и обмениваются энергией. Внутренняя энергия более нагретой системы уменьшается, поскольку поток энергии направлен от нее к менее нагретому телу. Поток энергии обращается в ноль, когда две системы перейдут в состояние теплового равновесия. Мы хотим описать это состояние вводя новое понятие — *«температура»*. Для количественного определения температуры необходимо найти такую физическую величину, которая была бы одинакова у каждой системы. В 1866 г. австрийский физик-теоретик Л. Больцман, будучи студентом, доказал, что этим свойством обладает средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы E. Проще всего было бы измерять энергию в единицах энергии — Дж. Однако чаще всего температуру измеряют в градусах (от лат. *gradus* — ступенька), исходя из соотношения

$$E_{ср} = 3kT/2, \qquad (2.4.1)$$

где k = 1,38 10^{-23} Дж/К — *постоянная Больцмана*. Следовательно, температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекулы $E = m_м v^2/2$, которая может вращаться как целое, а ее атомы колебаться относительно центра масс.

Возможность интерпретации тепловых явлений в хорошо известных терминах механики явилось одним из величайших достижений науки. Однако в начале двадцатого столетия стало ясно, что область применимости соотношения (2.4.1) ограничена. Согласно (2.4.1) при $T = 0$ тепловое движение вовсе

прекращается хотя известно, что при нулевой температуре гелий остается в жидком состоянии. Это противоречие объясняется тем, что в области низких температур движение частиц не может быть описано законами Ньютона. Здесь проявляются законы квантовой механики. Наиболее общее определение абсолютной температуры приведено в Гл. 9 (см. Дополнение II).

Абсолютная температура. Новый параметр T, введенный соотношением (2.4.1) называется абсолютной (от лат. *absollutus* — безусловный) температурой. Он входит почти во все математические соотношения, отражающие закономерности молекулярной физики. Поэтому возникает принципиальная проблема в измерении абсолютной температуры системы. Для этого нужно выбрать некоторую стандартную систему, находящуюся в некотором стандартном состоянии, и приписать ей некоторое абсолютное значение температуры. По международному соглашению, принятому в 1954 г., в качестве стандартной системы была выбрана вода, а стандартного состояния — равновесное состояние воды, льда и пара. Такой выбор удобен тем, что существует одно-единственное значение давления p = 609 Па и температуры, при которых три фазы воды могут сосуществовать, находясь в равновесии. Это состояние называется тройной точкой воды (см. рис. 5.8.1). В этом состоянии абсолютная температура принята равной $T_т$ = 273,16 К. Теперь численное значение абсолютной температуры T любой системы можно получить сравнением с температурой $T_т$ в тройной точке.

В 1848 г. выдающийся шотландский физик и математик У. Томсон (с 1892 г. лорд Кельвин) ввел шкалу с одной опорной точкой $T_т$, названную шкалой Кельвина. В шкале Цельсия температуре T = 273,16 К соответствует температура t = 0,01°С: обычный нуль шкалы Цельсия находится при T_0 = 273,15 К. Следовательно, температуры в шкалах Кельвина и Цельсия связаны соотношением $T(K) = 273{,}15 + t^0$С.

Используя это соглашение, можно перейти к измерению абсолютной температуры произвольного состояния разреженного газа с помощью газового термометра постоянного давления (см. задачу 3.6.1).

Следует отметить, что любой термометр позволяет измерить не абсолютную температуру системы, а разность температур в двух состояниях теплового равновесия.

В настоящее время получена температура $T = 10^{-9}$ К в системе атомов рубидия, которые конденсируются в одну плотную частицу — суператом.

2.5. Измерение температуры

Термометром мы называем макроскопическую систему, устроенную таким образом, что при отдаче или поглощении теплоты у нее может измениться только один параметр, однозначно связанный с температурой. Если термометр находится в состоянии теплового равновесия с какой-нибудь системой A, то этот параметр принимает некоторое значение, определяющее температуру системы A.

В основе жидкостных термометров лежит свойство вещества расширяться при повышении температуры — различным температурам соответствуют различные объемы жидкости. У большинства жидкостей приращение объема ΔV связано с приращением температуры ΔT соотношением $\Delta V = \gamma \Delta T$, где γ-коэффициент объемного расширения, зависящий, к сожалению, от температуры T.

Для установления температурной шкалы используются характерные свойства воды, в частности температуры плавления льда и кипения воды. Почти во всем мире температура измеряется по *шкале Цельсия*. Интервал этой шкалы между температурами плавления льда и кипения воды при нормальном давлении разделен на 100 равных частей. Эта шкала впервые введена в 1742 г. шведским астрономом А. Цельсием (хотя он сначала принял точку кипения за 0 градусов и точку плавления за 100 градусов).

В температурной шкале, широко используемой в США, точка плавления льда принимается за 32 градуса, точка кипения воды — за 212 градусов. Эта шкала известна как температурная *шкала Фаренгейта*, создавшего в 1724 г. первый ртутный термометр. Между этими двумя точками шкала разделена на 180 равных частей.

Установим связь между температурами по шкалам Фаренгейта и Цельсия следующим образом. 100 градусам по шкале Цельсия соответствует температурный интервал 180 градусов по шкале Фаренгейта. Иначе говоря, градус по шкале Фаренгейта равен градусу по шкале Цельсия умноженному на множитель100/180 = 5/9. В результате изменение на 72 градуса по шкале Фаренгейта соответствует изменению на 72 × 5/9 = 40 градусов по шкале Цельсия. Учитывая, что 0 градусов в этой шкале соответствует 32 градусам на шкале Фаренгейта, находим соотношение между двумя шкалами:

$$t_C = (5/9)(t_F - 32^\circ C),$$

где t_C — температура по шкале Цельсия и t_F — температура по шкале Фаренгейта.

Задача 2.5.1. Вы читали произведение Рэя Бредбери «451° по Фаренгейту»? Получите соответствующее значение температуры в шкале Цельсия. Что происходило при этой температуре?

Задача 2.5.2. При какой температуре показания по шкалам Фаренгейта и Цельсия одинаковы?

2.6. Уравнение состояния.

Одним из параметров, определяющих состояние системы, является *давление* — скаляр $\vec{p}$, определяющий величину нормальной к поверхности компоненты силы, действующей на нее в некоторой точке со стороны среды или другого тела (см. подробнее ч. III, п. 1.1). Величина силы, действующей на элемент плоскости ΔS равна $\Delta F = p\Delta S$.

Напомним, что в СИ *единица давления* — паскаль: 1 Па = 1 Н/м^2. Внесистемные единицы давления: 1 атм (физическая атмосфера) = 760 мм рт. ст. = 101,325 кПа, 1 бар = 10^5 Па. Соотношения между единицами давления:

1 кПа = 7,5 мм рт. ст., 1мм рт. ст. = 133,332 Па.

Для однозначного задания равновесного состояния макросистемы массой m достаточно задать два из трех параметров (давление p, объем V и температура T), поскольку существует функциональное соотношение, связывающее три параметры, называемое *уравнением состояния*. Для каждой реальной системы уравнение состояния определяется из экспериментальных данных или на основе упрощенной модели реальной системы. Его можно записать как функцию $p = p(V,T)$ или $T = T(p,V)$. В случае идеального газа — это уравнение Клапейрона-Менделеева (3.2.2).

2.7. Среднеквадратичная скорость

Поскольку $E = m_м v^2/2$, то из (1.2.2) можно найти величину $v_T = [(v^2)_{ср}]^{1/2}$, называемую среднеквадратичной скоростью: $v_T = (3кT/m_м)^{1/2}$. Подставляя массу молекулы $m_м = M/N_A$, получим $v_T = (3кN_AT/M)^{1/2}$. Произведение $кN_A = R$ называется *универсальной газовой (или молярной) постоянной*, R = 8,314 Дж/(моль·К). Следовательно,

$$v_T = (3RT/M)^{1/2} \qquad (2.7.1)$$

Например, среднеквадратичная скорость молекул азота при температуре t = 27°С равна 516 м/с, кислорода — 484 м/с, водорода — 1934 м/с.

Пример 2.7.1. Два газа, массы молекул которых равны m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$), находятся в двух сосудах. Температуры газов соответственно равны T_1 и T_2 ($T_1 < T_2$). Затем сосуды соединяют. Найдите отношение среднеквадратичных скоростей молекул после установления состояния теплового равновесия.

В состоянии теплового равновесия

$$m_1(v_{1T})^2/2 = 3kT/2,\ m_2(v_{2T})^2/2 = 3кT/2 \quad \text{или} \quad v_{2т} = v_{1т}(m_1/m_2)^{1/2}. \qquad (1)$$

В результате взаимодействия молекул смесь газов переходит в состояние теплового равновесия с температурой T: $T_1 < T < T_2$. Газ из более тяжелых молекул охлаждается, а газ из легких молекул нагревается.

Использование этого эффекта позволило перейти к проектированию ускорителей на встречных пучках, создание которых вначале казалось совершенно безнадежной проблемой. В ускорителе на встречных пучках протоны и антипротоны должны двигаться в накопительных кольцах. Главная трудность состоит в том, что частицы обладают случайным разбросом скоростей перпендикулярных направлению пучка. Поэтому только ничтожная их часть может быть захвачена в накопительное кольцо. Теперь вам будет понятна основная идея метода охлаждения пучка тяжелых частиц (*electron cooling*), предложенного Г.И. Будкером в 1966 г. Пучок протонов смешивают с пучком электронов, в котором средняя скорость электронов $u_{ср}$ близка

к средней скорости протонов. В результате взаимодействия частиц возникает «сила трения», пропорциональная относительной скорости. В системе отсчета, движущейся со скоростью $u_{ср}$, среднеквадратичная скорость протонов уменьшается: выполняется соотношение $v_{рт} = v_{ет}(m_е/m_р)^{1/2}$. В этом случае $(m_р/m_е)^{1/2} = 43$.

Задача 2.7.2. Найдите среднее значение кинетической энергии поступательного движения броуновских частиц, движущихся в воде, при температуре $t = 27°$ С.

Задача 2.7.3. Среднеквадратичная скорость броуновских частиц при температуре $t = 27°$ С равна $v_т = 0{,}5$ см/с. Определите массу частицы.

Пример 2.7.4. Сравним среднеквадратичные скорости молекул при температуре $T = 300$ К со второй космической скоростью $v_{II} = 11{,}19$ км/с. Будут ли удерживаться газы водорода, азота и кислорода в атмосфере?

Если начальная скорость молекулы меньше второй космической скорости v_{II}, то она достигнет некоторой высоты h и упадет на Землю. Величину h можно оценить из уравнения, следующего из закона сохранения полной энергии. Напомним, что полная энергия молекулы равна сумме кинетической энергии молекулы и потенциальной энергии взаимодействия молекулы и Земли

$$W = -Gm_м M_з/r \quad \text{или} \quad W = -m_м g a^2/r,$$

где r — расстояние между центром Земли и молекулой, $M_з$ — масса Земли, $g = GM_з/a^2$, a — радиус Земли. Приравнивая полные энергии на поверхности Земли и на высоте h, получим уравнение

$$(m_м v_т^2/2) - m_м g a = 0 - m_м g a^2/(a + h),$$

из которого найдем величину $h = \varepsilon a/(1 - \varepsilon)$, $\varepsilon = v_т^2/v_{II}^2$, $v_{II} = (2ga)^{1/2}$ — вторая космическая скорость. Очевидно для молекул водорода, азота и кислорода $\varepsilon << 1$, $h << a$.

Возможно, многих читателей успокоили эти оценки — Земля может удерживать в своей атмосфере любой газ. Но в действительности ситуация оказывается не столь простой. Тепловой скоростью обладают подавляющее число молекул. Однако малая их доля имеет скорости значительно отличающиеся от тепловой. Быстрые молекулы, имеющие скорости $v > v_{II}$ могут навсегда покинуть Землю. Более того после высоты 90 км температура атмосферы увеличивается, возрастает и тепловая скорость. Все это приводит к рассеиванию атмосферы в космическом пространстве. Однако этот процесс происходит чрезвычайно медленно: за все время своего существования Земля не потеряла сколько-нибудь заметной доли своей атмосферы.

2.8. Флуктуации

Флуктуации микровеличин. В результате взаимодействия молекул энергия некоторой молекулы хаотически изменяется или, как принято говорить, флуктуирует (от лат. — *fluctuatio* — колебание) около среднего значе-

ния $E_{ср}$. В качестве меры отклонения энергии от среднего значения может быть выбрана дисперсия $D(E) = (E^2)_{ср} - (E_{ср})^2$. В случае разреженного газа $(E^2)_{ср} = 15(\kappa T)^2/4$. Учитывая (1.2.1), получим $D(E) = 3(\kappa T)^2/2$. Относительная флуктуация $\sqrt{D}/E_{ср} = (2/3)^{1/2}$. Флуктуация микровеличины оказывается порядка ее среднего значения.

Флуктуация макровеличин. Мы уже подчеркивали, что физические величины, характеризующие равновесную систему, практически с большой точностью равны своим средним значениям. Однако как ни малы отклонения от средних значений они все же происходят. Отклонение измеряемой величины A от среднего значения $A_{ср}$ называют флуктуацией. Величина относительного отклонения

$$[(A - A_{ср})^2]_{ср}^{1/2}/A_{ср} = 1/N^{1/2},$$

где N — число частиц системы.

В системах обычных лабораторных размеров число молекул порядка числа Авогадро. Поэтому относительная ошибка при вычислении средних величин $\sim 10^{-12}$. Отсюда можно получить представление о точности статистических законов: среднее значение макровеличины практически совпадает с истинным значением. Однако в небольших системах, содержащих $10^4 - 10^9$ молекул, флуктуации приводят к заметным следствиям. В ряде приборов флуктуации ограничивают точность измерений.

Хорошо известно *броуновское* движение капель радиусом ≤ 1 мкм в воздухе и мелких частиц в воде. Флуктуации давления обусловлены тем, что число молекул, сталкивающихся в единицу времени с различными участками поверхности броуновской частицы, изменяется. Частица приобретает приращение импульса и хаотически блуждает, как бы под действием случайных ударов.

Задача 2.8.1. Может ли жидкость быть идеально однородной?

Задача 2.8.2. Оцените относительную флуктуацию концентрации молекул в 1 см^3 воздуха при нормальных условиях.

Задача 2.8.3. Известно, что солнечный свет рассеивается в однородной атмосфере благодаря флуктуациям плотности воздуха. Оцените относительное отклонение числа частиц воздуха в кубике с длиной ребра $\lambda = 500$ нм при нормальных условиях.

Глава 3. Идеальный газ. Термодинамические процессы

3.1 Разреженный и идеальный газы

Характерный размер молекул азота и кислорода, составляющих основную часть воздуха, порядка 0,3 нм. В результате упругого взаимодействия изменяется скорость относительного движения молекул. Однако взаимодействие пары молекул становится становится заметным лишь тогда, когда

расстояние между парой меньше определенного значения a. По отношению к выделенной молекуле все остальные ведут себя как общая мишень площадью $\sigma = \pi a^2$, называемой площадью поперечного *сечения столкновений*. Например, для молекул O_2 при нормальных условиях $\sigma \approx 4\ 10^{-19}$ м^2. Следовательно, $a \approx 0{,}36$ нм.

Пример 3.1.1. Плотность воздуха при нормальных условиях $\rho = 1{,}29$ кг/м^3. Используя результат, полученный в примере 1.1.1, оценим расстояние L между молекулами воздуха $L = N_L^{-1/3}$, где $N_L = \rho N_A/M_в$ — число Лошмидта. Подставляя $M_в = 0{,}02896$ кг/моль, получим $N_L = 2{,}68\ 10^{25}$ м^3, $L = 3{,}3$ нм.

Предположим, что столкновение молекул, т. е. взаимодействие между ними происходит только при сближении центров масс на расстояние меньшее, чем a. Оценим расстояние s, которое пройдет молекула, не взаимодействуя с другими молекулами. Это расстояние называют *длиной свободного пробега*. Столкновение произойдет в том случае, если в объеме $\pi a^2 s$ находится в среднем одна молекула: $\pi a^2 s n \sim 1$, где n-концентрация молекул. При нормальных условиях $n = N_L$, $N_L = 2{,}68\ 10^{25}$ м$^{-3}$, $s = 1/(\pi a^2 N_L) \sim 93$ нм. Эта величина приблизительно в 30 раз больше расстояния между молекулами $L = 3{,}3$ нм. Причина, конечно, заключается в том, что радиус соударения составляет 1/10 среднего расстояния между молекулами и только 1/1000 объема занята молекулами. При более низких давлениях разница еще заметнее — при давлении 10^{-2} Па концентрация молекул $n = 2{,}5\ 10^{18}$м^3, длина свободного пробега $s = 1$ м, среднее расстояние $L \approx 700$ нм.

Таким образом, появляется возможность описать поведение всех достаточно разреженных газов в состоянии теплового равновесия единым образом, вводя модель реального газа — идеальный газ. Это — газ точечных невзаимодействующих частиц. Критерий применимости этой модели к изучению реального газа:

1. величина потенциальной энергии взаимодействия молекул пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией молекул;

2. собственный объем молекул газа мал по сравнению с объемом, занимаемым газом.

3.2. Уравнение состояния идеального газа

В 1834 г. выдающийся французский физик Бенуа Клапейрон установил, что для газа фиксированной массы m в двух различных равновесных состояниях с параметрами (p_1, V_1, T_1) и (p_2, V_2, T_2) выполняется соотношение

$$p_1 V_1/T_1 = p_2 V_2/T_2 = \text{const}. \qquad (3.2.1)$$

В 1874 г. Д.И. Менделеев нашел эту константу, используя следствие закона Авогадро: один грамм-моль *любого газа при одинаковых давлении и температуре* занимают один и тот же объем. В частности, при температуре $T_0 = 273{,}15$ К ($t_0 = 0°$ С) и нормальном давлении $p_0 = 1{,}013\ 10^5$ Па объем одного киломоля газа равен 22,4139 м^3. Если же взять m кг газа, то он займет

объем $(m/M)v_м$, $v_м = 22{,}4136\ 10^{-3}$ м^3/моль. Следовательно, const = $(m/M)p_0v_м/T_0$. Величина $R = p_0v_м/T_0$ одинакова для всех газов. Поэтому она называется *универсальной газовой постоянной*. В СИ величина $R = 8{,}314$ Дж/(моль К). Теперь (3.2.1) принимает вид

$$pV/T = mR/M \qquad (3.2.2)$$

Соотношение (3.2.2) называют *уравнением состояния* идеального газа.

Из (3.2.2) следует, что плотность газа при давлении p и температуре T

$$\rho = Mp/(RT). \qquad (3.2.3)$$

Это соотношение, не содержащее объема газа, представляет собой наиболее общее уравнение состояния идеального газа. Учитывая (3.2.3) получим из (2.7.1) полезное для вычислений величину среднеквадратичной скорости молекул

$$v_Т = \sqrt{3p/\rho}$$

Отношение $m/M = \nu$ равно числу молей газа. Поэтому уравнение состояния можно представить в виде

$$pV = \nu RT. \qquad (3.2.4)$$

Задача 3.2.1. А. Найдем молярную плотность газа — число молей газа в единице объема $\upsilon/v = \rho/M$ при нормальных условиях. Из (3.2.3) получим $\rho/M = p_0/(RT_0) = 1/v_м$, $\rho/M = 44{,}64$ моль/м^3.

Б. Объясните почему молярные плотности идеальных газов имеют одно и тоже значение.

Уравнение состояния газа представляет собой замечательный результат, не имеющий аналогов в других разделах физики — оно универсально, так как описывает все вещества в газообразном состоянии. Именно к этому и стремятся ученые — к нахождению наиболее общих закономерностей. Разреженные газы, будучи существенно простым объектом дали первый пример такого обобщения. В разреженном газе действуют силы притяжения между молекулами. Поэтому из уравнения состояния (3.2.2) следует завышенное значение давления. Из экспериментальных данных следует, что при достаточно малых давлениях и достаточно высоких температурах отношение $r = p/(\rho T)$ представляет собой в соответствии с (3.2.3) постоянную величину равную R/M. В случае воздуха при температуре ~140° С величина r постоянна в области давлений $p < 10^6$ Па; при температуре $t > 0°$ С величина r постоянна при давлениях $p < 10^7$ Па. Однако, углекислый газ CO_2 при температуре $t = 0°$ С ведет себя как идеальный при давлениях $p < 10^5$ Па, а при температуре $t > 100°$ С в области давлений $p < 10^6$ Па.

Вывод уравнения состояния. Уравнение состояния идеального газа может быть получено в рамках кинетической теории газов, не обращаясь к эксперименту. Пусть N — число молекул в объеме V, $m_м$ — масса молекулы. Рассмотрим движение ΔN молекул, имеющих скорости в интервале $[\vec{v}, \vec{v} + \Delta\vec{v}]$ и вы-

числим вначале число молекул, сталкивающихся с элементарной площадкой ΔS стенки сосуда за интервал времени Δt. Направим ось z перпендикулярно плоскости стенки наружу из сосуда и построим над площадкой ΔS цилиндр, образующие которого параллельны скорости $\vec{v}$, а высота равна $v_z\Delta t$, $v_z \geq 0$.

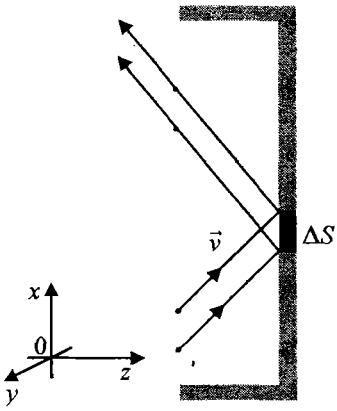


рис. 3.2.1

В течение интервала Δt молекулы, находящиеся в цилиндре объемом $v_z\Delta t\Delta S$ столкнутся со стенкой (рис. 3.2.1). Следовательно, число молекул, столкнувшихся с площадкой ΔS за время Δt равно $\Delta f = (\Delta N/V)v_z\Delta t\Delta S$. Найдем давление, создаваемое при столкновении молекул с площадкой. Согласно (ч. I, 5.3.2) приращение z-компоненты импульса ΔN молекул $\Delta P_z/\Delta t = \Delta F_z^{мол}$, где $\Delta F_z^{мол}$ — проекция силы, действующая на молекулы со стороны стенки. При упругом столкновении приращение импульса $\Delta P_z = [m_м(-v_z) - m_м v_z]\Delta f = -2m_м v_z \Delta f$. Следовательно, $\Delta F_z^{мол} = -2m_м v_z \Delta f/\Delta t$. Согласно третьему закону Ньютона сила, действующая на стенку со стороны молекул, равна $\Delta\vec{F}^{ст} = (0, 0, 2m_м v_z \Delta f/\Delta t)$. В результате столкновений молекул с поверхностью создается давление $p_v = \Delta\vec{F}^{ст}/\Delta S$, $\Delta S \to 0$. Подставляя $\Delta\vec{F}^{ст}$, находим $p_v = 2m_м v_z^2 \Delta N/V$. Давление p, создаваемое всеми группами молекул ΔN_a ($a = 1,2, \ldots$), имеющими все возможные значения компонент v_{xa}, v_{ya}, $v_{az} > 0$, равно сумме парциальных давлений p_v:

$$p = 2\frac{m_м}{V}\sum_a (v_{az}^2 \Delta N_a).$$

Это выражение можно представить в виде

$$p = (\frac{m_м}{V})\sum_a v_{az}^2 \Delta N_a,$$

Здесь z- компоненты скорости принимают положительные $v_{az} \geq 0$ и отрицательные значения $v_{az} \leq 0$. Тогда сумма всех слагаемых равна $N(v_z^2)_{ср}$. Выразим теперь среднее значение $(v_z^2)_{ср}$ через величину, не связанную с выбором системы координат. С этой целью запишем квадрат скорости $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ и найдем среднее значение $(v^2)_{ср} = (v_x^2)_{ср} + (v_y^2)_{ср} + (v_z^2)_{ср}$. Поскольку положение координатных осей выбрано произвольно, а молекулы движутся хаотично, то $(v_x^2)_{ср} = (v_y^2)_{ср} = (v_z^2)_{ср}$. Следовательно, $(v_z^2)_{ср} = (v^2)_{ср}/3$. Давление газа можно представить в виде

$$p = \frac{2}{3}\frac{N}{V}(\frac{m_м v^2}{2})_{ср}, \qquad (3.2.5)$$

где $(m_м v^2/2)_{ср} = E_{ср}$ — среднее значение кинетической энергии поступательного движения молекулы. Согласно определению (2.3.2) величина $E_{ср} = 3\kappa T/2$.

Итак, следуя вычислениям Р. Клаузиуса (1857 г.) и Д. Максвелла (1859 г.), мы получили уравнение состояния идеального газа

$$p = (N/V)kT, \qquad (3.2.6)$$

которое совпадает с уравнением Клапейрона — Менделеева. Действительно, подставляя $N = (m/M)N_A$, получим соотношение (3.2.2), где $R = kN_A$. Из (3.2.5) следует соотношение $\langle v^2 \rangle = 3p/\rho$.

Отметим, что из (3.2.6) следует закон Авогадро: концентрация молекул $n = N/V = p/kT$ зависит только от давления и температуры.

3.3. Закон Дальтона

Пусть сосуд объемом V заполнен смесью газов массой $m = m_1 + m_2 + ...$, где m_s — масса компонента смеси с молекулярной массой M_s (s = 1, 2, ...). Вычисляя, давление создаваемое смесью газов, получим из (3.2.6)

$$p = \frac{N_1}{V}kT + \frac{N_2}{V}kT + \ldots$$

где N_s (s = 1,2, ...) — число молекул а-того сорта. Мы видим, что компонента смеси создает давление $p_s = (N_s/V)kT = (m_s/M_sV)RT$ независимо от присутствия другой. Величину p_s называют *парциальным давлением* (от лат. *partis* — часть). Следовательно, для разреженных газов выполняется закон Дальтона:

$$p = p_1 + p_2 + ... \qquad (3.3.1)$$

Отметим, что (3.3.1) можно представить в виде

$$p = (\nu_1 + \nu_2 + ...)RT/V, \qquad (3.3.2)$$

где $\nu_s = m_s/M_s$ — число молей компонента смеси с молярной массой M_s.

Задача 3.3.1. Смесь водорода и кислорода массой m = 18 г занимает объем V = 22,4 л при температуре t = 0° С и нормальном атмосферном давлении $p = p_0$. Определите массу водорода, кислорода и молярное содержание смеси.

Решение. Имеем систему $m_1/M_1 + m_2/M_2 = pV/RT$, $m_1 + m_2 = m$. Поскольку p_0V/RT = 1 моль, то m_1 = 2 г, m_2 = 16 г, ν_1 = 1 моль, ν_2 = моль/2.

Пример 3.3.2. В реакции $XY_2 = X + 2Y$ все вещества являются идеальными газами. Сосуд вначале содержал ν_1 = 1 моль вещества XY_2 при температуре T_1 = 300 К и давлении $p_1 = 1{,}25\ p_0$, где p_0 —нормальное давление. Затем в сосуд был введен катализатор разложения. После достижения равновесия давление смеси достигло значения $p_2 = 2p_0$ при температуре T_2 = 360 К. Найдем количество молей ν_2 прореагировавшего вещества XY_2.

В результате реакции образовалось $(\nu_1 - \nu_2) + (\nu_2 + 2\nu_2) = \nu_1 + 2\nu_2$ молей смеси. Согласно (3.3.2) имеем два уравнения

$$p_1 = \nu_1 RT/V, \quad p_2 = (\nu_1 + 2\nu_2)RT/V,$$

из которых находим $\nu_2 = \nu_1/2$, ν_2 = 1/2 моль.

3.4. Проблемы дыхания на больших высотах и глубинах

У поверхности Земли атмосфера (от. греч. *atmos* — пар, *sphaira* —сфера) состоит, в основном, из азота и кислорода. В незначительном количестве присутствуют аргон, гелий, водород, неон, водяной пар, углекислый газ, частицы пыли и дыма .

Пример 3.4.1. С достаточной точностью примем, что на долю кислорода и азота приходятся соответственно $f_1 = 0{,}21$ и $f_2 = 0{,}79$ части массы тропосферы (от греч. *tropos* — поворот) — прилегающего к Земле слоя воздуха толщиной порядка 11 км. Процентное содержание газов мало изменяется до высоты 100 км — атмосфера удивительно однородна. Этот слой атмосферы называют гомосферой (от греч. *homos* — ровный, однородный). Найдем парциальное давление кислорода при давлении равном p.

Давление p воздуха массой m объемом V согласно закону Дальтона равно

$$p = p_1 + p_2, \quad p_1 V/T = f_1 mR/M_1, \quad p_2 V/T = f_2 mR/M_2,$$

где $M_1 = 0{,}032$ кг/моль, $M_2 = 0{,}028$ кг/моль. Отсюда находим парциальное давление кислорода $p_1 = p/[1 + (f_2 M_1/f_1 M_2)] = 0{,}233\ p$. Плотность воздуха и концентрации кислорода и азота соответственно равны

$$\rho = \frac{p}{RT}\frac{1}{(f_1/M_1 + f_2/M_2)}, \quad n_1 = \frac{f_1}{M_1}\rho N_A, \quad n_2 = \frac{f_2}{M_2}\rho N_A.$$

«Мешок Гамова». Парциальное давление кислорода при нормальном атмосферном давлении $p = p_0$, $p_0 = 101{,}325$ кПа равно $p_1 = 23{,}57$ кПа = = 176 мм рт. ст. С увеличением высоты парциальное давление уменьшается: $p(h) = p_0 exp(-h/s)$, где $s = 7170$ м. На высоте $h = 4$ км давление $p = 56{,}54$ кПа, парциальное давление кислорода $p_1 = 13{,}15$ кПа. В результате возрастает щелочная компонента крови. В условиях высокогорья могут проявится симптомы горной болезни — головная боль, тошнота, усталость, нарушение координации, возможны отеки легких, рук и ног. Если спуск невозможен, то человека, помещенного в портативную камеру высокого давления можно вывести из состояния комы за несколько минут. Это изобретение названо «мешком Гамова» по имени создателя известного физика-теоретика Георгия Гамова (1904—1968).

На вершине Джомолунгмы (Эвереста) высотой 8848 м (по последним данным массив смещается на 1-2 см в год в сторону Китая) давление $p = 28{,}4$ кПа, парциальное давление кислорода $p_1 = 6{,}6$ кПа. Поэтому для обеспечения нормального кислородного режима, альпинистам рекомендуют пользоваться дыхательной смесью, обогащенной кислородом. Однако практика показывает, что организм может приспособиться к недостатку кислорода. В. Балыбердин, первый из одиннадцати российских альпинистов, ступивших 4 мая 1982 г. на вершину Эвереста, не пользовался кислородной маской. Вымотанный до изнеможения, он достал рацию и сообщил на базу: «Со всех сторон путь только вниз. Что будем делать?»

Человек под водой. Уже давно человечество шаг за шагом осваивает морские глубины. Здесь исследователь встречается со множеством преград. Давление на глубине h равно $p = p_{ат} + \rho_в gh$, $p_{ат} \approx 100$ кПа, $\rho_в = 10^3$ кг/м^3. Оно возрастает на $\Delta p = 98$ кПа при увеличении глубины на 10 м. А это означает, что уже на глубине 10 м давление $p = 200$ кПа вдвое больше атмосферного, а на глубине 40 м — в 5 раз. На глубинах $h < 1{,}5$ м еще удается с усилием дышать через трубку, выступающую над поверхностью воды. Однако, находясь на глубине большей 1,5 м, можно дышать только воздухом, сжатым до давления равного давлению воды на данной глубине. Это стало возможным благодаря изобретенному в 1943 г. французами Ж.И. Кусто и Э. Ганьяном акваланг — автономному устройству с дыхательным аппаратом и баллонами со сжатым воздухом. К сожалению, с их помощью можно погружаться на глубину не более 40 м. С ростом давления воздуха повышается парциальное давление кислорода. И тут же этот газ превращается в опасного врага. На глубине 40 м концентрация кислорода в 5 раз превышает его концентрацию в атмосфере. При длительном дыхании может развиться воспаление легких или начаться судороги из-за нарушения функции нервных центров. Поэтому стремятся сохранить парциальное давление кислорода близкое к нормальному значению. Вторая проблема «азотная». В обычных условиях азот — физиологически нейтральный газ. Однако при большом парциальном давлении он проявляет типичный наркотический эффект, подобный действию «веселящего газа» — оксида азота (I), издавна применяемого для обезболивания в хирургической практике. Поэтому при погружении на большие глубины азот в дыхательной смеси заменяют частично гелием.

Сейчас при разработке подводных месторождений нефти и газа или при спасательных работах водолазы вынуждены спускаться на глубины более чем 300 м и работать в специальных камерах. На глубине 500 м воздух плотнее обычного в 50 раз, да это и не воздух, а практически чистый гелий. Брошенное полотенце плывет как салфетка. Но и махнуть рукой не просто — надо приложить титаническое усилие и превозмочь боль, которая сковывает все мышцы. Звук на расстоянии метра почти не слышен. Из-за высокой теплопроводности гелия весьма ограничен температурный режим: при $t = 32{,}5$°С — сильная жара, при 30,5°С — ужасный холод, озноб идет как бы изнутри. Кровь насыщается газом, приобретает черный цвет и консистенцию сметаны. Подъем на поверхность занимает тридцать суток, иначе происходит декомпрессия — закипает кровь и человек погибает. Поэтому Мировой океан, покрывающий более 70 % поверхности нашей планеты, остается почти неизученным.

3.5. Осмотическое давление

Удивительно, что молекулы растворенного вещества в слабом растворе ведут себя подобно молекулам разреженного газа. На рис. 3.5.1 изображена трубка, разделенная полунепроницаемой перегородкой, сквозь которую могут проникать молекулы растворителя. Перегородка непроницаема для мо-

лекул растворенного вещества. В левое колено трубки нальем раствор, содержащий N_1 молекул вещества и N_0 молекул растворителя, а в правое — чистый растворитель, содержащий N_0 молекул. Поскольку $N_1 << N_0$, то уровни раствора и растворителя практически одинаковы. Через некоторое время поверхности раствора и растворителя устанавливаются на разных уровнях — растворитель стремится разбавить раствор. Это явление называется *осмосом* (от греч. *osmos* — толчек).

рис. 3.5.1

Давление p_1 с левой стороны перегородки и давление p_2 с правой стороны будут различными. Разность $p_1 - p_2 = N_1kT/V$ называется *осмотическим давлением*. Давление в левом колене складывается из давления растворителя и осмотического давления $p_{осм} = m_1RT/(M_1V)$ растворенного вещества массой m_1. Этот закон установлен нидерландским химиком Я.Х. Вант-Гоффом в 1887 г. Объем V с большой точностью равен объему раствора. Отсюда следует, что осмотическое давление совпадает с давлением газа, имеющего ту же концентрацию N_1/V. Следовательно, движение чужеродных частиц в растворителе носит точно такой же характер, как и в газе. Так как концентрация частиц даже в слабых растворах приближается к ее значению в плотных газах, то $p_{осм}$ может быть весьма большой величиной. Например, в клеточной жидкости $m_1/(M_1V) = 0{,}3$ моль/л. При температуре $t = 37°C$ *осмотическое давление в клетке, помещенной в воду, могло* бы достичь значения $p_{осм} = 733{,}2$ кПа. Если в правое колено добавить N_2 молекул другого вещества, то разность давлений становится равной $p_1 - p_2 = (N_1 - N_2)kT/V$. Так можно уменьшить осмотическое давление.

Осмотическое давление открыл в 1748 г. аббат Ж. Нолле, обнаружив «разбухание» в воде бычьего пузыря, наполненного спиртом. Полунепроницаемыми могут быть перегородки из самых различных веществ. Так, например, нержавеющая сталь проницаема только для водорода. Стенки кишечника проницаемы для молекул воды размером 0,38 нм. Если человек будет пить морскую воду, то кишечник обезвоживает ткани и разбухает из-за возникновения осмотического давления.

3.6. Термодинамические процессы и газовые законы

Переход газа из одного равновесного состояния в другое называется термодинамическим процессом или просто процессом. Однако промежуточные состояния не являются равновесными — для них нельзя ввести понятие температуры и уравнение состояния. Поэтому в молекулярной физике ограничиваются изучением только таких процессов, для которых промежуточные состояния незначительно отличаются от равновесных — газ быстро переходит в равновесное состояние, соответствующее значениям промежуточных параметров.

Конкретный процесс задается уравнением процесса, например, $p = p(V)$ или $T = T(V)$.

Циклом называется процесс, в котором начальное и конечное состояния совпадают.

3.6.1. Газовые законы. Существует бесчисленное множество процессов, реализующих переход из начального состояния в конечное. Однако в курсе физики средней школы подробно изучают только три процесса, закономерности которых называют газовыми законами.

1. Закон Бойля-Мариотта. Рассмотрим процесс, задаваемый уравнением $T = T_0$, где T_0 — постоянная величина. Параметры газа одновременно удовлетворяют уравнениям состояния и процесса:

$$pV/T = mR/M,\ T = T_0. \qquad (3.6.1)$$

Исключая из этой системы уравнений T, получим $pV = mRT_0/M$. Поскольку правая часть является постоянной величиной, то имеем $pV = \text{const}$. В такой форме это соотношение — один из первых законов в истории науки — было получено англичанином Р. Бойлем в 1662 г. в результате обработки экспериментальных данных. Спустя четырнадцать лет француз Э. Мариотт уточнил закон Бойля, дополнив формулировку условием «при постоянной температуре» . График функции $p = C/V$, $C = mRT_0/M$ называют *изотермой*.

2. Закон Гей-Люссака. Почти через сто лет в 1802 г. Гей-Люссак исследовал поведение газа в изобарическом процессе. Исключая из уравнения состояния и уравнения процесса $p = p_0$ величину p, имеем:

$$V/T = \text{const} \qquad (3.6.2)$$

Этот же результат был получен Ж. Шарлем в 1787 г., но не был опубликован. Гей-Люссак настоял, чтобы этот закон назвали в честь Шарля. Поэтому во Франции и англоязычных странах соотношение (3.6.2) называют законом Шарля.

3. Изохорический процесс задается уравнением $V = V_0$, где V_0 — постоянная величина. Следовательно, давление и температура связаны соотношением

$$p/T = \text{const} \qquad (3.6.3)$$

Это соотношение в нашей учебной литературе называют *законом Шарля*.

Пример 3.6.1. Газовый термометр постоянного давления состоит из баллона, заполненного газом (He, N_2), соединительной трубки и устройства для измерения положения поршня. В обычной практике пользуются шкалой МПТШ-68 (международная практическая температурная шкала, принятая в 1968 г.). В этой шкале температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении p_0 равна точно $t = 100°$ С. Из (3.6.2) следует, что объем газа в изобарическом процессе пропорционально его температуре. Поэтому объем газа будет играть роль термометрического параметра.

Выберете две опорные точки — температуру плавления льда T_0 и температуру кипения воды $T_к$. Температурный интервал $T_к - T_0$ примем равным

ста градусам. Опустим баллон с газом в тающий лед. После установления равновесного состояния объем газа $V_0 = \nu RT_0/p$. При тепловом контакте баллона с кипящей водой объем газа $V_к = \nu RT_к/p$. Произвольной температуре соответствует объем $V = \nu RT/p$. Очевидно,

$$\frac{T-T_0}{T_к-T_0}=\frac{V-V_0}{V_к-V_0} \quad \text{или} \quad T=T_0+\frac{V-V_0}{V_к-V_0}(T_к-T_0).$$

Этим соотношением определяется универсальная газовая шкала температуры.

3.6.2. Адиабатический процесс. Возможно, вы помните как быстро нагревается насос при подкачке шины велосипеда или обратили внимание на облачко тумана, которое появляется у горлышка бутылки с охлажденным лимонадом сразу, как только ее открыли. Эти явления объясняются тем, что воздух адиабатически сжимается или расширяется. Адиабатический процесс задается уравнением

$$pV^n = \text{const}, \tag{3.6.4}$$

Для воздуха $n = 1{,}4$.

Задача 3.6.2. Найдите зависимость температуры газа от объема $T = T(V)$ при адиабатическом процессе.

Решение. Пусть начальное состояние задано параметрами (p_0, V_0, T_0). Тогда параметры газа (p, V, T), соответствующие адиабатическому процессу удовлетворяют системе уравнений

$$pV/T = p_0V_0/T_0, \;\; pV^n = p_0V_0^{\,n}.$$

Исключая давление p, получим зависимость температуры от объема

$$T = T_0(V_0/V)^{n-1}.$$

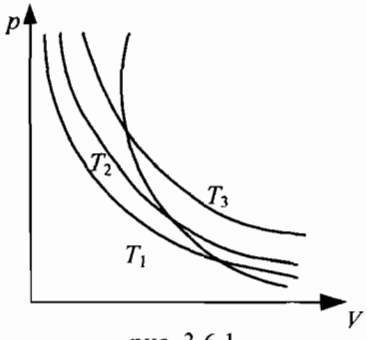


рис. 3.6.1

Поскольку $n > 1$, то расширение газа сопровождается охлаждением, а сжатие — нагреванием.

Для того, чтобы этот результат стал более наглядным, построим в координатах (p, V) график функции $p = p_0(V_0/V)^n$, называемый адиабатой, и нанесем на нее сетку изотерм $p = p_0(V_0/V)(T/T_0)$, соответствующих значениям $T = T_1, T_2, T_3$ ($T_1 < T_2 < T_3$). Так как $n > 1$, то адиабаты на рисунке 3.6.1 пересекает изотермы: газ, адиабатически расширяясь, переходит в состояния, соответствующее изотермам с уменьшающимися температурами.

В повседневной жизни мы часто встречаемся с проявлениями адиабатических процессов, не подозревая этого. Всплывание пузырьков воздуха,

движение воздушных масс в атмосфере, распространение звуков при разговоре, расширение газа из баллончика в сифон — все эти явления связаны с адиабатическим процессом.

3.7. Общий метод решения задач по теме «Газовые законы» и «Процессы»

1. Запишите параметры состояний, указанные в условиях и вопросе задачи. Некоторые из них заданы, другие необходимо определить.

2. Запишите уравнение (3.2.2) для каждого состояния.

3. Запишите уравнение процесса.

4. Если объем газа ограничен подвижным поршнем, то необходимо записать условие механического равновесия. В любой точке однородной несжимаемой жидкости плотности ρ условие равновесия имеют вид

$$\rho_ж gz + p = \text{const}, \qquad (3.6.5)$$

где $\rho_ж$ — плотность жидкости, z — координата точки в системе координат с осью z, направленной вертикально вверх (см. ч. III).

5. Полученные соотношения должны представлять собой систему уравнений относительно неизвестных величин. Убедитесь, что число уравнений совпадает с числом неизвестных величин. Решите систему уравнений.

Пример 3.7.1. В камере объемом $V = 6$ л давление воздуха $p_1 = 0{,}1$ МПа. Найти промежуток времени τ, необходимый для того, чтобы накачать в камеру воздух до давления $p_2 = 0{,}5$ МПа, если при каждом цикле насос захватывает из атмосферы воздух объемом $V_0 = 0{,}5$ л. Длительность одного цикла $\tau_0 = 0{,}1$ с, температура воздуха постоянна.

Формулировка этой задачи, взятой из известного сборника, некорректна, т. к. не указан процесс перехода из одного состояния в другое. Из ответа можно заключить, что процесс — изотермический. Обычно при работе насоса реализуется адиабатический процесс. Предположим для упрощения вычислений, что все процессы изотермические.

Параметрами состояний являются масса давление, объем и температура. В задаче указаны три состояния — начальное с параметрами m_1, p_1, V, T_0, конечное с параметрами m_2, p_2, V, T_0 и состояние воздуха в камере насоса с параметрами m_0, p_1, V_0, T_0. Следовательно,

$$p_1V = m_1RT_0/M,\ \ p_2V = m_2RT_0/M,\ p_1V_0 = m_0RT_0/M. \qquad (1,2,3)$$

Поскольку насос должен сделать τ/τ_0 циклов, то

$$m_2 = m_1 + m_0\tau/\tau_0. \qquad (4)$$

Подставляя m_1, m_2, m_0 из (1)—(3) в (4), получим

$$\tau = (p_2/p_1 - 1)(V/V_0)\tau_0.$$

Подставляя числовые значения параметров, находим $\tau = 4{,}8$ с.

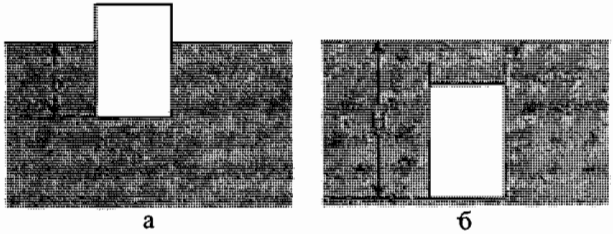
Задача 3.7.2. Тонкостенный цилиндрический стакан высотой a = 11,96 см закрыт невесомым поршнем, который может скользить без трения по внутренней поверхности. Внутри стакана находится воздух при атмосферном давлении p_0 = 100 кПа. Вначале стакан плавает в воде, погрузившись на глубину b = 10 см (рис.3.7.1 *а*). Предположим, что сжатие воздуха представляет собой изотермический процесс. Этого можно добиться медленно погружая стакан в воду.

А. На какую максимальную глубину H можно погрузить стакан, чтобы он еще плавал?

Решение. Пусть m_c — масса стакана, m — масса воздуха в стакане. В исходном положении на рисунке 3.7.1 *а* давление воздуха в стакане $p_1 = p_0$, объем $V_1 = aS$ (S — площадь сечения стакана), температура $T_1 = T$. Уравнение состояния и условие плавания имеют вид

$$p_0 aS = mRT/M \quad (1),$$

$$\rho g b - m_c g = 0, \quad (2)$$



а б

рис. 3.7.1

В положении, изображенном на рисунке 3.7.1 *б*, H — расстояние от поверхности воды до дна стакана, x — расстояние между дном и поршнем. Давление воздуха в стакане $p_2 = p_0 + \rho g(H - x)$, объем воздуха $V_2 = xS$, температура $T_2 = T$. Уравнение состояния и условия плавания:

$$[p_0 + \rho g(H - x)]xS = mRT/M \quad (3)$$

$$\rho g x S - m_c g = 0 \quad (4)$$

Из уравнений (2) и (4) мы получим очевидный результат $x = b$: в начальном и конечном состояниях выталкивающая сила должна быть одинакова. Подставляя значение $x = b$ в (3) и, исключая из (1),(3) массу воздуха, получим уравнение

$$[p_0 + \rho g(H - b)]b = p_0 a \quad (5)$$

Отсюда находим

$$H = b + p_0(a - b)/(\rho g b) \quad (6)$$

Подставляя числовые данные, получим H = 2,1 м.

Б. Погрузим стакан на глубину H_1 = 2,6 м. На какую величину должно измениться атмосферное давление, чтобы стакан всплыл?

Решение. Величина атмосферного давления p_1, при котором стакан всплывет удовлетворяет уравнению, аналогичному (5):

$$[p_1+\rho g(H_1-b)]b = p_0 a$$

Учитывая (6), найдем приращение атмосферного давления

$$\Delta p = p_1 - p_0 = \rho g(H - H_1),\ \Delta p = -4{,}9 \text{ кПа}$$

Задача 3.7.3. На рисунке 3.7.2 *а* изображена pV диаграмма цикла, проведенного с одним молем газа. Параметры *a*, *b*, *c* — состояний $p_1 = p_0/2$, $p_2 = p_0$, $V_1 = V_0$, $V_2 = 2V_0$ удовлетворяют условию $p_0V_0 = \nu RT_0$, ν = 1 моль.

А. Представьте диаграмму цикла в координатах (T,p).

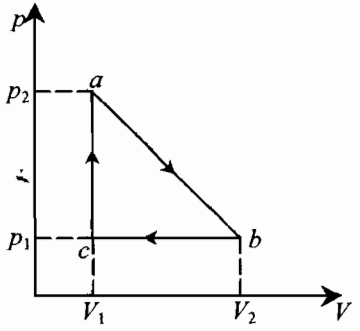


рис 3.7.2 *а*

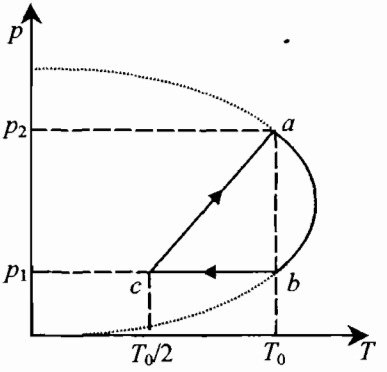


рис. 3.7.2 *б*

Решение. Используя уравнение (3.2.4), вычислим температуру в состоянии *a*:

$$p_2V_1/T_a = \nu R \quad \text{или} \quad p_0V_0/T_a = \nu R.$$

Поскольку $p_0V_0 = \nu RT_0$, то $T_a = T_0$. Аналогичным образом находим температуры состояний *b* и *c*: $T_b = T_0$, $T_c = T_0/2$. Участок *bc* — изобара в новых координатах на рисунке 3.7.2 *б* представляет собой отрезок горизонтальной прямой. Изохорический процесс *ca*, определяемый уравнениями $pV = \nu RT$, $V = V_0$ изображается в координатах (T, p) отрезком прямой линии $p = p_0T/T_0$. Участок *ab* на рисунке 3.7.2 *а* описывает новый неизвестный вам процесс. В координатах (V, p) — это отрезок прямой линии

$$p = p_2 - (p_2 - p_1)(V - V_1)/(V_2 - V_1) \quad \text{или} \quad p = 3p_0/2 - p_0V/2V_0.$$

Исключая V с помощью (3.2.2), получим уравнение процесса в координатах (T, p):

$$T = 2T_0(3/2 - p/p_0)p/p_0,\ T \geq T_0.$$

Мы получили уравнение параболы. Цикл в координатах (T, p) изображен на рисунке 3.7.2 *б*.

Б. Определите максимальное значение температуры T_m газа в рассматриваемом циклическом процессе.

Выделяя полный квадрат $T/(2T_0) = -(p/p_0 - 3/4)^2 + 9/16$, получим значение $T_m = 9T_0/8$ при давлении $p_m = 3p_0/4$.

Задача 3.7.4. Состояние одного моля газа изменяется в циклическом процессе *abcda*, изображенном на рисунке 3.7.3 в координатах (p, T). Представьте диаграмму цикла в координатах (V, T).

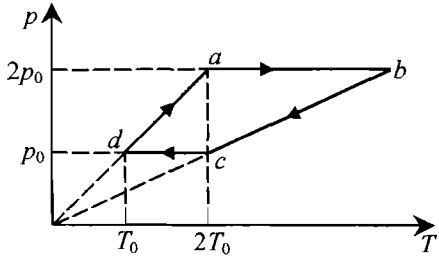


рис. 3.7.3

Пример 3.7.5. Невесомый поршень может скользить по гладкой внутренней поверхности вертикально расположенного цилиндра сечением $S = 98$ см^2. Начальная температура воздуха $T_0 = 300°$ К, атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа. Цилиндр герметически закрыли поршнем и поставили на него груз массой $m = 73$ кг. При движении поршня реализуется процесс $pV^{3/2} = \text{const}$. Найдем значение температуры T_e в момент времени, соответствующий прохождению поршнем положения равновесия и границы движения поршня.

Пусть V_0 — начальный объем цилиндра, $V(t)$ — объем цилиндра под поршнем в момент времени t. На поршень действуют сила давления груза mg, сила давления атмосферы p_0S и сила давления воздуха в цилиндре pS. Запишем уравнение состояния, уравнение процесса и уравнение движения

$$pV/T = p_0V_0/T_0,\ \ pV^{3/2} = p_0V_0^{3/2},\ \ ma = -mg - p_0S + pS, \qquad (1, 2, 3)$$

где a — ускорение поршня с грузом.

Направим ось x с началом на уровне основания цилиндра вертикально вверх. Пусть L — длина цилиндра, $x(t)$ — координата, соответствующая положению плоскости поршня в момент времени t. Тогда уравнения (1)—(3) приобретают вид

$$px/T = p_0L/T_0,\ \ px^{3/2} = p_0L^{3/2},\ \ ma = -mg - p_0S[1 - (L/x)^{3/2}]. \qquad (4, 5, 6)$$

Из условия $a = 0$ находим значение координаты в состоянии механического равновесия поршня $x_e = Lq^{-2/3}$, $q = 1 + mg/p_0S$. Из этой системы уравнений находим $T_e = T_0(L/x_e)^{1/2} = T_0[1 + mg/p_0S]^{1/3}$, $T_e = 360$ К.

Найдем теперь область координат, в которой может двигаться поршень. Пусть v — скорость поршня в момент времени t. Умножая уравнение (6) на v, представим результат в виде

$$d[mv^2/2 + W(x)]/dt = 0, \quad \text{или} \quad mv^2/2 + W(x) = \text{const},$$

где $W(x) = mgx + [x + 2L(L/x)^{1/2}]$ — «потенциальная» энергия груза. Учитывая начальные условия, получим уравнение, позволяющее найти функцию $v = v(x)$:

$$mv^2/2L = (mg + p_0S)(1 - x/L) - 2p_0S(L/x)^{1/2}[1 - (x/L)^{1/2}].$$

Теперь из неравенства $v^2 \geq 0$ найдем область возможных значений x-координаты

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ x_1 = (L/2)[1 + 4/q - (1 + 8/q)^{1/2}],\ x_2 = L.$$

Очевидно, что при $m = 0$, $x_1 = x_2 = L$. Скорость поршня при прохождении положения равновесия $v(x_e) = [(2p_0SL/m)(q - 3q^{1/3} + 2)]^{1/2}$.

Покажите, что в окрестности $x = x_e$ поршень совершает линейные колебания с частотой ω ($\omega^2 = 3p_0Sq^{5/3}/2mL$).

3.8. Уравнение состояния неидеального газа

Модель идеального газа описывает состояние реального газа тем лучше, чем меньше его плотность. Учет взаимодействия частиц представляет собой сложную математическую задачу кинетической теории газа. В грубом приближении давление можно представить в виде разложения по плотности числа частиц

$$p = (N/V)kT[1 + (N/V)B(T) + (N/V)^2C(T) + \ldots],$$

где B, C, ... — так называемые *вириальные коэффициенты*.

Однако можно эмпирическим путем подобрать уравнение состояния, описывающее опытные данные в широком диапазоне изменения параметров. В 1873 г. голландский физик Ван-дер-Ваальс предложил уравнение состояния

$$(p + a/V^2)(V - b) = \nu RT,$$

которое в «подправленной» трактовке позволяет количественно описать явление конденсации. Здесь a, b — постоянные. Величина b учитывает конечный объем, занимаемый молекулами газа, постоянная a — взаимодействие молекул. Поправка к давлению связана с уменьшением давления, обусловленным притяжением молекул.

Глава 4. Первый закон термодинамики

Значительно раньше молекулярной физики возникла термодинамика — наука о наиболее общих свойствах макроскопических систем, находящихся в равновесном состоянии и закономерностях преобразования различных форм энергии. Термин термодинамика происходит от греческих слов «терме» (*therme*) — тепло и «динамизм» (*dynamikos*) — силовой. Термодинамика строится на основе фундаментальных принципов, которые являются обобщения опытных данных и выполняются независимо от конкретной структуры систем. Поэтому законы термодинамики имеют универсальный характер. Такой подход

оказался возможным только потому, что равновесные свойства систем сравнительно мало зависят от природы частиц, составляющих макроскопическую систему. Обоснование законов термодинамики дается статистической физикой.

4.1. Внутренняя энергия

В термодинамике движение системы как целого обычно не рассматривается. По этой причине полная энергия системы равная сумме кинетической энергии молекул и потенциальной энергии взаимодействия молекул называется *внутренней энергией*. Внутренняя энергия идеального газа равна кинетической энергии молекул. Кинетическая энергия одной молекулы равна сумме кинетической энергии поступательного движения, энергии вращения и энергии колебаний атомов относительно центра масс.

4.1.1. Одноатомный газ. В этом случае кинетическая энергия молекулы совпадает с энергией движения молекулы как целого. В соответствии с определением (2.3.3), (2.4.1) среднее значение внутренней энергии (далее будем использовать термин — энергия) идеального одноатомного газа массы m равна

$$U = N(3\kappa T/2) \quad \text{или} \quad U = 3mRT/2M \tag{4.1.1}$$

Неожиданный, на первый взгляд, результат: энергия идеального газа не зависит от давления.

4.1.2. Двухатомный газ. В этом случае кинетическая энергия равна сумме поступательной энергии (4.1.1), энергии вращения, равной mRT/M, и энергии колебаний ядер атомов молекулы. Однако в области температур до 2000° С колебания атомов молекулы не возбуждаются. В результате имеем $U = 5mRT/2M$.

4.2. Первый закон термодинамики

При переходе системы из состояния 1 в состояние 2 внутренняя энергия изменяется. В термодинамике приращение внутренней энергии представляют в виде двух слагаемых:

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + A_{12} \tag{4.2.1}$$

где A_{12} — часть приращения, связанная с изменением объема системы, называется работой, совершаемой внешними силами над системой, Q_{12} — часть приращения, не связанная с изменением объема, называется количеством теплоты, переданной системе внешней средой. Соответственно работа, совершаемая системой над внешними телами $A'_{12} = -A_{12}$; количество теплоты, переданной системой окружающей среде $Q'_{12} = -Q_{12}$. Поэтому первый закон термодинамики (4.2.1. *а*) часто записывают в виде

$$Q_{12} = U_2 - U_1 + A'_{12} \tag{4.2.2}$$

Понятия работа и количество теплоты связаны с переходом системы из одного состояния в другое, а величины U_1 и U_2 определяются только начальным и конечным состояниями. Приращение энергии $U_2 - U_1$ не зависит от параметров промежуточных состояний, в то время как работа и количе-

ство теплоты зависят от уравнения процесса. *Следовательно, работа и теплота являются двумя формами передачи энергии.*

В СИ единицей работы и количества теплоты является джоуль. Внесистемная единица теплоты — *калория*: 1 кал = 4,186 Дж.

Эквивалентность количества теплоты и работы, т.е. возможность измерения и сравнения в одних и тех же единицах была доказана немецким врачом Ю. Майером в 1841—1845 гг и английским физиком Дж. Джоулем в 1841—1850 гг. Закон сохранения энергии сформулирован Ю. Майером и немецким ученым Г. Гельмгольцем в 1847 г.

4.3. Термодинамическая работа

Найдем работу, совершаемую внешними телами над системой при переходе из состояния (p_1, V_1) в состояние (p_2, V_2). С этой целью вначале вводят понятие *элементарной работы* δA при бесконечно малом приращении объема ΔV в интервале (V, $V + \Delta V$)

$$\delta A = -p(V)\Delta V \qquad (4.3.1)$$

Буква δ (вместо Δ) введена с целью обратить внимание на то, что величина δA является единым символом — элементарной работой, а не «приращением работы».

Для того чтобы найти функцию $p = p(V)$ необходимо использовать уравнение процесса и уравнение состояния. Произведение $p(V)\Delta V$ представляет собой «площадь» прямоугольника высотой $p(V)$ с бесконечно малой шириной ΔV. Суммируя элементарные работы в интервале $[V_1, V_2]$, получим полную работу при конечном изменении объема. Она численно равна взятой со знаком минус площади фигуры, ограниченной в координатах (V, p) отрезком $[V_1, V_2]$, кривой $p = p(V)$ и прямыми $V = V_1$, $V = V_2$.

Работа при изобарическом процессе. В наиболее простом случае изобарического процесса $p(V) = p_0$ работа, совершаемая внешними телами над газом

$$A_{12} = -p_0(V_2 - V_1) \qquad (4.3.2)$$

Работа, совершаемая газом при изобарическом изменении объема от значения V_1 до значения V_2 равна

$$A'_{12} = p_0(V_2 - V_1) \qquad (4.3.3)$$

Работа при изотермическом процессе. При изотермическом процессе $T = T_0$, давление — функцию $p(V) = \nu RT_0/V$ найдем из системы уравнений $T = T_0$, $pV = \nu RT$. Работа, совершаемая газом при изотермическом изменении объема от значения V_1 до значения V_2 получим в результате вычисления определенного интеграла

$$A'_{12} = \int_{V_1}^{V_2} dV\, p(V) = \nu RT_0 \int_{V_1}^{V_2} dV/V = \nu RT_0 ln(V_2/V_1).$$

Работа при адиабатическом процессе. В этом случае имеем $pV^n = \text{const}$. Найдем работу, совершаемую газом, используя первый закон термодинамики и уравнение состояния:

$$A'_{12} = C\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^n} = \frac{p_1V_1}{n-1}[1-(\frac{V_1}{V_2})^{n-1}].$$

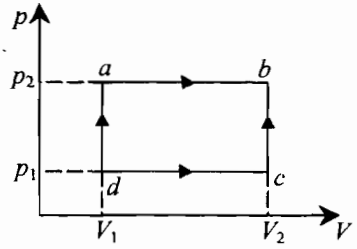


рис. 4.3.1

Задача 4.3.1. На рисунке 4.3.1 изображена pV-диаграмма цикла $abcda$, проведенного с ν молями газа.

А. Найдите работу A', совершаемую газом.

Решение. На участке ab совершаемая работа, равная согласно (4.3.2), величине $A'_{ab} = p_2(V_2 - V_1)$. На участках bc и da поршень неподвижен: газ не совершает работы. На участке cd работа $A'_{cd} = p_1(V_1 - V_2)$. Полная работа $A' = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$ равна площади прямоугольника $abcd$.

Б. Найдите работу, совершаемую газом при проведении процесса $adcba$ в направлении, противоположном, указанному стрелкой на рисунке 4.3.1.

Пример 4.3.2. На рис. 3.7.2 *а* изображена диаграмма цикла, проведенного с одним молем одноатомного газа. Учитывая условие задачи 3.7.3, найдем работу, совершаемую газом:

А. в процессе ab работа равна площади трапеции abV_1V_2: $A'_{ab} = 3p_0V_0/4$,

Б. в процессе bc работа $A'_{bc} = p_1\Delta V = -p_0V_0/2$,

В. в процессе ca работа $A'_{ca} = 0$,

Г. в цикле $abca$ газ совершает работу $A' = p_0V_0/4$.

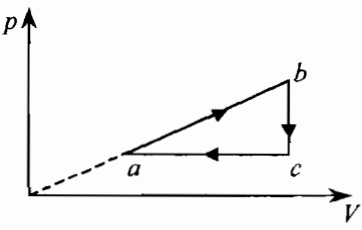


рис. 4.3.2.

Задача 4.3.3. На рис. 4.3.2 изображена pV-диаграмма цикла $abca$, проведенного с ν-молями газа. Температуры в состояниях a и b равны соответственно T_a и T_b.

А. Докажите, что температура в состоянии c равна $T_c = \sqrt{T_aT_b}$.

Б. Докажите, что работа, совершаемая газом в цикле $A' = (\nu R/2)(\sqrt{T_a} - \sqrt{T_b})^2$.

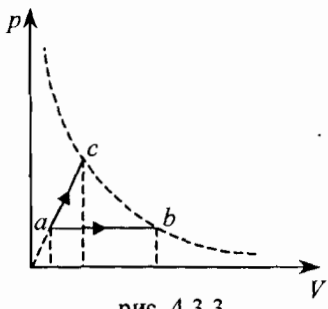


рис. 4.3.3.

Задача 4.3.4. На рис. 4.3.3. изображены графики двух процессов $a \to b$ и $a \to c$ в координатах давление-объем. Точки b и с лежат на изотерме. Найдите отношение работ, совершаемых газом в процессах $a \to c$ и $a \to b$.

Решение. Уравнение процесса $a \to c$ в области $V_a \le V \le V_c$ имеет вид $p = kV$. Учитывая уравнение процесса, находим

$$A'_{ac} = (1/2)(p_c + p_a)(V_c - V_a) = (1/2)(p_cV_c - p_aV_a).$$

Поскольку $p_cV_c = p_aV_b$, то $A'_{ac} = (1/2)p_a(V_b - V_a) = (1/2)A'_{ab}$.

4.4. Количество теплоты

При бесконечно малом изменении объема и температуры первый закон термодинамики (4.2.1) можно представить в виде

$$\Delta U = \delta Q - p(V)\Delta V, \qquad (4.4.1)$$

где δQ — *элементарное количество теплоты*, переданное системе внешней средой. Мы не приводим здесь аналитическое выражение элементарного количества теплоты δQ, аналогичное (4.3.1), поскольку оно формулируется в терминах нового понятия энтропия (см. Дополнение, Гл. 9), не изучаемого в рамках существующей программы. В школьном курсе величина δQ вычисляется косвенным образом из первого закона термодинамики (4.4.1)

$$\delta Q = \Delta U + p(V)\Delta V \qquad (4.4.2)$$

Количество теплоты, переданное системе, как и термодинамическая работа, зависит от процесса перехода из начального в конечное состояние.

До середины XIX века продолжался спор о природе теплоты. Сторонники теории теплорода представляли теплоту как некоторую жидкость, содержащуюся в теле. Сейчас мы знаем, что утверждения о «количестве теплоты, заключенной в теле» или о «тепловой энергии» тела лишены смысла. Действительно, для цикла на рисунке 4.3.1 имеем согласно (4.2.1): $0 = Q - A'$ или $Q = A'$. Для того, чтобы газ совершил работу A', необходимо передать количество теплоты $Q = A'$. Если бы газ в состоянии a обладал определенным количеством теплоты Q_a, то в результате циклического процесса приращение теплоты было бы равно нулю. Однако, мы доказали, что $Q = A' \neq 0$. *Теплота, как и работа, связана не с внутренней энергией, а с ее приращением в результате проведения конкретного процесса.*

Различие между количеством теплоты и работы полезно рассмотреть исходя из определения среднего значения внутренней энергии (2.3.1): $U = \sum E_a w_a$, где w_a — вероятность того, что система находится в состоянии с полной энергией E_a. При изменении какого-либо внешнего параметра, например объема, на малую величину приращение внутренней энергии

$$\Delta U = \sum w_a \Delta E_a + \sum E_a \Delta w_a.$$

Первый вклад в приращение внутренней энергии обусловлен изменением полной энергии молекулы, второй — изменением числа молекул с энергиями E_a. Первый вклад — элементарная работа, второй — элементарное количество теплоты.

4.5. Теплоемкость

Предположим, что системе массой m сообщили количество теплоты δQ. В результате температура системы увеличилась на бесконечно малую вели-

чину ΔT. Отношение $c = \delta Q/(m\Delta T)$ называют удельной теплоемкостью системы. Эта величина как и δQ, зависит от процесса. Размерность [c] = Дж/(кг·К).

4.5.1. Теплоемкость системы в изохорическом процессе $V = V_0$. В этом случае из первого закона термодинамики находим $\delta Q = \Delta U$. Величину $c_V = \Delta U/m\Delta T$ называют *удельной теплоемкостью системы при постоянном объеме.* Для одноатомного газа из (4.1.1) имеем $\Delta U = 3mR\Delta T/2M$. Следовательно, $c_V = 3R/2M$.

Более фундаментальным понятием является *молярная теплоемкость* $C_V = \Delta U/\nu\Delta T$, определяемая количеством теплоты, сообщаемой одному молю для увеличения его температуры на 1К. Действительно для всех одноатомных газов $C_V = Mc_V$,

$$C_V = 3R/2 = 12{,}478 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}.$$

Согласно определению величины c_v внутреннюю энергию многоатомного идеального газа можно представить в виде

$$U = mc_VT \quad \text{или} \quad U = \nu C_VT \tag{4.5.1}$$

Задача 4.5.1. Найдите приращение внутренней энергии воздуха в комнате, если после включения нагревателя температура возросла от значения T_1 до T_2.

Решение. Согласно (4.5.1)

$$\Delta U = c_v(m_2T_2 - m_1T_1) = c_v\Delta(mT).$$

Поскольку объем и давление постоянны, то из уравнения состояния следует, что $\Delta(mT) = 0$, $\Delta U = 0$. Почему же топят печи?

Задача 4.5.2. В двух сосудах находятся ν_1 и ν_2 молей идеальных газов. Давления и температуры газов соответственно равны p_1, T_1 и p_2, T_2. Затем сосуды соединяют и смесь газов переходит в равновесное состояние. Найдите температуру T и давление p смеси газов.

Решение. Поскольку сумма внутренних энергий газов остается постоянной, то

$$\nu_1C_VT_1 + \nu_2C_VT_2 = (\nu_1 + \nu_2)C_VT \rightarrow T = (\nu_1T_1 + \nu_2T_2)/(\nu_1 + \nu_2).$$

Давление смеси

$$p = \frac{(\nu_1 + \nu_2)RT}{V_1 + V_2}, \rightarrow p = \frac{(\nu_1T_1 + \nu_2T_2)p_1p_2}{\nu_1T_1p_2 + \nu_2T_2p_1}.$$

Полагая $\nu_1 = \nu_2$, $T_1 = 300$ К, $p_1 = p_0$, $T_2 = 400$ К, $p_2 = 2p_0$, получим $T = 350$ К, $p = 1{,}4p_0$.

4.5.2. Теплоемкость при постоянном давлении $p = p_0$. В изобарическом процессе, из (4.4.2), имеем $\delta Q = \Delta U + p_0\Delta V = \Delta(U + p_0V)$. Поскольку $p_0V = mRT/M$, то $\delta Q = (m/M)(Mc_V + R)\Delta T$. Следовательно, *молярная теплоемкость при постоянном давлении* $C_p = Mc_p = M\delta Q/(m\Delta T)$,

$$C_p = C_V + R.$$

В англоязычной научной литературе это соотношение называют законом Карно. Для одноатомного газа $C_p = 5R/2$.

Таким образом, количество теплоты, переданное системе при постоянном давлении, можно представить в виде

$$Q_{12} = \nu C_p(T_2 - T_1) \qquad (4.5.2)$$

4.5.3. Классическая теория теплоемкости идеального газа. В 1866—1876 гг. один из основоположников статистической физики австрийский ученый Л. Больцман доказал теорему о *равнораспределении энергии по степеням свободы*.

Пусть A — число атомов в молекуле. Полное число степеней свободы молекулы равно $3A$. Из них три соответствуют поступательному движению молекулы как целого и три ее вращению как целого. Если все атомы расположены на одой прямой (линейная молекула), вращательных степеней свободы всего две. Таким образом, нелинейная молекула имеет $3A - 6$ колебательных степеней свободы, а линейная $3A - 5$. Полная энергия молекулы равна сумме энергий поступательного $E_п$, вращательного $E_{вр}$ и колебательного $E_к$ движений.

Рассмотрим газ в состоянии теплового равновесия. Согласно теореме Больцмана среднее значение энергии, соответствующей каждой степени свободы поступательного и вращательного движений, равно $kT/2$, а среднее значение энергии, соответствующей колебательной степени свободы, равно kT. Следовательно, в случае газа, содержащего N нелинейных молекул, получим величину внутренней энергии

$$U_{нел} = N(3 + 3)kT/2 + N(3A - 6)kT = \nu 3RT + \nu(3A - 6)RT$$

и молярную теплоемкость при постоянном объеме $C^{(нел)}_\nu = 3R + R(3A - 6)$. Для газа линейных молекул $C^{(лин)}_\nu = 5R/2 + (3A - 5)R$. В частном случае двухатомных молекул имеем $C_\nu = 5R/2 + R$. Однако, измеряемая в экспериментах при комнатной температуре, теплоемкость многоатомного газа имеет величину $3R$, а двухатомного газа — $5R/2$. Кроме того, при понижении температуры теплоемкости всех многоатомных газов уменьшаются, стремясь к значению теплоемкости одноатомного газа $3R/2$. И только при температурах выше 1000°С теплоемкость большинства двухатомных молекул равна ожидаемой величине $7R/2$. В XIX веке все попытки объяснить это противоречие с теорией оказались безуспешными. Успех пришел только после создания квантовой теории вещества. Оказалось, что при низких температурах закон равнораспределения не выполняется.

Рассмотрим газ двухатомных молекул при температурах, недостаточных для диссоциации молекул. Например, для молекул водорода температура должна быть меньше 52 000° С. Согласно квантовой теории вращательные степени свободы «заморожены» при низких температурах $T < T_{вр}$. Для молекул H_2 величина $T_{вр} = 85$ К, для молекул O_2 величина $T_{вр} = 2$ К. При уме-

ренных температурах $T_{вр} < T < T_D$, «заморожены» колебательные степени свободы — колебательная часть теплоемкости отсутствует. Например, для молекул H_2 величина $T_D = 6100$ K, для молекул O_2 величина $T_D = 4100$ K. Таким образом, существует широкая область температур $T_{вр} < T < T_D$, в которой $C_v = 5R/2 = 20{,}78$ Дж/(К моль). Теплоемкость при постоянном давлении $C_p = 7R/2$.

Пример 4.5.3. Найдем молярную теплоемкость в процессе $p = kV$, где k — постоянный коэффициент.

Согласно определению $C = \delta Q/\nu\Delta T$,

$$\delta Q = \Delta U + p\Delta V = \nu C_v\Delta T + kV\Delta V.$$

Для вычисления второго слагаемого найдем из системы, содержащей уравнение состояния и уравнение процесса, соотношение $kV^2 = \nu RT$. Следовательно, $2kV\Delta V = \nu R\Delta T$. Теплоемкость $C = C_v + R/2$.

Пример 4.5.4. На рис. 3.7.2 *а* изображен циклический процесс с одним молем одноатомного газа. Учитывая условие задачи 3.7.3, найдем количество теплоты, переданное газу:

А. В процессе *ab*: $Q_{ab} = U_b - U_a + A'_{ab}$, $Q_{ab} = A'_{ab} = 3p_0V_0/4$.

Б. В процессе *bc*: $Q_{bc} = \nu C_p(T_c - T_b) = -C_p p_0V_0/2R$.

В. В процессе *ca*: $Q_{ca} = \nu C_V(T_a - T_c) = C_V p_0V_0/2R$,

Г. В цикле *abca*: $Q = (3 + 2C_V/R)\, p_0V_0/4$.

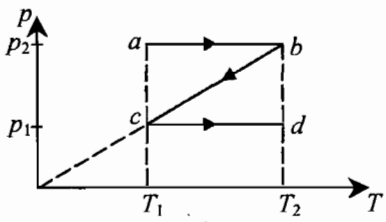


рис. 4.5.1

Задача 4.5.5. Один моль одноатомного газа переводится из начального состояния *a* в конечное состояние *d* в процессе, изображенном на рисунке 4.5.1 *в* координатах (T,p).

А. Представьте диаграмму процесса в координатах (V,p).

Б. Докажите, что работа, совершаемая газом в процессе *ab*: $A'_{ab} = \nu R(T_2 - T_1)$, в процессе *bc*: $A'_{bc} = 0$, в процессе *cd*: $A'_{cd} = \nu R(T_2 - T_1)$, в процессе *abcd*: $A'_{ad} = 2\nu R(T_2 - T_1)$.

В. Докажите, что количество теплоты, переданной газу в процессе *ab*: $Q_{ab} = 5\nu R(T_2 - T_1)/2$, в процессе *bc*: $Q_{bc} = -3\nu R(T_2 - T_1)/2$, в процессе *cd*: $Q_{cd} = 5\nu R(T_2 - T_1)/2$, в процессе *abcd*: $Q_{ad} = 7\nu R(T_2 - T_1)/2$.

Г. Найдите приращение внутренней энергии газа в процессе *ab*: $U_b - U_a = 3\nu R(T_2 - T_1)/2$, в процессе *bc*: $U_c - U_b = -3\nu R(T_2 - T_1)/2$, в процессе *cd*: $U_d - U_c = 3\nu R(T_2 - T_1)/2$, в процессе *abcd*: $U_d - U_a = 3\nu R(T_2 - T_1)/2$.

4.6. Первый закон термодинамики и процессы

4.6.1. Изотермический процесс. Поскольку $T = T_0$, то согласно (4.5.1) внутренняя энергия не изменяется. Из (4.2.1.) находим $A_{12} + Q_{12} = 0$ или $Q_{12} = A'_{12}$. При проведении изотермического процесса происходит передача теплоты из внешней среды, газ расширяется и совершает работу.

4.6.2. Изохорический процесс. Поскольку объем газа остается неизменным, то работа $A_{12} = 0$. Первый закон термодинамики приобретает вид $U_2 - U_1 = Q_{12}$, $Q_{12} = mc_v(T_2 - T_1)$. Следовательно, приращение внутренней энергии возможно лишь при теплообмене системы с внешней средой.

4.6.3. Изобарический процесс. В этом процессе $p = p_0$ приращение внутренней энергии содержит вклад работы и теплопередачи. Оба слагаемых A'_{12} и Q_{12} в (4.2.2) найдем из (4.3.2) и (4.5.2). Используя уравнение состояния, получим

$$A'_{12} = \nu R(T_2 - T_1), \qquad Q'_{12} = \nu C_p(T_2 - T_1).$$

Элементарное количество теплоты, сообщаемое системе, $\delta Q = \Delta U + p_0\Delta V = \Delta(U + p_0V)$. Функция $H = U + p_0V$ называется теплосодержанием или *энтальпией*, поскольку в изобарическом процессе $Q_{12} = H_2 - H_1$.

Пример 4.6.1. Вертикально расположенный теплоизолированный цилиндр, в котором находится воздух и нагреватель мощностью N, закрыт поршнем массой m. Найдите время τ подъема поршня на высоту H относительно начального положения после включения нагревателя. Теплоемкостью поршня и трением пренебречь.

Предположим, что процесс расширения воздуха — изобарический. Тогда имеем систему двух уравнений. 1. Из первого закона термодинамики следует $\nu C_v(T_2 - T_1) = N\tau - mgH$, 2. Количество теплоты, переданное нагревателем, $N\tau = \nu C_p(T_2 - T_1)$. Следовательно, $\tau = mgHC_p/NR$.

Задача 4.6.2. Горизонтально расположенный теплоизолированный цилиндр объемом V, заполнен воздухом, разделенным на две части теплоизолированным поршнем. Одной части воздуха сообщают количество теплоты Q. Найдите приращение давления Δp после установления состояния теплового равновесия.

Решение. Из первого закона термодинамики имеем уравнения $\nu_1C_v(T'_1 - T_1) = Q - A'$, $\nu_2C_v(T'_2 - T_2) = 0 + A$. Поскольку $A = A'$, то $Q = C_v[\nu_1(T'_1 - T_1) + \nu_2(T'_2 - T_2)]$. Записывая две пары уравнений состояния, получим

$$V\Delta p = R[\nu_1(T'_1 - T_1) + \nu_2(T'_2 - T_2)]; \quad \Delta p = QR/VC_v.$$

4.6.4. Адиабатический процесс задается условием $Q = 0$. Этот процесс можно реализовать с помощью теплоизолирующей оболочки. Другая возможность — процесс происходит настолько быстро, что величина Q достаточно мала по сравнению с приращением внутренней энергии. Из (4.2.1) находим $A = U_2 - U_1$ или $A = mc_v(T_2 - T_1)$. Следовательно, в адиабатическом процессе можно изменить температуру газа, не подводя к нему теплоту.

Вывод уравнения адиабатического процесса. Поскольку $\delta Q = 0$, то из (4.4.2), (4.5.1) получим $\nu C_v\Delta T + p\Delta V = 0$. Из уравнения состояния $pV = \nu RT$, следует соотношение $\nu\Delta T = (p\Delta V + V\Delta p)/R$. Исключая ΔT, получим уравнение $\Delta p/p + n\Delta V/V = 0$, $n = C_p/C_v$, $C_p = C_v + R$, которому удовлетворяет произведение $pV^n = \text{const}$.

Задача 4.6.3. Точка a на плоскости p-V соответствует состоянию газа с параметрами (p_0, V_1, $t_1 = 10°$ С), точка b — конечному с параметрами (p_0, $V_2 > V_1$, $t_2 = 30°$С). В вашем распоряжении есть источник тепла с температурой $t_2 = 30°$С, который нельзя использовать для увеличения температуры. Изобразите диаграмму единственно возможного процесса перехода $a \Rightarrow b$.

4.6.5. Политропический процесс определяется условием pV^n = const, $0 < \gamma < n$. График кривой $p = p(V)$ спадает менее круто, чем адиабата. Поэтому в политропическом процессе газ передает внешней среде количество теплоты Q'. Элементарное количество теплоты $\delta Q = \nu C_v \Delta T + p\Delta V$. Из уравнения состояния $pV = \nu RT$ и уравнения процесса следуют уравнения

$$\nu R\Delta T = p\Delta V + V\Delta p, \quad \Delta p + \gamma p V^{-1}\Delta V = 0,$$

из которых найдем $p\Delta V = \nu R\Delta T/(1 - \gamma)$. Следовательно,

$$\delta Q = -\nu C_v \Delta T \frac{n-\gamma}{\gamma - 1}.$$

4.7. Теплоемкость жидкостей и твердых тел

Обычно жидкости и твердые тела незначительно изменяют свой объем при изменении температуры. Поэтому можно пренебречь в (4.4.2) работой A'. Следовательно, $\delta Q = \Delta U$. Удельная теплоемкость жидкостей и твердых тел $c_V = \Delta U/(m\Delta T)$ может быть найдена экспериментально или на основе моделей, позволяющих вычислить внутреннюю энергию вещества. Значения удельных теплоемкостей приводятся в таблицах: вода — c_V = 4,18 кДж/(кг·К), лед — c_V = 2 кДж/(кг К), стекло — 0,67 кДж/(кг К), дерево — 1,2 кДж/(кг·К).

Закон Дюлонга и Пти. В 1819 г. французские ученые П.Л. Дюлонг и А. Пти экспериментально установили закон: *молярная теплоемкость всех твердых тел* $C_V = 3R$ = 25 Дж/(К · моль).

Можно доказать это утверждение на основе теоремы Больцмана о равнораспределении энергии.

Пусть q — число элементарных ячеек в кристаллической решетке, A — число атомов в одной ячейке. Тогда полное число атомов $N = qA$. Полное число колебательных степеней свободы есть $3N - 6 \approx 3N$. Следовательно, внутренняя энергия $U = 3NkT = 3\nu RT$, молярная теплоемкость $C_v = 3R$. Но прошло всего десять лет, как было обнаружено, что закон Дюлонга-Пти не выполняется для некоторых веществ, отличающихся большой твердостью. В случае кремния (C_V = 19,8 Дж/К моль) и алмаза (C_V = 6,1 Дж/К·моль) мы имеем сильное противоречие с теорией. Более того, при низких температурах $C_v \sim T^3$. Причиной такого расхождения являются квантовые эффекты (см. Дополнение VII,1.1).

Задача 4.7.1. Немногие знают, что писатель-фантаст А. Казанцев (1906—2002) — был ученым, геологом, изобретателем и выдающимся шах-

матистом. В его романе «Пылающий остров» профессор М.И. Баков в условиях сибирской ссылки сумел с помощью весов и термометра определить молярную массу неизвестного «звездного вещества» — осколка Тунгуского метеорита, упавшего 30 июня 1908 г. Метеорит диаметром порядка 30 м разрушился на высоте 10 км. При столкновении Земле передана энергия эквивалентная взрыву с тротиловым эквивалентом 10 Мт.

Предположим, что профессор опустил образец массой m = 0,1 кг в кипящую воду, а потом перенес его в кружку с водой массой m_0 = 0,2 кг при температуре t_0 = 15°С. Вода нагрелась на Δt = 1° С. Оцените молярную массу этого образца.

4.8. Передачи теплоты

4.8.1.Теплопроводность. Рассмотрим два тела с различными температурами, находящихся в тепловом контакте или одно неравномерно нагретое тело. Переход к равновесному состоянию проявляется в возникновении потока теплоты в направлении убывания температуры. Механизм переноса теплоты связан со столкновениями молекул в области соприкосновения тел. Этот способ передачи теплоты, не связанный с переносом вещества, называется *теплопроводностью*.

Закон теплопроводности Фурье. В 1822 г. французский физик и математик Ж. Фурье в работе «Аналитическая теория тепла» рассмотрел теплопроводность неравновесной системы. Пусть пространственное положение системы ограничено двумя стенками, расположенными в плоскостях $z = z_2$, $z = z_1$, $z_2 > z_1$. Температуры стенок поддерживаются постоянными: T_2 и T_1 ($T_1 > T_2$). Тогда в системе возникает поток теплоты J, направленный от первой стенки ко второй: z-компоненту вектора потока теплоты $J_z = \delta Q/\Delta S\Delta t$ можно представить в виде $J_z = -K\Delta T/\Delta z$, где K — коэффициент теплопроводности.

Задача 4.8.1. Температура воды в озере t_1 = 20° С, температура поверхности тела человека, стоящего не берегу t_2 = 36° С. Оцените температуру поверхности тела человека во время плавания. Предполагается, что механизм теплопроводности биологической ткани и воды одинаков.

Задача 4.8.2. Физический фокус. Вы можете развлечь друзей, показывая несложный опыт, для которого необходимо иметь стеклянную трубку диаметром 8-12мм, длиной 30—40 см, одно из отверстий которой диаметром около 1 мм, уже другого.

Налейте в стакан воду, нагретую до 80-90° С, опустите трубку узким отверстием в стакан и подождите пока в нее войдет вода. Закрыв верхнее отверстие трубки пальцем, вы быстро вынимаете ее из стакана и переворачиваете — из трубки бьет струя на высоту более метра.

А. Объясните физические явления, приводящие к наблюдаемому эффекту.

Б. Почему в промежутке между демонстрациями трубку следует охлаждать?

(**А.** После переворачивания трубки горячая вода стекает вниз и нагревает воздух. Давление возрастает и воздух выходит через отверстие вместе с во-

дой. **Б.** Высота струи зависит от разности температур воздуха в верхней части трубки и воды, вошедшей в трубку).

4.8.2. Конвекция. Если в некоторой области воздуха или жидкости температура окажется больше равновесного значения, то уменьшение плотности приведет к появлению выталкивающей силы благодаря которой возникает течение, стремящееся перемешать среду так, чтобы в ней установилось однородное распределение температур. Такое движение среды называют *свободной конвекцией*.

Задача 4.8.3. Объясните, почему в невесомости конвекция отсутствует.

Задача 4.8.4. Почему в космических кораблях создают искусственную систему вентиляции?

4.8.3. Тепловое излучение. Все тела, температура которых $T > 0$, излучают электромагнитные волны. При комнатной температуре все тела излучают невидимые инфракрасные волны. Кусок железа, нагретый до 550° С, излучает, в основном, волны, воспринимаемые глазом как свет красного цвета. По мере повышения температуры цвет излучения меняется: при 1000° С становится желтым, при 1500° С — белым. Если температура тела выше температуры окружающей среды, то оно охлаждается.

Тело, полностью поглощающее все падающее на него излучение, называется *абсолютно черным*. Если температура черного тела $T > 0$, то каждый элемент его объема излучает электромагнитные волны. Одной из характеристик излучения является интенсивность J — количество электромагнитной энергии, переносимой через единичную площадку в единицу времени. В 1879 г. австрийский физик Й. Стефан в результате обработки экспериментальных данных получил закон излучения черного тела: интенсивность излучения

$$J = \sigma T^4, \tag{4.8.1}$$

$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 К^4). Обоснование этого закона было дано через пять лет в 1884 г. австрийским физиком-теоретиком Л. Больцманом.

Ньютонов закон охлаждения. Пусть температура окружающей среды равна T_0, а температура черного тела $T > T_0$. Площадь поверхности тела — S. Интенсивность излучения тела зависит от температуры T, а интенсивность поглощаемого излучения зависит от температуры T_0. Тогда приращение внутренней энергии тела $\Delta U = \sigma S(T_0^4 - T^4)\Delta t$. Если $T_0 \sim T$, то

$$\Delta U \approx -4\sigma S\, T_0^3\, (T - T_0)\Delta t.$$

Задача 4.8.5. Почему остывает вода в термосе?

Измерения энергии, переносимой солнечным светом, показали, что поверхность площадью 1м^2, расположенная за пределами атмосферы перпендикулярно солнечным лучам, получают за одну секунду 1,373 кДж. Эту величину называют *солнечной постоянной* J_0 = 1,373 кВт/м^2. Полная мощность излучения Солнца $P = J_0 S$, где $S = 4\pi a^2$ — площадь сферы радиусом а равным среднему расстоянию Земли от Солнца; $a = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. Величина Р оказывается равной $3{,}83 \cdot 10^{26}$ Вт. Поскольку масса Солнца $m_c = 2 \cdot 10^{30}$ кг, то удельная мощность $w = P/m_c = 2 \cdot 10^{-4}$ Вт/кг.

Пример 4.8.6. Найдем мощность светового излучения, попадающего на Землю. Доля мощности $P_з$, попадающей на Землю, равна отношению площади земного диска к площади поверхности сферы радиусом а: $P_з = P\pi R_з^2/(4\pi a^2)$, где $R_з$ — радиус Земли, $P_з = 1{,}75 \cdot 10^{17}$ Вт. Земля отражает в космос 0,38 падающего на нее светового излучения. Величина $A = 0{,}38$ называется альбедо (от лат. *albedo* — белизна) Земли. Мощность, поглощаемого Землей излучения $P_з(1 - A)$.

Почему же средняя температура поверхности Земли постоянна? Температура Земли остается постоянной, поскольку Земля, как и Солнце, является источником теплового излучения. Приравнивая мощность поглощенного излучения и мощность теплового излучения Земли:

$$\sigma T_C^4\, 4\pi R_C^2 (R_з^2/4a^2)\,(1 - A) = \sigma T_з^4\, 4\pi R_з^2,$$

найдем равновесную температуру Земли

$$T_з = T_C(1 - A)^{1/4}(R_C/2a)^{1/2}.$$

Подставляя значения поверхностной температуры Солнца $T_C = 5780$ К и радиуса Солнца $R_C = 6{,}96 \cdot 10^8$ м, находим $T = 247$ К или $t = -26°C$. Расхождение со средним значением температуры Земли $t = 15°C$ объясняется тем, что излучает в космос не земная поверхность, а слой тропосферы, на уровне верхней границы облаков.

4.9. Парниковый эффект

Основная часть интенсивности солнечного излучения сосредоточена в интервале длин волн 150—4000 нм, максимум интенсивности находится на длине волны 500 нм. Около 9 % потока излучения сосредоточено в ультрафиолетовом диапазоне, 41 % — видимой части спектра и 50 % — в инфракрасной области. Солнечное излучение, поглощаемое Землей, излучается в космическое пространство. Максимум инфракрасного излучения поверхности Земли с температурой ~15°C приходится на длину волны 13 мкм. Отметим, что атмосфера достаточно прозрачна в средней ИК-области в «окне» длин волн 8—14 мкм. Однако часть излучения снова поглощается облаками, водяным паром и углекислым газом и переизлучается обратно к поверхности Земли. В конечном результате устанавливается равновесие между потоками излучения, причем благодаря атмосфере этот эффект приводит к повышению средней температуры до 30°C. Это свойство атмосферы называется *парниковым эффектом*.

На аналогичном физическом явлении основано устройство теплиц. Видимая часть солнечного излучения проходит через стекло и поглощается внутри парника. Инфракрасное излучение почвы поглощается стеклом и отражается обратно — температура приземного слоя повышается.

Исследователи климата Земли пришли к выводу о решающей роли человеческого фактора в повышении средней температуры за последние 20 лет. Загрязнение атмосферы водой может привести к усилению парникового эффекта и последующему изменению климата. Отметим, что при сгорании 1 кг

топлива образуется 1,25 кг водяного пара. Полеты реактивных самолетов приводят к образованию в атмосфере огромного количества воды — пассажирский самолет потребляет 90 т топлива в час. С другой стороны нет никакого сомнения в увеличении количества углекислого газа в атмосфере. Из-за сжигания топлива и вырубки лесов содержание диоксида углерода в атмосфере повышается на 0,4 % в год. В настоящее время концентрация на 25 % выше, чем сто лет назад. Сейчас ученые пытаются выяснить причинно-следственные связи между увеличением концентрации углекислого газа в атмосфере и изменением температуры в планетарном масштабе. Однако здесь необходимо учесть циклы колебаний инсоляции (количество солнечной энергии, получаемой земной поверхностью) и режимы солнечной активности.

Эксперты ООН предрекают уже в ближайшем будущем глобальные климатические изменения. К 2010 г. ожидается повышение средней температуры на 1,4–1,8 градусов и подъем уровня Мирового океана на 0,1–0,9 метра. За 100 лет температура в Северном полушарии выросла больше, чем за предыдущую тысячу лет. В Москве за 100 лет стало на 1,5 градуса теплее. Ученые опасаются, что быстрое изменение климата не оставит человечеству времени приспособиться к новым условиям.

4.10. Метаболизм

Пища и кислород, потребляемые человеком, являются исходными веществами биологических реакций, в результате которых образуются белки, ферменты и другие химические соединения, запасающие энергию. Одно из них — аденозинтрифосфат (АТФ) — главный аккумулятор энергии в клетке, выделяющейся в реакциях окисления. Часть этой энергии идет на поддержание постоянства температуры тела. В целом все химические процессы, протекающие в живом организме, называются *метаболизмом* (от греч. *metabol* — превращение). Общий контроль осуществляется генетическим аппаратом клеток. Скорость метаболизма регулируется частотой дыхания.

Ежесуточный пищевой рацион человека составляет 3000 ккал или 12,56 МДж, т. е. потребляемая мощность $P \approx 145$ Вт. Произведя работу $A = 12{,}56$ МДж, можно поднять тело массой $m = 100$ кг на высоту $h \approx 13$ км.

Удельная мощность, потребляемая человеком массой $m = 75$ кг, имеет значение $w = 1{,}93$ Вт/кг на четыре порядка превосходящее удельную мощность Солнца.

4.11. Теплоотдача организма

В состоянии покоя почти все приращение энергии, которая передается организму в реакциях окисления углеводов, жиров и белков преобразуется в теплоту. В этом случае скорость метаболизма $P_v = 80$ Вт. При температуре поверхности тела человека $t = 34°C$ максимум интенсивности теплового излучения находится в инфракрасном диапазоне (см. ч. VII. 1.1). Площадь поверхности тела человека $S \approx 1{,}8$ м^2. Пусть температура внешней среды $t_0 = 20°C$. Тогда при излучательной способности $\approx 1/2$ мощность излучения тела человека $P_S = \sigma S(T^4 - T_0^4)/2$, $P_S = 56$ Вт.

Найдем соотношение между скоростью тепловыделения единицей массы организма w и линейными размерами L теплокровных животных. Поскольку температура тела постоянна, то скорость тепловыделения в организме $P_V = wm \sim wL^3$ должна быть равна скорости теплопередачи внешней среде P_S, пропорциональной площади поверхности тела: $P_S \sim L^2$. Следовательно, $P_V = P_S$: $w \sim 1/L$ или $w \sim m^{-1/3}$. Чем меньше размеры тела, тем больше должна быть удельная скорость тепловыделения w.

Мы предположили, что скорость теплоотдачи $P_s \sim m^{2/3} = m^{0,67}$. Однако в результате экспериментальных исследований показано, что $P_s \sim m^{3/4}$. Тогда получим более корректное выражение $w \sim m^{-1/4}$.

Самые маленькие на Земле этрусские мыши имеют массу всего 1,5 г., а съедают за сутки в два раза больше. Если ее оставить без пищи хотя бы на несколько часов, она погибнет.

А почему Мальчик-с-пальчик должен быть ужасно прожорливым? При одинаковых пропорциях с нормальным человеком Мальчику-с-пальчик ростом 10 см требовалось бы в единицу времени на один грамм массы в 16—18 раз больше пищи, чем человеку нормального роста.

Задача 4.11.1. Объясните, почему тонкую проволоку можно расплавить в пламени спички, а толстую — трудно раскалить даже от горелки газовой плиты?

Глава 5. Фазовые переходы вещества

5.1. Агрегатные состояния и фазы вещества

Понятия «твердый», «жидкий», «газ» относятся к агрегатному (от лат. *aggregatus* — соединение в одно целое) состоянию вещества, а не к самому веществу.

Твердое тело в состоянии теплового равновесия образует *кристалл* (от греч. *krystallos* — лед) — структуру с упорядоченным пространственно-периодическим расположением атомов. О совокупности точек, в которых расположены при температуре $T = 0°$ K атомные ядра, говорят как о кристаллической решетке, а сами эти точки называют узлами решетки. Структурной единицей кристалла является элементарная ячейка — параллелепипед, содержащий наименьшее число атомов — от одного до $10^3 - 10^9$ в биологических кристаллах (белки, вирусы и т.д.). Размеры ячейки — соответственно от 0,5—0,8 до 200 нм. *Кристалл представляет собой совокупность периодически расположенных элементарных ячеек.* В этом смысле говорят о *дальнем порядке* в твердом теле.

В отличие от твердых тел жидкости обладают свойствами текучести и не имеют собственной формы. Сведения о движении молекул жидкости остаются еще неполными. Исследования показали, что любая молекула сильно связана с ближайшими соседями и увлекает их при своем движении.

Газом называют агрегатное состояние вещества, в котором молекулы находятся на расстояниях больших собственных размеров.

5.1.1. Кластеры. В последние несколько лет объектом многих исследований стали *кластеры* — небольшие группы атомов (от англ. *cluster* — скопление). Они занимают промежуточное положение между жидкостями и твердым телом. У системы, содержащий от двух до нескольких сотен атомов или молекул, появляются новые свойства, которые отсутствуют у вещества. Представление о кластерах как о самостоятельной фазе вещества полностью подтвердилось, когда было установлено, что изменение размера кластера может привести к различиям в их свойствах. Исследователи наблюдали, как кластер из семи атомов приобретал структуру, близкую к «строительному блоку кристалла» . В настоящее время исследования кластеров привели к развитию нового научного направления и открыли перспективы применения кластеров в химии, оптике и электронике.

5.1.2. Фазы вещества. Вещество в определенном агрегатном состоянии может существовать в нескольких устойчивых состояниях, называемых *фазами* (от греч. *phasis* — проявление). Понятие «фаза» является более широким, чем понятие «агрегатное состояние». Хорошо известны две твердые фазы углерода — графит и алмаз. В 1985 г было открыто новое состояние углерода — кластер С-60 — соединение из 60 атомов размером 0,7 нм (Нобелевская премия, 1996 г.). Они расположены в вершинах 20 правильных шестиугольников и 12 правильных пятиугольников, лежащих на поверхности сферы. Пятиугольники имеют общие стороны только с шестиугольниками, каждый из которых граничит с тремя шестиугольниками и тремя пятиугольниками. Эта модификация углерода получила название *фуллерен* в честь американского архитектора Р.Б. Фуллера, известного своими конструкциями куполов из прямых стержней. Согласно Эйлеру, жесткая фигура с любым четным числом вершин $n \geq 24$ может быть построена из 12 пятиугольгиков и $(n - 20)/2$ шестиугольников. Поэтому наиболее распространены соединения с четным числом атомов углерода в области $n > 30$.

5.1.3. Фазовое равновесие. При термодинамическом равновесии может возникнуть неоднородное состояние системы, при котором она распадается на несколько фаз-жидкость, твердое тело и газ. Их равновесное сосуществование называется *фазовым равновесием.* Вода, лед и пар — привычный пример разных фаз одного и того же вещества. Между разными фазами обычно существует четко выраженная граница раздела.

Процесс перехода фаз друг в друга при изменении температуры и давления называется фазовым превращением.

Переход из одной фазы в другую при определенных температуре и давлении сопровождается выделением или поглощением некоторого количества теплоты.

5.2. Плавление и кристаллизация

Плавлением называется переход вещества из кристаллического состояния в жидкое в равновесном изобарическом процессе. Для плавле-

ния m кг при температуре t необходимо сообщить твердому телу количество теплоты

$$Q_{пл} = \lambda m, \qquad (5.2.1)$$

где $\lambda(t)$ — *удельная теплота плавления*. Поскольку $m = \nu M$, то $Q_п = \nu\Lambda$, где $\Lambda = \lambda M$ — молярная теплота плавления. Приведем некоторые значения λ при температуре плавления: Лед имеет наибольшую теплоту плавления $\lambda = 0{,}334$ *М*Дж/кг ($t = 0°$ С), серебро — $\lambda = 0{,}105$ *М*Дж/кг ($t = 962°$ С), свинец — $\lambda = 0{,}025$ *М*Дж/кг ($t = 327°$ С). Аморфные тела не имеют фиксированной температуры плавления.

Поскольку переход происходит при постоянном давлении p_0, то согласно (4.2.1)

$$\lambda m = U_ж - U_т + p_0(V_ж - V_т)$$

где $U_т$ ($U_ж$) — внутренняя энергия вещества в твердом (жидком) состоянии, $V_т$ ($V_ж$) — объем вещества массой m в твердом (жидком состоянии). Следовательно, при постоянном давлении количество теплоты может быть представлено в виде приращения *энтальпии* $\lambda m = H_2 - H_1$, где $H = U + p_0V$.

Плавление сопровождается изменением физических свойств вещества. При подведении к телу теплоты повышается его температура, в кристалле образуются дефекты, нарушающие периодичность решетки. С достижением температуры плавления кристаллическая решетка распадается на микроскопические области. Плавление происходит при постоянной температуре, поскольку подводимая теплота идет на разрыв межатомных связей и разрушение дальнего порядка в кристаллах.

Задача 5.2.1. Сравните потенциальную энергию взаимодействия атомов до и после перехода кристалл — жидкость.

Кристаллизацией называют процесс перехода жидкости в твердое состояние. Для кристаллизации необходимо переохлаждение, характеризующееся отклонением температуры от равновесного значения. Переход в более устойчивое состояние сопровождается выделением количества теплоты

$$Q'_{кр} = \lambda m, \qquad (5.2.2)$$

которое ведет к замедлению кристаллизации.

5.2.1. Уравнение Клапейрона. Способна ли термодинамика предсказать что-либо о зависимости температуры плавления T от давления p? Ответ на этот вопрос дает уравнение, установленное Б. Клапейроном в 1834 г.

$$dT/dp = (T/\lambda m)(V_ж - V_т) \quad \text{или} \quad dT/dp = (T/\lambda)(1/\rho_ж - 1/\rho_т),$$

где $V_ж$, $V_т$ — объемы вещества в жидкой и твердой фазах, $\rho_ж$, $\rho_т$ — плотности жидкости и твердого тела.

Если плотность жидкой фазы меньше плотности твердой фазы, то повышение давления приводит к увеличению температуры плавления: в случае когда такая жидкость нагрета до температуры плавления, то повышение

давления может вызвать кристаллизацию. Наоборот, если твердая фаза имеет меньшую плотность, чем жидкость (например, лед-вода), то повышение давления понижает значение температуры плавления. Таким образом, тот факт, что лед плавает в воде, позволяет кататься на льду: коньки скользят по пленке воды, образовавшейся под нажимом коньков. Этот же эффект приводит, в частности, к тому, что на дне ледника температура плавления ниже температуры плавления вышележащих слоев льда. В результате плавления льда ледник смещается.

Если положить проволоку с грузами на концах на кусок льда, то лед под проволокой будет таять. Образовавшаяся вода замерзнет над проволокой, где давление ниже. Проволока пройдет через кусок льда, оставив его невредимым.

Отметим, что аномальные свойства воды проявляются и в том, что вода иногда замерзает в трубах газопровода при температуре $t = 20$ °С — летом труба оказывается забитой мокрым снегом. Другое необычное явление состоит в том, что посевы в некоторых случаях вымерзали в результате кристаллизации воды на поверхности белковых молекул при понижении температуры до $t = 4{,}4$ ° С.

Задача 5.2.2. Если дотронуться пальцем до куска железа при температуре $t < -3{,}5°$ С или до предмета из алюминия при температуре $t < -12°$ С, то кожа пальцев прилипнет к ним. Объясните это явление.

Задача 5.2.3. Более половины поверхности Северного Ледовитого океана покрыта слоем нетающего льда. Средняя толщина льда от двух до тридцати метров, а температура воздуха зимой опускается до $t_з = -40°$ С. Однако за всю зиму нарастает слой льда толщиной всего $h = 1{,}25$ м. Найдите количество теплоты, поступающей за зиму в атмосферу через 1 м^2 поверхности льда.

Решение. Поскольку $\Delta Q = \lambda \Delta m$, $\Delta m = \rho h \Delta S$, то поток теплоты $\Delta Q/\Delta S = \lambda \rho h$. Подставляя $\lambda = 0{,}336$ Мдж/кг, $\rho = 0{,}9\ 10^3$ кг/м^3, $\Delta S = 1$ м^2, получим $\Delta Q = 377$ МДж.

Задача 5.2.4. Уравнение теплового баланса. В теплоизолированный калориметр, содержащий $m_1 = 2$ кг воды при температуре $t_1 = 30°$ С, положили кусок льда массой $m_2 = 4$ кг, имеющий температуру $t_2 = -20°$ С. Определите температуру в калориметре после установления теплового равновесия.

Решение. Проведем анализ возможных конечных состояний. Введем следующие величины: $Q'_в = m_1 c_в t_1$ — количество теплоты, которое отдает вода при остывании до 0°С, $Q_л = m_2 c_л (0 - t_2)$ — количество теплоты, которое необходимо передать льду для нагревания до 0° С, $Q'_{вл} = \lambda m_1$ —количество теплоты, отдаваемой водой при превращении в лед, $Q_{лв} = \lambda m_2$ — количество теплоты, поглощаемой льдом при плавлении. Возможны четыре конечных состояния.

А. Пусть $Q'_в > Q_л$.

1. Если $Q'_в > Q_л + Q_{лв}$, то весь лед растает и температупа воды в конечном состоянии будет выше 0°С.

2. Если $Q'_в < Q_л + Q_{лв}$, то часть льда растает. В конечном состоянии лед и вода имеют температуру 0°С.

Б. Теперь предположим, что $Q'_в < Q_л$.

3. Если $Q'_в + Q'_{вл} < Q_л$, то вся вода замерзнет и температура льда будет ниже 0°С.

4.В случае $Q'_в + Q'_{вл} > Q_л$ — часть воды замерзнет и температура смеси воды и льда будет равна 0° С.

В нашей задаче $Q'_в = 252$ кДж, $Q_л = 168$ кДж. Поскольку $Q_{лв} = 2680$ кДж, то реализуется случай 2. Найдем массу расстаявшего льда из уравнения теплового баланса

$$m_1c_в(0 - t_1) + m_2c_л(0 - t_2) + \lambda m_x = 0,\ m_x = 0{,}25 \text{ кг}.$$

5.3. Испарение

Паром называют газообразное состояние вещества в тех случаях, когда газовая фаза может находиться в равновесии с жидкой фазой при обычных природных условиях. Переход вещества из жидкого состояния в газообразное, происходящий на свободной поверхности жидкости, называется *испарением*. Аналогичный процесс, происходящий на поверхности твердого тела, называют *сублимацией* (от лат. *sublimature* — возносить).

Молекулы в жидкости связаны силами притяжения, удерживающими их внутри жидкости. Однако небольшая доля молекул имеет скорости, превосходящие среднеквадратичную скорость. Если они находятся вблизи поверхности, то могут покинуть объем жидкости. Поэтому испаряются, в основном, самые быстрые молекуклы. Средняя кинетическая энергия остающихся в жидкости молекул уменьшается и, следовательно, жидкость охлаждается.

Для испарения при постоянной температуре жидкости необходимо передать определенное количество теплоты. При переходе через поверхность жидкости потенциальная энергия быстрой молекулы возрастает, а кинетическая — уменьшается. Поэтому средние кинетические энергии молекул жидкости и пара в состоянии теплового равновесия одинаковы.

Для того чтобы перевести в пар, m кг жидкости при постоянной температуре t, необходимо передать количество теплоты

$$Q = rm, \tag{5.3.1}$$

где $r(t)$ — *удельная теплота парообразования*. Для воды $r = 2{,}5$ МДж/кг при $t = 0$ °С, $r = 2{,}26$ МДж/кг при $t = 100$ °С; для этилового эфира $r = 0{,}354$ МДж/кг при $t = 30$ °С, для серебра $r = 2{,}3$ МДж/кг при $t = 2212$ °С. С ростом температуры величина удельной теплоты парообразования уменьшается.

При комнатной температуре теплота парообразования, приходящаяся на одну молекулу воды, составляет $rM/N_A = 7{,}3 \cdot 10^{-20}$ Дж, а средняя энергия теплового движения молекул воды $3kT/2 = 6{,}06 \cdot 10^{-21}$ Дж. Следовательно, в пар переходят молекулы с энергией в 10 раз большей энергии теплового движения.

5.4. Насыщенный пар

В закрытом сосуде увеличение массы пара происходит до тех пор, пока не установится динамическое равновесие, характерное для данной температуры: число молекул, переходящих в единицу времени из жидкости в пар и из пара в жидкость, одинаково.

Пар, находящийся в состоянии теплового равновесия с жидкостью (или твердым телом) того же химического состава, называется насыщенным паром[1].

Давление насыщенного пара в устойчивом состоянии — наибольшее давление, которое может иметь пар при данной температуре. Ниже приведена таблица давлений насыщенного пара воды $p_н(T)$ для нескольких значений температуры. Из нее видно, что давление насыщенного пара быстро возрастает с увеличением температуры.

Таблица

Давление насыщенного пара воды при различных температурах

t °C	p, кПа	t °C	p, кПа
-30	0,373	40	7,376
-25	0,627	50	12,339
-10	0,253	70	31,161
-5	0,402	80	47,35
-3	0,476	100	101,325
0	0,61	102	108,78
7	1,0	110	143,26
17	1,942	120	198,54
20	2,338	140	361,36
25	3,168	150	475,97
27	3,565	200	1255,2
37	6,27	374,12	22115

5.5. Конденсация

Переход вещества из газообразного состояния в жидкое (или твердое) называется *конденсацией* (от лат. *condensatio* — сгущение, уплотнение).

При конденсации выделяется то же количество теплоты, которое было передано для перехода вещества массой m в пар:

$$Q' = rm. \tag{5.4}$$

Конденсация начинается на поверхности жидкости (или твердого тела) при парциальном давлении и температуре пара, соответствующих состоянию насыщения. Для конденсации пара, не соприкасающегося с жидкостью, необходимо наличие центров конденсации, роль которых играют различного рода примеси.

Дождь, снег, роса, иней — следствие конденсации насыщенного водяного пара в атмосфере. Явление конденсации широко используется в холодильной технике, опреснительных установках, химической технологии и т. д.

---

[1] Отметим, что авторы учебника для углубленного изучения физики (Г.Я. Мякишев, А.З. Слободсков. Физика. М.: Дрофа. 1998. С. 207) утверждают, что «концентрация насыщенного пара не зависит от его объема при постоянной температуре». В действительности концентрация по определению не зависит от объема. Авторы не различают понятия «равновесное состояние пара» и «изотермический процесс с насыщенным паром».

Ежегодно с поверхности Мирового океана испаряется слой воды толщиной 1,3 м. Большее количество испарившейся воды возвращается непосредственно в моря и океаны, а десятая часть выпадает на сушу и возвращается в океан в результате кругооборота воды в природе.

Задача 5.5.1. В сосуде находится насыщенный пар при температуре T. Найти массу образовавшейся воды, если при изотермическом сжатии совершена работа A'.

Переохлажденный пар. Не содержащий примесей пар может находиться в состоянии с парциальным давлением, превышающим давление насыщенного пара при тех же условиях. Пар в этом состоянии называется переохлажденным или пересыщенным паром.

5.6. Кипение

5.6.1. Условие кипения. Обычно испарением называют переход жидкости в пар, происходящий на свободной поверхности. Однако пар может появиться и внутри объема жидкости. Механизм рождения пузырьков, заполненных паром, связан с наличием неоднородностей дна и стенок сосуда или частиц примесей в самой жидкости. Центрами парообразования являются и пузырьки посторонних газов. Пузырьки растут вследствие испарения в образующуюся полость жидкости. Кипением называется процесс перехода жидкости в пар, происходящий в результате переноса насыщенного пара, содержащегося в пузырьках, к поверхности жидкости. Температура, при которой происходит кипение жидкости, находящейся под постоянным давлением, называется температурой кипения $T_к$.

Для роста и последующего всплывания пузырька необходимо, чтобы давление насыщенного пара $p_н(T_к)$ было не меньше суммы внешнего давления, давления слоя вышележащей жидкости и дополнительного давления, обусловленного поверхностным натяжением. В обычных условиях два последних слагаемых малы, а внешнее давление равно атмосферному. Поэтому пока давление насыщенных паров $p_н$(T) при температуре T меньше $p_{ат}$ происходит сравнительно медленное испарение жидкости с поверхности. С увеличением температуры величина $p_н(T)$ возрастает и, наконец, при значении $p_н(T_к) = p_{ат}$ возникает кипение. В повседневной практике наблюдается именно этот вид кипения, его называют *пузырьковым*. Строго говоря, $T_к$ — температура у поверхности кипящей жидкости, т. к. жидкость несколько перегрета относительно $T_к$.

Процесс превращения жидкости в пар требует затрат энергии на разрыв связей между молекулами жидкости и на работу против сил внешнего давления при увеличении объема пара. Если при кипении жидкость не получит определенного количества теплоты, то ее температура начнет понижаться. При давлении 2 кПа температура кипения воды 17°С. Понижая давление, мы получим «кипяток» при более низкой температуре. Если откачка продолжается, то вода будет охлаждаться и превратится в лед.

5.6.2. Газ и пар. Таблицы давления насыщенного пара жидкостей позволяют определить температуру кипения в зависимости от внешнего давле-

ния. Если кривая давления насыщенного пара одной жидкости $p_н^{(1)}(t)$ лежит выше кривой давления $p_н^{(2)}(t)$ другой жидкости, то температура кипения первой жидкости меньше температуры кипения второй: $t_{к1} < t_{к2}$. Давление насыщенного пара жидкого кислорода достигает 100 кПа при температуре $t_к = -188{,}82°$ С. Поэтому при атмосферном давлении жидкий кислород кипит при любой температуре большей $t_к$. Ненасыщенный пар ничем не отличается от обычного газа. Разница в этих понятиях сложилась в силу привычки называть газами те вещества, у которых при комнатной температуре давление насыщенного пара выше атмосферного давления.

Задача 5.6.1. В кастрюле-скороварке имеется предохранительный клапан, который открывается при давлении $p > p_{ат}$. Почему повышается температура кипения в закрытом сосуде?

Задача 5.6.2. Камера объемом $V = 22{,}4$ л содержит воздух при давлении $p_1 = 2p_0$, $p_0 = 101{,}3$ кПа и $m = 18$ г воды при температуре $t_1 = 0°$С. Камеру нагрели до температуры $t_2 = 100°$С.

А. Определите давление в камере.

Решение. Давление при температуре T_1 равно сумме давлений воздуха и пара: $p_1 = p_{в1} + p_{н1} \approx p_{в1}$. Давление при температуре кипения T_2 равно сумме давлений воздуха и пара: $p_2 = p_{в2} + p_{п2}$. Давление сухого воздуха найдем из соотношения $p_{в2} = p_{в1}T_2/T_1$. Определим теперь давление пара при температуре T_2. Для этого найдем массу воды m_x, которую необходимо испарить, чтобы при температуре T_2 пары воды оставались насыщенными $\rho_{н2} = m_x/V$, где $\rho_{н2} = p_0M_в/RT_2 \sim 0{,}6$ кг/м^3. Следовательно, $m_x = 13{,}44$ г. Поскольку, $m > m_x$, то давление пара $p_{п2} = p_0$. Итак, давление в камере $p_2 = 2p_0T_2/T_1 + p_0$, $p_2 = 3{,}7p_0$.

Б. Определите давление в камере, если в ней было $m = 9$ г воды. В этом случае $p_{п2} = (m/M_в)(RT_2/V) = (T_2/2T_1)p_0$. Давление в камере $p_2 = p_{в2} + p_{п2} = 3{,}41\ p_0$.

Задача 5.6.3. Поставим два одинаковых чайника с равным количеством воды на конфорки одинаковой мощности. Один из них закроем крышкой, а второй оставим открытым. Объясните, рассматривая несколько наиболее существенных эффектов, почему один из чайников закипает раньше.

Задача 5.6.4. На плите с полезной мощностью $P = 1$ кВт, стоит чайник, содержащий $m = 2$ кг воды. Температура воды $t_0 = 100°$ С. Найдите время выкипания всей воды.

Задача 5.6.5. Чайник с кипящей водой стоит на плите с полезной мощностью $P = 1$ кВт. Площадь выходного отверстия носика чайника $S = 2$ см^2. Оцените скорость струи пара, вырывающейся из носика чайника.

Задача 5.6.6. Почему пар из носика чайника обжигает кожу руки сильнее чем кипяток? Насыщенный пар объемом $V = 1$ л конденсируется на поверхности, температура которой $t = 37°$ С. Найдите количество теплоты, переданное поверхности.

Решение. Количество теплоты, переданное поверхности: $Q = Q_к + Q_т$, $Q_к = \rho_н V\lambda$, $Q_т = \rho_н V c_в(t_к - t_0)$, $t_к = 100$ °С. Подставляя значения $\lambda = 2{,}26$ МДж/кг, $\rho_н = 0{,}6$ кг/м^3, получим $Q_к = 1416$ Дж, $Q_т = 219$ Дж, $Q = 1635$ Дж.

5.6.3. Кавитация. При определенных условиях в движущейся жидкости могут появиться области, в которых давление уменьшается до значения, незначительно отличающегося от давления насыщенного пара $p_н(T)$ при температуре жидкости T. Жидкость оказывается в неустойчивом состоянии и в этих областях образуются полости, заполненные паром. Процесс образования и последующего развития таких полостей называется кавитацией (от лат. *cavitas* — полость). Когда полость попадает в область жидкости, где давление p выше $p_н(T)$, то она схлопывается. При начальной разности давлений $p - p_н(T)$ около 1 атм давление в момент схлопывания может превысить 150 атм. Образование и схолопывание полостей вблизи винта корабля приводит к его эрозии (от лат. *erodere* — разъедать) и износу.

5.6.4. Спуск космического корабля на Землю. При движении космического аппарата (КА) в плотных слоях атмосферы на его лобовой части возникает узкая (~10^{-3} см) область повышенного до 50 атм давления, в которой воздух превращается в плазму с температурой 6-10 тысяч градусов. Самый тугоплавкий металл — вольфрам — плавится при температуре 3410°С. Как же обеспечить безопасность космонавтов?

Если поставить на раскаленную плиту чайник с водой, то температура воды останется равной 100°С пока не выкипит вся вода. Характерная особенность этого процесса — постоянство температуры при кипении — позволило реализовать новый способ теплозащиты. На лобовую часть КА наносят полуметровый слой пластмассы на основе эпоксидных или синтетических смол. При разогреве пластмасса испаряется, плавится, кипит и сносится с поверхности *КА*. В результате тепловой поток с поверхности уменьшается до безопасной величины.

5.7 Перегретая жидкость

Очищенная и обезгаженная жидкость может существовать при температуре $t > t_к$. Такая жидкость называется перегретой, так как существует в условиях, при которых она должна быть в газообразном состоянии. Рассмотрим жидкость при давлении p_1 и температуре t_1. Значение t_1 выберем несколько ниже значения $t_{к1}$, соответствующего температуре кипения при давлении насыщенных паров $p_н(t_{к1}) = p_1$ (рис. 5.7.1). Теперь, отпуская поршень, быстро уменьшим давление до величины p_2. Жидкость окажется в перегретом состоянии (t_1, p_2), поскольку t_1 выше температуры кипения $t_{к2}$, определяемой условием $p_н(t_{к2}) = p_2$.

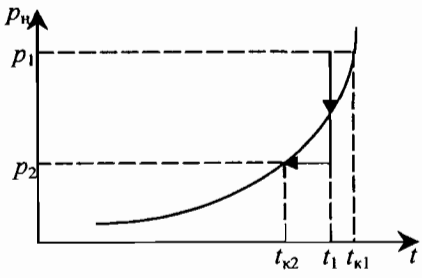


рис. 5.7.1

Перегретая жидкость находится в неустойчивом состоянии. Флюктуации плотности приводят к возникновению микронеоднородностей, которые играют роль центров парообразования — через некоторое время жидкость вскипает.

5.7.1. Пузырьковая камера. Процесс вскипания развивается взрывообразно, если через жидкость пролетает заряженная частица. Образующиеся вдоль траектории ионы становятся центрами парообразования. На фотографии виден след частицы. На основе этого эффекта, открытого Д. Глезером в 1952 г., был создан прибор для регистрации элементарных частиц (Нобелевская премия, 1960 г.). Наиболее распространены камеры объемом 1—2 м^3. Водородная камера Фермиевской национальной ускорительной лаборатории (FNAL, Батавия, США) имеет объем 30 м^3. В отличие от камеры Вильсона пузырьковая камера исполняет роль мишени и регистрирующей среды. Главное достоинство камеры — быстродействие.

Задача 5.7.1. Вода массой $m = 10$ кг перегрета до температуры $t_0 = 120°$ С. Найдите массу пара, который образуется при вскипании воды.

5.8. Фазовые диаграммы

Две фазы могут находиться в равновесии друг с другом не при любых давлении и температуре; задание одной из этих величин вполне определяет вторую. Если изменить давление, то изменится и температура плавления. С такой же закономерностью мы встречались, когда обсуждали кипение. Отмечая на плоскости p,T точки, в которых возможно равновесие фазы а и фазы b, мы получим некоторую кривую $p = p_{ab}(T)$. Множество точек, лежащих вне этой кривой, представляет собой состояния однородных фаз. При изменении температуры и давления, соответствующих переходу вдоль прямой, пересекающей кривую равновесия, наступает расслоение фаз — одна фаза переходит в другую.

Графики кривых равновесия $p = p_{ab}(T)$ всех возможных фаз системы, состоящей из нескольких веществ, называют фазовой диаграммой.

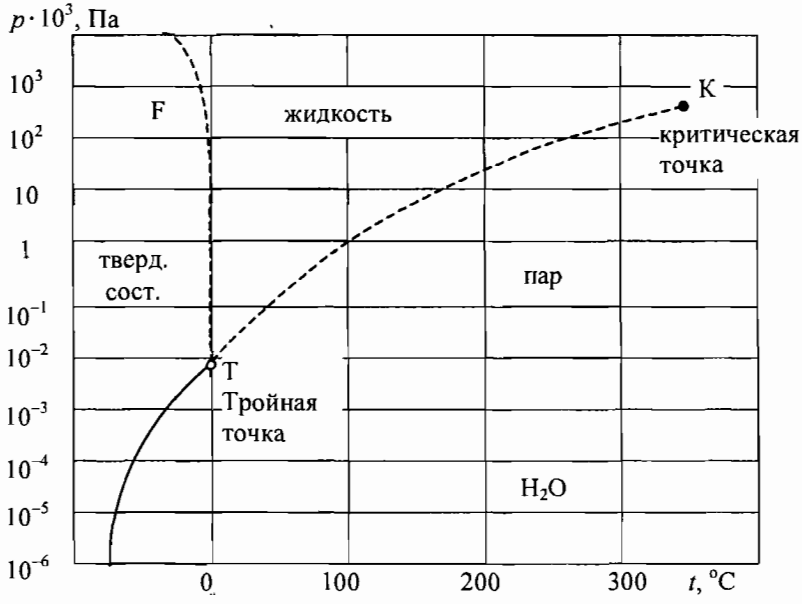


рис. 5.8.1

На рис. 5.8.1 изображена фазовая диаграмма состояний однокомпонентной системы, состоящей из молекул H_2O. Штриховая кривая определяет зависимость давления насыщенного пара от температуры, сплошная — температуры сублимации льда, а штрих-пунктирная — температуры плавления льда. Кривая *TK* определяет зависимость давления насыщенного пара от температуры, кривая *TF* — от температуры плавления льда. Сплошная кривая — зависимость давления от температуры при переходе твердой фазы в пар (сублимация льда). Три кривые пересекаются в одной точке и разделяют плоскость *p-T* на три области, принадлежащие устойчивым состояниям льда, воды и пара. Однофазное состояние системы существует в широком диапазоне давлений и температур, двухфазное — только при значениях давления и температуры, связанных уравнениями кривых, разделяющих фазы.

5.8.1. Тройная точка. Состояние, в котором одновременно сосуществуют три фазы является точкой T пересечения кривых равновесия каждой пары из трех фаз. Ее называют *тройной точкой.* Для воды, льда и водяного пара в тройной точке давление и температура равны

$$p_т = 609 \text{ Па} = 4{,}58 \text{ мм рт. ст.}, \; T_т = 273{,}16 \; K = 0{,}01°\text{C}.$$

Поскольку тройной точке соответствует определенное значение температуры, то она выбрана в качестве стандартной опорной точки шкалы абсолютной температуры.

Температура таяния или плавления льда при нормальном давлении равна 0°C. Анализ кривой равновесия лед-вода показывает, что температура плавления уменьшается при увеличении давления. Это утверждение справедливо в тех случаях, когда твердая фаза имеет меньшую плотность, чем жидкая фаза.

Пример 5.8.1. Вода — загрязнитель тропосферы. В процессе сгорания топлива при полете реактивного самолета образуется водяной пар и образуется конверсионный след. На высоте 10 км концентрация пара крайне мала, но относительная влажность — более 99 %. Поскольку при полете на высотах больших 10 км температура и давление лежат за пределами тройной точки, то водяной пар вымерзает и образует осадки в виде ледяных кристаллов. Увеличение количества льда в стратосфере приводит к увеличению облачности и к росту планетарного альбедо. В результате уменьшается доля солнечного излучения, падающего на земную поверхность.

Количество водяного пара, образующегося при полетах реактивных самолетов, выглядят устрашающе: при сгорании килограмма топлива выделяется 1,25 кг воды, а самолет потребляет свыше 90 т топлива в час.

5.8.2. Критическая температура. Кривая равновесия фаз вода — пар оканчивается в точке *K*, называемой *критической точкой.* В этой замечательной точке кривая кипения *TK* обрывается, т. к. плотности воды и пара становятся одинаковыми, граница между ними исчезает. Можно сказать,

что в критической точке исчезает различие между паром и водой. Критическое давление и критическая температура

$$p_к = 221{,}28 \text{ Па}, \quad T_к = 647{,}27\ K = 374{,}12°C.$$

Понятие о критической точке впервые введено Д.И. Менделеевым (1860 г.).

Фазовая диаграмма — это краткий справочник, позволяющий определить состояние вещества при заданных давлении и температуре или описать фазовый переход при изменении давления и температуры. Рассмотрим, например, процесс нагревания при постоянном атмосферном давлении $p_{ат}$. График процесса $p(t) = p_{ат}$ — прямая линия. Если давление в тройной точке меньше атмосферного давления $p_{ат}$, то прямая пересекает кривые равновесия твердое тело-жидкость и жидкость-пар. Следовательно, в системе H_2O лед сначала превращается в воду, потом закипает и превращается в пар. Если же давление в тройной точке выше атмосферного, то прямая пересекает только кривую равновесия твердое тело-пар. Следовательно, при нагревании твердое тело превращается в пар, не проходя жидкую фазу. Так ведет себя «сухой лед» — твердый углекислый газ CO_2, для которого $p_т$ = 516 кПа, $t_т$ = –56,55°C.

Процесс сжатия пара при постоянной температуре изобразится на фазовой диаграмме прямой линией, параллельной оси p. Если сжимать пар, температура которого ниже критической, то пар начнет конденсироваться и превратится в жидкость, пройдя при этом стадию расслоения на две фазы при давлении, равном значению давления насыщенного пара на пересечении прямой и кривой равновесия жидкость-пар. Совсем иначе ведет себя пар, температура которого выше критической. Теперь прямая линия, изображающая процесс, не пересекает кривую равновесия жидкость-пар. При сжатии пар будет уплотняться, не превращаясь в жидкость. Здесь невозможно существование границы раздела между жидкостью и газом. Однако, уменьшая температуру, можно сместиться в tp — плоскости по кривой, лежащей выше точки K, и перевести пар в жидкость, не реализуя процесс конденсации. При этом не происходит расслоение фаз и скачкообразное изменение состояния.

Отметим, что твердое тело в отличие от жидкости и газа представляет собой кристалл. Поэтому переход между жидкостью и кристаллом не может быть осуществлен непрерывным образом. Следовательно, критическая точка для этих фаз не может существовать — кривая равновесия должна неограниченно продолжаться в tp — плоскости.

5.8.3. Сжижение газов. Начиная с 1825 г. английскому физику М. Фарадею удалось сжать некоторые газы до давления насыщенного пара и превратить их в жидкость. Однако водород, азот и кислород не поддавались сжижению даже при давлении p = 3000 атм. Их причислили к истинным, или постоянным газам.

На самом деле неудачи были вызваны тем, что не было известно о существовании критической температуры. У «постоянных» газов критические температуры очень низкие: у кислорода $T_к$ = 154,78 К, $p_к$ = 50,4 атм, у азота $T_к$ = 126,25 К, $p_к$ = 33,54 атм, у водорода $T_к$ = 33,24 К, $p_к$ = 12,8 атм. Для превращения этих газов в жидкость необходимо охладить газ до температуры $T < T_{кр}$.

2 декабря 1877 г. французский физик Л. Кальете получил жидкий кислород, а в конце декабря — жидкий азот. 18 мая 1898 г. английский физик Дж. Дьюар получил жидкий водород. Теперь от абсолютного нуля его отделяло всего 14 градусов. Но ему не удалось получить жидкий гелий. 9 июля 1908 г. пришло известие, что Г. Камерлинг-Оннес из Лейденского университета осуществил ожижение гелия-4 при $T = 4{,}44$ К ($T_к = 5{,}2$ К, $p_к = 2{,}26$ атм).

В настоящее время исследования явлений, происходящих при низких температурах, являются одной из актуальных проблем физики.

5.9. Изотермы фазовых переходов

Пусть водяной пар массой m находится в замкнутом сосуде при фиксированной температуре $T = T_0 > T_т$ и давлении меньшем давления насыщенного пара: $p_0 < p_н$, $\rho_н = \rho_н(T_0)$. В области $V > V_г$ давление и объем связаны соотношением $pV = mRT_0/M$ (рис 5.9.1). Наша задача — изобразить фазовую диаграмму в координатах (V, p). Из условия $m = \rho_н V_г$ найдем значение объема $V_г$, при котором пар начнет конденсироваться. Дальнейшее уменьшение объема не приведет к увеличению давления, так как пар будет конденсироваться. Возникает область состояний, в которой одновременно сосуществуют пар и жидкая фаза. При значении объема $V_ж = m/\rho_в$ весь пар сконденсируется и объем $V_ж$ будет содержать воду массой m. Поэтому левая почти вертикальная часть изотермы на рис. 5.9.1 отражает малую сжимаемость воды. При сжатии образовавшейся воды в области $V'_ж < V_ж$ изотерма достигает прямолинейного участка $[V_т, V'_ж]$, где возникает твердая фаза и сосуществуют лед и вода. В области $V < V_т$ происходит сжатие льда.

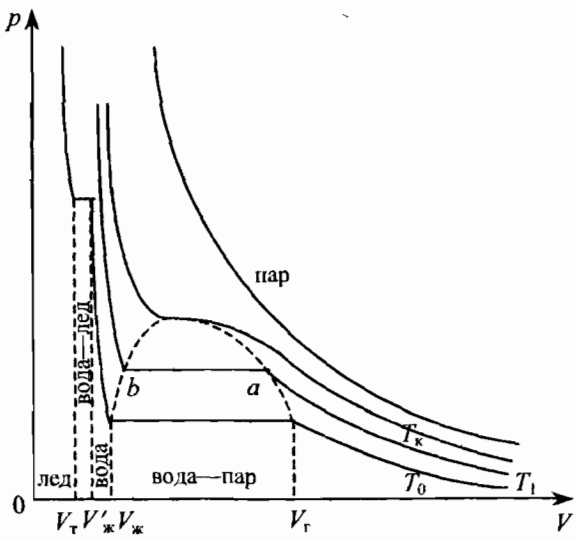


рис. 5.9.1.

В области $[V_ж, V_г]$ давление равно давлению насыщенного пара $p_н(T_0)$. Пар и вода могут сосуществовать на прямолинейном участке изотермы, если температура T_0 ниже критической температуры $T_{кр}$ = 647,3 К. С уменьшением объема возрастает количество жидкости, отделенное от остальной части поверхностной пленкой — пар сжижается. В технике пар в этом состоянии называют мокрым паром. Мокрый пар является смесью пара и капелек воды и наблюдается как белый туман. Для других изотерм на рис. 5.9.1, соответствующих значениям T в интервале $T_0 \le T \le T_{кр}$, длина отрезка $[V_ж, V_г]$ уменьшается и при давлении $p_н$ = 221,28 Па, $T = T_{кр}$ вырождается в точку. В этой области плотности насыщенного пара и воды становятся одинаковыми, исчезает различие физических свойств воды и пара.

Задача 5.9.1. Найдите массы пара $m_п$ и воды $m_в$, образовавшихся при сжатии до значения объема V, принадлежащего интервалу $[V_ж, V_г]$.

Решение. Пусть $V_в$, $V_п$ — объемы образовавшейся воды и оставшегося пара. Имеем уравнения

$$m = \rho_н V_г, \quad m = \rho_в V_ж, \quad m_в = \rho_в V_в, \quad m_п = \rho_н V_п,$$

из которых находим

$$m_в/m = V_в/V_ж, \quad m_п/m = V_п/V_г.$$

Поскольку $m = m_в + m_п$, $V = V_п + V_г$, то

$$m_п = (V - V_ж)m/(V_г - V_ж), \quad m_в = (V_г - V)m/(V_г - V_ж).$$

В случае $V_ж << V_г$ имеем $m_п \approx Vm/V_г$, $m_в \approx (1 - V/V_г)m$.

Задача 5.9.2. Пар массой m находится в сосуде объемом $V_0 > m/\rho_н$ при температуре t = 100° С и давлении $p = 0{,}506 \cdot 10^5$ Па. Найдите массы пара и воды при изотермическом уменьшении объема в n раз.

Решение. Поскольку $p < p_н = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, то в сосуде находится ненасыщенный пар. Учитывая значение $p = p_н/2$, получим плотность пара $\rho = \rho_н/2$. Следовательно, $V_г = V_0/2$, при уменьшении объема в два раза содержимое сосуда не изменится. При уменьшении объема до значения $V = V_0/n$, $V \ge V_ж$, $n \le 2\rho_н/\rho_в$ решение получено в задаче 5.9.1:

$$m_п = \frac{\rho_н}{\rho_в - \rho_н}(\rho_в V - m) = \frac{m}{n}\frac{(2\rho_в - n\rho_н)}{\rho_в - \rho_н},$$

$$m_в = \frac{\rho_н}{\rho_в - \rho_н}(m - \rho_н V) = \frac{m}{n}\frac{(n-2)\rho_н}{\rho_в - \rho_н}.$$

Поскольку $\rho_н = 0{,}598$ кг/м^3, $\rho_в = 10^3$ кг/м^3, то

$$m_п \approx \frac{m}{n}[2 - (n-2)\frac{\rho_н}{\rho_в}], \quad m_В \approx \frac{m}{n}(n-2)(1 + \frac{\rho_н}{\rho_в}).$$

5.10. Замедление фазовых переходов

Нельзя превысить температуру выше точки плавления $T_т$, не расплавив лед. Однако можно перевести капельки воды в «переохлажденное» состояние с температурой ниже $T_т$. Отметим, что в этом случае график давления насыщенных паров — кривая равновесия переохлажденная вода — пар лежит выше кривой лед — пар на рис. 5.8.1.

Фазовое превращение пар — вода можно задержать, используя «чистую» воду. Возможно также «задержать кипение», перегревая дистиллированную воду в пробирке до температуры выше точки кипения. Но затем внезапно возникает бурное парообразование и вода выбрасывается наружу.

Глава 6. Влажность воздуха

6.1 Абсолютная и относительная влажность

Воздух, содержащий водяной пар называется влажным. Для того чтобы судить о наличии водяного пара в воздухе, вводят понятия абсолютной и относительной влажности воздуха.

Абсолютная влажность равна парциальному давлению пара $p_п$ при данной температуре.

Относительная влажность φ равна отношению парциального давления пара $p_п$ к давлению насыщенного пара $p_н$ при той же температуре, выраженное в процентах: $\varphi = h \cdot 100\%$, $h = p_п/p_н = \rho_п/\rho_н$.

Согласно закону Дальтона давление влажного воздуха $p = p_в + p_п$, где $p_в$ — давление, создаваемое сухим воздухом. С достаточной степенью точности ненасыщенный пар описывается моделью идеального газа. Однако при давлении пара близком к давлению насыщенного пара возникают отклоненения, обусловленные взаимодействием молекул. С этой оговоркой уравнение состояния идеального газа может быть использовано и для насыщенного пара. Поэтому относительная влажность может быть представлена в виде $\varphi = h \cdot 100\%$, $h = \rho_п/\rho_н$, где $\rho_п$ — плотность пара, $\rho_н$ — плотность насыщенного пара при одной и той же температуре.

Таблица

Плотность насыщенного пара при различной температуре

t°C	–20	–10	0	10	15	38	100
$\rho_н$ (г/м^3)	0,9	2,1	4,8	9,4	12,8	46	598

Задача 6.1.1. Воздух влажностью $\varphi = h \cdot 100\%$ находится при давлении p и температуре T.

А. Найдите плотность влажного воздуха.

Решение. Плотность влажного воздуха, находящегося в объеме V

$$\rho = (m_в + m_п)/V \qquad (1)$$

где $m_в$ — масса сухого воздуха; $m_п$ — масса пара. Давление влажного воздуха равно согласно закону Дальтона сумме парциальных давлений сухого воздуха и пара:

$$p = p_в + p_п. \quad (2)$$

Очевидно, сухой воздух и пар удовлетворяют уравнению состояния

$$p_в V/T = m_в R/M_в \quad (3)$$

$$p_п V/T = m_п R/M_п. \quad (4)$$

Согласно условию

$$h = p_п/p_н. \quad (5)$$

Значение давления насыщенного пара $p_н$ при температуре T находим в таблице.

Формально мы имеем пять уравнений и шесть неизвестных: ρ, $m_в$, $m_п$, V, $p_в$, $p_п$. В действительности неизвестных величин только пять, т. к. в уравнения входят отношения $m_в/V$ и $m_п/V$. Разрешая систему (1)—(5), находим:

$$\rho = M_в p/RT - (M_в - M_п)hp_н/RT.$$

Поскольку $M_в$ = 0,029 кг/моль, $M_п$ = 0,018 кг/моль, то плотность влажного воздуха меньше плотности сухого воздуха. Это — очевидный вывод, следующий из закона Авогадро: при одинаковых условиях в одном кубометре сухого и влажного воздуха содержатся одинаковые количества молекул. Поэтому, замещая N молекул сухого воздуха более «легкими» N молекулами воды, мы уменьшим массу сухого воздуха в объеме V на величину

$$\Delta m = V(M_в - M_п)hp_н/RT.$$

Б. Найдите величину Δm при значениях $V = 1$ м^3, $T = 27$°C, $h = 1$.

6.2 Точка росы

Температура $T_р$, до которой должен охладиться влажный воздух, чтобы водяной пар стал насыщенным, называется *точкой росы*. В этом состоянии $p_п = p_н(T_р)$, относительная влажность φ = 100%. Переход из начального состояния ($p_п$, T) в состояние с температурой $T_р$ и давлением $p_н(T_р)$ зависит от процесса. В изохорическом процессе точка росы определяется решением уравнения $\rho(T) = \rho_н(T_р)$.

При достижении точки росы в воздухе и на телах, с которыми пар соприкасается, начинается конденсация водяного пара.

Задача 6.2.1. В комнате объемом V = 150 м^3 поддерживается температура t_1 = 20° C. Точка росы, измеренная в изохорическом процессе, равна t_2 = 17° C.

А. Определите относительную влажность воздуха.

Решение. Относительная влажность $\varphi = h \cdot 100\%$, где $h = p_{п1}/p_{н1}$. Давление пара $p_{п1}$ при температуре t_1 найдем из условия $\rho_{п1} = \rho_п(T_2)$: $p_{п1}/T_1 = p_{н2}/T_2$. Сле-

довательно, $h = (p_{н2}/p_{н1})(T_1/T_2)$. Из таблицы давления насыщенного пара находим $p_{н1} = 2{,}34$ кПа , $p_{н2} = 1{,}94$ кПа; $\varphi = 64{,}7\%$.

Б. Найдите массу пара в комнате.

Задача 6.2.2. В камере объемом $V_1 = 22{,}4$ л при температуре t находятся влажный воздух и вода при давлении $p_1 = 3p_0$ ($p_0 = 101{,}3$ кПа). После изотермического увеличения объема в два раза давление стало равным $p_2 = 1{,}8\ p_0$, относительная влажность $h = 0{,}8$.

А. Найдите температуру камеры.

Решение. В исходном состоянии $p_1 = p_н + p_{в1}$, где $p_н$ — давление насыщенного пара при температуре t, $p_{в1}$ — давление сухого воздуха. В конечном состоянии $p_2 = hp_н + p_{в2}$. Очевидно $p_{в1}V_1 = p_{в2}V_2$ или $p_{в2} = p_{в1}/2$. Из системы уравнений

$$3p_0 = p_н + p_{В1}, \quad 1{,}8p_0 = hp_н + p_{В1}/2$$

получим $p_{В1} = 2p_0$, $p_н = p_0$. Из таблиц находим $t = 100°$ С.

Б. Найдите число молей воды и воздуха в камере.

Поскольку $hp_0 2V_1 = \nu_п RT$, $p_{В2}2V_1 = \nu_В RT$, то $\nu_п = 2h(T_0/T)$ моль, $\nu_в = 2(T_0/T)$ моль, $T_0 = 273$ К; $\nu_п = 1{,}17$ моль, $\nu_В = 1{,}4$ моль.

В. Найдите давление пара $p_{п3}$, если объем увеличить еще в два раза.

Задача 6.2.3. В замкнутом объеме $V = 1$м^3 находится масса m воды и влажный воздух при давлении $p = 101{,}3$ кПа и температуре $t_1 = 11°$ С. Найдите давление пара при повышении температуры до значения $t_2 = 25°$ С в случаях: А. $m = m_1$, $m_1 = 15$ г, Б. $m = m_2$, $m_2 = 10$ г. Плотность и давление насыщенного пара при температурах t_1 и t_2 соответственно равны $\rho_{н1} = 0{,}01$ кг/м^3 $p_{н1} = 1305$ Па, $\rho_{н2} = 0{,}023$ кг/м^3, $p_{н2} = 3168$ Па.

Решение. В начальном состоянии давление пара равно $p_{н1}$. Найдем массу воды m_x, которая должна испариться, чтобы при температуре t_2 пары воды оставались нысыщенными: $\rho_{н2} = (m_x + \rho_{н1}V)/V$ или $m_x = (\rho_{н2} - \rho_{н1})V$, $m_x = 13$ г.

А. Если $m > m_x$, то давление пара равно $p_{н2}$.

Б. Если же $m < m_x$, то пары воды станут ненасыщенными. Давление пара найдем из уравнения состояния $p_п = (m_2 + \rho_{н1}V)RT_2/(M_п V)$, $p_п = 2753$ Па.

Задача 6.2.4. В закрытом помещении объемом $V = 150$ м^3 находится воздух влажностью $\varphi = h \cdot 100\%$, $h = 0{,}8$ при температуре $t_2 = 25°$ С. Сколько росы выпадет в помещении, если температура понизится до значения $t_1 = 11°$ С?

6.3. Камера Вильсона

Рассмотрим замкнутый объем, заполненный влажным воздухом при температуре T_1, сжатым поршнем до давления в несколько атмосфер. Парциальное давление пара $p_п < p_н(T_1)$. Если поршень быстро выдвинуть, то влажный воздух охладится до температуры T_2 при которой $p_п > p_н(T_2)$. Пар оказывается в неустойчивом пересыщенном состоянии, поскольку относительная влажность $\varphi > 100\%$. Если через камеру пролетает заряженная частица, то на образующихся вдоль траектории ионах начинается конденсация

пара в виде маленьких капелек. При освещении камеры сбоку виден сверкающий след пролетевшей частицы. По фотографии следа можно определить характеристики частицы. Этот прибор был изобретен в 1912 г. английским физиком Ч. Вильсоном (Нобелевская премия, 1928 г.). На протяжении нескольких десятилетий камера Вильсона была единственным трековым (от англ. *track* — след) детектором для регистрации частиц. В 1950—60-ые годы она утратила значение, уступив место пузырьковым камерам (см. 5.7.1).

6.4. Потеря воды при дыхании

Применение физических методов в классической биологии позволяет анализировать реальные процессы. Здесь мы рассмотрим процесс дыхания теплокровных животных. Пусть температура среды t_1, относительная влажность h. Вдыхаемый влажный воздух поступает в легкие и насыщается водой при температуре тела t_2. Приращение массы пара (потеря воды организмом) $\Delta m_{12} = (\rho_2 - h\rho_1)V$, где V — объем вдыхаемого воздуха, $\rho_n = \rho_н(t_n)$, $n = 1,2$. Температура выдыхаемого воздуха $t_3 < t_2$. Температура у кончика носа t_3 приближается к температуре среды (однако в сухой атмосфере для некоторых животных t_3 может быть на несколько градусов меньше t_1). При выдохе на пути из легких наружу воздух охлаждается и пар конденсируется. Приращение массы пара $\Delta m_{23} = (\rho_3 - \rho_2)V < 0$. Таким образом, организм теряет количество воды $\Delta m_{13} = \Delta m_{12} + \Delta m_{23} = (\rho_3 - h\rho_1)V$. Чем выше значение t_3, тем больше масса воды в выдыхаемом воздухе. Охлаждение позволяет удержать $(\rho_2 - \rho_3)/(\rho_2 - h\rho_1)$ часть воды, добавленной к воздуху при вдыхании. На рис. 6.4.1 стрелками указаны переходы между рассмотренными состояниями.

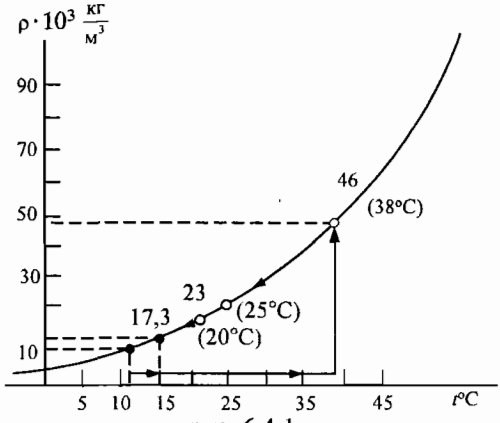


рис. 6.4.1

При вдохе организм передает количество теплоты Q_{12}, необходимое для нагревания воздуха и испарения воды. При выдохе организм получает количество теплоты $Q'_{23} < Q_{12}$ в результате охлаждения воздуха и конденсации пара. Отметим, что за счет метаболизма организм получает воду и теплоту (192 кал на 1 л вдыхаемого воздуха).

Произведем оценку, полагая $V = 1$ л, $t_1 = 11°$, $t_2 = 38°$C, $t_3 = 15°$ C, $h = 0{,}25$. Соответствующие значения плотности насыщенного пара: $\rho_1 = 10$ мг/л, $\rho_2 = 46$ мг/л, $\rho_3 = 12{,}8$ мг/л. В этом случае $\Delta m_{12} = 43{,}5$ мг, $\Delta m_{23} = -33{,}2$ мг, $\Delta m_{13} = 10{,}3$ мг.

У человека теплообмен при выдохе менее эффективен, поскольку температура выдыхаемого воздуха близка к температуре тела.

Глава 7. Поверхностное натяжение

7.1 Коэффициент поверхностного натяжения

Силы притяжения между молекулами вещества в конденсированном состоянии приводят к образованию поверхности. Ранее мы рассматривали только объемные свойства макросистем. Однако поверхностные слои, разделяющие разные вещества или фазы одного и того же вещества, обладают особыми свойствами, которые проявляются в ряде физических явлений.

Среднее значение силы, действующей на некоторую молекулу внутри жидкости, равно нулю. Но для молекул, находящихся в граничном слое жидкость – газ, имеется асимметрия сил притяжения. В результате граница раздела приобретает форму некоторой поверхности. На каждый элемент контура, ограничивающего малый участок поверхности раздела, действует сила в плоскости, касательной к поверхности, направленная по внутренней нормали к контуру.

При увеличении площади поверхности раздела часть молекул выходит из объема в граничный слой, преодолевая силы притяжения со стороны других молекул. Работа, совершаемая внешними силами при создании новой поверхности площади ΔS, может быть записана в виде

$$\delta A = \alpha \Delta S. \qquad (7.1.1)$$

Величина α называется *коэффициентом поверхностного натяжения* на границе двух сред. Измерения показывают, что α существенно зависит от температуры и наличия примесей.

Для поверхности вода-воздух $\alpha = 72{,}88$ мН/м (при $t = 20°$ C), $\alpha = 58{,}91$ мН/м (при $t = 100°$ C). Для поверхностей ртуть-воздух $\alpha = 465$ мН/м (при $t = 20°$ C), ртуть-вода $\alpha = 375$ мН/м (при $t = 20°$ C). Для поверхности масло-вода $\alpha = 20$ мН/м (при $t = 20°$ C)

Пример 7.1.1. Возьмем П-образный проволочный контур, замкнутый подвижной невесомой перемычкой длиной l. Погрузим контур в мыльную воду и затем вытащим его. Образуется мыльная пленка. Две поверхности пленки сцепляются с образующими линиями контура. Со стороны каждой поверхности пленки на перемычку действуют силы поверхностного натяжения одинаковой величины $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}$ (рис. 7.1.1).

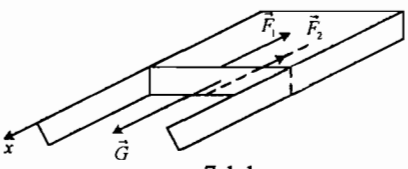


рис. 7.1.1

Приложим теперь к перемычке силу $\vec{G} = -2\vec{F}$. Тогда перемычка окажется в положении равновесия. При смещении перемычки на Δx сила $\vec{G}$ совершает работу $G_x\Delta x$, равную согласно (7.1.1) величине $2\alpha\Delta S$, где α — коэффициент поверхностного натяжения на границе раствора мыла и воздуха: $G_x\Delta x = 2\alpha\Delta S$. Поскольку $\Delta S = l\Delta x$, то $F_x = -\alpha l$. В отличие от случая резиновой пленки величина силы не зависит от величины растяжения.

7.2. Поверхностное давление

Результирующая сил натяжения направлена перпендикулярно к элементу поверхности. Искривление поверхности раздела в результате действия сил поверхностного натяжения приводит к тому, что давление по обе стороны поверхности раздела не будет одинаковым — при переходе через поверхность должен быть скачок давления.

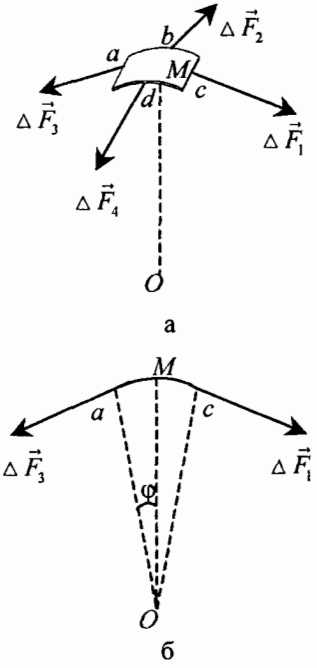


рис. 7.2.1

Для определения давления p, создаваемого поверхностным натяжением в капле жидкости радиуса R, рассмотрим систему, состоящую из капли и пара.

На рис. 7.2.1 *а* изображен элемент поверхности капли в виде криволинейного квадрата с длиной стороны Δl, середины сторон обозначены буквами a, b, c, d, точка O — центр шара, расстояние $OM = R$. Углы между отрезком OM и отрезками Oa, Ob, Oc и Od одинаковы и равны $\varphi = \Delta l/2R$, $\varphi << 1$. На каждую сторону квадрата действует сила натяжения величиной $\Delta F = \alpha\Delta l$. На рис. 7.2.1 *б* изображено сечение, проходящее через точки O, a, c. Очевидно, сумма сил натяжения $\vec{G}$ направлена к центру шара. Вычисляя сумму проекций на направление OM, найдем величину силы $G = 4\alpha\Delta l\sin\varphi \approx 4\alpha\Delta l\varphi = (2\alpha/R)\Delta S$, где $\Delta S = (\Delta l)^2$. Следовательно, давление $p = 2\alpha/R$. Эта величина равна разности давления в жидкости $p_ж$ и давления пара $p_п$: $p = p_ж - p_п$,

$$p_ж = p_п + 2\alpha/R. \qquad (7.2.1)$$

Получим этот результат, вычисляя работу, совершаемую внешней средой, $\delta A = -(p_п - p_ж)\Delta V$ при увеличении радиуса шара на ΔR. Поскольку $V = 4\pi R^3/3$, то $\delta A = -(p_п - p_ж)4\pi R^2\Delta R$. С другой стороны $S = 4\pi R^2$, и согласно (7.1.1) $\delta A = \alpha 8\pi R\Delta R$. Приравнивая оба выражения, получим (7.2.1.). Соотношение (7.2.1) называют формулой Лапласа — выдающегося математика и физика, который в 1806—07 гг. разработал теорию капиллярных явлений.

В случае мыльной сферической пленки скачок давления $\Delta p = 4\alpha/R$.

7.3. Смачивание

Рассмотрим каплю жидкости, лежащую на твердой поверхности. Поверхность раздела трех сред — твердого тела, жидкости и газа — ограничена контуром, вдоль которого соприкасаются три среды. (рис. 7.3.1).

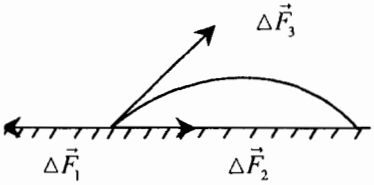


рис. 7.3.1

Коэффициенты поверхностного натяжения на границах равны соответственно $\alpha_{тг}$, $\alpha_{тж}$, $\alpha_{жг}$. *К* элементу линии соприкосновения всех трех сред длиной Δl приложены три силы поверхностного натяжения $\Delta F_1 = \alpha_{тг}\Delta l$, $\Delta F_2 = \alpha_{тж}\Delta l$, $\Delta F_3 = \alpha_{жг}\Delta l$. Угол между векторами $\Delta\vec{F}_2$ и $\Delta\vec{F}_3$, называемый краевым углом, обозначим θ. Сумма проекций сил натяжения на плоскость твердого тела равна нулю: $\alpha_{тг} - \alpha_{тж} - \alpha_{жг}\cos\theta = 0$. Отсюда находим

$$\cos\theta = (\alpha_{тг} - \alpha_{тж})/\alpha_{жг}.$$

Жидкость называют смачивающей твердое тело, как в случае чистой воды, смачивающей большинство твердых тел, если $\alpha_{тг} - \alpha_{тж} > 0$, $\theta<\pi/2$. Жидкость полностью смачивает твердую поверхность, если угол $\theta = 0$. В случае $\alpha_{тг} > \alpha_{жг} + \alpha_{тж}$ натяжение на поверхности раздела твердого тела и газа оказывается настолько большим, что жидкость растекается по твердому телу и на поверхности образуется жидкая пленка (например, керосин на поверхности жести). При $\theta > \pi/2$ жидкость называется несмачивающей, как ртуть, для которой $\theta \approx 150°$. Вода не может смачивать тело, слегка покрытое жиром. Такое тело может лежать в углублении на поверхности воды.

Обратите внимание на то, что сумма проекций сил натяжения на вертикаль $T = \alpha_{жг}L\sin\theta$, где *L*-длина линии соприкосновения. Следовательно, поверхность должна деформироваться. Если поверхность — листок тонкой пленки, то капля стремится завернуться в нее. Если капля расплавленного свинца находится на поверхности железа с температурой более 1000° С, то под каплей образуется ложбинка.

Силы поверхностного натяжения приводят к притяжению двух плавающих тел, если оба тела смачиваются или не смачиваются жидкостью. Тела отталкиваются, если одно из них смачивается, а другое не смачивается.

Присутствие примесей изменяет коэффициент поверхностного натяжения. Несколько капель масла, попавших на поверхность воды, образуют круглое пятно, заполненное мономолекулярным слоем масла (известная китобоям прошлого «смазка моря», уменьшающая высоту волн). Другой пример — кусочек камфоры на воде. Поверхностное натяжение в различных участках его контакта с водой неодинаково. Кусочек пляшет, кружась на поверхности воды.

Глава 8. Тепловые двигатели

8.1. Обратимый процесс

В термодинамике рассматриваются только такие процессы, которые можно представить в виде последовательности промежуточных состояний, незначительно отличающихся от равновесных. Другое ограничение связано с требованием обратимости процессов. Каждому значению термодинамического параметра например, объема V, соответствует определенное равновесное состояние, независимо от области значений V, лишь бы изменение происходило достаточно медленно. Пусть при изменении V в интервале $[V_1, V_2]$ система проходит ряд состояний. Процесс называется обратимым, если при обратном изменении V от значения V_2 до V_1, система пройдет через тот же ряд состояний.

Р. Клаузиус в 1864 г. показал, для обратимого процесса должно выполняться условие

$$\sum_{a=1}^{N} \frac{\delta Q_a}{T_a} = 0. \qquad (8.1.1)$$

Здесь δQ_a — количество теплоты, переданное системе в элементарном процессе.

8.2. Второй закон термодинамики

Тепловым двигателем, или тепловой машиной, называется устройство, преобразующее теплоту в механическую энергию. Физические принципы, лежащие в основе устройства тепловых машин, являются следствием второго закона термодинамики.

Возьмем два тела с различной температурой. Если привести их в тепловой контакт, то через некоторое время в результате передачи теплоты от горячего тела к холодному они окажутся в состоянии теплового равновесия. Первый закон термодинамики будет выполняться и при обратном самопроизвольном (без внешних воздействий) процессе, в котором тепло переходит от холодного тела к горячему. Однако многочисленные эксперименты не обнаружили самопроизвольных обратных процессов. Другими словами, процесс перехода теплоты в системах с конечной разностью температур необратим. Это утверждение является основой для различных формулировок *второго закона термодинамики*. Согласно Р. Клаузиусу он гласит: теплота не может самопроизвольно переходить от менее нагретого тела к более нагретому (1850 г.). Для передачи теплоты от холодного тела к горячему необходимо совершить работу.

Статистическая физика позволяет обосновать второй закон термодинамики. Две макроскопические системы могут находиться в различных микросостояниях. Каждое состояние реализуется с определенной вероятностью. При тепловом контакте системы приходят в состояние теплового равновесия, статистические свойства которого определяются небольшим числом наиболее вероятных конфигураций микросостояний. Лишь исключительно в редких

случаях системы перейдут в менее вероятные состояния. Практически это означает, что системы никогда не будут обнаружены в неравновесном состоянии. Однако в случае небольших систем мы сможем наблюдать флуктуации, связанные с переходом из более вероятных в менее вероятные состояния.

8.3. Условия работы теплового двигателя

Рассмотрим машину, которая выполняет работу в результате реализации кругового процесса — цикла.

Для того чтобы развить теорию паровых машин, нужно было отойти от чисто прикладного аспекта и рассмотреть движущую «силу огня» в общем виде. Проблему преобразования теплоты в полезную работу впервые исследовал французский инженер Сади Карно (1796—1832). В 1824 г. он показал, что тепловая машина совершает работу благодаря передаче теплоты от горячего тела к холодному. Будем условно называть более нагретое тело с температурой T_2 *нагревателем*, а более холодное тело с температурой $T_1 < T_2$ — *холодильником*. Предполагается, что температуры T_1 и T_2 поддерживаются постоянными. Отметим, прежде всего, что тепловой контакт между нагревателем и холодильником приводит к необратимому переходу теплоты и установлению теплового равновесия. Для того чтобы избежать этого, необходимо ввести еще одно вспомогательное тело. Этот посредник называется рабочим веществом или *рабочим телом*. Обычно рабочим телом служат газ, пар или продукты сгорания топлива. С рабочим телом проводят определенный круговой процесс.

Работа Карно прошла почти незамеченной, поскольку никто из современников не смог оценить новизну изложенных идей. Только через десять лет, в 1834 г., на эту работу обратил внимание Б. Клапейрон, заменивший цикл, рассмотренный Карно, другим, который теперь называют циклом Карно. Именно в связи с этой работой Клапейрон впервые ввел уравнение состояния газа. Работа Карно, изложенная Клапейроном и напечатанная в 1843 г., привела к открытию У. Томсоном и Р. Клаузиусом второго начала термодинамики.

8.4. Цикл Карно

Рассмотрим изображенный на рисунке 8.4.1 цикл Карно. Участок ab — изотерма, соответствующая температуре T_2, участок cd — изотерма, соответствующая температуре T_1, участки bc и da — адиабаты. Схема преобразования теплоты в работу выглядит следующим образом. Рабочее тело в точке a приводится в контакт с нагревателем, получает от него количество теплоты $Q_{ab} = Q_2$ и, расширяясь совершает работу $A'_{ab} = A'_2$ над внешними телами. Приращение внутренней энергии в этом процессе $U_b - U_a = 0$, или $0 = Q_2 - A'_2$. Для того чтобы тепловая машина действовала циклически, рабочее тело необходимо вернуть

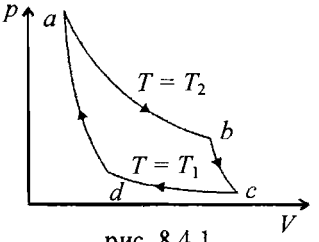


рис. 8.4.1

в начальное состояние, сжимая его. Если не прерывать контакта рабочего тела с нагревателем, то потребуется работа внешних сил равная A'_2. В этом случае полезная работа, совершенная рабочим телом, будет равна нулю. Для того, чтобы машина совершала полезную работу, контакт с нагревателем в точке b прерывается, рабочее тело расширяется и охлаждается. Когда температура достигает значения T_1, рабочее тело приводится в контакт с холодильником. Поскольку давление уменьшилось, то в процессе изотермического сжатия на участке cd внешние силы совершают работу $A_1 > 0$, величина которой меньше A'_2, а холодильнику отдается количество теплоты Q'_1. Приращение внутренней энергии в этой части цикла $U_a - U_d = 0$, или $0 = -Q'_1 + A_1$. Далее на участке da, прервав контакт с холодильником, продолжим сжимать рабочее тело, пока его температура не станет равной T_2.

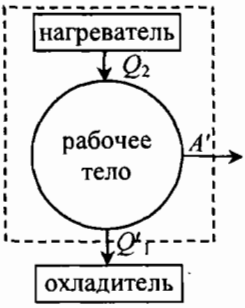


рис. 8.4.2

Пример 8.4.1. Покажем, что сумма приращений внутренней энергии и сумма работ, совершаемых газом на участках bc и da диаграммы (рис. 8.4.1) $A'_{bc} = U_b - U_c$, $A'_{da} = U_d - U_a$ равна нулю: $U_a = U_b = mc_vT_2$, $U_d = U_c = mc_vT_1$, $U_c - U_b + U_a - U_d = 0$.

Поскольку рабочее тело возвращается в исходное состояние, то приращение внутренней энергии за цикл равно нулю: $\Delta U = 0$ или $Q_2 - A'_2 + U_c - U_b - Q'_1 + A_1 + U_a - U_d = 0$. Поскольку кривые ab и cd принадлежат изотермам, то $Q_2 - A'_2 - Q'_1 + A_1 = 0$. Полная работа, совершаемая над внешними телами $A' = A'_2 - A_1$. В результате получим $A' = Q_2 - Q'_1$.

Принцип работы тепловой машины изображен на рис. 8.4.2. Получая от нагревателя количество теплоты Q_2, тепловая машина превращает в полезную работу только часть ее, равную $Q_2 - Q'_1$. Это обстоятельство имеет принципиальное значение: количество теплоты Q_2 не может быть полностью превращено в работу, *поскольку количество теплоты Q'_1 необходимо отдать холодильнику.*

8.5. Коэффициент полезного действия

Определим коэффициент полезного действия (КПД) теплового двигателя соотношением

$$\eta = A'/Q, \tag{8.5.1}$$

где A' — работа, совершаемая рабочим телом за цикл, Q-количество теплоты, переданное рабочему телу за цикл. Следовательно, КПД цикла Карно

$$\eta = A'/Q_2 \quad \text{или} \quad \eta = 1 - Q'_1/Q_2, \tag{8.5.2}$$

Максимальное значение КПД достигается при обратимых процессах. Согласно (8.1.1) условие обратимости процессов в цикле Карно имеет вид

$$Q_2/T_2 - Q'_1/T_1 = 0. \tag{8.5.3}$$

Отсюда находим $Q_1'/Q_2 = T_1/T_2$ и максимальную величину *КПД цикла Карно*

$$\eta_m = 1 - T_1/T_2. \tag{8.5.4}$$

Это — неожиданный вывод, имеющий важное следствие: *КПД цикла Карно не зависит от природы рабочего тела.*

Ни одна другая тепловая машина не имеет КПД большего, чем значение (8.5.4). Запишем это утверждение в виде неравенства

$$A'/Q_2 \leq 1 - T_1/T_2, \qquad (8.5.5)$$

играющего важную роль при анализе проблем, которые возникают при создании анализе работы электростанций и тепловых двигателей.

Для всех идеальных двигателей, кроме тепловых, КПД равен единице. А вот для идеальных тепловых двигателей он всегда меньше единицы. КПД автомобильного двигателя порядка 0,3, двигателя Дизеля порядка 0,32. Намотайте изолированную проволоку в виде спирали на палку, подключите к электросети и опустите спираль в воду. КПД этого «устройства» равен единице. А тщательно выверенная турбина оказывается менее экономичной. Это заставило обратить внимание на серьезные противоречия в определении понятия КПД и пересмотреть его определение, для того чтобы найти истинные причины потерь теплоты и работы. Сейчас для определения КПД используют параметр, введенный Кельвином, — эксергия — это та часть внутренней энергии, которая в данных условиях может быть преобразована в работу.

Тепловая машина, работающая по обратимому циклу Карно, наиболее эффективно преобразует теплоту в работу. Поэтому его называют идеальным циклом. Причина в том, что цикл, составленный из двух адиабатических и двух изотермических процессов в отсутствие потерь на трение, полностью обратим. В адиабатических процессах необратимый обмен теплотой отсутствует. А подвод или отвод теплоты в изотермическом процессе не сопровождается изменением температуры. В этой ситуации, правда, вообще невозможен теплообмен, так как поток теплоты возникает лишь при наличии конечной разности температур. Это одна из причин, по которой не может быть построен идеальный двигатель Карно.

Уникальные особенности цикла Карно породили немало недоразумений. Можно встретить даже такое утверждение, будто только цикл Карно может быть идеальным, а все остальные — реальные. Это неверно: все циклы могут быть как идеальными так и реальными. Главное отличие реального цикла от идеального состоит в том, что отсутствуют необратимый теплообмен при конечной разности температур и необратимый переход механической энергии в теплоту. Это означает, что рабочее тело не должно изменять температуру в результате подвода или отвода теплоты. Другие циклы также можно сделать идеальными, если температуру нагревателя и холодильника изменять точно так же, как меняется температура рабочего тела.

Задача 8.5.1. В машине Карно, совершаемой работу A', изотермическое расширение происходит при температуре T_2, а изотермическое сжатие при температуре T_1. Найти работу $A'_к$, совершаемую машиной при изменении температуры нагревателя $T_2 \to T_{2к}$ и холодильника $T_1 \to T_{1к}$.

Решение. Работа, совершаемая машиной в первом и втором случаях $A' = Q_2 - Q'_1$, $A'_к = Q_{2к} - Q'_{1к}$. Далее запишем условия обратимости (8.1.1) в виде $Q_2/T_2 = Q'_1/T_1 = \alpha$, $Q_{2к}/T_{2к} = Q'_{1к}/T_{1к} = \alpha$. Из этих уравнений находим

$$A'_к = A'\frac{T_{2к} - T_{1к}}{T_2 - T_1}.$$

Пусть $T_1 = T_{1к} = 300$ К, $T_2 = 500$ К, $T_{2к} = 700$ К. В этом случае $A'_к = 2A'$.

Задача 8.5.2. Айсберг температурой $t_1 = 0°$ С, массой $m = 10^{10}$ кг дрейфует в Гольфстриме, температура воды которого $t_2 = 22°$ С. Найдите максимальную работу, которую может произвести тепловая машина, использующая Гольфстрим как нагреватель и айсберг как холодильник за время таяния айсберга.

Решение. Имеем систему уравнений $A' = Q_2 - Q_1'$, $Q_1' = \lambda m$, $A' = \eta_m Q_2$, из которой находим $A' = \lambda m(T_2 - T_1)/T_1$, $A' = 2{,}5\ 10^{14}$Дж — работа АЭС за три дня.

Задача 8.5.3. Найдите КПД цикла, изображенного на рис. 3.7.2 *а*. Рабочее тело — идеальный газ. Значения параметров приведены в условии задачи 3.7.3.

Решение. В процессе *ab* газ получил количество теплоты $Q_{ab} = U_b - U_a + A'_{ab} = 3p_0V_0/4$, в изобарическом процессе *bc* — количество теплоты $Q_{bc} = \nu C_p(T_c - T_b) = -p_0V_0C_p/2R$, в изохорическом процессе *ca* — количество теплоты $Q_{ca} = \nu C_v(T_a - T_c) = p_0V_0C_v/2R$. Количество теплоты, полученное от нагревателя $Q_2 = (3 + 2C_v/R)p_0V_0/4$. Работа, совершаемая газом за цикл $A' = p_0V_0/4$. Следовательно, $\eta = 1/(3 + 2C_v/R)$. Для двухатомного газа $\eta = 1/8$.

8.6. Паровые двигатели

Паровой двигатель — величайшее достижение техники, относится к изобретениям, которые произвели переворот в промышленности и повлияли на жизнь общества. В 1698 г. Т. Сэвери и Т. Ньюкомен создали первые паровые машины для откачки воды из шахт. В двигателе, изобретенном Дж. Уаттом в 1765 г., для уменьшения потерь энергии процессы нагревания и охлаждения в рабочем цикле были разделены. Воодушевленный успехом Уатт разработал в 1784 г. машину, содержащую существенные элементы современного теплового двигателя, так что Уатт фактически изобрел паровую машину, которая привела к созданию массового производства и стала движущей силой индустриализации. К 1800 г. во всех сферах производства работали 320 машин Уатта.

Первый паровоз Р. Тревитика появился в 1803 г. Созданный Дж. Стефенсоном локомотив (1814 г.) имел двухцилиндровый паровой двигатель. После усовершенствования Стефенсон построил паровоз для первой железной дороги общественного пользования и 27 сентября 1825 г. провел состав из 33 вагонов. Дальнейшим шагом в развитии энергетики было создание паровой турбины шведом Г. Лавалем (1889 г.) и англичанином Ч. Парсонсом (1884 г.).

8.7. Циклы Отто, Дизеля и Стирлинга

8.7.1. Цикл Отто. По-разному комбинируя процессы — изотермический, изобарический, адиабатический и другие процессы — можно получить различные циклы, «встроенные» между нагревателем и холодильником, по которым работают современные тепловые двигатели. Скажем, комбинация из двух адиабатических и двух изохорических процессов на рисунке 8.7.1 образует цикл Отто бензинового двигателя. Этот цикл был предложен в 1862 г. французом А. Рошем. Однако цикл назван в честь немецкого инженера Николауса Отто, впервые построившего в 1876 г. четырехтактный двигатель с искровым воспламенением.

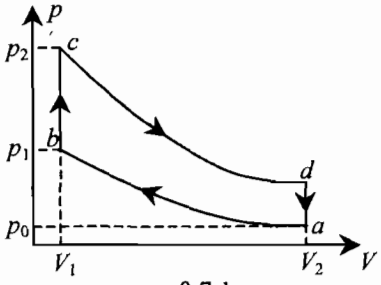


рис. 8.7.1

В 1972 г. в Уфимском авиационном институте изобрели сапоги-скороходы, которые позволяют делать 3–4 — метровые «шаги», развивая скорость до 35 км/ч. В основе устройства «моторизации бега» — микродвигатель внутреннего сгорания ударного действия.

8.7.2. Цикл Дизеля. В 1897 г. немецкий инженер Рудольф Дизель изобрел двигатель, основанный на цикле сжатие — самопроизвольное воспламенение. Если на диаграмме рис. 8.7.1 заменить изохорический процесс *bc*, по которому идет нагрев топливной смеси, изобарическим, то получим цикл Дизеля. В 1999 г. компания БМВ выпустила 6-цилиндровый дизельный двигатель 730*d* объемом 3 л мощностью 184 л. с. (1 л.с. = 735 Вт) , развивающий крутящий момент 410 Н·м при 2000—3000 об/мин.

8.7.3. Цикл Стирлинга. В настоящее время ведущие мировые автомобильные компании совершенствуют двигатель «внешнего сгорания», основанный на цикле, предложенном в 1816 г. шотландским священником, преподобным Робертом Стирлингом (патент 1827, 1840 гг.). Если на диаграмме рис. 8.7.1 заменить адиабаты *cd* и *ab* изотермами, то мы получим цикл Стирлинга. Согласно первому закону термодинамики имеем уравнение $0 = -Q'_{ab} + Q_{bc} + Q_{cd} - Q'_{da} - A'$. Поскольку $Q_{bc} = Q'_{da}$, то $0 = -Q'_{ab} + Q_{cd} - A'$. Если обмен теплотой в изохорических процессах считать внутренним процессом, то $Q_2 = Q_{cd}$ — КПД цикла совпадает с КПД цикла Карно. Двигатель внешнего сгорания имеет и еще ряд преимуществ. Сгорание смеси происходит непрерывно, а не вспышками. Его можно использовать без глушителя. Выбросы продуктов сгорания значительно меньше, чем в других двигателях. Этот двигатель начинает внедряться только сейчас благодаря созданию новых конструктивных материалов, выдерживающих длительную работу при высоких температурах.

Пример 8.7.1. Цикл Брайтона. Рассмотрим простейшую тепловую машину, рабочим веществом которой является вертикально стоящий стержень

длиной l_1 (рис.8.7.2 *а*). Наша задача поднять груз массой M с высоты l_1 до высоты $l_3 = H$. Изобразите диаграмму цикла в координатах (V, p).

Поставим груз на торец стержня. После этого стержень адиабатически сожмется до длины $l_2 < l_1$ Теперь, сообщая ему количество тепла Q_2 заставим его расширяться до длины $l_3 > l_1$ и снимем груз. Длина стержень адиабатически увеличится до значения l_4. Теперь, охлаждая стержень, можно уменьшить его размеры до исходных (рис. 8.7.2 *а*). Соответствующий цикл, изображенный на рисунке 8.7.2 *б*, называется циклом Брайтона.

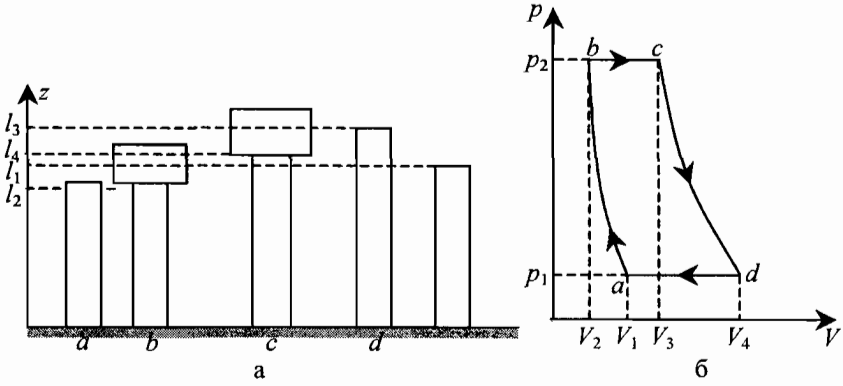


рис. 8.7.2

Следует отметить, что эта же диаграмма описывает процессы в современных скоростных авиационных турбинах, где рабочим веществом является атмосферный воздух.

8.8. Тепловое загрязнение окружающей среды

Существует два основных источника получения теплоты для приведения в действие систем преобразования энергии - сжигание горючих веществ и деление ядер урана и плутония. В любом случае часть полученной теплоты отдается охладителю — окружающей среде. Один из способов отвода теплоты состоит в пропускании воды из реки или озера через охлаждаемый агрегат — холодильник. Нагретую воду затем сбрасывают обратно. Рост температуры, грозящий нарушить природное равновесие в экологических системах реки или озера, называют *тепловым загрязненеием.*

Пример 8.8.1. КПД преобразования теплоты в электрическую энергию на ТЭС мощностью P = 1000 МВт (типичная мощность ТЭС и АЭС) равен $\eta = 0{,}32$. Какой необходимо обеспечить расход воды (в кг/с), чтобы приращение температуры после контакта с холодильником не превышало $\Delta t = 1°$ С.

Из (8.5.2) получим количество сбрасываемой теплоты $Q'_1 = Q_2 - A' = A'(1-\eta)/\eta$. Поскольку приращение температуры воды ΔT массой Δm удовлетворяет уравнению $c\Delta m\Delta T = Q'_1$, то расход воды $\Delta m/\Delta t = P(1-\eta)/(c\eta\Delta T)$, $\Delta m/\Delta t = 5{,}1 \cdot 10^5$ кг/с. Отметим, что сток Волги — $8{,}5 \cdot 10^6$ кг/с, сток Амазон-

ки — $2 \cdot 10^8$ кг/с. Согласно нормам национального контрольного комитета США, повышение температуры в водоемах не может превышать 2,25 К осенью, зимой и весной и не более 0,8 К — летом.

8.9. Холодильная машина

Холодильная машина представляет собой обычную тепловую машину, в которой рабочее тело совершает обратный термодинамический цикл. В результате работы А, совершаемой внешней силой над рабочим телом, от холодильника отбирается количество теплоты Q_1, а большее количество теплоты $Q_2' = Q_1 + A$ передается нагревателю. Для реализации такого цикла необходимо подобрать рабочее тело, поглощающее теплоту при низкой температуре. Обычно — это жидкость с большой удельной теплотой парообразования. Таким образом, *работа холодильника связана с изменением агрегатного состояния рабочего тела* — испарением рабочего тела в охладителе и обратным процессом конденсации в нагревателе. Принцип работы холодильной машины показан на рис. 8.9.1.

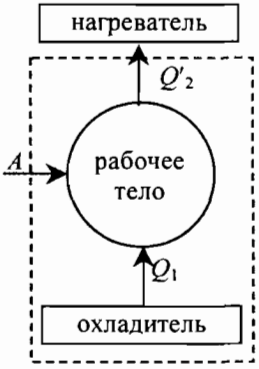


рис. 8.9.1

В бытовых холодильниках используется фреон-12, который кипит при низкой температуре ($p_{н1}$ = 100 кПа при t_1 = –30° С, $p_{н2}$ = 153 кПа при t_2 = –20° С, $p_{н3}$ = 574 кПа при t_3 = 20° С), затем сжимается компрессором и конденсируется, передавая в комнату количество теплоты

$$Q'_2 = Q_1 + A.$$

Первые холодильные компрессоры, действие которых основано на охлаждении при быстром расширении воздуха, появились в 70-х годах XIX века. В 1911 г. американская компания General Electric начинает серийное производство бытовых холодильников. В настоящее время принято охлаждать морозильную камеру по системе No Frost, препятствующей образованию льда и инея, а в холодильном отделении применять обычную статическую систему охлаждения. Такая комбинация называется Frost Free.

Эффективность холодильной машины определяется количеством теплоты Q_1, которое можно отобрать при совершении наименьшей работы. КПД машины

$$k = Q_1/A, \quad \text{или} \quad k = Q_1/(Q'_2 - Q_1) \qquad (8.9.1)$$

Поскольку КПД холодильника может быть больше единицы, то величину k назвали холодильным коэффициентом. Если еще десять лет назад коэффициент k приближался к 2,5, то перспективные разработки ведущих компаний уже сегодня реализуют значения k = 4,5.

Для холодильного цикла Карно из (8.3.1) находим $Q_1/T_1 - Q'_2/T_2 = 0$. Следовательно, *холодильный коэффициент цикла Карно* $k_m = T_1/(T_2 - T_1)$.

Пример 8.9.1. Тепловые машины и внешняя среда. При работе охлаждающих машин — холодильников и кондиционеров-должно выполняться условие $k \le k_m$ или $A/Q_1 \ge (T_2 - T_1)/T_1$. Мощность P, потребляемая кондиционером, связана со скоростью отвода теплоты $P_1 = \delta Q_1/\Delta t$ соотношением $P \ge P_1(T_2 - T_1)/T_1$. Скорость передачи теплоты от внешней среды к помещению $P_{ск} = C(T_2 - T_1)$, где C — постоянный коэффициент. В установившемся режиме $P_1 = P_{ск}$. Следовательно, $P \ge C(T_2 - T_1)^2/T_1$.

Пусть температура воздуха равна 30° С (T_2 = 303 К) , температура в помещении равна 25°С (T_1 = 298 К). Теперь предположим, что внешняя температура повысилась до 35°С ($T_2 \to T_2'$ = 308 К). Тогда для поддержания внутри помещения температуры T_1 мощность, потребляемая кондиционером, должна возрасти до значения $P' = P[(T_2' - T_1)/(T_2 - T_1)]^2 = 4P$. Увеличение внешней температуры на 5°С приводит к увеличению потребляемой мощности в четыре раза!

Увеличение температуры внешней среды приводит к значительному уменьшению коэффициента полезного действия тепловых станций.

Задача 8.9.2. Двигатель холодильника потребляет мощность P_0 = 100 Вт. Температура внутри холодильника t_1 = 7°С, температура в комнате t_2 = 27°С. Дверной выключатель лампочки внутри холодильника сломался и лампочка продолжает гореть при закрытой двери. Потребляемая мощность возросла до значения P = 101,45 Вт. Найдите мощность лампочки. Холодильный коэффициент в два раза меньше, чем у машины Карно.

Решение. Согласно условиям задачи имеем систему уравнений $P_1/P_0 = k$, $(P_1 + P_л)/P = k$, $k = T_1/[2(T_2 - T_1)]$, из которой находим $P_л = T_1(P - P_0)/$ $/[2(T_2 - T_1)]$, $P_л$ = 5 Вт.

8.10. Тепловой насос

Для бытовых холодильников значение $k \sim 2 \div 4$. Из (8.9.1) получим количество теплоты, переданное нагревателю-комнате $Q'_2 = (1 + k)A$. Следовательно, холодильную машину можно использовать как нагреватель или тепловой насос. Пусть $k = 4$, тогда $Q'_2 = 5A$. Если количество электроэнергии равное A пойдет на обогрев, то комната получит всего лишь количество теплоты A. Разница очевидна. Идею такого применения холодильной машины предложил Кельвин в 1852 г. Однако тепловые насосы еще не нашли широкого применения. Эффективность тепловых насосов, используемых на практике, существенно меньше приведенного выше значения $1 + \kappa$. Большое достоинство теплового насоса — обратимость. Зимой он нагревает помещение, а летом работает как кондиционер.

Часть III.
МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Глава 1. Аэростатика и гидростатика

1.1. Объемные и поверхностные силы

При изучении макроскопического поведения жидкости и газа предполагается, что физические величины, связанные с веществом (масса, температура, давление и т. д.) непрерывно распределены по объему вещества. Так приходят к представлению о жидкости и газе как сплошной среде. В механике жидкости роль материальной точки играет «жидкая частица» — элемент объема, малый по сравнению со всем объемом, но достаточно большой, чтобы флуктуации не влияли на измеряемые в этом объеме средние значения физических величин. Поэтому, когда говорят о скорости частицы жидкости или давлении в точке с координатами $\vec{r} = (x, y, z)$, то имеют в виду значения этих функций $\vec{v}(\vec{r}, t)$ или $p(\vec{r}, t)$ в малом объеме в окрестности этой точки.

На частицу среды действуют два вида сил: *объемные* и *поверхностные*. К первому относятся силы тяжести, которые действуют на каждую молекулу внутри жидкой частицы. Эти силы называются *объемными* или массовыми. Ко второму типу сил относятся силы близкодействия, возникающие в тонком слое молекул на общей границе частицы и соприкасающейся с ней окружающей среды — жидкости, воздуха или стенок сосуда. Рассмотрим плоский элемент ΔS поверхности частицы, ориентацию которого зададим единичным вектором $\vec{n}$, направленным наружу. Силу, действующую на элемент поверхности ΔS в окрестности точки с координатами x, y, z, можно представить в виде $\Delta\vec{F} = -p(x, y, z)\Delta S \cdot \vec{n} + \Delta\vec{F}_k$, где $p(x, y, z)$ — давление в точке с координатами x, y, z; ΔF_k — касательная компонента силы, обусловленная внутренним трением — вязкостью. В случае невязкой или неподвижной жидкости *сила давления*

$$\Delta\vec{F} = -p(x, y, z)\Delta S \cdot \vec{n}\,. \qquad (1.1.1)$$

В общем случае давление является функцией координат и времени. Отметим, что выражение «давление на стенку» лишено смысла; правильное утверждение — давление в точке. Нельзя говорить о направлении давления, поскольку давление — скалярная величина.

1.1.1. Полная поверхностная сила. Выделим жидкую частицу-кубик со сторонами Δx, Δy, Δz, объемом $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Противоположные грани кубика параллельны плоскостям xy, x yz, zx и проходят через концы отрезков $[x, x + \Delta x]$, $[y, y + \Delta y]$, $[z, z + \Delta z]$. Учитывая (1.1.1), найдем проекцию на ось x силы давления, действующую на кубик (рис. 1.1.1)

$$F_x = -[p(x + \Delta x, y, z) - p(x, y, z)]\Delta y \Delta z = -(\Delta p/\Delta x)\, \Delta V.$$

Вычисляя проекции F_y, F_z, получим компоненты силы давления, действующей на жидкую частицу со стороны окружающей ее жидкости:

$$F_x = -(\Delta p/\Delta x)\, \Delta V,$$

$$F_y = -(\Delta p/\Delta y)\, \Delta V,$$

$$F_z = -(\Delta p/\Delta z)\, \Delta V. \qquad (1.1.2)$$

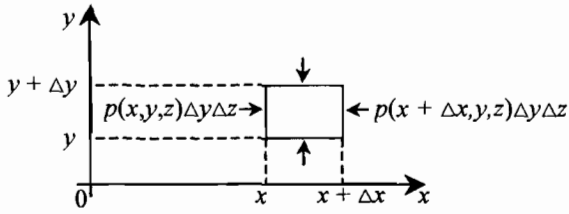


рис. 1.1.1

1.2. Закон Паскаля

Давление в неподвижной жидкости, как и сила реакции, определяется из условия равновесия: сумма силы тяжести и силы давления, действующих на жидкую частицу равна нулю:

$$m\vec{g} + \vec{F} = 0. \qquad (1.1.3)$$

Если пренебречь в (1.1.3) силой тяжести, то $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$. Из (1.1.2) следует, что давление постоянно в любой точке жидкости. В 1653 г. французский ученый Б. Паскаль сформулировал это утверждение в виде закона: *внешние силы, приложенные к поверхности жидкости (или газа), создают давление одинаковое в любой точке жидкости (или газа).*

Сила давления (1.1.1), действующая на плоский элемент поверхности, направлена но нормали внутрь.

Сделаем два замечания. Давление, как и сила «передаваться» не может. «Передается», а точнее — распространяется только волна деформации. Однако в неподвижной жидкости может распространяться лишь поток теплоты, создавая волну температуры.

Внешние поверхностные силы могут быть созданы силой атмосферного давления или соприкасающимися с жидкостью твердыми телами.

1.3. Гидравлический пресс

Основным узлом пресса являются два цилиндра, заполненные минеральным маслом. На первый поршень с грузом массы m действуют сила веса груза и сила реакции масла $\vec{F}_1'$. Сумма этих сил равна нулю. На поверхность масла под поршнем действует сила, величиной $F_1 = F_1' = mg$, создавая давление F_1/S_1, где S_1 — площадь поршня. На второй поршень действуют внешняя сила $\vec{F}_2$ и сила реакции масла $\vec{F}_2'$. На поверхность масла действует сила величиной $T = F_2 = F_2'$, создавая давление F_2/S_2, где S_2 — площадь второго поршня. Согласно закону Паскаля $F_1/S_1 = F_2/S_2$. Если $S_1 >> S_2$, то $F_1 = F_2S_1/S_2 >> F_2$. Если в гидравлическом подъемнике $S_1/S_2 = 20$, то можно поднять груз массой $m = 2 \cdot 10^3$ кг, прилагая силу $F_2 = 980$ Н.

Гидравлический пресс, создающий давление 160 МПа, сжимает металлический контейнер с мусором объемом 250 л в течение нескольких секунд в диск толщиной 20 см.

Уравнение непрерывности. Перемещения l_1 и l_2 каждого из поршней связаны соотношением, следующим из закона сохранения массы масла, перетекающего в единицу времени из одного цилиндра в другой. Предполагая, что плотность масла постоянна, получим еще одно уравнение: $S_1l_1 = S_2l_2$.

1.4. Атмосферное давление

Заполним ртутью запаянную с одного конца трубку сечением S и погрузим открытым концом в сосуд с ртутью. Часть ртути вытечет. Пусть h — расстояние между уровнями ртути в трубке и в сосуде. На столбик ртути действуют сила тяжести $\rho_{рт} Sgh$ и поверхностная сила атмосферного давления $p_{ат}S$, приложенная к основанию столбика. Сумма этих сил равна нулю:

$$p_{ат}S - \rho_{рт} hSg = 0, \quad h = p_{ат}/\rho_{рт}g.$$

Значение $p_{ат}$ = 101325Па называют нормальным атмосферным давлением. Полагая $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$кг/м^3, получим h = 0,76м. Если использовать вместо ртути воду, то в водяном барометре высота уровня воды достигает значения

$$h_в = p_{ат}/(\rho_в g) = h\rho_{рт}/\rho_в = 10{,}332\text{м}.$$

Первым исследователем атмосферы был Галилей. Он предположил, хотя это многие отрицали, что атмосфера материальна и имеет вес. Располагая примитивным нагнетательным насосом, он поставил эксперимент по определению плотности воздуха и получил значение равное 1/400 плотности воды. Реальное значение плотности воздуха равно 1,29 кг/м^3 или 1/700 плотности воды.

Первые упоминания о давлении атмосферы появились после, того как немногочисленные ученые узнали от Галилея о весе воздуха. Честь открытия давления воздуха принадлежит ученику Галилея Эванжелисте Торричелли. В 1644 г. он сконструировал первый в мире ртутный барометр. Это название придумал в 1667 г. Р. Бойль. Приставка баро происходит от слова baros (греч. — тяжесть).

Опыты Торричелли вызвали необычайное волнение в научной среде. Причина в том, что он доказал несостоятельность принципа «природа боится пустоты» (*horror vacui*), который был основой аристотелевой физики. Авторитет Аристотеля в Древнем мире и в Средние века был настолько велик, что почти две тысячи лет его утверждения служили каркасом науки. Достаточно было произнести фразу «magister dixit» (так сказал учитель) и полемика между сторонниками и противниками пустоты прекращалась. Чтобы услышать новой слово об этой проблеме нужно было дождаться опыта Торричелли.

В этой обстановке Блез Паскаль в 1648 г. попросил своего родственника поставить опыт Торричелли у подножия и на вершине горы Пью де Дом. Результаты эксперимента, в ходе которого было обнаружено, что на вершине уровень ртути в трубке ниже, чем у основания, оказался поистине эпохальным. Рене Декарт предложил производить непрерывные наблюдения атмосферного давления в разных местах. Заметив, что положения уровня ртути связаны с состоянием погоды, Паскаль пытался делать первые прогнозы. Еще раньше Торричелли видел, что в разные дни атмосферное давление бывает различным. Так родилась научная метеорология (греч. *meteoros* — парящий в воздухе).

Эксперимент Герике. Немецкий физик Отто фон Герике (1602—1686 гг.) был выдающимся экспериментатором. Он обнаружил множество электрических и магнитных явлений, создал ряд приборов. Наибольшую известность получил опыт с магдебургскими полушариями, произведенный в 1654 г в присутствии императора. Герике рассказывал, что у него появилось сильное желание лично убедиться в образовании пустоты. Он усовершенствовал воздушный насос, который позволял откачивать воздух из сосуда. Для описываемого и сейчас во всех учебниках опыта, Герике изготовил две металлических полусферы радиусов a = 18 см. Используя эластичную прокладку, полусферы можно было соединить в сферу. Герике выкачал из сферы часть воздуха и продемонстрировал, что для отрыва полусфер понадобились две упряжки по восемь лошадей в каждой.

Найдем давление воздуха в сфере p_{in}, если каждая лошадь развивает усилие G. Направим ось z параллельно земной поверхности, начало координат поместим в центр сферы. На полусферу действуют сила натяжения троса $8\vec{G}$, сила давления воздуха $\vec{F}$ и сила реакции $\vec{N}$ со стороны другой полусферы. Из условия равновесия имеем уравнение $8G + N + F_z = 0$. Разобьем поверхность полусферы на N элементарных площадок, ориентированных перпендикулярно единичным векторам $\vec{n}_k$ (k = 1,2, ...). Сила давления, действующая на элементарную площадку площадью ΔS, равна $\Delta\vec{F}_k = -(p_{ат} - p_{in})\ \Delta S\vec{n}_k$. Сумма всех элементарных сил равна $\vec{F} = (0,\ 0,\ F_z)$, $F_z = -(p_{ат} - p_i)\pi a^2$. Поскольку при отрыве полусфер $N = 0$, то $p_{in} = p_{ат} - 8G/\pi a^2$. Пусть G = 1000 Н, тогда $p_{in} = p_{ат} - 7,863 \cdot 10^4$ Па.

1.5. Условие равновесия жидкости и газа

Возьмем трубку переменного сечения с произвольной формой осевой линии, закрытую или открытую на одном или двух концах. В трубке находится воздух и несколько слоев *несжимаемой жидкости* различной плотности. Ось z направим вертикально вверх. Тогда из (1.1.3) получим уравнение

$$-\rho g - \Delta p/\Delta z = 0,$$

из которого следует, что в любой точке слоя однородной несжимаемой жидкости условие равновесия имеет вид

$$\rho g z + p = \text{const}. \qquad (1.5.1)$$

По обе стороны поверхности раздела жидкость-жидкость или жидкость-воздух давления одинаковы. Пусть, например, между уровнями $z = h_2$ и $z = h_1 < h_2$ изогнутой трубки находится жидкость плотностью ρ. Из (1.5.1) имеем $\rho g h_1 + p_1 = \rho g h_2 + p_2$ или $p_1 = p_2 + \rho g(h_2 - h_1)$.

1.6. Гидростатическое давление

Поместим начало координат на дно сосуда, заполненного жидкостью плотностью ρ до высоты $z = z_0$. В области $0 \le z \le z_0$ выполняется соотношение (1.5.1). Следовательно, в этой области давление представляет собой функцию координаты z: $p(z) = C - \rho g z$. Постоянную C в правой части найдем из условия $p(z_0) = p_{ат}$ на свободной поверхности: $C = p_{ат} + \rho g z_0$. Давление в точках горизонтальной плоскости с координатами x, y, z равно $p(z) = p_{ат} - \rho g(z - z_0)$. Обозначая $h = z_0 - z$, получим давление на глубине h:

$$p(h) = p_{ат} + \rho g h. \qquad (1.6.1)$$

Слагаемое $\rho g h$ называется *гидростатическим давлением*.

Если сосуд движется с ускорением $\vec{w} = (0, 0, w)$, то в системе отсчета, связанной с сосудом, $\vec{g}_{эф} = \vec{g} - \vec{w}$ (см. часть I, гл. 11). Условие равновесия (1.6.1) принимает вид $\rho(g + w)z + p = \text{const}$. Гидростатическое давление $p(h) = p_{ат} + \rho(g + w)h$. В невесомости при $w = -g$ гидростатическое давление равно нулю.

Пример 1.6.1. Найдем величину силы давления воды на вертикальную стенку плотины. Уровень воды у плотины — H, ширина перекрытия — L. Введем ось h, направленную вертикально вниз с началом на поверхности воды. Величина силы, действующей на прямоугольную элементарную площадку высотой Δh, шириной L, расположенную на глубине h, равна $\Delta F = \rho g h L \Delta h$. Построим график функции $y(h) = \rho g L h$ — прямую, выходящую из начала координат, и убедимся, что при $\Delta h << H$ величина ΔF представляет собой площадь прямоугольника. Поэтому сила, действующая на стенку плотины, равна площади треугольника «высотой» $\rho g L H$ и длиной основания H равна $F_0 = \rho g L H^2/2$.

Величина силы, действующей на часть стенки, расположенную между дном плотины и горизонтальным уровнем на расстоянии z от дна, равна разности площадей треугольников: $F(z) = \rho g L(2H - z)z/2$.

Положим $z = H/4$. В этом случае $F(h) = 7F_0/16$. Следовательно, нижняя четверть стенки должна выдержать почти половину всей нагрузки. По этой причине нижнюю часть плотины делают более массивной.

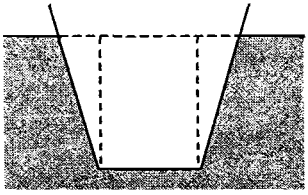


рис. 1.6.1

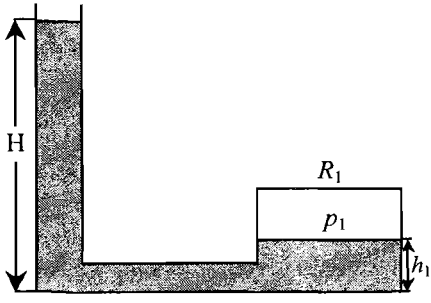
Пример 1.6.2. В сосуд с водой погрузили усеченный конус, нижнее меньшее основание которого закрыто невесомой пластинкой (рис. 1.6.1). Сила реакции, действующая со стороны ободка конуса на пластинку $N = 9{,}8$ Н. Отпадет ли пластинка, если в конус влить воду весом $P = 9{,}8$ Н?

Пусть пластинка находится на глубине h, площадь нижнего основания конуса равна S. Сумма сил действующих на пластинку равна нулю:

$$(p_{ат} + \rho g h)S - p_{ат}S - N = 0.$$

Сила реакции $N = \rho g h S$ численно равна весу воды в объеме цилиндра высотой h с площадью основания S. Если влить такое количество воды, то она займет объем конуса высотой $h_1 < h$. Сила реакции станет равной $N_1 = \rho g(h - h_1)S > 0$. Следовательно, пластинка не отпадет.

1.6.1. Гидроусилитель. На рис. 1.6.2 *а* к резервуару R_1, содержащему воздух и слой воды толщиной h_1, присоединена трубка, в которую налита вода до уровня H. Найдем давление воздуха p_1 в резервуаре. Из условия равновесия воды на уровнях H и h_1 получим из (1.5.1) уравнение $\rho_в g H + p_{ат} = \rho_в g h_1 + p_1$, из которого находим $p_1 = p_{ат} + \rho_в g(H - h_1)$. Для увеличения перепада давления можно использовать гидроусилитель, изображенный на рис. 1.6.2 *б*. Он представляет собой два резервуара R_2 и R_3, содержащих ртуть, налитую до уровней на высотах h_2 и h_3. Поскольку $p_1 = p_2$, то из условия равновесия ртути на уровнях h_2 и h_3 получим из (1.5.1) уравнение $\rho_{рт} g h_2 + p_1 = \rho_{рт} g h_3 + p_3$. Следовательно, $p_3 = p_{ат} + \rho_в g(H - h_1) + \rho_{рт} g(h_2 - h_3)$.



а

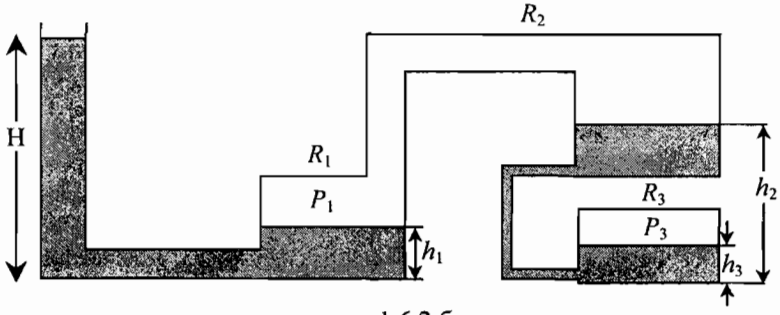


рис. 1.6.2 б

Задача 1.6.3. Два вертикальных, открытых сверху, цилиндрических сосуда одинакового поперечного сечения соединены на высоте $h = 8$ м тонкой трубкой, перекрытой краном. Первый сосуд заполнен водой до высоты $h_1 = 10$ м, второй- нефтью до высоты $h_2 = 12{,}5$ м. Давление на уровне дна в первом и втором сосудах одинаково. Найдите приращение уровней воды и нефти, если открыть кран.

Решение. Направим ось z вертикально вверх, начало координат поместим на уровне дна. Запишем условие равновесия слоя воды. Для частиц на свободной поверхности воды и дна из (1.5.1) следует уравнение $p_{ат} + \rho_в g h_1 = p_0$. Из условия равновесия нефти на уровнях дна $h = 0$ и h_2 получим аналогичное уравнение $p_{ат} + \rho_н g h_2 = p_0$. Следовательно, $\rho_в h_1 = \rho_н h_2$. Для того, чтобы определить направление перетекания жидкостей, найдем разность давлений нефти и воды $p_н - p_в$ на уровне $z = h$. Записывая условия равновесия частиц воды и нефти получим из (1.5.1) два уравнения: $p_{ат} + \rho_в g h_1 = p_в + \rho_в g h$, $p_{ат} + \rho_н g h_2 = p_н + \rho_н g h$.

Поскольку $p_н - p_в = (\rho_в - \rho_н) g h > 0$, то через открытый кран часть нефти перетечет в сосуд с водой и всплывет (рис. 1.6.3). Пусть толщина слоя перетекшей нефти равна x. На уровне h в состоянии равновесия давление p, создаваемое слоями нефти и воды в левом сосуде, равно давлению p нефти в правом сосуде. Записывая условие равновесия (1.5.1) частиц нефти на уровнях B_1 и A_1 и воды на уровнях A_1 и N, получим уравнения

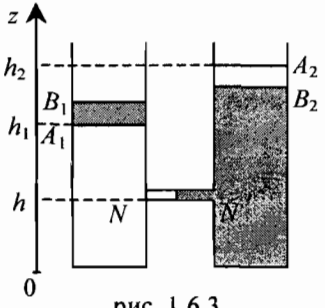


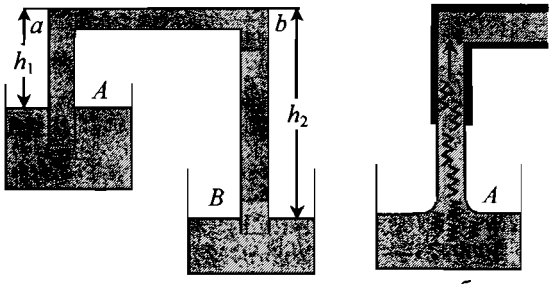
рис. 1.6.3

$$p_{ат} + \rho_н g(h_1 + x) = p_1 + \rho_н g h_1, \qquad (1)$$

$$p_1 + \rho_в g h_1 = p + \rho_в g h, \qquad (2)$$

из которых получим $p = p_{ат} + \rho_н g x + \rho_в g(h_1 - h)$. Из условия равновесия частиц нефти на уровнях B_2 и N имеем $p_{ат} + \rho_н g(h_2 - x) = p + \rho_н g h$. Из двух последних уравнений, учитывая соотношение $\rho_в h_1 = \rho_н h_2$, находим $x = (h_2/h_1 - 1)h/2$, $x = 1$ м.

Пример 1.6.4. Автомобилисты знают способ переливания бензина из одной канистры в другую с помощью шланга, не наклоняя одну из них. Объясните, почему вода перетекает через шланг из сосуда A в сосуд В, изображенные на рис. 1.6.4 *а* ($h_2 > h_1$).



а б

рис. 1.6.4

Обозначим p_a и p_b давления в точках шланга a и b, атмосферное давление — p_0. Согласно условию равновесия (1.5.1) имеем уравнения $p_a + \rho_в g h_1 = p_0$, $p_b + \rho_в g h_2 = p_0$. Следовательно, $p_a - p_b = \rho_в g(h_2 - h_1) > 0$ — вода перетекает. Но если зазор между торцом шланга, погруженного в сосуд A, и водой порядка мм, то пузырьки воздуха попадают в шланг и процесс перетекания прекращается.

Сифон без «трубки». Французский ученый Пьер-Жиль де Жен, лауреат Нобелевской премии по физике (1991 г.), в своей книге «Хрупкие объекты» (М. «Мир» 2000) описывает удивительный опыт. Добавим в воду один из растворимых полимеров — полиоксиэтилен (полиокс) из расчета один грамм на десять литров воды. Теперь, даже если конец шланга находится на расстоянии 20 см от поверхности воды, сифон работает! Растворенные в воде молекулы полиокса сворачиваются в клубок. Но, подхваченные течением, выпрямляются, образуют структуру типа резины и «увлекают» за собой воду (рис. 1.6.4 *б*).

1.7. Закон Архимеда

Из (1.1.1) и (1.6.1) следует, что величина силы $\Delta\vec{F}$, действующей на элемент поверхности ΔS со стороны воды, возрастает с увеличением глубины. Поэтому равнодействующая всех элементарных сил не равна нулю.

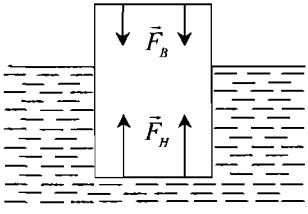


рис. 1.7.1

Найдем равнодействующую поверхностных сил, действующих на брусок — параллелепипед площадью основания S, погруженный в жидкость плотностью ρ на глубину h (рис. 1.7.1). На боковые грани бруска действуют сила атмосферного давления и сила давления воды. Сумма этих сил равна нулю. На верхнюю грань бруска действует сила $\vec{F}_в = (0, 0, -p_{атм}S)$, на

нижнюю — сила $\vec{F}_н = (0, 0, p_{атм}S + \rho ghS)$. Равнодействующая этих сил, называемая выталкивающей силой, направлена вертикально вверх, величина силы $F_{выт} = \rho g V_{пог}$, где $V_{пог} = hS$ — объем погруженной части бруска. Следовательно, выполняется **закон Архимеда:** *на тело, погруженное в жидкость (или газ), действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и равная весу вытесненной им жидкости (газа).*

Согласно определению равнодействующей силы можно показать, что выталкивающая сила приложена к точке, совпадающей с центром тяжести вытесненного объема жидкости (газа). В неинерциальной системе отсчета, движущейся с ускорением $\vec{w}$, выталкивающая сила направлена параллельно вектору $-\vec{g}_{эф}$, где $\vec{g}_{эф} = \vec{g} - \vec{w}$. В невесомости выталкивающая сила равна нулю.

Этот закон был открыт величайшим механиком и математиком Древней Греции Архимедом (287—212 гг. до н.э.). Архимед первым в истории науки применил математику к решению прикладных задач. Он заложил основы статики и гидростатики, разработал методы определения центра тяжести, изобрел множество механизмов для поднятия тяжести и подъема воды, военные метательные машины. Наиболее важный вклад Архимеда в математику относится к вычислению площадей плоских фигур и объемов. Он впервые вычислил длину окружности, пользуясь вписанными и описанными многоугольниками. Дойдя до 96-стороннего многоугольника, нашел приближенное значение $223/71 < \pi < 22/7$. Значение $\pi \approx 22/7$, называемое архимедовым числом, до сих пор используют на Ближнем Востоке.

Задача 1.7.1. Шар радиусом a находится в воде плотностью $\rho_в$. Расстояние от поверхности воды до центра шара $h > a$. Сила, действующая со стороны воды на нижнюю половину поверхности шара, $\vec{F}_н = -\pi a^2[p_{ат} + \rho_в g(h + 2a/3)]\ \vec{g}/g$. Докажите, что сила, действующая на верхнюю половину поверхности шара $\vec{F}_в = \pi a^2[p_{ат} + \rho_в g(h - 2a/3)]\ \vec{g}/g$.

Пример 1.7.2. Задача царя Гиерона. Эта проблема, относящаяся к так называемым обратным задачам, впервые решена Архимедом. Правитель Сиракуз Гиерон заказал ювелиру корону, которая должна быть сделана из чистого золота. Когда заказ был выполнен, Гиерон попросил своего родственника Архимеда выяснить, не разрушая корону, не подменил ли ювелир часть золота серебром. Решение пришло Архимеду внезапно, когда он принимал ванну. По легенде он с криком «Нашел! Нашел!» — на греческом языке «Эврика» — побежал домой. Так был открыт первый закон в истории физики.

Предположим, что корона сделана из сплава золота и серебра, плотности которых $\rho_з$ и $\rho_с$. Вначале взвешивая сплав, определим массу сплава $m = m_з + m_с$. Затем погрузим сплав в воду и взвесим его с помощью динамометра. Показание динамометра $P = mg - \rho_в gV$. Учитывая, что $m_з = \rho_з V_з$, $m_с = \rho_с V_с$, получим

$$P = mg - \rho_в g\left(\frac{m - m_c}{\rho_з} + \frac{m_c}{\rho_c}\right). \qquad (1)$$

Если взвесить в воде массу m чистого золота, то вес

$$P' = mg - \rho_в g \frac{m}{\rho_з}. \qquad (2)$$

Из (1), (2) находим

$$P' - P = \rho_в m_c g\left(\frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{\rho_з}\right) > 0. \qquad (3)$$

Если выполняется неравенство $P' > P$, то сплав содержит серебро.

1.8. Условие плавания тела

Если тело и жидкость находятся в покое, то сумма сил тяжести и выталкивающей силы равна нулю: $\rho_ж V_п g - mg = 0$, где $V_п$ — объем вытесненной телом жидкости плотностью $\rho_ж$.

Водоизмещением называется объем воды, вытесненный плавающим судном. Самые крупные американские авианосцы класса «Нимиц» имеют водоизмещение 100368 т, осадку — 11 м, длину — 341 м; ширина корпуса — 41 м, ширина полетной палубы — 77 м, площадь 1,82 га. Энергетическая атомная установка мощностью 280 000 л.с. позволяет развить скорость 56 км/ч.

Водоизмещение самой большой в мире российской атомной подводной лодки типа «Тайфун» при полном погружении — 26 500 т. Длина — 170 м.

Основная характеристика грузовых судов — *дедвейт* — масса груза, принимаемая судном при предельно допустимом погружении. При полной загрузке их осадка достигает 24 м, а надводная часть выступает лишь на 5–6 м. Дедвейт супертанкера «Яре Викинг» — 564 тыс. т при длине 458 м и осадке 24,61 м. Для остановки танкера, идущего со скоростью 30 км/ч, требуется дистанция 5 км и время 25 мин.

Серьезную опасность для судов представляют айсберги. В Атлантическом океане айсберги, дрейфующие от берегов Гренландии, имеют длину ~100 м. Самый большой из замеченных айсбергов имел длину ~450 м. В Антарктиде огромные массивы льда откалываются от ледников. Такие айсберги достигали длины 80 км и ширины 30 км. В 1998 г. гигантский айсберг длиной 160 км и шириной 32 км оторвался от континентального шельфа и сел на мель вблизи материка. В марте 2000 г. огромный кусок шельфового льда площадью 11 тыс. м^2 сполз с материка в море Росса и раскололся на две громадные части, которые придрейфовали к мысу Круазье.

Задача 1.8.1. Батискаф сделан в форме цилиндра, составленного из двух половинок с площадью основания S. Батискаф находится в положении равновесия на глубине H, равной расстоянию от поверхности воды до средней линии цилиндра. Давление в батискафе равно атмосферному давлению. Покажите, что величина сил реакций, действующих на каждую половинку цилиндра, $N = \rho_в gHS$.

При погружении подводной лодки до глубины ~200 м становится заметной деформация: слышно — корпус трещит или точнее — глухо скрипит. Положение равновесия лодки неустойчиво поскольку при деформации корпуса «плотность» лодки возрастает. В Северном Ледовитом океане особенно опасны чередования прослоек: пресные-соленые, теплые-холодные. Лодка может неожиданно рвануться вверх или провалиться и разбиться о дно.

Задача 1.8.2. Когда в цилиндрический сосуд с водой опустили плитку пенопласта массой $m_0 = 1$ кг, уровень воды повысился на величину h_1. При полном погружении плитки уровень воды возрастает на $h_2 = 4h_1$. Найдите наименьшую массу груза m, который необходимо положить на плитку, чтобы она полностью погрузилась в воду.

Решение. Пусть S-площадь поперечного сечения сосуда, V-объем плитки. Из условия плавания плитки получим уравнение $m_0 = \rho_в V_n$, где V_n — объем погруженной части плитки, который можно представить в виде $V_n = h_1 S$. При погружении плитки в воду $V - V_n = h_2 S$. Следовательно, $V/V_n - 1 = h_2/h_1$. Из условия плавания пластины с грузом находим $\rho_в V - (m + m_0) = 0$. Масса груза

$$m = m_0(\rho_в V/m_0 - 1) = m_0(V/V_n - 1) = m_0 h_2/h_1, \qquad m = 4 \text{ кг}.$$

Пример 1.8.3. Цилиндрический сосуд с площадью основания S заполнен водой до уровня высотой h_0. Найдите силу давления на дно, если в сосуд опустить тело массой m.

А. Пусть плотность тела $\rho < \rho_в$. В этом случае тело плавает: $mg = \rho_в g V_{погр}$. Приращение уровня воды находим из уравнения $\Delta h S = V_{погр}$. Сила давления на дно $F = \rho_в g(h_0 + \Delta h)S = \rho_в g h_0 S + mg$ возрастет на величину mg.

Б. Пусть плотность тела $\rho > \rho_в$. В этом случае тело утонет. Приращение уровня воды найдем из уравнения $\Delta h S = V$ или $\Delta h = m/\rho S$. Сила давления на дно равна силе давления воды $\rho_в g(h_0 + \Delta h)S$ и веса тела $P = mg - F_{выт} = mg - \rho_в g V$. Следовательно, сила давления на дно $F = \rho_в g h_0 S + mg$ как и в предыдущем случае.

Пример 1.8.4. В цилиндрическом сосуде плавает лодка, в которой находится груз массой m. Найдем приращение уровня Δh воды в двух случаях.

А. Груз сняли. В этом случае $\Delta h = -m/\rho_в S$.

Б. Груз сняли и опустили в воду. Если груз плавает, то положение уровня воды не изменится. Если же груз утонет, то он вытеснит объем воды $V = m/\rho_Г$. Приращение уровня

$$\Delta h = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{\rho_Г} - \frac{1}{\rho_В}\right) < 0.$$

Задача 1.8.5. В лодке, плавающей в бассейне, появилась течь. Как будет изменяться уровень воды по мере заполнения лодки водой ?

Решение. В качестве модели лодки выберем тонкостенный параллелепипед массой m, высотой H, площадью основания S. До начала протекания глубину погружения лодки h найдем из условия плавания $mg - \rho_в g S h = 0$.

Если $h = H$, то вода начнет заполнять лодку и она затонет. Если $h < H$, то максимальная масса воды М, которая может затечь в лодку, определяется из уравнения $M = \rho_в(H - h)S$.

Очевидно лодка вытесняет объем воды, больший первоначального, на величину $(H - h)S$ в результате проникновения через отверстия такого же объема воды. Следовательно, уровень воды в бассейне при погружении до глубины Н остается постоянным. Однако после этого события вода начинает быстро заливать лодку и она затонет. Уровень воды в бассейне понизится. Вот почему образуются водовороты в месте затопления судна, получившего пробоину.

Задача 1.8.6. В сосуде с жидкостью плотностью ρ плавает кусок льда. Как изменится уровень смеси жидкости и воды после таяния льда?

Решение. Очевидно необходимо сравнить объемы погруженной части льда $V_п$ и образовавшейся после таяния воды $V_в$. Из условия плавания находим $V_п = \rho_л V_л/\rho$, где $V_л$ — объем куска льда. Значение $V_в$ найдем из закона сохранения массы в процессе таяния: $V_в = \rho_л V_л/\rho_в$. Искомая разность

$$\Delta V = V_в - V_п = (1/\rho_в - 1/\rho)\rho_л V_л.$$

Возможны три ситуации. 1. Лед плавает в воде. В этом случае $\Delta V = 0$ — уровень воды в сосуде не изменится. 2. Лед плавает в соленой воде плотностью $\rho > \rho_в$. Тогда $V_п < V_в$, уровень смеси повысится. 3. Лед плавает в масле плотностью $\rho < \rho_в$. В этом случае $V_п > V_в$, уровень смеси понизится.

Возможны различные варианты задачи: лед содержит дробинку, кусочек пробки, лед плавает в смеси воды и керосина и т. д.

1.9. Воздушные шары и дирижабли

Если величина выталкивающей силы $F_в$, действующей на оболочку, заполненную газом массой m, больше величины силы тяжести газа mg, то равнодействующая направлена вверх и называется *подъемной силой*. Величина подъемной силы $F_п = F_в - mg$.

Историю воздухоплавания обычно начинают с 1783 г, когда братья Монгольфье продемонстрировали полет 11-метрового воздушного шара, наполненного нагретым воздухом. В том же году уже знакомый нам Ж. Шарль совершил полет на аэростате, наполненном водородом. В 1931 г. О. Пикар сумел подняться в стратосферу на высоту 15780 м. Последнее достижение — 34668 м (1961 г.). В 1983 г. было осуществлено кругосветное путешествие аэростата без экипажа. Полет, проходивший на высоте 18–28 тысяч метров, занял 51 день. Аэростаты объемом 500-600 тыс м^3 поднимают научную аппаратуру весом 1,5 т на высоту 40 км.

Современный *монгольфьер* снабжен пропановыми горелками, позволяющими держаться в воздухе сутками. Рекордная высота в одиночном полете — 15–16 000 м при объеме шара 1 000 м^3. Самый большой шар объемом 73 600 м^3 был сделан в Великобритании по заказу Р. Бренсона.

Одной из разновидностей аэростатов является дирижабль — управляемый аппарат сигарообразной формы, который заполнен «легким» газом. Первый дирижабль жесткой конструкции, построенный графом Ф. Цеппелином в Германии, взлетел в 1900 г.

В годы первой мировой войны германская армия использовала дирижабли для бомбардировок городов. Однако зажигательный снаряд, попавший в дирижабль, наполненный водородом, вызывал пожар, приводящий к взрыву. И вдруг союзники получили сообщение, что подбит дирижабль, который вел себя странно: не горел и не взрывался. Впечатление было ошеломляющим. Только после окончания войны стало известно, что часть дирижаблей была заполнена гелием. Дело в том, что в то время гелий умели получать лишь в лабораторных количествах. За несколько лет до начала войны германские суда тайно вывозили из Индии и Бразилии монацитовый песок, из которого получали гелий. Разумеется, количество извлеченного гелия было невелико и негорючие дирижабли не повлияли на исход войны.

Дирижабли могут стать универсальным транспортным средством. Сейчас проектированием и производством дирижаблей занимаются более 30 зарубежных фирм. Работы ведутся по созданию многофункциональных, транспортных дирижаблей большой грузоподъемности и стратосферных дистанционно управляемых дирижаблей, которые могли бы функционировать на высотах 18–20 км. Англо-американские фирмы разработали семейство транспортных дирижаблей для стратегических перебросок войск. Самый большой — дирижабль SryCat-1000 имеет объем 2 млн м^3. Он способен без дозаправки перевозить на расстояние 4 600 миль груз до 1000 т (16 танков или 1500 человек).

Пример 1.9.1. Воздушный шар, сообщающийся с атмосферой, заполнен воздухом. Масса оболочки и груза m = 100 кг. Температура наружного воздуха t_1 = 17° С, температура воздуха внутри оболочки t_2 = 157° С. При каком значении объема шар взлетит?

Величина подъемной силы F равна разности выталкивающей силы — веса воздуха, вытесненного шаром, и «веса» воздуха в шаре:

$$F = \rho_1 gV - \rho_2 gV = gV(1/T_1 - 1/T_2)pM_в/R.$$

Из условия $F > mg$, находим $V > V_0$,

$$V_0 = mRT_1T_2/[pM_в(T_2 - T_1)],\ V_0 = 255\ м^3.$$

Задача 1.9.2. Невесомая оболочка шара объемом V = 1 м^3, сообщающегося с атмосферой, заполнена гелием, имеющим температуру наружного воздуха t = 17° С и давление p = 100 кПа. Найдите подъемную силу, действующую на шар.

Решение. Величина подъемной силы F равна разности веса воздуха, вытесненного шаром, и веса гелия:

$$F = \rho_в gV - \rho_{He} gV = pgV(M_в - M_{He})/RT.$$

Подставляя $M_в$ = 0,029 кг/моль и M_{He} = 0,004 кг/моль, получим F = 10,1 Н.

Задача 1.9.3. Покажите, что отношение подъемных сил, действующих на равные объемы водорода и гелия при одинаковых условиях

$$(M_в - M_Н)/(M_в - M_{He}) = 1{,}08.$$

1.10. Почему «плавают» облака?

Большая часть воды на Земле сосредоточена в океанах, покрывающих более 70% ее поверхности, еще 0,627% составляют воды озер, рек и подземные воды. Количество водяного пара, образующегося в атмосфере при испарении, составляет около $1{,}3 \cdot 10^{16}$ кг.

Молекулы воды, попадая в атмосферу, находятся в ней примерно 11 дней, пока не выпадут обратно в виде осадков. Атмосферные осадки, дающие живительную влагу для полей, являются конечными продуктами целой серии процессов, начинающейся с образования облаков.

Как образуются облака? При восходящем движении влажный воздух адиабатически охлаждается. По мере подъема относительная влажность увеличивается и на некоторой высоте может достичь 100% и даже превысить этот предел не более чем на 0,1%. Дело в том, что в воздухе всегда содержится большое число твердых частичек, являющихся ядрами конденсации. Они способствуют образованию капелек воды и препятствуют пересыщению воздуха. Этот процесс представляет собой основной способ образования облаков при подъеме влажного воздуха.

Задача 1.10.1. Если вода теплее воздуха, то воздух в слое, находящийся у поверхности, нагревается и насыщается водяным паром. Воздух в равновесии с водой имеет относительную влажность $\varphi = 100\%$. Объясните почему для нагревания воздуха на 1° С в тропиках нужно сообщить больше тепла, чем в полярных широтах.

Задача 1.10.2. Объясните, почему летом облака в приморских районах имеют высоту нижней кромки около 600 м, в то время как в континентальных районах — значительно выше.

1.10.1. Падение капель. Наиболее характерный размер облачных капель 5–10 мкм, концентрация капель — 100-200 в кубическом сантиметре. Можно спросить, почему не все облака дают осадки? Ведь плотность воды больше плотности воздуха и поэтому водяные капли должны падать. Рассмотрим как движется в воздухе одна капля воды массой $m = \rho_в V$, объемом $V = 4\pi a^3/3$. На нее действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила сопротивления воздуха $\vec{F}$ и выталкивающая сила, которой можно пренебречь по сравнению с силой тяжести. Силу сопротивления, действующую на сферу радиусом a, вычислил в 1851 г. английский физик Дж. Стокс:

$$\vec{F} = -6\pi\eta\, a\vec{v},$$

где $\eta = 1{,}825\ 10^{-5}$ кг/(м с) – коэффициент вязкости, $\vec{v}$ — скорость сферы. Закон Стокса дает удовлетворительную точность при значениях числа Рейнольдса $Re << 5$, $Re = 2av\rho/\eta$, ρ — плотность воздуха. Найдем решение уравнений движения капли при падении с высоты H.

При падении капли воздух будет перетекать внизу вверх. Можно учесть реакцию воздуха на ускорение капли, вводя эффективную массу равную сумме массы капли и *присоединенной массы*. В случае сферической поверхности присоединенная масса равна половине массы вытесненной среды — воздуха.

По мере увеличения скорости растет сила сопротивления и величина ускорения уменьшается. Через конечный промежуток времени τ ускорение приближается к нулю, а величина скорости — к некоторому постоянному значению v_0. Из второго закона Ньютона следует: $0 = mg - 6\pi\eta a v_0$.

Задача 1.10.3. Применяя метод размерностей, попробуйте оценить величину интервала τ, в течение которого скорость капли приближается к постоянной величине v_0.

Пример 1.10.4. На высоте $h = 600$ м образовалась капля радиусом $a = 6$ мкм. Величина $\tau = 2\rho a^2/9\eta$, $\tau \approx 4{,}4 \cdot 10^{-4}$ с. Установившаяся скорость падения капли $v_0 = 2\rho g a^2/9\eta$. Следовательно, капля достигнет поверхности Земли за интервал времени $T = h/v_0 = 37{,}5$ час.

Таким образом, капля падает настолько медленно, что за время падения может испариться или, попадая, в восходящий поток воздуха, снова подняться. Лишь когда капли имеют радиус ~0,1 — 0,2 мм, то они падают на Землю в виде дождя.

Обычно при температуре от 0 до -10° С облака, в основном, состоят из жидких капель, так как наиболее распространенные ядра льдообразования становятся эффективными при температуре $t \sim -9^\circ$ С. На них происходит конденсация пара и формирование ледяных кристалликов при замерзании образовавшейся воды. И здесь проявляются уникальные особенности воды. Оказывается, что давление насыщенного пара при температурах ниже 0°С меньше над льдом, чем над поверхностью переохлажденной жидкости.

Задача 1.10.5. Среди жидких капелек образовался кристаллик льда. Объясните, почему кристаллик льда быстро растет, «поедая» капельки воды.

Глава 2. Капиллярные явления

2.1. Условие равновесия жидкости в тонкой трубке

Повышение или понижение уровня свободной поверхности смачивающей или несмачивающей жидкостей при соприкосновении с твердой поверхностью представляет собой основу явления известного как *капиллярность* (от лат. *capillaris* — волос), которое проявляется в тонких трубках и узких щелях.

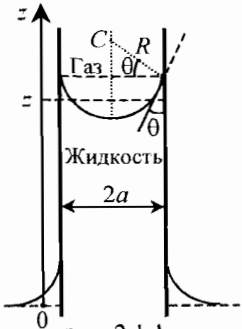


рис. 2.1.1

Рассмотрим цилиндрическую трубку радиусом a, содержащую воду со свободной поверхностью (рис. 2.1.1). Поверхность воды подходит к стенке под углом θ, радиус кривизны свободной поверхности приближенно постоянен и равен $R = a/\cos\theta$. Образу-

ется так называемый мениск (от гр. *meniskos* — выпуклость). Условия равновесия соприкасающихся слоев жидкостей и газа по-прежнему определяются соотношением (1.5.1). Однако теперь значения давлений газа $p_г$ и жидкости $p_ж$ в точках окрестности искривленной поверхности раздела не будут одинаковыми. Согласно (II. 7.2.1)

$$p_ж(z) \approx p_г \pm 2\alpha/R, \qquad (2.1.1)$$

Здесь следует выбрать знак «+», если центр кривизны мениска расположен в жидкости или знак «–», если центр кривизны мениска расположен в газе.

Соотношение (2.1.1) определяет лишь разность давлений в обеих средах. При не слишком малых значениях R имеем $p_г = p_0 \pm p_н \approx p_0$, где p_0 — давление газа при плоской поверхности раздела, $p_н$ — давление насыщенного пара жидкости вблизи искривленной поверхности.

Подставляя $p_ж$ из (2.1.1) в (1.5.1), получим условие равновесия слоя однородной жидкости в тонкой трубке: z-координата точки слоя жидкости в окрестности искривленной поверхности удовлетворяет уравнению

$$\rho g z + p_0 \pm 2\alpha/R = \text{const}, \qquad (2.1.2)$$

p_0 — внешнее давление.

Пример 2.1.1. Запаянная сверху трубка с каналом радиуса $a = 0{,}5$ мм открытым торцом опущена в воду (рис. 2.1.2). Давление над мениском p_i, атмосферное давление p_0. Найдем положение уровня воды в капилляре.

Выберем ось z с началом на уровне воды, направленную вертикально вверх. Согласно (2.1.2) для частиц воды вблизи мениска на уровне $z = h$ имеем уравнения $\rho g h + p_в = \text{const}$, $p_в = p_i - 2\alpha/a$. Для частиц воды на уровне $z = 0$ из (2.1.2) получим $p_0 = \text{const}$. Следовательно, $h = 2\alpha/(\rho g a) + (p_0 - p_i)/\rho g$. Характерный параметр $\alpha/\rho g = 7{,}43\ 10^{-6}$ м^2 (при $t = 20°$ С), $2\alpha/a = = 291{,}5$ Па. Если $p_i = p_0$, то $h = 2\alpha/(\rho g a)$, $h = 2{,}97$ см.

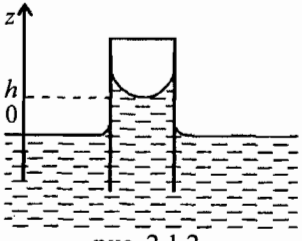


рис. 2.1.2

Задача 2.1.2. Открытая с обоих концов трубка наполнена водой и удерживается в вертикальном положении. Радиус канала $a = 1$ мм. Найдите высоту столбика оставшейся в капилляре воды.

Решение. Для частиц воды в точках поверхностного слоя верхнего и нижнего менисков из (2.1.2) имеем систему уравнений $\rho g h + p_{ат} - 2\alpha/a = = \text{const}$, $p_{ат} + 2\alpha/a = \text{const}$, из которых находим $h = 4\alpha/(\rho g a)$, $h = 2{,}97$ см.

Пример 2.1.3. А. Если свободная поверхность смачивающей жидкости подходит к твердой вертикальной стенки под углом θ, то высота подъема у стенки

$$H = [(2\alpha/\rho g)(1 - \sin\theta)]^{1/2}.$$

Б. Если мениск смачивающей жидкости представляет собой часть цилиндрической поверхности радиусом R, то разность давлений между наружной средой и жидкостью α/R. Многие читатели знают, что «склеенные» водой стеклянные пластинки, трудно разделить. Можно только медленно сдвигать их относительно друг друга. Если толщина пленки воды $d = 2R$, то поверхностное натяжение наружного слоя воды между стеклянными пластинками создает недостаток давления $\Delta p = 2\alpha/d$. При значении $d = 10^{-2}$ мм величина $\Delta p = 0{,}146$ атм.

Глава 3. Деформация твердых тел. Тепловое расширение

3.1. Внутреннее напряжение

Деформацией (от лат. *deformatio* — искажение) называют смещение частиц тела из равновесных положений, возникающее в результате внешних воздействий.

Рассмотрим так называемое *простое растяжение*. Пусть стержень длиной l_0 расположен вдоль оси z (рис. 3.1.1). Поперечное сечение представляет собой квадрат со стороной a_0. Один торец стержня закреплен, а к поверхности другого торца приложена сила $\vec{F}$, параллельная оси z. На закрепленный торец действует сила $\vec{F}' = -\vec{F}$. При деформации возникают внутренние силы, действующие на выделенный объем стержня со стороны окружающих его частей. Например, на поверхность поперечного сечения cb объема B действует сила упругости $\vec{T} = (0, 0, T_z)$ со стороны части C стержня. Сила $\vec{T}$ заранее неизвестна и определяется из условия равновесия. Запишем T_z в виде $T_z = \sigma(x, y, z)S$, где $S = a_0^2$. Функция $\sigma(x, y, z)$ — называется *напряжением*. В нашем случае сумма сил, действующих на стержень и на часть стержня B равна нулю. Из условия равновесия имеем $\vec{F}' + \vec{F} = 0$, $\vec{T} + \vec{F}' = 0$. Следовательно, $T = F$, напряжение $\sigma = \sigma_0$, $\sigma_0 = F/S$ одинаково в любом сечении. Такая деформация стержня называется однородной.

Задача 3.1.1. Цилиндрический резервуар длиной L, внешним радиусом R заполнен газом при давлении p_2, внешнее давление равно p_1. Толщина стенки $d << R, L$.

А. Найдите напряжение в продольном сечении оболочки, проходящем через ось симметрии резервуара.

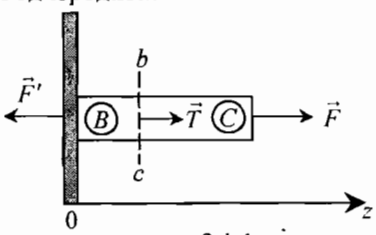


рис. 3.1.1

Решение. Напряжение, возникающее в продольном сечении оболочки $\sigma_{пр} = T/S_{пр}$, где T — величина силы упругости, распределенная по поверхности сечения площадью $S_{пр} = Ld$. Следовательно, $\sigma_{пр} = T/(Ld)$.

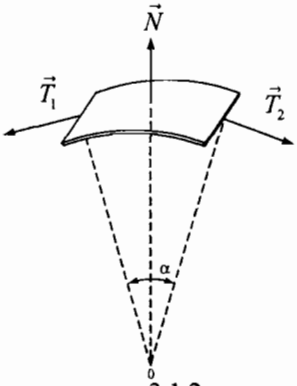


рис. 3.1.2 а

Для того чтобы найти величину T рассмотрим малый элемент цилиндрической оболочки длиной L, ограниченный дугой $\Delta l = R\alpha$, $\alpha << 1$ (рис. 3.1.2а). Площадь этого элемента $\Delta S = L\Delta l = LR\alpha$. На него действует сила давления $\vec{N}$ величиной $N = p\Delta S = pLR\alpha$, $p = p_2 - p_1$ и силы упругости $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ одинаковой величины T со стороны остальной части оболочки. Поскольку сумма сил, действующих на выделенный элемент оболочки равна нулю, то $\vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$. Отсюда находим $N = 2T\sin\alpha/2$. Из таблицы значений функции $y = \sin x$ находим, что для $x < 0{,}3$ выполняется равенство $\sin x \sim x$. Следовательно, $T = N/\alpha = pLR$. Напряжение в продольном сечении оказывается равным $\sigma_{пр} = pR/d$.

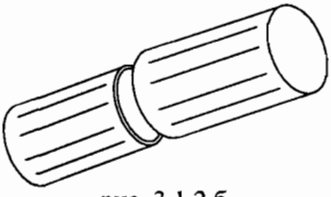


рис. 3.1.2 б

Б. Найдите напряжение σ_z в поперечном сечении оболочки резервуара (рис. 3.1.2 *б*). Покажите, что $\sigma_z = \sigma_{пр}/2$. Может быть по этой причине сосиски при варке лопаются вдоль длины, а не поперек?

3.2. Деформация

Для описания деформации вводят *вектор деформации* $\vec{u}(x, y, z)$. Если до деформации положение некоторой точки А задано радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$, то в деформированном теле она сместится в точку A' с радиус-вектором $\vec{r} + \vec{u}(\vec{r})$. Основной задачей теории упругости является определение вектора $\vec{u}(\vec{r})$.

При деформации тела изменяются расстояния между точками. Рассмотрим две близкие точки A и B с радиус-векторами $\vec{r}$ и $\vec{r} + \Delta\vec{r}$. После деформации точка B смещается в новое положение B' с радиус-вектором $\vec{r} + \Delta\vec{r} + \vec{u}(\vec{r} + \Delta\vec{r})$, вектор $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$ переходит в вектор $\vec{A'}\vec{B'} = \Delta\vec{r}'$,

$$\Delta\vec{r}' = \Delta\vec{r} + \vec{u}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r}). \qquad (3.2.1)$$

Следовательно, приращение вектора $\Delta\vec{r}$ равно $\vec{u}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r})$.

3.3. Закон Гука

Среди различных типов деформаций выделяют изотермические деформации. В этом случае температура стержня постоянна. Адиабатическими являются деформации, при которых не происходит обмена теплотой между различными областями тела и окружающей средой.

В 1676 г. английский физик Р. Гук опубликовал анаграмму (от греч. *ana* — перестановка, *gramma* — буква), в которой зашифровал формулировку закона. Проверив свои предположения, Гук в 1678 г. раскрыл ее содержание: «Каково удлинение, такова и сила». Первая математическая формулировка закона Гука принадлежит английскому ученому Т. Юнгу (1807). В современной теории упругости закон Гука записывают в терминах компонент вектора деформации.

3.3.1. Простое изотермическое растяжение. Если до деформации стержня вектор $\Delta\vec{r}$ имел координаты $(0, 0, \Delta z)$, то согласно (3.2.1) в деформированном состоянии его z-координата станет равной $\Delta z' = \Delta z + \Delta u_z$. Отношение $\Delta u_z/\Delta z$ характеризует относительное удлинение отрезка $[z, z + \Delta z]$. Для простого растяжения

$$\Delta u_z/\Delta z = \sigma/E \qquad (3.3.1)$$

Это соотношение представляет собой закон Гука в наиболее простой форме. Постоянный коэффициент E называется *модулем Юнга* в честь английского физика Т. Юнга, который записал закон Гука в форме (3.3.1). Для многих металлов модуль Юнга имеет порядок 7–20 10^{10} Па, для стали $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Па, для меди $E = 1{,}2 \cdot 10^{11}$ Па, для костных материалов — 1,5 10^{10} Па, для гранита $4{,}5 \cdot 10^{10}$ Па. Адиабатический модуль Юнга $E_{ад} > E$.

Закон Гука справедлив только для упругих деформаций, исчезающих после прекращения действия сил.

Если стержень расположен вертикально или движется с ускорением, то напряжение σ является функцией координат. В случае неподвижного стержня из (3.3.1) имеем уравнение $\Delta u_z/\Delta z = \sigma_0/E$, где σ_0 — постоянная величина. Следовательно, $u_z(x, y, z) = z\sigma_0/E + \text{const}$. Поскольку в силу граничного условия $u_z(x, y, 0) = 0$, то $u_z(x, y, z) = z\sigma_0/E$. Полное удлинение стержня в случае однородной деформации $\Delta l = u_z(x, y, l_0)$; $\Delta l = l_0\sigma_0/E$. *Относительное удлинение* стержня

$$\Delta l/l_0 = \sigma_0/E, \qquad (3.3.2)$$

Соотношение (3.3.2) представляет собой *следствие закона* Гука в случае однородной деформации.

Задача 3.3.1. Колонна Исаакиевского собора в Санкт-Петербурге имеет высоту $h = 30$ м. Найдите относительное сжатие колонны. Модуль Юнга гранита $E = 8{,}8 \cdot 10^{10}$ Па, плотность $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Направим ось z вертикально вверх, начало координат совместим с основанием колонны. Сумма сил, действующих на элементарную массу толщиной Δz, равна нулю: $\Delta\sigma S - \rho g \Delta z S = 0$ или $\Delta\sigma/\Delta z = \rho g$. Следовательно, напряжение $\sigma(z) = \rho g z + C_1$. Поскольку, $\sigma(h) = 0$, то постоянная $C_1 = -\rho g h$; $\sigma(z) = \rho g(z - h)$. Теперь согласно (3.3.1) получим уравнение $\Delta u_z/\Delta z = \rho g(z - h)/E$, из которого находим $u_z(z) = \rho g(z^2/2 - hz)/E + C_2$. В силу граничного условия $u_z(0) = 0$ постоянная $C_2 = 0$. В результате получим

функцию $u_z(z) = \rho g(z^2/2 - hz)/E$. Деформация колонны $u_z(h) = -\rho g h^2/2E$, $|u_z(h)| = 1{,}4\cdot10^{-4}$ м.

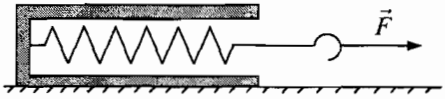


рис. 3.3.1

Задача 3.3.2. К пружине динамометра, находящегося на гладкой горизонтальной плоскости, приложена сила $\vec{F}$ (рис. 3.3.1). Масса пружины m, масса корпуса M. Определите показание динамометра, если градуировка проводилась при закрепленном корпусе.

Решение. Поскольку при градуировке корпус был закреплен, то показание связано с полным удлинением пружины соотношением

$$T = k\Delta l, \tag{1}$$

где $k = ES/l_0$, l_0 — длина пружины в ненапряженном состоянии. Для того, чтобы найти Δl вычислим напряжение $\sigma(z) = N(z)/S$ в сечении, которое находится на расстоянии z от закрепленного конца пружины. Силу $\vec{N}$, действующую на эту часть пружины, найдем из второго закона Ньютона:

$$(M + mz/l_0)a = N, \quad (m - mz/l_0)a = F - N.$$

Следовательно, напряжение

$$\sigma(z) = F(M + mz/l_0)/[S(M + m)].$$

Согласно (3.3.1) полное удлинение $\Delta l = u_z(l_0)$,

$$\Delta l = \frac{1}{E}\int_0^{l_0} dz\sigma(z) = \frac{F}{ES(M+m)}\int_0^{l_0} dz(M + m\frac{z}{l_0}) = \frac{Fl_0(2M+m)}{2ES(M+m)}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$T = \frac{F(2M+m)}{2(M+m)}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи: 1. $m << M$, $T \approx F$. 2. $m >> M$, $T \approx F/2$. 3. $m = M$, $T = 3F/4$.

Задача 3.3.3. Статически неопределенная задача. На грань железобетонного куба действует сила P, параллельная стальным стержням. Модуль Юнга бетона и стали $E_Б = 20$ ГПа, $E_С = 200$ ГПа, $S_Б$, $S_С$ — площади поперечных сечений бетона и стержней. Найдите силы, действующие на бетон и стальные стержни.

Обозначим $P_Б$, $P_С$ — нагрузки на бетон и стальные стержни. Из условия равновесия куба получим уравнение

$$P = P_С + P_Б, \tag{1}$$

Для того чтобы получить второе уравнение необходимо рассмотреть деформированную систему. Поскольку величина относительной деформации бетона и стержней одинакова, то

$$\frac{P_Б}{S_Б E_Б} = \frac{P_С}{S_С E_С}. \qquad (2)$$

Следовательно, напряжение $\sigma_С$ в стальных стержнях в $E_С/E_Б = 10$ раз больше напряжения в бетоне $\sigma_Б$.

Из уравнений (1), (2) находим

$$P_С = \frac{P}{1+(E_Б S_Б / E_с S_С)}, \qquad P_Б = \frac{P}{1+(E_С S_С / E_Б S_Б)}.$$

Полагая $S_Б = 10S_С$, получим $P_Б = P_С$.

Честь открытия железобетона принадлежит французу Ж. Монье. В 1867—75 гг. он получил патенты на железобетонные резервуары, трубы, балки, шпалы, перекрытия, мосты. Дешевый и огнестойкий железобетон произвел настоящую революцию в строительстве.

Задача 3.3.4. Сравните относительное удлинение в случае адиабатической и изотермической деформаций.

3.4. Поперечная деформация

Стержень деформируется не только в продольном, но и в поперечных направлениях. Величины $\Delta u_x/\Delta x$, $\Delta u_y/\Delta y$ характеризуют относительное сжатие стержня. Французский математик Симон Пуассон в 1810 г. установил связь между поперечной и продольной деформациями стержня

$$\Delta u_x/\Delta x = -\gamma \Delta u_z/\Delta z, \qquad \Delta u_y/\Delta y = -\gamma \Delta u_z/\Delta z,$$

где γ-*коэффициент Пуассона.* Учитывая (3.3.1), имеем

$$\Delta u_x/\Delta x = -\gamma\sigma/E, \; \Delta u_y/\Delta y = -\gamma\sigma/E, \qquad (3.4.1)$$

Полная относительная поперечная деформация сжатия стержня связана с продольной деформацией соотношением

$$\Delta a/a_0 = -\gamma \Delta l/l_0. \qquad (3.4.2)$$

Легко показать, что $0 < \gamma \le 0{,}5$. Для стали $\gamma = 0{,}3$, для меди $\gamma = 0{,}34$. Для большинства материалов, используемых в технике $\gamma \sim 0{,}3$-$0{,}45$. Для материалов растительного происхождения $\gamma = 0{,}5$.

Приращение объема стержня. При однородной упругой деформации $\Delta V = (l_0 + \Delta l)(a_0 + \Delta a)^2 - l_0 a_0^2$. Учитывая (3.3.2) (3.4.2), получим с точностью до величины $\sim\varepsilon$ приращение

$$\Delta V = l_0 a_0^2 (1+\varepsilon)(1-\gamma\varepsilon)^2 - l_0 a_0^2 \approx V_0(1-2\gamma)\varepsilon, \quad V_0 = l_0 a_0^2.$$

При $\gamma = 0{,}5$ приращение объема равно нулю.

Энергия упругой деформации стержня $U = k(\Delta l)^2/2$ может быть представлена в общем виде $U = \sigma^2 V_0/2E$, где V_0 — объем стержня до деформации.

Пример 3.4.1. Давление в аорте — главном кровеносном сосуде, выходящем из сердца, равно в среднем p = 100 мм рт. ст. = 133,33 кПа, отношение радиуса к толщине R/d = 5. Относительное удлинение элемента дуги поперечного сечения сосуда $\Delta R/R = \sigma_{пр}/E$. Подставляя величину $\sigma_{пр} = pR/d$, найденную в задаче 1.1.1, получим приращение радиуса $\Delta R = pR^2/Ed$. После каждого сокращения сердца (около 100 000 раз в день) давление в аорте возрастает. Поскольку объем стенки сосуда $\sim Rd$ можно считать постоянным, то $d\Delta R + R\Delta d = 0$, $\Delta d = -pR/E$. Деформация может привести к аневризме — местному уменьшению толщины стенки сосуда, увеличению его радиуса и разрыву сосуда. Однако происходит это в редких случаях при необратимом уменьшении модуля Юнга мышечных волокон стенки сосуда.

3.5. Диаграмма деформации

На рис. 3.5.1 изображена зависимость напряжения от величины относительной деформации, полученная при растяжении стержня на испытательной машине. Линейный участок OA соответствует *упругой деформации*. Упругая деформация обратима. Линия разгрузки идет по прямой AO и деформация уменьшается до нуля. Стержень восстанавливает свою форму и размеры после снятия нагрузки в интервале напряжений $0 < \sigma < \sigma_{упр}$, где величину $\sigma_{упр}$ называют пределом упругости. Используя (3.3.2), можно оценить предельное значение относительного удлинения при упругой деформации $\varepsilon_{упр} = \sigma_{упр}/E$. Для большинства металлов $\varepsilon_{упр} \sim 10^{-3}$. Это означает, что при межатомных расстояниях порядка 0,2 нм положения атомов смещаются на величину не более 0,2 пм.

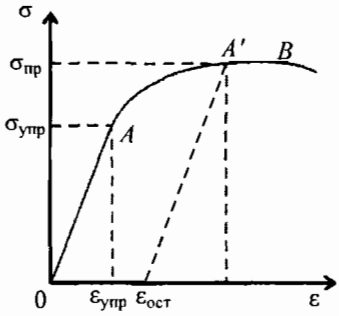


рис. 3.5.1

Далее следует участок AA' пластической деформации $\sigma_{упр} < \sigma < \sigma_{пр}$. Величину $\sigma_{пр}$ называют пределом прочности. Это максимальное напряжение, которое можно создать не разрушая стержень. После того как достигнуто напряжение $\sigma_{пр}$, наступает разрушение- стержень разрывается. Пластическая деформация необратима — после снятия нагрузки появляются остаточные изменения размеров стержня. Кривая разгрузки из некоторой точки A' идет параллельно прямой OA. Появляется *остаточная деформация*. При значениях остаточной относительной деформации $\varepsilon_{ост}$ = 0,1 – 0,01 металл забывает исходную форму и принимает новую. На такой «забывчивости» основаны технологические процессы обработки металлов.

Некоторые японские производители получают углеродное волокно, способное выдержать напряжение $\sigma_{пр}$ до $12 \cdot 10^{11}$ Па. Основное применение таких материалов — устройства для отвода тепла в авиационной и космической

технике. Отметим, что алмаз выдерживает напряжение $\sigma_{пр} = 8{,}5 \cdot 10^{11}$ Па. Атомные подводные лодки с корпусом из титанового сплава могут погружаться на глубину до 760 м. Здесь давление достигает величины $p = \rho g H \sim 7{,}3 \cdot 10^6$ Па.

3.5.1. Упругая неустойчивость стержня. В 1744 г. Леонард Эйлер, рассматривая продольную деформацию стержня, обнаружил явление упругой неустойчивости. Он показал, что при величине силы сжатия большей критического значения $F_{кр} = (\pi a/4l)^2 a^2 E/3$ бесконечно малое возмущение нарушает равновесие и происходит сильный изгиб стержня. Этот результат имеет исключительно важное значение при расчетах стоек, колонн и других конструкций.

Задача 3.5.1. Возьмем стальное лезвие бритвы толщиной $d = 0{,}08$ мм и изогнем его в полукольцо. Внешние слои лезвия будут растянуты, а внутренние сжаты. На средней линии радиусом $R = 1$ см деформация равна нулю.

А. Найдите относительное удлинение внешнего слоя.

Решение. В напряженном состоянии длина средней линии лезвия $l_0 = \pi R$. Удлинение внешней части полукольца $\Delta l = \pi(R + d/2) - \pi R = \pi d/2$. Относительное удлинение $\varepsilon = \Delta l/l_0 = d/2R$, $\varepsilon = 4\ 10^{-3}$.

Б. Почему распрямляется лезвие после разгрузки?

Решение. При деформации возникает напряжение $\sigma = 8 \cdot 10^7$ Па. Пределы упругости хорошей стали на растяжение и сжатие почти совпадают $\sigma_{упр} = 10^9$ Па. В этом случае максимальное значение относительного упругого удлинения $\varepsilon_{max} = 5 \cdot 10^{-3}$. Поскольку $\varepsilon < \varepsilon_{max}$, то лезвие распрямится.

В. Изогнем таким же полукольцом пластинку из той же стали, но толщиной $d = 2$ мм. Распрямится ли пластинка после разгрузки?

Г. Если пластинку сжать достаточно быстро, то деформация представляет собой адиабатический процесс. Опишите распределение температуры по толщине пластинки и направление теплового потока при выравнивании температуры.

Пример 3.5.2. Опасная зона для спутников планет. Известно, что давление в центре Земли или Луны, создаваемое гравитационными силами, достигает огромных значений. Можно ли уменьшить давление в центре Луны так, что она разорвется на части? Реально проблема состоит в определении условий существования спутников планет. Впервые эту задачу поставил в 1847 г. французский математик Э. Рош.

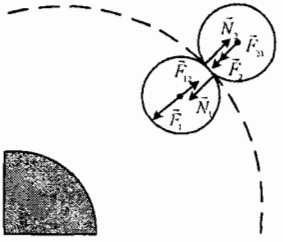


рис. 3.5.1

Для упрощения вычислений рассмотрим спутник в виде гантели, вращающейся по окружности вокруг планеты (рис. 3.5.1). Гантель представляет собой два скрепленных шара. Площадь сечения контакта шаров равна S. Массы планет и шара равны соответственно M и $m/2$, радиусы — R и a. Наша задача — найти напряжение в сечении контакта.

На первый шар действуют силы притяжения планеты $\vec{F}_1$, второго шара $\vec{F}_{12}$ и сила реакции $\vec{N}_1$. На второй шар — силы притяжения планеты $\vec{F}_2$, первого шара $\vec{F}_{21}$ и сила реакции $\vec{N}_2$ ($N_2 = N_1 = N$).

Пусть $M >> m$. Тогда влиянием спутника на движение планеты можно пренебречь. Пусть r — расстояние от центра планеты до центра масс спутника, ω — угловая скорость вращения системы. Из второго закона Ньютона получим два уравнения

$$m\omega^2(r + a)/2 = GmM/2(r + a)^2 + G(m/4a)^2 - N, \quad (1)$$

$$m\omega^2(r - a)/2 = GmM/2(r - a)^2 - G(m/4a)^2 + N. \quad (2)$$

Из (1), (2) находим величину силы реакции. Напряжение $\sigma(r) = N/S$,

$$\sigma(r) = \sigma_0[1 - 8R^3(3r^2 + a^2)(\rho_n/\rho_c)/r(r^2 - a^2)^2], \ \sigma_0 = G(m/4a)^2/S, \quad (3)$$

где ρ_n, ρ_c — плотности планеты и шаров. В случае r>>a функция σ(r) обращается в нуль при значении $r = r_0$, $r_0 = 2R(3\rho_n/\rho_c)^{1/3}$. Для разрыва гантели необходимо, чтобы в области $\sigma(r) < 0$ относительное удлинение перемычки превысило значение 10^{-3}, т. е. при условии $|\sigma(r_p)| \sim E \cdot 10^{-3}$. Соответствующее значение r_p называется *пределом Роша.*

Для Луны предел Роша r_p = 18 000 км ~3R. На фотоснимках ближайшего к Марсу спутника — Фобоса, сделанных космическим аппаратом «Вояджер», видна поверхность, исчерченная параллельными бороздами. Они могли возникнуть вследствие того, что Фобос, находящийся сейчас на расстоянии 9 450 км от Марса, вошел в границы предела Роша r_p = 10 400 км.

3.6. Деформация при изменении температуры

При нагревании газ, большинство жидкостей и твердых тел расширяются. В твердом теле равновесные расстояния между узлами кристаллической решетки увеличиваются пропорционально температуре.

Пусть при температуре t_0 тело недеформировано. При изменении температуры, даже в отсутствии внешних сил, тело будет деформировано. Это явление называется тепловым расширением.

Рассмотрим стержень, изображенный на рис. 3.1.1. Относительное удлинение линейных размеров стержня при изменении температуры

$$\Delta l/l_0 = \alpha(t - t_0), \ \Delta a/a_0 = \alpha(t - t_0), \quad (3.6.1)$$

где l_0, a_0 — размеры стержня при температуре t_0, α — коэффициент линейного расширения. Для стали $\alpha = 1{,}1\ 10^{-5}$ 1/К, для инвара (сплав стали с никелем) $\alpha = 10^{-6}$ 1/K, для алюминия $\alpha = 2{,}4\ 10^{-5}$ 1/K. Из-за теплового расширения приходится делать стыки на железнодорожных рельсах через каждые 135 м.

Относительное изменение объема $\Delta V/V_0 = 3\alpha(t - t_0)$. В отсутствии внешних сил внутренние напряжения равны нулю.

Задача 3.6.1. Найдите величину силы, которую необходимо приложить к торцу стального стержня сечением $S = 1$ см^2, чтобы при нагревании на $\Delta t = 1°$ С его длина не изменилась.

3.6.1. Особенности теплового расширения воды. При понижении температуры до 4°С объем единицы массы химически чистой воды непрерывно уменьшается. Но как только температура достигнет значения 4°С, происходит обратное явление: при понижении температуры от 4°С до точки замерзания объем единицы массы воды постепенно увеличивается. Вода, замерзая и превращаясь в лед, увеличивается в объеме примерно на 1/11 объема жидкой фазы. Другими словами, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3 максимальна при температуре 4°С и уменьшается при уменьшении или увеличении температуры. Эта особенность поведения воды связана с тем, что начиная с температуры 4°С происходит перестройка ближнего порядка: между молекулами воды возникают связи, характерные для кристаллической структуры льда. В интервале температур от 4°С до 0°С влияние этих связей сильнее, чем тенденция сжиматься вследствие уменьшения подвижности молекул воды с уменьшением температуры. Поэтому при понижении температуры от 4°С вода расширяется до тех пор, пока не затвердеет при 0°С.

3.7. Сплавы, запоминающие форму

В 1953 г. появился сплав Оландера, а в 1963 г. — нитинол (сплав никеля с титаном), обладающие способностью запоминать форму. Пусть остаточная деформация стержня при температуре t_1 равна $\varepsilon_{ост} \sim 0{,}1$. При нагревании деформированного стержня из обычного металла до температуры $t_2 > t_1$ сохраняется остаточная деформация. Поэтому его форма не изменяется. Такой же стержень из сплава, запоминающего форму, при температуре $t > t_1$ начинает укорачиваться, а при температуре t_2 остаточная деформация исчезает. Положение интервала (t_1, t_2) на температурной шкале, в котором происходит «вспоминание» исходной формы, можно регулировать. Следовательно, можно деформировать стержень при температуре $t_0 < t_1$ и возвратить к прежней форме в интервале (t_1, t_2).

Как же стержень может сжиматься при нагревании? Если мы растягивали стержень, то он удлинялся вдоль оси, но сжимался в поперечном направлении. «Вспоминая» при нагреве исходную форму, стержень сжимается вдоль оси, а его поперечные размеры возрастают. Как всегда при нагревании относительное увеличение объема стержня $\sim 10^{-5} \div 10^{-4}$, соответствует приращению температуры. При этом относительные изменения линейных размеров достигают значений 0,1. Растянем, например, скобку при комнатной температуре. Состав сплава подберем так, что при температуре 36—37°С скобка вспоминает прежнюю форму — она сжимается. Так можно сращивать костные переломы.

Сплавы, обладающие уникальным свойством запоминать форму, нашли практическое применение в технике и медицине.

Глава 4. Установившееся движение сплошной среды

4.1. Закон Бернулли

4.1.1. *Адиабатическое течение невязких жидкости и газа.* Мы получим очень сильный результат, рассматривая течение сплошной среды-жидкости или газа, удовлетворяющее трем условиям:

1. Среда невязкая — внутреннее трение отсутствует.

2. При течении реализуется адиабатический процесс.

3. Течение является стационарным или установившемся; в этом случае распределение траекторий частиц жидкости в пространстве не изменяется с течением времени. В этом случае скорость частицы $\vec{v}(x, y, z)$ в точке $\vec{r} = (x, y, z)$ не зависит от времени.

Введем систему координат с осью z, направленной вертикально вверх и рассмотрим движение жидкой частицы массой m, объемом V. На частицу действуют сила тяжести и сила давления. Учитывая (1.1.2), получим элементарную работу сил давления $\delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} = -V\Delta p$. Приращение полной энергии частицы равно работе поверхностных сил

$$\Delta(mv^2/2 + mgz) = -V\Delta p.$$

Согласно условию 2 первый закон термодинамики имеет вид $\Delta U = -p\Delta V$. Складывая оба соотношения, получим

$$\Delta(mv^2/2 + mgz + U) = -V\Delta p - p\Delta V = -\Delta(pV).$$

Следовательно, на траектории частицы сохраняется величина

$$mv^2/2 + mgz + U + pV = \text{const}. \qquad (4.1.1)$$

В случае идеального газа функция $U + pV = mc_pT$ представляет собой уже знакомую нам энтальпию. Следовательно, из (4.1.1) имеем

$$v^2/2 + gz + c_pT = \text{const}.$$

Отметим, что в установившемся движении траектория частицы совпадает с *линией тока* — кривой, касательная к которой в любой ее точке параллельна направлению скорости в данный момент времени. При переходе от одной линии тока к другой постоянная в (4.1.1) изменяется. И только при безвихревом течении постоянная имеет одно и то же значение в каждой точке жидкости.

Соотношение (4.1.1) называют *теоремой Бернулли.* Впервые она была установлена в 1738 г. российским академиком Даниилом Бернулли для частного случая несжимаемой жидкости с постоянной плотностью ρ. Поскольку в этом случае внутренняя энергия постоянна, то полагая в (4.1.1.) $U = \text{const}$, $V = m/\rho$, получим закон Бернулли в виде

$$\rho v^2/2 + \rho gz + p = \text{const}. \qquad (4.1.2)$$

Величина $\rho v^2/2$ называется *скоростным напором*. Отметим, что при скорости воздуха меньшей 100 м/с сжимаемостью воздуха можно пренебречь. Если положить в (4.1.2) $v = 0$, то получим условие равновесия элемента жидкости (1.5.1).

В предисловии к «Гидравлике», изданной в 1738 г. и принесшей Бернулли мировую славу, написано: «... Я охотно объявляю, что главнейшая часть этой работы обязана руководству, замыслам и поддержке со стороны Петербургской Академии наук».

Пример 4.1.1. Фонтан Герона. На рис. 4.1.1 изображена конструкция одного из фонтанов Герона (80 г. до н. э.). Резервуар R_1, содержащий воздух и слой воды, соединен трубками с открытым резервуаром R_3, заполненным водой, и резервуаром R_2. От резервуара R_2 отходит тонкая трубка, из которой бьет струя фонтана с уровня $h_4 = 1{,}55$ м. Уровни воды воды в резервуарах соответственно равны $h_1 = 0{,}25$ м, $h_2 = 0{,}95$ м, $h_3 = 1{,}35$ м. Найдем скорость воды на уровне h_4 и длину струи.

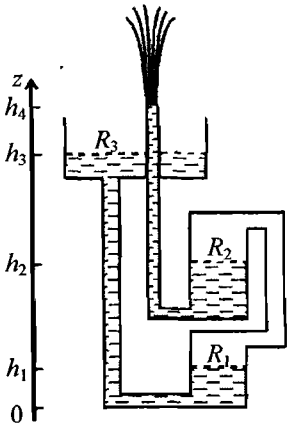


рис. 4.1.1

Пусть p — давление в резервуарах R_1 и R_2. Согласно (4.1.2) параметры состояния воды на уровне h_4 основания струи и уровне h_2 поверхности воды в резервуаре R_2 связаны уравнением

$$\rho v^2/2 + \rho g h_4 + p_{\text{ат}} = \rho g h_2 + p.$$

Рассматривая частицы жидкости на уровне h_3 в открытом резервуаре R_3 и на уровне h_1 в резервуаре R_1, получим еще одно уравнение $\rho g h_3 + p_{\text{ат}} = \rho g h_1 + p$.

Исключая p, находим

$$v = (2gh)^{1/2},\ h = (h_2 - h_1) - (h_4 - h_3),$$

Длина струи $L = h$, $L = 0{,}5$ м, $v = 3{,}132$ м/с.

4.2. Уравнение непрерывности

Родственным к линии тока является понятие *трубка тока*, которая представляет собой часть жидкости, ограниченной поверхностью, образуемой линиями тока.

Пусть в некоторой точке линии тока скорость жидкости равна $\vec{v}(\vec{r})$. Рассмотрим элементарную трубку тока, сечение которой перпендикулярно скорости. За интервал времени Δt через сечение площадью ΔS протекает количество жидкости массой $\Delta m = \rho v \Delta t \Delta S$. Требование сохранения массы жидкости в элементарном объеме приводит к условию $\Delta m/\Delta t = 0$, или к соотношению $\rho v \Delta S = \text{const}$, которое называется *уравнением непрерывности*. Если пренебречь сжимаемостью жидкости, то $v\Delta S = \text{const}$.

Пример 4.2.1. Истечение из отверстия в открытом сосуде. Вода в вертикально расположенном цилиндрическом сосуде вытекает из круглого отверстия у основания этого резервуара. Площади сечений цилиндра и отверстия равны соответственно S_2 и S_1, высота уровня воды — h. Найдем скорость истечения воды v_1 из отверстия.

Предположим, что выполняются условия применимости закона Бернулли. Пусть величина скорости смещения уровня воды в резервуаре равна v_2. Тогда из (4.1.2) для частиц воды на поверхности резервуара и в отверстии имеем

$$\rho gh + \rho v_2^2/2 + p_{ат} = \rho v_1^2/2 + p_{ат}. \qquad (1)$$

Дополним систему уравнением непрерывности

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \qquad (2)$$

Из (1), (2) находим

$$v_1 = \left[\frac{2gh}{1-(S_1/S_2)^2}\right]^{1/2}$$

$$v_1 = [2gh/(1 - S_1^2/S_2^2)]^{1/2}.$$

Если $S_1 << S_2$, то $v_1 = (2gh)^{1/2}$. Это соотношение называют формулой Торричелли, который получил ее в 1641 г., задолго до работы Бернулли.

Экспериментальные исследования формы струи показали, что площадь поперечного сечения струи вблизи круглого отверстия имеет величину (0,61-0,64)S_1. Следовательно, расход воды в единицу времени $\Delta m/\Delta t \approx$ $\approx 0{,}6\rho S_1(2gh)^{1/2}$.

4.3. Ветродвигатель

Рассмотрим ветроколесо с двумя или тремя лопастями, закрепленными на горизонтальной оси, параллельной направлению ветра (рис. 4.3.1). Площадь, ометаемая лопастями, равна S. Найдем мощность, развиваемую ветроколесом.

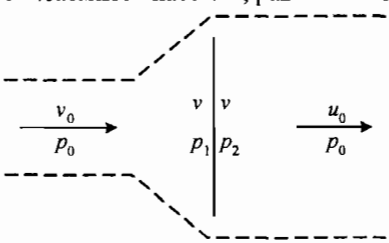


рис. 4.3.1

Пусть невозмущенные значения скорости и давления слева от ветроколеса равны v_0 и p_0, а справа — u_0 и p_0. При подходе к ветроколесу скорость воздушного потока уменьшается до значения v и плавно изменяется при переходе через него. Давление в отличие от скорости меняется скачком: непосредственно слева у ветроколеса давление равно p_1, а справа — p_2. В области перехода через ветроколесо в результате неустановившегося процесса перемешивания условие стационарности потока воздуха нарушается. Поэтому запишем уравнение Бернулли для воздушных потоков слева и справа от ветроколеса:

$$\rho v_0^2/2 + p_0 = \rho v^2/2 + p_1, \quad \rho v^2/2 + p_2 = \rho u_0^2/2 + p_0.$$

Отсюда находим $p_1 - p_2 = \rho(v_0^2 - u_0^2)/2$. Воздух действует на лопасти ветроколеса с силой $F_x = (p_1 - p_2)S = \rho S(v_0^2 - u_0^2)/2$. За интервал времени Δt через ветроколесо проходит масса воздуха $\Delta m = \rho S v \Delta t$. Приращение импульса этой массы воздуха $\Delta P_x = \Delta m(u_0 - v_0)$ должно быть равно импульсу силы давления, действующей со стороны лопастей на воздух $\Delta P_x = -F_x \Delta t$, т. е. $F_x = \rho S v(v_0 - u_0)$. Сравнивая оба выражения для F_x, получим $v = (v_0 + u_0)/2$. Сила, действующая на ветроколесо, развивает мощность $N = F_x v$,

$$N = \rho S v^2(v_0 - u_0) = 2\rho S v^2(v_0 - v).$$

Функция $N(v)$ достигает при $v = 2v_0/3$ максимального значения $N_m = 8\rho S v_0^3/27$.

Современные ветроколеса развивают мощность 500 — 600 кВт. В 1994 г. была пущена ветряная электростанция «Аэлус-II»(ФРГ) мощностью 3 Мвт. Встречные роторы диаметром 80 м установлены на мачте высотой 90 м. Мощность ветряных энергоустановок, построенных в Германии до 2001 г. равна 6916 МВт — это мощность 5 АЭС. На втором месте США (2495МВт), на третьем — Испания (2481МВт).

Задача 4.3.1. Покажите, что при зависании вертолета массой m, мощность, развиваемая двигателем $N = (mg)^{3/2}/(2\rho S)^{1/2}$, где S — площадь, ометаемая винтом.

Классический вертолет не может развить скорость более 350 км/ч. Практический предел грузоподъемности — 25 т. Ограничение по удельной нагрузке — не более 30 кг на каждый м^2 площади круга, ометаемого винтом. Следовательно, длина лопасти может быть не более 15–17 м.

Шестиместный вертолет Ка-26 массой 3,2 т имеет два двигателя мощностью 240 кВт, диаметр винта 13 м. Подставляя эти данные, получим $N \approx 352$ кВт. Эта величина меньше реально развиваемой мощности, поскольку часть энергии теряется из-за трения и завихрения потока воздуха.

4.4. Адиабатическое движение воздуха с постоянной скоростью

Наблюдения показывают, что движущийся поток воздуха не успевает обмениваться теплотой с окружающей атмосферой. Рассмотрим частицу воздуха, движущуюся с постоянной скоростью. Наша задача — найти зависимость температуры воздуха от вертикальной координаты частицы z.

На частицу воздуха массой m, объемом V действуют сила тяжести и сила давления (1.1.2). При движении с постоянной скоростью сумма сил равна нулю: $-\rho g V - (\Delta p/\Delta z)V = 0$. Согласно (II. 4.4.2) имеем $\delta Q = mc_v\Delta T + \Delta(pV) - V\Delta p = mc_p\Delta T - (m/\rho)\Delta p$. Далее, учитывая адиабатический характер процесса $\delta Q = 0$, получим уравнение $mc_p\Delta T - (m/\rho)\Delta p = 0$. Подставляя Δp из условия равновесия, находим

$$\Delta T/\Delta z = -g/c_p. \qquad (4.4.1)$$

Величину $\kappa_a = g/c_p$ метеорологи называют *сухоадиабатическим градиентом температуры* (от лат. *gradiens* — шагающий). Для сухого воздуха $c_p = 1{,}005$ кДж/(кг · К), $K_a = 9{,}8 \cdot 10^{-3}$ К/м, т. е. температура воздуха понижается приблизительно на 1° на каждые 100 м подъема.

Задача 4.4.1. Получите величину $\Delta T/\Delta z = -g/c_p$, используя теорему Бернулли (4.1.1).

4.5. Устойчивость атмосферы

4.5.1. Структура атмосферы. Атмосферой (от греч. *atmos* — пар, и *sphaira* — сфера) называют газовую среду, которая окружает Землю и вращается вместе с ней как целое. Многочисленные измерения химического состава воздуха, температуры и давления на различных высотах позволили понять структуру атмосферы.

Средняя температура на уровне моря для всей планеты в целом равна 15°С, плотность порядка 1 кг/м^3. С увеличением высоты температура убывает на 6,5 К на один километр. На высоте 11 км температура достигает значения 220 К (см. рис. 4.5.1).

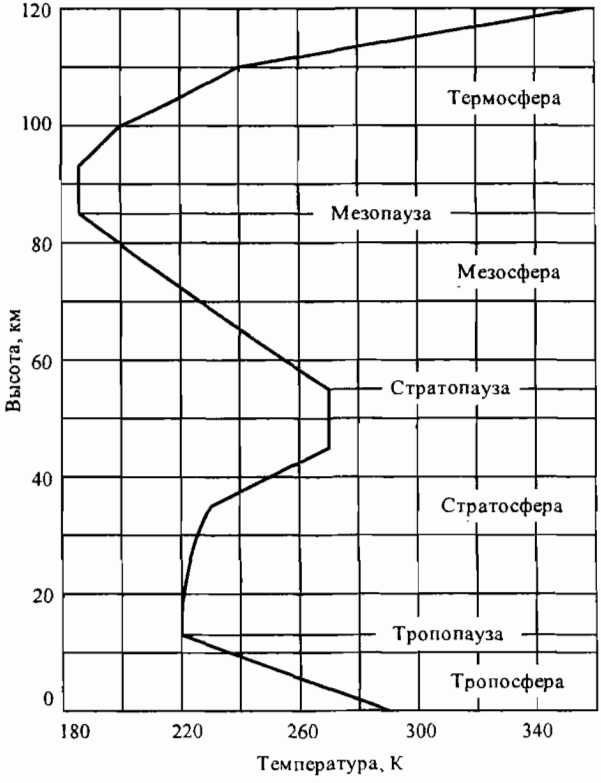


рис. 4.5.1

Однако, в области высот от 9 км на полюсе и от 18 км над тропиками температура остается почти постоянной до высоты порядка 20 км, а в области от 20 км до 47 км возрастает до 280°К. Когда впервые обнаружили это удивительное поведение температуры, то посчитали этот результат ошибочным. И только когда несколько сотен приборов, достигших этих высот, показали тот же результат, то поверили в существование атмосферного слоя с инверсией (от лат. *inversio* — перестановка). В области высот с 47 км до 51 км простирается изотермический слой с постоянной температурой ~280 К. Применение ракет позволило установить, что температура в слое от 51 км до 86 км вновь понижается, а затем идет слой с увеличивающейся температурой. На высоте около 120 км температура достигает 15° С.

После того как стала ясной структура атмосферы, были даны названия соответствующим слоям. Прилегающий к Земле слой толщиной 11 км назвали *тропосферой*. Происходит этот термин от греческого слова tropos — поворот. Слой от 11 км до первого максимума температуры на высоте 47 км назвали *стратосферой*. Это слово происходит от латинского «stratum» — настил. Переходную область на высоте порядка 11 км в средних широтах назвали *тропопаузой*, а область максимума на высоте 51 км — *стратопаузой*.

Интересно сравнить массу атмосферы с массой воды на нашей планете. В океанах, морях, озерах и реках масса воды $m_в = 1{,}4 \cdot 10^{21}$ кг, то есть ее масса в 266 раз превосходит массу атмосферы. На высоте 25 км атмосферное давление 1 Па. Это означает, что более чем 99,99 % массы атмосферы сосредоточено в оболочке толщиной всего лишь 25 км. Если мы сравним толщину этой оболочки с радиусом земного шара 6371 км, то поймем, сколь тонкая пленка воздуха покрывает нашу планету.

Вопрос об устойчивости атмосферы возникает в связи с загрязнением воздуха. Основной источник загрязнения имеет естественный характер — это вулканические извержения, брызги морской воды, пылевые бури и т. д. Другим источником загрязнения является деятельность человека – выбросы самых разнородных веществ при промышленном производстве, в том числе при сжигании топлива на электростанциях и работе двигателей. Может наступить момент, когда не будет больше надежды, что загрязнители рассеются в атмосфере.

Рассмотрим сначала равновесное состояние тропосферы. Пусть T_0 — температура воздуха у поверхности Земли, $T(z)$ — температура на высоте z. Согласно (4.4.1) в равновесном состоянии зависимость температуры от высоты имеет вид

$$T_a(z) = T_0 - k_a z \qquad (4.5.1)$$

В реальной атмосфере зависимость температуры от высоты может отличаться от (4.5.1). Рассмотрим ситуацию, при которой температура воздуха изменяется по закону

$$T_в(z) = T_{в0} - k_в z \qquad (4.5.2)$$

По значению величины $k_в$ можно судить о том насколько устойчиво состояние тропосферы.

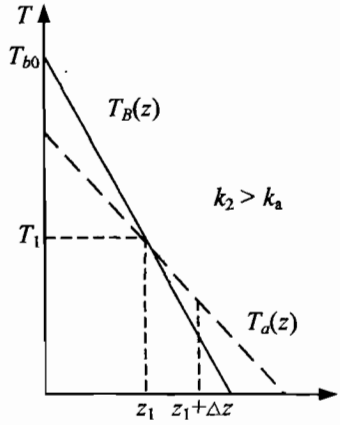


рис. 4.5.2

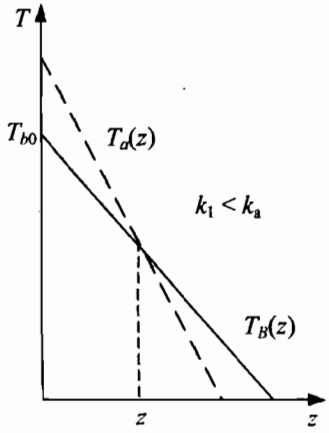


рис. 4.5.3

На рисунке 4.5.2 изображен график функции (4.5.2) при $k_в = k_2$, $k_2 > k_a$. Если масса воздуха Δm, которая первоначально находилась в равновесии на высоте z_1 переместится вверх в точку с координатой $z_1 + \Delta z$, то ее температура изменится в соответствии с (4.5.1) на величину $\Delta T_a = -k_a \Delta z$, а температура окружающего воздуха изменится на величину $\Delta T_в = -k_2 \Delta z$. Следовательно, $T_1 + \Delta T_a > T_в(z_1 + \Delta z)$: масса Δm окажется в окружении более холодного воздуха. Поскольку, плотность воздуха массой Δm меньше плотности окружающего воздуха, то эта масса всплывает. Подобное состояние атмосферы называют неустойчивым. Оно благоприятно для рассеивания вредных примесей.

Пример 4.5.1. Две горизонтально расположенные пластины находятся на расстоянии d. Температура верхней пластины T_1, температура нижней пластины $T_2 > T_1$. Оценим величину $\Delta T = T_2 - T_1$, при которой в системе возникает конвекция. Условие всплывания $\Delta T_в/\Delta z < -g/c_p$ приводит к неравенству $T_2 - T_1 > gd/c_p$.

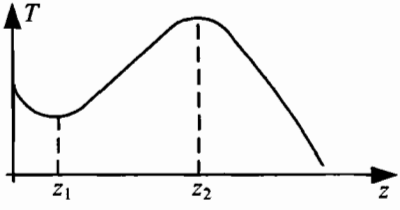


рис. 4.5.4

Задача 4.5.2. На рисунке 4.5.3 зависимость температуры от высоты представлена графиком функции (4.5.3), где $k_в = k_1$, $k_1 < k_a$. Как будут двигаться частица воздуха массой Δm, если она сместится вверх на величину $\Delta z > 0$ или вниз — на $\Delta z < 0$?

Особое положение возникает в том случае, когда в некотором интервале высот, температура воздуха растет с увеличением высоты. Подобное явление называется *инверсией*. Область инверсии на рисунке 4.5.4 — слой воздуха между плоскостями $z = z_1$ и $z = z_2$.

Задача 4.5.3. Попробуйте ответить на вопрос: устойчива ли тропосфера в области инверсии?

Одна из причин возникновения инверсии — образование антициклона (области повышенного давления). Опускание воздушного слоя сопровождается адиабатическим нагреванием верхней границы слоя. Подобная долговременная инверсия часто возникает осенью, и тогда наступает «*бабье лето*». Другая причина связана с загрязнением воздуха, который поглощает тепло настолько интенсивно, что нижележащие слои воздуха не нагреваются. Когда инверсия возникает над территорией большого города, то загрязняющие вещества не могут рассеяться в атмосфере — они остаются в зоне инверсии. В частности, концентрация продуктов сгорания угля может достичь исключительно высоких концентраций, как это произошло в Лондоне в начале декабря 1952 г. В течение недели, вдыхая смог, погибли 4000 человек. Термин «smog» образован соединением слов *smoke* — дым и *fog* — туман.

Метеорологам давно известно, что в крупных городах — мегаполисах (от греч. *polis* — город) температура выше температуры пригородов на 1–4°С. «Острова жары» представляют собой нагретые участки асфальта и бетона. После заката Солнца возникает перепад давления и поток теплого воздуха переходит в зону низкого давления, где воздух прохладнее. Столкновение воздушных масс вызывает грозы и дожди. Наиболее характерный пример этого явления ученые обнаружили в Атланте (США).

Задача 4.5.4. Из трубы высотой h = 100 м выходит сухой воздух с температурой, превышающей температуру окружающего воздуха на величину ΔT = 2 К. Зависимость температуры воздуха от высоты z имеет вид (4.5.2), где $k_в$ = 5,9 10^{-3} К/м. На какой высоте Н воздух, вышедший из трубы, окажется в равновесии?

Решение. Зависимость температуры от высоты $T_в(z) = T_{в0} - \kappa_в z$. Температура воздуха, выходящего из трубы $T_в(h) = T_{в0} - \kappa_в h + \Delta T$. При адиабатическом движении вверх воздух охлаждается: $T_a(z) = T_в(h) - \kappa_a(z - h)$, $z \geq h$. На некоторой высоте Н воздух окажется в равновесии при условии $T_a(H) = T_в(H)$. Из приведенных уравнений находим $H = h + \Delta T/(k_a - k_в)$, H = 600 м.

4.6. Местные ветры — фен и чинук

4.6.1. Адиабатическое движение воздуха. Наиболее заметные погодные явления такие, как дождь, снег, град, туман и т.д. возникают благодаря присутствию в воздухе водяного пара. Поток влажного воздуха, встретив на пути горы, поднимается вверх по склону и адиабатически охлаждается. На некоторой высоте влажность воздуха достигает 100%. Далее подъем воздуха сопровождается конденсацией и выделением теплоты, препятствующей адиабатическому охлаждению. Это приводит к замедлению падения температуры с высотой по сравнению со случаем подъема ненасыщенного воздуха. Теперь масса воздуха, содержащая насыщенный пар, поднимаясь по навстренному склону охлаждается примерно на 0,54° С на каждые 100 м.

К тому времени, когда воздух переваливает через вершины горного хребта, и начинает опускаться по подветренной стороне, в нем почти не содержится водяного пара. Далее он нагревается вследствие адиабатического сжатия при спуске в область повышенного давления. Увеличение температуры составит уже 0,98°К на каждые 100 м спуска.

Задача 4.6.1. Объясните, почему при движении массы воздуха вверх по склону горы относительная влажность массы воздуха увеличивается.

Задача 4.6.2. Воздух, имеющий на поверхности Земли влажность $\varphi = 50$ % при температуре $t_0 = 27^\circ$ С, поднимается на высоту $H = 2$ км. Оценить температуру воздуха на этой высоте.

Решение. Плотность насыщенного пара при температуре t_1 равна $\rho_{H1} = 25{,}8$ г/м^3. Следовательно, плотность пара $\rho_п = 0{,}5\ \rho_{H1} = 12{,}9$ г/м^3. Из таблиц находим, что точка росы соответствует температуре несколько большей $t_1 = 15$°С. Высоту H_1, на которой происходит конденсация, найдем из условия $t_1 = t_0 - k_a H_1$; $H_1 = 1{,}22$ км. Температуру t на высоте H найдем из уравнения

$$t = t_1 - k_H(H - H_1),$$

где $k_H = 5{,}4 \cdot 10^{-3}$ К/м; $t = 10{,}79$°С.

Задача 4.6.3. Опишите процессы, происходящие при встрече индийского летнего муссона с Гималаями.

Задача 4.6.4. Какой климат характерен для знаменитой Долины Смерти, находящейся на подветренной стороне гор Сьерра-Невада в США?

4.6.2. Фен и чинук. Таким образом, по подветренным склонам движется теплый и сухой воздух. На территории США в Скалистых горах теплый ветер со снежного хребта индейцы назвали *чинук* — снегоед. Он нередко повышает температуру до 25° С менее чем за 12 часов и испаряет снежный покров.

Аналогичный ветер на склонах Альп называют *фен*. Усиливающийся сухой и теплый фен вызывает у некоторых людей так называемую «феновую болезнь» — возрастает число жалоб на недомогание, появляется нервозность, снижается работоспособность. В Австрии во время фена ученикам не проставляют неудовлетворительных оценок, а полицейские не штрафуют водителей, нарушивших правила движения.

4.7. Подъемная сила

При обтекании тела невязкой жидкостью касательная к поверхности тела компонента скорости не равна нулю. Силы вязкости приводят к тому, что слой жидкости, прилегающий к телу, не скользит, а «прилипает» к поверхности. Эксперименты позволили установить, что на поверхности обтекаемого тела скорость жидкости сколь угодно малой вязкости равна нулю. Отсюда можно сделать вывод, что падение скорости до нуля происходит в тонком пристеночном слое жидкости, получившем название *пограничного слоя*. Поверхность тела действует как источник завихренности, которая сносится вниз по потоку. Наблюдения показали, что за телом образуется область, заполнен-

ная вихреобразно движущейся жидкостью, давление в которой меньше давления в набегающем потоке. Здесь возникает область разрежения. Давление на передней части тела, где скорость жидкости близка к нулю, наоборот, больше давления в набегающем потоке (область избыточного давления). Результирующая сила давления на обтекаемое тело направлена параллельно скорости течения жидкости. Ее назавают силой *сопротивления давления*.

Сила лобового сопротивления, которая действует на тело со стороны обтекающей вязкой жидкости, представляет собой сумму силы сопротивления давления и силы трения между слоем, прилипшим к телу, и потоком.

Возникновение *подъемной силы*, действующей на крыло самолета в потоке воздуха, было впервые теоретически обосновано в 1906 г. выдающимся русским ученым Н.Е. Жуковским (1847—1921). Из наблюдений известно, что в начальной стадии обтекания благодаря вязкости происходит снос завихренного воздуха (от кормовой кромки) и вокруг крыла устанавливается *циркуляция* — вращающийся в обратном направлении тонкий слой воздуха. Над крылом, где скорость потока параллельна скорости слоя, давление в соответствии с теоремой Бернулли понижается, а под крылом повышается: возникает подъемная сила, направленная перпендикулярно скорости набегающего потока. Подъемная сила и сила лобового сопротивления крыла зависят от формы, размеров и ориентации относительно потока.

Глава 5. Волновое движение в среде. Звук

5.1. Волны в упругой среде

Прежде чем говорить о волновом движении среды, необходимо ввести физические величины, характеризующие произвольное состояние среды и обсудить какие приборы следует использовать для экспериментальных исследований. Только тогда можно выделить класс явлений, соответствующих определению волнового движения. Следующий шаг — вывод уравнений, описывающих эволюцию состояния среды.

Рассмотрим сплошную среду — воздух, твердое тело или жидкость. Состояние среды характеризуется температурой, давлением и плотностью. В результате действия внешних сил частицы смещаются, среда деформируется, изменяются плотность и давление. В воздухе проще всего измерить давление, используя микрофон, присоединенный к осциллографу. Если до деформации давление p_0 постоянно, то при деформации возникает приращение давления, представляющее собой функцию $p_s(x, y, z, t)$ координат и времени. Полное давление $p = p_0 + p_s(x, y, z, t)$, где $p_s(x, y, z, t)$ — звуковое давление.

Процесс распространения деформации в среде называется звуковой волной, или просто звуком.

Если частицы среды смещаются параллельно направлению распространения деформации, то волну называют *продольной*. В *поперечной* волне частицы

смещаются в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения деформации. Например, пусть волна распространяется в направлении оси z. В случае продольной волны компоненты вектора деформации $u_x = u_y = 0$, $u_z = F(t, x, y, z)$. В поперечной волне $u_x = f_1(t, x, y, z)$, $u_y = f_2(t, x, y, z)$, $u_z = 0$.

Продольные волны наблюдаются в газе, жидкости и в твердом теле. Независимо от продольной волны в твердом теле может распространяться и поперечная волна. В газе и жидкости поперечные волны затухают в близкой окрестности источника деформации.

Пример 5.1.1. Поток воды течет по трубе со скоростью $v = 1$ м/с. Найдем давление на заслонку при внезапном закрывании крана.

Столкнувшись с заслонкой, слой воды, прилегающей к ней, останавливается и сжимается. Далее останавливаются и сжимаются последующие слои – возникает волна деформации, распространяющаяся навстречу потоку со скоростью звука в воде $c_В$. Пусть в момент времени t масса движущейся воды $m(t)$. Остановившаяся масса воды действует на нее силой $\vec{F}$. Направим ось z параллельно вектору скорости и запишем закон изменения импульса массы воды за интервал времени Δt:

$$[m(t) - \rho(c_В \Delta t S)]v - m(t)v = F_z \Delta t.$$

Очевидно на заслонку действует сила $\vec{N} = -\vec{F}$, $\vec{N} = (0, 0, \rho c_В S v)$. Следовательно, давление $p = \rho c_В v$. Полагая $\rho = 10^3$кг/м^3, $c_В = 1500$м/с, получим $p = 15 \cdot 10^5$ Па. Рассмотренное явление называется *гидравлическим ударом*. Разрушительное действие капель также объясняется этим явлением.

5.2. Звук в воздухе

Любое движущееся тело деформирует среду и возбуждает звуковую волну. Сверчок «поет», когда он складывает крылья, порождая звуковой импульс длительностью от 15 до 20 мс. Наиболее распространенный тип стрекотания — серии из 4 «слогов» подряд, прерываемые короткими паузами и повторяемые 2–4 раза в секунду. Почему «поет» сверчок?

А как возникает гром? Правильное объяснение было дано в конце XIX в. При вспышке молнии температура в канале разряда достигает 30 000°С, а давление может превышать атмосферное в 10–100 раз. Гром возникает при быстром расширении воздуха, нагретого разрядом молнии.

Область физики, связанная с изучением распространения звука в различных средах, называется *акустикой* (от гр. *akustikos* — слуховой).

Если пренебречь вязкостью, то при движении массы воздуха Δm реализуется адиабатический процесс. В этом «простом» случае одномерные звуковые волны описываются тремя уравнениями, решение которых позволило немецкому математику Б. Риману (1860 г.) найти звуковые давление p_s, плотность ρ_s и распределение скорости $\vec{v}(x, y, z, t)$. Мы ограничимся лишь обсуждением общих свойств волнового движения при условии $|p_s| \ll p_0$, $|\rho_s| \ll \rho_0$.

5.2.1. Скорость звука. Одно из уравнений представляет собой уравнение адиабатического процесса $p(\Delta V)^n = \text{const}$, $n = 1{,}4$. Поскольку $\Delta m = \rho \Delta V$,

то уравнение процесса принимает вид $p = A\rho^n$, где A — константа. В равновесном состоянии $p_0 = A(\rho_0)^n$, $p_0/\rho_0 = RT_0/M$, M — молярная масса воздуха. Подставляя $\rho = \rho_0 + \rho_s$, получим

$$p = A(\rho_0 + \rho_s)^n = A(\rho_0)^n (1 + \rho_s/\rho_0)^n \approx A(\rho_0)^n(1 + n\rho_s/\rho_0) = p_0 + \rho_s np_0/\rho_0.$$

Мы видим, что звуковое давление p_s связано с приращением плотности ρ_s соотношением

$$p_s = c^2\rho_s, \quad c^2 = np_0/\rho_0 = nRT_0/M, \tag{5.2.1}$$

где c — скорость звука. При нормальной температуре $T_0 = 273$ К скорость звука $c = 332$ м/с, при $T_0 = 293$ К скорость звука $c = 344$ м/с. Отметим, что среднеквадратичная скорость молекул воздуха $v_{ск} = (3RT_0/M)^{1/2}$ близка к скорости звука.

С вычислением скорости звука связана знаменитая ошибка И. Ньютона. Убежденный в том, что механическое движение является изотермическим процессом, он получил значение скорости $(RT_0/M)^{1/2}$. Правильное значение нашел в 1816 г. французский физик и математик П. Лаплас, когда понял что распространение звука — адиабатический процесс.

5.3. Взрыв

Пусть в момент времени $t = 0$ давление внутри сферического объема радиусом a с центром в точке S внезапно повысилось на величину Δp_0. Возникает сферическая звуковая волна. Движение воздуха в точке наблюдения $P(x, y, z)$ начинается в момент времени $t_1 = (r - a)/c$ и заканчивается при $t_2 = (r + a)/c$, где $r = SP$ — расстояние межу точками S и P (рис. 5.3.1). Волна проходит через точку Р в течение времени $2a/c$. Другими словами волна имеет форму шарового слоя толщиной $2a$, заключенного между сферами радиусов $ct - a$ и $ct + a$. Внутри этого слоя давление изменяется по линейному закону $p = p_0 + p_s$, $p_s = \Delta p_0(r - ct)/2r$ — в наружной части воздух сжат, а во внутренней — разрежен.

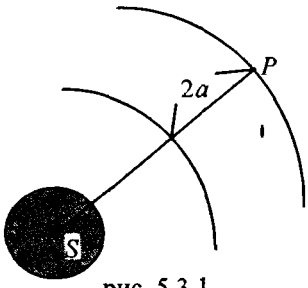


рис. 5.3.1.

Поражающее действие волны зависит от максимального значения p_m функции p_s. При p_m ~20 — 40 кПа возможны легкие травмы, при $p_m > 50$ кПа последствия могут быть крайне тяжелыми.

5.4. Образование ударной волны

Производная полной энергии тела равна мощности сил сопротивления. Космические аппараты при спуске на Землю входят в атмосферу со сверхзвуковыми скоростями. На лобовой части образуется слой сжатого воздуха температура которого превышает 8000 К и возникает скачок давления по-

рядка 50 атм. При сверхзвуковом движении возникает *ударная волна* сжатия: плотность воздуха позади фронта волны больше, чем плотность воздуха перед фронтом волны. Огибающая фронтов сферических волн, порождаемых аппаратом, образует коническую поверхность — конус Маха. Еще одна хвостовая ударная волна отделяется от задней кромки. Обе волны имеют вид конусов, вложенных друг в друга. Обе ударные волны заметны вне конусов на довольно большом расстоянии от пролетающего тела. Когда пролетает сверхзвуковой самолет, то еще на расстоянии до 20 км и более слышны громкие хлопки.

Образование ударной волны приводит к уменьшению кинетической энергии аппарата. Этот эффект эквивалентен действию так называемой силы *волнового сопротивления*. При дозвуковых скоростях силы сопротивления обусловлены, в основном, вязкостью воздуха. Волновое сопротивление и сопротивление давления играют основную роль при торможении космических аппаратов в плотных слоях атмосферы.

5.5. Звуковые волны в трубах

Рассмотрим волновое движение в трубе постоянного сечения S. Ось z направим по оси трубы. Решение уравнений акустики для звукового давления p_s и распределения скорости воздуха $\vec{v} = (0, 0, v)$ в трубе имеют вид

$$p_s(t, x, y, z) = f(z - ct) + g(z + ct), \tag{5.5.1}$$

$$v(t, x, y, z) = [f(z - ct) - g(z + ct)]/(c\rho_0). \tag{5.5.2}$$

Здесь $x, y \in S$, f и g произвольные функции, которые можно определить по известным граничным условиям и источнику звука. Отметим, что давление и скорость воздуха относятся к определенной точке пространства, а не к частице воздуха: $v(t, z)$ — значение скорости того элемента массы Δm, который в момент времени t находится в точке с координатой z.

5.5.1. Бегущая волна. В случае достаточно длинной трубы можно реализовать одно из решений, полагая $g = 0$:

$$p_s(t, x, y, z) = f(z - ct),$$

$$v(t, x, y, z) = (c\rho_0)^{-1} f(z - ct). \tag{5.5.3}$$

Выясним наглядный смысл этого решения. В момент времени $t = 0$ зависимость давления от координаты $p_s(t = 0, x, y, z) = f(z)$. График функции $f(z)$ изображен на рис. 5.5.1 *а*. В момент времени $t = t_1 > 0$ давление $p_s(t = t_1, x, y, z) = f(z - ct_1)$ представлено графиком функции $f(z)$, сдвинутым вправо на расстояние ct_1, в момент времени $t = t_2$ — графиком функции $f(z)$, сдвинутым вправо на расстояние ct_2 (рис. 5.5.1 *б*, *в*). Следовательно, если в момент времени $t = 0$ давление в некоторой точке $z = z_0$ имело значение $f(z) = p_0$, то через промежуток времени t давление имеет то же значение p_0 в точке с координатой $z_0 + ct$ на

расстоянии ct от первоначального места. Если проецировать графики давления на экран, то зритель увидит, что функция $f(z)$ «побежит» вправо. Таким образом, функция $f(z - ct)$ представляет собой, как говорят, *бегущую волну,* распространяющуюся в положительном направлении оси z.

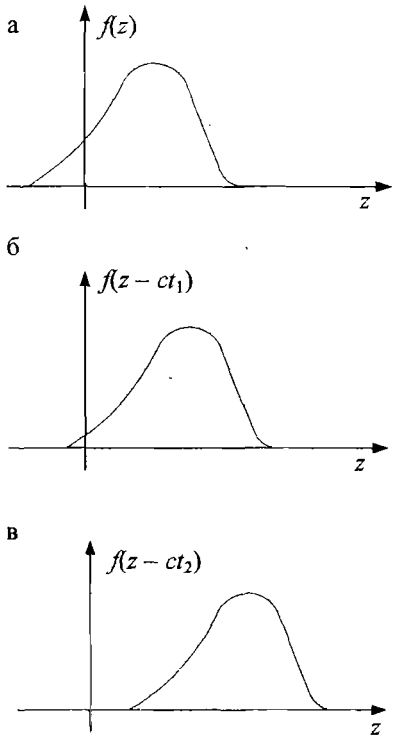


рис. 5.5.1

Читая популярную литературу, можно познакомиться с таким «определением»: волной называют *колебания*, распространяющиеся в пространстве с течением времени. В действительности из (5.5.3) следует, что распределение скорости воздуха описывается *произвольной* функцией $v(t, x, y, z) = (c\rho_0)^{-1}p_s(t, x, y, z)$. Рассмотрим любую точку, скажем, точку с продольной координатой $z = 0$. Из графиков 5.5.1 видно, что скорость воздуха в этой точке — функция $v(t, x, y, z = 0) = (c\rho_0)^{-1}p_s(t, x, y, z = 0)$ монотонно убывает.

В волновом движении участвуют все частицы среды. Самое существенное в этом явлении — конечность скорости волны. Именно по этой причине определенное значение давления p_0 регистрируется в точках среды z_1, z_2, ... в различные моменты времени с запаздыванием. Когда же мы говорим о колебаниях, то согласно определению колебанием называется *периодическое движение*, отображаемое зависимостью смещения n-той частицы от положения равновесия $q_n(t)$. При переходе от дискретного распределения частиц к непрерывной среде индекс n переходит в координаты x, y, z элементарной «частицы» среды. «Колебания» частицы, т. е. движение частиц не может распространяться — распространяется деформация в среде. Этот процесс описывается функциями, зависящими от координат и времени. Если можно пренебречь запаздыванием, то в этом приближении все частицы среды движутся одновременно как целое.

Для того, чтобы «увидеть» звуковую волну в диапазоне частот до 100 кГц, можно использовать микрофон, преобразующий давление в электрическое напряжение, которое модулирует яркость свечения точечного источника света. Сканируя различные области пространства, получим видимое изображение распределения звукового поля. В диапазоне выше 100 кГц визуализация звукового поля достигается с помощью электронно-акустических преобразователей.

5.5.2. Бегущая монохроматическая волна. Функции

$$p_s(t, x, y, z) = a\cos(\omega t - kz), \qquad (5.5.5)$$

$$v(t, x, y, z) = (a/c\rho_0)\cos(\omega t - kz),$$

где a и ω — постоянные, описывают *бегущую монохроматическую волну* давления. Величина $k = \omega/c$ — называется *волновым числом*. Этот тип волн можно возбудить камертоном, поднесенным к торцу длинной трубы.

Период волны. Давление в произвольной точке z_0 представляет собой функцию $p_s(t, x, y, z_0) = a\cos(\omega t - kz_0)$. Следуя определению периода $p_s(t, z_0) = p_s(t + T, z_0)$, находим $\omega T = 2\pi$. Период волны $T = 2\pi/\omega$. В точке z_0 скорость воздуха $v(t, x, y, z_0) = a(c\rho_0)^{-1}\cos(\omega t - kz_0)$. В рассматриваемом акустическом приближении z-компонента вектора деформации $u_z(t, x, y, z_0) = a(c\omega\rho_0)^{-1}\sin(\omega t - kz_0)$: элемент массы Δm колеблется в окрестности равновесного положения $z = z_0$. Колебания, т. е. движение этого элемента, не распространяются.

Длина волны. Если сделать «фотоснимок» волны в момент времени t_0, то распределение давления описывается функцией $p_s(t_0, z) = a\cos(\omega t_0 - kz)$, периодической по координате z. Поэтому можно ввести новую величину — *длину волны* λ, характеризующую пространственную периодичность давления условием $p_s(t_0, x, y, z) = p_s(t_0, x, y, z + \lambda)$. Из этого уравнения находим $k\lambda = 2\pi$, $\lambda = 2\pi c/\omega = cT$.

Функцию $\Phi(t,x,y,z) = \omega t - kz$ называют *фазой волны*. Геометрическое место точек, для которых фаза имеет одно и то же значение, называют *фронтом волны*. Пусть $\Phi(t, x, y, z) = \Phi(t_0,z_0) = \Phi_0$. Тогда положение фронта определяется уравнением $\omega t - kz = \omega t_0 - kz_0$ или $z = z_0 + c(t - t_0)$. Следовательно, волновой фронт — плоскость движется со скоростью c.

5.5.3. Стоячие волны. Полуоткрытая труба. Возьмем трубу длиной H, закрытую в плоскости $z = 0$. На уровне $z = H$ труба открыта. Теперь необходимо учесть граничные условия, которые должны выполняться на поверхностях твердых стенок и на свободной границе раздела двух сред.

В точках плоскости $z = 0$ скорость воздуха равна нулю: $v(t, x, y, z = 0) = 0$. Для того, чтобы удовлетворить этому условию, положим в (5.5.1), (5.5.2) $f = (a/2)\cos(\omega t - kz)$, $g = (a/2)\cos(\omega t + kz)$:

$$p_s(t, x, y, z) = a\cos kz\cos\omega t,$$
$$v(t, x, y, z) = (a/c\rho_0)\sin kz\sin\omega t,\ k = \omega/c. \qquad (5.5.6)$$

Звуковая волна (5.5.6) называется *стоячей волной*. Это решение описывает также волны в плоском слое воды.

На торце трубы в плоскости $z = H$ звуковое давление равно нулю: $p_s(t, z = H) = 0$ или $\cos kH = 0$. Отсюда находим допустимые значения волнового числа $k = k_n$, $k_n = \pi(n + 1/2)/H$, $n = 0,1,2,\ldots$. Поскольку $k = 2\pi/\lambda$, то длина волны $\lambda_n = 2H/(n + 1/2)$.

Если в трубке установить генератор звука частотой ν, то он может возбудить звуковое давление, представляющее собой наложение парциальных давлений, создаваемых всеми стоячими волнами. При значениях частоты $\nu \neq \nu_n = c/\lambda_n$, $\nu_n = (n + 1/2)c/2H$ звук практически не возбуждается. Однако при фиксированном значении $\nu = \nu_n$, $\nu_n = (n + 1/2)c/(2H)$ основной вклад вносит стоячая волна частоты ν_n, заметно превосходя все остальные. Этот эффект является следствием *резонанса* — явления избирательного отклика системы на возбуждение звука генератором гармонических колебаний: при значении $\nu = (n + 1/2)(c/2H)$ в трубе возбуждается практически только одна стоячая волна. Основные частота и длина волны, соответствующие значению $n = 0$, равны $\nu_0 = c/4H$, $\lambda_0 = 4H$. Спектр частот содержит лишь нечетные гармоники основной частоты $\nu_n = (2n + 1)\nu_0$.

Интересно, что ухо человека, имеющее глубину ~2,7 см, наиболее чувствительно к звукам частотой 3 кГц близкой к частоте ν_0.

Открытая труба. Возьмем теперь трубку открытую на двух торцах. Такие трубы используются в *органах*. Очевидно, на торцах трубы должны выполняться условия $p_s(t, x, y, z = 0) = 0$, $p_s(t, x, y, z = H) = 0$. Мы удовлетворим первому условию полагая в (5.4.1), (5.4.2) $f = (a/2)\cos(\omega t - kz)$, $g = -(a/2)\cos(\omega t + kz)$. Тогда

$$p_s(t, x, y, z) = a \sin kz \sin\omega t, \quad v(t, x, y, z) = (a/c\rho_0) \cos kz \cos\omega t. \qquad (5.5.7)$$

Из уравнения $\sin kH = 0$ находим $k = k_n$, $k_n = \pi n/H$, $n = 1,2,\ldots$. Допустимые значения длин волн $\lambda_n = 2H/n$. Резонансные значения частот $\nu_n = nc/2H$. Звук, возбуждаемый генератором на частоте $\nu_1 = c/2H$, называется основным тоном. Длина волны основного тона $\lambda_1 = 2H$. Звуки, частот $\nu_n = n\nu_1$, соответствующие значениям $n = 2, 3,\ldots$, называются обертонами. В органной трубе возбуждается «светлый звук», поскольку в нем присутствуют все обертоны основного тона.

Музыкальные инструменты из труб изготовлялись еще в Древнем мире. В X в. органы, содержащие до 400 труб начинают использовать в христианских церквях. Современные органы имеют около 40 000 труб.

Набор открытых трубок можно использовать в качестве направленного микрофона. Длина трубки $H_i = c/2\nu_i$ определяется резонансной частотой звука. Основной диапазон разговора 300-3300 Гц перекрывается трубками длиной от 55 см до 5 см. С помощью такого микрофона можно прослушать разговор на расстоянии до 1 км в пределах прямой видимости.

5.6. Спектральный анализ звука

Давление звука в некоторой точке представляет собой функцию $p(t)$. Камертон создает давление в виде гармонической функции $p(t) = a\cos\omega t$. В случае музыкальных звуков давление $p(t)$ — периодическая (но не гармоническая) функция периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$. На рис. 5.6.1 *а*, *б* изображены графики давлений, создаваемых флейтой и кларнетом, звучащими на одной и той же частоте $\nu_0 = \omega_0/2\pi$. Очевидно эти кривые существенно отличаются.

В 1807 г. французский математик Ж. Фурье нашел метод анализа периодических функций. Он показал, что периодическую функцию $p(t)$ можно представить в виде суммы гармонических функций с частотами кратными основной частоте ω_0:

$$p(t) = a_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1) + a_2\cos(2\omega_0 t + \alpha_2) + ... \qquad (5.6.1)$$

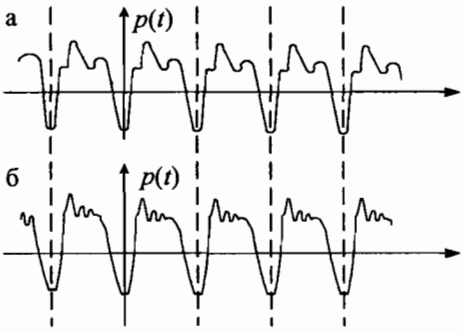


рис. 5.6.1

Здесь a_n, α_n (n = 1, 2, ...) — постоянные амплитуда и фаза. Первое слагаемое в (5.6.1) называется *основной гармоникой*, остальные — *высшими гармониками* или обертонами. Совокупность коэффициентов a_n называется *спектром функции* $p(t)$.

Чем больше функция $p(t)$ отличается от гармонической, тем богаче ее спектр, тем больше высших гармоник содержится в разложении (5.6.1). У кларнета, труба которого открыта на одном торце, особое звучание инструмента формируется только нечетными обертонами. Для достаточно гладких функций $a_n \to 0$ при возрастании номера n: основной вклад в спектр дает небольшое число гармоник. Периодическая функция образует дискретный спектр (от лат. *discrettus* — прерывистый): график зависимости a_n от n представляет собой ряд отрезков убывающей длины.

Если $p(t)$ — непериодическая функция, заданная на интервале $[t_2, t_1]$, то спектр — непрерывная функция частоты: $a = a(\Omega)$. Рассмотрим импульс $p(t)$ произвольной формы длительностью $\Delta t = \tau$. Анализ спектра показывает, что чем меньше интервал Δt, тем больше область частот $\Delta\Omega \approx 1/(2\pi\tau)$, в которой функция $a(\Omega)$ заметно отличается от нуля. Интервал $\Delta\Omega$, в котором сосредоточена основная часть энергии сигнала, можно рассматривать как меру ширины спектра импульса.

В настоящее время анализ Фурье используется практически во всех областях физики.

5.6.1. Инфразвук. Звук частотой ниже 16 Гц называется инфразвуком. В природе инфразвук возникает из-за вихревого движения воздуха в атмосфере или в результате медленных вибраций различных тел. Для инфразвука характерно слабое поглощение. Поэтому он распространяется на большие расстояния.

Организм человека болезненно реагирует на инфразвуковые колебания. В лабораторных условиях установлено, что среднее значение резонансной частоты для всего тела равно 6 Гц, для грудной клетки — 5–8 Гц, для головы — 20–30 Гц. При воздействии звуковой волны средней интенсивности 130 дБ на частотах 4–8 Гц человек ощущает перемещение внутренних органов, на частоте 12 Гц — приступ морской болезни и нарушение работы

сердца. При интенсивности 135 дБ на частоте альфа ритма 7 Гц умственная работа становится невозможной.

Известно, что в районе Бермудских островов расположена область одного из главных антициклонов (область повышенного давления) северного полушария. Можно предполагать, что интенсивность низкочастотных акустических волн, исходящих от зон активной конвекции, возрастает и оттого ухудшается самочувствие экипажей находящихся здесь судов.

5.6.2. Ультразвук. Звук частотой выше 20 000 Гц называется *ультразвуком*. Ультразвук широко применяется в науке и технике. При помощи ультразвука осуществляется неразрушающий контроль изделий из твердых материалов, звуковидение. Важную роль играет ультразвук в гидроакустике, поскольку звук является единственным видом волн, хорошо распространяющихся в морской воде.

5.7. Белы и децибелы

5.7.1. Интенсивность звука. Плотность потока энергии волны через произвольное сечение $z = z_0$ или мгновенная интенсивность волны равна

$$J = p_s v. \tag{5.7.1}$$

Размерность J — Вт/м^2. Подставляя (5.5.5) в (5.7.1), получим после усреднения по времени интенсивность бегущей монохроматической волны

$$\langle J \rangle = \frac{a^2}{2c\rho_0}. \tag{5.7.2}$$

5.7.2. Шкала интенсивности. Ухо человека — чрезвычайно совершенный прибор, способный регистрировать звуки, отношение интенсивностей которых 10^{12}. Однако чувствительность уха пропорциональна логарифму отношения интенсивности J к минимальному или пороговому значению интенсивности $J_0 = 10^{-12}$Вт/м^2. Логарифм отношения интенсивностей двух звуков равный единице получил название бел (Б) в честь изобретателя телефона американца А. Белла (1876 г.). Таким образом, ухо реагирует на звук в гигантском диапазоне, занимающем 12 бел. На практике используют величину в десять раз меньшую — децибел. Увеличение интенсивности в $10^{0,1} = 1{,}26$ раза означает увеличение громкости на 1дБ. Человек с нормальным слухом может обнаружить увеличение громкости, не менее 1 дБ. Порогу слышимости соответствует 0 дБ, обычному разговору — 50 дБ, болезненные ощущения возникают при громкости ~120 дБ. Уровень шума в жилом помещении не должен превышать 40 дБ. Длительное воздействие шума интенсивностью свыше 55 дБ — большая угроза для здоровья.

5.8. Слышимый звук

Ухо человека представляет собой ушной канал, в конце которого находится барабанная перепонка, закрывающая среднее ухо. Звуковая волна

создает разность давлений в канале и среднем ухе. Первичная информация, связанная с деформацией перепонки, преобразуется в электрические сигналы, анализируемые определенным участком головного мозга.

Восприимчивость человека к звуку зависит от частоты и интенсивности волны. Ухо способно воспринимать звук в интервале частот от 16 Гц до 20 000 Гц. Порог слышимости, т. е. наименее заметная интенсивность, зависит от частоты. При частоте 440 Гц порог слышимости близок к $J_{ср} = 10^{-12}$ Вт/м^2. Среднее значение интенсивности $J_{ср} = a^2/(2c\rho_0)$. При нормальных условиях $\rho_0 = 1{,}29$ кг/м^3, $c = 332$ м/с, $c\rho_0 = 428{,}3$ кг/(м^{2}с) — величина, называемая *акустическим сопротивлением* среды, амплитуда давления $a = (2c\rho_0 J_{ср})^{1/2} \approx 2{,}92\cdot10^{-5}$ Па, амплитуда скорости $v_0 = a/c\rho_0 = (2J_{ср}/c\rho_0)^{1/2}$, $v_0 = 6{,}83\cdot10^{-8}$ м/с. Звуковое давление создают частицы воздуха, смещающиеся на ничтожную величину $v_0/\omega = 0{,}17$ нм, порядка размеров атома! При обычном разговоре интенсивность звука порядка 10^{-2} Вт/м^2. Интенсивность звуков, вызывающих болезненное ощущение, лежит выше 1 Вт/м^2. При значении $J_{ср} = 10$ Вт/м^2 амплитуда давления $a = 92{,}5$ Па, амплитуда скорости $v_0 = 0{,}216$ м/с. Звуковое давление порядка 60 Па создает шум двигателя реактивного самолета на расстоянии 50 м. Отметим, что ухо болезненно воспринимает именно волну деформации. Увеличение атмосферного давления на постоянную величину 60 Па остается незаметным.

5.9. Музыкальные звуки

В отличие от объективных параметров, регистрируемых приборами, слушатель оценивает звук на основе субъективного восприятия звука аппаратом уха. В музыкальной акустике интенсивности, частоте и спектру звука соответствуют громкость, высота и тембр.

Громкость — параметр звука, характеризующий субъективное восприятие интенсивности. Звуки в области частот 1 кГц — 5 кГц кажутся более громкими, чем звуки той же интенсивности в других областях частот. По мере повышения интенсивности различие в громкости звуков различных частот уменьшается. В музыкальной практике различают восемь ступеней громкости от пианиссимо (*pp* — очень тихо) и пиано (*p*) до форте (*f*) и фортиссимо (*ff* — очень сильно).

Высота — субъективная характеристика звука, зависящая, в основном, от частоты звука. Гармоническое колебание называют *тоном*. Повышение тона на одну *октаву* — означает увеличение частоты в два раза.

Диапазон музыкальных инструментов принято различать по числу октав фортепиано — семь с четвертью, арфа — шесть с четвертью. Диапазон голоса человека — две с половиной октавы. Ухо может воспринимать почти десять с половиной октав.

Тембр — субъективная характеристика качества звука, зависящая, в основном, от спектрального состава. Наличие обертонов и создает «окраску» звука. Высокие обертоны придают звуку резкость. Сурдина, надеваемая на трубу,

приглушает высокие гармоники и смягчает тембр. Округлая форма графика звукового давления флейты на рис. 5.6.1 *а* говорит о ее изысканном плавном звучании. Наоборот, «веселинки» на графике рис. 5.6.1 *б* звукового давления кларнета отражают пронзительный характер звучания богатого обертонами. Современные электромузыкальные инструменты позволяют формировать совершенно новые звуковые структуры и новые тембры в результате компьютерного синтеза спектра звуков, возбуждаемых радиотехническими устройствами.

В музыке используется до 80—100 звуков. На клавиатуре фортепиано мы увидим 90 белых и черных клавиш. Упорядоченное расположение звуков называют звукорядом, а каждый отдельный звук — ступенью. Каждая мелодия характеризуется последовательностью интервалов между ступенями и отношением частот звуков, образующих интервал. Чаще всего используются благозвучные интервалы с отношением частот равным 2 (октава), 3/2 (квинта), 5/4 (терция), 4/3 (кварта), 5/3 (секста), 9/8 (секунда), 15/8 (септима). Используя интервал квинты, можно перейти к интервалам кварта (квинта вниз от октавы), септима (квинта вверх от терции), секунда (двойная квинта вверх от октавы) и т. д.

Задание фиксированных соотношений между частотами ступеней определяет строй музыкального инструмента или музыкальную шкалу. В современной музыке наибольшее распространение получил так называемый *равномерно-темперированный строй* (от лат. *temperatio* — надлежащее образование). Он был введен в 1700 г. немецким ученым и музыкантом А. Веркмейстером. В его основе — равномерное деление частот звуков в пределах одной октавы на 12 частот с постоянным отношением равным $(2)^{1/12} = 1{,}059$. Логарифмы частот делят единичный отрезок на 12 равных частей. Создание логарифмически равномерной шкалы явилось итогом длительного развития музыки и математики.

Эта шкала допускает *транспонирование* мелодии, т. е. мелодию можно воспроизвести, начиная играть с любой ступени: отношение частот звуковых интервалов не изменится. Наименьший интервал называют *полутоном*; интервал из двух полутонов называют тоном. Однако чистые квинты неосуществимы. Например, частота звука *ля* первой октавы фортепиано принята равной $\nu_9 = 440$ Гц, звук *до* имеет частоту $\nu_0 = 261{,}62$ Гц. Сделаем от тона *до* ход на квинту вверх. Мы должны получить звук частотой $\nu_к = 3\nu_0/2 = 392{,}43$ Гц. Смещаясь на семь полутонов, получим звук *соль* частотой $\nu_7 = \nu_0(2)^{7/12} = 391{,}99$ Гц. Разность частот 0,44 Гц на слух не заметна.

«Мелодия» из основных звуков до – (тон) – ре – (тон) – ми – (полутон) – фа – (тон) – соль – (тон) – ля –(тон) – си – (полутон) – до, образует натуральную гамму *до мажор*. Перенося ее вверх в пределах октавы с сохранением интервалов, получим еще 11 гамм. Например, при переносе гаммы на тон вверх получим *гамму ре мажор*. В основе двенадцати гамм минорной тональности – *гамма до минор*: до – (тон) – ре – (полутон) – ми бемоль – (тон) – фа – (тон) – соль – (полутон)– ля бемоль –(тон) – си бемоль – (тон) – до. Остаются загадкой различия субъективного восприятия музыкальных произведений, написанных в мажорной и минорной тональностях.

5.10. Волны на воде

С давних пор в качестве примера волнового движения приводились волны на воде, несмотря на то, что они представляют собой явление более сложное, чем звуковые волны.

Рассмотрим волны малой амплитуды $a \ll \lambda$ в водоеме глубиной h с плоским дном, пренебрегая вязкостью, сжимаемостью и поверхностным натяжением воды. Волны на «глубокой воде» ($h \gg \lambda$) реализуются частицами, движущимися по фиксированным окружностям радиусом a с частотой ω. Радиус окружности уменьшается с увеличением глубины. Видимый профиль волны представляет собой кривую с широкими, плоскими углублениями и высокими, узкими гребнями называемую укороченной циклоидой.

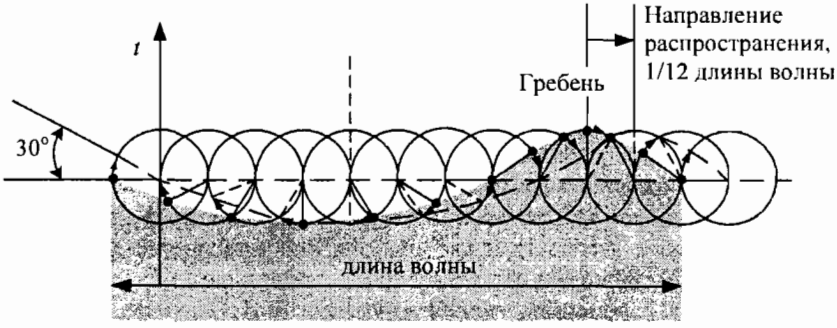


рис. 5.10.1

На рис.5.10.1 изображены два положения профиля волны — это кривые, проходящие через 12 частиц в моменты времени t и $t + T/12$. За период $T = 2\pi/\omega$ профиль смещается на длину волны $\lambda = cT$, где $c = (g\lambda/2\pi)^{1/2}$ — скорость волны. Высота волны равна диаметру круговой орбиты 2a. В случае $h \sim \lambda$ частицы воды движутся по эллипсам. В «мелкой воде» ($h \ll \lambda$) эллипсы вырождаются в отрезки горизонтальных прямых. Скорость волны $c = (gh)^{1/2}$. Если глубина убывает по направлению к берегу, то скорость гребня больше скорости впадины. Это весьма нестрогое заключение позволяет понять причину образования прибоя.

Цунами. Иногда громадная волна внезапно затопляет прибрежные районы. Эта волна вызывается прибрежным вулканическим извержением или землетрясением. Цунами — весьма частое явление в Тихом океане. В области источника возмущения высота волны ~0,1—3 м. Волна становится заметной у побережья, где высота волны достигает 50 м и более. Причина в том, что скорость волны при приближении к берегу уменьшается. Замедление переднего края вызывает подъем воды и увеличение высоты волны. В открытом океане волна цунами длиной $\lambda = 25$ км представляет собой волну в «мелкой воде». В океане глубиной $h = 4$ км скорость волны $c = \sqrt{9{,}8 \cdot 4 \cdot 10^3} = 198$ м/с. Расстояние 3000 км волна проходит четыре часа.

Открытие солитона. В 1834 г. шотландский ученый Скотт Рассел обнаружил волну необычного типа. Во время верховой прогулки вдоль канала он заметил, что при внезапной остановке баржи, вода собралась у носа, затем оторвалась и в виде уединенного возвышения побежала по каналу. Водяной холм сохранял первоначальную форму и скорость на протяжении километра, образуя бегущую локализованную волну — *солитон* (от лат. *solus* — один).

Структуры в форме солитонов обнаружены во многих динамических системах — в плазме, радиосхемах, лазерах, нервных волокнах.

5.11. Пульсовая волна

Аорта — самая крупная артерия (от гр. *arteria* — воздушный тракт) у человека выходит в виде широкой трубки из левого желудочка сердца. Мышца сердца периодически с частотой около 1 Гц в течение каждого импульса длительностью ≈0,25 с выталкивает из аорты 0,1 л крови. Обратному току крови препятствуют три клапана. Кровь из аорты по системе артерий попадает в более узкие сосуды — капилляры. Давление при выталкивании крови повышается: сначала растягивается участок стенки артерии, прилегающий к аорте и возникает волна деформации стенок артерии, называемая *пульсовой* волной. Силы упругости последовательно выжимают кровь в более удаленные участки артерии. Скорость волны $v \sim (E/\rho_к)^{1/2}$ была вычислена в 1809 г. Т. Юнгом ($E \sim 10^6$ Па — модуль Юнга ткани сосуда, $\rho_к$ — плотность крови). Значение скорости 5—10 м/с.

Как же измерить один из главных показателей работы сердца — давление крови ? В 1905 г. русский врач Н.С. Коротков предложил метод измерения *систолического* (от. гр. *systole* — сокращение) и *диастолического* (от гр. *diastole* — растягивание) давлений, основанный на анализе прослушивания пульсовой волны. Обычно для измерения используют плечевую артерию. Предплечье обматывают манжетой, соединенной с манометром, и накачивают воздух до давления, достаточного для остановки потока крови в артерии. Если давление воздуха в манжете поднять выше систолического, а потом медленно снижать, то давление при появлении первого звука записывается как систолическое. Когда давление в манжете становится меньше диастолического, то звук исчезает. Поэтому в этот момент давление в манжете фиксируют как диастолическое. У здорового взрослого человека эти величины, соответствующие «верхнему» и «нижнему» давлениям, равны 120 мм рт. ст и 80 мм рт. ст.

Часть IV. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 1. Электростатика

1.1. Закон Кулона

1.1.1. Электрический заряд. Существует множество явлений, изучение которых привело к необходимости введения новой характеристики частиц, получившей название *электрический заряд*. Сейчас известны два вида электрического заряда — отрицательный и положительный. Материальным носителем наименьшего отрицательного заряда является *электрон*, открытый в 1897 г. английским физиком Дж. Дж. Томсоном. Этот заряд имеет специальное название — элементарный заряд и обозначение e. Носитель элементарного положительного заряда — *протон* (от греч. *protos* — первый) — был открыт позднее в 1919 г. английским физиком Э. Резерфордом.

Согласно современным представлениям химические вещества состоят из атомов, каждый атом — из ядра радиусом $\approx 5 \cdot 10^{-13}$ см и движущихся вокруг него электронов, в области пространства, ограниченного «сферой» радиусом $\approx 10^{-8}$ см (0,1 нм). Ядро состоит из протонов и нейтронов. Атомный номер элемента Z в таблице Менделеева равен числу протонов. Общее число Z протонов и N нейтронов в ядре называется *массовым числом*: $A = Z + N$. В нормальном состоянии атом имеет Z электронов, т. е. атом электрически нейтрален. Таким образом, электрический заряд дискретен (от лат. *discretus* — прерывистость): заряд любого тела составляет целое кратное элементарного электрического заряда.

Задача 1.1.1. Атом — основной строительный материал вещества — представляет собой «атом пустоты»: отношение объема, занимаемого ядром к объему атома $\approx 10^{-15}$. Представьте, что атом занимает область пространства равную объему Земли. Оцените радиус ядра такого атома.

1.1.2. Электризация трением. Электрические заряды, возникающие при трении, называют *трибоэлектричеством* (от греч. *tribo* — растираю). Вещества можно расположить в трибоэлектрический ряд, в котором предыдущее тело заряжается положительно, а последующее отрицательно: мех, фланель, стекло, шерсть, шелк, янтарь, каучук. Наиболее заметна электризация при трении веществ, далеко отстоящих друг от друга в этом списке.

Явление электризации трением широко распространено в природе и технике. Разноименные заряды возникают на краях трещин в горных породах накануне землетрясения. Пыль, скользящая по поверхности тела, из которо-

го она образовалась (мрамор, стекло, снежная пыль) приобретает отрицательный заряд. Во время метели проволочная изгородь может накопить заряд такой величины, что при приближении к ней проскакивают искры. Трибоэлектричество возникает и в процессах течения или разбрызгивания жидкостей. В пересыщенном паре, проходящем под давлением через извилистый канал, образуются положительно заряженные капельки воды.

1.1.3. Начало электростатики. Еще в Древнем мире была известна способность куска янтаря, натертого мехом, притягивать пылинки и ворсинки. Однако только в 1600 г. благодаря английскому физику У. Гильберту, появилось учение об электричестве. С помощью простейшего электроскопа (от греч. *skopeo* — смотрю) — прибора для обнаружения электрического заряда — он выяснил, что подобным свойством обладают и другие вещества. Именно Гильберт ввел термин электричество (от греч. *electron* — янтарь), а электризацией назвал процесс приобретения телом электрических свойств.

Новые сведения об электричестве появились более чем через 100 лет, несмотря на создание О. Герике в 1660 г. электрической машины для получения зарядов при трении и наблюдения искр в опытах с наэлектризованными телами. Электрические опыты стали более доступны благодаря употреблению стеклянной палочки, электризуемой при натирании шелком или другой тканью. В 1729 г. англичанин С. Грей обнаружил, что электричество может перемещаться по нити и другим телам, и ввел понятия проводник и изолятор. Он же открыл явление электростатической индукции. В 1733 г. французский ученый Ш. Дюфе сделал фундаментальное открытие, установив существование двух различных родов электричества — «смоляного» и «стеклянного». Каждое из них отталкивает электричество своего вида и притягивает противоположное.

Несколько позже появились усовершенствованные электрические машины. Они давали сильные искры, способные воспламенить эфир. Опыты с электричеством стали необычайно популярными, привлекая интерес не только широкой публики, но и ученых.

Научной сенсацией стало изобретение в 1745 г. первого конденсатора — лейденской банки — голландским ученым П. Мюссенбруком. Весть о способности банки с водой накапливать большой заряд и производить при разряде сильное «электрическое потрясение» быстро распространилась по Западной Европе и добралась до Америки. Уже в следующем году банку усовершенствовали, заменив воду фольгой; был создан плоский конденсатор и батареи конденсаторов. Наука об электричестве стремительно развивалась.

Первая последовательная теория электрических явлений была создана американским ученым Б. Франклином. В 1749 г. он высказал гипотезу, что оба рода электричества представляют собой избыток или недостаток «электрической жидкости». При натирании янтарной палочки мехом часть электрической жидкости переходит к меху, порождая недостаток электричества на палочке. В его теории недостаток электрической жидкости определялся как отрицательное

электричество, а избыток — как положительное. Величину избытка или недостатка электричества он назвал зарядом тела. Поэтому на янтаре возникает отрицательный заряд. Когда мы натираем стеклянную палочку, часть электричества переходит от шелка к стеклу, которое приобретает положительный заряд. После открытия электрона, стало ясно, что именно электроны переходят от стеклянной палочки на шелк. Однако к этому времени представления, введенные Франклином, прочно утвердились в электротехнике. Для того чтобы не менять установившуюся терминологию и маркировку генераторов и моторов, пришлось приписать электронам отрицательный заряд. Мы по-прежнему говорим, что ток течет от шелка к стеклянной палочке.

В 1752 г. Франклин поставил свой знаменитый чрезвычайно опасный опыт по «извлечению искр» из облаков. Запустив воздушного змея в грозовую тучу, он наблюдал электрический разряд — искру — при приближении пальца к мокрому концу веревки. Во время аналогичного опыта погиб в 1753 г. российский физик Г. Рихман. Установив электрическую природу молнии, Франклин смог осуществить свое главное изобретение — молниеотвод или громоотвод. Введение громоотвода в практику сопровождалось длительной борьбой с воззрениями суеверно-религиозного, научного и политического характера. Впервые в истории научное открытие вызвало столь широкий общественный интерес.

1.1.4. Закон сохранения электрического заряда. Б. Франклин ввел фундаментальную гипотезу: при натирании стеклянной палочки шелком величина положительного заряда палочки в точности равна величине отрицательного заряда, переданного шелку. Полный заряд изолированной системы палочка — шелковая ткань остается равным нулю. (Изолированной называют систему, которая не обменивается заряженными частицами с другими системами.) Таким образом, при электризации сумма зарядов двух тел не меняется, — электроны переходят от одного тела к другому.

На основе большого числа экспериментов, проводившихся до настоящего времени, был установлен *закон сохранения электрического заряда*: в замкнутой системе алгебраическая сумма зарядов взаимодействующих частиц остается постоянной величиной. Впервые закон сохранения заряда был сформулирован и экспериментально подтвержден М. Фарадеем в 1843 г.

Закон сохранения заряда относится к наиболее фундаментальным законам природы, таким как законы сохранения энергии, импульса и момента импульса системы.

1.1.5. Закон Кулона. Обычно частицу, обладающую электрическим зарядом, называют просто зарядом. Объектом изучения электростатики являются системы неподвижных зарядов. Простейшая система состоит из двух точечных зарядов.

Взаимодействие двух точечных неподвижных зарядов описывается законом, открытым в 1885 г. французским ученым Ш. Кулоном: *на каждый из двух точечных зарядов, находящихся в вакууме, действует сила, величи-*

на которой пропорциональная произведению зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. В векторной форме закон Кулона имеет вид:

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_{12}. \qquad (1.1.1)$$

Здесь r — расстояние между частицами, $\vec{e}_{12}$ — единичный вектор, направленный от первой частицы ко второй. Коэффициент в (1.1.1) $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл². На частицу с зарядом q_1 действует сила $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. На рис. 1.1.1 изображены два заряда, для которых $q_1 q_2 > 0$ — заряды отталкиваются. Если $q_1 q_2 < 0$, то заряды притягиваются.

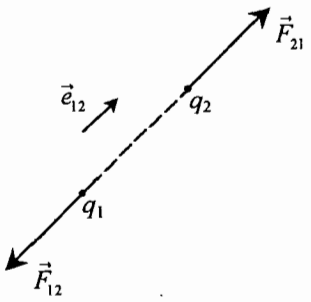


рис. 1.1.1

В международной системе единиц (СИ) основные единицы — килограмм (кг), метр (м), секунда (с) и ампер (А). Единица заряда — кулон (Кл) — не является независимой. 1 Кл определяется как заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение тонкого проводника при силе постоянного тока 1 А. Поэтому коэффициент k в (1.1.1) становится размерным: $k = 9 \cdot 10^9$ H·м²/Кл².

В СИ используют рационализированную форму записи k, полагая $k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}$. Величину $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл²/(Н·м²) называют *электрической постоянной.* Выделение коэффициента $(4\pi)^{-1}$ предпринято для исключения иррационального множителя 4π в наиболее часто встречающихся в практике формулах.

Отметим, что закон Кулона описывает и взаимодействие зарядов, движущихся со скоростями значительно меньшими скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, в частности, взаимодействие протона и электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $v \approx c/137$.

Напомним, что вектор $\vec{F}$ в трехмерном пространстве задается упорядоченной тройкой чисел $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, называемых проекциями вектора на оси x, y, z прямоугольной системы координат. В векторном анализе абсолютную величину (длину или модуль) вектора $\vec{F}$ обозначают той же буквой $F \equiv |\vec{F}|$ и называю просто величиной вектора. Величина вектора (1.1.1)

$$F_{21} = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2}.$$

Задача 1.1.2. Величина элементарного заряда $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Найдите число элементарных зарядов, содержащихся в заряде величиной $Q = 1$ Кл.

Задача 1.1.3. Два одинаковых свинцовых шарика массами $m = 10$ г расположены на расстоянии $r = 10$ м. Предположим, что у каждого атома одного шарика отняли по одному электрону и перенесли на другой шарик. Какой

величины достигнет сила притяжения, действующая на каждый шарик? Атомная масса свинца $M = 0{,}207$ кг/моль.

Решение. Шарики получат противоположные по знаку заряды величиной $q = Ne$, где $N = mNA / M$ — число атомов свинца в шарике, e — величина заряда электрона. Величина силы притяжения, действующей на один из шариков

$$F = k\left(\frac{mN_A e}{Mr}\right)^2.$$

Подставляя числовые значения, получим $F = 2 \cdot 10^{15}$ Н. Это — очень большое число; столько весит заполненный водой куб с длиной ребра

$$L = \left(\frac{F}{\rho g}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5{,}9 \text{ км}.$$

Этот пример весьма поучителен. В каждом предмете нашего мира число положительных зарядов почти точно равно числу отрицательных зарядов. Все электрические явления, изучаемые в обычных условиях, обусловлены ничтожным нарушением баланса положительных и отрицательных зарядов.

1.1.6. Свойство суперпозиции. Рассмотрим систему, содержащую N частиц. Из опыта следует, что силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$, действующие на заряды q_1 и q_2, не зависят от присутствия других зарядов. Отсюда можно заключить, что сила, действующая на выделенный заряд со стороны остальных зарядов, представляет собой сумму сил, создаваемых каждым из $N - 1$ зарядов системы. Это утверждение называют свойством суперпозиции (от лат. *super* — сверху, над).

Задача 1.1.4. Рассмотрим два заряда $q_1 = -q$ и $q_2 = q$, $(q > 0)$, закрепленных на концах непроводящего стержня AB длиной a. Такой объект называют *диполем* и характеризуют дипольным моментом $\vec{p}$ — вектором величиной $p = qa$, направленным от заряда $-q$ к заряду q. Рассмотрим систему, состоящую из диполя и точечного заряда Q.

А. Заряд Q находится в точке M на прямой перпендикулярной стержню и проходящей через его середину C, $MC = r$. Найдите силу, действующую на заряд Q.

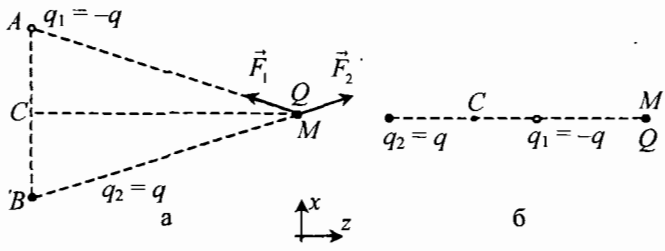


рис. 1.1.2

Решение. На заряд Q со стороны зарядов q_1 и q_2 действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ одинаковой величины $\frac{kqQ}{s^2}$, $s^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}$ (рис. 1.1.2. *а*). Для вычисления вектора $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ необходимо ввести систему координат. Проекции вектора $\vec{F}$ на оси координат

$$F_x = \frac{2kqQ}{s^2}\sin\alpha/2,\ F_y = 0,\ F_z = 0,$$

где α — угол AMB. Из треугольника AMC находим $\sin\alpha/2 = a/2s$. Следовательно,

$$F_x = \frac{kqQa}{(r^2 + a^2/4)^{3/2}}.$$

Пусть $q = 10^{-10}$ Кл, $a = 5{,}6$ см, $Q = 10^{-8}$ Кл, $r = 9{,}6$ см. Тогда $F_x = 5{,}14 \cdot 10^{-7}$ *Н*. Если заряд Q находится на расстоянии $r >> a$, то $F_x \approx kQp/r^3$, $p = qa$.

Б. Найдите силу, действующую на диполь.

В. Повернем теперь диполь на 90° в плоскости рисунка вокруг оси проходящей через точку C (рис. 1.1.2, *б*). Найдем силу, действующую на диполь со стороны заряда Q:

$$F = (0, 0, F_z),$$

$$F_z = \frac{kqQ}{(r - a/2)^2} - \frac{kqQ}{(r + a/2)^2} = \frac{2kqQar}{(r^2 - a^2/4)^2}.$$

Если $r >> a$ то $F_z = 2kQp/r^3$. Диполь притягивается к заряду.

1.2. Электростатическое поле. Напряженность и потенциал поля

1.2.1. Напряженность электрического поля. Из (1.1.1) следует, что при смещении заряда q_2 сила $\vec{F}_{21}$ определяется расстоянием между зарядами в один и тот же момент времени, т. е. взаимодействие заряженных частиц происходит мгновенно, непосредственно через пустое пространство. В этом состоит, так называемый, принцип дальнодействия.

Гениальный английский физик М. Фарадей первым выступил против общепризнанной точки зрения. Он искал причину и реального переносчика взаимодействия зарядов. Фарадей был глубоко убежден в том, что «материя не может действовать там, где ее нет» (Дж.Дж. Томсон). Он исходил из концепции близкодействия, предполагая, что взаимодействие зарядов осуществляется через создаваемые ими в пространстве электрическое и магнитное поля. Эти идеи о реальности поля получили развитие в трудах Д.К. Максвелла.

Невозможно перечислить выдающиеся открытия Фарадея в области химии, электрохимии, магнитооптики, магнетизма и электричества. Навсегда вошли в физику введенные им новые понятия: катод, анод, ионы, электро-

лиз, диа — и парамагнетизм, диэлектрическая проницаемость, силовые линии. По мнению А. Эйнштейна, самой важной идеей со времен Ньютона было предположение о существовании электромагнитного поля. Пожалуй, лучше всех сказал о нем русский ученый А.Г. Столетов: «Никогда со времен Галилея свет не видел столько поразительных и разносторонних открытий, вышедших из одной головы, и едва ли скоро увидит другого Фарадея».

Закрепим заряд Q в начале O координат и проведем опыт, измеряя силы, действующие на заряды q_1, q_2, ... , которые будем помещать по очереди в некоторую точку A. В результате получим серию векторов $\vec{F}_{a1}$, $\vec{F}_{a2}$, ... , лежащих на прямой OA. При обработке экспериментальных данных оказывается, что векторы $\vec{F}_{a1}/q_1$, $\vec{F}_{a2}/q_2$, ... равны друг другу:

$$\frac{\vec{F}_{a1}}{q_1} = \frac{\vec{F}_{a2}}{q_2} = \ldots = \vec{E}_a .$$

Теперь поставим новый опыт, помещая заряды в точку B. Новые векторы $\vec{F}_{b1}/q_1$, $\vec{F}_{b2}/q_2$, ... лежат на прямой OB, отношения

$$\frac{\vec{F}_{b1}}{q_1} = \frac{\vec{F}_{b2}}{q_2} = \ldots = \vec{E}_b .$$

Обобщая эти результаты, запишем отношение силы $\vec{F}(x, y, z)$, действующей на заряд q в точке $P(x, y, z)$ к заряду q в виде

$$\frac{\vec{F}(x, y, z)}{q} = \vec{E}(x, y, z).$$

Поскольку правая часть не зависит от заряда q, то мы приходим к выводу, что отношение $\vec{F}/q$ определяет в точке P вектор $\vec{E}(x, y, z)$ безотносительно к заряду q. Мы говорим, что заряд Q создает электрическое поле, а вектор $\vec{E}(x, y, z)$, является количественной характеристикой поля, называемой *напряженностью электрического поля* в точке P с координатами x, y, z.

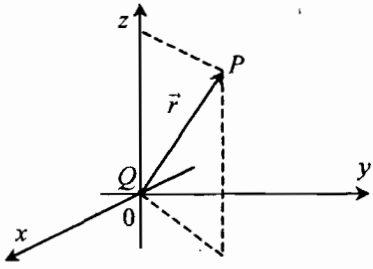


рис. 1.2.1

Электрическое поле представляет собой одну из форм материи. Далее мы увидим, что электрическое поле, как и частицы, обладает энергией. Введение поля как физической реальности оказалось весьма плодотворным для развития физики.

Задача 1.2.1. Поле точечного заряда. На рис. 1.2.1 изображен заряд Q, расположенный в начале координат, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки P. На заряд q в точке P

действует сила $\vec{F} = kqQ\vec{e}/r^2$, где $\vec{e} = \vec{r}/r$ — единичный вектор. Найдите вектор напряженности электрического поля в точке P.

Электрическое поле, создаваемое системой неподвижных зарядов называется *электростатическим* полем. Используя свойство суперпозиции заключаем, что напряженность электрического поля в точке P (x, y, z), созданного системой N зарядов, равна сумме напряженностей $\vec{E}_a(x, y, z)$, (a = 1, 2, … , N) полей, созданных каждым зарядом системы в точке P :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_N .$$

Таким образом, поле системы зарядов задается тремя функциями E_x, E_y, E_z, зависящими от координат x, y, z.

Для более наглядного графического изображения поля Фарадей ввел понятие силовой линии. *Силовая линия* представляет собой кривую, касательная к которой в любой точке совпадают с направлением вектора $\vec{E}$ в этой точке. Силовые линии электростатического поля «выходят» из точечного положительного заряда и «входят» в отрицательный заряд. Обычно при графическом изображении поля, по густоте силовых линий можно определить величину вектора напряженности.

Сила, с которой действует на заряд q в точке P (x, y, z) электрическое поле напряженностью $\vec{E}$ (x, y, z) равна

$$\vec{F}(x, y, z) = q\,\vec{E}(x, y, z). \qquad (1.2.1)$$

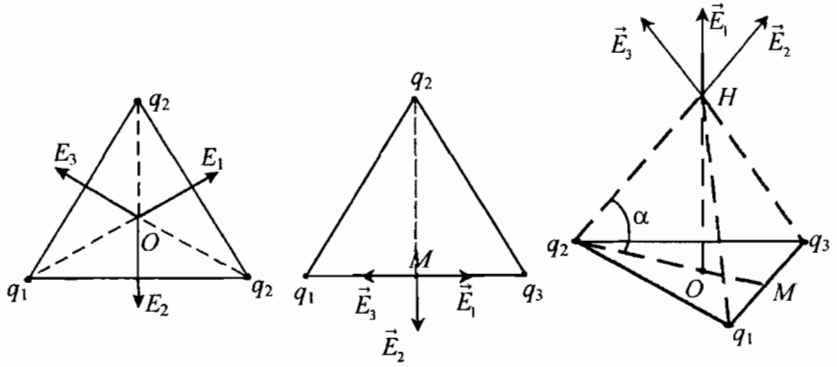


рис. 1.2.2

Задача 1.2.2. Три одинаковых положительных заряда величиной q расположены в вершинах правильного треугольника. Длина стороны треугольника равна a(q = 1 нКл, a = 0,1 м).

А. Найдите напряженность поля в точке O, являющейся центром вписанной окружности (рис. 1.2.2 *а*).

Б. Найдите величину вектора напряженности поля в точке M, лежащей в середине одной из сторон (рис. 1.2.2 *б*).

В. Найдите напряженность поля в точке H, находящейся на расстоянии a от каждой из вершин треугольника (рис. 1.2.2 *в*).

Решение А. Каждый заряд создает в точке O на рис. 1.2.2 *а* напряженности полей $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ одинаковой величины. Напряженность поля в точке O равна сумме трех векторов $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$. Нетрудно проверить, что сумма «горизонтальных» и «вертикальных» компонент обращается в нуль. Итак, $\vec{E} = 0$.

Решение Б. Сумма векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$ в точке М на рис. 1.2.2 б равна нулю. Поэтому в точке M напряженность поля $\vec{E} = \vec{E}_2$. Величина $E_2 = kq/(a\sin\pi/3)^2$, $E_2 = 1200$ В/м.

Решение В. Каждый заряд создает в точке Н на рис. 1.2.2 в напряженность поля величиной kq/a^2. Векторы напряженности образуют с вертикалью угол $\pi/2 - \alpha$. Сумма «горизонтальных» компонент векторов $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ равна нулю, а сумма «вертикальных» компонент $E = 3kq\sin\alpha/a^2$. Из треугольника q_2ОН находим $\sin\alpha = \sqrt{2/3}$. Следовательно, $E = kq\sqrt{6}/a^2$, $E = 2205$ В/м.

Задача 1.2.3. По окружности радиуса R, расположенной в плоскости xy, равномерно распределен заряд Q (рис. 1.2.3). Центр окружности находится в начале координат. Найдите напряженность поля в точке $P(0, 0, z)$, лежащей на оси z, проходящей через центр окружности O и максимальное значение напряженности.

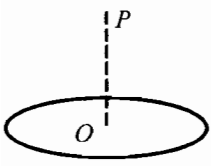


рис. 1.2.3

1.2.2. Потенциал электростатического поля. При перемещении тела в поле тяготения Земли по произвольной кривой работа силы тяжести зависит только от начального и конечного положений тела. Благодаря этому свойству силы тяжести можно ввести понятие потенциальной энергии взаимодействия тела с Землей — скалярную характеристику поля тяготения. Электростатическое поле в любой точке P тоже можно характеризовать скалярной функцией — потенциалом в точке P.

Рассмотрим систему неподвижных зарядов, создающих электростатическое поле напряженностью $\vec{E}(x, y, z)$. Для того чтобы ввести потенциал поля, вычислим работу A_{ab}, совершаемую силой $\vec{F} = q\vec{E}$ при перемещении заряда q по произвольной кривой, соединяющей точки a и b. Разобьем кривую на N малых дуг длиной Δs каждая, начало и конец дуги соединим вектором $\Delta\vec{r}_n = \vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$, $\vec{r}_1 = \vec{r}_a$, $\vec{r}_{N+1} = \vec{r}_b$. В пределах $\Delta\vec{r}_n$ вектор $\vec{E}(x_n, y_n, z_n) = \vec{E}_n$ можно считать постоянным. Тогда элементарную работу δA_n силы $\vec{F}_n = q\vec{E}_n$ на перемещении $\Delta\vec{r}_n$ можно записать в виде скалярного произведения $\delta A_n = q\vec{E}_n\Delta\vec{r}_n$. Суммируя элементарные работы на всех бесконечно малых участках можно получить работу A_{ab}. В случае эле-

ктростатического поля работа A_{ab} не зависит от формы кривой, соединяющей точки a и b. Поэтому отношение A_{ab}/q может быть представлено в виде разности значений одной и той же функции в точках $\vec{r}_a$ и $\vec{r}_b$ — или приращения функции $\varphi(\vec{r})$, взятого по определению с отрицательным знаком:

$$\frac{A_{ab}}{q} = \varphi(\vec{r}_a) - \varphi(\vec{r}_b) \qquad (1.2.2)$$

Функция $\varphi(\vec{r})$ называется *потенциалом* электростатического поля в точке с радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$. А теперь вспомните, что аналогичным соотношением $A_{ab} = W(\vec{r}_a) - W(\vec{r}_b)$, была введена функция $W(r)$, называемая потенциальной энергией частицы. Сопоставляя эти соотношения получим выражение для потенциальной энергии заряда в электростатическом поле

$$W(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r}) \qquad (1.2.3)$$

В СИ единица потенциала — Вольт: 1 В = 1 Дж/Кл, единица напряженности — В/м.

Обычно в качестве единицы энергии заряженных частиц используют внесистемную единицу — электрон-вольт (эВ) — произведение eV, где е — величина элементарного заряда, $V = 1$ В: 1 эВ = 1,6 10^{-19} Дж, 1 Дж = 6,24 10^{18} эВ.

Возможно, многие решат, что рекордная энергия 1 ТэВ = 10^{12} эВ (приставка тера — от греч. *teras* — чудовище), приобретаемая протоном на синхрофазотроне «Теватрон» Фермиевской национальной ускорительной лаборатории в Батавии (США), невообразимо большая величина. Нетрудно, однако, вычислить, что такой энергией обладает букашка массой $m = 0{,}32$ г, ползущая со скоростью $v = 3{,}3$ см/с. Этот пример показывает, как важно представлять масштабы физических величин при анализе различных явлений.

1.2.3. Напряженность и потенциал электростатического поля. Если нам известен потенциал в каждой точке, т.е. функция $\varphi = \varphi(\vec{r})$, то мы всегда можем найти напряженность поля $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$.

Из (1.2.2) следует, что при бесконечно малом перемещении $\Delta\vec{r}$ элементарная работа

$$\delta A = -q\Delta\varphi, \qquad \Delta\varphi = \varphi(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}).$$

С другой стороны $\delta A = q\vec{E}\,\Delta\vec{r}$. Следовательно,

$$\vec{E}\Delta\vec{r} = -\Delta\varphi. \qquad (1.2.4)$$

Полагая $\Delta\vec{r} = (\Delta x, 0, 0)$, получим

$$E_x = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi}, \; \Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z).$$

Чем меньше величина Δx, тем точнее значение компоненты напряженности поля E_x в точке $\vec{r} = (x, y, z)$. Аналогичным путем найдем E_y, E_z.

1.2.4. Потенциал однородного поля. Если в каждой точке пространства напряженность поля представляет собой постоянный вектор $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0$, то электрическое поле называют *однородным полем*. Силовые линии однородного поля — прямые линии одинаковой густоты.

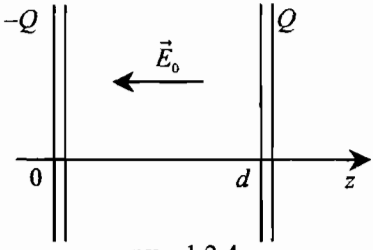


рис. 1.2.4

Согласно определению, напряженность однородного поля должна быть постоянна в любой точке пространства. Очевидно, невозможно создать такое поле. Однако можно получить поле, близкое к однородному в ограниченной области пространства. С этой целью расположим две одинаковые металлические пластины площадью S параллельно друг другу на расстоянии d (рис. 1.2.4). На правой пластине равномерно распределен заряд Q, а на левой распределен заряд $-Q$. Если $d << \sqrt{S}$, то на некотором расстоянии от краев получим почти однородное поле напряженностью $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0$. Наша пара пластин представляет собой систему проводников, называемую конденсатором.

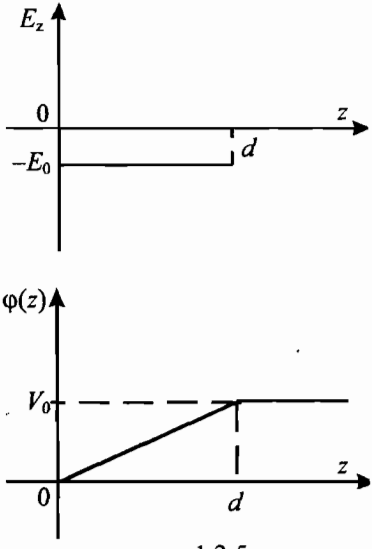


рис. 1.2.5

Выберем систему координат с началом в центре левой пластины, ось z направим перпендикулярно пластинам от левой пластины к правой. Поскольку $\vec{E}_0 = (0, 0, -E_0)$, то

$$\vec{E}\Delta\vec{r} = -E_0\Delta z = -\Delta(E_0 z).$$

Согласно (1.2.4), имеем соотношение $\Delta(E_0 z) = \Delta\varphi$. Следовательно, функция $\varphi(z)$ должна иметь вид $\varphi(z) = E_0 z + c$, где c — произвольная постоянная. Ее можно фиксировать произвольным условием. Пусть потенциал левой пластины равен нулю: $\varphi(0) = 0$. Тогда $c = 0$. Потенциал однородного поля приобретает вид

$$\varphi(z) = E_0 z. \qquad (1.2.5)$$

Найдем теперь потенциал правой пластины. Полагая, в (1.2.5) $z = d$, получим $\varphi(d) = V_0$, где $V_0 = E_0 d$. На рис. 1.2.5 изображены графики функций $E_z(z)$ и $\varphi(z)$. Обратите внимание на то, что z — координата заряда, а не расстояние от «начала» координат до заряда. Если бы мы выбрали начало координат в середине расстояния между пластинами, то потенциал имел бы вид

$$\varphi(z) = E_0\left(z + \frac{d}{2}\right), \quad -\frac{d}{2} \le z \le \frac{d}{2}.$$

Потенциальная энергия заряда в однородном поле согласно (1.2.3) и (1.2.5) равна

$$W(z) = qE_0 z\,. \qquad (1.2.6)$$

Задача 1.2.4. Диполь длиной l с зарядами $\pm q$ находится в однородном электрическом поле напряженностью E (рис. 1.2.6).

А. Найдите работу, которую необходимо совершить для того, чтобы повернуть диполь на 180°.

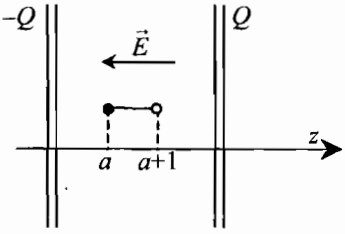


рис. 1.2.6

Решение. Поскольку мы ввели понятие потенциальной энергии, то вычисление работы A' можно произвести косвенным путем, используя закон сохранения полной энергии: $A' = W_f - W_i$, W_i, W_f — потенциальная энергия диполя в начальном и конечном состояниях. Пусть z координата заряда q равна a. Используя свойство суперпозиции найдем

$$W_i = +qEa - qE(a+l) = -qEl, \qquad W_f = qEl.$$

Следовательно, $A' = 2qEl$. Очевидно, диполь, находился в состоянии устойчивого равновесия с наименьшим значением потенциальной энергии. Поэтому работа внешних сил при перемещении диполя в состояние с большей потенциальной энергией положительна.

Б. Найдите работу, которую необходимо совершить, чтобы вернуть диполь в исходное положение.

Задача 1.2.5. Шарик массой m = 0,1 г, имеющий заряд q = 9,8 нКл, подвешен на нити в однородном электрическом поле, направленном горизонтально. Напряженность поля E = 105 В/м. Найти угол отклонения нити от вертикали.

1.2.5. Движение заряда в однородном поле. Рассмотрим движение частицы массой m, зарядом q в однородном поле напряженностью $\vec{E}_0$. На частицу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $q\vec{E}_0$. Для решения основной задачи механики — вычисления радиус-вектора частицы $\vec{r}(t)$ — запишем уравнения движения

$$m\vec{a} = m\vec{g} + q\vec{E}_0\,. \qquad (1.2.7)$$

Начальные условия $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$. Из (1.2.7) находим, что ускорение

$$\vec{a} = \vec{a}_0\,,\ \vec{a}_0 = \vec{g} + \frac{q}{m}\vec{E}_0$$

представляет собой постоянный вектор. Давайте вспомним соответствующий раздел механики и запишем решение уравнений (1.2.7).

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}_0 t^2}{2}, \qquad (1.2.8\ a)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t\ . \qquad (1.2.8\ б)$$

Измерение заряда электрона. После измерения Томсоном в 1897 г. отношения заряда электрона к его массе возникла важная задача определения величин заряда и массы. Заряд электрона был измерен в серии экспериментов, проведенных в 1911—1913 гг. Р. Э. Милликеном. Он использовал заряженные капельки масла, движущиеся в воздухе между пластинами конденсатора. Обработка результатов опытов основывалась на решении уравнения (1.2.7), в правой части которого необходимо учесть силу вязкого сопротивления воздуха и выталкивающую силу.

Работа Милликена получила всеобщее признание (Нобелевская премия, 1923 г.). Однако только в 30-х годах выяснилось, что его результат занижен на 1 %. Незначительная ошибка объяснялась использованием неверного значения вязкости воздуха. Любопытно, что каждый следующий результат, опубликованный другими авторами, был чуть выше предыдущего. По этому поводу выдающийся американский физик-теоретик Р. Фейнман замечает, что преклонение перед авторитетами в науке обесценивает сами эксперименты: «Тут нужна просто обычная честность».

Задача 1.2.6. Частица массой $m = 0{,}1$ г с зарядом $q = 9{,}8$ нКл движется в однородном электрическом поле, создаваемом пластинами на рис. 1.2.4. Расстояние между пластинами $d = 20$ см. Разность потенциалов $\varphi(d) - \varphi(0) = V_0$, $V_0 = 10^5$ В. Вначале частица находилась на положительно заряженной пластине. Насколько сместится частица в вертикальном направлении в момент столкновения с отрицательно заряженной пластиной?

Решение. Пусть начальное положение частицы $x(0) = 0$, $z(0) = d$. Проекции радиус-вектора (1.2.8 *а*) на оси x и z представляют собой две функции

$$x(t) = -gt^2/2, \qquad (1)$$

$$z(t) = d - qV_0t^2/(2md) \qquad (2).$$

В момент времени $t = T$ частица столкнется с отрицательно заряженной пластиной. Этому событию соответствуют значения функций $x(T) = -h$, $z(T) = 0$. Учитывая (1), (2) получим систему $h = gT^2/2$, $0 = d - qV_0T^2/(2md)$, из которой находим $h = mgd^2/(qV_0)$, $h = 4$ см.

Задача 1.2.7. Отношение q/m называют удельным зарядом частицы. Для электрона $c/m_e = 1{,}76 \cdot 1011$ Кл/кг. Найдите значение величины напряженности поля, при котором ускорение, сообщаемое электрону силой qE_0, равно g.

Задача 1.2.8. Электрон движется в однородном электрическом поле, создаваемом пластинами на рис. 1.2.4. Разность потенциалов $\varphi(d) - \varphi(0) = V_0$,

V_0 = 1 В. Начальная скорость электрона, находящегося на левой пластине равна нулю.

А. Найдите скорость электрона в момент столкновения с правой пластиной.

Решение. Из уравнений (1.2.7) следует, что электрон движется параллельно оси z. Его скорость $\vec{v} = (0, 0, v)$. Найдем $v(z)$ при $z = d$ используя закон сохранения полной энергии $\frac{mv^2}{2} + W(z)$, где $W(z) = -\frac{e_0 V_0 z}{d}$ — потенциальная энергия электрона в однородном поле. Приравнивая полные энергии в точках $z = 0$ и $z = d$, имеем:

$$0 - 0 = \frac{mv^2}{2} - e_0 V_0 \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\frac{2e_0 V_0}{m}}.$$

Для электрона $e_0/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, $v = 5{,}94 \cdot 10^5$ м/с.

А теперь создадим разность потенциалов $V_0 = 10^6$ В. Тогда $v = 1{,}98\,c$, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света. Скорость электрона станет больше скорости света. Возможно, вы уже знаете, что этот результат противоречит экспериментальным фактам и теории относительности. В чем причина этого несоответствия? Дело в том, что механика Ньютона описывает движение частиц со скоростями $v << c$. В механике, согласованной с теорией относительности, скорость приобретаемая электроном, выражается соотношением (см. Дополнение VI)

$$v = \sqrt{\frac{2e_0 V_0}{m}} \frac{\sqrt{1 + e_0 V_0 / 2mc^2}}{1 + e_0 V_0 / mc^2}.$$

Для того чтобы оставаться в рамках механики Ньютона, приращение потенциальной энергии должно удовлетворять условию $e_0 V_0 << mc^2$. Подставляя значение $mc^2 = 0{,}5$ МэВ, получим неравенство $V_0 << 5 \cdot 10^5$ В. Если выполняется условие $V_0 >> 5 \cdot 10^5$ В, то скорость электрона приближается к скорости света $v \approx c$.

Б. Почему при вычислении скорости электрона мы не учли потенциальную энергию электрона в поле тяжести?

В. На анод электронной пушки кинескопа телевизора подается напряжение $V_0 = 25$ кВ. Найдите скорость электронов, вылетевших из пушки.

1.2.6. Потенциал точечного заряда. Поместим заряд Q в начало координат. В точке P с радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$ напряженность поля $\vec{E} = kQ\vec{r}/r^3$. Согласно (1.2.4),

$$\frac{kQ\vec{r}\Delta\vec{r}}{r^3} = -\Delta\varphi.$$

Преобразуем левую часть, используя тождество $\vec{r}^{\,2} = r^2$, из которого следует $\vec{r}\Delta\vec{r} = r\Delta r$. В результате получим соотношение $-\frac{kQr\Delta r}{r^2} = \Delta\varphi$.

Левую часть можно представить как приращение функции $\frac{kQ}{r}+C$. Мы получили потенциал поля

$$\varphi(r) = \frac{kQ}{r}+C.$$

Обычно постоянную C фиксируют условием $\phi(\infty) = 0$. Тогда $C = 0$,

$$\varphi(r) = \frac{kQ}{r}. \qquad (1.2.9)$$

Потенциальную энергию взаимодействия зарядов q и Q, находящихся на расстоянии r, найдем из (1.2.3) и (1.2.9):

$$W(r) = \frac{kqQ}{r}. \qquad (1.2.10)$$

Потенциал системы зарядов. Напряженность поля в точке P равна сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом системы. Вычисляя потенциал поля в точке P мы находим, что он равен сумме потенциалов, создаваемых в точке P каждым зарядом системы.

Задача 1.2.9. Электрон атома водорода вращается по круговой орбите радиусом $a = 0{,}053$ нм.

А. Найдите напряженность поля, создаваемого протоном на орбите.

Б. Найдите потенциал, создаваемый протоном на орбите.

В. Найдите скорость движения электрона.

Г. Найдите полную энергию электрона $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{ke^2}{a}$.

Решение. Согласно второму закону Ньютона $mv^2/a = ke^2/a^2$. Следовательно,

$$E = -\frac{ke^2}{2a}, \quad E = -13{,}6 \text{ эВ}.$$

Задача 1.2.10. Покажите, что потенциал, создаваемый системой зарядов, изображенных на рис. 1.2.2 в случаях

А. $\varphi_0 = 3\sqrt{3}\frac{kq}{a}$.

Б. $\varphi_M = 2\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{kq}{a}$.

В. $\varphi_H = \frac{3kq}{a}$.

Задача 1.2.11. Найдите работу A', которую следует совершить, чтобы переместить диполь, изображенный на рис. 1.1.2 *а*, в положение, изображенное на рис. 1.1.2 *б*.

1.3. Закон Гаусса

Основой электростатики является не закон Кулона, который относится скорее к электромеханике, а четыре из восьми уравнений Максвелла, которые позволяют найти напряженность и потенциал поля, создаваемого системой зарядов и проводников. Здесь мы сформулируем закон Гаусса, который следует из этих уравнений и существенно облегчает решение задач электростатики.

Поток электрического поля. Возьмем замкнутую поверхность S, охватывающую заряды $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Разобьем эту поверхность на N малых участков — элементов поверхности площадью ΔS_k ($k = 1, 2, \ldots, N$). Выберем на каждом из них точку M_k. Ориентацию элемента поверхности зададим вектором $\vec{n}_k$ — единичным вектором внешней нормали к поверхности ΔS_k в точке M_k. Обозначим через $\vec{E}_k$ вектор $\vec{E}$ в точке M_k. Скалярное произведение $\vec{E}_k\vec{n}_k\Delta S_k$ назовем элементарным потоком электрического поля через данный элемент поверхности. Поток электрического поля через поверхность S представляет собой предел суммы элементарных потоков при $N \to \infty$ и $\Delta Sk \to 0$.

Закон Гаусса. Поток электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен произведению $1/\varepsilon_0$ на сумму зарядов, находящихся внутри объема, ограниченного поверхностью S

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{E}_k\vec{n}_k\Delta S_k = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{s} q_i\,. \qquad (1.3.1)$$

Закон Гаусса дает возможность найти напряженность поля в тех случаях, когда, благодаря симметрии распределения зарядов можно предсказать положение силовых линий. Очевидное следствие (1.3.1) — выражение для напряженности поля, созданного точечным зарядом. Следует отметить, что закон Гаусса следует из интегральной формы одного из уравнений Максвелла в результате применения формулы преобразования интеграла по объему в интеграл по поверхности, полученной в 1828 г. русским математиком М.В. Остроградским (опубликована в 1831 г.).

Задача 1.3.1. Равномерно заряженная плоскость. Распределение зарядов на поверхности определяется *поверхностной плотностью заряда* $\sigma = \dfrac{\Delta q}{\Delta S}$, где Δq заряд на поверхности площадью ΔS. Пусть $\sigma = \sigma_0 > 0$ — постоянная величина. Найдите напряженность электрического поля, создаваемой плоскостью.

Решение. Из симметрии относительно плоскости следует, что справа и слева от нее поле однородно и имеет одинаковую величину напряженности (рис.1.3.1 *а*). Поэтому напряженность поля $\vec{E} = \vec{E}_0$, $z > 0$, $\vec{E} = -\vec{E}_0$, $z < 0$. Вклад в поток дают только две грани. Из (1.3.1) получим

$$(\vec{E}_1\vec{n}_1 + \vec{E}_2\vec{n}_2)S = \frac{\sigma_0 S}{\varepsilon_0}\,.$$

Отсюда находим $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$. На рис. 1.3.1 *б* изображен график функции $E_z(z)$.

Приращение E_z при переходе через поверхность $\Delta E_z = \sigma_0/\varepsilon_0$.

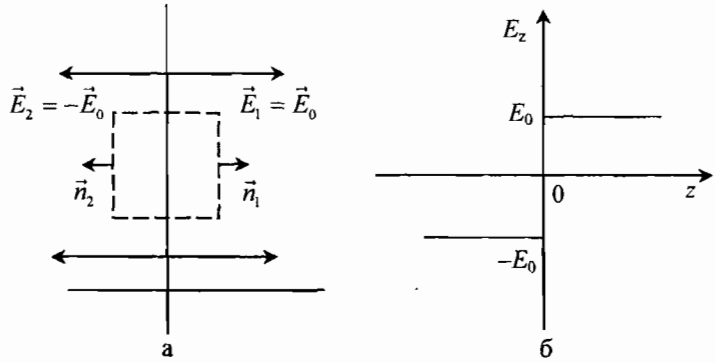


рис. 1.3.1

Задача 1.3.2. Две заряженные параллельные плоскости расположены на расстоянии d друг от друга: слева находится плоскость с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_1$, справа — с плотностью $\sigma = \sigma_2$ (рис. 1.3.2 *а*). Найдите напряженность электрического поля, создаваемого заряженными плоскостями во всем пространстве.

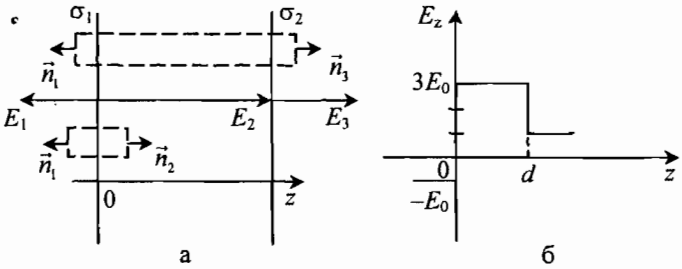


рис. 1.3.2

Решение. Электрическое поле, создаваемое неограниченными плоскостями может быть только однородным. Пусть $\vec{E} = \vec{E}_1$, $z < 0$, $\vec{E} = \vec{E}_2$, $0 < z < d$; $\vec{E} = \vec{E}_3$, $z > d$. Применяя закон Гаусса к параллелепипеду, пересекающему две плоскости, заключаем, что силовые линии снаружи плоскостей расположены как на рис. 1.3.1 *а*: $\vec{E}_1 = (0, 0, -E_0)$, $\vec{E}_3 = (0, 0, E_0)$. В этом случае из (1.3.1) имеем

$$E_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Для определения напряженности поля $\vec{E}_2 = (0, 0, E_2)$ применим закон Гаусса к левой пластине. Имеем соотношение $E_2 + E_0 = \sigma_1/\varepsilon_0$. Следовательно,

$$E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

На рис. 1.3.2 изображен график функции $E_z(z)$ при $\sigma_1 = 2\sigma_0$, $\sigma_2 = -\sigma_0$, $\sigma_0 > 0$. Если $\sigma_1 = -\sigma_0$, $\sigma_2 = \sigma_0$, то $E_1 = E_3 = 0$, $E_2 = (0, 0, -\sigma_0/\varepsilon_0)$ В этом случае графики функции $E_z(z)$ и потенциала $\varphi(z)$ изображены на рис. 1.2.5 *б*.

Задача 1.3.3. Сообщим металлической сфере радиусом R заряд Q.

А. Найдите величину напряженности электрического поля, создаваемого заряженной сферой.

Решение. В силу симметрии силовые линии поля должны представлять собой пучок прямых, исходящих из центра сферы. Найдем сначала напряженность поля внутри сферы. Выбирая гауссову поверхность внутри сферы, заключаем из (1.3.1), что при $r < R$ электрическое поле равно нулю. Приняв в качестве гауссовой поверхности сферу радиусом $r \geq R$, получим из (1.3.1) $4\pi r^2 E = Q/\varepsilon_0$ или $E = kQ/r^2$.

Б. Покажите, что потенциал заряженной сферы $\varphi = kQ/R$ внутри сферы в области $0 \leq r \leq R$ и $\varphi = kQ/r$ в области $r \geq R$.

Задача 1.3.4. Остроконечный предмет можно моделировать системой проводников, состоящей из двух сфер радиусами R_1 и $R_2 >> R_1$, соединенных проводом (рис. 1.3.3). Зарядим эту систему некоторым количеством электричества. Сферы расположены достаточно далеко друг от друга, так что распределение зарядов на каждой сфере можно считать равномерным. Покажите, что напряженность поля у поверхности меньшей сферы в R_2/R_1, больше напряженности поля у поверхности большей сферы. Этот результат очень важен, поскольку при напряженности поля $\approx 3 \cdot 10^6$ В/м в сухом воздухе вблизи острия в промежутке длиной 1 см возникает искра или разряд.

Решение. Заряды будут перемещаться, пока потенциалы всех проводников не станут одинаковыми. Сферы приобретут заряды q_1 и q_2, которые распределятся по поверхности сфер неравномерно. Однако, если расстояние между центрами сфер значительно больше радиусов сфер, то можно воспользоваться решением задачи 1.3.3. Отношение величин напряженности полей

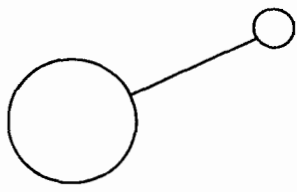


рис. 1.3.3

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1}{q_2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2.$$

Равенство потенциалов приводит к уравнению $q_1/R_1 = q_2/R_2$. Следовательно, $E_1/E_2 = R_2/R_1$, $E_1 >> E_2$. Чем меньше радиус кривизны острия, тем больше величина напряженности электрического поля.

1.4. Проводники в электрическом поле

1.4.1. Поле внутри и вне проводника. Внесем проводник в электрическое поле, создаваемое внешней по отношению к проводнику системой неподвижных зарядов. В металлах переносчиками зарядов являются так называемые «свободные» электроны. Обычно на каждый атом кристаллической решетки приходится один «свободный» электрон. Слово «свободный» взято в кавычки, так как поведение электронов в металле значительно отличается от поведения действительно свободных электронов в вакууме.

Задача 1.4.1. Оцените концентрацию «свободных» электронов в медном проводнике.

В проводнике электрическое поле вызывает движение электронов. Они перераспределяются так, что в электростатическом случае напряженность поля внутри проводника равняется нулю. Из (1.2.4), заключаем, что вся область внутри проводника и его поверхность должны иметь одинаковый потенциал. Вне проводника электрическое поле не равно нулю, причем вектор напряженности поля должен быть перпендикулярен к поверхности в каждой ее точке. Наличие касательной составляющей напряженности поля привело бы к движению электронов вдоль поверхности. Таким образом, напряженность поля испытывает скачок при переходе из внутренней части проводника наружу: проекция напряженности поля E_n на внешнюю нормаль равна σ/ε_0, где σ — поверхностная плотность заряда. Заряды, возникшие на поверхности, создают электрическое поле, компенсирующее внешнее поле внутри проводника.

Задача 1.4.2. Величина напряженности внешнего поля, в которое внесли проводник $E = 3 \cdot 10^6$ В/м. Оценим концентрацию n избыточного заряда в поверхностном слое толщиной в два атомных слоя $d = 0{,}5$ нм. Поскольку $\sigma = end$, то $n = \varepsilon_0 En/(ed)$, $n = 3{,}3 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$.

1.4.2. Электростатическая индукция. Поместим положительный заряд Q на расстояние r от центра изолированной незаряженной металлической сферы радиусом R (рис. 1.4.1). В результате действия сил притяжения электроны переместятся на участок поверхности, обращенной к заряду, оставляя на противоположной стороне поверхностный слой положительно заряженных ионов в узлах кристаллической решетки. «Центр» распределения отрицательного заряда окажется ближе к заряду Q, чем «центр» распределения положительного заряда. Следовательно, незаряженная сфера приобретает дипольный момент и на нее со стороны заряда Q действует сила притяжения.

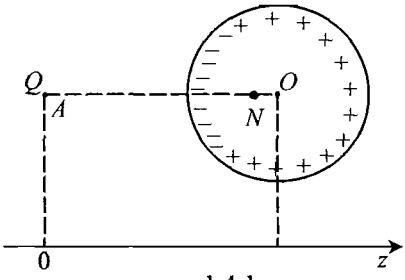


рис. 1.4.1

Перераспределение зарядов в проводнике в постоянном внешнем электрическом поле называется *электростатической индукцией* (от лат. *inductio* — наведение, возбуждение). Возникающие заряды называют наведенными или индуцированными.

Основная задача электростатики проводников заключается в определении потенциала и напряженности поля системы, состоящей из зарядов, изолированных проводников и проводников с фиксированными потенциалами.

Задачу определения электрического поля системы, изображенной на рис. 1.4.1, впервые решил английский физик У. Томсон (с 1892 г. лорд Кельвин). Томсон предложил заменить реальное распределение индуцированных зарядов двумя фиктивными точечными зарядами $\pm q$, которые вместе с зарядом Q создают искомое поле вне сферы. Положение и величина этих зарядов определяется из условия постоянства потенциала поля на поверхности сферы.

Заряд $q = QR/r$ следует поместить в центр сферы, а заряд $-q$ в поместить в точке N на отрезке AO на расстоянии $l = R^2/r$ от центра сферы (см. Дополнение 1.4.3). Электростатическое поле создается тремя зарядами Q и $\pm q$. Следовательно, незаряженная сфера приобретает *дипольный момент* $p = ql = Qa^3/r^2$ и притягивается к заряду Q.

Задача 1.4.3. Заряд Q находится на расстоянии r от центра заземленной сферы (рис. 1.4.2).

А. Используя свойство суперпозиции, покажите, что сфера приобретает заряд $q_1 = -q$, где $q = QR/r$.

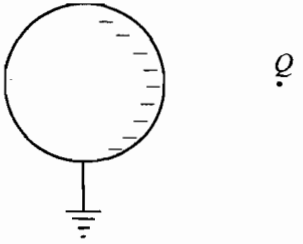


рис. 1.4.2

Решение. Потенциал Земли примем равным нулю. Величина заряда q_1 и распределение этого заряда по поверхности сферы должны удовлетворять условию: сумма потенциалов φ_1 и φ_2, создаваемых зарядами q_1 и Q, должна быть равна нулю в любой точке внутри сферы и на ее поверхности. Проще всего вычислить потенциал центра сферы: $0 = kQ/r + \varphi_1$. Заряд q_1 распределен неравномерно, но если поверхность сферы представить в виде множества элементарных площадок с зарядами Δq_a, то $\varphi_1 = (\Delta q_1 + \Delta q_2 + ...)/R = kq_1/R$. Следовательно, $Q/r + q_1/R = 0$, $q_1 = -QR/r$.

Б. Докажите, что индуцируемый заряд распределен на внешней поверхности сферы.

Указание: используйте сферическую гауссову поверхность, расположенную внутри металлической оболочки.

В. Если отсоединить заземление, то на сфере останется отрицательный заряд $-q$. Наконец, когда заряд Q убираем, электроны равномерно распределяются по поверхности сферы, которая приобретает потенциал

$$\varphi_f = -\frac{kq}{R} = -\frac{kQ}{r}.$$

Этот метод зарядки нейтрального проводника называется электризацией влиянием или индуцированной электризацией.

Задача 1.4.4. Внесем в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}_0 = (0, 0, E_0)$ плотно прижатые друг к другу металлические диски. Пусть

плоскость соприкосновения дисков перпендикулярна вектору $\vec{E}_0$. Площадь поверхности диска S.

А. Докажите, что на внешних поверхностях дисков индуцируются заряды.

Б. Найдите поверхностную плотность заряда дисков.

Решение. Согласно свойству суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$, $\vec{E}'$ — напряженность поля, создаваемую индуцированными зарядами, можно найти с помощью закона Гаусса. Пусть σ_1, σ_2 — поверхностные плотности зарядов левой и правой пластин. Очевидно, что $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$. Используя решение задачи 1.3.2, находим, что в области вне дисков $\vec{E}' = 0$. Полагая $\sigma_1 = -\sigma_0$, $\sigma_2 = \sigma_0$ и используя в законе Гаусса поверхность, охватывающую первый или второй диски, найдем вектор $\vec{E}'$ внутри дисков $\vec{E}' = (0, 0, -\sigma_0/\varepsilon_0)$. С другой стороны известно, что для всех точек внутри проводника $\vec{E} = \vec{0}$ или $\vec{E}' = -\vec{E}_0$. Следовательно, $\sigma_0 = \varepsilon_0 E_0$. На правой пластине индуцируется положительный заряд с плотностью $\sigma_2 = \varepsilon_0 E_0$, на левой пластине — отрицательный заряд с плотностью $\sigma_1 = -\varepsilon_0 E_0$.

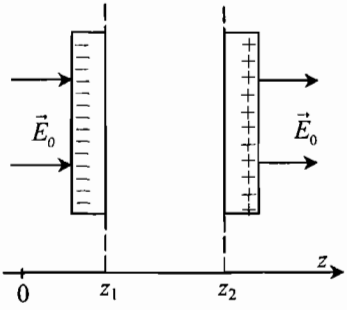


рис. 1.4.3

В. Раздвинем диски на расстояние d. Докажите, что в пространстве между дисками напряженность поля $\vec{E} = 0$ (рис. 1.4.3).

Г. Переместим теперь разделенные диски в область пространства, где внешнее поле отсутствует. Тогда напряженность электрического поля, создаваемого пластинами равна $\vec{E}'$. Докажите, что отношение заряда диска D_2 к разности потенциалов дисков D_2 и D_1 равна $C = \varepsilon_0 S/d$.

1.4.3. Электростатическая защита. В лабораторной практике и технике часто возникает необходимость в создании условий, при которых в ограниченной области пространства напряженность электростатического поля равна нулю. Мы уже знаем, как это можно осуществить: нужно окружить защищаемое пространство замкнутой проводящей оболочкой. Более того, достаточно вместо сплошной оболочки взять проволочную сетку с не слишком крупными ячейками. Поле внутри сетки равно нулю всюду, за исключением слоя, прилегающего к сетке, толщиной порядка размеров ячейки. С другой стороны статическое распределение зарядов внутри заземленной металлической полости не может создать поле во внешнем пространстве.

Задача 1.4.5. Эта задача относится к явлению, впервые изученному М. Фарадеем.

Поместим в центр металлической изолированной сферы радиусом R заряд Q. Индуцированные заряды q_1 и q_2 на внутренней и внешней поверхностях распределяются равномерно. Выберем гауссову поверхность внутри металлической оболочки. Тогда из (1.3.1) следует $0 = (q_1 + Q)$, или $q_1 = -Q$.

Поскольку сфера изолирована, то $q_2 = Q$. Электрическое поле существует внутри и вне сферы.

Теперь заземлим сферу. Тогда заряд q_2 обратится в ноль. На внутренней поверхности сферы останется заряд $q_1 = -Q$.

А. Найдите напряженность поля внутри и вне заземленной сферы. Докажите, что вне сферы поле отсутствует.

Б. Полагая потенциал Земли равным нулю, покажите, что потенциал, создаваемый сферой,

$$\varphi(r) = kQ\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right), \quad r \le R; \quad \varphi(r) = 0, \quad r \ge R.$$

Электрическая тень. В тесной связи с явлением, рассмотренным в этой задаче, находится явление электрической тени. Расположим вблизи положительного заряда Q заземленную металлическую пластинку (рис. 1.4.4). Вследствие электростатической индукции на пластинке возникает отрицательный заряд. Величина плотности заряда на плоскости пластины, обращенной к заряду Q больше величины плотности заряда на другой плоскости пластины. В области пространства в окрестности середины пластинки M напряженность поля близка к нулю. Заземленная пластинка играет роль электрического экрана.

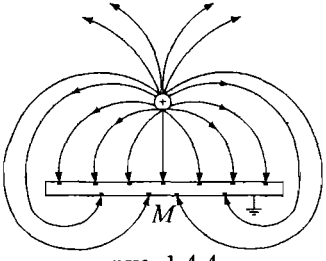


рис. 1.4.4

Пример 1.4.6. Поле заряда вблизи плоской поверхности проводника. Введем систему координат xyz, в которой плоскость xy совпадает с поверхностью проводника, расположенного в области $z \le 0$. Заряд Q находится в точке $M(0, 0, h)$ (рис. 1.4.5). Найдем потенциал, создаваемый системой проводник-заряд в произвольной точке P (x, y, z) области $z \ge 0$.

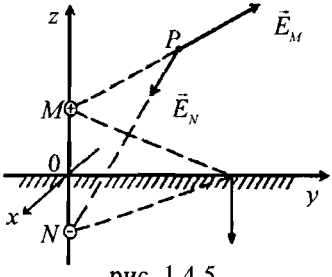


рис. 1.4.5

Если бы заряд находился в безграничном пространстве, то потенциал поля в точке P представлял бы функцию

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{kQ}{s}, \qquad s = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2},$$

где s — расстояние MP (рис. 1.4.5). Однако теперь вследствие электростатической индукции на поверхности проводника возникает отрицательный заряд, создающий вторичное электрическое поле с потенциалом $\varphi'(x, y, z)$. Согласно свойству суперпозиции потенциал искомого поля $\varphi(x, y, z) = \varphi_0 + \varphi'$. Для определения функции $\varphi'(x, y, z)$ необходимо использовать *граничное условие*: касательная к плоскости $z = 0$ компонента напряженно-

сти поля $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ должна быть равна нулю. Это условие эквивалентно требованию постоянства потенциала поля на плоскости $z = 0$. Можно, не нарушая общности решения, положить $\varphi(x, y, 0) = 0$. Мы удовлетворим поставленному условию, предполагая, что потенциал φ' в области $z \geq 0$ создается фиктивным зарядом $Q' = -Q$, помещенным в точку $N(0, 0, -h)$:

$$\varphi'(x, y, z) = -\frac{kQ}{s'}, \; s' = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2},$$

где s' — расстояние NP. Следовательно, напряженность поля в точке P создается двумя симметрично расположенными зарядами Q и $-Q$:

$$E_x = kQx\left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s'^3}\right), \; E_y = kQy\left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s'^3}\right),$$

$$E_z = kQ\left(\frac{z-h}{s^3} - \frac{z+h}{s'^3}\right).$$

Очевидно при $z = 0$ имеем $E_x = E_y = 0$,

$$E_z = \frac{-2kQh}{\sqrt{(x^2 + y^2 + h^2)^3}}.$$

Поверхностная плотность распределения индуцированного заряда $\sigma(x, y) = \varepsilon_0 E_z(x, y, 0)$.

1.4.4. Зарядное устройство — банка Фарадея. Ящиком или банкой Фарадея называют полую металлическую оболочку с небольшим отверстием. Присоединим банку к электроскопу и сообщим положительный заряд Q маленькой металлической сфере, находящейся на конце непроводящего стержня. Перемещая стержень, начнем опускать сферу в банку. На внутренней и внешней поверхностях банки индуцируются заряды. Листок электроскопа отклоняется (рис. 1.4.6 *а*). Угол отклонения является мерой потенциала стержня электроскопа и банки. Теперь коснемся сферой внутренней поверхности банки. Тогда заряд $-Q$, индуцированный на внутренней поверхности банки нейтрализует заряд Q на сфере (рис. 1.4.6 *б*). После этого удалим сферу из банки. Угол отклонения листика электроскопа не изменится. Из закона Гаусса следует, что заряд Q распределяется только по внешней поверхности банки. Внутри банки электрическое поле отсутствует. Повторяя многократно эту операцию, можно существенно поднять разность потенциалов между банкой и корпусом электроскопа.

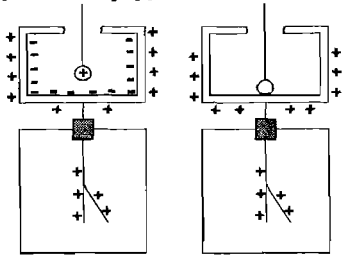


рис. 1.4.6

Задача 1.4.7. Банка Фарадея имеет форму сферы радиусом $R_1 = 5$ см. Маленькую

сферу радиусом $R_2 = 0{,}5$ см — «носитель электричества» — можно заряжать до потенциала $V_0 = 20$ В. Сколько раз необходимо переместить носитель электричества, чтобы увеличить потенциал банки от нуля до $V = 400$ В?

Техническое развитие этого опыта позволило создать электростатические генераторы, применяемые в ядерной физике для ускорения ионов. В 1933 г. американский физик Р. ван де Грааф получил напряжение $15 \cdot 10^6$ В. Высоковольтная «банка» в виде сферы имела диаметр 4,5 м. Зарядка осуществлялась с помощью зарядов, которые наносились на движущуюся ленту, снимались внутри сферы и переходили на ее внешнюю поверхность.

1.5. Диэлектрики в электрическом поле

1.5.1. Плоскослоистый диэлектрик в электрическом поле. Атомы в твердом теле расположены настолько тесно, что электроны легко переходят от атома к атому. Существует большой класс веществ, в которых электрическое поле не вызывает направленного движения электронов. Такие вещества называются *диэлектриками*.

Диэлектрическая проницаемость. Пусть вещество состоит из неполярных молекул, т.е. молекул, не обладающих дипольным моментом. Расположим плоскопараллельную пластину диэлектрика перпендикулярно вектору напряженности постоянного внешнего поля $\vec{E}_0$ (рис. 1.5.1). Электрическое поле деформирует молекулы, смещая положительно заряженные ядра в направлении поля, а центр распределения электронов в молекулах в противоположную сторону. В результате молекулы приобретают дипольный момент. Этот процесс называется *поляризацией* диэлектрика. Вещество объемом V приобретает дипольный момент $\vec{P}V$, где вектор $\vec{P}$ — дипольный момент единицы объема. Напряженность поля в диэлектрике становится равной $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$. Индуцированное поле $\vec{E}'$ зависит от структуры вещества диэлектрика и его формы. В плоскопараллельной пластине возникает *деполяризующее* поле $\vec{E}' = -\vec{P}/\varepsilon_0$. В изотропном (от греч. *isos* — одинаковый, *tropos* — поворот) диэлектрике вектор $\vec{P}$ пропорционален напряженности результирующего поля. Обычно $\vec{P}$ представляют в виде $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$. Постоянная ε называется *диэлектрической проницаемостью* или диэлектрической постоянной вещества. Следовательно, $\vec{E} = \vec{E}_0 - (\varepsilon - 1)\vec{E}$ или $\varepsilon\vec{E} = \vec{E}_0$. Тогда плотность дипольного момента $\vec{P} = (\varepsilon - 1)\vec{E}_0/\varepsilon$. Множитель ε показывает, во сколько раз уменьшилась величина напряженности поля в плоскопараллельной пластине диэлектрика:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \qquad (1.5.1)$$

Приведем значения ε некоторых веществ при комнатной температуре: $\varepsilon = 5 \div 9$ (стекло), $\varepsilon = 6 \div 10$ (фарфор, слюда) $\varepsilon = 2$ (бумага), $\varepsilon = 81$ (вода).

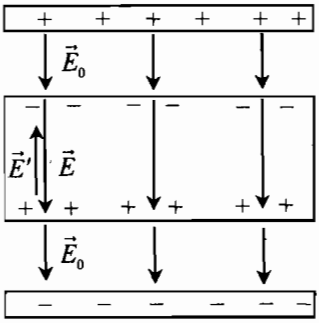


рис. 1.5.1

Поляризационные заряды. Предположим, что каждый атом приобрел дипольный момент $p_a = el_a$. Пусть n_a — число атомов в единице объема. Тогда величина плотности дипольного момента $P = p_a n_a$. Если дипольные моменты молекул распределены с одинаковой плотностью, то внутри диэлектрика объемная плотность заряда равна нулю. Поэтому достаточно посмотреть, что происходит на поверхностях пластины. На нижней грани электроны сместились внутрь пластины на расстояние l_a. В результате она приобретает положительный заряд $q_n = en_a l_a S$ с поверхностной плотностью $\sigma_п = en_a l_a = P$. Верхняя грань, наоборот, приобретает отрицательный заряд. Эти заряды называют *поляризационными,* или *связанными,* зарядами, так как они не могут свободно перемещаться в диэлектрике. Поскольку $\sigma_п = P$, то $\sigma_n = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$. Пластина приобретает дипольный момент $p = PSh$, где h — толщина пластины.

Задача 1.5.1. Покажите, что поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma_n = (\varepsilon - 1)\sigma_0/\varepsilon$, $\sigma_0 = \varepsilon_0 E_0$ — поверхностная плотность свободных зарядов.

1.5.2. Сила, действующая на диэлектрическую частицу в неоднородном электрическом поле. Во внешнем поле диэлектрическое тело приобретает дипольный момент, на который со стороны этого же поля действует сила. Только теперь мы сможем объяснить древнейшие наблюдения притяжения пылинок и ворсинок наэлектризованными телами. Причина заключается в поляризации вещества ворсинки. Возникают поляризационные заряды обоих знаков. Эта ситуация схематически изображена на рис. 1.1.2 *б*. Ворсинка приобретает дипольный момент и на него действует сила, направленная в область наибольшей напряженности внешнего поля (см. Доп. IV., 1.5.5).

1.5.3. Закон Гаусса для полей в веществе произвольного состава. Применим закон Гаусса к диэлектрику. В этом случае соотношение (1.3.1) связывает напряженность поля в диэлектрике со свободными и поляризационными зарядами в объеме V, ограниченном поверхностью S. Можно ввести величину, связанную только со свободными зарядами законом, подобным (1.3.1). С этой целью в электродинамике сплошных сред вводят вектор *электрической индукции* $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$. Тогда после подстановки $\vec{E}$ в (1.3.1) получим «модифицированный» закон Гаусса — соотношение между свободными зарядами Q_i и вектором D в веществе произвольного состава. Размерность D — Кл/м^2.

$$\sum_{k=1}^{N} D_k n_k \Delta S_k = \sum_{i=1}^{s} Q_i \ . \qquad (1.5.2)$$

В случае плоскопараллельной пластины $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E}_0$. Отметим, что в случае диэлектрика произвольной формы $\vec{D} \neq \varepsilon_0\vec{E}_0$.

Поле заряда в диэлектрике. Из модифицированного закона Гаусса следует $\varepsilon\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = Q$: свободный заряд, погруженный в жидкий или газообразный диэлектрик, создает в нем поле в ε раз слабее, чем в вакууме. Если заряды, изображенные на рис. 1.1.1, находятся в жидком или газообразном диэлектрике то сила, действующая на каждый из зарядов, уменьшается в ε раз.

1.6. Электрическая емкость. Конденсатор

1.6.1. Емкость плоского конденсатора. Заряд и потенциал проводника не могут принимать произвольные значения: между ними существует определенное соотношение. Действительно, значение потенциала зависит не только от заряда, сообщенного проводнику, но и от зарядов, имеющихся на окружающих проводник телах, и зарядов, наведенных вследствие электростатической индукции. Наиболее простая система проводников представляет собой две одинаковые металлические пластины площадью S, расположенные параллельно друг другу на расстоянии d. Заряды на пластинах равны Q и $-Q$ (рис. 1.6.1). Потенциалы пластины равны соответственно φ_2 и φ_1. Назовем $\varphi_2 - \varphi_1 = V_0$ напряжением на конденсаторе.

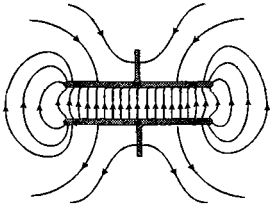


рис. 1.6.1

На рис. 1.6.1 изображены силовые линии реального конденсатора. Обратите внимание на то, что силовые линии перпендикулярны поверхностям пластин. На некотором расстоянии от края пластин поле почти однородно и не зависит от наружных зарядов. Если пренебречь искажением поля у краев пластин, то можно воспользоваться результатом, полученным в разделе 1.2.4 и в задаче 1.3.1: величина напряженности поля в конденсаторе $E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$, $\sigma_0 = Q/S$. Поскольку $V_0 = E_0 d$, то $Q = \sigma_0 S = \varepsilon_0 S V_0/d$, или

$$Q = C_0 V_0,\ C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (1.6.1)$$

Постоянная C_0 называется емкостью конденсатора. Таким образом, отношение, связывающее заряд на одной из пластин и разность потенциалов между ними, является постоянной величиной, содержащей только геометрические параметры S и d.

В СИ единица емкости называется фарад: 1 Ф = 1 Кл/В. Обычно приходится пользоваться более мелкими единицами: микрофарад (от греч. *micros* — малый), 1 мкФ = 10^{-6} Ф; нанофарад (от греч. *nanos* — карлик), 1 нФ = 10^{-9} Ф; пикофарад (от греч. *picos* — маленький) 1 пФ = 10^{-12} Ф. Отметим, что электрическая постоянная ε_0 = 8,85 пФ/м.

Задача 1.6.1. Изменится ли разность потенциалов пластин, если одну из них заземлить?

1.6.2. Сферический конденсатор. Еще одна простая конфигурация проводников представляет собой две концентрические сферы радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), заряды которых равны соответственно Q_1 и Q_2. Согласно закону

Гаусса напряженность поля, внутри малой сферы равна нулю, величина напряженности поля между сферами $E(r) = kQ_1/r^2$, а поле вне большой сферы при $r \geq R_2$ совпадает с полем точечного заряда $Q = Q_1 + Q_2$. Потенциал системы в этой области $\varphi(r) = kQ/r$. Потенциал внешней сферы $\varphi_2 = kQ/R_2$. Потенциал в области $R_1 \leq r \leq R_2$ удовлетворяет уравнению $kQ_1/r^2 = -\Delta\varphi/\Delta r$ и, следовательно, представляет собой функцию $\varphi(r) = kQ_1/r + A$, где A — константа. Поскольку функция $\varphi(r)$ непрерывна, то при значении $r = R_2$ получим равенство $kQ_1/R_2 + A = kQ/R_2$, из которого находим $A = kQ_2/R_2$. Следовательно, в области $R_1 \leq r \leq R_2$ функция $\varphi(r) = kQ_1/r + kQ_2/R_2$. Потенциал внутренней сферы $\varphi(R_1) = \varphi_1$, $\varphi_1 = kQ_1/R_1 + kQ_2/R_2$. Очевидно в области $0 \leq r \leq R_1$ потенциал $\varphi(r) = \varphi_1$ — постоянная величина.

Теперь заземлим внешнюю сферу. Тогда из закона Гаусса находим $Q_2 = -Q_1$. Следовательно, $\varphi_1 = kQ_1/R_1 - kQ_1/R_2$, $\varphi_2(r) = 0$; электрическое поле существует только в пространстве между сферами. Определяя емкость сферического конденсатора C соотношением $C(\varphi_1 - \varphi_2) = Q_1$, получим

$$\frac{1}{C} = k\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

В случае малого промежутка между сферами $R_{2,1} = R \pm d/2$, $d << R$ емкость $C \approx \varepsilon_0 S/d$, $S = 4\pi R^2$.

1.6.3. Конденсатор, заполненный диэлектриком. Поместим между пластинами конденсатора диэлектрик (рис. 1.6.2). Напряженность поля и разность потенциалов уменьшаются в ε раз:

$$E_0 \to E = E_0/\varepsilon,\ V_0 \to V = V_0/\varepsilon.$$

Поскольку заряд Q конденсатора не изменился, то $Q = C_0V_0 = \varepsilon C_0 V$ или $Q = CV$, где $C = \varepsilon C_0$ — емкость конденсатора, заполненного диэлектриком.

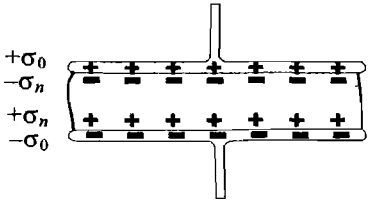


рис. 1.6.2

Найдем теперь поверхностную плотность зарядов $\sigma_П$, появившихся на поверхности диэлектрика. В пустом конденсаторе напряженность поля связана с поверхностной плотностью свободных зарядов соотношением $E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$. Прибавляя напряженность поля, созданного поляризованными зарядами, получим напряженность поля внутри диэлектрика $E = (\sigma_0 - \sigma_П)/\varepsilon_0$. Поскольку $\sigma_П/\varepsilon_0 = (\varepsilon - 1)E$, то $\sigma_П = (\varepsilon - 1)\sigma_0/\varepsilon$.

1.6.4. Лейденская банка. Тела, заряженные электризацией трением, со временем разряжаются. Вначале думали, что причина этого явления — «испарение» зарядов. Для предотвращения утечки зарядов, тела помещали в закрытые сосуды. Наиболее удобный сосуд — бутылка, а электризуемый материал — вода. Для зарядки воды, пробку протыкали металлическим стержнем. В 1745 г. голландский ученый П. Мюссенбрук заряжал воду в бутылке при помощи про-

вода, идущего от стержня к электростатической машине. Когда, придерживая бутылку одной рукой, он поправил другой рукой провод, то почувствовал удар такой силы, что «все тело содрогнулось, как от молнии». Так был открыт первый электрический конденсатор. Одной обкладкой конденсатора служила вода, другой — ладонь руки, диэлектриком служило стекло.

рис. 1.6.3

Это открытие произвело революцию в опытах с электричеством. Вскоре выяснилось, что можно вообще обойтись без воды, если изнутри и снаружи оклеить банку станиолевой (от лат. *stannum* — олово) фольгой, а металлический стержень соединить со слоем фольги внутри бутылки. На рис. 1.6.3 *а*, *б* показана лейденская банка при зарядке и разрядке. Стрелками обозначено направление движения электронов. Емкость современных лейденских банок $C_0 \approx 1 \div 10$ нФ, напряжение между слоями фольги $\approx 5 \cdot 10^4$ В.

Чтобы понять почему лейденская банка вызвала такую сенсацию, сравним заряд Q_c, приобретаемый сферой радиусом R и заряд $Q_б$ на обкладках цилиндрической банки радиусом R при одинаковой разности потенциалов V. Ширина станиолевой ленты $l = 10$ см, толщина стенок банки $d = 2$ мм. Заряд сферы $Q_c = 4\pi\varepsilon_0 RV$, заряд обкладок банки $Q_б = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot 2\pi RlV/d$. Следовательно, $Q_б/Q_c = \varepsilon l/2d$. Полагая $\varepsilon = 5$, находим $Q_б/Q_c = 125$!

Задача 1.6.2. Можно ли зарядить лейденскую банку, не заземляя одну из пластин?

Задача 1.6.3. Оцените емкость конденсатора, который можно получить из обычной пол-литровой банки.

1.7. Энергия электрического поля

1.7.1. Энергия электрического поля заряженного конденсатора. Пусть V — разность потенциалов правой и левой пластин конденсатора, изображенного на рис. 1.2.4. На правой пластине имеется заряд $q = C_0V$, на левой имеется заряд $-q$. Напряженность поля в конденсаторе $\vec{E} = (0, 0, -V/d)$. Увеличим заряд q до величины $q + \Delta q$, перенеся положительный малый заряд Δq с левой пластины на правую. При этом внешняя сила $\vec{F} = -\Delta q\vec{E}$ совершает элементарную работу $\delta A = \Delta W = \Delta qV$. Эту величину можно представить в виде

$$\delta A = \frac{q\Delta q}{C_0} = \Delta\left(\frac{q^2}{2C_0}\right).$$

Напомним, что электрическое поле, сосредоточенное в конденсаторе, представляет собой одну из форм материи. Если электрическое поле обладает энергией, то элементарная работа должна быть равна приращению энергии электрического поля. Тогда величина $q^2/(2C_0)$ — энергия электрического поля (см. также 4.8.). Следовательно, для того чтобы зарядить незаряженный конденсатор конечным зарядом $Q = C_0V_0$ до разности потенциалов V_0 необходимо совершить работу $A = Q^2/(2C_0)$. Это и есть приращение *энергии электрического поля* конденсатора. Таким образом, энергия электрического поля конденсатора, заряженного зарядом Q равна

$$U_e = \frac{Q^2}{2C_0}. \qquad (1.7.1)$$

Подставляя сюда значения $Q = \varepsilon_0 E_0 S$ и C_0, получим

$$U_e = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}(Sd). \qquad (1.7.2)$$

Отметим, что величина $u_e = \varepsilon_0 E_0^2/2$ имеет смысл объемной плотности энергии. Размерность $[u_e]$ = Дж/м^3 = Па.

1.7.2. Энергия электрического поля заряженных проводников. В общем случае энергия поля в элементарном объеме ΔV в окрестности точки $\vec{r} = (x,y,z)$ равна $\Delta U_e = (\varepsilon_0 E^2/2)\Delta V$. Пусть заряд изолированной металлической сферы радиусом a равен Q. В области $r \geq a$ радиальная компонента напряженности поля $E(x, y, z) = kQ/r^2$. Суммируя ΔU_e по области пространства $r \geq a$, получим энергию поля заряженного проводника $U_e = Q\varphi(a)/2$, $\varphi(a) = kQ/a$.

В случае системы N проводников энергия электрического поля

$$U_e = q_1\varphi_1/2 + q_2\varphi_2/2 + \ldots ,$$

где q_a, φ_a — заряд и потенциал проводника ($a = 1, 2, \ldots N$).

1.7.3. Сила, действующая на пластину конденсатора. На рис. 1.2.4 изображены две металлические пластины, образующие конденсатор. Левая пластина закреплена, нижний торец правой пластины может перемещаться по горизонтальной поверхности. Положение плоскости пластины определяется значением координаты z. Найдем силу $\vec{F}$, действующую на пластину со стороны электрического поля.

Для решения задачи запишем закон сохранения суммы полной механической энергии $U_{мех}$ и энергии электрического поля U_e: $U_{мех}+Q^2/(2C)$ = const, $C = \varepsilon_0 S/z$. Функцию $W(z) = Q^2 z/(2\varepsilon_0 S)$ можно рассматривать как потенциальную энергию взаимодействия пластин. Согласно ч. I, гл. 6 приращение потенциальной энергии W связано с проекцией силы F_z соотношением $-\Delta W = F_z\Delta z$. Вычисляя приращение W, получим

$$F_z = -\frac{dW}{dz} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

Поскольку $Q = \sigma S$, $\sigma = \varepsilon_0 E_0$, то F_z можно представить в виде $F_z = -\varepsilon_0 E_0^2 S/2$. Сила, действующая на левую пластину, $F_{1z} = \varepsilon_0 E_0^2 S/2$. Следовательно, на поверхность проводника действуют со стороны поля силы «отрицательного» давления $p = \varepsilon_0 E_0^2/2$. В результате проводник деформируется, его объем увеличивается.

Приведем экспериментальные данные: $E_0 = 10^6$ В/м (напряжение $U = 10$ кВ, расстояние между пластинами $d = 1$ см), $S = 4 \cdot 10^{-2}$ м^2, $F = 17{,}7 \cdot 10^{-2}$ H, $p = 4{,}42$ Па.

Учитывая полученный результат, можно утверждать, что сила, действующая на элемент поверхности ΔS незаряженного проводника, находящегося во внешнем поле, $\Delta\vec{F} = \sigma\vec{E}\Delta S/2$, где σ — поверхностная плотность заряда, E — напряженность поля в окрестности элемента ΔS.

1.8. Электрическая схема, содержащая конденсаторы

Такая схема представляет собой систему проводников, присоединенных к конденсаторам и генераторам постоянного напряжения. Источником постоянного напряжения является электрохимический (или гальванический) элемент — обычная батарейка. Разность потенциалов ε между положительным и отрицательным электродами разомкнутого элемента называется электродвижущей силой (ЭДС).

Общий метод расчета схем. Цель расчетов — найти напряжение на каждом конденсаторе в произвольном электрическом состоянии схемы. Необходимо выделить участки, имеющие различные потенциалы, ввести потенциал каждого участка и произвольно обозначить знаки «+» и «–» зарядов пластин каждого конденсатора. Далее следует записать уравнения, используя два правила:

А. Заряд изолированной части схемы сохраняется.

Б. При обходе любого замкнутого контура сумма разностей потенциалов пластин конденсаторов равна сумме ЭДС, входящих в контур. Сумма ЭДС содержит члены $+\varepsilon$ (или $-\varepsilon$), если направление обхода совпадает (или противоположно) с направлением от отрицательного электрода генератора к положительному.

Отметим, что значению $C = 0$ соответствует разрыв цепи. Случай $C = \infty$ соответствует замене конденсатора проводником.

Задача 1.8.1. В схеме рис. 1.8.1 *а* генератор напряжения с ЭДС равной ε подключен к батарее конденсаторов, состоящей из двух последовательно соединенных конденсаторов емкостями C_1 и C_2.

А. Найдите напряжение на каждом конденсаторе.

Решение. В схеме три участка цепи имеют различные потенциалы φ_a, φ_b, φ_c (рис. 1.8.1 *б*). Напряжение на конденсаторах $V_1 = \varphi_a - \varphi_b$, $V_2 = \varphi_b - \varphi_c$. Согласно определению ЭДС $\varphi_a - \varphi_c = \varepsilon$. Расставим произвольно знаки зарядов на пластинах конденсаторов. На рис. 1.8.1 *б* знак «+» на верхней обкладке конденсатора C_1 обозначает, что верхняя пластина имеет заряд $Q_1 = C_1 V_1$. Величина Q_1 может быть положительной или отрицательной в зависимости от значения V_1.

Составим теперь систему уравнений, следующую из приведенных выше правил.

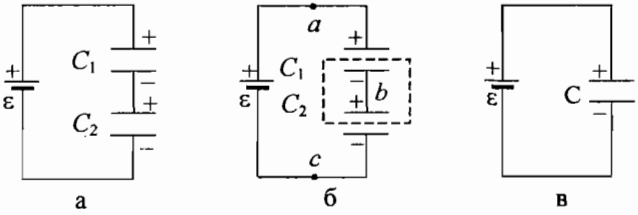


рис. 1.8.1

1. Обведенная пунктиром часть схемы изолирована. Поскольку первоначальный заряд конденсаторов равен нулю, то

$$0 = -C_1V_1 + C_2V_2 \qquad (1)$$

2. Обходя контур *abca*, получим соотношение

$$V_1 + V_2 = \varepsilon \qquad (2)$$

Это уравнение следует из очевидного тождества $\varphi_a - \varphi_c = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_c$. Из системы (1), (2) находим

$$V_1 = \frac{C_2\varepsilon}{C_1 + C_2}, \; V_2 = \frac{C_1\varepsilon}{C_1 + C_2}.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$, то $V_1 > 0$, $V_2 > 0$: заряды на верхних пластинах конденсаторов $Q_1 = C_1V_1$ и $Q_2 = C_2V_2$ оказались положительными и одинаковыми: $Q_1 = Q_2 = Q$.

Б. Найдите емкость батареи конденсаторов.

Решение. Эквивалентная схема изображена на рис. 1.8.1 *в*. Согласно определению (1.6.1) $\varphi_a - \varphi_c = Q/C_{12}$, где C_{12} — емкость батареи. С другой стороны,

$$\varphi_a - \varphi_c = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_c = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{12} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Задача 1.8.2. Многослойные конденсаторы массового производства содержат $N + 1$ пластину, промежутки между которыми заполнены титанатом бария с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 5\,000$, площадь пластин $S = 1$ см^2, толщина $d = 20$ мкм, $N = 50$. На рис. 1.8.2 *а* показан разрез части конденсатора. Эквивалентные схемы изображены на рис. 1.8.2 *б*, *в* — конденсатор представляет собой N соединенных элементарных конденсаторов емкостью $C_0 = \varepsilon_0\varepsilon S/d$. Найдите емкость конденсатора.

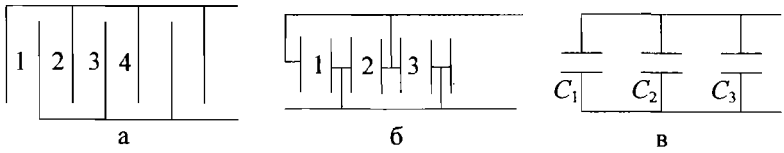


рис. 1.8.2

Задача 1.8.3. Найдите разность потенциалов между точками b и d в схеме, показанной на рис. 1.8.3 *а*.

Решение. В этой схеме четыре участка с различными потенциалами. Расставим произвольно знаки зарядов на пластинах конденсаторов и введем обозначения $V_3 = \varphi_a - \varphi_d$, $V_4 = \varphi_d - \varphi_c$. Аналогично задаче 1.8.1 получим

$$V_3 = \frac{C_4\varepsilon}{C_3 + C_4}, \quad V_4 = \frac{C_3\varepsilon}{C_3 + C_4}.$$

Учитывая решение задачи 1.8.1 найдем разность потенциалов между точками b и d

$$\varphi_b - \varphi_d = \varphi_b - \varphi_a + \varphi_a - \varphi_d = V_3 - V_1 = \frac{(C_1C_4 - C_2C_3)\varepsilon}{(C_1 + C_2)\ (C_3 + C_4)}.$$

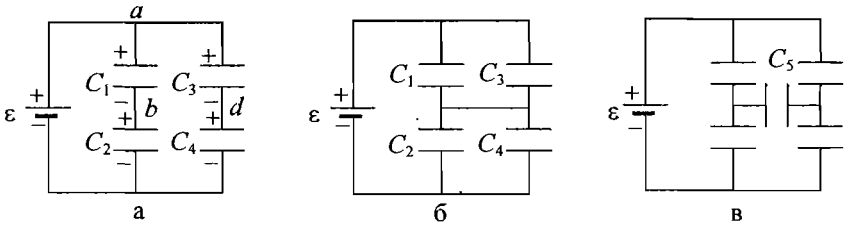


рис. 1.8.3

Если емкости удовлетворяют условию $C_1C_4 = C_2C_3$, то $\varphi_b - \varphi_d = 0$. В этом случае исходная схема эквивалентна рис. 1.8.3 *б* или схеме, изображенной на рис. 1.8.3, *в*, причем конденсатор C_5 остается незаряженным. Таким образом, если в схеме рис. 1.8.3 *в* емкости четырех конденсаторов связаны соотношением $C_1/C_3 = C_2/C_4$, то конденсатор C_5 можно заменить проводником.

Задача 1.8.4. Батарею конденсаторов, изображенную на рис. 1.8.4 *а*, отключили от источника напряжения, а затем соединили точки b и d проводником. Найдите заряд, который протечет по проводнику, соединяющему верхние пластины C_1 и C_3 ($C_1 = C_2 = C_3 = C$, $C_4 = 3C$).

Решение. Используя результаты задач 1.8.1 и 1.8.3, найдем заряды на верхних пластинах конденсаторов C_1 и C_2 до отключения источника напряжения

$$Q_1 = C_1V_1 = 0{,}5\ C\varepsilon, \qquad Q_3 = C_3V_3 = 0{,}75\ C\varepsilon.$$

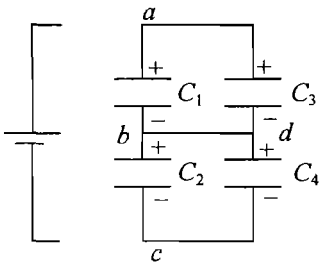


рис. 1.8.4

После соединения точек b и d заряды перераспределяются. Обозначим потенциалы четырех участков φ_a', φ_b', φ_c', φ_d' на схеме рис. 1.8.4. Введем далее напряжения на конденсаторах

$$V_1' = \varphi_a' - \varphi_b',\ V_3' = \varphi_a' - \varphi_d'$$

и расставим знаки зарядов. Поскольку суммарный заряд на верхних обкладках C_1 и C_3, равный 1,25 $C\varepsilon$, сохраняется, то $C_1V_1' + C_3V_3' = 1{,}25\ C\varepsilon$.

Рассмотрим контур $adba$. Учитывая, что $\varphi_b' = \varphi_d'$, находим уравнение $V_1' = V_3'$. Следовательно, заряды на верхних обкладках C_1 и C_3 стали равны

$$Q_1' = C_1V_1' = \frac{5}{8}C\varepsilon,\ Q_2' = C_3V_3' = \frac{5}{8}C\varepsilon.$$

Теперь нетрудно определить, какой заряд ΔQ протечет от C_3 к C_1: $\Delta Q = Q_1' - Q_1 = C\varepsilon/8$. Очевидно, $\Delta Q_3 = Q_3' - Q_3 = -\Delta Q_1$.

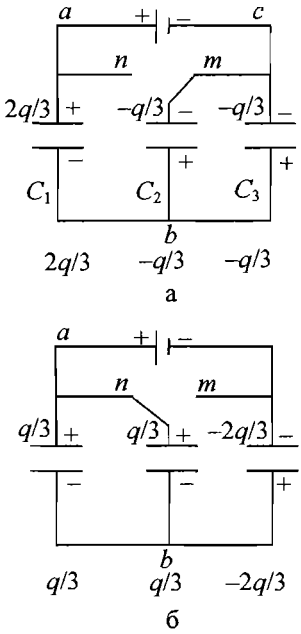


рис. 1.8.5

Задача 1.8.5. В схеме рис. 1.8.5 *а* емкости конденсаторов $C_1 = C_2 = C_3 = C$, $C = 3$ нФ. ЭДС батареи $\varepsilon = 4$ В. Вначале ключ находился в положении, обозначенном буквой m.

А. Найдите заряд, прошедший через батарею при переключении ключа из положения m в положение n.

Решение. Найдем заряды на пластинах конденсаторов в схеме рис. 1.8.5 *а*. В схеме три участка имеют различные потенциалы φ_a, φ_b, φ_c. Нижние пластины конденсаторов образуют изолированную систему. Предположим, что до включения генератора конденсаторы не были заряжены. Тогда в силу правила *А* имеем: $-CV_1 + 2CV_{23} = 0$, где $V_1 = \varphi_a - \varphi_b$, $V_{23} = \varphi_b - \varphi_c$. Далее, согласно правилу Б для контура, содержащего генератор и конденсаторы C_1 и C_2, имеем $\varepsilon = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_c$, где $\varepsilon = \varphi_a - \varphi_c$. Следовательно, из системы уравнений

$$-CV_1 + 2CV_{23} = 0, \qquad V_1 + V_{23} = \varepsilon$$

получим $V_1 = 2\varepsilon/3$, $V_{23} = \varepsilon/3$. Для схемы, изображенной на рис. 1.8.5 *б* аналогичным методом получим $V_{12}' = \varepsilon/3$, $V_3' = 2\varepsilon/3$, где $V_{12}' = \varphi_a' - \varphi_b'$, $V_3' = \varphi_b' - \varphi_c'$.

Значения зарядов на верхних пластинах указаны на рис. 1.8.5, где $q = C\varepsilon$. Следовательно, через батарею пройдет заряд $q/3 = 4$ нКл.

Б. Найдите приращение заряда на верхней пластине конденсатора C_2 после переключения ключа из положения *m* в положение *n*.

Задача 1.8.6. Две батареи с ЭДС равными ε_1 и ε_2 включены в схему рис. 1.8.6, содержащую конденсаторы емкостями C_1, C_2, C_3.

А. Найдите напряжение на конденсаторе C_3.

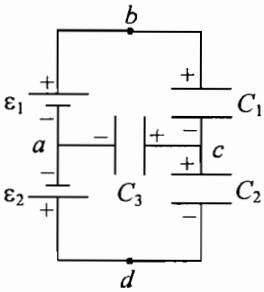


рис. 1.8.6

Решение. В схеме четыре участка имеют различные потенциалы. Обозначим произвольно знаки зарядов на пластинах конденсаторов и введем обозначения

$$U_1 = \varphi_b - \varphi_c\,,\ U_2 = \varphi_c - \varphi_d\,,\ U_3 = \varphi_c - \varphi_a\,.$$

Из закона сохранения заряда изолированной части схемы следует уравнение

$$0 = -C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3. \qquad (1)$$

Обход по контуру *abca* приводит к уравнению

$$U_1 + U_3 = \varepsilon_1. \qquad (2)$$

Обход по контуру *acda* приводит к еще одному уравнению

$$-U_3 + U_2 = -\varepsilon_2. \qquad (3)$$

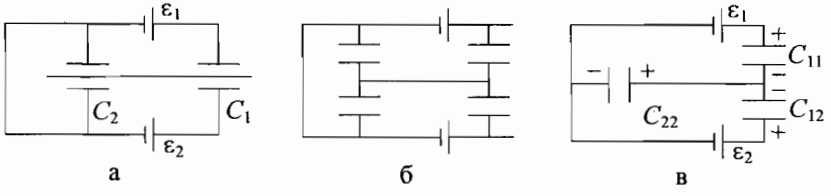
Из системы (1)–(3) находим

$$U_3 = \frac{C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Б. Изобразите схему, соответствующую случаю $C_3 \ll C_1$, C_2.

В. Изобразите схему, соответствующую случаю $C_3 \gg C_1$, C_2.

Задача 1.8.7. Бесконтактный подвес. В схеме рис. 1.8.7 *а* ЭДС батарей $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$, емкости двух идентичных плоских конденсаторов $C_1 = C_2 = C$. В среднюю плоскость между обкладками конденсаторов поместили тонкую металлическую пластинку параллельно пластинам обкладок. Найдите приращение заряда на верхней пластине конденсатора C_1.



а б в

рис. 1.8.7

Решение. В исходной схеме в отсутствии пластинки конденсатор C_2 не заряжен. При обходе по контуру, содержащему ε_1, C_1 и ε_2, получим разность

потенциалов на конденсаторе $V_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Следовательно, заряд верхней пластины конденсатора C_1 равен $q_1 = C\varepsilon$.

После внесения пластинки изменяются емкости конденсаторов. Последовательные эквивалентные схемы изображены на рис. 1.8.7 *б*, в. Емкости конденсаторов $C_{11} = 2C$, $C_{12} = 2C$, $C_{22} = 4C$. Обозначим произвольно знаки зарядов на обкладках конденсаторов (рис. 1.8.7 *в*). Разности потенциалов между обкладками конденсаторов обозначим соответственно V_{11}, V_{12}, V_{22}. Из закона сохранения заряда изолированной части схемы следует уравнение

$$0 = -2V_{11} - 2V_{12} + 4V_{22}. \qquad (1)$$

При обходе по контуру, содержащему конденсаторы C_{11}, C_{22} и ε_1, получим уравнение

$$V_{11} + V_{22} = 2\varepsilon.. \qquad (2)$$

При обходе по контуру, содержащему конденсаторы C_{12}, C_{22} и ε_2, получим еще одно уравнение

$$V_{12} + V_{22} = \varepsilon. \qquad (3)$$

Из системы уравнений (1)–(3) находим $V_{11} = 5\varepsilon/4$, $V_{12} = \varepsilon/4$, $V_{22} = 3\varepsilon/4$. Следовательно, заряд верхней обкладки конденсатора C_1 равен $q'_1 = 5C\varepsilon/2$. Приращение заряда $\Delta q_1 = 3C\varepsilon/2$.

Отметим, что это устройство представляет собой электростатический бесконтактный подвес. Если сумма силы тяжести и силы, действующей на пластинку в электрическом поле конденсаторов, равна нулю, то в определенном положении пластинка может находиться в равновесии. Однако положение равновесия неустойчиво. Согласно теореме, доказанной английским математиком С. Ирншоу (S. Earnshaw), система неподвижных зарядов не может быть устойчивой.

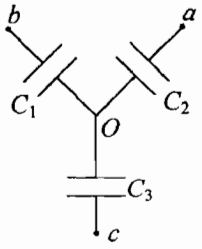


рис. 1.8.8

Пример 1.8.8. На рис. 1.8.8 изображена схема модели электростатического подвеса — устройства, в котором тело, представляющее собой соединенные пластины трех конденсаторов находится в равновесии. Потенциалы точек *a, b, c* поддерживают равными $\varphi_a = \varphi_b = \varphi$, φ_c, емкости конденсаторов $C_1 = C_2 = C_3 = C$. Сообщим точке *O* заряд *Q*. Найдите потенциал φ_0 точки *O* и величины зарядов внутренних пластин конденсаторов.

Пусть внутренние пластины конденсаторов имеют положительные значения зарядов. Из закона сохранения изолированной части схемы следует уравнение

$$2C(\varphi_0 - \varphi) + C(\varphi_0 - \varphi_c) = Q,$$

из которого находим

$$\varphi_0 = \frac{2\varphi}{3} + \frac{\varphi_c}{3} + \frac{Q}{3C},$$

$$q_1 = q_2 = q, \; q = \frac{Q}{3} - \frac{1}{3}CV, \quad q_3 = \frac{Q}{3} + \frac{2}{3}CV, \quad V = \varphi - \varphi_c.$$

Тест

1-3. Рассмотрим две параллельные плоскости: плоскость $z = 0$ с поверхностной плотностью заряда σ_1 и плоскость $z = a$ с поверхностной плотностью заряда σ_2. На рис. 1 изображена зависимость z-компоненты напряженности электрического поля E_z от координаты z при различных значениях σ_1 и σ_2. Величина $n = \sigma / 2\varepsilon_0$.

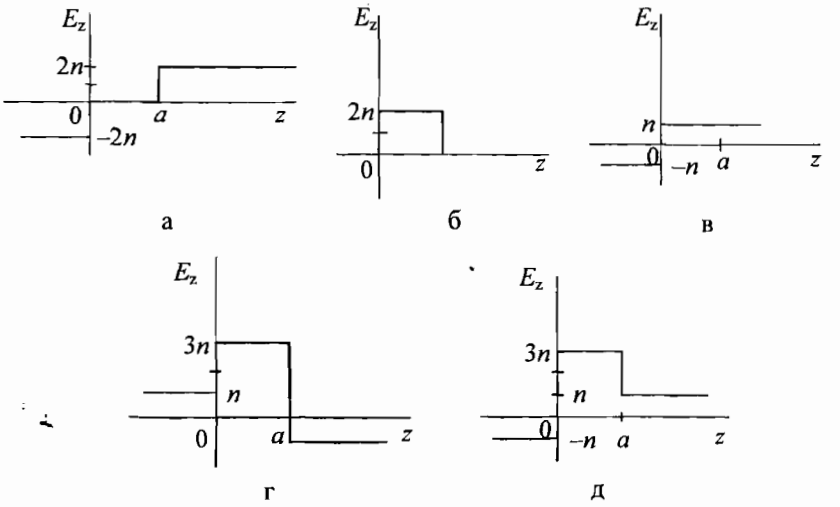


рис. 1

1. Укажите график, соответствующий значениям $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$, $\sigma > 0$: А, Б, В, Г, Д.

2. Укажите график, соответствующий значениям $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma$, $\sigma > 0$: А, Б, В, Г, Д.

3. Укажите график, соответствующий значениям $\sigma_1 = 2\sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$, $\sigma > 0$: А, Б, В, Г, Д.

4-5. Две тонкие заряженные металлические пластинки в форме прямоугольника площадью S находятся в однородном электростатическом поле напряженностью $\vec{E}_0 = (0, 0, E_0)$.

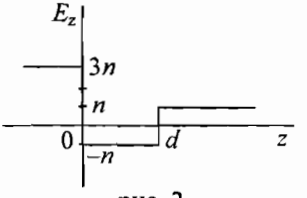


рис. 2

4. Пластинки изолированы. На первой пластинке, расположенной в плоскости $z = 0$, распределен заряд $q_1 = -2q$, а на второй, находящейся в плоскости $z = d$, распределен заряд $q_2 = q$. На рис. 2 изображена зависимость компоненты напряженности электрического поля E_z от координаты z, где $n = q/2\varepsilon_0 S$. Величина E_0 имеет значение:

А. $2n$, **Б.** n, **В.** $3n$, **Г.** $4n$, **Д.** $6n$.

5. Пластинки соединяют проводником. Приращение заряда первой пластинки:

А. q, **Б.** $2q$, **В.** $-q$, **Г.** $-q/2$, **Д.** $q/2$.

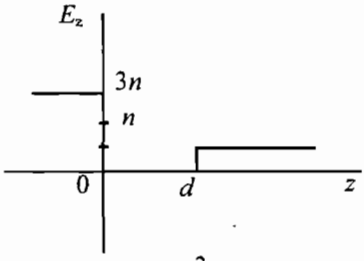


рис. 3

6. Заряженная металлическая пластинка с боковой гранью в форме прямоугольника площадью S находится в однородном электростатическом поле напряженностью $\vec{E}_0 = (0, 0, E_0)$. Одна грань пластинки совпадает с плоскостью $z = 0$, другая — с плоскостью $z = d$. На рис. 3 изображена зависимость компоненты напряженности электрического поля E_z от координаты z, где $n = q/2\varepsilon_0 S$. Заряд пластинки Q и проекция напряженности внешнего поля E_0 соответственно равны:

А. $q, 2n$, **Б.** $2q, 2n$, **В.** $-q, 3n$, **Г.** $2q, 4n$, **Д.** $-q, 2n$.

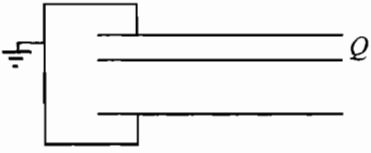


рис. 4

7. Три пластины расположены параллельно друг другу, как показано на рис. 4. Наружные металлические пластины, расстояние между которыми $d = 0{,}5$ м, соединены заземленным проводом. Внутренняя пластина изолирована и имеет заряд $Q = 10^{-10}$ Кл. Эту пластину смещают вниз на расстояние 0,1 м. В результате приращение заряда верхней пластины оказывается равным:

А. $5 \cdot 10^{-10}$ Кл, **Б.** $-5 \cdot 10^{-10}$ Кл, **В.** 10^{-12} Кл, **Г.** $2 \cdot 10^{-11}$ Кл, **Д.** $-2 \cdot 10^{-11}$ Кл.

Глава 2. Постоянный ток

2.1. Закон Ома

Электрический ток представляет собой направленное перемещение носителей заряда: электронов или ионов. Здесь мы рассмотрим ток в металлическом проводнике. Носителями тока являются электроны. Однако в электротехнике принято считать, что ток создается движением положительных зарядов. Поэтому приходится говорить, что направление тока противоположно направлению движения электронов.

2.1.1. Элементарные представления о проводимости металлов. Следует сразу же подчеркнуть, что объяснение строения и свойств вещества стало возможным только с появлением квантовой механики. В ряде пособий обсуждается «аналогия» между электрическим током и течением жидкости в трубе. Здесь авторы демонстрируют непонимание метода аналогии. Наи-

более полное определение этого подхода принадлежит Д.К. Максвеллу. Он писал: «...подобие, которое является основой аналогии, существует не между самими явлениями, но между математическими соотношениями, описывающими эти явления». Если бы существовала аналогия между током и течением жидкости, то не было бы сверхпроводимости.

Приведем в упрощенном виде современные представления о природе проводимости металлов. При образовании кристаллической решетки атомы переходят в состояние с наименьшим значением полной энергии. В этом процессе, обусловленном кулоновским взаимодействием ядер и электронов, проявляются новые квантово-механические законы. Валентный электрон, принадлежащий ранее определенному атому, может легко перейти к соседнему атому. В конечном итоге внешние электроны теряют связь с атомами и могут перемещаться по всему кристаллу в любом направлении. Таким образом, электроны как газ заполняют пространство между ионами решетки. Разумеется, перемещаясь по кристаллу, они взаимодействуют друг с другом и с положительно заряженными ионами решетки. Из квантовой теории следует, что даже электроны внутренних атомных оболочек могут двигаться по кристаллу. Однако они не дают вклад в проводимость. Например, для меди можно принять, что на каждый атом решетки приходится один «свободный» электрон. Эти электроны и являются носителями тока в металлах.

Важно отметить, что энергия хаотического движения электронов в металлах при температуре $T = 0$ К лежит в интервале $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F$, где $\varepsilon_F = 1{,}7 \div 7$ эВ. Например, для серебра $\varepsilon_F = 5{,}5$ эВ. Скорость электрона, соответствующая этой энергии равна $1{,}39 \cdot 10^6$м/с. При нулевой температуре электроны обладают кинетической энергией *нетеплового* происхождения. В то же время энергия теплового движения электронов $E = 1{,}5\, k_Б T$ при комнатной температуре равна 0,038 эВ. Мы приходим к выводу, что электроны в металле являются типично неклассическими объектами — энергия, обусловленная тепловым движением, значительно меньше энергии, имеющей нетепловое происхождение. Условие $T_C \approx \varepsilon_F/1{,}5\, k_Б$ определяет нижнюю границу T_C области, в которой можно пренебречь квантовыми эффектами: $T_C = 11\,000 \div 54\,000$ К. Верхняя граница принадлежит меди. Поскольку любой металл расплавится задолго до того, как будет достигнута температура T_C, то электроны в металле никогда не достигнут классического режима. Поэтому анализ движения электрона в металле на основе второго закона Ньютона невозможен.

2.1.2. Электрический ток. Сила тока. Рассмотрим участок металлического проводника *ab* (рис. 2.1.1). Потенциалы точек *a* и *b* соответственно равны φ_a и φ_b. В этом случае внутри и вне проводника существует электрическое поле. Под действием электрического поля электроны приобретают добавочную скорость, направленную параллельно вектору $-\vec{E}$, где $\vec{E}$ — напряженность электрического

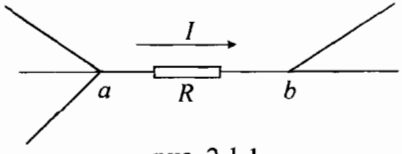


рис. 2.1.1

поля в металле. Таким образом, появляется преимущественное направление движения электронов — возникает электрический ток.

Сила тока. Это понятие вводится для характеристики направленного движения зарядов в тонком проводе. В общем случае в схеме можно выделить точки, в которых сходятся не менее трех проводов. Такие точки называют *узлами*. Для того чтобы дать определение силы тока, введем произвольно положительное направление на участке одного из проводов, соединяющих два соседних узла. Построим теперь функцию $q(t)$ по правилу: значение $q(t)$ равно разности зарядов, прошедших через поперечное сечение провода в положительном и отрицательном направлениях за время t. Сила тока представляет собой производную функции $q(t)$:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} \tag{2.1.1}$$

Если $I > 0$, то заряды движутся в положительном направлении, в случае $I > 0$ заряды движутся в отрицательном направлении. Единица силы тока — *ампер*: 1 А = 1 Кл/с.

Пример 2.1.1. На рис. 2.1.2 изображены две различные функции $q(t)$ и соответствующие токи. На рис.1.2.2 *а* изображены графики функций

$$q(t) = I_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{и} \quad I(t) = I_0 - gt.$$

При $t < T$ заряд переносится в положительном направлении с убывающей скоростью. В момент $t = T$ средняя скорость переноса равна нулю. В интервале $t > T$ ток становится отрицательным. Поскольку носители заряда движутся в отрицательном направлении, то функция $q(t)$ убывает. Рис. 2.1.2, *б* соответствует протеканию постоянного тока в положительном направлении, которое мы заранее определили на проводнике.

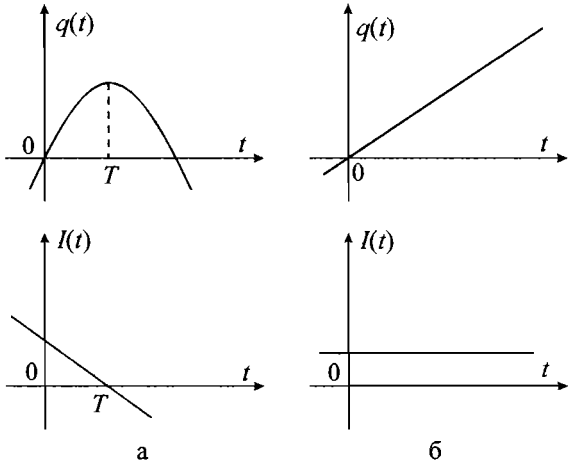


рис. 2.1.2

Задача 2.1.2. Согласно теории Бора в основном состоянии атома водорода электрон движется вокруг протона по круговой орбите радиусом $a = 0{,}053$ нм. Какой силе тока эквивалентно движение электрона по орбите? (Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.)

Решение. Функция $q(t)$ принимает значения e_0, $2e_0$, $3e_0$, ... в интервалах $(0, T)$, $(T, 2T)$, $(2T, 3T)$, ... , где T — период вращения электрона. Следовательно, сила тока $I = e_0/T$. Величину $1/T$ найдем из второго закона Ньютона:

$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a = \frac{ke_0^2}{a^2}.$$

Сила тока

$$I = \sqrt{\frac{k}{ma}}\frac{e_0^2}{2\pi a} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}\ \text{А}.$$

2.1.3. Закон Ома для участка цепи. Назовем разность потенциалов точек a и b на рис. 2.1.1 *напряжением* $V = \varphi_a - \varphi_b$. Зависимость силы тока от напряжения на любом участке цепи называется *вольт-амперной характеристикой*. Для металлического проводника эта зависимость выражается законом, открытым Г. Омом в 1827 г.: если температура проводника постоянна, то

$$\varphi_a - \varphi_b = IR \quad \text{или} \quad V = IR \tag{2.1.2}$$

Коэффициент пропорциональности R называется сопротивлением проводника, а участок цепи, обладающий заметным сопротивлением — *резистором*. Единица сопротивления называется *ом*: 1 Ом = 1 В/А. Сопротивление зависит от материала проводника, длины l и площади поперечного сечения S:

$$R = \frac{\rho l}{S} \tag{2.1.3}$$

Здесь ρ — удельное сопротивление проводника — величина, характеризующая механизм проводимости. Поэтому более фундаментальной является формулировка закона Ома в терминах *плотности тока* $j = I/S$:

$$j = \frac{V}{RS} = \frac{V}{\rho l} = \sigma E, \tag{2.1.4}$$

где $\sigma = 1/\rho$ — *проводимость* материала проводника, $E = V/l$ — напряженность поля.

Значение удельного сопротивления ρ_0 при $t = 0°C$ можно найти в таблицах. В небольшом диапазоне не слишком низких температур удельное сопротивление $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$, где α — температурный коэффициент сопротивления, имеющий различные значения для разных проводников и зависящий от температуры. Подставляя значение ρ в формулу для сопротивления проводника (5.3), получим

$$R_t = \rho\frac{l}{S} = \rho_0(1+\alpha t)\frac{l}{S} = R_0\left(1+\alpha t\right), \tag{2.1.5}$$

где $R_0 = \rho_0 l/S$ сопротивление данного проводника при $t = 0°C$.

Размерность удельного сопротивления — Ом·м. Из всех металлов наибольшей электропроводностью, т. е. наименьшим значением ρ, обладает серебро $\rho_{Ag} = 1{,}59 \cdot 10^{-8}$ Ом·м (при 20°С), далее идет медь ($1{,}72 \cdot 10^{-8}$ Ом·м), затем золото ($2{,}44 \cdot 10^{-8}$ Ом·м). Например медный провод длиной $l = 1$ км, сечением $S = 10$ мм^2 имеет сопротивление $R = 1{,}72$ Ом.

У сплавов удельное сопротивление сильно возрастает. Например, для константана, состоящего из 60 % меди и 40 % никеля, $\rho = 44 \cdot 10^{-8}$ Ом·м (у никеля $\rho = 7{,}2 \cdot 10^{-8}$ Ом·м). Удельное сопротивление морской воды $\rho = 1 \div 3$ Ом·м, мышечной ткани 5 Ом·м.

2.1.4. Общий метод расчета электрических цепей, не содержащих генераторов напряжения. Рассмотрим схему, состоящую из произвольно соединенных резисторов и конденсаторов. Схема имеет несколько выводов, разность потенциалов между которыми известна. Основная задача состоит в определении токов и разности потенциалов между любыми точками схемы.

Изобразим стрелками положительные направления на проводниках и введем обозначения $I_1, I_2, \ldots, I_S$ для токов, протекающих между узлами схемы. В узлах токи разветвляются. Поместим узел внутри некоторой замкнутой поверхности. Поскольку концентрация электронов не меняется, то сохраняется полный заряд, ограниченный этой поверхностью. Следовательно, сумма токов, входящих в узел, должна равняться сумме токов выходящих из узла:

$$\sum_{\text{вход}} I_n = \sum_{\text{выход}} I_n \qquad (2.1.6)$$

Это соотношение называют *уравнением непрерывности* токов. Если в схеме n узлов, то соотношения дают $(n - 1)$ независимых уравнений.

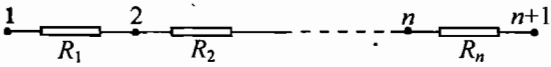
Для того чтобы записать полную систему s уравнений для s токов, необходимо еще $(s - n + 1)$ уравнений. Недостающие уравнения могут быть получены в результате рассмотрения произвольных замкнутых контуров, которые можно выделить в схеме. Напряжение на резисторах, входящих в контур, определяется законом Ома. В любом замкнутом контуре *сумма падений напряжений на каждом из элементов контура* (резисторе или конденсаторе) равна нулю. Математическая запись этого утверждения приводит в общем случае к системе зависимых уравнений. Для вывода $(s - n + 1)$ независимых уравнений следует рассматривать только те контуры, которые нельзя получить наложением уже использованных контуров.

В результате решения полной системы уравнений получим значения токов I_k ($k = 1, 2, \ldots, s$). Если значение некоторого тока окажется отрицательным, то это означает, что на данном участке цепи ток течет в отрицательном направлении. Разность потенциалов между любыми двумя точками схемы равна сумме падений напряжений на каждом элементе произвольного контура, соединяющего данные точки.

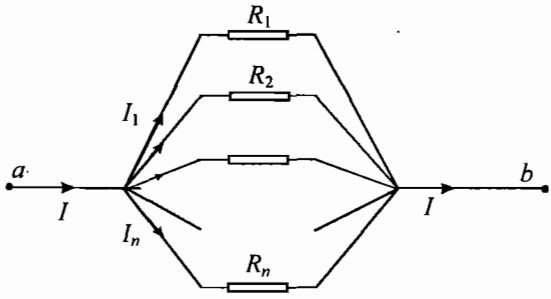
Последовательное соединение резисторов. Рассмотрим схему, не содержащую узлов: n — резисторов соединены так, что резистор R_i присоеди-

нен к резистору $R_{i+1}(i = 1, \ldots, n-1)$ (рис. 1.1.3 *а*). Разность потенциалов между точками 1 и $n + 1$ равна V: $\varphi_1 - \varphi_{n+1} = V$. Очевидно,

$$\varphi_1 - \varphi_{n+1} = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \ldots + (\varphi_n - \varphi_{n+1}).$$



а



б

рис. 2.1.3

Поскольку при последовательном соединении резисторов ток I не разветвляется, то $\varphi_i - \varphi_{i+1} = IR_i$. Подставляя разности потенциалов, получим

$$V = IR,\ R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n. \qquad (2.1.7)$$

Если напряжения на резисторах не имеют самостоятельного значения, то исходную схему можно заменить эквивалентной схемой, содержащей только один резистор R.

Параллельное соединение резисторов. При параллельном соединении начала и концы проводников сходятся в два узла (рис. 2.1.3 *б*). Очевидно, сила тока, втекающего в узел *a*, равна сумме токов вытекающих из него:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n.$$

Поскольку напряжение $V = \varphi_a - \varphi_b$ на каждом резисторе одинаково, то согласно закону Ома $V = I_k R_k$. Учитывая значения токов, получим $I = V/R$, где

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}. \qquad (2.1.8)$$

Если нас не интересует распределение токов в резисторах, то исходную схему можно заменить эквивалентной, содержащей только один резистор R.

Переход к эквивалентной схеме в общем случае следует начинать с отыскания резисторов, соединенных друг с другом параллельно или последова-

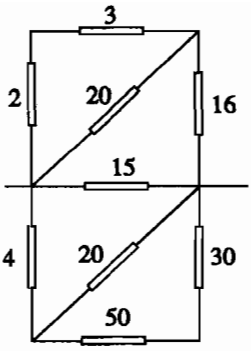


рис. 2.1.4

тельно. Если в схеме удается найти такие проводники, используя формулы (2.1.7) и (2.1.8), их следует заменить одним эквивалентным резистором и получить более простую схему. Полученную схему надо стремиться упростить аналогичным путем.

Если в схеме нет ни параллельно, ни последовательно соединенных проводников, то для определения эквивалентного сопротивления следует воспользоваться тем же методом расчета, который привел к выражениям (2.1.7) и (2.1.8).

Задача 2.1.3. В схеме рис. 2.1.4 обозначены значения сопротивлений резисторов в СИ. Найдите общее сопротивление схемы.

Задача 2.1.4. На рис. 2.1.5 изображен длинный кабель — жила с внешней изоляцией, погруженная в проводящую среду. Сопротивление участка жилы кабеля R, сопротивление участка изоляции r. Найдите сопротивление схемы между точками a и b. Исследуйте случай $r >> R$.

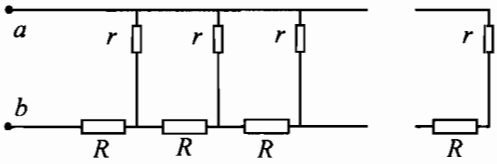


рис. 2.1.5

Решение. Ток течет не только по жиле, но и протекает через изоляцию по другому «проводу» — проводящей среде. Пусть x — сопротивление схемы. Поскольку число звеньев достаточно велико, то эквивалентная схема представляет собой резистор R, к которому последовательно присоединен резистор сопротивлением $xr/(x + r)$. Следовательно,

$$R+\frac{xr}{x+r}=x, \qquad x=\frac{1}{2}\left(R+\sqrt{R^2+4rR}\right).$$

При $r >> R$ имеем $x = \sqrt{rR}$.

Отметим, что с середины 40-х годов XIX века быстро росла сеть телеграфных линий. Выдающийся российский электротехник Б.С. Якоби доказал, что один из проводов линии можно убрать, используя в качестве второго землю (1843 г.). В трансатлантической линии — второй провод — вода. Эпопея прокладки кабеля началась в 1857 г. и только пятая экспедиция 1866 года оказалась успешной. Теоретиком проекта был блестящий ученый Уильям Томсон, которому за заслуги в разработке трансатлантического телеграфа было пожаловано дворянское звание (1866 г.).

Задача 2.1.5. А. На рис. 2.1.6 изображена схема электропроводки, позволяющая включать лампу $Л_1$ при входе в первую комнату, выключать

лампу $Л_1$ и одновременно включать лампу $Л_2$ при переходе во вторую комнату и так далее.

Б. *Изобразите схему переключения* для люстры из пяти ламп, позволяющую включать две лампы, три лампы и пять ламп.

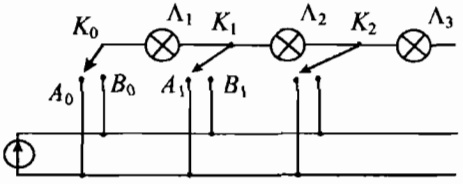


рис. 2.1.6

Задача 2.1.6. Схема рис. 2.1.7 *а* содержит четыре резистора. Разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_k = V$.

А. Найдите разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_c$ точек *b* и *c*.

Решение. Искомую разность потенциалов представим в виде $\varphi_b - \varphi_c = \varphi_a - \varphi_c - (\varphi_a - \varphi_b)$. Согласно закону Ома $\varphi_a - \varphi_c = I_3R_3$, где I_3 — сила тока в цепи резисторов R_3 и R_4. Из закона Ома для этой цепи находим

$$I_3 = \frac{V}{R_3 + R_4}.$$

Следовательно,

$$\varphi_a - \varphi_c = \frac{VR_3}{R_3 + R_4}.$$

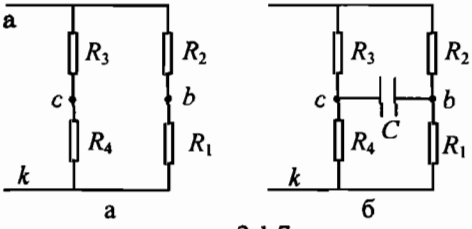


рис. 2.1.7

Аналогичным образом находим

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{VR_2}{R_1 + R_2}.$$

Разность потенциалов

$$\varphi_b - \varphi_c = V\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$

Отсюда следует важный вывод: если $R_2/R_3 = R_1/R_4$, то $\varphi_b - \varphi_c = 0$.

Б. В схеме рис. 2.1.7 *а* разность потенциалов $V = 120$ В, а разность потенциалов между точками *c* и *b* равна $\varphi_c - \varphi_b = 20$ В. Отношение сопротивлений $R_4/R_3 = 5$. Найдите разности потенциалов $V_2 = \varphi_a - \varphi_b$ на резисторе R_2, $V_3 = \varphi_a - \varphi_c$ на резисторе R_3, $V_4 = \varphi_c - \varphi_k$ на резисторе R_4, $V_1 = \varphi_b - \varphi_k$ на резисторе R_1.

В. Найдите заряд правой пластины конденсатора емкостью C = 1 мкФ в схеме рис. 2.1.7 *б*, где $\varphi_a - \varphi_k = 120$ В сопротивления резисторов R_1 = 2 кОм, R_2 = 8 кОм, $R_3 = R_4$ = 5 кОм.

Г. Пусть в схеме рис. 2.1.7 *б* сопротивления резисторов $R_2 = R_4 = 0$. Поясните, почему разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_c = V$.

Д. Пусть в схеме рис. 2.1.7 *б* сопротивления резисторов $R_2 = R_3 = 0$. Поясните, почему $\varphi_b - \varphi_c = 0$.

Задача 2.1.7. Схема рис. 2.1.8 *а* содержит пять резисторов. Представляя схему в более привычном виде на рис. 2.1.8 *б* убедимся, что в ней отсутствуют параллельные и последовательные соединения резисторов.

А. Найдите сопротивление R участка ak.

Решение. В схеме четыре узла и соответственно четыре участка, имеющих потенциалы φ_a, φ_b, φ_k, φ_c. Пусть $\varphi_a - \varphi_k = V$. Обозначим через I_n силу тока, протекающего через резистор R_n, I — сила тока, втекающего в узел a. Стрелками на рис. 2.1.8 *б* обозначены положительные направления на участках схемы, заключенных между соседними узлами. Согласно закону непрерывности токов в узлах a, b, c, получим из (2.1.6) уравнения

$$I = I_1 + I_4, \tag{1}$$

$$I_1 = I_5 + I_2, \tag{2}$$

$$I_3 = I_5 + I_4. \tag{3}$$

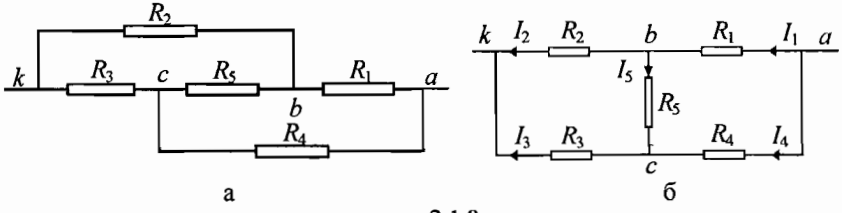


рис. 2.1.8

Уравнение $I = I_2 + I_3$ для узла k не является независимым: оно следует из системы (1)—(3).

Полная система уравнений, относительно шести неизвестных токов должна содержать еще три уравнения. Рассмотрим контур abk. Очевидно,

$$\varphi_a - \varphi_k = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_k.$$

Из закона Ома для участков ab и bk цепи находим, что

$$\varphi_a - \varphi_b = I_1 R_1, \quad \varphi_b - \varphi_k = I_2 R_2.$$

Следовательно,

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = V. \tag{4}$$

Далее для контуров *ack* и *abck* аналогичным путем находим

$$I_4R_4 + I_3R_3 = V, \tag{5}$$

$$I_1R_1 + I_5R_5 + I_3R_3 = V. \tag{6}$$

Решение этой системы можно представить в виде $V = IR$, где R — сопротивление участка *ak*. Возможно, Вы уже представили, сколь громоздким будет выражение R. Поэтому упростим задачу и рассмотрим нетривиальный случай, полагая $R_1 = R_3 = r_1$, $R_2 = R_4 = r_2$.

Вычитая (5) из (4) находим уравнение

$$(I_1 - I_3)r_1 + (I_2 - I_4)r_2 = 0 \tag{7}$$

Заметим, что это уравнение является следствием равенства нулю суммы падений напряжений в замкнутом контуре *abkca*. Теперь, учитывая (2), (3), получим уравнение

$$I_1 - I_3 = I_2 - I_4 . \tag{8}$$

Из (7), (8) следует, что $I_1 = I_3$, $I_2 = I_4$. Таким образом, приходим к системе

$$I = I_1 + I_2, \quad I_1 = I_5 + I_2, \tag{9, а}$$

$$I_1r_1 + I_2r_2 = V, \quad 2I_1r_1 + I_5R_5 = V, \tag{9, б}$$

из которой находим $V = IR$,

$$R = \frac{(r_1 + r_2)R_5 + 2r_1r_2}{r_1 + r_2 + 2R_5} \tag{10}$$

Убедимся в корректности решения, рассматривая ряд частных случаев, позволяющих перейти к эквивалентным схемам, более простым по сравнению с исходной.

Рассмотрим интересный случай, полагая $r_1 = r_2 = R_5 = r$ — все резисторы в схеме рис. 2.1.8 *а* имеют одинаковые сопротивления. В этом случае электрическое состояние частей схемы *bac* и *bkc* должно быть одинаково. В силу этой симметрии $I_5 = 0$. Действительно, из уравнений (9) находим, что $I_5 = 0$. Поскольку $\varphi_b = \varphi_c$, то точки *b* и *c* можно совместить. Тогда эквивалентная схема будет содержать два последовательно соединенных участка, в которых резисторы R_1, R_4 и R_2, R_3 соединены параллельно. Общее сопротивление $R = r$.

Вернемся к исходной схеме рис. 2.1.8 *а, б* и рассмотрим еще два частных случая.

1. Пусть $R_2 = R_3 = 0$. Тогда резисторы R_1, R_5 и R_3 соединены параллельно. Общее сопротивление определяется формулой (2.1.8).

2. Заменим резисторы R_2 и R_4 конденсаторами C_2 и C_4. Эта замена эквивалентна разрыву цепи между точками *a*, *c* и точками *b*, *k*. Тогда получим схему, состоящую из последовательно соединенных резисторов R_1, R_5 и R_3.

Б. В схеме рис. 2.1.8 *а* $R_1 = R_3 = r_1$, $R_2 = R_4 = r_2$, $R_5 = 0$. Изобразите эквивалентную схему. Пусть $r_1 = 5$ Ом, $r_2 = 20$ Ом, $V = 40$ В. Найдем силу тока I_5, проходящего через проводник *bc*.

Общее сопротивление $R = 8$ Ом, сила тока $I = 5$ А. Далее имеем систему $I_1 + I_2 = I$, $I_1 r_1 = I_2 r_2$, из которой находим $I_1 = 4$ А, $I_2 = 1$ А. Покажите, что

$$I_5 = V\frac{r_2 - r_1}{2r_2 r_1}.$$

Следовательно, $I_5 = 3$ А.

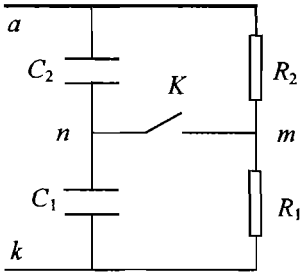


рис. 2.1.9

В. В схеме рис. 2.1.8 а $R_1 = R_3 = r_1$, $R_2 = R_4 = r_2$, $R_5 >> r_1, r_2$. Изобразите эквивалентную схему. Найдите разность потенциалов между точками *b* и *c*.

Задача 2.1.8. В схеме рис. 2.1.9 разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_k = V$, $V = 3$ В, сопротивления резисторов $R_1 = 6$ кОм, $R_2 = 4$ кОм, емкости конденсаторов $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 80$ мкФ.

А. Ключ К разомкнут. Найдите заряд верхней пластины конденсатора C_1.

Б. Ключ *К* замкнут. Найдите заряд верхней пластины конденсатора C_1.

В. Найдите заряд, прошедший через проводник *mn* после замыкания ключа.

Задача 2.1.9. В схеме рис. 2.1.10 содержится три резистора. Разности потенциалов

$$\varphi_a - \varphi_k = V_1,\ \varphi_b - \varphi_k = V_2.$$

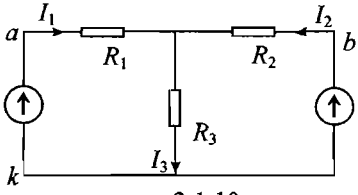


рис. 2.1.10

Стрелками обозначены положительные направления токов I_1, I_2, I_3, протекающих через резисторы R_1, R_2, R_3.

А. В схеме $R_3 = 0$. Найдите силу тока I_3.

Б. В схеме $R_2 = 0$. Найдите силу тока I_1.

В. В схеме $R_2 >> R_1, R_3$. Найдите силу тока I_1.

Г. Симметричная схема: $R_1 = R_2 = R_3 = R$, $V_1 = V_2 = V$. Найдите силу тока, протекающего через каждый резистор.

2.2. Электрохимический элемент. Закон Ома для полной цепи

Аккумулятор, с помощью которого осуществляется запуск автомобильного двигателя, и сухая батарейка в фонарике — представляют собой хорошо известные электрохимические элементы. Не задумывались ли вы, какие процессы происходят в батарейке? Почему новая батарейка заставляет лампочку фонаря ярко светиться, а проработавшая много часов — нет?

2.2.1. Электрохимический или гальванический элемент. Рассмотрим электрохимический элемент Даниэля. Он составлен из двух электродов — медного, погруженного в раствор сульфата меди ($CuSO_4$), и цинкового, погруженного в раствор сульфата цинка ($ZnSO_4$). Оба раствора могут проходить через поверхность пористой перегородки, разделяющей растворы (рис. 2.2.1).

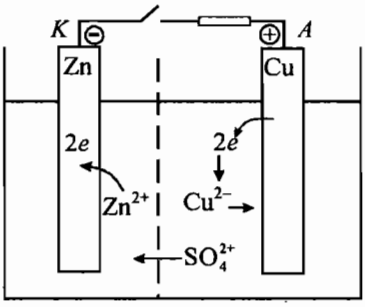


рис. 2.2.1

Что же происходит в электрохимическом элементе? Молекула $CuSO_4$ в воде распадается на два иона Cu^{2+} и SO_4^{2-}, а молекула $ZnSO_4$ — на два иона Zn^{2+} и SO_4^{2-}. Цинковый электрод окисляется — атомы цинка оставляют в нем по два электрона и в виде положительных ионов переходят в раствор. Электрод приобретает отрицательный заряд. По мере накопления ионов Zn^{2+} наступает равновесие — в тонком слое на границе раздела между цинком и раствором возникает разность потенциалов $\varphi_{Zn} - \varphi_p = -\varepsilon_K$, $\varepsilon_K = 0{,}76$ В. У медной пластины происходит восстановление — ион Cu^{2+} присоединяет два электрона от медного электрода и оседает на нем. Электрод приобретает положительный заряд. В равновесном состоянии между медным электродом и раствором устанавливается разность потенциалов $\varphi_{Cu} - \varphi_p = \varepsilon_A$, $\varepsilon_A = 0{,}34$ В. Между электродами возникает разность потенциалов $\varphi_{Cu} - \varphi_{Zn} = \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon_A + \varepsilon_K = 1{,}1$ В.

Если теперь соединить оба электрода, то во внешней цепи электроны будут смещаться от цинкового электрода к медному. На вертикальной прямой (рис. 2.2.2) отмечены потенциалы различных точек цепи, элементы которой схематически показаны ниже. Точки a' и k' находятся на границе электродов a и k с растворами солей. Распределение потенциалов показывает, что во внутренней части электрическое поле направлено от цинкового электрода к медному. Поэтому ион SO_4^{2-}, перемещается к цинковой пластинке и в растворе образуется $ZnSO_4$.

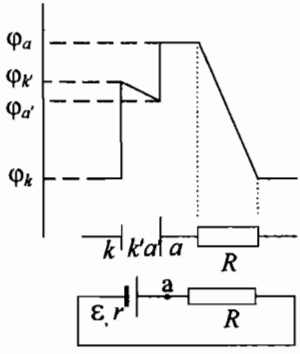


рис. 2.2.2

Если внешняя цепь разомкнута, то окислительно-восстановительные реакции прекращаются. На отрицательном электроде имеется избыток электронов, а на положительном — недостаток электронов. В результате между электродами возникает разность потенциалов, равная значению ε. При подключении внешней цепи разность потенциалов на зажимах источника уменьшается.

При длительной работе элемента его состав претерпевает изменения. Понижение концентрации Cu^{2+} приведет к уменьшению продуктов реакции,

сопровождаемое падением ε, т. к., согласно принципу Ле Шателье, в равновесной системе происходят изменения противодействующие изменению условий реакции. Если химическая реакция в элементе обратима, то, пропуская ток в обратном направлении, можно восстановить исходное состояние элемента. Именно это происходит при зарядке батареи аккумуляторов.

2.2.2. Электродвижущая сила. В электрохимическом элементе Даниэля протекают две электродные реакции (или полуреакции): реакция окисления $Zn = Zn^{2+} + 2e$ и реакция восстановления $Cu^{2+} + 2e = Cu$. Результирующее уравнение реакции

$$Zn + CuSO_4 \rightarrow Cu + ZnSO_4, \qquad (2.2.1)$$

означает, что электрод k теряет атом Zn, электрод a приобретает атом Cu, а в растворе одна молекула $CuSO_4$ замещается молекулой $ZnSO_4$. В результате реакции два электрона перемещаются по замкнутой внешней цепи. На каждые $\Delta\nu$ молей цинка, перешедшего в раствор из цинкового электрода, на медном электроде выделяется $\Delta\nu$ молей меди. Важно отметить, что эта реакция протекает самопроизвольно. Пользуясь справочными данными, найдем максимальную работу $\delta A = C\Delta\nu$, $C = 209{,}8$ кДж/моль, которая может быть совершена во внешней и внутренней цепях при постоянных температуре и давлении в ходе реакции (2.2.1). Эту величину можно представить как работу, которая произведена при обратимом переносе заряда $\Delta q = e_0\Delta N$, $\Delta N = 2N_A\Delta\nu$. Учитывая, что 1 Дж = $6{,}24 \cdot 10^{18}$ эВ, найдем работу при переносе одного электрона $A_e = C\Delta\nu/\Delta N = C/2N_A$, $A_e = 1{,}1$ эВ.

Одной из характеристик элемента является величина

$$\varepsilon = \frac{\delta A}{\Delta q} \qquad (2.2.2)$$

называемая электродвижущей силой — сокращенно ЭДС. Для элемента Даниэля $\varepsilon = \dfrac{C}{2e_0N_A} = 1{,}1$ В. Величина δA представляет собой работу, производимую элементом при переносе заряда Δq по замкнутой цепи. В замкнутой цепи $\Delta q = I\Delta t$. Следовательно, работа, совершаемая электрохимическим элементом по перемещению заряда Δq по замкнутой цепи,

$$\delta A = I\varepsilon\Delta t. \qquad (2.2.3)$$

Мощность, развиваемая электрохимическим элементом,

$$P = I\varepsilon \qquad (2.2.4)$$

характеризует скорость передачи энергии электронам в момент времени t.

Здесь следует отметить, что в отсутствие магнитного поля, на электроны и ионы могут действовать только сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $e\vec{E}$, где $\vec{E}$ — напряженность электрического поля. Сторонние силы, которые вводят в популярной литературе для объяснения возникновения ЭДС, в природе не сущест-

вуют. Перенос электронов обусловлен хорошо знакомым кулоновским взаимодействием ионов и электронов, приводящим к реакции (2.2.1) в подсистеме, называемой электрохимическим элементом. Авторы либо не дают определения этого понятия, либо вводят их как «силы, действующие на заряженные частицы, за исключением сил электростатического происхождения (т. е. кулоновских)». Более того, появляются понятия-монстры: «химическая сила электромагнитного происхождения» и пр. В действительности, начиная с работы В. Гайтлера и Ф. Лондона, опубликованной в 1927 г., известно, что основой теорий химической связи и химических реакций является квантовая механика и **кулоновское** взаимодействие ядер и электронов.

Понятие сторонних сил полностью лишено конструктивного содержания: вычисление ЭДС — проблема, давно решенная в термодинамической теории химических реакций.

2.2.3. Открытие электрохимического элемента. До конца XVIII в. единственный способ получения электричества был основан на электризации трением. В 1780—1791 гг. итальянский физиолог Л. Гальвани исследовал влияние «электричества» на работу мышц. 26 сентября 1786 г. он открыл новое интересное явление: при замыкании цепи, состоящей из двух разнородных металлов, приложенных к оголенному нерву препарированной лягушки, возникает мускульное сокращение, аналогичное тому, которое вызывается разрядом лейденской банки. Гальвани сделал заключение о существовании «животного электричества»: источником электричества являются ткани лягушки. Опыты Гальвани приобрели громадную популярность. В 1792 г. итальянский физик Алессандро Вольта проводит новую серию опытов. Однако он сомневается в существовании «животного электричества» и утверждает, что вовсе не мышца разряжается через провод. Основной причиной эффекта он считал наличие разнородных металлов. В доказательство он провел в 1894 г. свой знаменитый опыт. Вольта брал две монеты или диски из разных металлов и клал одну под язык, другую — на язык. Если края монет соединялись, то можно было ощутить кисловатый «вкус» электричества. Это был первый в истории человечества источник напряжения. Действительно, если электродами являются цинк и медь, а электролитом вода, то у медного электрода идет реакция $2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-$, а у цинкового — $Zn + 2OH = ZnO + H_2O + 2e$.

В конце 1799 г. Вольта собрал батарею, состоящую из последовательно соединенных серебряных и цинковых пластин, разделенных влажными дисками из ткани, — вольтов столб. Это изобретение принесло ему всемирную славу.

Появление первого генератора тока, несмотря на его несовершенство (накопление водорода приводило к быстрому падению ЭДС) открыло новую эпоху в исследованиях и практических приложениях множества электромагнитных явлений. Не преувеличивая, можно утверждать, что Вольтов столб стоит в начале современной цивилизации.

2.2.4. Электродные потенциалы. Все процессы в элементе Даниэля реализуются только потому, что атом цинка легко отдает электроны иону меди

$$Zn + Cu^{2+} \rightarrow Zn^{2+} + Cu$$

и образуется состояние с меньшей энергией.

Теперь можно сделать некоторые обобщения. Расположим металлы в ряд, в котором предыдущий металл отдает электроны последующему: Zn, Fe, Pb, H_2, Cu, Ag, Au. Отсюда, например, можно заключить, что в электрохимическом элементе, содержащем медный и серебряный электроды, в 1 м растворе нитрата серебра $AgNO_3$ и сульфата меди, электроны будут перемещаться от медного к серебряному электроду. В этом случае

$$\varphi_{Cu} - \varphi_p = 0{,}34\ В, \quad \varphi_{Ag} - \varphi_p = 0{,}80\ В.$$

ЭДС элемента $\varepsilon = 0{,}46$ В.

Согласно теории ЭДС элемента $\varepsilon = -\Delta G/\Delta q$, где Δq — переносимый заряд,

$$\Delta G = -\sum_a \Delta(\mu_a N_a),$$

G — термодинамический потенциал системы, N_a — количество атомов металла и молекул электролита в электрохимической реакции, μ_a — химический потенциал атома металла или молекулы электролита, значения которых известны. Для элемента Даниэля

$$\Delta G = \mu(Cu) + \mu(ZnSO_4) - [\mu(Zn) + \mu(CuSO_4)] =$$
$$= [\mu(Cu) - \mu(Cu^{2+})] - [\mu(Zn) - \mu(Zn^{2+})] < 0.$$

Это соотношение позволяет представить ЭДС в виде

$$\varepsilon = \varepsilon(Zn/Zn^{2+}) - \varepsilon(Cu/Cu^{2+}),$$

где $\varepsilon(A/A^{n+})$ — *электродный потенциал* — разность потенциалов между металлической фазой и фазой 1М раствора ионов металла.

Химиками определено множество электродных потенциалов. Приведем ряд значений в порядке убывания способности к отдаче электронов: $\varepsilon(Zn/Zn^{2+}) = 0{,}763$ В, $\varepsilon(Fe/Fe^{2+}) = 0{,}441$ В, $\varepsilon(Ni/Ni^{2+}) = 0{,}25$ В, $\varepsilon(Pb/Pb^{2+}) = 0{,}126$ В, $\varepsilon(H_2/2H^+) = 0$ В, $\varepsilon(Cu/Cu^{2+}) = -0{,}337$ В, $\varepsilon(Ag/Ag^+) = -0{,}8$ В, $\varepsilon(Hg/Hg^{2+}) = -0{,}854$ В.

2.2.5. Электричество в живых организмах. Только дальнейшее развитие науки показало, что существуют «металлическое» и «животное» электричество. Действительно при последовательном соединении нескольких различных металлических проводников между крайними проводниками возникает разность потенциалов. Если на обоих концах цепи находятся одинаковые металлы, то разность потенциалов между ними равна нулю. Однако, если цепь включает проводники с носителями тока различной природы — металлы и электролиты, то сумма всех контактных разностей потенциалов не равна нулю. При замыкании такой цепи в ней возникает ток.

Впервые разность потенциалов между поврежденным и целым участком клетки обнаружил в 1837 г. итальянский ученый К. Маттеучи. Однако, только

в 1902 г. немецким ученым Ю. Бернштейном была создана первая количественная теория биопотенциалов. Его работа показала, что электрические явления в живом организме и в технических устройствах имеют одну природу.

Мембранный потенциал. Каждая клетка живого организма представляет собой замкнутый объем, покрытый жесткой оболочкой — мембраной, толщиной $d \sim 7 \div 15$ нм. Она отделяет внутреннюю среду клетки от внешней среды. Межклеточная среда всех животных представляет собой, по существу, разбавленную морскую воду, главный компонент которой — поваренная соль NaCl. Здесь концентрация ионов калия в 30 раз меньше концентрации ионов натрия. Однако, внутри клетки концентрация ионов калия в $30 \div 40$ раз выше, чем в наружной среде. В мембране имеются каналы, открытые в состоянии покоя. Благодаря различию концентраций возникают потоки ионов через мембрану. В результате на ее поверхности образуется двойной заряженный слой подобный пластинам конденсатора. Разделение зарядов продолжается до тех пор пока установится динамическое равновесие, соответствующее разности потенциалов между внешней и внутренней поверхностями мембраны $\sim 50 \div 60$ мВ. Это и есть *потенциал покоя* клетки.

Электрорецепторы. Электрический орган рыб — хищников представляет собой подкожный канал длиной порядка 10 см, один конец которого открыт наружу, а другой устилает слой клеток. Через тонкое ответвление (синапс) клетка соединена с одним из отростков аксона (нервное волокно). Каждое волокно связано приблизительно с 2000 клеток. Если канал находится в электрическом поле напряженностью E_0, направленом паралелльно оси от слоя клеток наружу, то в одной части мембраны каждой клетки возникает приращение потенциала покоя $\Delta V_L = E_0 d$, а на противоположной стороне $\Delta V_R = -E_0 d$, где d — толщина мембраны. Далее включается механизм генерации нервного импульса, направляемого в центральную нервную систему. Электрические органы акул и скатов реагируют на поля напряженностью $E \approx 0{,}1$ мкВ! Эти хищники способны обнаружить добычу по электрическому полю, возникающему при работе сердца и сокращении мышц.

2.2.6. Закон Ома для полной цепи. Мы уже назвали законом Ома соотношение (2.1.2). Однако Г. Ом начал свои экспериментальные исследования на установке, схема которой изображена на рис. 2.2.3. Он показал, что сила тока в цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \qquad (2.2.5)$$

Величину r — называют внутренним сопротивлением электрохимического элемента. Почти десять лет его работа не находила признания. Одна из причин в несовершенстве батарей: за время, необходимое для измерений, ЭДС существенно менялась.

Закон Ома можно представить в виде

$$Ir + IR = \varepsilon. \qquad (2.2.6)$$

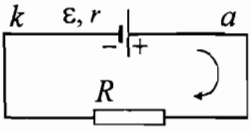


рис. 2.2.3

Величина IR равна в соответствие с (2.1.2) разности потенциалов точек a и k: $\varphi_a - \varphi_k = IR$. Тогда из (2.2.6) следует, что напряжение на электродах элемента $\varphi_a - \varphi_k = \varepsilon - Ir$ меньше значения ε на величину падения напряжения на внутреннем сопротивлении.

Важно отметить, что напряжение на резисторе R зависит от значения трех величин ε, R и r:

$$V_R = IR = \frac{\varepsilon R}{R+r}, \; V_r = Ir = \frac{\varepsilon r}{R+r}. \qquad (2.2.7)$$

При значении $R = r$ эти напряжения равны. Если $R >> r$, то напряжение на резисторе R очень близко к значению ε. В пределе, когда сопротивление внешней цепи будет бесконечно велико (т. е. при разомкнутой цепи), напряжение между зажимами источника равно значению ЭДС. В другом предельном случае, когда источник замкнут накоротко (т. е. $R = 0$), напряжение на внутренней цепи максимально и равно ε. Сила тока короткого замыкания $I_{КЗ} = \varepsilon/r$.

У старой батарейки внутреннее сопротивление становится очень большим: $r >> R$. Поэтому напряжение на лампочке сопротивлением R равно

$$U_R = \frac{R\varepsilon}{r} << \varepsilon.$$

2.2.7. Источник напряжения и источник тока. В популярной литературе обычно не различают эти термины. Однако в электротехнике они представляют собой два различных понятия.

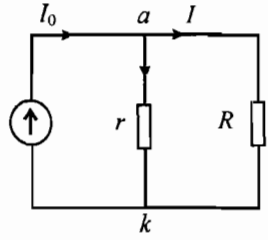


рис. 2.2.4

Идеальным *источником или генераторм напряжения* называют такой элемент, у которого внутреннее сопротивление равно нулю. В реальном источнике напряжения, близком к идеальному, внутреннее сопротивление $r << R$, где R — сопротивление нагрузки. Из (2.2.7) находим, что $V_R \approx \varepsilon$.

Идеальным *источником тока* называют такой элемент, который создает ток, неизменный при изменении нагрузки, т. е. его внутреннее сопротивление $r >> R$. Схема реального источника тока, близкого к идеальному, изображена на рис. 2.2.4. Здесь $r >> R$. Поэтому сила тока через резистор

$$I = \frac{I_0}{1+(R/r)} \approx I_0.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только реальные источники напряжения.

Задача 2.2.1. Покажите, что разность потенциалов $\varphi_{k'}$ и $\varphi_{a'}$, отмеченных на рис. 2.2.2, равна Ir.

Задача 2.2.2. Найдите относительную ошибку в измерении ЭДС источника напряжения, если показания вольтметра, присоединенного к электро-

дам, принять за ЭДС. Внутреннее сопротивление батареи $r = 0{,}1$ Ом, сопротивление вольтметра $R = 200$ Ом.

2.2.8. Закон Ома для участка цепи, содержащего источник напряжения. Запишем закон Ома для участка замкнутой цепи на рис. 2.2.3, содержащей источник напряжения. Положительное направление тока указано стрелкой. Мы уже установили, что

$$\varphi_a - \varphi_k = \varepsilon - Ir. \qquad (2.2.8)$$

Теперь это соотношение справедливо для участка цепи на рис. 2.2.5 *а*. Между точками *a* и *k* может находиться некоторая «внешняя» по отношению к рассматриваемому участку часть цепи, содержащая резисторы, конденсаторы и источники напряжения, соединенные произвольным образом. В этом случае мы получим новую информацию, представляя (2.2.8) в виде

$$\varphi_a - \varphi_k = (I_{КЗ} - I)/r\,, \quad I_{КЗ} = \frac{\varepsilon}{r}$$

При силе тока меньше чем сила тока короткого замыкания, разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_k > 0$. Если же через элемент протекает ток силой $I > I_{КЗ}$, то $\varphi_a < \varphi_k$. Эта ситуация рассмотрена в задаче 2.2.3.

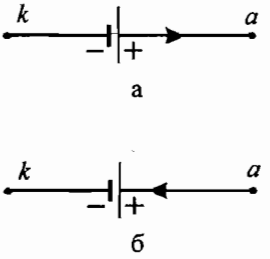


рис. 2.2.5

Обратимся теперь к рис. 2.2.5 *б*. Говорят, что ток течет навстречу ЭДС. Эта ситуация возможна в том случае, когда в цепи действуют другие элементы, не входящие в рассматриваемый участок. Именно таким образом включается аккумулятор для зарядки. Поскольку падение напряжения на внутреннем сопротивлении $\varphi_a - \varphi_k = Ir$, то закон Ома для участка цепи, изображенного на рис. 2.2.5 *б*, принимает вид

$$\varphi_a - \varphi_k = \varepsilon + Ir \qquad (2.2.9)$$

Соотношения (2.2.8) и (2.2.9) чрезвычайно важны при расчете электрических схем. Причина этого в том, что любая цепь постоянного напряжения состоит из отдельных произвольно соединенных элементов: источников напряжения, резисторов и конденсаторов. Записывая закон Ома для резисторов и источников напряжения, мы получаем возможность провести полный анализ произвольных цепей.

При расчете различных цепей необходимо:

1. Начертить схему и указать на ней все элементы цепи: источники тока, резисторы и конденсаторы;

2. Произвольно указать положительные направления на каждом участке цепи, заключенным между соседними узлами, и обозначить силы токов.

3. Используя закон Ома в форме (2.2.8), (2.2.9) и уравнение непрерывности (2.1.6) установить связь между токами, ЭДС и разностями потенциалов различных точек цепи. В результате должна быть получена система уравнений, учитывающая условия задачи и позволяющая определить неизвестные величины. Если после подстановки числовых значений сила тока окажется

отрицательной величиной, то это будет означать, что соответствующий ток течет в направлении, противоположном положительному.

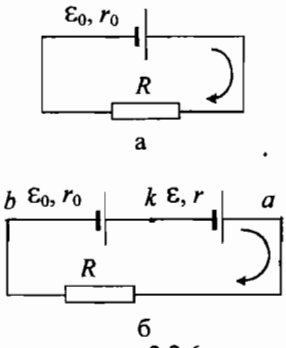


рис. 2.2.6

Задача 2.2.3. Перейдем от схемы рис. 2.2.6 *а*, содержащей батарею с ЭДС равной ε_0, и внутренним сопротивлением r_0 к схеме рис. 2.2.6 *б*, которую дополним еще одним элементом с ЭДС равным ε и внутренним сопротивлением r.

А. Найдите условие, при котором сила тока в схеме рис. 2.2.6 *б* меньше чем сила тока в схеме рис. 2.2.6 *а*.

Решение. В схеме рис. 2.2.6 *б* три участка с различными потенциалами. Стрелками обозначено положительное направление тока I. Для участков ak и kb из (2.2.8) следуют два уравнения

$$\varphi_a - \varphi_k = \varepsilon - Ir,\ \varphi_k - \varphi_b = \varepsilon_0 - Ir_0.$$

Согласно (2.1.2) для участка ba имеем $\varphi_a - \varphi_b = Ir$. Из полученных трех уравнений находим $I = \dfrac{\varepsilon + \varepsilon_0}{R + r_0 + r}$. Неравенство $I < I_0$, $I_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{R + r_0}$ выполняется при условии

$$\frac{\varepsilon_0}{R + r_0} > \frac{\varepsilon}{r} \quad \text{или} \quad I > I_{КЗ},\ I_{КЗ} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

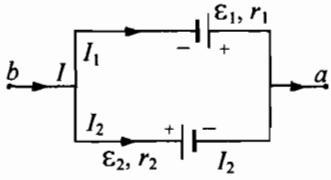


рис. 2.2.7

Б. Докажите, что разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_k$ меньше нуля.

Задача 2.2.4. Два элемента с ЭДС равными $\varepsilon_1 = 4{,}5$ В, $\varepsilon_2 = 1{,}5$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}4$ Ом, $r_2 = 0{,}6$ Ом соединены в батарею параллельно (рис. 2.2.7). Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление батареи.

Решение. Обозначим стрелками положительные направления токов I, I_1 и I_2. Согласно уравнению непрерывности токов

$$I = I_1 + I_2. \qquad (1)$$

Далее, используя закон Ома (2.2.8) и (2.2.9) имеем

$$\varphi_a - \varphi_b = \varepsilon_1 - I_1 r_1,\ \varphi_b - \varphi_a = \varepsilon_2 + I_2 r_2. \qquad (2), (3)$$

Мы должны получить решение этой системы в виде $\varphi_a - \varphi_b = \varepsilon - Ir$. С этой целью умножим уравнение (2) на r_2, (3) — на r_1 и вычтем полученные равенства. В результате находим

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 r_2 - \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2}, \qquad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Подставляя числовые данные, находим $\varepsilon = 2{,}1$ В, $r = 0{,}24$ Ом.

Задача 2.2.5. У вас имеется N ($N >> 1$) одинаковых элементов с ЭДС равной ε и внутренним сопротивлением r. Сопротивление нагрузки равно R. Как следует соединить элементы, чтобы получить максимальную силу тока в цепи?

Решение. Образуем x столбиков из последовательно соединенных N/x элементов. ЭДС столбика — $N\varepsilon/x$, внутреннее сопротивление rN/x. Соединим их параллельно. Тогда ЭДС полученной батареи $N\varepsilon/x$, а полное внутреннее сопротивление Nr/x^2. Следовательно, сила тока в цепи

$$I(x) = \frac{N\varepsilon}{xR + \dfrac{Nr}{x}}.$$

Сила тока достигает максимального значения $I_m = \dfrac{\varepsilon}{2}\sqrt{\dfrac{N}{Rr}}$ при $x_m = \sqrt{\dfrac{Nr}{R}}$.

В случае $R \approx Nr >> r$ имеем $x_m \approx 1$: число столбиков мало. В другом предельном случае, $R << Nr$ величина $x_m >> 1$: число столбиков велико.

Интересно, что законы физики влияли на ход эволюции электрических органов рыб. Они состоят из столбиков плоских клеток, каждая из которых может создать напряжение $\varepsilon_0 \approx 60$ мВ. Электрический угорь — обитатель болот Латинской Америки — имеет всего несколько «столбиков», каждый из которых содержит более 6 000 клеток. У электрического ската, обитающего в морской воде, наоборот, число столбиков ≈ 500, а в столбике всего 400 клеток.

Любопытно, что около 250 видов морских созданий способны вырабатывать кратковременный электрический ток. Например у электрического ската мышечная ткань плавников служит электродом с положительным полюсом в верхней части и с отрицательным — в нижней. Приборы регистрировали разряд напряжением 550 В при силе тока 2 А.

Рыбы, обладающие электрическими органами, способны обнаружить добычу и препятствия в мутной воде. В пространстве, окружающем электроды, создается электрическое поле и в соответствии с (2.1.4) возникает ток. Сила тока, протекающего через различные электрорецепторы электродов, зависит от расстояния до некоторого объекта, его ориентации и удельного сопротивления. По информации, поступающей в мозг, рыба определяет размеры, форму и скорость объекта.

2.3. Правила расчета схем, содержащих резисторы, конденсаторы и источники напряжения

Мы видели, что на основании закона Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, в принципе можно рассчитывать любые разветвленные цепи. Однако значительно удобней применять два правила, которые являются несложным обобщением закона Ома. Они были получены немецким физиком Г. Кирхгофом в 1845 г.

В общем случае в цепи можно найти точки, в которых сходятся не менее трех проводников. Такие точки называются *узлами*. Очевидно, любой заряд,

покинувший один элемент цепи, должен входить в какой-либо другой элемент цепи. Поскольку в узлах токи разветвляются, то из закона сохранения заряда следует условие непрерывности токов: *сумма сил токов, входящих в узел, равна сумме сил токов, выходящих из узла,*

$$\sum_{\text{вход}} I_n = \sum_{\text{выход}} I_n \qquad (2.3.1)$$

Направления токов мы заранее не знаем. Поэтому следует произвольно задать положительные направления токов и ввести обозначения I_k для силы тока, текущего в положительном направлении. Если в результате решения для какого-либо тока I_k получится отрицательное значение, то это означает, что на данном участке цепи в действительности ток течет в направлении, обратном выбранному.

Соотношение (2.3.1) называется *первым правилом Кирхгофа.*

Второе правило относится к произвольно замкнутым контурам, которые можно выделить в данной цепи. Оно гласит: *в любом замкнутом контуре сумма падений напряжений на резисторах равна сумме ЭДС, имеющихся в этом контуре электрохимических элементов.*

Падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника напряжения и резисторах, считается положительным, если направление обхода на данном участке совпадает с положительным направлением тока. ЭДС берется с положительным знаком, если обход элемента начинается с отрицательного полюса. При обходе источника напряжения от положительного полюса к отрицательному ЭДС следует брать со знаком «минус».

В ряде цепей наряду с ЭДС и резисторами могут быть включены конденсаторы. Разумеется, ток через конденсатор равен нулю. Его пластины заряжаются противоположными по знаку зарядами $\pm Q$ и имеют определенные потенциалы. Разность этих потенциалов определяет напряжение U на конденсаторе. Величина заряда $Q = CU$ зависит от емкости конденсатора и напряжения на пластинах. Знаки зарядов на пластинах конденсаторов заранее не известны и расставляются произвольно, за исключением очевидных ситуаций. Если в схеме имеется изолированный участок, содержащий пластины конденсаторов, то для него выполняется закон сохранения заряда. Правило знаков дополняется следующим: напряжение на конденсаторе считается положительным, если при обходе контура конденсатор проходят от положительно заряженной пластины к отрицательной, и считается отрицательным — в противоположном случае.

Приступая к расчету произвольной цепи, надо, прежде всего, обозначить токи между узлами, напряжения на конденсаторах и произвольно выбрать положительные направления токов и знаки зарядов на пластинах. Полное число уравнений, составленных по правилам Кирхгофа, должно равняться числу различных токов и напряжений на конденсаторах в данной схеме. При этом необходимо проследить, чтобы все уравнения были независимы. Независимые уравнения можно составить для тех контуров, которые не получаются в результате наложения уже рассмотренных.

Задача 2.3.1. В схеме рис. 2.3.1 заданы сопротивление R, ЭДС источников напряжения ε_1 и ε_2 и внутренние сопротивления r_1 и r_2. Определите значение ε, при котором ток через резистор R равен нулю.

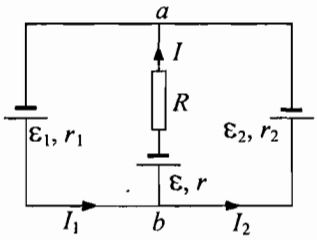


рис. 2.3.1

Решение. В схеме два узла. Обозначим стрелками положительные направления токов I, I_1, I_2. Для каждого узла первое правило Кирхгофа дает

$$I_1 = I + I_2, \tag{1}$$

Для контура $a\,\varepsilon_1\,b\,\varepsilon_2\,a$ второй закон Кирхгофа приводит к уравнению

$$I_1 r_1 + I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \tag{2}$$

Для контура $a\,\varepsilon\,b\,\varepsilon_2\,a$ имеем

$$I_2 r_2 - IR - Ir = -\varepsilon_2 + \varepsilon, \tag{3}$$

По условию задачи $I = 0$. Полагая в (1)—(3) $I = 0$ и, исключая I_1 и I_2, находим

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 r_1 + \varepsilon_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Сравните это выражение с выражением, полученным в задаче 2.2.4: они, по существу, идентичны. Действительно нарисуем схему эквивалентную рис. 2.3.1, «перебросив» элемент ε_2 налево. Тогда мы имеем батарею, состоящую из двух элементов, подключенную к «внешнему» участку цепи ab.

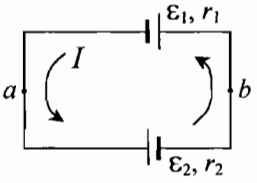


рис. 2.3.2

Задача 2.3.2. На схеме рис. 2.3.2 $\varepsilon_1 = 1$ В, $\varepsilon_2 = 3$ В, $r_1 = 0{,}1$ Ом, $r_2 = 0{,}3$ Ом. Определите разность потенциалов точек a и b.

Задача 2.3.3. Присоединим к схеме рис. 2.2.3 участок, содержащий конденсатор емкостью C и электрохимический элемент с ЭДС равной ε_1. Тогда получим схему рис. 2.3.3.

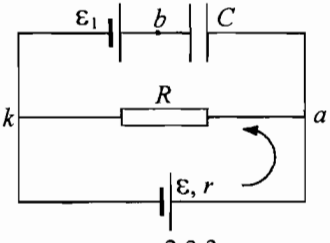


рис. 2.3.3

А. Найдите напряжение на конденсаторе.

Решение. Предположим, правая пластина конденсатора имеет положительный заряд. Назовем напряжением на конденсаторе разность потенциалов точек a и b: $\varphi_a - \varphi_b = V$. В схеме отсутствуют узлы. Применяя второе правило Кирхгофа к контуру, содержащему резистор R и элемент ε, получим уравнение $IR + Ir = \varepsilon$. Для контура, содержащего конденсатор и резистор, имеем $V - IR = -\varepsilon_1$. Из полученных уравнений, находим

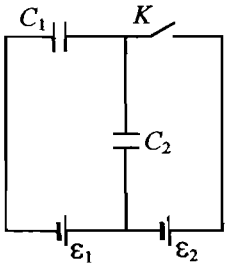


рис. 2.3.4

$$V = \frac{\varepsilon R}{R+r} - \varepsilon_1 .$$

Если $\varepsilon R < \varepsilon_1(R + r)$, то на правой пластине конденсатора заряд $CV < 0$.

Б. Найдите разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_k$ точек b и k.

Задача 2.3.4. Определите заряд, который пройдет через ключ K после замыкания цепи в схеме рис. 2.3.4. ($\varepsilon_1 = 5$ В, $\varepsilon_2 = 3$ В, $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ).

2.4. Тепловое действие тока

2.4.1. Закон Джоуля-Ленца. Мы видели, что электрический ток в проводнике возникает вследствие упорядоченного движения электронов в электрическом поле, создаваемом электрохимическим элементом тока. Электроны приобретают добавочную кинетическую энергию. При столкновении с кристаллической решеткой проводника часть кинетической энергии электрона переходит в энергию теплового движения решетки. Под действием приложенного поля электрон снова приобретает добавочную кинетическую энергию и вновь отдает ее решетке.

Рассмотрим участок цепи, содержащий резистор. Сила, действующая со стороны электронов проводимости на решетку, совершает работу A, которая идет на увеличение внутренней энергии решетки: в проводнике выделяется количество теплоты $Q = A$.

Если через резистор сопротивлением R протекает постоянный ток силой I, то в резисторе за интервал $t_2 - t_1$ выделяется количество теплоты, равное

$$Q = I^2R(t_2 - t_1) \qquad (2.4.1)$$

Это соотношение является математическим выражением закона, открытого в 1841—1842 гг. английским физиком Д. Джоулем и независимо в 1842—1843 гг. российским физиком Э. Х. Ленцем.

С термодинамической точки зрения электронный газ в металле представляет собой систему, температура которой $T_Э$ выше температуры $T_И$ соответствующей энергии теплового движения ионов решетки. Тепло, как всегда, переходит от более нагретой системы электронов к менее нагретой кристаллической решетке. Энергия, отдаваемая электронами, компенсируется путем непрерывного «нагревания» электронов внешним электрическим полем. Ответ на вопрос — как будет изменяться температура проводника — зависит от характера термодинамического процесса, в котором он участвует совместно с окружающей проводник внешней средой.

Если по проводнику протекает переменный ток силой $I(t)$, то за интервал времени $(t, t + \Delta t)$ в нем выделится количество теплоты

$$\delta Q = I^2(t)R\Delta t \qquad (2.4.2)$$

Для определения количества теплоты Q, выделяющейся в резисторе за конечный отрезок времени $[t_1, t_2]$, разобьем его на N элементарных отрезков Δt_k и выберем на каждом из них точку t_k. Суммируя элементарные количества теплоты, получим величину Q.

2.4.2. Мощность, потребляемая резистором. Рассмотрим резистор на рис. 2.1.1, включенный между точками a и b с потенциалами φ_a и φ_b. Разность потенциалов $V = \varphi_a - \varphi_b > 0$. Электрическое поле, поддерживающее ток на участке ab, производит работу. При переносе заряда $\Delta q = I\Delta t$ элементарная работа $\delta A = V\Delta q = IV\Delta t$. Приращение энергии, полученной электронами в результате работы поля равно количеству теплоты, переданной решетке и выделившейся в проводнике. Действительно, используя закон Ома $V = IR$, имеем $\delta A = I^2(t)R\Delta t = \delta Q$. Величина

$$P(t) = I^2 R = \frac{V^2}{R} \qquad (2.4.3)$$

называется *мгновенной мощностью, потребляемой резистором*. Она характеризует скорость выделения теплоты в резисторе. Отметим, что в «популярной» литературе величину $P = I^2R$ называют терминами «мощность тока» или «мощность в цепи», которые не имеют какого-либо физического смысла. Из (2.1.4) можно найти мгновенную мощность, потребляемую единицей объема проводника $p = \sigma E^2$.

Задача 2.4.1. Паяльник рассчитан на напряжение $U_0 = 220$ В. Как нужно изменить сопротивление, чтобы паяльник работал нормально при напряжении $U_1 = 110$ В?

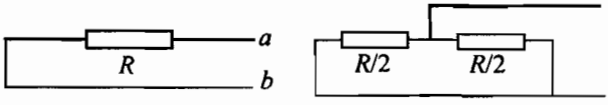


рис. 2.4.1

Решение. Пусть сопротивление паяльника R_0. В нормальном режиме работы потребляется мощность P_0. Поскольку $P_0 = U_0^2 / R_0$ то в сети с напряжением U_1 потребляется мощность

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_0} = P_0\left(\frac{U_1}{U_0}\right)^2 = 0{,}25\,P_0$$

в четыре раза меньше P_0. Для того чтобы паяльник работал нормально при при напряжении U_1, необходимо изменить его сопротивление R_0 до значения R_1, которое найдем из условия $P_0 = U_1^2 / R_1$. Следовательно,

$$R_1 = R_0\left(\frac{U_1}{U_0}\right)^2 = 0{,}25\,R_0.$$

Сопротивление R_0 надо уменьшить на 0,75 R_0. Для этого достаточно, не укорачивая спираль, изменить схему включения (рис. 2.4.1).

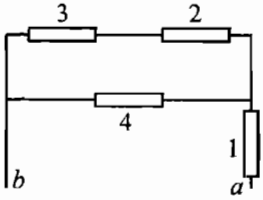


рис. 2.4.2

Задача 2.4.2. В схеме рис. 2.4.2 четыре резистора имеют равные сопротивления. Если к выводам *a* и *b* приложить напряжение $V = 10$ В, то резистор R_1 потребляет мощность $P_1 = 18$ Вт. Найдите мощности, потребляемые остальными резисторами.

Решение. Пусть R — сопротивление одного резистора. Тогда сопротивление схемы $R_{ab} = 5R/3$. Сила тока через резистор R_1 равна

$$I = \frac{V}{R_{ab}} = \frac{3V}{5R},$$

а напряжение на этом резисторе $V_1 = IR = 3V/5$, $V_1 = 6$ В. Поскольку $P_1 = V_1^2 / R$, то $R = 2$ Ом. Очевидно, напряжение на резисторе R_4 равно $V - V_1 = 4$ В, а напряжения на резисторах R_3 и R_2 одинаковы: $V_3 = V_2 = 2$ В. Следовательно, мощности потребляемые резисторами R_2, R_3, R_4, соответственно, равны $P_2 = P_3 = 2$ Вт, $P_4 = 8$ Вт.

Задача 2.4.3. Ребра тетраэдра *ABCD* представляют собой проводящий контур — каркас, изготовленный из однородной проволоки. Сопротивление ребра $R_0 = 1$ Ом. К вершинам каркаса *A* и *B* приложено постоянное напряжение $V = 1$ В. Найти мощность, потребляемую контуром.

Решение. Очевидно, что сила тока в проводнике *CD* равна нулю. Общее сопротивление контура $R = R_0/2$. Резистор *AB* потребляет мощность 1 Вт, полная потребляемая мощность $P = 2$ Вт.

Задача 2.4.4. Три лампы, рассчитанные на напряжение $V_0 = 110$ В, потребляют мощности $P_1 = P_2 = 50$ Вт и $P_3 = 100$ Вт. Нарисуйте схему включения лампочек в сеть напряжением $V = 220$ В, в которой они горят полным накалом.

Пример 2.4.5. Найдем сопротивление лампы в холодном состоянии и в рабочем режиме. Лампа рассчитана на напряжение $U = 220$ В, потребляемая мощность $P = 100$ Вт.

Сопротивление лампы в рабочем режиме $R = U^2/P = 484$ Ом. Рабочая температура вольфрамовой нити $T \approx 2300$°C, удельное сопротивление вольфрама $\rho \approx 10\rho_0$, где $\rho_0 = 4{,}89 \cdot 10^{-6}$ Ом·см — удельное сопротивление при комнатной температуре $t_0 = 20$°C. Следовательно, сопротивление «холодной» лампы $R_0 \approx 50$ Ом. В момент включения, сила тока, протекающего через нить более чем в десять раз превосходит силу тока $I = 0{,}45$ А в рабочем режиме.

Запишем уравнение энергетического баланса. Пусть T_0 — температура воздуха в комнате, T — температура нити, C — теплоемкость нити. Тогда имеем уравнение

$$C\frac{dT}{dt} = \frac{U^2}{R(T)} - \sigma S_{эф}(T^4 - T_0^4),$$

где $S_{эф} \approx 0{,}63$ см^2 — эффективная площадь излучающей поверхности. В установившемся режиме количество теплоты, выделяющейся в нити, сравнивается с потерями энергии вследствие излучения и теплопроводности цоколя. По мере возрастания температуры нити сила тока убывает.

Обсудим одну из причин, приводящих к перегоранию лампочки. Если вольфрамовая нить неоднородна по поперечным размерам, то участок с наименьшим диаметром будет иметь сопротивление большее, чем участок такой же длины стандартного диаметра. Поскольку на каждом участке выделяется количество теплоты $\sim I^2\Delta R$, то дефектный участок может перегреться и расплавиться.

Задача 2.4.6. Можно ли заменить перегоревший предохранитель отрезком провода большего сечения, не опасаясь вызвать пожар?

2.4.3. Закон сохранения энергии в схеме, содержащей источник напряжения и резистор. Рассмотрим схему рис. 2.2.3. Для того, чтобы получить закон сохранения энергии умножим уравнение (2.2.6) на I. В результате имеем соотношение

$$I\varepsilon = I^2R + I^2r.$$

В соответствие с (2.2.4) левая часть $P = I\varepsilon$ — мощность, развиваемая элементом, $P_i = I^2r$ — мощность, рассеиваемая на внутреннем сопротивлении, $P_e = I^2R$ — мощность потребляемая резистором и рассеиваемая в виде теплоты.

Мощность, рассеиваемая в нагрузке

$$P_e = I^2R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}. \qquad (2.4.4)$$

Коэффициент полезного действия источника в этой цепи

$$\eta = \frac{P_H}{P} = \frac{R}{R+r}.$$

Зависимость полезной мощности от сопротивления нагрузки изображена на рис. 2.4.3.

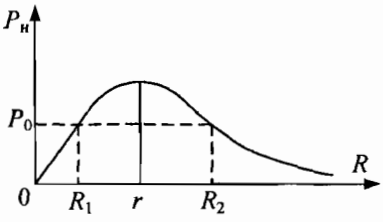


рис. 2.4.3

Интересно отметить, что одно и то же значение мощности P_0 выделяется при двух разных значениях R_1 и R_2 сопротивления нагрузки. Подставляя $P_e = P_0$ в (2.4.4), получим уравнение, определяющее R_1 и R_2:

$$R^2 + \left(2r - \frac{\varepsilon^2}{P_0}\right)R + r^2 = 0.$$

Мы не будем выписывать значения R_1 и R_2, отметим только связь между ними, следующую из теоремы Виета:

$$R_1 + R_2 = \frac{\varepsilon^2}{P_0} - 2r, \qquad R_1 \cdot R_2 = r^2.$$

Очевидно, при значении $P_0 = P_{max}$ оба корня совпадают. Отсюда следует вывод, что полезная мощность достигает максимального значения

$$P_{max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$$

при условии $R = r$.

2.4.4. Линии передачи энергии. Обычно проводящие линии служат для передачи электромагнитной энергии от источника напряжения к нагрузке, в которой она превращается в механическую и другие виды энергии. Носителем электромагнитной энергии является электромагнитное поле. Электрическое поле, существующее снаружи и вне проводника, создает ток, а наличие тока порождает магнитное поле вокруг тонкого проводника (см. 3.2). Часть внутренней энергии источника напряжения переходит в электромагнитную энергию и возникает поток электромагнитной энергии, выходящий наружу из источника. По соединительным проводам ток течет в одном направлении от генератора к нагрузке, затем от нагрузки к генератору, но поток электромагнитной энергии движется от положительного и отрицательного полюсов генератора к нагрузке (см. 3.4). Поскольку сопротивление подводящих проводов существенно меньше сопротивления нагрузки, то основная часть потока электромагнитной энергии втекает в нагрузку и переходит в теплоту.

Задача 2.4.7. Генератор постоянного напряжения V развивает мощность P, сопротивление линии передачи электроэнергии R. Найдите КПД линии электропередачи.

Решение. Поскольку мощность, развиваемая генератором P = IV, то сила тока в линии $I = P/V$. Мощность, потребляемая линией,

$$P_Л = I^2R = \frac{P^2R}{V^2}.$$

Полезная мощность, передаваемая нагрузке $P_Н = P - P_Л$. Следовательно, КПД линии

$$\eta = \frac{P_Н}{P} = 1 - \frac{PR}{V^2}$$

растет с увеличением напряжения и уменьшением сопротивления линии электропередачи.

В настоящее время используется несколько линий сверхвысокого напряжения ≈800 кВ. Для обычных линий напряжением $V = 350$ кВ напряженность поля у земли достигает величины $E \approx 5$ кВ/м. Такие поля вызывают вредное биологическое воздействие. Если человек ростом $h = 2$ м находится под линией, то через него может пройти ток $I_0 = \Delta\varphi/r$, где $\Delta\varphi = Eh = 10^4$, $r = 10^6$ Ом, — сопро-

тивление человеческого тела. Значение силы тока I_0 = 10 мА выше порога чувствительности к току, равного 2 мА. При силе тока свыше 20 мА наступает дыхательный паралич.

2.4.5. Закон сохранения энергии в схеме, содержащей источник напряжения, резистор и конденсатор. В схеме рис. 2.4.4 вначале ключ K разомкнут. В момент времени $t = 0$ ключ замыкают. Введем функцию $q(t)$, значение которой в момент времени $t > 0$ равно заряду, прошедшему в положительном направлении (обозначенному стрелкой) через поперечное сечение проводника. Сила тока $I(t) = dq/dt(t)$. Сумма падений напряжений на резисторах и конденсаторах равна ε:

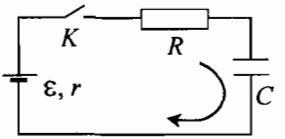


рис. 2.4.4

$$I\left(R+r\right)+\frac{q}{C}=\varepsilon$$

Умножим это уравнение на I и учтем, что

$$qI=q\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2}\right).$$

Тогда получим закон сохранения энергии в виде

$$I\varepsilon=I^2\left(R+r\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right). \qquad (2.4.5)$$

При переносе заряда $\Delta q = I\Delta t$, источник напряжения совершает работу $\delta A = \varepsilon I\Delta t = \varepsilon\Delta q$. Из (2.4.5) следует соотношение

$$\delta A = \delta Q + \Delta U_e, \qquad (2.4.6)$$

связывающее работу $\delta A = I\varepsilon\Delta t = \varepsilon\Delta q$, совершаемую источником напряжения при переносе заряда $\Delta q = I\Delta t$, джоулеву теплоту $\delta Q = I^2R\Delta t + I^2r\Delta t$, выделяющуюся в резисторе и источнике, и приращение энергии электрического поля конденсатора $U_e(t) = q^2/2C$. При $t >> (R + r)C$ сила тока обращается в нуль, напряжение на конденсаторе достигает максимального значения ε, заряд — величины $C\varepsilon$, энергия поля — величины $C\varepsilon^2/2$.

Задача 2.4.8. В схеме рис. 2.4.5 ключ K вначале разомкнут. Параметры элементов схемы $C_1 = C_2 = C$, C = 4 мкФ, R_1 = 2 Ом, R_2 = 8 Ом. Конденсатор C_1 заряжен до разности потенциалов V = 1 В. Найдите количество теплоты, выделившейся в каждом резисторе после замыкания ключа.

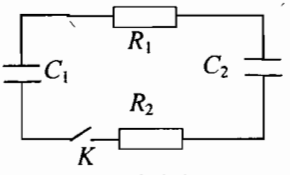


рис.2.4.5

Решение. В конечном состоянии разности потенциалов на конденсаторах одинаковы и равны $V/2$. Очевидно, количество теплоты, выделившееся в резисторах $Q_i \sim R_i$. Следовательно, $Q_1/Q_2 = R_1/R_2$. Из закона сохранения энергии следует еще одно уравнение

$$\frac{CV^2}{2}=Q_1+Q_2+\frac{CV^2}{4}.$$

В результате находим,

$$Q_i = \frac{CV^2 R_i}{4(R_1 + R_2)}, \; Q_1 = 200 \text{ нДж}, \; Q_2 = 800 \text{ нДж}.$$

2.4.6. Компьютер — источник теплоты. На рис. 2.4.6 схематически изображена ячейка электронной логики. Носителем информации является заряд, запасенный конденсатором $C = 4$ фФ (1 фемтофарад $= 10^{-15}$ Ф). В исходном состоянии разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b = V_1$, $V_1 = 5{,}2$ В. В момент времени $t = 0$ управляющий транзистор понижает разность потенциалов до значения $\varphi_a - \varphi_b = V_2$, $V_2 = 0{,}2$ В. Этот процесс реализует логическую операцию НЕ.

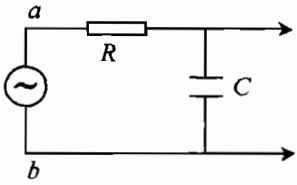


рис. 2.4.6

Найдем количество теплоты Q, выделяемое в резисторе. При $t \geq 0$ имеем соотношение аналогичное (2.4.6)

$$\delta Q = V_2 \Delta q - \Delta\left(\frac{q^2}{2C}\right).$$

В начальном состоянии $q(0) = CV_1$, в конечном состоянии $q_2 = CV_2$. Следовательно, полное количество теплоты

$$Q = V_2(CV_2 - CV_1) - \frac{1}{2}(CV_2^2 - CV_1^2) \text{ или } Q = \frac{C}{2}(V_1 - V_2)^2.$$

Подставляя числовые данные, находим $Q = 50$ фДж или $Q = 3{,}12 \cdot 10^5$ эВ.

Таким образом, каждая логическая операция требует затрат энергии и сопровождается выделением теплоты, которую необходимо отвести от схемы. Однако любой материал может рассеять в единицу времени ограниченное количество теплоты, зависящее от его теплопроводности. Поэтому с прогрессом миниатюризации величина Q уменьшается, по-видимому, скоро будет достигнут фундаментальный предел при комнатной температуре $Q_m = 7{,}6$ эВ. Преодолеть этот предел нельзя, т. к. логические операции защищены от теплового шума, лишь тогда когда потребляемая энергия хотя бы в 200 раз превышает энергию теплового движения при комнатной температуре 1,5 кТ ≈ 0,038 эВ. Для преодоления этого предела потребуется понизить температуру и уменьшить размеры микроэлектронных устройств. В XXI веке мы приблизимся к пределу возможной толщины изолирующего слоя из сотни атомов порядка 25 нм и войдем в область *гигамасштабной интеграции*, при которой одна микросхема будет содержать 10^9 транзисторов на 1 см^2.

Задача 2.4.9. Определите количество электронов, реализующих 1 бит информации в схеме рис. 2.4.6.

Тест

1. На схеме рис. 1 сопротивления резисторов $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 12$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b = 60$ В. Разность потенциалов между точками n и m:

А. 16 В, **Б.** 60 В, **В.** 20 В, **Г.** 36 В, **Д.** 24 В.

2-3. В схеме рис. 2 сопротивления резисторов $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b = 12$ В.

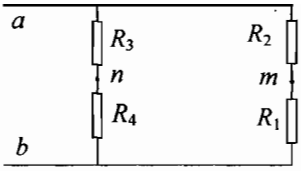


рис. 1

2. Разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_n$ равна:

А. 7 В, **Б.** 6 В, **В.** 5 В, **Г.** 3 В, **Д.** 9 В.

3. Разность потенциалов $\varphi_m - \varphi_b$ равна:

А. 7 В, **Б.** 6 В, **В.** 5 В, **Г.** 3 В, **Д.** 9 В.

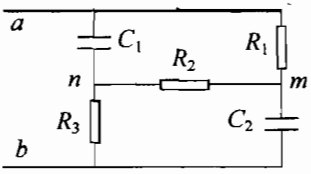


рис. 2

4. В схеме рис. 3 емкости конденсаторов одинаковы, сопротивления резисторов $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b = 30$ В. Разность потенциалов $\varphi_m - \varphi_n$ равна:

А. 2 В, **Б.** 14 В, **В.** 16 В, **Г.** 12 В, **Д.** 18 В.

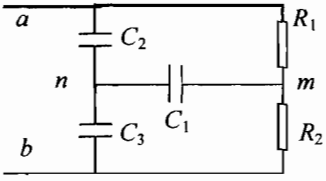


рис. 3

5-6. В схеме, приведенной на рис. 4 сопротивления резисторов $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 5$ Ом.

5. Наибольшую мощность потребляет резистор:

А. R_1, **Б.** R_2, **В.** R_3, **Г.** R_4, **Д.** R_5.

6. Наименьшую мощность потребляет резистор:

А. R_1, **Б.** R_2, **В.** R_3, **Г.** R_4, **Д.** R_5.

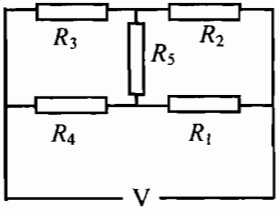


рис. 4

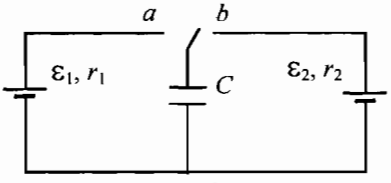


рис. 5

7-9. В схеме на рис. 5 емкость конденсатора C, ЭДС батарей $\varepsilon_1 = 5\varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$. Вначале ключ находился в положении a. После переключения ключа в положение b

7. Приращение энергии электрического поля в конденсаторе:

А. 12 $C\varepsilon^2$, **Б.** –12 $C\varepsilon^2$, **В.** 25 $C\varepsilon^2$, **Г.** 8 $C\varepsilon^2$, **Д.** –5 $C\varepsilon^2$.

8. Работа, совершаемая батареей ε_2:

А. 4 $C\varepsilon^2$, **Б.** –20 $C\varepsilon^2$, **В.** –4 $C\varepsilon^2$, **Г.** –12 $C\varepsilon^2$, **Д.** 5 $C\varepsilon^2$.

9. Количество теплоты, выделившееся в батарее ε_2:

А. 10 $C\varepsilon^2$, **Б.** 12 $C\varepsilon^2$, **В.** 16 $C\varepsilon^2$, **Г.** 8 $C\varepsilon^2$, **Д.** $C\varepsilon^2$.

Глава 3. Магнитное поле

Вещества, притягивающие железо, были известны человечеству более 2 000 лет назад. Они получили название *магнитов*. Постоянный магнит в форме тонкой полоски, расположенный на плавающей в воде деревянной дощечке, поворачивается одним концом в направлении Северного полюса Земли, а другим — в направлении Южного. Поэтому концы магнита так и называются северным и южным полюсами. Это наблюдение привело к созданию компаса. Первые компасы появились в Китае. В Европе компасом стали пользоваться с XII в. В 1600 г. английский физик У. Гильберт опубликовал большой труд «*О магните*», в котором описал множество проведенных за 18 лет опытов. Он первым пришел к заключению, что Земля сама является большим магнитом. Казалось, что магнетизм и электричество — две разные области, не имеющие между собой ничего общего. Дальнейшее развитие научных знаний показало тесную связь электрических и магнитных явлений, а созданная Максвеллом теория позволила единым образом описать все электромагнитные явления.

После изобретения в 1800 г. источника постоянного тока возможности экспериментаторов значительно расширились. Первое фундаментальное открытие было сделано в 1820 г. датским физиком Г. Х. Эрстедом (1777—1851). Убежденный в том, что электрические и магнитные явления взаимосвязаны, он хотел выяснить, не производит ли электричество каких-либо действий на магнит. В феврале 1820 г. Эрстед показывал студентам тепловое действие тока. Рядом с проводником случайно оказался компас. При включении тока стрелка отклонилась от первоначального положения. В этом эффекте Эрстед увидел подтверждение своих идей. Описание опыта вышло в свет 21 июля 1820 г.

Этот простой опыт произвел сильное впечатление на современников и положил начало новой области физики — *электродинамике*. Дальнейшие события развивались стремительно. 11 сентября 1820 г. опыт был показан на заседании Французской академии наук. Академики спокойно разошлись, и только один из них — академик отделения математики А. М. Ампер — поспешил заказывать приборы для проведения новых опытов. Он был уверен, что они должны подтвердить его догадки, сводящие магнетизм к чисто электрическим явлениям.

Все считали, что ток, проходя по проводнику, превращает его в магнит, который и заставляет отклоняться стрелку компаса. Ампер высказал гениальную мысль: магнит представляет совокупность токов, движущихся по замкнутым контурам; отклонение стрелки вызвано взаимодействием токов. 25 сентября он демонстрирует новый эффект: два незаряженных параллельных провода, по которым текут одинаково направленные токи, притягиваются друг к другу. На каждый из проводников действует сила, зависящая от величины силы тока и расстояния между проводами. При перемене направления одного из токов силы притяжения сменяются силами отталкивания. В новой серии опытов спирали, по которым пропускали ток, вели себя подобно магнитам.

По обе стороны Ла-Манша все осознали важность открытия Эрстеда. Англичане отстали ненамного. Уже 6 ноября г. Дэви доложил об аналогичных экспериментах. Все старались опубликовать результаты и установить приоритет.

Новую область знаний о явлениях, обусловленных протеканием токов, Ампер назвал *электродинамикой*. Открытие явлений электромагнетизма оказало влияние не только на развитие науки, но и техники. В том же году Д. Араго изобрел электромагнит. В 1821 г. Фарадею удалось осуществить вращение проводника с током в магнитном поле. Это был первый электродвигатель. Ампер предложил использовать отклонение магнитной стрелки для передачи сигналов в электромагнитном телеграфе.

3.1. Магнитная индукция. Силы Лоренца и Ампера

3.1.1. Магнитное поле. С современной точки зрения взаимодействие токов обусловлено существованием новой формы материи — *магнитного поля*. Этот термин ввел в 1845 г. М. Фарадей. Мы говорим, что ток в одном из проводников создает в окружающем пространстве магнитное поле. На каждый заряд движущийся в другом проводнике, действует сила, называемая *силой Лоренца*. Сумма сил, действующих на хаотически движущиеся ионы решетки, равна нулю. В то же время сумма сил Лоренца, действующих на электроны, сообщает им приращение количества движения, которое при столкновении электронов с ионами решетки передается проводнику. В результате возникает сила, действующая на второй проводник в магнитном поле, создаваемом током в первом проводнике. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, называется *силой Ампера*. Поскольку проводники равноправны, то на первый проводник, находящийся в магнитном поле, создаваемом вторым проводником, также действует сила. Если ток отсутствует, то электроны находятся в хаотическом движении и равнодействующая сила, приложенная к проводнику равна нулю.

На основе явления взаимодействия проводников введена единица силы тока. Один ампер (А) — сила постоянного тока, протекающего по двум тонким и бесконечно длинным проводникам, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м, на каждый метр длины которых действует сила величиной $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

Таким образом, для нахождения сил взаимодействия проводников с током надо решить две задачи:

1. Определить магнитное поле, создаваемое движущимися зарядами, т. е. токами.

2. Определить силы, действующие со стороны магнитного поля на проводники с током.

3.1.2. Вектор магнитной индукции. Магнитное поле в каждой точке пространства характеризуется *вектором магнитной индукции* $\vec{B}$. Условились выбирать направление вектора $\vec{B}$ в точке расположения магнитной стрелки совпадающим с направлением от южного к северному полюсу стрелки. При графическом изображении магнитного поля используют понятие *силовой линии* как кривой, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора $\vec{B}$. Для определения величины $\vec{B}$ найдем силу Лоренца $\vec{F}_M$, действующую на положительный заряд q в магнитном поле. Эта сила равна нулю, если заряд неподвижен. Для заряда, движущегося со скоростью $\vec{v}$, направление силы $\vec{F}_M$ зависит от взаимной ориентации векторов $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Если они параллельны, то $\vec{F}_M = 0$. Пусть θ — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$. В этом случае вектор $\vec{F}_M$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Направление силы $\vec{F}_M$ определяется правилом левой руки: расположим руку так, чтобы силовые линии магнитного поля входили в ладонь, а направление средних пальцев совпадало с направлением скорости заряда; тогда направление отогнутого в сторону большого пальца совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд q (рис. 3.1.1). На отрицательный заряд $-q$ действует сила, равная по величине, но противоположная по направлению силе, действующей на положительный заряд q.

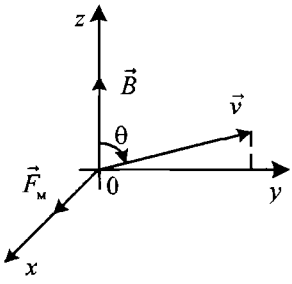


рис. 3.1.1

Измеряя величину силы, действующей на заряд q, можно убедиться, что отношение $\dfrac{F_M}{qv\sin\theta}$ не зависит от величин q, v, θ и принимает определенные значения в каждой точке пространства. Определим величину магнитной индукции B в данной точке пространства соотношением $B = \dfrac{F_M}{qv|\sin\theta|}$.

Единица магнитной индукции получила название *тесла* (Тл) в честь выдающегося сербского ученого-электротехника Н. Тесла (1856—1943): 1 Тл = 1 Н/(А·м).

Индукция магнитного поля Земли изменяется от $4{,}2 \cdot 10^{-5}$ Тл на экваторе до $7 \cdot 10^{-5}$ Тл у магнитных полюсов. Индукция магнитных полей солнечных

пятен достигает 0,5 Тл. Слабые (до $5 \cdot 10^{-2}$ Тл) и средние (от $5 \cdot 10^{-2}$ до 2 Тл) поля используются в электротехнике и радиотехнике.

В 2007 г. *Европейская организация ядерных исследований* (*CERN*) введет в строй гигантский ускоритель протонов *Large Hadron Collider* (*LHC*) с энергией пучка 7 ТэВ. Для ускорения и фокусировки протонов потребуется 5 тысяч сверхпроводящих магнитов с индукцией 10 Тл.

В 1967 г. английскими астрономами были открыты *пульсары* (*PSR* — от англ. *Pulsating Sourses of Radioemission* — пульсирующий источник радиоизлучения; Нобелевская премия, 1974 г.) — нейтронные звезды, которые при массе равной массе Солнца имеют диаметры $\approx 3 \div 20$ км. На поверхности пульсаров индукция магнитного поля $\approx 10^9$ Тл.

Магнитное поле Земли. В околоземном пространстве индукция магнитного поля

$$\vec{B}(\vec{r}) = 3\vec{r}\frac{(\vec{\mu}\ \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор с началом в центре Земли, $\vec{\mu}$ — вектор, направленный от южного магнитного полюса к северному, его величина $\mu = 4{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot a^3$ Тл, a — радиус Земли. Уравнение силовой линии

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{B}(\vec{r})}{B(\vec{r})}.$$

Решение этого уравнения можно записать в виде $r = a\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}\right)^2$, θ — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{\mu}$, θ_0 — значение угла, при котором силовая линия пересекает поверхность Земли. Например, при значении $\theta_0 = \pi/4$ имеем $r = 2a\sin^2\theta$; максимальное расстояние $r_m = 2a$.

3.1.3. Сила Лоренца. В конце позапрошлого века в 1892 г. нидерландский физик Хенрик Лоренц записал выражение для силы, действующей на заряд q, движущийся в магнитном поле

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{3.1.1}$$

Здесь $\vec{v}$ — скорость заряда, символ «×» обозначает векторное произведение $\vec{v}$ и $\vec{B}$. В координатной записи $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ компоненты вектора $\vec{F}_M$ имеют вид (см. ч. I, 1.2.2)

$$F_{Mx} = q\,(v_y B_z - v_z B_y), \qquad F_{My} = q\,(v_z B_x - v_x B_z),$$
$$F_{Mz} = q\,(v_x B_y - v_y B_x). \tag{3.1.2}$$

Очевидно, соотношения (3.1.2), полностью определяют три компоненты вектора $\vec{F}_M$. Отсюда, в частности, следует правило левой руки. Нетрудно

проверить, что скалярные произведения $\vec{F}_M\vec{B}=0$, $\vec{F}_M\vec{v}=0$ — мощность, развиваемая магнитной силой равна нулю.

3.1.4. Заряженная частица в электромагнитном поле. Важнейшей задачей электродинамики является исследование движения заряженных частиц в неоднородных, переменных электрическом и магнитном полях. Со стороны электрического поля напряженностью $\vec{E}$ на частицу действует сила $q\vec{E}$. Полная сила, действующая на частицу, равна

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}.$$

Если скорость частицы массой m значительно меньше скорости света, то для определения координат в момент времени t необходимо найти решение уравнения

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}+m\vec{g} \qquad (3.1.3)$$

Пусть $\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}_0$ — постоянный вектор. Образуем скалярное произведение (3.1.3) с вектором $\vec{v}$. В результате получим

$$m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}-q\vec{E}_0\vec{v}-m\vec{g}\vec{v}=0.$$

Поскольку

$$\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right),\ \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt},$$

то левая часть представляет собой производную функции $\frac{mv^2}{2}+W$, где $W=-q\vec{E}_0\vec{r}-m\vec{g}\vec{r}$ — потенциальная энергия заряда в электрическом и гравитационном полях. Следовательно, сохраняется полная энергия заряда

$$\frac{mv^2}{2}+W=const.$$

3.1.5. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле. В ограниченной области пространства можно создать однородное магнитное поле. В этой области индукция магнитного поля $\vec{B}$ — постоянный вектор. Пусть $\vec{B}=(0,\ 0,\ B)$. В начальный момент времени $t=0$ радиус вектор $\vec{r}(0)=0$, начальная скорость $\vec{v}(t)=(0,\ v_0,\ 0)$. В момент времени $t>0$ скорость частицы $\vec{v}(t)=(v_x,v_y,v_z)$. Поскольку магнитная сила $\vec{F}_M$ перпендикулярна векторам $\vec{v}(t)$ и $\vec{B}$, то векторы $\vec{v}(t)$ и $\vec{F}_M$ будут принадлежать плоскости xy. Используя (3.1.2), находим силу Лоренца $\vec{F}_M=(qv_yB,-qv_xB,0)$.

Пусть $mg << |F_M|$. Тогда из (3.1.3) получим систему

$$m\frac{dv_x}{dt} = qv_y B, \qquad m\frac{dv_y}{dt} = -qv_x B, \qquad m\frac{dv_z}{dt} = 0. \qquad (3.1.4)$$

Из последнего уравнения следует, что сохраняется проекция скорости на ось z: $v_z(t) = 0$, $z(t) = 0$. Запишем два оставшихся уравнения в виде

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x,$$

где $\omega = qB/m$ — величина, называемая *циклотронной частотой*. Далее заметим, что магнитная сила не совершает работы. Следовательно, кинетическая энергия частицы — постоянная величина, равная начальному значению $mv_0^2/2$ или $v^2 = v_0^2$. Нетрудно убедиться, что решение этих уравнений, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$v_x(t) = v_0 \sin \omega t, \qquad v_y(t) = v_0 \cos \omega t.$$

Найдем теперь траекторию заряда. Поскольку

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt},$$

то имеем два уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \sin \omega t, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0 \cos \omega t. \qquad (3.1.5)$$

Первому уравнению удовлетворяет функция $x(t) = -R \cos \omega t + C$, где $R = v_0/\omega$, C — произвольная постоянная. Учитывая начальное значение $x(0) = 0$, находим $C = R$. Следовательно,

$$x(t) = R - R \cos \omega t.$$

Из второго уравнения находим $y(t) = R \sin \omega t$. Мы имеем уравнение окружности, изображенной на рис. 3.1.2. Действительно, исключая ωt получим

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2.$$

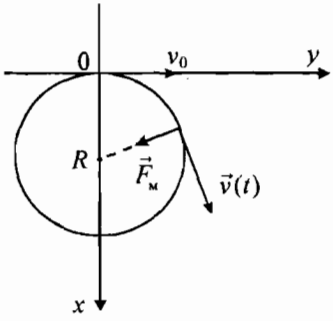


рис 3.1.2

Таким образом, заряд вращается по окружности радиусом $R = v_0/\omega$ с угловой скоростью $\omega = qB/m$. Для электрона частота вращения $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{eB}{2\pi m_e}$; ν (Гц) $= 2{,}82 \cdot 10^{10}\, B$ (Тл).

Пусть теперь начальная скорость $\vec{v}(0) = (0, v_0, u)$. В этом случае $v_z(t) = u$, $z(t) = ut$. Частица движется по *винтовой линии*. Траектория навивается на поверхность цилиндра радиусом R. Шаг винта $h = \dfrac{2\pi u}{\omega} = \dfrac{2\pi mu}{qB}$.

Задача 3.1.1. Пучок электронов, вылетающих из одной точки, движется в магнитном поле индукцией $\vec{B} = (0, 0, B)$, перпендикулярно плоскости экрана. Начальные скорости электронов $v = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha, u)$, отличаются значениями угла α. Экран находится в плоскости $z = L$. Покажите, что все электроны фокусируются в одной точке экрана при условии $L = un(2\pi/\omega)$, L (м) $= 3{,}4 \cdot 10^{-11} nu/B$, $n = 1, 2, \ldots$.

Задача 3.1.2. Заряженная частица движется в параллельных однородных электрическом поле напряженностью $\vec{E} = (0, 0, E)$ и магнитном поле индукцией $\vec{B} = (0, 0, B)$. В начальный момент времени $\vec{v}(0) = (0, v_0, 0)$. Найдите промежуток времени, через который кинетическая энергия частицы возрастет в два раза.

Решение. Кинетическая энергия частицы

$$K(t) = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{mu^2}{2},$$

где $u = qEt/m$. Искомый промежуток времени $\tau = \dfrac{mv_0}{qE}$.

Пример 3.1.3. Заряд q падает в магнитном поле Земли индукцией $\vec{B} = (0, B, 0)$. В начальный момент времени $\vec{r}(0) = (0, 0, h)$, $\vec{v}(0) = 0$. Найдем границы области движения заряда по оси z, направленной вертикально вверх.

Для решения задачи необходимо найти функцию $v_z(z)$. Границы области определяются корнями уравнения $v_z(z) = 0$. Величину скорости как функцию координат проще всего найти из закона сохранения полной энергии

$$\frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + mgz = mgh \qquad (1)$$

и уравнений движения

$$m\frac{dv_x}{dt} = -qv_z B, \qquad (2)$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = 0. \qquad (3)$$

Из (3), учитывая начальные условия, находим $v_y(t) = 0$. Поскольку $v_z = dz/dt$, то (2) можно представить виде

$$m\frac{dv_x}{dt} = -qB\frac{dz}{dt} \quad \text{или} \quad mv_x = -qBz + C,$$

где C — произвольная постоянная. Согласно начальным условиям $C = qBh$. Теперь уравнение (1) приобретает вид

$$v_z^2(z) = 2g(h-z) - \omega^2(h-z)^2, \quad \omega = \frac{qB}{m}.$$

Следовательно, $h - \frac{2g}{\omega^2} \le z \le h$.

3.1.6. Сила Ампера. Найдем теперь силу $\Delta\vec{F}_A$, действующую на элемент провода длиной Δl, сечением S, по которому идет ток силой I.

Пусть u и n — средняя скорость и концентрация электронов проводимости. Тогда $I = enSu$, где e — величина заряда электрона. Сила Лоренца, действующая на $\Delta N = nS\Delta l$ электронов, сообщает им приращение импульса, которое при столкновении электронов с ионами решетки передается проводнику. Возникает сила, действующая на участок провода Δl, называемая *силой Ампера*. Ее величина

$$\Delta F_A = euB\Delta N \sin\theta \quad \text{или} \quad \Delta F_A = IB\Delta l \sin\theta. \qquad (3.1.6)$$

Направление силы $\Delta\vec{F}_A$ определяется по правилу левой руки.

Зададим положение элемента провода Δl вектором $\Delta\vec{l}$, параллельным направлению тока. Тогда силу Ампера можно представить в виде векторного произведения двух векторов $\Delta\vec{l}$ и $\vec{B}$:

$$\Delta\vec{F}_A = I\Delta\vec{l} \times \vec{B}. \qquad (3.1.7)$$

Сила Ампера, действующая на проводник в форме произвольной пространственной кривой равна сумме элементарных сил (3.1.7).

Рассмотрим произвольно расположенный проводник, соединяющий точки A и C. В точку A втекает ток силой I (рис. 3.1.3). Если $\vec{B}$ — постоянный вектор, то вычисление силы $\vec{F}$, действующей на проводник в однородном постоянном магнитном поле, представляет собой элементарную процедуру.

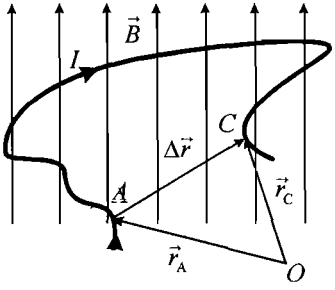


рис. 3.1.3

Представляя проводник в виде последовательности малых элементов $\Delta\vec{l}_a$ ($a = 1, \ldots, N$), имеем

$$\vec{F} = \sum_{a=1}^{N} I\Delta\vec{l}_a \times \vec{B} = I\left(\sum_{a=1}^{N} \Delta\vec{l}_a \times \vec{B}\right) = I\Delta\vec{r} \cdot \vec{B}, \qquad (3.1.8)$$

где $\Delta\vec{r} = \vec{r}_C - \vec{r}_A$, где $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_C$ радиус-векторы точек A и C.

Задача 3.1.4. На рис. 3.1.4 изображен проводник в виде окружности радиусом $a = 5$ см. Сопротивление схемы между точками M и N равно $R = 0{,}25$ Ом. К этим точкам подключен генератор напряжения, создающий разность потенциалов $V = 1$ В. Вся система находится в постоянном однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B} = (0, b, 0)$, $b = 10^{-3}$ Тл. Найти силу Ампера $\vec{F} = (0, 0, F_z)$, действующую на проводник.

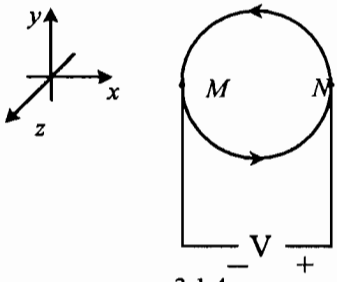


рис. 3.1.4

3.1.7. Момент силы Ампера, действующей на рамку с током в однородном магнитном поле. На рис. 3.1.5, а изображена прямоугольная рамка $ABCD$ со сторонами $AB = CD = b$, $BC = DA = a$. Рамка может вращаться вокруг оси z, проходящей через середины сторон AB и CD. В дальнейшем ориентацию рамки (или петли) будем задавать единичным вектором $\vec{n}$, перпендикулярным к плоскости рамки и направленным в одном из двух возможных направлений. На рис. 3.1.5 *а* ориентация рамки определяется углом $\varphi(t)$ между вектором $\vec{n}$ и осью x.

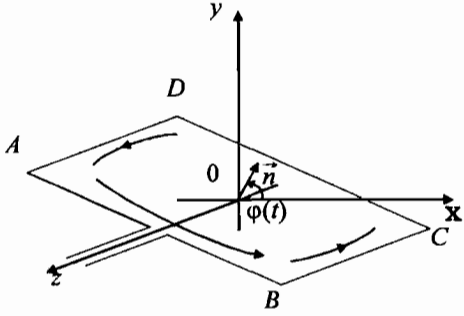


рис. 3.1.5 а

В электродинамике принято правило, связывающее ориентацию вектора $\vec{n}$ и положительное направление на контуре: вращение буравчика (винта с правой нарезкой) в положительном направлении приводит к его перемещению в направлении вектора $\vec{n}$. На рис. 3.1.5 а положительное направление тока указано направленной кривой, лежащей вне контура $ABCD$.

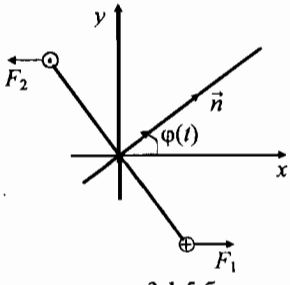


рис. 3.1.5 б

Найдем момент сил Ампера, действующих на рамку в однородном постоянном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, параллельной оси y: $\vec{B} = (0, B, 0)$.

На стороны AB и CD действуют силы, направленные параллельно оси z, приводящие

лишь к деформации рамки. На проводники BC и DA действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, создавая вращательный момент, $F_1 = F_2 = IBa$ (рис.3.1.5 *б*). Плечи сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равны $(b/2)\cos\varphi$. Следовательно, проекция момента сил Ампера на ось z равна $M_z = IBab\cos\varphi$. Очевидно, движение рамки зависит от начальных условий. Можно добиться того, чтобы она колебалась вблизи положения устойчивого равновесия $\varphi = \pi/2$. При $\varphi = 3\pi/2$ момент сил также равен нулю. Однако в этом случае рамка находится в положении неустойчивого равновесия. При $\varphi = 0$ проекция M_z достигает максимального значения $IBab$.

В векторной форме момент сил, действующих на рамку с током в магнитном поле можно представить в виде

$$\vec{M} = IS\vec{n} \times \vec{B}, \qquad (3.1.9)$$

где S — площадь рамки. В такой форме это выражение справедливо для плоской рамки произвольной формы в однородном постоянном магнитном поле.

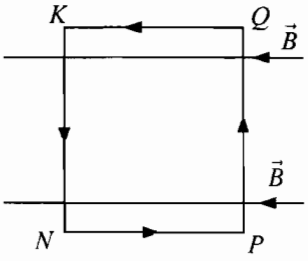


рис. 3.1.6 а

Задача 3.1.5. Квадратная рамка из однородного провода плотностью $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, сечением $S = 1$ мм^2 лежит на горизонтальной плоскости. Вектор магнитной индукции однородного магнитного поля величиной $B = 10^{-2}$ Тл параллелен двум сторонам рамки. Найдите минимальное значение силы тока I в проводах, при которой рамка начнет поворачиваться вокруг одной из сторон.

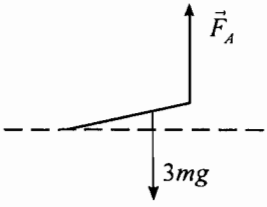


рис. 3.1.6 б

Решение. На рис. 3.1.6, а изображено положение рамки при взгляде сверху. На провод KN действует сила Ампера, направленная вниз. На провод PQ действует направленная вверх сила Ампера величиной IBa, где a — длина стороны рамки. Момент этой силы относительно оси KN равен $M_A = IBa^2$. Найдем теперь момент сил тяжести M_g, действующих на стороны рамки относительно оси KN:

$$M_g = -2mga,\ m = \rho Sa.$$

Наименьшее значение силы тока определяется из условия $M_A + M_g = 0$. Отсюда находим $I = 2\rho gS/B$, $I = 0{,}53$ А.

3.2. Магнитное поле постоянного тока. Закон Био-Савара

3.2.1. Поля и токи. В опыте Ампера сила, действующая на один из проводов, зависит от индукции магнитного поля, созданного током, текущим по другому проводу. Более того, любой движущийся заряд создает магнитное поле, в частности, заряженные частицы или наэлектризованное тело, движущееся в вакууме или среде.

3.2.2. Закон Био-Савара. В 1820 г. французские ученые Ж. Био и Ф. Савар установили зависимость силы, действующей на магнитную стрелку, от расстояния до провода, по которому протекал постоянный ток. Индукция магнитного поля $\vec{B}$, создаваемая заданным пространственным распределением токов, определяется решением уравнений, открытых Д. Максвеллом в 1864 г. Однако еще в 1820 г. выдающийся математик и физик П.С. Лаплас, обобщая результаты опытов Био-Савара, установил закон, позволяющий найти вектор индукции магнитного поля, создаваемого линейным проводником с постоянным током.

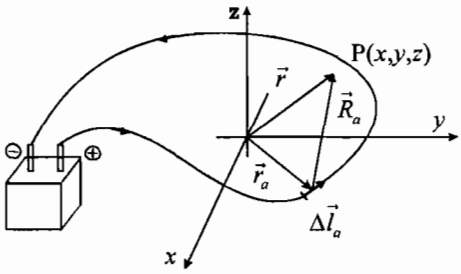


рис. 3.2.1

На рис. 3.2.1 изображена петля из провода, по которому течет ток силы I. Представим ее в виде последовательности N малых векторов $\Delta\vec{l}_a$ ($a = 1, \ldots, N$) и выберем на каждом элементе точку a с радиус-вектором $\vec{r}_a$. Ток, протекающий через элемент $\Delta\vec{l}_a$, создает в окружающем пространстве магнитное поле индукцией $\Delta\vec{B}_a$. В точке $P(x, y, z)$ с радиус-вектором $\vec{r}$ вектор магнитной индукции

$$\Delta\vec{B}_a(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_a^3}\Delta\vec{l}_a \times \vec{R}_a. \qquad (3.2.1)$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А^2 — магнитная постоянная, $\vec{R}_a = \vec{r} - \vec{r}_a$. Вектор $\vec{R}_a$ идет из точки а в точку P. Вектор $\Delta\vec{B}_a$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\Delta\vec{l}_a$ и $\vec{R}_a$.

Суммируя вклады всех элементов $\Delta\vec{l}_a$, получим вектор индукции $\vec{B}(\vec{r})$ магнитного поля, создаваемого петлей в точке P. Силовые линии магнитного поля представляют собой замкнутые кривые.

Заметим, что закон Био-Савара позволяет также найти индукцию поля, создаваемого переменным током частотой $\nu = 1/T$, удовлетворяющей условию $l << cT$, где l — длина провода, c — скорость света.

3.2.3. Магнитное поле прямого провода с током. Пусть длина провода равна l. Совместим провод с осью z, а начало координат расположим в его середине (рис. 3.2.2 *а*). Ток силой I течет в положительном направлении оси z. Найдем вектор магнитной индукции в точке $P(x, y, z)$ с радиус-вектором $\vec{r}$.

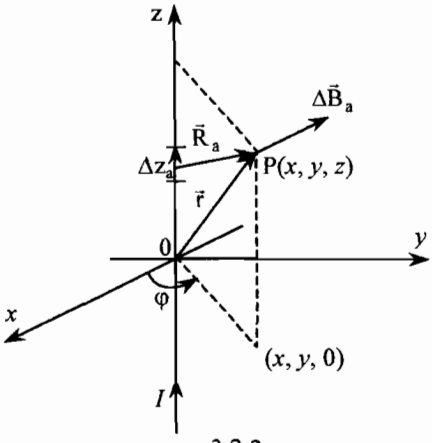


рис. 3.2.2 а

В соответствии с (3.2.1) представим провод в виде последовательности элементов $\Delta\vec{l}_a = (0, 0, \Delta z_a)$, $a = 1, 2, \ldots, N$. Радиус-вектор точки a, принадлежащей этому элементу $\vec{r}_a = (0, 0, z_a)$. Компоненты вектора $\vec{R}_a = \vec{r} - \vec{r}_a = (x, y, z - z_a)$. Следовательно, векторное произведение $\Delta\vec{l}_a \times \vec{R}_a = (-y\Delta z_a, x\Delta z_a, 0)$ представляет собой вектор, лежащий в плоскости перпендикулярной оси z. Полагая

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

получим $\Delta\vec{l}_a \times \vec{R}_a = r\vec{e}\,\Delta z_a$, где $\vec{e} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ — единичный вектор, направленный по касательной к окружности радиусом r с центром на оси z в плоскости перпендикулярной оси z (рис. 3.2.2 *б*). Вектор магнитной индукции в точке $P(x, y, z)$ равен сумме вкладов (3.2.1) соответствующих всем элементам Δz_a:

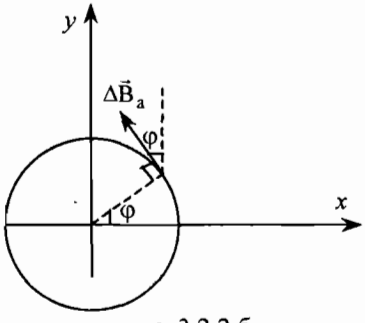


рис. 3.2.2 б

$$\vec{B}(x, y, z) = B\vec{e}, \tag{3.2.2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{a=1}^{N}\frac{r\Delta z_a}{R_a^3},\ R_a = \sqrt{r^2 + (z - z_a)^2}.$$

Вычисление B сводится к интегрированию. В случае бесконечно длинного провода

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \qquad (3.2.3)$$

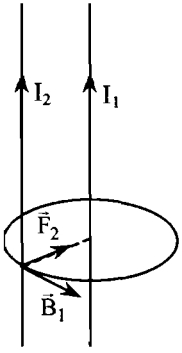


рис. 3.2.3

Этот результат мы получим ниже в 3.4.1, используя закон Ампера. Таким образом, вектор $\vec{B}$ в точке $P(x, y, z)$ направлен по касательной к окружности радиусом ρ с центром на оси z в плоскости перпендикулярной оси z, расположенной на расстоянии z от начала координат.

Пример 3.2.1. По двум параллельным проводникам текут в одном направлении токи силой I_1 и I_2. Расстояние между проводами d. Найдем силу $\vec{F}_2$, действующую на элемент второго провода длиной Δl.

Силовые линии магнитного поля, созданного током в первом проводе, пересекают элемент Δl под прямым углом (рис. 3.2.3). Величина индукции поля

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}.$$

Согласно правилу левой руки F_2 — сила притяжения. Из (3.1.6) находим величину силы

$$F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 \Delta l.$$

Полагая $I_1 = I_2 = 1$ А, $d = \Delta l = 1$ м, найдем $F_2 = 2 \cdot 10^{-7}$ Н. Этот результат является следствием определения силы тока в СИ.

3.2.4. Магнитное поле кругового витка с током. По замкнутому проводнику в форме окружности радиуса c, течет ток силой I (рис. 3.2.4 *а*). Ориентацию витка зададим единичным вектором перпендикулярным плоскости витка $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Положительное направление на контуре определяется правилом буравчика: буравчик смещается параллельно вектору $\vec{n}$, если его вращать в положительном направлении.

Найдем индукцию магнитного поля, создаваемого витком на оси z в точке $\vec{r} = (0, 0, z)$. В точке $\vec{r}_a = (c \cos \varphi_a, c \sin \varphi_a, 0)$ расположен элемент витка

$$\Delta\vec{l}_a = \Delta\vec{r}_a = (-c \sin \varphi_a, c \cos \varphi_a, 0)\Delta\varphi_a \equiv c\,\vec{e}\,\Delta\varphi_a.$$

Из (3.2.1) следует, что каждый элемент $\Delta\vec{l}_a$ кольца создает вектор индукции $\Delta\vec{B}_a$, перпендикулярный к векторам $\vec{R}_a = (-c\cos\varphi_a, -c\sin\varphi_a, z)$,

$\Delta\vec{l}_a$ и образующий угол θ с осью z: $\cos\theta = \dfrac{c}{R_a}$, $R_a^2 = c^2 + z^2$. Суммируя вклады всех элементов, убедимся, что вектор индукции поля $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, создаваемого витком тока, направлен по оси z. Поэтому достаточно найти z-компоненту вектора $\vec{B}$. Поскольку z-компонента векторного произведения $(\Delta\vec{l}_a \times \vec{R}_a)_z = c^2\Delta\varphi_a$, то сумма вкладов всех элементов тока кольца

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I c^2}{2(c^2 + z^2)^{3/2}}. \qquad (3.2.4)$$

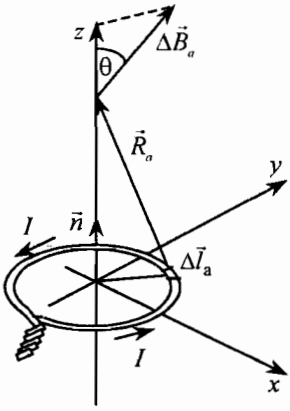


рис. 3.2.4 а

В центре витка функция $B_z(z)$ достигает максимального значения $B_z(0) = \dfrac{\mu_0 I}{2c}$.

На рис. 3.2.4 *б* изображено несколько силовых линий магнитного поля. Отметим, что индукция магнитного поля витка в точке на расстоянии от центра $r >> c$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(3\vec{r}\,\frac{\vec{m}\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right) \qquad (3.2.5)$$

полностью определяется магнитным моментом витка $\vec{m} = IS\vec{n}$, где $S = \pi c^2$ — площадь витка.

Пример 3.2.2. Электрон в атоме водорода вращается по круговой орбите радиусом $c = 0{,}053$ нм. Используя второй закон Ньютона

$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 c = \frac{ke^2}{c^2},$$

найдем период обращения и силу тока

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e^2}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{mc}} \approx 1{,}05 \cdot 10^{-3}\ \text{А}.$$

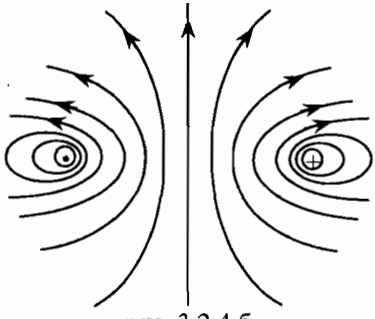


рис. 3.2.4 б

Следовательно, протон находится в магнитном поле индукцией B ≈ 12,44 Тл.

3.2.5. Кольца Гельмгольца. Индукция магнитного поля прямого провода и витка зависит от координат, т. е. является неоднородным. Можно получить однородное поле в небольшой области пространства, используя два витка: первый виток в плоскости $z = c/2$, второй — в плоскости $z = -c/2$, по

которым текут параллельные токи силой I. Учитывая (3.2.4), получим компоненту индукции $B_z(z)$, создаваемую нижним и верхним витками на оси z

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I c^2}{2}\left(\frac{1}{[c^2+(z+c/2)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[c^2+(z-c/2)^2]^{3/2}}\right).$$

Поскольку $B_z(z) = B_z(-z)$, то $B_z(z)$ представляет собой четную функцию. Она убывает при $|z| >> c$. Наличие симметрии колец относительно начала координат приводит к тому, что при смещении от точки $z = 0$ на малую величину $\Delta z = \varepsilon$ функция $B_z(z)$ получает приращение $\sim\varepsilon^4$. Следовательно, в окрестности $z = 0$ магнитное поле однородно:

$$B_z(0) = 8\cdot 5^{-\frac{3}{2}}\frac{\mu_0 I}{c} = 0,716\frac{\mu_0 I}{c}.$$

3.3. Закон Максвелла-Ампера

Если ток обладает некоторой простой симметрией, то можно «угадать» картину силовых линий. Тогда для определения индукции можно воспользоваться законом Максвелла-Ампера.

Рассмотрим замкнутую кривую C в области пространства, в которой текут токи. Совместим эту кривую или ее часть с силовой линией магнитного поля. Натянем на эту кривую поверхность, одну сторону которой будем называть внешней, другую — внутренней. Такая поверхность называется ориентированной поверхностью. Тогда можно задать положительное направление на кривой C по правилу: при обходе по замкнутой кривой в положительном направлении внешняя поверхность всегда находится с левой стороны.

Представим теперь контур в виде последовательности N малых элементов $\Delta\vec{l}_a$ ($a = 1, \ldots, N$), выберем на каждом точку $\vec{r}_a$ и образуем скалярное произведение $\vec{B}(r_a)\Delta\vec{l}_a$. Предел суммы всех произведений при $N \to \infty$, $\left|\Delta\vec{l}_a\right| \to 0$ называется *циркуляцией вектора* $\vec{B}$ *по контуру*. Согласно закону Максвелла-Ампера

$$\sum_{a=1}^{N}\vec{B}(r_a)\Delta\vec{l}_a = \mu_0 I. \qquad (3.3.1)$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Н/А^2 — магнитная постоянная, I — сила полного тока, протекающего через поверхность в направлении от внутренней к внешней стороне.

3.3.1. Магнитное поле прямого провода с постоянным током. Рассмотрим длинный тонкий провод, который совместим с осью z системы координат xyz (рис. 3.2.2 *а*). Ток силы I течет в положительном направлении оси z. Вследствие симметрии можно предположить, что силовые линии поля — окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной проводу, с центром на оси z. Выберем контур в виде окружности радиусом r и поверхность в виде круга с внешней стороной, ориентированной в положительном на-

правлении оси z. Вычисляя циркуляцию вектора $\vec{B}$ при обходе окружности в положительном направлении, имеем $2\pi rB = \mu_0 I$. Следовательно, величина магнитной индукции поля.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Задача 3.3.1. По длинному прямолинейному проводу радиусом a протекает ток силой I. Покажите, что величина магнитной индукции поля, созданной током на расстоянии $r \le a$ от оси провода равна

$$B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}.$$

3.3.2. Магнитное поле соленоида. Возьмем цилиндрическую катушку длиной l, радиусом a и намотаем на нее N витков проволоки плотно и равномерно, так что число витков на единицу длины является постоянной величиной N / l. Если длина катушки значительно больше ее диаметра, то такая система называется *соленоидом* (от греч. *solen* — трубка, *eidos* — вид). В этом случае ток силой I создает внутри соленоида почти однородное поле, а поле вне соленоида в пределах катушки мало по сравнению с полем внутри. Воспользуемся законом Ампера, выбрав прямоугольный контур $bcmn$, показанный в средней части соленоида на рис. 3.3.1.

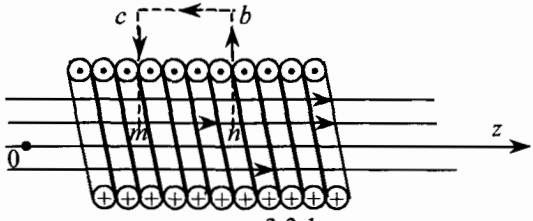


рис. 3.3.1

На длине $cb = l_1$ укладывается N_1 витков; $N_1/l_1 = N/l$. Согласно (3.3.1) имеем $B_z l_1 = \mu_0 N_1 I$, или

$$B_z = \frac{\mu_0 NI}{l}. \qquad (3.3.2)$$

В окрестности центра катушки длиной $l \approx 8a$ индукция поля практически равна этой величине. Вне соленоида в пределах катушки $B_z < 0$ и мало. Цилиндрический слой тока служит поверхностью разрыва для магнитного поля. Величина приращения B_z при переходе через поверхность катушки $\Delta B_z = \dfrac{\mu_0 NI}{l}$.

Задача 3.3.2. Тороид представляет собой кольцевой соленоид — «пустой бублик», на который навиты N витков изолированной проволоки. Радиус

средней окружности тороида a значительно больше радиуса поперечного сечения b. Покажите, что значение индукции магнитного поля на окружности радиусом a равно $B \approx \mu_0 NI/2\pi a$.

Задача 3.3.3. Тонкий металлический лист толщиной d занимает область пространства $-\frac{d}{2} \le y \le \frac{d}{2}$. Плотность тока в металле $\vec{j} = (j, 0, 0)$. Покажите, что индукция магнитного поля, создаваемого током, $\vec{B} = (0, 0, B_z)$;

$$B_z = \frac{\mu_0 jd}{2}, y \ge \frac{d}{2}; \qquad B_z = -\frac{\mu_0 jd}{2}, \ y \le -\frac{d}{2}.$$

Задача 3.3.4. А. Докажите, что $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$, где c — скорость света. Б. Докажите, что $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = R$, $R = 120\pi$ Ом = 376,8 Ом.

3.4. Поток электромагнитной энергии в электрической цепи

3.4.1. Связь переменных электрического и магнитного полей. Рассмотрим цепь, содержащую резистор и конденсатор (рис. 3.4.1). Расстояние между пластинами равно h, площадь пластины — S. Стрелкой указано положительное направление тока, ось z направлена перпендикулярно поверхности пластин. Вначале конденсатор заряжен, цепь разомкнута.

После замыкания ключа начинается разрядка конденсатора — через резистор течет переменный ток силой

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} < 0, \qquad q(t) = CV(t),$$

$V(t)$ — разность потенциалов точек m и n. Если мы возьмем контур L в схеме на рис. 3.4.1 совпадающий с силовой линией магнитного поля и поверхность S_1, пересекающую провод, то получим конечное значение левой и правой частей (3.3.1). Выберем теперь поверхность S_2, не пересекающую провод, а проходящую между обкладками конденсатора. Если учитывать только ток проводимости, отсутствующий внутри конденсатора, то мы получили бы значение правой части равное нулю. Однако значение правой части должно оставаться неизменным и равным $\mu_0 I$.

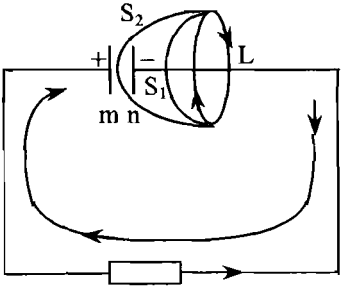


рис. 3.4.1

«Ток смещения». Сейчас мы покажем, что в случае переменного тока закон Максвелла-Ампера в форме (3.4.1) некорректен — к току проводимости необходимо добавить новое слагаемое. В связи с этим отметим, что z-компонента напряженности электрического поля в конденсаторе представляет собой функцию времени $E(t)$. Поскольку

$$V(t) = E(t)h, \ C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}, \text{ то } I(t) = \varepsilon_0 S\frac{dE}{dt} < 0.$$

Величину $I(t)$ иногда называют полным током смещения, «протекающим» между пластинами конденсатора. Поскольку $I = jS$, то z-компонента плотности тока смещения $j_z = \varepsilon_0 dE/dt$. Следовательно, правую часть закона Максвелла-Ампера необходимо дополнить слагаемым равным сумме элементарных вкладов $\varepsilon_0\mu_0\vec{n}_a \dfrac{d\vec{E}_a}{dt}\Delta S_a$, где $\vec{n}_a$ — единичный вектор перпендикулярный плоскости малой поверхности площадью ΔS_a, на которые разбита поверхность, натянутая на контур (a = 1, 2, ... , K). Следовательно, закон Максвелла-Ампера приобретает вид

$$\sum_{a=1}^{N} \vec{B}(\vec{r}_a)\Delta\vec{l}_a = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \sum_{a=1}^{K} \vec{n}_a \frac{d\vec{E}_a}{dt}\Delta S_a . \qquad (3.4.1)$$

В действительности никакого тока смещения не существует — всегда выполняется соотношение (3.4.1), связывающее токи проводимости, индукцию магнитного и напряженность электрического полей.

Используем полученный результат для вычисления индукции магнитного поля, создаваемого в конденсаторе переменным электрическим полем. Конденсатор состоит из двух дисков радиусами a. Из соображений симметрии следует, что вектор индукции $\vec{B}$ внутри конденсатора направлен по касательной к окружности с центром на оси z в плоскости перпендикулярной оси z — силовой линии магнитного поля. Совместим с этой окружностью контур в (3.4.1), а в качестве поверхности выберем круг, ограниченный окружностью. Пусть радиус окружности r << a. Введем три единичных вектора: вектор $\vec{n}$ = (0, 0, 1), задающий положительное направление на окружности, вектор $\vec{k}$ направим от центра окружности по радиусу и вектор $\vec{e} = \vec{n}\times\vec{k}$, касательный к окружности. Тогда согласно закону Максвелла-Ампера имеем

$$2\pi r\vec{B}\vec{e} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{dE}{dt}\pi r^2 \quad \text{или} \quad B(t, r) = \vec{B}\vec{e} = \frac{r}{2c^2}\frac{dE}{dt}.$$

Если $dE/dt < 0$, то $B < 0$.

3.4.2. Поток электромагнитной энергии в конденсаторе. После зарядки конденсатора на пластинах появятся положительный и отрицательный заряды, создающие электрическое поле напряженностью $\vec{E}_0$ = (0, 0, E_0). Энергия поля приближенно равна

$$U_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 (\pi a^2 h).$$

При разряде конденсатора напряженность поля уменьшается, энергия поля

$$U(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(t)(\pi a^2 h)$$

также убывает. Производная

$$\frac{dU}{dt} = \varepsilon_0 E \frac{dE}{dt}(\pi a^2 h)$$

характеризует скорость изменения энергии поля.

Перенос энергии связан с вектором $\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$. Его размерность $[S]$ = Вт/м^2. Этот вектор, характеризующий поток энергии электромагнитного поля через произвольную поверхность, ввел в 1884 г. английский физик Дж. Г. Пойнтинг. Отметим, что силовые линии электрического поля реального конденсатора имеют вид, изображенный на рис. 1.6.1. Пренебрегая искривлением силовых линий у краев пластин, получим единственную отличную от нуля компоненту вектора $\vec{S}$ — это проекция $S = \vec{S}\vec{k}$ на прямую, перпендикулярную оси конденсатора: $S = -\varepsilon_0 c^2 E(t) B(t, a)$. Подставляя значение $B(t, a)$, и получим плотность потока энергии

$$S = -\frac{\varepsilon_0 a}{2} E \frac{dE}{dt}$$

через боковую поверхность конденсатора площадью $2\pi ah$. Очевидно, что $S > 0$, если $dE/dt < 0$ — при разрядке поток энергии вытекает из конденсатора. Мощность полного потока энергии, протекающего через боковую поверхность,

$$2\pi ahS = -(\varepsilon_0 \pi a^2 h) E \frac{dE}{dt} = -\frac{dU}{dt}.$$

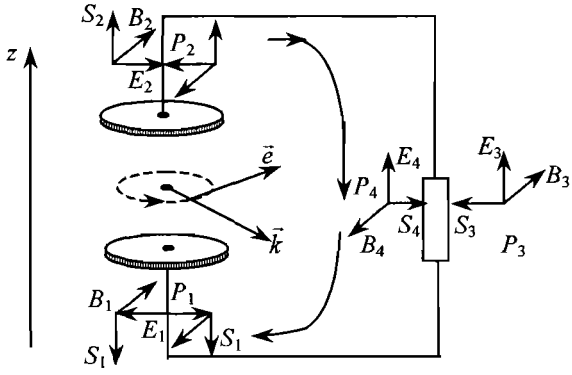


рис. 3.4.2

Теперь посмотрим, куда же движется поток электромагнитной энергии. Учитывая искривление силовых линий, обнаружим, что вблизи верхней пластины поток энергии имеет компоненту параллельную оси z, а вблизи нижней пластины — в отрицательном направлении оси z. На рис. 3.4.2 изображены векторы напряженности электрического поля $\vec{E}_p$ и индукции $\vec{B}_p$ в точках P_1, P_2 окрестности

провода и в точках P_3, P_4 по обеим сторонам резистора. Согласно определению потока энергии $\vec{S}_p = \varepsilon_0 c^2 \vec{E}_p \times \vec{B}_p$ находим, что $\vec{S}_1 = (0, 0, -S_1)$, $\vec{S}_2 = (0, 0, S_2)$ — в точках P_1 и P_2 поток энергии движется вне провода от конденсатора к резистору. Вблизи резистора вектор $\vec{E}_p \approx (0, 0, E_P)$ почти параллелен поверхности металла. Поэтому здесь вектор Пойнтинга направлен перпендикулярно поверхности вглубь металла. Таким образом, поток энергии втекает в резистор и определяет мощность, потребляемую резистором. Аналогичные процессы происходят в цепи на рис. 2.2.3 главы 2, содержащей ЭДС и резистор.

3.4.3. Поток энергии поля через поверхность резистора. Действительно, пусть резистор сопротивлением R представляет собой цилиндр радиусом a длиной l, через который проходит ток силой I. Согласно закону Ома разность потенциалов на концах резистора $V = IR$. Проекция напряженности электрического поля на образующую цилиндра $E = IR/l$, проекция магнитной индукции на касательную к окружности поперечного сечения цилиндра $B = \mu_0 I/2\pi a$. Следовательно, на поверхности резистора вектор Пойнтинга направлен вглубь металла. Значение величины S на поверхности $S = \varepsilon_0 c^2 EB$, $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$. Произведение величины потока электромагнитной энергии, втекающего в проводник через боковую поверхность, на площадь поверхности $2\pi a l$ определяет мощность электромагнитной энергии, потребляемой проводником

$$P = 2\pi a l S = 2\pi a l \varepsilon_0 c^2 EB.$$

Подставляя значения E и B, получим закон Джоуля — Ленца $P = I^2 R$ — мощность, потребляемая резистором, обусловлена потоком энергии электромагнитного поля *из внешней среды* через поверхность проводника.

Глава 4. Магнитные свойства вещества

4.1. Магнитный момент

Отметим сразу, что в основе магнитных эффектов лежат квантовые явления. Поэтому ограничимся качественным обсуждением магнитных свойств вещества.

Движение электронов вокруг атомных ядер эквивалентно замкнутым токам, которые создают магнитное поле. Любая петля с током представляет собой, так называемый *магнитный диполь*. Индукция магнитного поля замкнутой петли на расстояниях больших ее размеров полностью определяется *магнитным дипольным моментом* петли. В частности, для петли, изображенной на рис. 3.2.4 *а*, магнитный момент — представляет собой вектор $\vec{m}$, направленный перпендикулярно плоскости, ограниченной током; его величина $m = IS$, где S — площадь петли. Магнитное поле в веществе создается

«маленькими» петлями с током, а магнитные свойства вещества определяются не токами, а *вектором намагниченности* $\vec{M}$, который представляет собой магнитный момент единицы объема.

Гипотеза Ампера о молекулярных токах блестяще подтвердилась, когда были созданы первые модели электронных оболочек атомов и молекул. Однако в дальнейшем было установлено, что электрон и ядро сами являются элементарными магнитиками. Это свойство, проявляющееся при взаимодействии электрона с другими электронами и ядрами, обусловлено новой характеристикой элементарных частиц, получившей название *спин* (от англ. *spin* — вертеться). Спин электрона или ядра — такое же внутреннее свойство, как заряд и масса. Таким образом, магнитный момент атома создается не только движением электронов, но и содержит еще вклад спиновых магнитных моментов электронов и ядер.

Магнитные свойства веществ — *магнетиков* — полностью определяются *вектором намагниченности* $\vec{M}$, который представляет собой плотность магнитного момента вещества. Собственные магнитные моменты атомов, молекул и магнитные моменты, создаваемые электронными токами в молекулах, можно представить как результат проявления *связанного тока*. Поверхностный ток также является связанным током. Связанные токи приводят к возникновению магнитного момента вещества $\vec{M}V$, где V — объем. Свободные токи — это обычные токи проводимости, измеряемые, например, амперметром.

Очевидно, что в случае магнетиков правая часть закона Максвелла-Ампера (3.3.1) включает сумму свободного и связанного токов. В электродинамике сплошных сред вводят вектор *напряженности магнитного поля* $\vec{H}$, связанный только со свободными токами проводимости $I_{св}$. Размерность напряженности поля — А/м. Связанные токи создают вторичное поле индукции $\vec{B}' = \mu_0 \vec{M}$. Тогда индукция магнитного поля внутри вещества

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}. \qquad (4.1.1)$$

После подстановки $\vec{B}$ в (3.4.1) получим закон Максвелла–Ампера в виде

$$\sum_{a=1}^{N} \vec{H}(\vec{r}_a)\Delta\vec{r}_a = I_{св}. \qquad (4.1.2)$$

4.2. Диамагнетики и парамагнетики

В веществах, которые получили название *диамагнетиков* (от греч. *dia* — расхождение), валентные электроны образуют замкнутую структуру с нулевым магнитным моментом. Однако существует и такие вещества, в которых спиновые моменты отличны от нуля; они называются *парамагнетиками* (от греч. *para* — возле, рядом). Большинство веществ являются *диамагнетиками*.

Пусть $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$ — индукция внешнего магнитного поля, создаваемого обычными токами проводимости, протекающими по проводам. Во внешнем магнитном поле вещество намагничивается: в каждом атоме индуцируется

магнитный момент и возникает вторичное поле с индукцией $\vec{B}' = \mu_0 \vec{M}$. В случае не слишком сильных полей в изотропных диа- и парамагнетиках вектор намагниченности в каждой точке среды пропорционален напряженности магнитного поля: $\vec{M} = (\mu - 1)\vec{H}$. Постоянную μ называют *магнитной проницаемостью* вещества. Безразмерная величина μ является количественной характеристикой магнитных свойств среды. Подставляя $\vec{M}$ в (4.1.1), получим индукцию поля в веществе $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$.

В диамагнетиках (медь, золото, свинец, инертные газы) вторичное поле $\vec{B}'$ ослабляет внешнее поле: вектор $\vec{B}'$ направлен противоположно направлению вектора $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$. Это означает, что $B < B_0$, т. е. $\mu < 1$. Для большинства диамагнетиков μ отличается от единицы на величину $10^{-5} \div 10^{-6}$.

В парамагнетиках (алюминий, вольфрам, платина) молекулы можно представить в виде микроскопических магнитных стрелок. Внешнее магнитное поле не только смещает молекулярные токи, но и заставляет эти магнитики ориентироваться в одном направлении. В результате вектор $\vec{B}'$ оказывается параллельным вектору $\vec{B}_0$. В этом случае $B > B_0$, т. е. $\mu > 1$. Магнитная проницаемость вещества парамагнетиков отличается от единицы на величину $10^{-7} \div 10^{-4}$.

4.3. Ферромагнетики

В настоящее время известно огромное количество веществ, обладающих магнитной структурой. Это означает, что в их состав входят парамагнитные атомы, ориентированные определенным образом относительно друг друга. Среди таких веществ меньше всего ферромагнетиков (железо, кобальт, никель и др.) и то, что они давно известны, объясняется эффектными внешними проявлениями их внутреннего порядка.

Магнитная упорядоченная структура является результатом кулоновского взаимодействия пар электронов — по одному из каждого атома, зависящего от ориентации спинов, и приводит к установлению спонтанной (от лат. *spontaneus* — самопроизвольный) намагниченности. Простейший ферромагнетик представляет собой диэлектрик, в кристаллической решетке которого имеются атомы, обладающие магнитным моментом, причем в основном состоянии спины всех атомов параллельны. О совокупности таких атомов, говорят как о магнитной подрешетке. Ферромагнетик — это вещество с одной подрешеткой. Намагниченность образца равна сумме магнитных моментов отдельных атомов. В металлических ферромагнетиках (железо, кобальт, никель и др.) ферромагнетизм обусловлен магнитными моментами атомов и электронов проводимости.

В отсутствие внешнего магнитного поля такое полностью упорядоченное состояние часто оказывается термодинамически неустойчивым, и ферромагнетик разделяется на неупорядоченно ориентированные намагниченные макроскопические области, называемые *доменами* (от франц. *domaine* — владение, область). Они имеют размеры $\sim 10^{-3} \div 10^{-2}$ см и доступны наблюдению в микроскоп.

Внутри каждого домена магнитные моменты располагаются параллельно. В простейшем случае доменная структура представляет собой чередующиеся слои с взаимно противоположными направлениями намагниченности. Между доменами находится переходный слой, в котором намагниченность непрерывно меняет свое направление. Такое расположение доменов соответствует наименьшему значению магнитной энергии ферромагнетика.

Если образец размагничен, то сумма намагниченностей отдельных доменов равна нулю. Пусть напряженность магнитного поля $\vec{H} = (0, 0, H)$ образует некоторый угол с осью легкого намагничивания. При включении внешнего магнитного поля намагниченность плавно возрастает вследствие перемещения доменных «границ». Размеры доменов, имеющих наименьшее значение магнитной энергии, увеличиваются за счет других доменов. Этот процесс при возрастании поля продолжается и, наконец, весь образец превращается в один большой домен. Дальнейшее увеличение напряженности поля $\vec{H}$ вызывает поворот вектора намагниченности домена параллельно полю и возрастание намагниченности до максимально возможного значения. При намагничивании объем ферромагнетика возрастает.

Сплавы, которые легко намагничиваются в слабом магнитном поле, называют «мягкими». При температуре ниже *точки Кюри* $t_к = 767°C$ в ненамагниченном «мягком» ферромагнетике $H = 0$ и $B = 0$. Увеличение H вызывает нелинейное возрастание функции $B(H)$: вначале медленное, затем более быстрое, затем очень медленное. В этой области значений H намагниченность достигает постоянного значения $M(H) \to M_m$, индукция $B(H) \to B_m$, $B_m \approx \mu_0 M_m$. Например, в образце электротехнической стали 1511 при напряженности поля $H = 1000$ А/м индукция поля $B_m = 1{,}3$ Тл. Величина $\mu = B_m/(H\mu_0)$ достигает значения $\mu = 1{,}3 \cdot 8 \cdot 10^2 = 1040$. При значениях $H = 2500$ А/м и $H = 5\,000$ А/м соответственно имеем $B = 1{,}46$ Тл, $\mu = 467$ и $B = 1{,}57$ Тл, $\mu = 251$. Если теперь медленно уменьшать H, то кривая $B = B(H)$ не проходит через значение $B = 0$ (рис. 4.3.1). После выключения внешнего поля сохраняется *остаточное поле* индукцией $B_r = B(0) \sim 1$ Тл благодаря намагниченности, приобретенной образцом. Это явление, обусловленное необратимостью процесса намагничивания, называется *гистерезисом* (от гр. *hysteresis* — запаздывание). Благодаря гистерезису возможно существование постоянных магнитов и запоминающих устройств на магнитных пленках.

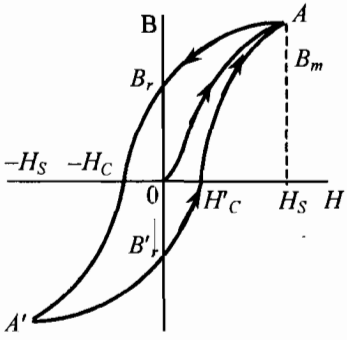


рис. 4.3.1

Остаточная намагниченность $\vec{M}_{ост} = \vec{M}(0)$ является источником магнитного поля индукцией $\vec{B}^{(i)} = \mu_0(\vec{H}^{(i)} + \vec{M}_{ост})$ внутри ферромагнетика и

$\vec{B}^{(e)} = \mu_0 \vec{H}^{(e)}$ во внешней области. Она будет существовать до тех пор, пока образец не подвергнут нагреванию или приложат для компенсации размагничивающее поле напряженностью H_c, которое называют *коэрцитивной силой*. Для магнитно-мягких ферромагнетиков $H_c < 0{,}05 \div 0{,}01$ А/м. При температуре выше 767°С чистое железо теряет свои ферромагнитные свойства и ведет себя как парамагнетик. При охлаждении его магнетизм восстанавливается: магнитные моменты атомов спонтанно выстраиваются в одном направлении.

Магнитные материалы широко применяются в электротехнике, радиотехнике, приборостроении, компьютерах.

Магнитное экранирование. Для защиты приборов от влияния посторонних магнитных полей используют замкнутые ферромагнитные оболочки. В этой системе поле сосредоточено внутри стенок оболочки и значительно ослаблено во внутренней полости.

Пример 4.3.1. Из некоторых новых материалов можно получить весьма сильные магнитные диски. Например, в сплаве самарий-кобальт магнитный момент достигает значения $M \sim 1$ МА/м. Магнитный момент электрона равен магнетону Бора $\mu_Б = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл: значению M соответствует 10^{23} ориентированных электронных спинов в одном кубическом сантиметре. Оценим индукцию магнитного поля в центре диска радиусом $a = 1$ см, толщиной $h = 0{,}3$ см.

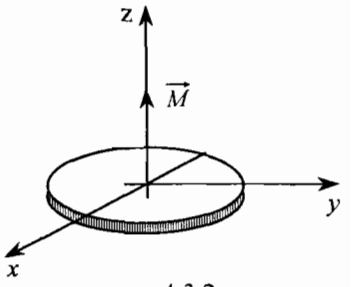


рис. 4.3.2 а

Магнитный момент диска направлен по оси z (рис. 4.3.2 *а*). Покажем, что намагниченность M обусловлена фиктивным связанным током, текущим по поверхности ободка диска. На рис. 4.3.2 *б* изображено распределение токов, удовлетворяющих этому условию. Здесь показано сечение диска в плоскости xy. Сечение разбито на элементарные ячейки, внутри каждой «циркулируют» связанные токи, создавая магнитный момент. Суммарная сила тока на границах, разделяющих ячейки, равна нулю, т. к. токи взаимно компенсируют друг друга. Однако на ободке диска такая компенсация отсутствует и поэтому существует поверхностный ток, текущий по ленте шириной h. Сила тока, протекающего по полоске шириной Δz, равна $\Delta I = i\Delta z$, где i — *плотность поверхностного тока* — это заряд, протекающий в единицу времени через единицу длины. Магнитный момент замкнутого контура с током $\Delta I \Delta x \Delta y = i \Delta y \Delta x \Delta z$ представляет собой магнитный момент элементарного объема $M \Delta x \Delta y \Delta z$. Следовательно, $M = i$, $I = Mh = 3000$ А! Согласно (3.2.4) в центре диска индукция поля $B_z(0) = \mu_0 Mh/2a$, $B_z(0) = 0{,}2$ Тл.

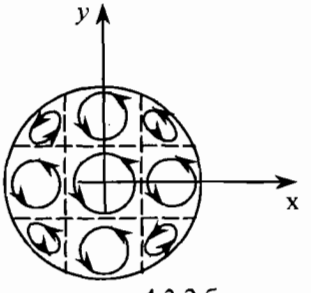


рис. 4.3.2 б

Глава 5. Электрический ток в различных средах

5.1. Сверхпроводимость

5.1.1. Идеальный проводник. Понимание механизма проводимости стало возможным только после создания в 1925 г. квантовой механики. Согласно современным представлениям электрон, взаимодействующий с неподвижными ионами в узлах строго периодической кристаллической решетки, движется с постоянной скоростью. Однако реальные проводники никогда не являются идеальными кристаллами. Отклонения обусловлены двумя причинами: тепловыми колебаниями ионов и различного рода дефектами. При температуре $T = 0$ сопротивление проводника, не имеющего искажений решетки, должно быть равно нулю. Такой проводник получил название *идеального*.

5.1.2. Сверхпроводники. Идеальный проводник не следует отождествлять со *сверхпроводником*. Эффект сверхпроводимости проявляется в том, что при достижении критической температуры $T_C \neq 0$ сопротивление проводника скачком падает до значения $R = 0$. Скачкообразное исчезновение сопротивления ртути при $T_C = 4{,}15$ К впервые наблюдал голландский физик Х. Камерлинг-Оннес в 1911 г. (Нобелевская премия, 1913 г.). При температуре ниже T_C внешнее магнитное поле не проникает внутрь сверхпроводника за исключением тонкого слоя вблизи поверхности, где $B \neq 0$. Если, наоборот, нормальный металл охладить до температуры ниже T_C, то внешнее магнитное поле вытесняется из образца. Сверхпроводник переходит в состояние идеального диамагнетика. Внешнее магнитное поле создает такое распределение токов, магнитное поле которых его уничтожает. Ниже температуры T_C сверхпроводимость может быть разрушена при определенном значении индукции магнитного поля B_C, называемом критическим.

Выяснился парадоксальный факт: среди металлов, обладающих при нормальной температуре высокой проводимостью, сверхпроводники не встречаются. Ключом к разгадке механизма сверхпроводимости явился открытый Г. Фрелихом в 1950 г. *изотопический эффект*: критическая температура и массовое число металла связаны соотношением $T_C / \sqrt{M} = const$. Следовательно, сверхпроводимость связана с состоянием системы «электроны-решетка». Оказалось, что в нормальном состоянии неидеальность решетки приводит к передаче энергии от электронов к решетке и к возникновению сопротивления. Однако в сверхпроводнике отталкивание электронов может быть скомпенсировано и даже преодолено динамическим откликом ионов решетки. Электрон, двигаясь сквозь решетку, притягивает ионы, формируя область с повышенной плотностью положительных ионов, которая может притягивать другие электроны. Эта роль массивных ионов и объясняет изотопический эффект: электроны, взаимодействуя с решеткой, образуют связанные пары, которые движутся синхронно, без потерь энергии. Возникает оптимальное распределение пар, в котором их общая энергия оказывается наименьшей из возможных. Размеры пары $\sim 10^{-4}$ см. Взаимное влияние электронов в паре простирается на макроскопически большие расстояния по-

рядка 10^3 – 10^4 периодов решетки. При $T = 0$ энергия связи пары ~3,5 kT_C. С увеличением температуры концентрация пар уменьшается и увеличивается число неспаренных электронов, образующих нормальную компоненту тока. Нормальный ток затухает при отключении внешнего источника. В 1962 г. был поставлен опыт, в котором незатухающий ток в сверхпроводящем кольце наблюдался более 2,5 лет.

Теоретическим анализом сверхпроводимости занимались физики многих стран. Однако только в 1957 г. американскими физиками Дж. Бардиным, Л. Купером и Дж. Шриффером была построена физическая модель этого явления — так называемая теория БКШ (Нобелевская премия, 1972 г.).

Полное отсутствие сопротивления делает сверхпроводники идеальным объектом для научных исследований и технических приложений.

Новая эра началась в октябре 1986 г. в результате публикации статьи Г. Беднорца и К. Мюллера о наблюдении сверхпроводимости керамических соединений при температуре перехода свыше 130 К (Нобелевская премия, 1987 г.). Они обратили внимание на новый класс веществ, в которых возможна высокотемпературная сверхпроводимость. Увеличение температуры перехода позволяет отказаться от охлаждения проводника дорогими гелиевыми установками и перейти на дешевый жидкий азот. Это достижение приведет к новому рывку в научно-техническом прогрессе и появлению приборов и устройств, о которых вчера еще нельзя было и мечтать.

Перечислим возможные области применения сверхпроводников.

1. Передача электромагнитной энергии по сверхпроводящему кабелю без потерь.

2. Накопители электроэнергии в замкнутых сверхпроводящих кольцах.

3. Повышение производительности ЭВМ на основе сверхпроводящих элементов электронных схем.

4. Использование магнитов со сверхпроводящими обмотками.

А. В генераторах электроэнергии с типичной мощностью 300 МВт применение сверхпроводящих магнитов позволит удвоить мощность.

Б. В медицине такие магниты используются в томографе — установке для получения изображения внутренних органов, принцип работы которой основан на эффекте явления ядерного магнитного резонанса.

В. Мощные магниты необходимы для реализации магнитной подвески вагонов и бесконтактного движения поезда на магнитной подушке или «маглева» (сокращение от англ. *magnetic levitation*). Японский «Маглев» установил в 2003 г. мировой рекорд скорости — 581 км/ч.

Г. Создание нового типа двигателя для морских судов и подводных лодок. В 1991 г. проведено испытание судна «Ямато-1» в Японии. Силовая установка представляет собой шесть магнитов, создающих вертикальное магнитное поле в трубе, погруженной в воду. Батарея, подключенная к двум горизонтально расположенным на трубе электродам, создает ток. Сила Ампера заставляет воду мощной струей изливаться из сопла трубы. Для увеличения силы тяги необходимы магниты с большой индукцией поля. Еще раньше прошли испытания подводного корабля сигарообразной формы. Магниты

находятся внутри оболочки. На внешней поверхности расположены только два линейных проводника, подключенные к аккумулятору (см. задачу 3.1.4).

Д. Увеличение индукции магнитного поля позволило бы существенно уменьшить размеры ускорителей, снизить расход материалов и намного повысить энергию ускоряемых частиц при умеренных размерах системы.

Е. Сверхпроводящие магниты имеют решающее значение для промышленного освоения термоядерной энергии.

5.2. Электрический ток в электролитах

5.2.1. Электролитическая диссоциация. Электролиз. Целый ряд веществ при растворении в воде оказывается распределенным в растворе частично в виде молекул, частично в виде заряженных частей молекул — *ионов* (от греч. *ion* — идущий). Вещества, растворы которых содержат подвижные ионы называются *электролитами.* Отрицательные ионы содержат избыточные электроны, положительным ионам не достает электронов. О молекулах, которые при растворении распадаются на заряженные части — ионы, говорят, что они диссоциируют, а само явление называется *электролитической диссоциацией.*

Уникальная способность воды растворять большинство веществ связана со структурой молекулы воды. Атом кислорода, имеющий на два электрона меньше, чем устойчивый элемент неон, захватывает на свою орбиту электроны двух атомов водорода. Подобная перестройка электронной оболочки характерна для ионной связи. При этом образуется равнобедренный треугольник НОН, в котором угол НОН равен 105°. Вследствие такой симметрии молекула воды является диполем — отрицательный и положительный заряды оказываются пространственно разделенными. Благодаря дипольному моменту молекулы воды сильно взаимодействуют между собой и с молекулами других веществ.

Слабым электролитом является также и сама вода. Небольшая часть молекул воды диссоциирует на ионы водорода (протоны) и гидроксил- ионы: $H_2O \leftrightarrow H^+ + OH^-$. В чистой воде молярные концентрации ионов (число молей ионов в одном литре раствора — воды) одинаковы: $c_1 = c_2$. Из условия химического равновесия реакции следует, что константа равновесия $K = c_1c_2/c_0$, где $c_0 = \rho_в 10^{-3}/M_в$ — концентрация молекул воды. Поскольку $M_в = 0{,}018$ кг/моль, то $c_0 = 55{,}5$ моль/л. В справочной таблице приведено значение произведения $Kc_0 = 10^{-14}$ (моль/л)^2 при температуре 25°С. Следовательно, $c_1 = c_2 = 10^{-7}$ моль/л. В этом случае говорят, что показатель pH, введенный в 1909 г. датским химиком С.П.Л. Серенсеном, равен 7. При 25°С концентрация обоих сортов ионов соответствует диссоциации одной молекулы из $c_0/c_1 = 555$ миллионов молекул воды.

Основы теории электролитической диссоциации разработал в 1883—1887 гг. швед С. Аррениус. Эта теория вызвала возражения со стороны большинства ученых. Все привыкли думать, что в растворе, например, поваренной соли NaCl содержатся только молекулы, ведь при испарении раствора получается та же соль. Трудно было представить, чтобы в растворе мог содержаться хлор — газ с удушливым запахом и натрий — мягкий металл, плавающий в воде и бурно с ней реагирующий. Однако хлор и натрий

здесь не обычные, а заряженные. Из представлений об ионе следовало, что атом имеет структуру, а химические свойства ионов резко отличаются от свойств атома, из которых они получены. Особенно сильно проявляется различие в спектрах атомов и ионов.

Электролит является проводником тока. Присоединим к источнику напряжения два электрода и опустим их в электролит. Согласно терминологии, введенной М. Фарадеем в 1834 г., электрод, соединенный с положительным полюсом источника, называют *анодом* (от греч. *anodos* — путь вверх), а электрод, соединенный с отрицательным полюсом — *катодом* (от греч. *kathodos* — схождение, спуск). При включении источника между электродами образуется электрическое поле, в котором отрицательные ионы — они называются анионами (от греч. *ana* — вверх, *ion* — идущий) — движутся к аноду, а положительные — катионы (от греч. *kata* — вниз, *ion* — идущий) — к катоду. На аноде отрицательные ионы отдают электроны и становятся нейтральными атомами, а на катоде положительные ионы приобретают электроны. Анод играет роль окислителя, а катод — восстановителя. В результате этих процессов на электродах выделяются продукты реакции. Разложение электролита при прохождении электрического тока называется *электролизом*. Электролиз был открыт в 1800 г. сразу же после создания Вольта источника тока. Важно отметить, что для электролиза необходим подвод энергии от внешнего генератора.

5.2.2. Электропокрытие. Покрываемый металлом предмет всегда служит катодом. Опустим в раствор сульфата меди два медных электрода и присоединим их к источнику напряжения. Молекула $CuSO_4$ диссоциируют на ионы Cu^{2+} и SO_4^{2-}. Ионы SO_4^{2-}, достигая анода, отдают ему свои электроны и, взаимодействуя с медью анода, образуют сульфат меди. Ионы Cu^{2+} достигают катода и, присоединяя электроны, образуют атомы меди, оседающие на катоде. Происходит растворение медного анода. В результате количество сульфата меди в растворе остается постоянным.

Если использовать платиновые электроды, то ионы меди Cu^{2+} по-прежнему оседает на катоде. Однако теперь ионы SO_4^{2-}, соединяясь с двумя ионами H^+, образуют серную кислоту, а в растворе остаются ионы OH^-. Последние, достигая анода, где имеется дефицит электронов, отдают ему лишние электроны и образуют воду и кислород согласно реакции $4OH = 2H_2O + O_2$. Количество сульфата меди уменьшается.

Мы видим, что протекание тока через электролит связано с переносом вещества и выделением его на электродах. Явление электролиза описывают два закона, открытых М. Фарадеем в 1833—1834 гг.

5.2.3. Законы электролиза Фарадея. Первый закон Фарадея. Масса Δm вещества, выделившегося на электроде из раствора различных его соединений за время Δt, пропорциональна силе тока $I(t)$ и интервалу времени Δt:

$$\Delta m = kI(t)\Delta t, \qquad (5.2.1)$$

здесь k — коэффициент пропорциональности, получивший название электрохимического эквивалента, принимает разные значения для различных веществ.

Второй закон Фарадея. Электрохимический эквивалент вещества пропорционален химическому эквиваленту вещества $x = M / z$, где M — молярная или атомная масса, z — валентность элемента:

$$k = \frac{M}{Fz} \tag{5.2.2}$$

Коэффициент пропорциональности содержит величину $F = 9{,}6485 \cdot 10^4$ Кл/моль, называемую *постоянной Фарадея*. Подставляя в (5.2.1) выражение для k из (5.2.2), получим объединенный закон Фарадея

$$\Delta m = \frac{MI\Delta t}{Fz} \tag{5.2.3}$$

Приведем значения электрохимических эквивалентов некоторых металлов: $3{,}29 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл (медь-II), $3{,}04 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл (никель), $1{,}118 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл (серебро-I), $6{,}81 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл (золото).

Теперь можно получить важнейшее следствие закона Фарадея. Найдем величину заряда, переносимого одним ионом. Пусть ΔN — число ионов, оседающих на каждом из электродов при переносе $\Delta\nu$ молей вещества. Представим Δm в виде $\Delta m = M\Delta\nu = M\Delta N/N_A$. Тогда из (5.2.3) получим $\Delta N = \Delta q N_A/zF$, где $\Delta q = I\Delta t$. Следовательно, величина заряда, которым обмениваются ионы и электроды $\Delta q/\Delta N = zF/N_A$, или $\Delta q/\Delta N = ze_0$, где $e_0 = F/N_A = 1{,}6\ 10^{-19}$ Кл — это заряд электрона, открытого в 1897 г. Если $z = 1$, то постоянная Фарадея численно равна заряду $\Delta q = I\Delta t$, который должен пройти через электролит, чтобы на электроде выделился один моль вещества: 1 моль = $\Delta q/F$. Поскольку моль любого вещества содержит число молекул равное числу Авогадро N_A, то отношение $e_0 = F/N_A$ не что иное, как минимальная величина заряда, которым обмениваются ионы и электроды.

Таким образом Фарадей вплотную подошел к представлению о количестве электричества, связанном с частицами или атомами материи. Заряженные частицы вещества он назвал ионами. Однако заключение об атомарной природе электричества было сделано позднее. В 1891 г. минимальное количество электричества, переносимого в процессе электролиза, получило название «электрон». Тем не менее, до открытия в 1897 г. частицы, которую стали называть электроном, большинство физиков различали две формы проводимости: одну, создаваемую атомами в электролите, и другую — металлическую, которая передавалась так же как упругая деформация стержня. В вакууме «электрическая сила» передавалась напряжениями «эфира».

Получим теперь закон Фарадея (5.2.3), исходя из современных представлений о строении вещества. Очевидно, число атомов вещества, образующихся на электроде, $\Delta N = \Delta q/ze_0$, где $\Delta q = I\Delta t$ — полный заряд, прошедший через электролит, e_0- величина заряда электрона. Поскольку масса одного атома равна M/N_A (N_A — число Авогадро), то масса вещества, выделяющегося на электроде, $\Delta m = MI\Delta t/(ze_0N_A)$. Сопоставляя это выражение с (5.2.3),

находим $F = e_0 N_A$. Следовательно, величина заряда электрона выражается через две фундаментальные физические постоянные $e_0 = F/N_A = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Задача 5.2.1. В двух электролитических ваннах, соединенных последовательно, находятся раствор сульфата меди и раствор хлористой меди CuCl. В первой ванне выделяется один моль меди. Сколько молей меди выделяется во второй ванне?

Задача 5.2.2. Два провода от генератора постоянного напряжения погрузили в воду. Масса воды, разложившейся при электролизе, $m = 1{,}8$ г.

А. Найти объемы выделившихся водорода и кислорода при нормальных условиях.

Б. Как определить полярность генератора напряжения?

Пример 5.2.3. Рассмотрим процесс электролиза водного раствора NaCl.

Диссоциация в растворе: $NaCl = Na^+ + Cl^-$. Реакция на катоде: $2H^+ + 2OH^- + 2e = H_2 + 2OH^-$. Реакция на аноде: $2Cl^- = 2e + Cl_2$. Результирующая реакция: $2NaCl + 2H_2O = H_2 + Cl_2 + 2NaOH$.

Задача 5.2.4. Какое количество цинка расходуется в элементе Даниэля за 1 минуту при силе тока 1 А. Валентность цинка $z = 2$, атомная масса 65,38 г/моль.

Решение. Электрохимический эквивалент цинка $k = M/2F = 3{,}388 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл. Следовательно, $\Delta m = 0{,}02028$ г.

5.3. Электрический ток в вакууме. Диод. Триод

5.3.1. Что такое вакуум? Этот термин происходит от латинского *vacuum* — пустота. *Вакуум*, как его понимают в физике, — *это состояние газа при давлении меньше атмосферного.* Физической характеристикой вакуума является соотношение между характерными размерами прибора L и *длиной свободного пробега* λ — среднего расстояния, проходимого молекулой между двумя «столкновениями». Величина

$$\lambda = \frac{0{,}056}{a^2 n},$$

где a — радиус действия молекулярных сил, n — концентрация молекул. Для молекул воздуха $a \approx 1{,}6$ нм. При нормальных условиях концентрация воздуха дается числом Лошмидта $n_L = 2{,}69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$; длина свободного пробега $\lambda \approx 50$ нм. Среднему вакууму соответствуют условие $\lambda \approx L$, высокому — условие $\lambda >> L$.

Задача 5.3.1. Температура воздуха $t = 0°C$. Найдите давление воздуха, при котором длина свободного пробега $\lambda = 0{,}1$ м.

5.3.2. Вакуум в физических исследованиях. В современных электронных лампах удается уменьшить давление до $10^{-8} - 10^{-6}$ Па. В ускорителях протонов и электронов достаточно иметь в вакуумной камере давление $\approx 10^{-4}$ Па. Появление накопительных колец — ускорителей, в которых сталкиваются пучки, летящие навстречу друг с другом, — потребовало создание более высокого вакуума $\approx 10^{-9}$ Па, а в местах пересечения пучков — даже $\approx 10^{-11}$ Па.

Первые насосы для получения разреженного воздуха были созданы учеными Древнего мира (Герон, I век н. э.). Однако только в начале XIX века возникла насущная потребность в вакуумной технике. С ее появлением физики сделали ряд фундаментальных открытий. В 1883 г. известный американский изобретатель Т.А. Эдисон открыл явление *термоэлектронной эмиссии*. В первой половине этого века выдающийся американский физик и химик И. Ленгмюр внес существенный вклад в исследования прохождения тока в вакууме.

5.3.3. Диод. *Вольт-амперная характеристика диода.* Рассмотрим двухэлектродную лампу — *диод* — электровакуумный прибор, изобретенный в 1904 г. английским физиком Д. Флемингом. Катод, разогретый до 500—600°С, является источником электронов, образующих отрицательный пространственный заряд. Присоединим диод к источнику напряжения. Пусть катод находится в плоскости $z = 0$, анод — в плоскости $z = d$. Значения потенциала на оси z определяются функцией $\varphi(z)$, $\varphi_а$, $\varphi_к$ — потенциалы анода и катода, $V = \varphi_а - \varphi_к$ — анодное напряжение (рис. 5.3.1). Функциональная зависимость между током и напряжением представляет собой *вольт-амперную характеристику*. На рис. 5.3.2 изображена вольт-амперная характеристика диода: $I = f(V)$. При небольших напряжениях V появляется электронное облако пространственного заряда, которое приводит к образованию минимума потенциала $\varphi(z)$ между электродами. Следовательно, электроны, вылетевшие из катода, тормозятся электрическим полем. При увеличении напряжения V минимум потенциала смещается к катоду и ускоряющее поле занимает большую часть лампы; все электроны, вылетевшие из катода, достигают анода. В этом режиме, называемом режимом насыщения, сила тока растет $\sim V^{3/2}$ (закон Ленгмюра). При достаточно большом напряжении сила тока достигает наибольшей величины, называемой *током насыщения*. При отрицательном напряжении $V < 0$ обратный ток через диод значительно меньше, чем ток в прямом направлении.

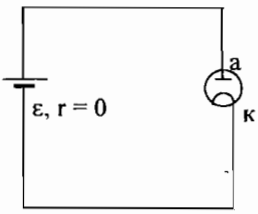


рис. 5.3.1

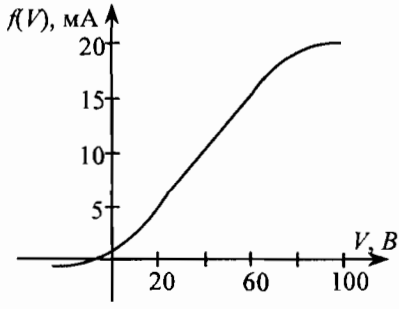


рис. 5.3.2

Теория тока в диоде разработана И. Ленгмюром в 1913 г. Для обычного проводника вольт-амперная характеристика $I = V/R$ представляет линейную зависимость тока от напряжения. Пропорциональность тока напряжению означает неизменность величины сопротивления. Вольт-амперная характеристика диода имеет существенно *нелинейный* характер.

Задача 5.3.2. Графический метод определения силы тока. Схема рис. 5.3.3, а содержит батарею с ЭДС равной ε, резистор сопротивлением R и диод. Найдите силу тока.

Решение. Согласно закону Ома

$$V + IR = \varepsilon, \tag{1}$$

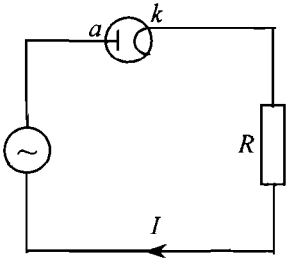


рис. 5.3.3 а

где $V = \varphi_a - \varphi_k$. Уравнение (1) и вольт-амперная характеристика диода

$$I = f(V) \tag{2}$$

образуют систему двух уравнений относительно I, V. Построим в координатах I, V график функции (2), а затем график прямой

$$I = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{V}{R}. \tag{3}$$

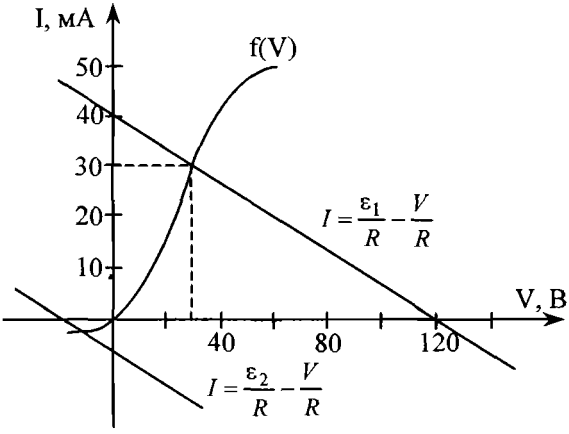


рис. 5.3.3 б

Точка пересечения двух кривых определяет ток I_1 в цепи и падение напряжение V_1 на диоде. Этот способ решения уравнений (1), (2) называется *методом нагрузочной прямой.* На рис. 5.3.3б изображены две нагрузочные прямые: одна при значениях ε_1 = 120 В, R = 3 кОм и другая при ε_2 = –20 В, R = 3 кОм. В первом случае сила тока через диод I_1 = 30 мА, а во втором — пренебрежимо мала.

При технических расчетах иногда допустимо использовать упрощенную вольт-амперную характеристику диода, полагая

$$f(V) = \begin{cases} 0, & V < 0, \\ \dfrac{V}{R_0}, & V \geq 0, \end{cases} \tag{5.3.1}$$

где R_0 — сопротивление диода. В этом случае диод работает в двух режимах: открыт — заперт, обладая односторонней проводимостью. Можно мак-

симально упростить характеристику, полагая $R_0 = 0$. Диод с такой характеристикой называется идеальным.

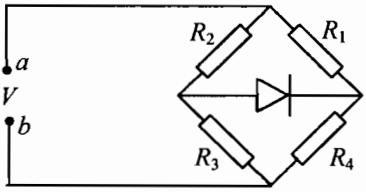


рис. 5.3.4

Задача 5.3.3. А. В схеме рис. 5.3.4 сопротивления резисторов $R_1 = R_3 = 5$ Ом, $R_2 = R_4 = 20$ Ом, разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b = V$, $V = 40$ В. Проводимость диода описывается идеальной вольт-амперной характеристикой. Найдите силу тока, протекающего через диод.

Решение. Пусть V_g — напряжение на диоде, I — сила тока через диод, V_n — напряжение на резисторе R_n ($n = 1, 2, 3, 4$). Имеем систему уравнений

$$V = V_2 + V_g + V_4, \quad V_2 + V_3 = V, \quad V_1 + V_4 = V,$$

$$V_2/R_2 - V_3/R_1 = I, \qquad V_4/R_2 - V_1/R_1 = I.$$

Из этой системы уравнений находим

$$I = [(R_1 - R_2)V - (R_1 + R_2)V_g]/(2R_1R_2).$$

График этой функции $I = I(V_g)$ представляет собой прямую. Используя метод нагрузочной прямой найдем точку пересечения прямой и кривой, соответствующей вольт-амперной характеристике диода $I = f(V_g)$. Поскольку $R_2 > R_1$, то точка пересечения находится в области $V_g < 0$. Следовательно, диод заперт, сила тока I равна нулю, $V_g = (R_1 - R_2)V/(R_1 + R_2)$, $V_g = -24$ В.

Б. В схеме рис. 5.3.4 сопротивления резисторов $R_1 = R_3 = 20$ Ом, $R_2 = R_4 = 5$ Ом. Найдите силу тока, протекающего через диод.

Решение. Теперь $R_2 < R_1$, точка пересечения находится в области $V_g > 0$. Следовательно, диод открыт. Полагая в случае идеального диода $V_g = 0$, получим $I = 3$ А.

Задача 5.3.4. Диодное ограничение. Схема рис. 5.3.5 *а* содержит диод сопротивлением $R_0 = 100$ Ом, резистор сопротивлением $R = 5$ кОм и батарею с ЭДС равной $\varepsilon_0 = 2$ В. Разность потенциалов на входе системы $\varphi_a - \varphi_b = V_{in}$. Изобразите на рис. 5.3.5 *б* напряжение на выходе $\varphi_k - \varphi_b = V_{out}$ как функцию напряжения на входе V_{in}.

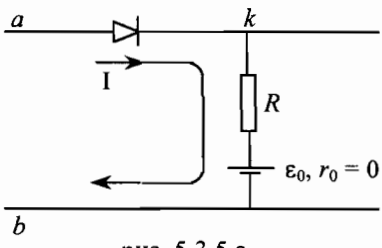


рис. 5.3.5 а

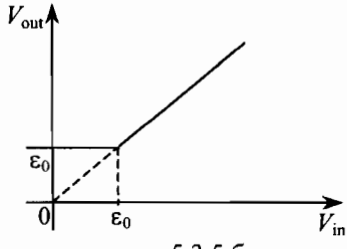


рис. 5.3.5 б

Решение. Обозначим стрелкой положительное направление на контуре *akb*, напряжение на диоде $V = \varphi_a - \varphi_k$. Очевидно,

$$V_{\text{in}} = V + V_{\text{out}}, \qquad IR + \varepsilon_0 = V_{\text{out}}.$$

Присоединим к этой системе вольт-амперную характеристику $I = f(V)$. Подставляя сюда I и V получим уравнение

$$\frac{V_{\text{out}} - \varepsilon_0}{R} = f\left(V_{\text{in}} - V_{\text{out}}\right).$$

Согласно (5.3.1) при $V_{\text{in}} < V_{\text{out}}$, имеем $V_{\text{out}} = \varepsilon_0$. В случае $V_{\text{in}} \geq V_{\text{out}}$, находим

$$V_{\text{out}} = \left(V_{\text{in}} + \frac{\varepsilon_0 R_0}{R}\right)\frac{R}{R_0 + R}.$$

Поскольку $R_0 << R$, то $V_{\text{out}} \approx V_{\text{in}}$. График функции $V_{\text{out}}(V_{\text{in}})$ изображен на рис. 5.3.5 *б*.

Б. Пусть $V_{\text{in}}(t) = 0$, $t < 0$, $V_{\text{in}} = V_0 \sin \omega t$, $t \geq 0$. Величина $V_0 = 1$ В, $\nu = \omega/(2\pi) = 50$ Гц. Постройте график функции $V_{\text{out}}(t)$.

Пример 5.3.5. Выпрямление переменного напряжения. В схеме рис. 5.3.6 *а* генератор напряжения и диод подключены к *RC* цепи, образованной конденсатором и резистором. ЭДС генератора $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos\omega t$, $T = 2\pi/\omega$ — период колебаний, $t \geq 0$. Сопротивление резистора R и внутреннее сопротивление диода R_i удовлетворяют неравенству $R >> R_i$. Обозначим разности потенциалов $V = \varphi_a - \varphi_k$ на диоде и $U = \varphi_k - \varphi_o$ на *RC*-цепи. Стрелки указывают положительные направления токов I, I_1, I_2. Наша задача — найти напряжение на выходе схемы — функцию $U(t)$.

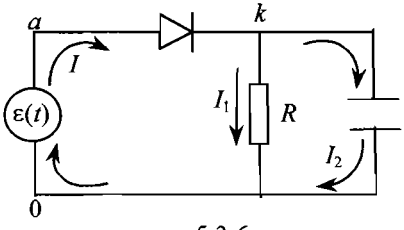


рис. 5.3.6 а

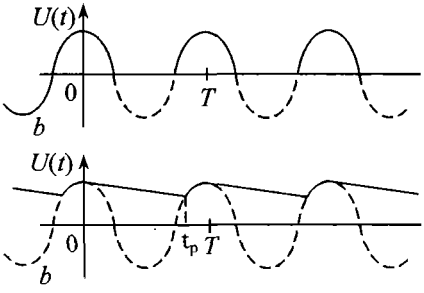


рис. 5.3.6 б, в

Из законов Кирхгофа имеем систему

$$I = I_1 + I_2, \; V + U = \varepsilon(t), \; I_1 R = U. \qquad (1), (2), (3)$$

Поскольку $I = f(V)$, $I_2 = CdU/dt$, то подставляя силы токов и V в (1), получим уравнение

$$CdU/dt + U/R = f[\varepsilon(t) - U], \qquad (4)$$

относительно напряжения U(t) на выходе схемы. Решение уравнения (4) можно получить только приближенными методами.

А. Пусть $\varepsilon(t) - U(t) > 0$. Тогда диод открыт, сила тока $I = [\varepsilon(t) - U]/R_i$. Из (2) следует уравнение

$$\tau_з dU/dt + U = \varepsilon(t)R_0/R_i,$$

где $\tau_з = CR_0$ — постоянная времени заряда конденсатора, $1/R_0 = 1/R + 1/R_i$, $R_0 \approx R_i$.

Б. Если $\varepsilon(t) - U(t) \le 0$, то диод заперт — имеем уравнение, описывающее разряд конденсатора через резистор

$$\tau_р dU/dt + U = 0,$$

где $\tau_р = CR$ — постоянная времени разряда конденсатора.

Если в схеме отсутствует конденсатор, то $C = 0$, $I_2 = 0$, $I = I_1$. Напряжение на выходе схемы $U(t) = \varepsilon(t)R_0/R_i \approx \varepsilon(t)$, $t_n \le t \le t_n + T/2$, $t_n = nT - T/4$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; $U(t) = 0$, $t_n + T/2 \le t \le t_n + T$ (рис. 6.3.6 б). Постоянная составляющая напряжения на выходе схемы

$$u_R = (1/T)\int_0^T \varepsilon(t)dt = (1/T)\int_{-T/4}^{T/4} \varepsilon_0\cos\omega t dt = \varepsilon_0/\pi \approx 0{,}32\varepsilon_0$$

равна примерно 1/3 амплитудного значения. В этом случае переменная составляющая выпрямленного напряжения весьма значительна. Рассмотренная схема выпрямителя называется *однополупериодной*, так как за один период через нагрузку протекает один импульс тока.

Выпрямление при идеальном диоде. Покажем, что схема рис. 5.3.6 *а* позволяет существенно уменьшить пульсации напряжения. Рассмотрим работу схемы в установившемся режиме, предполагая, что диод имеет идеальную характеристику (5.3.1): $R_i \approx 0$. Период колебаний $T << \tau_р$. Поскольку $\tau_з << \tau_р$, то напряжение на конденсаторе быстро достигает значения ε_0, диод запирается в моменты времени nT и конденсатор разряжается через резистор R за промежуток времени $t_р$. При разряде функция $U(t)$ медленно спадает в интервалах времени $nT \le t \le nT + t_р$ пока $U(t) \ge \varepsilon(t)$ (рис. 5.3.6 *в*). В промежутке времени $nT + t_р \le t \le (n + 1)T$ диод открыт и напряжение $U(t)$ повторяет форму входного напряжения $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$. Следовательно, напряжение $U(t)$ является периодической функцией.

На отрезке времени $0 \le t \le t_p$ функция $U(t) = \varepsilon_0 \exp(-t/\tau_p) \approx \varepsilon_0(1 - t/\tau_p)$; при значениях $t_p \le t \le T$ имеем $U(t) = \varepsilon_0 \cos\omega t$. Приведем без доказательства разложение $U(t)$ в ряд Фурье:

$$U(t) = u_0 + u_1 \sin\omega t + \ldots, \quad u_0 = \varepsilon_0(1 - T/2\tau_p), \quad u_1 = \varepsilon_0 T/(\pi\tau_p). \qquad (5)$$

Напряжение $U(t)$ изменяется в небольшой окрестности значения амплитуды ε_0. Среднее значение напряжения практически совпадает с ε_0.

Напряжение на выходе схемы можно записать в виде $U(t) \approx \approx \varepsilon_0 + \varepsilon_0(2X_c/R)\sin\omega t$, где $X_c = 1/\omega C$ — емкостное сопротивление (см. IV 8.3). Поскольку $X_c << R$, то постоянная составляющая напряжения u_0 оказывается значительно больше переменной составляющей. Конденсатор шунтирует резистор по высокочастотной составляющей тока: через резистор проходит практически постоянный ток $I_0 \approx \varepsilon_0/R$, а через конденсатор — высокочастотный $I_1 \approx (2\varepsilon_0/R)\cos\omega t$.

5.3.3. Двухполупериодный выпрямитель. Схема рис. 5.3.7 содержит четыре диода, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin\omega t$. В первый полупериод $0 \le t \le T/2$ разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_n = \varepsilon_0 \sin\omega t > 0$. Диоды D_1 и D_2 открыты, диоды D_3 и D_4 заперты. Поэтому ток проходит по контуру *abcn*. В следующий полупериод $T/2 \le t \le T$, наоборот, $\varphi_n - \varphi_a = -\varepsilon_0 \sin\omega t > 0$. Ток течет по контуру *nbca* через диоды D_3 и D_4. Направления токов, протекающих через резистор R в течение периода, совпадают.

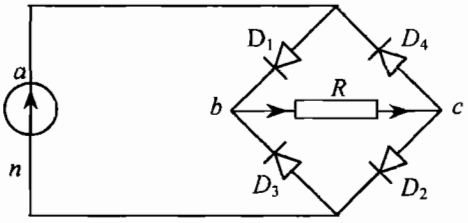


рис. 5.3.7

5.3.4. Умножение напряжения. Если в схеме рис. 5.3.6 *а* резистор отсутствует или его сопротивление $R >> T/C$, то напряжение на конденсаторе за четверть периода достигнет максимальной величины ε_0 и при значениях $t \ge T/4$ диод будет заперт: $\varphi_k - \varphi_n = U(t) = \varepsilon_0$, $t \ge T/4$. Нельзя ли получить постоянное напряжение $2\varepsilon_0$? С этой целью присоединим к схеме еще один «этаж», содержащий конденсатор C_2 и диод D_2 (рис. 5.3.8).

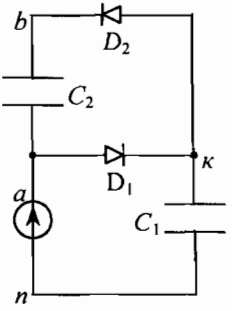


рис. 5.3.8

Обратное напряжение на диоде D_1, т. е. разность потенциалов $\varphi_k - \varphi_a = \varphi_k - \varphi_n + \varphi_n - \varphi_a = \varepsilon_0 - \varepsilon_0 \sin\omega t$, $t \ge T/4$.

При значении $t_1 = T/4$ диод D_2 откроется и в момент времени $t_2 = 3T/4$ напряжение на конденсаторе C_2 достигнет максимального значения $\varphi_b - \varphi_a = 2\varepsilon_0$. Отме-

тим, что теперь на диоде D_2 обратное напряжение $\varphi_b - \varphi_k = \varphi_b - \varphi_a + \varphi_a - \varphi_k = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \sin\omega t$, ($t \geq 3T/4$) достигает максимального значения $2\varepsilon_0$ в момент времени $t_3 = 5T/4$. Присоединяя еще один «этаж», получим общее значение напряжения $3\varepsilon_0$. Можно реализовать выпрямительные схемы, на выходе которых значение постоянного напряжения равно $s\varepsilon_0$, $s = 2, 3, \ldots$.

5.3.5. Триод. В 1907 г. выдающийся американский изобретатель Ли де Форест взял патент на триод — одно из важнейших изобретений двадцатого века. Благодаря триоду появились усовершенствованная телефонная связь, радиосвязь и звуковое кино, возникла радиопромышленность.

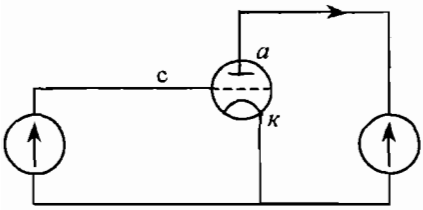


рис. 5.3.6

Кроме катода и анода в триоде имеется третий электрод, присоединенный к сетке, окружающей катод. Сетка в триоде играет очень важную роль. Подавая на сетку напряжение $V_c = \varphi_c - \varphi_k$ (рис. 5.3.6) и меняя его величину и полярность, можно управлять электронным потоком внутри лампы, т. е. изменять величину анодного тока. Поэтому сетку называют управляющей, напряжение V_c — сеточным напряжением. Управляющая сетка расположена вблизи катода и создает неоднородное поле. Поэтому изменение напряжения на сетке сильнее влияет на величину анодного тока, чем такое же изменение анодного напряжения $V_a = \varphi_a - \varphi_k$.

Эта особенность триода отражена в зависимости анодного тока $I = I(V_a, V_c)$ от двух переменных V_a и V_c. Задавая определенные значения V_a, можно получить семейство сеточных характеристика триода. На рис. 5.3.7 показаны две сеточные характеристики для двух значений анодного напряжения $V_{a1} = 200$ В и $V_{a2} = 240$ В. При меньшем значении анодного напряжения характеристика сдвигается вправо и уже небольшое отрицательное напряжение на сетке запирает лампу. Рассматривая характеристики для $V_{a1} = 200$ В и $V_{a2} = 240$ В, находим, что при постоянном напряжении на сетке $V_{c1} = 0$ приращение анодного напряжения $\Delta V_a = 40$ В приведет к увеличению тока от значения $I_1 = 8$ мА до значения $I_2 = 12$ мА, т. е. на $\Delta I = 4$ мА. Если же анодное напряжение постоянно и равно $V_{a1} = 200$ В, то такое же приращение силы тока можно получить при изменении напряжения на сетке от $V_{c1} = 0$ до $V_{c2} = 2{,}5$ В в шестнадцать раз меньше, чем в первом случае. Описанный эффект лежит в основе использования триода в качестве усилителя.

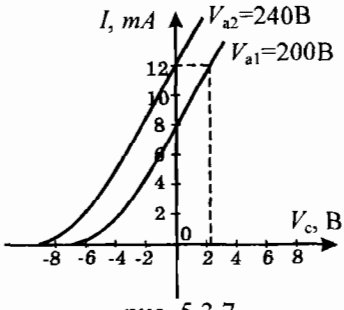


рис. 5.3.7

Крутизна характеристики триода определяется соотношением

$$S = \frac{\Delta I}{\Delta V_c}, \; V_a = \text{const}.$$

Например, при $V_a = 200$ В, $V_{c2} = 2{,}5$ В, $\Delta I = 4$ мА крутизна $S = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$Ом.

Внутреннее сопротивление R_i триода определяется по семейству сеточных характеристик

$$R_i = \frac{\Delta V_a}{\Delta I},\ V_c = \text{const}.$$

Коэффициент усиления. Эта характеристика триода показывает, во сколько раз приращение анодного напряжения должно быть больше приращения сеточного напряжения при приращении силы тока на одинаковую величину. Обозначая коэффициент усиления буквой μ, получим $\mu = SR_i$. В рассмотренном выше случае $\mu = 16$.

5.4. Электрический ток в газах

5.4.1. Газовая электроника. Газ становится электропроводным в результате ионизации молекул. Электрический ток представляет процесс переноса носителей заряда — электронов и ионов. В обычных условиях газы состоят из нейтральных молекул и не проводят электрического тока. Однако в результате различных внешних воздействий, в газе могут появиться электроны и ионы. Процесс образования ионов называется *ионизацией.* Он возникает при нагревании газа или при пропускании через газ различных излучений. В символическом виде процесс ионизации можно представить в виде

$$X + Q = X^+ + e.$$

Здесь X — нейтральная молекула, Q — наименьшее значение энергии, необходимое для отрыва электрона от молекулы. Образовавшийся электрон может быть захвачен другой нейтральной молекулой и тогда появится отрицательный ион X^-. По мере накопления ионов и электронов начинается обратный процесс

$$X^+ + e = X + Q,$$

приводящий к восстановлению нейтральной молекулы. Процесс нейтрализации ионов называется *рекомбинацией* (приставка от лат. *re* — назад, снова, *combinare* — соединять). При рекомбинации, полная энергия взаимодействующих частиц уменьшается, в основном вследствие излучения кванта света.

Термин газовый разряд означает, что в газообразной среде протекает электрический ток. Газовый разряд может существовать в широком диапазоне давлений: гораздо ниже и выше атмосферного давления, например, молнии и полярные сияния.

Удобно выделить три типа стационарного разряда, в зависимости от переносимого им тока:

1. темный разряд (ток $\leq 10^{-6}$ А),
2. тлеющий разряд (ток от 10^{-6} до 10^{-1} А),
3. дуговой разряд (ток выше 10^{-1} А).

5.4.2. Сто лет догадок о природе газового разряда. Исследования газового разряда, начатые после изобретения А. Вольта в 1800 г. источника тока, сыграли решающую роль в развитии физики и привели в конце XIX века к открытию электрона, радиоактивности и возникновению атомной и ядерной физики.

В 1802 г. русский ученый В. В. Петров (1761—1834), собрав батарею, состоящую из 2 100 медно-цинковых элементов, получил электрическую дугу — газовый разряд, возникающий при атмосферном давлении между двумя кусочками древесного угля. Открытие дугового разряда ошибочно приписывается Дэви, хотя свой опыт он поставил в 1808 г.

Для изучения свойств вещества наиболее пригодны разреженные газы. Возьмем трубку, наполненную воздухом, в которую впаяны на расстоянии 0,5 м два электрода, соединенные с источником напряжения ≈500 В. При давлении ≈50 мм рт. ст. (1 мм рт. ст. = 133,3 Па, 1 Торр = 1 мм рт. см. — внесистемная единица давления, названа в честь Э. Торричелли) происходит пробой и возникает разряд в виде тонкого шнура, соединяющего катод и анод. Ток резко увеличивается. При давлении ≈10 мм рт.ст. образуется тонкая зигзагообразная искра. С уменьшением давления искра исчезает и в трубке возникает однородное розово-пурпурное свечение. При давлении ≈5 мм рт. ст. на катоде появляется голубое свечение, отделенное от светящегося столба темной областью, обнаруженной впервые М. Фарадеем. Так возникает тлеющий разряд с характерным распределением светящихся областей, отделенных друг от друга темными зонами. Почти три четверти длины трубки, так называемый положительный столб, излучает розовато-пурпурный свет. При еще более низком давлении 1 мм рт. ст. структура разряда проявляется полнее. На поверхности катода появляется оранжевое свечение, рядом с ним видно новое темное пространство. Затем следует светлая область. При давлении 0,01 мм рт.ст. свечение столба гаснет. Остается зеленоватое свечение в области анода, вызванное лучами, исходящими из катода — это *катодные лучи*, открытые немецким физиком Ю. Плюккером в 1859 г. (поток электронов от катода).

В опытах выдающегося английского ученого У. Крукса под действием катодных лучей вращались лопасти «мельницы» — катодные лучи обладали импульсом и энергией и оказывали тепловое воздействие на преграду (1879 г.). Поместив в трубку мальтийский крест, Крукс увидел тень на стекле — лучи распространялись прямолинейно и отклонялись магнитным полем. Точка зрения Крукса — катодные лучи — четвертое состояние вещества («наэлектризованные молекулы») — казалась для многих ученых чудовищным вымыслом. Атом, если он вообще существовал, должен быть неделимым. Возник спор о природе лучей: частицы или «лучистая материя» подобная свету?

В процессе поиска истины были открыты *каналовые лучи* (Е. Гольдштейн, 1886 г.). Катод был просверлен в нескольких местах и сквозь катод

проходил светящийся поток лучей. Сейчас мы знаем, что каналовые лучи — поток ионов. Было установлено, что каналовые и катодные лучи отклоняются магнитным полем в разные стороны.

В опытах Ж. Перрена (1895 г.) было установлено, что катодные лучи переносят отрицательный электрический заряд. Этот опыт позволил предположить, что газовый разряд эквивалентен электролизу. В 1892 г. Ф. Ленард вывел лучи из трубки, заменив участок стекла тонкой металлической фольгой. Но как частицы могут проходить сквозь твердое тело? Фундаментальная природа катодных лучей оставалась нераскрытой.

Взаимосвязь между впечатляющим количеством данных, накопленных несколькими поколениями физиков в течение столетия, стала понятной после трех выдающихся открытий 1895—1897 гг., приведших к революции в физике.

В 1895 г. немецкий физик К. Рентген обнаружил, что от разрядной трубки, закрытой картоном, исходят какие-то лучи (электромагнитное излучение с длиной волны ≈4 нм, возникающее при торможении электронов, падающих на анод при ускоряющем напряжении >20 кВ). Он установил, что лучи не несут заряда, ионизируют воздух и вызывают почернение фотографических пластинок. Различие в структуре тел позволяет получать теневые рентгеновские снимки. Последнее обстоятельство вызвало громадный общественный интерес. Подчеркивая необходимость дальнейшего изучения свойств лучей, Рентген назвал их Х-лучами.

Рентгеновские лучи имеют прямое отношение к открытию радиоактивности.

Выдающийся французский математик — президент французской Академии наук А. Пуанкаре обратил внимание на то, что *X*-лучи исходят из того места трубки, куда попадают катодные лучи и где возникает сильная фосфоресценция (нетепловое излучение возбужденных молекул). Он предложил А. Беккерелю проверить, не являются ли фосфоресцирующие вещества источником *X*-лучей. В 1896 г. А. Беккерель предпринял попытку обнаружить излучение *X*-лучей некоторыми минералами под действием солнечного света. Его исследования завершились величайшим открытием самопроизвольного излучения солей урана, которое получило название радиоактивности (от лат. *radio* — излучаю).

Наконец, в 1897 г. Дж. Дж. Томсон измерил отношение заряда катодных лучей к массе $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, которое оказалось совершенно неожиданно, почти в 1 836 раз большим, чем для атома водорода. И хотя в те времена никто не знал частиц с массой меньшей, чем масса атома водорода, был сделан вывод, что катодные лучи состоят из легких субатомных частиц, которые назвали электронами.

Открытие рентгеновских лучей, радиоактивности и электрона стали началом того, что теперь называется современной физикой.

5.4.3. Несамостоятельный разряд. Газы становятся электропроводными при наличии носителей заряда. Они возникают в результате ионизации воздуха *космическим излучением*, открытом австрийским физиком В. Гессом в 1912 г. (Нобелевская премия, 1936 г.) и излучением радиоактивных веществ. Например, в 1 см^3 воздуха не уровне моря содержится ≈1000 ионов и электронов. В отсутствие электрического поля концентрация заряженных частиц постоянна, т.к. скорость генерации частиц равна скорости радиационной рекомбинации — процесса воссоединения положительного иона и электрона, приводящего к образованию нейтральной молекулы и электромагнитного излучения.

Присоединим источник напряжения к двум электродам, отстоящим друг от друга на расстоянии 0,5 м в трубке диаметром около 3 см. Наша задача — исследовать зависимость силы тока от разности потенциалов на электродах U при давлении порядка нескольких мм рт. ст. Если на электроды подать небольшую разность потенциалов, создающую электрическое поле напряженностью $E \approx 10^2$ В/м, то сохраняется равновесие между процессами генерации и рекомбинации. Возникает слабый ток, образуемый ионами и электронами, которые не успели рекомбинировать. Поскольку концентрация зарядов не меняется, то сила тока, как в металлах, *пропорциональна* напряжению. Такой разряд называют *несамостоятельным*, т. к. он поддерживается внешним источником ионизации. Несамостоятельный разряд при разности потенциалов ≈20 ÷ 30 В называют тихим или темным разрядом, поскольку излучение света слишком слабо, чтобы его можно было заметить невооруженным глазом.

При возрастании напряжения равновесие нарушается: часть ионов и электронов успевает достичь электродов до рекомбинации — сила тока растет. При дальнейшем увеличении напряжения до 100 В практически все электроны и ионы попадают на электроды — рост тока замедляется и сила тока достигает постоянного значения. Его называют *током насыщения*. В этом случае все электроны и ионы попадают на анод и катод, не успевая рекомбинировать.

5.4.4. Самостоятельный разряд. Если увеличивать напряжение, то наступает стадия, на которой ток снова растет. Причина этого в том, что электроны в сильном поле приобретают энергию достаточную для ионизации молекул. Возникающие свободные электроны сами могут продолжить этот процесс. Образуется так называемая электронная лавина. При столкновениях появляются возбужденные молекулы, излучающие электромагнитные волны в видимой или ультрафиолетовой частях спектра. В результате фотоэффекта возникают новые электроны. Другой эффект, приводящий к увеличению числа носителей тока, связан с испусканием электронов из катода при бомбардировке его положительными ионами. Наступает стадия, на которой при напряжении ≈150 ÷ 300 В возникает пробой — ток возрастает в $10^5 - 10^6$ раз (рис. 5.4.1).

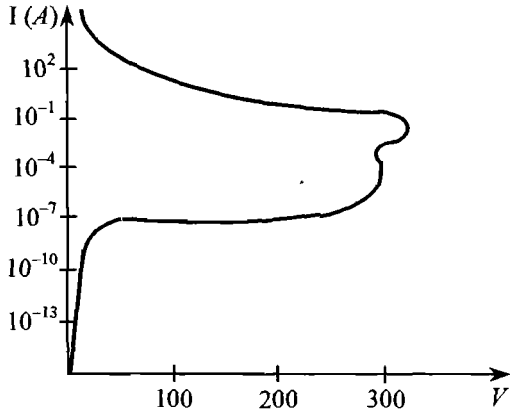


рис. 5.4.1

После пробоя механизм рождения электронов не зависит от внешнего источника ионизации. Возникает стационарный *самостоятельный разряд*. В этой области напряжений всякая первичная частица вызывает пробой и вспышку самостоятельного разряда. При увеличении напряжения в зависимости от давления, природы газа и расстояния между электродами разряд принимает форму коронного или дугового разряда.

Задача 5.4.1. На рис. 5.4.1 изображена вольт-амперная характеристика разряда при возрастании напряжения от нуля до точки пробоя. Расскажите о процессах, характерных для различных участков графика.

5.4.5. Тлеющий разряд. Структура разряда, пожалуй, наиболее ясно выражена при напряжении 150 В и давлении 0,01 мм рт.ст., как схематически показано на рис. 5.4.2. Цифрами 1–7 обозначены области с различным характером свечения: 1 — оранжевое свечение, 2 — катодное темное пространство, 3 — бледно-голубое свечение, 4 — фарадеево темное пространство, 5 — розовое свечение, 6 — красноватое свечение, 7 — анодное темное пространство. Область 5 называют положительным столбом. Далее представлены графики потенциала φ, напряженности поля E_x и линейной плотности заряда q в различных участках трубки.

Изменение напряжения φ вдоль трубки показывает, что основные процессы, поддерживающие разряд, происходят в области 2. Здесь напряженность поля $E_x = -\Delta\varphi / \Delta x$ нарастает по линейному закону и создается пространственным положительным зарядом ионов. Эта особенность позволяет понять характер процессов, протекающих в различных частях трубки, хотя до сих пор не существует полной теории газового разряда. Предварительно заметим, что чем меньше масса налетающей частицы, тем большую часть энергии она может отдать молекуле, переводя ее в возбужденное состояние. Поэтому, несмотря на то, что электроны и однозарядные ионы приобретают одинаковую энергию, главную роль в процессе ионизации молекул играют электроны.

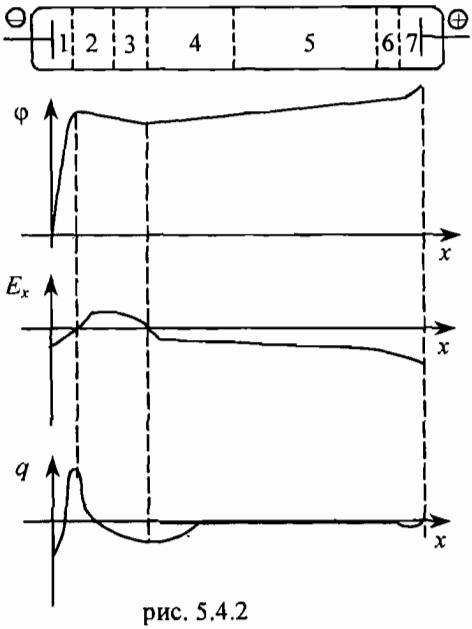


рис. 5.4.2

Положительные ионы, образующиеся в области 3, вследствие столкновений электронов с молекулами воздуха, движутся к катоду. Ионы, попадая на катод, выбивают из него электроны, начальная скорость которых невелика. Поэтому у катода всегда присутствует небольшой пространственный отрицательный заряд. Затем электроны в области 2 ускоряются и приобретают энергию, достаточную для возбуждения и ионизации молекул газа в области 3. Образовавшиеся ионы устремляются к катоду, а возбужденные атомы излучают свет. Потеряв часть энергии, электроны тормозятся и образуют на левой стороне области 4 отрицательный пространственный заряд. Когда электроны вновь приобретают энергию, достаточную для ионизации и возбуждения, они опять вызывают излучение света в области 5. Здесь концентрация электронов и ионов почти одинакова. Однако из-за большой скорости электронов ионный ток значительно меньше электронного тока.

Задача 5.4.2. Частица массой m_1 и ион массой m_2 имеют одинаковые кинетические энергии T и движутся навстречу друг другу.

А. Найдите энергию Q переданную иону после абсолютно неупругого столкновения частицы и иона.

Решение. Скорости частиц до столкновения

$$\vec{v}_1 = \sqrt{\frac{2T}{m_1}}\vec{n}, \ \vec{v}_2 = -\sqrt{\frac{2T}{m_2}}\vec{n},$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор. Эту задачу проще всего решить в системе отсчета K_0, в которой сумма импульсов частицы и иона равна нулю. Эта система движется со скоростью

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m}, \quad m = m_1 + m_2.$$

В системе отсчета K_0 скорости частиц

$$\vec{v}_1' = -\frac{m_2\vec{v}_0}{m}, \qquad \vec{v}_2' = \frac{m_1\vec{v}_0}{m}, \quad \vec{v}_0 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Кинетическая энергия системы частица — ион в системе отсчета K_0

$$T_0 = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{m_1 m_2 v_0^2}{2m} = \frac{T}{m}\left(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}\right)^2.$$

Рассмотрим столкновение частицы и иона. В системе K_0 закон сохранения импульса выполняется автоматически. После абсолютно неупругого столкновения частица и ион в системе отсчета K_0 неподвижны. Согласно закону сохранения полной энергии имеем $T_0 = Q$. Если $m_1 << m_2$, то $Q \approx T$.

Б. Покажите, что приращение кинетической энергии частицы в исходной системе отсчета

$$\Delta T_1 = -T\left(1 + \frac{m_2}{m_1} + 2\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right)\frac{m_1 m_2}{m^2}.$$

В. Найдите приращение кинетической энергии иона ΔT_2.

Г. Покажите, что при $m_1 << m_2$ кинетическая энергия иона почти не изменится ($\Delta T_2 \approx -2T\sqrt{m_1/m_2}$), а частица почти полностью передает энергию иону ($\Delta T_1 \approx -T$).

5.4.6. Плазма. Частично или полностью ионизированный газ, в котором концентрация ионов и электронов практически одинакова, называется *плазмой* (от греч. *plasma* — образование, формирование). Этот термин ввел в 1928 г. И. Ленгмюр, желая наиболее точно описать нейтральную область разряда.

В состоянии плазмы находится подавляющая часть Вселенной — звезды, галактические туманности и межзвездная среда. В окрестности Земли плазма образует радиационные пояса и ионосферу. В лабораторных условиях плазма образуется в электрическом разряде в газе, в процессах горения и взрыва. В частности, положительный столб тлеющего разряда состоит из плазмы. Здесь плотность пространственного заряда равна нулю.

5.4.7. Коронный и искровой разряды. При коронном разряде ионизация не приводит к пробою значительной толщи газа. Ионизация и свечение воздуха возникают в ограниченной области пространства вблизи заостренных проводников, где напряженность электрического поля наиболее высока и достигает значения ≈ 15 кВ/см. Коронный разряд, возникающий у поверхности проводов высоковольтных линий, является основной причиной утечки электроэнергии. Пульсирующий характер тока создает сильные электромагнитные помехи.

Искровой разряд, в отличие от коронного, приводит к пробою. Примером искрового разряда является молния, длина которой может достигать несколько километров.

5.4.8. Регистрация ионизирующих частиц. Непосредственное обнаружение одной заряженной частицы затруднительно из-за малости измеряемого заряда. Но, пролетая через газ частица может произвести ионизацию, и заряд появившихся ионов и электронов будет во много раз превышать заряд частицы. С помощью электрического поля можно «растащить» разноименные ионы, не давая им рекомбинировать. Изменяя напряжение, можно осуществить различные режимы газового разряда для регистрации заряженных частиц.

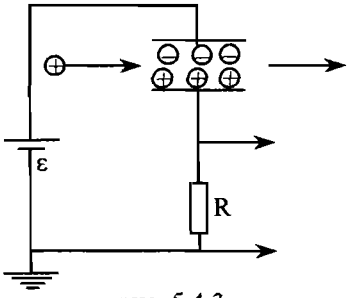


рис. 5.4.3

Задача 5.4.3. Счетно-ионизационная или импульсная камера. Основная схема, служащая для обнаружения частицы, представлена на рис. 5.4.3. Частица производит ионизацию в газе между пластинами конденсатора. Образовавшиеся ионы и электроны должны попасть на пластины. Конденсатор разряжается через сопротивление $R \approx 10^8$ Ом. Импульс напряжения измеряется электрометром или подается на усилитель.

А. После пролета α-частицы через конденсатор емкостью C = 100 пФ образовалось $N = 10^5$ пар однократно заряженных ионов и электронов. Оценим амплитуду импульса напряжения на резисторе. Ионизационная камера обычно работает в режиме насыщения; при этом электрическое поле настолько велико, что все электроны и ионы, созданные первичной частицей, попадают на электроды, не успевая рекомбинировать. На первом этапе все электроны достигают верхней пластины в то время, когда ионы еще заметно не сместились. На втором этапе ионы достигают нижней пластины. В результате за интервал времени T величина импульса напряжения достигает значения $V = Ne/C$ = 0,16 мВ. При постоянной разряда $\tau = RC = 10^{-2}$ с >> T форма импульса полностью воспроизводится на экране осцилографа, подключенного к резистору.

Б. Для регистрации отдельных частиц используют газовое усиление в области напряжений, примыкающей слева к области самостоятельного разряда на рис. 5.4.1, в которой заряд конденсатора пропорционален числу пар образовавшихся ионов и электронов.

Счетчик Гейгера-Мюллера. В этом приборе подбирают напряжение такой величины, что каждая частица вызовет пробой и возникновение самостоятельного разряда. В большинстве конструкций один из электродов заострен. При напряжении, близком к напряжению пробоя, возникает коронный разряд. Применяя специальные смеси газов, можно создать условия, при которых он будет

быстро гаснуть до появления новой ионизирующей частицы. Амплитуда импульсов может достигать несколько десятков или даже сотен вольт.

Счетчик Гейгера-Мюллера, изобретенный в 1908 г., продолжают применять в дозиметрии (от греч. *dosis* — доля, порция) для измерения плотности потока частиц.

5.4.9. Дуговой разряд. Условия существования самостоятельного тлеющего разряда сводятся к тому, чтобы число вторичных электронов, возникающих при бомбардировке катода ионами, было достаточным для поддержания степени ионизации. В результате столкновений ионов с катодом, выполненном из тугоплавкого металла, температура катода может повыситься настолько, что основной вклад в ионизацию газа будет давать *термоэлектронная эмиссия*. Тогда произойдет переход к дуговому разряду. Вольт-амперная характеристика дуги $I = f(V)$, показана на рис. 5.4.4.

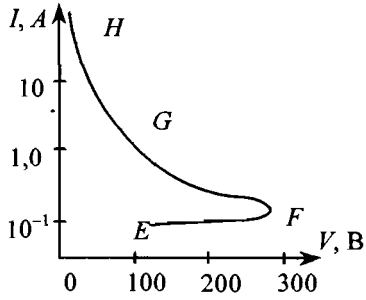


рис. 5.4.4

Для дуги характерны большие значения тока и напряжения на порядок меньшие, чем в тлеющем разряде. Наиболее важной особенностью вольт-амперной характеристики дуги является наличие участка, на котором увеличение напряжения приводит к уменьшению тока. Это — уникальное явление, соответствующее *отрицательному сопротивлению дуги*. Действительно, выберем на кривой $I = f(V)$ точку с координатами (V_0, I_0). Нетрудно видеть, что при $\Delta V = V - V_0 > 0$ приращение силы тока $\Delta I = f(V_0 + \Delta V) - f(V_0)$ отрицательно. Поскольку для обычных проводников отношение $\Delta V/\Delta I$ является положительным сопротивлением, то аналогичное отношение для дуги также называют сопротивлением. Однако теперь оно будет отрицательным и зависит от силы тока.

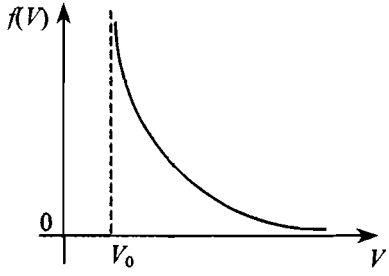


рис. 5.4.5 а

Задача 5.4.4. Условие горения дуги. Дуга имеет падающую характеристику; из этого факта вытекают важные следствия. В рабочей области найденная эмпирически (от гр. *empeiria* — опыт) характеристика дуги имеет вид $f(V) = P_0/(V - V_0)$, где V_0 и P_0 постоянные, $V > V_0$ (рис. 5.4.5 *а*). Дуга включена в схему рис. 5.4.5 *б*, где $\varepsilon > V_0$.

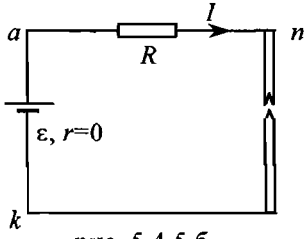


рис. 5.4.5 б

А. Найдите условие, при котором дуга не загорается.

Решение. Обозначим стрелкой положительное направление тока в схеме. Разность потенциалов $\varphi_n - \varphi_k = V$. Имеем два уравнения

$$IR + V = \varepsilon, \qquad I = \frac{P_0}{V - V_0}.$$

Исключая V, найдем значение силы тока

$$I_{1,2} = \frac{1}{2R}[\varepsilon - V_0 \pm \sqrt{(\varepsilon - V_0)^2 - 4P_0R}].$$

Отсюда следует, что сопротивление R должно удовлетворять условию $R \le R_m$, $R_m = \frac{1}{4P_0}(\varepsilon - V_0)^2$. При $R = R_m$, сила тока $I_m = \frac{1}{2R_m}(\varepsilon - V_0)$, разность потенциалов $V_m = \frac{1}{2}(\varepsilon + V_0)$. В случае $R > R_m$, дуга не загорается.

Б. Изобразите на рис. 5.4.5 *а* графики функции $I = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{V}{R}$ при $R < R_m$, $R = R_m$, $R > R_m$. Проведите геометрический анализ полученных решений.

5.4.10. Высокочастотный пробой. Создание лазеров открыло новую главу в физике газового разряда. Когда луч лазера сфокусировали линзой, в воздухе в области фокуса вспыхнула искра, и там образовалась плазма, как при пробое разрядного промежутка между электродами. Воздух пробивался при действии импульса излучения с энергией 1 Дж и длительностью $3 \cdot 10^{-8}$ с и фокусировке луча в кружок радиусом 10^{-2} см. Мощность излучения при этом 30 МВт освещенность в фокусе 10^5 МВт/см^2, а напряженность электрического поля волны $E \cong 6$ МВ/см. (В постоянном поле атмосферный воздух пробивается при $E \approx 3$ кВ/см.) Новый эффект вызвал огромный интерес у физиков. За несколько лет оптический пробой был детально исследован. Под действием волны развивается электронная лавина. Первые затравочные электроны появляются в результате вырывания их из атомов среды после одновременного поглощения нескольких фотонов световой волны. Энергия каждого фотона рубинового лазера равна 1,78 эВ. Далее свободный электрон, поглощая фотоны, достигает энергии ≈10 эВ, достаточной для ионизации и рождения нового электрона в процессе столкновения с атомами среды. Температура плазмы оптического разряда достигает необычно высокого значения (≈20 000 К). Разряд может гореть в течение длительного времени, исчисляемого часами, и светиться ослепительно белым светом, на него невозможно смотреть без темных очков. Необычайно высокая температура — уникальное свойство оптического разряда представляет большие возможности для использования его в качестве источника света.

Особенно большое впечатление производит длинная искра — протяженный оптический пробой. Она возникает в том случае, когда луч слабо фоку-

сируется длиннофокусной линзой, а энергии излучения достаточна для возбуждения среды на большой длине вдоль оптической оси. Искра рекордной длины — более 60 м — была получена в 1976 г.: световой импульс с энергией 160 Дж и мощностью 5 ГВт фокусировали линзой с фокусным расстоянием $F = 40$ м. В длинных искрах ионизированные участки чередуются с непробитыми. В проблеме пробоя запыленного воздуха еще много неясного. Возможность создания плазменного шнура открывает возможности для передачи энергии на расстояние.

5.5. Молния

Из всех явлений природы *молния* — одно из самых распространенных и зрелищных. Ежедневно на земном шаре происходит ≈44 тыс. гроз и 8 млн. вспышек молнии. Обычная молния возникает при разности потенциалов между основным отрицательно заряженным слоем и Землей $\approx 3 \cdot 10^8$ В. Суммарный заряд переносимый к Земле, может достичь 10 Кл (10^{20} электронов) и более. Мощность вспышки ≈100 МВт. Главная задача физиков, занимающихся изучением молнии — выяснить распределение зарядов в грозовом облаке и объяснить механизм, создающий разряд.

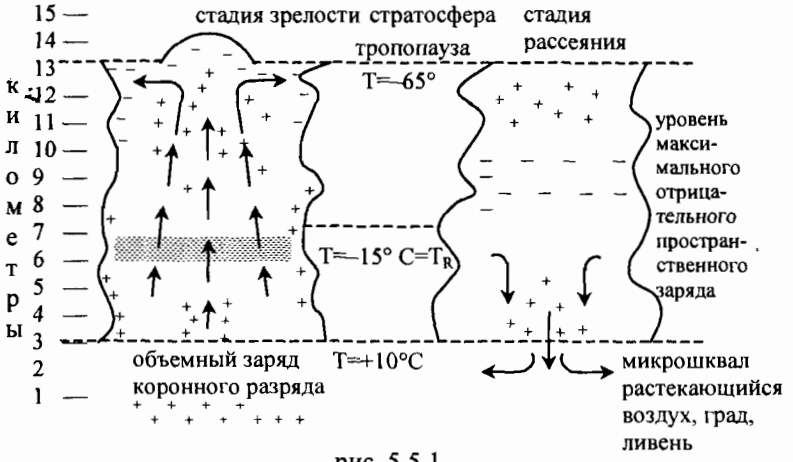


рис. 5.5.1

В 70-ые годы было установлено, что структура грозового облака — трехзарядная (рис. 5.5.1). На высоте ≈6 км расположена основная зона отрицательного заряда — тонкий слой толщиной несколько сотен метров. Над ней — зона «разреженного» положительного заряда толщиной несколько километров, часто достигающая высоты порядка 13 км, а под ней — вторая меньшая зона положительного заряда. Поэтому электрическое поле у поверхности Земли направлено вверх. На самой вершине многих облаков находится тонкий слой отрицательного заряда, играющий, похоже, второстепенную роль. Стрелками на рис. 5.5.1 обозначены воздушные потоки, переносящие мелкие кристаллики льда и переохлажденные капельки воды. Эти капли

обеспечивают рост частиц снежной крупы. По-видимому, в основе трехзарядной структуры лежит явление электризации при взаимодействии крупы с кристалликами льда. Однако, несмотря на то, что электризация трением известна с древних времен, еще не создана теория, объясняющая механизм передачи зарядов на молекулярном уровне. Лабораторные исследования показали, что знак заряда, приобретаемый крупой, зависит от температуры. При температурах ниже критической, называемой температурой реверса заряда T_R (от лат. *reversio* — возврат), крупе сообщается отрицательный заряд; при более высоких температурах — положительный. Точное значение T_R не установлено. Предполагают, что T_R лежит в пределах от –20 до –10°С.

Исследования гроз показали, что через 5–10 мин после того, как внутриоблачная грозовая активность достигает максимума, начинается дождь, капли которого несут положительный заряд. Восходящие потоки затухают и возникают мощные нисходящие потоки; нижняя часть облака перемещается к Земле. Результаты измерений показывают, что напряженность поля у Земли изменяет полярность. Как только напряженность электрического поля достигает значения $\approx 10^6$ В/м пространственное разделение зарядов становится неустойчивым — происходит разряд молнии. Почти все молнии возникают внутри облаков между основной зоной и областью положительного заряда, но они редко видны из-за рассеяния света. В случае разряда между облаком и землей молния приобретает форму отрицательно заряженной кроны дерева, головная часть которой образует так называемый *ступенчатый лидер*. Через него на Землю устремляется поток электронов, создавая ток порядка сотен ампер. Когда лидер опускается до высоты 100 м, с поверхности Земли выбрасывается ответный разряд с силой тока ≈30 кА. Именно этот яркий ответный разряд мы видим. Таким образом, *молния распространяется в двух направлениях* — иногда несколько десятков раз. Увеличение проводимости в канале разряда приводит к пробою промежутка Земля — лидер и к возникновению ответного разряда.

Молнии, представляют собой элемент *глобальной электрической цепи*: земная атмосфера — хороший диэлектрик — расположена между двумя хорошими проводниками — отрицательно заряженной поверхностью Земли и верхними положительно заряженными слоями атмосферы (включая ионосферу), разность потенциалов между которыми 300 000 В. Этот потенциал поддерживается потоком электронов от верхних слоев атмосферы к вершинам грозовых облаков (ток силой ≈1 А), от облаков к Земле и обратно от Земли к верхним слоям атмосферы в зонах «хорошей погоды» (ток величиной 2000 А). Глобальная цепь заряжается грозами. Каждую секунду на Земле вспыхивают до ста молний. Не будь молний, Земля быстро отдала бы в верхние слои атмосферы свой отрицательный заряд.

Молния стала одним из непременных факторов эволюции — за миллионы лет сформировались взаимосвязи между молнией и живой природой. Вероятно, именно молнии подарили человечеству огонь. Свой вклад внесли они и в возникновение жизни на Земле. В начале 50-х гг. американский

биолог С. Миллер показал, как разряд в «первозданной земной атмосфере», состоящей из паров аммиака, метана и воды, приводит к образованию аминокислоты — составной части любого белка.

Три из каждых четырех лесных пожаров возникают в результате удара молнии. В определенных районах Земли образовался симбиоз между растительностью и огнем: благодаря «пожарной селекции» возникли новые формы растений.

Глава 6. Полупроводниковые приборы

6.1. Электрический ток в полупроводниках

6.1.1. Между металлами и диэлектриками. Ответ на вопрос, будет ли кристалл металлом или диэлектриком, стал возможен только после создания квантовой теории. В основе теории кристалла лежит понятие об энергетическом спектре электронов, «свободно» перемещающихся от атома к атому. В 1928 г. немецкий физик А. Зоммерфельд показал, что возможные значения энергии электронов могут принадлежать непрерывным интервалам, разделенным интервалами запрещенных значений энергий. Полосы разрешенных значений энергии называются *энергетическими зонами.*

При температуре $T = 0$ наиболее устойчивым состоянием кристалла является состояние с наименьшей энергией. Однако все электроны не могут оказаться в этом состоянии, т. к. при распределении электронов по энергиям должен выполняться *принцип Паули*: одним и тем же значением энергии могут обладать не более двух электронов. Следовательно, электроны заполняют все нижние энергетические уровни. Мы приходим к выводу, что при нулевой температуре электроны обладают энергией нетеплового происхождения. Из-за конечного числа электронов в кристалле заполненными окажутся лишь несколько наиболее низких зон.

По характеру заполнения зон все кристаллы можно разделить на две группы. К первой группе относятся кристаллы, у которых над полностью заполненной зоной расположена частично заполненная зона (рис. 6.1.1 *а*).

Энергия наивысшего уровня E_F, отсчитываемая от дна зоны, называется *энергией Ферми.*

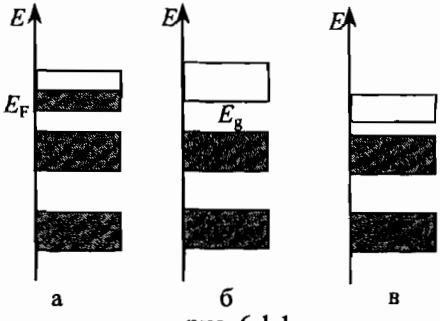


рис. 6.1.1

Ко второй группе относятся кристаллы, у которых над полностью заполненной (валентной) зоной расположены незаполненные зоны (зоны проводимости). Это различие проявляется в отклике электронов на внешнее электрическое поле. Если зона полностью заполнена, то включение поля не приведет к возникновению электрического тока. Действительно, при наложении поля скорость электронов не может возрастать, так как невозможны переходы электронов на более высокие уровни, поскольку зона полностью заполнена и свободных уровней нет. В случае частично заполненной зоны электроны могут перейти в свободные энергетические состояния, порождая электрический ток. Поэтому кристаллы с незаполненными зонами являются проводниками. Таким образом, энергетический спектр, изображенный на рис. 6.1.1 *а*, соответствует металлу, а на рис. 6.1.1 *б*, *в* — диэлектрику.

Тепловое движение вносит существенные изменения в эту классификацию. При температуре $T > 0$ часть электронов имеют энергию значительно превосходящую среднее значение энергии теплового движения $3kT/2$. Поэтому часть электронных связей окажется разорванной. Когда электрон, приобретая энергию E_g, переходит из валентной зоны на нижний уровень зоны проводимости, то образуется положительно заряженная «вакансия». Остальные электроны получают возможность восстановить полноценную связь. Реальное движение электрона равносильно фиктивному перемещению по кристаллу положительного заряда $|e|$ в направлении противоположном движению электрона. В электрическом поле суммарный ток всех электронов валентной зоны эквивалентен току одной квазичастицы — «вакансии» с зарядом $|e|$. Такое вакантное состояние называется *дыркой*. Таким образом, взамен каждого электрона, перешедшего в зону проводимости, появляется положительно заряженная дырка в валентной зоне. Этот процесс приводит к вкладу в плотность тока $j \sim e\,(v_n - v_p)$, где v_n, v_p — скорость электрона и дырки. Следовательно, возникают два типа проводимости, обусловленные движением электронов и дырок.

Если ширина запрещенной зоны E_g достаточно велика, то кристалл остается изолятором даже при высоких температурах. Например, ширина запрещенной зоны NaCl при комнатной температуре порядка 7 эВ и даже вблизи точки плавления (801° С) составляет почти 70 kT.

Однако известны элементы и соединения, для которых валентная и свободная зоны расположены сравнительно близко друг к другу как на рис. 6.1.1 *в*. В этом случае уже при комнатной температуре заметное число электронов переходит из заполненной зоны в свободную зону. Кристаллы с таким расположением зон называются *полупроводниками*. Постепенное изменение свойств от характерных для хороших изоляторов до свойств полупроводников соответствует уменьшению ширины запрещенной зоны до значений порядка 1 эВ.

Два фактора определяют электропроводность твердых тел: концентрация носителей заряда и легкость, с которой они движутся по кристаллу под дей-

ствием приложенного электрического поля (подвижность носителей заряда). Подвижность, как правило, убывает с ростом температуры. В металлах концентрация носителей электронов не зависит от температуры. Этим объясняется увеличение сопротивления металлов с ростом температуры. В случае полупроводников число носителей быстро увеличивается с ростом температуры, приводя к быстрому падению сопротивления. Отрицательный температурный коэффициент сопротивления — одно из главных отличий металла от чистого полупроводника.

Пределы изменения сопротивления твердых тел поистине огромны. Хороший металлический проводник обладает при комнатной температуре удельным сопротивлением $\rho \approx 10^{-6}$ Ом·м, тогда как для хороших диэлектриков $\rho \approx 10^{12}$ Ом·м. Удельное сопротивление полупроводников при комнатной температуре находится, как правило, в пределах $10^{-3} \div 10^{6}$ Ом·м.

Обычно полупроводник — это кристаллическое или аморфное вещество, у которого в химически чистом состоянии электронам необходимо сообщить энергию $E_g \sim 2$ эВ, чтобы они могли участвовать в процессе электропроводности. Для германия $E_g = 0{,}72$ эВ, для кремния $E_g = 1{,}08$ эВ, для арсенида галлия $E_g = 1{,}43$ эВ. При $T = 0$°К чистые полупроводники являются такими же изоляторами как и диэлектрики — концентрация носителей равна нулю. Когда мы увеличим температуру, то в полупроводнике возникнут электроны и дырки и установится определенная равновесная концентрация электронов n_i и дырок $p_i = n_i$. В этом случае концентрация носителей называется собственной (индекс i — от англ. *intrinsic* — внутренне присущий). При температуре жидкого азота $T = 77$°К в германии $n_i = 1{,}2 \cdot 10^{-14}$ см$^{-3}$. При комнатной температуре $T \approx 300$°К величина $n_i = 2{,}4 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$. При увеличении температуры в четыре раза концентрация изменилась на 27 порядков! А в металлах концентрация электронов практически постоянна и равна $n_M \approx 10^{22}$ см$^{-3}$. И все же при комнатной температуре удельное сопротивление германия $\rho = 47$ Ом · см очень велико. У кремния при $T = 77$°К концентрация $n_i = 1{,}7 \cdot 10^{-17}$ см$^{-3}$, при комнатной температуре $n_i = 1{,}1 \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$, $\rho = 2{,}3 \cdot 10^{5}$ Ом · см.

6.1.2. Легирование полупроводников. Исследуя одни и те же вещества, экспериментаторы получали сильно отличающиеся результаты. Оказалось, что причина — в наличии примесей. Проводимость одного и того же полупроводника со своим набором примесей может различаться на несколько порядков.

Введение примесей в полупроводник называется *легированием*. Если в полупроводник ввести элемент пятой группы (P, As, Sb), то четыре электрона примесного атома образуют парные связи с четырьмя атомами кремния или германия; пятый электрон окажется «свободным». В узле решетки появится положительный ион примеси. Примесь, атомы которой легко отдают электроны, называется *донорной* (от лат. *donare* — дарить). Полупроводник, в который введена донорная примесь, называют электронным или полупроводником *n*-типа, поскольку основными носителями заряда становятся электроны. Уровень энергии Ферми расположен в запрещенной зоне вблизи дна зоны проводимости.

При введении атомов третьей группы (Al, Ga, In), имеющих три валентных электрона, образование четырех связей сопровождается захватом одного электрона атома полупроводника. В узле решетки появится отрицательный ион примеси и образуется электронная вакансия — дырка — положительный ион атома полупроводника, который может быть нейтрализован электроном соседнего атома. Полупроводник, в котором основными носителями заряда являются дырки, называется полупроводником *p*-типа. Примесь элементов III группы называется *акцептерной* (от лат. *acceptare* — принимать). В материале p-типа уровень энергии Ферми расположен в запрещенной зоне вблизи потолка валентной зоны.

В легированном полупроводнике концентрации дырок p и электронов n связаны соотношением $pn = n_i^2 = p_i^2$, где n_i, p_i — собственная концентрация носителей. Поэтому, например, в полупроводнике *n*-типа дырок меньше, чем в чистом. Наоборот, в дырочном полупроводнике увеличение концентрации дырок приводит к уменьшению концентрации электронов.

В химических исследованиях вещество, содержащее один посторонний атом на 1000 собственных, уже считается высокочистым (концентрация 0,1%). Число атомов германия в 1 см^3 равно $4{,}2 \cdot 10^{22}$ (атомная масса $M = 0{,}0726$ кг/моль, плотность $5{,}32 \cdot 10^3$ кг/м^3). Если в германии присутствует донорная примесь атомов, имеющих пять валентных электронов, которая при комнатных температурах полностью «ионизирована», то при наличии одного атома примеси на 10^6 атомов германия мы получили бы $n_i = 4{,}2 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$. Примесь создает электронов в 2000 раз больше, чем имеется собственных. Для сохранения собственной проводимости 10^9 атомов германия должны иметь не более одного атома примеси.

Более впечатляющая ситуация с кремнием. Концентрация атомов кремния $\sim 5 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$ ($M = 0{,}028$ кг/моль, плотность $2{,}33 \cdot 10^3$ кг/м^3). Примесь одного атома донора на 10^6 атомов кремния приведет к концентрации примесных электронов в пять миллионов раз превосходящую собственную проводимость. В настоящее время методом зонной плавки удается очистить кремний до уровня, соответствующего 1 атому примеси на 10^9 атомов кремния. В этом случае концентрация примесных электронов в 5 000 раз больше концентрации собственных электронов и дырок.

6.2. Полупроводниковый диод

Первый полупроводник — сернистое серебро — был открыт в 1833 г. М. Фарадеем. Однако только через 40 лет были обнаружены новые полупроводники. Исследуя эти соединения, открыли явление выпрямления переменного тока. В 1873 г. была обнаружена фотопроводимость селена — при переносе из темноты на яркий свет его сопротивление уменьшилось в 10^5 раз. В 1904 г. выяснилось, что полупроводники могут служить выпрямителями высокочастотных токов, возбуждаемых электромагнитными волнами в цепях радиоприемника. Вскоре они стали вытесняться электронными лампами и к 1939 г. были почти полностью забыты. Однако в связи с развитием радиолокации пришлось опять вернуться к полупроводниковым детекторам, т. к. ока-

залось, что при высоких частотах ламповые триоды не могли эффективно работать. В 1940 г. металлурги Дж. Скаффу и Х. Тойерер впервые получили *n-p*-переход в кремнии. До транзистора оставался один шаг.

Вольт-амперная характеристика *pn* — перехода. Пусть в полупроводнике концентрации акцепторов и доноров изменяются так, что в определенной области происходит переход от дырочной к электронной проводимости: слева находится полупроводник *p*-типа, справа — полупроводник *n*-типа (рис. 6.2.1).

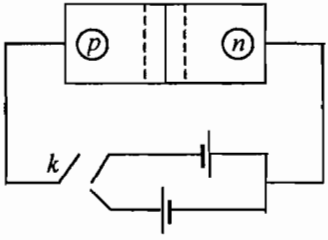


рис. 6.2.1

Рассмотрим электрическое состояние перехода при отсутствии внешнего напряжения. Возникает диффузия электронов из полупроводника *n*-типа в полупроводник *p*-типа, где концентрация электронов $n_n << n_p$. Прилегающая слева к *pn* — переходу область полупроводника *p*-типа заряжается отрицательно, прилегающая справа к *pn* — переходу область полупроводника *n*-типа приобретает положительный заряд, образованный положительными ионами доноров. Этот процесс сопровождается диффузией дырок из *p*-области в *n*-область — прилегающий справа к переходу слой приобретает положительный заряд. Слева от *pn*- перехода остаются отрицательно заряженные ионы акцепторов. Эти процессы приводят к образованию двойного слоя объемного отрицательного и положительного зарядов, которые создают электрическое поле, препятствующее диффузионному движению электронов и дырок. В результате устанавливается равновесное состояние и на границах *pn* — перехода возникает разность потенциалов $V = \varphi_n - \varphi_p$. В случае кремния $V \sim 1$ В, для германия $V \sim 0{,}7$ В. Энергии теплового движения недостаточно, чтобы основные носители могли преодолеть потенциальный барьер высотой e_0V. Поэтому область перехода представляет собой слой, обедненный основными носителями.

Высоту барьера, образованного *pn* — переходом, можно изменить присоединяя к торцам образца генератор напряжения с ЭДС равной ε. Если «плюс» генератора присоединен к *n*-области, а «минус» — к *p*-области, то говорят, что к переходу приложено обратное смещение. В этом случае направления векторов напряженностей электрического поля, создаваемого генератором, и поля объемного заряда одинаковы. Уровень Ферми у положительного полюса понижается по сравнению с уровнем у отрицательного полюса на величину $|e|\,\varepsilon$. В результате высота энергетического барьера увеличивается: для основных носителей переход заперт.

Создадим теперь прямое смещение, присоединяя «плюс» генератора к *p*-области, а «минус» — к *n*-области. При прямом смещении уровень Ферми в полупроводнике *n*-типа возрастает на величину $|e|\,\varepsilon$ по сравнению с уровнем Ферми материала *p*-типа. Высота энергетического барьера понижается, переходная область сужается. Электроны переходят в *p*-область, дырки — в *n*-область. Этот процесс называется *инжекцией* (от лат. *injicere* — бросать

внутрь). Оказавшись в *p*-области, электроны становятся там неосновными носителями и рекомбинируют с дырками; вследствие этого новые электроны легко входят в *p*-область. То же происходит с дырками, инжектированными в *n*-область. Непрерывное поступление новых дырок обеспечивает генератор — электроны, выходя из *p*-области, оставляют там такое же количество дырок. Вследствие инжекции вольт-амперная характеристика перехода становится нелинейной: сила тока экспоненциально растет с увеличением внешнего напряжения. Важно отметить, что концентрация носителей, которые сильнолегированная область способна инжектировать в слаболегированную, может во много раз превышать исходную концентрацию носителей в слаболегированной области. Поэтому сильнолегированная область полупроводника называется эмиттером (от лат. *emitto* — выпускаю).

Уникальные свойства *pn* — перехода лежат в основе принципа действия диода, транзистора, светодиода и полупроводникового лазера.

6.3. Транзистор

6.3.1. Рождение транзистора. Сильная зависимость концентрации носителей заряда в полупроводниках от наличия примесей наводит на мысль о возможности управлять числом носителей. Именно на этой возможности основаны технические приложения полупроводников.

Вначале исследователи пошли по пути аналогии с вакуумным триодом: они пытались создать устройство, в котором управление током, осуществлялось бы встроенной в полупроводник проволочной сеткой. Вскоре они поняли, что это — бесперспективный путь (реализация этих идей стала возможной в 70-80 гг.). Возник вариант управления током с помощью изменения пространственного распределения носителей заряда в пластине полупроводника. Термин *транзистор* отражает эту особенность: *TRANSresISTance* — перенос сопротивления. 23 декабря 1947 г. был собран первый полупроводниковый триод. Создатели транзистора У. Шокли, Дж. Бардин и У. Браттейн получили в 1956 г. Нобелевскую премию по физике. Теперь его называют *биполярным транзистором*, чтобы отличить от разработанного У. Шокли в 1952 г. нового устройства — *полевого транзистора*.

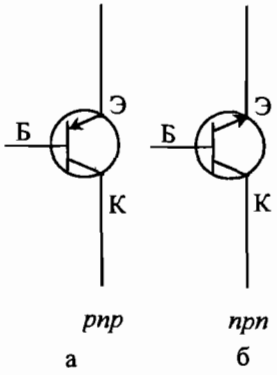


рис. 6.3.1

6.3.2. Принцип работы транзистора. Биполярный транзистор состоит из трех слоев полупроводника *npn* или *pnp*: *эмиттера, базы и коллектора*. Условные обозначения в схемах приведены на рис. 6.3.1.

Дозировкой примесей достигают того, что область эмиттера имеет наибольшую концентрацию носителей, так как эмиттер служит источником носителей. Меньшую концентрацию имеет коллекторная область, которая получает «чужие носители». В области базы самая низкая концен-

трация основных носителей, здесь происходит управление движением «чужих носителей». Транзистор с тремя выводами называют полупроводниковым триодом.

Рассмотрим *pnp-триод* в схеме рис. 6.3.2 *а*. Включим батареи постоянного напряжения, соблюдая следующее правило: напряжение $\varepsilon_{ЭБ}$ на переходе эмиттер-база должно создать прямое смещение в пропускном направлении, напряжение $\varepsilon_{ЭБ}$ на переходе база-коллектор должно быть запирающим.

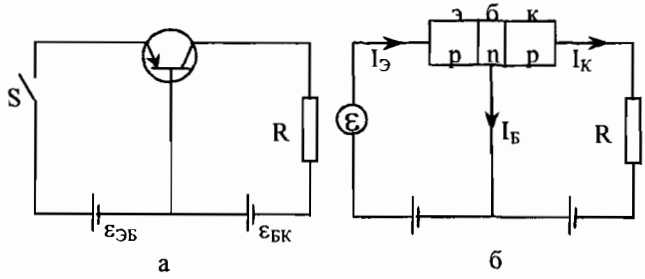


рис. 6.3.2

Когда ключ *S* разомкнут, ток в цепи эмиттера отсутствует. При этом в цепи коллектора имеется небольшой ток, создаваемый главным образом неосновными носителями — дырками в базе и электронами в коллекторе, поскольку для основных носителей *пр*-переход заперт. При замыкании ключа отпирающее напряжение $\varepsilon_{ЭБ}$ приводит к появлению тока $I_Э$ через эмиттерный переход: дырки переходят из эмиттера в базу, электроны из базы в эмиттер. Для того чтобы создать ток I_k в цепи коллектора дырки должны попасть в коллектор, находящийся под обратным напряжением. В структуре с тонкой базой так и происходит: большая часть дырок (до 99 %) не успевает рекомбинировать с электронами базы, свободно проходит через коллекторный *пр*-переход (как неосновные носители базы), и увлекаются электрическим полем к коллектору. Заряд, переносимый дырками от эмиттера, восстанавливается батареей $\varepsilon_{ЭБ}$. *N* электронов покидают эмиттер, оставляя там такое же количество дырок. В слаболегированной базе концентрация электронов значительно меньше, чем концентрация дырок в эмиттере. Поэтому электроны, рекомбинируют с незначительной частью дырок и пополняются из внешней цепи током базы силой $I_Б << I_Э$. Таким образом, коллекторный ток $I_К = I_Э - I_Б$ определяется потоком дырок через левый переход, управляемым напряжением $\varepsilon_{ЭБ}$.

Какую же пользу можно извлечь из всего этого? Обычно выполняется соотношение $I_К \approx \alpha I_Э$, где $\alpha = 0{,}9 \div 0{,}998$. Следовательно,

$$I_Э = \frac{1}{1-\alpha} I_Б, \qquad I_К = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_Б,$$

$$I_Э, I_К >> I_Б.$$

При значении $\alpha = 0{,}998$ имеем $I_Э = 500\ I_Б$! Изменяя напряжение $\varepsilon_{ЭБ}$, можно осуществить управление током в цепи коллектора, управляя током неосновных носителей — дырок, вводимых через эмиттерный переход. Рассмотренный механизм усиления тока лежит в основе работы транзистора.

Задача 6.3.1. Опишите принцип действия *npn*-триода.

6.3.3. Схема усиления с общей базой. В цепь эмиттера в схеме рис. 6.3.2 *б* включен генератор сигнала напряжением $\varepsilon(t)$, в цепь коллектора — резистор сопротивлением R, с которого снимается выходной сигнал. Базовый электрод является общим для входного и выходного сигналов. Поэтому эту схему включения транзистора называют схемой с общей базой, которую можно использовать в качестве усилителя напряжения. Цепь эмиттера называют входой, т. к в нее включают генератор напряжения $\varepsilon(t)$, которое необходимо усилить. Цепь коллектора называют выходной, т. к. в нее включают сопротивление нагрузки R. Введем обозначения для разностей потенциалов: $\varphi_Э - \varphi_Б = V_{ЭБ}$, $\varphi_Б - \varphi_К = V_{БК}$.

Функция $I_э = F(V_{ЭБ}, V_{БК})$ называется входной характеристикой схемы. При $V_{БК} = 0$ мы имеем характеристику диода. Если же $V_{БК}>0$, то график при напряжениях $V_{ЭБ} > 1{,}4$ В идет незначительно выше. Поэтому можно принять, что $I_Э \approx F(V_{ЭБ})$. Функцию $I_К = G(V_{БК}, I_Э)$ называют выходной характеристикой схемы. При $V_{БК} > 1{,}5$ В функция $G(V_{БК}, I_Э) \approx \alpha I_Э$, $\alpha = 0{,}98$, сила тока $I_К \approx \alpha I_Э$.

Приведем типичный пример. Пусть $\varepsilon(t) = 0$. Рабочий ток транзистора $I_{Э0} \approx I_{К0}$ принимает значения от 1 мА до 4 мА. Пусть $\varepsilon_{ЭБ} = 0{,}16$ В, $\varepsilon_{БК} = 10$ В. По графику $I_Э \approx F(V_{ЭБ})$ найдем силу тока в цепи эмиттера $I_{Э0} = 2{,}5$ мА, через базу протекает ток $I_{Б0} = (1 - \alpha)I_{Э0} = 5$ мкА. Обычно сопротивление нагрузки выбирают так, чтобы падение напряжения на нагрузке $\approx\varepsilon_{БК}/2$. Согласно закону Ома $V_{БК}(0) + I_{К0}R = \varepsilon_{БК}$. Выбирая $R = 2{,}5$ кОм, получим $V_{БК}(0) = 3{,}75$ В.

В рабочем режиме имеем систему уравнений

$$I_Э = I_Б + I_К,\ V_{ЭБ} = \varepsilon_{ЭБ} + \varepsilon(t),\ V_{БК} + I_К R = \varepsilon_{БК},$$

$$I_К = \alpha I_Э,\ I_Э = F(V_{ЭБ}).$$

Полагая $I_Э = I_{Э0} + \Delta I_Э$ в уравнении $I_Э = F(V_{ЭБ})$, получим

$$I_Э \approx I_{Э0} + \varepsilon(t)\Delta F/\Delta V_{ЭБ},\ \Delta I_Э = \varepsilon(t)/R_0,$$

где $\Delta F/\Delta V_{ЭБ} = 1/R_0$, $R_0 = 20$ Ом — входное сопротивление транзистора в схеме с общей базой. При значении $\varepsilon = 20$ мВ сила тока в цепи эмиттера увеличится на $\Delta I_Э = 1$ мА; сила тока $I_Б$ возрастет на малую величину $\Delta I_Б = 20$ мкА, отношение приращения токов $\Delta I_Э/\Delta I_Б = 50$.

Физический механизм этого процесса связан с тем, что один электрон, приходящий в область базы, понижает потенциальный барьер. Это приводит к инжекции 50 дырок, одна из которых испытывает рекомбинацию с электроном, так что восстановится начальное значение концентрации элек-

тронов базы. В результате поступления на базу только одного электрона на коллектор попадает 49 дырок.

Найдем теперь напряжение выходного сигнала. Согласно закону Ома для цепи коллектора имеем $V_{БК} + I_К R = \varepsilon_{БК}$ Полагая $V_{БК} = V_{БК}(0) + \Delta V_{БК}$, $I_К = I_{К0} + \Delta I_К$ в уравнении $V_{БК} + I_К R = \varepsilon_{БК}$, получим приращение напряжения на нагрузке $\Delta V_{БК} = -\Delta I_К R$. Поскольку $\Delta I_К = \alpha \Delta I_Э$, $\Delta I_Э = \varepsilon(t)/R_0$, то $\Delta V_{БК} = -\alpha(R/R_0)\varepsilon(t)$. Коэффициент усиления по напряжению $\kappa = |\Delta V_{БК}|/\varepsilon = \alpha R/R_0$, $\kappa \approx 50$.

Задача 6.3.2. Покажите, что коэффициент усиления по мощности схемы с общей базой равен $\alpha^2 R/R_0 \approx 50$.

Основной схемой транзисторной электроники является схема с общим эмиттером. В этом случае напряжение сигнала при малом токе базы управляет большим током коллектора. Эта схема может быть использована как усилитель тока, мощности и напряжения.

6.4. Необъятные горизонты микроэлектроники

Рождение Силиконовой долины. Почему на 80-километровой полоске земли между Сан-Франциско и Сан-Хосе выросло царство электронной технологии, где властвуют интеллект и миллиарды? История этого чуда начинается с того момента, когда в конце 30-ых годов прошлого столетия у профессора Стэнфордского университета Фреда Термана появилась идея превратить Стэнфорд в центр высоких технологий. В 50-е годы был основан знаменитый теперь промышленный парк, тесно взаимосвязанный с университетом; идеальный вариант симбиоза университетской науки с предпринимательской деятельностью. Началось великое переселение. Уже к 1958 г. в парке работает несколько десятков компаний. В 1955 г. Шокли создает лаборатории, ставшие базой для развития всей полупроводниковой индустрии и источником разветвленной сети компаний, основанных его учениками. Половина всей инфраструктуры долины возникла в результате научных споров в коллективе — спорщики становились основателями новых компаний. Заслуга Термана в том, что он создал систему, благодаря которой происходил естественный отбор ученых-предпринимателей. Из пяти самых богатых предпринимателей мира четыре заработали миллиарды на высоких технологиях. Новый термин «Силиконовая долина» появившийся 11 января 1971 г., стал синонимом американской мечты — оборот долины составляет почти половину триллиона долларов.

Период привыкания к транзисторам продолжался первую половину 50-х годов. Вычислительная машина 30-тонный «ЭНИАК», созданная Дж. фон Нейманом в 1945 г. содержала 18 тысяч ламп и принадлежала к первому поколению компьютеров. С заменой в 1955 г. электронной лампы транзистором пробил час рождения компьютеров второго поколения. Лампы оказались «вне игры». К началу 60-х годов круг применения транзисторов стал всеобъемлющим — от новых поколений телевизоров и систем зажигания автомобилей до ЭВМ. В 1958 г. фирма *Bell* выпустила первый полевой транзистор типа

МОП — металл-окисел (диэлектрик) — полупроводник. Сейчас он играет главную роль в микроэлектронике. В том же 1958 г. была внедрена *«планарная» технология* изготовления транзисторов: они одновременно формируются на полупроводниковой пластине, и наносится слой, необходимый для контактов. Затем пластину разрезают на отдельные элементы.

6.4.1. Интегральные схемы. А нельзя ли на одной пластине выполнить схему усилителя или переключателя? Первый вариант такой схемы был сделан Джеком Килби (Нобелевская премия, 2000 г.) в 1958 г. А к началу 1959 г. Роберт Ноес (вместе с Гордоном Муром основали *Intel*) изобрел метод, позволяющий создавать на одной пластине кремния транзисторы, диоды, резисторы и конденсаторы как составные элементы самостоятельной схемы. Кусочек кремния со схемой, вырезаемой из исходного кристалла, называют *чипом* (от англ. *chip* — осколок, обломок). Серийное производство чипов началось в 1961 г. С 1968 г. новое, четвертое поколение компьютеров стало вытеснять ЭВМ на транзисторах. Миром завладел чип.

Общий рынок полупроводниковых приборов в 1999 г. составил 144 млрд долларов. На долю процессоров для PC пришлось 28 млрд, остальные — на долю микропроцессоров «не для PC», называемых микроконтроллерами. Кто-то очень точно заметил, что «микропроцессор был придуман раньше, чем возможности его применения».

6.4.2. Первый век компьютерной эры. Еще на заре «кремниевой эры» в 1965 г. Г. Мур предсказал, что каждые 18 месяцев плотность транзисторов на кристалле будет удваиваться. Первая интегральная схема содержала всего 6 элементов — 4 транзистора и 2 резистора. К 1982 г. число элементов достигло 300 000. Микросхема с емкостью памяти 16 Мбайт содержала 40 млн. компонент на пластине размером 10×20 мм^2; каждый компонент имеет размеры ~2,4 мкм. Процессор PA-8600 фирмы «Хьюллет-Паккард» имеет 140 млн транзисторов на площади 4,7 см^2. Процессор Pentium-4 с тактовой частотой 1,7 ГГц содержит 42 млн транзисторов. На срезе человеческого волоса можно разместить 30 тыс. транзисторов. В середине 2000 г. инженеры *Intel* изготовили транзисторы размером 20 нм. Новый процессор с тактовой частотой до 20 ГГц будет содержать 1 млрд элементов. Толщина одного атомного слоя кристалла около 10 нм. Для сравнения: кристалл, толщиной равной толщине листа бумаги, содержит 100 тыс. атомных слоев. Сейчас размеры транзисторов достигли 0,007 мкм = 7 нм!

Современные большие ЭВМ. В 1985 г. Сеймур Крей создал ЭВМ «Крей-2», выполняющую 10^9 операций в секунду. В 1996 г. был представлен чудо-компьютер «Крей ТЭЕ-900», способный совершать триллион операций в секунду. В 2 000 г. корпорация IBM произвела суперкомпьютер, выполняющий 12,3 трлн операций в секунду. Он вмещает 8192 процессора, весит 106 тонн и размещается на площади 800 м^2. Суперкомпьютер *Hitachi SR*-8000 имеет производительность более 2 *TEFLOPS* и объем памяти более одного терабайта. В списке Top500, где показаны пятьсот самых быстрых компьютеров мира, на первой строчке — ASCI White фирмы IBM, который

развивает скорость 136,8 Тфлопс и состоит из 512 отдельных серверов RS 6000. В списке Top500 за 2005 г. на первом месте суперкомпьютер IBM BlueGene/L мощностью 136,8 Тфлопс. Уже разработана технология петафлопных машин — 10^{15} операций в секунду.

Что дальше? Высокие технологии приближают естественный предел закона Мура. В декабре 2000 г. *Intel* анонсировала затвор из двуокиси кремния, состоящий из трех атомов SiO_2 — меньше некуда. Неизбежно придется менять технологию. В 2001 г. передовые компании США и Японии перешли на размер 0,13 микрона. Новый прорыв сделан на базе новейшей нанотехнологии — 28 августа 2001 г. компания IBM объявила о создании логического элемента из точно позиционированных молекул углерода.

В настоящее время усилия ученых направлены на повышение быстродействия, решения проблем создания объемных интегральных схем, уменьшения расстояния между элементами и их размеров. Новые направления микроэлектроники, связанные с использованием световых пучков, спиновых транзисторов, сверхнизких температур и органических молекул, открывают фантастические возможности. В перспективе элементы и соединения могут быть изготовлены методами генной инженерии. И тогда можно будет говорить о выращивании нейрочипа — основного элемента нейрокомпьютера. В мозгу человека функционирует около 100 миллиардов нейронов, которые за 80 лет обрабатывают 10 терабайт данных, а современные суперкомпьютеры выполняют операции в объеме всего лишь 6 клеток. Нейрокомпьютер уже не будет нуждаться в подсказках и указаниях. В долю секунды включатся целые области нейрочипов, самообучаясь, он станет анализировать поступающую по собственным сетям информацию, выбирать оптимальное решение поставленной задачи и, возможно, решать собственную проблему — стоит ли предъявлять решение пользователю?

6.4.3. На пути к персональному компьютеру. В 1971 г. М. Хофф из *Intel* сконструировал интегральную схему, аналогичную по своим функциям центральному процессору большой ЭВМ. Так появился *микропроцессор Intel* 4004. Главный чип имел размеры $3{,}8 \cdot 2{,}8$ мм^2, содержал 2250 транзисторов и имел быстродействие 50 000 операций в секунду. Снижение стоимости процессора привело к массовому увлечению конструированием новых электронных устройств. Созданная в 1976 г. 20-летними техниками С. Джобсом и С. Возняком системная плата, позволила выпустить персональный компьютер *Apple II*, который оказался настолько удачным, что уже в 1977 г. его тираж превысил миллион. Рождение персонального компьютера произвело такую же революцию, как изобретение в 1438 г. Иоганном Гутенбергом книгопечатания.

В 1979 г. в борьбу за рынок персональных машин вступила фирма IBM. Созданный в 1981 г. новый компьютер IBM PC (64-Кбайт ОЗУ, микропроцессор 8088), разработанный группой Ф. Эстриджа, фактически стал стандартом персональных компьютеров. Наибольшее влияние на развитие этих

компьютеров оказывает фирма *Intel*, где под руководством Дж. Крофорда были созданы микропроцессор 486DX, содержащий 1,2 млн транзисторов (1989 г.), и Pentium (1993 г.). Минимальное расстояние между элементами порядка одного микрона — примерно в сто раз меньше толщины человеческого волоса. В 1997 г. был представлен Пентиум-II с четырехкратно увеличенной производительностью. Пентиум-III (1999 г.) содержит 28 млн транзисторов на кристалле размером 106 мм^2. Пентиум — IV и Xeon (2002 г.), выполненный по 0,13 мкм технологии, содержащий 55 млн транзисторов на кристалле размером 146 мм^2 обрабатывает информацию с тактовой частотой большей 2 ГГц. Серьезную конкуренцию моделям семейства Intel составляют процессоры AMD Athlon и Athlon XP.

Согласно прогнозу экспертов *Intel*, в начале XXI в. тактовая частота процессора, содержащего миллиард транзисторов, выполненных по 0,07-мкм технологии, достигнет 12 ГГц. Появление таких PC вызвано необходимостью расширения возможностей домашнего компьютера при подключении к Интернету (демографический взрыв — более полумиллиарда пользователей в 2000 г.) и тенденцией к визуализации вычислений — замене цифр и графиков трехмерными изображениями реального процесса. Новые накопители DVD-RAM (*digital video disc — random access memory* — цифровой видеодиск) обеспечат возможность чтения, записи и стирания данных. Недавно компания IBM выпустила суперминиатюрный жесткий диск размером с двухрублевую монету, вмещающий 1 Гбайт информации; на нем можно записать 1000 фотографий или 18-часовой «концерт». Первый диск той же емкости, выпущенный в 1980 г., весил 250 кг. К 2003 г. может появиться голографический носитель размером с компакт диск с емкостью 125 Гбайт и скоростью передачи данных 40 Мбайт/с. Через 10 лет емкость подобных носителей достигнет 1Тбайт. Всю библиотеку Конгресса США можно будет записать на один диск размером с CD.

Восемь из каждых десяти компьютеров в мире оснащены операционными программами фирмы Microsoft — MS DOS, Windows (основана в 1975 г.). В феврале 2000 г. вышла новая система Windows 2000, последующие версии будут называться Windows Net. Этот проект предполагает интеграцию аппаратного, информационного и программного обеспечения сетей. В феврале 2000 г. компания Microsoft провела презентацию следующей версии своей операционной системы Windows XP Home Edition и показала новый интерфейс Luna, упрощающий работу с Windows. С этими продуктами предстоит конкурировать постоянно совершенствующейся операционной системе Linux, созданной Линусом Торвальдсом. Эксперты утверждают, что программы новой операционной системы Unix принципиально нельзя заразить компьютерным вирусом.

Необходимо отметить, что прообразом современных мультимедийных систем — «гипермедиа» — явились разработки ученого и изобретателя, легендарного Дугласа Энгельбарта. В 1963 г. он изобрел первый в истории манипулятор – знаменитую «мышь», многооконный интерфейс, текстовые

редакторы (1962г.), графические программы (1963 г.), первую графическую видеоигру (1962 г.), рисующую программу (1974 г.), первую коммерческую игру (1976 г.). Они были разработаны как экспериментальные продукты в исследовательской лаборатории Стэнфордского университета, которой он руководил 20 лет.

Конкуренты, желая ограничить монополию Microsoft, выступают с требованием «Билли-Alt-F4». По мнению главы фирмы Б. Гейтса, в ближайшие 10 лет мировая компьютерная индустрия будет развиваться на основе концепции «information on your fingertips» (информация на кончиках пальцев). Интерактивные компьютеры и телевизоры целиком погрузят человека в мир легко доступной информации, вводимой с помощью клавиатуры или голоса. Сотрудники Стэнфордского университета изобрели перчатку-манипулятор, преобразующую движения пальцев в сигналы, посылаемые в компьютер. Новая концепция голосовой технологии ViaVoice позволит создавать приложения, управляемые голосом. Скоро появится новая разновидность — НК — «носильный компьютер», встроенный в предметы туалета. НК всегда будет находиться в поле зрения владельца — дисплей на линзе очков, выдаст информацию, полученную через мобильную связь. В стадии устойчивого роста находится рынок карманных компьютеров (КК), обеспечивающих нажатием клавиши быстрый доступ к системам связи. Один из продуктов технологии Bluetooth (синий зуб) представляет собой авторучку Chatpen, которая передает изображение с бумаги в ПК или сохраняет в памяти (2 Мбайт). В конце 2000 г. удалось создать матрицы управляющих элементов на основе пластиковой электроники. Эта технология позволит печатать электронные платы на пластиковой пленке. В результате можно получить не только гибкий сверхтонкий дисплей, но и компьютер в виде носового платка.

6.4.4. Интернет. Интернет возник еще в 1969 г., когда в рамках проекта министерства обороны США (Defense Advanced Research Projects Agency) впервые была установлена связь между двумя удаленными компьютерами. Однако событие, которое ознаменовало наступление новой эры во всей нашей культуре, произошло осенью 1993 г., когда студенты университета Иллинойс раработали Web-браузер *Mosaic* в сети Internet. За несколько месяцев сеть (в основном, ее подмножество Web) стала доступна всем. Необычайно быстро Microsoft подготовила и выпустила свой браузер *Internet Explorer*. В начале XXI в. персоналки всего мира соединятся в единый «компьютерный организм» — информационную супермагистраль» Internet. Эксперты утверждают, что в течение следующих 5—10 лет Интернет превратится в *Evernet* — Вездесущую Паутину. Последнюю преграду в общении человека с компьютером преодолеют персоналки, понимающие обычную речь.

В 1998 г. глава швейцарской фирмы Swatch AG Ник Хэйек предложил ввести единое интернет-время: разделить сутки на 1000 «тактов» по 1 минуте и 26,4 секунды каждый, а точку отсчета перенести из Гринвича

в штаб-квартиру фирмы. 4 млн пользователей уже загрузили программу-конвертер для перевода времени из интернет-формата в обычный. Другой аналогичный стандарт электронного времени – GeT – предложили англичане.

Что же может дать Интернет? Постоянная составляющая паутины Сети — серверы, на которых размещаются и хранятся огромные объемы информации. Поток информации удваивается каждые 100 дней (700% в год). Для связи с Сетью используется телефон и модем (модулятор-демодулятор), волоконно-оптические линии или комбинация спутникового канала и телефонной линии. По Интернету можно не только получать, но и передавать свою информацию другим пользователям. Вход представляет стартовую страничку со ссылками — адресами информационного ресурса. Щелкнув «мышью», мы переходим на другую страничку, которая может находиться на одном из серверов. На ней — своя «коллекция» ссылок. Обычно в «закладках» пользователь хранит не более 20 ссылок. Перемещение в киберпространстве называют *веб-серфингом*. Специальные серверы — «поисковые машины»- могут по запросу собрать по всему миру необходимую информацию, которая поступает в Сеть раньше, чем появляется в печатном виде. В интернет-магазине (*e-commerce*) программа-коммуникатор выступает в роли продавца. Отметим, что число пользователей радиоприемников достигло 50 млн человек за 40 лет, телевизоров — за 13 лет, а Интернета — за 4 года. За 20 лет цена компьютеров снизилась более чем в 10 000 раз — в среднем на 30-40% в год. Сейчас 400 млн человек подсоединены к Интернету, к 2007 г. ожидается миллиард пользователей.

Преступники в киберпространстве и защита информации. Подключение компьютера к сети Internet наряду с расширением возможностей получения информации, создает большие проблемы в общении с внешним миром. Мало кто мог предположить, что любого из нас могут атаковать, похитить данные или обокрасть. Получая доступ к беспредельным ресурсам в Internet, приходится открывать доступ к ресурсам своего компьютера — можно запустить посторонние программы, способные выполнять практически любые действия, в том числе и деструктивные. Можно получить доступ к дискам и файлам или внедрить троянских коней, то есть программ - резидентов, которые не размножаются и не рассылаются сами, а управляют компьютером жертвы и отсылают конфиденциальную информацию (пароли, номера кредитных карточек и др.) с зараженного компьютера на определенные адреса. В последнее время наблюдается рост экономических преступлений, связанных с атаками организованных групп на компании, которые занимаются электронной коммерцией, со взломом с целью получения прибыли от продажи секретных технологий, доступом или уничтожением банковской информации. Потери компаний составляют сотни млн долларов.

Вся связь в Internet реализована посредством обмена индивидуальными пакетами данных, содержащих адреса отправителя и получателя. Именно эта информация и нуждается в защите. Целью новой науки компьютерной *стеганографии* (от греч. *steganos* — тайна) является обеспечение максимально безопасной передачи сообщений. Специалисты связывают самые большие надежды на защиту информации с методом квантового шифрования.

Всемирная паутина может использоваться в качестве среды обмена между криминальными и террористическими структурами. Именно поэтому необходимо решить не только проблему безопасности, но и проблемы, связанные с обратной задачей – оперативной дешифровкой перехваченной информации.

Главная особенность компьютерной тайнописи — сокрытие файла-сообщения внутри файла-контейнера. В роли контейнера обычно выступают файлы графических форматов или звуковые файлы. Задачей стегоанализа является поиск эффективных алгоритмов для обнаружения скрытой информации.

В июле 1999 г. специалисты по компьютерной безопасности засекли десятки нападений на военные серверы США. Когда же начали поступать сообщения о нападении на локальные сети Пентагона и хакерах (от англ. *to hack* — рубить), взломавших через Интернет серверы разработчиков передовых технологий, стало ясно — началась кибернетическая война (cyberwarfare). Другая проблема — Интернет-вирусы. Ущерб от «I love you», захватившего 45 млн компьютеров, оценивается в 10 млрд долларов. Очевидно, что необходимо бороться с хакерами и производителями вирусов только в рамках уголовного права. И все же вспомним латинское изречение: «sapienti sat» — разумный поймет, как использовать это выдающееся изобретение открытого общества.

6.5. Компьютер — инструмент познания

В настоящее время физика развивается на основе экспериментального и теоретического методов исследования явлений природы. Компьютеризация полностью изменила технику измерений, представляя широкие возможности автоматизации, обработки и интерпретации данных.

На определенном этапе познания явление описывается системой дифференциальных уравнений, аналитическое решение которых обычно неизвестно. Отсутствие точных решений не позволяет выявить закономерности изучаемого явления. Прямой путь исследования состоит в проведении реального эксперимента. Однако без предварительной информации о значениях наблюдаемых величин и параметров физических приборов эксперимент может быть обречен на неудачу. Более того, при анализе астрофизических явлений или последствий ядерного конфликта эксперимент невозможен, а при прогнозировании атмосферных и геофизических явлений возможен только «единственный» эксперимент.

Применение ЭВМ существенно изменяет методику научных исследований. Экспериментаторы уже давно используют компьютеры как важную часть своей аппаратуры, однако, физики-теоретики только в последние три десятилетия осознали, какими необъятными возможностями обладает вычислительный эксперимент. Пока машины не мыслят, физику делают физики. Они пытаются исследовать упрощенные модели явления; получаемые предсказания проверяются в эксперименте. «Вычислительная машина ценна ровно настолько, насколько ценен человек, использующий ее. Он обязан иметь идеи», — сказал в 1964 г. Норберт Винер — основатель новой науки об управлении — кибернетики (от греч. *kybernetes* — рулевой).

Использование ЭВМ позволяет получить более достоверные результаты без введения приближений и упрощающих предположений. Точная вычислительная модель в определенной степени заменяет обычный лабораторный эксперимент. В вычислительном эксперименте можно создать «условия», невозможные в реальном опыте: «включить» сверхсильные поля, «создать» сверхнизкие или сверхвысокие температуру и давление. К этой группе задач относятся исследования поведения плазмы, молекул жидкости, взаимодействия атомов с поверхностью металла или взаимодействия планетарной системы с пролетающей массивной звездой. На дисплее можно увидеть фильм, использующий уникальные возможности машинной графики — объемная перспектива и теневые эффекты погружают зрителя в мир *виртуальной* (от лат. *virtualis* — могущий проявится) *реальности*. Надев шлем-дисплей, мы окажемся в мире молекул или станем свидетелями событий космического масштаба.

Виртуальное 3D (от лат. *dimension* — размерность) пространство, созданное на основе реальных данных пациента, позволяет доверить проведение сложнейших операций роботу, который может сделать разрез с точностью до тысячной доли миллиметра. Одна из первоочередных задач — фолдинг белков — расчет наиболее вероятных конфигураций молекул белков с целью создания индивидуальных лекарств.

Моделирование обтекания тел воздушным потоком открыло новые перспективы в конструировании самолетов и автомобилей. Вычислительный эксперимент дал возможность проводить аэродинамические исследования с такой детализацией, которая недоступна в эксперименте реальном. Сильное впечатление производит картина «затекания» электромагнитной волны в блок управления ракетой или образование и отрыв вихрей от крыла самолета. С помощью пакетов программ можно создавать прототипы самолетов и машин, проводить испытания на прочность, имитировать опасные условия полета или движения по пересеченной местности, сжигая запас «виртуального» горючего.

С другой стороны, решения большинства уравнений неустойчивы из-за сильной чувствительности к точности задания начальных условий. В результате предсказание поведения системы может оказаться невозможным — после конечного числа шагов она «погружается» в состояние *детерминированного хаоса*.

Моделирование биологических процессов в попытках создать что-либо жизнеподобное позволяет разрешить интересующий многих вопрос: как возникла жизнь? Почему примитивные предшественники ДНК приобрели способность сохранять информацию и копировать ее, преобразовывать энергию, размножаться и создать структуры необычайной сложности и красоты? Сейчас мы начинаем понимать, что явление *спонтанной* (от лат. *spontaneus* — самопроизвольный) организации, возникающей в результате *флуктуаций* — центральная проблема на всех уровнях жизни.

В 80-х г. родился новый раздел науки — физика мышления или теория интеллекта как динамическая теория распределения потенциалов нейронов мозга, адекватно отражающих реальности внешнего мира. Математическое моделирование распределения потенциалов должно выявить априорные структуры, наследованные на генетическом уровне, и обеспечить адаптивность — изменение параметров структуры в процессе познания.

6.5.1. Компьютеры и наступательное оружие. В настоящее время компьютерные технологии используются почти во всех системах вооружений. Основная тенденция – повышение эффективности аппаратуры обнаружения целей, средств связи, систем управления огнем и снабжения боеприпасами. Компьютеры применяются в сенсорных системах ракет, танков, радаров при обработки данных для наведения и управления. В экипировку пехотинца входит установленный на шлеме приемник спутниковой навигационной системы, система обмена голосовыми и текстовыми сообщениями, портативный компьютер. На откидном дисплее шлема солдат ночью видит картину, полученную с помощью тепловых датчиков и приборов ночного видения, установленных на винтовке. На дисплее представлена карта, автоматически прокручиваемая при движении, и отображается относительное положение всех солдат взвода и окружающей местности (система Land Warrior). Сейчас развитие военной стратегии стимулирует создание «умного» оружия для ведения бесконтактных войн.

Глава 7. Электромагнитная индукция

7.1. Открытие Фарадея

Явление электромагнитной индукции (от лат. *inductio* — наведение, возбуждение) открыл в 1831 г. М. Фарадей, которого часто называют гением эксперимента. Под влиянием открытия Эрстеда Фарадей записал в своем дневнике: «Превратить магнетизм в электричество». За 10 лет он провел множество опытов. Заключительный эксперимент он провел 17 октября 1831 г.: спираль из медной проволоки присоединил к амперметру и быстро втолкнул магнит внутрь спирали. Стрелка отклонилась. Затем так же быстро вытащил магнит — стрелка качнулась в противоположную сторону. Далее он демонстрирует три способа создания ЭДС: двигая провод относительно магнита, двигая магнит относительно провода или меняя ток в соседнем проводе. Уже 28 октября 1831 г. он создает первый генератор электрического тока.

Для того, чтобы записать закон индукции в математической форме, необходимо ввести новое понятие — поток *магнитной индукции.*

7.2. Поток магнитной индукции

Выберем замкнутый контур, на который опирается выпуклая поверхность S. Разобьем ее на N столь малых частей, чтобы в пределах каждой из них поверхность мало отличалась от плоской. Площадь малой площадки обозначим ΔS_a. Выберем на каждой площадке точку $\vec{r}_a$ и зададим в ней единичный вектор внешней нормали $\vec{n}_a$ ($a = 1, 2, \ldots, N$). Величина

$$\Delta\Phi_a = \vec{n}_a \vec{B}(t, \vec{r}_a)\Delta S_a$$

называется элементарным *магнитным потоком через поверхность* ΔS_a. Предел суммы потоков $\Delta\Phi_a$ при $N \to \infty$, $|\Delta S_a| \to 0$ называется магнитным потоком $\Phi(t)$ через поверхность S:

$$\Phi(t) = \sum_{a=1}^{N} \vec{n}_a \vec{B}_a(t, \vec{r}_a)\Delta S_a \,. \qquad (7.2.1)$$

В СИ единица магнитного потока называется *вебер* (Вб): 1 Вб = 1 Тл · 1 м^2.

Закон Гаусса для потока магнитной индукции. Интегральная форма одного из уравнений Максвелла соответствует утверждению: поток магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю.

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{n}_k \vec{B}_k \Delta S_k = 0, \qquad (7.2.2)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали. В этом случае из закона Гаусса следует, что магнитные заряды не существуют.

7.3. Универсальный закон электромагнитной индукции

Рассмотрим замкнутый проводник в магнитном поле. Поток магнитной индукции может зависеть от времени в силу четырех независимых причин.

1. Контур неподвижен, а вектор $\vec{B}(t, \vec{r})$ зависит от времени.

2. Контур движется в постоянном неоднородном поле, сохраняя ориентацию неизменной.

3. Контур вращается в постоянном однородном магнитном поле.

4. Контур деформируется.

Во всех случаях в контуре появляется электрический ток, направление и величина которого определяются законом Ома для цепи, содержащей ЭДС индукции.

Математическая формулировка закона индукции была дана Д. Максвеллом в 1873 г.: если магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром является функцией времени, то в контуре возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon\ (t) = -\frac{d\Phi}{dt}\,. \qquad (7.3.1)$$

Ранее термин ЭДС означал работу, совершаемую батареей при переносе по контуру единицы заряда. Здесь ЭДС означает сумму работ, совершаемую индуцированным электрическим полем напряженностью $\vec{E}'_a$ на всех участках контура $\Delta\vec{l}_a$ ($a = 1, 2, \ldots, N$) при переносе единицы заряда:

$$\varepsilon = \sum_{a=1}^{N} \vec{E}'_a \Delta\vec{l}_a \,. \qquad (7.3.2)$$

7.3.1. Физика индукции. В явлении электромагнитной индукции проявляются два фундаментальных закона природы. Один из них открыт Д. К. Максвеллом в 1864 г. Он заключается в том, что изменение магнитного поля в вакууме вызывает появление *электрического вихревого поля* с замкнутыми силовыми линиями, охватывающими силовые линии магнитного поля. До сих пор мы знали только электрическое поле, созданное зарядами. Работа, совершаемая вихревым полем при переносе заряда по замкнутому контуру не равна нулю. Согласно Максвеллу напряженность индуцированного вихревого электрического поля обусловлена явной зависимостью магнитной индукции от времени.

Другой закон представляет собой следствие теории относительности, созданной Альбертом Эйнштейном в 1905 г.: если в неподвижной системе отсчета K имеется магнитное поле, то наблюдатель в движущейся системе отсчета K' обнаружит магнитное и электрическое поля. Пусть, например, в системе K создано магнитное поле с индукцией $\vec{B} = (0, 0, B)$. Тогда в системе K', движущейся со скоростью u значительно меньшей, чем скорость света, имеем магнитное поле $\vec{B}'$ и электрическое поле напряженностью $\vec{E}'$:

$$\vec{B}' \approx \vec{B}\,, \quad \vec{E}' \approx \vec{u} \times \vec{B}\,.$$

Если $\vec{u} = (u, 0, 0)$, то $\vec{E}' = (0, -uB, 0)$ (см. доп. VI. Гл. 2).

Вычисляя производную потока индукции через движущийся контур, можно представить ЭДС индукции (7.3.1) в явном виде

$$\varepsilon = -\sum_{a=1}^{N} \Delta S_a \vec{n}_a \frac{\Delta\vec{B}(t, \vec{r}_a)}{\Delta t} + \sum_{a=1}^{N} \vec{v}_a \times \vec{B}(t, \vec{r}_a)\Delta\vec{l}_a \,, \qquad (7.3.3)$$

где $\vec{v}_a$ — скорость элемента контура $\Delta\vec{l}_a$. Первое слагаемое обусловлено возникновением вихревого электрического поля, второе слагаемое связано с движением элементов контура. Например, если $\vec{B} = (0, 0, B)$, $\vec{v}_a = (-v \sin\alpha, v \cos\alpha, 0)$, то вклад в ЭДС элемента $\Delta\vec{l}_a = (0, \Delta l, 0)$ равен $vB\Delta l \sin\alpha$ (см. рис. 7.3.1). Положительное направление на контуре задано уже известным

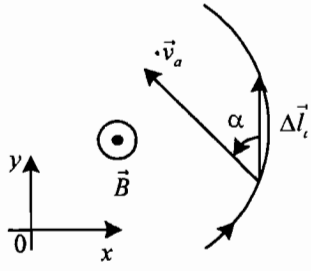


рис. 7.3.1

правилом: *при обходе контура в положительном направлении внешняя нормаль всегда остается с левой стороны.*

Отметим, что соотношения (7.3.2), (7.3.3), определяющие напряженность электрического поля $\vec{E}'$, выполняются для контура в свободном пространстве, не содержащем каких-либо элементов реальной цепи.

Поскольку доказательство соотношения (7.3.3) не входит в программу, то мы сделаем ряд методических замечаний в приведенных ниже примерах.

Пример 7.3.1. Вихревое электрическое поле в соленоиде. Покажем, что переменное магнитное поле порождает электрическое поле. Пусть в соленоиде, изображенном на рис. 3.3.1, индукция магнитного поля, создаваемая переменным током, представляет собой функцию времени $B_z(t)$. Для вычисления потока индукции выберем поверхность круга, ограниченного окружностью радиуса r в плоскости перпендикулярной оси z с центром на оси. Выберем единичный вектор нормали параллельно оси z. Тогда $\Phi = \pi r^2 B_z\ (t)$. Из (7.3.3) находим $\varepsilon = -\pi r^2 \dfrac{dB_z}{dt}$. С другой стороны согласно (7.3.2) имеем $\varepsilon = 2\pi r E$, где E — проекция напряженности на касательную к окружности. Следовательно,

$$E(t, r) = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dt}.$$

Пример 7.3.2. Заряженное кольцо в переменном магнитном поле. На тонком диэлектрическом кольце распределен заряд q. Кольцо может вращаться вокруг оси, проходящей через центр перпендикулярно плоскости кольца. Поместим кольцо в соленоид так, чтобы ось совпадала с осевой линией соленоида. Индукция магнитного поля $B_z(t) = B_0$, $t \le 0$; $B_z(t) = B(t)$, $t > 0$. Найдем угловую скорость кольца $\omega(t)$.

Запишем уравнение движения кольца массой m радиусом a исходя из закона изменения кинетической энергии $dK/dt = P$, где P — мощность, развиваемая внешними силами.

Элементарная масса Δm кольца с зарядом Δq находящаяся на расстоянии a от оси движется по окружности со скоростью $v = a\omega$. Поэтому кинетическая энергия кольца $K = \dfrac{ma^2\omega^2}{2}$. Сила, действующая на элементарный заряд $\Delta q = q\Delta\varphi/2\pi$ в вихревом электрическом поле, направлена по касательной к окружности. Проекция силы на касательную равна $\Delta F_t = \Delta qE$. Мощность, развиваемая силой $\Delta P = \Delta qEv = \Delta qEa\omega$. Подставляя значение E, полученное в примере 7.3.1, находим

$$\Delta P = -\frac{q}{4\pi}a^2\omega\frac{dB}{dt}\Delta\varphi.$$

Суммируя по всем элементарным зарядам, получим значение $P = -\frac{qa^2}{2}\omega\frac{dB}{dt}$. Поскольку $\frac{dK}{dt} = ma^2\omega\frac{d\omega}{dt}$, то имеем уравнение

$$ma^2\frac{d\omega}{dt} = -\frac{qa^2}{2}\frac{dB}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{q}{2m}\frac{dB}{dt}.$$

Пусть $\omega(0) = 0$. Тогда $\omega(t) = \frac{q}{2m}[B_0 - B(t)]$. Если $B(t) = 0$, то после выключения поля диск вращается с постоянной угловой скоростью.

Пример 7.3.3. Два параллельных гладких металлических стержня расположены в горизонтальной плоскости на расстоянии l друг от друга и соединены резистором R (рис. 7.3.2). По стержням как направляющим может перемещаться проводник массой m. Вся система находится в постоянном однородном магнитном поле индукцией $\vec{B} = (0, 0, B)$. Запишем полную систему уравнений для определения положения проводника и электрического тока в замкнутой цепи *OCKPO*.

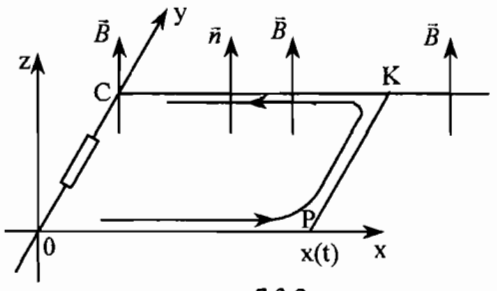


рис. 7.3.2

Положение проводника опишем функцией $x(t)$, представляющей собой в момент времени t координату точки P на числовой оси x с началом в точке O. Для вычисления магнитного потока через прямоугольник *OCKP* введем единичный вектор $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Задание $\vec{n}$ одновременно определяет положительное направление на контуре по правилу буравчика: вращение буравчика в положительном направлении приводит к его перемещению в направлении вектора $\vec{n}$. На рис. 7.3.2 положительное направление показано стрелкой, лежащей вне контура.

Согласно определению магнитный поток внешнего поля $\Phi(t) = Blx(t)$. Пренебрегая магнитным потоком собственного поля тока в контуре, получим из (7.3.1) $\varepsilon(t) = -Blv(t)$, где $v(t) = dx/dt$ — проекция скорости проводника на ось x. Если $v(t) > 0$, то $\varepsilon(t) < 0$. С точки зрения неподвижного наблюдателя ЭДС возникает вследствие действия силы Лоренца на «положительно» заряженные носители тока, смещающиеся со скоростью v в направлении оси x. С точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с

проводником, ЭДС индукции обусловлена электрическим полем напряженностью $E_y = -Bv(t)$.

Учитывая, что на проводник с током будет действовать сила Ампера $\vec{F}_A = (IBl, 0, 0)$, запишем уравнения, следующие из второго закона Ньютона и закона Ома $IR = \varepsilon$:

$$m\frac{dv}{dt} = IBl, \quad IR = -Blv. \qquad (1а), (1б)$$

Мы видим, что при $v > 0$, $I < 0$; сила Ампера $F_A = -B^2l^2v/R$ тормозит перемычку. Отметим, сила Ампера может быть представлена в виде $F_A = I\,d\Phi/dx$.

Зададим начальные условия в виде $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$, $I(0) = 0$. Подставляя I из (1б), получим уравнение

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2v}{R} \quad \text{или} \quad \tau\frac{dv}{dt} = -v, \qquad (2)$$

где $\tau = mR/B^2l^2$. Рассматривая $v(t)$ как сложную функцию $v(x(t))$, имеем

$$\tau\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = -v \quad \text{или} \quad \tau\frac{dv}{dx} = -1. \qquad (3)$$

Следовательно, $v(x) = v_0 - x/\tau$. Полагая $v(x_1) = 0$, получим координату точки остановки проводника $x_1 = v_0\tau$.

Запишем теперь закон сохранения полной энергии рассматриваемой системы. Умножим (1а), (1б) соответственно на v, I и сложим полученные соотношения. В результате имеем

$$mv\frac{dv}{dt} = -I^2R,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -I^2R \quad \text{или} \quad \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -\delta Q \qquad (4)$$

где $\delta Q = I^2R\Delta t$. Очевидно количество выделившейся в проводнике теплоты $Q = mv^2/2$.

Пример 7.3.4. Приложим теперь к проводнику PK горизонтально направленную силу $\vec{F} = (F, 0, 0)$. Уравнения, описывающие поведение системы приобретают вид

$$m\frac{dv}{dt} = IBl + F, \quad IR = -Blv. \qquad (1), (2)$$

Умножим (1) на v, (2) на I и сложим полученные равенства. В результате получим закон изменения кинетической энергии

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -I^2R + Fv \quad \text{или} \quad \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -\delta Q + \delta A \qquad (3)$$

$$\delta A = Fv\Delta t = F\Delta x, \quad \delta Q = I^2R\Delta t.$$

Зададим начальные условия $x(0) = 0$, $v(0) = 0$, $I(0) = 0$.

А. *Генератор постоянного напряжения.* Пусть F — постоянная величина. Подставляя I из (2) в (1) имеем уравнение

$$m\frac{dv}{dt} = -(Bl)^2\frac{v}{R} + F.$$

Вначале скорость проводника будет возрастать. Однако, вследствие действия силы Ампера, тормозящей проводник, его скорость при $t >> \tau$ стремится к постоянному значению $v(t) = u$, $u = FR/B^2l^2$. Сила тока станет равной $I_0 = -\frac{Blu}{R} = -\frac{F}{Bl}$. Внешняя сила развивает мощность $P = Fu$, а резистор потребляет мощность $P_т = I_0^2R$. Согласно (3) получим $P = P_т$.

Б. *Генератор переменного напряжения.* Пусть в результате действия переменной внешней силы $x(t) = x_0 + A\cos\omega t$. Тогда ЭДС индукции

$$\varepsilon = -Bl\frac{dx}{dt} = \varepsilon_0\sin\omega t,$$

где $\varepsilon_0 = BlA\omega$ — амплитуда переменного напряжения.

Пример 7.3.5. Линейный электромотор. Пусть к проводнику PK приложена сила $\vec{F} = (-F, 0, 0)$. Как заставить проводник двигаться вправо? С этой целью присоединим вместо резистора батарею с ЭДС равной ε_0 и внутренним сопротивлением R : положительный электрод — к точке O, отрицательный — к точке C (рис. 7.3.3). Тогда получим систему уравнений

$$m\frac{dv}{dt} = IBl - F, \tag{1а}$$

$$IR = -Blv + \varepsilon_0. \tag{1б}$$

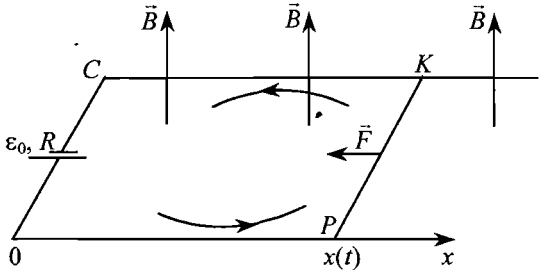


рис. 7.3.3

Умножим (1а) на v, (1б) на I и сложим полученные равенства. В результате получим закон изменения кинетической энергии

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -Fv + I\varepsilon_0 - I^2R. \tag{2}$$

Зададим начальные условия $x(0) = 0$, $v(0) = 0$, $I(0) = 0$. Подставляя I из (1б) в (1а), имеем

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2v}{R} + \frac{Bl\varepsilon_0}{R} - F\,.$$

А. Пусть $Bl\varepsilon_0/R > F$, т.е. сила Ампера, создаваемая постоянным током ε_0/R, больше внешней силы. Тогда проводник движется вправо. В установившемся режиме в схеме течет постоянный ток $I_0 = F/Bl$, а проводник движется с постоянной скоростью $v_0 = (\varepsilon_0 - FR/Bl)/Bl$. Внешняя сила развивает мощность $P = \vec{F}\vec{v}_0 = -Fv_0 < 0$. Механическая мощность мотора $P_{мех} = Fv_0 > 0$. Из уравнений (1б) и (2) находим $P_{мех} = -\varepsilon I_0$, где $\varepsilon = -Blv_0$ — ЭДС индукции. Мощность, потребляемая мотором $P_{эл} = \varepsilon_0 I_0 = \varepsilon_0 F/Bl$. Коэффициент полезного действия мотора $\eta = P_{мех}/P_{эл} = 1 - FR/\varepsilon_0 Bl$. Очевидно, закон сохранения энергии можно представить в виде $P_{эл} = I^2R + P_{мех}$.

Б. Если $\frac{Bl\varepsilon_0}{R} < F$, то проводник движется влево. Система работает в режиме электрогенератора, заряжающего батарею.

Пример 7.3.6. Космическая электростанция. Рассмотрим два спутника, движущихся по круговым орбитам радиусами $r_1 = r - \frac{l}{2}$, $r_2 = r + \frac{l}{2}$, соединенных изолированным проводящим тросом длины $l << r$, $r = a + h$, где a — радиус Земли, h — расстояние от поверхности Земли до центра масс связки (рис.7.3.4).

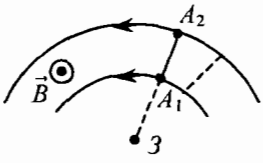


рис. 7.3.4

Плоскость орбиты лежит в плоскости магнитного экватора. Магнитное поле почти однородно в пределах кольца, по которому движется трос: $B(r) = B_0(a/r)^3$, где $B_0 = 4{,}2 \cdot 10^{-5}$ Тл. Приращение магнитного потока, связанное с движением троса на рис. 7.3.4, равно $\Delta\Phi \approx Blv\Delta t$, где $v = v_I\sqrt{a/r}$, $v_I = \sqrt{ag}$ — первая космическая скорость. Следовательно, в тросе наводится ЭДС, равная разности потенциалов точек A_1 и A_2:

$$\varepsilon = vBl = B_0\left(\frac{a}{r}\right)^{7/2} lv_1.$$

Полагая $l = 20$ км, $r = a + h$, $h = 400$ км, получим $\varepsilon \approx 6\,400$ В.

При контакте концов троса с ионосферной плазмой возникает замкнутая цепь электрического тока, текущего по тросу и вдоль силовых линий магнитного поля, сближающихся у полюсов в области E-слоя плазмы с высокой проводимостью. В результате со стороны магнитного поля на трос действует сила Ампера $F_A = (Bl)^2v/R$, тормозящая связку (R — эффективное сопротивление цепи). Уменьшение высоты в результате работы генератора можно компенси-

вать кратковременным включением реактивного двигателя. Если в цепь включить генератор напряжения, то, наоборот, связка начнет набирать высоту.

7.3.2. Токи Фуко. Мы видели, что при движении тонкого закнутого проводника в магнитном поле возникают тормозящая сила или тормозящий момент силы. Аналогичный эффект проявляется и при движении сплошных массивных проводников в магнитном поле.

Рассмотрим, например, маятник в виде стержня, к концу которого прикрепим медную пластинку. Пластинка качается между полюсами электромагнита. После включении магнита амплитуда колебаний маятника уменьшается и он останавливается. В пластинке возникает вихревое электрическое поле и в соответствии с законом Ома индукционный ток, взаимодействие с которым приводит к силе, тормозящей пластинку. Поскольку, вследствие потерь в виде джоулева тепла, плотность тока уменьшается, то движение пластинки замедляется, и она останавливается.

Нагревание металлического проводника индукционным током обнаружил впервые в 1855 г. французский физик Ж. Фуко (1819—1868). Эти токи получили название вихревых или токов Фуко. Если в пластинке прорезать щели, то вихревые токи возникнут только в пределах узких полосок между щелями. В этом случае эффект торможения пластинки существенно ослабляется.

7.4. Электрический двигатель и генератор

Научные открытия неразрывно связаны с приложением новых идей к решению практических задач. Закон электромагнитной индукции, открытый Фарадеем в 1830 г., сыграл огромную роль в развитии современной цивилизации. Стало возможным преобразование механической энергии в электромагнитную и электромагнитной — в механическую. Около 40 лет ушло на создание промышленного генератора и еще 20 лет — на изобретение работоспособного электродвигателя. Здесь мы рассмотрим принципы устройства простейших моделей генераторов и двигателей, которые весьма далеки от современных образцов.

7.4.1. Генератор переменного тока. Прямоугольная рамка из проволоки вращается в однородном магнитном поле. Концевые образующие рамки a и b соединены с двумя медными изолированными кольцами, центры которых находятся на оси рамки. Прижатые к кольцам пружины обеспечивают скользящий контакт с внешней цепью, содержащей нагрузку — резистор сопротивлением R.

Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости рамки. Поток магнитной индукции через рамку $\Phi(t) = BS\cos\omega t$, где ωt — значение угла между векторами $\vec{n}$ и $\vec{B}$ в момент времени t. ЭДС индукции $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin\omega t$ — периодическая функция с периодом $T = 2\pi/\omega$; $\varepsilon_0 = BS\omega$. Следует отметить, что $\varepsilon(t)$ достигает максимума при $t = T/4, 5T/4, \ldots$, когда величина скорости изменения потока максимальна. Напряжение на входе внешней цепи $\varphi_a - \varphi_b = \varepsilon(t)$ создает в цепи *однофазный* переменный ток $I(t) = (\varepsilon_0/R)\sin\omega t$.

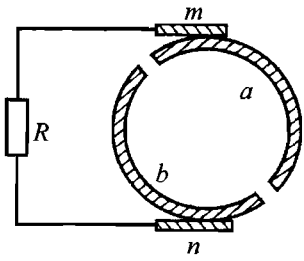


рис. 7.4.1

7.4.2. Генератор постоянного напряжения. Заменим медные кольца переключающим устройством — *коммутатором* (рис. 7.4.1). Он представляет собой два полукольца a и b, соединенных с концевыми образующими рамки a, b и два контакта m и n, связывающие генератор с внешней цепью. Напряжение на входе внешней цепи $V(t) = \varphi_m - \varphi_n$. При одном полуобороте к контактам m и n прикасаются полукольца a и b: потенциалы $\varphi_m = \varphi_a$, $\varphi_n = \varphi_b$. При следующем полуобороте к контактам m и n прикасаются полукольца b и a: потенциалы $\varphi_m = \varphi_b$, $\varphi_n = \varphi_a$. Нетрудно установить полукольца так, чтобы выполнялось условие $\varphi_m > \varphi_n$. На рис. 7.4.2 показан график функции $V(t)$. В интервале $[0, T/2]$ разность потенциалов $V(t) = \varphi_a - \varphi_b = \varepsilon_0 \sin\omega t$, в интервале $[T/2, T]$ разность потенциалов $V(t) = \varphi_b - \varphi_a = -\varepsilon_0 \sin\omega t$ и т. д. Мы получим пульсирующее напряжение и ток одного и того же направления.

Напряжение $V(t)$ можно сгладить, если вместо рамки использовать цилиндрический железный сердечник с пазами, в которые закладывается обмотка — множество «рамок», повернутых относительно друг друга. Сердечник и обмотка образуют *ротор*, называемый часто *якорем*. В неподвижной части генератора, называемой *статором*, расположены обмотки электромагнита. Для увеличения магнитного потока зазор между статором и ротором доводят до минимальных размеров.

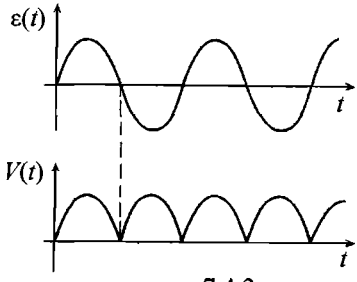


рис. 7.4.2

В 1866 г. немец В. Сименс открыл принцип самовозбуждения и создал генератор, в котором постоянные магниты были заменены электромагнитами, для питания которых использовался второй якорь. Однако революцию в электроэнергетике произвел генератор, изобретенный бельгийцем З. Граммом в 1869 г. В машине Грамма весь ток генератора проходит через электромагниты.

7.4.3. Электрический двигатель постоянного тока. Рассмотрим электромотор с независимым возбуждением, в котором якорь — ротор вращается в постоянном магнитном поле. Цепь обмотки через коллектор присоединена к генератору постоянного напряжения U. Найдем коэффициент полезного действия мотора η при вращении якоря с постоянной угловой скоростью ω.

Закон Ома для цепи якоря имеет вид $IR = U + \varepsilon$, где R-сопротивление обмотки якоря, $\varepsilon = -d\Phi/dt$ — ЭДС индукции, $\Phi(\theta)$ — магнитный поток, зависящий от угла поворота якоря относительно вектора индукции маг-

нитного поля. При вращении с постоянной угловой скоростью $\theta = \omega t$. Поскольку

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{d\theta}\frac{d\theta}{dt},$$

то $\varepsilon = -k\omega$, где $k = d\Phi/d\theta$ — постоянный коэффициент, зависящий от конструкции двигателя. Следовательно, из закона Ома получим уравнение

$$IR = U - k\omega. \qquad (7.4.1)$$

На груз действуют сила натяжения троса $\vec{F}$ и сила тяжести груза. Направим ось z по оси вала мотора. На вал радиуса a наматывается трос, прикрепленный к грузу, который поднимается со скоростью $v = \omega a$. Сила натяжения троса, действующая на вал, создает момент $\vec{M} = (0, 0, M_z)$, $M_z = -M < 0$, где $M = Fa$. При протекании тока возникает момент сил Ампера $M_A > 0$, приводящий к вращению якоря. Очевидно, что при движении с постоянной скоростью сумма моментов сил равна нулю: $M_A - M = 0$.

Покажем, что $M_A = kI$. Механическая мощность, развиваемая мотором $P_м = Fv = F\omega a = M\omega$. Мощность, потребляемая от электросети $P_{эл} = IU$, равна сумме мощности, рассеиваемой в виде теплоты, и механической мощности мотора: $IU = I^2R + P_м$. Учитывая (7.4.1), находим $P_м = kI\omega$. Поскольку $P_м = \omega M = \omega M_A$ то $M_A = kI$. Следовательно, второе уравнение имеет вид

$$kI - M = 0. \qquad (7.4.2)$$

Из (7.4.1), (7.4.2) находим, что угловая скорость $\omega = U/k - RM/k^2$ линейно зависит от момента внешней силы. Мощность, потребляемая мотором, $P_{эл} = IU = MU/k$. Коэффициент полезного действия двигателя

$$\eta = P_м/P_{эл} = k\omega/U = 1 - IR/U = 1 - MR/kU.$$

В режиме холостого хода $M = 0$, $I = 0$, $\varepsilon = -U$. Угловая скорость достигает максимального значения $\omega_m = U/k$. При увеличении нагрузки сила тока растет, угловая скорость уменьшается. При значении $M_{max} = kU/R$ якорь заторможен — угловая скорость $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$, сила тока «короткого замыкания» достигает максимального значения $I_m = U/R$. Для устранения аналогичной ситуации, возникающей при запуске двигателя, используют реостат, включенный в цепь якоря. Очевидно, КПД мотора можно представить в виде

$$\eta = 1 - M/M_{max}.$$

Один из первых электродвигателей, работающий от батареи, создал в 1834 г. российский электротехник Б.С. Якоби. В 1838 г. бот с электромотором развил скорость 4,5 км/ч.

Задача 7.4.1 Найдите максимальную мощность, развиваемую мотором.

Решение. Поскольку $P_м = IU - I^2R$, то из условия $dP_м/dI = 0$ находим максимальное значение мощности $U^2/4R$.

7.4.2. Генератор постоянного тока. Электромотор в режиме генератора. Пусть $U < RM_0/k$ или $M > M_{max}$. Тогда $\omega < 0$; система представляет собой генератор напряжения — коллекторный двигатель обратим. Присоединим теперь обмотку якоря к нагрузке. Из закона Ома имеем уравнение $I(R + R_н) = -k\omega > 0$, где $R_н$ — сопротивление нагрузки, $I = M/k$. Напряжение на выходе генератора $V = -k\omega - IR_н$. Мощность, развиваемая внешней силой $P_F = -\omega M > 0$, равна мощности, потребляемой нагрузкой и обмоткой, $P_т = I^2(R + R_н)$. КПД генератора $\eta = I^2R_н/P_F = R_н/(R + R_н)$.

Пример 7.4.2. Магнитогидродинамический генератор. В МГД — генераторе рабочим телом является нагретый ионизированный газ, кинетическая энергия которого преобразуется в электрическую.

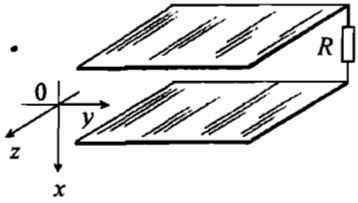


рис. 7.4.3

Расположим электроды — две пластины — в плоскостях $x_1 = -h/2$ и $x_2 = h/2$, замкнув их на внешний резистор сопротивлением R (рис. 7.4.3). Газ движется со скоростью $u = (0, u, 0)$ в магнитном поле индукцией $B = (0, 0, B)$; $u = 2000 - 2500$ м/с, $B \sim 3$Тл.

Согласно (7.3.3) ЭДС индукции $\varepsilon = uBh$. Между пластинами возникает электрическое поле напряженностью $E = (uB, 0, 0)$, создающее электрический ток. Сила тока в замкнутой цепи пластина — газ — пластина — резистор $I = \varepsilon/(R + R_c)$, где $R_c = h/\sigma S$, σ — удельная электропроводность газа, S — площадь пластины. Уже получен ток плотностью 4000 А/м^2. Мощность, потребляемая нагрузкой $P = I^2R \sim (uB)^2$.

На практике все оказалось не так просто. Для перехода к промышленному использованию МГД- энергетики еще предстоит найти решение множества технических проблем.

7.5. Индуктивность. Самоиндукция

7.5.1. Индуктивность. Рассмотрим провод, присоединенный к батарее. Электрический ток порождает магнитное поле и создает магнитный поток Φ через поверхность, которая опирается на контур проводника. Очевидно, поток зависит от силы тока, геометрической формы контура и магнитных свойств среды. Если проводник находится в вакууме, то $\Phi = IL$, где L — *коэффициент самоиндукции* или просто *индуктивность*. В СИ единица индуктивности называется *генри* (Гн): 1 Гн = 1В/1А. Очевидно, магнитная постоянная может быть записана в виде $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

7.5.2. Индуктивность соленоида. Зададим параметры катушки: l — длина, S — площадь поперечного сечения, N — число витков (рис. 3.3.1). Найдем поток индукции через поверхность, образованную винтовым движением отрезка прямой длиной равной радиусу катушки a: отрезок вращается вокруг оси и за один оборот перемещается на расстояние равное тол-

щине провода l/N. Такая поверхность называется *геликоидом* (от греч. *helix* — витой). Поскольку $l/N << a$, то площадь поверхности $\approx NS$. Учитывая значение магнитной индукции (3.3.2), получим

$$\Phi = B_z NS = \frac{1}{l}\mu_0 N^2 SI .$$

Согласно определению собственного потока индукции $\Phi = LI$ индуктивность соленоида

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}. \qquad (7.5.1)$$

7.5.3. Самоиндукция. Закон индукции (7.3.3) справедлив при любом источнике магнитного потока. При изменении тока магнитное поле, создаваемое этим током, также является переменным. Поэтому поток магнитной индукции $\Phi(t)$ через поверхность, ограниченную контуром самого тока, меняется со временем и, следовательно, в нем возникает ЭДС индукции. Это явление, открытое в 1832 г. американским физиком Дж. Генри (1797—1878), называется *самоиндукцией*.

Электродвижущая сила самоиндукции, действующая в контуре

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dLI}{dt}. \qquad (7.5.2)$$

В случае контура неизменной формы $L(x, y, z) = L_0$. ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_L = -L_0 \frac{dI}{dt}. \qquad (7.5.3)$$

Вернемся к рис. 7.3.2. Полный магнитный поток Φ через контур *OCKP* складывается из потока $\Phi_e = Blx(t)$ внешнего магнитного поля и собственного магнитного потока $\Phi_i = L(x)I$, создаваемого индукционным током I. Здесь $L(x)$ — индуктивность контура *OCKP*, I — сила тока в контуре. Ранее мы неявно пренебрегали вкладом собственного магнитного потока. Поэтому в общем случае закон электромагнитной индукции (7.3.1) имеет вид

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $\Phi = \Phi_e + \Phi_i$. Согласно закону Ома $IR = \varepsilon$, или

$$IR = -\frac{d\Phi_e}{dt} - \frac{d\Phi_i}{dt}.$$

Пусть отрезок *PK* движется вправо. В этом случае $\Delta\Phi_e > 0$. Поскольку для обычных проводников $|\Delta\Phi_i| << |\Delta\Phi_e|$, то индукционный ток течет в отрицательном направлении. Следовательно, $\Delta\Phi_i < 0$.

В сверхпроводящем кольце $R = 0$, $0 = d(\Phi_e + LI)/dt$, т. е. $\Delta\Phi_i = -\Delta\Phi_e$. При любом изменении внешнего поля и тока полный магнитный поток через кольцо остается постоянным: $\Phi_e + LI = \Phi_0$. Если кольцо перевели в сверхпроводящее состояние при значении полного потока $\Phi = \Phi_0$, а затем это поле выключили, то в кольце индуцируется постоянный ток $I = \Phi_0/L$.

7.5.4. Правило Ленца. В 1833 г. российский физик Э.Х. Ленц установил правило, определяющее направление индукционного тока. Ленц обратил внимание на то, что приращение потоков $\Delta\Phi_i$ и $\Delta\Phi_e$ всегда противоположны по знаку. Обобщая подобные результаты, можно сформулировать закон Ленца: *индукционный ток имеет такое направление, что приращение, созданного им магнитного потока, через площадь, ограниченную контуром, и приращение потока магнитной индукции внешнего поля противоположны по знаку.*

Закон Ленца отражает важнейшее свойство любых физических систем: при внешнем воздействии в системе возникают процессы, препятствующие изменениям, вызванными внешним воздействием (принцип Ле-Шателье).

Заметим, что в учебной литературе обычно приводится некорректная формулировка закона Ленца: «... индукционный ток имеет такое направление, что созданный им магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром, стремится препятствовать тому изменению[1] потока, которое порождает данный ток»[2]. Отсюда следует, что магнитный поток $\Phi_i(t)$, создаваемый током, стремится препятствовать *изменению*, т. е. приращению магнитного потока $\Phi_e(t)$. Очевидно, что сопоставление функции $\Phi_i(t)$ в момент времени t и приращения $\Delta\Phi_e$ функции $\Phi_e(t)$ за произвольный (?) интервал времени $[t, t + \Delta t]$ лишено смысла.

Другое заблуждение связано с попыткой придать физический смысл знаку минус в законе электромагнитной индукции (7.3.1). При выводе (7.3.3) из уравнений Максвелла появление этого множителя обусловлено математическим соглашением, связывающем положительное направление на контуре с выбором вектора внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности: при обходе контура в положительном направлении вектор $\vec{n}$ остается с левой стороны. Тогда из закона Ома следует, что при значениях $I(t) > 0$ ток течет в положительном направлении, при $I(t) < 0$ — в отрицательном. Однако те же авторы[2] утверждают, что «направление индукционного тока определяется законом сохранения энергии» (?). Отметим, что в решениях задач п. 5.3 направление индукционного тока определяется автоматически вследствие однозначного соответствия между положительным направлением на контуре и вектором

---

[1] К сожалению в учебной литературе по физике вместо термина «приращение функции» используют понятие изменение, как будто речь идет о погоде или настроении.

[2] Мякишев Г. Я., Синяков А. З., Слободсков Б. А. «Физика», Издательский дом «Дрофа», 1998, С. 406 и др.

внешней нормали к поверхности, который **необходимо** ввести для вычисления потока магнитной индукции.

7.5.5. Энергия магнитного поля. На рис. 7.5.1 изображена схема, содержащая резистор и катушку индуктивности, называемая RL-цепочкой. Схема подключена к генератору постоянного напряжения с ЭДС равной ε. Стрелкой указано положительное направление тока. В момент времени $t = 0$ ключ замыкают.

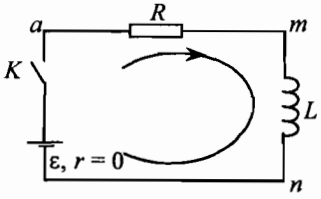


рис. 7.5.1

Для замкнутой цепи закон Ома имеет вид $IR = \varepsilon + \varepsilon_L$, где $IR = \varphi_a - \varphi_m$. Если перенести ЭДС самоиндукции в левую часть, то получим уравнение

$$IR + L\frac{dI}{dt} = \varepsilon\,. \qquad (7.5.4)$$

Величину $V_L = LdI/dt$ называют напряжением на катушке, равной по определению разности потенциалов точек m и n: $\varphi_m - \varphi_n = V_L$.

Исследуем теперь энергетический баланс в процессе увеличения силы тока от $I(0) = 0$ до значения $I_0 = \varepsilon/R$. Умножим уравнение (7.5.4) на I

$$I\varepsilon = I^2R + LI\frac{dI}{dt}$$

и представим в виде

$$I\varepsilon = I^2R + \frac{dU_m}{dt},$$

$$U_m = \frac{LI^2}{2}. \qquad (7.5.5)$$

Поскольку заряд, прошедший по цепи за время $(t, t + \Delta t)$, равен $\Delta q = I\Delta t$, то полученное соотношение выражает закон сохранения энергии

$$\varepsilon\Delta q = I^2R\Delta t + \Delta U_m.$$

Действительно, $\varepsilon\Delta q$ — работа, совершенная генератором напряжения, $I^2R\Delta t$ — энергия, рассеянная в резисторе. А какой смысл имеет функция $U_m(t) = LI^2/2$?

Прежде всего заметим, что U_m имеет размерность энергии, а магнитное поле, сосредоточенное в катушке, — одна из форм материи, обладающая энергией. Поэтому величина ΔU_m должна иметь смысл приращения энергии магнитного поля, а $U_m(t)$ — *энергии магнитного поля*, создаваемого током в момент времени t. После установления постоянного тока силой $I_0 = \varepsilon/R$ функция $U_m(t)$ достигает максимального значения $LI_0^2/2$.

Выразим U_m в терминах магнитной индукции B магнитного поля соленоида. Исключая из (7.5.5) силу тока с помощью (3.3.2), и, подставляя L из (7.5.3) получим

$$U_m = \frac{B^2}{2\mu_0} V, \tag{7.5.6}$$

где $V = Sl$ — объем соленоида. Очевидно, величина $u_m = B^2/2\mu_0$ является объемной плотностью энергии магнитного поля. Размерность $[u_m]$ = Дж/м^3. Для полей $B \approx 1$ Тл величина $u_m = 0{,}4$ МПа.

Задача 7.5.1. Индуктивность тороида. Тороид представляет собой кольцевой соленоид — «пустой бублик», на который навиты N витков изолированной проволоки. Радиус средней окружности тороида a значительно больше радиуса поперечного сечения b. Найдите коэффициент самоиндукции кольцевого соленоида.

Решение. Пусть по проводу течет ток силой I. Поскольку магнитное поле слабонеоднородно внутри кольцевого соленоида, то используя закон Максвелла — Ампера, получим уравнение $2\pi aB \approx \mu_0 NI$, где B — значение индукции магнитного поля на окружности радиусом a. Энергия магнитного поля $U_m = B^2V/2\mu_0$, где $V \approx 2\pi aS$, $S = \pi b^2$ — площадь сечения соленоида. Следовательно, $U_m = \mu_0 N^2 b^2 I^2/4a$. Согласно определению $U_m = LI^2/2$ находим $L = \mu_0 N^2 b^2/2a$. Строгое вычисление приводит к результату $L = \mu_0 N^2[a - (a^2 - b^2)^{1/2}]$.

7.6. Переходной процесс в *RL*-цепи

Вернемся к схеме рис. 7.5.1 и рассмотрим процессы, происходящие при включении и отключении ЭДС.

А. Включение постоянного напряжения. Пусть $\varepsilon(t) = 0$, $t < 0$; $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$, $t \geq 0$. Запишем уравнение (7.5.4) в виде

$$\tau \frac{dI}{dt} + I = \frac{\varepsilon_0}{R}, \quad t \geq 0, \tag{7.6.1}$$

где $\tau = L/R$ — величина, имеющая размерность времени. Например, при $L = 1$ Гн, $R = 10$ Ом значение $\tau = 0{,}1$ с.

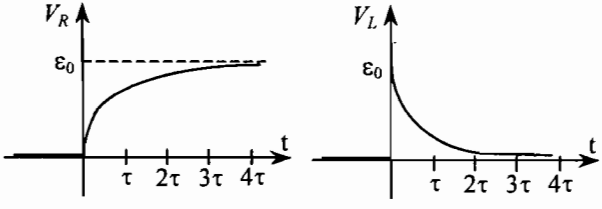


рис. 7.6.1

После включения ЭДС сила тока возрастает от значения $I(0) = 0$ до постоянной величины $I_0 = \varepsilon_0/R$. Решением уравнения (7.5.1) является функция

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R}[1 - \exp(-t/\tau)].$$

Точно также изменяется напряжение на резисторе $V_R(t) = I(t)R$. Напряжение на катушке

$$V_L = L\frac{dI}{dt},\ V_L = \varepsilon_0 \exp(-t/\tau)$$

скачком возрастает до значения ε_0 и стремится к нулю при $t >> \tau$. В таблице приведены значения отношений $I(t)/I_0$ и V_L/ε_0 при значениях t кратных τ.

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
I/I_0	0	0,63	0,87	0,951	0,982	0,994
V_L/ε_0	1	0,37	0,13	0,049	0,018	0,006

На рис. 7.6.1 изображены графики функций $V_R(t) = IR$ и $V_L(t)$. Наличие катушки индуктивности замедляет нарастание силы тока. В произвольный момент времени $V_R(t) + V_L(t) = \varepsilon_0$.

Б. Отключение постоянного напряжения. Пусть $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ при $t < 0$, $\varepsilon(t) = 0$, при $t \geq 0$. Следовательно, сила тока удовлетворяет уравнению

$$\tau\frac{dI}{dt} + I = 0, \quad t \geq 0$$

с начальным условием $I(0) = \varepsilon_0/R$. В этом случае функция $I(t)$ имеет вид $I(t) = (\varepsilon_0/R)\exp(-t/\tau)$. Ток течет в положительном направлении, убывая при $t >> \tau$ до значения $I = 0$. Напряжение на катушке

$$V_L(t) = -\varepsilon_0 \exp(-t/\tau).$$

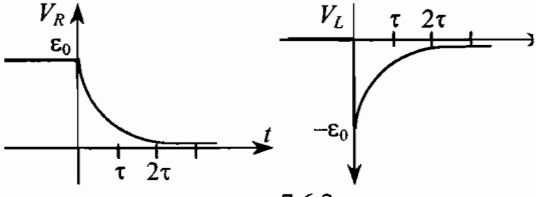


рис. 7.6.2

В момент времени $t = 0$ напряжение на катушке скачком изменяется на величину $\Delta V_L = -\varepsilon_0$. На рис. 7.6.2 изображены графики функций

$$V_R(t) = IR \text{ и } V_L(t) = L\frac{dI}{dt}.$$

Задача 7.6.1. В схеме рис. 7.5.1 ЭДС представляет собой функцию, описывающую прямоугольный импульс: $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ на отрезке времени $[0, T]$; $\varepsilon(t) = 0$ при $t < 0$, $t > T$. Изобразите графики функций $V_R(t)$ и $V_L(t)$ при $\tau << T$, $\tau = L/R$.

Задача 7.6.2. В схеме рис. 7.6.3 ЭДС батареи $\varepsilon = 10$ В, внутреннее сопротивление $r = 2{,}5$ Ом. Индуктивность катушки $L = 0{,}1$ Гн, сопротивление резистора $R = 100$ Ом.

А. Вначале ключ K разомкнут. Найдите величину заряда, прошедшего через резистор после замыкания ключа.

Решение. Условие непрерывности токов приводит к уравнению

$$I = I_1 + I_2. \qquad (1)$$

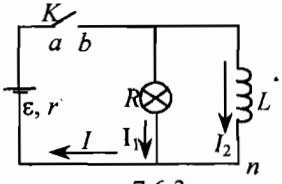


рис. 7.6.3

Далее для контура, содержащего батарею и катушку, имеем уравнение

$$Ir + L\frac{dI_2}{dt} = \varepsilon, \qquad (2)$$

а для контура, содержащего резистор и катушку

$$I_1R - L\frac{dI_2}{dt} = 0. \qquad (3)$$

Начальные значения сил токов $I_1(0) = \varepsilon/(r + R)$, $I_2(0) = 0$. Подставим I из (1) и I_1 из (3) в уравнение (2). В результате получим уравнение

$$\tau\frac{dI_2}{dt} + I_2 = \frac{\varepsilon_0}{r}, \quad \tau = \frac{L}{R_0}, \quad \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r},$$

типа уравнения (7.6.1). Следовательно, при $t >> \tau$ получим $I_2 = \varepsilon/r$, $I_1 = 0$.

Уравнение (3) можно представить в виде $\Delta q_1 R = L\Delta I_2$. Поскольку $I_2(0) = 0$, $I_2 = \varepsilon/r$ при $t >> \tau$, то через ключ протечет заряд $q_1 = \dfrac{L\varepsilon}{rR}$. В момент замыкания ключа приращение разности потенциалов на катушке

$$V_L(0) = \frac{\varepsilon R}{R + r}$$

и стремится к нулю при $t >> \tau$.

Б. Вначале ключ K замкнут.

1. Найдем разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_n$ точек b и n в момент размыкания ключа.

Поскольку $I(t) = 0$ при $t \geq 0$, то ток течет в замкнутом контуре, содержащем резистор и катушку. Имеем систему

$$I_1 + I_2 = 0,$$

$$I_1R - L\frac{dI_2}{dt} = 0,$$

из которой получим уравнение

$$L\frac{dI_2}{dt} + RI_2 = 0$$

с начальным условием $I_2(0) = \varepsilon/r$. В момент времени $t = 0$ напряжение на катушке $V_L(t) = LdI_2/dt$ скачком изменяется до значения $V_L(0) = -I_2(0)R$. Следовательно, искомая разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_n = -\dfrac{\varepsilon R}{r}$, $V_L(0) = -400$ В.

2. Покажем теперь, что в момент размыкания ключа разность потенциалов точек a и b равна $\varphi_a - \varphi_b = 410$ В. Действительно, если ключ разомкнут, то

$$\varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_n = \varepsilon.$$

Следовательно, при $t = 0$ имеем: $\varphi_a - \varphi_b = \varepsilon + \varepsilon\dfrac{R}{r}$.

При большем значении ЭДС может произойти пробой. Для того, чтобы избежать этого к точкам a и b присоединяют диод. Он открывается при возбуждении ЭДС самоиндукции и шунтирует катушку.

3. После размыкания ключа сила тока в контуре уменьшается и при $t >> \tau$ обращается в нуль. Количество теплоты, выделившейся в резисторе $Q = \dfrac{L\varepsilon^2}{2r^2}$, $Q = 0{,}8$ Дж.

7.7. Взаимная индуктивность

Рассмотрим два контура. Индуктивность изолированного первого контура равна L_1, второго — L_2. Силы токов в контурах равны соответственно $I_1(t)$ и $I_2(t)$. Переменный ток в одном из контуров порождает ЭДС индукции в другом контуре. Это явление получило название *взаимоиндукции*. Поток магнитной индукции, создаваемый токами $I_1(t)$ и $I_2(t)$ во втором контуре можно записать в виде $\Phi_2 = L_2I_2 + \Phi_{21}$, где $\Phi_{21} = L_{21}I_1$ — магнитный поток, создаваемый магнитным полем первого контура во втором контуре, L_{21} — коэффициент взаимной индукции. Поток магнитной индукции, создаваемый токами $I_1(t)$ и $I_2(t)$ в первом контуре $\Phi_1 = L_1I_1 + \Phi_{12}$, $\Phi_{12} = L_{12}I_2$, $L_{12} = L_{21}$. Величины L_{12} и L_{21} называются *коэффициентами взаимоиндукции*. В случае идеальной связи контуров $L_{12} = \sqrt{L_1L_2}$. ЭДС индукции в первом контуре

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}, \quad \varepsilon_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} - L_{12}\frac{dI_2}{dt}. \qquad (7.7.1)$$

Следовательно, переменный ток во втором контуре $I_2(t)$ индуцирует в первом контуре ЭДС равную $\varepsilon_{12} = -L_{12}dI_2/dt$. ЭДС индукции во втором контуре

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}, \quad \varepsilon_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} - L_{21}\frac{dI_1}{dt}. \qquad (7.7.2)$$

Энергия магнитного поля системы

$$U_m = \frac{1}{2}(L_1I_1^2 + 2L_{12}I_1I_2 + L_2I_2^2). \qquad (7.7.3)$$

Пример 7.7.1. Коэффициент взаимной индуктивности двух витков. Рассмотрим два компланарных соосных витка радиусами a_1 и a_2, центры которых находятся на расстоянии $r >> a_1$, a_2. Ориентация витков задается единичными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Поток индукции сквозь малое кольцо радиусом $a_2 << a_1$ равен $\Phi_{21} = \vec{B}_1\vec{n}_2 S_2$. Пусть $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$. Подставляя значение индукции $\vec{B}_1$ из (3.2.4), получим

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{S_1 S_2 I_1}{r^3}.$$

Согласно определению $\Phi_{21} = L_{21}I_1$ коэффициент взаимной индукции

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{S_1 S_2}{r^3} = L_{12}.$$

В случае $a_1 a_2 \approx r^2$ мы должны получить симметричное выражение

$$L_{21} = L_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{S_1 S_2}{(a_1^2 + a_2^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Найдем теперь коэффициент взаимной индукции в случае произвольного расположения витков при условии $a_1 a_2 << r^2$. Используя значение $\vec{B}$ из (3.2.5), получим поток индукции через второй виток

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} S_1 S_2 I_1 \left(\frac{3\ (\vec{n}_1\vec{r})(\vec{n}_2\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{r^3} \right).$$

Следовательно, при $r >> a_1$, a_2 имеем

$$L_{21} = L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} S_1 S_2 \left(\frac{3\ (\vec{n}_1\vec{r})(\vec{n}_2\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{r^3} \right).$$

Глава 8. Электромагнитные колебания

8.1. Свободные электромагнитные колебания

8.1.1. Колебательный контур. Колебательный контур представляет собой замкнутую цепь, состоящую из катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R (рис. 8.1.1).

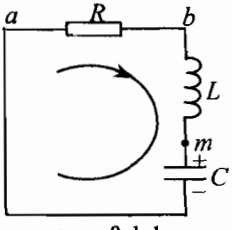


рис. 8.1.1

Выберем положительное направление на контуре, указанное стрелкой на рис. 8.1.1 и введем функцию $q(t)$. Ее значение в момент времени t равно заряду, прошедшему в положительном направлении через произвольное сечение проводника за время t. Сила тока определяется соотношением $I(t) = \dfrac{dq}{dt}$.

Обычно в электротехнике используют два приближения. Во-первых, предполагают, что заряды, распределенные по поверхности проводников, малы по сравнению с зарядом на обкладках конденсатора. Поэтому значение функции $q(t)$ совпадает с зарядом верхней обкладки конденсатора в момент времени t. Если $I > 0$, то положительный заряд протекает от нижней пластины конденсатора к верхней. Во-вторых, предполагают, что энергия магнитного поля, создаваемого током в подводящих проводах, мала по сравнению с энергией магнитного поля в катушке индуктивности. Таким образом, предполагается, что электрическое поле сосредоточено в конденсаторе, а магнитное поле — в катушке индуктивности. *Энергия электромагнитного поля* в соответствии с (1.7.1) и (7.5.5) равна

$$U_{em} = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \qquad (8.1.1)$$

8.1.2. Уравнение электрической цепи. Напряжения на резисторе $V_R = \varphi_a - \varphi_b$, катушке $V_L = \varphi_b - \varphi_m$ и конденсаторе $V_C = \varphi_m - \varphi_a$ связаны соотношением

$$V_R + V_L + V_C = 0,$$

представляющим собой следствие второго правила Кирхгофа. Поскольку

$$V_R = IR = R\frac{dq}{dt},\ V_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2},\ V_C = \frac{q}{C},$$

то функция $q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \qquad (8.1.2)$$

Для того чтобы возбудить ток необходимо создать в контуре запас энергии. С этой целью следует до замыкания контура зарядить конденсатор или создать ток в катушке. Пусть $q(0) = q_0$, $I(0) = I_0$. Начальное значение энергия электрического и магнитного полей

$$U_{em(o)} = \frac{1}{2}LI_0^2 + \frac{q_0^2}{2C}.$$

8.1.3. Незатухающие собственные колебания. Рассмотрим идеальный контур, полагая $R = 0$. Величина $(LC)^{-1/2}$ имеет размерность частоты. Обозначим $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ и запишем уравнение (8.1.2) в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \qquad (8.1.3)$$

Мы получили уравнение гармонических колебаний. Решением (8.1.3) является функция

$$q(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t,$$

где a и b — постоянные, определяемые из начальных условий. Сила тока в контуре

$$I(t) = -a\omega_0\sin\omega_0 t + b\omega_0\cos\omega_0 t.$$

Полагая $t = 0$, находим $a = q_0$, $b = I_0/\omega_0$. Следовательно,

$$q(t) = q_0\cos\omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \qquad (8.1.4)$$

$$I(t) = -q_0\omega_0\sin\omega_0 t + I_0\omega_0\cos\omega_0 t. \qquad (8.1.5)$$

Функцию $q(t)$ можно представить в виде $q(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$,

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{I_0^2}{\omega_0^2}},\ \sin\alpha = \frac{q_0}{A},\ \cos\alpha = \frac{I_0}{\omega_0 A}.$$

Коэффициент A называют амплитудой колебаний заряда, $\omega_0 t + \alpha$ — фазой колебаний, α — начальной фазой, ω_0 — циклической частотой, $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Период собственных колебаний $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ заряда и тока в LC-контуре вычислил в 1853 г. У. Томсон (Кельвин).

Используя (8.1.4), (8.1.5), легко показать, что энергия электромагнитного поля сохраняется:

$$\frac{LI^2(t)}{2} + \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} + \frac{q_0^2}{2C}.$$

Запишем теперь условия, при которых в уравнении (8.1.2) можно пренебречь слагаемым IR:

$$|IR| << \frac{|q|}{C}, \quad |IR| << L\left|\frac{dI}{dt}\right|.$$

Учитывая (8.1.4), (8.1.5) находим, что они приводят к неравенству $R << R_В$, $R_В = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Величину $R_В$ называют волновым сопротивлением.

Пример 8.1.1. Контур состоит из катушки индуктивностью $L = 400$ мкГн и конденсатора емкостью $C = 400$ пФ. Найдем вначале циклическую частоту колебаний $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\omega_0 = 2{,}5$ рад/с. Учитывая значение $1/2\pi \approx 0{,}16$, получим частоту $\nu_0 = \omega_0/2\pi = 400$ кГц. Период колебаний $T_0 = 1/\nu_0 = 2{,}5$ мкс.

А. Предположим, что при $t = 0$ конденсатор заряжен до напряжения V_0. Тогда $q_0 = CV_0$, $I_0 = 0$. Из (8.1.4), (8.1.5) имеем

$$q(t) = CV_0\cos\omega_0 t, \quad I(t) = -i_0\sin\omega_0 t,$$

где $i_0 = \dfrac{V_0}{R_B}$, $R_B = \sqrt{\dfrac{L}{C}} = 1$ кОм. Значениям $I(t) < 0$ соответствует течение тока в отрицательном направлении. Через четверть периода конденсатор разрядиться. Энергия электрического поля перейдет в энергию магнитного поля $\dfrac{1}{2}Li_0^2 = \dfrac{1}{2}CV_0^2$. Далее этот процесс повторяется с периодом T_0.

Б. Предположим, что при $t \le 0$ через катушку протекает ток силой I_0. Из (8.1.4), (8.1.5) получим

$$q(t) = \frac{I_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \quad I(t) = I_0\cos\omega_0 t.$$

Через четверть периода напряжение на конденсаторе $V_C = I_0R_B$.

Пример 8.1.2. В схеме на рис. 8.1.2 ЭДС батареи $\varepsilon = 10$ В, индуктивность катушки $L = 10^{-4}$ Гн, емкость конденсаторов $C_1 = 2$ нФ, $C_2 = 8$ нФ. Вначале ключ находится в положении *a*. Найдем напряжение на конденсаторах после переключения ключа в положение *b*.

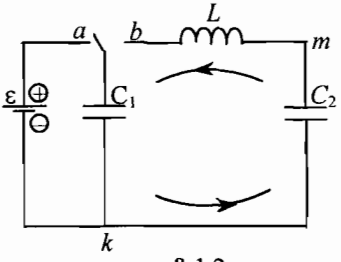


рис. 8.1.2

Решение. После переключения ключа мы имеем колебательный контур, содержащий два последовательно соединенных конденсатора.

Введем положительное направление на контуре, содержащем C_1, L, и C_2. Пусть $q(t)$ — заряд, прошедший в положительном направлении за время t. Полагая

$$\varphi_b - \varphi_k = V_1, \ \varphi_k - \varphi_m = V_2, \ \varphi_m - \varphi_b = L\frac{dI}{dt},$$

получим уравнения

$$L\frac{dI}{dt} + V_1 + V_2 = 0, \tag{1}$$

$$V_1 + V_2 = \frac{q}{C}, \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \tag{2}$$

Из (1), (2) следует уравнение (8.1.3) колебательного контура. Еще одно уравнение следует из закона сохранения заряда изолированной части схемы

$$C_1V_1 - C_2V_2 = C_1\varepsilon. \tag{3}$$

Из (2), (3) находим

$$V_1 = \frac{C\varepsilon}{C_2} + \frac{q}{C_1}, \qquad V_2 = -\frac{C\varepsilon}{C_2} + \frac{q}{C_2}. \tag{4}$$

Поскольку $V_1(0) = \varepsilon$, $V_2(0) = 0$, то начальные значения $q(0) = C\varepsilon$, $I(0) = 0$. Следовательно, решение уравнения (8.1.3)

$$q(t) = C\varepsilon\cos\omega t, \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

$\omega = 2{,}5 \cdot 10^6$ рад/с или $\nu = (\omega/2\pi) \approx 0{,}16 \cdot 2{,}5 \cdot 10^6 = 400$ кГц. Из (4) находим

$$V_1 = \varepsilon\frac{C_1 + C_2\cos\omega t}{C_1 + C_2}, \qquad V_2 = \varepsilon(\cos\omega t - 1)\frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Заряды на верхних пластинах конденсаторов $q_1 = C_1V_1$, $q_2 = C_2V_2$. Сила тока в цепи

$$I = -I_0\sin\omega t, \qquad I_0 = C\varepsilon\omega = \varepsilon(C/L)^{1/2}, \qquad I_0 = 40 \text{ мА}$$

Энергия электрического поля конденсаторов

$$U_e = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{C\varepsilon^2}{2}\left(\frac{C_1}{C_2} + \cos^2\omega t\right)$$

и энергия магнитного поля в катушке $U_m = (LI_0^2/2)\sin^2\omega t$ удовлетворяют закону сохранения электромагнитной энергии $U_e + U_m = C_1\varepsilon^2/2 = 100$ нДж. Энергия электромагнитных колебаний $U_{em} = LI^2/2 + q^2/2C$, $U_{em} = 80$ нДж.

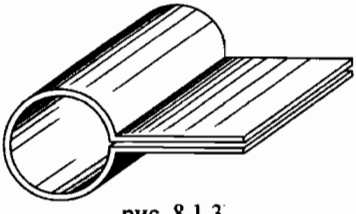


рис. 8.1.3

Пример 8.1.3. Резонансная частота объемного резонатора. В тонком металлическом цилиндре с открытыми торцами вырезали параллельно образующим полосу шириной $d << r_0$ (r_0, h — радиус и длина цилиндра) и присоединили к краям разреза конденсатор в виде двух плоскопараллельных пластин размерами $a \times h$ (рис. 8.1.3). Эквивалентная схема этой системы представляет собой одновитковый контур, присоединенный к конденсатору. Ток в контуре протекает по стенкам цилиндра и по пластинам параллельно сторонам длиной a. Индукция магнитного поля направлена по оси цилиндра, как в соленоиде; величина индукции $B \approx \mu_0 I/h$. Поток магнитной индукции $\Phi = \pi r_0^2 B \equiv LI$. Следовательно, индуктивность контура $L = \mu_0\pi r_0^2/h$. Поскольку емкость конденсатора $C = \varepsilon_0 ah/d$, то собственная частота электромагнитных колебаний $\omega = (c/r_0)(d/\pi a)^{1/2}$.

8.1.4. Затухающие собственные колебания. Выше мы получили решение уравнения (8.1.3) для идеального контура. Теперь рассмотрим реальный контур с сопротивлением $R \neq 0$. Умножая (8.1.2) на I, имеем

$$LI\frac{dI}{dt}+\frac{qI}{C}=-I^2R, \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2}{2}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right)=-I^2R \text{ или } \frac{dU_{em}}{dt}=-I^2R,$$

где $U_{em}(t)$ — энергия электромагнитного поля, $P = I^2R$ — мощность, потребляемая резистором и рассеиваемая в виде тепла. Очевидно, с течением времени вся энергия перейдет в теплоту и сила тока обратиться в ноль. Элементарные соображения подсказывают нам, что при малых потерях решение уравнения (8.1.2) должно иметь вид

$$q(t) \approx A(t)\sin(\omega_0 t + \alpha(t)),$$

где $A(t)$, $\alpha(t)$ — функции, приращения которых за период достаточно малы: $|\Delta A| << A$, $|\Delta\alpha| << |\alpha|$. В этом случае

$$I(t) \approx A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad U_{em} \approx \frac{1}{2}L\omega_0^2 A^2.$$

Найдем среднее за период значение мощности

$$P = I^2R \approx \omega_0^2 A^2 R\cos^2(\omega_0 t + \alpha),$$

рассеиваемой резистором. Учитывая, что $\cos^2\phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi)$, находим

$$P_{ср} \approx \frac{1}{2}\omega_0^2 A^2 R. \tag{8.1.6}$$

Для радиотехнических целей желательно иметь контур с возможно меньшими потерями. Введем характеристику потерь, называемую *добротностью*

$$Q = \frac{2\pi U_{em}}{T_0 P_{ср}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R_в}{R}. \tag{8.1.7}$$

Здесь $R_в = \sqrt{L/C}$ — волновое сопротивление.

Следует отметить, что при введении добротности неявно предполагалось, что $Q >> 1$. Точное решение уравнения (8.1.2) при $\omega_0 > \gamma 2$ имеет вид

$$q(t) = A_0\exp(-\gamma t/2)\sin(\Omega t + \alpha_0), \quad \gamma = \frac{R}{L}, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}. \tag{8.1.8}$$

В случае малых потерь при $Q >> 1$ получим «колебания» с частотой $\Omega \approx \sqrt{1/LC} = \omega_0$ и амплитудой стремящейся к нулю при $t >> 2L/R$. При $0 \le Q \le 0{,}5$ функция $I(t)$ быстро убывает — мы имеем апериодический процесс.

Пример 8.1.4. Получение сильных магнитных полей с помощью конденсаторных батарей. Возьмем батарею емкостью $C = 2$ мФ, заряженную до напряжения $V_0 = 15$ кВ с запасенной энергией

$$U_{em} = \frac{1}{2} C V_0^2 = 0{,}225 \text{ МДж}.$$

Такие батареи, созданные для исследования термоядерных реакций, имеют длину ≈4 м.

Рассмотрим передачу энергии в катушку индуктивностью $L = 0{,}008$ мкГн и сопротивлением $R = 2$ мОм. Поскольку $R_B = 2$ мОм, добротность $Q = 1$, то происходит апериодический разряд. Через промежуток времени $t \approx T/4$ энергия электрического поля конденсатора переходит в энергию магнитного поля и теплоту. Оценим величину импульса индукции магнитного поля B, полагая

$$\frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 Sl,$$

где Sl — объем катушки. Приняв значение $Sl = 10^{-3}$ м^3, получим $B \approx 24$ Тл.

Совсем недавно импульс магнитного поля получен с помощью лазера. Пучок света, направленный на внутреннюю поверхность пластины конденсатора, ионизирует атомы металла. Выбитые электроны попадают на другую пластину. Так реализуется зарядка конденсатора.

8.2. Генераторы электромагнитных колебаний

8.2.1. Генераторы гармонических колебаний. В схеме, содержащей конденсатор, катушку и резистор, энергия электромагнитных колебаний необратимо переходит в теплоту и колебания затухают. Для поддержания незатухающих гармонических колебаний частотой ω_0 необходимо в течение каждого периода $T = 2\pi/\omega_0$ обеспечить положительное приращение энергии электромагнитного поля в колебательном контуре в результате работы, совершаемой внешним генератором постоянного напряжения.

В радиотехнике мощные генераторы электромагнитных колебаний используют для создания напряжения на элементах антенн, излучающих электромагнитные волны. Различают генераторы с внешним возбуждением, которые являются, по существу, усилителями, и генераторы с самовозбуждением — автогенераторы.

8.2.2. Автогенератор с индуктивной связью на биполярном транзисторе. В генераторах малой мощности применяется схема с RLC-контуром в цепи база-эмиттер, в которой возбуждается переменный ток $I(t)$ частотой $\omega_0 = (1/LC)^{1/2}$ (рис. 8.2.1). Индуктивная *обратная связь* осуществляется ка-

тушкой, включенной в цепь коллектор-эмиттер. Ток коллектора $I_k(t)$ является функцией управляющего напряжения $V_{ЭБ}(t)$ частотой ω_0 и создает в катушке магнитное поле, которое наводит в контуре ЭДС взаимоиндукции $\varepsilon_{вз}(t) = -MdI_k/dt$, где M — коэффициент взаимоиндукции. Мощность, потребляемая контуром $P(t) = I\varepsilon_{вз}$, должна обеспечить постоянство энергии поля и компенсировать джоулевы потери.

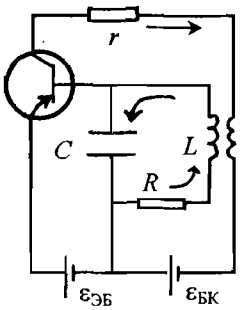


рис. 8.2.1

На рис. 8.2.1 стрелки обозначают положительные направления токов. Заряд $q(t)$, протекающий в RCL-контуре, создает напряжение на конденсаторе $u = q/C$, связанное с силой тока соотношением $I = dq/dt$,

$$I = Cdu/dt. \tag{8.2.1}$$

В рассматриваемом приближении $I_Б \approx 0$, $I_k = I_Э$. Поэтому ток коллектора зависит от управляющего напряжения

$$I_k = F(V_{ЭБ}), \quad V_{ЭБ} + u = \varepsilon_{ЭБ}. \tag{8.2.2}$$

Здесь $I_K = F(V_{ЭБ})$ — выходная характеристика транзистора. Согласно второму закону Кирхгофа

$$L\frac{dI}{dt} + IR + u = -M\frac{dI_k}{dt}. \tag{8.2.3}$$

Рассмотрим процесс возбуждения колебаний. При значениях $u = 0$, когда колебания отсутствуют, транзистор работает на участке с большой крутизной $S = dF/dV_{ЭБ}$. В этом случае ток коллектора $I_k = I_{k0}$, $I_{k0} = F(\varepsilon_{ЭБ})$ создает напряжение $V_{БК} = \varepsilon_{БК} - I_{k0}r$.

В момент включения во всех цепях проходят импульсы тока, возбуждающие колебания в RCL-контуре. При значениях $|u| << \varepsilon_{ЭБ}$ функцию $F(V_{ЭБ})$ можно представить в виде $F(V_{ЭБ}) = I_{k0} - S_0u + ...$, где S_0 — значение крутизны в точке $V_{ЭБ} = \varepsilon_{ЭБ}$. Следовательно, ток коллектора

$$I_k = I_{k0} - S_0u. \tag{8.2.4}$$

Теперь, подставляя (8.2.1) и (8.2.4) в (8.2.3), получим уравнение, описывающее процесс самовозбуждения генератора

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (R_g/L)\frac{du}{dt} + \omega_0{}^2u = 0, \tag{8.2.5}$$

$$R_g = (R - MS_0/C).$$

Сопоставление уравнений (8.1.2) и (8.2.5) показывает, что величину R_g можно назвать эквивалентным сопротивлением контура. Для осуществления полной компенсации джоулевых потерь необходимо выполнить условие $R_g = 0$: $M = RC/S_0$. Условие самовозбуждения генератора следует из неравенства $R_g < 0$, или $M > RC/S_0$.

Убедимся, что в этом случае энергия электромагнитного поля в контуре U_{em} возрастает. Умножая обе части (8.2.3) на I, получим закон изменения энергии

$$dU_{em}/dt + I^2R = -MIdI_k/dt,$$

из которого находим

$$dU_{em}/dt = -C^2R_g(du/dt)^2.$$

Генератор с контуром в цепи база–эмиттер используется в радиоприемных устройствах и измерительной технике.

8.3. Вынужденные колебания в последовательном контуре

8.3.1. Колебания в стационарном режиме. Для получения незатухающих колебаний необходимо пополнять запас энергии в контуре. Рассмотрим контур, присоединенный к генератору переменного напряжения с ЭДС $\varepsilon(t) = 0$ при $t < 0$; $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$ при $t \geq 0$ (рис. 8.3.1). Теперь вместо уравнения (8.1.2) имеем уравнение

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cos\omega t, \qquad t \geq 0. \tag{8.3.1}$$

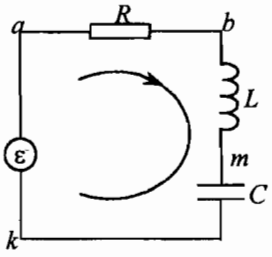


рис. 8.3.1

Решение этого уравнения представляет собой сумму двух слагаемых: первое — учитывает вклад собственных затухающих колебаний, второе — обусловлено действием внешней ЭДС. При $t >> L/R$ вкладом собственных колебаний можно пренебречь. Возникает *стационарный режим*, при котором заряд и ток изменяются по гармоническому закону с частотой внешнего генератора:

$$q(t) = \frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t + \varphi), \qquad I(t) = I_0\cos(\omega t + \varphi).$$

Наша задача — найти постоянные I_0 и φ в общем случае для схемы, изображенной на рис. 8.3.1.

Введем обозначения

$$X_L = \omega L, \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

и, подставляя $q(t)$ и $I(t)$ в (8.3.1), получим тождество

$$(X_C - X_L)\, I_0\sin(\omega t + \varphi) + RI_0\cos(\omega t + \varphi) = \varepsilon_0\cos\omega t. \tag{8.3.2}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ в левой и правой частях (8.3.2), получим систему уравнений

$$(X_C - X_L)\, I_0\sin\varphi + RI_0\cos\varphi = \varepsilon_0,$$

$$(X_C - X_L)\, I_0\cos\varphi - RI_0\sin\varphi = 0.$$

Решение этой системы представим в виде

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}, \; Z = \sqrt{R^2 + \left(X_C - X_L\right)^2}, \tag{8.3.3}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}, \; \sin\varphi = \frac{X_C - X_L}{Z}. \tag{8.3.4}$$

Из (8.3.3) видно, что амплитуды тока и напряжения связаны соотношением, аналогичным закону Ома для постоянного тока. Поэтому величину Z называют полным сопротивлением контура. Значения φ лежат в области $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Если $\varphi > 0$, то говорят, что ток опережает напряжение по фазе, а при $\varphi < 0$ — ток отстает от напряжения. Величины

$$V_{R0} = I_0 R, \quad V_{C0} = I_0 X_C, \quad V_{L0} = I_0 X_L$$

представляют собой амплитуды напряжения на резисторе, конденсаторе и катушке, параметры X_C и X_L называют емкостным и индуктивным сопротивлениями. Очевидно,

$$V_{R0} = \varepsilon_0 \frac{R}{Z}, \quad V_{C0} = \varepsilon_0 \frac{X_C}{Z}, \quad V_{L0} = \varepsilon_0 \frac{X_L}{Z}. \tag{8.3.5}$$

Соотношение (8.3.3) можно представить в виде

$$\varepsilon_0^2 = V_{R0}^2 + \left(V_{C0} - V_{L0}\right)^2.$$

Отсюда видно, что всегда $\varepsilon_0 \geq V_{R0}$, однако значения V_{C0} и V_{L0} могут быть больше или меньше амплитуды напряжения ε_0.

8.3.2. Мощность, потребляемая контуром. Умножая обе части (8.3.1) на I, получим соотношение

$$\frac{dU_{em}}{dt} = I\varepsilon - I^2 R,$$

где U_{em} — энергия электромагнитного поля. Величина $p(t) = I(t)\varepsilon(t)$ — мгновенная мощность, потребляемая контуром, $p_R(t) = I^2 R$ — мощность, рассеиваемая резистором. Средние по времени значения функций $p(t)$ и $p_R(t)$ соответственно равны

$$P = \frac{1}{2} I_0 \varepsilon_0 \cos\varphi, \quad P_R = \frac{1}{2} I_0^2 R. \tag{8.3.6}$$

Учитывая, что $\varepsilon_0 \cos\varphi = I_0 R$, приходим к выводу: *в стационарном или установившемся режиме среднее значение мощности, потребляемое от внешнего генератора, равно среднему значению мощности, рассеиваемой резистором.*

По этой причине резистор называют активной нагрузкой. Для того чтобы исключить коэффициент 1/2 в (8.3.6), вводят величины

$$I_{эф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \ \varepsilon_{эф} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}},$$

называемые *действующими* или *эффективными* значениями силы тока и напряжения. Тогда из (8.3.6) получим $P = I_{эф}\varepsilon_{эф}\cos\varphi = I_{эф}^2 R$.

Для городской электросети $\varepsilon_{эф} = 220$ В, частота $\nu = \omega/2\pi = 50$ Гц.

Пример 8.3.1. Малая емкость в цепи высокочастотного генератора. Включим лампу мощностью $P = 100$ Вт в сеть переменного напряжения с $\varepsilon_{эф} = 220$ В, $\nu = 50$ Гц. В этом случае $L = 0$, $C = \infty$, $Z = R$. Сопротивление лампы в рабочем режиме

$$R = \frac{\varepsilon_{эф}^2}{P} = 484 \text{ Ом}.$$

Теперь соединим последовательно лампу и конденсатор малой емкостью $C = 20$ *пФ* (рис. 8.3.2) Заметим, что значению $C = 0$ соответствует разомкнутая цепь. Поскольку емкостное сопротивление

$$X_C = \frac{0{,}16}{\nu C} = 1{,}6 \cdot 10^8 \text{ Ом},$$

то напряжения на лампе и конденсаторе $V_{R0} = \varepsilon_0 R/Z << \varepsilon_0$, $V_{C0} = \varepsilon_0 X_C/Z \approx \varepsilon_0$.

Мощность, потребляемая лампой

$$P_R = \frac{\varepsilon_{эф}^2 R}{Z^2} = \frac{PR^2}{R^2 + X_C^2} << P.$$

Нить лампы не накаляется.

При включении генератора, создающего напряжение частотой $\nu = 100$ МГц, емкостное сопротивление $X_C = 80$ Ом. В этом случае потребляемая мощность $P_R \approx P$: лампа ярко светится. Амплитуды напряжения $V_{R0} \approx \varepsilon_0$, $V_{C0} << \varepsilon_0$.

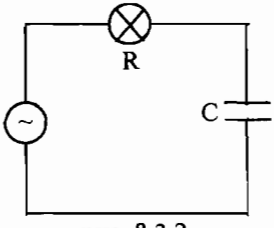


рис. 8.3.2

Эксперимент, иллюстрирующий этот эффект, производит сильное впечатление. Студент стоит на изолирующей скамье и держит лампу, касаясь рукой ее цоколя. Второй контакт лампы присоединен к одной клемме высоковольтного генератора, другая клемма — заземлена. Следовательно, цепь разомкнута для постоянного тока. Тем не менее, нить лампы ярко накаляется. Причина в том, что тело студента и Земля образуют обкладки конденсатора. Высокочастотные токи протекают в тонком поверхностном слое тела экспериментатора и не опасны.

8.3.3. Резонанс напряжений. Из (8.3.2) следует, что разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_k$ на участке, содержащем индуктивность и конденсатор, равна нулю при условии $X_C = X_L$. Это электрическое состояние контура, изображенного на рис. 8.3.1 реализуется при частоте $\omega = \omega_0$, $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ и называется *резонансом напряжений.*

Резонансом (от лат. *resonans* — отзываюсь) называется избирательный отклик колебательной системы на периодическое воздействие внешнего генератора с частотой, близкой к собственной частоте.

Зависимость амплитуды тока $I_0(\omega)$ от частоты (8.3.3) называют *амплитудно-частотной характеристикой.* Представим эту функцию в виде

$$I_0(\omega) = \frac{I_0(\omega_0)}{\sqrt{1 + [Q(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega\omega_0]^2}},$$

где $I_0(\omega_0) = \dfrac{\varepsilon_0}{R}$, $Q = R_B/R$ — добротность контура, $R_B = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$. При $\omega = \omega_0$ функция $I(\omega)$ достигает максимального значения $I_0(\omega_0)$. В этом случае $X_C = X_L = R_B$, $V_{R0} = \varepsilon_0$, а амплитуды $V_{C0} = V_{L0} = Q\varepsilon_0$ в Q раз больше амплитуды напряжения на входе схемы. Контур ведет себя как активное сопротивление.

Величина $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ называется *расстройкой* контура. Для контура с достаточно высокой добротностью Q даже при малых расстройках ток в контуре значительно меньше максимального. В области низких частот $\omega << \omega_0$ имеем:

$$I_0(\omega) \approx \frac{I_0(\omega_0)\omega}{Q\omega_0},$$

$V_{C0} \approx \varepsilon_0$, V_{R0}, $V_{L0} << \varepsilon_0$ — контур ведет себя как конденсатор. В области частот $\omega >> \omega_0$ ток, по-прежнему мал:

$$I_0(\omega) \approx \frac{I_0(\omega_0)\omega_0}{Q\omega},$$

$V_{L0} \approx \varepsilon_0$, V_{R0}, $V_{C0} << \varepsilon_0$. В этом случае контур ведет себя как катушка индуктивности.

Пример 8.3.2. Амплитуда ЭДС генератора $\varepsilon_0 = 10$ В, $C = 400$ пФ, $L = 400$ мкГн, $R = 10$ Ом. Резонансная частота $\nu_p = 400$ кГц, $R_B = 1$ кОм, $Q = 10^2$, емкостное и индуктивное сопротивления $X_C = X_L \approx 1$ кОм, амплитуда силы тока $I_0 = 1$ А, амплитуды напряжения $V_{C0} = V_{L0} = 10^3$ В, $V_{R0} = 10$ В. Мощность, рассеиваемая в резисторе $P = 5$ Вт.

Задача 8.3.3. *Покажите, что амплитуда напряжения на конденсаторе достигает максимального значения*

$$V_{Co} = \frac{\varepsilon_0 Q}{\sqrt{1-(1/2Q)^2}}$$

при частоте $\omega = \omega_0\sqrt{1-1/2Q^2}$.

8.3.4. Настройка радиоприемника. Каждый радиопередатчик излучает электромагнитные волны в интервале частот Δf_n в окрестности частоты f_n. Величина Δf_n определяется характерным временем τ изменения сигнала, несущего информацию: $\Delta f_n \approx 1/\tau$. *На длинных и средних волнах* $\Delta f = 9$ *кГц*; ширина полосы телевизионного сигнала $\Delta f = 6$ МГц.

Будем считать, что создаваемая приемной антенной ЭДС представляет собой суперпозицию гармонических напряжений. Для того чтобы выделить одну радиостанцию частотой f, используются резонансные свойства контура. Параметры L и C следует выбрать такими, чтобы резонансная частота ν_0 стала равной f. Тогда при больших значениях добротности Q амплитуда напряжения сигнала частотой f на катушке или конденсаторе, будет во много раз больше амплитуд сигналов других частот. Таким образом, на усилитель поступает практически один сигнал, частота которого совпадает с собственной частотой контура.

8.4. Трансформатор

8.4.1. Параметры и схема трансформатора. В 1876 г. русский электротехник *П. Н. Яблочков получил патент и впервые использовал трансформатор* для питания изобретенных им дуговых ламп (1878 г.). Трансформатор состоит из замкнутого стального сердечника и двух обмоток. Одна из них — называемая первичной — подключена к генератору переменного напряжения, другая — вторичная — соединена с нагрузкой сопротивлением R_2 (рис. 8.4.1). n_1, n_2 — числа витков в первичной и вторичной обмотках. Сопротивление первичной обмотки равно R_1. Сопротивление вторичной обмотки пренебрежимо мало по сравнению с R_2.

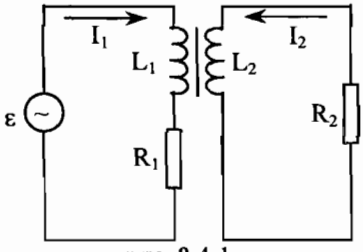


рис. 8.4.1

Если в первичной обмотке протекает ток силой $I_1(t)$, а вторая обмотка незамкнута, то в первичной обмотке возникает ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt}.$$

Магнитный поток, создаваемый током, пронизывает вторичную обмотку и наводит в ней ЭДС взаимоиндукции

$$\varepsilon_{21} = -L_{12}\frac{dI_1}{dt},$$

где L_{12} — коэффициент взаимоиндукции. В отсутствие потерь $\varepsilon_1 \sim n_1^2$, $\varepsilon_{21} \sim n_1 n_2$. Следовательно, $\frac{L_1}{L_{12}} = \frac{n_1}{n_2}$. Рассматривая ток во вторичной обмотке при разомкнутой первичной обмотке получим $\frac{L_2}{L_{12}} = \frac{n_2}{n_1}$. Очевидно,

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2, \; L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

8.4.2. Трансформатор в рабочем режиме. Рассмотрим теперь трансформатор в рабочем режиме. Первичная обмотка присоединена к генератору, создающему напряжение $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$. Вторичная обмотка замкнута на сопротивление R_2. Записывая для первичной и вторичной цепей уравнения, следующие из законов Кирхгофа, получим систему

$$L_1\frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 = \varepsilon(t) - L_{12}\frac{dI_2}{dt}, \tag{8.4.1}$$

$$L_2\frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 = -L_{12}\frac{dI_1}{dt}. \tag{8.4.2}$$

Исследуем вначале энергетический баланс трансформатора. Как обычно, умножим (2) на I_1, (3) на I_2 и сложим полученные выражения. В результате имеем

$$\varepsilon I_1 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + \frac{dU_m}{dt}, \tag{8.4.3}$$

$$U_m = \frac{1}{2}(L_1 I_1^2 + 2L_{12} I_1 I_2 + L_2 I_2^2),$$

где U_m — энергия магнитного поля токов в первичной и вторичной обмотках. Умножая (8.4.3) на Δt, получим закон изменения энергии

$$\delta A = I_1^2 R_1 \Delta t + I_2^2 R_2 \Delta t + \Delta U_m, \qquad \delta A = \varepsilon I_1 \Delta t.$$

Следовательно, *работа, совершаемая генератором, равна сумме джоулева тепла, рассеиваемого в первичной и вторичной цепях, и приращения энергии магнитного поля.*

Переходя к решению уравнений (8.4.1), (8.4.2), введем обозначения $X_1 = \omega L_1$, $X_2 = \omega L_2$, $X_{12} = \omega L_{12}$. В наиболее часто встречающемся случае $X_2 >> R_2$. Тогда, пренебрегая в (8.4.2) вкладом слагаемого $R_2 I_2$, получим

$$I_2 \approx -\frac{L_{12}}{L_2} I_1. \tag{8.4.4}$$

В следующем приближении уравнение (8.4.2) необходимо представить в виде

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} \approx -L_{12} \frac{dI_1}{dt} + R_2 \frac{L_{12}}{L_2} I_1 .$$

Подставляя dI_2/dt в уравнение (8.4.1) получим:

$$(L_1 - \frac{L_{12}^2}{L_2}) \frac{dI_1}{dt} + [R_1 + R_2 (\frac{L_{12}}{L_2})^2] I_1 = \varepsilon(t). \qquad (8.4.5)$$

Поскольку $L_1 L_2 - L_{12}^2 = 0$, то решение (8.4.5)

$$I_1 = \frac{\varepsilon(t)}{R}, \qquad (8.4.6)$$

$$R = R_1 + R_2 (\frac{L_{12}}{L_2})^2 = R_1 + R_2 (\frac{n_1}{n_2})^2. \qquad (8.4.7)$$

Подставляя (8.4.6) в (8.4.4), находим

$$I_2 = -\frac{L_{12}}{L_2} \frac{\varepsilon(t)}{R}, \qquad (8.4.8)$$

8.4.3. Трансформатор — устройство, предназначенное для преобразования электромагнитной энергии и активного сопротивления нагрузки. Из (8.4.6) следует вывод: при условии $\omega L_2 >> R_2$ эквивалентная схема трансформатора представляет собой генератор, подключенный к резистору сопротивлением R. Таким образом, *трансформатор, присоединенный к резистору R_2, представляет для генератора напряжения активную нагрузку сопротивлением R.*

Из (8.4.6), (8.4.8) находим

$$I_1(t) = I_{10} \cos \omega t, \quad I_{10} = \frac{\varepsilon_0}{R}, \qquad (8.4.9)$$

$$I_2(t) = I_{20} \cos(\omega t + \pi), \quad I_{20} = \frac{L_{12}}{L_2} \frac{\varepsilon_0}{R}. \qquad (8.4.10)$$

Среднее значение мощности, потребляемой нагрузкой — резистором R_2, равно

$$P_2 = \frac{1}{2} I_{20}{}^2 R_2, \quad \text{или} \quad P_2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0^2 R_2}{(nR_1 + R_2 / n)^2},$$

где $n = n_2/n_1$. Величина P_2 достигает максимального значения при $R_2 = n^2 R_1$.

В случае идеального первичного контура $R_1 = 0$. Из (8.4.9), (8.4.10) находим амплитуды тока и напряжения

$$I_{10} = \frac{\varepsilon_0}{R_2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2, \quad I_{20} = \frac{\varepsilon_0}{R_2}\frac{n_2}{n_1}, \quad V_{20} = I_{20}R_2 = \varepsilon_0\frac{n_2}{n_1}. \qquad (8.4.11)$$

Следовательно, трансформатор представляет собой устройство, предназначенное для *преобразования электромагнитной энергии и активного сопротивления нагрузки.*

Заметим, что в популярной литературе можно прочитать, что «мощность тока» в первичной обмотке равна «мощности тока» во вторичной обмотке. В действительности из (8.4.3) следует, что в идеальном трансформаторе среднее за период значение мощности, развиваемой генератором $I_{10}\varepsilon_0/2$, равно мощности, потребляемой нагрузкой $I_{20}^2R_2/2$:

$$I_{1эф}\varepsilon_{эф} = I_{2эф}^2R_2. \qquad (8.4.12)$$

Пример 8.4.1. Рассмотрим подключение динамика сопротивлением $R_2 = 2$ Ом с напряжением питания $V_{2эф} = 2$ В к выходу усилителя низкой частоты. Для получения большого значения коэффициента усиления по напряжению анодная цепь усилителя содержит резистор с большим сопротивлением, падение напряжения на котором $\varepsilon_{эф} = 100$ В. Если динамик подключить к резистору, то динамик шунтирует резистор и коэффициент усиления уменьшается. Поэтому низкоомная нагрузка включается через понижающий трансформатор, который преобразует малое сопротивление R_2 в сопротивление $R = R_2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 >> R_2$. Поскольку $n_1/n_2 = 50$, то $R = 5$ кОм.

Отметим, что динамик можно использовать в качестве микрофона.

8.5. Вынужденные колебания в параллельном контуре

8.5.1. Параллельный контур. На рис. 8.5.1 показана схема параллельного соединения конденсатора и катушки с резистором к генератору переменного напряжения $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$. Имеем три уравнения: для узла

$$I = I_1 + I_2$$

и ветвей, содержащих R, L и C

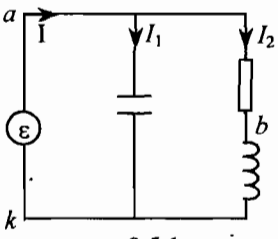


рис. 8.5.1

$$\frac{q_1}{C} = \varepsilon_0\cos\omega t, \quad L\frac{dI_2}{dt} + RI_2 = \varepsilon_0\cos\omega t, \quad t > 0.$$

Поскольку эти уравнения представляют собой частные случаи уравнения (8.3.1), то, учитывая (8.3.3), (8.3.4), получим решения

$$I_1 = \frac{\varepsilon_0}{X_C}\cos(\omega t + \varphi_1), \quad \cos\varphi_1 = 0, \sin\varphi_1 = 1, \tag{8.5.1}$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon_0}{Z_2}\cos(\omega t + \varphi_2), \ \cos\varphi_2 = \frac{R}{Z_2}, \ \sin\varphi_2 = -\frac{X_L}{Z_2},$$

где $Z_2 = \sqrt{R^2 + X_L^2}$.

Следовательно,

$$I = \frac{\varepsilon_0 R}{Z_2^2}\cos\omega t + \varepsilon_0\left(\frac{X_L}{Z_2^2} - \frac{1}{X_C}\right)\sin\omega t. \tag{8.5.2}$$

Полагая

$$\frac{R}{Z_2^2} = \frac{1}{Z}\cos\varphi, \ \frac{1}{X_C} - \frac{X_L}{Z_2^2} = \frac{1}{Z}\sin\varphi,$$

запишем это решение в виде

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{Z}\cos(\omega t + \varphi).$$

Амплитуда силы тока, проходящего через генератор

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}, \ \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{Z_2^2} - \frac{2X_L}{X_C Z_2^2} + \frac{1}{X_C^2}}. \tag{8.5.3}$$

Среднее значение мощности, потребляемой схемой

$$P = [\varepsilon(t)I(t)]_{\text{ср}} = \frac{\varepsilon_0^2 R}{2Z_2^2}$$

равно мощности, рассеиваемой в резисторе $P_R = [I_2^2 R]_{\text{ср}}$.

Пример 8.5.1. Уменьшение джоулевых потерь в подводящих проводах. Электрооборудование заводских цехов включает моторы, трансформаторы и другие устройства, схема которых подобна последовательно соединенным резистору и катушке индуктивности. Если *RL*-цепь подключена непосредственно к генератору, то амплитуда силы тока в подводящих проводах согласно (8.5.1) равна $I_{20} = \frac{\varepsilon_0}{Z_2}$. Если же параллельно *RL*-цепи подключить конденсатор, то амплитуда силы тока станет равной $I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}$. Отме-

тим, что коэффициент при $\sin\omega t$ в (8.5.2) — реактивной составляющей силы тока — уменьшился, а амплитуда активной составляющей силы тока не изменилась. Очевидно, $I_0\cos\varphi = I_{20}\cos\varphi_2$. Если емкость конденсатора $C < \frac{2X_L}{\omega Z_2^2}$, то $\varphi < \varphi_2$, $I_0 < I_{20}$. Следовательно, подключение батареи конденсаторов к RL-цепи приводит к уменьшению силы тока в подводящих проводах и уменьшению джоулевых потерь. Мощность, потребляемая резистором, не изменяется.

8.5.2. Резонанс токов. Найдем условие, при котором фазы напряжения и тока в общей части цепи совпадают: $Z_2^2 = X_L X_C$ или $\omega = \omega_p$,

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{Q^2}}, \qquad (8.5.4)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Q = \frac{R_\text{В}}{R}, \qquad R_\text{В} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Это электрическое состояние контура называют *резонансом токов*. В этом случае $Z_2 = Z_{2p}$,

$$Z_{2p} = R_\text{В}, \quad Z_p = QR_\text{В} = \frac{L}{CR}.$$

Контур в цепи генератора эквивалентен резистору сопротивлением

$$R_0 = \frac{R_B^2}{R} = \frac{L}{CR}.$$

Амплитуда силы тока $I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Q^2 R}$ принимает наименьшее значение. При $Q >> 1$ сопротивление $R_0 = Q^2 R >> R$ амплитуды токов в цепях катушки и конденсатора $I_{20} = QI_0$, $I_{10} \approx QI_0$.

Мощность, потребляемая резистором при резонансе

$$P_R = \frac{\varepsilon_0^2 R}{2R_B^2} = \frac{\varepsilon_0^2 RC}{2L}$$

уменьшается с увеличением индуктивности катушки.

В области низких частот $\omega << \omega_p$ контур ведет себя как катушка индуктивности; в области частот $\omega >> \omega_p$ — эквивалентен конденсатору.

Пример 8.5.2. Отметим, что мощность, потребляемая резистором при резонансе $P_R = \varepsilon_0^2 R/2R_в^2 = \varepsilon_0^2 RC/2L$, уменьшается с увеличением индуктивности катушки. Рассмотрим два контура, настроенных на частоту $\nu_p = 1{,}6$ МГц, каждый из которых изображен на рис. 7.5.1. ЭДС генераторов $\varepsilon_0 = 100$ В и активные сопротивления $R = 10$ Ом в обоих контурах одинаковы. В первом кон-

туре $C_1 = 10$ пФ, $L_1 = 1$ мГн, во втором контуре $C_2 = 100$ пФ, $L_2 = 0{,}1$ мГн. Найдем мощности, потребляемые резисторами в первом и втором контурах.

А. В первом контуре волновое сопротивление $R_в = 10^4$ Ом, добротность $Q = 10^3$, $R_0 = 10$ *МО*м, $I_0 = 0{,}01$ мА. Мощность, потребляемая резистором $P_R = 0{,}5$ мВт.

Б. Во втором контуре $R_в = 10^3$ Ом, $Q = 10^2$, $R_0 = 0{,}1$ МОм, $I_0 = 1$ мА. Мощность, потребляемая резистором $P_R = 50$ мВт.

Идеальный контур. Полагая $R = 0$, получим $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = -\dfrac{\pi}{2}$, $I_1 = I_2$.

Следовательно, фазы токов I_1 и I_2 сдвинуты на π. При резонансе сила тока в общей цепи контура равна нулю, а в контуре возникает переменный круговой ток. Сопротивление идеального контура бесконечно велико. Энергия уже не поступает от генератора к контуру: происходит обмен энергией между катушкой индуктивности и конденсатором.

8.6. Трехфазный ток

8.6.1. Трехфазная система ЭДС. В 1888 г. Н. Тесла изобрел генератор *двухфазного* напряжения и первый асинхронный электродвигатель. В генераторе Тесла между полюсами магнита вращались две взаимно перпендикулярные обмотки. Аналогичным образом можно получить трехфазное напряжение, используя три вращающиеся обмотки, расположенные под углами 120° друг к другу. На рис. 8.6.1 изображена схема из трех обмоток, представленных отрезками a_nb_n, потенциалы точек a и b соответственно равны φ_{ak}, φ_{bk}, $k = 1, 2, 3$. ЭДС, индуцируемые в результате вращения ротора, называют фазными напряжениями $\varepsilon_k(t) = \varphi_{bk} - \varphi_{ak}$:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0\cos\omega t, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0\cos(\omega t - 2\pi/3), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_0\cos(\omega t - 4\pi/3), \qquad (8.6.1)$$

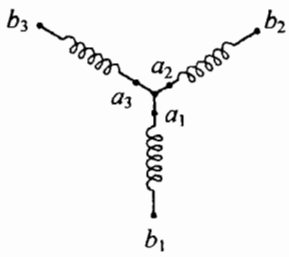


рис. 8.6.1

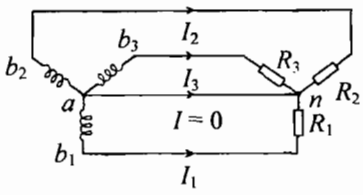


рис. 8.6.2

Замыкая начала и концы обмоток на резисторы R_1, R_2, R_3, получим три независимые линии, соединенные с потребителями шестью проводами. Система становится чрезмерно громоздкой и дорогой. В 1889 г. выдающийся русский электротехник М.О. Доливо-Добровольский нашел неожиданное и гениальное решение проблемы. Можно достичь сокращения числа соедини-

тельных проводов, используя две схемы соединения — звезду и треугольник. Если объединить провода, присоединенные к концам обмоток, то получим схему, показанную на рис. 8.6.2 — из шести проводов можно оставить только четыре. Этот тип соединения называется *звездой*. В этом случае $\varphi_{a1} = \varphi_{a2} = \varphi_{a3} = \varphi_n$. Точку n называют *нейтралью*, каждая из независимых цепей называется *фазой*. Напряжения между началами обмоток называют линейными напряжениями

$$\varphi_{b1} - \varphi_{b2} = \varepsilon_0\cos\omega t - \varepsilon_0\cos(\omega t - 2\pi/3) = V_0\sin(\omega t - 4\pi/3),$$

$$\varphi_{b1} - \varphi_{b3} = \varepsilon_0\cos\omega t - \varepsilon_0\cos(\omega t - 4\pi/3) = V_0\sin(\omega t - 2\pi/3),$$

$$\varphi_{b2} - \varphi_{b3} = V_0\sin\omega t, \qquad (8.6.2)$$

где $V_0 = \sqrt{3}\,\varepsilon_0$. При $\varepsilon_0 = 220$ В величина $V_0 = 380$ В.

Симметричные трехфазные цепи. Выберем сопротивления резисторов одинаковыми $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Токи в фазах $I_k(t) = \varepsilon_k/R$ ($k = 1,2,3$) называют *фазными*. Амплитуды токов одинаковы, токи сдвинуты по фазе на 120°. Симметричная система обладает уникальным свойством: сила тока I_0 в проводе *a-n* равна нулю: $I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = (1/R)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 0$. Поэтому провод *a-n* называют нулевым. Его можно удалить и уменьшить количество проводов, соединяющих генератор с потребителем, до трех. Эти три провода мы и видим повсюду на линиях дальней электропередачи.

8.6.4. Триумф трехфазного тока. Первая электростанция с паровой машиной, использующей уголь и нефть, была построена под руководством Т. Эдисона в Нью-Йорке (1882 г.). Через несколько лет стало ясно, что для получения дешевой электроэнергии необходимо строить станции в местах, богатых гидроресурсами. Возникла проблема передачи электроэнергии на большие расстояния. Для снижения потерь в подводящих проводах необходимо повысить напряжение (см. задачу 2.4.7). Однако создание генераторов высокого постоянного напряжения было связано с большими техническими трудностями. Переменное напряжение в этом отношении более удобно — используя трансформатор, можно повышать или понижать напряжение.

В 80-е годы XIX столетия шло оживленное обсуждение достоинств и недостатков двухфазных и трехфазных генераторов напряжения. Огромную роль в решении проблем электрификации сыграла Франкфуртская выставка 1891 года. Многие фирмы предлагали городу различные варианты проектов строительства электростанции на постоянном и переменном токах. Для выяснения проблемы было решено устроить международную выставку и дать возможность авторитетным ученым выбрать наиболее оптимальный способ передачи электроэнергии.

Германской фирме АЭГ было предложено осуществить передачу электроэнергии на огромное по тем временам расстояние — 170 км. В этой фирме с 1887 г. работал Доливо-Добровольский, исключенный по политическим мотивам из Рижского политехнического института в 1881 г. Строительство ЛЭП

проходило в большой спешке. За полгода Доливо-Добровольский должен был собрать небывалый по мощности асинхронный двигатель и трехфазный трансформатор, патенты на которые он получил в 1889 г. На изготовление опытных конструкций не хватало времени, некоторые детали продумывались в течение часа. 25 августа 1891 г. вся установка, включенная без предварительного испытания, стала хорошо работать. Международная комиссия дала высокую оценку всем параметрам ЛЭП. Доливо-Добровольский был признан ведущим электротехником, его имя приобрело мировую известность. В XX веке трехфазная система утвердилась во всем мире.

8.7. Трехфазный асинхронный двигатель

В 1885 г. итальянский физик Г. Феррарис в 1888 г. и югославский изобретатель Н. Тесла открыли явление вращающегося магнитного поля. На его основе Тесла построил первый асинхронный двигатель. Подлинная революция в электротехнике произошла только после изобретения Доливо-Добровольским зимой 1889 г. асинхронного трехфазного электродвигателя. По техническим показателям этот двигатель превосходил все существующие тогда электромоторы. С этого времени началось быстрое внедрение электродвигателей во все сферы производства.

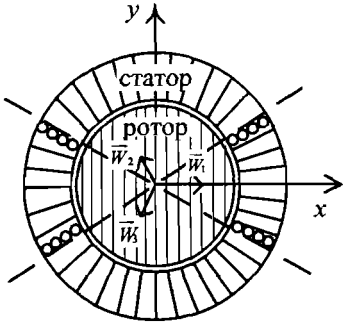


рис. 8.7.1

Принцип работы асинхронного двигателя состоит в том, что токи в обмотках статора порождают *бегущее магнитное поле*, которое индуцирует токи в витках ротора и, взаимодействуя с этими токами, создает вращательный момент сил Ампера. Для получения вращающегося магнитного поля в трехфазной системе нужны три обмотки, оси симметрии которых образуют друг с другом углы равные 120°. Включим обмотки в сеть трехфазного напряжения по схеме звезда.

8.7.1. Двухполюсное бегущее магнитное поле. На рис. 8.7.1 показано сечение обмотки одной фазы статора в плоскости *xy*. Проводники обмотки равномерно намотаны на одну треть площади внутренней поверхности статора. Две другие обмотки заполняют соседние участки статора. Тонкий воздушный зазор отделяет статор от ротора, выполненного из медных стержней, торцевые концы которых замыкаются накоротко медными кольцами (так называемое «беличье колесо»). Ось вращения ротора проходит через точку *O* и направлена по оси *z*.

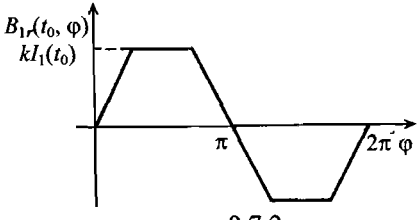


рис. 8.7.2

Найдем индукцию магнитного поля, создаваемого током, протекающим

через обмотку одной фазы. Ток силой $I_1(t) = I_c\cos\omega t$, проходящий через обмотку, создает магнитное поле, силовые линии которого пересекают статор и ротор. Ось обмотки направлена по оси x, число витков — N, толщина зазора — d. Проведем вокруг части проводников обмотки замкнутый контур и запишем следствие закона Максвелла-Ампера (5.5.1). Поскольку величина напряженности магнитного поля в воздушном зазоре значительно больше величины напряженности поля в металле, то вкладом поля в металле можно пренебречь. В зазоре вектор напряженности поля перпендикулярен поверхностям статора и ротора. Используя закон Максвелла–Ампера получим *радиальную* компоненту индукции поля в зазоре $B_{1r}(t, \varphi)$, где φ — угол, отсчитываемый от оси x. На рис. 8.7.2 изображен график функции $B_{1r}(t_0, \varphi)$ при фиксированном значении $t = t_0$ (области линейной зависимости ограничены интервалами равными $\pi/3$). Обычно для упрощения последующего анализа радиальную компоненту магнитной индукции записывают в виде $B_{1r}(t, \varphi) = kI_1(t)\sin\varphi$, где $k = \mu_0 N/(2d)$. В векторной форме индукция поля

$$\vec{B}_1(t, \varphi) = kI_1(t)\sin\varphi\, \vec{n}_1(\varphi), \quad \vec{n}_1 = \vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_2\sin\varphi .$$

Здесь $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ — единичные векторы, направленные по осям x и y.

Ось первой обмотки направлена по единичному вектору $\vec{w}_1 = \vec{e}_1$. Ориентацию осей двух других обмоток зададим единичными векторами

$$\vec{w}_2 = \vec{e}_1\cos(2\pi/3) + \vec{e}_2\sin(2\pi/3), \quad \vec{w}_3 = \vec{e}_1\cos(4\pi/3) + \vec{e}_2\sin(4\pi/3). \qquad (8.7.1)$$

Через эти обмотки протекают токи $I_2(t) = I_c\cos(\omega t - 2\pi/3)$ и $I_3(t) = I_c\cos(\omega t - 4\pi/3)$, которые создают магнитные радиальные поля. Радиальные компоненты магнитной индукции в зазоре

$$B_{2r}(t, \varphi) = kI_2(t)\sin(\varphi - 2\pi/3), \qquad B_{3r}(t, \varphi) = kI_3(t)\sin(\varphi - 4\pi/3).$$

Три обмотки создают в зазоре радиальное магнитное поле. Учитывая значения векторов $\vec{w}_n$, находим

$$B_r(t, \varphi) = B_{1r}(t, \varphi) + B_{2r}(t, \varphi) + B_{3r}(t, \varphi) =$$
$$= kI_c[\cos\omega t\sin\varphi + \cos(\omega t - 2\pi/3)\sin(\varphi - 2\pi/3) + \cos(\omega t + 2\pi/3)\sin(\varphi + 2\pi/3)].$$

После тригонометрических преобразований получим радиальную компоненту индукции в зазоре в виде *поля бегущей волны*

$$B_r(t, \varphi) = B\sin(\varphi - \omega t), \qquad (8.7.2)$$

где $B = 3kI_c/2$. Следовательно, некоторое значение радиальной компоненты вектора индукции «бежит» в воздушном зазоре с угловой скоростью ω в положительном направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки. Компоненты вектора $\vec{B}(t, \varphi)$:

$$B_x(t, \varphi) = B_r(t, \varphi)\cos\varphi, \quad B_y(t, \varphi) = B_r(t, \varphi)\sin\varphi, \quad B_z(t, \varphi) = 0. \qquad (8.7.3)$$

Для того чтобы изменить направление распространения бегущей волны, достаточно изменить порядок подключения двух любых пар обмоток к генератору трехфазного напряжения. Например, переключение первой и второй обмоток приводит к радиальной компоненте магнитной индукции

$$B_r'(t, \varphi) = kI_c[\cos(\omega t - 2\pi/3)\sin\varphi + \cos\omega t\sin(\varphi - 2\pi/3) + \\ + \cos(\omega t + 2\pi/3)\sin(\varphi + 2\pi/3)] = B\sin(\varphi + \omega t - 2\pi/3),$$

распространяющейся в зазоре в направлении вращения часовой стрелки.

8.7.2. Ротор в бегущей волне магнитного поля. Положение средней плоскости сечения ротора С зададим единичным вектором $\vec{n}(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$. Площадь сечения — S. Угловая скорость вращения ротора $\Omega = (0, 0, \Omega)$, $\Omega = d\varphi/dt$. Сопротивление цепи ротора — R, коэффициент индукции, обусловленный потоком рассеяния магнитного поля — L. Сила тока в цепи ротора — I.

Учитывая (8.7.3), найдем поток магнитной индукции через цилиндрическую поверхность ротора, опирающуюся на контур сечения С ротора

$$\Phi(t, \varphi) = \Phi_0\cos(\omega t - \varphi),$$

где $\Phi_0 = BS$. Найдем теперь проекцию на ось z момента сил Ампера, действующих на ротор (см. 7.4.1)

$$M_z = Id\Phi/d\varphi, \qquad M_z = I\Phi_0\sin(\omega t - \varphi),$$

и ЭДС индукции в цепи ротора

$$\varepsilon = -d\Phi/dt, \qquad \varepsilon = \Phi_0(\omega - \Omega)\sin(\omega t - \varphi).$$

Поскольку направления вращения магнитного поля и ротора совпадают, то при $\Omega = \omega$ сила тока, протекающего в цепи ротора, равна нулю. Обычно в рабочем режиме значение $\Omega = 0{,}95\omega$: ротор и магнитное поле вращаются с разными угловыми скоростями — асинхронно, а силовые линии магнитного поля «скользят» относительно ротора. Поэтому при анализе работы двигателя с постоянной скоростью вводят величину s, называемую *скольжением*, $s\omega = \omega - \Omega$. При постоянной скорости вращения $\varphi = \Omega t$,

$$\varepsilon(t) = s\varepsilon_0\sin(s\omega t), \qquad M_z(t) = I\Phi_0\sin(s\omega t),$$

где $\varepsilon_0 = \omega\Phi_0$. Уравнение цепи ротора и условие вращения с постоянной угловой скоростью Ω приобретают вид

$$LdI/dt + IR = s\varepsilon_0\sin(s\omega t), \tag{8.7.4}$$

$$0 = M - M_0, \tag{8.7.5}$$

где M_0 — величина проекции момента внешней силы на ось z, $M = \langle I\Phi_0\sin s\omega t\rangle$ — среднее значение момента сил Ампера.

Решение уравнения (8.7.4) ищем в виде $I(t) = A\sin(s\omega t + \alpha)$. Подставим $I(t)$ в (8.7.4) и приравняем нулю коэффициенты при $\cos(s\omega t)$ и $\sin(s\omega t)$. В результате найдем значения

$$A = s\varepsilon_0/Z, \quad \cos\alpha = R/Z, \quad \sin\alpha = -sX_L/Z, \quad Z = [R^2 + (sX_L)^2]^{1/2},$$

где $X_L = \omega L$. Следовательно, среднее значение момента сил Ампера

$$M(s) = (A\Phi_0/2)\cos\alpha = (s\omega\Phi_0{}^2R/(2[R^2 + (sX_L)^2]). \qquad (8.7.6)$$

Функция $M(s)$ достигает максимального значения $M_m = \omega\Phi_0{}^2/(4X_L)$ при $s = s_{кр}$, $s_{кр} = R/X_L$. Следовательно, $M(s) = 2M_m/[s_{кр}/s + s/s_{кр}]$. Обычно $s_{кр} \sim 0{,}1$. При старте $s = 1$ — ротор заторможен. Величина момента в начале пуска $M(1) \approx 2M_mR/X_L$.

В современных двигателях реальные характеристики не вполне точно описываются зависимостью (8.7.6). При больших скольжениях сопротивление R растет, т. к. ток вытесняется к поверхности ротора. В результате удается увеличить пусковой момент и сократить время разгона двигателя[1].

Тест

1. В схеме рис. 8.3.1 ЭДС генератор переменного напряжения $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$, где $\varepsilon_0 = 1$ В, частота $\nu = \omega/2\pi = 50$ Гц, сопротивление резистора $R = 1$ Ом, индуктивность катушки $L = 0{,}02$ Гн. Сила тока в цепи $I(t) = (\varepsilon_0/R)\cos\omega t$. Амплитуда напряжения на конденсаторе:

А. 16 В, **Б.** 32 В, **В.** 6,28 В, **Г.** 62,8 В, **Д.** 31,4 В.

2*. Схема рис. 8.3.1 состоит из последовательно соединенных резистора, конденсатора, катушки и генератора переменного напряжения. Добротность контура, равна $Q = 100$. Амплитуда тока при резонансе $I_m = 0{,}3$ А. Амплитуда тока при частоте равной половине резонансной частоты:

А. 2 мА, **Б.** 3 мА, **В.** 1 мА, **Г.** 4 мА, **Д.** 8 мА.

3. Колебательный контур, изображенный на рис. 8.3.1, подключен к генератору переменного напряжения с ЭДС равной $\varepsilon = \varepsilon_0\cos^2\omega t$. Резонансная частота контура равна ω_0. Частота ω, при которой наступит резонанс:

А. $\omega = 4\omega_0$, **Б.** $\omega = \omega_0$, **В.** $\omega = 2\omega_0$, **Г.** $\omega = \omega_0/2$, **Д.** $\omega = \omega_0/3$.

4-7. В первичную обмотку идеального трансформатора, содержащую n_1 витков, включен генератор напряжения $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$, $\varepsilon_0 = 100$ В. Вторичная обмотка, содержащая n_2 витков, подключена к резистору сопротивлением $R_2 = 2$ Ом. Отношение $n_1/n_2 = 50$.

---

[1] Отметим, поле бегущей волны в зазоре электромагнита $B_r(t, \varphi) = B\sin(\varphi - \omega t)$ и вращающееся поле $B_x(t) = B\cos\omega t$, $B_y(t) = B\sin\omega t$ представляют собой принципиально различные явления. Поэтому «анализ» работы асинхронного двигателя во вращающемся поле лишен смысла (см. Е.И. Бутиков, А.С. Кондратьев. Физика — 2. Физматлит. Невский Диалект. Москва-Санкт-Петербург. 2000. С. 117).

4. Амплитуда напряжения на резисторе

А. 2 В, **Б.** 5 В, **В.** 50 В, **Г.** 25 В, **Д.** 1 В.

5. Амплитуда силы тока во вторичной обмотке

А. 10 А, **Б.** 1 А, **В.** 5 А, **Г.** 0,25 А, **Д.** 0,02 А.

6. Амплитуда силы тока во первичной обмотке

А. 1 А, **Б.** 5 А, **В.** 0,02 А, **Г.** 2,5 А, **Д.** 0,1 А.

7. Мощность, развиваемая генератором

А. 10 Вт, **Б.** 2 Вт, **В.** 50 Вт, **Г.** 1 Вт, **Д.** 0,1 Вт.

Глава 9. Электромагнитные волны

9.1. Основы теории электромагнитных волн

9.1.1. Рождение теории поля. Спустя почти два столетия после открытия Ньютоном уравнений движения материальных тел Джеймс Клерк Максвелл получил уравнения, описывающие динамику новой формы материи — электромагнитного поля. В 1864 г. в статье «Динамическая теория поля» он впервые сумел объединить и единым образом описать электрические и магнитные явления. Максвелл впервые получил систему уравнений, позволяющую найти шесть компонент векторов $\vec{E}(t,\vec{r})$ и $\vec{B}(t,\vec{r})$. В частности, он показал, что переменное электрическое поле в некоторой точке порождает в близкой к ней точке переменное магнитное поле. В свою очередь магнитное поле порождает электрическое поле.

Процесс распространения электромагнитного поля в пространстве называется *электромагнитной волной*. Скорость распространения волны в вакууме равна скорости света $c = 3 \cdot 10^8$м/с.

В 1950 г. А. Эйнштейн писал: «Вообразите себе охватившие его чувства, когда полученные им дифференциальные уравнения показали, что электромагнитные поля распространяются в виде поляризованных волн со скоростью света. Мало кому из людей в мире довелось испытать такое!»

9.1.2. Излучение электромагнитных волн. В 1888 г. немецкий физик Г. Герц опубликовал статью, в которой описал множество блестящих экспериментов, неопровержимо доказывающих существование электромагнитных волн, предсказанных Максвеллом. Волны излучал диполь, состоящий из двух пластин, присоединенных к индукционной катушке и разделенных искровым промежутком. При проскакивании искры в системе возникали собственные колебания тока частотой $\nu = 5 \cdot 10^8$ Гц; диполь излучал волны длиной $\lambda = 0{,}6$ м.

В общем случае источником излучения являются токи и заряженные частицы, движущиеся в электромагнитных полях с переменной скоростью,

возбужденные атомы, молекулы и ядра. В 1934 г. П.А. Черенков обнаружил излучение электронов, движущихся в среде с постоянной скоростью v при условии $v > c_m$, где c_m — скорость света в среде (Нобелевская премия, 1958 г.). Источником излучения может быть и неподвижный заряд, находящийся в среде с переменной диэлектрической проницаемостью. Токи, возникающие на стенках трещин, образующихся при подвижках горных пород перед землетрясением, также являются источниками излучения.

В радиотехнических устройствах используются передающие антенны – системы проводников с переменными токами. Излучающие свойства антенны зависят от длины проводников, характера распределения токов в проводах и их взаимного расположения. Электромагнитное поле создается любым электронным прибором — телефоном, телевизором, компьютером и т. д. Современные средства радиоперехвата позволяют с помощью узконаправленной антенны и чувствительной аппаратуры на расстоянии до 300 м фиксировать все, что пишется или читается на вашем жестком диске или посылается на экран монитора. С 1964 г. действует англо-американская система Echelon, включающая наземные станции и спутники Intelsat (International Telecommunications Satellite Organisation), подслушивающие любые сигналы из Интернета, подземных кабелей, каналов радиосвязи и международной связи Sigint (Signals Intelligence). Европейские фирмы теряют в результате промышленного шпионажа несколько миллиардов евро в год. Более 30 стран имеют собственные всемирные сети электронного шпионажа. Весь мир живет «под колпаком».

9.1.3. Поляризация волны. Состояние поля полностью определяется вектором напряженности электрического поля $\vec{E}(t,\vec{r})$ и вектором индукции магнитного поля $\vec{B}(t,\vec{r})$. К сожалению, в СИ размерность этих величин различна. Поэтому будем ссылаться на величины E и cB, имеющие одинаковые размерности.

Плоская электромагнитная волна представляет собой процесс распространения поля, для которого векторы $\vec{E}$ и $c\vec{B}$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны, заданным единичным вектором $\vec{n}$. Положение проекций векторов $\vec{E}$ и $c\vec{B}$ на плоскости Q, перпендикулярной вектору $\vec{n}$, определяется специфической для электромагнитного поля характеристикой — *поляризацией*. Волна называется *эллиптически* поляризованной, если концы проекций векторов $\vec{E}$ и $c\vec{B}$ на плоскость Q ($\left|\vec{E}\right| = \left|c\vec{B}\right|$ в любой момент времени) вращаются по эллипсу. При движении концов векторов по окружности волна называется *циркулярно*-поляризованной. В случае *линейно*-поляризованной волны проекции веторов $\vec{E}$ и $c\vec{B}$ принадлежат двум взаимно перпендикулярным прямым.

Неполяризованное излучение представляет собой наложение волн с хаотично ориентированными векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в плоскости, перпендикулярной направлению распространения излучения.

Пример 9.1.1. 27 апреля 1947 г. на ускорителе электронов — *синхротроне* компании «Дженерал Электрик» — впервые визуально наблюдалось излучение электронов, движущихся по окружности в переменном, неоднородном магнитном поле. При энергии 80 Мэв яркое голубовато — белое свечение, сосредоточенное в узком конусе с осью, направленной по скорости пучка электронов, было видно даже при дневном свете. Излучение «случайно» обнаружил инженер Ф. Хабер при проведении профилактических работ, когда снял защитный слой со стенки камеры ускорителя. При энергии 30 Мэв наблюдается излучение темнокрасного цвета. С увеличением энергии максимум интенсивности излучения сдвигается в область ультрафиолетовых и рентгеновских длин волн. Это явление получило название *синхротронного или магнитотормозного излучения*. На самом большом электрон — позитронном накопительном кольце PETRA (*Positron-Electron Tandem Ring Accelerator*, Гамбург, ФРГ, 1978—86 г.г.) радиусом 200 м максимум интенсивности излучения электронов с энергией 20 Гэв наблюдался в области 0,016 нм.

Одни их первых теоретических работ по анализу поляризационных свойств излучения релятивистских электронов принадлежат физику Московского университета А. А. Соколову. В плоскости орбиты излучение обладает линейной поляризацией. Излучение, распространяющееся под углом к плоскости орбиты, имеет эллиптическую поляризацию.

Измерения интенсивности и поляризации космического синхротронного излучения позволяют получить информацию о концентрации и энергетическом спектре электронов и магнитном поле в удаленных областях Вселенной. Так были получены новые данные о Крабовидной туманности, возникшей в 1054 г. в результате ослепительного взрыва *сверхновой звезды*. Теперь в центре туманности находится *пульсар* (*PSR* — от англ. *Pulsating Sourses of Radioemission* — пульсирующий источник радиоизлучения).

9.1.4. Излучение диполя. Простейший излучатель представляет собой отрезок провода длиной l_0, подключенный в середине генератору напряжения. В радиотехнике его называют *диполем Герца*. Ориентируем проводник параллельно единичному вектору $\vec{d}$, а середину поместим в точку $M(h, 0, -b)$ (рис. 9.1.1).

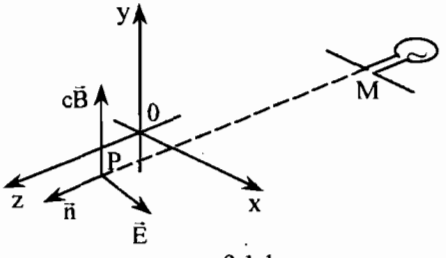


рис. 9.1.1

Сила тока в проводе $I(t, l)$, где l — координата элемента провода Δl. На достаточно больших расстояниях от провода до точки наблюдения $P(x, y, z)$ напряженность электрического поля $\Delta\vec{E}$ и магнитная индукция $\Delta\vec{B}$, создаваемые элементом провода $\Delta\vec{l}$

$$\Delta\vec{E}(t,\vec{r}) = \left(\frac{\vec{e}}{r_{\text{MP}}}\right) f\Delta l\,, \quad \Delta\vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{1}{c}\vec{n}\times\Delta\vec{E}\,,$$

$$\vec{e} = \vec{n}(\vec{n}\vec{d}) - \vec{d}\,, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}_{\text{MP}}}{r_{\text{MP}}}\,,$$

$$f = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI(t - D/c, t)}{dt}\,, \tag{9.1.1}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки P, $\vec{r}_{\text{MP}}$ — вектор, направленный от точки M в точку P, $D = |\vec{r}_{\text{MP}} - l\vec{d}\,|$ — расстояние от элемента Δl до точки наблюдения, $I(t, l)$ — сила тока, проходящего через элемент Δl.

Дипольное излучение. А. Если распределение зарядов в проводе изменяется незначительно за время l_0/c, то в этом случае можно не учитывать зависимость тока от координаты. Тогда

$$I(t, l) \approx I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}\,,$$

где φ-фаза источника излучения. Полагая $D \approx r_{\text{MP}}$ и суммируя по всем элементам провода, получим напряженность и индукцию поля в *волновой зоне*

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{e}\frac{G}{r_{\text{MP}}}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r_{MP} - \varphi\right),$$

$$c\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{n}\times\vec{E}(t,\vec{r})\,, \tag{9.1.2}$$

$$G = \frac{c\mu_0 I_0 l_0}{2\lambda} = \frac{I_0 R l_0}{2\lambda}, \quad R = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом} = 376{,}73 \text{ Ом}.$$

Выражение (9.1.2) описывает *монохроматическую линейно-поляризованную сферическую волну*. Частота волны $\nu = \omega/2\pi$, период $T = 1/\nu$. Длина волны $\lambda = cT$ удовлетворяет условию $l_0 << \lambda$. Функцию

$$\Phi = \omega t - \frac{\omega}{c}r_{MP} - \varphi$$

называют *фазой волны*.

Геометрическое место точек, для которых фаза имеет одно и то же значение, называют *фронтом волны*. Очевидно, положение фронта волны определяется уравнением

$$\omega t - \frac{\omega}{c}r_{\text{MP}} - \varphi = \text{const}.$$

Если в момент времени $t = t_0$ фронт волны — сфера радиусом a, то через промежуток времени $t - t_0$ фронт волны — сфера радиусом $r = a + c(t - t_0)$.

Приближение плоской волны. На рис. 9.1.1 изображен проводник, для которого вектор $\vec{d} = (1, 0, 0)$. Точка $M(h, 0, -b)$ находится на расстоянии $s = \sqrt{h^2 + b^2}$ от начала координат. Расстояние

$$r_{\text{MP}} = \sqrt{(x-h)^2 + (z+b)^2}\,.$$

Рассмотрим небольшую область в окрестности начала координат $|x|$, $|y|$, $|z| << s$. Тогда в знаменателе (9.1.2) можно положить $r_{\text{MP}} \approx s$, а в аргументе косинуса, используя бином Ньютона, взять более точное выражение

$$r_{\text{MP}} \approx s - \frac{xh}{s} + \frac{zb}{s},$$

которое представим в виде $r_{\text{MP}} \approx s + \vec{n}\vec{r}$, где $\vec{n} = (-\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$ — единичный вектор,

$$\frac{h}{s} = \sin\alpha, \ \frac{b}{s} = \cos\alpha,$$

$\vec{r} = (x, 0, z)$ — координаты точки P. Тогда из (9.1.2) получим электромагнитное поле в виде плоской волны, распространяющейся в направлении вектора $\vec{n}$:

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = a\,\vec{e}\cos\left(\omega t - kn_x x - kn_z z - ks - \varphi\right), \vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{\vec{n}\times\vec{E}\ (t,\ \vec{r})}{c}, \qquad (9.1.3)$$

где $a = \dfrac{G}{s}$, $\vec{e} = \vec{n}(\vec{n}\vec{d}) - \vec{d}$, $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число.

Для обнаружения поляризации возьмем решетку из проволок, параллельных оси x. Электрическое поле волны возбуждает в них токи. Эти токи создают свое поле излучения в виде отраженной волны, которая почти компенсирует первоначальное поле. Если повернуть решетку на 90°, то ослабления поля не наблюдается.

Пример 9.1.2. Глаз человека не обладает чувствительностью к поляризации света, так как молекулы родопсина — зрительного пигмента в фоторецепторных клетках глаза — ориентированы хаотично. Однако у многих насекомых фоторецепторные мембраны свернуты в длинные трубочки, подобно решетке из проводов. Эта биосистема придает фоторецептору качественно новое свойство — способность анализировать поляризацию света. Эксперименты показали, что в тех случаях, когда пчела не может видеть Солнца, закрытого облаками, она ориентируется благодаря чувствительности глаз к поляризации света. С другой стороны хорошо известно, что солнечный свет неполяризован. Однако, проходя через атмосферу, свет рассеивается из-за флуктуаций плотности воздуха. Этот эффект был впервые описан английским физиком Джоном Релеем в 1871 г. При рассеянии свет частично линейно поляризуется — направление поляризации перпендику-

лярно плоскости треугольника, в вершинах которого находятся наблюдатель, Солнце и наблюдаемая область неба. Изобразите на рисунке эту ситуацию убедитесь в справедливости этого утверждения.

Б. Пусть $I = I(t)$ — непериодическая функция. Тогда, после суммирования по всем элементам проводника, получим напряженности поля волны, для которых понятия частота и длина волны лишены смысла.

Излучение «длинного провода». Рассмотрим проводник, подключенный к генератору высокочастотного напряжения в случае $l_0 \sim \frac{c}{\nu} = \lambda$. Теперь нельзя пренебрегать запаздыванием поля в пределах проводника и необходимо учитывать зависимость тока от координаты l. Наиболее распространенным типом излучателя является полуволновой вибратор длиной $l_0 = \lambda/2$. Сила тока в проводе в режиме стоячей волны

$$I(t, l) = I_0 \cos\left(\pi n \frac{l}{l_0}\right) \sin\omega t, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots .$$

В этом случае напряженности полей существенно отличаются от (9.1.2).

9.1.5. Волны в волноводе. Обычно волновод представляет собой металлическую трубу, служащую для передачи электромагнитной энергии от источника к нагрузке.

Наиболее простым волноводом является труба прямоугольного сечения со сторонами a и b.

Пусть ось z параллельна стенкам трубы. В волноводе могут существовать волны двух типов, распространяющиеся в направлении оси z: поперечно-электрические со структурой полей $\vec{E} = (E_1, E_2, 0)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ и поперечно-магнитные с полями вида $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, 0)$. Очевидно, волны в волноводе нельзя отнести ни к поперечным, ни к продольным волнам. Условием возбуждения волн частотой ν является неравенство

$$\nu > \nu_{m,n}, \; \nu_{m,n} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \; ; m, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Скорость фронта волны в волноводе больше скорости света.

9.1.6. Интенсивность и мощность излучения. Перенос энергии электромагнитного поля характеризуется *вектором Пойнтинга*

$$\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} . \tag{9.1.4}$$

Поскольку $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, то $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Учитывая (9.1.2), получим

$$\vec{S} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{n} = \frac{c}{\mu_0} B^2 \vec{n} \tag{9.1.5}$$

Вектор $\vec{S}$ является плотностью потока энергии поля. Размерность $[S]$ = Вт/м^2. Среднее по времени значение $|\vec{S}|$ определяет *интенсивность волны:* $J = c\varepsilon_0(\vec{E}^2)_{ср}$. Следовательно, J — количество электромагнитной энергии, переносимой за 1 с через площадку 1 м^2, перпендикулярную направлению распространения волны.

Интенсивность солнечного света на границе земной атмосферы J_0 = 1,373кВт/м^2, напряженность электрического поля $E_0 \sim$ 1кВ/м.

Дипольное излучение. Для линейно-поляризованной волны (9.1.3) среднее значение интенсивности

$$J(\vec{n}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2, \quad \vec{E}_0 = a\vec{e}.$$

Подставляя амплитуду a и $\vec{e}$, получим

$$J(\vec{n}) = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 a^2[d^2 - (\vec{d}\vec{n})^2].$$

Интенсивность излучения в направлении вектора $\vec{d}$ равна нулю и достигает максимальной величины в направлении, перпендикулярном вектору $\vec{d}$. Полная мощность излучения в окружающее пространство

$$P = \frac{1}{2}I_0^2 R_0, \quad R_0 = \frac{2}{3}\pi R\left(\frac{l_0}{\lambda}\right)^2$$

пропорциональна квадрату частоты только в случае дипольного излучения при $l \ll \lambda$. Здесь мощность представлена как мощность, поглощаемая некоторым активным сопротивлением R_0, называемым *сопротивлением излучения*. Представляя мощность в виде

$$P = \frac{4\pi}{3R}G^2,$$

получим амплитуду напряженности электрического поля $E = G/r$ на расстоянии r от диполя,

$$E = \frac{1}{r}\sqrt{3RP/4\pi} \quad \text{или} \quad E\,(\text{В/м}) = \frac{3}{r(\text{м})}\sqrt{10P}\,(\text{Вт}). \qquad (9.1.6)$$

Излучение «длинного провода». При условии $l_0 \sim \lambda$ полная мощность изучения «длинного провода»

$$P = \frac{1}{2}I_0^2 R_0, \quad R_0 \approx \frac{0{,}51R}{\pi}$$

уже не содержит множителя ω^2, характерного для дипольного излучения.

Отметим, что согласно нормам защиты населения величина напряженности электрического поля не должна превышать 2 В/м в диапазоне 30–300 МГц.

9.1.7. Шкала электромагнитных волн — классификация волн по частотам или длинам волн. *Радиодиапазон* лежит в области от 100 кГц до 30 гГц (приставка *гига* — от греч. *gigas* —гигантский, 1 ГГц = 10^9 Гц) — этим частотам соответствуют длины волн от 3000 м до 0,01 м. К нему примыкает микроволновая область — *миллиметровые волны* от 0,01 м до 0,5 мм. Здесь источниками излучения являются токи и электроны, движущиеся в электромагнитных полях. Далее следует *инфракрасный диапазон* (до 760 нм). Источник излучения — молекулы нагретого вещества. Человек создает инфракрасное изучение в диапазоне от 5 до 10 мкм.

Излучение в интервале длин волн от 760 нм ($\nu = 4{,}3 \cdot 10^{14}$ Гц) до 390 нм ($\nu = 7{,}7 \cdot 10^{14}$ Гц) лежит в области чувствительности человеческого глаза — это *видимый свет*. За ним — *диапазон ультрафиолетовых волн*, занимающий область частот до $5 \cdot 10^{14}$ Гц ($\lambda = 6$ нм). За областью ультрафиолета — область *рентгеновского излучения* (до 0,01 нм), возникающего при столкновении электронов с атомами тяжелых металлов или при движении высокоэнергичных электронов в магнитном поле. Излучение с более короткими длинами волн называется *гамма-излучением*, испускаемым возбужденными ядрами.

9.1.8. Эксперименты Герца. Примерно к 1860 г. благодаря работам А.М. Ампера, немецких физиков Ф. Неймана, В.Э. Вебера, Г. Гельмгольца и многих других ученых электродинамика считалась наукой окончательно завершенной. Никакая необходимость не заставляла Максвелла придумывать новую электродинамику. Основным побуждением Максвелла было восхищение новыми идеями Фарадея, которые ученые того времени не способны были воспринять. По этой причине в 1832 г. Фарадей передал в архив письмо, в котором содержалась идея электромагнитных волн. Его обнаружили только в 1938 г. Особенность работ Фарадея — в постановке уникальных экспериментов, позволяющих проникнуть в суть явлений и практически полное отсутствие математических расчетов. «Приступив к изучению труда Фарадея, — писал Максвелл — я установил что его метод понимания явлений был также математическим, хотя и не представленным в форме обычных математических символов». При жизни Максвелла его теория не получила всеобщего признания. В 1950 г. А. Эйнштейн писал: «Физикам понадобилось несколько десятилетий, чтобы понять все значение открытия Максвелла, — настолько дерзким был вызванный его гением скачок вперед по сравнению с концепциями современников». В 1884 г. немецкий физик Г. Герц по совету Гельмгольца приступил к изучению теории Максвелла с целью проверки и, возможно, опровержения.

После знакомства с теорией излучения легче понять те трудности, которые преодолел Г. Герц на пути к открытию электромагнитных волн. Сначала он обнаружил взаимодействие незамкнутых проводников. Один из них, получивший название вибратор, представлял собой два отрезка провода, подключенных к индукционной катушке (рис. 9.1.2). При определенной разности

потенциалов в промежутке между ними возникала искра, возбуждались колебания тока и излучалась электромагнитная волна. Для обнаружения волны Герц применил второй проводник — резонатор — прямоугольный контур с промежутком, на концах которого укреплены небольшие медные шарики.

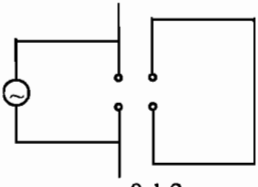


рис. 9.1.2

Первые попытки оказались неудачными. Вскоре он понял, что необходимо уменьшить размеры вибратора для того, чтобы длина волны оказалась порядка размеров резонатора. При работе вибратора Герц наблюдал искру в разрыве цепи резонатора. Эта искра была столь слаба и кратковременна, что наблюдения проводились в темноте. Пытаясь лучше разглядеть искру, он заслонил ее экраном от вспышки света, исходящего от искры вибратора. Длина искры стала меньше. Исследуя этот эффект Герц установил, что ультрафиолетовое излучение искры вибратора увеличивает ионизацию разрядного промежутка. Таким образом, в 1887 г. «случайно» было открыто новое явление, получившее название — *фотоэффект*.

Итак, в резонаторе возникает электрический отклик на ток в вибраторе. Мы понимаем, что электрическое поле волны, почти параллельное вибратору, создает разность потенциалов в прямолинейном проводе антенны только в том случае, если проводники параллельны. Рассчитывая эффект Герц приходит к выводу: на больших расстояниях старая теория «не работает», так как предсказываемая напряженность электрического поля убывает обратно пропорционально кубу расстояния. Пришлось обратиться к теории Максвелла. Герц нашел решение, согласно которому напряженность убывает обратно пропорционально первой степени расстояния. Картины силовых линий полей, «отрывающихся» от вибратора Герца, вошли во все учебники по электродинамике. В процессе своих исследований Герц наблюдал интерференцию, отражение и преломление волн. Стало ясно, что свет — электромагнитная волна. Его эксперименты и теоретические работы произвели огромное впечатление на современников и открыли новые области исследований.

9.1.9. Световое давление. Предположение о существовании светового давления было сделано И. Кеплером в 1619 г. для объяснения отклонения хвостов комет, пролетающих в окрестности Солнца. В 1873 г. Максвелл вычислил величину давления, создаваемого электромагнитной волной при отражении или поглощении волны поверхностью тела. Выдающемуся физику Московского университета П.Н. Лебедеву впервые удалось измерить световое давление в 1899 г.

Пусть плоская волна распространяется в направлении единичного вектора $\vec{n}$. За интервал времени Δt через элементарную площадку ΔA, перпендикулярную вектору $\vec{n}$, волна переносит электромагнитную энергию $J\Delta A\Delta t$ и импульс $\vec{n}\cdot\frac{J}{c}\cdot\Delta A\Delta t$. Величина $u = \frac{J}{c}$ представляет собой объемную плот-

ность энергии волны. Если волна падает на идеально отражающую плоскость площадью S, то приращение импульса волны

$$\Delta\vec{P}_{\text{в}} = -2\,\vec{n}\frac{J}{c}S\Delta t.$$

Следовательно, импульс силы, приобретаемый поверхностью $\Delta\vec{P}_{\text{п}} = 2\,\vec{n}\frac{J}{c}S\Delta t \equiv \vec{F}\,\Delta t$, а давление, создаваемое волной при отражении $p = 2\frac{J}{c} = 2u$. Световое давление, создаваемое солнечным излучением $p = 8{,}6 \cdot 10^{-6}$ Н/м^2.

Световое давление играет важную роль в двух противоположных по масштабам явлениях. Сила светового давления обеспечивает стабильность звезд, противодействуя силам гравитационного сжатия. С другой стороны, используя лазерное излучение, удалось создать оптические ловушки для микрочастиц, ускорители нейтральных частиц, разработать новые методы разделения изотопов и т. д.

Влияние солнечного давления на движение спутника Земли определяется «парусностью» — отношением площади поверхности спутника к его массе. Чем меньше размеры спутника, тем больше «парусность» спутника. По этой причине, например, свет выметает из Солнечной системы мелкие метеорные частицы. Кроме прямых солнечных лучей спутник облучается инфракрасным излучением Земли.

12 августа 1960 г. в США был запущен на почти круговую орбиту высотой 1600 км спутник «*Echo* — 1», предназначенный для пассивной ретрансляции радиосигналов. Масса спутника — 68 кг, диаметр сферического баллона — 30 м. На участках траектории, освещаемой солнечными лучами, сила светового давления может периодически подгонять или, наоборот, тормозить спутник. Через 5 месяцев орбита превратилась в эллиптическую с перигеем на высоте около 900 км и апогеем — 2200 км, за следующие 5—6 месяцев орбита возвратилась к почти круговой форме и снова начала вытягиваться в эллипс с меньшим перигеем. Спутник вошел в атмосферу в мае 1968 г.

9.2. Эффект Доплера

Рассмотрим излучение диполя, установленного на самолете, летящем со скоростью $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. В системе K', связанной с самолетом, напряженность электрического поля волны

$$\vec{E}'(t', x', y', z') = \vec{e}\cos\left(\omega t' - \frac{\omega}{c}\vec{n}\vec{r}'\right),$$

где $\vec{n}\vec{r}' = n_1x' + n_2y' + n_3z'$ — скалярное произведение вектора $\vec{r}' = (x', y', z')$ и единичного вектора $\vec{n}$, задающего направление распространения волны. Наблюдатель находится в неподвижной системе отсчета K. Поскольку $v << c$, то можно пренебречь эффектами теории относительности. В этом

случае время и координаты связаны преобразованием Галилея: $t' = t$, $\vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}'$. Следовательно, в системе K напряженность поля

$$\vec{E}(t, x, y, z) = \vec{e}\cos\left(\omega_{\text{н}}t - \frac{\omega}{c}\vec{n}\vec{r}\right),$$

где величина

$$\omega_{\text{н}} = \omega\left(1 + \frac{\vec{n}\vec{v}}{c}\right)$$

имеет смысл частоты волны, принимаемой неподвижным наблюдателем. При удалении источника излучения ($\vec{n}\vec{v} < 0$) частота принимаемой волны $\omega_{\text{н}} < \omega$.

9.2.1. Спутниковая навигационная система. На рис. 9.2.1 изображен излучатель S, летящий со скоростью $\vec{u} = (u, 0, 0)$ на высоте b. Радиус-вектор точки S равен $\vec{R}(t) = \vec{b} + \vec{u}t$, $\vec{b} = (0, 0, b)$. В системе отсчета, связанной с наблюдателем фаза волны

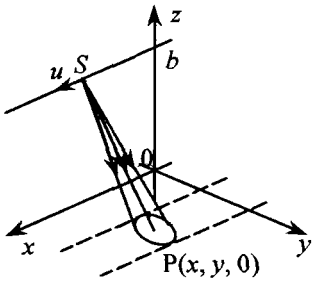


рис. 9.2.1

$$\Phi = \omega t - \frac{\omega}{c}r_{\text{SP}},$$

где r_{SP} — расстояние от излучателя до точки наблюдения $P(x, y, 0)$ на поверхности Земли,

$$r_{\text{SP}}(t) = \sqrt{(x - ut)^2 + y^2 + b^2}.$$

Частота волны, принимаемой в точке P равна производной фазы: $\omega_{\text{н}} = d\Phi/dt$ или

$$\nu_{\text{н}} = \nu\left(1 - \frac{1}{c}\frac{dr_{\text{SP}}}{dt}\right),$$

где $\nu = \omega/2\pi$. Производная

$$\frac{dr_{\text{SP}}}{dt} = -(x - ut)\frac{u}{r_{\text{SP}}(t)}$$

представляет собой радиальную скорость излучателя. Если излучатель приближается к наблюдателю, то $\nu_{\text{н}} > \nu$. При удалении излучателя частота принимаемой волны уменьшается.

Сдвиг частоты $\varepsilon(t) = \nu_{\text{н}} - \nu$ равен

$$\varepsilon(t) = (x - ut)\frac{u}{\lambda r_{\text{SP}}(t)}.$$

На траверсе сдвиг частоты $\varepsilon(t)$ равен нулю. Изобразите график функции $\varepsilon(t)$. По графику сдвига частоты $\varepsilon(t)$ можно найти координаты наблюдателя.

Действительно, в момент времени $t_m = \frac{x}{u}$ доплеровский сдвиг $\varepsilon(t_m) = 0$, а расстояние $r_{SP}(t_m) = r_m$, $r_m = \sqrt{y^2 + b^2}$. Крутизна графика в точке t_m — производная функции $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{u^2}{\lambda' r_m}$, однозначно связана с расстоянием r_m. Измерив t_m, найдем координату $x = ut_m$, а по крутизне определим наклонную дальность r_m и координату $y = \sqrt{r_m^2 - b^2}$.

Современная навигационная система GPS (Global Positioning Systems), разработанная в США, принимает сигналы одновременно с двух спутников и вычисляет координаты объекта с точностью до 20 метров. Само устройство по габаритам не больше портсигара. В 1995 г. сеть имела 24 спутника, расположенных на высоте около 20 000 км. Автомобильная система Never Lost (не потеряешься) «привязывает» координаты к ближайшей дороге или улице, рассчитывает оптимальный маршрут, показывая на экране все повороты и время поездки.

9.3. Радио и телевидение

9.3.1. Сигналы и спектры сигналов. Любая информация может быть преобразована радиосхемой в электрический сигнал — напряжение $V(t)$ или ток $I(t)$. Звуковое давление в некоторой точке представляет собой функцию $p(t)$. Камертон создает давление, представляющую собой гармоническую функцию $p(t) = a \cos(\Omega_0 t + \alpha)$. Давление $p(t)$, соответствует музыкальному звуку частотой Ω_0.

В III.5.6 показано, что периодическую функцию $p(t)$ с периодом $T = 2\pi/\Omega_0$ можно представить в виде суммы гармонических функций с частотами кратными основной частоте Ω_0:

$$p(t) = a_1 \cos(\Omega_0 t + \alpha_1) + a_2 \cos(2\Omega_0 t + \alpha_2) + \dots .$$

Здесь a_n, α_n ($n = 1, 2, \dots$) — постоянные амплитуда и фаза. Первое слагаемое называется *основной гармоникой*, остальные — *высшими гармониками* или обертонами. Совокупность коэффициентов a_n называется *спектром функции* $p(t)$.

Периодическая функция образует дискретный спектр (от лат. *discrettus* — прерывистый): график зависимости a_n от n представляет собой ряд отрезков убывающей длины. Если $p(t)$ — непериодическая функция, заданная на интервале $[t_2, t_1]$, то спектр — непрерывная функция частоты: $a = a(\Omega)$. Рассмотрим импульс $p(t)$ произвольной формы длительностью $\Delta t = \tau$. Анализ спектра показывает, что чем меньше интервал Δt, тем больше область частот $\Delta\Omega \approx \frac{1}{2\pi\tau}$, в которой функция $a(\Omega)$ заметно отличается от нуля. Интервал $\Delta\Omega$, в котором сосредоточена основная часть энергии сигнала, можно рассматривать как меру ширины спектра импульса.

9.3.2. Модуляция электромагнитной волны. Рассмотрим в качестве «переносчика» информации электромагнитную волну частотой ω. В этом случае для передачи информации одна из характеристик волны, излучаемой антенной — амплитуда, поляризация, фаза или частота должны изменяться в соответствии с передаваемым сообщением. Этот процесс называется модуляцией (от лат. *modulatio* — мера, размеренность). При любом способе модуляции скорость изменения параметров должна быть настолько малой, чтобы за период колебаний $2\pi/\omega$ модулируемый параметр почти не изменился.

Пусть на рис. 9.1.1 радиоприемник находится в начале координат. При *амплитудной модуляции* амплитуда напряженности электрического поля

$$E_0(t) = a + f(t), \quad f(t) = a_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + \ldots + a_n \cos(\Omega_n t + \varphi_n),$$

где $\Omega_n > \Omega_{n-1} > \ldots > \Omega_1$, $\Omega_n << \omega$. Функция $f(t)$ представляет собой медленную функцию времени:

$$\left| \frac{df(t)}{dt} \right| << \omega |f(t)|.$$

Тогда напряженность электрического поля и индукция магнитного поля линейно поляризованной волны, принимаемой в точке (0, 0, 0) равна

$$E_x(t, 0) = E_0(t) \cos(\omega t - \alpha), \qquad cB_y(t, 0) = E_0(t) \cos(\omega t - \alpha), \tag{9.3.1}$$

Подставляя $E_0(t)$, получим

$$E_x(t, 0) = a \cos(\omega t - \alpha) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m}{2} \cos\left[(\omega - \Omega_m)t - \varphi_m - \alpha\right] + \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m}{2} \cos\left[(\omega + \Omega_m)t + \varphi_m - \alpha\right]. \tag{9.3.2}$$

В точке приема модулированная напряженность электрического поля уже не является гармонической функцией, а представляет собой сумму гармонических функций частотами ω, $\omega - \Omega_m$ и $\omega + \Omega_m$ ($m = 1, 2, \ldots, n$). Частота ω называется *несущей*. Остальные — нижними и верхними *боковыми частотами*. Совокупность коэффициентов $a_m/2$ представляет собой спектр амплитуд. Ширина спектра амплитудно-модулированной волны $\Delta\omega = 2\Omega_n$.

При модуляции непериодической функцией $E_0(t)$ длительностью τ ширина спектра $\Delta\omega \sim 2\pi/\tau$ или $\Delta\nu \sim 1/\tau$. Ширина полосы спектра сообщения, содержащего сигналы различной продолжительности, определяется сигналом наименьшей длительности.

9.3.3. Радиосвязь. Общая схема радиосвязи. Радиопередающая система должна содержать несколько основных блоков: устройство, преобразующее передаваемую информацию в электрический сигнал, генератор радиочастотного напряжения, модулятор и передающую антенну. В приемной системе должна находиться антенна и блок, реализующий отклик на волны в фиксированном диапазоне частот. Возбуждаемое в приемной антенне высокочастотное напряжение необходимо преобразовать снова в напряжение

передаваемого низкочастотного сигнала. Этот процесс называется *детектированием*. Детектирование, как и модуляция, возможно только при использовании элементов радиосхемы с нелинейной вольт-амперной характеристикой.

Основной диапазон частот спектра звукового сигнала находится в области от 300 Гц до значений $\nu_m \sim 9000$ Гц, т. е. $\tau \sim 1/\nu_m$. Поэтому при амплитудной модуляции ширина полосы частот радиостанции $\Delta\nu \sim \nu_m$. Эта полоса расположена симметрично относительно несущей частоты $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

В заданном диапазоне частот $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ можно расположить не более $\Delta\nu/\nu_m$ станций. Нетрудно убедиться, что емкость диапазонов возрастает с увеличением несущей частоты. Например, в диапазоне (ν_0, $10\nu_0$) могут работать $9\nu_0/\nu_m$ станций, а в диапазоне ($100\nu_0$, $1000\nu_0$) – $900\nu_0/\nu_m$ станций.

Изобретение радио. В 1892 г. английский физик У. Крукс писал «Нельзя ли с помощью лучей Герца устроить телеграф без проводов и без телеграфных столбов?». 7 мая 1895 г. российский ученый А.С. Попов на заседании Русского физико-химического общества уже демонстрирует первое радиоприемное устройство. 12 марта 1896 г. он передает на расстояние 250 м азбукой Морзе первую в мире телеграмму — «Генрих Герц». Приемником в экспериментах Герца служил контур, в зазоре которого наблюдалась искра. Попов нашел техническое решение приема волн, используя «когерер» — трубку с металлическим порошком. В январе 1896 г. вышла статья с описанием схемы приемника. С мая 1896 г. начинаются испытания радиоаппаратуры на Балтийском флоте, с 1899 г. — на Черноморском флоте. В 1899 г. Попов патентует новый «телефонный приемник». В знак международного признания ему присудили Большую золотую медаль на Всемирной парижской выставке 1900 г. В 1901 г. изготовлены первые корабельные станции, начата подготовка радиоспециалистов.

Первый сигнал через Атлантику. В январе 1897 г. Попов узнает об открытии беспроволочного телеграфа итальянским изобретателем Гульермо Маркони. В 1895 г. он решил ту же задачу, послав сообщение на расстояние 3 км, в мае 1896 г. приехал в Лондон и получил неограниченную поддержку правительства Британской империи. В 1897 г. он взял патент на применение электромагнитных волн для беспроволочной связи (wireless set). 27 марта 1899 г. 25-летний Маркони посылает сообщение через Ла-Манш на 50 км. 12 декабря 1901 г. на восточном берегу Ньюфаундленда, используя новую схему приемника, Маркони отчетливо услышал в наушниках сигналы — три точки азбуки переданные радиостанцией, построенной им на юго-западном побережье Англии, отстоящем на 4 800 км (Нобелевская премия, 1909 г.).

В последующие несколько лет уже тысячи ученых и инженеров занимались усовершенствованием беспроволочного телеграфа. В память о Марко-

ни 20 июня 1937 г. радиостанции всего мира на 2 минуты прекратили вещание, отдавая дань уважения человеку, который сделал возможным общение между континентами.

Прощание с азбукой Морзе. В 1838 г. американец Сэмюэл Морзе создал свою азбуку, заменив точками и тире все буквы. Первая передача кодированных посланий началась в 1844 г.

Отметим, что с увеличением частоты возрастает скорость передачи информации. Допустим, что для передачи сообщения используют азбуку Морзе, модулируя амплитуду волны импульсами, соответствующими точкам и тире. Длительность импульса, соответствующего точке, и длительность паузы между соседними знаками, равны $\tau_0 \sim 100/\nu$. Длительности тире и паузы между группой знаков, образующих букву, равны $3\tau_0$, а между словами — $5\tau_0$. Прочитайте слово, «изображенное» на рис. 9.3.1.

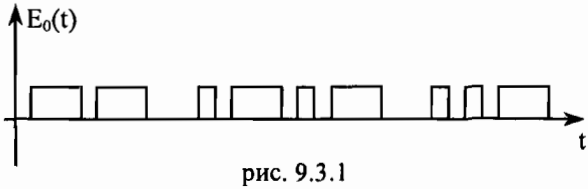


рис. 9.3.1

Статистический анализ показал, что в среднем на одно слово приходится 5 букв, для передачи которых требуется $48\tau_0$: интервал $22\tau_0$ соответствует передаче знаков, а промежуток времени $26\tau_0$ — паузам между знаками и буквами, включая паузу в конце слова. Поэтому передача одного слова занимает интервал времени $\Delta t \sim 4800/\nu$, обратно пропорциональный значению несущей частоты.

После гибели «Титаника» в 1912 г. была принята рекомендация о широком внедрении радиотелеграфа и обязательной круглосуточной вахте радистов. Тогда же был согласован кодовый сигнал *SOS*. Вопреки сложившейся легенде этот сигнал никак не расшифровывался. Все сочли, что три точки, три тире и три точки легко запомнить и передать в эфир. В 1992 г. в международную конвенцию внесена поправка об отказе с 1992 г. от азбуки Морзе и переходе на глобальную систему спутниковой связи.

Пример 9.3.1. Детекторный приемник. Схема простейшего радиоприемника изображена на рис. 9.3.2. Электромагнитные волны наводят в антенне высокочастотные колебания. При приеме станции, излучающей амплитудно-модулированную электромагнитную волну, в антенне генерируется ЭДС $\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t)\cos\omega t$, где $\varepsilon_0(t)$ — низкочастотная функция, соответствующая передаваемому звуковому сигналу. В этом случае эквивалентная схема изо-

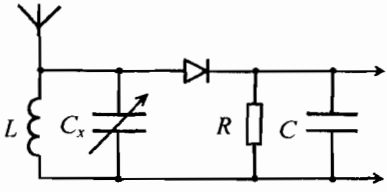


рис. 9.3.2

бражена на рис. 5.3.6 *а*. Приемник может принимать сигналы радиовещательных станций в диапазоне длин волн: 200 м $\leq \lambda \leq$ 3000м, в интервале частот 10^5-1,5 $\cdot$ 10^6 Гц.

Оценим амплитуду ЭДС на расстоянии r от излучателя мощностью Р. Полагая в (9.1.6) $P = 0{,}1$ МВт, $r = 30$ км, получим $E = 0{,}1$ В/м. При длине антенны $l_0 = 1$ м амплитуда ЭДС равна 0,1 В.

Будем считать, что создаваемая приемной антенной ЭДС, представляет собой суперпозицию гармонических амплитудно-модулированных напряжений. Для того чтобы выделить одну радиостанцию, работающую на несущей частоте $\nu = \omega/2\pi$, используются резонансные свойства контура. Параметры L и C_k в схеме рис. 9.3.2 следует выбрать такими, чтобы резонансная частота стала равной ν. Тогда при больших значениях добротности Q амплитуда напряжения сигнала частотой ν на катушке или конденсаторе будет во много раз больше амплитуд сигналов других частот. Таким образом, от антенны поступает практически один сигнал, частота которого совпадает с собственной частотой контура.

Предположим, что амплитуда $\varepsilon_0(t)$ изменяется с частотой звукового сигнала $\nu_з = 4$ кГц: $\varepsilon_0(t) = A_0 + A_1\cos\Omega t$, $\Omega = 2\pi/\nu_з$. Задача детектора — полупроводникового диода - состоит в детектировании — преобразовании амплитудно-модулированного напряжения $\varepsilon(t)$ в напряжение звуковой частоты. Вольт-амперная характеристика полупроводниковых диодов проходит через нуль, но достаточно заметный ток появляются у кремниевых диодов при напряжении $V_п = 0{,}2 - 0{,}4$ В. Тогда вольт-амперную характеристику диода можно представить в виде кривой, изображенной на рис. 9.3.3 *а*.

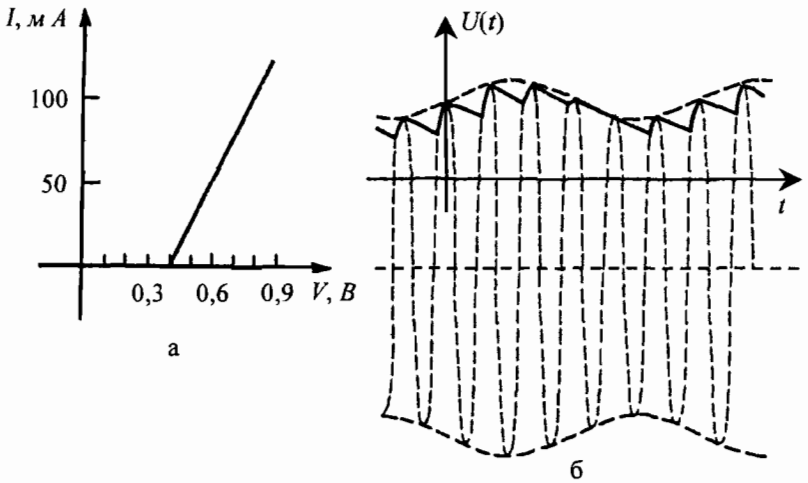


рис. 9.3.3

Предварительно опишем качественно процесс детектирования. Пусть $\lambda = 300$ м ($\nu = 1$ МГц), емкость конденсатора $C = 5000$ пф, сопротивление резистора наушников $R = 3$ кОм. Поскольку постоянная зарядки $\tau_з = CR_i = 2 \cdot 10^{-8}$ с существенно меньше периода высокочастотных колебаний $T = 10^{-6}$ с, то при открытом диоде напряжение на выходе схемы $U(t)$ повторяет форму звукового сигнала $\varepsilon_0(t)$. При значениях $U(nT) = \varepsilon_0(nT) - V_n$, диод запирается и конденсатор разряжается через резистор. Поскольку постоянная разряда $\tau_р = CR = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ с больше T, то во время разряда конденсатора через резистор R напряжение $U(t)$ медленно спадает. При значениях $U(t) > \varepsilon(t) - V_n$ диод отпирается и конденсатор подзаряжается. Используя соотношение (5) из примера 5.3.5, получим напряжение на выходе схемы

$$U(t) = \varepsilon_0(t)(1 - T/2\tau_р) - V_n + \varepsilon_0(t)(2X_c/R)\sin\omega t + \ldots .$$

Поскольку $X_c << R$, то высокочастотная составляющая напряжения значительно меньше низкочастотной. Напряжение на RC — цепи создается практически только низкочастотной составляющей, которая полностью воспроизводит звуковой сигнал (рис. 9.3.3 *б*). Следует отметить, что рис. 9.3.3 *б* схематичен т. к. за характерное время изменения звукового сигнала $T_з = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ с произойдет 250 высокочастотных колебаний.

9.3.4. Телевизионные станции. Электронная трубка, предназначенная для передачи изображения, так называемый иконоскоп, была создана в 1931 г. в США выдающимся русским инженером В. В. Зворыкиным (1889—1982). Американцы называют его отцом телевидения. В 1922 г. профессор Московского высшего технического училища Зворыкин вместе с большой группой творческой интеллигенции был выслан из России согласно постановлению ЦК партии, инициированном В.И. Лениным.

Изображение сцены проектируется на тонкий листок слюды, передняя стенка которой покрыта $N = N_c N_г$ частицами цезиевого серебра (N_c — число частиц в горизонтальных линиях, $N_г$ — число горизонтальных пиний), а задняя стенка является проводящей пластиной, соединенной с резистором. Эта система представляет собой, по существу, совокупность конденсаторов с одной общей обкладкой. Вследствие фотоэффекта частицы в области повышенной освещенности теряют больше электронов и приобретают больший потенциал. Возникает «электрическое» изображение сцены. При пробегании электронного луча по горизонтальным пиниям частицы «разряжаются»; на резисторе возникают импульсы напряжения, называемые *видеосигналами*.

Если луч пробегает кадр за время T_k, то частота смены кадров $\nu_k = \dfrac{1}{T_k}$.

Поэтому луч пробегает через каждую частицу за время $\dfrac{T_k}{N} = \dfrac{1}{\nu_k N}$. Следо-

вательно, длительность видеоимпульса $\tau \sim \frac{1}{\nu_k N}$, а ширина полосы спектра

$\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau} = \nu_k N$.

Для того чтобы изображение воспринималось слитно, за секунду необходимо передать не менее 25 кадров, т.е. $\nu_k = 25$ Гц. По стандарту, принятому в СССР, $N_c = 625$. Поскольку ширина кадра обычно равна 4/3 высоты, то $N_г = 4N_c/3$, ширина спектра $\Delta\nu \sim 13{,}02$ МГц. Для уменьшения мерцания изображения используют чересстрочную развертку: сначала передают сигналы от нечетных, затем от четных строк. В результате ширина полосы уменьшается до значения 6,5 МГц. Несущая частота телевизионного канала лежит в диапазоне 50–200 МГц.

Первая фотография лунной поверхности. Почему же передача одного кадра изображения Луны советской автоматической станцией в 1959 г. длилась 25 мин.? Причина в том, что вместе с полезным сигналом приемник усиливает и помехи — случайные шумы. Чем шире полоса частот, тем выше уровень шумов. Если полезный сигнал слаб, то его трудно выделить на фоне шумов. В то время мощность передатчика была невелика. Поэтому для снижения уровня шумов достаточно уменьшить полосу частот полезного сигнала, увеличивая время передачи одного кадра.

9.4. Интерференция

9.4.1. Интерференция двух волн. Пусть имеются два источника, излучающие линейно-поляризованные волны одной и той же частоты. Фазы источников α_1 и α_2, расстояния от источников до точки наблюдения $P(x, y, z)$ равны r_1 и r_2. Если направления поляризации волн одинаковы, то напряженность электрического поля (9.1.2) в точке P равна $\vec{E} = (E, 0, 0)$,

$$E = E_1 + E_2,$$
$$E_1 = a\cos(\omega t - \varphi_1), \quad \varphi_1 = kr_1 + \alpha_1,$$
$$E_2 = b\cos(\omega t - \varphi_2), \quad \varphi_2 = kr_2 + \alpha_2.$$

Отметим, что $c\varepsilon_0 = 2{,}65 \cdot 10^{-3}$ Вт/В^2. Среднее значение интенсивности поля в точке наблюдения P найдем из (9.1.5):

$$J(r) = \varepsilon_0 c <E^2> = c\varepsilon_0 \left[< E_1^2 > + < E_2^2 > + 2 < E_1 E_2 > \right].$$

Вычисляя средние значения

$$< E_1^2 > = \frac{a^2}{2}, < E_2^2 > = \frac{b^2}{2}, < E_1 E_2 > = \frac{ab}{2}\cos\delta,$$

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = k(r_2 - r_1) + \alpha_2 - \alpha_1,$$

получим

$$J(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0 c}{2}(a^2 + b^2 + 2ab\cos\delta). \qquad (9.4.1)$$

Положим для упрощения $a = b = E_0$ и преобразуем (9.4.1) к виду

$$J(x, y, z) = 4\, J_0 \cos^2\frac{\delta}{2}, \qquad (9.4.2)$$

где $J_0 = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2$ — среднее значение интенсивности поля, создаваемого одним источником. В зависимости от положения точки P интенсивность поля изменяется от $J_{min} = 0$ до максимального значения $J_{max} = 4J_0$.

Наложение волн, при котором в области перекрытия интенсивность зависит от координат, называется *интерференцией* (от лат. *inter* – взаимно и *ferio* – поражаю). Интенсивность может изменяться от нуля до максимума, превышающего сумму интенсивностей отдельных волн.

9.4.2. Когерентность волн. Величина $r_2 - r_1$, называемая разностью хода двух волн, зависит от взаимного расположения источников. Фазы источников могут меняться во времени. Устойчивая интерференционная картина наблюдается лишь тогда, когда разность фаз $(\alpha_2 - \alpha_1)$ постоянна за время наблюдения. В этом случае волны называются когерентными (от лат. *cohaerentia* — сцепление, связь).

В тепловых источниках света, таких, как нить лампочки, отдельный атом излучает электромагнитную волну в течение времени $\tau \approx 10^{-8}$ с. Поэтому в точку наблюдения приходят волны, у которых разность фаз постоянна в интервале $\Delta t < 10^{-8}$ с. Для регистрации интерференционной картины необходим детектор с временем усреднения $\approx 10^{-8}$ с. Время реакции глаза на изменение интенсивности равно 0,05 с. Поэтому мы не наблюдаем интерференцию — интенсивность излучения будет равна сумме интенсивностей излучения каждого атома.

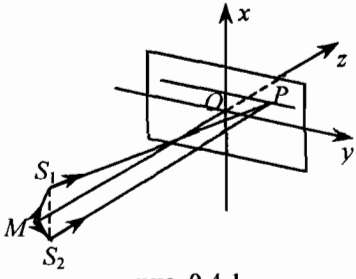


рис. 9.4.1

Совершенно иными свойствами обладает излучение лазера. Термин *лазер* — аббревиатура выражения *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* — усиление света вынужденным излучением. Главное отличие в том, что все атомы активной среды излучают синхронно, создавая когерентное электромагнитное поле (см. VII. 2.2.2).

9.4.3. Опыт Юнга. Первая экспериментальная установка для демонстрации интерференции была создана английским ученым Томасом Юнгом в 1802 г.

Свет от точечного источника M падает на два небольших отверстия в экране, расположенном в плоскости $z = -b$ (рис. 9.4.1). Эти отверстия в точках

$$S_1\left(\frac{d}{2},\ 0,\ -b\right) \quad \text{и} \quad S_2\left(-\frac{d}{2},\ 0,\ -b\right)$$

действуют как излучатели с одинаковой фазой $\alpha_2 = \alpha_1$. Интерференция наблюдается в плоскости $z = 0$. Разность хода волн в точке наблюдения

$$r_2 - r_1, \text{ где } r_{2,1} = \sqrt{\left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + b^2}\ .$$

Очевидно, $r_2^2 - r_1^2 = 2xd$. При условии d, $|x|$, $|y| << b$ можно положить $r_2 + r_1 \approx 2b$. Следовательно,

$$r_2 - r_1 \approx \frac{xd}{b}, \qquad \delta = \frac{kxd}{b} = \frac{2\pi xd}{\lambda b}.$$

Согласно (9.4.2) в плоскости xy интенсивность

$$J(x, y) = 4J_0\cos^2\left(\frac{\pi xd}{\lambda b}\right) \tag{9.4.3}$$

не зависит от координаты y. Интерференционная картина представляет собой последовательность светлых и темных полос, параллельных оси y. Расстояние между соседними яркими полосами $\Delta x = \dfrac{\lambda b}{d}$.

Пример 9.4.1. Сделаем в экране два отверстия диаметром 0,1 мм на расстоянии $d = 2$ мм друг от друга и направим на него излучение рубинового лазера с длиной волны $\lambda = 694{,}3$ нм. В плоскости xy на расстоянии $b = 3$ м от экрана появляются светлые полосы, равноотстоящие друг от друга на величину $\Delta x = 1$ мм.

Пример 9.4.2. При получении интенсивности поля в точках плоскости экрана (9.4.3) мы неявно предполагали, что векторы напряженности электрических полей двух волн коллинеарны. В действительности электромагнитное поле источников S_1 и S_2 на рис. 9.4.1 в окрестности точки P представляет собой суперпозицию плоских волн (9.1.3), распространяющихся в направлении единичных векторов

$$\vec{n}_1 = (-\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha), \quad \vec{n}_2 = (\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha), \ \alpha \approx \frac{d}{2b}.$$

В этом случае векторы напряженности электрических полей источников неколлинеарны, поскольку согласно (9.1.3) амплитуды поля $\vec{a}_k = \vec{e}_k$ G/b, $\vec{e}_k = \vec{n}_k(\vec{n}_k\vec{d}) - \vec{d}$, $k = 1{,}2$. Следовательно, выражение для интенсивности поля в точках плоскости экрана (9.4.3), полученное из (9.4.2), не вполне корректно.

Покажем, что при значениях $\alpha << 1$ функция (9.4.3) приближенно совпадает с точным решением задачи. Величины амплитуд одинаковы $a_k = E_0$, $E_0 = G\cos\alpha/b$. Полагая $\vec{d} = (-1,\ 0,\ 0)$, получим $\vec{a}_1 = (E_0\cos\alpha,\ 0,\ E_0\sin\alpha)$, $\vec{a}_2 = (E_0\cos\alpha,\ 0,\ -E_0\sin\alpha)$. Индукция магнитного поля каждой волны $c\vec{B}_k = \vec{n}_k \times \vec{E}_k$,

$$\vec{B}_k = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \varphi_k),\ c\vec{B}_0 = (0, E_0, 0),\ \varphi_k = \frac{\omega}{c}\vec{n}_k\vec{r}\ .$$

Теперь, записывая проекцию вектора Пойнтинга $\vec{S} = \varepsilon_0 c^2(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \times \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)$ на ось z, получим среднее значение интенсивности поля в точке наблюдения $P(x, y, 0)$:

$$J(x, y) = 4J_0 \cos\alpha\cos^2\left(\frac{2\pi x \sin\alpha}{\lambda}\right), \qquad J_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2\ .$$

Функция $J(x, y)$ совпадает с (9.3.3) при значениях $\alpha<<1$.

9.4.4. Интерферометр. *Интерферометр* — измерительный прибор, основанный на интерференции волн. Пучок света разделяется в пространстве на несколько пучков, а затем они сводятся вместе и наблюдается результат их интерференции.

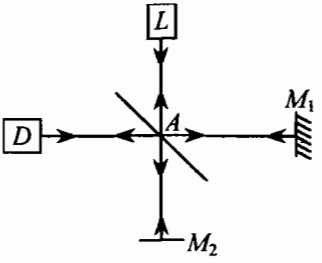


рис. 9.4.2

Рассмотрим двухлучевой интерферометр Майкельсона (1881 г.). Лазерный луч падает в точке A на полупрозрачное зеркало и разделяется на два идентичных луча: луч сравнения, который отражается от стационарного зеркала M_1 и луч-зонд, отражаемый подвижным зеркалом M_2 (рис. 9.4.2). Отразившись, они возвращаются к точке A и снова разделяются. Два из них образуют луч, который попадает в фотодетектор. Интенсивность света $J \sim \cos 2\gamma$, где $\gamma = 2\pi(l_2 - l_1)/\lambda$, $l_2 = AM_2$, $l_1 = AM_1$. Если величины l_1, l_2 различаются на $\lambda/8$, то наблюдается половина максимальной интенсивности.

Чувствительность прибора можно повысить за счет многократного прохождения луча. Существует несколько способов решения этой проблемы. В одном из них в плечо AM_1 помещают полупрозрачное зеркало. Используя интерферометр, удалось осуществить перемещение зонда-иглы на расстояниях $1 \div 2$ нм от поверхности образца. Последние три слоя острия зонда представляют собой пирамиду из 7, 3 и одного атомов. Если между образцом и зондом создать разность потенциалов, то между электронными оболочками атомов образца и зондом возникает ток чрезвычайно чувствительный к вели-

чине зазора: обычно сила тока уменьшается в 10 раз при увеличении зазора на 0,1 нм. Механизм обратной связи регистрирует силу тока, изменяет управляющее напряжение и перемещает зонд перпендикулярно поверхности так, чтобы величина тока не менялась. Тогда, анализируя изменения напряжения, возникающие при смещении зонда вдоль поверхности, можно построить изображение поверхностного рельефа. Изобретатели сканирующего туннельного микроскопа Г. Бинниг и Г. Рорер (Нобелевская премия, 1986 г.) сумели получить изображение рельефа, на котором видны ряды атомов размером ≈0,2 нм. В настоящее время планируется серия экспериментов по обнаружению гравитационных волн, в которых используется интерферометр Майкельсона для измерения ничтожно малых смещений пробных масс, возникающих при прохождении волны.

9.5. Интерференция при отражении от металлической поверхности

Особенности отражения волны от металлических предметов связаны с высокой электропроводностью металлов. В отличие от постоянного поля волна проникает в проводник, однако, глубина проникновения настолько мала, что металлическая поверхность почти полностью отражает падающую на нее волну. В этом приближении граничное условие на поверхности аналогично условию для электростатического поля: на поверхности проводника — касательная к ней компонента вектора напряженности электрического поля равна нулю. Это условие автоматически приводит к равенству нулю нормальной компоненты напряженности магнитного поля на поверхности идеального проводника.

Покажем, что интерференционная картина возникает при освещении зеркала или металлической поверхности одним источником излучения.

Пусть плоская поверхность металла совпадает с плоскостью yz (рис. 9.5.1).

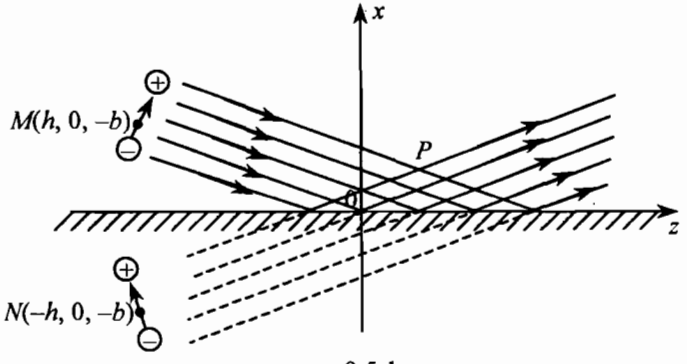


рис. 9.5.1

Расположим середину источника излучения в точке $M(h, 0, -b)$, а фотодетектор поместим в точку $P(x, 0, z)$ в окрестности начала координат. Пусть выполняются условия

$$h, |x|, |z| << s, \ s = \sqrt{h^2 + b^2}$$

при которых электромагнитное поле в окрестности начала координат представляет собой плоскую волну, распространяющуюся в направлении вектора $\vec{n} = (-\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$, $\sin\alpha = \dfrac{h}{s} << 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$.

В отличие от волны в безграничном пространстве (9.1.3) электромагнитное поле в полупространстве $x \geq 0$ должно удовлетворять граничному условию и поэтому представляет собой суперпозицию двух плоских волн — падающей волны (9.1.3) и отраженной:

$$\vec{E}(x, 0, z) = \\ = a\vec{e}\cos(\omega t - k\vec{n}\vec{r} - ks - \varphi) + a\vec{e}_0\cos(\omega t - k\vec{n}_0\vec{r} - ks - \varphi). \quad (9.5.1)$$

Здесь $a = G/s$, $\vec{e} = \vec{n}(\vec{n}\vec{d}) - \vec{d}$ — вектор поляризации падающей волны, $\vec{e}_0$ и $\vec{n}_0$ — вектор поляризации и единичный вектор в направлении распространения отраженной волны, которые можно найти из граничного условия.

Пусть $\vec{p} = (1, 0, 0)$ — единичный вектор перпендикулярный плоскости yz. На плоскости $x = 0$ касательная компонента вектора $\vec{E}(0, 0, z) \equiv \vec{Q}$ должна быть равна нулю: $\vec{Q} - \vec{p}(\vec{p}\,\vec{Q}) = 0$. Мы можем удовлетворить этому условию предполагая, что отраженная волна в области $x \geq 0$ порождается фиктивным излучателем — диполем, расположенным симметрично относительно плоскости $x = 0$ и ориентированным в направлении единичного вектора $\vec{d}_0 = 2\vec{p}(\vec{p}\,\vec{d}) - \vec{d}$. В этом «проводнике» ток создается «электрическими изображениями» зарядов, которые движутся в направлении противоположном направлению тока в реальном проводнике (см. пример 1.4.6). На рис. 9.5.1 точки $M(h, 0, -b)$ и $N(-h, 0, -b)$ находятся в серединах реального и фиктивного диполей. Напряженность электрического поля, создаваемого фиктивным диполем, получим из (9.1.3) после замены

$$r_{MP} \to r_{NP} = \sqrt{(x+h)^2 + y^2 + (z+b)^2},$$

$$\vec{n} \to \vec{n}_0 = \frac{\vec{r}_{NP}}{r_{NP}}, \ \vec{d} \to \vec{d}_0, \ \vec{e} \to \vec{e}_0 = \vec{n}_0(\vec{n}_0\vec{d}_0) - \vec{d}_0.$$

Расстояние r_{NP} в приближении плоской волны $r_{NP} \approx s + \vec{n}_0\vec{r}$, где $\vec{n}_0 = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$. Учитывая, что $\vec{n}_0 = \vec{n} - 2\vec{p}(\vec{p}\vec{n})$, находим из граничного условия $\vec{e}_0 = -\vec{e} + 2\vec{p}(\vec{p}\,\vec{e})$.

Волна линейно поляризованная в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Пусть $\vec{d} = (0, -1, 0)$. Найдем интенсивность волны (9.4.3) в точке $P(x, 0, z)$. Тогда $\vec{n}\vec{d} = 0$, $\vec{e} = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_0 = (0, -1, 0)$ — падающая волна поляризована в плоскости перпендикулярной плоскости падения. Напряженность и индукция поля

$$\vec{E} = (0, E_y, 0),\ c\vec{B} \approx (-E_y, 0, 0),$$

$$E_y = -2a \sin\frac{\delta}{2} \sin(\omega t - kz - ks - \varphi),$$

где $\delta = k(\vec{n}_0\vec{r} - \vec{n}\vec{r}) = 2kx\sin\alpha$. Поскольку $\alpha \approx \frac{h}{s} << 1$, то $\delta = 2kx\sin\alpha \approx$ $\approx 2k\alpha x = \frac{4\pi hx}{\lambda s}$.

Вектор Пойнтинга волны $\vec{S} \approx (0, 0, \varepsilon_0 c E_y^2)$. Среднее значение интенсивности поля $J = 4J_0\sin^2\frac{\delta}{2}$, где $J_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c a^2$ — интенсивность падающей волны. Следовательно,

$$J = 4J_0\sin^2\frac{2\pi hx}{\lambda s}. \qquad (9.5.2)$$

Интенсивность достигает максимума, если в разности хода укладывается *нечетное число* полуволн. Первый максимум имеем в точке $P\left(\frac{\lambda s}{4h}, 0, z\right)$. В окрестности точек $P_n(x_n, 0, z)$ с координатой $x_n = \frac{n\lambda s}{2h}$ ($n = 0, 1, 2, ...$) интенсивность поля близка к нулю. С этим эффектом пришлось иметь дело специалистам по радиолокации.

Во время второй мировой войны английские радары были установлены на скалах Дувра для слежения за самолетами противника, пересекающими Ла-Манш. Вода является хорошим проводником для частот, меньших 10^8 Гц. Радиоволны после отражения от самолета достигают радара по трассам *PM* и *POM*. Однако, иногда радары не фиксировали самолет. Пусть радиус-вектор самолета $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$. Мощность излучения, принимаемая радаром, $P(t) = (R/s)^2 S_c J(t)$, где S_c — эффективная площадь отражаемой поверхности, R — размер антенны, $J(t) = 4J_0\sin^2\gamma(t)$, $\gamma(t) = 2\pi hx(t)/(\lambda s)$, $x(t) = x_0 + v_x t$. Следовательно, при полете на высотах $x(t) \approx x_n$ мощность излучения в результате деструктивной интерференции близка к нулю. Полагая $\lambda = 30$ см, $h = 300$ м, $s = 20$ км, получим $x_n = 10\ n$ м; значению $s = 100$ км соответствуют плоскости $x_n = 50\ n$ м.

Пример 9.5.1. А. Волна, линейно поляризованная в плоскости падения. Найдем интенсивность поля (23.3) в точке P, полагая $\vec{d} = (1, 0, 0)$. Поскольку $\alpha << 1$, то $\vec{n}\vec{d} \approx 0$, $\vec{e} = \vec{e}_0 \approx (1, 0, 0)$. В этом случае падающая волна поляризована в плоскости падения. Из (9.5.1) находим, что при $\alpha << 1$ напряженность и индукция поля

$$\vec{E} \approx (E_x, 0, 0),\ c\vec{B} \approx (0, E_x, 0),$$

$$E_x = 2a\cos\frac{\delta}{2}\cos(\omega t - kz - ks - \varphi),$$

где $\delta \approx 2k\alpha x = \dfrac{4\pi hx}{\lambda s}$. Вектор Пойнтинга $\vec{S} \approx (0, 0, \varepsilon_0 c E_x^2)$. Среднее значение интенсивности поля в точке наблюдения $J = 4J_0\cos^2\dfrac{2\pi hx}{\lambda s}$, $J_0 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 c a^2$ — интенсивность падающей волны.

Б. Волна, круговой поляризации. Найдем интенсивность поля в точке P в случае излучения волны круговой поляризации.

Вектор напряженности электрического поля падающей волны

$$\vec{E}_п = a\vec{e}_1\cos\varphi_1 + a\vec{e}_2\sin\varphi_1,$$

где $\varphi_1 = \omega t - k\vec{n}\vec{r}$, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$. Напряженность поля отраженной волны

$$\vec{E}_0 = a\vec{e}_1\cos\varphi_2 - a\vec{e}_2\sin\varphi_2,$$

$\varphi_2 = \omega t - k\vec{n}_0\vec{r}$. Интенсивность поля в точке P равна

$$S(t) = \varepsilon_0 c(\vec{E}_п + \vec{E}_0)^2 = 2\varepsilon_0 c a^2[1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Среднее за период значение интенсивности $J = 2J_0$, где $J_0 = \varepsilon_0 c a^2$ — интенсивность падающей волны. Следовательно, при отражении от поверхности воды интерференционная картина не возникает. Таким образом, применение волн круговой поляризации позволило бы избежать трудностей при обнаружении цели.

Задача 9.5.2. Покажите, что на плоскости $x = 0$ компонента вектора индукции B_z равна нулю.

Пример 9.5.3. Стоячая электромагнитная волна. Расположим середину диполя в точке $M(h, 0, 0)$ и ориентируем его параллельно оси z. Найдем напряженность поля (9.5.1) в окрестности начала координат $x << h$, $y = 0$, $z = 0$. Полагая $\vec{d} = (0, 0, -1)$, $\vec{n} = (-1, 0, 0)$, $r_{MP} = h - x$, $r_{NP} = h + x$, получим

$$\vec{e} = -\vec{d},\ \vec{e}_0 = \vec{d},\ \vec{E} = (0, 0, E_z), \qquad E_z(x, y, z) \approx$$

$$\approx A[\cos(\omega t + kx - kh) - \cos(\omega t - kx - kh)] = -2A\sin(kx)\sin(\omega t - kh),$$

где $A = G/h$. Индукция магнитного поля волны $B = (0, B_y, 0)$,

$$cB_y(x, y, z) \approx A[\cos(\omega t + kx - kh) + \cos(\omega t - kx - kh)] =$$
$$= 2A\cos(kx)\cos(\omega t - kh).$$

Распределение поля соответствует картине стоячей волны. Магнитное поле имеет максимум на поверхности проводника и во всех точках, где электрическое поле равно нулю.

9.6. Принцип Гюйгенса-Френеля. Зоны Френеля

В 1678 г. голландский ученый Х. Гюйгенс сформулировал правило, позволяющее объяснить отражение и преломление световых волн. Представление поля в виде наложения элементарных волн называется принципом Гюйгенса. Согласно Гюйгенсу каждый элемент поверхности волнового фронта в момент времени t является источником вторичных сферических волн, а волновой фронт световой волны в последующий момент времени является огибающей вторичных волн. Вторая огибающая поверхность не должна давать вклада в процесс распространения волны. Главный недостаток этой теории — невозможность согласовать волновую природу света с «прямолинейным» распространением света в однородной среде. Именно по этой причине И. Ньютон развил «теорию истечения» корпускул света. света.

В 1815 г. французский физик О. Френель дополнил построение Гюйгенса утверждением об интерференции вторичных волн. Этот подход, получивший название *принципа Гюйгенса-Френеля*, позволил качественно объяснить «прямолинейное» распространение света. Френель пришел к выводу, что в процессе распространения сферической волны от источника O до точки наблюдения P основную роль играет область пространства в небольшой окрестности отрезка OP.

9.6.1. Зоны Френеля. Расположим точечный источник световой волны на рис. 9.6.1 в точке O, приемник излучения поместим в точку $P(0, 0, z)$. Пусть S — сферическая поверхность волнового фронта радиусом $OQ = a$ в момент времени t. Построим вокруг точки P сферы радиусами

$$b,\ b + \lambda/2,\ b + \lambda,\ b + 3\lambda/2,\ .....,\qquad (9.6.1)$$

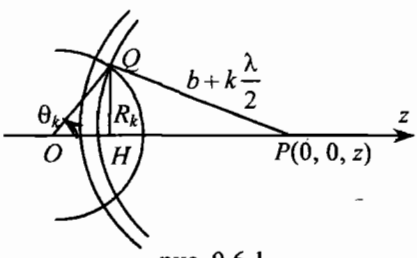


рис. 9.6.1

где $b = z - a$. Последняя сфера имеет радиус, равный длине касательной, проведенной из точки P к волновому фронту. Эти сферы разбивают волновой фронт на элементарные шаровые слои, называемые *зонами Френеля*.

Первая зона Френеля представляет собой шаровой сегмент. Расстояние от n-той зоны до точки P равно $QP = z - a + n\lambda/2$. Найдем радиусы $R_n = QH$ зон, ближайших к первой. Из треугольника OQP имеем

$$(z - a + n\lambda/2)^2 = a^2 + z^2 - 2az\cos\theta_n.$$

При $z - a >> n\lambda$ получим уравнение $2az(1 - \cos\theta_n) \approx n\lambda(z - a)$. Радиус n-той зоны Френеля $R_n = a\sin\theta_n$. При $\theta_n << 1$ имеем $R_n \approx a\theta_n$, $1 - \cos\theta_n \approx \theta_n^2/2$. В этом приближении $\theta_n^2 = n\lambda(z - a)/az$,

$$R_n = \sqrt{n\lambda a\frac{z-a}{z}}. \qquad (9.6.2)$$

В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля каждая точка зоны рассматривается как центр вторичной волны. Если точка Q принадлежит n-той зоне Френеля, то фаза волны

$$\Phi_n = \omega t - \frac{\omega}{c}(a + r_n) = \omega t - \frac{\omega}{c}(z + n\lambda/2), \qquad (9.6.3)$$

$r_n = QP$. Разность фаз волн, пришедших от двух соседних зон $\Delta\Phi = \omega\lambda/2c = \pi$. Следовательно, все волны кроме волны, «излучаемой» первой зоной, погашают друг друга.

9.6.2. Физический и геометрический лучи. Таким образом, мы приходим к заключению, что поле в точке P формируется областью пространства, ограниченной поверхностью огибающей границы поперечных сечений всех первых зон Френеля — окружностей, соответствующих различным значениям величины a. Радиус первой зоны Френеля $R_1 = [\lambda a(z - a)/z]^{1/2}$ равен нулю при $a = 0$, $a = z$ и достигает наибольшего значения $R_{1MAX} = (\lambda z)^{1/2}/2$ при $a = z/2$. В области $0 \le a \le z/2$ радиус первой зоны возрастает от нуля до R_{1MAX} и убывает от R_{1MAX} до нуля в области $z/2 \le a \le z$. Рассмотрим поверхность, огибающую все окружности, принадлежащие первым зонам Френеля. Область пространства, ограниченная этой поверхностью, называется *френелевым объемом*. Электромагнитное поле в области френелевого объема образует реальный *физический луч*. Световым или *геометрическим лучом* называют прямую, выходящую из точки O.

Следует отметить, что строгое доказательство прямолинейного распространения света по прямой OP стало возможным на основе интегральной теоремы, полученной Г. Кирхгофом, из уравнений Максвелла (см. Дополнение IV, 9.7.5).

9.7. Дифракция

9.7.1. Дифракция световых волн. Если отвлечься от волновой природы света, то можно говорить о лучах. Экран в пучке параллельных лучей должен привести к образованию резкой границы между тенью и освещенной областью. Наблюдаемое в эксперименте распределение интенсивности оказывается более сложным.

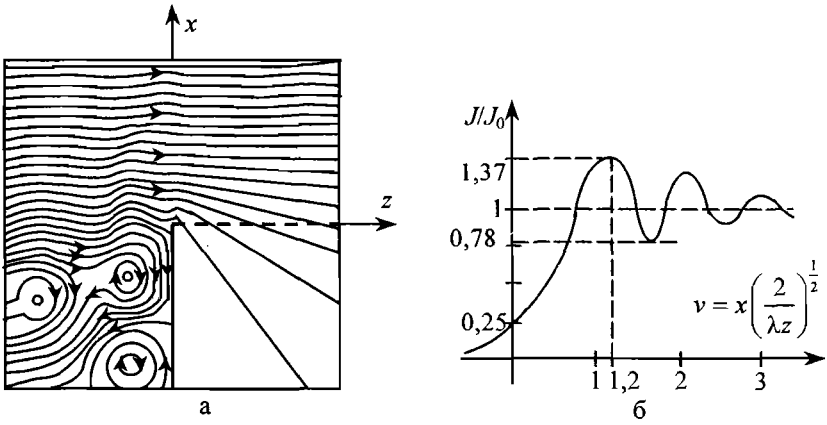


рис. 9.7.1

Пусть плоская волна, распространяющаяся в положительном направлении оси z, падает на тонкий металлический экран. Начало координат находится на верхнем крае экрана, расположенного в нижней полуплоскости xy ($x < 0$) (рис. 9.7.1 *а*). На этом рисунке изображены линии, касательные к которым представляют собой средние значения вектора потока электромагнитной энергии в плоскости $y = \text{const}$, при падении линейно-поляризованной волны с вектором $\vec{B}$, параллельным краю экрана. Густота линий пропорциональна величине потока энергии. Очевидно волна «затекает» в область геометрической тени. На рис. 9.7.1 *б* приведен график освещенности в координатах $\frac{J(v)}{J_0}$, $v = x\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}$, где $J(v)$ — интенсивность света в точке $P(x, 0, z)$, J_0 — интенсивность света в отсутствие экрана.

Для того чтобы понять поведение функции $J(v)$ заметим, что аргумент v можно представить в виде $v = \sqrt{2}\, x/R_1$, где $R_1 = \sqrt{\lambda z}$ — радиус первой зоны Френеля для детектора, расположенного на расстоянии z от волнового фронта плоской волны. При значениях $\lambda = 694{,}3$ нм, $z = z_н$, $z_н = 2{,}5$ м величина $R_1 = 1{,}32$ мм. Если $x >> R_1$, то детектор находится в области прямолинейного распространения света – экран не перекрывает первую зону Френеля и дифракция не проявляется. Если $x < R_1$, то экран перекрывает часть первой зоны Френеля и проявляется дифракция света.

Интенсивность максимальна не на границе геометрической тени при $x = 0$, а в освещенной области при $v_m = 1{,}2$. Первый максимум интенсивности находится на расстоянии $x_m = 1{,}2$ мм от края экрана. Первый минимум освещенности наблюдается при $v = 1{,}85$. В освещенной области при фиксированном $z = z_0$ интенсивность (x, z_0) имеет ряд максимумов и минимумов вблизи значения J_0. Край освещенной области расщепляется в дифракционные полосы заметные в области $x < 10\ R_1$, включающей несколько первых зон Френеля.

Это явление, обусловленное нарушением закона прямолинейного распространения света, называют в примитивном смысле дифракцией света. В современной физике *дифракцией* называют процесс распространения электромагнитной волны в пространстве, содержащем какие-либо тела. Электромагнитное поле падающей волны создает в веществе переменную плотность распределения электронов атомов, генерирующих вторичную световую волну. При интерференции первичной и вторичной волн формируется поле, отличающееся от поля падающей волны. Это и есть дифракция. Основная задача теории — определение напряженности электрического и магнитного полей в произвольной точке пространства. Впервые точное решение задачи о дифракции плоской волны, падающей на край экрана, получено в 1894 г. немецким физиком-теоретиком А. Зоммерфельдом.

Дифракцию света открыл итальянский ученый-иезуит Франческо Гримальди. Он же ввел термин дифракция (от лат. *diffractus* — разломанный). В его работе, вышедшей в 1665 г., описано явление дифракции и впервые сделано предположение о волновой природе света.

9.7.2. Дифракция света на отверстии. Металлический экран, в котором вырезано круглое отверстие радиусом $a >> \lambda$,расположен в плоскости xy. Координаты центра отверстия $x = 0$, $y = 0$. Плоская волна распространяется в положительном направлении оси z (рис. 9.7.2).

Электромагнитное поле волны создает в материале экрана переменную плотность распределения электронов атомов вещества, генерирующих вторичную световую волну. При интерференции первичной и вторичной волн формируется поле, отличающееся от поля падающей волны.

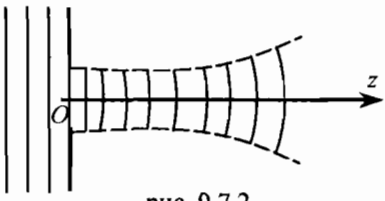


рис. 9.7.2

За экраном волновой фронт с ограниченной площадью поперечного сечения не может быть плоским. В отверстие проходит фронт плоской волны. Сильное искажение фронта происходит вблизи края отверстия, а поле в точках отверстия на расстояниях $\approx\lambda$ практически совпадает с полем плоской волны. Однако, по мере распространения волны эта резкая граница расплывается: поток энергии волны затекает в область геометрической тени. В этой промежуточной области мы имеем дело с *дифракцией Френеля*. Она проявляется на расстояниях r, для которых площадь отверстия порядка площади первой зоны Френеля $R_1 = \sqrt{\lambda r}$: $a \sim \sqrt{\lambda r}$ или $r \sim r_F$, $r_F = \dfrac{a^2}{\lambda}$. Если $r \le r_F$, то на площади отверстия укладываются несколько первых зон Френеля. Поэтому на расстояниях $r << r_F$ расплывание параллельного пучка еще не заметно. Например, при $a = 1$ см, $\lambda = 600$ нм получим $r_F = 170$ м. В плоскости $z = z_н$, $0 < z_н << r_F$ мы увидим светлый круг радиусом $\approx a$. Следовательно, на расстояниях $r << \dfrac{a^2}{\lambda}$ расходимостью падающей волны можно пренебречь.

На расстояниях $r >> r_F$ от экрана плоская волна превращается в сферическую — это область *дифракции Фраунгофера*. В этом случае все точки отверстия лежат в первой зоне Френеля. Согласно принципу Гюйгенса-Френеля поле волны создается вторичными источниками, распределенными по площади отверстия. Поэтому первый минимум интенсивности в точке наблюдения P определяется условием — разности фаз волн, излученных границей отверстия и волны, излученной центром отверстия, не должны превышать $\lambda/2$: $a\alpha \sim \frac{\lambda}{2}$, где α — угол между осью z и прямой OP. Следовательно, в грубом приближении можно считать, что волна распространяется в конусе с углом раствора $2\alpha \sim \lambda/a$.

В плоскости $z = z_н$, $z_н >> r_F$ наблюдаемая картина представляет собой *дифракционное изображение светящейся точки L*: светлый диск радиусом $\alpha z_н = 0{,}61\lambda z_н/a$ с центром в точке $(0, 0, z_н)$, окруженный темными и светлыми кольцами. Интенсивность равна нулю на окружностях радиусов $0{,}61\lambda z_н/a$, $1{,}11\lambda z_н/a$, ... Максимум интенсивности второго светлого кольца — окружность радиусом $0{,}81\lambda z_н/a$. Интенсивность света в центральном кольце 0,838 J_0, где J_0 — интенсивность падающей волны. Интенсивность света внутри круга, ограниченного вторым темным кольцом, равна 0,91 J_0. Поэтому только два или три первых светлых кольца достаточно ярки, чтобы их наблюдать невооруженным глазом.

9.7.3. Дифракция света на диске. Рассмотрим дифракцию плоской волны на диске радиусом a, расположенном в плоскости xy с центром в точке $x = y = 0$. Наблюдатель находится в точке $P(0, 0, z_0)$ за непрозрачным диском. В области $z_0 << r_F$, $r_F = \frac{a^2}{\lambda}$, интенсивность света близка к нулю. Однако, при смещении наблюдателя в область $z_0 \approx r_F$ интенсивность света возрастает. В центре плоскости $z = r_F$ находится яркое пятно, окруженное светлыми и темными кольцами. В области $z >> r_F$ диска больше не видно и первичная волна наблюдается неискаженной.

Пример 9.7.1. Направим пучок красного света с длиной волны $\lambda = 694{,}3$ нм на диск радиусом $a = 2{,}5$ мм. На экране в плоскости $z \sim 2$ м мы увидим яркое пятно.

Новая «линза» — шарик или диск. Фокусирующие свойства диска позволили получить фотографии предметов. Линзой служил диск из жести диаметром 5 см, удаленный от оригинала и от изображения на 35 м. Несмотря на малую контрастность изображения, все детали предмета хорошо различаются.

Дифракция света на диске впервые привлекла внимание ученых в 1818 г., когда О. Френель представил Парижской Академии наук «Мемуар о дифракции света». Изучая эту работу, французский математик и физик С. Пуассон пришел к выводу, что за непрозрачным экраном должно наблюдаться светлое пятно. Это предсказание сторонники корпускулярной теории света сочли бессмысленным. Однако Д. Араго поставил эксперимент и обнаружил, что на осевой линии за диском интенсивность света не равна нулю

Этот эффект произвел сильное впечатление и приблизил конец долгому спору между сторонниками корпускулярной и волновой теориями света. Вскоре волновая теория получила всеобщее признание.

Пример 9.7.2. Длины звуковой и электромагнитной волн в воздухе $\lambda = 2$ см одинаковы. В случае звука скорость волны $c = 332$ м/с, частота $\nu = 1{,}67$ кГц. Частота электромагнитной волны $\nu = 15$ ГГц. Интересно отметить, что, несмотря на различную природу, электромагнитные и звуковые волны одной длины ведут одинаковым образом в явлениях дифракции и отражения от металлических экранов.

Отметим, что основой современной теории дифракции являются уравнения Максвелла. Первые работы, выполненные Г. Кирхгофом в 1882 г., позволили создать строгую теорию и доказать принцип Гюйгенса-Френеля (см. Дополнение IV, п. 9.4, 9.7).

9.8. Дифракционная решетка

Дифракционной решеткой можно назвать любое устройство, преобразующее амплитуду и фазу падающей на него волны. Рассмотрим одномерную решетку, состоящую из ряда щелей длиной l, шириной а, расположенных в непрозрачном экране в плоскости xy на равных расстояниях d друг от друга (рис. 9.8.1). Ширина непрозрачной полоски $d - a$, (a, $d \ll l$). Полное число щелей — N.

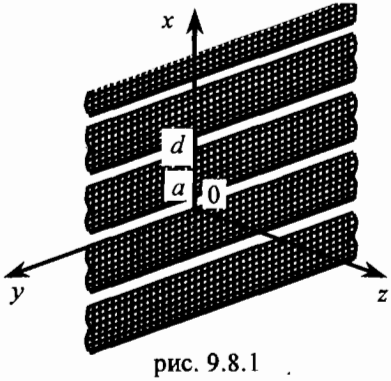


рис. 9.8.1

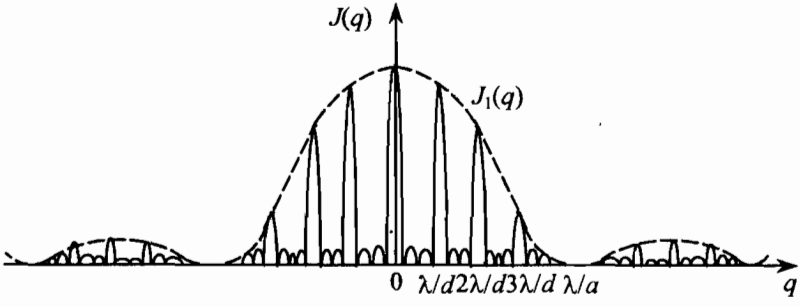


рис. 9.8.2

На решетку падает плоская линейно-поляризованная монохроматическая волна в направлении оси z. Вектор поляризации $\vec{e} = (e_0\ 0,\ 0)$. Длина волны — λ, интенсивность — J_0. В области $z >> a^2/\lambda$ мы имеем дифракцию Фраунгофера. Согласно принципу Гюйгенса-Френеля в точку наблюдения $P(x,\ 0,\ z)$ приходят плоские линейно-поляризованные волны, «излучаемые» каждой щелью. В результате конструктивной интерференции волн решетка преобразует падающую волну в сферическую с амплитудой, зависящей от координат. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости собирающей линзы.

Пусть θ — угол между плоскостью $x = 0$ и плоскостью, проходящей через ось y. Угловое распределение интенсивности дифрагированной волны в области $|x| << z$ имеет вид

$$\Delta J = J(\theta)\Delta\theta, \tag{9.8.1}$$

$$J(\theta) = J_1(\theta)H(\theta)\cos^2\theta,$$

$$J_1(\theta) = J_0(al/\lambda z)^2[(\sin\delta_0/2)/(\delta_0/2)]^2, \qquad H(\theta) = [(\sin N\delta/2)/(\sin\delta/2)]^2,$$

$$\delta_0 = ka\sin\theta, \qquad \delta = kd\sin\theta, \qquad k = 2\pi/\lambda.$$

Здесь $J_1(\theta)$ — угловое распределение интенсивности в случае одной щели, $H(\theta)$ — множитель, возникающий благодаря упорядоченному расположению щелей.

На рис. 9.8.2 изображен график функции $J(\theta)$, где $q = \sin\theta$. График функции $J_1(\theta)$ изображен пунктиром. Функция $J_1(\theta)$ имеет максимум при значении $\theta = 0$ и минимумы $J_1(\theta) = 0$ при $\sin\theta_{1,2} = \pm\lambda/a,\ \pm 2\lambda/a,\ \ldots$, разделенные максимумами убывающей величины. Значения $J_1(\theta)$ в максимумах быстро спадают. Функция $H(\theta)$ имеет *главные максимумы* величиной N^2 при значениях $\delta/2 = \pm\pi m$ ($m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$):

$$\sin\theta_m = \pm m\lambda/d. \tag{9.8.2}$$

Очевидно $m \le d/\lambda$. Целое число m называют *порядком спектра*. Величина максимумов функции $J(\theta)$ при значениях θ_m

$$J(\theta_m) \sim N^2[\sin(am/d)/(am/d)]^2.$$

В промежутках между главными максимумами расположены вторичные максимумы и нули функции $H(\theta)$ при значениях $\sin\delta/2 \ne 0$, $N\delta/2 = \pm\pi s$, $s = 1,\ 2,\ \ldots,\ s/N$ — не целое число; или

$$\sin\theta_s = \pm s\lambda/dN, \tag{9.8.3}$$

Следовательно, ширина каждого максимума $\Delta\theta_m$ определяется полным размером решетки Nd: $\Delta\theta_m = \lambda/Nd$. При $N >> 1$ величины вторичных максимумов быстро убывают — первый вторичный максимум составляет лишь несколько процентов от главного максимума.

Дифракционная решетка — спектральный прибор. Положение максимума при $m \neq 0$ зависит от длины волны. Поэтому решетку можно использовать для анализа спектрального состава немонохроматического излучения. Решетка разлагает падающее излучение в спектры нескольких порядков. В спектрах каждого порядка наибольший угол отклонения у света красного цвета, наименьший — у фиолетового. Отметим, что в спектре, получаемом при преломлении волн призмой, порядок расположения цветов обратный.

Найдем максимальную ширину $[\lambda_1, \lambda_2]$ спектрального интервала, при которой спектры соседних порядков не перекрываются. В этом случае значения $\sin\theta_{m2} = m\lambda_2/d$ и $\sin\theta_{m1} = (m + 1)\lambda_1/d$ должны совпадать: $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_1/m$.

Разрешающая сила решетки. Угловое расстояние между главным максимумом порядка m и соседним минимумом $\Delta q = \lambda/Nd$. Угловое расстояние между главными максимумами порядка m для падающих волн длиной λ и $\lambda + \Delta\lambda$ равно $\Delta q_m = m\Delta\lambda/d$. Для разрешения двух линий спектра достаточно, чтобы максимум для одной длины волны совпал с минимумом другой. Тогда $\Delta q_m = \Delta q$ или $\Delta\lambda/\lambda = 1/mN$. Полагая $\Delta\lambda = 0{,}01$ нм, $m = 2$, $\lambda = 550$ нм (зеленый свет), получим число штрихов решетки $N = 27\,500$.

Принцип действия решетки был открыт в 1785 г. Д. Риттенхаузом. Первые спектры получены Йозефом Фраунгофером в 1819 г. Для изготовления решетки он создал гравировальные машины, прочерчивающие тонкие щели на золотой пленке. Так можно создать и двумерные решетки. При относительном смещении двух решеток наблюдаются движущиеся *муаровые узоры*. Трехмерные решетки — это кристаллы. Анализируя дифракционную картину, получают информацию о структуре кристаллической решетки.

Часть V. ОПТИКА

Глава 1. Законы геометрической оптики

1.1. Геометрическая оптика

Оптическим излучением называют электромагнитные волны в диапазоне длин волн от 1 мм до 10 нм. Оно включает *инфракрасное излучение* в области от 1 мм до 760 нм, открытое английским ученым В. Гершелем в 1800 г., *видимый свет* от темно-красного (λ = 760 нм) до темно-фиолетового (λ = 380 нм) и *ультрафиолетовое излучение* (λ = 380÷10 нм). Длины волн видимого света: фиолетовый, синий (450—500 нм), зеленый (500—570 нм), желтый (570—590 нм), оранжевый (590—620 нм), красный (620—780 нм).

1.1.1 Дисперсия среды. Первое измерение скорости света сделано датским астрономом О. Ремером в 1675 г. на основе наблюдений затмений спутника Юпитера. Согласно современным данным скорость света в вакууме $c = 2{,}998\ 10^8$ м/с.

В однородной изотропной (от греч. *isos* — одинаковый, *tropos* — поворот, направление) среде, прозрачной для световой волны определенной частоты, скорость распространения света $v = c/n$; величина $n = \sqrt{\varepsilon}$ называется *показателем преломления*, ε – *коэффициент диэлектрической проницаемости.*

Дисперсией среды называется зависимость коэффициента преломления от частоты волны: $n = n(\nu)$. Для оптического стекла $n = 1{,}528$ при $\nu = 6{,}92 \cdot 10^{14}$ Гц (темно-голубой цвет); $n = 1{,}511$ при $\nu = 3{,}91 \cdot 10^{14}$ Гц (темно-красный цвет). Для стекла среднее по спектру значение $n = 3/2$, для воды $n = 4/3$. Отметим,что в статическом пределе ($\nu \to 0$) коэффициент диэлектрической проницаемости воды $\varepsilon(0) = 81$.

Спектр солнечного света. Если в пучок солнечного света, прошедшего через узкую щель, поставить стеклянную призму, то на экране мы увидим растянутую полоску непрерывно изменяющейся окраски — *непрерывный спектр.* Наименее отклоненный край спектра — красного цвета, наиболее отклоненный — фиолетового цвета. Следовательно, белый свет представляет собой наложение монохроматических электромагнитных волн различных частот, а коэффициент преломления вещества зависит от частоты монохроматических компонент света. Этот опыт описан И. Ньютоном в 1675 г. Надо отметить, что Ньютон проявил интерес к оптике будучи студентом Тринити-колледжа, куда был принят в 1661 г. Именно за создание отражательного телескопа (рефлектора) он был избран в 1671 г. членом Королевского общества. Его экспериментальные работы в 1669—1704 гг. и взгляды на природу света оказали сильное влияние на последующее развитие оптики.

1.1.2. Цвет. Цвет тела зависит от способности тела по-разному поглощать, отражать и пропускать свет различных цветов. Обычно мы рассматриваем непрозрачные предметы в отраженном свете. В этом случае цветом предмета называют цвет отраженного света. Предмет белого цвета отражает световые волны всех цветов. Тело красного цвета отражает из падающего на него белого света, в основном, красные, а остальные поглощает. Предмет, не отражающий света, кажется черным. Поэтому мы видим черным красный предмет, освещенный, например, зеленым светом.

Почти прозрачные тела можно рассматривать в проходящем и отраженном свете. При прохождении волны через мутное вещество (лед, туман, атмосферу и т. д.) волна частично поглощается и рассеивается. Благодаря рассеянию пучок света становится видимым при наблюдении сбоку.

В атмосфере свет рассеивается на неоднородностях плотности воздуха, которые возникают благодаря флуктуациям числа молекул внутри объема, линейные размеры которого одного порядка с длиной волны. Поскольку длина волны больше размеров молекул, то интенсивность рассеиваемой волны обратно пропорциональна длине волны в четвертой степени. Отношение длины волны красного света ($\lambda_к = 650$ нм) к длине волны синего света ($\lambda_с = 450$ нм) равно 1,44. Поэтому интенсивность рассеянного синего света в $(1{,}44)^4 \approx 4{,}3$ раза больше интенсивности рассеянного красного света. Вот почему мы видим небо голубым. Небо на закате выглядит желто-красным, т. к. в проходящем свете почти отсутствует голубая компонента солнечного света.

1.1.3. Геометрическая оптика. Оптика, как раздел электродинамики, включает теорию распространения светового излучения в неоднородной, неизотропной среде. В этом случае световая волна описывается шестью уравнениями Максвелла, точное решение которых представляет сложную математическую проблему. Причина в том, что в этих уравнениях электромагнитные свойства произвольной среды представлены не коэффициентом преломления, а двумя наборами 18 величин, называемых тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей. Задача существенно упрощается в приближении *геометрической оптики*: если в каждом небольшом участке пространства фронт волны можно рассматривать как плоскую поверхность, то можно говорить о направлении распространения волны, перпендикулярном волновому фронту. В геометрической оптике вводят математическое понятие *луч*.

Луч в изотропной среде — линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением распространения фронта волны в окрестности этой точки. Это приближение автоматически приводит к введению двух различных коэффициентов преломления, определяющих траектории лучей, различающихся поляризацией. В изотропной однородной среде коэффициенты преломления одинаковы для лучей двух различных поляризаций.

Геометрическая оптика рассматривает световую волну как пучок лучей, ортогональных к волновым фронтам, совершенно отвлекаясь от волновой природы света. Поэтому основные законы геометрической оптики — закон отражения и закон преломления — полностью игнорируют дифракционные явления. Это означает, что должны выполняться следующие условия:

1. длина волны $\lambda << a$, где a — характерные размеры неоднородности,

2. площадь сечения неоднородности значительно больше площади первых зон Френеля: расстояние r от неоднородности до точки наблюдения удовлетворяет условию $\lambda r << a^2$.

3. приращение показателя преломления на расстояниях порядка длины волны λ достаточно мало.

Пусть точечный источник света O расположен в однородной среде с показателем преломления n; $P(x, y, z)$ — точка, наблюдения, $s(x, y, z) = OP$ — расстояние между точками O и P. Фаза сферической волны $\Phi = \omega t - \omega s/v$. Очевидно, $\tau = s/v = ns/c$ — время распространения фронта волны. Лучи представляют собой пучок прямых, исходящих из точки О. Фазу волны можно представить в виде $\Phi = \omega t - \omega l/c$. Величину $l = ns$ называют *оптической длиной* отрезка OP.

1.1.4. Принцип Ферма. Основной задачей геометрической оптики является определение траекторий лучей в оптически неоднородной среде, показатель преломления которой $n = n(x,y,z)$ является функцией координат. Принцип Ферма позволяет получить уравнение траектории луча, проходящего через любую точку заданного волнового фронта.

В оптически неоднородной среде луч представляет собой кривую линию. Разобьем ее на N малых отрезков длиной Δs_k ($k = 1,2,\ldots N$). Выберем на каждом отрезке точку M_k. Обозначим n_k значение показателя преломления в точке M_k. *Оптической длиной кривой*, соединяющей точки L и P, называют величину $l = l(x, y, z)$:

$$l = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \max \Delta s_n \to 0}} \sum_{k=1}^{N} n_k \Delta s_k \qquad (1.1.1)$$

Время распространения малого участка фронта световой волны по траектории луча $\tau = l/c$.

В 1662 г. П. Ферма установил *основной закон геометрической оптики: световой луч, соединяющий две точки, представляет собой кривую, для которой оптическая длина принимает наименьшее значение.*

С современной точки зрения принцип Ферма отражает волновую природу света: в точку наблюдения приходит волна, фаза которой равна экстремальному значению оптической длины: $\Phi_{ex} = \omega t - (\omega / c) l_э$.

1.2. Отражение и преломление света

Если показатель преломления заметно изменяется на расстояниях $\delta >> \lambda$, то световая волна представляет собой пучок плавно изгибающихся лучей: волна проходит через среду не отражаясь. Особый интерес представляют среды, содержащие области, в которых коэффициент преломления заметно изменяется на расстоянии $\sim\lambda$. Простейший пример — среда, в которой показатель преломления постоянен внутри плоского слоя и скачком изменяется при переходе к следующему слою. Разрыв показателя преломления приво-

дит к излучению вторичных волн, которые интерферируют с падающей волной. В результате возникает отраженная волна, а внутри следующего слоя формируется преломленная волна.

Используя многослойные среды, удается создать диэлектрические зеркала с высокой отражательной способностью или, наоборот, покрытия, не отражающие электромагнитные волны (антирадарная «краска» или просветленная оптика). Интересно, что сейчас разработана аналогичная акустическая система для «гашения» шума: микросхема анализирует звук и генерирует волну той же интенсивности, но сдвинутую на половину периода.

1.2.1. Закон отражения света. Выведем закон отражения света, исходя из принципа Ферма. Пусть плоскость xy является границей раздела двух сред с различными коэффициентами преломления: n_1 — в полупространстве $z > 0$, n_2 — в полупространстве $z < 0$. Поместим источник света в точке $L(0, 0, h)$ (рис. 1.2.1). Фотодетектор находится в точке $P(x_н, 0, z_н)$. После отражения луч должен попасть в точку P. Требуется найти такую траекторию, чтобы оптический путь был наименьшим из возможных.

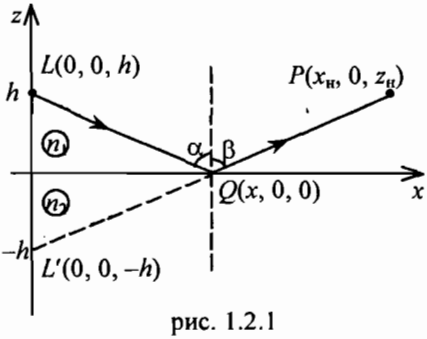


рис. 1.2.1

Из принципа Ферма следует, что искомый луч из множества лучей должен лежать в плоскости zx, т.е. луч должен проходить через некоторую точку $Q(x,0,0)$. Рассмотрим луч LQP и применим еще раз принцип Ферма к оптической длине $l(x) = n_1 r_{LQ} + n_1 r_{QP}$, $r_{LQ} = \sqrt{x^2 + h^2}$, $r_{QP} = \sqrt{(x_н - x)^2 + z_н^2}$. Приравнивая нулю производную dl/dx, получим уравнение $x/r_{LQ} = (x_н - x)/r_{QP}$, из которого находим $x = x_0$, $x_0 = x_н h/(h + z_н)$. Подставляя $x = x_0$ в условие экстремума, приходим к выводу, что $\sin\alpha = \sin\beta$, где α – угол между лучом LQ и нормалью к плоскости xy, β – угол между лучом QP и той же нормалью. Угол α называют углом падения луча, угол β — углом отражения: $\alpha = \beta$.

Теперь можно сформулировать *закон отражения: падающий луч, отраженный луч и нормаль к поверхности раздела двух сред лежат в одной плоскости. Угол отражения луча равен углу падения луча.*

Минимальное значение $l_ф = n_1\sqrt{x_н^2 + (h + z_н)^2}$ соответствует прямолинейному лучу $L'P$, идущему в точку P из точки $L'(0, 0, -h)$, представляющей собой зеркальное отображение точки L $(0, 0, h)$.

Существенная область отражения. Правильное зеркальное отражение может возникнуть только в том случае, когда выполняются условия применимости геометрической оптики. Рассмотрим отражающую поверхность в форме круга площадью $S = \pi a^2$ и удаленный источник L, для которого

$r_{LQ} >> r_{QP}$. Реальный физический луч отражается не в одной точке плоскости xy. В соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля поле в точке наблюдения формируется в результате интерференции вторичных волн, «излучаемых» каждой точкой плоскости xy. Однако наиболее существенной областью является эллипс с центром в точке Q, представляющий собой проекцию первых зон Френеля на плоскость xy. Для человека ростом h величина $r_{QP} = h/\cos\alpha$.

Площадь проекции первой зоны Френеля $S_F = S_1/\cos\alpha$, $S_1 = \pi\lambda r_{QP}$. Закон отражения выполняется при условии $S > S_F$, или $a >> (\lambda h)^{1/2}/\cos\alpha$. (См. Дополнение IV, п. 9.4.)

Известный пример — образование ярких блестков на снегу. Положим $h = 2$ м, $\lambda = 650$ нм, $\alpha \sim 0$. Тогда $a > 1{,}14$ мм. При значении $\alpha = \pi/6$ получим $a > 2{,}28$ мм. Для того чтобы при невысоком расположении Солнца увидеть правильное отражение солнечных лучей от кристалликов снега, размер кристаллика должен быть порядка $2 \div 3$ мм. На больших расстояниях снежное поле выглядит равномерно освещенным. При скользящем падении ($\alpha \sim \pi/2$) уже первые зоны Френеля могут охватить большую часть трассы луча света или радиоволны. Понятие существенной области отражения, важной при выборе площадки для установки радара, впервые введено физиками-теоретиками М.А. Леонтовичем и Е.Л. Фейнбергом.

Пример 1.2.1. Уголковый отражатель. Возьмем три взаимно перпендикулярные отражающие плоскости. Эта система зеркал обладает уникальным свойством: падающий внутрь луч света после трех отражений выходит обратно в противоположном направлении. Докажем это утверждение.

Зададим ориентацию отражающих плоскостей взаимно перпендикулярными единичными векторами $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$, перпендикулярными плоскостям zy, xz, xy. Направление падающего луча зададим вектором $\vec{k}$. Предварительно отметим, что при отражении от плоскости, ориентированной в направлении вектора $\vec{n}$, отраженный луч распространяется в направлении вектора $\vec{k}' = \vec{k} - 2(\vec{n}\vec{k})\vec{n}$. Действительно, представим вектор $\vec{k}$ в виде суммы вектора $(\vec{n}\vec{k})\vec{n}$, перпендикулярного плоскости, и вектора $\vec{k} - (\vec{n}\vec{k})\vec{n}$, принадлежащего плоскости. При зеркальном отражении первый вектор изменяет знак на противоположный, а второй — не изменяется.

После отражения от плоскости zy направление отраженного луча определяется вектором $\vec{k}_1 = \vec{k} - 2(\vec{n}_1\vec{k})\vec{n}_1$. Если теперь луч падает на плоскость xz, то после отражения луч распространяется в направлении вектора

$$\vec{k}_2 = \vec{k}_1 - 2(\vec{n}_2\vec{k}_1)\vec{n}_2 = \vec{k} - 2(\vec{n}_1\vec{k})\vec{n}_1 - 2(\vec{n}_2\vec{k})\vec{n}_2 .$$

После третьего отражения луч выходит в направлении вектора

$$\vec{k}_3 = \vec{k}_2 - 2(\vec{n}_3\vec{k}_2)\vec{n}_3 =$$

$$= \vec{k} - 2(\vec{n}_1\vec{k})\vec{n}_1 - 2(\vec{n}_2\vec{k})\vec{n}_2 - 2(\vec{n}_3\vec{k})\vec{n}_3 = \vec{k} - 2\vec{k} = -\vec{k} .$$

В 1993 г. были созданы зеркала с напылением из 28 слоев окисей кремния и титана толщиной 2 микрона, отражающие 99,995% интенсивности света.

Пример 1.2.2. Отражение от параболического зеркала. На рис. 1.2.2 изображена парабола $z_к = x^2/2R$, представляющая собой сечение параболоида вращения — поверхности, получаемой вращением параболы вокруг оси z, R — фокальный параметр. Прямая $z = -R/2$ называется директриссой, точка $S(0, 0, R/2)$ — фокусом параболы. Согласно определению парабола представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от фокуса и директриссы.

Расположим источник света в фокусе параболы $S(0, 0, R/2)$, наблюдатель находится в точке $P(x_н, 0, z_н)$. Покажем, что все лучи, отраженные от поверхности, идут параллельно оси z.

Оптическая длина луча, отраженного в произвольной точке $Q(x, 0, z_к)$, равна $l(x) = r_{SQ} + r_{QP}$,

$$r_{SQ} = \sqrt{x^2 + (R/2 - z_k)^2} = x^2/2R + R/2, \quad r_{QP} = \sqrt{(x_н - x)^2 + (z_н - x^2/2R)^2}\ .$$

Следуя принципу Ферма, найдем корень уравнения $dl(x)/dx = 0$:

$$\frac{x}{R} - [x_н - x + (z_н - \frac{x^2}{2R})\frac{x}{R}]\frac{1}{r_{QP}} = 0, \ \rightarrow x = x_н.$$

Экстремальное значение оптической длины $l_{ex} = l(x_н)$, $l_{ex} = R/2 + z_н$ соответствует лучу $SQ_{ex}P$, отраженному в точке $Q_{ex}(x_н, 0, x_н^2/2R)$ в направлении параллельном оси z. Можно проверить, что угол падения равен углу отражения. Из параболического отражателя выходит пучок лучей, параллельных оси z. Фаза отраженной волны $\Phi(t, x_н, 0, z_н) = \omega t - \omega z_н/c - \omega R/2c$.

рис. 1.2.2

1.2.2. Закон преломления света. Рассмотрим источник света в точке $L(0, 0, h)$ полупространства $z > 0$, заполненного средой с показателем преломления n_1. Фотодетектор находится в точке $P(x_н, 0, z_н)$ полупространства $z < 0$ с коэффициентом преломления n_2 (рис.1.2.3). Согласно принципу Ферма луч, соединяющий точки L и P, лежит в плоскости zx. Оптическая длина траектории LQP

$$l(x) = n_1\sqrt{x^2 + h^2} + n_2\sqrt{(x_н - x) + z_н^2}$$

принимает минимальное значение при условии $dl/dx = 0$:

$$\frac{n_1 x}{r_{LQ}} = \frac{n_2(x_н - x)}{r_{QP}}$$

Это условие приводит к *закону преломления*:

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2. \qquad (1.2.1)$$

Очевидно, $\alpha_2 < \alpha_1$, если $n_2 > n_1$.

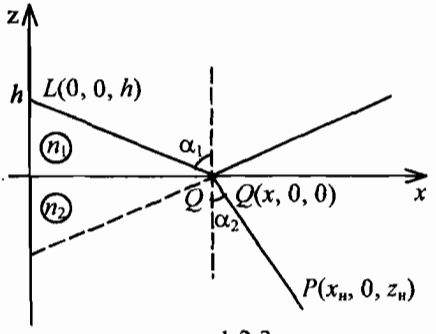


рис. 1.2.3

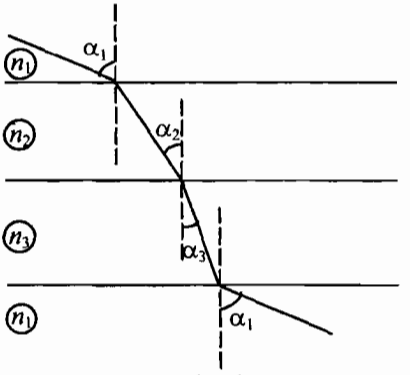


рис. 1.2.4

Рассматривая преломление луча на каждой из границ в случае плоскослоистой среды с различными показателями преломления (рис.1.2.4), получим $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 = n_3 \sin\alpha_3$. Мы видим, что закон преломления имеет форму закона сохранения величины $n\sin\alpha$:

$$n\sin\alpha = \text{const}. \qquad (1.2.2)$$

Итак, закон преломления можно сформулировать в следующем виде: падающий, преломленный лучи и нормаль к границе раздела лежат в одной плоскости; *произведение коэффициента преломления на синус угла между нормалью и лучом является постоянной величиной для любой из плоскослоистых сред.*

Закон преломления установлен В. Снеллиусом в 1621 г. Общая формулировка закона дана в 1637 г. французским философом, физиком и математиком Р. Декартом.

Угол полной поляризации. Замечательным свойством обладает отражение света, падающего под таким углом, при котором $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$. В этом случае отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны: $\alpha_1 = \alpha_p$, $\alpha_2 = \pi/2 - \alpha_p$. Из закона преломления получим $tg\alpha_p = n_2/n_1$. При любом направлении поляризации света, падающего под углом α_p, вектор напряженности электрического поля отраженного света всегда направлен перпендикулярно к плоскости падения. Следовательно, свет, поляризованный в плоскости падения, не отражается. Поэтому неполяризованный естественный свет после отражения становится поляризованным, например свет, отраженный от поверхности воды. Угол α_p называют углом Брюстера. Это явление открыл шотландский физик Д. Брюстер в 1815 г.

Свойство обратимости лучей. Если на рис. 1.2.1, 1.2.3 источник света поместить в точку P, а фотодетектор — в точку L, то траектория луча, соединяющего точки P и L, не изменится.

1.2.3. Полное внутреннее отражение. Источник света находится в среде с показателем преломления $n_2 > n_1$. В этом случае $\sin\alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin\alpha_2 > \sin\alpha_2$: угол преломления α_1 больше угла падения α_2. Отраженный луч распространяется в среде n_2 под углом, равным углу падения (рис. 1.2.5). Если увеличивать угол падения, то угол α_1 растет, преломленный луч становится менее ярким, а отраженный луч — все ярче. При некотором угле падения $\alpha_2 = \alpha_n$ преломленный луч идет параллельно границе раздела, т. е. $\alpha_1 = \pi/2$ и становится совсем незаметным, а отраженный луч — столь же ярким, как и падающий. Величину α_n, определяемую соотношением $\sin\alpha_n = n_1/n_2$, называют *предельным углом полного отражения.* Если угол падения $\alpha_2 > \alpha_n$, то преломленный луч отсутствует и наблюдается только отраженный луч в среде n_2. Однако анализ, учитывающий волновую природу света, показывает, что преломленная волна все-таки проникает в среду n_1 и распространяется параллельно поверхности раздела в тонком слое толщиной ~λ.

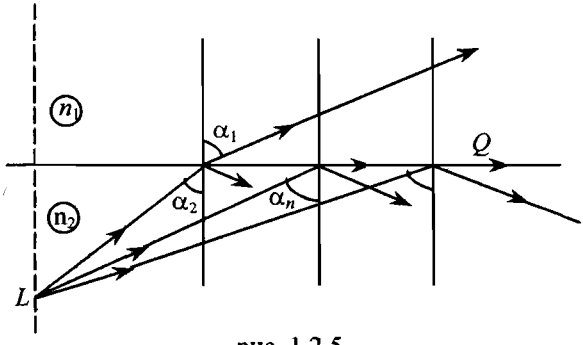


рис. 1.2.5

По отношению к вакууму ($n_1 = 1$) для воды $n = 4/3$, $\alpha_n = 48°$, для стекла $n = 3/2$, $\alpha_n = 42°$, у алмаза $n = 2{,}42$, $\alpha_n = 24°$.

1.2.4. Полное внутреннее отражение в плоскослоистой среде. С эффектом полного внутреннего отражения связаны такие явления, как миражи и отражение коротких радиоволн от ионосферы. При изучении этих явлений следует учесть, что коэффициент преломления зависит от координат. Поэтому траектория луча представляет собой плавную кривую. В случае плоскослоистой среды, коэффициент преломления которой $n = n(z)$, закон преломления имеет вид $n(z)\sin\alpha(z) = \text{const}$, где $\alpha(z)$ — угол между касательной к лучу и осью z в точке с координатой x, y, z.

Пусть траектория луча лежит в плоскости zx. Среда занимает область $z \geq 0$. В геометрической оптике изотропной среды волновой вектор $\vec{k}$ перпендикулярен фронту волны и направлен по касательной к траектории луча, $\vec{k} = (\omega/c)n(z)(\sin\alpha(z), 0, \cos\alpha(z))$. Квадрат волнового вектора $\vec{k}^2 = (\omega/c)^2 n^2(z)$. Закон преломления является следствием сохранения проекции на ось x волно-

вого вектора $\vec{k}$: $k_x = (\omega/c)n(z)\sin\alpha(z) = (\omega/c)n(0)\sin\alpha(0)$. Проекция волнового вектора на ось z равна $k_z(z) = (\omega/c)[n^2(z) - n^2(0)\sin^2\alpha(0)]^{1/2}$. Если $n^2(z) = \varepsilon(z)$ — функция, убывающая в положительном направлении оси z, то траектория луча — кривая с выпуклостью, обращенной в направлении убывания функции $n(z)$. Тогда при условии $k_z(z_m) = 0$ происходит полное внутреннее отражение в плоскости $z = z_m$: $n(z_m) = n(0)\sin\alpha(0)$. Следовательно, $\cos\alpha(z_m) = 0$, $\alpha(z_m) = \pi/2$. Если $\alpha(0) = 0$, то отражение происходит в плоскости $z = z_m$, удовлетворяющей уравнению $n(z_m) = 0$.

Эта ситуация реализуется в плазме при отражении радиоволн от ионосферы. Если пренебречь влиянием магнитного поля Земли, то коэффициент преломления в случае ограниченного горизонтального слоя ионосферной плазмы можно представить в виде

$$n(z, \omega) = \sqrt{1 - e^2 N(z)/m\omega^2\varepsilon_0}\ ,$$

где e, m — заряд и масса электрона, $N(z)$ — концентрация электронов на высоте z. Очевидно, что для связи с космическими кораблями необходимо использовать СВЧ диапазон.

Пример 1.2.3. Два луча пересекаются в точке M (рис. 1.2.6). Найдем смещение точки пересечения, если перед точкой M поставить плоскопараллельную пластину толщиной h так, что луч LM падает по нормали, а луч SM — под углом α к плоскости пластин.

Траектория луча LM остается прямой линией. Луч SA преломляется. Согласно закону преломления $\sin\alpha = n\sin\beta$, где β — угол преломления. После преломления в точке B траектория луча — отрезок прямой BP, образующий с нормалью к пластине угол α. Найдем сначала смещение BN луча BP. Построим два прямоугольных треугольника — ABN и ABK с общей гипотенузой AB. Катет $BN = AB\sin\gamma$, где $\gamma = \alpha - \beta$. Очевидно $AB = h/\cos\beta$. Следовательно,

$$BN = \frac{h\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} = d\sin\alpha[1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}],\ MP = d[1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}].$$

В случае малого угла падения $\alpha << 1$ получим $MP = d(n-1)/n$.

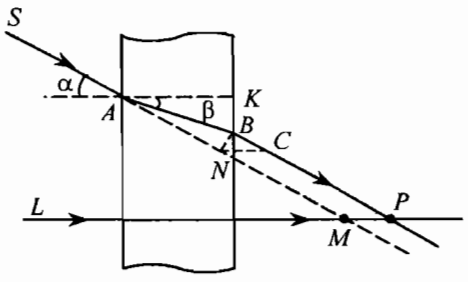


рис. 1.2.6

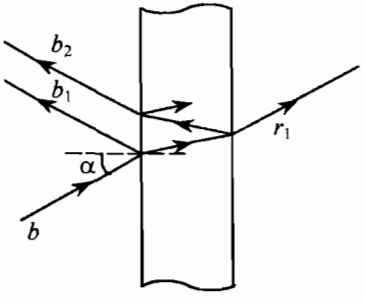


рис. 1.2.7

Задача 1.2.4. Луч света b на рис. 1.2.7 падает на плоскопараллельную пластинку толщиной d под углом α. Покажите, что расстояние между лучами b и r_1 равно $s_1 = d\sin\alpha[1 - \cos\alpha/(n^2 - \sin^2\alpha)^{1/2}]$, расстояние между лучами b_1 и b_2 равно $s_{12} = d\sin2\alpha/(n^2 - \sin^2\alpha)^{1/2}$.

Задача 1.2.5. Луч света от направленного источника излучения, расположенного под водой, падает на поверхность воды под углом α, большим угла полного внутреннего отражения λ. Выйдет ли он в воздух, если к поверхности воды приложить стеклянную плоскопараллельную пластинку?

Решение. Согласно условию задачи угол падения луча $\alpha > \lambda$, $n_в\sin\lambda = 1$. Закон преломления в форме (1.2.2) позволяет сразу же решить задачу. Пусть луч выходит через пластинку под углом β. Тогда

$$\sin\beta = n_в\sin\alpha > n_в\sin\lambda = 1, \qquad \sin\beta>1.$$

Отсюда следует вывод: луч света не выйдет в воздух. Выясним теперь, пройдет ли луч света в стеклянную пластинку? Предельный угол λ_0 для границы вода–стекло определяется условием $\sin\lambda_0 = n_{ст}/n_в$, $\lambda_0 > \lambda$. Если $\lambda < \alpha < \lambda_0$, то луч пройдет в пластинку и отразится от границы стекло — воздух. Если же $\alpha > \lambda_0$, то луч не проникнет в пластинку.

Пример 1.2.6. Призма. В оптических приборах часто используют призмы. Двухгранный угол α между гранями, через которые проходит луч, называется *преломляющим углом* призмы (рис. 1.2.8). Пусть луч падает под углом θ_1 на грань AB. После преломления призмой луч света всегда отклоняется к основанию BC. Угол γ между направлениями падающего и отклоненного лучами называется *углом отклонения луча* призмой. Наша задача — найти угол γ. Коэффициент преломления материала призмы n.

После преломления на грани AB луч идет в призме, образуя с нормалью N_1 угол β_1. Согласно закону преломления

$$\sin\theta_1 = n\sin\beta_1. \tag{1}$$

На грань AC луч падает под углом β_2, зависящим от преломляющего угла призмы. В ΔPAQ сумма углов равна π:

$$\alpha + (\pi/2 - \beta_1) + (\pi/2 - \beta_2) = \pi, \quad \text{или} \quad \alpha = \beta_1 + \beta_2. \tag{2}$$

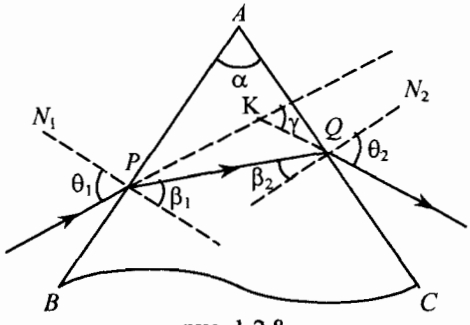


рис. 1.2.8

Если угол β_2 меньше угла полного внутреннего отражения λ, удовлетворяющего условию $n\sin\lambda = 1$, то после преломления на грани AC луч выходит из призмы под углом θ_2 к нормали N_2.

Из закона преломления имеем

$$n\sin\beta_2 = \sin\theta_2. \qquad (3)$$

Угол отклонения γ найдем из ΔPKQ:

$$\gamma = (\theta_1 - \beta_1) + (\theta_2 - \beta_2), \text{ или } \gamma = \theta_1 + \theta_2 - \alpha. \qquad (4)$$

Уравнения (1)—(4) позволяют найти угол γ как функцию угла падения θ_1 и преломляющего угла призмы α.

Рассмотрим наиболее важный случай малых углов падения и преломления: $\theta_1 << 1$, $\alpha << 1$. Тогда из (1), (3) имеем уравнения $\theta_1 \approx n\beta_1$, $n\beta_2 \approx \theta_2$. Подставляя θ_1, θ_2 в (4) и учитывая (2), получим

$$\gamma = (n - 1)\alpha. \qquad (5)$$

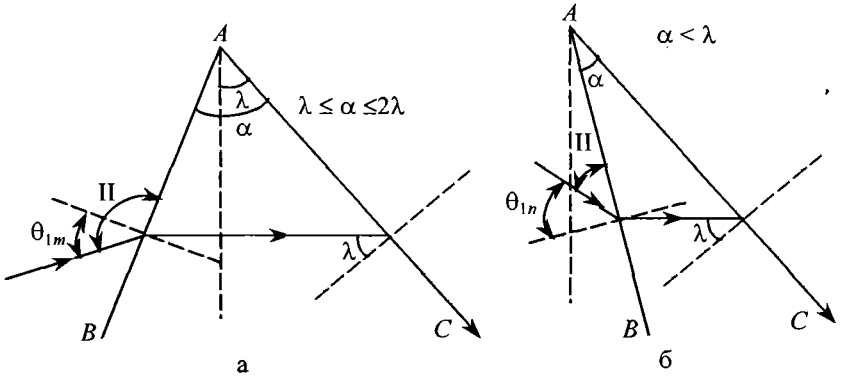


рис. 1.2.9

Найдем теперь условие полного внутреннего отражения от грани AC: угол β_2 должен удовлетворять условию $\lambda \le \beta_2 \le \pi/2$. Значению $\beta_{2m} = \lambda$ соответствует угол преломления $\beta_{1m} = \alpha - \lambda$ и угол падения θ_{1m}, удовлетворяющий условию $\sin\theta_{1m} = n\sin(\alpha - \lambda)$. При значении $\alpha = \lambda$ угол $\theta_{1m} = 0$, при $\alpha = 2\lambda$ угол $\theta_{1m} = \pi/2$. Если $\lambda \le \alpha \le 2\lambda$, то угол θ_1 может лежать в области II на рис. 1.2.9 *а*. При $\alpha \ge 2\lambda$ ни один луч, падающий на грань AB, не выйдет из грани AC. Если $\alpha \le \lambda$, то лучи, падающие на грань AB в области II на рис. 1.2.9 б, не выйдут из призмы. Нижняя граница этой области θ_{1n} определяется условием $\sin\theta_{1n} = n\sin(\lambda - \alpha)$.

При симметричном преломлении ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $\beta = \alpha/2$) угол отклонения $\gamma = 2\theta - \alpha$ оказывается наименьшим ($\sin\theta = n\sin\alpha/2$). Отметим, что в случае $\alpha = 2\lambda$ получим $\theta = \pi/2$, $\gamma = \pi - 2\lambda$.

1.2.5. Закон преломления в сферически симметричной среде. Коэффициент преломления — функция $n = n(r)$, где r — расстояние от центра

симметрии O. Траектория представляет собой кривую линию. В этом случае закон преломления имеет вид

$$rn(r)\sin\theta(r) = \text{const}, \qquad (1.2.3)$$

где $\theta(r)$ — угол между направлением луча — касательной к кривой и прямой, проходящей через точку O.

Пример 1.2.7. Линза Лунеберга. Параллельный пучок лучей падает на шар, показатель преломления которого

$$n(r) = \sqrt{2-(r/R)^2}\ ,\ 0 \le r \le R; \qquad n(r) = 1,\ r \ge R.$$

Рассмотрим траекторию луча, проходящего на расстоянии b от оптической оси (рис. 1.2.10). Угол падения в точке A равен α, $\sin\alpha = b/R$. Согласно (1.2.3) $rn(r)\sin\theta(r) = R\sin\alpha$. В точке S выхода луча из сферы угол преломления $\theta(R) = \theta_0$. Из закона преломления находим, что угол $\theta_0 = \alpha$ и не зависит от значения b. Мы приходим к выводу, что траектории всех падающих лучей пересекаются в точке S. Если в точку S поместить источник, то все лучи выдут наружу пучком, параллельным оптической оси (рис.1.2.11).

В строгой теории показано, что внутри шара траектория луча — дуга эллипса. При $b = R$ — траектория луча — окружность. В этом можно убедиться, применяя принцип Ферма. Отметим, что линза Лунеберга применяется в радиотехнике сверхвысоких частот.

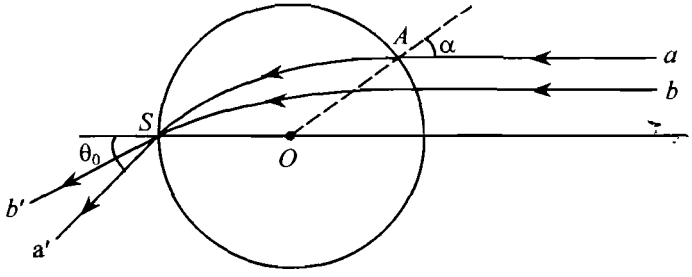


рис. 1.2.10

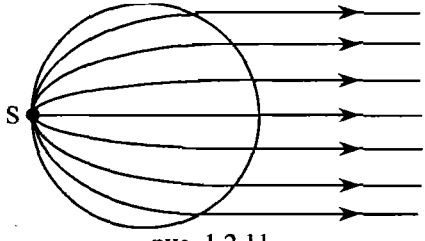


рис. 1.2.11

Задача 1.2.8. Планета радиусом R имеет сферически симметричную атмосферу с коэффициентом преломления

$$n(r) = \sqrt{4-2r/R}\ ,\ R \le r \le 3R/2; \qquad n(r) = 1,\ r \ge 3R/2,$$

где r — расстояние от центра. Покажите, что возможная траектория луча света — окружность радиусом $4R/3$.

Решение. Согласно принципу Ферма $\frac{dl}{dr} = 0$, где $l = 2\pi rn(r)$. Из этого условия находим

$$n-(r/Rn) = 0,\ r_{ex} = 4R/3.$$

1.3. Радуга и глория

1.3.1. Радуга. *Радуга* — изумительное явление природы, которое с давних пор стремились описать поэты и ученые. Последовательная дифракционная теория радуги построена в результате решения уравнений Максвелла.

Яркая дуга, которая возникает после дождя или в брызгах водопада, — это первичная радуга. Цветные полосы отличаются по яркости, но их последовательность всегда одинакова: внутри дуги находится фиолетовая полоса, которая переходит сначала в синюю, затем в зеленую, желтую, оранжевую и, наконец, красную, образующую дугу с внешней стороны.

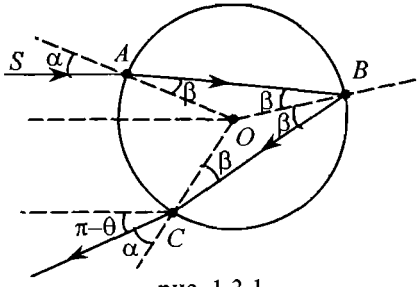


рис. 1.3.1

Выше первой в небе возникает вторая менее яркая дуга, в которой цветные полосы располагаются в обратном порядке. Чем крупнее капли, тем радуга уже и ярче. Насыщенный темнокрасный цвет наружной дуги возникает при рассеянии света на крупных каплях радиусом 0,5—1 мм.

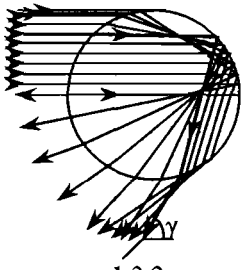


рис 1.3.2

Основные особенности радуги можно понять, рассматривая отражение и преломление света, падающего на одну каплю воды. На рис. 1.3.1 показан один из лучей $SABC$, участвующих в образовании радуги. Поэтому мы не изобразили луч, отраженный в точке A, луч, преломленный в точке B, и луч, отраженный в точке C. Угол падения луча α, угол преломления β и угол рассеяния θ, равный углу между падающим лучом и лучом, вышедшим из точки C, связаны соотношениями

$$\theta = 2\alpha - 4\beta + \pi, \qquad \sin\alpha = n\sin\beta. \qquad (1.3.1)$$

Теперь выясним, почему образуется основная наиболее яркая радуга, видимая под углом к горизонту $\gamma = \pi - \theta_0 \approx 42°$ (Р. Бэкон, 1266 г.). Впервые на этот вопрос ответил в 1637 г. Р. Декарт. Выполнив более 10 000 вычислений угла θ для различных значений α, он нашел, что функция $\theta(\alpha)$ достигает минимума $\theta_0 \approx 138°$ при значении $\alpha_0 = 59°$. Это означает, что все лучи в ок-

рестности малого интервала углов вблизи угла α_0 рассеиваются в направлении угла наименьшего отклонения θ_0 (рис. 1.3.2). Возрастание плотности лучей света приводит к возникновению радуги, видимой под углом $\gamma = 42°$ к горизонту (рис. 1.3.1). Декарт не смог объяснить, почему внешний край радуги красный, а внутренний — фиолетовый, т. к. И. Ньютон открыл эффект дисперсии только в 1675 г.

Благодаря открытию дифференциального исчисления для определения величины θ_0 достаточно вычислить производную $\theta(\alpha)$ и приравнять ее нулю. Дифференцируя соотношения (1.3.1), получаем систему

$$4\frac{d\beta}{d\alpha} - 2 = 0, \quad \cos\alpha = n\cos\beta\frac{d\beta}{d\alpha}, \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos\alpha_0 = \frac{n}{2}\cos\beta_0, \quad \sin\alpha_0 = n\sin\beta_0,$$

из которой находим

$$\sin\alpha_0 = \sqrt{(4-n^2)/3}, \qquad \sin\beta_0 = \frac{1}{n}\sqrt{(4-n^2)/3}. \qquad (1.3.2)$$

Полагая для красного света $n_к = 1{,}331$, для фиолетового — $n_ф = 1{,}343$, получим значения $\gamma_к = 42°30'$, $\gamma_ф = 40°40'$. Учитывая поправку на угловой размер Солнца, равный 32′, получим угловую ширину радуги 2°22′. Наблюдать радугу можно при условии, что Солнце находится позади наблюдателя. Размер видимой части зависит от положения Солнца относительно горизонта. Полную радугу в виде замкнутых колец можно видеть только с самолета.

Если луч испытывает два внутренних отражения, то возникает менее яркая вторая радуга. Радуги следующих порядков практически не видны. Причина в том, что вследствие отражения падающего света (7%) и преломления на задней поверхности (88%) только 5% энергии падающего света идет на образование радуг всех порядков.

В 1970 г. была впервые сфотографирована невидимая инфракрасная радуга, расположенная между красной внешней дугой основной радуги и красной внутренней дугой второй радуги. В 1964 г. обнаружена атомная радуга, возникающая при рассеянии атомов на атомах.

1.3.2. Глория. Одно из впечатляющих явлений природы — брокенский призрак — впервые описано в 1891 г. по наблюдениям на горе Брокен в горном массиве Гарц. Утром, когда солнечные лучи падают почти горизонтально, можно подняться на холм и увидеть свою собственную тень на слое тумана или облаке, окутывающих горные вершины. Тень окружена ярко окрашенными концентрическими кольцами — красное кольцо в наружной области и фиолетовое во внутренней. Это есть *глория* (от лат. *gloria* — украшение).

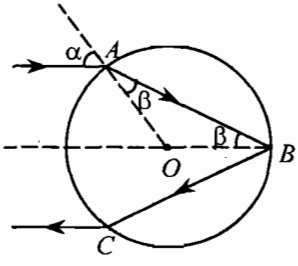


рис. 1.3.3

Глория возникает при рассеянии света назад ($\theta = \pi$), когда угол падения $\alpha \neq 0$. Полагая в (1.3.1) $\theta = \pi$, найдем условие образования глории $\cos\beta = n/2$. Поскольку $0 < \beta \leq \pi/4$, то $(2)^{1/2} < n \leq 2$. Очевидно значение $n = 4/3 = 1{,}33$ не удовлетворяет этому неравенству. Следовательно, невозможно объяснить эффект глории в рамках геометрической оптики. В 1957 г. голландец ван де Хюлст предположил, что глория возникает при почти скользящем падении луча. После преломления и одного отражения образуется преломленная волна, которая распространяется по небольшому участку поверхности капли и покидает ее под углом $\theta = \pi$.

Найдем длину дуги ε, вдоль которой распространяется поверхностная волна. Полагая $\alpha = \pi/2$, получим уравнение $1 = n\sin\beta$, $n = 4/3$, из которого следует, что $\beta \approx \pi/4$. Ищем более точное решение уравнения в виде $\beta = \pi/4 + \delta$, $\delta << 1$. Тогда $\delta = \sqrt{2}/n - 1$, $\delta = 3{,}4°$. Искомая длина дуги $\varepsilon = 4\delta$, $\varepsilon = 13{,}6°$.

Пример 1.3.1. Отражатели в дорожных знаках. Пусть на прозрачный шарик падает тонкий пучок света с осью, проходящей через центр шарика (рис. 1.3.3). Задняя поверхность шарика имеет отражающее покрытие. Найдем значение коэффициента преломления, при котором пучок выйдет из шарика в противоположном направлении. Для углов падения $\alpha << 1$, таких что $\sin\alpha \sim \alpha$, из закона преломления следует уравнение $\alpha = n\beta$. Поскольку $\alpha = 2\beta$, то при $n = 2$ пучок будет отражен и выйдет в обратном направлении.

Глава 2. Формирование оптического изображения

2.1. Оптическое изображение

Каждое самосветящееся или освещенное тело можно представить как совокупность точечных источников света. Такое тело называют *действительным предметом,* или просто *предметом.* От точечного источника выходит бесконечное число лучей. На вход оптической системы попадает расходящийся пучок лучей, который на выходе системы может быть сходящимся или расходящимся. В первом случае точку пересечения лучей называют *действительным изображением* источника, во втором — точку пересечения продолжения лучей в направлении, противоположном направлению распространения света, называют *мнимым изображением* источника.

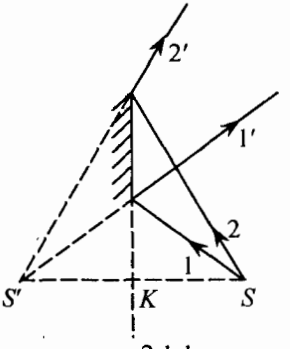


рис. 2.1.1

2.1.1. Плоское зеркало. Построим изображение светящейся точки в плоском зеркале (рис. 2.1.1). Для этого достаточно проследить за траекториями каких-нибудь двух лучей. Пусть это будут лучи 1 и 2. С помощью циркуля и линейки построим отраженные лучи 1' и 2': из точки S проведем прямую, перпендикулярную плоскости зеркала, отложим

отрезки $KS = KS'$ и проведем две полупрямые из точки S' через точки пересечения лучей 1 и 2 с зеркалом. Лучи 1' и 2' расходятся и нигде не пересекаются. Поэтому точка S' является мнимым изображением точки S. Изображение S' наблюдатель увидит в пределах угла, образованного лучами 1' и 2'

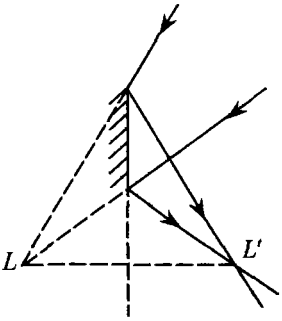


рис. 2.1.2

Может ли плоское зеркало сформировать действительное изображение? Эта ситуация возможна, если на зеркало падает сходящийся пучок лучей (рис. 2.1.2). В этом случае падающие на зеркало лучи пересекаются за зеркалом в точке L, которую называют мнимым предметом. Действительное изображение образуется в точке L' пересечения лучей, отраженных от зеркала.

Пример 2.1.1. Объект в виде буквы $Г$ находится между двумя плоскими зеркалами M_1 и M_2. Построим изображение объекта.

Каждая точка буквы $Г$ излучает пучок лучей. Рассмотрим вначале отражения пучка лучей, который падает на зеркало M_2. На рис. 2.1.3 показаны отражения двух лучей, исходящих из основания буквы. После первого отражения лучи сформируют мнимое изображение A_1 буквы $Г$ в зеркале M_2. Второе отражение порождает мнимое изображение A_2 буквы $Г$ в зеркале M_1 и т. д. Пучок лучей, падающий из основания буквы $Г$ на зеркало M_1, формирует бесконечную последовательность мнимых изображений, обозначенных на рисунке буквами B_n, $n = 1, 2, \ldots$.

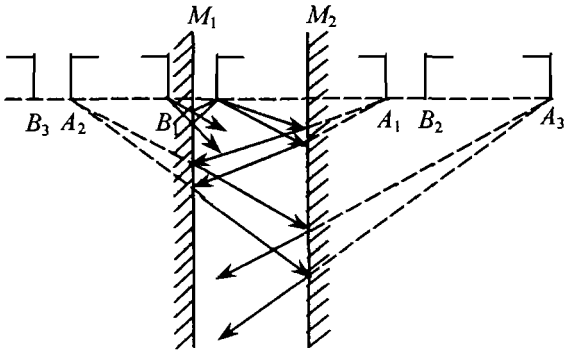


рис. 2.1.3

Задача 2.1.2. Два зеркала M_1 и M_2 образуют прямой двугранный угол. Постройте изображение точки S, находящейся внутри угла.

2.1.2. Сферическое зеркало. Центр сферы C радиусом R, часть которой представляет собой поверхность зеркала, называется *центром кривизны*. Вершина P шарового сегмента называется *полюсом* зеркала. Прямая, проходящая через центр кривизны и полюс — главная оптическая ось.

Рассмотрим параллельный пучок света, падающий на зеркало из точечного источника, расположенного достаточно далеко от полюса P. Два луча из пучка лучей, параллельных оптической оси, изображены на рис. 2.1.4. Расстояние между лучами равно b. Найдем расстояние PF от полюса до точки F пересечения лучей, отраженных от зеркальной поверхности: $PF = R - CF$. Из равнобедренного ΔCFA находим $R = 2CF\cos\alpha$. Поскольку $AK = b$, то из прямоугольного ΔCAK получим $b = R\sin\alpha$. Следовательно,

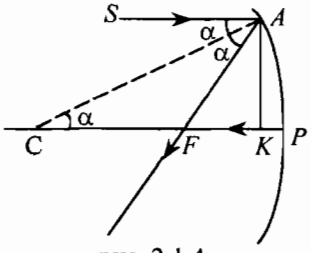


рис. 2.1.4

$$PF = R\left[1 - \frac{1}{2\sqrt{1-(b/R)^2}}\right] < R/2.$$

Мы видим, что лучи параллельного пучка после отражения не пересекаются в одной точке. Однако в случае тонкого пучка ($b << R$) величина $PF \approx R/2$. В этом приближении все лучи тонкого пучка пересекутся в точке F, которая называется *фокусом* вогнутого зеркала.

Пример 2.2.3. Источник света находится в точке $S(0, -h, 0)$ на рис. 2.1.5 *а*. Наблюдатель видит его под углом r к вертикали. Найдем координаты изображения источника.

Луч света, испускаемый источником, падает на поверхность воды под углом i в точке $P(htgi, 0, 0)$. К наблюдателю луч приходит по прямой

$$y_1(x) = (x - htgi)\mathrm{ctg}\, r. \qquad (1)$$

Согласно закону преломления

$$n\sin i = \sin r. \qquad (2)$$

Для определения координат изображения необходимо найти точку пересечения двух лучей. Пусть второй луч падает на поверхность воды под углом $i + \Delta i$, близким к углу i. Этот луч приходит к наблюдателю по прямой

$$y_2(x) = [x - htg(i + \Delta i)]\mathrm{ctg}(r + \Delta r),$$

$$n\sin(i + \Delta i) = \cos(r + \Delta r).$$

Поскольку Δi, $\Delta r << 1$, то

$$y_2(x) = y_1(x) - (x - htgi)\frac{\Delta r}{\sin^2 r} - h\mathrm{ctg}r\frac{\Delta i}{\cos^2 i}, \qquad (3)$$

$$(n\cos i)\Delta i = (\cos r)\Delta r. \qquad (4)$$

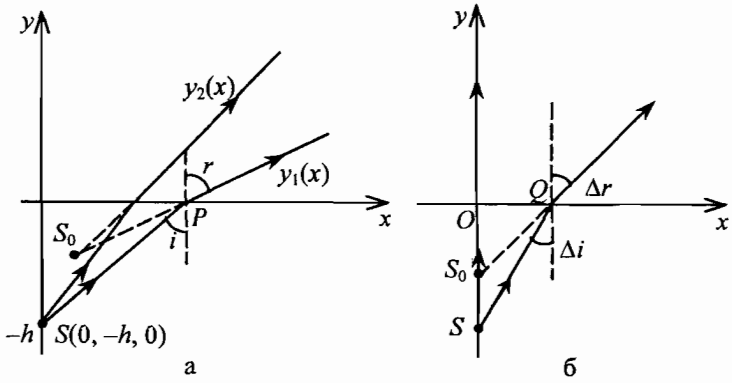


рис. 2.1.5

В точке S_0 пересечения лучей $y_2(x_0) = y_1(x_0)$. Из этих уравнений находим

$$x_0 = h\mathrm{tg}i - h\frac{\sin r\cos r}{\cos^2 i}\frac{\Delta i}{\Delta r}, \rightarrow x_0 = h(n^2-1)\left(\frac{\sin r}{n\cos i}\right)^3. \qquad (5)$$

Значение y-координаты изображения $y_0 = y(x_0)$,

$$y_0 = -\frac{h}{n}\left[\frac{n\cos r}{\sqrt{n^2-\sin^2 r}}\right]^3. \qquad (6)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

А. К наблюдателю приходит луч, параллельный поверхности воды: $r = \pi/2$. Тогда $i = \lambda$, $n\sin\lambda = 1$, где λ — угол полного внутреннего отражения. Координаты изображения $x_0 = h/(n^2-1)^{1/2}$, $y_0 = 0$.

Б. Пусть $i + r = \pi/2$. В этом случае угол между преломленным лучом и лучом, отраженным от поверхности воды, равен $\pi/2$. Из (2) находим $\mathrm{tg}r = n$. Координаты изображения $x_0 = h(n^2-1)/n^3$, $y_0 = -h/n^4$.

В. Наблюдатель и источник находятся на одной вертикали: $r = 0$. В этом случае решение задачи элементарно (рис. 2.1.5 *б*). Один луч идет перпендикулярно к поверхности воды, другой — под углом $\Delta i << 1$. Его продолжение пересекает первый луч в точке $S_0(0, y_0 = -h', 0)$. Поскольку OQ — общий катет треугольников OQS и OQS_0, то $h\mathrm{tg}\Delta i = h'\mathrm{tg}\Delta r$. В приближении малых углов имеем уравнение $h\Delta i = h'\Delta r$. Учитывая закон преломления $n\sin\Delta i = \sin\Delta r$ в приближении малых углов $n\Delta i = \Delta r$, получим $h' = h/n$.

Пример 2.1.4. Найдем изображение точечного источника, формируемое тонкой призмой (рис. 2.1.6).

Пусть отклоняющий угол тонкой призмы $\alpha << 1$. Источник находится в точке $S(-d, 0, 0)$. В примере 1.2.6 показано, что угол между падающим и преломленным лучами равен $(n-1)\alpha$. Один из лучей падает на призму по оси x и приходит к наблюдателю по прямой

$$y_1(x) = -(n-1)\alpha x, \qquad x > 0,$$

образующей угол $(n-1)\alpha$ с осью x. Второй луч падает на призму под углом $\Delta\varphi$. Угол между осью x и преломленным лучом равен $(n-1)\alpha - \Delta\varphi$. Поэтому преломленный луч приходит к наблюдателю по прямой

$$y_2(x) = d\Delta\varphi + [\Delta\varphi - (n-1)\alpha]x, \qquad x > 0.$$

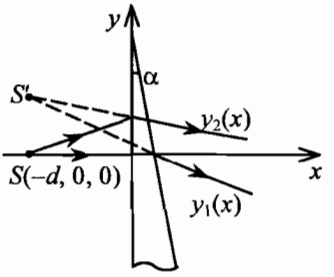


рис. 2.1.6

Точку пересечения лучей найдем из уравнения $y_1(x) = y_2(x)$: $x = -d$. Изображение находится в точке $S'(-d, (n-1)\alpha d, 0)$.

Задача 2.1.5. Мениск Амичи (Д.Б. Амичи, 1850 г.). На рис. 2.1.7 изображена толстая выпукло-вогнутая линза — среда с коэффициентом преломления n, ограниченная сферической поверхностью радиусом R с центром в точке O, и сферической поверхностью с центром в точке S, $OS = R/n$. Точка B находится на расстоянии $OB = R$ от оптической оси линзы. Источник излучения расположен в точке S. Найдите изображение источника S и предельный угол полураствора конуса лечей, выходящих из линзы.

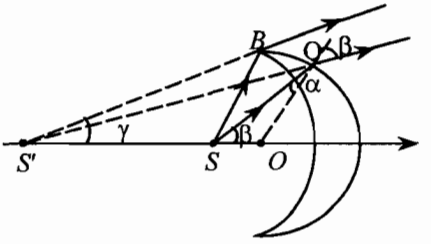


рис. 2.1.7

Решение. Луч SQ падает на поверхность радиусом R в точке Q под углом α, угол преломления — β. Следовательно, $n\sin\alpha = \sin\beta$. Точка S′ находится на пересечении главной оптической оси и прямой, на которой лежит преломленный луч. Предельный угол $OS'B$ обозначим γ.

Докажите, что угол OSQ равен β. Тогда угол $OS'Q$ равен α. В треугольнике OQS' согласно «теореме синусов» $S'O/\sin\beta = R/\sin\alpha$ или $S'O = nR$. Предельный угол γ определяется соотношением $\mathrm{tg}\gamma = 1/n$.

2.2. Тонкие линзы

2.2.1. Параксиальные пучки. Лучи, исходящие из точечного источника после прохождения через оптическую систему, не собираются вновь в одной точке. Единственным прибором, обеспечивающим такое отображение для всех точек предмета, является плоское зеркало. В остальных случаях лучи, прошедшие через систему, пересекаются в различных точках — мы получим размазанное изображение точечного источника. Поэтому при создании оптических систем нельзя добиться полного подобия изображения предмету. Возможно лишь приближенное, не вполне резкое отображение протяженного предмета.

Во всех оптических инструментах используются тонкие пучки (т. е. пучки с малым углом раствора), идущие вблизи выделенной линии, называемой *оптической осью* системы. Такие пучки называются *параксиаль-*

ными. В этом случае удается получить вполне удовлетворительное для практических целей изображение. Первые работы по теории изображений в параксиальных пучках выполнены К. Гауссом в 1841 г.

2.2.2. Математическая модель линзы. Наиболее важной частью оптических приборов являются линзы — прозрачные стеклянные тела, ограниченные вогнутыми или выпуклыми сферическими поверхностями. Прямую, проходящую через центры сферических поверхностей, называют *главной оптической осью*. Мы будем рассматривать только *тонкие* линзы. Поэтому можно считать, что главная оптическая ось пересекает линзу в одной точке, называемой *оптическим центром* линзы. Остальные оси, проходящие через центр линзы, называются *побочными осями*.

Тонкий пучок лучей, параллельных главной оптической оси, после прохождения через собирающую линзу пересекается в точке, называемой *фокусом* (рис. 2.2.1 *а*). Величину F, равную расстоянию от оптического центра до фокуса, называют *фокусным расстоянием*. Рассеивающая линза, наоборот, преобразует параллельный пучок лучей в расходящийся. В этом случае наблюдатель увидит пучок лучей, исходящий из точки, называемой *мнимым фокусом* (рис. 2.2.1 *б*). По определению фокусное расстояние рассеивающей линзы отрицательно. Плоскость, проходящая через фокус перпендикулярно главной оптической оси, называется *фокальной плоскостью*.

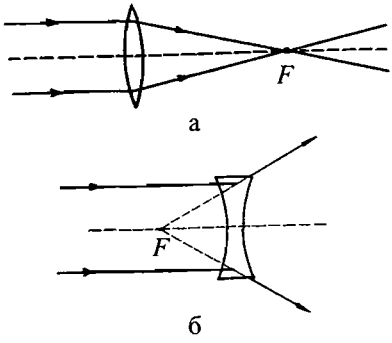


рис. 2.2.1

Собирающая линза концентрирует направленный поток электромагнитной энергии в фокусе. Рассеивающая линза преобразует направленный поток энергии в расходящийся. На рис. 2.2.2 *а*, *б* изображены пучки лучей, падающих параллельно побочным осям собирающей и рассеивающей линз. Побочный фокус находится в точке F'. На рис. 2.2.2 *в*, *г* изображена та же ситуация — пучок сходящихся лучей преобразуется в параллельный пучок лучей.

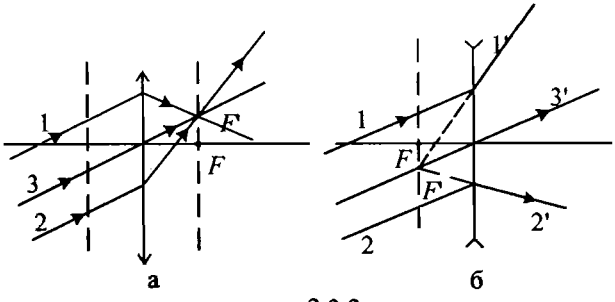


рис. 2.2.2

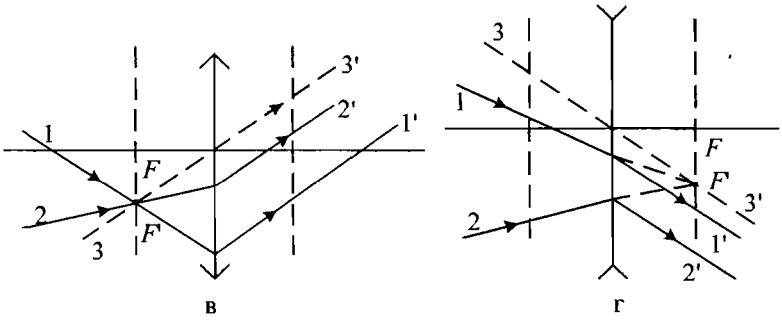


рис. 2.2.2

Формула линзы. Для построения изображения точечного источника, формируемого линзой, необходимо использовать закон преломления или принцип Ферма (см. 2.2.3). В результате получим значения координат изображения, зависящие от показателей преломления материала, линзы и окружающей среды, радиусов кривизны поверхностей линзы и координат источника. Однако в курсе физики средней школы вводят математическую модель линзы, задавая единственный параметр — фокусное расстояние F, и правила построения лучей, соединяющих светящуюся точку и ее изображение, не обращаясь к законам геометрической оптики.

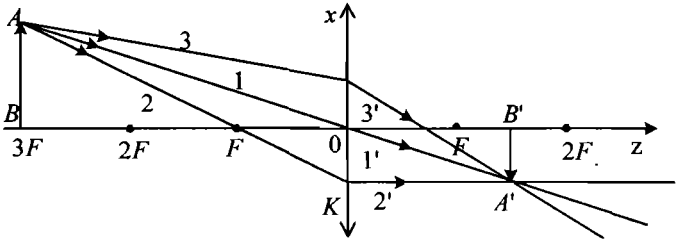


рис. 2.2.3

Расположим тонкую собирающую линзу в плоскости xy. Центр линзы поместим в начало координат (рис. 2.2.3). В качестве предмета возьмем отрезок AB длиной H. Координаты точек $A(H, 0, -d)$, $B(0, 0, -d)$. Изображение $A'B'$ предмета AB формируется множеством лучей, исходящих из каждой точки предмета. Для определения положения изображения A′ светящейся точки A достаточно найти траектории двух лучей, исходящих из точки A. Луч 1 проходит через оптический центр линзы и не преломляется. Луч 2, проходящий через фокус, после преломления параллелен главной оси. Траекторию луча 3 можно построить с помощью побочной оптической оси.

Найдем координаты точек изображения $A'(H', 0, f)$ и $B'(0, 0, f)$. Из подобия треугольников OAB и OA′B′ найдем x-координату изображения $H' = -Hf/d$.

В треугольнике OKF катет $OF = F$, $\mathrm{tg}\alpha = OK/F = (AB + OK)/d$. Подставляя $OK = A'B' = Hf/d$, $AB = H$, получим «формулу» линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \qquad (2.2.1\ a)$$

$$H' = -\frac{f}{d}H. \qquad (2.2.1\ б)$$

Эти соотношения справедливы и для рассеивающей линзы. Величина $k = |f/d|$ — *линейное или боковое увеличение*. Из (2.2.1) найдем коэффициент продольного увеличения $|\Delta f/\Delta d| = (f/d)^2$. Мы видим, что нельзя получить геометрически подобного изображения предмета.

Если окажется, что $f < 0$, то изображение является мнимым. На рис. 2.2.4 показаны траектории трех «простых» лучей в случае рассеивающей линзы.

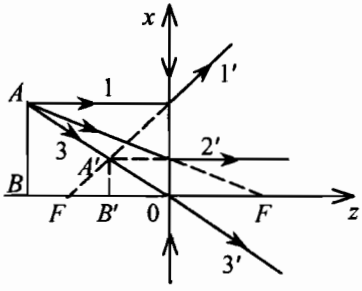


рис. 2.2.4

Оптическая сила линзы. Величину $D = 1/F$ называют *оптической силой линзы*. Оптическую силу собирающей линзы с фокусным расстоянием 1 м принимают за единицу, называемую *диоптрией* (от греч. *dioptra* — сквозь смотрю). Оптическая сила рассеивающей линзы — отрицательная величина.

Оптическая сила системы тонких линз, расположенных вплотную друг к другу, равна сумме оптических сил отдельных линз.

Пример 2.2.1. Докажем, что расстояние между двумя последовательными пересечениями луча с главной оптической осью собирающей линзы не может быть меньше $4F$.

Наша задача — показать, что $d + f \geq 4F$. Воспользовавшись формулой линзы (2.2.1), получим расстояние между точками пересечения лучей

$$s(d) = d + f(d) = \frac{d^2}{d-F} = 4F + \frac{(d-2F)^2}{d-F}$$

Очевидно, что минимальное значение функции $s(d)$ равно $s_m = 4F$ при $d = 2F$. Аналогичная проблема возникает при фокусировке заряженных частиц в ускорителе.

Пример 2.2.2. *Собирающая линза.* Найдем изображение точки $S(F/2, 0, 0)$. Из (2.2.1) находим $f = -F$, т.е. изображение мнимое. На рис. 2.2.5 выполнено построение изображения S': 1) проводим произвольный луч SL; 2) строим побочную ось — проводим через оптический центр прямую, параллельную лучу SL, которая пересекает фокальную плоскость в побочном фокусе F'; 3) изображаем преломленный луч LF', так как после преломления все лучи, параллельные оси OF', должны пересечься в побочном фокусе F'.

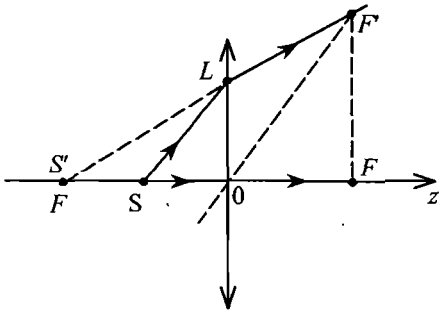


рис. 2.2.5

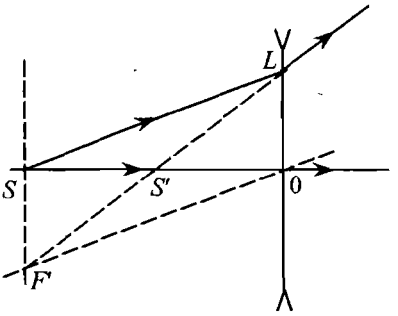


рис. 2.2.6

Пример 2.2.3. Фокусное расстояние рассеивающей линзы $F = -F_0$. Найдем изображение точки S, находящейся слева от линзы на расстоянии F_0. Полагая в (2.2.1) $d = F_0$, получим $f = -F_0/2$. Следовательно, имеем мнимое изображение. На рис. 2.2.6 выполнено построение изображения с помощью побочной оптической оси: 1) проводим произвольный луч SL; 2) проводим через центр линзы прямую, параллельную лучу SL, — это побочная оптическая ось, пересекающая фокальную плоскость в точке F'; 5) изображаем преломленный луч, который находится на продолжении отрезка $F'L$.

Задача 2.2.4. Собирающая и рассеивающая линзы имеют общую оптическую ось. Фокусные расстояния равны соответственно $F_1 = a$, $F_2 = -b$, $a > b$. Пучок лучей, параллельных оси, после прохождения системы остается параллельным оси. Найдите расстояние s между линзами.

Пример 2.2.5. С левой стороны рассеивающей линзы, изображенной на рис. 2.2.7, падает сходящийся пучок лучей. Координаты вершины сходящегося пучка $A(H, 0, 2F_0/3)$, фокусное расстояние линзы $F = -F_0$. Найдем координаты изображения A' точки A.

Точка A — мнимый предмет. Полагая в (2.2.1) $d = -2F_0/3$, получим $f = 2F_0$, $H' = 3H$. Следовательно, изображение действительное и находится в точке $A'(3H, 0, 2F_0)$.

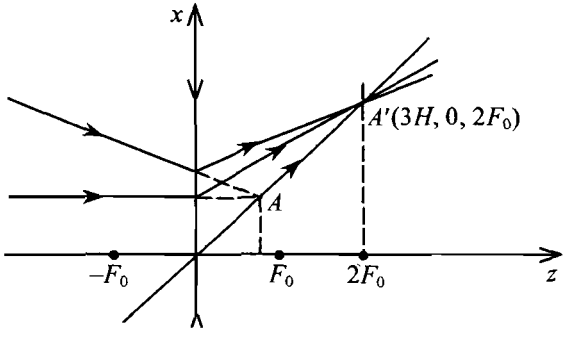


рис. 2.2.7

Задача 2.2.6 На рис.2.2.8 предмет в виде стрелки MN находится на прямой, проходящей через главный фокус собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = s$. Координаты точек: $M(H/2, 0, -3s/2)$, $N(H, 0, -2s)$. Покажите, что координаты изображения $M'(-H, 0, 3s)$, $N'(-H, 0, 2s)$, длина изображения равна s.

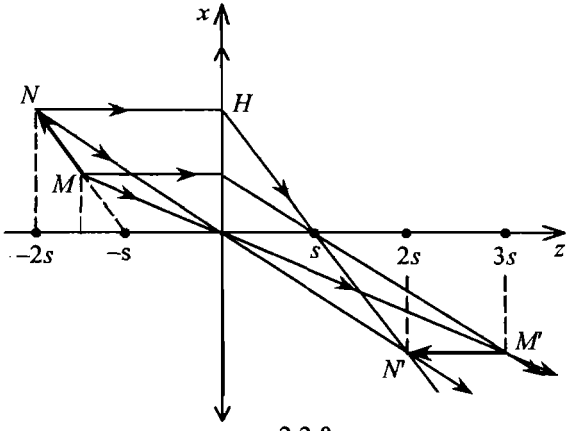


рис. 2.2.8

2.2.3. Вывод формулы линзы. Показатель преломления плосковыпуклой стеклянной линзы, изображенной на рис. 2.2.9, равен n, радиус сферической поверхности R, максимальная толщина линзы $h << R$. Источник света находится в точке $S(H, 0, -d)$, фотодетектор — в точке $P(H', 0, f)$.

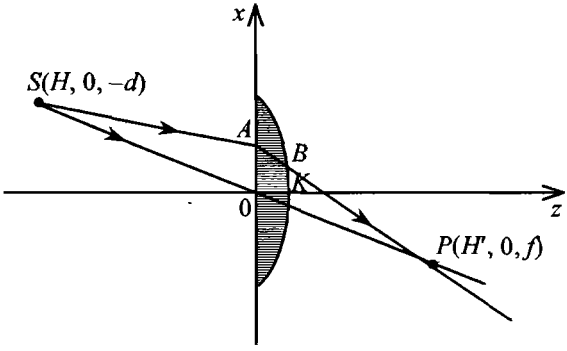


рис. 2.2.9

Найдем изображение источника, формируемое тонким приосевым пучком лучей, используя следствие принципа Ферма: оптические длины лучей, соединяющих точки S и P, одинаковы. С этой целью найдем оптическую длину луча $l(x)$, проходящего в плоскости xz через точки $S(H, 0, -d)$, $A(x, 0, 0)$, $B(x, 0, z_л(x))$, $P(H', 0, f)$ и оптическую длину луча l_0, проходящего через точки S, O и P. Оптическая длина $l(x) = a + nz_л + b$, где $a = SA$,

$b = BP$, $nz_л(x)$ — оптическая длина луча в линзе. Здесь мы учли, что в тонкой линзе можно пренебречь поперечным смещением луча. Точка B принадлежит окружности, проходящей через точку $K(0,\ 0,\ h)$. В приосевой области $z_л(x) << R$ уравнение окружности $x^2 + (z_л + R - h)^2 = R^2$ можно представить в виде

$$x^2 = (z_л + 2R - h)(h - z_л) \approx 2R(h - z_л), \text{ или } z_л = h - x^2/2R.$$

Найдем теперь в случае тонкого пучка, удовлетворяющего условиям $a \approx d$, $H << d$, $b \approx f$, $z_л << f$, расстояния

$$a = \sqrt{(x-H)^2 + d^2},\ b = \sqrt{(H'-x)^2 + (f - z_л)^2}\ .$$

Представляя эти соотношения в виде

$$(x - H)^2 = (a + d)(a - d) \approx 2d(a - d),$$
$$(H' - x)^2 = (b + f - z_л)(b - f + z_л) \approx 2f(b - f + z_л),$$

найдем приближенно

$$a = d + (x - H)^2/2d, \qquad b = f - z_л + (H' - x)^2/2f.$$

В рассматриваемом приближении оптическая длина луча $SABP$

$$l(x) = d + (n - 1)h + f - (n - 1)\frac{x^2}{2R} + \frac{(x-H)^2}{2d} + \frac{(H'-x)^2}{2f}. \qquad (2.2.2)$$

Полагая в (2.2.2) $x = 0$, получим оптический путь луча SOP

$$l_0 = d + (n - 1)h + f + \frac{H^2}{2d} + \frac{H'^2}{2f}.$$

Из этих соотношений найдем разность оптических длин лучей

$$l(x) - l_0 = -x\left(\frac{H}{d} + \frac{H'}{f}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{f} - \frac{1}{F}\right),$$

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{R}. \qquad (2.2.3)$$

Поскольку условие $l(x) = l_0$ должно выполняться для всех значений x, то приравнивая нулю коэффициенты при x и x^2, получим соотношения (2.2.1):

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \qquad (2.2.4)$$

$$H' = -H\frac{f}{d}.$$

Если бы линза представляла собой стекло, ограниченное двумя сферическими поверхностями радиусами R_1 и R_2, то фокусное расстояние определялось бы выражением

$$\frac{1}{F} = (n-1)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}). \qquad (2.2.5)$$

Для выпуклых поверхностей радиус кривизны положителен, для вогнутых — отрицателен.

Отметим, что соотношения (2.2.4) являются следствием принципа Ферма $dl(x)/dx = 0$.

2.2.4. Реверберация изображений (от лат. *reverbero* — отражаю). Попадая в точку A на рис. 2.2.9 луч преломляется и отражается. Обращенная к источнику поверхность линзы играет роль плоского зеркала, которое формирует за линзой мнимое изображение S'_R точки S. Преломленный луч AB в точке B расщепляется на луч BP и отраженный луч. Этот луч падает на поверхности $z = 0$, и расщепляется на отраженный луч и луч, который преломляется в область $z < 0$. Следовательно, еще одно изображение S''_L точки S формируется «оптической системой», эквивалентной двум линзам и одному вогнутому зеркалу. Эквивалентная оптическая сила этой системы $2/F + 2/R = 2n/R$. Последующие отражения и преломления формируют серии новых изображений, освещенность которых уменьшается.

2.2.5. Светосила линзы. Световой поток Ф определяется как количество энергии, переносимое светом в единицу времени через какую-либо поверхность. Размерность светового потока — Вт. Освещенность J поверхности в некоторой точке равна интенсивности поля, размерность J — Вт/м^2. В фокальной плоскости дифракционное изображение удаленного точечного источника имеет вид светлого диска, окруженного темными и светлыми кольцами (см. IV.9.7). Освещенность светлых колец убывает с удалением от центра. 90% мощности светового потока Ф концентрируется внутри круга, ограниченного вторым темным кольцом. Радиус этого кольца $r \approx 2\lambda F/D$, где D — диаметр линзы.

Найдем среднюю интенсивность поля, пренебрегая отражением света от линзы и поглощением в стекле: $0{,}9\ \Phi = \pi r^2 J$, или $J \sim (\Phi/\lambda)(D/F)^2$. Величина $(D/F)^2$ называется *светосилой линзы*, D/F — *относительным отверстием.*

2.2.6. Дефекты линз. Один из наиболее крупных недостатков линз связан с цветной каймой, которая окружает изображения предметов. Это явление, возникающее благодаря дисперсии среды, называется *хроматической аберрацией* (лат. *aberratio* — уклонение). Когда преломляется белый свет, то фокусные расстояния линзы различны для света различных цветов. Наименьшее фокусное расстояние у фиолетовых лучей, наибольшее — у красных. Поэтому изображение становится нечетким и окрашенным.

Другой недостаток линз, называемый *сферической аберрацией*, приводит к тому, что центральная часть изображения оказывается наиболее резкой,

а периферийные участки размытыми. Этот дефект изображения связан с тем, что форма преломляющих поверхностей линзы не обеспечивает фокусировку всех лучей широкого пучка, падающего на линзу. В случае параллельного пучка лучи, близкие к оси, проходят через фокус, внешние лучи пересекаются ближе к линзе. В результате изображение точечного предмета получается нечетким. Эффект сферической аберрации можно устранить, если использовать только центральную область линзы, т. е. *диафрагмирование линзы*. Однако тогда уменьшается светосила линзы. Аберрацию можно ослабить, изменяя форму линзы вблизи периферии или склеивая несколько линз аберрации которых взаимно компенсируются.

2.3. Оптические системы

Разберемся еще раз в терминологии, используемой в теории оптического изображения. Если имеется оптическая система, состоящая из нескольких линз и зеркал, то положение изображения некоторого объекта можно найти следующим образом. Сначала найдем изображение объекта, создаваемое первой линзой или зеркалом. При этом остальная часть оптической системы не принимается во внимание. На выходе первого элемента каждая точка объекта формирует сходящийся (рис. 2.3.1 *а*, *б*) или расходящийся (рис. 2.3.1 *в*) пучок лучей. В первом случае точка пересечения лучей — *действительное изображение*, во втором — точка пересечения продолжения лучей в направлении, противоположном направлению распространения света, — *мнимое изображение*. Вышедший из первого элемента пучок света падает на следующий элемент, т. е. представляет для этого элемента предмет. Если второй элемент расположен так, что на него падает расходящийся пучок лучей, то точки R_1 и I называют *действительным предметом* для второго элемента. Если же на вход второго элемента падает сходящийся пучок лучей, то точка R_2 — *мнимый предмет* для второго элемента.

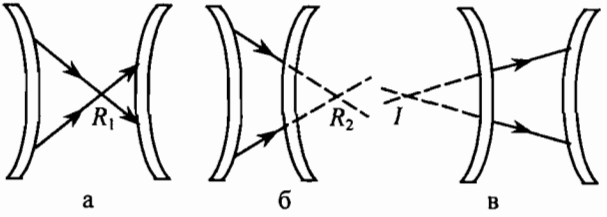


рис. 2.3.1

По-прежнему, не принимая во внимание остальной части оптической системы, найдем положение второго изображения. Аналогичную процедуру выполним последовательно для каждого элемента оптической системы. В результате получим изображение объекта, создаваемое всей оптической системой. Действительное изображение на выходе последнего элемента системы можно проецировать на экран и наблюдать с различных направлений.

Пример 2.3.1. На оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F помещен точечный источник света S на расстоянии a ($a > F$) от

линзы. За линзой на расстоянии b расположено плоское зеркало. Определим положение изображения S' источника после прохождения света через линзу, отражения от зеркала и вторичного прохождения через линзу.

Первое изображение источника S_1 находится на расстоянии

$$f_1 = \frac{aF}{a-F} \tag{1}$$

от линзы. Поскольку $a>F$, то $F \le f_1 < \infty$. Далее в зависимости от положения зеркала возможны три случая.

А. $b \ge f_1$. Тогда первое изображение S_1 образуется перед зеркалом на расстоянии $d_2 = b - f_1$ от его поверхности (рис. 2.3.2 *а*). Точка S_1 является действительным предметом для зеркала. Второе изображение S_2 находится на расстоянии $f_2 = b - f_1$ за зеркалом и является действительным предметом для линзы, причем $d_3 = 2b - f_1$. Из формулы (2.2.1) найдем расстояние от линзы до третьего изображения S_3:

$$f_3 = \frac{F(2b-f_1)}{2b-f_1-F}. \tag{2}$$

Пусть $F = 0{,}08$ *м*, $a = 3F$, $b = 7F/4$. Из (1), (2) получим $f_1 = 3F/2$, $d_2 = F/4$, $d_3 = 2F$, $f_3 = 2F$.

Если $b = f_1$, то $f_3 = a$, т. е. положения изображения S_3 и источника совпадают.

Б. $b < f_1$, $2b > f_1$. В этом случае на зеркало падает сходящийся пучок лучей. Точка S_1 является мнимым предметом для зеркала: $d_2 = b - f_1 < 0$, $f_2 = f_1 - b$. Поэтому зеркало формирует второе изображение на расстоянии $d_3 = 2b - f_1$ от линзы. Это изображение является действительным предметом для линзы. В зависимости от знака d_3 изображение S_3 действительное или мнимое:

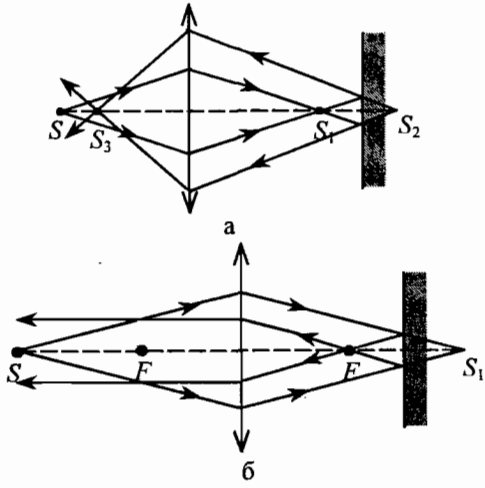


рис. 2.3.2

1) если $2b - f_1 > F$, то линза формирует действительное изображение, расположенное с левой стороны от линзы;

2) если $2b - f_1 < F$, то линза формирует мнимое изображение, расположенное с правой стороны от линзы;

3) если $2b - f_1 = F$, то из линзы выходит параллельный пучок света. Положим $a = 2F$. Тогда $f_1 = 2F$. В рассматриваемом случае зеркало должно находиться на расстоянии $b = 3F/2$ (рис. 2.3.2 *б*).

В. $b < f_1$, $2b < f_1$. Теперь зеркало формирует второе изображение, находящееся на расстоянии $f_1 - 2b$ слева от линзы. На линзу падает сходящийся пучок. Точка пересечения S_2 является мнимым предметом для линзы. Изображение источника S_3 находится слева от линзы:

$$f_3 = \frac{F(f_1 - 2b)}{F + f_1 - 2b}. \qquad (3)$$

Нетрудно видеть, что формулы (2), (3) описывают все рассмотренные здесь ситуации.

Г. Пусть $b = 0$: линза плотно прилегает к зеркалу. Тогда $d_2 = -f_1$, $f_2 = f_1$.На линзу падает сходящийся пучок от мнимого предмета: $d_3 = -f_1$, $1/f_3 = 2/F - 1/a$. Если $a = F$, то $f_3 = F$. Мы имеем систему с оптической силой $1/F_c = 2/F$ эквивалентную двум линзам.

Пример 2.3.2. Поставим за линзой на рис. 2.2.5 в примере 2.2.2 на расстоянии h от нее плоское зеркало. Здесь $d_1 = F/2, f_1 = -F$. На рис.2.3.3 первое изображение S_1 — действительный предмет для зеркала: $d_2 = F + h$. Второе изображение находится за зеркалом на расстоянии $f_2 = F + h$. Теперь оно служит действительным предметом для линзы, находясь от нее на расстоянии $d_3 = 2h + F$. Из (2.2.1) находим расстояние от линзы до изображения $f_3 = (F + 2h)F/(2h)$.

А. Полагая $h = F/2$, получим $f_3 = 2F$.

Б. Пусть $h = F$. Тогда $f_3 = 3F/2$.

В. Полагая $h = 0$, получим $f_3 = \infty$. Фокусное расстояние системы $F_c = F/2$.

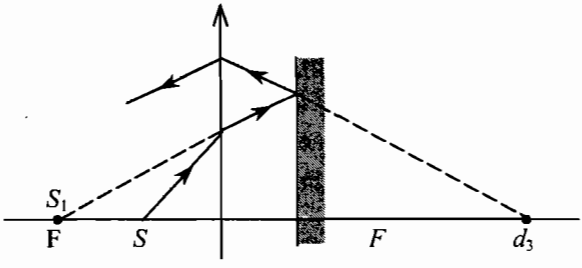


рис. 2.3.3

Задача 2.3.3. На оправе собирающей линзы находится точечный источник света S. Каким образом надо расположить плоское зеркало, чтобы лучи света, отразившись от него и пройдя через линзу, вышли из нее параллельным пучком в направлении, указанном стрелкой (рис. 2.3.4 *а*).

Решение. Изобразим главную оптическую ось и фокальную плоскость. Затем проведем побочную оптическую ось, параллельную стрелке. Она пересечет фокальную плоскость в точке S′. Если расположить зеркало перпендикулярно прямой SS' на расстоянии $SO = 1/2\ SS'$, то точка S' будет мнимым изображением источника S в зеркале и одновременно действительным источником для линзы. Поскольку она лежит в фокальной плоскости, то из линзы выходит пучок параллельных лучей (рис. 2.3.4 *б*).

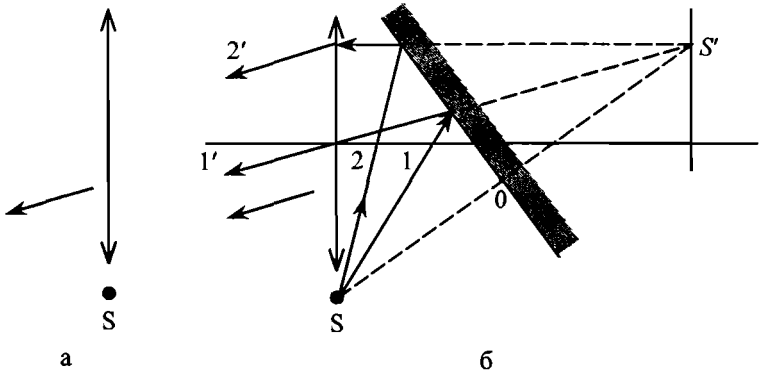


рис. 2.3.4

Задача 2.3.4. Оптическая система состоит из двух собирающих линз $Л_1$ и $Л_2$ с общей главной оптической осью и фокусными расстояниями $F_1 = s$ и $F_2 = 2s$. Расстояние между линзами $L = 3s$. Точечный предмет находится на расстоянии $d > s$ от линзы $Л_1$. Изображение предмета, формируемое системой, мнимое, перевернутое, находится в общей фокальной плоскости линз $Л_1$ и $Л_2$. Найдите расстояние d.

Решение. Согласно условию задачи для изображения, создаваемого второй линзой $f_2 = -2s$. Из формулы линзы находим $d_2 = s$. Следовательно, изображение, создаваемое первой линзой, находится на расстоянии $f_1 = L - d_2 = 2s$ от линзы. Из формулы линзы получим $d = 2s$. Нарисуйте два последовательных изображения предмета.

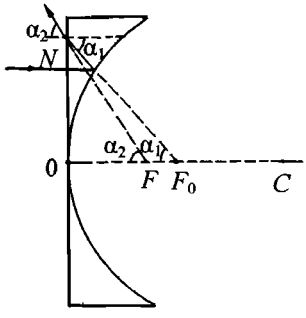


рис. 2.3.5

Пример 2.3.5. Вогнутая сторона плосковогнутой тонкой линзы с коэффициентом преломления $n = 1{,}5$ и радиусом кривизны $R = 30$ см посеребрена. Найдем фокусное расстояние F этой системы.

Решение 1. Фокусное расстояние выпуклого зеркала, покрытого стеклом, не равно половине радиуса кривизны, так как луч, отраженный от посеребренной поверхности, изменяет направление при переходе из стекла в воздух. Расстояние OF от полюса O (рис.2.3.5) до точки пересечения продолжения этого луча с

главной оптической осью равно величине фокусного расстояния, $OF_0 = R/2$. Определим OF. Приравнивая в ΔONF и ΔONF_0 общий катет, находим

$$OF\,\mathrm{tg}\alpha_2 = R/2\,\mathrm{tg}\alpha_1. \qquad (1)$$

Закон преломления связывает углы α_1 и α_2 соотношением

$$\sin\alpha_2 = n\sin\alpha_1. \qquad (2)$$

Поскольку мы рассматриваем только параксиальные пучки, то углы α_1 и α_2 должны быть настолько малыми, что синусы и тангенсы этих углов можно заменить самими углами, выраженными в радианах. В этом случае вместо (1) и (2) получим уравнения

$$OF\alpha_2 = R/2\alpha_1, \quad \alpha_2 = n\alpha_1,$$

из которых находим $OF = R/2n$. Следовательно, $F = -R/2n$.

Решение 2. Согласно (2.2.5) оптическая сила плосковогнутой линзы $1/F_1 = -(n-1)/R$. Оптическая сила тонкой системы равна сумме оптических сил отдельных ее элементов. При этом поскольку через линзу свет проходит дважды (к зеркалу и от зеркала), то надо складывать оптические силы выпуклого зеркала $1/F_з = -2/R$ и двух линз:

$$\frac{1}{F} = \frac{2}{F_1} - \frac{2}{R} = \frac{-2(n-1)}{R} - \frac{2}{R} = -\frac{2n}{R}.$$

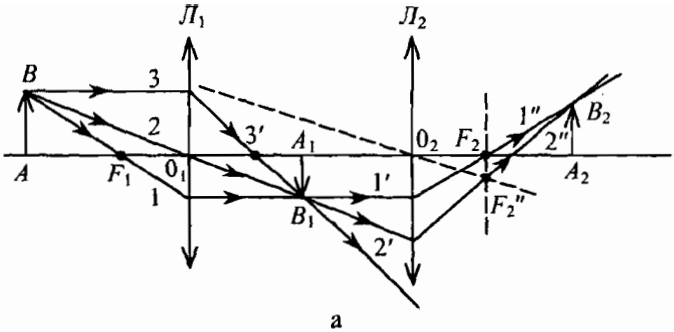
Подставляя числовые значения, находим $F = -10$ *см*.

Пример 2.3.6. Две тонкие собирающие линзы с общей главной оптической осью имеют фокусное расстояние $F_1 = 10$ *см* и $F_2 = 12$ *см* и расположены на расстоянии $h = 35$ *см*. Предмет расположен на расстоянии $s = 30$*см* от первой линзы. Определим положение изображения и линейное увеличение системы.

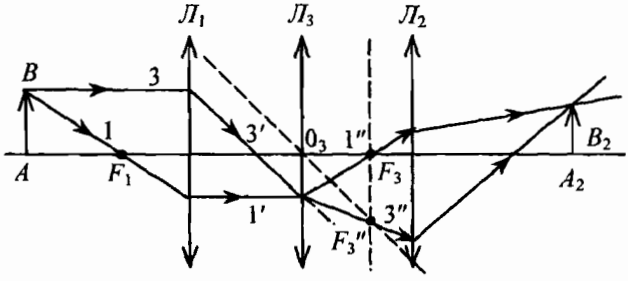
Изображение, образованное первой линзой, промежуточное и служит для второй линзы предметом действительным или мнимым, если оказывается перед или за второй линзой. Применяя формулу собирающей линзы, получим

$$f_1 = \frac{sF_1}{s - F_1}, \qquad f_1 = 15 \text{ см}.$$

Это изображение располагается на расстоянии $d_2 = h - f_1 = 20$ *см* от второй линзы слева от нее. Следовательно, на эту линзу падает расходящийся пучок лучей, и поэтому промежуточное изображение A_1B_1 (рис. 2.3.6 *а*) является действительным предметом для линзы $Л_2$.



а



б

рис. 2.3.6

Из «формулы» линзы найдем расстояние f_2 от второй линзы до изображения $f_2 = F_2d_2/(d_2 - F_2)$, $f_2 = 30$ *см*. Увеличение системы $k = k_1k_2 = (f_1/s)(f_2/d_2)$, $k = 3/4$. На рис 2.3.6 *а* показаны траектории лучей *1* и *2* через систему из двух линз. Траектория луча *2'* построена с помощью побочной оптической оси O_2F_2''. Прямая F_2F_2'' лежит в фокальной плоскости линзы $Л_2$. Луч *3'* не попадает в линзу $Л_2$.

Возьмем теперь третью собирающую линзу $Л_3$ и поместим ее справа от первой линзы на расстоянии $f_1 = 15$ *см*. Поскольку положения линзы $Л_3$ и промежуточного изображения A_1B_1 совпадают, то положение изображения A_2B_2 не изменится. Однако множество лучей, которое в системе на рис. 2.3.6 *а* отсекалось от линзы $Л_2$, теперь проходит через нее — освещенность изображения увеличится. На рис 2.3.6 *б* показаны фокальная плоскость F_3F_3' линзы $Л_3$, побочная ось O_3F_3' и лучи 1'' и 3'', прошедшие через линзу $Л_3$.

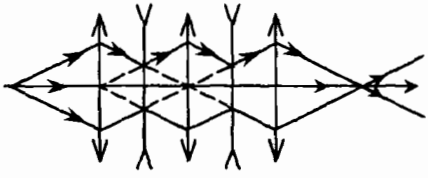


рис. 2.3.7

Пример 2.3.7. На рис. 2.3.7 изображена «собирающая» линзовая линия, состоящая из собирающих и рассеивающих линз. Фокусное расстояние собирающих и рассеивающих линз $F_c = s$, $F_p = -s/2$. Расстояния между линзами $h = s$. Источник находится на расстоянии $2s$ от первой линзы.

Пример 2.3.8. «Толстая» линза. Рассмотрим систему, собранную из двух тонких собирающих линз, расположенных на главной оптической оси на расстоянии L друг от друга. Фокусные расстояния линз, изображенных на рис. 2.3.8, равны соответственно F_1 и F_2. Найдем оптическую силу системы линз $1/F$.

На рис. 2.3.8 длины отрезков соответственно равны: $AO_1 = h$, $O_1N_1 = F_1$, $N_2O_2 = F_2$, $N_1N_2 = c$, $L = c + F_1 + F_2$. Рассмотрим преобразование двух лучей a и b, входящих в систему параллельно оптической оси. На выходе из системы лучи a' и b' пересекаются в точке C. Точка N_1 находится на расстоянии $d_2 = c + F_2$ от второй линзы. Можно построить изображение точки N_1, используя побочную ось — отрезок O_2F_2'. Расстояние $O_2C = f_2$ определим из формулы линзы

$$1/d_2+1/f_2 = 1/F_2. \qquad (1)$$

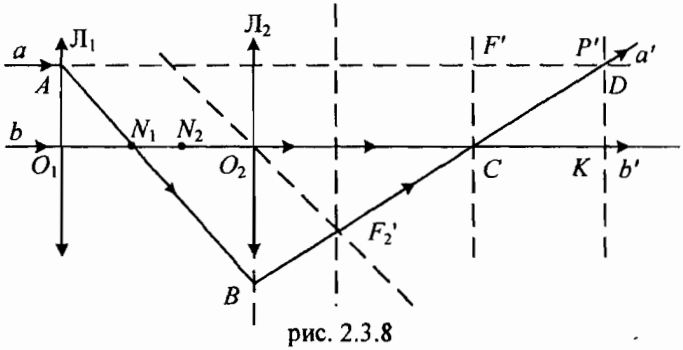


рис. 2.3.8

Точка D представляет собой точку пересечения продолжения луча a и луча a'. В теории «толстых» линз плоскость P', проходящую через точку D перпендикулярно главной оптической оси называют *задней главной плоскостью*, а плоскость F', проходящую через точку C перпендикулярно главной оптической оси называют *задней фокальной плоскостью*.

Найдем расстояние $s = CK$ между главной и фокальной плоскостями. Поскольку треугольники KDC и CO_2B подобны, то $O_2B = f_2h/s$. Из подобия треугольников BO_2N_1 и N_1AO_1 имеем $O_2B = d_2h/F_1$. Отсюда получим

$$f_2/s = d_2/F_1. \qquad (2)$$

Из (1), (2) находим

$$s = F_1F_2/c. \qquad (3)$$

Аналогичный анализ распространения лучей, входящих в систему справа, позволяет определить положение передней главной плоскости P и передней фокальной плоскости F.

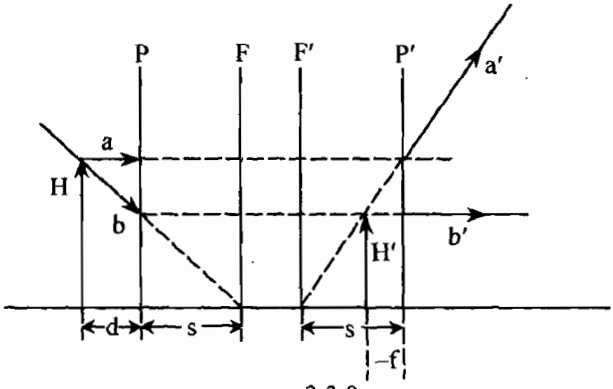


рис. 2.3.9

Формула «толстой» линзы. Положения предмета и изображения определяются расстоянием d до передней и расстоянием f до задней главной плоскости. «Вертикальные» координаты предмета и изображения H и H'. Используя свойства фокальных и главных плоскостей, можно построить траектории двух лучей a, b на рис. 2.3.9 и получить изображение предмета. В соответствии с рис. 2.3.9 величина $f < 0$. Из подобия треугольников следуют соотношения

$$H/H' = (s + d)/s, \qquad H/H' = s/(s + f),$$

в частности,

$$s^2 = (s + d)(s + f). \tag{4}$$

Подставляя s из (3) получим формулу линзы

$$1/d + 1/f = 1/F, \tag{5}$$

$$1/F = 1/F_1 + 1/F_2 - L/(F_1F_2). \tag{6}$$

Интересно отметить, что система содержащая собирающую ($F_1 = F_0$) и рассеивающую ($F_2 = -F_0$) линзы, эквивалентна собирающей линзе с фокусным расстоянием $F = F_0^2/L > 0$.

2.4. Оптические приборы

Оптические приборы конструируются из линз и зеркал на основе законов геометрической оптики. Однако явление дифракции света, рассмотренное в IV. 9.7, ограничивает возможность получения раздельного изображения двух светящихся точек.

2.4.1. Разрешающая способность оптических приборов. Любой прибор имеет ограниченную апертуру (от лат. *apertura* — отверстие) — угол между осью и образующей светового конуса, попадающего в прибор. Если от одной точки в прибор попадает луч под углом α_1 к оси, а от второй — под углом α_2,

то согласно геометрической оптике должны возникнуть два изображения независимо от величины углового расстояния $\delta = |\alpha_2 - \alpha_1|$ между точками. Однако дифракция света приводит к тому, что невозможно различить две точки, угловое расстояние между которыми меньше определенного значения.

Пусть точечный источник света находится на оси собирающей линзы диаметром D на расстоянии z_0 от плоскости линзы, удовлетворяющем условию $z_0 >> D^2/4\lambda$. В этом случае разность хода волн в центре линзы и на ее периферии значительно меньше $\lambda/2$, т. е. фаза волны в пределах линзы постоянна. Следовательно, на линзу падает плоская волна. В 7.12.2 показано, что в отсутствие линзы плоская волна превращается в сферическую на расстояниях $r >> D^2/4\lambda$ в области дифракции Фраунгофера. Однако с помощью линзы можно наблюдать *дифракционное изображение светящейся точки* в фокальной плоскости: это ярко освещенный центральный круг, вокруг которого расположены темные и светлые концентрические кольца. При удалении от центра яркость светлых колец быстро спадает. Угол между главным максимумом и первым минимумом освещенности после прохождения лучей через круглое отверстие диаметром D равен $1{,}22\ \lambda/D$, радиус этой области в фокальной плоскости $\approx \lambda F/D$.

Если свет приходит от двух различных точек, то возникают две системы колец. Когда точки лежат близко друг от друга (т. е. $\delta << 1$), то эти системы почти совпадают, и вместо двух точек мы увидим весьма расплывчатое одно светлое пятно. Чтобы увидеть две различные точки, их угловое расстояние должно быть таким, чтобы два главных максимума освещенности не перекрывались. Минимальный сдвиг, при котором получается такая картина, будет тогда, когда первый минимум одной системы колец падает на середину главного максимума другой. Поэтому величина $1{,}22\ \lambda/D$ определяет минимальное угловое расстояние, при котором две точки можно видеть раздельно. Следовательно, условием разрешения двух светящихся точек является неравенство

$$|\alpha_1 - \alpha_2| > 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}. \qquad (2.4.1)$$

Поэтому разрешающая способность приборов тем выше, чем больше диаметр входного отверстия. Однако в 1956 г. американец О. Кифи предложил метод, позволяющий преодолеть это ограничение. Источник света и фотодетектор следует расположить за экраном, в котором сделано отверстие. На другой стороне экрана находится объект, совершающий возвратно-поступательное движение. Разрешение такого устройства пропорционально радиусу отверстия. Эта же идея была использована при создании локатора бокового обзора и самого «зоркого» туннельного микроскопа с недостижимым ранее разрешением (см. IV. 9.4).

Прежде всего обсудим принцип действия самого распространенного оптического прибора — человеческого глаза.

2.4.2. Глаз. Оптическая система глаза представляет собой ряд преломляющих тел (хрусталик, стекловидное тело) и радужной оболочки, играющей роль диафрагмы. Хрусталик — прозрачное тело, похожее на собирающую линзу, состоит из прозрачного вещества, коэффициент преломления которого ~1,4.

Дно глазного яблока выстлано сетчаткой — плотно упакованными фоторецепторными клетками. Благодаря преломлению света в хрусталике на сетчатке образуется действительное изображение предметов. В результате фотохимической реакции происходит возбуждение рецепторов и генерируются импульсы напряжения, бегущие к коре головного мозга.

Поскольку расстояние между хрусталиком и сетчаткой неизменно, то для получения на сетчатке резкого изображения разноудаленных предметов хрусталик должен изменять фокусное расстояние. Это происходит путем деформации хрусталика с помощью глазных мускулов. В соответствии с формулой (10.5.1) (величина $f \approx 2{,}3$ см постоянна) фокусное расстояние хрусталика уменьшается при приближении предмета к глазу. Способность глаза приспосабливаться к видению на близком и далеком расстояниях называется *аккомодацией*. Пределы аккомодации для нормального глаза в зависимости от возраста лежат в интервале от 12 см до бесконечности. Оптическое расстояние, на котором глаз может работать не утомляясь, называется *расстоянием наилучшего зрения* d_0. Для нормального глаза при полной аккомодации $d_0 = 25$ см. В этом случае оптическая сила хрусталика $D_0 = 1/d_0 + 1/f$, $D_0 = 47{,}5$ дптр.

Разрешающая способность глаза. Диаметр зрачка глаза $D_{гл} \approx 5$ мм. Полагая в области максимальной чувствительности глаза к дневному свету $\lambda = 550$ нм (оранжевый цвет), найдем дифракционный предел углового разрешения глаза $\delta \approx 1{,}34 \cdot 10^{-4}$ рад. Размер пятна на сетчатке близок к $f\delta \approx 3{,}1$ *мкм*. В процессе эволюции Природа ограничила размеры фоторецепторов на сетчатке глаза величиной ≈ 3 мкм, близкой к дифракционному пределу.

Человеческий глаз способен видеть раздельно две точки, если угол между лучами, приходящими от этих точек, не меньше $2{,}9 \cdot 10^{-4}$ *рад*, или одна дуговая минута 1′. В этом случае говорят, что *острота зрения* равна единице. Если угол меньше 1′, то обе точки проецируются на один светочувствительный элемент сетчатки и сливаются в одну точку. Чем больше угол зрения, тем больше изображение на сетчатке и тем большее число деталей предмета воспринимается глазом.

Для того чтобы рассмотреть подробнее предмет, мы приближаем его. При этом увеличивается угол зрения, под которым виден предмет, т.е. угол, образованный лучами, приходящими в наш глаз от крайних точек предмета. Если интересующие нас детали не видны с этого расстояния, то дальнейшее увеличение угла зрения возможно с помощью лупы или микроскопа. Однако часто нельзя приблизиться к рассматриваемому предмету. В этом случае для увеличения угла зрения применяют телескоп.

Исследование процесса восприятия внешнего мира с помощью органов зрения – одна из интереснейших научных проблем.

Задача 2.4.1. На сколько диоптрий возрастает оптическая сила хрусталика при переводе взгляда с очень удаленного предмета на предмет, находящийся на расстоянии наилучшего зрения $d_0 = 0{,}25$ м.

Решение. Когда глаз аккомодирован на бесконечность, то лучи, попадающие на хрусталик, почти параллельны, глазные мускулы ослаблены. В этом случае хрусталик принимает такую форму, что его фокусное расстояние F_0 равно глубине глаза — расстоянию $f_0 = 2{,}3$ см от хрусталика до сетчатки, оптическая сила хрусталика 43,5 дптр. Когда человек переводит взгляд на предмет, находящийся на расстоянии d_0, фокусное расстояние хрусталика становится равным $F_1 < F_0$. При этом

$$\frac{1}{d_0}+\frac{1}{f_0}=\frac{1}{F_1}.$$

Оптическая сила хрусталика изменяется на величину

$$\Delta D=\frac{1}{F_1}-\frac{1}{F_0}=\frac{1}{d_0}=4 \text{ дптр}.$$

Пример 2.4.2. Глаз морского гребешка. Воспользуемся рис.2.4.2 *б*, иллюстрирующем «принципиальную» схему глаза этого моллюска. Хрусталик его глаза погружен в сетчатку, прилегающую к зеркальной поверхности, выстилающей заднюю стенку глаза. На зеркало падает сходящийся пучок лучей. Из приведенных в примере 2.3.1 соотношений следует, что при $2b = f_1$, $f_1 \approx F$ изображение S_2 удаленных предметов лежит на поверхности сетчатки. Кроме того, свет дважды проходит через сетчатку, возбуждая большее число рецепторов.

Аналогично устроен глаз кошки. Благодаря «зеркальцу» она видит предметы при освещенности в 6 раз меньшей, чем мы, а ее глаза светятся в полутьме.

2.4.3. Очки. Аккомодация близоруких и дальнозорких глаз не в состоянии дать на сетчатке четкое изображение предмета, находящегося на расстоянии наилучшего зрения $d_0 = 25$ см. Если фокусное расстояние хрусталика мало (велико) по сравнению с нормальным, то изображение образуется перед (за) сетчаткой. Этот дефект глаза называется близорукостью (дальнозоркостью). Для исправления близорукости надо поместить перед глазом дополнительную линзу — очки с отрицательной оптической силой, а для исправления дальнозоркости — очки с положительной оптической силой. Оптическая сила системы хрусталик — линза очков должна равняться оптической силе нормального глаза.

Нетрудно рассчитать оптическую силу $D_л$ очков, которые должен носить человек, чтобы исправить недостатки своего зрения. Предположим, что он без утомления глаз читает книгу, держа ее на расстоянии $d \neq d_0$. Поэтому

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f_0}=D_{гл}.$$

Надев очки, человек сможет читать книгу, держа ее на расстоянии наилучшего зрения d_0, т.е.

$$\frac{1}{d_0}+\frac{1}{f_0}=D_{гл}+D_л.$$

Следовательно,

$$D_л=\frac{1}{d_0}-\frac{1}{d}=\frac{d-d_0}{dd_0}.$$

Если $d<d_0$ (близорукий глаз), то необходима рассеивающая линза, так как $D_л<0$. Если $d>d_0$ (дальнозоркий глаз), то необходима собирающая линза, так как $D_л>0$. Если $d=d_0$, то оптическая сила линзы $D_л=0$, т.е. мы имеем плоскопараллельную пластинку. Такие «очки» можно увидеть у актеров, обладающих нормальным зрением.

Гениальная идея соединить две линзы с помощью оправы пришла, согласно легенде, мастеру С. Армати из Флоренции в 1285 г.

Задача 2.4.3. А. Оптическая сила очков дедушки равна $D_1=4$ дп, оптическая сила очков внучки $D_2=-2$ дп. Внучка взяла очки у дедушки и читает книгу на максимальном расстоянии s, не утомляя глаза. Найти величину расстояния s.

Решение. Пусть D_{x2} — оптическая сила хрусталика внучки. Тогда имеем два уравнения

$$1/d_0+1/f_0=D_{x2}+D_2,\qquad 1/s+1/f_0=D_{x2}+D_1,$$

из которых находим $s=10$ см.

Б. Человек четко видит без очков изображение своего лица в плоском зеркале, располагая зеркало на расстоянии $d=25$ см. Найдите оптическую силу очков, которыми обычно пользуется человек.

В. Близорукий и дальнозоркий обменялись очками. Дальнозоркий обнаружил, что может четко видеть бесконечно удаленные предметы. Найдите расстояние s, на котором близорукий может без напряжения читать.

2.4.4. Лупа. Предмет высотой H, рассматриваемый с расстояния наилучшего зрения d_0, виден под углом $\alpha\approx\mathrm{tg}\alpha=H/d_0$ (рис. 2.4.1 *а*). Если мелкие детали предмета плохо различимы с этого расстояния, то приходится приближать предмет к глазу. При этом для фокусировки изображения на сетчатке аккомодационный мускул глаза должен увеличить оптическую силу хрусталика. Однако это утомительно для глаза. Для того чтобы не переутомлять глаз, применяют лупу, т.е. собирающую линзу или систему линз с положительной оптической силой. Если предмет расположить так, чтобы изображение в лупе возникало на расстоянии наилучшего зрения $f=-d_0$, то увеличение

$$k=\left|\frac{f}{d}\right|,\ \mathrm{k}=1+\frac{d_0}{F}.$$

Если $F=12{,}5$ см, то $k=3$.

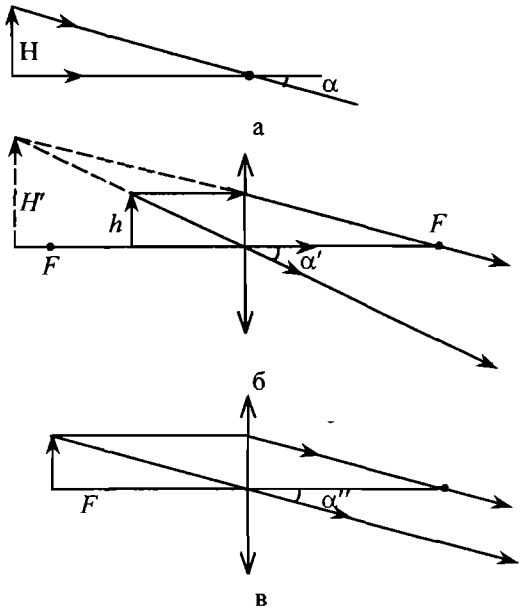


рис. 2.4.1

Нетрудно видеть, что коэффициент увеличения равен отношению угла зрения α', под которым мы видим изображение высотой H', пользуясь лупой, к углу зрения α , под которым мы видим предмет без лупы, когда он находится на том же расстоянии: $k = \alpha'/\alpha$. Действительно, из рис. 2.4.1 *б* видно, что $\alpha' \approx H'/d_0$, $\alpha' = H'\alpha/H = k\alpha$.

Большинство из нас пользуются лупой так, как показано на рис. 8.6.1 *б*. Однако те, для кого лупа является рабочим инструментом (например, часовые мастера), держат лупу вплотную к глазу, а предмет помещают в фокальную плоскость. Тогда исходящий от каждой точки предмета пучок лучей преобразуется линзой в параллельный пучок лучей, падающих на хрусталик (рис.8.6.1 *в*). В этом случае глазные мышцы полностью расслаблены. На сетчатке возникает изображение, угловой размер которого $\alpha'' \approx H/F = \alpha\, d_0/F$ в $(k - 1)$ раз больше углового размера изображения α предмета, рассматриваемого с расстояния наилучшего зрения без помощи лупы. На практике используют короткофокусные лупы, позволяющие получить увеличение угла зрения в 5–10 раз.

2.4.5. Микроскоп. Очевидно, что при большом увеличении расстояние между предметом и глазом $d = d_0/k$ становится недопустимо малым. По этой причине Галилей предложил около 1610 г. конструкцию микроскопа.

Простейший микроскоп состоит из трубки-тубуса длиной L, на концах которой находятся две собирающие линзы: объектив и окуляр. Объективом служит линза, пропускающая широкие пучки лучей. Рассматриваемый

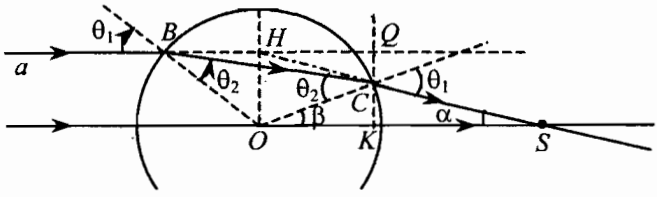
предмет помещается перед объективом между фокусом и двойным фокусным расстоянием ближе к фокусу.

Пусть L — расстояние между объективом и окуляром или длина тубуса. Первое действительное, увеличенное и перевернутое изображение образуется на расстоянии $F_{ок}$ от окуляра и рассматривается в окуляр, играющий роль лупы. Тогда угловое увеличение, как в лупе $k_2 = d_0/F_{ок}$, где $d_0 = 0{,}25$ м. Поскольку первое изображение образуется на расстоянии $f_1 = L - F_{ок}$ от объектива, то предмет должен находиться на расстоянии $d_1 = f_1F_{об}/(f_1 - F_{об})$ от объектива. Величина первого изображения $H' = Hf_1/d_1 = H(L - F_{ок} - F_{об})/F_{об}$. При $F_{ок} << F_{об}$ увеличение $k_1 = (L - F_{об})/F_{об}$. Следовательно, увеличение микроскопа $k = k_1k_2$, $k = d_0(L - F_{об})/F_{об}F_{ок}$.

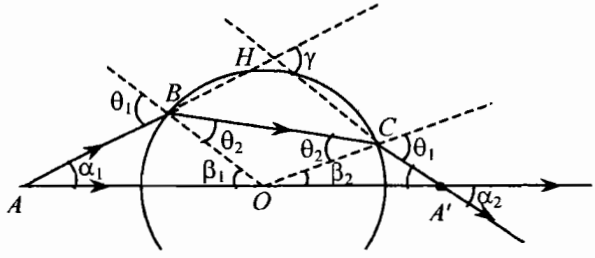
Увеличение оптического микроскопа $k \sim 1000$—1500.

Пример 2.4.4. Стеклянный шар — микроскоп Левенгука. Стеклянный шар используют в качестве линзы. Радиус шара — R, коэффициентом преломления стекла — n. Найдем фокусное расстояние линзы в параксиальном приближении.

На шар падает плоская волна — параллельный пучок лучей (рис. 2.4.2 *а*). Луч, принадлежащий прямой *a*, проходящей на расстоянии h от главной оптической оси, падает на переднюю поверхность под углом $\theta_1 = h/R$. Угол преломления — θ_2. Для малых углов $\theta_1 = n\theta_2$. На задней поверхности луч преломляется в точке C и пересекает оптическую ось в точке S под углом α.



а



б

рис. 2.4.2

Покажем, что преломленный луч принадлежит прямой, пересекающей прямую *a* в точке H на перпендикуляре OH к оптической оси. Обозначим β — угол COS, $\beta = 2\theta_2 - \theta_1$. Проведем через точку C прямую, перпендикулярную главной оси в точке K. В треугольнике COK катет $OK = R\cos\beta \approx R$. Углы тре-

угольника COS связаны соотношением $\alpha = \theta_1 - \beta$. Очевидно расстояние от точки C до прямой a равно $CQ = h - R\beta = R(\theta_1 - \beta) = R\alpha$. Однако в треугольнике HCQ катет $CQ = HQ\alpha$. Тогда имеем $HQ = R$. Следовательно, главные плоскости проходят через центр шара, а фокусное расстояние $F = OS$ (см. пример 2.3.8). Из «теоремы синусов» для элементов треугольника COS находим $OS/\theta_1 = R/\alpha$. Поскольку $\alpha = 2(\theta_1 - \theta_2) = 2(1 - 1/n)\theta_1$, то $F = R\theta_1/\alpha$, $F = Rn/[2(n-1)]$. Полагая $n = 3/2$, получим $F = 3R/2$.

Формула толстой линзы. Покажем, что в параксиальном приближении выполняется соотношение $1/d + 1/f = 1/F$, где d и f — расстояния от центра шара до предмета и изображения, $1/F = 2(n-1)/nR$.

Предмет — точка A находится на оптической оси. Луч AB, образующий угол α_1 с оптической осью, падает на переднюю поверхность под углом θ_1. Угол преломления — θ_2, $\theta_1 = n\theta_2$ (рис. 2.4.2 *б*). После преломления на задней поверхности в точке C луч пересекает оптическую ось под углом α_2. Точка A' — изображение предмета A. Угол между лучами на входе и выходе линзы $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$. Учитывая соотношения между углами $\beta_1 + \beta_2 = 2\theta_2$, $\alpha_1 = \theta_1 - \beta_1$, $\alpha_2 = \theta_1 - \beta_2$, находим

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2(\theta_1 - \theta_2) \text{ или } \alpha_1 + \alpha_2 = 2(1 - 1/n)\theta_1. \qquad (1)$$

Вводя обозначения $OA = d$, $OA' = f$, получим из «теоремы синусов» для элементов треугольников OBA и $OC\,A'$ соотношения $d/\theta_1 = R/\alpha_1$, $f/\theta_1 = R/\alpha_2$. Следовательно,

$$R\theta_1/d + R\theta_1/f = 2(1 - 1/n)\theta_1 \text{ или } 1/d + 1/f = 1/F,\ 1/F = 2(n-1)/nR.$$

Если рассматривать предмет с расстояния наилучшего зрения, то угловой размер предмета $\alpha = H/d_0$. Положим теперь предмет в фокус, сферу поместим перед глазом. Угловой размер изображения $\alpha'' = H/F$. Угловое увеличение $k = d_0/F$. Полагая $n = 3/2$, получим $F = 3R/2$, $k = 2d_0/3R$. При значении $R = 1$ мм получим $k = 167$.

В середине XVII века голландец А. Левенгук изготовил не менее 400 сферических линз диаметром 1—2 мм. Подобно Галилею он делал одно открытие за другим. В 1673 г. Левенгук впервые увидел микробы и обнаружил огромный мир микроорганизмов, о существовании которого даже не подозревали. Так свершилось одно из великих открытий, положившее начало микробиологии.

2.4.6. Фотоаппарат. В фотоаппарате действительное обратное изображение образуется линзой (или комбинацией линз) на поверхности фотографической пленки. Линейный размер изображения удаленного объекта, видимого под углом $\theta \ll 1$, равен $F\theta$ (F — фокусное расстояние объектива). Следовательно, для получения изображения больших размеров фокусное расстояние должно быть большим. Например, при фотографировании астрономических объектов $F = 2 - 20$ *м*.

Глубина резкости. Предположим, что аппарат «сфокусирован» на объект, находящийся на расстоянии $d_0 \gg F$ от объектива. На негативе или по-

зитиве можно увидеть, что резкими получаются не только объект, но и предметы, находящиеся ближе и дальше расстояния d_0 в некоторой области $d_1 < d < d_2$. Расстояние $d_2 - d_1$ называется глубиной резкости. Найдем величины d_1 и d_2. На рис. 2.4.3 *а* точка P — положение резкого изображения точечного объекта, находящегося на расстоянии d_0 от линзы, $OP = f_0$ — расстояние от линзы до фотопленки, $OA = R$ — радиус диафрагмы линзы.

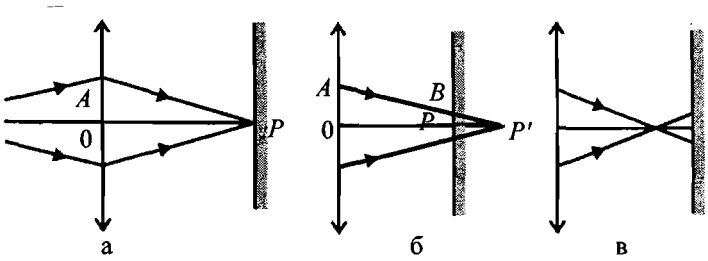


рис. 2.4.3

Переместим объект в положение $d_1 < d_0$. Тогда $f_1 = OP'$. Его изображение на фотопленке представит светлый кружок радиусом PB (рис. 2.4.3 *б*). Если $PB \le r$, где r — радиус кружка, соответствующего минимальной площади разрешения светочувствительного материала, то изображение объекта будет достаточно четким. Из треугольника $OP'A$ находим $PB = (f_1 - f_0)\,\mathrm{tg}\alpha$, где α — угол $OP'A$. Поскольку $\alpha << 1$, то $R/f_1 = \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$. Следовательно, должно выполняться неравенство $(f_1 - f_0)\dfrac{R}{f_1} < r$. Исключая f_1, f_0 с помощью уравнений

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f_0} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F},$$

получим

$$d_1 \ge \frac{d_0}{1+\varepsilon}, \; \varepsilon = \frac{r d_0}{RF} << 1.$$

Если переместить объект в положение $d_2 > d_0$ (рис. 2.4.3в), то $d_2 \le \dfrac{d_0}{1-\varepsilon}$.

Следовательно , глубина резкости

$$d_2 - d_1 \approx 2\varepsilon\, d_0 = \frac{2 r d_0^2}{RF}.$$

Поэтому для увеличения глубины резкости следует диафрагмировать объектив, т.е. уменьшить величину R. При этом освещенность изображения уменьшится.

2.4.7. Секстант. Два плоских зеркала M_1 и M_2, образующих двугранный угол α, обладают замечательным свойством. Пусть α_1 — угол падения луча SM_1 на первое зеркало, α_2 — угол падения отраженного луча M_1M_2 на второе зеркало, θ — угол между отраженным лучом M_2K и падающим на систему лучом SM_1. Поскольку сумма углов в треугольнике равна π, то углы в ΔM_2OM_1 и ΔM_2KM_1 на рис. 2.4.4 связаны уравнениями

$$\pi/2 + \alpha_2 + \alpha + \pi/2 - \alpha_1 = \pi,\ 2\alpha_2 + \pi - 2\alpha_1 + \theta = \pi.$$

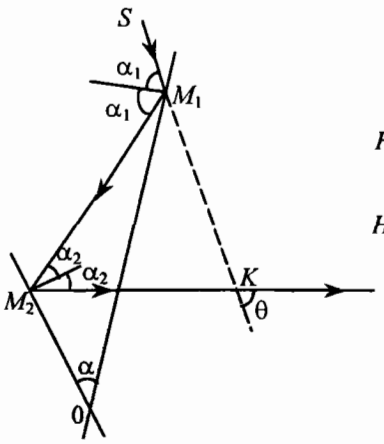


рис. 2.4.4

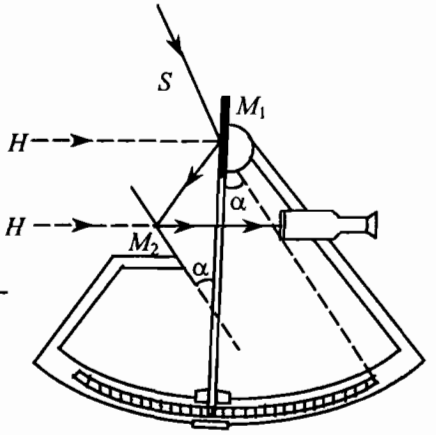


рис. 2.4.5

Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha$, угол $\theta = 2\alpha$ не зависит от угла падения луча α_1 на зеркало M_1. Это важное свойство использовано в навигационном приборе, называемом *секстантом* (рис 2.4.5).

Полупрозрачное зеркало M_2, зрительная труба и ось, вокруг которой может поворачиваться зеркало M_1 вместе с визиром, жестко закреплены на общем основании. Луч SM_1 образует угол θ с лучом HM_2. Наблюдая линию горизонта сквозь зеркало M_2 и изменяя угол наклона зеркала M_1, можно добиться совмещения с ней изображения Солнца. При этом угол падения луча M_1M_2 на зеркало M_2 должен быть равным постоянному значению α_2, а угол отклонения визира на шкале $\alpha = \theta/2$.

Действительно, если плоскости зеркал M_1 и M_2 параллельны ($\alpha = 0$), то к наблюдателю придет луч HM_1, падающий на зеркало M_1 под углом $\alpha_1 = \alpha_2$. Для получения изображения Солнца зеркало M_1 следует повернуть на угол α так, чтобы угол падения луча SM_1 стал равен $\alpha_2 + \alpha$. Это условие определяет угол поворота зеркала $\alpha = \theta/2$.

Обычно шкала секстанта составляет 1/6 часть окружности. Отсюда название (от лат. *sextans* — шестой). Секстант позволяет измерить широту точки наблюдения в открытом море даже при сильном волнении.

2.4.8. Телескоп. Если предмет находится достаточно далеко, то лучи света, излучаемые различными точками предмета, идут к глазу под очень

малым углом зрения так, что невозможно рассмотреть какие-нибудь детали предмета. В этом случае для увеличения угла зрения применяют телескоп.

Телескоп Галилея. В конце 1608 г. — в начале 1609 г. Галилею стало известно, что в Голландии изобретена подзорная труба. «Вскоре после этого, — пишет Галилей, — опираясь на учение о преломлении, я поместил два оптических стекла, оба плоских с одной стороны, а с другой стороны одно стекло выпуклое, а другое — вогнутое» (рис. 2.4.6).

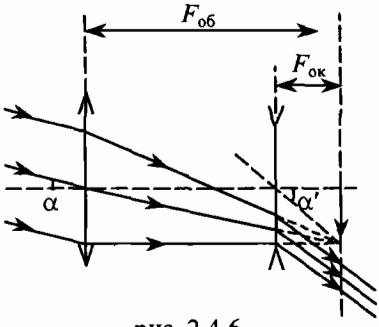


рис. 2.4.6

Если предмет находится на расстоянии $d >> F_{об}$, то от каждой точки предмета в объектив приходит практически параллельный пучок лучей. На рис. 2.4.6 изображены лучи от верхней точки удаленного предмета. Промежуточное действительное изображение будет располагаться в фокальной плоскости объектива. Если, перемещая окуляр, добиться того, чтобы изображение лежало в фокальной плоскости окуляра, то лучи выйдут из рассеивающей линзы окуляра *параллельным пучком. Наблюдатель* увидит прямое мнимое изображение. Это обстоятельство делает трубу Галилея особенно удобной для театральных биноклей с увеличением $k \sim 2$–3. Из рис. 2.4.6 следует, что угловое увеличение системы

$$k = \frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{F_{об}}{F_{ок}} \approx \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Для системы, изображенной на рис. 2.4.6, $k \sim 5$.

Задача 2.4.5. В театральном бинокле, дающем пятикратное увеличение, расстояние между линзами s = 12 см. Найдите величину фокусного расстояния окуляра.

Рефрактор. В 1613 г. И. Кеплер предложил новую комбинацию линз. Его зрительная труба, состоящая из двух собирающих линз — длиннофокусного объектива и короткофокусного окуляра, — показана на рис. 2.4.7. При большом удалении предмета от объектива попадающие в трубу лучи, исходящие из каждой точки предмета, будут практически параллельными. Поэтому действительное, перевернутое и уменьшенное промежуточное изображение предмета лежит в фокальной плоскости объектива. Это изображение рассматривается в окуляр, как в лупу. Для этого окуляр помещают относительно объектива так, что его передний фо-

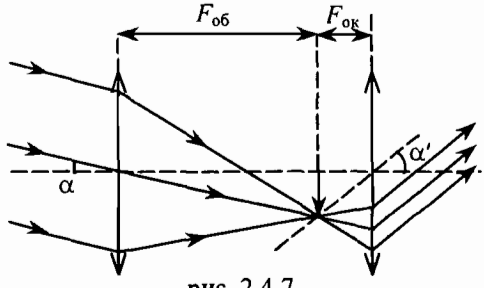


рис. 2.4.7

кус находится вблизи заднего фокуса объектива. Если промежуточное изображение лежит в фокальной плоскости окуляра, то из него выйдет пучок параллельных лучей. Наблюдатель увидит перевернутое изображение предмета.

Из рис. 2.4.7 следует, что угол α', образуемый лучами, вышедшими из окуляра, больше угла α, под которым виден предмет невооруженным глазом. Нетрудно видеть, что увеличение угла зрения

$$k = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{F_{об}}{F_{ок}} .$$

Для большего увеличения необходимо брать длиннофокусный объектив и короткофокусный окуляр. Казалось бы, ничто не мешает сделать увеличение очень большим. Однако мы знаем, что угловое разрешение телескопа ограничено неравенством (2.4.1). Поэтому *разрешающая способность телескопа тем выше, чем больше диаметр его объектива.* Большой диаметр объектива позволяет также собрать возможно большее количество света, доходящего до нас от предмета.

Однако наличие объектива большого диаметра еще не означает, что мы увидим эти точки. Поскольку телескоп и глаз образуют единую оптическую систему, то мы добьемся этого, подбирая фокусные расстояния объектива и окуляра так, чтобы увеличить угол α до значения, соответствующего разрешающей способности глаза или другого регистрирующего устройства. Дальнейшее увеличение может сделать изображение очень большим, однако число различных точек на единице поверхности от этого не станет больше.

Разрешающая способность глаза $\Delta\alpha \sim 1{,}22\ \lambda/D_{зр}$, где $D_{зр}$ — диаметр зрачка. Для того чтобы полностью использовать разрешающую способность объектива, угол $\alpha' = k|\alpha_2 - \alpha_1|$ должен быть не меньше $\Delta\alpha$. Следовательно, коэффициент увеличения должен быть равным $k = D/D_{зр}$. Этого можно добиться, выбирая фокусное расстояние окуляра $F_{ок} = F_{об}\, D_{зр}/D$.

Телескоп обсерватории Академии наук, установленный на Северном Кавказе в январе 1976 г., имеет диаметр главного зеркала $D = 6$ *м*. Подставляя в формулу (2.4.1) значение длины волны $\lambda = 650$ *нм*, найдем его разрешение $1{,}32 \cdot 10^{-7}$ рад. Нетрудно рассчитать, что этот телескоп позволяет различить на Луне две точки, наименьшее расстояние между которыми составляет 50,7 м (расстояние до Луны $r = 384\ 400$ *км*).

Сверхтелескоп *VLBA* (*Very Long Baseline Array*). Недавно на территории США построен самый крупный радиотелескоп со сверхдлинной базой 8 000 км. Он состоит из десяти антенн, диаметром 25 м, синхронизированных из одного центра управления. В радиодиапазоне разрешающая способность нового инструмента, стоимостью 85 млн долларов, в 1000 раз превосходит разрешающую способность лучших оптических телескопов, возможности которых ограничены узкими рамками светового спектра. Помимо наблюдений за галактиками и квазарами, радиотелескоп позволяет измерить расстояние между антеннами с точностью до сантиметра, возможно, для предсказания землетрясений. Уже обнаружены струи необычной

формы, испускаемые галактикой Маркариан-501, находящейся на расстоянии 300 млн световых лет от Земли, и измерена скорость удаления Северной Америки от Европы — 2 см в год.

Тест

1*. Кубик, изготовленный из прозрачной пластмассы, поставлен на лист газеты. Текст нельзя увидеть через боковую грань, если коэффициент преломления материала кубика превосходит значение:

А. 1,73, **Б.** 4/3, **В.** 1,5, **Г.** 1,2, **Д.** 1,41.

2. Луч света падает под углом $\alpha = \pi/3$ к плоской границе раздела вакуум–жидкость. Отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Показатель преломления жидкости:

А. $\sqrt{2}$, **Б.** 3/2, **В.** $\sqrt{3}$, **Г.** 4/3, **Д.** 5/4.

3*. С помощью тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F = 12 см получено изображение предмета. Когда к линзе вплотную приложили такую же линзу, то линейное увеличение не изменилось. Расстояние от предмета до линзы:

А. 2 см, **Б.** 4 см, **В.** 6 см, **Г.** 8 см, **Д.** 10 см.

4. Каждая из труб театрального бинокля имеет длину l = 12 см и дает пятикратное увеличение. Фокусное расстояние объектива:

А. 10 см, **Б.** 1,5 см, **В.** 5 см, **Г.** 2 см, **Д.** 15 см.

5. Труба Кеплера имеет длину $l = 0{,}5$ м и дает четырехкратное увеличение. Фокусное расстояние объектива:

А. 1 м, **Б.** 0,8 м, **В.** 0,4 м, **Г.** 3 м, **Д.** 0,2 м.

6. С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F получают изображение квадрата $ABCD$ со стороной $a = F/2$. Сторона AB находится на расстоянии $d_1 = 3F/2$ от линзы, сторона CD — на расстоянии $d_2 = 2F$, средняя линия — на оптической оси. Отношение площади изображения к площади квадрата:

А. 1, **Б.** 8, **В.** 6, **Г.** 3, **Д.** 4.

7. Экран расположен на расстоянии $b = 4$ см от отверстия, в которое вставлена собирающая линза радиусом $R = 3$ см. На линзу падает сходящийся пучок лучей, образующий на экране круг радиусом $r = 1$ см. Если линзу убрать, то радиус круга не изменится. Фокусное расстояние линзы F:

А. 1 см, **Б.** 10 см, **В.** 3 см, **Г.** 2 см, **Д.** 6 см.

Часть VI.
ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Глава 1. Основы теории относительности

1.1. Принцип относительности Эйнштейна

1.1.1. Симметрия физических законов. Важнейшие открытия в физике XX в. связаны с анализом различных симметрий. Все мы имеем некоторые представления о симметрии как о гармонии пропорций пространственных объектов. Однако наше понимание остается примитивным до того, пока мы не введем определение симметрии в терминах математических понятий. Возьмем, например прямоугольник. Его симметричность выявляется при преобразовании пространства: два зеркальных отражения относительно осей симметрии, поворот вокруг оси, проходящей через центр, и тождественное преобразование оставляют фигуру неизменной в преобразованном пространстве. Мы видим, что для анализа симметрии объектов необходимо из всех преобразований пространства выделить преобразования, при которых объект отображается сам на себя. Множество таких преобразований называется *группой симметрии*. Группа симметрии прямоугольника содержит 4 элемента.

Проявляется ли симметрия в физических явлениях? Несомненно. Известный пример — структура кристаллов. Можно расширить понятие симметрии и назвать группой симметрии такие преобразования координат, времени и операции над физическими величинами, описывающими состояние системы, при которых форма записи уравнений или комбинации наблюдаемых величин остаются неизменными. В этом смысле говорят о симметрии в физических законах. Можно «навязать» природе некоторый тип симметрии и экспериментально проверить правильность предположения. Именно так была создана теория относительности и развивается физика элементарных частиц.

1.1.2. Принцип относительности Галилея. Поиски симметрий в явлениях природы играли заметную роль в создании теоретических схем еще во времена Галилея, Кеплера и Ньютона. Обобщая результаты своих экспериментов по изучению движения тел, Г. Галилей в 1636 г. сформулировал принцип относительности: *во всех инерциальных системах отсчета законы механики одинаковы*. Этот принцип налагает ограничения на структуру уравнений движения: они должны иметь одинаковый вид во всех инерциальных системах.

Пусть (x, y, z), (x', y', z') — координаты частицы в системах K и K' соответственно, $\vec{u} = (u, 0, 0)$ — скорость системы K' относительно системы K. Преобразование Галилея имеет вид:

$$x = ut + x', y = y', z = z', t = t'. \qquad (1.1.1)$$

Последнее условие означает, что время имеет абсолютный характер, не зависящий от системы отсчета. Скорости частицы в двух системах отсчета связаны соотношениями

$$v_x = u + v'_x, v_y = v'_y, v_z = v'_z. \qquad (1.1.2)$$

а ускорения частиц одинаковы.

В ньютоновой механике смещение одной из взаимодействующих частиц приводит к изменению сил, действующих на остальные частицы в тот же момент времени. Опыт, однако, показывает, что мгновенных взаимодействий в природе не существует. Переносчиком взаимодействия заряженных частиц является электромагнитное поле. Из уравнений Максвелла следует, что переменное поле — электромагнитная волна распространяется в вакууме со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$м/с. Однако во второй половине XIX столетия предполагали, что свет, как и звук, должен распространяться в некоторой среде, которая получила название *эфира*. Очевидно, должна существовать одна особая система отсчета, связанная с эфиром. Все другие системы движутся сквозь эфир. Совершенно ясно, что введение эфира противоречит принципу относительности Галилея, но в то время это обстоятельство никого не беспокоило, т. к. уравнения Ньютона и Максвелла относились к разным областям физики. Действительно, уравнения Максвелла не сохраняют свою форму при преобразовании (1.1.1). Это означает, что они справедливы только в одной системе отсчета.

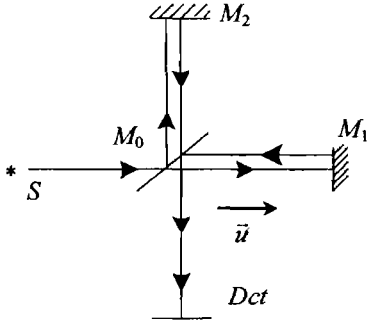


рис. 1.1.1

Эксперимент Майкельсона. В 1881 г. для измерения скорости Земли относительно эфира А. Майкельсон использовал интерферометр, изображенный на рис. 1.1.1. Длины двух «плечей» прибора равны λ. Согласно (1.1.2) скорость света должна быть различна для лучей в двух взаимно перпендикулярных плечах прибора. Поэтому должна существовать разность хода лучей и наблюдаться интерференционная картина.

Пусть скорость света относительно неподвижной системы отсчета, связанной с эфиром равна $\vec{c}$. Скорость прибора $\vec{u} = (u, 0, 0)$. Скорость света в системе покоя прибора $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{u}$. Проекция скорости света на траектории M_0M_1 равна $c'_x = c - u$, а на траектории M_1M_0 – $c'_x = c + u$. Поэтому интервал времени, за который свет распростра-

няется по траектории луча $M_0M_1M_0$, равен $t_1 = 2\lambda\gamma^2/c$, $\gamma = 1/(1-\beta^2)^{1/2}$, $\beta = u/c$. Траектория луча света $M_0M_2M_0$ в неподвижной системе представляет собой два отрезка сторон равнобедренного треугольника высотой λ с углом α при основании ($\cos\alpha = u/c$). В системе покоя величина скорости света $c' = \sqrt{c^2 - u^2}$. Поэтому интервал времени распространения света по траектории $M_0M_2M_0$ равен $t_2 = 2\lambda/c' = 2\lambda\gamma/c$. Следовательно, разность фаз интерферирующих волн $\Delta\varphi = ct_2 - ct_1 \approx \lambda\beta^2$. Однако в этом и последующих экспериментах интерференционная картина не появлялась — скорость Земли относительно эфира оказалась равной нулю. Тем самым, Земля приобретала уникальное свойство, отличающее ее от других тел. В то же время другие эксперименты указывали на то, что эфир неподвижен.

В 1892 г. для объяснения отсутствия интерференционных полос ирландский физик Д. Фиджеральд и независимо нидерландский физик-теоретик Х. Лоренц предложили гипотезу о сокращении размеров движущихся тел в направлении движения. В 1904 г. Лоренц вывел формулы (1.2.1), связывающие пространственные координаты и время в двух системах отсчета. Однако он считал, что это преобразование имеет вспомогательный характер. Значительный вклад внес выдающийся французский математик Анри Пуанкаре. В 1904—1905 гг. он дал анализ понятия одновременности и открыл законы релятивистской механики.

Альберт Эйнштейн первым осознал реальность преобразований Лоренца и необходимость обобщения принципа относительности Галилея. В статье «К электродинамике движущихся тел», вышедшей в 1905 г., он впервые с *единой точки зрения рассмотрел поля и частицы в четырехмерном пространстве-времени.*

Основой новой теории стал *принцип относительности* Эйнштейна: *все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах.* Из него следует, что *скорость света одинакова во всех инерциальных системах и не зависит от скорости источника излучения.*

1.2. Преобразование Лоренца

1.2.1. Преобразование координат и времени. Эйнштейн предложил заменить преобразование (1.1.1) преобразованием Лоренца:

$$x = \gamma(ut' + x'), \qquad y = y', \qquad z = z',$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right), \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{u}{c}, \tag{1.2.1}$$

оставляющее неизменными уравнения Максвелла. Поэтому второй закон Ньютона необходимо модифицировать. Новая механика, основанная на принципе относительности Эйнштейна, называется релятивистской (от лат. *relativus* — относительный). Предельный переход к ньютоновой

механике, описывающей движение при скоростях $v << c$, может быть произведен как переход к пределу: при $c \to \infty$ (или $\beta << 1$) преобразование (1.2.1) переходит в (1.1.1). Этот переход является характерной чертой любой научной теории: знания, завоеванные человечеством, не отметаются новой теорией.

Обратное преобразование координат системы K в координаты системы K' можно получить из (1.2.1) заменой $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$, $z \leftrightarrow z'$, $t \leftrightarrow t'$, $u \to -u$.

$$x' = \gamma(-ut + x), \qquad y' = y, z' = z, \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right). \qquad (1.2.2)$$

Пример 1.2.1. Вывод Эйнштейна преобразования Лоренца. Пусть плоская волна распространяется в положительном направлении оси x. Рассмотрим этот процесс в двух системах отсчета — в системе K и в системе K', движущейся относительно K со скоростью $\vec{u} = (u, 0, 0)$. Для упрощения расчетов предположим, что при совпадении начал координат систем K и K' стрелки часов в обеих системах поставлены так, что $t = t' = 0$. В момент времени $t = 0$ фронт волны находится в плоскости $x = 0$. К моменту времени t фронт волны переместится в плоскость с координатой x. Процесс распространения света должен удовлетворять условию

$$x^2 - (ct)^2 = 0. \qquad (1)$$

Следовательно, пространственно-временные координаты двух событий (0, 0) и (t, x) удовлетворяют уравнению (1). Согласно принципу относительности Эйнштейна координаты двух событий (0, 0) и (t', x') в системе K', соответствующие двум положениям фронта волны, должны удовлетворять точно такому же уравнению

$$x'^2 - (ct')^2 = 0. \qquad (2)$$

Условия совместности уравнений (1) и (2) могут выполняться только при линейном преобразовании вида

$$ct = a_1ct' + b_1x', \qquad x = a_2ct' + b_2x'. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1), мы должны получить уравнение (2). В результате следуют три уравнения

$$a_1^2 - a_2^2 = 1, \qquad b_2^2 - b_1^2 = 1, \qquad a_2b_2 = a_1b_1,$$

из которых находим

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_2}{a_1} = \beta, \qquad a_1 = b_2 = \gamma, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где β — неизвестный коэффициент. Следовательно, из (3) имеем

$$ct = \gamma(ct' + \beta x'), \qquad x = \gamma(\beta ct' + x'). \tag{4}$$

Для того чтобы найти коэффициент β рассмотрим в системе K движение начала координат системы отсчета K'. Полагая в (4) $x' = 0$, мы должны получить для событий $(ct, x = ut)$, $(ct', x' = 0)$ соотношение $u = x/t$: $u = \beta c$ или $\beta = u/c$.

1.2.2. Преобразование скорости. Пусть $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, $v_y = \dfrac{dy}{dt}$, $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ представляют собой компоненты скорости частицы в системе K, $v'_x = \dfrac{dx'}{dt'}$, $v'_y = \dfrac{dy'}{dt'}$, $v'_z = \dfrac{dz'}{dt'}$, компоненты скорости той же частицы в системе K'. Из (1.2.1) получим соотношение между приращениями координат и времени

$$dx = \gamma(udt' + dx'), \qquad dy = dy', \qquad dz = dz', \qquad dt = \gamma\left(dt' + \beta\frac{dx'}{c}\right),$$

из которых найдем правила преобразования компонент скоростей

$$v_x = \frac{u + v'_x}{1 + \dfrac{\beta v'_x}{c}}, \qquad v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{\beta v'_x}{c}\right)}, \qquad v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \dfrac{\beta v'_x}{c}\right)}. \tag{1.2.3}$$

Если $\vec{v}' = (c, 0, 0)$, то $\vec{v} = (c, 0, 0)$: скорость света одна и та же во всех инерциальных системах отсчета. При $\beta << 1$ из (1.2.3) следуют нерелятивистские соотношения (1.1.2).

Пример 1.2.2. В неподвижной системе отсчета две частицы движутся со скоростями $\vec{v}_1 = (v_1, 0, 0)$ и $\vec{v}_2 = (v_2, 0, 0)$. Найдем относительную скорость частиц $\vec{v}_R$.

Пусть система K' движется со скоростью $\vec{v}_1$. Тогда относительная скорость — скорость второй частицы в системе K'. Полагая в (1.2.3) $v_x = v_2$, $v'_x = v_R$, $u = v_1$, получим

$$v_2 = \frac{v_1 + v_R}{1 + v_1 v_R / c^2}, \rightarrow v_R = \frac{v_2 - v_1}{1 - v_1 v_2 / c^2}.$$

Например, при $v_2 = 0{,}99c$, $v_1 = 0{,}98c$ имеем $v_R = c/3$. В случае $v_1 = 0{,}5c$, $v_2 = 0{,}8c$ имеем $v_R = 0{,}5c$. Если $v_2 = c$ — скорость светового сигнала, то $v_R = c$ — т. е. в системе покоя первой частицы скорость света равна c. Если два световых сигнала движутся в противоположные стороны ($v_2 = c$, $v_1 = -c$), то относительная скорость равна c.

1.2.3. События и мировые линии. В качестве часов наблюдатели в системах К и К' могут использовать любой периодический процесс, например излучение атома водорода на фиксированной частоте. Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется *собственным* временем этого объекта. Для измерения длины отрезков можно взять определенный эталон — линейку. Собственной длиной линейки называется ее длина λ в той системе отсчета, относительно которой она покоится. Величина λ равна модулю разности координат ее концов в один и тот же момент времени.

Многие непривычные для «здравого» смысла выводы теории относительности становятся более понятными при графическом изображении движения частиц и световых сигналов. В качестве временной координаты удобно выбрать величину $x_0 = ct$. Например, в координатах xx_0 уравнение светового луча $x = ct$ имеет вид $x = x_0$ и изображается прямой линией, пересекающей ось x_0 под углом 45°. Уравнение равномерного движения частицы записывается в виде $x = (v/c)x_0$. Графики уравнений движения частиц в плоскости x_0x называются *мировыми линиями*, а любая точка (x, x_0) на этих графиках называется *событием*.

Расположим в системе K на оси x линейку kmn длиной λ так, что ее середина m находится в начале системы координат. В системе K' на оси x' находится точно такая же линейка asb длиной λ, которую будем называть стержнем. Середина стержня — точка s — находится в начале системы координат K'. Пусть в момент времени $t = t' = 0$ начала координат систем K и K' совпадали. Тогда мировые линии точек k, m, n в системе K задаются прямыми

$$x_k(x_0) = \frac{\lambda}{2}, \qquad x_m(x_0) = 0, \qquad x_n(x_0) = -\frac{\lambda}{2}.$$

изображенными на рис. 1.2.1. Уравнения мировых линий точек a, s, b в системе K' имеют аналогичный вид:

$$x'_a(x'_0) = \frac{\lambda}{2},\ x'_s(x'_0) = 0,\ x'_b(x'_0) = -\frac{\lambda}{2}.$$

Подставляя эти выражения в (1.2.2), получим уравнения мировых линий точек a, s, b в системе K — это прямые

$$x_a(x_0) = \frac{\lambda}{2\gamma} + \beta x_0, \qquad x_s(x_0) = \beta x_0, \qquad x_b(x_0) = -\frac{\lambda}{2\gamma} + \beta x_0 \qquad (1.2.4)$$

На рис. 1.2.1. очевидно, прямая $x_s(x_0) = \beta x_0$ совпадает с временной осью системы покоя стержня x'_0.

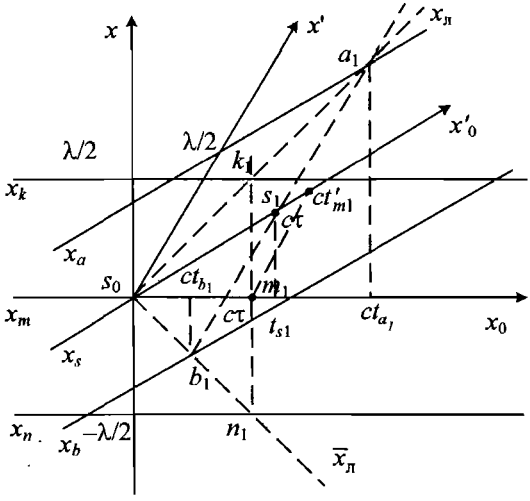


Рис. 1.2.1

Найдем теперь положение пространственной оси координат x'. Пусть из точки s_0 в момент времени $t = t' = 0$ посылаются два световых сигнала в противоположных направлениях. Поскольку скорость света в любой инерциальной системе равна c, то уравнения мировых линий сигнала имеют вид: $x_л(x_0) = x_0$ и $\bar{x}_л(x_0) = -x_0$. Рассмотрим четыре события k_1, n_1, a_1, b_1 с точки зрения наблюдателя в системе K на рис. 1.2.1. События k_1 и n_1 соответствуют одновременному приходу светового сигнала к концам линейки k и n в моменты времени $t_{k1} = t_{n1} = t_{m1} = \tau$, $\tau = \lambda/2c$. Два других события b_1 и a_1 — приход сигналов к концам стержня b и a в различные моменты времени t_{b1} и t_{a1}. С другой стороны, наблюдатель в системе K' зафиксирует по своим часам одновременный приход сигналов к концам стержня в момент времени $t'_{b1} = t'_{a1} = \tau$, $\tau = \lambda/2c$. Поэтому все события, лежащие на прямой, проходящей через точки b_1 и a_1, должны быть одновременными в системе K'. Следовательно, значение координаты x'_0 в точке пересечения s_1 прямых b_1a_1 и $x_s(x_0) = \beta x_0$ должно быть равно $c\tau$: $t'_{s1} = \tau$, а прямая, проходящая через начало координат параллельно прямой a_1b_1, — это и есть ось x'. Все события, лежащие на этой оси, соответствуют моменту времени $t' = 0$. Поэтому значение координаты x' в точке пересечения прямой $x_a(x_0) = \lambda/2\gamma + \beta x_0$ и оси x' равно $\lambda/2$.

Отметим, что мировая линия сигнала во всех инерциальных системах координат является *биссектрисой угла* между временной и пространственной осями. Действительно, угол $b_1s_0a_1$ — прямой и $s_1b_1 = s_1a_1$. Поэтому точка s_1 является центром окружности, проходящей через точки b_1, s_0, a_1. Следовательно, $s_1s_0 = s_1a_1$ — треугольник $s_1s_0a_1$ — равнобедренный.

1.2.4. Замедление времени. Пусть в середине стержня находятся часы, фиксирующие моменты времени кратные интервалу τ: $t'_{s0} = 0$, $t'_{s1} = \tau$, ... В системе K точно такие же часы также отмечают моменты времени $t_{m0} = 0$, $t_{m1} = \tau$, ... , соответствующие событиям m_0, m_1, ... Мировые линии часов $x_s(x_0) = \beta x_0$, $x_m(x_0) = 0$. Рассмотрим два события $s_0(0, 0)$ и $s_1(\tau, 0)$ в системе K', соответствующие двум показаниям часов. Уже на рис. 1.2.1 видно, что с точки зрения наблюдателя в системе K движущиеся часы отстают: $t_{s1} > t_{m1} = \tau$ — событие s_1 произошло позже события m_1. Подставляя координаты $t'_{s1} = \tau$, $x'_{s1} = 0$ события s_1 в (1.2.1) получим $t_{s1} = \gamma\tau > \tau$.

Аналогичный вывод сделает наблюдатель в системе K': с его точки зрения отстают часы в системе K. Рассмотрим два события $m_0 = s_0$ и $m_1(\tau,0)$ в системе К, соответствующих двум показаниям часов. В системе K' временная координата события m_1 — точка ct'_{m1} пересечения оси x'_0 и прямой, проходящей через точку m_1 параллельно оси x'. Из рис. 1.2.1 видно, что $t'_{m1} > t'_{s1} = \tau$ — событие m_1 произошло позже события s_1. Полагая в (1.2.2) $t_{m1} = \tau$, $x_{m1} = 0$, получим $t'_{m1} = \gamma\tau > \tau$. Эти утверждения не противоречат друг другу: *всегда отстают те часы, которые движутся относительно другой инерциальной системы отсчета.*

Пример 1.2.3. В 1937 г. в космических лучах были обнаружены нестабильные элементарные заряженные частицы — *мюоны* (устаревшее название — μ-мезоны, от греч. *mesos* — средний) массой равной 207 массам электрона. Время жизни мюона $\tau = 2{,}2$ мкс. Если в момент времени $t = 0$ число неподвижных мюонов равно N_0, то через 2,2 мкс половина из них распадется, рождая электрон и два нейтрино. Половина оставшихся мюонов распадается в следующие 2,2 мкс и т. д. Следовательно, в момент времени t останется $N(t) = N_0(1/2)^{t/\tau}$ мюонов.

Рассмотрим мюоны, образовавшиеся на высоте $H = 60$ км в момент времени $t_1 = 0$. Одна восьмая часть от их общего числа достигают поверхности Земли. Предположим, что все мюоны летят вертикально вниз с одинаковой скоростью. Найдем время полета мюонов t_2 по часам наблюдателя, находящегося на Земле, и величину скорости мюонов u. В системе отсчета, связанной с движущимися мюонами, прошло время t_2', в течение которого осталась одна восьмая часть от общего числа: $N(t_2') = N_0/8$ или $t_2' = 3\tau$. Согласно Эйнштейну в системе K соответствующий интервал времени $t_2 = \gamma t_2'$, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$. Поскольку $H = ut_2$, то из уравнения $H/u = 3\tau(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ находим $u = cH[(3\tau c)^2 + H^2]^{-1/2} \approx c$. Время полета $t_2 = [(3\tau)^2 + (H/c)^2]^{1/2} \approx$ $\approx H/c = 200$ мкс.

Движущиеся мюоны распадаются медленнее неподвижных мюонов. Если бы ход времени во всех системах отсчета был бы одинаков, то время полета до поверхности Земли соответствовало бы $t_2/\tau \approx 90$ периодам полураспада. После 90 периодов осталась бы лишь $N(t_2)/N_0 = (1/2)^{90} \approx (10)^{-27}$ часть от первоначального числа мюонов (мы учли, что $2^{10} \approx 10^3$).

1.2.5. Лоренцево сокращение. Длина стержня в системе K представляет собой модуль разности координат в один и тот же момент времени: $l = |x_a(x_0) - x_b(x_0)|$. Из (1.2.4) находим, что $l = \lambda/\gamma < \lambda$. Следовательно, *стержень короче линейки.*

Найдем теперь длину линейки в системе K'. Используя (1.2.1), преобразуем уравнения мировых линий точек k и n линейки в системе K в уравнения мировых линий в системе координат K': так как $x_k(x_0) = \lambda/2$, $x_n(x_0) = -\lambda/2$, то

$$x'_k\left(x'_0\right) = \frac{\lambda}{2\gamma} - \beta x'_0,\ x'_n\left(x'_0\right) = -\frac{\lambda}{2\gamma} - \beta x'_0, \qquad (1.2.5)$$

искомая длина $l' = x'_k - x'_n = \lambda/\gamma = \lambda\sqrt{1-\beta^2} < \lambda$: линейка короче стержня.

Таким образом пространство и время неразрывно связаны между собой. «Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратится в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих, должен еще сохранить самостоятельность» — заметил немецкий математик Г. Минковский.

1.2.6. Калибровка единиц масштабов собственных времени и длины. Можно убедиться в том, что при преобразовании Лоренца остается неизменной, т. е. сохраняется в любой инерциальной системе величина s_{12}, называемая *интервалом* между событиями с координатами (ct_1, x_1) и (ct_2, x_2):

$$s_{12} = \sqrt{(ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2}.$$

Рассмотрим два события с координатами (0, 0) и (ct, x). Тогда должно выполнятся равенство

$$(ct)^2 - (x)^2 = (ct')^2 - (x')^2. \qquad (1.2.6)$$

Доказательство следует после подстановки соотношений

$$ct - x = k(ct' - x'),\ ct + x = \frac{1}{k}(ct' + x'),\ k = (1-\beta)\gamma = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}},$$

полученных из (1.2.1).

Математическое выражение, остающееся неизменным при определенном преобразовании переменных, называется *инвариантом* (от фр. *invariant* — неизменяющийся). В случае мюонов, рассмотренных в примере 1.2.3, координаты второго события в системах K и K' соответственно равны (ct_2, H) и $(ct_2', 0)$. Следовательно, $(ct_2)^2 - H^2 = (ct_2')^2$.

Инвариантность интервала можно использовать для калибровки масштабов: задавая эталоны единиц времени и длины в одной инерциальной системе, получим те же единицы масштаба в любых инерциальных системах.

А. Постоим кривую — гиперболу h_t на рис. 1.2.2, задаваемую уравнением $x_0^2 - x^2 = (c\tau)^2$. Гипербола пересекает ось x_0 в точке m_1 при значениях $x_0 = c\tau$, $x = 0$. Поскольку интервал — инвариант, то $x_0'^2 - x'^2 = (c\tau)^2$. Гипербола пере-

секает ось x_0' в точке s_1 при значении $x' = 0$, $x_0' = c\tau$ (сравните рис. 1.2.1 и 1.2.2). Следовательно, гипербола h_t — геометрическое место единиц времени на временных осях любой инерциальной системы.

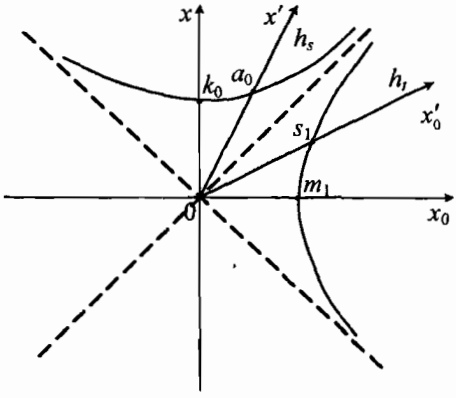


рис. 1.2.2

Отметим, что мировые кривые всех реальных событий могут находится только в области $x_0^2 - x^2 > 0$. В этой области нельзя выбрать такую систему отсчета, где бы какое-нибудь событие происходило «до» события O. Эту область можно назвать «абсолютно будущей» по отношению к событию О. Отрезок Os_1 является единицей масштаба времени в системе K'.

Б. Постоим кривую — гиперболу h_s на рис. 1.2.2, задаваемую уравнением $x_0^2 - x^2 = -(c\tau)^2$. Гипербола пересекает ось x в точке k_0 при значениях $x_0 = 0$, $x = c\tau = \lambda/2$. Поскольку $x_0'^2 - x'^2 = -(c\tau)^2$, то гипербола пересекает ось x' в точке a_0 при значениях $x_0' = 0$, $x' = c\tau = \lambda/2$ (сравните рис. 1.2.1 и 1.2.2). Отрезок Oa_0 является единицей масштаба длины в системе K'.

Пример 1.2.4. Эксперимент Майкельсона. Проведем анализ с точки зрения теории относительности. Поскольку скорость света во всех инерциальных системах отсчета равна c, то в системе покоя прибора K' разность хода лучей, соответствующих траекториям $M_0M_1M_0$ и $M_0M_2M_0$ на рис. 1.1.1, равна нулю. Найдем теперь разность хода в системе отсчета K, в которой прибор движется со скоростью $\vec{u} = (u, 0, 0)$. Согласно теории длина плеча M_0M_1 равна $l = \lambda/\gamma$. Пусть t_{01}, t_{10} — интервалы времени, в течение которых сигнал распространяется по траекториям M_0M_1 и M_1M_0. Тогда имеем два уравнения $l + ut_{01} = ct_{01}$, $l - ut_{10} = ct_{10}$, из которых находим $l_1 = c(t_{01} + t_{10})$, $l_1 = 2\lambda\gamma$. Для вычисления оптической длины l_2 представим траекторию $M_0M_2M_0$ в системе K (рис. 1.2.3). В этом случае $(ct_2/2) = (ut_2/2) + \lambda^2$, $l_2 = ct_2 = 2\lambda\gamma$. Разность хода $l_2 - l_1 = 0$.

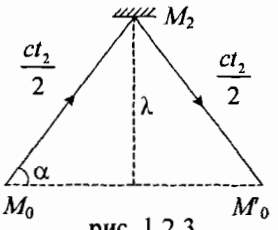


рис. 1.2.3

1.2.7. Релятивистские парадоксы. Непривычные следствия теории относительности приобретают, как правило, форму парадоксов и противоречат здравому смыслу. Но, тем не менее, эти «парадоксы» соответствуют реальным явлениям природы. От теории требуется только то, чтобы она описывала наблюдаемые явления. Здравый смысл, говорил Эйнштейн, «это тот пласт предрассудков, который мы накапливаем до 16 лет. «Здравый смысл» современного поколения физиков опирается на теорию относительности.

Рассмотрим известный парадокс шеста и сарая. Шест длиной $\lambda = 20$м движется со скоростью $v = c\sqrt{3}/2$ относительно системы К. Поскольку $\gamma = 2$, то в системе K его длина $l = \lambda/\gamma = 10$м. Тогда в некоторый момент времени он целиком помещается в сарае длиной $s = 10$м. Однако в системе K', связанной с шестом, длина сарая равна $s' = 5$м. Как же может оказаться 20-метровый шест в 5-метровом сарае?

Подобные парадоксы легко разрешаются, если вспомнить другие следствия теории. В задаче рассматриваются четыре события, связанные с точками a, b, k, n шеста ab и линейки kn, концы которой определяют границы сарая. В системе К имеем $x_a(x_0) = \beta x_0 + \lambda/2\gamma$, $x_b(x_0) = \beta x_0 - \lambda/2\gamma$, $x_k(x_0) = s/2$, $x_n(x_0) = -s/2$.

Пусть события a, k и b, n одновременны в системе K: $(0, x_a(0)$, $(0, x_k(0)$, $(0, x_b(0)$, $(0, x_n(0)$. Тогда в системе K' они не будут одновременными и поставленный вопрос не имеет смысла. В этом легко убедиться, изобразив в системе К′ мировые линии концов шеста $x_a'(x_0') = \lambda/2$, $x_b'(x_0') = -\lambda/2$ и мировые линии границ сарая (1.2.5): $x_k'(x_0') = -\beta x_0' + s/2\gamma$, $x_n'(x_0') = -\beta x_0' - s/2\gamma$.

1.2.8. Фотографирование стержня. Измерение длины стержня — процедура, не связанная с фотографированием стержня. Когда мы видим или фотографируем какое-нибудь тело, мы регистрируем излучение, одновременно пришедшее к сетчатке или к фотопленке. Пусть на концах стержня a и b находятся источники света. Если наблюдатель, находящийся в начале координат системы отсчета K, видит стержень в момент времени t_0, то на фотографии получится «искаженное» изображение, поскольку стержень занимал различные положения, когда источники a и b излучили волны, одновременно достигшие фотопленки.

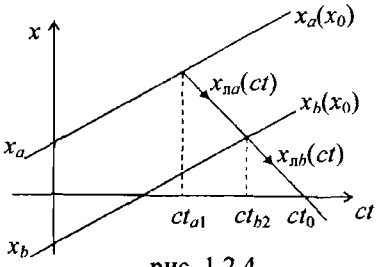


рис. 1.2.4

На рис. 1.2.4 изображены мировые линии источников и двух лучей $x_{\text{л}a}(ct)$ и $x_{\text{л}b}(ct)$: первый испущен источником a в точке $x_a(ct_{a1})$ в момент времени t_{a1}, второй — источником b в точке $x_b(ct_{b2})$ в момент времени t_{b2}:

$$x_{\text{л}a}(ct) = x_a(ct_{a1}) - c(t - t_{a1}), \quad x_{\text{л}b}(ct) = x_b(ct_{b2}) - c(t - t_{b2}),$$

где $x_a(ct_{a1}) = \lambda/2\gamma + ut_{a1}$, $x_b(ct_{b2}) = -\lambda/2\gamma + ut_{b2}$. Наблюдаемая длина стержня d равна разности оптических длин $c(t_0 - t_{a1}) = x_a(ct_{a1})$, $c(t_0 - t_{b2}) = x_b(ct_{b2})$ лу-

чей a и b: $d = c(t_{b2} - t_{a1})$. Две волны падают на фотопленку одновременно, если $x_{na}(ct_0) = x_{nb}(ct_0)$. Из этого уравнения получим $0 = \lambda/\gamma - (u + c)(t_{b2} - t_{a1})$. Следовательно, видимый размер стержня $d = \lambda/[\gamma(1 + u/c)] = l/(1 + u/c)$ окажется даже меньше, чем длина стержня, измеренная в системе K. Если стержень приближается к фотографу, то видимый размер стержня $l/(1 - u/c)$.

Пример 1.2.5. Релятивистский эффект Доплера. Пусть из точки s стержня посылается серия световых сигналов к наблюдателю, находящемуся в начале координат системы K. В системе K' световые импульсы излучаются с частотой $\nu' = 1/\tau$ в моменты времени $t'_1 = -\tau$, $t'_0 = 0$, $t'_2 = \tau$, ... , которым в системе K соответствуют моменты времени $t_1 = \gamma t'_1 = -\gamma\tau$, $t_0 = 0$, $t_2 = \gamma\tau$, ... (рис. 1.2.5). Наблюдатель фиксирует приход сигналов в моменты времени t_{L1}, $t_0 = 0$, , t_{L2},.... Найдем интервал времени $T = t_{L2} - 0 = t_{L3} - t_{L2}$, ... между моментами приходов сигналов к наблюдателю от удаляющегося источника.

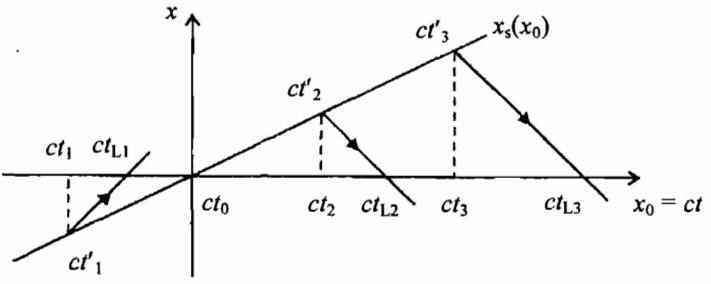


рис. 1.2.5

Мировая линия излучателя $x_s(ct) = \beta ct$, мировая линия сигнала, испущенного в момент времени t_2, представляет собой прямую линию $x(ct) = x_s(ct_2) - c(t - t_2)$. Мировая линия наблюдателя $x_m(ct) = 0$. Из уравнения $x(ct_{L2}) = 0$ находим $t_{L2} = (1 + \beta)\gamma\tau$. Частота принимаемых сигналов $\nu = \nu'/[(1 + \beta)\gamma]$. При $\beta = 0{,}8$ имеем $\nu = \nu'/3$. В случае движения со скоростью $u << c$, $\nu \approx \nu'(1 - \beta)$.

Частота волны, принимаемой от источника, приближающегося к наблюдателю, равна $\nu'/[(1 - \beta)\gamma]$. При $u << c$, $\nu \approx \nu'(1 + \beta)$.

1.2.9. Движение со сверхсветовой скоростью. В настоящее время в научной литературе продолжается обсуждение проблемы существования частиц, движущихся со скоростью большей скорости света. Они получили название *тахионов* (от греч. *tachys* — быстрый). Анализ экспериментальных данных не позволяет пока говорить о реальности этих объектов. Обсудим, какие «сюрпризы» могут ожидать нас при встрече с тахионами.

Пусть наблюдатель в системе K' встретился с наблюдателем в системе K в момент времени $t = t' = 0$ и удаляется от него со скоростью u. Оба наблю-

дателя регистрируют положение тахиона, движущегося со сверхсветовой скоростью $u_m > c$. Рассмотрим два события: (t_a, $x_a = 0$) — встреча тахиона с наблюдателем в системе K и (t_b, x_b) — встреча тахиона с наблюдателем в системе K'. В момент времени t_a тахион излучил сигнал, который примет наблюдатель в системе K' в момент времени t'_1. Сравнивая информацию о состояниях тахиона в моменты времени t'_b и t'_1, он может сделать заключение о процессах перехода из одного состояния в другое в интервале $t'_b - t'_a$. С другой стороны, наблюдатель в системе K, приняв в момент времени t_2 сигнал, излученный тахионом в момент времени t'_b, получит свою информацию о тех же процессах, происшедших за интервал времени $t_b - t_a$. На рис. 1.2.6 изображены мировые линии наблюдателя $x_s(ct)$, тахиона $x_m(ct)$ и двух лучей $x_л(ct)$, $\bar{x}_л(ct)$:

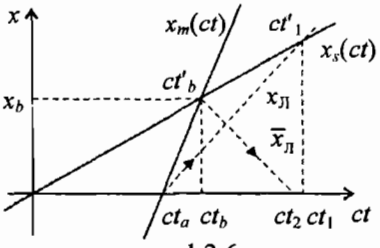


рис. 1.2.6

$$x_s(ct) = \beta ct, \quad \beta = u/c, \quad x_m(ct) = \beta_т c(t - t_a), \quad \beta_т = u_m/c,$$
$$x_л(ct) = c(t - t_a), \quad \bar{x}_л(ct) = x_s(ct_b) - c(t - t_b).$$

Из условия $x_s(ct_b) = x_m(ct_b)$ находим $t_b = t_a/(1 - u/u_m) > t_a$. Величину t_1 получим из условия $x_s(ct_1) = x_л(ct_1)$: $t_1 = t_a/(1 - u/c)$. Момент времени t_2 найдем из условия $\bar{x}_л(ct_2) = 0$: $t_2 = (1 + u/c)\, t_b = (1 + u/c)t_a/(1 - u/u_m)$. Поскольку $u < c < u_m$, то $t_1 > t_b$. Очевидно, что $t'_1 > t'_b$. Следовательно, с точки зрения наблюдателя в системе K тахион сначала пролетел мимо него (событие a), а потом мимо наблюдателя в системе K' (событие b). Наблюдатель в системе К′ сначала «увидит» событие b в момент времени t'_b, а потом событие a в момент времени t'_1. Мы приходим к выводу, очевидному из рис. 1.2.6, что хронологический порядок событий a и b будет различным для каждого из наблюдателей.

Предположим, что параметры, характеризующие состояние тахиона, удовлетворяют уравнению некоторого необратимого процесса. Если наблюдатель в системе K видит «старение» тахиона, то наблюдатель в системе К′ увидит обратную последовательность событий — тахион «молодеет». Причина и следствие меняются местами и появляется возможность влиять на прошлое — на уже реализовавшиеся события. По мнению некоторых физиков, это ограничивает область существования тахионов малыми интервалами пространства-времени, в которых строгая упорядоченность событий утрачивает свою универсальность. Другие ученые считают, что эту трудность можно обойти за счет более расширенной трактовки смысла причинно-следственной связи.

1.3. Релятивистские импульс и энергия

1.3.1. Энергия и импульс частицы. Эйнштейн ввел новые понятия — *релятивистскую энергию* E и *релятивистский импульс* $\vec{p}$ частицы, движущейся со скоростью v

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \ \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \qquad (1.3.1)$$

связанные соотношением

$$E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2. \qquad (1.3.2)$$

Для краткости термин релятивистский будем опускать. Энергия неподвижной частицы не обращается в нуль, а равна mc^2. Ее называют *энергией покоя*, а величину m — *массой покоя*, или просто *массой*. При $v << c$, $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx$ $\approx 1 + v^2/(2c^2)$. Из (1.3.1) получим $E \approx mc^2 + mv^2/2$, $\vec{p} \approx m\vec{v}$. По аналогии с ньютоновой механикой величину $T = E - mc^2$ называют *кинетической энергией*.

Законы ньютоновой механики выполняются при нерелятивистских энергиях $T << mc^2$. Частицу, энергия которой удовлетворяет условию $T >> mc^2$ называют ультрарелятивистской. Например, скорость электрона с энергией $T = 51$ ГэВ меньше скорости света лишь на 1,5 см/с.

1.3.2. Преобразование энергии и импульса. Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся относительно друг друга в направлении оси x со скоростью u. Энергия и импульс частицы в системе K' соответственно равны $E' = mc^2\gamma'$, $\vec{p}' = m\vec{v}'\gamma'$, $\gamma' = [1 - (v'/c)^2]^{-1/2}$. Введем обозначение $\gamma_L = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$. Подставляя $\vec{v}$ из (1.2.3), получим $\gamma_L = (1 + uv'_x/c^2)\gamma\gamma'$,

$$E = mc^2\gamma_L = mc^2\gamma(1 + uv'_x/c^2)\gamma', \ \vec{p} = m\vec{v}\,\gamma_L = m\gamma(\vec{u} + \vec{v}')\gamma'.$$

Из этих соотношений следует, что закон преобразования величин $(E, \vec{p})$ и $(E', \vec{p}')$, измеренных в системах K и K', имеет форму (1.2.1):

$$E = \gamma(E' + c\beta\, p'_x),$$

$$p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{\beta E'}{c}\right), p_y = p'_y, p_z = p'_z. \qquad (1.3.3)$$

Таким образом, энергия и импульс зависят от выбора системы отсчета. Однако существует величина, которая имеет абсолютный смысл. Подставляя (1.3.3) в (1.3.2), мы получим соотношение

$$E^2 - (pc)^2 = E'^2 - (p'c)^2 = (mc^2)^2,$$

из которого следует, что масса одинакова во всех системах отсчета. Физик-теоретик скажет, что масса является *инвариантом*, т. е. величиной, не изменяющейся при некоторых математических преобразованиях.

Сделаем важное замечание. Означает ли утверждение об эквивалентности массы и энергии, что они сходны по существу? Нет, не означает. Масса — инвариант, энергия — динамическая характеристика состояния частицы совсем другой природы; она зависит от выбора системы отсчета. Взаимосвязь массы и энергии имеет смысл только в системе покоя частицы.

По этой причине понятие «массы» $\frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, зависящей от скорости, лишено какого-либо содержания.

Пример 1.3.1. Два протона движутся навстречу друг другу со скоростями $\vec{v}_1 = (-v_0, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (v_0, 0, 0)$. Найдем относительную скорость v_R, исходя из инвариантности величины $E_1E_2 - c^2\,\vec{p}_1\vec{p}_2 = \text{const}$.

Левую часть можно вычислить в исходной лабораторной системе, полагая

$$E_1 = \gamma_0 mc^2,\quad p_1 = -\gamma_0 mv_0,\quad E_2 = \gamma_0 mc^2,\quad p_2 = \gamma_0 mv_0,$$
$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}},\qquad \beta_0 = \frac{v_0}{c},$$

и в системе покоя первого протона, в которой

$$E_1' = mc^2,\ \vec{p}_1' = 0,\ E_2' = \gamma_R mc^2,\ p_2' = \gamma_R mv_R,$$
$$\gamma_R = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_R^2}},\qquad \beta_R = \frac{v_R}{c}.$$

Приравнивая эти выражения, получим уравнение $\gamma_0^2(1+\beta_0^2) = \gamma_R$, из которого, в соответствии с результатом, полученном в примере 1.2.1 находим $v_R = 2v_0/[1 + (v_0/c)^2]$.

1.4. Масса системы частиц

1.4.1. Масса невзаимодействующих частиц. Рассмотрим две невзаимодействующие частицы, массы которых m_1 и m_2. Энергия и импульс этой системы $E = E_1 + E_2$, $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. После подстановки E и $\vec{p}$ в (1.3.1) можно говорить о составной частице массой M, движущейся со скоростью $\vec{u} = c^2\,\vec{p}/E$, равной скорости центра масс двух частиц. В соответствии с (1.3.2) инвариантную массу найдем из соотношения

$$(Mc^2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2c^2. \qquad (1.4.1)$$

Значение массы M одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

1.4.2. Масса системы взаимодействующих частиц. Рассмотрим сначала систему, состоящую из двух частиц, например атом водорода массой M. В системе покоя атома сумма импульсов протона и электрона равна нулю. Энергия покоя атома $Mc^2 = E_1 + E_2 + W$, где $E_n = m_nc^2 + T_n$ — полная энергия, ($n = 1,2$), W — потенциальная энергия взаимодействия. Следовательно,

$$M = m_1 + m_2 - E_{\text{св}}/c^2. \qquad (1.4.2)$$

Постоянная величина $E_{\text{св}} = -(T_1 + T_2 + W)$ называется *энергией связи*.

Масса ядра. Соотношение (1.4.2) имеет общий характер. В случае ядра элемента ${}^{A}_{Z}G$, имеющего Z протонов $A–Z$ нейтронов, масса ядра

$$M(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - E_{св}(Z, A)/c^2. \qquad (1.4.3)$$

Мы видим, что масса системы не равна сумме масс составляющих ее частицы. Величина $\Delta M = Zm_p + (A - Z)m_n - M(Z, A)$ называется *дефектом массы*, $\Delta M = E_{св}(Z, A)/c^2$. Вычисление энергии связи, основанное на анализе различных моделей систем многих частиц, важнейшая задача ядерной физики. Соотношение (1.4.3), определяющее массу составной частицы, представляет собой одно из фундаментальных следствий теории относительности.

Рассмотрим два примера.

1. Энергия связи атома водорода в основном состоянии $E_{св}$ = 13,6 эВ. Следовательно, масса атома водорода меньше суммы масс протона и электрона на величину $\Delta M = 2{,}34 \cdot 10^{-35}$ кг.

2. Дейтрон ${}^{2}_{1}H$ массой m_D = 2,014 а.е.м., образованный протоном и нейтроном, имеет одно связанное состояние. Энергия покоя протона m_pc^2 = 938,28 МэВ, нейтрона — m_nc^2 = 939,57 МэВ. Поскольку атомная единица массы (а.е.м.) равна 931,5016 МэВ/c^2, то $\Delta Mc^2 = (m_p + m_n)c^2 - m_Dc^2 =$ = 2,24 МэВ. Следовательно, энергия связи дейтрона $E_{св} = \Delta Mc^2$ = 2,24 МэВ.

Образование дейтрона. В свободном состоянии полная энергия протона и нейтрона $E > 0$. Полная энергия дейтрона $E = -E_{св} < 0$. Поскольку переход в связанное состояние должен подчиняться закону сохранения энергии, то образование дейтрона возможно только при потере части энергии. Действительно, этот процесс сопровождается испусканием γ кванта с энергией 2,24 МэВ.

Задача 1.4.1. Атом углерода ${}^{12}_{6}C$ содержит 6 протонов, 6 нейтронов и 6 электронов, а атом кислорода ${}^{16}_{8}O$ — 8 протонов, 8 нейтронов и 8 электронов. До 1960 г. атомной единицей массы являлась 1/16 массы ${}^{16}_{8}O$. Почему принятая сейчас а.е.м. отличается от прежней ?

1.5. Рождение новых частиц

В 1933 г. было открыто явление, потрясшее ученый мир: из свинцовых пластинок толщиной 1-3 см, установленных в камере Вильсона, вылетали электроны и позитроны. Исследователи впервые наблюдали рождение нового вещества в конечной стадии процесса, получившего название *космического ливня.* Механизм ливня запускается потоком протонов из космоса. При взаимодействии протона с молекулами воздуха в верхних слоях атмосферы рождаются практически все известные элементарные частицы. Эти вторичные частицы порождают новые поколения, число которых растет в геометрической прогрессии. Площадь поверхности Земли, захваченная ливнем, достигает 100–1000 м^2.

Вычисление массы (1.4.1) позволяет найти критерий, определяющий возможность рождения новых частиц.

1.5.1. Распад частицы. Рассмотрим распад частицы массы M на две частицы масс m_1 и m_2. В системе центра масс K_0, в которой частица массы M неподвижна, законы сохранения энергии и импульса имеют вид $Mc^2 = E_{10} + E_{20}$, $0 = \vec{p}_{10} + \vec{p}_{20}$. Положим $\vec{p}_{20} = -\vec{p}_{10} = \vec{p}_0$ и перейдем в (1.4.1) к системе K_0. В результате найдем

$$M = (m_1^2 + p_0^2/c^2)^{1/2} + (m_2^2 + p_0^2/c^2)^{1/2}.$$

Очевидно, что распад возможен при условии $M \geq m_1 + m_2$.

1.5.2. Рождение частиц при столкновениях. Рассмотрим процесс рождения частиц массами m_a, m_b, ... при столкновении двух частиц масс m_1 и m_2. Если рождаются две частицы масс m_1 и m_2, то процесс столкновения называется *упругим*. При *неупругих* столкновениях могут рождаться и новые частицы.

Законы сохранения энергии и импульса

$$E_1 + E_2 = E_a + E_b + \ldots, \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_a + \vec{p}_b + \ldots \qquad (1.5.1)$$

выполняются независимо от характера столкновений. Наша задача — найти необходимые условия для реализации рассматриваемой реакции.

Определим инвариантную массу системы M соотношением (1.4.1). Две частицы можно рассматривать как сложную систему массой M, которая движется со скоростью $\vec{u} = c^2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)/(E_1 + E_2)$. Энергия этой частицы

$$E_1 + E_2 = Mc^2\gamma, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}.$$

В системе центра масс (с. ц. м.) $\vec{p}_{20} = -\vec{p}_{10} = \vec{p}_0$. Энергия частиц $E_{10} + E_{20} = Mc^2$ представляет собой инвариант. Кинетическая энергия в с. ц. м. $T_0 = Mc^2 - (m_1 + m_2)c^2$.

Отметим, что в нерелятивистском приближении $m_1^2c^2 << p_0^2$, $m_2^2c^2 << p_0^2$ получим $Mc^2 \approx (m_1 + m_2)c^2 + T_m$, $T_m = p_0^2/2\mu$, где $1/\mu = (1/m_1 + 1/m_2)$; величина μ называется приведенной массой, $\vec{p}_0 = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$.

Учитывая (1.4.1), (1.5.1), заключаем, что при рождении новых частиц должно выполняться неравенство

$$M \geq m_x, \qquad m_x = m_a + m_b + \ldots . \qquad (1.5.2)$$

Из (1.5.2) можно найти значение пороговой энергии, т. е. наименьшее значение кинетической энергии сталкивающихся частиц, при котором рождаются частицы общей массой m_x. При $M = m_x$ все родившиеся частицы неподвижны в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{u}$.

Пример 1.5.1. А. Столкновение с неподвижной мишенью. Если вторая частица покоится, то в лабораторной системе отсчета $E_2 = m_2c^2$, $\vec{p}_2 = 0$, $E_1 = m_1c^2 + T_L$. Учитывая (1.4.1), получим значение инвариантной массы

$$M = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 2m_2T_L/c^2} \geq m_a + m_b + \ldots, \qquad (1)$$

удовлетворяющее неравенству (1.5.2), из которого находим

$$T_L \geq T_{L\text{пор}}\,,\; T_{L\text{пор}} = \frac{c^2}{2m_2}\,[(m_a + m_b + ...)^2 - (m_1 + m_2)^2]. \qquad (2)$$

Напомним, что Mc^2 представляет собой сумму энергий частиц в системе центра масс.

Вычислим, например, пороговую энергию в реакции рождения пары протон–антипротон при столкновении двух протонов: $p + p = 3p + \bar{p}$. В этом случае массы всех частиц одинаковы и равны массе протона m_p. Из (2) находим $T_{L\text{пор}} = 6m_pc^2$. Подставляя значение $m_pc^2 = 0{,}938$ ГэВ, получим $T_{L\text{пор}} = 5{,}628$ ГэВ. При значении $T_L = T_{L\text{пор}}$ масса сталкивающихся протонов $M = 4m_p$.

Б. Столкновение встречных пучков. Рассмотрим столкновение одинаковых частиц, импульсы которых удовлетворяют условию $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. Полагая в (1.4.1) $m_1 = m_2 = m$, $E_1 = E_2 = mc^2 + T_0$, получим значение массы $M = 2(m + T_0/c^2)$. Из условия рождения новых частиц (1.5.2) следует неравенство

$$M = 2\left(m + \frac{T_0}{c^2}\right) \geq m_a + m_b + ... \rightarrow T_0 \geq T_{0\text{пор}}\,,$$

$$T_{0\text{пор}} = [\frac{1}{2}(m_a + m_b + ...) - m]c^2. \qquad (3)$$

Следовательно, вся кинетическая энергия пучков переходит в энергию образовавшихся новых частиц. В случае реакции рождения пары протон–антипротон получим критерий рождения $T_0 \geq T_{0\text{пор}} = m_pc^2 = 0{,}938$ ГэВ. При значении $T_0 = T_{0\text{пор}}$ инвариантная масса $M = 4m_p$. Таким образом, для рождения четырех частиц в первом случае необходимо разогнать один протон до энергии $T_L = 6m_pc^2$, а во втором — каждый протон до энергии $T_0 = m_pc^2$. Выигрыш энергии очевиден, поскольку в первом случае энергия $4m_pc^2$ бесполезно переходит в энергию центра масс системы и в процессе взаимодействия протонов не изменяется.

Антипротон был рожден в 1955 г. на ускорителе с энергией 6,3 ГэВ в Беркли (Нобелевская премия, 1959 г.).

Пример 1.5.2. Рассмотрим столкновение частиц равных масс $m_1 = m_2 = m_0$. Пусть кинетическая энергия первой частицы, взаимодействующей с неподвижной мишенью, равна T_L. Полная энергия частиц в системе центра масс (с ц. м.) равна $[(2m_0c^2)^2 + 2m_0c^2T_L]^{1/2}$. В ускорителе на встречных пучках кинетическая энергия каждой частицы равна T_0. В этом случае полная энергия частиц в с. ц. м. равна $2(m_0c^2 + T_0)$. Приравнивая полные энергии частиц в с. ц. м., получим уравнение $2(m_0c^2 + T_0) = [(2m_0c^2)^2 + 2m_0c^2T_L]^{1/2}$, из которого найдем значение энергии частицы $T_L = T_{L0}$, $T_{L0} = 4T_0 + 2T_0^2/m_0c^2$, взаимодейст-

вующей с неподвижной мишенью при условии, что оба ускорителя имеют равные возможности порождать новые частицы.

Мы получили чрезвычайно важный результат. Для нерелятивистских частиц ($T_0 << mc^2$) выигрыш незначителен: $T_L \approx 4T_0$. В ньютоновой механике всегда $T_L = 4T_0$, т.е. возможен лишь четырехкратный выигрыш в энергии при использовании встречных пучков частиц. В релятивистском случае, когда $T_0 >> mc^2$, получаем существенное увеличение энергии: $T_L \approx 2T_0^2/(mc^2) >> 4T_0$.

Самый мощный в мире ускоритель «Тэватрон» Фермиевской национальной ускорительной лаборатории длиной 27 км (FNAL, Батавия, США) разгоняет с 1983 г. встречные пучки протонов и антипротонов до энергии 1 ТэВ (1ТэВ = 10^{12} эВ). Поскольку масса протона m_p = 938,2796 *М*эВ/с^2, то этот ускоритель эквивалентен обычному с энергией одного пучка $T_L \sim 2\cdot 10^3$ ТэВ.

В космических лучах крайне редко наблюдали события, обусловленные протонами с рекордными энергиями $T_L = 3\cdot 10^8$ ТэВ. Для достижения этого предела протоны на ускорителе со встречными пучками должны иметь энергию $T_0 = \sqrt{T_L m_p c^2 / 2}$, T_0 = 374 ТэВ!

Отметим также, что T_{L0} представляет собой кинетическую энергию относительного движения T_R одного протона в системе покоя другого протона. Действительно, поскольку $T_0 = m_0c^2(\gamma_0 - 1)$, то учитывая полученное в примере 1.3.1 соотношение $\gamma_0^2(1 + \beta_0^2) = \gamma_R$, находим

$$T_R = m_0c^2(\gamma_R - 1) = 2m_0c^2(\gamma_0^2 - 1) = 4T_0 + 2T_0^2/m_0c^2.$$

Задача 1.5.3. Для того чтобы лучше понять смысл новых непривычных понятий, вернемся к задаче 6.8.1 из раздела «Механика». Рассмотрим упругое центральное столкновение частицы массой m_1 с неподвижной частицей массой m_2. Интересно сопоставить полученные результаты с известными и получить новую информацию о кинематике рассеяния релятивистских частиц.

Пусть энергии и импульсы частиц до и после рассеяния соответственно равны E_1, $\vec{p}_1 = (p_1, 0, 0)$, $E_2 = m_2c^2$, $\vec{p}_2 = 0$, E_1', $\vec{p}_1' = (p_1', 0, 0)$, E_2', $\vec{p}_2' = (p_2', 0, 0)$. Наша задача — найти кинетические энергии $T_1' = E_1' - m_1c^2$ $T_2' = E_2' - m_2c^2$ частиц после рассеяния.

Из законов сохранения энергии и импульса получим два уравнения

$$E_1 + m_2c^2 = E_1' + E_2', \qquad p_1 = p_1' + p_2'.$$

Исключая из этой системы E_1', p_1', последовательно находим

$$(E_1 - E_2')^2 - c^2(p_1 - p_2')^2 = (E_1' - m_2c^2)^2 - (cp_1')^2 \to c^2p_1p_2' = E_1E_2' - E_1'm_2c^2,$$

$$c^2p_1p_2' = (E_1 + m_2c^2)T_2' \to T_2' = 2m_2p_1^2/m^2, T_1' = T_1 - 2m_2p_1^2/m^2, \quad (1,2)$$

где $p_1^2 = T_1^2/c^2 + 2m_1T_1$, $m^2 = (m_1 + m_2)^2 + 2m_2T_1/c^2$. Здесь m — инвариантная масса системы.

Сравним (1), (2) с аналогичными соотношениями, полученными в примере ч. I, 6.8.1. В предельном случае малых энергий $T_1 << m_1c^2$, m_2c^2,

$p_1^2 \approx 2m_1T_1$, $m \approx m_1 + m_2$. Согласно классической механике при $m_1 << m_2$ легкая частица могла бы передать тяжелой частице энергию $T_2' \approx 4(m_1/m_2)T_1 << T_1$. Ситуация меняется в случае релятивистских энергий: если $T_1 >> m_2c^2$, m_1c^2, то $p_1^2 \approx T_1^2/c^2$, $m^2 \approx 2m_2T_1/c^2$, $T_2' \approx T_1$.

Пример 1.5.4. Происходит реакция $m_1 + m_2 \to m_1 + m_2'$: неупругое столкновение электрона массой m_1 с неподвижным атомом массой m_2. В результате абсолютно неупругого взаимодействия образуются электрон и возбужденный атом массой m_2'. Найдем величину m_2'.

Пусть E_1, $\vec{p}_1 = (p_1, 0, 0)$, $E_2 = m_2c^2$, $\vec{p}_2 = 0$, E_1', $\vec{p}_1' = (p_1', 0, 0)$, E_2', $\vec{p}_2' = (p_2', 0, 0)$ — энергии и импульсы частиц до и после рассеяния. Из закона сохранения энергии-импульса следует уравнение

$$(E_1 + m_2c^2)^2 - c^2p_1^2 = (E_1' + E_2')^2 - c^2(p_1' + p_2')^2. \qquad (1)$$

Поскольку столкновение абсолютно неупругое, то электрон и возбужденный атом неподвижны в системе центра масс, движущейся со скоростью $v = c^2p_1/(E_1 + m_2c^2)$. Следовательно, правая часть (1) равна $[(m_1 + m_2')c^2]^2$. Тогда из (1) находим

$$m_2' = [(m_1 + m_2)^2 + 2m_2T_1/c^2]^{1/2} - m_1.$$

В предельном случае малых энергий $T_1 << (m_1 + m_2)c^2$, $T_1 \approx m_1v^2/2$. Используя разложение бинома Ньютона $(1 + \varepsilon)^{1/2} \approx 1 + \varepsilon/2$, $\varepsilon << 1$, получим известный из классической теории результат:

$$m_2'c^2 \approx m_2c^2 + Q,\ Q = m_2T_1/(m_1 + m_2).$$

Второе слагаемое, равное приращению полной энергии атома, связано с приращением массы атома $m_2' - m_2 = Q/c^2$. Напомним, что когда вторая частица представляет собой макроскопическое тело, то величину Q называют приращением внутренней энергии тела (см. задачу ч. I, 6.6.4).

1.6. Релятивистская динамика

1.6.1. Уравнения движения заряженной частицы. Для того чтобы уравнения движения сохраняли свою форму при преобразовании Лоренца, второй закон Ньютона следует записать в виде (в СИ)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}(t,\vec{r}) + e\vec{v} \times \vec{B}(t,\vec{r}), \qquad (1.6.1)$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Очевидно, что при скоростях $v<<c$ уравнение (1.6.1) совпадает со вторым законом Ньютона. Кинетическая энергия частицы

$$T = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2 = mc^2[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1]$$

Найдем теперь закон изменения кинетической энергии. Вычислим производную $dT/dt = \vec{v}d\vec{p}/dt$ и подставим сюда величину $d\vec{p}/dt$ из (1.6.1). В результате получим

$$\frac{dT}{dt} = e\vec{v}\vec{E}\,. \tag{1.6.2}$$

Пример 1.6.1. Движение электрона в постоянном однородном электрическом поле. В этом случае $\vec{E}$ — постоянный вектор. Пусть $\vec{E} = (0, -E, 0)$ (см. рис. IV.1.2.4). Заряд электрона $e = -e_0$. Уравнения (1.6.1) приобретают вид

$$\frac{dp_x}{dt} = 0, \quad \frac{dp_y}{dt} = e_0 E, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0\,. \tag{1}$$

Найдем решение (1) при начальных условиях $\vec{r}\,(0) = 0$, $\vec{v}\,(0) = 0$. Из (1) получим

$$v_x = 0, \quad \frac{mv_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = e_0 Et, \quad v_z = 0. \tag{2}$$

Отсюда находим $v_x(t) = 0$, $v_z(t) = 0$, $v_y = v(t)$,

$$v(t) = \frac{c}{\sqrt{1+(mc/e_0 Et)^2}}\,. \tag{3}$$

Для значений t, удовлетворяющих условию $t \ll mc/e_0E$, получим знакомое выражение $v(t) \approx e_0Et/m$. Для большего промежутка времени $t \gg mc/e_0E$ имеем релятивистское приближение

$$v(t) \approx c[1-\frac{1}{2}\,(\frac{mc}{e_0Et})^2 + ...]. \tag{4}$$

Скорость частицы приближается к скорости света.

Найдем теперь скорость как функцию y-координаты. Из (1.6.2) получаем уравнение $T - e_0Ey = 0$, или в явной форме

$$mc^2[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1] - e_0Ey = 0. \tag{5}$$

Из (5) найдем скорость в точке $y = d$. Поскольку потенциал поля $\varphi(y) = Ey$, то разность потенциалов $V_0 = \varphi(d) - \varphi(0) = Ed$,

$$v(d) = \sqrt{\frac{2e_0V_0}{m}}\;\frac{\sqrt{1+e_0V_0/2mc^2}}{1+e_0V_0/mc^2}\,.$$

Очевидно, при $e_0V_0/(mc^2) \ll 1$ имеем $v(d) \approx (2e_0V_0/m)^{1/2}$: релятивистские эффекты несущественны (см. задачу IV.1.2.8). При значениях $e_0V_0/(mc^2) \gg 1$, $v(d) \approx c$.

Пример 1.6.2. Движение заряда в постоянном однородном магнитном поле. Из уравнения (1.6.2) следует, что сохраняется кинетическая частицы: $v^2 = \text{const}$. Поэтому уравнение (1.6.1) можно представить в виде (в СИ)

$$m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v}\times\vec{B} \qquad (1)$$

где $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$. Оно отличается постоянным множителем γ от соответствующего уравнения нерелятивистской теории (IV.3.1.4). Если начальная скорость $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ перпендикулярна вектору $\vec{B}$, то траектория частицы представляет собой окружность. Из (1) следует уравнение

$$m\gamma v^2/R = evB, \qquad (2)$$

где R-радиус окружности, $v = v_0$. Поскольку величина импульса $p = m\gamma v$, то $p = eBR$. Учитывая соотношения $p = m\gamma v$, $p = eBR$, $(\vec{p}c)^2 = T(T + 2mc^2)$, представим выражение (2) в терминах кинетической энергии

$$\sqrt{T(T+2mc^2)} = ceBR. \qquad (3)$$

Полагая в (2) $v = \omega R$, получим частоту вращения частицы по окружности

$$\omega = \frac{eB}{m\gamma} = \frac{eBc^2}{mc^2+T} \text{ или } \omega = \frac{\Omega}{1+T/mc^2}, \qquad (4)$$

где $\Omega = eB/m$. В практике ускорительной техники частоту связывают с радиусом орбиты:

$$\omega = \frac{c}{R}\frac{\sqrt{T(T+2mc^2)}}{mc^2+T} \text{ или } \nu\,[\text{МГц}] = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{47{,}8}{R}\frac{\sqrt{T(T+2mc^2)}}{mc^2+T}.$$

Здесь T выражается в единицах МэВ.

Тест

1-2. На самом большом в мире линейном ускорителе встречных пучков (Stanford Linear Colliger, Стэнфорд, США, 1989 г.) электроны и позитроны приобретают кинетические энергии по 50 ГэВ.

1. Длина ускорителя l = 3,2 км. Длина ускорителя в системе отсчета, связанной с электронами или позитронами:

А. 3,2 см, **Б.** 16 см, **В.** 64 см, **Г.** 6,4 см, **Д.** 32 см.

2. Скорость электронов или позитронов меньше скорости света на величину:

А. 3 см/с, **Б.** 1,5 см/с, **В.** 5 см/с, **Г.** 1 км/с, **Д.** 200 км/с.

3. Величина скорости каждой из частиц, движущихся по оси x в противоположные стороны, равна 0,5с. Величина относительной скорости:

А. с/3, **Б.** 0,6 с, **В.** 0,01 с, **Г.** с/4, **Д.** 0,8 с.

4. Астронавт, движущийся со скоростью u = 0,5 с, наблюдает объект, обгоняющий его со скоростью v_0 = 0,5 c относительно корабля. Скорость объекта в неподвижной системе отсчета:

А. 0,2 с, **Б.** 0,5 с, **В.** 0,6 с, **Г.** 0,8 с, **Д.** с.

5. Система отсчета K' движется относительно системы отсчета K со скоростью $\vec{u} = (u, 0, 0)$, $u = 0{,}8\ c$. В системе K скорость частицы $\vec{v} = (0{,}5\ c, c\sqrt{3}/2, 0)$. Величина скорости частицы в системе K':

А. 0,5 с, **Б.** с, **В.** 0,8 с, **Г.** с√3/2, **Д.** 0,6 с.

6. Кинетическая энергия частицы массой m равна $T = 2mc^2/3$. Величина скорости частицы v:

А. 0,8 с, **Б.** с/3, **В.** 0,4 с, **Г.** с√3/2, **Д.** 0,6 с.

7. Неподвижная частица массы М распалась на две одинаковые частицы массой m = 0,3 М каждая. Величина скорости одной из частиц v:

А. с/3, **Б.** 0,8 с, **В.** 0,4 с, **Г.** с√3/2, **Д.** 0,6 с.

Часть VII. АТОМНАЯ ФИЗИКА

Глава 1. Начало квантовой механики

1.1. Открытие квантовой физики

1.1.1. Ультрафиолетовая катастрофа. Первый шаг на пути к самому революционному событию физики XX века — открытию квантовой механики — был сделан при изучении известного всем явления – изменения цвета тел при нагревании. При увеличении температуры от 550° до 1500°С максимум интенсивности излучения железного бруска сдвигается от красного до белого цвета. Спектральное распределение излучения $\Delta U/\Delta\nu = u_\nu(T)$ — плотность энергии в интервале частот между ν и $\nu+\Delta\nu$ — должно приближенно совпадать с распределением равновесного электромагнитного излучения, находящегося в тепловом равновесии со стенками замкнутой полости при температуре T (размерность $[u]$ = Дж · с/м^3). Такое излучение называют тепловым или *излучением черного тела.* При постоянной температуре замкнутая полость, в стенке которой имеется небольшое отверстие, ведет себя как черное тело.

Эксперименты позволили заключить, что при малых значениях ν функция $u_\nu(T) \sim \nu^2$; при увеличении ν резко возрастает, достигает максимума и спадает в области высоких частот. Экспериментально был установлен *закон смещения* — соотношение $T\lambda_m$ = const, между температурой тела T и длиной волны максимума интенсивности излучения λ_m. Классическая теория должна была обосновать результаты экспериментов.

В 1884 г. на основе термодинамики и электромагнитной теории света Больцман дал вывод закона Стефана (см. II 4.10). Следующий шаг сделал немецкий физик В. Вин в 1893 г. Он показал, что плотность распределения энергии излучения имеет вид $u_\nu(T)=\nu^3F(\nu/T)$, где $F(\nu/T)$ — неопределенная функция.

Закон смещения сразу же следует из закона Вина. Обозначим $x = \nu/T$, тогда $u_\nu(T) = \nu^3F(x)$. Условие максимума функции $u_\nu(T)$ приводит к уравнению $du_\nu/d\nu = 0 : 3\nu^2F(x) + (\nu^3/T)\ dF/dx = 0$ или $3F(x) + xdF/dx = 0$. Его решение имеет очевидно форму ν_m/T = const.

Из закона Вина следует также закон Стефана–Больцмана. Действительно, полная интенсивность излучения всего спектра в полупространство

$$J = 2\pi c\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{4\pi}\sin\theta\cos\theta\int_0^\infty d\nu\, u_\nu = (c/4)\int_0^\infty d\nu\,\nu^3F(\nu/T) = (cT^4/4)\int_0^\infty dx\,x^3F(x) \equiv \sigma T^4.$$

Для того чтобы найти функцию $F(\nu/T)$, нужно обратиться к какой-либо модели структуры вещества. В качестве простейшей модели атома можно выбрать осциллятор, поскольку свойства равновесного излучения не зависят от конкретных свойств вещества. Тогда классическая теория приводит к закону Рэлея–Джинса (1900 г.): $u_\nu(T)=8\pi\nu^2 k_Б T/c^3$, который хорошо согласуется с экспериментальными данными в области низких частот. Неограниченное возрастание этой функции в пределе больших частот получило название *ультрафиолетовой катастрофы*. Предпринимались многочисленные попытки устранить явную несостоятельность теории.

1.1.2. Квант энергии. 14 декабря 1900 г. немецкий физик Макс Планк представил работу, в которой ему удалось получить спектральное распределение плотности излучения, соответствующее экспериментальным данным:

$$u_\nu(T)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1},$$

где h — постоянная Планка. Для этого Планку пришлось сделать предположение, что полная энергия осциллятора может принимать значения, кратные целому числу наименьшей порции энергии ε_0. Величину ε_0 Планк назвал *квантом энергии* (от лат. *quantum* — сколько) и вычислил ее значение $\varepsilon_0 = h\nu_0$. Постоянная Планка

$$h = 6{,}626\cdot10^{-34}\ \text{Дж·с} = 4{,}14\cdot10^{-15}\ \text{эВ·с}.$$

Согласно Планку энергия осциллятора квантуется, т.е. принимает только дискретные (лат. *discretus* — прерывистый) значения $E_n = h\nu_0(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Если работа внешних сил $\delta A < h\nu_0$, то энергия осциллятора не изменится. Этот вывод противоречил основным представлениям ньютоновой механики и встретил возражения физиков. Поэтому сам Планк относился к своей теории весьма сдержанно: он надеялся, что будет найдено не столь революционное решение проблемы излучения.

Почему же мы не замечаем квантования энергии? Рассмотрим шарик массой m = 1 г, колеблющийся с частотой $\nu = \omega/2\pi$ = 1Гц. При амплитуде колебаний a = 1 см полная энергия $E = m\omega^2a^2/2 = 2\cdot10^{-6}$Дж = $1{,}25\cdot10^{13}$эВ. Приращение энергии на один квант составляет $h\nu/E \sim 3{,}3\cdot10^{-28}$ часть начальной энергии. Поэтому в процессах с участием макроскопических тел дискретность энергии не проявляется. Для атомов положение меняется. В этом случае энергия кванта одного порядка с полной энергией электрона E.

1.1.3. Квантовая теория теплоемкости. Квантовая концепция получила широкое признание в 1907 г. после выхода работы Эйнштейна, в которой он объяснил явление, казавшееся ранее непостижимым: молярная теплоемкость кристаллов, равная в области комнатной температуры для большинства твердых тел $C_\nu = 3R$, при «низких» температурах убывает $\sim T^3$.

Атомы совершают колебания в окрестности различных положений равновесия, соответствующих минимумам потенциальной энергии, зависящим от

электронных состояний молекулы. Пусть частота колебаний равна ν_0. При возбуждении колебаний атом должен поглотить энергию кратную целому значению $h\nu_0$. При достаточно высокой температуре, когда $k_Б T >> h\nu_0$, суммарная энергия равномерно распределяется по всем степеням свободы — на одну колебательную степень свободы атома приходится средняя энергия $E = k_Б T$. Поэтому при температурах $T >> T_D$, $T_D = h\nu_0/k_Б$ имеем $C_v \approx 3R$. Ситуация меняется, когда средняя энергия атома $k_Б T$ близка к $h\nu_0$. Теперь закон равнораспределения по энергиям нарушается. Если $kT << h\nu_0$, то практически все молекулы находятся в основном состоянии — вероятность возбуждения колебательных степеней свободы близка к нулю. В этом случае говорят, что колебательные степени свободы «заморожены». В области $T << T_D$ вероятность приращения энергии атома $\Delta E = h\nu_0$ убывает с уменьшением температуры. Уменьшение вероятности передачи энергии приводит к снижению теплоемкости. Например, алмаз подчиняется закону Дюлонга-Пти лишь при температурах, близких к 2000 К. Поэтому уже при комнатных температурах удельная теплоемкость составляет только четвертую часть классического предела.

1.1.4. Реликтовое излучение. В 1965 г. американские инженеры А. Пензиас и Р. Вилсон при отладке приемника радиотелескопа обнаружили источник помех в виде равномерно распределенного по небесной сфере излучения с максимумом интенсивности на длине волны $\lambda_m = 1{,}06$ мм (Нобелевская премия, 1978 г.). Свойства излучения хорошо согласуются с предложенной в 1946 г. американским физиком Г. Гамовым гипотезой, согласно которой электромагнитный фон представляет собой равновесное тепловое излучение остывшего огненного шара — нашей Вселенной, возникшей 13,7 млрд лет назад в момент Большого Взрыва. Согласно Планку постоянная в законе Вина const = 0,2897 К·см. Следовательно, максимум интенсивности соответствует излучению тела с температурой $T = 0{,}2897(\text{К·см})/\lambda_m = 2{,}725$ К. Позднее обнаружили эффекты, связанные с движением Солнечной системы относительно фона реликтового (от лат. *relictus* — оставленный) излучения. Оказалось, что Солнце движется в направлении созвездия Льва.

Но самые сенсационные открытия связаны с измерением спектра и обнаружением поляризации реликтового излучения. Запущенный в июне 2001 г. американский зонд MAP (Microwave Anisotropy Probe), оснащенный двумя телескопами диаметром 1,5 м, фиксирует излучение на частотах 20—90 ГГц и способен различать температуры, с точностью до пяти миллионных градуса. В результате измерений обнаружены «горячие» и «холодные» пятна, на сфере «последнего рассеяния» электромагнитных волн на электронах плазмы. Зоны излучения с различной температурой отражают различия в плотности первичной материи ранней Вселенной. Они-то и хранят самые главные «космологические тайны». Полученные зондом данные указывают, что нашей Вселенной 13,7 млн лет. Зонд позволил выяснить, что излучение (First ligth) возникло через 200 млн лет после зарождения Вселенной. В этой связи теоре-

тики приближаются к решению вопроса о существовании «особой точки» во времени и физической особенности — обращению в бесконечность плотности материи в момент Большого взрыва.

1.2. Фотон. Фотоэффект

1.2.1. Квантовая теория электромагнитного поля. Эйнштейн первым осознал реальность квантов энергии, предположив, что монохроматическая волна частоты ν состоит из «частиц» — носителей квантов энергии электромагнитного поля $\varepsilon = h\nu$ и импульса $p = h\nu/c$. Эти частицы позднее в 1929 г. назвали *фотонами* (от лат. *photos* — свет). Учитывая значение hc = 1242 нм · эВ, найдем энергию кванта волны радиодиапазона (λ = 30 м) равную $\varepsilon = 4{,}14\ 10^{-8}$ эВ. Энергия фотона излучения с длиной волны λ равна $\varepsilon = hc/\lambda$. Для зеленого света (λ = 510 нм) ε = 2,484 эВ, для рентгеновского излучения (λ = 0,2 нм) ε = 6,2 кэВ.

Пример 1.2.1. КПД 100-ваттной электролампы в области видимого света η = 0,01. Оценим число фотонов, излучаемых за одну секунду.

Положим для оценки λ = 500 нм. Тогда $\eta P = h\nu\Delta N/\Delta t$, где P = 100Вт, η = 0,01. Следовательно, $\Delta N/\Delta t = \eta P\lambda/hc = 2{,}5\cdot10^{18}$ фот/с.

Пример 1.2.2. Плоская волна интенсивностью J = 1,37 кВт/м^2 падает перпендикулярно некоторой плоскости, длина волны λ = 600 нм.

А. Определите число фотонов, падающих на 1 м^2 за 1 с. Из уравнения $J\Delta t\Delta S = h\nu\Delta N$ имеем $\Delta N/(\Delta t\Delta S) = J/h\nu = J\lambda/hc$, $\Delta N/(\Delta t\Delta S) = 4{,}13\cdot10^{21}$ фот/м^2·с.

Б. Определим число фотонов в единице объема. Пусть u — объемная плотность энергии. Тогда $J\Delta t\Delta S = uc\Delta t\Delta S$ или $J = cu$. Следовательно, $h\nu\Delta N = u\Delta V$, или $\Delta N/\Delta V = J\lambda/hc^2 = 4{,}5\cdot10^{12}$ фот/м^3.

1.2.2. Фотоэффект. На рис. 1.2.1 *а* изображен фотоэлемент, устройство которого напоминает вакуумный диод. На катод, содержащий цезий, падает монохроматический свет. При значении длины волны $\lambda < \lambda_m$, λ_m = 650 нм в цепи идет ток. Вольт-амперная характеристика фотоэлемента. показана на рис. 1.2.1 *б* для двух различных интенсивностей падающего излучения, $V = \varphi_a - \varphi_k$.

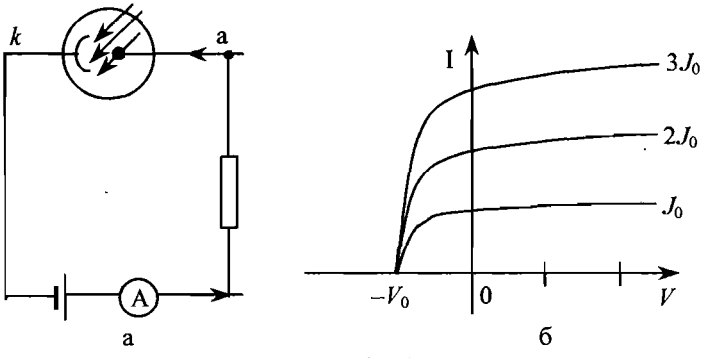


рис. 1.2.1

Принцип действия фотоэлемента основывается на так называемом *внешнем фотоэффекте*, который был открыт в 1887 г. Г. Герцем. Первые фундаментальные исследования фотоэффекта выполнены в 1888 г. В.С. Столетовым. Эксперимент позволил установить следующие закономерности:

1. Освещение металла светом приводит к испусканию электронов.

2. Скорость электронов не зависит от интенсивности падающего света.

3. Фотоэффект возникает при освещении светом, частота которого больше некоторой характерной для каждого металла, частоты ν_m, называемой *пороговой частотой*. С увеличением частоты $\nu > \nu_m$ кинетическая энергия электронов возрастает.

Эти экспериментальные данные находятся в полном противоречии с тем, что следовало бы ожидать. Согласно классическим представлениям увеличение освещенности соответствует увеличению напряженности электрического поля волны. Следовательно, увеличение силы $e\vec{E}$ действующей на электрон должно привести к росту кинетической энергии. Увеличение частоты при постоянной освещенности должно привести к уменьшению энергии электрона.

В статье, вышедшей в 1905 г., А. Эйнштейн показал, что фотоэффект возникает в результате поглощения фотона электроном и последующей ионизации атома (Нобелевская премия, 1921 г.). В начальном состоянии полная энергия электрона $E_i = -A$, в конечном состоянии полная энергия $E_f = mv^2/2$. Согласно закону сохранения энергии $h\nu + E_i = E_f$ или

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2} \qquad (1.2.1)$$

Величина A называется *работой выхода*; обычно она не превышает нескольких электрон-вольт: для цезия A = 1,9 эВ, для серебра A = 4,7 эВ. *Пороговая частота* определяется условием $h\nu_m = A$. Учитывая значение $hc/1\text{эВ} = 1242$ нм, получим пороговое значение длины волны $\lambda_m = hc/A$, $\lambda_m(\text{нм}) = 1242/A(\text{эВ})$. В случае цезия $\lambda_m = 650$ нм, для серебра $\lambda_m = 260$ нм.

Эксперимент, выполненный Р. Милликеном в 1916 г., с большой точностью подтвердил соотношение (1.2.1) (Нобелевская премия, 1923 г.). Если разность потенциалов между анодом и фотокатодом в схеме на. рис. 1.2.1 *а* $\varphi_a - \varphi_k = V$, то согласно закону сохранения полной энергии кинетическая энергия электронов, достигших анода, равна $T_a = e_0V + mv^2/2$. При $V < 0$ электроны тормозятся. При некотором значении $V = -V_0$ величина T_a обратится в нуль и ток станет равным нулю: $e_0V_0 = mv^2/2$. Подставляя сюда $mv^2/2$ из (1.2.1), получим зависимость задерживающего напряжения от частоты: $V_0 = h\nu/e_0 - A/e_0$, или $V_0 = hc/e_0(1/\lambda - 1/\lambda_m)$ Экспериментальные точки в координатах V_0, ν лежат на прямой линии; тангенс угла наклона зависит от отношения двух фундаментальных констант h/e_0.

1.2.3. Становление квантовой теории света. Большинство ученых с недоверием встретили гипотезу световых квантов, предложенную 26-летним Эйн-

штейном. Все понимали, что корпускулярная теория света несовместима с волновой теорией. В 1912 г. немецкий физик М. Лауэ обнаружил дифракционную картину при рассеянии рентгеновских лучей на кристалле. Так было показано, что рентгеновские лучи — электромагнитные волны с длиной волны ~0,2 нм. С другой стороны, сомнения в корпускулярных свойствах фотонов отпали после опытов по рассеянию рентгеновских лучей на электронах, проведенных в 1922 г. американским физиком А. Комптоном (Нобелевская премия, 1927). Он показал, что взаимодействие электронов с рентгеновскими лучами носит характер столкновения двух частиц — электрона и фотона с энергией $E = h\nu$ и импульсом $\vec{p} = h\nu/c\vec{n}$, где $\vec{n}$ — единичный вектор, задающий направление распространения плоской волны. Очевидно, $mc^2 = [E^2 - (cp)^2]^{1/2} = 0$ — масса фотона равна нулю.

Рассмотрим другой эксперимент, подтверждающий гипотезу квантов. Возьмем источник света, который будем регистрировать фотоэлементом, расположенном на расстоянии s. Согласно классической теории (IV, 9.1.3) среднее значение интенсивности света, падающего на фотоэлемент $J = c\varepsilon_0 G^2/2s^2$ на достаточно большом расстоянии, может быть сколь угодно малой величиной. Однако фотоэлемент по-прежнему регистрирует свет. С увеличением расстояния уменьшается только скорость счета, так как число выбитых электронов уменьшается обратно пропорционально s^2. Свет далеких звезд или квазаров, испущенный сотни миллионов лет назад, пройдя гигантские расстояния, заставляет фотоэлемент срабатывать.

Пример 1.2.3. Рассеяние рентгеновских лучей на электронах. В начальном состоянии энергия и импульс электрона (E, $\vec{p}$), фотона — ($h\nu$, $h\nu\vec{n}/c$), где $\vec{n}$ — единичный вектор в направлении движения фотона. В конечном состоянии соответствующие величины равны (E', $\vec{p}'$), ($h\nu'$, $h\nu'\vec{n}'/c$). Наша задача — найти частоту ν' как функцию единичного вектора $\vec{n}'$, направленного по импульсу рассеянного фотона.

Запишем законы сохранения энергии и импульса системы частиц в виде

$$E + h\nu - h\nu' = E', \quad \vec{p} + h\nu\vec{n}/c - h\nu'\vec{n}'/c = \vec{p}'.$$

Умножим второе уравнение на c, затем возведем каждое уравнение в квадрат и вычтем одно из другого. Учитывая (VI.1.3.2), получим

$$\nu' = \frac{\nu(E - c\vec{p}\vec{n})}{E - c\vec{p}\vec{n} + h\nu(1 - \vec{n}\vec{n}')}. \tag{1}$$

Полагая в (1) $\vec{p} = 0$, $E = mc^2$, найдем частоту фотона, рассеянного на неподвижном электроне. Самый главный результат — увеличение длины волны

$$\lambda' = c/\nu', \quad \lambda' = \lambda + h(1 - \vec{n}\vec{n}')/mc, \tag{2}$$

не зависящее от длины волны падающего излучения. Максимальное смещение $\Delta\lambda = 2h/mc$ наблюдается при рассеянии назад ($\vec{n}' = -\vec{n}$). Величину $\lambda_c = h/mc$, $\lambda_c = 2,426 \cdot 10^{-3}$ нм называют *комптоновской длиной* волны.

Комптон-эффект является основной причиной возникновения мощного электромагнитного импульса длительностью менее 1 с непосредственно после атомного взрыва. Образующиеся после деления урана-235 кванты имеют энергию $h\nu \approx 0{,}8$ МэВ. Взаимодействуя с воздухом, они выбивают из атомов электроны, которые приобретают релятивистские энергии. Асимметрия движения электронов в вертикальном направлении анологична импульсу тока в проводнике. В результате генерируется мощное излучение, образующее начальный импульс, и происходит разделение электронов и ионов. Затем электроны движутся в обратном направлении, порождая новый импульс. Поражающее действие импульса связано с возбуждением ЭДС индукции в цепях радиоэлектронной и электротехнической аппаратуры.

1.3. Планетарная модель атома

1.3.1. Строение атома. Один из возможных путей исследования структуры материи заключается в наблюдении процесса столкновения различных частиц с веществом. Это впервые в 1911 г. понял Э. Резерфорд и решил использовать α-частицы — ядра гелия ^4_2He. Его метод состоял в подсчете α-частиц, рассеянных тонкой золотой фольгой. Число рассеянных α-частиц определялось по вспышкам на экране из сернистого цинка.

«Тяжелые» α-частицы почти не отклоняются при взаимодействии с электронами атома и, следовательно, результат рассеяния зависит от размеров области, в пределах которой распределен положительный заряд ядра. Поскольку на каждый атом приходится кубик со стороной $L = (M/\rho N_A)^{1/3}$, то на толщине фльги d укладывается $d/L = d(\rho N_A/M)^{1/3}$ атомов. Для фольги из золота ($\rho = 19{,}32 \cdot 10^3$ кг/м^3, $M = 0{,}197$ кг/моль) толщиной $d \approx 100$ нм находим $d/L \approx 400$. Экспериментальные исследования показали, что большая часть α-частиц рассеивается в небольшом интервале углов к направлению движения. Однако ученик Резерфорда Э. Марсден установил, что некоторые частицы — примерно одна из 20 000 — отклонились на углы, большие 90°. Это позволило Резерфорду прийти к выводу, что вся масса атома сосредоточена в ядре ничтожно малого размера. Измерения размеров ядер различными методами дают величину ~1-10Фм (1Фм = 10^{-15} м фемтометр — от дат. *femten* — пятнадцать). Размеры атома ~0,1 нм. Таким образом, было установлено, что атом — основной строительный материал вещества — представляет собой «атом пустоты»: отношение объема, занимаемого ядром к объему атома, порядка 10^{-15}.

Пример 1.3.1. Оценим «радиус» ядра золота, рассматривая случай лобового столкновения α-частицы и ядра с зарядом Ze ($Z = 79$). Согласно (IV.1.2.10) потенциальная энергия взаимодействия $W(r) = 2kZe^2/r$. В начальном состоянии потенциальная энергия взаимодействия равна нулю, кинетическая энергия α-частицы, излучаемой радиоактивным источником известна и равна $K_0 = 5$ МэВ. При приближении α-частицы к ядру золота в узле кристаллической решетки потенциальная энергия возрастает, а кинетическая энергия уменьшается. На наименьшем расстоянии r_0 от ядра кинетическая энергия

обращается в нуль, а потенциальная достигает значения $W(r_0) = 2kZe^2/r_0$. Приравнивая полные энергии в двух состояниях системы, получим $r_0 = 2kZe^2/K_0$, $r_0 = 4{,}5 \cdot 10^{-12}$ см. Отсюда следует, что размеры ядра золота не превышают $5\ 10^{-12}$ см. Согласно современным моделям размер ядра $r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-15} A^{1/3}$ м.

1.3.2. Спектральный анализ. Если атомы или молекулы химического элемента возбудить, сообщая достаточное количество энергии, то они становятся источниками электромагнитного излучения. Используя призму или другие оптические элементы, можно добиться *пространственного разделения* излучения по монохроматическим компонентам, т.е. получить *спектр излучения* в виде линий или полос. Каждая линия характерна для определенного элемента. Появление новых, ранее не наблюдавшихся линий, дает возможность обнаружить новые элементы.

Создатели современного *спектрального анализа* Г. Кирхгоф и Р. Бунзен открыли в 1861 г. рубидий и цезий — металлы, названные по цвету наиболее ярких для них красной и голубой линиям. Спектры Солнца и звезд показали наличие в их атмосферах элементов, присутствующих на Земле. В 1868 г. в солнечном спектре была обнаружена линия нового элемента, открытого на Земле Р.У. Рамзаем лишь в 1895 г. Его назвали гелий (от греч. χελιοσ — Солнце). Это был триумф метода спектрального анализа.

Если в лучи белого света поместить раскаленное вещество в газообразном состоянии, то на экране появится сплошной спектр, пересеченный темными линиями — *спектр поглощения*. Положение этих линий соответствует положению цветных линий в спектре излучения того же вещества. Это явление есть следствие закона Кирхгофа, согласно которому вещество в газообразном состоянии поглощает излучение на частотах, равных частотам в спектре излучения вещества.

В 1885 г. Й. Бальмер обнаружил первую закономерность в спектральных линиях атома водорода. Частота волн видимой части спектра описывается формулой

$$\nu_s = cR_\infty \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{s^2} \right), s = 3, 4, \ldots, \qquad (1.3.1)$$

где $R_\infty = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная, введенная Й. Ридбергом в 1890 г. Это открытие послужило основой для обнаружения других серий в инфракрасной и ультрафиолетовой частях спектра. В «научном сознании» постепенно формировалось представление о связи спектров со строением атомов элементов таблицы Менделеева.

1.4. Первая квантовая теория атома – атом Бора

М. Планк получил правильную форму закона излучения черного тела, предполагая, что энергия атома составляет целое число квантов энергии. Его работа поначалу не получила существенного отклика. Только пять лет спустя А. Эйнштейн обратился к идее Планка в своей теории фотоэффекта.

Он постулировал квантовую структуру светового излучения, вводя новые частицы — фотоны. Сам Планк не был согласен с таким развитием своей гипотезы. В составленном Планком в 1913 г. представлении об избрании Эйнштейна в Берлинскую Академию Наук отмечено: «То, что он в своих рассуждениях (*spekulationen*) подчас стрелял мимо цели, как это было, например, с его гипотезой световых квантов, не следует ставить ему в упрек, ибо, не идя на риск, даже в области точных наук нельзя сделать ничего действительно нового»[1].

Дальнейшую твердую опору квантовые идеи нашли в предложенном в 1907 г. Эйнштейном и проведенном Дебаем рассмотрении на основе гипотезы Планка удельной теплоемкости твердых тел. Этим были заложены предпосылки знаменитых работ, в которых Н. Бор применил квантовую теорию к модели атома Резерфорда.

1.4.1. Квантовые постулаты Бора. В планетарной модели атома электроны, вращаясь вокруг ядра, движутся с отличным от нуля ускорением. Согласно классической теории они должны непрерывно излучать электромагнитные волны. В результате скорость электронов уменьшится до значения равного нулю и они попадут на ядро. Классическая физика оказалась не в состоянии объяснить устойчивость атома и атомные спектры.

Теория атома водорода, предложенная в 1913 г. датским физиком Нильсом Бором, впервые указала путь к построению новой механики атома. Его теория основана на двух постулатах (от лат. *postulatum* — требование):

1. Атом может находиться лишь в определенных стационарных состояниях, в каждом из которых он имеет определенное дискретное значение полной энергии E_1, E_2, ... В наиболее простом случае движения электрона по окружности радиусом r со скоростью v *условие квантования* имеет вид

$$mrv = nh/2\pi, \tag{1.4.1}$$

где n — так называемое главное квантовое число, принимающее значения $n = 1,2,3,.....$, h — постоянная Планка. Физики-теоретики обычно используют краткое обозначение — перечеркнутую букву h: $\hbar = h/2\pi$. Тогда можно упростить запись $h\nu = \hbar\omega$.

2. При переходе $E_n \to E_k$ ($E_n > E_k$) испускается фотон с энергией $h\nu_{nk} = E_n - E_k$. При поглощении фотона с энергией $h\nu_{in} = E_i - E_n$ происходит переход $E_n \to E_i$ ($E_i > E_n$).

Используя первый постулат и уравнение движения, получим систему уравнений

$$mvr = n\hbar, \qquad \frac{mv^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2}, \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \tag{1.4.2}$$

[1] К сожалению, во многих учебных пособиях Планк выступает как автор гипотезы Эйнштейна: «... атомы испускают электромагнитную энергию отдельными порциями — квантами» (см. Г.Я. Мякишев, Б.Б. Буховцев. Физика. 6-е изд. М.: Просвещение. 1999. С. 160 и др.).

из которой находим $r = r_n$, $v = v_n$,

$$r_n = \hbar n^2/mc\alpha, \quad v_n = \alpha c/n, \quad \alpha = ke^2/\hbar c. \qquad (10.4.3)$$

Величина α получила название постоянной тонкой структуры $\alpha \approx 1/137$. Значение $r_1 = \hbar/(mc\alpha) = 0{,}053$ нм называют первым *боровским радиусом* атома водорода. Скорость электрона на боровской орбите $v_1 = \alpha c \approx c/137$. Полная энергия электрона $E = mv^2/2 - ke^2/r = -ke^2/2r$ принимает дискретный ряд значений

$$E_n = -\frac{mc^2\alpha^2}{2n^2}, \quad n = 1,2,3, \ldots . \qquad (1.4.4)$$

Значение $mc^2 = 0{,}511$ МэВ. Величину n называют главным квантовым числом. Наименьшему значению энергии $E_1 = -A$, $A = mc^2\alpha^2/2 = 13{,}61$ эВ соответствует основное устойчивое состояние атома. Величина A равна *энергии связи*. Сообщив атому энергию 13,61 эВ, мы переведем его в состояние $E_\infty = 0$, соответствующее свободному движению электрона и протона. Следующий уровень энергии $E_2 = -A/4$, $E_2 = -3{,}39$ эВ. Состояния с номерами $n \geq 2$ называются возбужденными.

На основании второго постулата найдем частоту излучения при квантовом переходе $E_s \to E_k$ $(s > k)$

$$\nu_{sk} = \frac{mc^2\alpha^2}{2h}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2}\right) \qquad (1.4.5)$$

При $k = 2$ получим серию Бальмера (1.3.1) и значение постоянной Ридберга $R_\infty = mc\alpha^2/(2h)$. Наименьшая длина излучаемой волны $\lambda_{min} = hc/A = 4\pi r_1/\alpha \approx 1721 r_1$.

Пример 1.4.1. Неподвижный атом водорода находится в первом возбужденном состоянии. Найдем главное квантовое число n состояния, в которое перейдет атом, поглотив квант с энергией равной 0,24 энергии ионизации. Из закона сохранения энергии следует уравнение

$$-(1/4) + 0{,}24 = -(1/n^2), \; n = 10.$$

1.4.2. Опыты Франка и Герца. Доказательство существования дискретных энергетических состояний впервые было получено в экспериментах, выполненных в 1912—14 гг. немецкими физиками Ф. Франком и Г. Герцем. Они обнаружили резонансное взаимодействие электронов с атомами ртути. При энергиях электронов меньших значения $\varepsilon_0 = 4{,}9$ эВ происходили упругие столкновения. Когда энергия достигала значения ε_0, электроны передавали энергию атомам ртути. В соответствии с теорией Бора это явление связано с переходом атомов ртути из основного состояния с энергией $E_1 = -10{,}4$ эВ в первое возбужденное состояние с энергией $E_2 = E_1 + \varepsilon_0$. Следовательно, 4,9 эВ — наименьшая порция энергии, которую можно передать атому ртути.

Однако сами авторы интерпретировали эти данные по-другому. Они рассматривали свои результаты как подтверждение гипотезы Планка: $\varepsilon_0 = h\nu_0$

является квантом энергии, а частота ν_0 — частота колебаний электрона в атоме ртути. Ситуация осложнялась еще и тем, что в самом деле наблюдалась линия спектра ртути на частоте $\nu_0 = (E_2 - E_1)/h$ ($\lambda = c/\nu_0 = 255{,}1$ нм), обусловленная переходом атома в основное состояние. В своих воспоминаниях, опубликованных в 1975г., Г. Герц замечает, что говоря о достижениях квантовой механики часто забывают, «какими в действительности трудными и поначалу противоречивыми путями это было достигнуто».

Пример 1.4.2. Модель Резерфорда–Бора позволила разобраться в так называемом *характеристическом рентгеновском излучении,* открытом в 1907 г. Когда электроны падают не на стенку стеклянной трубки, а на пластинку из металла, то на фоне непрерывного спектра можно наблюдать несколько четких ярких линий, похожих на линии оптического спектра. Оказалось, что каждому элементу соответствуют вполне определенные линии. Поэтому это излучение было названо характеристическим.

Происхождение излучения было объяснено учеником Резерфорда Г. Мозли в 1917 г. Электрон, взаимодействуя с атомом, выбивает электрон с одной из внутренних оболочек атома. Теперь на нее может перейти электрон с одной из внешних оболочек. В результате излучается фотон определенной частоты. Этот эффект позволяет определить заряд ядра Ze, где Z — номер элемента в таблице Менделеева. Наиболее удобной для наблюдения оказалась линия спектра, соответствующая переходу со второй оболочки на первую, из которой выбит один из двух электронов. В этом случае электроны с квантовым числом $n \geq 2$ находятся в поле ядра с экранированным зарядом $Z - 1$. Заменяя в (1.4.5) $\alpha \to \alpha(Z-1)$, $k = 1$, $s = 2$, находим $\nu_{21} = 3cR(Z-1)^2/4$. Если изобразить зависимость $\sqrt{\nu_{21}}$ от атомного номера Z, то экспериментальные точки должны лежать на прямой

$$\sqrt{\nu_{21}} = \sqrt{3cR_\infty/2}\,(Z-1).$$

Закон Мозли $Z = 1 + \mathrm{const}\sqrt{\nu_{21}}$ позволил выявить пробелы в периодической системе. В частности, оказалось возможным предсказать существование гафния ($Z = 72$), открытого только в 1927 г.

1.4.3. Ридберговские атомы. С середины семидесятых годов возникло новое направление атомной физики — это физика сильно возбужденных атомов. Атом, внешний электрон которого находится на уровне с квантовым числом $n \gg 1$ называется *ридберговским атомом.* При радиоастрономических наблюдениях в космосе были зарегистрированы атомные состояния с числом $n \sim 350$. В этой области уровни энергии почти *эквидистантны*, т. е. отделены друг от друга почти одинаковыми промежутками. Действительно, рассмотрим атом водорода в состоянии с $n \gg 1$. Полагая в (1.4.4) $n = N + \Delta n$, $\Delta n \ll N$, получим

$$E_n = -A/(N+\Delta n)^2 \approx -A/N^2\,(1 - 2\Delta n/N) = -A/N^2 + h\nu_0\Delta n,$$

где $A = mc^2\alpha^2/2$. Величина $\nu_0 = 2A/(hN^3) = mc^2\alpha^2/(hN^3)$ представляет собой классическую частоту вращения электрона $\omega_0 = (ke^2/mr_0^3)^{1/2}$ по круговой орбите радиусом $r_0 = hN^2/(2\pi mc\alpha)$ со скоростью $u_0 = \alpha c/N = (ke/mr_0)^{1/2}$.

Частота излучения при переходах $N + \Delta n + s \to N + \Delta n$, равна $\nu_{si} = s\nu_0$.

Сильно возбужденные атомы обладают множеством необычных свойств. Это атомы — гиганты в масштабах микромира размерами почти сотую долю миллиметра, в 100 000 раз большими диаметра атома в основном состоянии. Внутри них могут поместиться другие атомы. По временным масштабам атомных процессов они живут почти вечно: от 10^{-3}с до 1с. Обычные атомы устойчивы по отношению к действию электромагнитных полей, а ридберговские атомы искажаются и разрушаются в слабом электрическом поле или принимают форму иглы в магнитном поле.

1.5. Развитие квантовой механики

1.5.1. Волна или частица? Теория Бора явилась переходным этапом от классической теории к квантовой. В 1923 г. Л. де Бройль предположил, что обычным частицам присущи волновые свойства. Эта гипотеза была подтверждена в 1927 г. опытами, в которых электроны с импульсом p, рассеянные на монокристалле никеля, образовали дифракционную картину распределения плотности, соответствующую волновому движению с длиной волны $\lambda = h/p$. Соответствие между квантовым и волновым представлениями о движении фотонов состоит в том, что фотон имеет наибольшую вероятность попасть в то место экрана, где находите самый яркий участок дифракционной картины. Отметим, что условия квантования Бора можно записать в виде $2\pi r = n\lambda$: на длине окружности укладывается целое число стоячих волн. В 1929 г. удалось наблюдать дифракцию атомов гелия и молекул водорода. Возможно, в недалеком будущем мы увидим дифракцию живого вещества, например вирусов. Понятие траектории частицы теряет смысл. Однако при анализе физических явлений *корпускулярные и волновые свойства частиц следует рассматривать не как взаимоисключающие, а как взаимодополняющие друг друга.*

Этот вывод кажется парадоксальным и удивительным, так как мы безуспешно пытаемся использовать привычные нам понятия и законы классической физики. Однако анализ экспериментальных данных вынуждает признать ограниченность старых понятий. По этому поводу А. Эйнштейн заметил: «Наука вынуждает нас создавать новые теории. Их задача — разрушить стену противоречий, которые часто преграждают дорогу научному прогрессу. Все существенные идеи в науке родились в драматическом конфликте между реальностью и нашими попытками ее понять».

В результате напряженной интеллектуальной деятельности широкого круга ученых была разработана *квантовая механика* — наука, позволяющая предсказать поведение огромного числа физических систем — от Галактик до атомов и атомных ядер. Типичный пример — микроэлектроника, которая

за последние 30 лет стала отраслью промышленности, основанной на квантовой теории твердого тела. Уже созданы первые образцы квантовых компьютеров, в которых использованы уникальные особенности квантовых состояний. Разумеется, квантовая теория, являясь отражением более высокого уровня познания природы, не отменяет законов классической физики, а включает их как частный случай.

1.5.2. Соотношение неопределенностей. Впервые это отметил немецкий физик В. Гейзенберг. В 1927 г. он доказал соотношение неопределенностей, ограничивающее возможности классического описания. Например, нельзя утверждать, что частица занимает определенное положение и обладает определенным импульсом. Согласно Гейзенбергу неопределенности Δx и Δp_x значений координаты x и проекции импульса p_x удовлетворяют соотношению

$$|\Delta x|\cdot|\Delta p_x| \geq \hbar/2. \qquad (1.5.1)$$

Наименьшее значение этого произведения равно $\hbar/2$. Если вероятность найти частицу в ограниченном интервале $|\Delta x| \sim b$ заметно отличается от нуля, то возможные значения импульса могут оказаться в интервале $|\Delta p_x| \sim \hbar/b$. Или наоборот, если неопределенность импульса равна нулю, то положение частицы является полностью неопределенным.

Однако, если неопределенности значений координаты и проекции импульса значительно меньше характерных масштабов движения L и величины импульса: $|\Delta x| << L$, $|\Delta p_x| << |p_x|$, то волновые свойства частиц становятся несущественными. Согласно (1.5.1) имеем условие $|\Delta p_x| \sim \hbar/|\Delta x| >> \hbar/L$. Для того, чтобы классическое описание было достаточно точным, должно выполняться условие $\hbar/L << |p_x|$. Так как $\lambda = h/|p_x|$, то это неравенство можно записать в виде $\lambda << 2\pi L$. В этом случае координаты частицы удовлетворяют второму закону Ньютона и приближенно можно говорить о движении частицы по траектории.

Особый тип квантовых явлений связан с нестабильными системами, для которых вероятность найти систему в данном состоянии убывает с течением времени. Такое нестационарное состояние характеризуется конечным временем жизни $\Delta t \sim \tau$. Согласно Гейзенбергу полная энергия нестационарной системы известна с неопределенностью ΔE, связанной с интервалом времени Δt соотношением

$$\Delta E\, \Delta t \geq \hbar/2. \qquad (1.5.2)$$

Пусть $\tau \sim 10^{-8}$ с — *время жизни* возбужденного состояния атома. Тогда неопределенность полной энергии состояния $\Delta E \sim \hbar/\tau = 6{,}582 \cdot 10^{-8}$ эВ. С другой стороны соотношение (12.5.2) связывает точность измерения энергии в интервале времени Δt.

1.5.3. Квантовомеханическая дифракция. Волновые свойства частиц ограничивают область применимости классического описания. Рассмотрим, например, пучок электронов с импульсами $\vec{p}$, прошедший через круглое

отверстие диаметром $D >> \lambda$, $\lambda = h/p$. Предположим, что в плоскости экрана положение электрона определяется с точностью $\Delta r = D$. В соответствии с соотношением неопределенностей (1.5.1) составляющая импульса электрона $p_\perp$ в направлении, перпендикулярном оси пучка, имеет неопределенность $\Delta p_\perp \geq \hbar/(D)$. Это означает, что измерения проекции импульса дадут нам значения $\Delta p_\perp$, лежащие в интервале $(-\hbar/D, \hbar/D)$, причем вероятности появления различных значений $p_\perp$ различны. По этой причине электрон может отклоняться от оси пучка в пределах угла $\alpha \approx \Delta p_\perp/p = \hbar/(pD)$. На расстоянии z от экрана неопределенность в положении электрона $z\alpha \approx z\hbar/(pD)$. Если эта величина существенно меньше D: $z\hbar/(pD) \ll D$, то на расстояниях $z \ll s$, $s = pD^2/\hbar$ волновые свойства электрона не проявляются — электрон движется по прямой линии в соответствии с классическими представлениями. Записывая полученное выше неравенство в виде $z \ll 2\pi D^2/\lambda$, где λ — длина волны де Бойля, замечаем, что оно ничем не отличается от условия дифракционной расходимости электромагнитной волны (IV.9.7.2). На расстояниях $z \geq s$ из-за волновых свойств электронов пучок размывается. Таким образом, геометрическая оптика и механика учитывают корпускулярные свойства объектов, а волновая оптика и квантовая механика — волновые свойства микрообъектов — фотонов и частиц вещества.

В кинескопах телевизоров напряжение между анодом и катодом $U = 15$ кВ, длина трубки $l = 0{,}25$ м, величина $D \sim 10^{-2}$ см. Из закона сохранения полной энергии находим $p = (2me_0U)^{1/2}$, $pc = 1{,}238 \cdot 10^5$ эВ, скорость электрона $v = 0{,}242c = 7{,}28 \cdot 10^7$ м/с. Неопределенность поперечной компоненты импульса $c\Delta p_\perp = 2{,}45 \cdot 10^{-7}$ эВ, длина волны де Бройля $\lambda = 0{,}01$ нм. Характерное расстояние s оказывается равным 6,45 км. Поэтому движение электронов в кинескопе можно рассматривать по классической теории.

1.5.4. Рождение квантовой механики. 29 июля 1925 г. — день рождения современной квантовой механики — немецкий физик-теоретик В. Гейзенберг закончил статью, в которой разработал матричную механику — первый вариант строгой квантовой теории. Через полгода австрийский физик-теоретик Э. Шредингер получил уравнение для *волновой функции*, описывающей квантовые состояния системы частиц, и доказал эквивалентность волновой и матричной механик. Летом 1926 г. появилась статья немецкого физика М. Борна, которая содержала важнейшую для развития теории статистическую интерпретацию волновой функции. Наконец, в 1927 г. выдающийся американский теоретик Янош Нейман ввел понятия матрицы плотности и квантового состояния, которые внесли ясность в теорию квантовых измерений.

Первая последовательная теория атома водорода была создана в 1927 г. в результате решения уравнения Шредингера. В 1928 г. построена релятивистская теория на основе уравнения, полученного гениальным английским теоретиком П. Дираком. Все уровни энергии оказались расщепленными на подуровни: уровень с главным квантовым числом n расщепляется на n подуровней. Согласно теории уровень E_2 расщепляется на два подуровня. Од-

нако в 1947 г. с помощью радиоспектроскопических методов было обнаружено, что вопреки теории нижний подуровень E_2 оказался расщепленным на величину $4{,}35 \cdot 10^{-6}$ эВ, называемую *лэмбовским сдвигом*. Это, казалось бы, ничтожное расхождение теории и эксперимента привело к поразительному прогрессу теоретической физики и новейшему развитию *квантовой электродинамики* — теории взаимодействия фотонов с веществом и квантовой теории поля.

1.5.5. Интерференция — квантовомеханичский эффект. Пусть в установке Юнга начальное состояние представляет собой один фотон, падающий на экран с двумя отверстиями, и атомы детектора в основном состоянии. В конечном состоянии один из атомов переходит в возбужденное состояние в результате поглощения фотона. Многократное повторение этого опыта приведет к интерференционной картине в плоскости детектора – все возбужденные атомы, находятся в пределах светлых полос. Этот опыт невозможно объяснить в рамках классической физики, предполагая, что фотон может проходить сквозь первое или сквозь второе отверстия.

Возникновение интерференции существенно связано с невозможностью предсказать, через какое отверстие пролетел фотон. Всякая попытка определить, по какому пути прошел фотон, уничтожает интерференционные полосы. Согласно квантовой теории состояние фотона описывается ненаблюдаемой волной вероятности, представляющей собой сумму двух слагаемых — фотон одновременно находится в состояниях, соответствующих прохождению через первое и второе отверстия. Именно в этом смысле фотон ведет себя «как частица и как волна». Математический аппарат квантовой механики позволяет вычислить вероятность попадания фотона в различные атомы детектора — вероятность распределения фотонов в плоскости детектора пропорциональна интенсивности световой волны.

Отметим, что основной объект квантовой механики — волновая функция не представляет собой математического описания реальной волны во времени и пространстве. Она служит только для предсказаний результатов всех измерений, которые можно произвести над системой.

Глава 2. Прикладная атомная физика

2.1. Спектры испускания и поглощения

Универсальным и удобным детектором излучения является фотопластинка. Мерой почернения фотослоя является так называемая оптическая плотность D, зависящая от экспозиции, равной произведению интенсивности излучения J на время облучения Δt. Спектр испускания получают спектральными приборами, позволяющими произвести *пространственное разделение интенсивности* электромагнитной волны, излучаемой веществом, по монохроматическим компонентам $J(\nu)$. Спектр поглощения обычно по-

лучают после прохождения излучения через вещество и последующего анализа спектральным прибором. Спектры излучения и поглощения обусловлены квантовыми переходами между различными состояниями атомов или молекул.

Если вещество находится в тепловом равновесии с излучением, то равновесный спектр излучения представляет собой непрерывную функцию частоты и определяется законом Планка. В отсутствие термодинамического равновесия спектры разделяют на несколько типов.

Линейчатые спектры состоят из отдельных линий, соответствующих дискретным значениям частоты ν_n (n = 1,2, ...). Они характерны для излучения свободных атомов газа или пара в видимом и ультрафиолетовом диапазонах, обусловленного квантовыми переходами между электронными состояниями атома.

Полосатые спектры наблюдаются в излучении молекул и кристаллов. Они состоят из серий отдельных полос. При достаточно большой разрешающей способности спектрального прибора полоса распадается на ряд тесно расположенных линий. Молекулярные спектры, в отличие от атомных, имеют более сложную структуру, т. к. квантовые переходы соответствуют изменению электронных, колебательных и вращательных состояний молекулы. Полная энергия, соответствующая трем видам движений $E = E_{эл} + E_{кол} + E_{вр}$. Обычно $E_{эл}$ порядка нескольких эВ, $E_{коя} \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ эВ, $E_{вр} \sim 10^{-5} - 10^{-3}$ эВ. Поэтому энергетические уровни молекулы характеризуются системой электронных уровней, далеко отстоящих друг от друга, системой колебательных уровней, расположенных значительно ближе друг к другу, и еще более близких вращательных уровней.

Различные типы спектров излучения молекул возникают при различных квантовых переходах. Изменение электронных состояний приводит к излучению в видимой и ультрафиолетовой частях спектра. Переходы между колебательно-вращательными состояниями соответствуют излучению в инфракрасной и микроволновой областях спектра. Переход электронов в новое состояние обычно сопровождается возбуждением нескольких колебательных и вращательных состояний. Так возникает спектральная полоса. Кроме дискретного спектра можно обнаружить и сплошной спектр, который появляется в результате ионизации молекул.

Очевидно, электромагнитное излучение вещества содержит важную информацию о взаимодействии атомов и молекул, из которого оно состоит. В результате анализа спектров получают экспериментальные данные об электронных оболочках, типах химических связей, параметрах равновесных конфигураций и значениях энергетических уровней.

2.2. Ядерный магнитный резонанс (ЯМР)

Новый метод исследования многоэлектронных молекул и структуры вещества появился благодаря открытию ЯМР. Атомное ядро, спин которого равен J,

приобретает в магнитном поле индукцией $\vec{B}$ дополнительную энергию $E_J = -\mu_J B$, где $\mu_J = g\mu_N M_J$, g — структурный фактор ядра, $M_J = -J, ..., +J$ — магнитное квантовое число — проекция спина на направление вектора $\vec{B}$. Проекция M_J принимает $2J + 1$ значений, соответствующих $2J + 1$ состояниям спина ядра. Константа $\mu_N = e\hbar/2m_p$, где m_p — масса протона, называется ядерным магнетоном, $\mu_N = 3{,}15 \cdot 10^{-8}$ эВ/Тл. Частота электромагнитного излучения, при переходах между энергетическими подуровнями ядра определяется в соответствии с правилом Бора соотношением $\nu = g\mu_N B/h$.

Чтобы получить представление о порядках величин резонансных частот в ЯМР, рассмотрим протоны. В этом случае $g = 5{,}586$. Полагая $B = 1$ Тс, получаем $\nu = 42{,}576$ МГц. В реальных условиях ядра являются составной частью атомов и молекул. Полная индукция поля представляет собой сумму индукции внешнего поля и индукции полей других ядер и электронов атомных оболочек. Поэтому частоты переходов различных групп ядер в сложной молекуле различаются. Изменяя индукцию внешнего поля, можно получить спектры излучения или поглощения, содержащие информацию о структуре молекул. Этот же метод является основой *томографии,* позволяющей получить трехмерное изображение живой ткани. Впервые ЯМР — резонанс наблюдали в 1945 г. две американские группы под руководством Ф. Блоха и Э. Парселла (Нобелевская премия, 1952 г.).

2.3. Лазеры

2.3.1. Излучение и поглощение электромагнитного излучения. При рассмотренных самопроизвольных переходах атома на более низкие энергетические уровни возникает так называемое *спонтанное* (от лат. *spontaneus* — самопроизвольный) излучение.

Каким образом можно перевести атом или молекулу из основного в возбужденное состояние? Один из возможных вариантов состоит в реализации неупругих столкновений: при нагревании, пропускании тока или пучка электронов через вещество. Другой тип возбуждения связан с поглощением электромагнитной волны, излучаемой внешним источником. Если частота излучения совпадает с одной из частот квантовых переходов ν_{ks} из состояния s в состояние $k > s$, то атом поглощает квант поля и переходит в возбужденное состояние. Этот эффект приводит к возникновению спектров поглощения.

Если в начальном состоянии поле содержит конечное число фотонов внешней волны N, то вероятность поглощения фотона $w_{\text{погл}} \sim N$, а вероятность рождения фотона $w_{\text{изл}} \sim N + 1$. Единица в этом множителе отвечает спонтанному излучению. Мы видим, что при взаимодействии атома с внешним излучением возможен переход из возбужденного состояния на более низкий энергетический уровень с вероятностью $w_{\text{инд}} \sim N$. В этом случае возникает вынужденное или *индуцированное излучение,* которое принципиально отличается от спонтанного излучения — направление распространения, поляризация, частота и фаза излучаемой волны полностью тождественны

внешней волне. Поэтому излученная и внешняя волны когерентны. В результате индуцированного излучения возбужденных атомов энергия электромагнитного поля возрастает. Этот процесс является физической основой нового направления квантовой механики — *квантовой радиофизики*.

Возникновение вынужденного излучения было предсказано в 1916 г. А. Эйнштейном. В 1954 г. советские физики Н.Г. Басов, А. М. Прохоров и американский физик Ч. Таунс предложили использовать индуцированное излучение для генерации и усиления электромагнитных волн (Нобелевская премия, 1964 г.). В 1954 г. был создан мазер — генератор, в котором возбужденные молекулы аммиака излучали в сантиметровом диапазоне (λ = 1,24 см). Термин мазер — аббревиатура предложения — Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation — усиление микроволн при помощи индуцированного излучения.

В конце 1960 г. Т. Мейман в США создал твердотельный рубиновый лазер, излучающий в импульсном режиме красный свет с длиной волны λ = 694,3 нм. В начале 1961 г. появился газовый гелий — неоновый лазер, излучающий в непрерывном режиме красный свет с длиной волны λ = 632,8 нм на частоте $\nu = 4{,}74\ 10^{14}$ Гц (А. Джаван, США). Термин «лазер» — аббревиатура выражения Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation — усиление света вынужденным излучением.

2.3.2. Генерация и усиление излучения лазером. В состоянии теплового равновесия атомы стремятся перейти в состояния с наименьшей энергией. Вследствие этого число атомов N_1 с энергией E_1 больше числа атомов N_2, имеющих значение энергии $E_2 > E_1$. При распространении через вещество пучка света частотой $\nu_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$ возникают переходы $E_1 \to E_2$ при поглощении фотонов и *индуцированные* или *вынужденные* переходы $E_2 \to E_1$, порождающие фотоны, тождественные фотонам светового пучка. Поскольку $N_2 < N_1$, то приращение интенсивности $\Delta J \sim (N_2 - N_1) < 0$: атомная система поглощает свет. Для увеличения интенсивности света необходимо реализовать условие $N_2 > N_1$. Такое состояние вещества называется инверсным или состоянием с *инверсной населенностью уровней энергии*. Инверсия в среде поддерживается процессами возбуждения атомов в результате неупругого взаимодействия с электромагнитным полем или пучком заряженных частиц. Для усиления или генерации когерентных волн необходимо осуществить *обратную связь*: электромагнитные волны, излученные атомами, должны многократно порождать в веществе новые процессы вынужденного излучения. В оптическом диапазоне обратная связь реализуется двумя зеркалами, между которыми находится активная среда.

Таким образом, лазер содержит три основных компонента — активная среда, устройство для создания инверсии и элемент обратной связи.

Рассмотрим в качестве примера твердотельный лазер, содержащий кристалл рубина с небольшой примесью атомов хрома в виде цилиндрического стержня длиной 3—20 см, диаметром 0,5—2 см. Торцы стержня представляют собой плоские поверхности, расположенные перпендикулярно оси стерж-

ня и покрытые тонкой пленкой серебра, которая играет роль зеркала. Одно из покрытий изготовляют частично прозрачным для вывода излучения.

Используя внешний источник света частотой ν_{31} — *генератор накачки*, переводят часть атомов в возбужденное состояние с энергией $E_3 > E_2$. Далее происходит безызлучательный переход на уровень E_2. Спонтанное излучение света происходит при переходе атома в основное состояние с энергией E_1. Обратные им переходы приводят к поглощению света той же частоты ν_{21}. Длина волны λ_{31} = 550 нм, энергия фотона ε_{31} = 2,25 эВ, длина излучаемой волны λ_{21} = 694,3 нм, ε_{21} = 1,79 эВ. Далее можно ожидать возникновения вынужденного излучения: в результате взаимодействия с волной, излученной одним атомом другие атомы излучают когерентные волны. Этому процессу препятствуют два фактора — поглощение излучения и тепловые флуктуации состояния среды. В результате «время жизни» стационарного состояния становится конечной величиной, а каждый энергетический уровень переходит в полосу, называемую шириной уровня. Поэтому частота излучения и поглощения ν лежит в некотором интервале частот $\Delta\nu_c$ в окрестности значения ν_{21}.

При малых мощностях накачки лазер излучает некогерентный свет частотой $\approx\nu_{21}$ как лампа накаливания. Атомы излучают световые волны независимо друг от друга. С увеличением мощности накачки число атомов с энергией E_2 значительно превысит число атомов с энергией E_1. При этом возникает совершенно новое явление. Теперь излучение в интервале частот $\Delta\nu_c$ стимулирует переходы на основной уровень E_1, которые приводят к индуцированному излучению. В результате отражения от зеркал образуется стоячая волна. Возникает обратная связь между полем и атомной подсистемой. В пучностях амплитуда волны частотой ν_{21} нарастает, излучение близких частот подавляется. Ширина линии излучения индуцированного излучения уменьшается до значений $\Delta\nu << \Delta\nu_c$. Увеличение интенсивности волны частотой ν_{21} приводит к увеличению числа атомов, участвующих в процессах индуцированного излучения той же частоты. *Полевая подсистема подчиняет себе атомную подсистему.* В результате атомы активного вещества излучают волны с почти одинаковыми частотой и фазой. Это означает, что лазерное излучение полностью когерентно. Переход от обычного излучения к когерентному проявляется в сужении спектра излучаемых частот: *степень монохроматичности* может достичь значения $\Delta\nu/\nu_{21} = 10^{-14}$.

2.3.3. Некоторые характеристики лазеров. Первые рубиновые лазеры излучали световой импульс с энергией 1 Дж за время около 10^{-3}с, т. е. имели мощность 1 кВт. Через некоторое время удалось осуществить режим гигантских импульсов, для получения которого используется метод управления обратной связью. При длительности 20 нс излучается энергия от долей до 100 Дж — импульсная мощность достигает 1млрд Вт. Частота повторения импульсов 1—2 Гц.

Значительный прогресс в создании мощных импульсных лазеров связан с использованием неодимового стекла — обычного стекла, в которое введены атомы неодима (*Nd*). Излучение возникает на длине волны 1058 нм

в инфракрасном диапазоне. К сожалению, поток энергии 0,5 Дж/см^2 приводит к разрушению стекла. Поэтому, стремясь получить большую мощность, создают многокаскадные и многоканальные лазеры.

Наиболее перспективными для технических приложений оказались лазеры, использующие смесь углекислого газа CO_2 с азотом и гелием. Здесь для осуществления инверсии используется газовый разряд, в процессе которого возбуждаются молекулы N_2 и в результате столкновений передают энергию молекуле CO_2, которая излучает волны длиной 10,6 мкм.

Заметное продвижение в область больших мощностей обеспечили газодинамические лазеры. Нагретую смесь N_2, CO_2 и воды пропускают через расширяющееся сопло. Охлаждение газовой смеси в оптическом резонаторе приводит к непрерывному излучению мощностью до 100 кВт, расход газа — 1 кг на 10 -20 кДж.

Сейчас создано большое число лазеров: твердотельных, газовых, жидкостных, полупроводниковых, химических. Исследования и разработки последних лет привели к поистине рекордным результатам. В видимом диапазоне оптического спектра получены импульсы длительностью $\tau \approx 6 \cdot 10^{-15}$ с, т.е. импульсы длительностью всего в три периода световой волны. На многокаскадном йодном лазере получены импульсы длительностью 1 нс с энергией ~100 кДж; импульсная мощность 10^{14} Вт. Создаются системы с энергией импульса ~ 2 МДж длительностью 1 нс. Стабильно работают лазеры с энергией 20–50 млДж в импульсе длительностью 20–50 фс с частотой следования 10 Гц.

2.3.4. Лазеры на свободных электронах (ЛСЭ). Новый класс приборов – генераторов излучения – представляет собой периодические структуры — *виггле́ры* (от англ. *wiggle* — покачивание) и *ондуляторы* (от англ. *ondulation* — колыхание). К ним относятся плоскослоистые среды (например, листы картона), кристаллы, магниты с чередующейся полярностью и др., через которые пропускают пучок релятивистских электронов. Ондуляторы часто вводят в прямолинейный промежуток ускорителя или накопительного кольца.

Пучок релятивистских электронов, проходя через неоднородную периодическую структуру с периодом l_0, испускает когерентное излучение. Длина волны, излучаемой в направлении скорости пучка, $\lambda \approx l_0/2\gamma^2$, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, где u — скорость пучка. При кинетической энергии T = 500 МэВ величина $\gamma \approx T/mc^2 = 10^3$. Полагая l_0 = 5 см, получим излучение в рентгеновском диапазоне с длиной волны λ = 25 нм.

Преобразование света в рентгеновское излучение. Направим световое излучение лазера частотой ν навстречу пучку электронов, движущихся с релятивистскими энергиями. Полагая в выражении (1) примера 1.2.3 $\vec{n} = -\vec{p}/p$, $\vec{n}' = \vec{p}/p$, получим частоту рассеянного излучения

$$\nu' = \nu \frac{E + pc}{E - pc + 2h\nu}.$$

Отсюда следует, что даже при взаимодействии фотонов небольших энергий $h\nu << (mc)^2/E$ с релятивистскими электронами ($E >> mc^2$) частота

$$\nu' \approx \nu \frac{E + pc}{E - pc} \approx \nu \left(\frac{2E}{mc^2} \right)^2 >> \nu.$$

Длина волны рассеянного «света» $\lambda' = \lambda/4\gamma^2$. При E = 250 МэВ инфракрасный фотон (λ = 1 мкм) преобразуется в рентгеновский ($\lambda' = 10^{-3}$ нм).

2.4. Применение лазеров

Лазеры открыли принципиально новые возможности использования излучения в технологических процессах (сварка, резка, плавление и закаливание металлов), медицине, сверхскоростной фотографии, голографии, системах оптической памяти, спектроскопии, геодезии, в термоядерном синтезе. Фемптосекундные лазеры революционизировали оптическую спектроскопию быстропротекающих процессов. Предельно короткие импульсы позволили реализовать предельные возможности прямых измерений отклика атомов, молекул и конденсированных сред. К не менее значительным результатам приводит создание лазерной плазмы, которая оказывается эффективным источником сверхкоротких импульсов мягкого рентгеновского излучения интенсивностью 10^{12} — 10^{14} Вт/см^2. Использование лазеров — многообещающий путь к генерации акустических импульсов давления превышающих 10 бар в ранее недоступном диапазоне 100 ГГц.

Сейчас активно разрабатываются различные варианты лазерного оружия. Специалисты знают, что баллистическую ракету можно эффективно уничтожить только на активной стадии полета — в первые 100—170 секунд после старта. Поэтому главное направление — создание на базе химических лазеров мощностью свыше 1 МВт систем противоракетной обороны, включающих системы слежения и наведения лазерного луча. Лазер «Хилти» мощностью 15 МВт потребляет водород и фтор как обычный ракетный двигатель. Несколько космических лазерных платформ смогут контролировать все околоземное пространство. Сейчас на орбитах Земли около 400 спутников и 500 платформ, принадлежащих Америке. В ближайшие 10 лет США планируют запустить еще 1700 космических аппаратов.

С появлением лазеров связано рождение новых разделов науки.

2.4.1. Лазерная химия. При нагревании системы молекул, состоящих из большого числа атомов, энергия равномерно распределяется по всем атомам. Поскольку с увеличением температуры разрываются самые слабые связи, то таким способом можно осуществить ограниченное число реакций. Лазерное излучение позволяет передать молекуле точно дозированное количество энергии и селективно (от лат. *selectio* — выбор) возбуждать определенные молекулярные связи, оставляя другие «замороженными». Следовательно, можно управлять химическими реакциями, разрывая нужные связи.

Фемтохимия: исследование переходных состояний при образовании молекул. Когда молекула распадается на фрагменты или соединяется с другой молекулой, то на расстояниях порядка длины молекулярной связи равной 0,1 нм возникает переходное состояние. Поскольку молекулы вылетают из зоны реакции со скоростью порядка 10^3 м/с, то переходное состояние существует в течение времени 10^{-13} с (100 фс). Наиболее короткоживущее переходное состояние длительностью 10 фс реализуется при образовании молекулы водорода. Движение ядер и электронов в переходном состоянии полностью определяет выход и скорость реакции. Для анализа всех стадий реакции необходим фотозатвор, открывающийся через интервалы времени ~10 фс.

Сегодня стало возможным следить за перегруппировкой атомов в ходе элементарных стадий химической реакции в шкале времен, охватывающей интервал от 10^{-15} с до 10^{-12}с, намного короче характерного времени спонтанного испускания 10^{-8}с.

Используя лазеры, удается исследовать переходные состояния и многочисленные детали динамики химических реакций. Первый лазерный импульс (импульс накачки) возбуждает молекулу. Второй зондирующий импульс проходит расстояние на 3 мкм больше, чем импульс накачки. Так работает «сверхскоростной» затвор.

2.4.2. Лазерный захват нейтральных частиц. Разработаны лазерные ловушки для захвата и управления атомами и органическими молекулами. Как свет может замедлить движение атомов?

Рассмотрим атом, движущийся в направлении оси z со скоростью u_1. Энергии основного и возбужденного состояний равны соответственно E_1 и E_2, $h\nu_{21} = E_2 - E_1$. Направим на него два пучка лазерного света — один распространяется в положительном направлении оси z, другой — в отрицательном. Найдем значение частоты света ν, на которой атомы поглощают фотоны с энергией $\varepsilon = h\nu$ и импульсом $p_z = -h\nu/c$ из встречного пучка. После поглощения скорость атома уменьшится до значения u_2. Используя законы сохранения импульса и энергии, получим два уравнения

$$mu_1 - h\nu/c = mu_2, \quad mu_1^2/2 + E_1 + h\nu = mu_2^2/2 + E_2,$$

из которых находим $\nu \approx \nu_{21}(1 - u_1/c)$. Мы получили очевидный результат: вследствие эффекта Доплера частота волны в системе отсчета, связанной с атомом $\nu(1 + u_1/c)$, должна быть равна ν_{21}: $\nu = \nu_{21}/(1 + u_1/c) \approx \nu_{21}(1 - u_1/c)$. Пучок света, распространяющийся в направлении оси z, не поглощается, т. к. в системе покоя атома частота света $\nu' = \nu(1 - u_1/c) \approx \nu_{21}(1 - 2u_1/c)$. Суммарное действие двух противоположно направленных пучков приводит к возникновению силы торможения. Элегантность этой идеи проявляется в том, что атом, движущийся в отрицательном направлении оси z, также будет тормозиться. Возбужденный атом излучает фотон и сам получает импульс отдачи. Однако поскольку спонтанное излучение представляет собой случайный процесс, то направления импульсов отдачи будут распределены

произвольно. Если атом освещать тремя парами противоположно направленных пучков света, ориентированных по трем взаимно перпендикулярным осям, то можно создать ловушку, удерживающую атомы в течение 0,5 с. «Вязкое» поле лазерного излучения получило название «оптической патоки» (*optical molasses*). В 1995 г. в результате лазерного охлаждения (*laser cooling*) удалось получить газ атомов гелия при температуре 0,0002 К. В настоящее время мировой стандарт времени $T = 1/\nu_{21}$ определяется по разности энергий между двумя уровнями атома цезия. Измерение положений уровней энергии ультрахолодных атомов позволило повысить точность стандарта времени до 10^{-16}.

Схема захвата с помощью одного пучка света позволила создать «оптический пинцет», который удерживает и перемещает клетки на предметном стекле микроскопа и изменяет положение хромосом внутри ядра клетки.

2.4.3. Пятое поколение световодных систем связи. Четвертое поколение основано на когерентных системах, в которых при передаче информации модулируется не интенсивность света, а его частота или фаза. При распространении света по световоду происходит ослабление сигнала, которое компенсируется повторителями — устройствами, усиливающими и *заново* излучающими сигнал. Качество системы характеризуют пропускной способностью — произведением скорости передачи информации на максимальную длину отрезка линии между повторителями. Пропускная способность с 1975 г. возрастала в десять раз через каждые четыре года и к 1987 г. достигла $5 \cdot 10^{11}$ бит/(км·с). В 1988 г. вступила в строй трансатлантическая волоконная линия.

Решающий прогресс был достигнут в системах пятого поколения в результате разработки усилителя, основными элементами которого являются диодные лазеры и отрезки волокна, легированного эрбием (*Er*). Лазерные диоды генерируют инфракрасное излучение мощностью 200 мВт с длиной волны 1,48 или 0,98 мкм, оно поглощается и переводит атомы эрбия в возбужденные состояния. При распространении слабого оптического сигнала возникает индуцированное излучение, усиливающее сигнал по всей длине волокна. Пропускная способность возрастает до значений больших $5 \cdot 10^{14}$ бит/(км·с).

2.4.4. Нелинейная оптика. Отклик среды на излучение зависит от соотношения между величинами напряженности электрического поля атомов $E_a \sim 10^8$-10^9 В/см и поля световой волны E. При значениях $E << E_a$ в среде индуцируется плотность дипольного момента, линейно зависящая от E. Интенсивное световое излучение изменяет оптические характеристики среды, которые становятся теперь нелинейными функциями напряженности электромагнитного поля волны. Нелинейная оптика — область физики, изучающая явления, обусловленные взаимодействием среды и мощных световых пучков. Рассмотрим некоторые нелинейные эффекты.

Нелинейный фотоэффект. В интенсивном поле увеличивается вероятность поглощения не одного фотона, а нескольких фотонов. В этом случае закон сохранения полной энергии (10.2.1) следует записать в виде

$$Nh\nu = A + mv^2/2,$$

где N — число поглощенных фотонов.

Генерация второй гармоники. В 1961 г. открыт эффект удвоения частоты света в кристалле. Волна от рубинового лазера (λ = 0,6943 мкм) фокусируется на кварцевой пластине, проходит через призму и попадает в детектор. После проявления фотопленки видны два пятна: одно образуется пучком лазера, второе — генерируемой в кристалле второй гармоникой излучения длиной волны 0,34715 мкм.

Самофокусировка света. Вместо дифракционной расходимости параллельного пучка может наблюдаться его сжатие. Это явление обусловлено тем, что коэффициент преломления растет с увеличением интенсивности поля и в области, занятой пучком, уменьшается к периферии. Среда становится собирающей нелинейной линзой.

Самоиндуцированная прозрачность. Среда, непрозрачная для слабого излучения, может стать прозрачной в случае интенсивного пучка света. Если энергия падающего на среду импульса ограниченного сечения достаточна для перевода в возбужденные состояния всех атомов, то наступает насыщение и среда перестает поглощать фотоны.

Часть VIII.
ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

Глава 1. Открытие радиоактивных элементов и элементарных частиц

1.1. Открытие радиоактивных элементов

После открытия в 1896 г. французским ученым А. Беккерелем радиоактивности солей урана важнейшие события в рождении ядерной физики происходили в маленьких лабораториях, оснащенных простейшим оборудованием. Изучением, казалось далеких от практических приложений явлений занимались небольшие группы энтузиастов. В этом проявилась интеллектуальная привлекательность науки. Спустя полвека ядерная физика оказывает огромное влияние на жизнь всего человечества.

1.1.1. Открытие радиоактивных элементов. Новый этап исследований был начат работами Марии Кюри-Склодовской (1867—1934) и Пьера Кюри (1859—1906). Спустя три года после окончания Парижского университета в 1896 г. Мария Кюри узнает об открытии Беккереля и сразу же начинает поиск новых источников излучения. Она обнаружила, что активность урановой руды в два раза превосходит активность урана. Это наблюдение подтвердило ее предположение, что руда содержит неизвестный активный элемент. В 1897 г. Мария и Пьер Кюри обнаружили, что при растворении урановой руды и последующем осаждении, фильтрат и осадок радиоактивны. Это дало основание подозревать, что в руде содержатся два новых элемента, которые Кюри предложили назвать *полонием* и *радием* (от лат. *radius* — луч), а само явление *радиоактивностью.* Основная цель их работы с 1898 г. — добыть чистый радий. Вначале они предполагали, что содержание радия в руде около 0,1 %. В действительности отношение оказалось равным 1: 300 000. Рабочие дни превратились в месяцы, годы. В первый год Кюри работали совместно над химическим выделением радия, но потом Пьер занялся постановкой экспериментальных исследований, Мария продолжила обработку руды. Окруженная клубами дыма, разъедающего глаза и горло, она день за днем перерабатывала кипящую массу руды и соляной кислоты. Перерабатывая в день иногда по 20 кг руды, Марии Кюри в течение четырех лет изнурительного труда удалось из 8 тонн руды выделить 0,1 г соли $RaCl_2$. Эта титаническая работа вызвала восхищение во всем мире.

Один грамм радия выделяет за час 135 кал. Интенсивность излучения спадает в два раза через 1622 года. Общий выход энергии в миллионы раз превышает энергию любого равного по массе взрывчатого вещества. Позд-

нее она разработала технологию получения металлического радия (1910 г.), занималась изучением воздействия излучения на живые клетки, исследовала наведенную радиоактивность. Две Нобелевские премии, присужденные ей в 1903 и 1911 г.г. — уникальное событие в научном мире. Она была избрана почетным членом 106 научных обществ.

1.1.2. Открытие новых частиц. В 1899 г. выдающийся английский ученый Э. Резерфорд обнаружил наличие двух компонентов излучения урана. Уже в 1902 г. ему стало ясно, что β-лучи представляют собой электроны. В 1909 г. он показал, что α-лучи — дважды ионизированные атомы гелия. Третий компонент γ-излучение — был открыт П. Вилларом в 1900 г.

В 1903 г. было доказано, что все случаи радиоактивного распада сводятся к образованию одного элемента из другого. В 1913 г. установлено, что заряд ядра равен атомному номеру элемента в таблице Менделеева.

Первая ядерная реакция. Открытие протона. И. Ньютон писал в своем трактате «Оптика» (1706): «Бог вначале создал материю в виде твердых, массивных, непроницаемых, подвижных частиц… . Никакая обыкновенная сила не в состоянии разделить то, что создал сам Бог как единое целое при своем первоначальном творении». Однако, Природа проявила себя совсем по-другому.

Самое сенсационное открытие 20-х годов – открытие Резерфордом в 1919 г. *первой ядерной реакции*. При облучении ядер азота α-частицами образовались ядра кислорода и водорода. Ядро водорода Резерфорд предложил назвать *протоном* (от греч. *protos* — первый). Масса протона m_p = 938,2796МэВ/с^2. В современных обозначениях эту реакцию записывают в виде

$$^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{14}_{7}\mathrm{N} = ^{17}_{8}\mathrm{O} + ^{1}_{1}\mathrm{H}.$$

Открытие нейтрона — начало современной ядерной физики. В 1932 г. Ирен Жолио-Кюри и Фредерик Жолио-Кюри обнаружили, что при облучении бериллия α-частицами возникало излучение, обладающее поразительным свойством выбивать протоны из вещества, содержащего водород — парафина. Этот результат они объяснили γ-излучением бериллиевой мишени. Истинную сущность явления разгадал ученик Резерфорда физик Дж. Чедвик (Нобелевская премия, 1935 г.). Он доказал, что в этой реакции образуется углерод и нейтральная частица с массой протона:

$$^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{9}_{4}\mathrm{Be} = ^{12}_{6}\mathrm{C} + ^{1}_{0}n.$$

Ее назвали *нейтрон* (от лат. *neutrum* — ни то, ни другое).

«И все же, — писал Чедвик в 1962 г., — я не могу избавиться от чувства, что должен был бы добиться цели быстрее. Я мог бы выдвинуть в свое оправдание ряд извиняющих обстоятельств: нехватку оборудования и т. д. Но, несмотря на все это, я должен признать, что не смог достаточно глубоко продумать свойства нейтрона, особенно те из них, которые наиболее ясно свидетельствуют о его существовании. Это успокаивающая мысль. Утешаю себя тем, что всегда гораздо труднее сказать первое слово о предмете, каким

очевидным он впоследствии не оказался, чем последнее слово. Это известная истина и, может быть, она послужит мне извинением».

В 1932 г. советский физик-теоретик Д.Д. Иваненко предположил, что нейтрон — элементарная частица. Нейтрон устойчив только внутри ядра. Свободный нейтрон распадается. Время жизни нейтрона $\tau = 15{,}3$ мин. Масса нейтрона $m_n = 939{,}573$ МэВ/с^2.

В этом же году Д. Д. Иваненко и немецкий физик Г. Гейзенберг предложили протон-нейтронную модель ядра, подтвержденную последующими экспериментами. Ядро состоит из N нейтронов и Z протонов. Общее число нуклонов (от лат. *nucleus* — ядро), т. е. протонов и нейтронов называют *массовым числом* $A = Z + N$. В нормальном состоянии атом содержит Z электронов. Элементы, ядра которых содержат одинаковое число протонов, называются *изотопами* элемента. Обозначение ${}^{A}_{Z}X$ — отражает состав ядра: X — символ элемента, A — массовое число, Z — атомный номер в таблице Менделеева. Изотопы водорода: ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ — дейтрон, ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$ — тритий.

Открытие нейтрона привело к возникновению нейтронной физики с ее уникальными методами исследования жидкостей и твердых тел. Нейтроны играют ключевую роль в ядерной энергетике, химическом анализе, геологической разведке и т. д.

В 1932 г. еще никто не мог предвидеть удивительных возможностей, которые откроет нейтронная физика для науки и техники, и ужасающих последствий, угрожающих существованию человечества. Открытие нейтрона воспринималось как событие первостепенного значения — впервые в природе встретилась частица, не имеющая электрического заряда. Советский ученый С. Фриш в воспоминаниях «Сквозь призму времени» (1992 г.) пишет, что его доклад о нейтроне обсуждался в партийном комитете института и «был квалифицирован как попытка отвлечь внимание сотрудников рассказами об открытии буржуазных физиков, развлекающихся нахождением никому не нужных частиц». Подобный подход привел позднее к разгрому генетики и кибернетики, которые так и остались «буржуазными» науками.

Пример 1.1.1. В процессе естественной радиоактивности изотоп радия ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ превращается в стабильный изотоп свинца ${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$. Найдем число α-распадов k_1 и число β–распадов k_2. Используя законы сохранения числа нуклонов $226 = 4k_1 + 206$ и заряда $88 = 2k_1 - k_2 + 82$, получим два уравнения, из которых находим $k_1 = 5$, $k_2 = 4$.

Открытие позитрона. В 1928 г. гениальный английский физик Поль Дирак получил уравнение, из которого следовало, что у электрона должен существовать «двойник» — *позитрон* (от лат. *posi* — положительный) — *античастица*, имеющая ту же массу, но с противоположным знаком заряда. Позднее теоретики доказали, что у любой частицы должен быть «двойник» – античастица.

Позитрон был обнаружен в 1932 г. К. Андерсеном в космических лучах (Нобелевская премия, 1936 г.). Это открытие имело фундаментальное значение, т. к. позитрон не принадлежит «обычному» земному веществу. В 1933 г. было

получено доказательство *аннигиляции* (от лат. *annihilatio* — исчезновение) электрон-позитронной пары — реакции превращения пары в несколько γ-квантов.

Открытие античастиц. На беватроне Беркли в США были открыты антипротон (Нобелевская премия, 1955 г.) и антинейтрон (1956 г.). В 1965 г. было получено первое антиядро – антидейтрон – связанное состояние антипротона и антинейтрона. На ускорителе протонов в Серпухове открыты ядра антигелия-3 (1969 г.) и антитрития (1974 г.). Материю, построенную из античастиц, называют *антивеществом*. В 1995 г. на накопителе антипротонов Европейской организации ядерных исследований вблизи Женевы (CERN — Conseil Europeen pour la Recheche Nucleaire) были синтезированы первые антиатомы — атомы антиводорода. Это открытие позволит осуществить проверку основных принципов квантовой теории. Вопрос о распространенности антивещества во Вселенной остается открытым.

1.2. Радиоактивный распад атомных ядер

1.2.1. Искусственная радиоактивность. Упустив возможность открыть нейтрон, супруги Жолио-Кюри установили, что алюминиевая фольга в окошке, через которую пропускали α-частицы, становилась радиоактивной, испуская не только нейтроны, но и позитроны. Однако их доклад на Сольвеевском конгрессе об открытии нейтронно-позитронного распада был встречен с недоверием. Вскоре они поняли свою ошибку: реакция шла по схеме

$$^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{27}_{13}\mathrm{Al} \rightarrow ^{30}_{15}\mathrm{P} + ^{1}_{0}n, \quad ^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow ^{30}_{14}\mathrm{Si} + \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}}.$$

Это событие произошло в *январе 1934* г., когда кто-то из них опрокинул ампулу с *α*-радиоактивным полонием и заметил, что счетчик продолжал регистрировать позитроны — все медленнее и медленнее. Позитроны возникали при распаде *нового нестабильного элемента* – радиоактивного фосфора $^{30}_{15}\mathrm{P}$. Но как убедить в этом химиков, если его период полураспада 2,5 мин? Пришлось изобрести экспресс-анализ фосфора. Нобелевская премия (1935 г.) подвела итог их настойчивости. Так была открыта искусственная радиоактивность, которая впоследствии приобрела особенно важное значение. Из 2670 известных радиоактивных изотопов лишь около 300 природного происхождения, остальные получены в результате ядерных реакций.

1.2.2. Закон радиоактивного распада. Радиоактивный распад подразделяется на α-распад, β-распад, спонтанное деление ядер и γ-распад. После создания квантовой механики выдающийся русский физик Георгий Гамов (1904—1968) развил в 1928 г. теорию α-распада.

Атомное ядро является квантовой системой многих сильно взаимодействующих нуклонов. Поэтому анализ механизма ядерных реакций – сложнейшая проблема, решением которой в наши дни занимаются большие группы экспериментаторов и теоретиков во всем мире. Наша задача существенно скромнее: мы найдем зависимость макроскопического числа $N(t)$ нераспавшихся ядер от времени, используя экспериментально измеряемую величину ν, называемую постоянной распада. Эта величина равна вероятности распада

ядра в единицу времени. Существенным свойством радиоактивности является независимость ν от времени. Поэтому вероятность распада одинакова как для ядра, «прожившего» год, так и для ядра, «прожившего» десять лет. Отметим важнейшие особенности статистического описания распадов: невозможно предсказать, какие именно ядра распадутся за время Δt, нельзя также предсказать, в какой момент времени распадется данное ядро.

Пусть $N(t)$ — функция, определяющая макроскопическое число одинаковых ядер в момент t, а ΔN — приращение, обусловленное распадом ядер ($\Delta N < 0$). Тогда, согласно определению

$$\nu = -\frac{1}{N}\frac{\Delta N}{\Delta t}.$$

Следовательно, количество ядер, распавшихся за интервал $(t, t + \Delta t)$, пропорционально числу нераспавшихся ядер

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\nu N. \qquad (1.2.1)$$

Из этого уравнения находим

$$N(t) = N_0 e^{-\nu t}, \qquad (1.2.2)$$

где N_0 – число ядер в момент времени $t = 0$.

Величина νN называется *активностью вещества*. Единица активности в СИ — *беккерель* (*Бк*), равный одному распаду в 1 *с*. Внесистемная единица кюри (*Ки*): 1 *Ки* = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ *Бк*.

Скорость распада характеризуется *периодом полураспада* $T_{1/2}$ – промежутком времени, за который число радиоактивных ядер уменьшается в два раза. Полагая в (1.2.2) $t = T_{1/2}$, $N(T_{1/2}) = N_0/2$, получим $1 = 2\exp(-\nu T_{1/2})$. Это соотношение позволяет исключить ν из (1.2.2):

$$N(t) = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}. \qquad (1.2.3)$$

Таким образом, число ядер уменьшается по закону геометрической прогрессии. Однако отдельные ядра могут существовать в течение длительного промежутка времени $t >> T_{1/2}$. По этой причине полезно ввести среднее время жизни τ радиактивного ядра. Учитывая, что величина $-\Delta N(t) > 0$ означает число ядер, «проживших» t *с* и распавшихся в интервале $(t, t + \Delta t)$, найдем среднее время жизни

$$\tau = -\int_0^\infty \frac{t\,dN}{N_0} = \int_0^\infty \nu t e^{-\nu t}\,dt = \nu^{-1}. \qquad (1.2.4)$$

1.2.3. Типы распадов. Кроме давно известных α, β, γ-распадов советскими физиками Г.Н. Флеровым и К.А. Петржаком открыт в 1940 г. четвертый тип распада: самопроизвольное деление ядер урана на две примерно равные части. В 1970 г. обнаружили протонную радиоактивность: выброс протона из ядра. Шестой тип распада теоретически предсказал в 1960 г. со-

ветский физик В.И. Гольданский — это двухпротонная или двухнейтронная радиоактивность. Обнаружить этот вид распада еще не удалось.

1.2.4. Радиоактивные семейства. Встречающиеся в природе радиоактивные элементы либо имеют очень большие времена жизни, либо являются членами ряда или семейства, в начале которого находится долгоживущий элемент. Изменение массового числа A происходит только при α-распаде, $\Delta A = -4$. Радиоактивные ядра можно разделить на четыре семейства. Массовое число в пределах каждого из них описывается формулой $A = 4n + s$, $s = 0, 1, 2, 3$. Семейство урана $s = 2$, $51 \le n \le 59$ начинается с урана-238 и в результате последовательных α и β-распадов заканчивается стабильным изотопом свинца ^{206}Pb. Ряд семейства $s = 3$, $51 \le n \le 58$ стартует с урана-235 и заканчивается свинцом-207. Для семейства тория $s = 0$, $51 \le n \le 58$ — от ^{232}Th до ^{208}Pb. Самым долгоживущим членом семейства $4n + 1$ является изотоп нептуния –237 ($T_{1/2}$ = 2,2 млн лет). В геологическом масштабе это небольшое время и поэтому это семейство в природе не встречается.

Сейчас обсуждается проект создания к 2007 г. крупнейшего комплекса пучков радиоактивных ионов в японском центре РИКЕН. Максимальная энергия ионов 1-1,45 ГэВ/нукл. Реализация проекта откроет принципиально новые возможности исследований в физике ядра, позволит предельно расширить семейство изучаемых ядер, формируя любые разрешенные природой комбинации нуклонов: ожидается получение до 2,5 тысяч новых изотопов ядер. Возможно мы станем свидетелями рождения ядерной астрофизики, исследующей проблемы синтеза элементов во Вселенной.

Задача 1.2.1. В процессе естественной радиоактивности изотоп урана $^{238}_{92}$U превращается в стабильный изотоп свинца $^{206}_{82}$Pb. Найти число альфа-распадов k_1 и число бета-распадов k_2.

Решение. Из закона сохранения атомного числа и закона сохранения заряда получим два уравнения $238 = 4k_1 + 206$, $92 - 2k_1 + k_2 = 82$, из которых находим $k_1 = 8$, $k_2 = 6$.

1.2.5. Вековое равновесие. Все химические элементы на Земле образовались практически одновременно. Возраст наиболее старых пород оценивается в 4,6 *млрд* лет, или $1{,}5 \cdot 10^{17}$ *с*. Оценим период полураспада радиоактивного элемента, «дожившего» до наших дней. Изотоп можно считать практически исчезнувшим, если с момента его рождения прошло десять периодов полураспада, так как его количество уменьшается в $2^{10} = 1024$ раз. Следовательно, период полураспада должен быть не менее $4{,}5 \cdot 10^8$ лет. Поэтому первичными являются три самых долгоживущих элемента: торий $^{232}_{90}$Th ($T_{1/2} = 1{,}39 \cdot 10^{10}$ *лет*), уран $^{238}_{92}$U ($T_{1/2} = 4{,}51 \cdot 10^9$ *лет*) и уран $^{235}_{92}$U ($T_{1/2} = 7{,}1 \cdot 10^8$ *лет*).

А как удалось обнаружить радий, период полураспада которого $T_{1/2} = 1620$ *лет*? Дело в том, что изотоп радия $^{226}_{88}$Ra может образоваться как промежуточный продукт распада урана $^{238}_{92}$U. Вначале количество ядер радия растет, несмотря на их убыль, за счет распада. Затем наступает стацио-

нарное состояние: скорость образования ядер радия равна скорости их распада. В результате относительное содержание радия не меняется: в одной тонне урана содержится 0,36 г радия. Отметим, что активность 1 Ku соответствует числу распадов 1 г радия за 1 с.

1.2.6. Острова стабильности. Ученых давно интересовала проблема: почему в природе не встечаются трансурановые элементы, т. е. элементы с атомным номером $Z > 92$? Стабильность ядра определяется условием равновесия ядерных короткодействующих сил притяжения между нуклонами и кулоновским отталкиванием протонов. Наиболее сильным является *n-p* взаимодействие. Поэтому наиболее устойчивы ядра с близким числом нейтронов и протонов. Это наглядно иллюстрирует карта ядер в координатах *N-Z* (*Z*, *N* — числа протонов и нейтронов в ядре). Внешние кривые ограничивают область, занятую 273 ядрами, существующими в природе, и почти 7000 ядрами , которые могут быть синтезированы искусственно. Число еще неизвестных ядер составляет около 4000.

В настоящее время синтезированы все стабильные ядра легчайших элементов — водорода, гелия, лития, бериллия. Исследование свойств ядер позволило открыть новые явления. Сначала была обнаружена «гелиевая аномалия» — стабильность ядер с увеличением числа нейтронов при приближении к линии стабильности не уменьшалась, а возрастала. Другое явление — «нейтронное гало» — проявилось в аномально большом возрастании нуклонного радиуса ядер, сильнообогащенных нейтронами. Теоретики предсказывают существование «острова стабильности» в области неизвестного элемента ${}^{298}_{114}X$. Чтобы достичь «острова» ученым из ОИЯИ (Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна) недавно не хватало всего 10 нейтронов.

Открытие острова стабильности. Физики Дубны первыми подошли к «отрогам» — границам островка стабильности. К марту 2001 г. они получили семейство радиоактивных изотопов с номерами 108, 112, 114 и 116. Время жизни двух последних элементов намного превосходит время жизни их легких предшественников. Наиболее интересные эффекты ожидались при синтезе элементов с нечетными атомными номерами. Согласно теории 115-й элемент в результате последовательных альфа-распадов должен перейти в элементы с номерами 113, 111, 109, 107, 105. Летом 2003 г. на ускорителе сверхтяжелых ионов в Дубне был синтезирован 115-й элемент в результате взаимодействия мишени из 95-го элемента – америция с ионами изотопа кальция. Три раза детектор регистрировал одинаковую картину: 5 альфа-распадов продолжительностью 20 секунд (огромное время по ядерным масштабам), которые приводили к долгоживущему изотопу дубния-105. Этот изотоп прожил 20 часов!

1.2.7. Радиоуглеродный метод датировки. 90% космических лучей, попадающих на Землю, состоят из протонов. Сталкиваясь с атомами в атмосфере Земли, протоны разбивают ядра и выбивают из них вторичные протоны и нейтроны, которые вступают в новые реакции. Наибольший интерес представляет реакция ${}^{1}_{0}n + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$, поскольку атмосфера Земли содержит 79% азота. Углерод-14 β-радиоактивен и распадается с периодом

полураспада $T_{1/2}$ = 5730 лет. Изотопы углерода соединяются с кислородом и в виде углекислого газа усваиваются растениями и живыми организмами. Устанавливается равновесная концентрация изотопа $^{14}_{6}C$: в одном грамме углерода органического происхождения содержится 70 млрд атомов углерода-14; каждую минуту 15 из них распадаются. Однако с момента гибели живого организма число атомов $^{14}_{6}C$ уменьшается в соответствии с законом радиоактивного распада. Измеряя скорость распада, можно определить возраст любой археологической находки. За это открытие американский физик У. Либби удостоен Нобелевской премии (1960 г.).

1.3. Реакции деления тяжелых ядер

1.3.1. Открытие Ферми. Познакомившись в марте 1934 г. с сообщением об открытии искусственной радиоактивности, итальянский физик Энрико Ферми — человек выдающегося интеллекта и безграничной энергии, первым понял, что можно получить новые элементы в реакциях захвата нейтронов ядрами. К лету было облучено нейтронами 60 элементов и получено 40 радиоактивных продуктов (Нобелевская премия, 1938 г.). 22 октября Ферми обнаружил необычный эффект: радиоактивность образца возрастала, если между ним и источником нейтронов поместить кусок парафина. «Около часа дня работа была, как обычно, прервана, а когда мы вернулись к трем, Ферми уже нашел объяснение этого странного поведения отфильтрованных нейтронов», — пишет участник эксперимента Э. Амальди.

Оказалось, что процесс захвата сильно зависит от энергии нейтрона: вероятность захвата нейтрона ядром достигает максимальной величины для медленных нейтронов. Попадая в кусок парафина, нейтроны замедлялись и соответственно увеличивалось число радиоактивных ядер. Возникла соблазнительная идея получить несуществующие в природе трансурановые элементы, облучая нейтронами ядра последнего в таблице Менделеева урана $^{238}_{92}U$. Ферми предположил, что ядро урана, захватив нейтрон, станет β-радиоактивным и после испускания электрона превратится в ядро элемента с порядковым номером 93. Началась упорная четырехлетняя погоня за трансурановыми элементами, которая привела к открытию деления ядра урана.

1.3.2. Открытие деления ядер урана. В Берлине этой проблемой занялись первоклассный химик О. Ган, Лизе Мейтнер и Ф. Штрассман. В течение четырех лет они исследовали продукты реакции урана с нейтронами. К концу 1938 г. О. Ган и Ф. Штрассман обнаружили вещество, химические свойства которого соответствовали барию. Но они не решались отождествить его с барием, т. к. этот шаг противоречил бы всем прежним представлениям. Деление ядра было бы равносильно тому, что валун раскалывается от легкого удара маленьким камушком. Однако теоретические исследования, проведенные Л. Мейтнер и английским физиком О. Фришем в начале января 1939 г. подтвердили возможность деления ядер урана на изотопы бария и криптона.

Энергия осколков составляла около 200 МэВ. В конце января Ферми, бежавший из Италии в 1938 г. от «мягкого» фашистского режима Муссоли-

ни, и работавший в это время в Колумбийском университете, предположил, что при делении должно испускаться несколько нейтронов, которые могут вызвать последующие деления, т. е. в уране возможна *цепная реакция.* Сразу же возникло множество вопросов, связанных с перспективами практического использования внутриядерной энергии.

Венгерский ученый Лео Сцилард первым осознал, что появляется возможность создать атомную бомбу. По его просьбе А. Эйнштейн 2 августа 1939 г., накануне начала Второй мировой войны, написал письмо президенту Ф. Д. Рузвельту о необходимости создать бомбу быстрее, чем нацисты. 6 декабря 1941 г. в США начались работы по созданию атомной бомбы — «Проект Манхеттон».

1.3.3. Закон сохранения энергии в ядерных реакциях. Пусть ядро ${}^{A}_{Z}G$ ($Z = Z_1 + Z_2$, $A = A_1 + A_2$) представляет систему связанных ядер X и Y с массовыми числами A_1, A_2 и атомными номерами Z_1, Z_2. Записывая для каждого ядра соотношения (VI. 1.4.3) из раздела «Основы теории относительности» получим массу ядра G:

$$M(Z, A) = M(Z_1, A_1) + M(Z_2, A_2) - U/c^2 \qquad (1.3.1)$$

$$U = E_{св}(Z, A) - E_{св}(Z_1, A_1) - E_{св}(Z_2, A_2). \qquad (1.3.2)$$

Величину U называют энергией связи ядер $M(Z_1, A_1)$ и $M(Z_2, A_2)$ в составном ядре $M(Z, A)$ или энергией реакции.

Для того, чтобы выяснить пригодность реакций для ядерной энергетики, необходимо знать зависимость энергии связи на один нуклон $\varepsilon(A) = E_{св}(Z, A)/A$. С увеличением A функция $\varepsilon(A)$ быстро растет и достигает «железного» максимума $\varepsilon = 8{,}7$ МэВ в области стабильного изотопа железа ${}^{56}Fe$. Далее с увеличением А функция $\varepsilon(A)$ почти линейно спадает. Удельная энергия связи тяжелых ядер $\approx 7{,}6$ МэВ.

Такая зависимость позволяет объяснить выделение энергии при слиянии легких ядер и распаде тяжелых ядер. На графике функции $\varepsilon(A)$ есть небольшие «зубцы», соответствующие устойчивым ядрам, в которых числа нейтронов или протонов равны одному из «*магических*» чисел: 2, 8, 20, 28, 50, 82. Дважды магические ядра, в которых числа нейтронов и протонов совпадают с магическими числами, сверхстабильны. Таких ядер всего пять: гелий, кислород, кальций — 40, 48 и свинец.

1.3.4. Деление ядер урана. Если $U > 0$, то ядро G устойчиво по отношению к распаду на ядра X и Y. Ядро, масса которого больше суммы масс ядер X и Y, неустойчиво и может распасться: внутриядерная энергия $U_р = -U > 0$ перейдет в кинетическую энергию движения осколков X и Y.

Анализ зависимости $E_{св}(Z, A)$ показывает, что для тяжелых ядер с $Z > 82$ выполняется условие $U < 0$. Например, изотоп урана ${}^{235}_{92}U$ самопроизвольно распадается с полупериодом $7 \cdot 10^8$ лет. В то же время оказалось, что этот изотоп обладает уникальным свойством: при поглощении нейтрона, ядро ${}^{235}_{92}U$ расщепляется. Оценим величину кинетической энергии осколков $U_р = -U$ при крайне редком делении тяжелого ядра на два одинаковых осколка. Среднее

значение энергии связи на один нуклон для тяжелых ядер 7,6 МэВ, а для ядер с массовыми числами A_m равно 8,45 МэВ. Из (1.3.2) находим

$$U_p \approx -[E_{св}(Z, A) - 2E_{св}(Z/2, A/2)] = A(8{,}45 - 7{,}6)\ \text{МэВ} = 0{,}85A\ \text{МэВ}.$$

Полагая $A = 235$, получим $U_p \approx 200$ МэВ.

Ядро урана-235 распадается примерно по 30 различным каналам. Энергия реакции 202 МэВ при захвате быстрого нейтрона распределяется следующим образом: кинетическая энергия осколков (169,8 МэВ) с отношением массовых чисел $A_{m1}/A_{m2} = 2/3$ в интервалах $80 \le A_{m1} \le 110$ и $125 \le A_{m2} \le 155$, кинетическая энергия нейтронов (7,3 МэВ), мгновенное γ-излучение (6,9 МэВ), энергия β-распада осколков (5,3 МэВ), запаздывающее γ-излучение (5,2 МэВ) и излучение антинейтрино (7,1 МэВ). Наиболее вероятные значения массовых чисел равны 95 и 139. В результате деления образуется около 180 различных радиоактивных ядер. 7% выхода приходится на ксенон $^{140}_{54}Xe$ и стронций $^{94}_{38}Sr$.

При делении m = 1кг урана $^{235}_{92}U$ энергия продуктов деления $mc_U = (mN_A/M)U_p = 8{,}19 \cdot 10^{13}$ Дж эквивалентна сжиганию 1 900 т сырой нефти. Отметим, что удельная теплота сгорания нефти, $c \sim 3{,}8 \cdot 10^7$ Дж/кг, в два миллиона раз меньше. При полном делении 1 кг урана-235 выделяется энергия, эквивалентная энергии взрыва 20 000 т тротила (удельная теплота сгорания $c = 4{,}1 \cdot 10^6$ Дж/кг).

Утилизация кинетической энергии осколков деления — основа использования атомной энергии.

1.3.5. Взрыв атомной бомбы. При делении урана-235 испускаются в среднем 2,6 быстрых вторичных нейтронов. Если создать условия, при которых среднее число рожденных вторичных нейтронов в результате захвата ядром нейтрона, избежавшего утечки через поверхность сборки, больше единицы, то число разделившихся ядер будет расти по закону геометрической прогрессии. В результате можно реализовать *цепную ядерную реакцию.*

Допустим, что при делении ядра образуются в среднем два нейтрона. Тогда в n-м поколении появятся $2^n \approx 10^{0{,}3n}$ нейтронов. Промежуток времени между последующими актами деления составляет величину $\tau \sim 10^{-8}$ с. Полагая в уравнении $(mN_A/M) = 10^{0{,}3n}$ массу урана m = 50 кг, найдем n = 90 — менее, чем за 90 циклов деления за одну миллионную долю секунды выделится энергия эквивалентная взрыву 1 млн тонн тротила (1 Мт = 10^{15} кал = $= 4{,}2 \cdot 10^{15}$ Дж). Так происходит взрыв атомной бомбы. Для урана-235 критическая масса — 50 кг, для плутония-239–11 кг, для урана-233–16 кг.

Глава 2. Ядерная энергетика

2.1. Цепная реакция деления

Если в последующих делениях примет участие в среднем один нейтрон, то скорость реакции можно регулировать. В реальных условиях реакция идет в ограниченном объеме и часть нейтронов вылетает наружу. Возможен также процесс радиационного захвата нейтрона ядром урана, не приводя-

щий к делению: возбужденное ядро испускает γ-квант. Этот процесс будет конкурировать с делением.

Важнейшей характеристикой, определяющей развитие цепной реакции, является среднее число нейтронов ν_m, образующихся при поглощении в уране одного нейтрона. Для вычисления величины ν_m необходимо знать основные характеристики столкновений нейтронов с ядрами урана — *поперечные сечения процессов*, пропорциональные вероятности перехода начального состояния нейтрона и ядра в одно из конечных состояний. *Сечение процесса* σ представляет собой характеристику выходного канала реакции — величину площади плоскости, перпендикулярной относительной скорости, в пределах которой происходит эффективное взаимодействие частиц.

Полное сечение процесса взаимодействия нейтрона с ядром $\sigma_a = \sigma_f + \sigma_\gamma$, где σ_f — сечение деления (*capture fission*), σ_γ — сечение радиационного захвата. Величины сечений очень сильно зависят от энергии нейтрона. Основной интерес представляют реакции с быстрыми ($E > 1$ МэВ) и *тепловыми* ($E < 0{,}1$ эВ) нейтронами.

Пусть концентрации ядер $^{235}_{92}U$ и $^{238}_{92}U$ в реакторе равны соответственно n_1 и n_2. Среднее число нейтронов в одном акте деления — ν_1 и ν_2. Тогда среднее число вторичных нейтронов на один захват нейтрона в среде, представляющей собой смесь изотопов

$$\nu_m = (\nu_1\sigma_{f1}n_1 + \nu_2\sigma_{f2}n_2)/(\sigma_{a1}n_1 + \sigma_{a2}n_2). \qquad (2.1.1)$$

На практике наиболее важно осуществить управляемую цепную реакцию в природном уране, который содержит изотоп $^{238}_{92}U$ и всего 0,72 % изотопа $^{235}_{92}U$: на одно ядро $^{235}_{92}U$ приходится 138 ядер $^{238}_{92}U$. Однако быстрые нейтроны не способны поддерживать цепную реакцию в естественной смеси изотопов, т. к. недостаточна концентрация урана-235. Действительно, подставляя в (2.1.1) значения сечений для быстрых нейтронов

$$^{235}_{92}U : \sigma_{f1} = 1{,}4 \text{ барн}, \sigma_{a1} = 1{,}4 \text{ барн}, \nu_1 = 2{,}74,$$

$$^{238}_{92}U : \sigma_{f2} = 1 \text{ барн}, \sigma_{a2} = 5{,}5 \text{ барн}, \nu_2 = 2{,}7,$$

и $n_1 = 0{,}0072$, получим $\nu_m = 0{,}49 < 1$. Для реализации цепной реакции на быстрых нейтронах необходимо обогатить природный уран изотопом $^{235}_{92}U$. Так возникла проблема *разделения изотопов* урана, которая в 1939 г. казалась неразрешимой.

2.2. Ядерные реакторы

2.2.1. Реакторы на тепловых нейтронах. При захвате тепловых нейтронов изотопами урана значения сечений соответственно равны

$$^{235}_{92}U : \sigma_{f1} = 582 \text{ барн}, \sigma_{a1} = 681 \text{ барн}, \nu_1 = 2{,}41;$$

$$^{238}_{92}U : \sigma_{f2} = 10^{-6} \text{ барн}, \sigma_{a2} = 2{,}7 \text{ барн}, \nu_2 = 0.$$

Следовательно, поглощение теплового нейтрона ядром урана-238 приводит лишь к радиационному захвату. В то же время сечение деления урана-235 составляет приближенно 5/6 сечения захвата нейтрона ядром урана 235, а сечение расщепления урана-235 тепловыми нейтронами почти в двести раз превышает сечение захвата нейтронов ядрами урана-238. Подставляя значения сечений в (2.1.1), найдем $\nu_m = 1{,}33$. Следовательно, *тепловые нейтроны способны вызвать цепную реакцию в природном уране.*

Однако энергия вторичных нейтронов лежит в области от 0,1 МэВ до 10 МэВ. Поэтому для осуществления самоподдерживающейся реакции необходимо использовать *замедлители.* При столкновении нейтронов с ядрами элементов замедлителя энергия нейтронов должна уменьшится до значений меньших 1 эВ. Этот замедлитель должен эффективно снизить энергию нейтронов, так как в области энергий от 100 эВ до 6 эВ сечение радиационного захвата ураном-238 имеет несколько максимумов в 200—220 раз превосходящих сечение деления урана-235. В результате захвата нейтрона ядро урана-238 может не расщепиться, а превратиться через два последовательных β-распада в новые трансурановые элементы *нептуний* и *плутоний*, открытые в 1940 г. Схема реакции

$$n + {}^{238}_{92}\mathrm{U} = {}^{239}_{92}\mathrm{U} + \gamma \ \ (23\ \text{мин}) \rightarrow {}^{239}_{93}\mathrm{Np} + e^- \ \ (2{,}4\ \text{дня}) \rightarrow {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} + e^-. \qquad (2.2.1)$$

Для быстрого замедления нейтронов вещество-замедлитель должно состоять из относительно легких элементов. Хороший замедлитель не должен поглощать нейтроны. Этим условиям удовлетворяет тяжелая вода, бериллий и чистый графит. Если в природном уране слегка увеличить содержание урана-235, то в качестве замедлителя можно использовать обычную воду, незначительно поглощающую нейтроны.

Первый экспериментальный реактор на природном уране был запущен 2 декабря 1942 г. в США физиками, возглавляемыми Э. Ферми. «Было ясно, - писал впоследствии Дж. Кокрофт, — что Ферми открыл дверь в атомный век». В СССР первый реактор создан 25 декабря 1946 г. группой физиков под руководством И.В. Курчатова. Первая в мире АЭС мощностью 5 МВт была пущена 27 июня 1957 г. в. Обнинске. Промышленный российский уран-графитовый реактор РБМК (реактор большой мощности канальный) позволил АЭС развить мощность $P = 3200$ Мвт при стационарной загрузке 192 тонн урана обогащенного до 1,8 %. КПД преобразования в электроэнергию — 31%.

Пример 2.2.1. Реактор реактора РБКМ чернобыльского типа имеет мощность $P = 3200$ М Вт, КПД $\eta = 0{,}31$. Найдем массу урана-235, потребляемую за сутки.

Из уравнения $P\Delta t = \eta \Delta m N_A U_p / M$ находим $\Delta m/\Delta t = 0{,}117$ г/с. Полагая $\Delta t = 24 \cdot 60 \cdot 60$ с, находим $\Delta m = 10{,}1$ кг. Это означает, что образуется около 10 кг радиоактивных отходов. Отметим, что при КПД = 0,4 суточная потребность тепловой станции составляет 6 750 т угля или 4 600 т нефти.

2.2.2. Реакторы на быстрых нейтронах. Изотоп урана $^{238}_{92}U$ делится только быстрыми нейтронами с энергиями свыше 1 МэВ. Однако вследствие столкновений энергия нейтронов деления быстро падает до значений < 0,4 МэВ. В результате захвата нейтрона ядро урана-238 в результате реакции (2.2.1) превращается в ядро плутония $^{239}_{94}Pu$.

Плутоний делится при облучении медленными нейтронами, порождая в среднем 2,92 нейтрона, т. е. сам представляет ценное ядерное горючее. Отделение плутония от урана — значительно более простая проблема, чем разделение изотопов урана, не отличающихся химическими свойствами.

Если в активной зоне реактора замедлитель отсутствует, то нейтроны поглощаются, прежде чем в результате столкновений энергия уменьшится. Для поддержания реакции на *быстрых нейтронах* необходимо обогатить природный уран изотопом $^{235}_{92}U$. При обогащении до 20-30% число вторичных нейтронов на один захват резко увеличивается. Тогда необходимость в замедлителе отпадает; реактор можно сделать очень компактным. Реактор мощностью 250 Мвт имеет активную зону объемом менее кубометра — такие компактные реакторы устанавливают на атомных подводных лодках.

Большая часть нейтронов, избежавших утечки, участвует в реакции (2.2.1). Поскольку нейтроны образуются в количестве большем, чем необходимо для поддержания цепной реакции, то происходит накопление плутония. Для предотвращения утечки нейтронов активную зону окружают экраном из урана-238. Такой отражатель возвращает часть нейтронов, а остальные поглощает, образуя плутоний. В процессе работы при первоначальной загрузке урана-235, плутония или их смеси идет превращение балластного урана-238 в плутоний, который делится так же легко, как уран-235. При работе реактора нарабатывается плутония больше, чем выгоревшего урана-235. Это и есть *процесс воспроизводства ядерного топлива*. В связи с этим реактор на быстрых нейтронах, в котором производится плутоний-239, является наиболее перспективным для реализации процесса воспроизводства топлива (Белоярская АЭС, 1980 г.). Такой реактор называется реактором-размножителем или *бридером* (от. англ. to *breed* — размножаться). Другая возможность — использование тория. Торий-232, захватывая нейтрон, в результате радиоактивного распада превращается в уран-233, который делится медленными нейтронами. В земной коре тория в 3 раза больше урана.

Максимальное сжигание урана-238 — основа большой ядерной энергетики. В реакторах с тепловыми нейтронами сгорает меньше одного процента природного урана. Поэтому реакторы на быстрых нейтронах должны стать «второй волной» ядерной энергетики.

2.2.3. Управление реактором. Только один из нейтронов деления необходим для поддержания цепной реакции. Часть нейтронов бесполезно теряются в результате вылета из активной зоны, захватываются примесями в замедлителе и теплоносителем. Цепная реакция возможна лишь в том случае, когда коэффициент размножения $k_{эф}$, равный отношению плотности нейтронов в последую-

щем поколении к плотности нейтронов в предыдущем поколении, станет больше единицы. Для реализации цепной реакции в ограниченной среде необходимо, чтобы коэффициент размножения нейтронов удовлетворял условию $k_{эф} \geq 1$. Значение $k_{эф} = 1$ называют критическим. Состояние реактора характеризуют *реактивностью* — величиной $\rho = (k_{эф} - 1)/k_{эф}$. Если значение $k_{эф} < 1$, то цепная реакция затухает. Цепная реакция реализуется при $k_{эф} = 1$. Если $k_{эф}$ близко к единице, то $\rho \approx k_{эф} - 1$. При значениях $k_{эф} > 1$ реакция деления может стать неуправляемой. Реактивность *подкритического* реактора отрицательна, а *надкритического* – положительна. Избытком урана сверх критической массы создается запас реактивности, который используется при выводе реактора на заданную мощность. В стационарном режиме реактивность уменьшается из-за выгорания ядерного топлива и накопления продуктов деления.

Нейтроны, рождающиеся при делении ядер, называются *мгновенными*. Время жизни мгновенных нейтронов при замедлении в графите $\tau \sim 2 \cdot 10^{-4}$ с. Если бы испускались только мгновенные нейтроны, то управление реактором было бы невозможным: при реактивности $\rho = 0{,}0025$ мощность реактора возросла бы за 1 с в 150 раз.

Однако не все нейтроны испускаются мгновенно. Осколки деления испускают *запаздывающие* нейтроны. 0,64% всех нейтронов, образующихся при делении осколков урана, запаздывают в среднем на 12,4 с после образования мгновенных нейтронов. В том случае среднее время жизни поколения нейтронов возрастает до значения 0,083 с.

Управление реактором стало возможным благодаря запаздывающим нейтронам. Пусть после поглощения в активной зоне N нейтронов первого поколения рождается kN нейтронов. Для анализа работы реактора принимают, что $k_{эф} = k_м + k_з$, где $k_м = k_{эф}(1 - \beta)$, $k_з = k_{эф}\beta$, $\beta \approx 0{,}0064$ — эффективная доля запаздывающих нейтронов. Очевидно $k_м \approx 1 + \rho - \beta$. Реактор с коэффициентом $k_м = 1$ называется *мгновенно критическим*. В этом случае $k_{эф} = 1/(1 - \beta) \approx 1 + \beta$, $\rho \approx \beta$.

В критическом реакторе после работы в течении 2–3 мин устанавливается постоянная концентрация запаздывающих нейтронов. Если $k_{эф} < 1 + \beta$, то $k_м < 1$ — реактор можно представить как подкритический на мгновенных нейтронах с внутренними источниками запаздывающих нейтронов, порождающих плотность q нейтронов в 1 с. Тогда эволюция плотности нейтронов описывается уравнением

$$\frac{dn}{dt} = q + \frac{k_м - 1}{\tau} n \qquad (2.2.3)$$

с начальным условием $n(0) = n_0$. Решение этого уравнения

$$n(t) = qT + (n_0 - qT)\exp(-t/T),\ T = \frac{\tau}{1 - k_м}.$$

При значениях $t >> T$ получим постоянное значение плотности нейтронов

$$n(t) \to n_c = qT = \frac{q\tau}{\beta - \rho}.$$

Условия безопасной работы реактора обеспечиваются системой управления и защиты.

Один из элементов управления — стержни, поглощающие нейтроны, содержат бор или кадмий. Величина $k_{эф}$ сильно зависит от глубины погружения стержней в активную зону. При $k_{эф} = 1$ величина $k_м = 1 - \beta$, $n_с = n_1$, $n_1 = q\tau/\beta$. Изменяя глубину погружения стержней, можно увеличить коэффициент размножения от 1 до $k_{эф} = 1 + \rho$, $\rho < \beta$. Тогда $n_с = n_2$, $n_2 = q\tau/(\beta - \rho) = n_1\beta/(\beta - \rho)$. При значениях $\rho = 0{,}0025$, $\beta = 0{,}0064$ величина $T = 0{,}05$ с. Следовательно, через промежуток времени $\Delta t \approx 3T$ в реакторе устанавливается новый уровень мощности $P_2 = \beta P_1/(\beta - \rho) = 1{,}64\ P_1$. В надкритическом реакторе с реактивностью $0 < \rho < \beta$ цепная реакция развивается относительно медленно. Для обеспечения безопасной работы реактора вывод на определенную мощность работы осуществляется при реактивности $\rho << \beta$.

Аварийный режим работы реактора. Если $\rho > \beta$, то решение уравнения (2.2.1)

$$n(t) = -qT_н + (n_0 + qT_н)\exp(t/T_н),\ T_н = \frac{\tau}{\rho - \beta}.$$

При значениях $T >> T_н$ получим «ураганный» рост плотности нейтронов и тепловой мощности, которые приводят к взрыву реактора. В случае $\rho = \beta$ решение уравнения $n(t) = n_0 + qt$ — реактор становится неуправляемым.

2.2.4. Открытие природного ядерного реактора. Для реализации цепной реакции необходимо выполнить, как мы видели, ряд условий. Тем удивительней стало открытие остатков природного ядерного реактора в урановом руднике в Габоне (Западная Африка) в виде линз толщиной около метра и протяженностью 10–20 м. В 1974 г. было обнаружено, что содержание урана-235 в урановой руде достигало 0,64% вместо значения 0,72% обычного для земных пород, метеоритов и лунного грунта.

Оказалось, что месторождение сформировалось около 1,8 млрд лет назад. Из-за различия в периодах полураспада урана-235 (0,71 млрд. лет) и урана-238 (4,51 млрд. лет) концентрация урана-235 в то время превышала 3 %. Поэтому, когда в линзу проникала вода, в ней начиналась цепная реакция.

Почему же «реактор» не взорвался? Причина — в механизме саморегулирования. При увеличении температуры вода испарялась, ухудшались условия замедления нейтронов и коэффициент размножения уменьшался. В результате температура понижалась и вновь возникали условия для нового всплеска мощности. В таком устойчивом автоколебательном режиме реактор работал 600 млн. лет, развивая среднюю мощность 25 кВт.

2.2.5. Реакторы атомных станций. Ядерный реактор на АЭС является источником тепла для превращения воды в пар высокого давления (~1,3 МПа), который приводит в движение рабочее колесо турбины электрогенератора. Тепло от активной зоны реактора отводится системой охлаждения — циркулирующим теплоносителем (вода, газ, натрий и др.). Основной, наиболее важной

частью активной зоны является *твел* (тепловыделяющий элемент), заполненный ураном. Он должен работать при температуре 300°С в условиях интенсивного облучения нейтронами. Со временем состав ядерного горючего меняется — накапливаются продукты распада. Обычно выгорает 60% урана-235 перед перегрузкой топлива. За время службы активной зоны реактор потребляет почти половину ядерного топлива.

Первая в мире АЭС мощностью 5 Мвт была пущена 27 июня 1954 г. в г. Обнинске. Она стала базой для развития атомной энергетики в СССР. Потом были освоены реакторы на тысячу мегаватт. В 1983 г. введен в эксплуатацию первый блок Игналинской АЭС на 1 500 МВт.

В России используют, в основном, два вида реакторов на тепловых нейтронах. В *водо-водяном энергетическом реакторе* (ВВЭР) замедление нейтронов и теплосъем производится одним и тем же количеством воды. Вся активная зона находится при высокой температуре, корпус реактора должен выдержать давление ~15 МПа. Реактор работает на обогащенном до 3 % изотопом урана-235, так как вода довольно сильно поглощает нейтроны. В этом случае среднее число нейтронов деления возрастает до 1,83. При увеличении температуры воды эффект замедления уменьшается. В результате возникает обратная связь, благодаря которой обеспечивается устойчивая и безопасная работа реактора. Относительно низкая температура кипения воды ограничивает КПД станции.

В *уран-графитовом реакторе* РБМК (реактор большой мощности канальный) теплоноситель — вода, замедлитель — графит. Первый реактор этого типа мощностью 1 000 Мвт построен на Ленинградской АЭС. Активная зона диаметром 11,8 м, высотой 7 м сложена из графитовых призм с вертикальными отверстиями для труб, в которых находятся твелы и теплоноситель — вода. Полная длина трубы 22 м, ее средняя семиметровая часть сделана из циркониевого сплава. Наружный диаметр твелов — 1,35 см. Вода подается снизу. Обтекая твелы, вода закипает и отводится по одноконтурной схеме: насыщенный пар (p = 60 атм, T = 280 °С) поступает на два турбогенератора. Стационарная загрузка реактора — 192 т урана, обогащенного до 1,8%. Перегрузка топлива «на ходу». КПД станции 31%.

Условия безопасной работы реактора обеспечиваются системой управления и защиты. Для повышения надежности ключевых узлов АЭС системы многократно дублируются. В водо-водяном реакторе аварийное отключение может быть произведено откачкой воды из активной зоны. В случае реактора с графитовым замедлителем повышение температуры приведет к разрушению структуры активной зоны, т. к. температура загорания графита 400°С. После прекращения цепной реакции продукты распада продолжают выделять тепло; если его не отводить температура будет расти. Вода под действием нейтронов разлагается, образуя гремучую смесь. Возникает опасность взрыва.

В настоящее время разработаны полностью безопасные реакторы с пассивной защитой. Любая неисправность автоматически приводит к остановке

реакции. Разумеется, управление реактором требует высокой культуры работы операторов: профессионализма, мастерства, дисциплины.

В 1993 г. в 28 странах работали 923 ядерных энергоблоков общей мощностью порядка 330 Гвт. Сейчас — около 1250 АЭС. Во Франции ядерная энергетика дает 76% всей используемой электроэнергии (63 МВт), в Германии — 31 % (21 Мвт), в Японии — 32 % (24 АС, 44 МВт), в США — 20 % (107 блоков, 98 МВт), в России — 15 % (20 МВт) — всего 9 АС (3 реактора чернобыльского типа).

Сейчас в России действуют 44 энергоблока. Ведутся работы по созданию атомных станций теплоснабжения (АСТ). Передача пара экономически выгодна на расстояние до 5—10 км, а горячей воды — до 18-30 км. Следовательно, АСТ должны сооружаться в непосредственной близости от городов.

2.2.6. Проблемы отработанного ядерного топлива (ОЯТ). Стержни с ОЯТ содержат три компонента: невыгоревший уран, продукты деления урана и трансурановые элементы — изотопы америция, урана и оружейного плутония, который можно снова использовать в АЭС. Переработка ОЯТ — необходимый шаг в «замыкании» ядерного топливного цикла. Прежде всего на 1/6 сокращается потребность в природном уране и образуется новое горючее — плутоний.

Главное отличие ОЯТ от «свежего» топлива — огромная радиоактивность, превращающая стержни в объект повышенной опасности. Поэтому все операции с ОЯТ осуществляются только дистанционно с использованием защиты от излучения. Переработка ОЯТ — это длительный и сложный процесс. Стержни с ОЯТ сначала должны храниться на АС в так называемых «мокрых хранилищах». Голубое сияние вокруг стержней — это черенковское излучение электронов, движущихся со скоростью, превышающей скорость света в воде. За 4–5 лет активность стержней падает более чем на порядок, и только после этого ОЯТ можно перевозить и направлять на химическую переработку, надежное захоронение и контролировать хранилища в течение нескольких веков.

В мире накоплено около 240 тыс. тонн ОЯТ, переработано только 85 тыс. тонн. Каждая отечественная АЭС ежегодно выдает по 300 кг «горячих» осколков деления. В результате демонтажа ядерных зарядов боеголовок и продуктов распада в реакторах в мире накоплено более 1000 тонн плутония. Кстати, к концу XXI века ожидается полное истощение запасов урана. Сейчас только Великобритания, Россия и Франция обладают технологией переработки ОЯТ.

В России проблем с топливом нет: ее атомная энергетика относительно невелика — примерно в шесть раз меньше американской и западноевропейской. На долю западных членов "восьмерки" приходится более 70% мирового спроса на ядерное топливо. Поскольку в ядерных котлах сжигается в два раза больше урана, чем добывается, то для Запада представляет большой интерес использование дешевого российского оружейного плутония в качестве топлива для АЭС (так называемое МОХ-топливо — смесь оксидов урана и плутония).

2.3. Термоядерные реакции

2.3.1. Синтез легких ядер. Если в (1.3.2) величина $U>0$, то распад ядра G энергетически запрещен. Однако в обратном процессе — слиянии ядер X и Y — энергия исходной системы должна уменьшиться на величину U. В результате «горючая среда» и продукты синтеза приобретают кинетическую энергию U. Наибольший интерес представляют реакции

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + ^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{1}_{0}n + 17{,}6\ \text{МэВ‰} \qquad (2.3.1)$$

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + ^{3}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{1}_{1}\mathrm{H} + 18{,}3\ \text{МэВ‰} \qquad (2.3.2)$$

Высвобождающаяся энергия, отнесенная к одному нуклону (~3,6 МэВ), значительно превосходит энергетический выход на один нуклон делящегося изотопа урана-235 (~0,85 МэВ). Поэтому при одинаковом весе заряда энергия взрыва водородной бомбы значительно больше энергии взрыва атомной бомбы. Отметим, что в химической реакции «синтеза» $H_2 + (1/2)O_2 = H_2O$ высвобождается энергия $U = 2{,}96$ эВ. Если бы удалось осуществить управляемую термоядерную реакцию, то человечество навсегда избавилось бы от угрозы энергетического голода, поскольку тяжелый водород — дейтерий — содержится в пресной или морской воде. Один литр воды может дать столько же энергии, сколько выделяется при сгорании 300 л бензина.

Один из наиболее прямых методов осуществления реакций синтеза — нагрев смеси изотопов в состоянии плазмы до температур, при которых кинетическая энергия ядер достаточна для сближения на расстояние $r \sim 5 \cdot 10^{-13}$м: $E \sim ke^2/r = 10$ кэВ. Поэтому реакции остаются энергетически выгодными. Температура, при которой интенсивно протекает реакция $T \sim E/k_Б$, ($k_Б = 8{,}61 \cdot 10^{-5}$ эВ/К), чрезвычайно высока $T \sim 10^8$ К. Для реализации реакции плотность плазмы n и время удержания τ должны удовлетворять *критерию Лоусона*: $n\tau > 10^4$ с/см^3.

Реакция (2.3.1) имеет два существенных недостатка. Тритий радиоактивен ($T_{1/2} = 12{,}26$ лет) и в природе не встречается — необходимо позаботиться о его производстве. Нейтроны уносят 80% всей выделившейся энергии и покидают активную зону реактора, не участвуя в нагревании плазмы. Однако нейтроны можно использовать для производства трития в реакции

$$^{6}_{3}\mathrm{Li} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{3}_{1}\mathrm{H} + ^{4}_{2}\mathrm{He} + 4{,}8\ \text{МэВ}$$

или для превращения урана-238 в плутоний-239 и последующего использования в обычных ядерных реакторах.

В настоящее время обсуждается проблема реализации более безопасной реакции (2.3.2) на гелии-3.

Задача 2.3.1. Для реализации реакции синтеза $^{2}_{1}\mathrm{H} + ^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{1}_{0}n$, в которой выделяется энергия $U = 17{,}6$ МэВ, ядра дейтерия с энергией T_1 сталкиваются с неподвижными ядрами трития. Найдите кинетическую энергию образовавшихся нейтронов в системе центра масс.

Решение. Обозначим массы частиц m_1, m_2, m_a, m_b. Запишем закон сохранения энергии в системе центра масс (с. ц. м.). Кинетическая энергия системы равна сумме энергии движения системы как целого и энергии нерелятивистского относительного движения в с. ц. м. (ч. Механика, гл. 6):

$$T_1 = m_1 v_1^2/2 = mu^2/2 + \mu_{12} v_1^2/2,$$

где приведенная масса начальных частиц $\mu_{12} = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. Первое слагаемое в результате неупругого взаимодействия частиц не изменяется. В с. ц. м. согласно закону сохранения полной энергии

$$\mu_{12} v_1^2/2 + m_1 c^2 + m_2 c^2 = E_a + E_b + m_a c^2 + m_b c^2, \qquad (1)$$

$$E_a = m_a[m_b v/(m_a + m_b)]^2/2,\ E_b = m_b[m_a v/(m_a + m_b)]^2/2, \qquad (2)$$

где E_a, E_b — энергии нейтрона и альфа-частицы в с. ц. м., $\vec{v} = \vec{v}_a - \vec{v}_b$ — относительная скорость продуктов реакции. Из (2.3.1) следует уравнение

$$m_1 c^2 + m_2 c^2 = m_a c^2 + m_b c^2 - U, \qquad (3)$$

При вычислении кинетической энергии можно приближенно принять, что

$$m_1 = 2m_0,\ m_2 = 3m_0,\ m_a = m_0,\ m_b = 4m_0,$$

где m_0 — масса протона.

В этом приближении $\mu_{12} = 6m_0/5$, $\mu_{12} v_1^2/2 = (3/5)T_1$. Из уравнений (1), (2), (3) получим систему

$$(3/5)T_1 + U = E_a + E_b, \qquad E_a = 4E_b,$$

из которой находим

$$E_a = (12/25)T_1 + (4/5)U.$$

2.3.2. Термоядерные реакторы. Магнитное удержание. В 1950 г. советские физики А.Д. Сахаров и И.Е. Тамм предложили использовать термоядерный реактор, получивший называние ТОКАМАК (ТОроидальная КАмера с МАгнитными Катушками). Плазму, полученную в камере, имеющей форму тора или бублика, удерживают двумя системами электромагнитов. Магниты центрального трансформатора используются для возбуждения тока и нагревания плазмы.

Тритиевый *термояд* с реакцией (2.3.1), имеющей самую низкую температуру поджига ~10^8К, осуществлен в 1991 г. На токамаке JET (Joint European Torus) в течение 2 с генерировалась мощность более 1 Мвт.

Надежда овладеть термоядерным синтезом привела к разработке Международного термоядерного экспериментального реактора (ITER), который должен вступить в строй в 2005 г. Однако реальную ситуацию скорее характеризует ответ руководителя английской термоядерной программы выдающегося английского физика Дж. Кокрофта на вопрос о сроках ее завершения: «Через 20 лет.» Через 7 лет в 1961 г. ответ на аналогичный вопрос был тот же. «Как видите, я не меняю свою точку зрения» — пояснил он.

Инерционное удержание. Предположим, что термоядерное топливо сосредоточено в небольшом объеме и быстро нагревается за время меньшее,

чем время разлета частиц. Нагревание может осуществляться пучком лазерного излучения или пучком частиц от ускорителя. Представляется перспективной мишень в виде шарика из пластика, внутри которого находятся жидкие дейтерий и тритий. При облучении 10 или 20 симметрично расположенными лазерами оболочка сжимается и начинается горение смеси. Если 10 таких мишеней будут воспламеняться каждую секунду, то мощность реактора достигнет 1000 МВт. В этих предварительных расчетах предполагается, что энергия импульса ~1,5 млн Дж сообщается лазером мощностью $3 \cdot 10^{14}$ Вт в течение 5–10 нс.

2.3.3. Взлет и падение холодного ядерного синтеза. В марте 1989 г. газеты сообщили, что американским ученым М. Флейшману и *С.* Понсу удалось осуществить слияние ионов дейтерия при электролизе тяжелой воды D_2O при комнатной температуре — холодный синтез, сопровождающийся экзотермической реакцией $D + D \rightarrow {}^3He + n + 3{,}27$ МэВ и излучением γ-кванта в процессе $n + p \rightarrow D + \gamma$. Кроме того, накапливался тритий, предположительно по каналу $D + D \rightarrow T + p$. Они использовали катод из палладия — металла, обладающего высокой способностью к растворению водорода и его изотопов, и предполагали, что при аномально больших концентрациях дейтерия, внедряемого в палладий, начинаются реакции синтеза. Кажущаяся простота эксперимента привела к «всеобщей погоне за холодным синтезом». В большинстве экспериментальных работ эффект не обнаружен. К началу 1990 г. было опубликовано более 100 теоретических работ. Основная проблема — анализ механизма реализации «низкотемпературного» сближения ядер дейтерия на расстояния $\sim 10^{-13}$–10^{-12} см, поскольку при поглощении дейтерия ядра палладия, отстоящие друг от друга на 0,389 нм, расходятся до 0,4025 нм. Общий вывод: в кристаллической решетке невозможно сближение ядер на расстояния, значительно меньшие, чем в молекуле дейтерия $a = 0{,}074$ нм. После того, как первый ажиотаж сменился разочарованием, стало ясно, что многие аспекты проблемы представляют самостоятельный интерес. Один из них — напряженность электрического поля, возникающего в раскрывающихся трещинах палладия при увеличении размеров решетки, может оказаться достаточной для ускорения дейтронов, преодоления кулоновского барьера и инициирования процесса «микроскопического горячего» синтеза.

2.4. Биологические эффекты радиации

2.4.1. Биологическое действие излучения. К радиации или излучению относят электромагнитное излучение, α, β, γ-излучения, потоки нейтронов и протонов. Для нас представляет интерес взаимодействие излучений с живой тканью, состоящей, в основном, из легких элементов: водорода, кислорода, углерода и азота. В результате взаимодействия происходит ионизация атомов — образуется большое количество электронов и положительных ионов. Радиационное повреждение ткани обусловлено именно этими вторичными частицами. На создание одной ионной пары требуется в среднем энергия 32 эВ независимо от вида излучения, энергии и вещества. Например, одна α-частица с энергией 3,2 МэВ может образовать 100 000 ионных пар.

Электроны, излучаемые при β-распаде, имеют энергии от нескольких кэВ до 1 МэВ. Пробег электрона энергией 1 МэВ равен 4,2 мм, пробег α-частицы энергией 5 МэВ — всего лишь 37 мкм. Поэтому на пути движения α-частицы мы обнаружим более плотное скопление ионов и электронов. В результате неупругого рассеяния нейтронов на ядрах возникает гамма-излучение. Нейтроны могут выбивать протоны и вызывать ядерные реакции. Фотоны поглощаются веществом в результате фотоэффекта или процесса образования электрон-позитронных пар. Например, гамма-излучение радиоактивного кобальта $^{60}_{27}Co$ с энергиями 1,2 и 1,3 МэВ проникает на глубину 10 см, прежде чем энергия уменьшится на 50 %. При взаимодействии рентгеновского или гамма-излучения с веществом один из электронов атомной оболочки может вылететь из атома. Далее происходит квантовый переход с излучением вторичного фотона.

Все излучения могут привести к нарушению процесса деления клетки — митоза. Сильное впечатление производят кадры фильма, в которых после стадии анафазы — продольного деления хромосом — зритель наблюдает нарушение механизма деления: в одной из дочерних клеток может оказаться более половины хромосом, или — перетяжка разрывает несколько хромосом. В результате радиационного разрушения гена или его фрагментов — экзонов и интронов увеличивается число мутаций. Образовавшиеся в живой ткани ионы вступают в химические реакции, конечными продуктами которых являются свободные радикалы H и OH, имеющие неспаренный электрон. Они легко вступают в реакции и образуют перекиси, инициируя каскад разрушительных реакций, подавляющих действие ферментов. В результате поражается иммунная система и возникают необратимые нарушения жизненно важных систем организма. Суммарный эффект воздействия излучений на живую ткань имеет окислительный характер.

2.4.2. Дозиметрические единицы и предельные уровни облучения. Степень облучения связана с энергией, переданной живой ткани. Единица поглощенной дозы D в СИ называется *грэй* (Гр): 1 Гр = 1 Дж/кг. Прежняя единица поглощенной дозы называлась *рад* (от англ. — radiation absorbed dose); 1 Гр = 100 *рад*.

Нельзя утверждать, что определенная доза всегда вызывает летальный исход. Значение дозы, от которой в течение 30 суток погибает 50% живых существ, принято обозначать $LD_{50}(30)$. Для человека эта величина равна 3 Гр, для обезьян 5,5 Гр, для золотых рыбок — 20 Гр. Отметим, что доза излучения 4,2 Гр, крайне опасная для человека, недостаточна для увеличения температуры тела на 0,001° С.

Мощность дозы внешнего фонового облучения жителей Москвы ~1 мГр/год, Мурманска ~1,5 *мГр*/год. Поглощенная доза при десятидневном орбитальном полете — 2 мГр.

Биологическая эффективность воздействия поглощенной дозы характеризуется *эквивалентной дозой* (ЭД), равной произведению D на два *коэффициента качества*, зависящих от типа излучения и характера ткани. Еди-

ница ЭД — *зиверт* (Зв). Внесистемная единица — *бэр*: 1 Зв = 100 Бэр. Предельно допустимая средняя индивидуальная ЭД равна 30 мЗв/год. Максимальное годовое облучение населения не должно превышать 5 мЗв. Природный радиационный фон вторичного космического излучения ~0,3 мЗв/год; общая доза, получаемая от естественного фона ~1 мЗв/год.

Для оценки реакции организма на действие рентгеновского и гамма-излучений используется *экспозиционная доза*. Единицу экспозиционной дозы назвали — *рентген* (*Р*). 1 Р — доза излучения, создает в 1 см^3 сухого воздуха при нормальных условиях пары ионов; каждая компонента зарядом 3,34 10^{-10} Кл. 1 Р соответствует 2,08 10^9 пар/см^3 или 2,58 10^{-4} Кл/кг.

При поглощении в биологической ткани 1 Бэр = 1 рентген. Естественный радиационный фон на территории России составляет от 4 до 25 мкР в час. Доза, получаемая при рентгенологическом обследовании — от 10 мР до 3000 мР.

Общеевропейский стандарт CENELEC 50166-2 предельно допустимого уровня облучения электромагнитным излучением в диапазоне длин волн 1-10 см устанавливает для населения норматив 2 Вт/м^2.

2.4.3. Защита от радиации. Опасная перспектива подвергнуться воздействию невидимой, но всепроникающей радиации, вызывает тревогу населения. Радиоактивные вещества могут попасть в организм с питьевой водой, пищей и при дыхании. Те, кто живет в бетонных или облицованных камнем зданиях, могут получить дополнительную дозу вследствие содержания в материале примесей урана, тория и продуктов распада, особенно газообразного радона. Радоном называют изотоп $^{222}_{86}Rn$ — дочерний продукт распада радия. В результате распада радона образуются короткоживущие радиоактивные элементы. Особенно опасны изотопы полония $^{218}_{84}Po$ и $^{214}_{84}Po$, обеспечивающие 97% дозы, связанной с радоном.

Разумеется необходимо иметь портативный детектор или персональный дозиметр со шкалой, регистрирующей полученную дозу.

Поскольку заряженные частицы имеют очень короткий пробег, то основную проблему представляет защита от проникающей радиации — нейтронов, рентгеновского и гамма-излучений. Быстрые нейтроны поглощаются водородосодержащими элементами такими как вода, бетон или грунт. Для защиты от γ-квантов требуется вещество с большой атомной массой. Обычно используется железо и свинец.

2.5. Ядерное и термоядерное оружие

2.5.1. Создание атомной и водородной бомб. Первый экспериментальный взрыв атомной бомбы, созданной усилиями американских и европейских физиков, произведен 16 июля 1945 г. в США. Однако после бомбардировки Хиросимы (6 авг. 1945 г., 20 кт) и Нагасаки многие из них испытали чувство вины за свое участие в работе над созданием атомной бомбы. 29 августа 1949 г. была ликвидирована атомная монополия США. В этот день в СССР успешно прошло испытание атомной бомбы.

12 августа 1953 г. прошло испытание экспериментальной модели водородной бомбы. Механизм «запала», названный «сахаризацией», разработан физиком-теоретиком А.Д. Сахаровым. В ноябре 1955 г. на полигоне под Семипалатинском был взорван боевой вариант изделия. В книге рекордов Гинесса отмечена самая большая термоядерная бомба мощностью 54 мегатонн, взорванная на Новой Земле 30 октября 1961 г. Взрывная волна обогнула земной шар 3 раза, сделав первый оборот за 36 часов 27 минут.

При взрыве атомной бомбы образуется более 200 радиоактивных элементов. Большая часть из них распадается до выпадения на землю. Особенно опасен приземный взрыв — облако содержит радиоактивные частицы в концентрации, гибельной для человека.Наибольшую опасность представляют йод-131, стронций-90 и цезий-137. Они биологически активны и имеют период полураспада соответственно 8 суток, 28 лет и 30 лет. Эти элементы попадают в организм обычно с молоком коров, поедающих траву, загрязненную выпадениями после испытаний ядерного оружия. Стронций-90 заменяет кальций в костной ткани и при излучении 67 мккюри на 1 г кальция приводит к хроническому поражению организма. Плутоний чрезвычайно опасен из-за радиоактивности и сверхтоксичности.

2.5.2. Ядерные испытания. В 1991 г. ядерные арсеналы США и СССР содержали около 55 000 боеголовок с энергетическим эквивалентом десять тысяч мегатонн. Ударный заряд подводной лодки типа «Трайдент» составляет 24 Мт. Отметим, что суммарная энергия взрывчатых веществ, израсходованных во время второй мировой войны, равна 3 Мт.

До запрещения испытаний атомного оружия пять стран произвели 525 ядерных взрывов: США — 217 (66 испытаний в атмосфере и под водой в районе Маршалловых островов, 125 в атмосфере севернее Лас-Вегаса), СССР — 214 (более 200 атмосферных испытаний), Франция — 50, Китай — 23 (с 17 июня 1967 г.), Великобритания — 21. Одним из последних стало испытание китайской водородной бомбы в 1980 г.

При наземном взрыве мегатонной бомбы 15 % энергии приходятся на долю начальной и остаточной радиации, 35 % — доля светового излучения, 50 % — приходится на образование ударной волны. Огненный шар на расстоянии 100 км от места взрыва кажется в 30 раз ярче Солнца. 99% энергии светового излучения сосредоточено в видимом и инфракрасном диапазонах. Именно это излучение является причиной ожогов. Через 10 с после взрыва радиус шара достигает максимальной величины около 1 км, фронт ударной волны находится на расстоянии 4,8 км. Спустя минуту шар поднимается на высоту около 7 км, остывает и перестает быть видимым, фронт ударной волны находится на расстоянии 19 км и движется со сверхзвуковой скоростью 345 м/с, избыточное давление уменьшается до 0,07 кгс/см^2. В результате химических реакций между перешедшим в газ веществом бомбы и находящимися в воздухе парами воды, азотом и кислородом, образуется облако, имеющее вначале красновато-бурый цвет. Восходящие потоки воздуха придают ему грибовидную форму. После остывания огненного шара

облако светлеет. Нижняя часть облака за 8–10 минут достигает максимальной высоты 8–16 км, верхняя высоты 20–30 км. Оно остается видимым в течение часа, пока не рассеется ветрами.

При подводном взрыве бомбы с тротиловым эквивалентом 20 тыс. т ударная волна прорывается в воздух и образуется конденсационное облако и водяной купол. Через несколько миллисекунд раскаленный газовый пузырь достигает поверхности воды и образуется султан — полый столб воды, быстро достигающий вершины купола. Высота султана около 1 800 м, диаметр — 600 м, толщина стенок — 90 м, масса воды в султане около 1 млн. т. При падении столба воды образуется гигантская волна. Через 4 минуты после взрыва наружный диаметр волны составлял 5,6 км, высота ее достигала 550 м.

2.5.3. Ядерный конфликт — угроза цивилизации. В последние десятилетия получены результаты исследования климатических последствий ядерной войны на основе математического моделирования физических процессов, происходящих при взрыве ядерных или термоядерных бомб. Летом 2000 г. корпорация IBM объявила о создании суперкомпьютера, выполняющего 12,3 трлн. операций в секунду для объемного моделирования ядерных взрывов.

В основном сценарии ядерного конфликта предполагалось, что мощность бомб при обмене ядерными ударами достигнет 5000 Мт. Диапазон энергий отдельных зарядов задан для наиболее типичных боеголовок в пределах 0,2–1 Мт, а число взрывов — 10,4 тыс. В атмосфере произойдет образование до двадцати миллионов тонн окислов азота. Через 10–15 суток они достигнут озонного слоя. Разрушение слоя приведет к образованию гигантского «окна» и к гибели растительности, не защищенной от ультрафиолетового излучения. В модели было учтено влияние многочисленных пожаров, а также выброс в атмосферу частиц сажи, а в стратосферу — пыли.

Эффект «ядерной зимы». Расчеты показали, за пять дней после взрыва на средних широтах и в субтропиках Северного полушария произойдет понижение температуры на 10–20° С. В первый месяц максимальное понижение температуры на 30–35° С приведет к промерзанию почвы на больших территориях. Теория предсказывает, что дым на большой скорости будет перемещаться в Южное полушарие. Через 100 суток произойдет полное загрязнение атмосферы и уменьшение освещенности поверхности Земли. Возможно охлаждение земной поверхности до температур, характерных для зимы. Погибнет весь урожай. Свыше 2 млрд человек будут испытывать страдания от голода и других последствий *«ядерной зимы»*. Модельные оценки позволяют сделать вывод, что наряду с разрушительными «быстрыми» эффектами ядерной войны, приводящими к гибели миллиарда человек, неизбежные климатические изменения создают потенциальную угрозу жизни десятков миллионов людей. По-видимому влияние ядерных взрывов на глобальный климат исчезнут примерно через два-три года.

В настоящее время гонка вооружений отвлекает огромные материальные и интеллектуальные ресурсы человечества, которые могли бы обеспечить экономическое и культурное развитие многих стран мира.

Часть IX.
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Глава 1. Мир элементарных частиц

Наиболее фундаментальная область исследований в физике всегда была связана со структурой материи и выяснением законов взаимодействия составляющих ее частиц. В современной физике термин «*элементарная частица*» употребляется в качестве общего названия частиц, не являющихся атомами и ядрами (исключение составляет ядро водорода — протон). Основная задача экспериментальных и теоретических исследований элементарных частиц заключается в том, чтобы открыть основные принципы, которые позволяют понять, почему вещество, атомы, ядра, реакции частиц таковы, какими мы их наблюдаем. Сейчас стало ясно, что изучение элементарных частиц представляет самый прямой, а возможно, единственный путь к пониманию фундаментальных законов природы.

В 50—60-е годы прошлого столетия на ускорителях открывались все новые и новые частицы с таким множеством свойств, что физики стали называть это смешение частиц «зоопарком». Порядок в «зоопарке» был наведен после открытия новых «паспортных данных» частиц, новых типов симметрии и математического анализа на основе теории групп. Создание гигантских ускорителей привело к открытию более трехсот новых частиц. В результате перед нами предстал такой же удивительный мир частиц, каким Менделееву казался мир атомов перед созданием периодической системы элементов. Все это потребовало значительных усилий теоретиков в попытках построить единую теорию материи. Такая теория позволила бы описать физические явления в чрезвычайно широком диапазоне масштабов – от космологических до сверхмалых, объяснить преобладание вещества над антивеществом, дискретность масс и зарядов частиц, раскрыть тайну рождения и эволюции Вселенной и многие другие. Ряд теорий, предложенных в последнее время, не могут еще удовлетворить всем имеющимся экспериментальным данным. Однако общая идея «великого объединения» представляется настолько плодотворной, что все усилия направлены на то, чтобы создать единую теорию всех сил, включая теорию тяготения, и на ее основе построить полную картину мироздания.

1.1. Космические лучи

1.1.1. Открытие космических лучей. История, которая привела к открытию космических лучей, типична для путей научного прогресса. Все началось с попытки объяснить причину уменьшения заряда изолированного тела. Заметная проводимость могла бы появиться в результате ионизации воздуха

излучением радиоактивных веществ, содержащихся в земной коре. Но оказалось, что ее неспособны подавить даже массивные свинцовые экраны. Ожидалось, что проводимость должна уменьшаться на больших высотах. Однако измерения, проведенные в 1912 г. австрийским физиком В. Гессом, показали, что проводимость растет с увеличением высоты и не зависит от времени суток. Стало ясно — источник ионизации имеет внеземное происхождение.

Космические лучи около Земли состоят из протонов (90%), α-частиц (7%) и более тяжелых ядер. Частицы с уникально большими энергиями $T = 10^{20}$ эВ имеют внегалактическое происхождение. Частицы с энергиями меньше 10^{10} эВ рождаются эпизодически на Солнце — от одного до 10 событий в год. Частицы промежуточных энергий рождаются, по-видимому, в нашей Галактике при вспышках сверхновых звезд. Пока ни одна из существующих теорий не может объяснить зависимость числа частиц от энергии.

1.1.2. Космические ливни. Попадая в атмосферу, протоны вызывают образование вторичных частиц. Среди них множество γ – квантов и электронов. Ниже мы объясним механизм возникновения этого процесса. γ-кванты в поле ядер рождают электрон-позитронные пары ($\gamma \to e^+ + e^-$). Далее электрон и позитрон, сталкиваясь с ядрами, образуют новые γ — кванты в процессе «тормозного излучения»: $e^- + Ze \to e^+ + Ze + \gamma$. Вторичные γ-кванты вновь генерируют $e^+ e^-$-пары и т. д. — число пар и квантов увеличивается в геометрической прогрессии. Образуется атмосферный «ливень» частиц. Процесс прекращается, когда энергия отдельных γ-квантов становится меньше $2m_ec^2 \approx 1$ МэВ. Если исходный квант обладает энергией $\sim 10^{14}$ эВ, то ливень может достичь поверхности Земли: он состоит из $10^6 - 10^9$ пар $e^+ e^-$ и γ-квантов, распределенных по площади, достигающей $100 - 1000$ м^2. Ливни, возбуждаемые γ-лучами меньших энергий, не доходят до Земли. Однако частицы генерируют вспышки черенковского излучения, которое можно регистрировать с поверхности Земли.

В 1933 г. англичанин П. Блекетт и итальянец Д. Оккилиани получили в Кавендишской лаборатории первые фотографии космических ливней, на которых были видны каскады электронов и позитронов, вылетевших из свинцовых пластинок в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле. «Пожалуй, ни одно открытие, ни одна новая идея на моей памяти, — пишет советский физик-теоретик Д.Д. Иваненко, — не подействовали на нас подобным образом. Стало, наконец, ясно, что физика вступает в новую релятивистско-квантовую эпоху элементарных частиц. В Ленинградском физико-техническом институте на несколько дней чуть ли не приостановилась работа ряда отделов, люди ходили и дискутировали, завороженные новыми перспективами».

1.1.3. Визуальное наблюдение космических лучей. Интересно, что в космических полетах космонавты видели «световые точки», «молнии», «двойные точки», даже когда их глаза были закрыты. Причина вспышек — возбуждение сетчатки глаза космическими лучами, проникшими сквозь корпус космического корабля. Часть вспышек может быть обусловлена че-

ренковским излучением частиц в стекловидном теле глаза. Аналогичные опыты провели ученые: они поместили свои головы в поток ионов от ускорителя и наблюдали световые вспышки.

1.1.4. Космические γ-всплески. Несколько раз в сутки в непредсказуемой области неба происходят всплески интенсивного γ-излучения. Впервые они были случайно открыты в 1967 г. на спутниках «*Vela*», предназначенных для регистрации ядерных взрывов в космосе. Энергетический интервал γ – квантов лежит в области от десятков *кэВ* до десятков *МэВ*. Общая длительность всплесков за сутки варьируется в пределах 0,1–100 *с*. Одним из основных является вопрос о природе излучения гамма-всплесков. Любопытно, что почти во всех случаях области, из которых наблюдались всплески, оказались «пустыми», т. е. там не обнаружены какие-либо источники оптического, радио- или рентгеновского излучения, с которыми можно было бы отождествить гамма-всплески. Только в одном случае удалось обнаружить источник. Речь идет о знаменитом сверхмощном длительностью $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ с всплеске, наблюдавшемся 5 марта 1979 г. из Большого Магелланового Облака. Так как источник размера $\sim D$, не может существенно изменить яркость за время меньшее, чем D/c, то излучающий объект, по-видимому, является нейтронной звездой диаметром $D \sim c\tau = 60$ км.

1.2. Открытие мюонов и пионов

1.2.1. Открытие мюонов. Если толщина свинцовой прокладки в камере Вильсона более 5 см, то частицы ливня уже не выходят наружу. Однако были обнаружены частицы, преодолевающие в свинце путь более метра. Природа этих проникающих частиц долгое время оставалась загадкой. Только в 1937 г. появилась возможность определить массу новой частицы равную 207 масс электрона. Сейчас ее называют *мюоном*. Первоначальное название μ — мезон (от греч. *mesos* — средний) обусловлено значением массы — промежуточной между массами электрона и протона.

Мюоны существуют в двух разновидностях: отрицательно заряженная частица μ^- и ее положительно заряженная античастица μ^+. Мюоны нестабильны, их распад происходит по схеме

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \qquad (1)$$

где $\nu_{e,\mu}(\bar{\nu}_{e,\mu})$ – электронное и мюонное нейтрино (антинейтрино). Время жизни мюона $\tau_\mu \approx 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ *с*. В веществе μ^- «живет» меньше: потеряв энергию в столкновениях, он замедляется, притягивается ядром атома и образует *мюонный атом*. Захват мюона сопровождается выбросом одного из атомных электронов.

1.2.2. Открытие пионов. Существование частицы с массой ≈200 масс электрона было предсказано в 1935 г. японским физиком-теоретиком Х. Юкавой в результате анализа сил взаимодействия между протоном и нейтроном в атомном ядре. Ядерные силы называют короткодействующими, т. к. они проявляются в области размерами порядка $R \approx 10^{-14}$–10^{-15} м.

Юкава предположил, что эти силы возникают при испускании и последующем поглощении нуклонами мезона. Поскольку мезоны в процессе обмена не наблюдаются, то они находятся, как говорят, в *виртуальном* (от лат. *virtualis* — возможный) состоянии. В свободном состоянии мезоны нестабильны и распадаются. Отметим, что взаимодействие заряженных частиц реализуется в результате обмена виртуальным фотоном.

Возникновение виртуальных мезонов можно обосновать, исходя из соотношения неопределенностей (VII.1.5.2). Предположим, что происходит обмен частицей массой m с неопределенностью энергии $\Delta E = mc^2$ в течение интервала времени Δt, за который она может пройти расстояние $R < c\Delta t$. Из (VII.1.5.2) находим $m > h/(2\pi Rc) \sim 20 - 200$ МэВ/с^2. Однако вскоре стало ясно, что мюоны не могут претендовать на эту роль, т. к . слабо взаимодействовали с нуклонами.

Только в 1947 г. в фотоэмульсии, облученной космическими лучами на высотах до 5 500 м, обнаружили заряженные мезоны со свойствами, предсказанными Юкавой. Они получили название π-мезонов. Сейчас их называют *пионами*. $\pi+$ и π^- — являются частицей и античастицей по отношению друг к другу. Масса пионов $m_{\pi^{(+,-)}} = 0{,}14$ *ГэВ*. Они распадаются по схеме

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu \qquad (2)$$

за время $\tau_\pi \approx 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ *с*. Отметим, что в 1955 г. на «Бэватроне» в Беркли при столкновении протонов с энергией 6,3 Гэв и медной мишени на каждый рождающийся антипротон приходилось по 44 000 π^--мезонов. В 1950 г. были обнаружены нейтральные π^0-мезоны массой $m_{\pi^0} = 0{,}135$ ГэВ/с^2, которые распадались на два γ-кванта за время $\tau_{\pi^0} \approx 8{,}3 \cdot 10^{-15}$ *с*. π^0 рождается в столкновениях γ-квантов и протонов с ядрами.

Теперь мы можем объяснить причину возникновения космического ливня. В результате взаимодействия протонов с ядрами атомов воздуха, рождается множество вторичных частиц, среди которых главную роль играют π-мезоны. В свою очередь π-мезоны сталкиваясь с ядрами генерирует новый каскад вторичных π-мезонов, а нейтральный π-мезон, порождая два γ-кванта, запускает механизм образования космического ливня.

Сейчас для изучения взаимодействия пионов с веществом созданы «мезонные фабрики». Мезоны и нейтрино рождаются при взаимодействии протонов с ядрами мишени. Благодаря большому среднему току (до 1 мА) интенсивность пучка достигает 10^{10} пионов в секунду.

Задача 1.2.1. Найдите пороговую энергию фоторождения π^0-мезона при взаимодействии γ-кванта с неподвижным протоном в реакции $\gamma + p \to p + \pi^0$.

Решение. Полагая в уравнении (1) примера VI. 1.5.1 $m_1 = 0$, $T_L = h\nu$, $m_2 = m_a = m_p$, $m_b = m_{\pi 0}$, получим $h\nu = m_{\pi 0}[1 + m_{\pi 0}/2m_p]c^2$, $h\nu = 0{,}145$ ГэВ.

Задача 1.2.2. Покажите, что пороговая энергия π^+-мезона при неупругом рассеянии на неподвижном протоне в реакции $\pi^+ + p \to p + \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ равна $T_L = 2m_\pi[1 + 2m_\pi/m_p]c^2$, $T_L = 0{,}36$ ГэВ.

1.3. Нейтрино

1.3.1. Гипотеза нейтрино. Электроны, образующиеся при β-распаде, должны согласно закону сохранения энергии обладать определенным значением энергии Δmc^2, где Δm – разность масс начального и конечного ядер. Однако в эксперименте наблюдались электроны, энергия которых принимала значения от нулевого до Δmc^2. В связи с этим предлагалось отказаться от закона сохранения энергии в микропроцессах. Эту точку зрения в 1932 г. поддержал даже Н. Бор. Однако ранее в 1930 г. В. Паули в частном сообщении выдвинул гипотезу об излучении одновременно с электроном нейтральной частицы с малой массой и спином $J = 1/2$. Итальянский физик Э. Ферми назвал ее *нейтрино* (от итал. *neutrino* – маленькое, нейтральное). Например, распад нейтрона представляет собой процесс

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e,$$

где $\bar{\nu}_e$ — электронное антинейтрино. Распределение энергии между антинейтрино и электроном приводит к наблюдаемому спектру энергий электрона.

Известный физик Б. М. Понтекорво в своих воспоминаниях о развитии нейтринной физики пишет: «Трудно найти пример, где слово интуиция так соответствовало бы характеру научного достижения, как в случае предсказания нейтрино Вольфгангом Паули. Во-первых, 50 лет назад были известны только две элементарные частицы — электрон и протон, и даже идея, что для лучшего понимания природы необходимо ввести новую частицу, была сама по себе революционной. Как это отличается от положения в наши дни, когда по малейшему поводу масса людей готова изобрести любое количество частиц!»

Первая последовательная теория β–распада была создана Э. Ферми в 1934 г. Нейтрино очень слабо взаимодействует с веществом. Это позволяет ему проникать на большие расстояния и создает трудности при регистрации. Нейтрино можно детектировать только в большой массе вещества. В этом случае увеличивается вероятность взаимодействия нейтрино с веществом.

1.3.2. Открытие нейтрино. Созданная Э. Ферми теория β-распада описывала не только рождение нейтрино, но и реакцию, которая могла реализоваться только при поглощении антинейтрино, — обратный β -распад

$$\bar{\nu}_e + p \to n + e^+.$$

Она была обнаружена американскими физиками Ф. Райнесом и К. Коуэном в 1953—56 гг. (Нобелевская премия, 1995 г.). Источником нейтрино с энергией 4 *МэВ* служил ядерный реактор, в котором происходит β-распад осколков деления ^{235}U и ^{239}Pu. В качестве мишени использовали резервуар, содержащий раствор солей кадмия. Отбор событий происходил по регистрации двух вспышек света: одна возникала при аннигиляции e^+ с электроном среды, а другая — в результате испускания γ-кванта при захвате нейтрона ядром кадмия. В 1962 г. в Брукхейвенской национальной лаборатории США впервые был обнаружен новый тип нейтрино, получивший название мюонного нейтрино ν_μ (Нобелевская премия, 1988).

1.3.3. Термоядерный реактор звезды. Звезды и наше Солнце с поразительным постоянством миллиарды лет излучают электромагнитные волны и частицы. Мощность светового излучения Солнца составляет $P_C = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт. Что же является источником энергии звезды?

В 1919 г. английский физик Ф. Астон создал масс-спектрограф и определил, в частности, что масса гелия на 0,7 % меньше массы четырех ядер протонов. Это открытие выдающийся английский физик-теоретик Артур Эддингтон использовал в 1920 г. для вычисления энергии $U = 26{,}7$ МэВ, выделяющейся в реакции синтеза при слиянии четырех протонов в ядро гелия. Следовательно, на Солнце за секунду сгорает $4P_C/U = 3{,}6 \cdot 10^{38}$ протонов или 10^{-18} часть общего числа протонов. В марте 1939 г. появилась статья блестящего физика-теоретика Ганса Бете, в которой была развита последовательная теория превращения протонов в гелий (Нобелевская премия, 1967 г.).

Самый близкий естественный источник нейтрино — Солнце. Согласно теории Бете энергетический баланс звезд типа Солнца поддерживается термоядерными реакциями. Цепочка реакций начинается со слияния двух протонов. В стартовой реакции взаимодействие протонов при температуре $T < 15 \cdot 10^6$ К приводит к образованию ядра дейтерия и потока нейтрино с энергиями до 0,42 МэВ

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e \ (99{,}75\%). \qquad (1.3.1)$$

На Солнце идет и другая, менее вероятная, реакция с образованием нейтрино

$$p + e^- + p \rightarrow d + \nu_e \ (0{,}25\%). \qquad (1.3.2)$$

с энергией 1,442 МэВ. Взаимодействуя с протонами, дейтрон образует изотоп гелия и гамма-квант:

$$d + p \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \gamma.$$

Этот цикл реакций очень часто с вероятностью 85 % завершается слиянием двух ядер гелия

$${}^3_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + p + p. \qquad (1.3.3)$$

Два свободных протона возвращаются в начало цикла. Конечный результат PP-цепочки или протон-гелиевого цикла — образование из четырех протонов ядра гелия, двух позитронов и двух нейтрино

$$4p \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2e^+ + 2\nu_e + 2\gamma + 25{,}7 \text{ МэВ}. \qquad (1.3.4)$$

Для условий в центре Солнца среднее время реакции ~ 1 млн лет. В результате сгорания образовавшегося гелия

$${}^3_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^7_4\mathrm{Be} + \gamma \ (15\%)$$

возможны еще две ветви цикла. В реакции электронов с ядрами бериллия-7 образуется литий и нейтрино с энергией 0,861 МэВ

$$^{7}_{4}\mathrm{Be} + e^{-} \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \nu_e \ (99{,}9\%). \qquad (1.3.5)$$

Затем идет реакция слияния

$$^{7}_{3}\mathrm{Li} + p \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}. \qquad (1.3.6)$$

Третья ветвь реализуется при температурах $T > 2{,}5 \cdot 10^{7}$ K и начинается с редкой реакции образования нестабильного ядра бора-8

$$^{7}_{4}\mathrm{Be} + p \rightarrow {}^{8}_{5}\mathrm{B} + \gamma, \ (0{,}1\%),$$

который распадается по схеме

$$^{8}_{5}\mathrm{B} \rightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be} + e^{+} + \nu_e, \qquad (1.3.7)$$

Образуется нейтрино с энергиями до 15 МэВ, а ядро бериллия распадается на два ядра гелия

$$^{8}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}. \qquad (1.3.8)$$

1.3.4. Проблема солнечных нейтрино. Оценим поток нейтрино. В P-P цикле в каждую секунду рождается $1{,}8 \cdot 10^{38}$ нейтрино. Разделив эту величину на площадь поверхности сферы радиусом 1 а. е., получим величину полного потока солнечных нейтрино — $6{,}6 \cdot 10^{10}$ частиц в секунду на квадратный сантиметр. Нейтрино покидают Солнце за 2 с. Поскольку вероятность взаимодействия нейтрино с веществом мала, то для регистрации нейтрино необходимы детекторы массой десятки и сотни тонн. Скорость реакции детектирования потока нейтрино измеряется в солнечных нейтринных единицах SNU (*Solar Neutrino Unit*), определяемой как одно событие в секунду на 10^{36} атомов вещества.

Для ответа на вопрос, реальна ли реакция (1.3.1), необходимы детекторы с очень низким энергетическим порогом. Расчеты показывают, что поток нейтрино в третьей ветви при распадах бора-8 сильно зависит от температуры в центральной области Солнца. Нейтрино второй и третьей ветвей детектируется в хлораргоновой реакции

$$\nu_e + {}^{37}_{17}\mathrm{Cl} \rightarrow {}^{37}_{18}\mathrm{Ar} + e^{-},$$

предложенной в 1946 г. итальянским физиком Б. Понтекорво. Порог реакции 0,814 МэВ.

Результаты измерений озадачили теоретиков. К 1996 г. детекторы на Северном Кавказе и в Италии показали, вклады реакций (1.3.1) и (1.3.2) составляют 77 ± 10 SNU, однако согласно теории должно быть 74 ± 1 SNU. На долю второй и третьей ветвей остается 3 ± 10 SNU вместо 55 SNU. Поток нейтрино от Солнца оказался меньше ожидаемой величины. Эта проблема «потерянных» нейтрино не решена до сих пор.

1.3.5. Масса нейтрино. До сих пор неизвестно точное значение массы нейтрино. Последние эксперименты приводят к оценке 0,05 эВ < m_ν < 0,24 эВ. Возможно, один тип нейтрино должен иметь ненулевую массу. В этом случае возможны нейтринные осцилляции – в пучке нейтрино одного типа должны переходить в нейтрино другого типа, доля которых зависит от расстояния между источником и детектором. Наличие массы у нейтрино ведет к фундаментальным космологическим следствиям. В частности, можно было бы объяснить природу «темного вещества» в галактиках – на существование «скрытой массы» указывают опытные данные и некоторые другие астрофизические «загадки». Большая часть этого вещества представляют собой, по-видимому, какие-то массивные слабовзаимодействующие частицы или сокращенно «уимпы» (сокр. wimp — weakly interacting massive particles).

1.3.6. Нейтринная астрономия. Регистрация солнечных нейтрино стала началом нейтринной астрономии. Известно, что появление сначала радиоастрономии, а затем рентгеновской и гамма-астрономии привело к открытию радиогалактик, квазаров и пульсаров. В 2002 г. лауреатом Нобелевской премии стал создатель рентгеновской астрономии американец Р. Джаккони, открывший на телескопе «Хаббл» рентгеновский источник Скорпион-X1 и черную дыру Лебедь-1. Детектирование космических нейтрино могло бы принести новые данные о широком круге астрофизических явлений. Процесс рождения нейтрино играет важную роль в заключительном этапе эволюции звезд.

24 февраля 1987 г. произошло уникальное событие — в галактике Большое Магелланово Облако вспыхнула сверхновая звезда и обрушила на Землю поток света, радиоволны, γ-излучение и нейтрино. Впервые ученые получили возможность наблюдать с «близкого» расстояния 170 000 световых лет явление, имеющее важнейшее значения для понимания природы Вселенной — взрыв звезды, в недрах которой легкие элементы превратились в железо и термоядерные реакции прекратились. В результате падения давления «железное» ядро звезды быстро сжимается, в нем образуются нейтроны и возникает поток нейтрино. Внешняя оболочка, состоящая примерно из 20 других элементов, разлетается, образуя облака газа, из которого могут формироваться новые звезды и планеты. Все, что остается после этого — нейтронная звезда или пульсар. Но если масса звезды больше трех масс Солнца, то она не станет сверхновой. Ее ядро будет сжиматься, образуя черную дыру.

СН1987А, как назвали сверхновую, оказалась настолько «близкой» — что при наблюдении оптического излучения пришлось ставить фильтр. Два детектора зарегистрировали всплеск потока нейтрино, который произошел за три часа до визуального наблюдения сверхновой. Регистрация 20 нейтрино — эпохальное событие, поскольку ранее не удавалось идентифицировать источник излучения.

1.3.7. Глубоководный мюоннейтринный телескоп — ДЮМАНД (*Deep Underwater Muon And Neutrino Detector*).

В проекте ДЮМАНД предлагалось детектировать нейтрино космического происхождения, используя массу океанской воды. Взаимодействие ней-

трино с молекулой воды вызывает каскад заряженных частиц, обладающих значительными энергиями. В воде эти частицы испускают характерный для черенковского излучения голубой свет. 2000 приемников, расположенных в одном кубическом километре воды на глубине 5 км, зарегистрируют слабые вспышки, сигналы от которых поступят в расположенный на берегу компьютер. В результате шестилетних поисков местом для установки детектора были выбраны Гавайские острова. Здесь на глубине 4,5 км вспышка голубого света затухала на неожиданно большом расстоянии ~50 м. Однако проект остался незавершенным.

Сейчас сооружаются телескопы ANTARES и NESTOR в Средиземном море. Работает установка НТ-200 на озере Байкал. Нейтринный телескоп AMANDA размещен под слоем льда в Антарктиде; здесь же создается установка IceCube со значительно большим объемом.

В настоящее время проблема нейтрино выдвигается на одно из центральных мест. Нерешенные проблемы, связанные с нейтрино исследуют физики Италии (GNO), США (IBM, MINOS), России, Швейцарии (NOMAD), Канады (CNO), Японии (SuperKamiokande, Kamiokande-II).

1.4. Физика высоких энергий

1.4.1. Множественные процессы. Сейчас основную часть наших знаний об элементарных частицах мы получаем в результате дорогостоящих экспериментов по множественному рождению в столкновениях частиц высоких энергий, проводимых на гигантских ускорителях. Основной динамической характеристикой реакций является *сечение рассеяния*, позволяющее сравнить теоретические расчеты времени жизни, углового и энергетического распределения продуктов реакции с экспериментальными данными.

Пусть пучок частиц типа a налетает на мишень, содержащую частицы типа b. Частицы a и b образуют *входной канал реакции*. В результате взаимодействия рождаются с разной степенью вероятности новые частицы, т. е. может существовать несколько *выходных каналов реакции*. Если в выходном канале появились те же частицы a и b, то реакция называется *упругим рассеянием*.

При увеличении энергии сталкивающихся частиц открываются новые каналы, значительно возрастает число вторичных частиц. При кинетической энергии относительного движения $T >> m_p c^2$ (m_p — масса протона) возникают струи — пучки огромного числа новых частиц. В этом случае процесс взаимодействия называется *глубоко неупругим рассеянием*.

1.4.2. Сечение рассеяния. Рассмотрим определенный канал реакции, который обозначим буквой f. Концентрация частиц мишени — n_b, концентрация частиц пучка — n_a, относительная скорость частиц — $\vec{u}$. Представим, что при переходе $i \to f$ начального состояния в конечное состояние частица a эффективно взаимодействует с частицей b в пределах диска площадью $\Delta\sigma_{if}$, расположенного перпендикулярно относительной скорости частиц $\vec{u}$, и рассмотрим некоторое сечение в объеме V перпендикулярное вектору $\vec{u}$, S_0 — площадь сечения. Тогда полная площадь поверхности, закрытая дисками в объеме $S_0 u \Delta t$,

равна $S = \Delta\sigma_{if} n_b S_0 u \Delta t$. Вероятность перехода $i \to f$ в течение интервала времени Δt равна $\Delta W_{if} = S/S_0$, или $\Delta W_{if} = \Delta\sigma_{if}(n_b u \Delta t)$. Пусть $\Delta\nu_{if}$ — число событий — реакций в объеме V в течение времени Δt, соответствующих переходу $i \to f$ начального состояния i в конечное состояние в канале f. Вероятность того, что при столкновении частицы a с мишенью за время Δt произойдут переходы $i \to f$, равна, с другой стороны $\Delta W_{if} = \Delta\nu_{if}/(n_a V)$. Следовательно, величина

$$\Delta\sigma_{if} = \Delta\nu_{if}/(u n_a n_b V \Delta t). \qquad (1.4.1)$$

представляет собой характеристику процесса взаимодействия частиц a и b, не зависящую от плотности частиц, объема и времени Δt. Она называется *дифференциальным сечением рассеяния*. Размерность $\Delta\sigma_{if}$ — м^2.

Вычисление сечений рассеяния — основная проблема физики элементарных частиц. *Полное сечение* рассеяния σ_t равно сумме сечений рассеяния всех возможных реакций.

Сечение принято измерять в специальных единицах — *барнах* (от англ. *barn* — амбар) : 1 б = 10^{-24} см^2. Какое отношение имеет амбар к элементарным частицам? Радиус протона $\approx 0{,}13\ 10^{-12}$ см, площадь поперечного сечения 0,05 барн. Сечение 1 барн в физике элементарных частиц — объясняют физики-теоретики — такая же большая величина, как амбар в нашей жизни.

1.4.3. Резонансы. В 60-х годах на ускорителях было обнаружено большое число нестабильных частиц, получивших название *резонансов*. Они распадаются за время $\tau \cong 10^{-22} - 10^{-24}$ с. Как же обнаружить существование такой частицы, если она «проходит» расстояние $c\tau = 10^{-12} - 10^{-14}$ см, порядка размеров ядра, не оставляя никаких следов?

Первый резонанс был обнаружен группой Ферми в 1951—1953 гг. при анализе упругого рассеяния заряженных пионов на неподвижной протонной мишени. Он проявился в максимуме зависимости сечения рассеяния $\pi^+ + p \to \pi^+ + p$ от инвариантной массы $\pi^+ p$ — системы при значении

$$mc^2 = \sqrt{(E_\pi + m_p c^2)^2 - p_\pi^2 c^2} = 1{,}238 \text{ ГэВ},$$

соответствующем кинетической энергии $T_\pi = 0{,}195$ *ГэВ*. Физический смысл резонансного пика на кривой (рис.1.4.1) заключается в том, что при $m = 1{,}236$ ГэВ/с^2 вероятность образования слабосвязанной $\pi^+ p$ — системы максимальна. Поэтому резонансный пик свидетельствует о существовании нестабильной частицы, называемой резонансом.

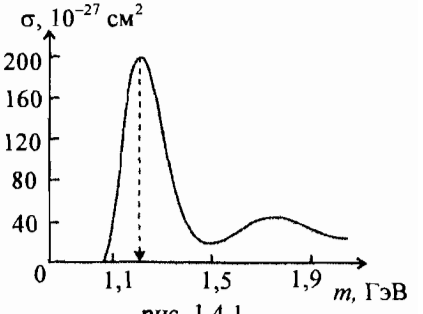


рис. 1.4.1

Ширина резонансной кривой на половине максимальной высоты Г = 116 МэВ. Это означает, что масса резонанса, т. е. системы, состоящей из пиона и протона, не является по-

стоянной величиной. Все дело в том, что резонанс «живет» так недолго, что его масса не успевает установиться. Ширина Г резонансного максимума является мерой неопределенности энергии возбужденного состояния $\Delta E = \Gamma$. Соотношение неопределенностей (10.4.7) позволяет оценить длительность существования резонанса от момента возникновения до момента распада $\Delta t \sim h/2\pi\Gamma = 5{,}7 \cdot 10^{-24}$ с. На практике оказывается, что доступные детектированию резонансы должны иметь ширину на порядок меньше, чем масса. Тот же резонанс может появиться не только в упругом рассеянии, но и в конечном состоянии целого ряда сложных реакций. Так, в конечных продуктах реакции

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + p$$

можно обнаружить $\pi^+ p$-, $\pi^- p$-резонансы и новый $\pi^+ \pi^- p$-резонанс массой 1,518 ГэВ/с^2.

В настоящее время известно более 300 резонансов, возникающих в результате сильного взаимодействия.

1.4.4. Тройной α-резонанс. В результате PP-цикла (11.1.4) внутри звезды образуются ядра стабильных изотопов гелия. Поскольку при слиянии ядер гелия-4 образуется короткоживущее ядро бериллия-8, то процесс образования тяжелых элементов должен оборваться. Однако анализ светимости звезд показывает, что после выгорания водорода в сердцевине звезды реакции термоядерного синтеза продолжаются.

Американский физик-теоретик Э. Солпитер предсказал другой путь объединения ядер гелия. При столкновении ядер бериллия и гелия-4 могло бы образоваться ядро углерода ^{12}C. Эта возможность реализуется благодаря двум «случайным» причинам. Во-первых, ядро ^{12}C может находиться в возбужденном состоянии $^{12}C^*$, для которого величина W в (VIII.1.3.2) меньше нуля, т. е. возможна реакция слияния ядер с образованием $^{12}C^*$. Во-вторых, и это главное, вероятность процесса слияния имеет резонансный пик. Этого достаточно, чтобы в результате перехода $^{12}C^* \rightarrow {}^{12}C + \gamma$ получить углерод-12. В этой связи вспомним, что мы на 18% состоим из углерода, и сам факт нашего существования, по-видимому, зависел от существования подходящего энергетического уровня промежуточного ядра ^8Be.

1.5. Классификация частиц и взаимодействий

1.5.1. Спин элементарных частиц. К 1932 г. были известны четыре частицы: электрон, фотон, протон и нейтрон. Одновременно были сделаны первые шаги в классификации взаимодействий и характеристик частиц. Общими характеристиками для всех частиц являются масса m, заряд Q и спин J. В разделе VII. 2.4.1 отмечено, что спин электрона $J = 1/2$. В дальнейшем было доказано, что каждая элементарная частица обладает спином. Частицы с полуцелым спином называют *фермионами*, а с целым спином — *бозонами*.

Спин протона, нейтрона, электрона, мюона, нейтрино и соответствующих античастиц $J = 1/2$. Спин фотона $J = 1$, спин пиона $J = 0$.

1.5.2. Классы взаимодействий. Различные процессы при достигнутых в настоящее время энергиях заметно отличаются интенсивностью взаимодействия. Сейчас взаимодействия элементарных частиц относят к нескольким классам: электромагнитному, сильному, слабому и гравитационному.

Электромагнитное взаимодействие проявляется в образовании связанных состояний — атомов и молекул. Это взаимодействие обусловлено наличием у частиц электрического заряда. Переносчик взаимодействия — фотон. Сечения электромагнитных процессов $\sigma_l \sim 10^{-25}$ см^2.

Сильное взаимодействие приводит к связанному состоянию нейтронов и протонов — атомному ядру. Полные сечения рассеяния реакций, в которых проявляется сильное взаимодействие, $\sigma_l \sim 10^{-27}$ см^2. Частицы, участвующие в реакциях, обусловленных сильным взаимодействием, называют собирательным термином — *адроны* (от греч. *hadros* — большой, сильный).

Слабое взаимодействие обычно подавлено более интенсивным электромагнитным и сильным взаимодействиями, исключая случаи, когда они запрещены законами сохранения. Все процессы с участием нейтрино обусловлены слабым взаимодействием сверхмалой интенсивности: сечение рассеяния нейтрино на нуклоне имеет порядок 10^{-38} см^2, а на электроне — 10^{-45} см^2! Характерный пример слабого взаимодействия — β-распад ядер. С малостью сечений связаны большие времена распадов. Свободный нейтрон, например, распадается на протон, электрон и электронное антинейтрино за 1000 с.

Времена сильных распадов заключены в интервале 10^{-23} — 10^{-20} с, электромагнитных — в интервале 10^{-21} — 10^{-16} с. Переносчиком слабых взаимодействий являются положительно заряженный W^+-бозон, отрицательно заряженный W^--бозон и нейтральный Z^0-бозон.

Гравитационное взаимодействие несущественно на ядерных расстояниях $\sim 10^{-13}$ см. Однако существует область энергий и расстояний, где гравитационные эффекты становятся определяющими. Действительно, пусть величина энергии взаимодействия двух частиц Gm^2/r на расстоянии длины волны де Бройля $r = h/mc$ равна mc^2. Тогда масса частицы $m = (hc/G)^{1/2}$, $m \sim 5 \cdot 10^{-8}$ кг, $mc^2 \sim 3 \cdot 10^{19}$ ГэВ. Эта сверхтяжелая частица получила название *планкион* (или *максимон*). Расстояние $r = (Gh/c^3)^{1/2} \sim 4 \cdot 10^{-33}$ см называют *планковской длиной.*

1.5.3. Новые квантовые числа. Анализ экспериментальных данных позволил ввести новые характеристики элементарных частиц.

Изотопический спин. В результате взаимодействия протонов и нейтронов возникает устойчивая связанная система — атомное ядро. В 1932 г. Гейзенберг обратил внимание на то, что замена протона нейтроном не изменит величину силы взаимодействия между ними. Если не учитывать различия зарядов и масс ($m_p - m_n = -1{,}29$ МэВ), то с точки зрения сильного взаимодействия они неразличимы. Это свойство, свидетельствующее о *зарядовой независимости* ядерных сил, получило название *изотопической инвариантности.* Протон и нейтрон проявляют себя как различные состояния — «изотопы» одной и той же частицы — нуклона.

Для математического описания двух состояний нуклона вводят вектор *изотопического спина* $\vec{T}$ (или кратко — изоспин). Он подобен обычному спину. Число возможных проекций изоспина T_3 на некоторую ось в абстрактном изотопическом пространстве равное $2T + 1$ определяет полное число частиц изотопического мультиплета (от лат. *multiplex* — многократный). Для нуклона $T = 1/2$. Принято говорить, что протон и нейтрон образуют изотопический дублет. Значение проекции $T_3 = 1/2$ соответствует протону, для нейтрона $T_3 = -1/2$. Численное значение заряда частицы Q можно получить из соотношения $Q = T_3 + 1/2$.

В терминах изоспина взаимодействие нуклонов зависит только от T и не зависит от T_3. Введение изоспина придало принципу Паули более общий характер: теперь протон и нейтрон представляют одну частицу с различными значениями проекции T_3. Аналогичная ситуация проявляется и для других адронов.

Существуют три типа пионов — π^+, π^- и π^0, отличающихся зарядами и массами. Разность масс заряженных и нейтрального пионов — 4,6 МэВ/с^2 несущественна в реакциях, обусловленных сильным взаимодействием. Поэтому пионам должен быть приписан изоспин $T = 1$. Они существуют в трех ($2T + 1 = 3$) различных состояниях, образуя триплет: π^+, π^0 и π^- — пионам соответствуют значения проекций в изоспиновом пространстве $T_3 = 1, 0, -1$. Заряд пиона выражается соотношением $Q = T_3$.

Изоспин в системе нуклон-пион. Поскольку изоспин нуклона $T_N = 1/2$, изоспин пиона $T_\pi = 1$, то возможные значения полного изоспина системы нуклон-пион $T = 3/2$ или $T = 1/2$ соответствуют реализации $4 + 2 = 6$ состояний. Если сильное взаимодействие изотопически инвариантно, то сечения шести процессов рассеяния пионов на нуклонах зависят только от двух функций $f_{1/2}$ и $f_{3/2}$. Из шести процессов только два процесса упругого рассеяния ($\pi^+ + p \to \pi^+ + p$ и $\pi^- + n \to \pi^- + n$) имеют $T_3 = \pm 3/2$ и поэтому описываются одной функцией $f_{3/2}$. Именно в этом случае Э. Ферми обнаружил адронный резонанс, получивший обозначение $\Delta(1238)$.

Барионный заряд. Для объяснения сохранения в реакциях числа нуклонов постулировали закон сохранения барионного (от греч. *barys* — тяжелый) заряда. Протону и нейтрону приписали барионный заряд $B = 1$, их античастицам значение $B = -1$. Барионный заряд пионов $B = 0$. Тогда электрический заряд нуклонов и пионов можно записать в виде

$$Q = T_3 + B/2. \qquad (1.5.1)$$

1.6. Открытие странных частиц

1.6.1. Гиперчастицы. В конце 40-х и в начале 50-х годов стали появляться сообщения об открытии новых частиц с необычными свойствами. Сначала они были зарегистрированы в реакциях космических лучей, а после введения в строй космотрона с энергией протонов 3 ГэВ (США, 1953) и бэватрона с энергией протонов 6 ГэВ (США, 1954) они были получены в ла-

боратории. Чтобы не придумывать имена такому большому количеству частиц, их стали называть просто буквами.

Первым был открыт *лямбда-гиперон* — Λ^0. Его масса m = 1,116 ГэВ превышает массу нуклона — отсюда название (от греч. *hyper* — свыше). Нейтральный Λ^0-гиперон образуется вместе с нейтральным K^0-мезоном или каоном в реакции

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0. \qquad (1.6.1)$$

Эти частицы распадаются по модам

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, \quad \Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-. \qquad (1.6.2)$$

Последняя реакция указывает на то, что Λ^0-гиперон должен быть фермионом. Время жизни Λ^0-гиперона порядка 10^{-10} с.

Далее были открыты три частицы Σ^+, Σ^- и Σ^0, которые называют *сигма-гиперонами*. Их массы почти одинаковы и лежат в окрестности 1195 МэВ.

О существовании $\Sigma^\pm$-гиперонов и $K^\pm$-мезонов удалось узнать из наблюдений распадов в реакциях

$$\pi^- + p \rightarrow \Sigma^- + K^+, \quad \pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+, \qquad (1.6.3)$$
$$\Sigma^\pm \rightarrow n + \pi^\pm, \quad K^\pm \rightarrow \pi^\pm + \pi^0.$$

Время жизни заряженных К-мезонов 10^{-8}с. Массы К-мезонов порядка 495 МэВ.

1.6.2. Каскадные гипероны. В 1953 г. в фотоэмульсии, облученной космическими лучами, была обнаружена тяжелая заряженная частица, которая распадалась на нейтральный Λ^0-гиперон и отрицательный пион. Процесс можно представить как двухступенчатый распад частицы, названной *ксиминус-гипероном* Ξ^-. Ее масса m = 1,3213 *ГэВ/с*^{2}. Она распадалась со временем жизни порядка 10^{-10} с:

$$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-, \quad \Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-.$$

Рождение Ξ^--гиперона сопровождалось появлением двух К-мезонов:

$$\pi^- + p \rightarrow \Xi^- + K^+ + K^0. \qquad (1.6.4)$$

Существует второй каскадный Ξ^0-гиперон с модой распада $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$. Частицы Λ, Σ и Ξ имеют барионный заряд B = 1.

Механизм рождения новых частиц связан с сильным взаимодействием. Поэтому время распада должно быть порядка 10^{-22} с. Однако они живут «значительно» дольше — около 10^{-10} *с*. Поэтому физики назвали новые частицы «странными». Взаимодействие, управляющее распадом, должно быть слабым или электромагнитным. Было отмечено, что в реакциях (1.6.1), (1.6.3) странные частицы появляются парами, однако в реакции (1.6.4) появляются три странные частицы.

В 1953 г. в эту довольно запутанную картину была внесена ясность. Японский физик К. Нишиджима и независимо американский физик М. Гелл-Манн

ввели *новое квантовое число — странность S*. Все странные частицы рождаются в результате сильного взаимодействия и живут в масштабе ядерного времени «почти вечно». Это означает, что при рождении странных частиц должен выполняться закон сохранения странности. В процессах слабого распада странность не сохраняется. Λ- и Σ-гиперонам приписали странность $S = -1$. K^0 и K^+-мезоны имеют странность $S = 1$, их античастицы имеют странность $S = -1$. Для каскадных гиперонов $S = -2$. Нуклоны и пионы не принадлежат к странным частицам, для них S = 0. Поэтому при столкновении обычных частиц должно рождаться несколько странных частиц.

Обобщением формулы (1.5.1) является новое соотношение

$$Q = T_3 + B/2 + S/2. \qquad (1.6.5)$$

Если ввести еще одно квантовое число — *гиперзаряд* $Y = B + S$, то $Q = T_3 + Y/2$.

Схема Гелл-Манна и Нишиджимы позволила предсказать существование новых частиц. Например, Σ^+ и Σ^--гипероны, имеющие почти одинаковую массу, не могут образовать дублет с изоспином $T = 1/2$, т. к. в этом случае нарушается соотношение (1.6.5). Если предположить, что $T = 1$, то должен существовать триплет, включающий нейтральную частицу — Σ^0-гиперон. Были предприняты поиски Σ^0-гиперона и он был найден в 1959 г. в новой моде реакции (1.6.1): $\pi^- + p \to \Sigma^0 + K^0$. Нейтральный Σ^0-гиперон распадается совсем не так, как его заряженные партнеры: $\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$. Время жизни в результате электромагнитного процесса распада с сохранением странности очень мало — порядка $10^{-19} - 10^{-21}$ с.

Аналогичным образом можно показать, что K^+, K^0 и K^- не могут образовать триплета с изоспином $T = 1$. В действительности существуют два нейтральных каона — частица K^0 и античастица, так что мы имеем четыре частицы: K^+, K^0 и их античастицы с изоспином $T = 1/2$.

Последний представитель гиперонов в декуплете барионов вызвал сенсацию в научном мире. Это *омега-минус-гиперон* Ω^- с массой 1672 МэВ/с^2. Его барионное число $B = 1$, изоспин $T = 0$, странность $S = -3$. Существование Ω^-, значение массы и схема распада были предсказаны раньше, чем его обнаружили в 1964 г. – это был решающий эксперимент, подтверждающий гипотезу Гелл-Манна. Возникла надежда, что мы проникли в самые глубокие тайны Природы. *Анализ свойств новых частиц привел к созданию современной кварковой теории строения вещества.*

1.7. Симметрия слабых взаимодействий

1.7.1. Самые загадочные частицы — каоны. Проблема «тау-тета» и открытие несохранения четности в слабых взаимодействиях. Анализ реакций с участием каонов привел к открытию нового закона природы. До 1956 г. все опыты подтверждали предположение о зеркальной симметрии законов природы. Другими словами, законы природы одинаковы в системе координат x, y, z и

в системе координат, полученной после преобразовании пространственной инверсии нечетного числа осей, т. е. после изменения положительного направления осей на обратное. Обозначим операцию инверсии символом P, действие которого на некоторую функцию $f(t, \vec{r})$, характеризующую состояние частицы, приводит к изменению знака координат: $Pf(t, \vec{r}) = f(t, -\vec{r})$. При двукратном преобразовании инверсии функция переходит в себя: $P^2 = 1$. Поэтому возможные состояния частицы могут описываться функциями $f_a(t, \vec{r})$ и $f_b(t, \vec{r})$, удовлетворящими условиям $f_a(t, -\vec{r}) = f_a(t, \vec{r})$, $f_b(t, -\vec{r}) = -f_b(t, \vec{r})$, где индексы a и b обозначают два набора квантовых чисел. В первом случае функцию называют четной, во втором — нечетной и говорят, что частица может находиться в одном из двух состояний — четном или нечетном. *Закон сохранения четности* запрещает переходы между состояниями с различной четностью. Природа, по-видимому, нигде не дает предпочтения левой или правой стороне.

Проблема «тау-тета» возникла в связи с распадом K^+-мезона. Было похоже, что существуют два различных типа K^+-мезонов: один, названный тета-мезоном, распадался на два пиона; другой, названный тау-мезоном, распадался на три пиона. Физики не могли утверждать, что K^+-мезон иногда распадается на два пиона, а иногда на три пиона, т. к. в этом случае нарушался бы закон сохранения четности. Возникла дилемма: существуют два типа частиц равных масс и зарядов с различной четностью или в одном из распадов изменяется четность. Вторая гипотеза казалась невероятной. Однако в 1956 г. Т. Ли и Ч. Янг пришли к выводу, что в *слабых взаимодействиях четность не сохраняется* (Нобелевская премия, 1957 г.). Чтобы проверить это предположение, госпожа Ву с сотрудниками в 1957 г. поставила эксперимент по изучению β-распада кобальта-60 в магнитном поле при температуре 0,01 К. В этом случае спины всех ядер выстраивались по направлению вектора магнитной индукции и можно было измерить количество электронов, вылетевших вдоль и против направления спина. Результаты измерений удивили всех: электроны испускались несимметрично. Следовательно, при распаде K^+-мезона возможно образование четного или нечетного состояний.

1.7.2. CP-инвариантность. Четности частиц P приводятся в таблицах. Несохранение четности означает, что слабым взаимодействиям оказалась присуща внутренняя асимметрия; природа сама дает определение правого и левого. Можно восстановить зеркальную симметрию, если произвести зеркальное отражение пространства P и заменить все частицы на античастицы в результате зарядового сопряжения C. Например, распад $\mu^+ \to e^+$ — это процесс зарядово-сопряженный процессу $\mu^- \to e^-$. Если постулировать CP-инвариантность, то вероятность вылета позитрона под углом θ равна вероятности вылета электрона под углом $\pi - \theta$. До 1964 г. характеристики процессов соответствовали CP-инвариантности.

1.7.3. Открытие несохранения CP-инвариантности. Каоны продолжали преподносить сюрпризы. Нейтральные каоны — частица K^0 и античастица $\bar{K}^0$ проявляют существенно различное поведение. K^0 может рождаться

совместно с гипероном при взаимодействии нестранных частиц. $\bar{K}^0$ может рождаться только совместно с каоном или антигипероном. В пузырьковой камере нейтральные каоны не оставляют следов. Видны только треки продуктов распада, например групп пионов $\pi^+ + \pi^-$ и $\pi^+ + \pi^- + \pi^0$. В этих распадах не сохраняются ни странность, ни проекция изотопического спина. Поэтому невозможно однозначно сопоставить распад на два или три пиона K^0 или $\bar{K}^0$-мезону. Более того, *CP*-преобразование переводило K^0 в $\bar{K}^0$-мезон.

В 1955 г. американские физики М. Гелл-Манн и А. Пайс показали, что K^0 и $\bar{K}^0$ представляют собой суперпозицию двух состояний — короткоживущего компонента K_1 в состоянии $CP = 1$ и долгоживущего — K_2 в состоянии $CP = -1$. Существование двух компонентов должно проявиться в *регенерации* новых состояний нейтральных каонов. В чистом пучке, содержащем N частиц K^0, на расстоянии, достаточном для распада всех K_1, остаются только K_2 в количестве $N/2$. Состояние K_2 будет проявляться как смесь K_0 и $\bar{K}^0$ в количестве по $N/4$. Появление этих частиц на большом расстоянии от источника K^0 наблюдалось в экспериментах в 1956 г. Пучок K_2 пропускали через пластину вещества. В результате значительного поглощения $\bar{K}^0$ на выходе вновь появлялась смесь состояний K_1 и K_2, сильно обедненная частицами K_1. При сохранении *CP* мезон K_1 может распасться только на два π-мезона, а мезон K_2 — на три π-мезона. В 1964 г. эксперимент, проведенный под руководством Дж. Кронина и В. Фитча показал, что долгоживущее состояние K_2 с небольшой вероятностью может распадаться и на два пиона (Нобелевская премия, 1980 г.).

Открытие *CP*-несохранения позволяет объяснить нарушение симметрии между веществом и антивеществом. Если законы природы CP-инвариантны, то в результате Большого взрыва рождается равное число барионов и антибарионов. Тогда Вселенная содержала бы равное количество вещества и антивещества, т. е. могли возникнуть антимиры. В 1967 г. А. Сахаров отметил, что нарушение *CP*-симметрии — важный фактор, определяющий эволюцию Вселенной. Благодаря *CP*-неинвариантности возникло превышение частиц над античастицами. В последовавшей затем аннигиляции вещества и антивещества уцелели только «избыточные» частицы, которые образовали нашу Вселенную. Более того, появляется возможность однозначного способа отличить левую и правую систему координат.

Глава 2. Кварковая модель строения вещества

2.1. Кварки

2.1.1. Первое поколение кварков. Что мы знает об элементарных частицах? Адроны участвуют в сильном и электрослабом взаимодействиях. Но существуют частицы, которые принимают участие только в электрослабых

процессах. К ним относятся электрон, мюон, электронное и мюонное нейтрино. Эти частицы получили название *лептонов* (от греч. *leptos* — легкий). Эксперимент, в котором было доказано существо вание двух типов нейтрино поставлен в 1960 г. В 1975 г. М. Перл с сотрудниками в Станфорде расширили это семейство — они нашли «тяжелый» тау-мезон (τ) с массой $m_\tau = 1{,}8$ ГэВ $/c^2$ и предсказали существование его нейтрального партнера — тау-нейтрино ν_τ (Нобелевская премия, 1996 г.).

В 1961 г. Мюррей Гелл-Манн обнаружил, что система мультиплетов, предложенная для описания странных частиц, может быть включена в более общую модель, позволяющую сгруппировать все сильновзаимодействующие частицы. Свою схему Гелл-Манн назвал восьмеричным путем (по аналогии с 8 принципами праведной жизни в буддийской философии), так как некоторые частицы были сгруппированы в семейства по восемь членов. Как и Менделеев, у которого в таблице элементов оставались пустые клетки, Гелл-Манн оставил вакантные места в семействах частиц.

Введение странности как нового квантового числа позволило из хаоса частиц получить упорядоченные группы – *супермультиплеты* в пространстве квантовых чисел. В табл. 1 и 2 отражены экспериментально наблюдаемые свойства барионов и мюонов. Эта-мезон (η) был обнаружен в 1961 г. Трудно сомневаться в том, что мы наблюдаем здесь проявление некоторой скрытой от нас симметрии природы.

Таблица 1

Y \ T_3	–1	–1/2	0	1/2	1
1		n		p	
0	Σ^-		Λ^0, Σ^0		Σ^+
–1		Ξ^-		Ξ^0	

Таблица 2

Y \ T_3	–1	–1/2	0	1/2	1
1		K^0		K^+	
0	π		π^0, η		π^+
–1		K^-		$\bar{K}^0$	

Существование большого числа адронов, с одной стороны, и явная симметрия барионов и мезонов, с другой, позволили прийти к выводу, что все они являются сложными системами, образованными из триплета субчастиц. Эта гипотеза была выдвинута в 1961 г. Гелл-Манном (Нобелевская премия, 1969 г.) и независимо Дж. Цвейгом. Три новых объекта Гелл-Манн назвал *кварками*. Кварки обозначают буквами *u*, *d*, *s*, образованными от начальных букв английских слов up (вверх), down (вниз), strange (странный). Кваркам приписываются квантовые числа, указанные в табл. 3.

Таблица 3

	Q	B	J	T_3	S
u	2/3	1/3	1/2	1/2	0
d	–1/3	1/3	1/2	–1/2	0
s	–1/3	1/3	1/2	0	1

Таблица 4

	Q	B	J	T	S	C	b	t
c	2/3	1/3	1/2	0	0	1	0	0
b	–1/3	1/3	1/2	0	0	0	1	0
t	2/3	1/3	1/2	0	0	0	0	1

Кварки, таким образом, являются фермионами и имеют дробные электрический и барионный заряды. Для антикварков $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ все квантовые числа, исключая спин J, имеют знаки, обратные указанным в таблице. Массы u и d-кварков ≈0,35 ГэВ/с^2, масса s-кварка ≈0,338 ГэВ/с^2.

2.1.2. Элементарные частицы и кварки. Согласно кварковой модели барионы состоят из трех кварков ($n = udd$, $p = uud$), а мезоны — из кварков и антикварков. Например, $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^- = \bar{u}d$, π^0-мезон является смесью $u\bar{u}$ и $d\bar{d}$ кварков. s- кварк входит в состав странных барионов и мезонов:

$$K^+ = u\bar{s},\ K^0 = d\bar{s},\ K^- = s\bar{u},\ \Lambda^0 = uds,\ \Sigma^+ = uus,\ \Sigma^- = dds.$$

Совокупность квантовых чисел, отличающих один тип кварков от другого, принято называть *ароматом* (flavour).

Распады частиц объясняются как процесс, связанный с распадом кварка. Например, распад нейтрона

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$

происходит благодаря распаду d-кварка

$$d \to u + e^- + \bar{\nu}_e.$$

2.1.3. Цвет. Цветовой заряд. Если кварк рассматривать как фермион, то возможны адроны из трех одинаковых кварков в состояниях (например, $\Omega^- = sss$), которые не удовлетворяют принципу Паули. Решение этой проблемы было найдено в 1965 г. Пришлось ввести еще одну внутреннюю характеристику кварка — *цвет*. Кварк может находится в одном из трех *цветовых состояний*, которые условно называют красный, зеленый и синий. Цвета антикварков по определению являются дополнительными к цветам кварков. Их, естественно, назвать антицветами.Теперь любой барион должен содержать кварки трех цветов. Так как кваркам приписаны основные цвета, то такая комбинация может быть названа белой или бесцветной. Мезоны являются смесью цвета и антицвета, т. е. тоже бесцветны.

Квантовое число — *цвет* — определяет *цветовой заряд* кварка. Вскоре стало ясно, что введение цвета приводит к новой внутренней симметрии, которая может быть использована для построения теории взаимодействия кварков.

2.1.4. Открытие очарованных частиц и с-кварка. В ноябре 1974 г. две американские группы экспериментаторов, работавшие на разных ускорителях, одновременно сообщили об открытии необычной частицы — резонанса массой 3,1 ГэВ/c^2 и чрезвычайно малой шириной Г = 0,067 МэВ (Нобелевская премия, 1976 г.). Она была названа J-частицей группой Б. Рихтера, наблюдавшей ее как резонанс при e^+e^--аннигиляции на накопительных кольцах SPEAR в Стенфорде (SLAC) и ψ-частицей группой, открывшей ее при столкновении протонов с энергией 28 ГэВ с бериллиевой мишенью на ускорителе AGS группой *С*. Тинга в Брукхейвене (BNL). Сейчас ее называют *J/ψ-частицей.* Эта частица распадалась на пары e^+e^- или на адроны и на пары $\mu^+\mu^-$.

Малая ширина резонанса не позволяет объяснить ее существование в рамках теории трех кварков. Оказалось, что J/ψ-частица является связанным состоянием нового с-кварка второго поколения и антикварка $\bar{c}$, предсказанных в 1970 г. Новый кварк получил название «очарованного». Он обладает новым квантовым числом С, названным очарованием или шармом (*charm*). Масса *c*-кварка ≈1,5 ГэВ/c^2, заряд кварка Q = 3/2.

Согласно кварковой модели должны существовать возбужденные состояния системы $c\bar{c}$, называемой *чармонием*. Вскоре — через десять дней — было обнаружено связанное состояние, распадающееся с образованием *J/ψ* — частицы. В 1979 г. были обнаружены «очарованные» барионы, содержащие «очарованные» кварки. Таким образом, была открыта *новая форма материи*, возникающая только при высоких энергиях взаимодействующих частиц.

Открытие *J/ψ* явилось решающим прямым экспериментальным доказательством кварковой модели — ученые окончательно убедились в реальности кварков как основных структурных элементов материи.

2.1.5. Новое поколение кварков. Еще до открытия четвертого кварка М. Кобаяши и Т. Маскава разработали схему, согласно которой должно существовать третье поколение кварков. Тогда слабое взаимодействие между кварками должно приводить к *CP*-несохранению. Открытие чармония стимулировало поиск еще более тяжелых кварков. Имелись основания предполагать, что они будут появляться парами. Сотрудники Л. Ледермана исследовали с этой целью спектр рождения частиц на ядрах протонами с энергией 400 Гэв на адронном коллайдере FNAL (Fermi National Accelerator Laboratory, USA). В 1977 г. они открыли новую частицу — ипсилон-мезон Υ массой 9,46 ГэВ/c^2 и шириной Г = 0,04 МэВ представляет собой связанное состояние пары кварк-антикварк пятого аромата. Эта система называется бьютионием (от англ. *beauty* — красота) или чаще боттомонием (от англ. *bottom* — дно). Новый кварк, названный *b*-кварком, является носителем квантового числа *b* — красота (beauty) и принадлежит к «нижним» кваркам с зарядам −1/3. Масса кварка — 4,5 ГэВ. Основное и возбужденные состояния этой частицы представляют собой узкие резонансы.

Годом позже два возбужденных состояния были обнаружены в экспериментах на встречных электрон-позитронных пучках с энергией 5 ГэВ (накопитель-

ные кольца DORIS длиной 300 м, 1976 г., лаборатория DESY — Deutsches Electronen-Synchrotron, Гамбург). Сейчас в ДЕЗИ работают протон-электронные накопительные кольца HERA (Hadron Electron Ring Accelerator) — электронное кольцо (энергия пучка 30 ГэВ, 1988г.) и протонное кольцо (энергия пучка 820 ГэВ, 1991 г.). На этой установке можно детально исследовать структуру протона и взаимодействие между электроном и кварком, поскольку электроны не участвуют в сильных цветовых взаимодействиях.

После открытия пятого кварка стало ясно, что должен существовать «последний» шестой кварк, завершающий третье поколение кварков, лежащих в основе новой теории структуры материи. Спустя восемнадцать лет после начала поисков в феврале 1995 г. на кольцевом тэватроне FNAL (1987 г.) радиуса 1 км был открыт *t*-кварк (от англ. *top* — вершина) с квантовым числом *t*. Топ-кварк — самый тяжелый среди всех кварков массы $\approx$174 ГэВ/c^2. Квантовые числа *c*, *b*, и *t*-кварков приведены в таблице 4.

2.2. Квантовая хромодинамика (КХД)

2.2.1. Квантовая динамика цвета. Не следует думать, что главное в новой теории — арифметические действия с квантовыми числами. Современный подход к построению теории основывается на двух фундаментальных разделах науки: теории относительности и квантовой механике. Первая формулировка теории взаимодействия кварков была дана в 1972 г.(М. Гелл-Манн, Г. Фритч). Цвет кварка, введенный для «примирения» кварковой модели с принципом Паули, стал играть в сильных взаимодействиях ту же роль, что и электрический заряд в электромагнитных взаимодействиях. Кварки обладают цветовым зарядом, а переносчиками взаимодействия между кварками являются кванты цветового поля — 8 безмассовых частиц — *глюонов* (от англ. *glue* — клей). Эта теория напоминает электродинамику и называется *квантовой хромодинамикой*.

Необходимость введения глюонов связана с одной из самых глубоких идей теоретической физики XX века — с предположением о *локально-калибровочной симметрии законов природы*. Если параметры, характеризующие преобразование симметрии, зависят от координат и времени, то симметрия называется локальной (от лат. *localis* — местный) в отличие от глобальной симметрии, задаваемой постоянными параметрами. Для математического описания локальной симметрии необходимо ввести *калибровочные поля* и кванты этого поля. Так закон сохранения электрического заряда в «данной лаборатории» приводит к необходимости введения «нового» калибровочного поля — электромагнитного поля и фотонов, реализующих взаимодействие зарядов. Сейчас стало понятно, что гравитационное поле в общей теории относительности Эйнштейна — калибровочное поле, возникающее как следствие эквивалентности произвольных систем отсчета.

В соответствии с экспериментальными данными сильное взаимодействие кварков не зависит от цветового состояния. При цветовом взаимодействии

цвет системы частиц как квантовое число сохраняется. Другими словами, существует особая *цветовая симметрия*, которая может быть использована для построения динамической теории взаимодействия элементарных частиц.

Предполагая, что эта симметрия является локальной мы неизбежно должны ввести калибровочные поля и кванты этих полей — *глюоны*, частицы число которых равно числу параметров группы симметрии. Наиболее важное отличие глюонов от фотонов состоит в том, что глюоны сами обладают цветовым зарядом, тогда как фотон электрически нейтрален. Поэтому глюоны взаимодействуют между собой и сами могут испускать и поглощать глюоны. Связанное состояние двух глюонов может существовать как наблюдаемая физическая частица — *глюбол*.

Цветовые силы совсем не похожи на электромагнитные. Когда два кварка или кварк и антикварк находятся близко друг от друга, то цветовые силы уменьшаются. Это свойство получило название *асимптотической* (от греч. *asymptotos* — несовпадающий) *свободы*. Есть основания полагать, что на больших расстояниях силы взаимодействия навечно удерживают кварки внутри адронов. Свободные кварки не наблюдались, несмотря на все попытки экспериментаторов.

Из-за трудностей проведения расчетов до сих пор нет строгого решения проблемы *конфайнмента* (от англ. *confinement* — тюремное заключение). На больших расстояниях взаимодействие глюонов приводит к сильному притяжению кварков. По аналогии с силовыми линиями электрического поля можно представить себе цветовые силовые линии безмассового глюонного поля, которые начинаются и оканчиваются на кварках. Однако, в отличие от электромагнитного поля, глюон-глюонное взаимодействие сжимает цветовые силовые линии, придавая им форму трубки или *струны*. Эта конфигурация силовых линий соответствует на больших расстояниях потенциальной энергии взаимодействия $W(r) \sim r$ и силам, удерживающим кварки друг около друга. При столкновении адронов силовая трубка может разорваться и в месте разрыва произойдет рождение пары кварк-антикварк. Образуются две новые струны.

2.2.2. Рождение кварковых струй. Впервые существование кварков было установлено в 1975 г. по результатам анализа $e^+ e^-$ — аннигиляции в адроны при энергиях пучков 7 ГэВ на установке SPEAR (Станфорд, США). В одном из каналов реакции $e^+ e^- \to \gamma \to q\bar{q}$ рождается пара кварк-антикварк, которая не может разлететься из-за сильного взаимодействия. Поэтому рождается вторичная пара $q_1\bar{q}_1$. При низких энергиях связываются пары $q_1\bar{q}$ и $q\bar{q}_1$ и образуются мезоны. Однако при больших энергиях рождение пар повторяется, пока не образуются пары с малыми импульсами, способные образовать многоадронное состояние. Импульсы рожденных адронов лежат в узком конусе вокруг направления движения кварков первичной пары — это и есть две кварковые струи. Угол раствора струи уменьшается с ростом энергии и занимает 2% полного телесного угла.

Струи образуются не только при $e^+ e^-$ — аннигиляции. В адрон-адронных столкновениях и в процессах рассеяния электронов, мюонов и нейтрино на нуклонах наблюдались события, имеющие структуру струи. В 1979 г. наблюдались трехструйные события, связанные с рождением глюона g в реакции $e^+ e^- \to \gamma \to q\bar{q}g$.

2.2.3. Новая ядерная физика. Сейчас перед физиками стоит грандиозная задача объяснения на основе квантовой хромодинамики ряда фундаментальных проблем: в какой степени ядра могут быть описаны как системы «кваркованных» нуклонов, происхождение ядерных сил и явления в сверхплотном ядерном веществе, представляющем собой кварк-глюонную хромоплазму.

Наиболее прямым способом изучения структуры ядра является неупругое рассеяние лептонов на ядрах. Анализ полного сечения реакции позволяет определить распределение кварков в ядре по импульсам. Эксперименты привели к выводу о существовании в ядре структур, содержащих 6, 9, 12 и т. д. кварков — так называемых *кварковых мешков*. Существуют определенные указания на то, что нуклон в ядре разбухает — радиус конфаймента в ядре на 10–20 % больше, чем в свободном нуклоне.

Изучение столкновений тяжелых ядер уже показало возможность «кипения» ядерной материи с испусканием кластеров — легких ядер и отдельных нуклонов. Высказано предположение, что при высокой плотности, но низкой температуре может существовать стабильное упорядоченное состояние ядерной материи, подобно тому, как при увеличении давления атомы углерода в графите перестраиваются в конфигурацию, соответствующую алмазу.

Когда нагревают обычную воду, то температура достигает 100° С (при нормальном давлении), а затем в процессе парообразования не изменяется. При непрерывном подводе энергии к ядерной материи также возможен переход нуклонов в адроны с наибольшей массой при постоянной температуре. После этого температура системы снова будет возрастать. Если же «самых тяжелых» адронов не существует, то подвод энергии приведет к увеличению числа рождающихся адронов. В результате может возникнуть состояние с максимально возможной в природе температурой.

Хромоплазма. Основная задача теоретиков — получить уравнение состояния ядерной материи при плотности, в двадцать и более раз превышающей плотность в современном состоянии $3 \cdot 10^{14}$ г/см^3. В таких условиях вещество содержит кварки и глюоны, образуя *хромоплазму* (или *квагму*). Эта новая форма материи существовала в первые мгновения после Большого взрыва. При охлаждении хромоплазма в результате фазового перехода типа конденсации может перейти в адроны. При быстром охлаждении нужно искать эффекты, которые можно объяснить кратковременно существующей кварк-глюонной плазмой, которую обнаружили в ЦЕРНе в начале 2000 г.

Согласно современным представлениям при низких температурах и плотностях реализуется фаза конфайнмента. При достаточно больших значениях плотности барионов ожидается появление новой фазы с цветовой

сверхпроводимостью. В этой фазе возможно образование связанных состояний двух кварков. При больших температурах предсказывается переход в состояние кварк-глюонной плазмы, где кварки становятся свободными.

Показано, что плазменная фаза может испускать «глобулы» — многокварковые капли, содержащие кварки трех первых поколений и странные частицы. Возможно образование необычных метастабильных объектов с большой странностью (multistrage objects или memos). 10 июня 2000 г. в Брукхевене запущен самый мощный релятивистский коллайдер, разгоняющий атомы золота. Эти эксперименты, моделирующие ранние стадии эволюции Вселенной, могут привести к открытию совершенно неизвестной области существования плазменной кварк-глюонной фазы ядерной материи и новых экзотических частиц.

2.3. В поисках единой теории

Первая успешная попытка объединения двух взаимодействий — электрического и магнитного – осуществлена в 1864 г. Д. Максвеллом. Мы уже видели, что одна из характеристик внутренней симметрии — изотопический спин — определяет особенности взаимодействия адронов. Однако роль внутренних симметрий более фундаментальна, т. к. оказалось, что именно они вынуждают вводить калибровочные поля, реализующие взаимодействие частиц.

2.3.1. Стандартная модель. В 1954 г. вышла статья Чженьнин Янга и Р. Миллса, в которой впервые рассмотрено локально-калибровочное преобразование, порождающее безмассовые поля, взаимодействующие между собой и реализующие взаимодействие частиц. Следующий шаг сделал П. Хиггс, вводя в теорию механизм появления масс у безмассовых частиц.

В 1967 г. американский физик С. Вайнберг и, независимо, в 1968 г. пакистанский физик А. Салам показали, что *электромагнитное и слабое взаимодействия можно рассматривать как проявление единого электрослабого взаимодействия.* Они постулировали локальную изоспиновую симметрию, благодаря которой взаимодействие между лептонами переносится четырьмя безмассовыми бозонами — представителями калибровочного поля. Для того чтобы теория описывала взаимодействие реальных элементарных частиц, они предположили, что симметричное начальное состояние может перейти в устойчивое состояние с наименьшей энергией, которое не обладает симметрией исходного взаимодействия. Однако теория должна включать только одну безмассовую частицу — фотон. С этой целью они ввели взаимодействие с новыми полями — носителями так называемых хиггсовских бозонов нулевой массы в новом устойчивом вакуумном состоянии. Теперь стало возможным введение комбинаций хиггсовских полей относительно нового вакуумного состояния.

В результате этой процедуры, называемой «*спонтанным нарушением симметрии*», возникают смешанные состояния, которые можно сопоставить фотону, одному *хиггсовскому* тяжелому бозону H^0 и трем новым тяжелым бозонам W^+, W^-, Z^0 — переносчикам слабого взаимодействия. Благодаря нарушению симметрии безмассовые частицы приобрели массу. Из теории

следовало, что масса W-бозонов равна 80 ГэВ/с^2, масса Z^0-бозона равна 90 ГэВ/с^2. Первые оценки массы бозона Хиггса 5,4 ГэВ/с^2 — 1 ТэВ/с^2.

В 1970 г. Ш. Глешоу из Гарвардского университета модифицировал теорию электрослабых взаимодействий, включив в нее очарованные кварки. Объединение квантовой хромодинамики и теории Вайнберга-Салама-Глешоу получило название *стандартной модели* (*Standart Model*).

Теория электрослабого взаимодействия предсказывала существование «нейтральных токов», не меняющих зарядов лептонов и кварков в реакциях, обусловленных Z^0-бозоном, и новый тип взаимодействия между электронами и ядрами, не сохраняющий четность. Это казалось недостатком теории. Но в 1973 г. в пузырьковой камере, помещенной на выходе протонного синхротрона PS (ЦЕРН, 28 Гэв) был обнаружен процесс неупругого рассеяния нейтрино без рождения заряженного лептона: $\nu_\mu + p \to n + \pi^+ + \nu_\mu$. Теория электрослабых взаимодействий стала общепризнанной. В 1979 г. создатели новой теории получили Нобелевскую премию.

Триумфом теории стало открытие W^+, W^- и Z^0-бозонов в сложнейших экспериментах, проведенных в 1983 г. на встречных протон-антипротонных пучках SPS (Super Proton Synchrotron, ЦЕРН, энергия пучка 270 ГэВ). Бозоны рождались в реакциях

$$p + \bar{p} \to W^{\pm} + X,\ W^+ \to e^+ + \nu_e, W^- \to e^- + \bar{\nu}_e,$$

$$p + \bar{p} \to Z^0 + Y,\quad Z^0 \to e^+ + e^-, \mu^+ + \mu^-,$$

где X, Y — прочие частицы. Массы $W^{\pm}$, Z^0 — бозонов оцениваются соответственно 80,4 ГэВ/с^2 и 91 ГэВ/с^2 – это самые тяжелые из известных бозонов.

Эксперимент, который привел к этому открытию, явился высочайшим достижением человеческой деятельности. В «низкоэнергетических» экспериментах не происходит рождение W^+, W^- и Z^0-бозонов; более того, кажется, что фотон и массивные W^+, W^- и Z^0-бозоны не имеют ничего общего. Поэтому поиск новых частиц связан с созданием ускорителей нового поколения.

В 1979 г. руководство ЦЕРН приняло решение создать на базе протонного суперсинхротрона SPS протон-антипротонный коллайдер – первый в мире ускоритель на встречных пучках. В результате решения сложнейших проблем к лету 1981 г. работа была завершена. В кольце радиусом 2,2 км в трех сгустках с поперечным сечением $3 \cdot 10^{-4}$ см^2 накапливалось за сутки 10^{11} антипротонов. В эксперименте по поиску W искали события (одно из 10^8), в которых рождались около 25 адронов, электрон и нейтрино с энергией ≈40 ГэВ. За 30 дней детекторы зафиксировали миллиард pp-взаимодействий. После анализа остались только 5 событий, которые не сопровождались адронными струями и содержали электрон большой энергии. Оценка массы W^+ находилась в полном согласии с предсказанием теории. В 1984 г. создатели накопителя и системы охлаждения антипротонов К. Руббиа и С. Ван-дер-Мер были удостоены Нобелевской премии.

На этом ускорителе удалось зарегистрировать несколько тысяч новых частиц. Однако для дальнейших экспериментов необходимо иметь значительно большее количество частиц. Эта проблема была решена после создания в 1989 г. электрон-позитронного кольцевого коллайдера LEP (Large Electron Positron, ЦЕРН, энергия пучка 45 ГэВ), размещенного в туннеле длиной 27 км. В 1989 г. две группы экспериментаторов — коллайдере LEP и первом в мире Станфордском линейном коллайдере длиной 3,2 км (Stanford Linear Colliger, SLAC, энергия пучка электронов 50 ГэВ) получили Z^0-бозон в реакции $e^- + e^+ = Z^0 + Y$ на встречных пучках. Время жизни этой частицы около 10^{-25} с. Бозон проявил себя распадом на кварк — антикварк, которые образовали два ливня адронов. Энергия пучков LEP была увеличена до значения 49 ГэВ достаточного для наблюдения реакции $e^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$ и резонансного рождения Z^0. До конца 1995 г. было зарегистрировано 18 млн Z_0.

В 2000—2003 гг. японские физики на гигантской установке Super-Kamiokande стоимостью 100 млн. долларов, содержащей 50 тыс. тонн воды, просматриваемой 11 тыс. фотоумножителей, и физики из Канады (Sudbury Neutrino Observatory) получили убедительные данные о переходе одного типа нейтрино в другой и оценили разность масс мюонного и тау-нейтрино, которая составляет доли эВ. Часть «темной материи» Вселенной возможно состоит из нейтрино, обладающих ненулевой массой.

2.3.2. Поиски бозона Хиггса. В основе стандартной модели — предположение об уникальной роли скалярных бозонов Хиггса H^0, которые придают всем частицам массы (и самим себе в процессе самодействия). Поэтому поиск H^0 — важнейшая экспериментальная задача.

К настоящему времени получены сверхточные значения масс топ-кварка, W и Z-бозонов, которые находятся «в ужасающем согласии» с теорией. Однако бозон Хиггса не открыт до сих пор. После уточнения параметров теории оценка ожидаемой массы — от 110 до 150 ГэВ/c^2. В 1999 г. энергия пучков на LEP была поднята до величины 100 Гэв и в середине 2000 г. были обнаружены кандидаты в хиггсы с массой 115 ГэВ/c^2.

2 ноября 2000 г. LEP был остановлен. В туннеле начат монтаж нового коллайдера LHC (Large Hadron Collider) с энергией пучка 7 ТэВ. После осуществления проекта в 2007 г. физики из десятков стран всех континентов приступят к поисковым экспериментам.

2.3.3. Взгляд в будущее. Выход за рамки стандартной модели. Успех теории Салама–Вайнберга в уменьшении числа фундаментальных взаимодействий вдохновил многих на попытки продолжить этот процесс и развить теорию, которая объединила бы электрослабые силы с цветными и гравитационными. Наиболее обещающее направление работ — попытки объединить сначала электрослабые и цветные силы.

Теория Великого объединения (ТВО). Для исследования пространственной структуры частицы с разрешением r необходимо согласно соотношению неопределенностей передать импульс $q \sim \hbar/r$. При малых импульсах $q < \hbar/R$, когда r больше размеров протона — мишени R, протон ведет себя

как точечная частица. С увеличением q проявляется кварковая структура протона. Обмен глюонами приводит к тому, что и кварки приобретают «структуру» — кварк, испустивший глюон в свою очередь порождает пару кварк – антикварк. В этом случае говорят, что *вакуум поляризуется*. В результате поляризации вакуума константы связи — «заряды», характеризующие интенсивность взаимодействия частиц, зависят от импульса q, переданного начальными частицами конечным.

При увеличении энергии интенсивность электромагнитного и слабого взаимодействий растет, а сильного — убывает. Значения всех трех «констант» совпадают в области $q \approx 10^{15}$ ГэВ/с. Это означает, что при энергиях $E_m \approx 10^{14} - 10^{16}$ ГэВ интенсивность всех трех взаимодействий будет одинакова. Мы можем говорить о *едином фундаментальном взаимодействии — Grand Unification.*

В области энергий $E << E_m$ степень симметрии в организации материи понижается. При доступных нам энергиях «великая» симметрия не наблюдается – она скрыта, как скрыта симметрия электрослабого взаимодействия при энергиях ниже ~100 Гэв. В соответствии с современными представлениями о происхождении Вселенной энергии E_m были характерны в промежутке между $10^{-43} - 10^{-38}$ с после Большого взрыва. Несмотря на ничтожно малую величину этого промежутка времени, его влияние на последующую эволюцию Вселенной было огромным. Как оказалось, *физика микромира дает ключ к пониманию процессов в космических масштабах.*

Энергии E_m не достижимы в обозримом будущем. Поэтому для экспериментальной проверки теории предстоит большая работа по вычислению наблюдаемых эффектов в низкоэнергетической области, либо проверка космологических следствий. Одно из предсказаний теории — нарушение закона барионного заряда – вызвало особенно большой интерес.

Распадается ли протон? Основой простейшего варианта новой теории является симметрия, которая объединяет фермионы (лептоны и кварки) в мультиплеты. В модели имеются 24 бозона, которые порождают взаимодействие частиц. Сюда входят 8 глюонов, фотон — переносчик электромагнитного взаимодействия, W^+, W^-, Z^0 — три переносчика слабых взаимодействий и двенадцать очень массивных бозонов — переносчиков нового сверхслабого взаимодействия. В результате обмена массивными бозонами кварки могут переходить в лептоны и кварки в антикварки и поэтому становится возможен распад протона — самое драматическое предсказание теории.

Наиболее вероятная реакция распада $p \to e^+ + \pi^0$. Время жизни протона $\tau_p \approx 5 \cdot 10^{31}$ лет (возраст Вселенной $\approx 10^{10}$ лет). Чтобы увидеть распад протона, не обязательно ждать «так долго». В веществе, содержащем $5 \cdot 10^{33}$ протонов, будет происходить 100 распадов в год. Распад регистрируется по черенковскому излучению позитрона.

До настоящего времени распад протона не обнаружен. Полученные оценки на детекторе, содержащем 8000 т воды, показали, что $\tau_p > 10^{32}$ лет (США, 1985 г.). Другие схемы Великого объединения, предсказывающие большее время жизни протона, недоступны пока эксперименту.

Пример 2.3.1. Данные о нижнем пределе времени жизни протона получают с 1985 г. в экспериментах по наблюдению распадов в воде. Найдем объем воды V, в котором происходит распад 100 протонов в год.

Согласно (VIII.1.2.2) и (VIII.1.2.4) $N(t) = N_0\exp(-t/\tau_p)$. Полагая $N(\Delta t) = N_0 - \Delta N$, получим $\Delta N/N_0 = 1 - \exp(-\Delta t/\tau_p) \approx \Delta t/\tau_p$ или $N_0 = \tau_p \Delta N/\Delta t$. Число протонов в воде массой $m = \rho_в V$ равно $N_0 = 10mN_A/M$. Следовательно, $V = (M\tau_p/10\rho_в N_A)\Delta N/\Delta t$. Подставляя числовые значения, получим $V = 15 \cdot 10^3$ м^3 — куб со стороной 24,7 м.

2.3.4. Новая симметрия в мире элементарных частиц – суперсимметрия. Несомненно, что при высоких энергиях должно произойти и объединение с гравитационным взаимодействием. Один из вариантов теории удалось реализовать благодаря тому, что два последовательных поворота в пространстве спиновых состояний приводят к пространственно-временному смещению частицы. Возникает симметрия между частицами с различными спинами, которую назвали *суперсимметрией* или *Сюзи* (SUper SYmmetry). Постулируется, что у каждой обычной частицы имеется «суперпартнер» с аналогичными свойствами, исключая спин.

Суперпартнеры фермионов имеют спин $J = 0$, их названия образуются из названий обычных частиц с помощью приставки «с-». Например, электрон, кварки и лептоны имеют суперпартнеров — сэлектрон, скварки, слептоны. Суперпартнеры бозонов имеют спин 1/2. Их названия получают добавлением суффикса «-ино» к корню термина обычной частицы. Например, фотон – *фотино*, *глюон* — *глюино*, *гравитон* — *гравитино* и т. д.

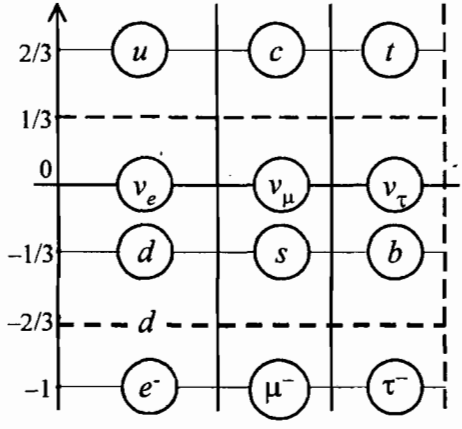
Модель большого объединения следует рассматривать как низкоэнергетический предел супергравитации с нарушенной суперсимметрией. В настоящее время нет никаких свидетельств существования *SUSY*-частиц. В различных вариантах Сюзи-модели время жизни протона в увеличивается на несколько порядков по сравнению с моделью Великого объединения. Физики надеются, что Природа, возможно, позволит осуществить проверку основных принципов суперсимметричных теорий.

2.3.5. Взгляд в недалекое прошлое. Успехи теоретиков и экспериментаторов в физике элементарных частиц стали возможны в результате анализа локального калибровочного преобразования поля и необходимостью введения «абстрактных» калибровочных полей для сохранения нового вида симметрии. Когда в 1954 г. вышла статья Ч. Янга и Р. Миллса, впервые рассмотревших локально-калибровочное преобразование, трудно было увидеть в ней прообраз будущей «всеобъемлющей теории» («the theory of everything»). Многим она представлялась интересной математической абстракцией, поскольку оперировала с полями частиц нулевых масс. Потом появилась гипотеза кварков и только в 1965 г. японский физик-теоретик Йоширо Намбу ввел гипотезу о калибровочных полях, связанных с цветом кварков. В результате математических преобразований частицы «одели» — они приобрели массы в результате математического преобразования, введенного П. Хиггсом в 1964 г.

Все современные теории элементарных частиц — потомки теории Янга–Миллса. Самое удивительное в этой истории то, что все новые частицы, предсказанные физиками-теоретиками, были открыты на специально модифицированных ускорителях стоимостью несколько миллиардов долларов — Природа сказала: « Да, я такая». Добавим, что, используя универсальную структуру полей Янга-Миллса, удалось создать новую теорию, описывающую дефекты в сплошной среде, и применить ее для расчета деформации и предельных нагрузок в строительных конструкциях.

2.3.6. Фундаментальные составляющие вещества. Итак, все частицы образуют два класса — фермионы и бозоны. Фермионы — частицы, образующие вещество, а бозоны — частицы, которые переносят взаимодействие. В свою очередь среди фермионов можно выделить небольшое число фундаментальных элементарных частиц: только шесть кварков и шесть лептонов. Кварки и лептоны группируются в симметричную схему, показанную в таблице 5. Они образуют три поколения, каждое из которых состоит из четырех частиц — двух кварков и двух лептонов. Это дает 12 строительных блоков или 24 с античастицами. Переносчики фундаментальных взаимодействий — 8 глюонов, фотон и W^+, W^-, Z^0-частицы — это «раствор», который связывает строительные блоки друг с другом.

Таблица 5



Бозоны и фермионы (исключая лептоны) состоят из кварков. *Все обычное вещество состоит из частиц первого поколения: двух кварков, электрона и электронного нейтрино.* Во второе — входят два кварка, мюон и мюонное нейтрино, в третье — два кварка, тау-лептон и тау-нейтрино. Появление второго и третьего поколений вызвало сомнения в том, что все неразрешенные вопросы физики элементарных частиц можно объяснить существованием небольшого числа фундаментальных частиц. В то же время экспериментальные данные, полученные при изучении распадов Z^0-бозонов, рожденных в электрон-позитронных столкновениях, подтвердили предска-

зания теории электрослабого взаимодействия. Анализ всех каналов распада позволил утверждать, что существуют только три типа нейтрино. Эти результаты согласуются с наблюдаемой распространенностью легких элементов во Вселенной, которое сильно зависит от отношения числа нейтронов к числу протонов в эпоху остывания Вселенной. Это отношение в свою очередь зависит от плотности энергии нейтрино каждого типа.

Однако много вопросов остается без ответа. Мы не можем ответить на вопрос почему никогда не наблюдалось превращение лептонов друг в друга, предсказать массы частиц каждого поколения или объяснить их существенное различие, почему в нашей Галактике барионы преобладают над антибарионами ($>10^4$), следует ли постулировать ненулевую массу нейтрино для объяснения дефицита солнечных нейтрино и т. д. По выражению Дж. Уилера из Принстонского университета: «Мы живем на острове знаний, окруженном морем нашей неосведомленности. По мере того как наш остров расширяет свои границы, прилегающая к ним область непознанного тоже расширяется».

Сейчас никто не сомневается, что кварковая модель строения вещества оказалась необычайно успешной и войдет важной составной частью в будущую полную теорию элементарных частиц. В настоящее время физики ведут поиск экспериментальных данных, которые позволят проверить возможные следствия стандартной модели и теорий Великого объединения. Основная надежда связана с пуском ускорителей нового поколения. Развиваемая теория может стать решающим звеном в цепи новых законов, объясняющих строение вещества и эволюцию Вселенной. «Но самым замечательным, — говорит М. Гелл-Манн, который внес существенный вклад в теорию элементарных частиц, — будет то, что горстка существ, находящихся на небольшой планете, обращающейся вокруг незначительной звезды, проследит свое происхождение до самого начала — небольшая крупинка Вселенной, постигающая все в целом».

Дополнение I. МЕХАНИКА

Глава 1. Элементы математического анализа

1.4. Прямая и плоскость в пространстве

Наша задача — получить уравнения прямой и плоскости в трехмерном пространстве. Сейчас мы убедимся, что, используя скалярное и векторное произведения векторов, можно получить решение задачи элементарным и наглядным методом.

1.4.1. Уравнение прямой. Прямая проходит через заданную точку $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Пусть $\vec{r}\,(x, y, z)$ — радиус-вектор точки P на прямой. Образуем вектор $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$ параллельный вектору $\vec{v}$. Тогда векторное произведение $\vec{r}' \times \vec{v} = 0$. Это и есть уравнение искомой прямой в векторной форме

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{r} \times \vec{v} - \vec{r}_0 \times \vec{v} = 0 \qquad (1.4.1)$$

Символическая запись (1.4.1) в проекциях на оси координат имеет вид

$$(y - y_0)v_3 - (z - z_0)v_2 = 0,$$

$$(z - z_0)v_1 - (x - x_0)v_3 = 0,$$

$$(x - x_0)v_2 - (y - y_0)v_1 = 0.$$

Параметрическая форма уравнения прямой. Полагая в (1.4.1) $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}t$, где t — новая переменная, получим знакомое из раздела механика уравнение $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$:

$$x = x_0 + v_1 t, \quad y = y_0 + v_2 t, \quad z = z_0 + v_3 t.$$

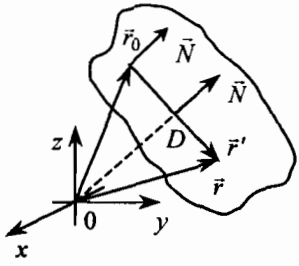


рис. Д. 1.4.1

1.4.2. Общее уравнение плоскости. Пусть $\vec{N} = (N_1, N_2, N_3)$ — вектор, перпендикулярный плоскости, проходящей через точку $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Радиус-вектор точки на плоскости — $\vec{r}$. Тогда вектор $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$ лежит в плоскости (рис. Д. 1.4.1.). Следовательно, скалярное произведение $\vec{r}'\vec{N} = 0$: уравнение плоскости в векторной форме имеет вид $(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{N} = 0$ или

$$\vec{r}\vec{N} = \vec{r}_0\vec{N}\ . \qquad (1.4.2)$$

Символическая запись (1.4.2) соответствует уравнению

$$xN_1 + yN_2 + zN_3 = D,\ D = \vec{r}_0\vec{N}\ . \qquad (1.4.3)$$

1.4.3. Нормальное уравнение плоскости. Введем единичный вектор $\vec{n} = \vec{N}/N$, где $N = |\vec{N}|$. Тогда из (1.4.3) получим уравнение

$$\vec{r}\vec{n} = p\,, \qquad (1.4.4)$$

где $p = \vec{r}_0\vec{n}$ — проекция вектора $\vec{r}_0$ на единичный вектор $\vec{n}$. Следовательно $|p|$ — расстояние от начала координат до плоскости. Если $p = 0$, то плоскость проходит через начало координат.

1.4.4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Пусть плоскости принадлежат три точки на осях координат x, y, z. Радиус-векторы точек $\vec{a} = (a, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, b, 0)$, $\vec{c} = (0, 0, c)$ (рис. Д.1.4.2). Векторы $\vec{b} - \vec{a}$ и $\vec{c} - \vec{a}$ параллельны отрезкам AB, AC на плоскости. Поэтому вектор $\vec{N} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})$ перпендикулярен плоскости; $\vec{N} = (bc,\ ac,\ ab)$. Радиус-вектор точки на плоскости — $\vec{r}$. Теперь, вводя единичный вектор $\vec{n} = \vec{N}/N$, получим уравнение плоскости $(\vec{r} - \vec{a})\vec{n} = 0$, аналогичное (1.4.2) или (1.4.4), где

$$p = \vec{a}\vec{n} = \vec{b}\vec{n} = \vec{c}\vec{n}\,, \qquad p = abc/N,$$

$$N^2 = (bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2.$$

Очевидно p — расстояние от начала координат до плоскости.

Задача 1.4.1. Основанием треугольной пирамиды $OABC$ является треугольник ABC на рис. Д.1.4.2. В треугольнике OAB из точки O к стороне AB проведена медиана.

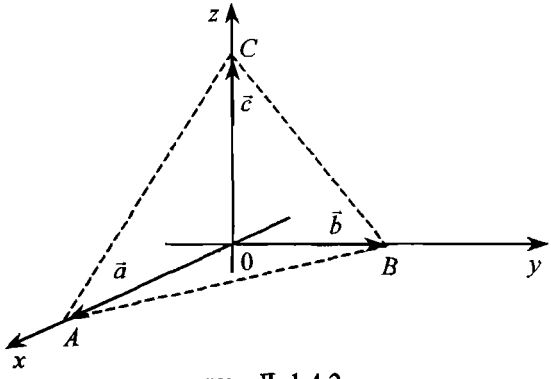


рис. Д. 1.4.2

А. Найдите длину медианы m и угол θ между медианой и высотой пирамиды.

Решение. Пусть $\vec{m}$ — радиус-вектор точки пересечения медианы со стороной AB. Очевидно $\vec{a} = \vec{m} + (\vec{a} - \vec{b})/2$, или $2\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$. Следовательно, $2m = (a^2 + b^2)^{1/2}$. Теперь образуем скалярное произведение $2\vec{m}\vec{n} = (\vec{a} + \vec{b})\vec{n}$. Из этого уравнения находим $\cos\theta = abc/Nm$.

Б. Найдите радиус шара r, вписанного в пирамиду.

Решение. Шар касается плоскости ABC в точке $\vec{r}_k = \vec{R} + r\vec{n}$, где $\vec{R} = (r, r, r)$ — радиус-вектор центра шара. Поскольку $\vec{r}_k\vec{n} = p$, то имеем уравнение $\vec{R}\vec{n} + r = p$, из которого находим $r = abc/(bc + ac + ab + N)$.

В случае правильной пирамиды ($a = b = c$) радиус шара $r = a/(3 + \sqrt{3})$. Попробуйте нарисовать чертеж и убедитесь в корректности решения.

1.4.5. Уравнение плоскости в отрезках. Из (1.4.4) следует уравнение $\vec{r}\vec{n}/p = 1$. Поскольку $n_1/p = 1/a$, $n_2/p = 1/b$, $n_3/p = 1/c$, то уравнение плоскости приобретает вид

$$x/a + y/b + z/c = 1. \qquad (1.4.5)$$

1.4.6. Уравнение плоскости, проходящей через две точки параллельно заданной прямой. Пусть радиус-векторы двух точек $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Направление прямой задано вектором $\vec{v}$. Тогда вектор, перпендикулярный плоскости $\vec{N} = (\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{v}$. Уравнение плоскости имеет вид (1.4.2): $\vec{r}\vec{N} = \vec{a}\vec{N}$ или $\vec{r}\vec{N} = \vec{b}\vec{N}$.

Задача 1.4.2. Плоскость проходит через точки $\vec{a} = (1, 0, 0)$ и $\vec{b} = (0, 1, 0)$ параллельно единичному вектору $\vec{v}$, компоненты которого $v_x = v_y = -(\sqrt{2}/2)\sin\theta$, $v_z = \cos\theta$. Найдите расстояние p от начала координат до плоскости и значение z-координаты точки пересечения плоскости z_0 с осью z.

Решение. Вектор $\vec{N} = (\cos\theta, \cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$. Величина вектора $N = \sqrt{2}$. Расстояние $p = \vec{a}\vec{N}/N$, $p = (1/\sqrt{2})\cos\theta$. Теперь, полагая в уравнении плоскости (1.4.4) $\vec{r} = (0, 0, z_0)$, получим $z_0 = (1/\sqrt{2})\mathrm{ctg}\theta$. Нарисуйте чертеж и убедитесь в корректности решения.

1.4.7. Расстояние между точкой и плоскостью. Пусть радиус-вектор точки $\vec{R} = (R_1, R_2, R_3)$. Найдем расстояние d между точкой и плоскостью, заданной уравнением (1.4.4). Представим вектор $\vec{R}$ в виде $\vec{R} = \vec{r} + d\vec{n}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки, принадлежащей плоскости: $\vec{r}\vec{n} = p$. Следовательно, $d = \vec{R}\vec{n} - p$.

Отметим, что материал этого раздела может быть эффективно использован при решении задач стереометрии. Отпадает необходимость графического изображения геометрических фигур.

1.5. Элементарные дифференциальные уравнения

1.5.1. Уравнения первого порядка. Обыкновенным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(t, x, dx/dt) = 0. \tag{1.5.1}$$

Здесь $F(t, x, v)$ — известная функция трех переменных, t — независимая переменная, $x(t)$ — неизвестная функция. Функция $x(t)$ называется решением уравнения (1.5.1), если она n раз дифференцируема на некотором интервале I и при $t \in I$ удовлетворяет уравнению.

Ищем решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.5.2}$$

где t_0, x_0 — заданные числа. Условия (1.5.2) называются *начальными данными*. Такая постановка проблемы называется *задачей Коши* в честь выдающегося французского математика Огюстена Луи Коши (1789—1857) — автора более чем 800 трудов.

Разрешая уравнение (1.5.1) относительно производной

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.5.3}$$

получим уравнение в *нормальной форме*.

Ниже мы рассмотрим несколько типов уравнений, которые в явном или в неявном виде встречаются при изучении физики в рамках программы средней школы.

1.5.2. Линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + ax = 0. \tag{1.5.4}$$

Это уравнение описывает переходной процесс при отключении генератора постоянного напряжения в цепи, содержащей резистор и конденсатор или резистор и катушку индуктивности. Если $x = N(t)$, где N — число нераспавшихся атомов радиоактивного элемента, то решение уравнения (1.5.4) определяет закон радиоактивного распада.

Запишем уравнение (1.5.4) в виде $dx/x = -adt$ и проинтегрируем; тогда получим общее решение уравнения (1.5.4)

$$ln|x|/C = -at, \text{ или } x = C\exp(-at),$$

где C — произвольная постоянная. Учитывая условие (1.5.2), находим $C = x_0\exp(at_0)$. Следовательно, решение уравнения (1.5.4) имеет вид

$$x = x_0\exp[-a(t - t_0)]. \tag{1.5.5}$$

Полезно получить представление о поведении функций $f(t) = \exp(-t/\tau)$ и $g(t) = \exp(t/\tau)$. Полагая значения t кратные τ, получим таблицу

t	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$g(t)$	2,718	7,3891	20,086	54,598	148,41
$f(t)$	0,3679	0,1353	0,0479	0,0183	0,00674

1.5.3. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} + ax = b. \qquad (1.5.6)$$

Это уравнение описывает переходной процесс при включении генератора постоянного напряжения в цепь, содержащую резистор и конденсатор или резистор и катушку индуктивности.

Введем новую функцию u соотношением $x = b/a + u$. Тогда получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} + au = 0,$$

которое имеет форму (1.5.4) и решение $u = B\exp(-at)$, где B — постоянная. Следовательно, общее решение уравнения (1.5.6) имеет вид

$$x = b/a + B\exp(-at).$$

Учитывая начальные данные (1.5.2), получим

$$x_0 = b/a + B\exp(-at_0)$$

Следовательно, решение уравнения (1.5.6)

$$x = b/a + (x_0 - b/a)\exp[-a(t - t_0)].$$

1.5.4. Уравнение с разделяющимися переменными. Найдем решение нелинейного уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \qquad (1.5.7)$$

К этому уравнению сводится множество задач механики консервативных систем.

Запишем (1.5.7) в виде $dx/f(x) = dt$ и проинтегрируем; тогда получим

$$\int\frac{dx}{f(x)} = t + C, \qquad (1.5.8)$$

где C — произвольная постоянная. Это соотношение определяет x как неявную функцию переменной t.

1.5.5. Однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=0 \qquad (1.5.9)$$

Начальные условия: при $t = 0$ функции $x(0) = x_0$, $dx/dt = v_0$.

Общее решение уравнения второго порядка должно зависит от двух произвольных постоянных. Согласно теории ищем частное решение уравнения (1.5.9) в виде $x = C\exp(\lambda t)$. После подстановки в (2.9) получим алгебраическое уравнение $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm [(b/2)^2 - c]^{1/2}$. Возможны три случая.

А. Пусть $(b/2)^2 > c$. В этом случае общее решение (1.5.9)

$$x = C_1\exp(\lambda_1 t) + C_2\exp(\lambda_2 t), \qquad (1.5.10)$$

где $C_{1,2}$ — произвольные постоянные. Поскольку

$$dx/dt = \lambda_1 C_1\exp(\lambda_1 t) + \lambda_2 C_2\exp(\lambda_2 t),$$

то из начальных условий получим систему

$$x_0 = C_1 + C_2,$$

$$v_0 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2,$$

из которой находим

$$C_1 = [\lambda_2 x_0 - v_0]/(\lambda_2 - \lambda_1),\ C_2 = [v_0 - \lambda_1 x_0]/(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Если $b = 0$, $c = -k^2 < 0$, то имеем уравнение

$$d^2x/dt^2 - k^2x = 0,$$

решение которого

$$x = C_1\exp(-kt) + C_2\exp(kt)$$

возрастает при $t >> 1/k$.

Б. Положим $(b/2)^2 = c$. Тогда общее решение имеет вид

$$x = \exp(-bt/2)(A_1 + A_2 t), \qquad (1.5.11)$$

где A_1, A_2 — постоянные.

В. Пусть $(b/2)^2 < c$, $c > 0$; тогда $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm i\Omega$, $\Omega = [c - (b/2)^2]^{1/2}$. Общее решение имеет вид

$$x = \exp(-bt/2)[C_1\cos\Omega t + C_2\sin\Omega t]. \qquad (1.5.12)$$

1.5.6. Уравнение затухающих колебаний. Пусть в уравнении (1.5.9) $b = \gamma > 0$, $c = \omega_0^2 > (\gamma/2)^2$. Тогда уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \qquad (1.5.13)$$

имеет решение (1.5.12), где $\Omega = [\omega_0^2 - (\gamma/2)^2]^{1/2}$.

В случае $\gamma = 0$, уравнение (1.5.13) представляет собой уравнение гармонического осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

решение которого $x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$. Полагая $C_1 = A\sin\alpha$, $C_2 = A\cos\alpha$, получим решение в виде

$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha). \qquad (1.5.14)$$

Полная энергия частицы $E = (m/2)(dx/dt)^2 + m\omega_0^2 x^2/2 = mA^2\omega_0^2/2$ — постоянная величина.

1.5.7. Одномерное движение частицы во внешнем консервативном поле. На частицу массой m действует консервативная сила $F = -dW/dx$, где $W(x)$ — потенциальная энергия взаимодействия частицы с неподвижными телами. Из второго закона Ньютона получим уравнение второго порядка

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dW}{dx}. \qquad (1.5.15)$$

Для того, чтобы понизить порядок уравнения, умножим правую и левую части (1.5.14) на проекцию скорости $v_x = dx/dt$ и учтем равенства

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dt}v_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_x^2}{2}\right),$$

$$\frac{dW}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dW}{dt}.$$

В результате получим уравнение

$$dE/dt = 0,\ E = mv_x^2/2 + W(x). \qquad (1.5.16)$$

Следовательно, сохраняется полная энергия частицы: E — const. Закон сохранения энергии представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка вида (1.5.3):

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{m}[E - W(x)]}.$$

Решение этого уравнения получим в результате вычисления интеграла (1.5.8).

В качестве примера рассмотрим гармонический осциллятор. Потенциальная энергия частицы

$$W(x) = kx^2/2.$$

Полагая $k/m = \omega_0^2$, получим $f(x) = \omega_0(A^2 - x^2)^{1/2}$, $A^2 = 2E/m\omega_0^2$. Из (1.5.8) находим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega_0 t + \alpha, \qquad \text{или} \qquad \arcsin(x/A) = \omega_0 t + \alpha,$$

где α — новая постоянная. Следовательно, $x = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$.

Глава 4. Законы Ньютона

4.2.3. Численный метод решения уравнений движения. Пусть на частицу действует только сила тяжести. Ось z направим по вертикали вниз. Тогда из (4.2.2) имеем систему уравнений

$$dv_x/dt = 0, \quad dv_y/dt = 0, \quad dv_z/dt = g.$$

Начальные условия $\vec{r}(0) = 0$, $\vec{v}(0) = 0$. Из уравнений (1.5.1) и (1.5.2) следует решение этих уравнений: $\vec{r}(t) = \vec{g}t^2/2$, $\vec{v}(t) = \vec{g}t$. Получим это решение «численным» методом.

Согласно второму закону Ньютона проекция ускорения $a_z(t) = g$. Благодаря этому обстоятельству мы можем, начиная с момента времени t при достаточно малом ε, приближенно найти z-компоненту скорости v_z частицы и координату в момент $t + \varepsilon$:

$$v_z(t + \varepsilon) = v_z(t) + a_z(t)\varepsilon, \quad z(t + \varepsilon) = z(t) + v_z(t)\varepsilon.$$

Положим $t = 0$, тогда $v_z(\varepsilon) = v_z(0) + g\varepsilon = g\varepsilon$, $z(\varepsilon) = z(0) + v_z(0)\varepsilon = 0$. Полагая $t = \varepsilon$, имеем $v_z(2\varepsilon) = v_z(\varepsilon) + g\varepsilon = 2g\varepsilon$, $z(2\varepsilon) = z(\varepsilon) + v_z(\varepsilon)\varepsilon = 2g\varepsilon^2$. Продолжая эту процедуру, находим

$$v_z(3\varepsilon) = v_z(2\varepsilon) + g\varepsilon = 3g\varepsilon, \quad z(3\varepsilon) = z(2\varepsilon) + v_z(2\varepsilon)\varepsilon = 4g\varepsilon^2,$$

$$v_z(4\varepsilon) = v_z(3\varepsilon) + g\varepsilon = 4g\varepsilon, \quad z(4\varepsilon) = z(3\varepsilon) + v_z(3\varepsilon)\varepsilon = 7g\varepsilon^2,$$

$$v_z(5\varepsilon) = v_z(4\varepsilon) + g\varepsilon = 5g\varepsilon, \quad z(5\varepsilon) = z(4\varepsilon) + v_z(4\varepsilon)\varepsilon = 11g\varepsilon^2, \ldots$$

Полагая в каждом приближении $\varepsilon = t/n$ ($n = 1,2, \ldots$), получим $v_z(t) = gt$,

$$z(\varepsilon) \to z(t) = gt^2/2, \quad z(2\varepsilon) \to z(t) = gt^2/2, \; z(3\varepsilon) \to z(t) = 4gt^2/9 \approx 0{,}444\, gt^2,$$

$$z(4\varepsilon) \to z(t) = 7gt^2/16 \approx 0{,}437\, gt^2, \quad z(5\varepsilon) \to z(t) = 11gt^2/25 \approx 0{,}444\, gt^2, \ldots$$

Начатые расчеты приводят к довольно грубому результату. Более разумно использовать значение скорости в средней точке между двумя моментами времени, полагая $z(t + \varepsilon) = z(t) + v_z(t + \varepsilon/2)\varepsilon$ и значение ускорения в средней точке. Согласно (1.2.6) $v_z(t + \varepsilon/2) = v_z(t - \varepsilon/2) + a_z(t)\varepsilon$. Для начала вычислений необходимо использовать дополнительное уравнение $v_z(\varepsilon/2) = v_z(0) + g\varepsilon/2$. Теперь имеем таблицу значений

$$v_z(\varepsilon/2) = g\varepsilon/2, \qquad z(\varepsilon) = v_z(\varepsilon/2)\varepsilon = g\varepsilon^2/2,$$

$$v_z(3\varepsilon/2) = v_z(\varepsilon/2) + g\varepsilon = 3g\varepsilon/2, \qquad z(2\varepsilon) = z(\varepsilon) + v_z(3\varepsilon/2)\varepsilon = 2g\varepsilon^2,$$

$$v_z(5\varepsilon/2) = v_z(3\varepsilon/2) + g\varepsilon = 5g\varepsilon/2, \qquad z(3\varepsilon) = z(2\varepsilon) + v_z(5\varepsilon/2)\varepsilon = 9g\varepsilon^2/2,$$

$$v_z(7\varepsilon/2) = v_z(5\varepsilon/2) + g\varepsilon = 7g\varepsilon/2, \qquad z(4\varepsilon) = z(3\varepsilon) + v_z(7\varepsilon/2)\varepsilon = 8g\varepsilon^2, \ldots$$

совпадающую с точным решением $v_z(t) = gt$ и $z(t) = gt^2/2$.

Глава 5. Законы изменения и сохранения импульса системы частиц

Задача 5.4.4. Однородная цепь AB массой M висит вертикально, касаясь концом B поверхности пола. Цепь отпускают. Найдите зависимость величины силы давления цепи на пол. Покажите, что в момент падения конца A на пол величина силы давления в три раза больше веса цепи.

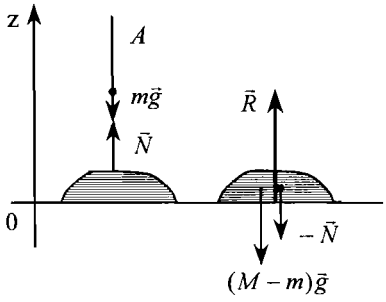


рис. Д. 5.4.4

Решение. Масса цепи длиной l равна $M = \rho l$, где ρ — линейная плотность цепи. Направим ось z вертикально вверх, начало координат — на уровне поверхности пола. В момент времени t координата точки A равна z, проекцию скорости точки A на ось z обозначим v.

Масса движущейся части цепи $m(t) = \rho z$ (рис. Д.5.4.4). На нее действуют сила тяжести и сила реакции $\vec{N}$ со стороны части цепи массой $M - m(t)$, лежащей на полу. На эту часть цепи действуют три силы — сила тяжести, сила давления $-\vec{N}$ со стороны движущейся нити и сила реакции пола $\vec{R}$. Из (5.4.2) следуют уравнения

$$d(\rho z v)/dt = -\rho g z + N_z, \tag{1}$$

$$0 = -(M - m)g - N_z + R_z, \tag{2}$$

Отметим, что присоединение элемента $\rho\Delta z$ к неподвижной части цепи имеет характер удара — его скорость мгновенно изменяется от значения $-v$ до нуля. Приращение импульса $\rho\Delta z v$ сообщает сила реакции $\vec{N}$: $\rho\Delta z v = N_z\Delta t$. Переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим $N_z = \rho v^2$. Следовательно, из (1), (2) получим

$$dv/dt = -g, \tag{3}$$

$$R_z = \rho(l - z)g + \rho v^2. \tag{4}$$

Из (3) следует, что цепь свободно падает. Поскольку начальные условия $z(0) = l_0$, $v(0) = 0$, то

$$v(t) = -gt, \qquad z(t) = l - gt^2/2. \tag{5}$$

Из (4), (5) получим величину силы давления цепи на пол — вес цепи

$$R_z(t) = \frac{3}{2}\rho g^2 t^2, \quad \text{или} \quad R_z(z) = 3\rho g(l - z). \qquad (6)$$

Конец цепи А достигает пола в момент времени $T = (2l/g)^{1/2}$. В этот момент времени вес цепи $R_z(T) = 3Mg$.

Глава 6. Законы изменения и сохранения полной энергии системы частиц

6.2.3. Мощность ракетного двигателя. Используя обозначения п. 5.4 главы 5, найдем приращение кинетической энергии K системы ракета- газы за интервал времени Δt

$$\Delta K = (1/2)(m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v})^2 - \Delta m\vec{c}^2/2 - m\vec{v}^2/2 =$$
$$= m\vec{v}\Delta\vec{v} + (1/2)\Delta m(\vec{v}^2 - \vec{c}^2).$$

Переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим

$$dK/dt = m\vec{v}d\vec{v}/dt + (1/2)(\vec{v}^2 - \vec{c}^2)dm/dt.$$

Образуем теперь скалярное произведение обеих частей уравнения Мещерского (5.4.2) с вектором скорости

$$m\vec{v}d\vec{v}/dt = \vec{c}'\vec{v}dm/dt + \vec{F}\vec{v} + m\vec{g}\vec{v}.$$

Исключая из этих соотношений $m\vec{v}d\vec{v}/dt$, получим

$$dK/dt = -dm/dt(\vec{c}'^2/2) + \vec{F}\vec{v} + m\vec{g}\vec{v}.$$

Поскольку производная кинетической энергии равна мощности всех сил, то мощность внутренних сил или мощность, развиваемая двигателем

$$P_{\text{дв}} = -\frac{c'^2}{2}\frac{dm}{dt}.$$

Если $P_{\text{ДВ}} \sim dm/dt$, то величина относительной скорости газов постоянна. При движении ракеты с постоянной тягой $\vec{f} = -\vec{c}'\, dm/dt$, мощность $P_{\text{дв}} = \vec{f}\vec{c}'/2$.

Глава 8. Закон всемирного тяготения

Задача 8.5.2. Система двух тел состоит из однородного шара радиусом R массой m_b и частицы массой m_a. Найдите первую космическую скорость шара и частицы в системе центра масс (с. ц. м.).

Решение. В с. ц. м. радиус-векторы частицы и шара $\vec{r}_a$ и $\vec{r}_b$, скорости $\vec{v}_a = -m_b\vec{v}/m$, $\vec{v}_b = m_a\vec{v}/m$, $\vec{v} = \vec{v}_a - \vec{v}_b$ — относительная скорость частицы и

шара, $m = m_a + m_b$. Поскольку массы частицы и шара могут быть одного порядка, то необходимо использовать уравнения движения шара и частицы

$$m_a\vec{w}_a = -Gm_a m_b\vec{r}/r^3, \quad (1)$$

$$m_b\vec{w}_b = Gm_a m_b\vec{r}/r^3, \quad (2)$$

где $\vec{w}_a$, $\vec{w}_b$ — ускорения частицы и шара, $\vec{r} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$. Из (1), (2) получим уравнение

$$\vec{w} = -Gm\vec{r}/r^3, \quad (3)$$

где $\vec{w} = \vec{w}_a - \vec{w}_b$ — относительное ускорение.

Наибольшее значение величины относительной скорости соответствует первой космической скорости $v = v_I$. В этом случае частица и центр шара движутся по окружностям радиусов

$$R_a = m_b R/m,\ R_b = m_a R/m$$

на расстоянии R друг от друга. Центры окружностей находятся в центре масс системы C.

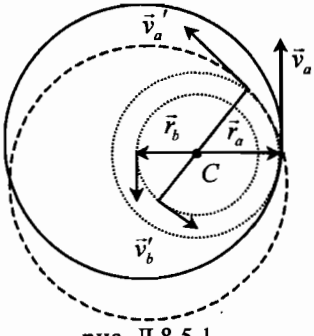


рис. Д.8.5.1

Поскольку $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, то из второго закона Ньютона (3) следует уравнение

$$v^2/R = Gm/R^2, \rightarrow v = [Gm/R]^{1/2}.$$

Величины скоростей частицы и шара

$$v_a = m_b v/m,\ v_b = m_a v/m.$$

Если $m_a << m_b$, то получим уже известное значение $v_I = [Gm_b/R]^{1/2}$; $v_a \approx v_I$, $v_b << v_a$.

На рис. Д.8.5.1 изображены два положения частицы и шара, точками отмечены окружности, по которым движутся центр шара и частица.

Глава 10. Статика

10.6.1. Устойчивость положения равновесия консервативной системы. Рассмотрим твердое тело, движение которого ограничено связями. В простейшем случае положение тела определяется функцией, зависящей от одной координаты q, которую принято называть *обобщенной координатой*. Тогда потенциальная энергия $W(q)$ является функцией координаты q. Величина $F(q) = -dW/dq$ называется обобщенной силой, соответствующей координате q. В положении равновесия $F(q) = 0$.

Если q — координата размерности длины, то размерность силы — ньютон. Если $q = \varphi$ — безразмерная координата, то обобщенная сила $M(\varphi) = -dW(\varphi)/d\varphi$ имеет размерность момента силы. В положении равновесия $M(\varphi) = 0$.

Критерий устойчивости. Из уравнения $dW(q)/dq = 0$ найдем возможные значения координаты $q = q_1, q_2, \ldots$, соответствующие различным положениям равновесия. Функция $x(t) = q(t) - q_a$ определяет движение тела относительно положения равновесия $q = q_a$. Если при $q = q_a$ значение второй производной $d^2W/dq^2 > 0$, то всегда можно задать такие начальные условия, что функция $x(t)$ будет ограничена — тело движется в окрестности *устойчивого* положения равновесия.

Задача 10.6.2. Концы тонкого стержня скользят по параболе $z = x^2/2R$ с вертикально расположенной осью z (рис. Д.10.6.2). Найдите положения равновесия стержня.

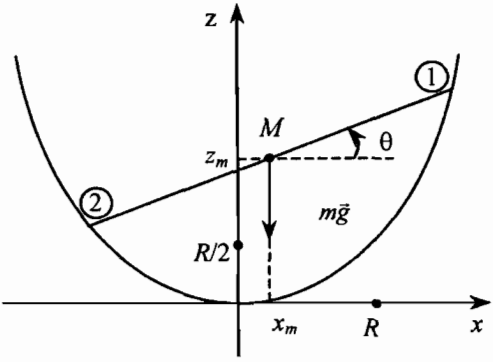


рис. Д.10.6.2

Решение. Положение и ориентация стержня определяются углом θ между осью стержня и осью x. Координаты центра масс $x_m(\theta)$, $z_m(\theta)$. Потенциальная энергия стержня $W(\theta) = mgz_m(\theta)$.

Пусть $\vec{r}_1$, $(\vec{r}_2)$ — радиус-вектор правого (левого) концов стержня (рис. Д10.6.2). Тогда

$$x_{1,2} = x_m \pm (l/2)\cos\theta, \qquad z_{1,2} = z_m \pm (l/2)\sin\theta.$$

Поскольку $z = x^2/2R$, то из системы уравнений

$$z_m \pm (l/2)\sin\theta = [x_m \pm (l/2)\cos\theta]^2/2R$$

находим $z_m(\theta)$ и потенциальную энергию

$$W(\theta) = (mg/8R)(l^2\cos^2\theta + 4R^2tg^2\theta).$$

Экстремальные значения угла θ получим из уравнения $dW/d\theta = 0$, которое имеет вид

$$-2l^2\cos\theta\sin\theta + 8R^2\mathrm{tg}\theta/\cos^2\theta = 0.$$

Отсюда находим два корня $\theta_1 = 0$, $\cos\theta_2 = (2R/l)^{1/2}$, $l > 2R$. В окрестности значений $\theta_1 = 0$ приближенно имеем $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + \ldots$, $\mathrm{tg}\theta = \theta + \ldots$. Следовательно, потенциальная энергия стержня

$$W(\theta) = (mg/8R)[l^2 + (4R^2 - l^2)\theta^2] + \ldots$$

имеет минимум при $l < 2R$. При значениях $l > 2R$ функция $W(\theta)$ имеет минимум в точке $\theta = \theta_2$.

Пример 10.6.3. Картина помещена в прямоугольную раму со сторонами a и b. К концам стороны длиной b прикрепили нить длиной l и повесили на гвоздь, вбитый в вертикальную стену. Найдем условие устойчивости картины в положении равновесия.

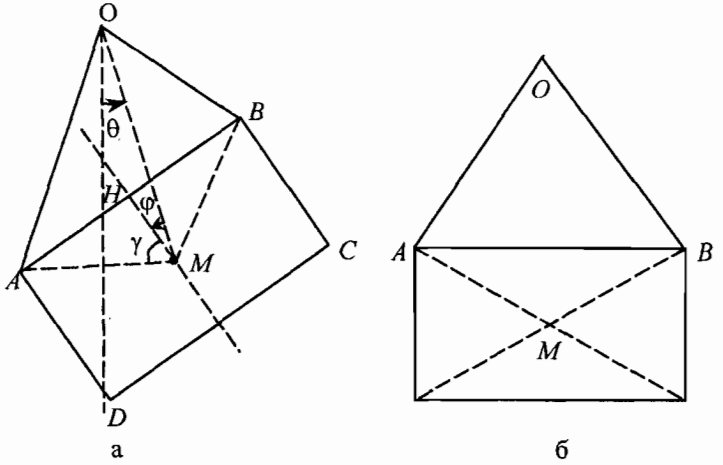


рис. Д. 10.6.3.

Положение картины при плоскопараллельном движении определяется двумя углами: θ — угол между вертикалью и прямой, проходящей через точку подвеса и центр масс, φ — угол между радиус-вектором центра масс и прямой HM, проходящей через середины сторон AB и DC (рис. Д.10.6.3 *а*).

Потенциальная энергия картины

$$W(\varphi) = -mgs(\varphi)\cos\theta, \tag{1}$$

где $s(\varphi)$ — длина отрезка OM. В произвольном положении длина нити

$$l = l_1 + l_2, \tag{2}$$

где $l_1 = OA$, $l_2 = OB$. Из теоремы косинусов получим еще два уравнения

$$(l_{1,2})^2 = s^2 + (c/2)^2 - cs\cos(\gamma \pm \varphi), \tag{3,4}$$

где $c = (a^2 + b^2)^{1/2}$, γ — угол HMA. Из системы (2)-(4) находим

$$s(\varphi) = [a\cos\varphi + (1 - b^2/l^2)^{1/2}(l^2 - c^2\sin^2\varphi)^{1/2}]/2[1 - (b/l)^2\sin^2\varphi]. \tag{5}$$

Для исследования устойчивости положения равновесия $\theta = 0$, $\varphi = 0$ разложим функцию $s(\varphi)$ в ряд, используя приближения $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, $1/(1 - \varepsilon) \approx 1 + \varepsilon$ в окрестности значений $\varphi << 1$, $\varepsilon << 1$. В результате получим

$$s(\varphi) = s_0 - r\varphi^2/2 + \dots,$$

$$s_0 = s(0) = [a + (l^2 - b^2)^{1/2}]/2,\ r = [a(l^2 - 2b^2) - (b^2 - a^2)(l^2 - b^2)^{1/2}]/2l^2.$$

Потенциальная энергия картины

$$W(\varphi,\theta) = -mgs_0 + mgs_0\theta^2/2 + mgr\varphi^2/2 + \dots .$$

Величину r удобно представить в виде $r = (s_0a/l^2)[(l^2 - b^2)^{1/2} - b^2/a]$. Потенциальная энергия имеет минимум при условии $r > 0$, или $l > bc/a$. Отметим, что при значении $l = bc/a$ углы OAM и OBM в положении равновесия равны $\pi/2$ (рис. Д.10.6.3 *б*). Наименьшее значение l = с соответствует картине в форме квадрата.

Глава 11. Движение в неинерциальных системах отсчета

11.2. Силы инерции в поступательно движущейся системе отсчета

11.2.1. Уравнения движения тела в неинерциальных системах, связанных с Землей и Солнцем. При вычислении траектории космического аппарата необходимо учитывать силы, действующие со стороны Солнца и планет. Однако в небесной механике известно точное решение только одной задачи — задачи о движении двух тел. Поэтому в космодинамике получили развитие приближенные методы расчета траекторий. Один из методов называется ограниченной задачей трех тел: тректории двух тел известны, ставится задача определения радиус-вектора третьего тела — космического аппарата (*КА*).

Пусть тело массой $m_т$ движется в гравитационном поле, создаваемом Солнцем и Землей масс $m_с$ и $m_з$. В инерциальной системе отсчета радиус-векторы КА, Солнца и Земли равны соответственно $\vec{r}_т, \vec{r}_с, \vec{r}_з$, радиус-вектор центра масс системы — $\vec{R}$. Согласно второму закону Ньютона уравнение движения тела

$$m_т\vec{a}_т = \vec{F}_{зт} + \vec{F}_{ст}, \qquad (11.2.1)$$

где $\vec{F}_{ст}, \vec{F}_{зт}$ — силы, действующие на *КА* со стороны Солнца и Земли

$$\vec{F}_{ст} = -Gm_с m_т \vec{r}_{ст} / r_{ст}^3, \ \vec{F}_{зт} = -Gm_з m_т \vec{r}_{зт} / r_{зт}^3, \qquad (11.2.2)$$

$$\vec{r}_с + \vec{r}_{ст} = \vec{r}_т, \ \vec{r}_з + \vec{r}_{зт} = \vec{r}_с, \ \vec{r}_с + \vec{r}_{сз} = \vec{r}_з.$$

В нашем случае $Gm_з = 3{,}986 \cdot 10^5$ км^3/с^2, $Gm_с = 1{,}327 \cdot 10^{11}$ км^3/с^2.

Наша задача — получить уравнение движение *КА* в системе отсчета, связанной с Землей. Перейдем в (11.2.1) к новым переменным $\vec{r}_т, \vec{r}_с, \vec{r}_з \to \vec{R}, r_{зт}, \vec{r}_{сз}$. С этой целью введем вектор $\vec{r}_{кз}$, соединяющий центр масс всей системы — точку К — с центром Земли (рис. Д.11.2.1),

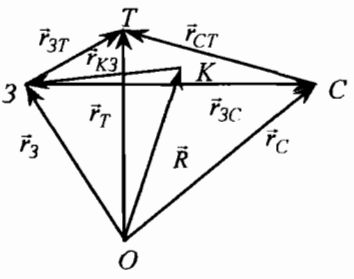


рис. Д. 11.2.1

$$\vec{r}_з = \vec{R} + \vec{r}_{кз}, \quad \vec{r}_т = \vec{R} + \vec{r}_{кз} + \vec{r}_{зт}, \quad \vec{r}_с = \vec{R} + \vec{r}_{кз} + \vec{r}_{зс}. \qquad (11.2.3)$$

Следовательно, $\vec{a}_т = \vec{a}_{кз} + \vec{a}_{зт}$, где $\vec{a}_{зт}$ — ускорение тела относительно Земли.

Подставляя $\vec{a}_т$ в (11.2.3), получим уравнение движения тела в системе координат с началом в центре Земли

$$m_т \vec{a}_{зт} = \vec{F}_{зт} + \vec{F}_{ст} - m_т \vec{a}_{кз}. \qquad (11.2.4)$$

В правой части (11.2.4) появилось слагаемое $\vec{F}_{ин} = -m_т \vec{a}_{кз}$ — сила инерции в системе отсчета, связанной с Землей.

Наша задача — получить зависимость силы инерции от координат. Поскольку

$$\vec{m}_т \vec{r}_т + m_с \vec{r}_с + m_з \vec{r}_з = m\vec{R}, \quad m_с + m_з + m_т,$$

то после подстановки $\vec{r}_т$, $\vec{r}_с$, $\vec{r}_з$ получим

$$m\vec{r}_{кз} = -(m_с r_{зс} + m_т r_{зт}).$$

Дифференцируя это равенство, найдем соотношение между ускорениями

$$m\vec{a}_{кз} = -(m_с \vec{a}_{зс} + m_т \vec{a}_{зт}). \qquad (11.2.5)$$

Ускорение Солнца относительно Земли $\vec{a}_{зс}$ можно исключить, используя уравнение движения Солнца относительно Земли, аналогичное (11.1.4)

$$m_с \vec{a}_{зс} = \vec{F}_{зс} + \vec{F}_{тс} - m_с \vec{a}_{кз}, \qquad (11.2.6)$$

$$\vec{F}_{зс} = -Gm_с m_з \vec{r}_{зс} / r_{зс}^{\,3}. \qquad (11.2.7)$$

Вычисляя сумму правой и левой частей (11.2.4) и (11.2.6), получим соотношение

$$m_т \vec{a}_{зт} + m_с \vec{a}_{зс} = \vec{F}_{зт} + \vec{F}_{ст} - m_т \vec{a}_{кз} + \vec{F}_{зс} + \vec{F}_{тс} + m_с \vec{a}_{кз}.$$

Учитывая (11.2.5), находим

$$\vec{a}_{кз} = -(1/m_з)(\vec{F}_{зт} + \vec{F}_{зс}).$$

Подставляя $\vec{a}_{кз}$ в (11.2.4), получим окончательно уравнение движения тела в геоцентрической системе отсчета

$$m_т \vec{a}_{зт} = (1 + m_т / m_з)\vec{F}_{зт} + \vec{F}_{ст} + (m_т / m_з)\vec{F}_{зс}. \qquad (11.2.8)$$

Заменяя индекс «з» на индекс «с», получим уравнение движения тела в гелиоцентрической системе отсчета, связанной с Солнцем

$$m_т \vec{a}_{ст} = (1 + m_т / m_с)\vec{F}_{ст} + \vec{F}_{зт} + (m_т / m_с)\vec{F}_{сз}. \qquad (11.2.9)$$

11.2.2. Сфера действия Земли. Подставим силы $\vec{F}_{ст}$, $\vec{F}_{зт}$, $\vec{F}_{сз}$ из (11.2.2), (11.2.7) в (11.2.8). Сокращая на общий множитель $m_т$ получим уравнение

$$\vec{a}_{зт} = -(m_з + m_т)G\vec{r}_{зт} / r_{зт}^3 - Gm_с\vec{r}_{ст} / r_{ст}^3 - Gm_с\vec{r}_{зс} / r_{сз}^3, \qquad (11.2.10)$$

которое представим в виде

$$\vec{a}_{зт} = \vec{w}_{зт} + \Delta\vec{w}_{зт}, \qquad (11.2.11)$$

$$\vec{w}_{зт} = -G(m_з + m_т)\vec{r}_{зт} / r_{зт}^3, \quad \Delta\vec{w}_{зт} = \vec{w}_{ст} - \vec{w}_{сз},$$

$$\vec{w}_{ст} = -Gm_с\vec{r}_{ст} / r_{ст}^3, \vec{w}_{сз} = Gm_с\vec{r}_{зс} / r_{зс}^3,$$

Здесь $\Delta\vec{w}_{зт}$ — разность ускорений, сообщаемых Солнцем телу и Солнцем Земле. Из (11.2.11) следует, что в случае тела, движущегося в окрестности Земли ($r_{ст} \approx r_{зс}$), вектор $\Delta\vec{w}_{зт}$ играет роль возмущающего ускорения.

Пусть космический аппарат находится на линии Земля — Солнце на расстоянии $r_{зт}$ = 500 000 км от Земли и на расстоянии $r_{ст}$ = 149 100 000 км от Солнца (среднее расстояние $r_{сз}$ = 149 600 000 км). Величина «основного» ускорения $w_{зт} = 1{,}594 \cdot 10^{-6}$ км/с^2. Ускорение, сообщаемое аппарату Солнцем $w_{ст} = 5{,}97 \cdot 10^{-6}$ м/с^2 больше величины $w_{зт}$. Однако Солнце не оказывает существенного влияния на движение аппарата, т. к. ускорение, сообщаемое Земле Солнцем $w_{сз} = 5{,}93 \cdot 10^{-6}$ км/с^2 и возмущающее ускорение равно всего лишь $\Delta w_{зт} = 0{,}04 \cdot 10^{-6}$ км/с^2. Отношение $\Delta w_{зт}/w_{зт} = 0{,}025$ — возмущающее ускорение составляет 2,5% от ускорения, сообщаемого Землей аппарату.

Если же аппарат находится на линии Земля — Солнце на расстоянии $r_{зт}$ = 1 500 000 км от Земли и на расстоянии $r_{ст}$ = 148 100 000 км от Солнца, то ситуация изменится. Величина «основного» ускорения $w_{зт} = 1{,}771 \cdot 10^{-7}$ км/с^2, ускорение, сообщаемое Солнцем аппарату и Земле $w_{ст} = 6{,}05 \cdot 10^{-6}$ м/с^2, $w_{сз} = 5{,}93 \cdot 10^{-6}$ м/с^2. Отношение $\Delta w_{зт}/w_{зт} = 0{,}677$ — возмущение Солнцем геоцентрического движения составляет почти 70 % ускорения, сообщаемого Землей аппарату. В этом случае следует рассматривать движение аппарата в системе отсчета, связанной с Солнцем — вместо уравнения (11.2.8) необходимо использовать уравнение (11.2.9):

$$\vec{a}_{ст} = -G(m_с + m_т)\vec{r}_{ст} / r_{ст}^3 - Gm_з\vec{r}_{зт} / r_{зт}^3 - Gm_з\vec{r}_{сз} / r_{сз}^3, \qquad (11.2.12)$$

которое представим в виде

$$\vec{a}_{ст} = \vec{w}_{ст} + \Delta\vec{w}_{ст}, \qquad (11.2.13)$$

$$\vec{w}_{ст} = -G(m_с + m_т)\vec{r}_{ст} / r_{ст}^3, \ \Delta\vec{w}_{ст} = \vec{w}_{зт} - \vec{w}_{зс},$$

$$\vec{w}_{зт} = -Gm_з\vec{r}_{зт} / r_{зт}^3, \vec{w}_{зт} = Gm_з\vec{r}_{зс} / r_{сз}^3.$$

Здесь $\Delta\vec{w}_{ст}$ — разность ускорений, сообщаемых Землей телу и Землей Солнцу. Полагая $r_{ст}$ = 148 100 000 км, получим значение «основного» уско-

рения $w_{ст} = 6{,}05 \cdot 10^{-6}$ км/с^2 и ускорений, сообщаемых Землей аппарату и Солнцу $w_{зт} = 1{,}771 \cdot 10^{-7}$ км/с^2, $w_{зс} = 1{,}781 \cdot 10^{-11}$ км/с^2. Теперь возмущение Землей гелиоцентрического движения не составляет и трех процентов: $\Delta w_{ст}/w_{ст} = 0{,}029$.

Приведенные оценки позволяют понять, что отношение $|\Delta w_{зт}/w_{зт}|$ характеризует величину возмущения геоцентрической кеплеровой траектории Солнцем, а отношение $|\Delta w_{ст}/w_{ст}|$ — величину возмущения гелиоцентрической траектории Землей. Условие

$$|\Delta w_{зт}/w_{зт}| \approx |\Delta w_{ст}/w_{ст}| \qquad (11.2.14)$$

определяет уравнение поверхности, разделяющей две области пространства, в которых аппарат движется по различным кеплеровым траекториям. При переходе через поверхность необходимо «сшить» траектории. Эта поверхность почти совпадает со сферой радиусом $s_{зс} = r_{зс}(m_з/m_с)^{2/5}$ с центром в центре Земли — ее называют *сферой действия* Земли относительно Солнца, $s_{зс} = 924\,820$ км.

Радиус сферы действия Луны относительно Земли $s_{лз} = 66\,280$ км. Орбита Луны находится внутри сферы действия Земли. Поэтому радиус-вектор системы Земля-Луна описывает кеплерову траекторию. Однако Солнце влияет на движение Луны относительно Земли. Орбита Луны лежит почти точно в плоскости орбиты Земли. Если орбиту Луны повернуть на 90°, то расчеты показывают, что в результате эволюции параметров орбиты, Луна достигла бы Земли через 52 оборота (М.Л. Лидов, 1961 г.). Следует,однако, учесть, что Луна не является точечным телом и может быть разорвана гравитационными силами при достижении предела Роша равного трем радиусам Земли (см. часть III, пример 3.5.2). Предел Роша — расстояние, на котором сила, действующая на «половинку» Луны со стороны Земли, достигает значения силы притяжения другой «половинкой».

11.4. Силы инерции на Земле

11.4.1. Вклад Луны в ускорение свободного падения. В каждые лунные сутки наблюдаются два прилива и два отлива. В течение примерно шести часов в открытых морях происходит подъем уровня воды, вода надвигается на берег — это прилив. Затем наступает отлив, который длится тоже 6 часов. Причина этого явления в том, что Луна и Солнце вносят вклад в ускорение свободного падения — вектор $\vec{g}$ зависит от взаимного расположения Луны, Солнца и точки наблюдения.

Рассмотрим тело, лежащее на поверхности Земли. Начало координат поместим в центр Земли. Радиус-вектор тела $\vec{r}_{зт} = \vec{R}$, величина R равна радиусу Земли. Заменяя в уравнении индекс «с» на индекс «л», получим из (11.2.11) ускорение свободного падения

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \Delta\vec{g}, \qquad (11.4.1)$$

$$\vec{g}_0 = \vec{w}_{зт},\ \vec{g}_0 = -Gm_з\vec{R}/R^3,$$

$$\Delta\vec{g} = \Delta\vec{w}_{тз},\ \Delta\vec{g} = \vec{w}_{лт} - \vec{w}_{лз}, \qquad (11.4.2)$$

$$\vec{w}_{лт} = -Gm_л\vec{r}_{лт}/r_{лт}^{\ 3},\ \vec{w}_{лз} = Gm_л\vec{r}_{зл}/r_{зл}^{\ 3}.$$

Здесь $g_0 = 9{,}81$ м/с^2, $\Delta\vec{w}_{лт}$ — разность ускорений, сообщаемых Луной телу и Луной Земле.

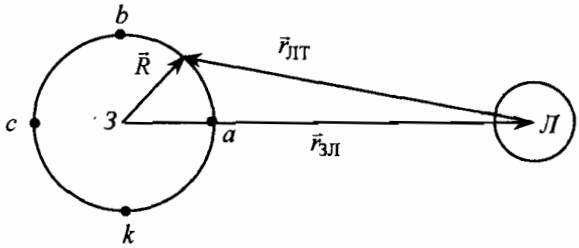


рис. Д. 11.4.1

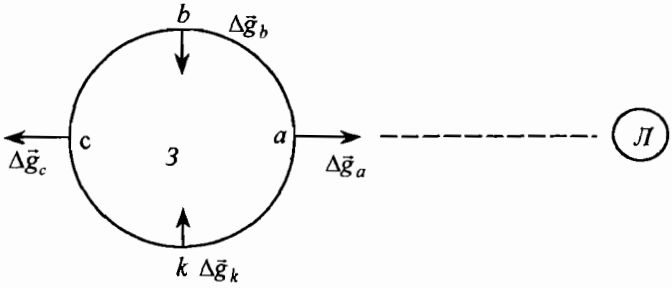


рис. Д. 11.4.2

Представим вектор $\vec{r}_{лт}$ в виде $\vec{r}_{лт} = \vec{R} - \vec{r}_{зл}$ (рис. Д.11.4.1). Поскольку $R << r_{зл}$, то

$$\frac{1}{r_{лт}^3} = \frac{1}{|\vec{r}_{зл} - \vec{R}|^3} = \frac{1}{r_{зл}^3}\frac{1}{[1 - 2\vec{R}\vec{r}_{лз}/r_{зл}^2 + (R/r_{зл})^2]^{3/2}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{r_{зл}^3}(1 + 3\vec{R}\vec{r}_{зл}/r_{зл}^2).$$

Из (11.4.2) находим приращение ускорения свободного падения

$$\Delta\vec{g} = -\frac{Gm_л}{r_{зл}^3}[\vec{R} - 3\vec{r}_{зл}(\vec{R}\vec{r}_{зл})/r_{зл}^2]. \qquad (11.4.3)$$

В точке a, наиболее близкой к Луне, вектор $\Delta\vec{g}$ направлен к Луне (рис. Д.11.4.2). Величина ускорения свободного падения $g_a = g_0 - 2Gm_лR/r_{зл}$. На противоположной стороне земного шара в точке с вектор $\Delta\vec{g}$ направлен от Луны к Земле. Поэтому величина ускорение свободного падения $g_c = g_a$: неожиданный результат — и здесь сила притяжения уменьшается. На средней линии в точках b и k величина ускорения свободного падения возрастает: $g_b = g_k = g_0 + Gm_лR/r_{зл}^3$.

Оценим вклад Луны в ускорение свободного падения. Масса Луны $m_л = m_з/81{,}3$, среднее расстояние от Земли до Луны $r_{зл} = 384\ 400$ км $= 60{,}34\ R$. Величина приращения ускорения свободного падения, обусловленное влиянием Луны, $\Delta g/g_0 \sim (m_л/m_з)(R/r_{лт})^3 = 5{,}33 \cdot 10^{-8}$. Ничтожное различие в силе притяжения приводит к повышению уровня воды в точках a и c. На средней линии в точках b, k уровень понижается. В результате суточного вращения Земли вокруг своей оси двугорбая водяная поверхность перемещается. Это и есть приливы.

11.5. «Гравитационный удар» как способ изменения гелиоцентрической скорости

Поля тяготения массивных планет Юпитера и Сатурна можно использавать для разгона аппарата при полете к удаленным планетам или для отбрасывания к центру Солнечной системы.

Внешняя по отношению к Земле планета догоняет аппарат, движущийся по эллиптической траектории перелета. Обозначим $\vec{v}_{ij}$ — скорость тела i относительно тела j. Очевидно $\vec{v}_{ij} = \vec{v}_{ik} + \vec{v}_{kj}$. На рис. Д.11.5.1 изображены векторы $\vec{v}_{ac}$ и $\vec{v}_{пс}$ — скорости аппарата и планеты относительно Солнца, b — расстояние между центром планеты и прямой, по которой бы двигался аппарат в отсутствие гравитационного взаимодействия, его называют *прицельной дальностью*.

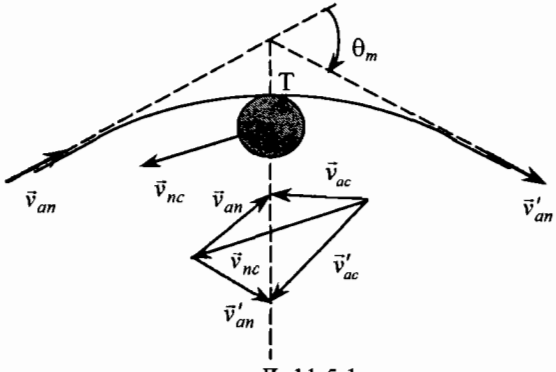


рис. Д. 11.5.1

Пусть величина скорости аппарата относительно планеты $v_{ап}$ меньше значения $v_{пс}$. В системе отсчета, связанной с планетой, скорость аппарата на границе сферы действия $\vec{v}_{ап} = \vec{v}_{ас} - \vec{v}_{пс}$. После облета планеты скорость аппарата на границе сферы действия $\vec{v}'_{ап}$. Скорость аппарата после облета получает приращение $\Delta\vec{v}_{ап} = \vec{v}'_{ап} - \vec{v}_{ап}$:

$$\vec{v}'_{ас} = \vec{v}'_{ап} + \vec{v}_{пс} = \vec{v}_{ас} + \Delta\vec{v}_{ап}.$$

Найдем величину приращения скорости. В области сферы действия планеты можно пренебречь влиянием Солнца на движение космического аппарата. Тогда $v'_{ап} = v_{ап}$. Из рис. Д.11.4 следует, что величина приращения скорости

$$\Delta v_{ап} = 2v_{ап}\sin\theta/2. \qquad (11.5.1)$$

Можно показать, что угол поворота скорости $\vec{v}_{ап}$ определяется соотношением

$$tg\theta/2 = (R/b)(v_I/v)^2, \qquad (11.5.2)$$

где $v = v_{ап}$, $v_I = (Gm_п/R)^{1/2}$ — первая космическая скорость, $m_п$ — масса планеты, R — радиус планеты. При достаточно малом значении прицельной дальности можно было бы изменить направление скорости почти на противоположное. Однако наименьшее значение $b = b_0$ должно соответствовать траектории, касающейся точки T, находящейся на пересечении оси симметрии траектории и границы атмосферы планеты, находящейся приблизительно на расстоянии R от центра планеты. Из закона сохранения полной энергии и второго закона Кеплера получим уравнения

$$m_а v^2/2 + 0 = m_а v_т^2/2 - Gm_а m_п/R,$$

$$m_а b_0 v = m_а R v_т.$$

Исключая $v_т$, находим

$$b_0 = R[1 + 2(v_I/v)^2]^{1/2}.$$

Следовательно, при фиксированном значении v наибольший угол поворота определяется соотношением

$$tg\frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{x\sqrt{x^2+2}},$$

где $x = v/v_I$. Величина приращения скорости (11.5.1)

$$\Delta v_{ап} = 2v_{ап}\sin\frac{\theta_0}{2} = \frac{2v_I x}{1+x^2}.$$

Покажите, что функция $\Delta v_{\text{ап}}(v)$ достигает максимального значения v_1 при $v = v_1$. Угол максимального поворота скорости равен $\theta_m = \pi/3$.

Глава 12. Линейные колебания

Пример 12.1.7. Две частицы массами m_1 и m_2, соединенные пружиной пренебрежимо малой массы, могут двигаться по прямой линии. Жесткость пружины — k, длина в ненапряженном состоянии — l_0. Найдем решение уравнений движения.

Введем на прямой ось x, координаты частиц x_2, x_1 ($x_2 > x_1$). Согласно второму закону Ньютона

$$m_1 a_1 = k(x_2 - x_1 - l_0), \tag{1}$$

$$m_2 a_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0). \tag{2}$$

Перейдем к новым переменным $x_1, x_2 \to x_c, x$:

$$x_{2,1} = x_c \pm m_{1,2}x/m, \qquad m = m_1 + m_2,$$

где x_c — координата центра масс системы, $x = x_2 - x_1$. Тогда скорости частиц

$$v_{2,1} = v_c \pm m_{1,2}v/m, \tag{3}$$

где v_c — скорость центра масс, $v = v_2 - v_1$ — относительная скорость.

Для того, чтобы найти решение системы (1), (2) умножим (2) на m_1, (1) — на m_2 и вычтем из первого соотношения второе. В результате получим уравнение

$$\mu d^2x/dt^2 = -k(x - l_0), \tag{4}$$

где $\mu = m_1 m_2/m$. После подстановки $x = l_0 + z$ уравнение (4) приобретает форму уравнения (12.1.1)

$$d^2z/dt^2 + \omega^2 z = 0, \tag{5}$$

где $\omega^2 = k/\mu$. Относительная скорость $v = dz/dt$.

Пусть в начальном состоянии расстояние между частицами равно $l_0 + b$, скорости частиц равны нулю. Тогда $x_c = m_2 l_0/m$, $v_c = 0$; начальные условия имеют вид $z(0) = b$, $dz/dt = 0$. Согласно (12.1.5) решение уравнения (5)

$$z(t) = b\cos\omega t.$$

Скорости частиц

$$v_{1,2} = \pm(m_{2,1}b\omega/m)\cos\omega t. \tag{6}$$

Пусть в начальном состоянии расстояние между частицами равно l_0, скорость первой частицы равны $v_1(0) = v_0$, второй — $v_2(0) = 0$. Тогда $v_c = m_1 v_0/m$; начальные условия имеют вид $z(0) = 0$, $dz/dt = -v_0$. Согласно (12.1.1), (12.1.5) решение уравнения (5)

$$z(t) = -(v_0/\omega)\sin\omega t.$$

Скорости частиц

$$v_{1,2} = m_1 v_0/m \pm (m_{2,1} v_0/m)\cos\omega t. \qquad (7)$$

Например, при сцепке двух вагонов $v_{1,2} = (v_0/2)(1 \pm \cos\omega t)$.

Задача 12.1.8. Две частицы массами m_1 и m_2, соединенные пружиной пренебрежимо малой массы, могут двигаться по прямой линии. Жесткость пружины — k, длина в ненапряженном состоянии — l_0. В начальном состоянии скорости частиц равны нулю. К первой частице прикладывается ударная сила F, направленная от первой к второй частице, в течение интервала времени τ, удовлетворяющему условию $\omega\tau << 1$, $\omega^2 = km/m_1m_2$, $m = m_1 + m_2$. Импульс силы $I = F\tau$ — конечная величина. Найдите амплитуду колебаний расстояния между частицами после действия силы.

Решение. Введем ось x, параллельно прямой, x_2, x_1 — координаты частиц ($x_2 > x_1$). Согласно второму закону Ньютона

$$m_1 a_1 = k(x_2 - x_1 - l_0) + F, \qquad (1)$$

$$m_2 a_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0). \qquad (2)$$

Пусть начальные значения координат $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = l_0$. В результате действия ударного импульса частицы не смещаются. Из (1), (2) следует, что частицы приобретают скорости $v_1 = I/m_1$, $v_2 = 0$. Поэтому приращение полной энергии системы $E - 0 = I^2/2m_1$, где $E = m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2 + (k/2)(x_2 - x_1 - l_0)^2$. Из закона изменения импульса системы частиц $\Delta P/\Delta t = F$ находим проекцию полного импульса на ось x: $P = I$.

После действия силы сохраняются полный импульс P и полная энергия системы частиц $E = E_c + E_o$. Здесь $E_c = P^2/2m$ — кинетическая энергия центра масс, $E_o = kA^2/2$ — полная энергия относительного движения частиц, A — амплитуда колебаний расстояния между частицами $x_2 - x_1$. Теперь из уравнения $I^2/2m_1 = I^2/2m + kA^2/2$ находим амплитуду колебаний $A = I[m_2/m_1mk]^{1/2}$.

Глава 13. Движение твердого тела

13.1. Кинематика твердого тела

13.1.1 Координаты твердого тела. В механике твердым телом называют систему N частиц, расстояния между которыми постоянны: $\left|\vec{r}_a(t) - \vec{r}_b(t)\right| = c_{ab}$. Наличие жестких связей позволяет задать положение тела шестью параметрами — говорят, что твердое тело имеет *шесть степеней свободы*. Действительно, выберем три частицы, положение которых можно задать 9 декартовыми координатами. Поскольку имеем три уравнения связи, то остается только 6 независимых координат. Положение других N–3 частиц определяется уравнениями связи.

13.1.2 Угловая скорость твердого тела. Рассмотрим плоскопараллельное движение тела. В этом случае все частицы тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, в качестве которой выберем плоскость xy.

Введем две декартовы системы координат: неподвижную систему K в плоскости xy с началом в точке O и подвижную систему K' с началом в точке O' твердого тела, оси которой x' и y' жестко связаны с телом, оси z и z' параллельны. Вектор $\vec{R}(t) = (R_x,\ R_y,\ R_z)$ на рис. Д.13.1.1 — это радиус-вектор точки O'. Ориентацию осей системы K′ относительно системы K зададим функцией $\varphi(t)$ — это угол между осями x и x': моменту времени t соответствует значение угла поворота $\varphi(t)$ координатных осей x', y' вокруг оси z'. Положительное направление вращения задается правилом буравчика (см. Гл. 1).

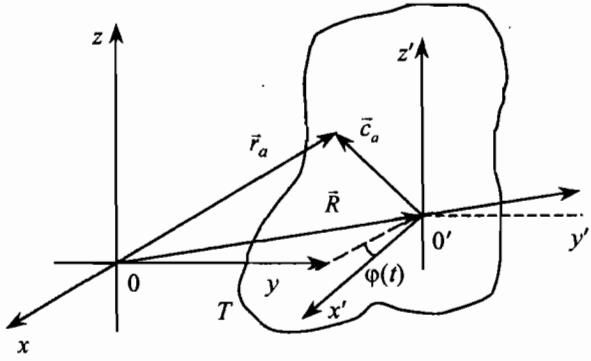


рис. Д. 13.1.1

Рассмотрим произвольную частицу a тела. Ее положение в системе K определяется радиус-вектором

$$\vec{r}_a(t) = \vec{R}(t) + \vec{c}_a(t), \tag{13.1.1}$$

где $\vec{c}_a(t)$ — радиус-вектор той же частицы в системе K'. Отметим, что длина вектора $\vec{c}_a(t)$ — постоянная величина. Скорость частицы $\vec{v}_a(t) = \vec{v}(t) + \vec{v}'_a(t)$, где $\vec{v}(t) = d\vec{R}/dt$ — скорость точки O', $\vec{v}'_a(t) = d\vec{c}_a/dt$ — скорость частицы относительно точки O'. В системе K компоненты вектора $\vec{c}_a(t)$ представляют собой функции $c_x(t) = c\cos(\varphi + \alpha)$, $c_y(t) = c\sin(\varphi + \alpha)$, $c_z(t) = C_z$. Вычисляя производные (см. Гл. 7), получим

$$dc_x(t)/dt = -\omega c_y(t), \quad dc_y(t)/dt = \omega c_x(t), \quad \omega(t) = d\varphi/dt.$$

Следовательно,

$$v_x(t) = v_x - \omega c_y, \quad v_y(t) = v_y + \omega c_x, \quad v_z(t) = 0. \tag{13.1.2}$$

Функция $\omega(t)$ представляет собой проекцию вектора угловой скорости $\vec{\omega}(t)$ на ось z или z': $\vec{\omega}(t) = (0,\ 0,\ \omega(t))$. Тогда, согласно определению угло-

вой скорости, производную вектора постоянной длины $\vec{c}(t)$ можно записать в виде векторного произведения:

$$d\vec{c} / dt = \vec{\omega} \times \vec{c} \ . \qquad (13.1.3)$$

Следовательно, скорость частицы *a* твердого тела всегда можно представить в виде

$$\vec{v}_a(t) = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{c}_a \ . \qquad (13.1.4)$$

Из (13.1.4) следует соотношение, связывающее скорости произвольно выбранных двух точек твердого тела *a* и *c*:

$$\vec{v}_a(t) = \vec{v}_c(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}_{ca}(t) \ , \qquad (13.1.5)$$

где $\vec{v}_a(t)$, $\vec{v}_c(t)$ — скорости точек *a* и *c* твердого тела, $\vec{r}_{ca}$ — вектор *ca*: — скорость любой точки *a* твердого тела представлена в виде суммы скорости другой произвольной точки *c* и скорости вращения точки *a* относительно точки *c*.

Следствие. Образуем скалярное произведение правой и левой частей (13.1.5) с вектором $\vec{r}_{ca}$. В результате получим равенство $\vec{v}_a \vec{r}_{ca} = \vec{v}_c \vec{r}_{ca}$: в соответствие с решением задачи 1.2.2 проекции скоростей $\vec{v}_a$ и $\vec{v}_c$ на прямую *ca* одинаковы. На рис. Д.13.1.2 изображена прямая, проходящая через точки *k*, *c*, *a* твердого тела, и проекции скоростей этих точек.

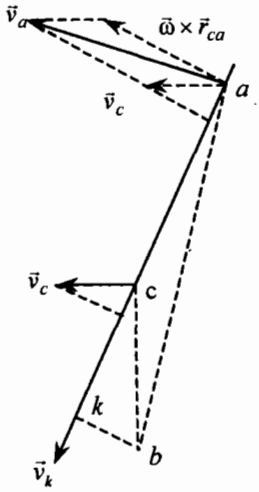


рис. Д.13.1.2.

13.1.3 Мгновенная ось вращения. Пусть точка *b* принадлежит твердому телу или находится вне тела. Подстановка $\vec{r}_{ca} = \vec{r}_{cb} + \vec{r}_{ba}$ в (13.1.5) приводит к равенству $\vec{v}_a = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{cb} + \vec{r}_{ba})$, которое можно представить в виде, аналогичном (13.1.5):

$$\vec{v}_a = \vec{v}_b + \vec{\omega} \times \vec{r}_{ba}, \ \vec{v}_b = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_{cb}.$$

Отсюда следует, что угловая скорость, с которой вращается жестко связанная с телом система координат, не зависит от выбора этой системы. Это утверждение позволяет называть вектор $\vec{\omega}$ угловой скоростью твердого тела как целого.

Всегда можно найти некоторую точку *b*, скорость которой равна нулю. Из уравнения $0 = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_{cb}$ найдем положение точки *b*: $\vec{r}_{cb} = \vec{\omega} \times \vec{v}_c / \omega^2$. Скорости остальных точек приобретают вид

$$\vec{v}_a = \vec{\omega} \times \vec{r}_{ba}, \ \vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{r}_{bc} \ \ldots$$

Следовательно, распределение скоростей точек твердого тела в данный момент времени t представлено как результат чистого вращения вокруг оси,

проходящей через точку b. Эту ось называют *мгновенной осью вращения* (рис. Д.13.1.2). Положение этой оси можно найти по известным скоростям двух точек плоской фигуры. В частности, мгновенная ось вращения проходит через две, неподвижные в данный момент времени, точки твердого тела.

Задача 13.1.1 В задаче 3.5.4 найдены скорости точек A, B, C, D обода колеса, которое катится по горизонтальной плоскости.

А. Скорости точек B и D на рис. 3.5.4 *а* известны. Найдите положение мгновенной оси вращения.

Б. Скорости точки A и центра колеса известны. Найдите положение мгновенной оси вращения.

Пример 13.1.2. Величины скоростей точек твердого тела k и c на рис. Д.1.13.2 равны $v_k = v_0$, $v_c = 2v_0$, $ck = l/3$, где l — длина отрезка ak. Найдите скорость точки a и угловую скорость твердого тела.

Решение. Поскольку проекции скоростей точек c и k на прямую ak одинаковы. Тогда $v_c\cos\alpha = v_k$ — угол α между вектором $\vec{v}_c$ и прямой ak равен $\pi/3$. Из треугольника kbc находим $bk = ck\mathrm{ctg}\alpha = l/(3\sqrt{3})$. Угловая скорость $\omega = v_k/bk = 3\sqrt{3}v_0/l$. Линейная скорость $v_k = \omega ba$, $ba = l(28/27)^{1/2}$, $v_a = 2v_0\sqrt{7}$.

13.2. Динамические переменные твердого тела

Импульс твердого тела. Здесь для упрощения вычислений твердое тело представлено в виде системы частиц. Совместим точку O' с центром масс твердого тела C. Тогда из определения центра масс (5.2.2) получим

$$\sum_{a=1}^{N} m_a \vec{c}_a = 0. \qquad (13.2.1)$$

Учитывая (13.2.1) найдем импульс (5.2.2) тела массы m

$$\vec{P} = m\vec{v}, \qquad (13.2.2)$$

где $\vec{v}$ — скорость центра масс

Момент импульса твердого тела. Согласно определению момент импульса частицы a тела $\vec{L}_a = \vec{r}_a \times m_a \vec{v}_a$. Суммируя по всем частицам, получим момент импульса твердого тела

$$\vec{L} = \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a \times m_a \vec{v}_a. \qquad (13.2.3)$$

Подставляя $\vec{r}_a$ и $\vec{v}_a$ из (13.1.1) и (13.1.4) в (13.2.3), получим, учитывая (13.2.1)

$$\vec{L} = m\vec{R} \times \vec{v} + \vec{L}_c, \qquad (13.2.4)$$

$$\vec{L}_c = \sum_{a=1}^{N} m_a \vec{c}_a \times (\vec{\omega} \times \vec{c}_a), \qquad (13.2.5)$$

где $\vec{L}_c$ — момент импульса тела в системе центра масс. Отметим, что соотношение (13.2.4) справедливо при произвольном движении твердого тела.

Отметим, что двойное векторное произведение $\vec{c}\times(\vec{\omega}\times\vec{c}) = \vec{\omega}c^2 - \vec{c}(\vec{\omega}\vec{c})$.

А. Пусть $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Рассмотрим осесимметричное тело, ось симметрии которого совпадает с осью z′. Тогда

$$\vec{L}_c = J_c\vec{\omega}, \tag{13.2.6}$$

$$J_c = m_a[(c_{ax})^2 + (c_{ay})^2], \tag{13.2.7}$$

где J_c — величина, называемая *моментом инерции* тела относительно оси z'. При переходе к непрерывному распределению массы твердого тела следует перейти от суммы по частицам в (13.2.7) к определенному интегралу. В случае однородного диска массой m, радиусом a получим $J_c = ma^2/2$.

Б. Пусть $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Тонкий однородный стержень длиной l расположен в плоскости $z' = \text{const}$. Если ось z' проходит через центр масс — середину стержня, то $\vec{L}_c = (0, 0, J_c\omega_z)$, $J_c = ml^2/12$. Если ось z' проходит через торец стержня, то $\vec{L} = (0, 0, J_0\omega_3)$, $J_0 = ml^2/3$.

13.3. Уравнения движения твердого тела

Поскольку твердое тело является системой N частиц, то радиус-вектор центра масс тела $\vec{R}$, введенный соотношением (5.2.2), должен согласно (5.3.2) входить в три уравнения

$$m\vec{a}_c = \vec{F}, \qquad \vec{F} = \sum_{a=1}^{N}\vec{F}_a(\vec{R}+\vec{c}_a), \tag{13.3.1}$$

где m — масса тела, $\vec{a}_c$ — ускорение центра масс, $\vec{F}_a$ — сумма внешних сил, действующих на частицу a твердого тела.

Можно получить еще три уравнения, вычисляя производную момента импульса $\vec{L}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{a=1}^{N}\frac{d\vec{L}_a}{dt}, \qquad \frac{d\vec{L}_a}{dt} = \frac{d\vec{r}_a}{dt}\times m_a\vec{v}_a + \vec{r}_a\times m_a\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \vec{r}_a\times\vec{f}_a.$$

Здесь мы использовали второй закон Ньютона в форме (5.3.1): $\vec{f}_a$ — сумма внешних сил $\vec{F}_a$ и внутренних сил $\vec{f}_{ab}$, действующих на частицу a со стороны других частиц твердого тела. Поскольку $\vec{f}_{ab} = -\vec{f}_{ba}$, то суммируя по всем частицам, получим уравнение

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \qquad \vec{M} = \sum_{a=1}^{N}\vec{r}_a\times\vec{F}_a(\vec{r}_a). \tag{13.3.2}$$

Здесь $\vec{M}$ — сумма моментов внешних сил. Подставляя $\vec{L} = m\vec{R} \times \vec{v} + \vec{L}_c$, $\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{c}_a$ и учитывая (13.2.1), получим уравнение

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{M}_c, \qquad \vec{M}_c = \sum_{a=1}^{N} \vec{c}_a \times \vec{F}_a(\vec{R} + \vec{c}_a). \tag{13.3.3}$$

где $\vec{L}_c$ и $\vec{M}_c$ — момент импульса и момент внешних сил относительно центра масс тела.

Шесть уравнений (13.3.1) и (13.3.3) представляют собой систему, решение которой позволяет получить полную информацию о движении твердого тела: найти радиус-вектор центра масс $\vec{R}(t)$, угловую скорость $\vec{\omega}(t)$ и определить ориентацию тела относительно неподвижной системы координат. К настоящему времени удалось получить (не используя ЭВМ) лишь несколько частных решений уравнений движения твердых тел специальной формы.

При движении твердого тела (гантель переменной длины в поле тяготения планеты, кельтский камень, шар на биллиарде, шар на вращающемся диске, гироскоп) проявляются новые, уникальные эффекты. Сильное впечатление производят особенности движения *кельтского камня*. Эти камни имеют форму половинки вытянутого эллипсоида. Если раскрутить камень относительно нормали к плоскости в точке контакта, то движение камня будет зависеть от направления начальной угловой скорости. Например, при закрутке в направлении движения часовой стрелки камень вращается «нормально». При закрутке в противоположном направлении угловая скорость уменьшается до нуля и камень начинает вращаться в направлении движения часовой стрелки. Если камень наклонить, а затем отпустить, то колебания камня сменяются во вращением.

В случае плоскопараллельного движения положение твердого тела определяется координатами центра масс $\vec{R}$ и одной угловой координатой. В наиболее простом случае вращения тела вокруг закрепленной оси z угловая координата определяется решением уравнения

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_z,$$

где J — момент инерции относительно оси. Силы реакции найдем из уравнения (13.3.1).

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих интересные особенности движения твердого тела.

13.4. Движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Пример 13.4.1. Физический маятник. На рис. Д.13.4.1 *а* изображен стержень, вращающийся вокруг оси *z*. Найдем силу реакции, действующую на стержень.

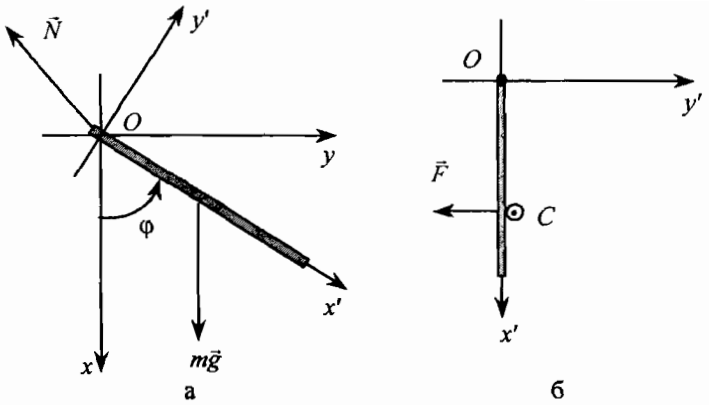


рис. Д. 13.4.1

Пусть длина стержня — s, масса — m. Совместим начала систем координат O и O'. Положение стержня определяется функцией $\varphi(t)$ — это значение угла между осями x и x' в момент времени t. На стержень действуют сила тяжести и сила реакции $\vec{N}$. Момент силы тяжести относительно оси z равен $\vec{M} = (0, 0, -(s/2)mg\sin\varphi)$. Угловая скорость стержня $\vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega)$, скорость центра масс $\vec{v}' = (0, \omega s/2, 0)$. Из уравнений (13.3.1), (13.3.2) получим систему

$$(ms/2)d\omega/dt = -mg\sin\varphi + N'_y, \tag{1}$$

$$-ms\omega^2/2 = mg\cos\varphi + N'_x, \tag{2}$$

$$J_0 d\omega/dt = -(1/2)mg\sin\varphi, \tag{3}$$

где $J_0 = ms^2/3$. Из (1)–(3) находим

$$N'_y = mg\sin\varphi(1 - ms^2/4J_0) = (1/4)mg\sin\varphi,\ N'_x = -ms\omega^2/2 - mg\cos\varphi.$$

Следовательно, сила реакции имеет компоненту, перпендикулярную стержню.

Отметим, что при вращении математического маятника — точечной массы m, закрепленной на конце тонкой спицы длиной $s/2$, момент инерции $J_0 = m(s/2)^2$. В этом случае поперечная к стержню компонента $N'_y = 0$.

Покажите, что частота линейных колебаний стержня $\Omega = (msg/2J_0)^{1/2}$.

Пример 13.4.2. Удар стержня о преграду. Центр удара. Закрепим тонкий прут параллельно оси z и пересекающий плоскость xy в точке C с координатами $x_c = h, y_c = 0$ (рис. Д.13.4.1 *б*). В начальный момент времени $\varphi(0) = -\varphi_0$. В момент удара на стержень действует сила $\vec{F} = (0, -F, 0)$; момент силы $\vec{M} = (0, 0, -Fh)$. Из (13.3.1), (13.3.2) получим систему уравнений

$$(ms/2)d\omega/dt = N'_y - F, \quad J_0 d\omega/dt = -Fh.$$

Следовательно, $N'_y = F(1 - msh/2J_0)$. При значении $h = 2J_0/ms = 2s/3$ поперечная компонента силы реакции обращается в ноль. Точка С называется *центром удара*. Вращающиеся ударные устройства (маятниковые копры, курки ружей и т. д.) конструируются так, чтобы точка С была по отношению к оси вращения центром удара

13.5. Плоскопараллельное движение твердого тела

Пример 13.5.1. Переход скольжения в качение. В художественной гимнастике известен красивый элемент — гимнастка бросает в горизонтальном направлении обруч, который через несколько секунд возвращается к ней.

Пусть масса обруча — m, радиус — a. Введем систему координат xyz, в которой шероховатая горизонтальная плоскость задана уравнением $y = 0$. Скорость центра масс C диска $\vec{v}(t) = (v, 0, 0)$ и угловая скорость $\vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega)$ (рис. Д.13.5.1). Начальные значения $v(0) = v_0 > 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ — обруч раскручен в положительном направлении, $\omega_0 > v_0/a$.

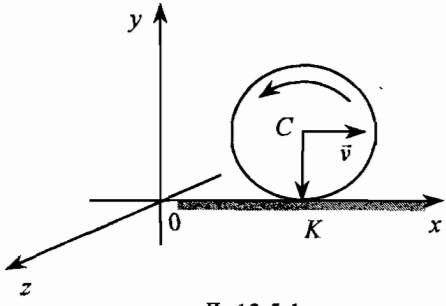


рис. Д. 13.5.1

Пусть $\vec{u}(t) = (u, 0, 0)$ — скорость точки обруча K, касающейся плоскости в момент времени t. Согласно (3.1.5) скорости точек C и K связаны соотношением $\vec{u} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{ск}$, $\vec{r}_{ск} = (0, -a, 0)$. Следовательно,

$$u = v + a\omega, \tag{1}$$

начальное значение $u(0) = v_0 + a\omega_0$. Отметим, что при движении обруча без проскальзывания $u = 0$ или $v + a\omega = 0$. Поэтому обруч начинает скользить. Со стороны плоскости на него действуют сила нормальной реакции $\vec{N} = (0, N, 0)$ и сила трения скольжения $\vec{T} = -\mu N\vec{u}/|u|$. При значениях $u(t) > 0$ в течение некоторого интервала времени $[0, t_c]$ обруч скользит по плоскости, единичный вектор $\vec{u}/|u|$ сохраняет постоянное значение $\vec{c} = \vec{u}(0)/|u(0)|$.

Уравнения движения (13.3.1), (13.3.3) приобретают вид

$$N - mg = 0, (2)\ mdv/dt = -\mu mgc_x, (3)\ Jd\omega/dt = -\mu mgac_x, \tag{4}$$

где $c_x = 1$, $J = ma^2$ — момент инерции обруча.

Дифференцируя уравнение (1), и учитывая (3), (4), последовательно находим

$$du/dt = dv/dt + ad\omega/dt = -\mu g(1 + ma^2/J),$$

$$\text{или} \quad du/dt = -2\mu g.$$

Из последнего уравнения следует, что $u(t) = v_0 + a\omega_0 - 2\mu gt$. Полагая $u(t_c) = 0$, находим $t_c = (v_0 + a\omega_0)/2\mu g$.

Найдем теперь решения уравнений (3), (4) в интервале времени $0 \le t \le t_c$:

$$v(t) = v_0 - \mu gt, \qquad \omega(t) = \omega_0 - \mu gt/a. \tag{5}$$

Полагая $v(t_1) = 0$, находим $t_1 = v_0/\mu g < t_c$, $\omega(t_1) = \omega_0 - v_0/a > 0$ — обруч попрежнему скользит по плоскости. В момент времени t_c значения скоростей $v_c = v(t_c)$, $\omega_c = \omega(t_c)$:

$$v_c = (v_0 - a\omega_0)/2, \; \omega_c = (a\omega_0 - v_0)/2a.$$

Поскольку $a\omega_0 > v_0$, то $v_c < 0$. В интервале времени $t_1 < t < t_c$ обруч движется в обратном направлении с проскальзыванием. В интервале времени $t > t_c$ выполняется соотношение $v_0 + a\omega_0 = 0$ — обруч движется без проскальзывания с постоянной скоростью v_c.

Шар на биллиарде. Если начальные скорости центра шара и точки касания с поверхностью стола не коллинеарны, то шар скользит по параболе, а при переходе в режим качения движется по прямой. Игроки на биллиарде знают, как заставить шар вернуться назад.

Пример 13.5.2 Движение катушки ниток по плоскости. Катушка ниток находится на шероховатой горизонтальной плоскости. К нити приложена постоянная сила $\vec{F}$ (рис. Д.13.5.2 *а*). Найдем скорость центра масс и угловую скорость вращения катушки (m — масса катушки, b — радиус бобины, a — радиус обода, осевой момент инерции катушки — J_c).

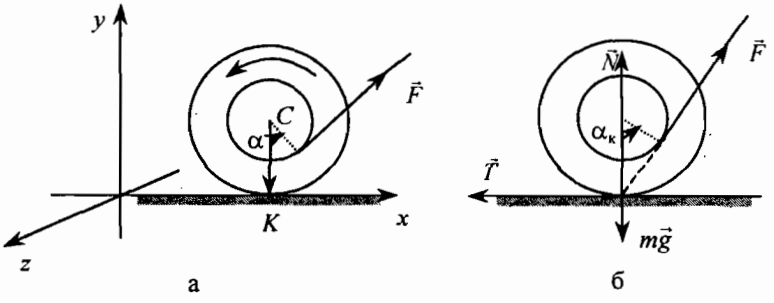


рис. Д. 13.5.2

Шероховатая горизонтальная плоскость задана уравнением $y = 0$. Скорость центра масс катушки $\vec{v}(t) = (v, 0, 0)$ и угловая скорость $\vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega)$.

На катушку действуют сила трения $\vec{T} = (T_x, 0, 0)$, сила тяжести $m\vec{g} = (0, -mg, 0)$, сила реакции $\vec{N} = (0, N, 0)$ и внешняя сила $\vec{F} = (F\cos\alpha, F\sin\alpha, 0)$, где α — угол между вектором $\vec{F}$ и осью x.

Из уравнений движения (13.3.1), (13.3.3) получим систему

$$N - mg + F\sin\alpha = 0, \tag{1}$$

$$m dv/dt = F\cos\alpha + T_x, \tag{2}$$

$$J_c d\omega/dt = bF + aT_x, \tag{3}$$

где J_c — осевой момент инерции катушки.

Скорость точки обода, касающейся плоскости, $\vec{u}(t) = (u, 0, 0)$, $u = v + a\omega$.

А. Рассмотрим вначале режим чистого качения. В этом случае $u = 0$, $v = -a\omega$. Из уравнений (2), (3) получим

$$T_x = -F(\cos\alpha + mab/J_c)/(1 + ma^2/J_c).$$

Теперь из (2) следует уравнение

$$dv/dt = Fa(a\cos\alpha - b)/(ma^2 + J_c).$$

Очевидно, при значении $\alpha = \alpha_k$, $\cos\alpha_k = b/a$ ускорение равно нулю. Этот результат очевиден из теоремы о трех силах (рис. Д.13.5.2б). Если $0 < \alpha < \alpha_k$, то $v(t) > 0$, $\omega(t) < 0$ — катушка движется в положительном направлении оси x. Нить наматывается на катушку.

Б. Рассмотрим режим скольжения катушки. Пусть начальные значения $v(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0$: катушку раскрутили и поставили на плоскость. Начальная скорость точки касания обода с плоскостью $u(0) = a\omega_0 > 0$. В этом случае катушка начинает скользить по плоскости. Вектор $\vec{c} = \vec{u}(0)/|u(0)| = (1, 0, 0)$; поэтому проекция силы трения $T_x = -\mu N$.

Теперь необходимо ответить на вопрос: возможен ли переход скольжения в чистое качение? С этой целью дифференцируя уравнение $u = v + a\omega$ по времени и учитывая уравнения (2), (3), получим

$$du/dt = dv/dt + a d\omega/dt = w,$$

$$mw = F(\cos\alpha + mab/J_c) - \mu(mg - F\sin\alpha)(1 + ma^2/J_c).$$

Если $w > 0$, то движение катушки не перейдет в режим качения.

13.6. Быстрый волчок

Раскрутим осесимметричное тело — волчок массой m вокруг оси симметрии до угловой скорости ω_3 и поставим его на шероховатую плоскость так, что ось и вертикаль образуют угол θ (рис. Д.13.6.1). Ось волчка начинает вращаться вокруг вертикали. Это движение называют *прецессией* (от лат. *praecessio* — предшествование). Найдем угловую скорость $\vec{\Omega}$ вращения оси.

Пусть $\vec{R}(t)$ — радиус-вектор центра масс, проведенный из точки касания с плоскостью. Очевидно, $\vec{R}(t)$ — вектор постоянной длины. При $t = 0$ момент импульса волчка можно представить в виде $\vec{L}(0) = L_0\vec{R}_0 / R_0$, $L_0 = J_0\omega_3$, $\vec{R}_0 = \vec{R}(0)$. Из (13.3.2) получим уравнение движения

$$d\vec{L} / dt = \vec{R} \times m\vec{g}. \qquad (13.6.1)$$

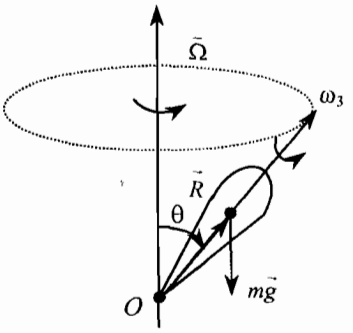


рис. Д. 13.6.1

Если кинетическая энергия волчка много больше потенциальной энергии, то величину момента импульса можно считать постоянной. В этом приближении $\vec{L} = L_0\vec{R} / R$. В соответствие с (13.1.3) $d\vec{R} / dt = \vec{\Omega} \times \vec{R}$. Тогда $d\vec{L} / dt = (L_0 / R)\vec{\Omega} \times \vec{R}$. Из уравнения движения (13.3.2) получим $(L_0 / R)\vec{\Omega} \times \vec{R} = \vec{R} \times m\vec{g}$. Отсюда находим

$$\vec{\Omega} = -mR\vec{g} / J_0\omega_3. \qquad (13.6.2)$$

Следовательно, ось волчка вращается по конической поверхности вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\vec{\Omega}$.

Один из эффектов влияния силы трения между опорной плоскостью и основанием оси волчка состоит в том, что ось симметрии волчка стремится занять вертикальное положение.

13.7. Гироскоп

13.7.1. Гироскопический момент. Гироскоп — симметричное тело, вращающееся вокруг оси симметрии, закрепленой на неподвижном или движущемся объекте. Существует большое число устройств, содержащих быстровращающиеся элементы: турбины, колеса машин и вагонов, винт самолета, дробильные мельницы и т. д. Запишем уравнения движения гироскопа в приближении заданного движения объекта.

Горизонтально расположенная ось гироскопа массой m закреплена на двух подшипниках в точках *a* и *b*, со стороны которых действуют силы реакции $\vec{N}_a$ и $\vec{N}_b$ (рис. Д.13.7.1). Поместим начало подвижной системы координат *K'* в центр масс гироскопа. Сумма моментов всех сил относительно центра масс $\vec{M}' = \vec{r}_a \times \vec{N}_a + \vec{r}_b \times \vec{N}_b$. Полагая $\vec{r}_b = -\vec{r}_a = \vec{c}$, получим $\vec{M}_c = \vec{c} \times (\vec{N}_b - \vec{N}_a)$. Предположим теперь, что проекция угловой скорости вращения гироскопа ω_3 вокруг оси *z'* намного больше величины угловой скорости движения объекта. Тогда можно пренебречь изменением величины вектора момента импульса гироскопа: в подвижной системе координат $\vec{L}_c \approx (0, 0, L_0)$, $L_0 = J\omega_{30}$, $\omega_{30} = \omega_3(0)$.

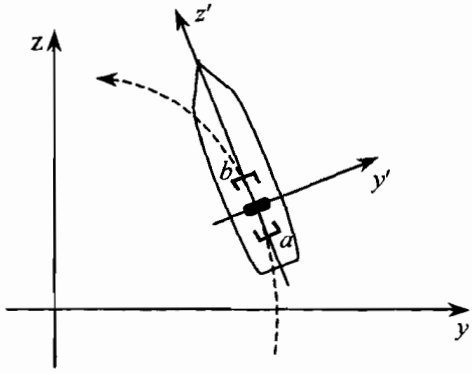


рис. Д. 13.7.1

Представим $\vec{L}_c$ в виде $\vec{L}_c = \vec{c}\, L_0/c$. Поскольку величина вектора $\vec{L}_c$ постоянна, то в соответствии с (13.1.3) $d\vec{L}_c / dt = \vec{\Omega} \times \vec{L}_c$ или $d\,\vec{L}_c / dt = L_0\, \vec{\Omega} \times \vec{c}\,/c$. Из (13.3.3) получим уравнение

$$\frac{L_0}{c}\, \vec{\Omega} \times \vec{c} = \vec{c} \times (\vec{N}_b - \vec{N}_a).$$

Отсюда следует важный результат

$$\vec{\Omega} = -\frac{c}{J\omega_{30}}\, (\vec{N}_b - \vec{N}_a). \qquad (13.7.1)$$

Сумма моментов сил, действующих со стороны оси гироскопа на подшипники $\vec{M}_g = -\vec{\Omega} \times \vec{L}_c$, или $\vec{M}_g = (L_0/c)\ \vec{c} \times \vec{\Omega}$. Вектор $\vec{M}_g$ называют *гироскопическим моментом*. Вводя единичный вектор $\vec{n} = \vec{c}\,/c$, полезно представить $\vec{M}_g$ в виде $\vec{M}_g = (J\omega_{30})\, \vec{n} \times \vec{\Omega}$.

Отметим, что при движении объекта с постоянной скоростью из уравнений $0 = m\vec{g} + \vec{N}_a + \vec{N}_b$, $\vec{N}_a - \vec{N}_b = 0$ получим $\vec{N}_b = \vec{N}_a = -m\vec{g}/2$. Следовательно, соотношение (13.7.1) представляет собой основной результат теории быстровращающихся гироскопов: если к оси гироскопа приложить пару сил, то он приобретает угловую скорость $\vec{\Omega}$ или наоборот — при повороте гироскопа изменяются силы реакции.

13.7.2. Силы реакции, возникающие при поворотах объекта. Пусть ось турбины расположена вдоль оси корабля (рис. Д.13.7.1). Рассмотрим два случая.

А. Найдем силы реакции при килевой качке корабля с угловой скоростью $\vec{\Omega}(t)$. В подвижной системе $\vec{\Omega} = (0,\ \Omega(t),\ 0)$. Из уравнений (13.3.1), (13.7.1) получим систему

$$0 = m\vec{g} + \vec{N}_a + \vec{N}_b,\ \vec{\Omega} = (\vec{N}_a - \vec{N}_b)c / L_0,$$

из которой находим $\vec{N}_{a,b} = (1/2)(-m\vec{g} \pm \vec{\Omega}L_0/c)$. Следовательно, величина силы давления на подшипники является функцией времени: $N_a(t) = N_b(t) = (1/2)[(mg)^2 + (\Omega L_0/c)^2]^{1/2}$.

Б. Корабль выполняет поворот по окружности радиусом R с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$. В подвижной системе $\vec{\Omega} = (\Omega, 0, 0)$. Поскольку величина скорости центра масс $v = \Omega R$ постоянна, то $d\vec{v}/dt = \vec{\Omega} \times \vec{v}$. Из (13.3.1), (13.7.1) получим уравнения

$$m\vec{\Omega} \times \vec{v} = m\vec{g} + \vec{N}_a + \vec{N}_b, \qquad \vec{\Omega} = (\vec{N}_a - \vec{N}_b)c/L_0.$$

Отсюда находим силы давления на подшипники $\vec{P}_{a,b} = -\vec{N}_{a,b}$,

$$\vec{P}_{a,b} = -(1/2)(-m\vec{g} + m\vec{\Omega} \times \vec{v} \pm \vec{\Omega}L_0/c).$$

Гироскопический момент $\vec{M}_g = (L_0/c)\vec{c} \times \vec{\Omega}$, $\vec{M}_g = (0, J\omega_{30}\Omega, 0)$, обусловленный парой сил давления на корпус корабля в плоскости $x'z'$, приводит к смещению носа корабля вверх и кормы вниз. Этот же эффект наблюдается при развороте легкого винтомоторного самолета.

В разделе физики, известном как «Физики шутят», упоминается о розыгрыше, автором которого был выдающийся американский физик-экспериментатор Роберт Вуд. Перед поездкой он укрепил в чемодане гироскоп. Вышел из вагона, запустил гироскоп с помощью ремня и подозвал носильщика. Когда они огибали угол, чемодан стал разворачиваться и вырвался из рук испуганного носильщика.

Дополнение II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Глава 2. Тепловое равновесие. Температура

2.3.1. Максвелловское распределение молекул по энергиям и скоростям. В состоянии теплового равновесия распределение молекул массой $m_м$ по энергиям поступательного движения E определяется плотностью вероятностей Максвелла

$$w(E) = \frac{2}{(kT)^{3/2}}\sqrt{\frac{E}{\pi}}\exp(-E/kT), \qquad (2.3.3)$$

которая достигает максимального значения $w(E_m) = (2/\pi e)^{1/2}(kT)^{-1}$ при $E = E_m$, $E_m = kT/2$. Переходя в сумме (1.2.1) к непрерывному распределению частиц по энергиям, получим в соответствии с (2.3.3) среднее значение $<E> = 3kT/2$:

$$<E> = \int_0^\infty dEEw(E) = \frac{3}{2}kT.$$

Отметим, что распределение Максвелла по энергиям (2.3.3) следует из более общего распределения Максвелла по скоростям

$$\Delta N = Nw(\vec{v})\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z, \qquad (2.3.4)$$

$$w(\vec{v}) = \left(\frac{m_м}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp(-m_м v^2/2kT).$$

Здесь $w(\vec{v})$ — плотность вероятности найти молекулу в интервале скоростей $(\vec{v}, \vec{v}+\Delta\vec{v})$. В частности, из (2.3.4) можно получить среднее значение величины скорости молекулы $<v> = (8kT/\pi m_м)^{1/2}$. Величина среднеквадратичной скорости $v_т = 1{,}086 <v>$.

Пример 2.3.1. Истечение молекул через отверстие. В равновесном состоянии газ объемом V содержит N молекул. В соответствие с распределением Максвелла (2.3.4) ΔN молекул имеют скорости в интервале $(\vec{v}, \vec{v}+\Delta\vec{v})$. Пусть A — площадь плоской площадки стенки сосуда. Найдем число молекул, падающих на эту площадку за интервал времени Δt.

Направим ось z перпендикулярно к этой плоскости наружу от нее и построим косой цилиндр, имеющий площадь основания А и образующие $\vec{v}\Delta t$ с компонентой скорости $v_z > 0$. За этот интервал времени $(\Delta N/V)Av_z\Delta t$ молекул столкнутся с площадкой. Для определения полного числа молекул Δs, налетающих на стенку, необходимо вычислить сумму по всем возможным скоростям при условии $v_z > 0$. В этом случае, используя распределение (2.3.4), получим $\langle v_z \rangle = \langle v \rangle/4$. Следовательно, $\Delta s = (NA/4V) \langle v \rangle \Delta t$. Подставляя среднее значение величины скорости $\langle v \rangle$ получим

$$\Delta s/\Delta t = (NA/4V)(8kT/\pi m_м)^{1/2}.$$

Пусть сосуд объемом V находится в вакууме. Рассмотрим истечение газа через отверстие в стенке площадью A. Газ переходит в неравновесное состояние. Однако, если площадь отверстия настолько мала, что интервал времени $(A)^{1/2}/\langle v \rangle$ меньше характерного времени столкновений между молекулами, то можно пренебречь нарушением равновесного состояния. Пусть в начальный момент времени в объеме V находилось $N(0) = N_0$ молекул. Тогда мы имеем уравнение

$$dN/dt = -(NA/4V)(8kT/\pi m_м)^{1/2},$$

решение которого позволяет определить функцию $n(t) = N(t)/V$ — концентрацию молекул в объеме V.

Отметим, что скорость истечения через отверстие различна для изотопов, которые, как известно, обладают одними и теми же химическими свойствами. Соответствующая система резервуаров может быть использована для разделения изотопов.

Глава 5. Фазовые переходы вещества

5.11. Равновесие фаз растворителя

Здесь мы рассмотрим слабый раствор, в котором число молекул растворенного вещества N значительно меньше числа молекул растворителя N_0. Растворенное вещество мало летуче: двумя состояниями являются раствор и пар растворителя. Рассмотрим равновесное состояние газообразной фазы растворителя и раствора при температуре T_0. Обозначим $p_н$ давление насыщенного пара растворителя над раствором, $p_{н0} = p_н(T_0)$ — давление насыщенного пара растворителя над чистым растворителем. Если растворенное вещество не переходит в газообразную фазу, то выполняется закон Рауля (1886 г.): $p_н = p_{н0} - p_{н0}N/N_0$. Мы видим, что давление насыщенного пара над раствором меньше, чем над чистым растворителем: относительное уменьшение давления насыщенного пара над раствором не зависит от природы растворителя и растворенного вещества. Для *нормального раствора* (1 моль растворенного вещества в 1 литре воды) отношение $N/N_0 = (\nu M_в/\rho_в V_в) = 0{,}018$.

Понижение давления насыщенного пара можно обнаружить в следующем опыте. Поместим в сосуд две трубки. Наполним первую трубку водным раствором соли LiCl, вторую — водой и откачаем воздух. Вначале уровни поверхностей раствора и воды одинаковы. Давление насыщенного пара воды над раствором в первой трубке меньше, чем давление насыщенного пара воды над водой у второй трубке. В течение нескольких дней раствор «разбухает»: разность уровней раствора и воды достигает значения h, удовлетворяющего уравнению $p_{н0} = p_н + \rho g h$, где ρ-плотность раствора.

Кипение раствора. Пусть T_{k0} — температура кипения чистого растворителя при внешнем давлении $p_{ат}$: $p_{н0}(T_{к0}) = p_{ат}$. Поскольку $p_н(T_{к0}) < p_{н0}(T_{к0})$, то температура кипения раствора $T_к > T_{к0}$ повышается.

Замерзание раствора. Присутствие чужеродных молекул приводит к понижению температуры замерзания (кристаллизации) раствора $T_з$ относительно температуры замерзания чистого растворителя $T_{з0}$. Насыщенный раствор поваренной соли в воде замерзнет при $t = -21°C$.

Пример 5.11.1. Объясните, почему лед, посыпанный солью, начинает таять.

Ответ на этот вопрос хорошо известен дворникам. Необходимо, чтобы температура замерзания раствора соли была ниже температуры воздуха. Тогда смесь лед — соль находится в области состояний устойчивого существования раствора. Поэтому смесь будет превращаться в раствор: лед будет плавиться, а соль растворяться в образующейся воде. В результате этого процесса либо весь лед растает, либо образуется раствор такой концентрации, температура замерзания которого равна температуре воздуха.

Глава 8. Тепловые двигатели

Пример 8.7.4. Найдем КПД цикла Отто. На рис. 8.6.1 участок ab соответствует процессу быстрого сжатия горючей смеси — воздуха и горючего, участок bc — процессу сгорания горючей смеси, участок cd — быстрому расширению, участок da — выбросу продуктов сгорания через выпускной клапан при давлении близком к атмосферному.

Рабочее тело производит работу $A' = Q_{bc} + Q_{da}$, $Q_{bc} = \nu C_V(T_c - T_b) > 0$, $Q_{da} = \nu C_V(T_a - T_d) < 0$.

Следовательно, $A' = Q_2 - Q'_1$, $Q_2 = Q_{bc}$, $Q'_1 = -Q_{da}$. КПД цикла

$$\eta = 1 - Q'_1/Q_2 = 1 - (T_d - T_a)/(T_c - T_b).$$

Поскольку для адиабатических процессов $T_d V_2^{n-1} = T_c V_1^{n-1}$, $T_a V_2^{n-1} = T_b V_1^{n-1}$, то $T_c/T_b = T_d/T_a$,

$$\eta = 1 - T_d/T_c, \quad \text{или} \quad \eta = 1 - (V_1/V_2)^{n-1}.$$

Для горючих смесей $n = 1{,}37$. Обратите внимание на то, что в машине Карно поглощение и отдача теплоты идут при постоянных температурах,

а в двигателе Отто в интервалах $[T_b, T_c]$ и $[T_d, T_a]$. Обычно степень сжатия имеет значение $V_2/V_1 = 9$.

Докажите, что выполняется условие обратимости (8.1.1).

Пример 8.7.5. Найдем КПД цикла Брайтона, изображенного на рис. 8.6.2 *б*. Рабочее тело производит работу $A' = Q_{bc} + Q_{da}$, $Q_{bc} = \nu C_P(T_c - T_b) > 0$, $Q_{da} = \nu C_P(T_a - T_d) < 0$. Следовательно, $A' = Q_2 - Q'_1$, $Q_2 = Q_{bc}$, $Q'_1 = -Q_{da}$. КПД цикла

$$\eta = 1 - Q'_1/Q_2 = 1 - (T_d - T_a)/(T_c - T_b).$$

Поскольку в адиабатическом процессе $pV^n = \text{const}$, $pV = \nu RT$, то $T_a = T_b(p_1/p_2)^{(n-1)/n}$, $T_d = T_c(p_1/p_2)^{(n-1)/n}$. Следовательно, $T_a - T_d = (T_b - T_c)(p_2/p_1)^{(n-1)/n}$. Коэффициент полезного действия цикла $\eta = 1 - (p_1/p_2)^{(n-1)/n}$.

Глава 9. Энтропия

9.1. Количество теплоты и приращение энтропии.

В 1865 г. Рудольф Клаузиус первым понял важную роль, которую играет отношение $\delta Q/T$ в термодинамике — эта величина представляет собой приращение некоторой функции S: $\Delta S = \delta Q/T$. Иными словами при переходе термодинамической системы из состояния i в другое состояние f разность значений $S_f - S_i$ функции S не зависит от уравнения процесса и определяется только параметрами начального и конечного состояний. Эту функцию Клаузиус назвал *энтропией* (от греч. *entrope* — поворот, превращение). Следовательно, энтропия, как и внутренняя энергия, является функцией параметров состояния системы. Энтропия сложной системы есть сумма энтропий всех ее подсистем. Теперь элементарное количество теплоты можно представить в виде аналогичном (4.3.1):

$$\delta Q = T\Delta S. \tag{9.1.1}$$

Размерность S — Дж/К. Согласно Клаузиусу первый закон термодинамики для систем, в которых не проявляются электромагнитные эффекты и химические реакции, приобретает вид

$$\Delta U = T\Delta S - p\Delta V. \tag{9.1.2}$$

Следовательно, температура представляет собой производную внутренней энергии при постоянном объеме: $T = (dU/dS)_V$.

Для идеального газа из (9.1.2) и уравнения состояния находим $\Delta S = \nu C_v \Delta T/T + \nu R\Delta V/V$, $\nu R = kN$. В случае изотермического процесса $S_f - S_i = kN\ln(V_f/V_i)$ — увеличение объема при постоянной температуре сопровождается ростом энтропии. В адиабатическом процессе энтропия системы не изменяется.

Отметим, что площади на диаграммах любого циклического процесса в координатах pV и TS одинаковы.

Клаузиус пришел к понятию энтропии в результате глубокого анализа работы С. Карно. Согласно (8.1.1) именно энтропия замкнутой системы сохраняется в обратимых процессах: $\Delta S = 0$. В цикле Карно энтропия, передаваемая охладителю, равна энтропии, полученной от нагревателя. Однако, невозможно реализовать любой идеальный цикл, состоящий из последовательности обратимых процессов, поскольку для возникновения потоков теплоты необходимо создать конечную разность температур между нагревателем, охладителем и рабочим телом. В этом случае цикл становится необратимым. Благодаря необратимым процессам приращение энтропии подсистемы — рабочего тела — удовлетворяет неравенству $\Delta S \geq \delta Q/T$. Возрастание энтропии — необходимое условие того, чтобы тепловая машина совершила работу. Необратимые процессы, протекающие в неравновесной замкнутой системе, приводят к возрастанию энтропии системы $\Delta S \geq 0$. Эти неравенства представляет собой строгие формулировки *второго закона термодинамики*.

Закон возрастания энтропии открыт Р. Клаузиусом в 1865 г., а его статистическое обоснование дано Людвигом Больцманом в 70 годы XIX столетия. Именно возрастание энтропии задает «стрелу» времени.

Сейчас активно исследуются открытые системы, в которых энтропия уменьшается вследствие взаимодействия с окружающей средой. В них возникает динамическое упорядочение и новые типы пространственно-временной самоорганизации вещества, присущие только открытым системам в стационарных состояниях далеких от равновесных.

Этот удивительный объект — энтропия, не измеряемый непосредственно приборами, играет огромную роль при анализе биохимических процессов, в проблемах передачи информации и борьбы с помехами, описании эволюции черных дыр и различных моделей Вселенной. Необратимые процессы, протекающие в живых организмах, приводят к возрастанию энтропии и появляется возможность слышать, видеть и осязать окружающий мир. Закон возрастания энтропии — это один из уникальных законов, о котором можно сказать «non multa, sed multum» (не много, но многое).

9.2. Энтропия

Область физики, посвященная изучению закономерностей процессов, протекающих в макроскопических телах, называется *статистической физикой*. В конце шестидесятых годов прошлого столетия огромный вклад в развитие статистической физики и кинетической теории газов сделал австрийский физик Л. Больцман. Новый подход, являющийся вершиной статистической теории, был развит в начале прошлого века выдающимся американским физиком Уиллардом Гиббсом. В основе его теории лежит метод ансамблей и каноническое распределение.

Макросостояние термодинамической системы реализуется различными микросостояниями системы. Множество всех равновероятных микросостояний принято называть *статистическим ансамблем*. Каждая система ансамбля является точной копией реальной системы в одном из ее допустимых состояний.

Если рассматривать замкнутую систему как состоящую из почти независимых подсистем, то каждое состояние замкнутой системы можно характеризовать заданием состояний подсистем. Предположим, что две подсистемы, каждая из которых содержит N_1 и N_2 частиц, находятся в тепловом равновесии. Внутренняя энергия объединенной системы $E = E_1 + E_2$, где E_1, E_2 — возможные энергии подсистем, сохраняется. Число различных допустимых микросостояний системы с одинаковой энергией называют *статистическим весом*. Пусть статистический вес первой подсистемы равнен $g_1(N_1, E_1)$. Каждое из состояний первой подсистемы может реализоваться одновременно с любым из $g_2(N_2, E_2)$ допустимых микросостояний второй подсистемы. Поэтому число допустимых состояний объединенной системы, при которых энергия первой подсистемы равна E_1, выражается произведением $g_1(N_1, E_1)g_2(N_2, E_2) = g_1(N_1,E_1)g_2(N_2, E - E_1)$. Для получения полного числа допустимых состояний объединенной системы следует вычислить сумму произведений для всех возможных значений E_1. Следовательно, статистический вес объединенной системы

$$g(N, E) = \sum_{E_1} g_1(N_1, E_1) g_2(N_2, E - E_1), \qquad (9.2.1)$$

где $N = N_1 + N_2$. Функция $P(E_1) = g_1(N_1, E_1)g_2(N_2, E - E_1)$ достигает максимума при некотором значении $E_1 = E_{1e}$. Если хотя бы одна из двух подсистем представляет собой макроскопическую систему, то $P(E_1)$ имеет очень острый максимум. Наличие резкого максимума означает, что статистические свойства объединенной системы определяются относительно небольшим числом наиболее вероятных состояний. Значение $E_1 = E_{1e}$ найдем из условия

$$dP(E_1)/dE_1 = (dg_1/dE_1)g_2 + g_1(dg_2/dE_2)dE_2/dE_1 =$$
$$= (dg_1/dE_1)g_2 - g_1(dg_2/dE_2) = 0 \text{ или } d\ln g_1/dE_1 = d\ln g_2/dE_2.$$

Будем говорить, что две подсистемы находятся в тепловом равновесии друг с другом, когда объединенная система находится в наиболее вероятном состоянии. В этом случае средние значения внутренних энергий $U_1 = E_{1e}$, $U_2 = E - E_{1e}$ с относительной погрешностью 10^{-12}. Следовательно, с «достаточной» точностью

$$d\ln g_1/dU_1 = d\ln g_2/dU_2. \qquad (9.2.2)$$

Величина, называемая температурой, определяется так, что две подсистемы, находящиеся в тепловом равновесии, имеют одно и то же значение этой величины: $T_1 = T_2$. Поэтому в соответствии с (9.1.2) мы можем дать наиболее общее *определение температуры* термодинамической системы

$$1/T = dS/dU, \quad \text{или} \quad T = dU/dS, \tag{9.2.3}$$

где величина S определена согласно (9.2.2):

$$S = k\ln g. \tag{9.2.4}$$

В процессе установления равновесного состояния $\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$. При фиксированном объеме имеем $\Delta U_k = \delta Q_k = (dU_k/dS_k)\Delta S_k = T_k\,\Delta S_k$. Поскольку с течением времени температуры подсистем выравниваются, то получим уравнение $\Delta(S_1 + S_2) = 0$ эквивалентное условию максимума энтропии замкнутой системы. Отсюда находим $S_0 = S_1 + S_2$: энтропия объединенной системы в состоянии теплового равновесия равна сумме энтропий подсистем, т. е. энтропия обладает свойством аддитивности.

Пример 9.2.1. Система переходит из состояния с внутренней энергией U_a в состояние с энергией U_b. Работа, производимая над системой при необратимом процессе A(необр.) всегда больше работы A(обр.) в случае обратимого процесса. Количество теплоты Q(необр.), переданное системе при необратимом процессе, меньше количества теплоты Q(обр.), переданного при обратимом процессе. Действительно, первый закон термодинамики, который выполняется для обратимых и необратимых процессов: Q(необр) $-Q$(обр) $= A$(обр) $- A$(необр) ≥ 0.

Пример 9.2.2. Самопроизвольный переход тепла происходит всегда от более нагретого тела к менее нагретому телу. Это утверждение, является одним их эмпирических фактов, на которых основан второй закон термодинамики. Покажем, что это утверждение следует из строгой формулировки второго закона термодинамики $\Delta S \geq 0$.

Два тела с различными температурами T_a и T_b, приведенные в контакт, начинают обмениваться теплотой. Согласно определению $\Delta S_a = \delta Q_{ba}/T_a$, $\Delta S_b = \delta Q_{ab}/T_b$, где δQ_{ba} – количество теплоты, переданное от тела b к телу a. Приращение энтропии системы $\Delta(S_a + S_b) = \delta Q_{ba}/T_a + \delta Q_{ab}/T_b > 0$. Поскольку $\delta Q_{ab} = -\delta Q_{ba}$, то $\delta Q_{ba}(T_b - T_a)/T_aT_b > 0$. Таким образом, мы видим, что количество теплоты $\delta Q_{ba} > 0$, если $T_b > T_a$, и наоборот.

Пример 9.2.3. Направленность процесса перехода системы в равновесное состояние. У человека, наблюдающего процесс деления живой клетки, — почти одновременным делением хромосом и образованием двух новых клеток, возникает вопрос: кто или что «руководит» этими «разумными» химическими реакциями? Ответ примитивен — второй закон термодинамики.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух подсистем, одна из которых представляет собой внешнюю среду; S — энтропия подсистемы, S_e — энтропия внешней среды.

Пусть $\delta Q'$ — количество теплоты, переданное внешней среде в изотермическом процессе $T_e = T_0$. Тогда $\Delta S_e = \delta Q'/T_0 = -\delta Q/T_0$. Для замкнутой системы выполняется неравенство $\Delta(S + S_e) \geq 0$ или $\Delta S \geq \delta Q/T_0$. Найдем условия, определяющее *направленность* процессов перехода подсистемы в равновесное состояние.

После подстановки $\delta Q = \Delta U - \delta A$ в неравенство $\Delta S \geq \delta Q/T_0$ получим соотношение $\Delta U - T_0\Delta S \leq \delta A$ или $\Delta F \leq \delta A$, где $F = U - T_0S$ — так называемая *свободная энергия*. При постоянном объеме системы $V = V_0$ и числе частиц должно выполняться неравенство $\Delta F \leq 0$, представляющее собой условие реализации возможной эволюции подсистемы: свободная энергия F стремится к минимальному значению.

Если постоянно давление $p = p_0$, то аналогичное условие имеет вид $\Delta G \leq 0$, где $G = U - T_0S + p_0V$ — так называемый термодинамический потенциал. В общем случае приращение внутренней энергии связано с приращением числа взаимодействующих молекул. «Направление» процесса эволюции определяется переходом подсистемы в состояние с наименьшим значением функции G.

9.3. Энтропия и вероятность

Замкнутая система представляет собой систему с постоянными числом частиц, объемом и внутренней энергией. Статистическая термодинамика основывается на предположении: замкнутая система может находится с равной вероятностью в любом допустимом состоянии.

В 1872 г. Больцман доказал свое знаменитое соотношение между энтропией и вероятностью найти систему ансамбля в состоянии с определенной энергией. В случае замкнутой системы искомая вероятность $w = 1/g$. Следовательно, из (9.2.4) получим $S_0 = -k\ln w$.

Рассмотрим замкнутую систему и выделим из нее две подсистемы — интересующую нас систему и остальную область, которую называют средой или резервуаром. Гиббс поставил задачу найти вероятность w_n такого состояния всей системы, при котором исследуемая система находится в состоянии с энергией E_n. Эта вероятность определяется *распределением Гиббса* (1901 г.) или каноническим распределением:

$$w_n = \exp(-E_n/kT)/Z. \qquad (9.3.1)$$

Нормировочную постоянную $Z(T)$ получим из условия

$$\sum_n w_n = 1, \ \rightarrow Z = \sum_n \exp(-E_n / kT). \qquad (9.3.2)$$

Энтропия по Больцману-Гиббсу. Согласно первому закону термодинамики вклад в приращение внутренней энергии ΔU, обусловленный количеством теплоты

$$\sum_n E_n \ \Delta w_n = T\Delta S.$$

Поскольку $\sum_n \Delta w_n = 0$, то в результате подстановки величины $E_n = -kT(\ln w_n + \ln Z)$, получим уравнение, из которого найдем

$$S = -k\sum_n w_n \ln w_n. \qquad (9.3.3)$$

Можно показать, что S — максимальное значение энтропии системы, находящейся в тепловом контакте с резервуаром. В случае замкнутой сис-

темы, обладающей g допустимыми состояниями $w_n = 1/g$. Тогда из (9.3.3) следует $S = S_0$, $S_0 = k\ln g$.

Функция $Z(T)$, называемая *статистической суммой*, играет фундаментальную роль в термодинамике. Если найти $Z(T)$, то можно вычислить среднее значение переменных, характеризующих термодинамическое состояние любого тела. Например, внутренняя энергия

$$U = \sum_n E_n w_n$$

может быть представлена в виде

$$U(S,V) = (kT^2/Z)\partial Z/\partial T = kT^2\partial \ln Z/\partial T.$$

Пример 9.3.1. Покажем, что статистическая сумма связана с другой термодинамической функцией — свободной энергией $F(T,V) = U - TS$. Поскольку приращение свободной энергии

$$dF = -SdT - pdV, \quad S = -\partial F/\partial T, \quad p = -\partial F/\partial V,$$

то внутренняя энергия $U = F - T\partial F/\partial T = -T^2\partial(FT^{-1})/\partial T$. С другой стороны $U = kT^2\partial \ln Z/\partial T$. Следовательно,

$$F = -kT\ln Z, \quad S = k\frac{\partial T \ln Z}{\partial T}.$$

Пример 9.3.2. В изотермическом процессе давление можно представить в виде $p = -\partial U/\partial V + T\partial S/\partial V$. Важно отметить, что при деформации полимеров, образованных макромолекулами, напряжение определяется, в основном, приращением энтропии, а не внутренней энергии.

9.4. Третий закон термодинамики

Одна из формулировок этого закона гласит, что энтропия равна нулю, если замкнутая система может находиться только в одном состоянии. В этом случае $g = 1$, $S_0 = k\ln g = 0$.

Понятие энтропии тесно связано с представлением о степени беспорядка в системе. Беспорядок предполагает отсутствие информации о точном состоянии системы. Энтропия системы, с достоверностью находящейся в единственном состоянии, равна нулю. Чем больше возможных состояний, тем больше энтропия. Например, если число равновероятных состояний равно g, то $S_0 = k\ln g$.

Энтропия возрастает по мере увеличения степени беспорядка в системе, например, в процессах таяния льда или испарения воды $\Delta S = \Delta H/T > 0$. Нельзя уменьшить энтропию системы в результате совершенной работы. Состояние максимальной энтропии известно как состояние абсолютного термодинамического равновесия — в такой системе не могут происходить спонтанные процессы.

9.5. Открытые системы

Одно из самых поразительных явлений, с которыми сталкиваются ученые, — это спонтанное (от лат. *spontaneus* — самопроизвольный) образование упорядоченных структур из неорганических и органических молекул, находящихся первоначально в хаотическом состоянии. Известны многочисленные примеры самоорганизации в живой и неживой природе.

В слое жидкости, нагреваемом снизу, после достижения определенной разности температур возникают конвекционные течения, ограниченные упорядоченными пространственными ячейками — ячейками Бенара.

Возможно вы видели также упорядоченные полосы, образующиеся в облаках. В ходе многих химических реакций образуются красивые пространственно-временные структуры. В 1959 г. Белоусов впервые наблюдал, ставшую знаменитой, реакцию — спиральные цветовые волны в ходе окисления лимонной кислоты броматом.

Все эти структуры не являются замкнутыми системами, поскольку обмениваются веществом и энергией с окружающей средой. Они получили название *открытых* систем. В открытых системах возможно существование устойчивых структур в состояниях далеких от состояний теплового равновесия, обусловленное динамической упорядоченностью. Возникновение динамического порядка является результатом возрастания флуктуаций до макроскопического уровня. Совокупность подсистем образует объект, обладающий свойствами, которых нет ни у одной из подсистем. Особенно ярко выражено формирование структур в биологии — мы наблюдаем колоссальное разнообразие организмов.

9.6. Биологическая эволюция

Решение проблемы — как в различных системах природы хаос самопроизвольно переходит в порядок — является одной из основных задач физики и биофизики. Как самоорганизация элементов — блоков одного структурного уровня переходит в целое следующего уровня?

Возникновение упорядоченности означает создание информации — запоминание и поддержание «памяти» — относительно устойчивых конфигураций случайного образовавшихся химических соединений. В результате «перетасовки» образовавшихся структур возможно создание новой информации. Запоминание информации — необратимый процесс, характерный для диссипативной системы, сопровождается увеличением энтропии подсистемы и выделением теплоты. Образование структуры случайно, однако запоминание не случайно, поскольку определяется «естественным» отбором — результатом взаимодействия новых структур с окружающей средой. Благодаря этому взаимодействию подсистема может перейти в одно из множества относительно устойчивых, так называемых *метастабильных* состояний. Поскольку переход представляет собой необратимый процесс, то стационарное состояние подсистем поддерживается оттоком энтропии в окружающую среду. Расчеты на ЭВМ показывают, что флуктуации, инду-

цирующие процессы на макроскопическом уровне, играют решающую роль в «выборе» возможного пути перехода подсистемы из одного метастабильного состояния в другое. Следовательно, направленный необратимый эволюционный прогресс возникает автоматически, потому что увеличивается концентрация только тех подсистем, которые последовательно переходят в наиболее устойчивые состояния. Остальные подсистемы «вымирают». Более того, в замкнутой системе в ограниченной области пространства проявляется тенденция к увеличению числа идентичных подсистем, поскольку энтропия растет при образовании большого количества N_k тождественных подсистем в группе близких состояний $g_k << N_k$. Здесь ключ к пониманию процесса «размножения» подсистем. Каждый новый этап эволюции является результатом неустойчивости предшествующего состояния — возникновение нового вида имеет характер фазового перехода.

Палеонтологические исследования позволили построить временную шкалу эволюции. Химическая эволюция началась одновременно с образованием Земли 4,6 млрд. лет назад. На протяжении миллиарда лет происходил постепенный синтез жиров, углеводов (углерод + вода) и аминокислот.

В клетках живых организмов содержатся несколько тысяч веществ, содержащих почти все элементы таблицы Менделеева. Особенно велико содержание в клетках кислорода (65 %), углерода (15—18 %), водорода (8—10 %) и азота (1,5—3 %). Организм представляет собой множество клеток, в которых протекают химические реакции, приводящие к переносу вещества внутри клетки и между клеткой и окружающей средой. В организме человека около 10^{14} клеток.

Центральным событием стало образование нуклеиновых кислот ДНК (дезоксирибонуклеиновая кислота) и РНК (рибонуклеиновая кислота). ДНК - двойная спираль с апериодическим расположением генов, способная хранить информацию и создавать точные копии самой себя.

Структура «самой главной молекулы» биологии — молекула ДНК была разгадана 28 февраля 1953 года американцем Д. Уотсоном и англичанином Фр. Криком (Нобелевская премия, 1962 г.). В этот день Уотсон вырезал из картона элементы, изображавшие возможные пары оснований, и сложил модель молекулы. ДНК напоминает веревочную лестницу, состоящую из двух взаимно перевитых полуспиралей — нитей, образующих наружный каркас из молекул сахара и фосфатов, и азотистых оснований внутри, скрепляющих конструкцию водородными связями. Аденин одной цепи связан с тимином другой, а гуанин — с цитозином: две цепи взаимно *комплиментарны*. Расстояние между основаниями 0,34 нм. Эта находка природы позволяет передавать информацию из поколения в поколение в неизменном виде. Благодаря комплементарности становится возможной *репликация* — в процессе деления клетки нити расходятся и каждая нить достраивает дополнительную нить. В результате получаются две нити, идентичные исходной.

Ген — участок молекулы ДНК, ответственный за синтез одной белковой цепи. Специфическое расположение нуклеотидов в ДНК и есть тот код, ко-

торый содержит информацию о последовательности аминокислот одного белка и программирует его синтез. Информация, содержащаяся в ДНК, передается РНК, одна из двух полуспиралей которой становится матрицей, и на ней синтезируется новая цепь.

Белки или протеины (от гр. *protos* — первый) представляют собой структурные компоненты клеток (ферменты, гормоны, антитела и др.), необходимые для жизни организма. Сам механизм, реализующий программу синтеза молекулы белка за 1—2 мин., удивительно изящен. При построении белков живая природа использует только 20 вполне определенных аминокислот, которые получили название *канонических*. Этот набор универсален. Замена одной аминокислоты в белке может полностью нарушить его функции и привести к гибели организма. Разгадка генетического кода потребовала десятилетий уникальных исследований. Каждая аминокислота кодируется тройкой следующих друг за другом нуклеотидов — кодоном. Код универсален для всех организмов от вирусов до человека.

Хромосома — носитель генофонда, открытый в 1871 г. немцем В. Флемингом, представляет собой комплекс ДНК и белки. В ядре соматической клетки человека находятся два набора хромосом — по 23 в каждом: каждая клетка содержит информацию о строении всего организма. Гены занимают лишь около 3% всей длины ДНК. В настоящее время причины этого явления не ясны. Перед делением клетки генетический материал удваивается — происходит *репликация хромосом* и ДНК. В результате митоза образуются две клетки. При репликации ДНК двойная спираль разделяется, как «застежка-молния», вследствие разрыва водородных связей. Каждая половина служит матрицей для сборки новой копии цепи для следующих поколений.

Если до 70-х годов считалось, что геномы организмов стабильны, то сейчас следует говорить о динамической стабильности — обнаружены мобильные гены — участки, способные перемещаться под влиянием среды. Возможно, что они обеспечивают механизм второго уровня изменений, играющий важную роль в ускорении процессов биологической эволюции и приспособляемости живых организмов к окружающей среде в отличие от первого уровня — точечных мутаций. Таким образом, в природе кроме известного двуполого варианта, ускоряющего адаптацию живых организмов к изменениям среды, существуют и другие способы монтажа генетического материала. Другой важный результат — совпадение нуклеотидных последовательностей у неродственных видов. Повидимому, в процессе эволюции происходил перенос генов от одного вида к другому.

Первые живые существа — бактерии образовались в отсутствие свободного кислорода примерно 3,5 млрд лет назад. Оказалось, что клетки бактерий обладают индивидуальными свойствами. Чем больше разнообразие членов популяции, тем больше адаптационные возможности и выше вероятность выживания в экстремальных ситуациях.

В отсутствие кислорода клетка получала энергию, которая выделяется в результате процесса брожения — расщепления органических молекул. В качестве побочного продукта образуется углекислый газ, который поступал в атмосферу. До того, как были исчерпаны все органические молекулы природа «изобрела» способ применения углекислоты в процессе фотосинтеза. Сначала при солнечном освещении происходит процесс синтеза сахара из CO_2 и воды, а затем — азотосодержащих соединений. В результате возросла вероятность возникновения клеток с более сложной структурой. При фотосинтезе в атмосферу поступал кислород. Атомарный кислород — озон — образовал экран, защищающий планету от губительного для всего живого ультрафиолетового излучения. Однако по-прежнему источником энергии клетки было брожение. И, наконец, клетки «открыли» наиболее эффективный способ получения энергии — это сгорание органических молекул в присутствие кислорода или дыхание.

Прошли еще 2,5 млрд. лет и возникли одноклеточные водоросли. Многоклеточные организмы появились 500 млн. лет назад. Для осуществления этого события потребовались 3,5 млрд лет, поскольку вероятность образования сложных систем зависит от реализации определенной конфигурации предыдущих структур. Наземные растения и позвоночные возникли быстрее — в палеозойскую эру 400 млн. лет назад, млекопитающие — в мезозойскую эру 200 млн. лет назад. Кайнозойская эра началась 70 млн лет назад и продолжается до сих пор.

Неандерталец (назван по месту находки останков в Неандертальской долине у Рейна в 1856 г.) — «близкий» родственник современного человека — кроманьонца — появился около 300 тыс. лет назад. Участок ДНК, выделенный из кости неандертальца, кардинально отличается от аналогичного фрагмента у человека. Сейчас ученые не могут дать окончательный ответ о его родственных связях с Homo sapiens, который начал ходить по Земле 20 тыс. лет назад.

Мы видим, что большая часть времени ушла на образование многоклеточных, дальше процесс пошел быстрее. Сейчас по генам современных людей создают «портрет» древнего человека. Построено генеалогическое древо виртуальной Евы, жившей около 150 тыс. лет назад. Мужскую линию удалось проследить лишь на 80 тыс. лет назад.

9.7. Геном человека

Новый уровень познания природы связан с успехами новой науки — *геномики*, цель которой секвенирование геномов — анализ оснований и расшифровка последовательностей нуклеотидов на каждом участке гена и установление функциональных связей со свойствами организма. Эта информация важна для будущего прогресса науки и промышленности. Вложение средств в эту область принесет невиданные дивиденты. Япония в ближайшие пять лет вложит 17 млрд долларов для создания 1000 биотехнологических фирм. Главный фронт исследований — международный проект «Геном человека»,

направленный на создание новых лекарственных препаратов, излечивающих наследственные болезни, и изучение геномов растений с целью получения новых видов «здоровой» пищи.

К концу XX века геномы почти 50 видов были полностью расшифрованы. Согласно первым прогнозам работа по составлению первичной карты генома человека должна быть завершена к 2005—2010 г.г. Предполагалось, что геном человека содержит около 100 000 генов (Отметим, что у ряда растений геном состоит из 26 000 генов, у насекомых — 13 000, у знаменитой мухи- дрозофилы число генов — около 13 600).

Однако в начале февраля 2001 г. проект Геном человека (HUGO) и компания Celera Genomics объявили о расшифровке генетического кода человека. Этот успех достигнут благодаря применению кластерных компьютерных систем (800 взаимосвязанных машин Compaq Alpha Server) — каждый процессор анализировал более 250 млрд фрагментов в час.

Ученые установили, что наш организм содержит около 35 000 генов — не на много больше, чем у мыши! Обнаружены 200 генов, которые заимствованы у бактерий. По количеству генов мы не особенно отличаемся от других обитателей планеты — «комплектующие» совпадают на 99,99%. В 2002 г. выяснили, геномы человека и мыши совпадают на 80%. Эволюция экономна: количество генов далеко не главный фактор, определяющий личность. По данным 2004 г. в человеческом геноме находится 19 599 генов, кодирующих белки, и 2 188 сегментов ДНК, которые могут претендовать на роль генов. Это количество сопоставимо с набором генов мухи-дрозофилы и червяка-нематоды. На карте наших генов еще остается 341 «белое пятно». Главную роль по мере усложнения организма играет, пока неизученная, способность гена кодировать большее количество комбинаций белков и связей между ними за счет того, что большинство генов высших организмов состоят из мозаики кодирующих областей. Следовательно, проблема клонирования человека представляется неизмеримо более сложной, чем ранее. С другой стороны расшифрованный геном оказался заполненным «некодирующей» ДНК. Удивительно, что те 32 тысячи генов, которые удалось сейчас идентифицировать в геноме составляют только 5 % по объему. Остальные — «мусор» — испорченные гены, перемещающиеся геномные элементы, большое число повторяющихся элементов и т. п. По-видимому, это дает человеку преимущества в процессе эволюции. В начале 2003 г. пришло сообщение, что создан участок ДНК, который кодирует 20 + 1 аминокислоту.

Генетическая карта свидетельствует о том, мужчины сильнее подвержены эволюционным изменениям: мутации *y*-хромосомы наследуются в два раза чаще, чем х-хромосомы. Анализ изменений в геноме человека позволит прогнозировать возможные заболевания и создать индивидуальные и превентивные лекарства.

Человек на заказ? Технологии, изменявшие до сих пор наш мир, теперь нацеливаютя на нас самих. Благодаря достижениям новой науки — функцио-

нальной геномики мы получаем власть над собственной эволюцией в надежде на улучшение качества жизни. Выступая по телевидению в передаче, посвященной 50-летию своего открытия Уотсон будоражит научную общественность заявлениями типа: «глупость — настоящая болезнь. 10 процентов популяции, испытывающих трудности с усвоением программы начальной школы, можно излечить с помощью генетической терапии» или «сделаем всех красивыми».

Уже выявлено множество генов, связанных с развитием наследственных заболеваний. В результате переноса клеточного ядра из взрослой клетки в яйцеклетку, освобожденную от собственного ядра, удалось вырастить живой организм — клонировать овечку Долли. Начаты широкомасштабные работы по клонированию клеток человека — пока с целью выращивания необходимых для трансплантации тканей. Ученые уже научились управлять процессом получения клеток различных органов из одних и тех же эмбриональных *стволовых* клеток. На этой стадии они не имеют антигенов: их можно пересадить любому человеку. Более того, в начале 2003 г. генетики послали ген свинки Голди (университет штата Миссури, США), запускающий механизм отторжения чужеродной ткани, в нокаут – теперь антитела бессильны.

9.8. Проблемы биотехнологии

В 70-ые годы немецкий физик Г. Хакен предложил назвать теорию самоорганизации **синэргетикой** (от греч. *synergeia* — совместное действие). Общий подход к явлениям, совершенно различным по своей природе, представляет собой основу для создания новой технологии, которая строилась бы на тех же принципах самоорганизации, что и живая природа. Первым шагом на этом пути может стать бурно развивающаяся в последние десять лет новая область прикладной физики — нанотехнология, которая приведет к созданию механизмов размером с простейшие одноклеточные организмы. В расширенном понимании она включает методы конструирования макромолекул и микроорганизмов, имеющих заданную структуру. Манипуляции с белками, использующие методы генной инженерии, обещают переворот в фармацевтике и молекулярной электронике.

Недавно ученые открыли новое свойство молекул ДНК — электропроводность. Новый «проводник» в 44 тыс. раз тоньше человеческого волоса. Более того, у этих генетических проводников обнаружено замечательное свойство самоорганизации. Можно развить технологию производства микрочипов, основанную на стимуляции процесса самоорганизации микроорганизмов в логические элементы микроэлектроники. Новая промышленная революция может привести к созданию *киборгов* — продуктов симбиоза живой и неживой материй. Первый шаг на этом пути — создание *robo sapiens* — кибернетических устройств, способных заменить человека для выполнения неквалифицированной работы.

Развитие искусственного интеллекта ставит проблему, столь распространенную в научной фантастике: возможен ли «бунт машин» или чело-

век всегда может победить? Опыты по вживлению чипов в человеческий организм создают альтернативу — самим стать киборгами, соединяя разум со способностями машины, и тогда нам ничего не грозит. Если создать «электронный мозг» — идентичную модель деятельности реальных нейронов в механическом устройстве, то человек станет бессмертным. Эти и другие проблемы еще предстоит осмыслить на пути безудержного прогресса науки.

Английский физик Стивен Хокинг пришел к выводу, что мы входим в новую стадию эволюции жизни на Земле. Вначале человек осознал себя мыслящим существом и научился сохранять свои познания. Сейчас настает «третья» стадия — самоконструирование. Самого Хокинга (род. в 1942 г.), признанного одним из выдающихся физиков-теоретиков XX века, поразила очень редкая форма склероза, когда ему исполнился 21 год. Его пальцы беспомощны, он не может передвигаться; 25 последних лет лишен возможности говорить. Свои работы по теории черных дыр и квантовой теории гравитации, занимающие десятки страниц, он выполняет в уме. Лишь указательный палец правой руки, сохранивший некоторую подвижность, преобразует мысль в цифры и позволяет общаться с внешним миром с помощью звукового синтезатора. Сейчас он — заведующий кафедрой Ньютона в Кембридже, занимается с двумя десятками аспирантов и разъезжает по всему миру, участвуя в конференциях и симпозиумах. В 1998 г., выступая в Белом доме, Хокинг дал оптимистический прогноз развития человечества на следующее тысячелетие. Однако, три года спустя он изменил свою позицию. По мнению Хокинга главная опасность — в неконтролируемом прогрессе генной инженерии — человечество погибнет от вируса, который оно создаст собственными руками.

Дополнение III.
МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Глава 1. Аэростатика и гидростатика

1.11. Лунные приливы

Оценим амплитуду прилива h, предполагая, что земная поверхность представляет собой сферу, покрытую слоем воды средней глубиной $H << R$, где R-радиус Земли.

Согласно соотношениям (11.4.1), (11.4.3) Дополнения I. Механика ускорение свободного падения в точке на расстоянии r от центра Земли

$$\vec{g} = -Gm_з\vec{r}/r^3 + (Gm_л/r_{зл}^3)[3\vec{n}(\vec{n}\vec{r}) - \vec{r}], \qquad (1)$$

$\vec{n} = \vec{r}_{зл}/\vec{r}_{зл}$ — единичный вектор, направленный от центра Земли к центру Луны. Подставляя (1) в (1.1.2), получим уравнение $\Delta p = \rho\,\vec{g}\Delta\vec{r}$.

Представим правую часть в виде приращения некоторой функции. Учитывая, что

$$\vec{r}\Delta\vec{r} = r\Delta r = \Delta(r^2/2), \qquad \vec{r}\Delta\vec{r}/r^3 = -\Delta(1/r),$$
$$\vec{n}\Delta\vec{r} = \Delta\,\vec{n}\vec{r}, \quad \vec{n}\vec{r}\Delta\vec{n}\vec{r} = \Delta(\vec{n}\vec{r})^2/2,$$

получим давление

$$p(\vec{r})/\rho = Gm_з/r + (Gm_л/2r_{зл}^3)[3(\vec{n}\vec{r})^2 - r^2] + C. \qquad (2)$$

На поверхности океана давление равно $p_{атм}$. Следовательно, в точках a и b на поверхности океана (Дополнение I. Механика, рис. Д.11.4.1, Д.11.4.2) выполняются соотношения

$$Gm_з/r_a + Gm_л r_a^2/r_{зл}^3 + C = p_{атм}/\rho, \qquad Gm_з/r_b - Gm_л r_b^2/2r_{зл}^3 + C = p_{атм}/\rho.$$

Полагая $r_a - r_b \approx h$, $r_b \approx r_a \approx R$, находим $h = (3m_л/2m_з)(R/r_{зл})^3 R$. Подставляя числовые значения $m_з/m_л = 81{,}3$, $r_{зл}/R = 60{,}34$, $R = 6371$ км, получим $h = 0{,}535$ м. Такой же подъем воды произойдет у антиподов.

В действительности на высоту приливного выступа влияет и Солнце. Правда, величина силы притяжения Земли Солнцем составляет 0,466 величины силы притяжения Луной. В полнолуние и новолуние Солнце, Земля и Луна располагаются на одной прямой. В это время уровень прилива становится выше, а уровень отлива понижается. Такие приливы называются сигизийными. Благодаря

вращению Земли области приливного выступа и впадины поверхности воды перемещается. Однако в эстуарии – расширенном устье реки — высота прилива превышает иногда 12—15 м. У берегов восточной Канады в заливе Фанди высота прилива достигает 16 м. В эстуариях некоторых рек образуются приливные волны — боры — это масса воды, стеной обрушивающаяся в реку.

Сила трения, действующая со стороны воды на земную поверхность, приводит к торможению вращения Земли. Угловая скорость вращения уменьшается — продолжительность суток возрастает. Приливное воздействие Луны приводит также к деформации Земли как упругого тела. Когда-то породы Луны были в расплавленном состоянии. Приливное трение замедляло вращение Луны и теперь она обращена к Земле одной стороной.

Угловая скорость вращения Земли превышает угловую скорость Луны на орбите. Поэтому из-за трения приливный выступ достигает максимума не в точке на прямой, соединяющей центры Земли и Луны, а в точке, смещенной в направлении вращения Земли. Более того, из-за различия наклонов плоскости земного экватора (23°) и плоскости орбиты Луны (5°) к эклиптике, вращение Земли выносит приливный выступ из плоскости орбиты. Гравитационное взаимодействие Земли и Луны становится асимметричным относительно прямой, соединяющей их центры. В результате возникают моменты сил, действующих на оба тела. Кинетическая энергия вращения Земли переходит в тепло и полную энергию орбитального движения Луны — расстояние между Луной и Землей возрастает.

Глава 2. Капиллярные явления

2.2. Давление пара над мениском

В закрытом сосуде находится вода, в которую погружен капилляр (рис. 2.1.1). Краевой угол $\theta = \pi/2$, вогнутый мениск расположен на высоте $h = 2\alpha/(\rho g a)$ над плоской поверхностью. Система находится в состоянии теплового равновесия при температуре T значительно меньшей температуры кипения. Давление насыщенного пара над плоской поверхностью $p_{н0}$ и давление насыщенного пара на высоте h над мениском $p_н$ связаны соотношением $p_н = p_{н0} - \rho_{н0} g h$. Следовательно, давление насыщенного пара над вогнутым мениском $p_н = p_{н0} - 2\alpha\rho_{н0}/(\rho a)$ меньше, чем давление насыщенного пара над плоской поверхностью. Этот эффект можно использовать для осушения влажного воздуха. В силикагеле — пористом материале, состоящем из гранул SiO_2, смачиваемых водой, имеется капиллярная сеть. В результате проникновения пара в пространство между гранулами давление пара над силикагелем уменьшается в несколько раз.

Аналогичным путем можно найти давление насыщенного пара над выпуклым мениском $p_н = p_{н0} + 2\alpha\rho_{н0}/(\rho a)$ или над каплей. Этот результат позволяет понять процесс конденсации пара. Пусть капле радиусом a соответствует равновесное давление насыщенного пара $p_н$: $a = 2\alpha\rho_{н0}/[\rho(p_н - p_{н0})]$.

Для капель радиусом $a' < a$ давление $p_н'$ будет больше равновесного $p_н$, поэтому такие малые капли будут испаряться. Для капель радиусом $a' > a$ давление $p_н'$ меньше равновесного — капли будет расти, пока не достигнут размера, для которого равновесное давление становится практически равным $p_{н0}$. Однако, когда жидкая фаза отсутствует и пар хорошо очищен от пыли, то изотермически сжимая или охлаждая его при постоянном объеме можно получить переохлажденный, пересыщенный пар (с давлением большим $p_{н0}$), которому следовало бы стать жидкостью. Чем больше давление пересыщенного пара, тем меньше может быть размер капель для того, чтобы началась конденсация. Когда такие капельки образуются в результате флуктуаций, то начинается конденсация, давление уменьшается до значения $p_{н0}$ и система распадается на две фазы — жидкость и пар.

Глава 4.
Установившееся движение сплошной среды

Пример 4.3.2. Течение жидкости в трубе переменного сечения. Поток в виде прямолинейной струи со скоростью v_1 втекает в широкий участок трубы (рис. Д.4.3.2). Здесь на боковой поверхности струи развивается нерегулярное вихревое движение. Охватывающая струю жидкость постепенно захватывается, смешивается со струей и , наконец, поток становится однородным и движется со скоростью v_2. Подробная картина течения может быть рассчитана только на компьютере.

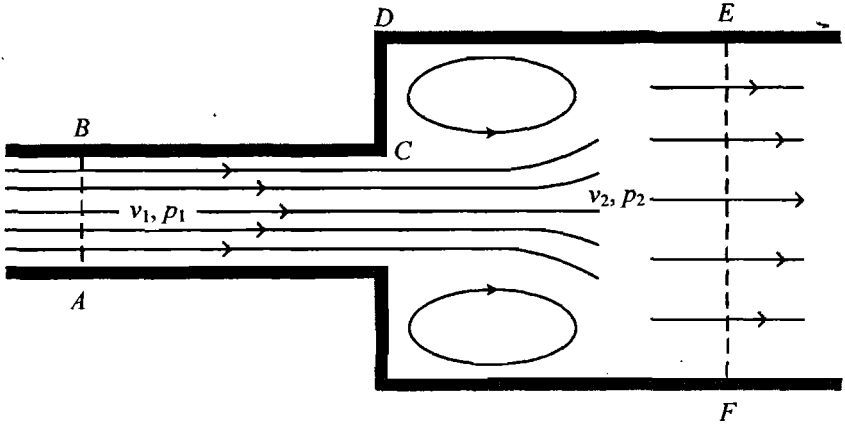


рис. Д.4.3.2

Возникает вопрос: можно ли что-нибудь сказать о давлении p_2 далеко вправо по потоку, зная давление p_1 слева в узкой трубе? Закон Бернулли здесь неприменим, поскольку в области расширения трубы происходит вих-

ревое перемешивание жидкости. Для решения поставленной задачи воспользуемся законом изменения импульса жидкости, протекающей через замкнутую неподвижную поверхность S. Представим ее в виде множества N элементарных плоских элементов площадью ΔS_k, ориентированных в направлении единичного вектора $\vec{n}_a$, направленного перпендикулярно поверхности наружу ($k = 1,2, \ldots N$). Пусть $\vec{v}_k$ — скорость жидкости в некоторой точке малого элемента ΔS_k. Пренебрегая касательными компонентами сил вязкости на стенках трубы, можно записать закон изменения импульса жидкости в виде

$$\sum_{k=1}^{N} \rho\vec{v}_k(\vec{n}_k\vec{v}_k)\Delta S_k = -\sum_{k=1}^{N} p_k \cdot \vec{n}_k \Delta S_k. \qquad (1)$$

Левая часть (1) пропорциональна приращению импульса жидкости, протекающей через поверхность S. Правая часть (1) пропорциональна импульсу сил давления, приложенных к поверхности жидкости со стороны окружающей ее среды.

Из уравнения непрерывности находим

$$v_1S_1 = v_2S_2, \qquad (2)$$

где S_1, S_2 — площади поперечных сечений узкой и широкой труб.

В качестве поверхности S выберем поверхность, ограниченную поперечными сечениями, отмеченным на рис. Д.4.3.2 штриховыми линиями, и стенками труб между этими сечениями.

Учитывая (2), запишем левую часть (1):

$$\rho v_2^2S_2 - \rho v_1^2S_1 = \rho v_2S_2(v_2 - v_1)$$

Поскольку на участках AB и CD поверхности S давление равно p_1, а на участке EF равно p_2, то правая часть (1) принимает вид

$$p_1S_1 + p_1(S_2 - S_1) - p_2S_2 = (p_1 - p_2)S_2.$$

Из (1) находим давление в области справа от расширения трубы

$$p_2 = p_1 + \rho v_2(v_1 - v_2), \text{ или } p_2 = p_1 + \rho v_1^2(S_1/S_2)(1 - S_1/S_2) \qquad (3)$$

Эту величину можно сравнить с давлением $p_{2Б}$ в случае плавного перехода от узкой к широкой трубе. Используя закон Бернулли, получим

$$p_{2Б} = p_1 + \rho(v_1^2 - v_2^2)/2 = p_1 + \rho v_1^2[1 - (S_1/S_2)^2]/2.$$

Следовательно,

$$p_2 = p_{2Б} + \Delta p, \quad \Delta p = -\rho v_1^2(1 - S_1/S_2)^2/2 < 0.$$

Таким образом, давление p_2 при внезапном расширении трубы меньше, чем при плавном расширении, на величину $\rho v_1^2(1 - S_1/S_2)^2/2$. Иначе говоря, мы можем утверждать, что при внезапном расширении трубы постоянная в правой части (4.4.1) уменьшается на величину $|\Delta p|$. Следовательно, вихреобразование, обусловленное силами вязкости приводят к уменьшению внутренней энергии единицы объема жидкости на величину $|\Delta p|$.

4.6.2. Движение воздуха в неинерциальной системе отсчета — на Земле. Горизонтальное движение воздуха. Движения воздуха по вертикали важны для обмена влагой и энергией между океаном и атмосферой. Движения воздуха, с которыми мы все знакомы, — ветры — в основном горизонтальны. В сентябре 1999 г. циклон, фронт которого составил почти 400 км, породил ураган «Флойд» самой высокой «категории пять». Скорость ветра превышала 250 км/час (≈ 690 м/с); 200 м он проходил за 1,44 с.

Пусть $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ — скорость малой частицы воздуха массой m объемом V. Согласно (1.1.2) сила, действующая частицу, равна

$$\vec{F} = -\vec{G}V, \quad \vec{G} = (\Delta p/\Delta x, \Delta p/\Delta y, \Delta p/\Delta z).$$

Из второго закона Ньютона найдем приращение скорости $\Delta\vec{v} = -\vec{G}\Delta t/\rho$. Следовательно, скорость ветра будет направлена из области с высоким давлением в область с низким давлением; в горизонтальной плоскости ветер будет дуть перпендикулярно кривым, соответствующим постоянным значениям давления; они называются *изобарами*. Однако на картах погоды видно, что скорость ветра направлена по касательным к этим кривым. Причина в том, что мы пренебрегли вращением Земли.

В 1835 г. французский физик Г.Г. Кориолис показал, что в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega}$, на частицу действует сила инерции $\vec{F}_K = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}$. Очевидно $\vec{v}\vec{F}_K = 0$.

Рассмотрим установившееся движение малой частицы воздуха с постоянной скоростью, пренебрегая силой вязкости. В этом случае

$$\vec{F} + \vec{F}_K + m\vec{g} = 0 \text{ или } -\vec{G} - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{v} + \rho\vec{g} = 0. \qquad (4.6.1)$$

Из (4.6.1) следует, что скалярное произведение $\vec{G}\vec{v} = 0$: ветер дует вдоль изобар.

Ветры в северном полушарии. Введем систему координат с началом в точке O на широте ϕ: ось z направим вертикально вверх, ось x — по меридиану к полюсу, ось y — на запад. Тогда $\vec{\Omega} = (\Omega\cos\phi, 0, \Omega\sin\phi)$, $\Omega = 7{,}3\ 10^{-5}$ с$^{-1}$. Из (4.6.1) находим

$$v_1 = -G_2/(2\rho\Omega\sin\phi), \quad v_2 = G_1/(2\rho\Omega\sin\phi).$$

Воздух, нагретый в тропиках, поднимается, затем движется к полюсам, охлаждается вследствие излучения и опускается к поверхности. В северном полушарии воздух достигает примерно *конских широт* $\phi \approx 30°$, при опускании адиабатически сжимается, нагревается и формирует область высокого давления. Достигнув поверхности, воздух растекается, образуя два потока направленных к югу и северу. В северном полушарии первый поток образует *пассаты* — ветры со скоростью 5-7,5 м/с занимают пояс между широтами 25 и 5° и дуют с севера-востока. Следовательно, в этой области $G_1 > 0$, $G_2 > 0$. На конских широтах расположена область с очень малыми скоростями ветра. Второй поток создает в поясе между широтами от 35 до 55° юго-западные ветры, порождаемых распределением давления $G_1 < 0$, $G_2 < 0$. На широте ~60° находится область низкого давления. Далее к северу от 65° и до полюса ветер дует с севера-востока.

Глава 5. Волновое движение в среде. Звук

5.5 Звуковые волны в трубах

Пример 5.5.4. Акустический резонатор Гельмгольца представляет собой сосуд объемом V с цилиндрическим горлышком длиной l и сечением S ($lS << V$).

В замкнутом сосуде наименьшая из собственных частот порядка величины c/L, где L — линейные размеры сосуда. При наличии же маленького отверстия в стенке сосуда появляется новый вид звуковых волн с собственной частотой $\nu << c/L$ и длиной волны $\lambda >> L$. Если дуть у горлышка бутылки, то можно услышать звук определенного тона. Колебания воздуха обусловлены тем, что при возбуждении разности давлений внутри и вне сосуда, появляется сила упругости, действующая на воздух в сосуде и горлышке. В результате действия этой силы воздух будет входить и выходить из сосуда наружу. Поскольку отверстие достаточно мало, то этот обмен происходит медленно. Поэтому период колебаний воздуха велик, а частота соответственно мала. Что же касается обычных собственных стоячих звуковых волн внутри замкнутого сосуда, то наличие малого отверстия практически не влияет на их параметры.

На элементарную массу Δm объемом ΔV, находящуюся в точке с координатами x,y,z, действует сила (1.1.2). Направим ось z наружу перпендикулярно плоскости поперечного сечения горлышка. Поскольку $\lambda >> L$, то зависимостью давления от координат в области трубки можно пренебречь. В этом случае $\Delta p/\Delta z \approx -p_s/l$, где $p_s(t) = p(t) - p_0$ — звуковое давление, p_0 — величина постоянного давления вне сосуда, $p(t)$ — давление внутри сосуда в некоторый момент времени.

Пусть u — проекция скорости малого элемента массы воздуха Δm, объемом ΔV. Тогда из второго закона Ньютона получим уравнение

$$(\Delta m)du/dt = -\Delta p/\Delta z(\Delta V) \quad \text{или} \quad \rho du/dt = -\Delta p/\Delta z. \tag{1}$$

Мы ограничимся рассмотрением движения воздуха в горлышке сосуда при малых отклонениях от равновесного состояния с давлением p_0 и плотностью ρ_0. Тогда в (1) можно положить $\rho \approx \rho_0$, $\Delta p/\Delta z \approx -p_s/l$. В этом случае уравнение движения приобретает вид

$$\rho_0 du/dt = p_s/l. \tag{2}$$

Приращения звукового давления Δp_s и плотности воздуха $\Delta\rho_s$ связаны соотношением

$$\Delta p_s = c^2\Delta\rho_s, \tag{3}$$

где c — скорость звука. С другой стороны приращение плотности воздуха в резонаторе $\Delta\rho_s = -S\rho_0 u\Delta t/V$. Переходя к пределу $\Delta t \to 0$ в (3) получим еще одно уравнение

$$dp_s/dt = -c^2 S\rho_0 u/V. \tag{4}$$

Из (2), (4) следует уравнение гармонических колебаний

$$d^2p_s/dt^2 + \omega_0{}^2 p_s = 0, \qquad \omega_0 = c[S/(lV)]^{1/2}. \tag{5}$$

Пусть в момент времени $t = 0$ звуковое давление $p_s(0) = 0$. Тогда решение (5) представляет собой функцию $p_s(t) = A\sin\omega_0 t$. Собственная частота колебаний давления $\nu_0 = (c/2\pi)[S/(lV)]^{1/2}$.

5.5.4. Эффект Доплера. Рассмотрим точечный излучатель звука, движущийся в безграничном пространстве по прямой $\vec{r}_c(t) = \vec{b} + \vec{u}t$ со скоростью $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Излучатель генерирует звук, который в виде сферической волны распространяется в пространстве (рис. Д.5.5.2). В точке с координатами $\vec{r} = (x, y, z)$ звуковое давление $p(t,\vec{r}) = (A/s)\cos\Phi$, где $\Phi(t,\vec{r}) = \omega t - \omega s/c$ — фаза волны, $s = |\vec{s}|$, $\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_c(t)$. Производная фазы $\omega_н = d\Phi/dt$ имеет смысл мгновенной частоты волны, принимаемой наблюдателем в точке $\vec{r} = (x, y, z)$. Учитывая, что $ds/dt = -\vec{s}\vec{u}/s$, получим $\omega_н(t,\vec{r}) = \omega(1 + \vec{n}\vec{u}/c)$, где $\vec{n} = \vec{s}/s$ — единичный вектор, перпендикулярный фронту волны.

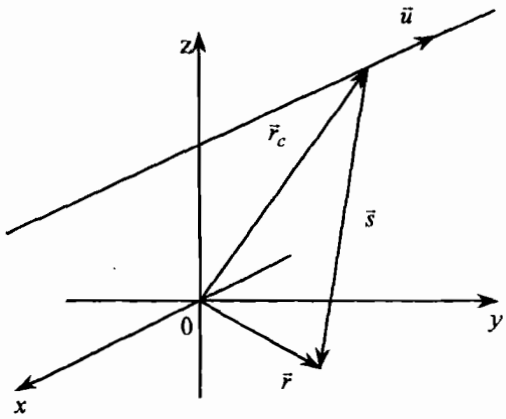


рис. Д. 5.5.2

При приближении источника к наблюдателю ($\vec{n}\vec{u} > 0$) частота принимаемой волны возрастает $\omega_н > \omega$. При удалении источника излучения ($\vec{n}\vec{u} < 0$) частота принимаемой волны $\omega_н < \omega$. Зависимость частоты звуковой волны, принимаемой наблюдателем, от относительной скорости наблюдателя и источника излучения была открыта в 1842 г. австрийским ученым Х. Доплером.

5.12. Летучие локаторы

В живой природе ультразвук генерируют летучие мыши. Сигналы соответствуют диапазону от 20 до 200 кГц. Анализируя отраженные сигналы, насекомоядные мыши могут в темноте определить расстояние до окружающих предметов, бабочек и насекомых, размеры и направление полета.

Амплитудный метод. Летучие мыши из семейства подковоносых (*Rhinolophus*) через ротовую щель издают звуки постоянной частоты в виде импульсов. Звуковая волна фокусируется в узкий пучок. Частота следования импульсов может изменяться от 10 до 200 Гц, а минимальная длительность $\tau = 0{,}5$ мс. Фиксируя время запаздывания отраженного сигнала, мышь может обнаружить комара на расстоянии $s = 18$ м.

Для того, чтобы поймать добычу — бабочку, подковонос использует эффект Доплера (п. 5.5.4). Пусть $\vec{r}_c(t)$, $\vec{r}_м(t)$ — радиус-векторы бабочки и мыши, скорость бабочки – $\vec{u}(t)$, скорость мыши — $\vec{v}(t)$. Фаза волны, отраженной от бабочки $\Phi(t, s) = \omega t - 2\omega s/c$, $s(t) = |\vec{s}(t)|$, $\vec{s}(t) = \vec{r}_м(t) - \vec{r}_c(t)$. Частота звуковой волны, принимаемой мышью $\omega_н(t) = d\Phi/dt$, $\omega_н(t) = \omega[1 + 2\vec{n}\vec{u}_0 / c]$, $\vec{n}(t) = \vec{s}/s$. Здесь $\vec{u}_0 = \vec{u} - \vec{v}$ — скорость бабочки относительно мыши (рис. Д.5.12.1).

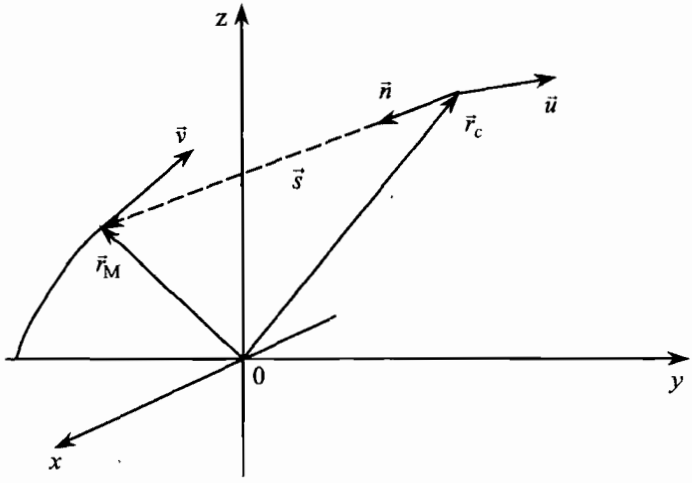


рис. Д. 5.12.1

Подковонос обладает способностью сравнивать частоту принимаемой волны с частотой излучаемого звука и корректировать направление полета. При скорости ~5 м/с мышь способна фиксировать разность частот меньшую, чем значение ~3ω/100. Мышь стремится лететь так, чтобы реализовать неравенство $\omega_н > \omega$, соответствующее сближению с целью. Если относительная скорость бабочки образует острый угол с вектором $\vec{n}$, то $\vec{n}\vec{u}_0 > 0$, $\omega_н > \omega$ — мышь догонит бабочку.

Частотный метод. Отраженный импульс несет информацию только о расстоянии до ближайшего из двух объектов, если они находятся на расстоянии Δs меньшем, чем $c\tau/2$; при $\tau = 1$ мс два объекта, расстояние между которыми $\Delta s \approx 17$см, будут восприниматься как один.

Рыжая вечерница, встречающаяся в Европе, использует частотный метод определения дальности и увеличения «глубины резкости». Он основан на использовании *частотной модуляции* излучаемого импульса звука. Расстояние до цели определяется в результате сравнения частоты излучаемого звука и частоты отраженной волны. На протяжении каждого излучаемого импульса звуковой «генератор» мыши уменьшает частоту по линейному закону $\omega(t) = \omega_0 - p(t - nT_m)$, $nT_m \le t \le (n+1)T_m$, $p = \Omega/T_m$, Ω — разность частот на границах импульса. График $\omega(t)$ изображен на рис. Д.5.8.2 сплошной линией. При уменьшении частоты от значения 100 кГц до 20 кГц в течение интервала $T_m \sim 2$ мс величина $p \sim 4\cdot10^7$ с$^{-2}$. Частота волны, отраженной от объекта на расстоянии s, изменяется по такому же закону, но только со сдвигом во времени: $\omega_{отр}(t) = \omega_0 - p(t - 2s/c)$ — через промежуток времени $t_s = 2s/c$ после начала импульса частота принимаемой отраженной волны имеет значение ω_0 и линейно уменьшается. На рис. Д.5.12.2 график $\omega_{отр}(t)$ — пунктирная линия. Разность частот

$\omega_р = \omega_{отр}(t) - \omega(t) = 2ps/c$ пропорциональна расстоянию s. Если отраженный импульс регистрировать в течение интервала времени T_m после излученного импульса, то эта система позволяет с высокой точностью измерять расстояния $s < 30$ см. Отражение импульса от двух объектов на расстояниях s_1 и $s_2 > s_1$ фиксируется как возрастание частоты по относительно частоты генератора на величины $2ps_1/c$ и $2ps_2/c$.

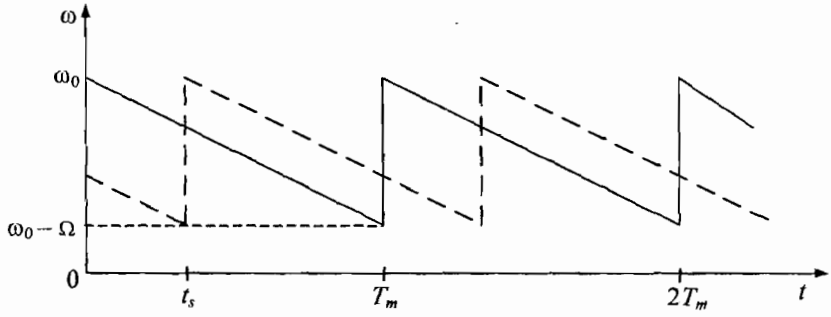


рис. Д.5.8.2

Однако многие насекомые и бабочки, пользуясь приемниками ультразвука, научились спасаться от мышей, маневрируя или включая активное глушение.

Дополнение IV. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 1. Электростатика

1.1. Закон Кулона

Задача 1.1.5. Заряд Q равномерно распределен по окружности радиусом R, расположенной в плоскости xy с центром в начале координат. С этой системой взаимодействует частица массой m, зарядом $q = -q_0$, которая может двигаться по оси z в окрестности начала координат. Найти частоту линейных колебаний частицы.

Решение. На частицу действует сила $\vec{F} = (0, 0, F_z)$, $F_z = -kq_0Qz/(z^2 + R^2)^{3/2}$. В окрестности начала координат $z << R$, $F_z \approx -kq_0Qz/R^3$. Согласно второму закону Ньютона $ma = -kq_0Qz/R^3$. Следовательно, квадрат частоты $\omega^2 = kq_0Q/mR^3$.

1.4. Проводники в электрическом поле

Пример 1.4.8. Найдем потенциал поля системы, создаваемый нейтральной металлической сферой радиусом R и зарядом Q, расположенным на расстоянии r от центра сферы (рис. 1.4.1).

Решение этой задачи впервые получил английский физик У. Томсон. Внутри и вне сферы поле представляет собой суперпозицию внешнего поля и поля, образованного зарядами, индуцированными на поверхности сферы. Найдем вначале потенциал сферы. Проще всего вычислить потенциал центра сферы. Он равен сумме потенциала kQ/r заряда Q и потенциала, созданного зарядами, наведенными на сфере вследствие электростатической индукции. Однако, поскольку общий заряд, наведенный на изолированной сфере равен нулю, то потенциал сферы $\varphi_i = kQ/r$.

Томсон предложил заменить реальное распределение зарядов двумя фиктивными точечными зарядами $\pm q$, которые вместе с зарядом Q создают искомое поле вне сферы. Величину и положение этих зарядов найдем из условия равенства нулю касательных к поверхности сферы компонент напряженности электрического поля. Это условие равносильно условию постоянства потенциала на поверхности сферы.

Предварительно отметим, что сфера представляет собой геометрическое место точек M, для которых отношение длин отрезков AM и NM постоянно, где A и N — произвольные точки. Поместим заряд q в центр сферы O, а заряд $-q$ в точку N на расстоянии $l = ON$ от центра сферы. Потенциал поля в произвольной точке P

$$\varphi(P) = \frac{kQ}{r_{AP}} - \frac{kq}{r_{NP}} + \frac{kq}{r_{OP}}, \qquad (1)$$

где r_{AP}, r_{NP}, r_{OP} — расстояния от зарядов Q, $-q$ и q до точки P. Поскольку потенциал любой точки сферы M равен kQ/r, то согласно (1) должны выполняться соотношения $Q/r_{AM} = q/r_{NM}$, $Q/r = q/R$. Отсюда находим $q = QR/r$. Отношение $r_{AM}/r_{NM} = r/R$, представляющее собой постоянную величину, выполняется при значении $l = R^2/r$. Следовательно, потенциал рассматриваемой системы

$$\varphi(P) = \frac{kQ}{|\vec{r}+\vec{x}|} - \frac{kQ}{|(R\vec{r}/r)+(r\vec{x}/R)|} + \frac{kQR}{r\,|\vec{x}|}.$$

Здесь $\vec{r}$ — вектор AO, $\vec{x}$ — вектор OP.

Теперь заземлим сферу, т. е. присоединим ее к нейтральному телу, содержащему большое число свободных электронов (рис. Д 1.4.1). Для этого достаточно прикоснуться к сфере пальцем. Потенциал Земли примем равным нулю. Тогда потенциалы любых точек на поверхности сферы и точек пространства внутри сферы равны нулю. Это означает, что электроны должны перейти на сферу и скомпенсировать положительный наведенный заряд q. На поверхности сферы индуцируется отрицательный заряд — q с центром распределения в точке N.

Приведем потенциал, создаваемый зарядом Q и заземленной сферой,

$$\varphi(P) = \frac{kQ}{r_{AP}} - \frac{kQR}{rr_{NP}} = \frac{kQ}{|\vec{r}+\vec{x}|} - \frac{kQ}{|(R\vec{r}/r)+(r\vec{x}/R)|}.$$

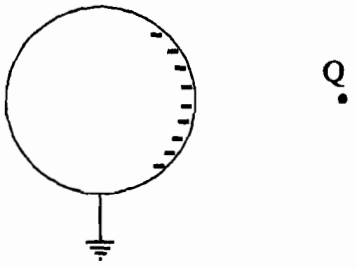


рис. Д. 1.4.1

Пример 1.4.9. Найдем силу, действующую на незаряженную сферу радиуса R, со стороны заряда Q. Расстояние от заряда до центра сферы равно r (рис. 1.4.1).

Вследствие электростатической индукции сфера приобретает дипольный момент $p = ql$, где l — расстояние между «центрами» наведенных положительного и отрицательного зарядов, $q = QR/r$, $l = R^2/r$, $p = QR^3/r^2$. Используя закон Кулона, находим $F_x = F_y = 0$,

$$F_z = -\frac{kQq}{r^2} + \frac{kQq}{(r-l)^2} = -\frac{kQql\ \ (2r-l)}{r^2(r-l)^2}.$$

На расстояниях $r >> R$, величина $l << r$. В этом случае

$$F_z \approx -\frac{2kQql}{r^3} = -\frac{2kQ^2R^3}{r^5}.$$

Пусть $Q = 10^{-7}$ Кл, $R = 1$ см, $r = 1$ м. Тогда величина силы притяжения, действующей на сферу, равна $1{,}8 \cdot 10^{-10}$ Н.

Компоненту силы F_z можно представить в виде $F_z = -\Delta W/\Delta r$, где $W(r)$ — потенциальная энергия взаимодействия заряда Q и сферы,

$$W(r) = -\frac{R^3E^2}{2k},$$

где $E = \dfrac{kQ}{r^2}$ — величина напряженности поля, создаваемого зарядом Q в центре сферы.

Взаимодействие зарядов на поверхности сферы приводит к возникновению сил, направленных по внешней нормали к поверхности и создающих «отрицательное» давление. В результате сфера деформируется.

1.4.5. Движение нейтральных частиц в неоднородном электрическом поле. Сила, действующая на металлическую сферу. На рис. 1.4.1 изображена система заряд-сфера. Используя результаты, полученные в п. 1.7.2, найдем энергию взаимодействия заряда и сферы $W(\vec{r}) = Q\varphi_0/2$, где $\varphi_0 = kq/r - kq/(r - l)$ — потенциал, создаваемый сферой в точке A, $\vec{r}$ — радиус-вектор с началом в точке A, $q = QR/r$, $l = R^2/r$. На расстояниях $r >> R$ потенциал $\varphi_0 \approx -kql/r^2 = -kQR^3/r^4$; энергия взаимодействия сферы с зарядом $W(\vec{r}) = -kQ^2R^3/2r^4$.

Отметим, что сфера приобретает наведенный дипольный момент $p = ql = QR^3/r^2$, который можно представить в виде $\vec{p} = \alpha V\vec{E}$, где $\vec{E} = kQ\vec{r}/r^3$ — напряженность электрического поля, создаваемого зарядом Q в центре сферы C, $V = 4\pi R^3/3$ — объем сферы, $\alpha = 3\varepsilon_0$ — *коэффициент поляризуемости сферы*. Следовательно, энергию взаимодействия можно представить в виде

$$W(\vec{r}) = -\alpha VE^2(\vec{r})/2, \qquad (1.4.1)$$

справедливом в произвольном квазинеоднородном поле. Сила, действующая на сферу

$$\vec{F} = (-\partial W/\partial x, -\partial W/\partial y, -\partial W/\partial z), \qquad (1.4.2)$$

где символы $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ — обозначают производные по координатам x, y, z.

1.5. Диэлектрики в электростатическом поле

Пример 1.5.2. Применим модифицированный закон Гаусса (1.5.2) для анализа поля в конденсаторе, заполненного диэлектриком. Направим ось z на рис. 1.5.1 от положительно заряженной пластины к пластине, заряженной

отрицательно. Цифрами 1, 2, 3 обозначены соответственно пластина, вакуумный промежуток и диэлектрик. Компоненты напряженности полей — $E_{1z} = 0$, $E_{2z} = E_0$, $E_{3z} = E$, компоненты вектора электрической индукции — $D_{1z} = 0$, $D_{2z} = \varepsilon_0 E_0$, $D_{3z} = \varepsilon\varepsilon_0 E$, вектор $\vec{P} = (0, 0, P)$ направлен по оси z.

А. Построим гауссову поверхность в виде куба, одна грань которого находится в вакууме, другая — в диэлектрике; граница раздела вакуум — диэлектрик находится внутри куба. Тогда на основании модифицированного закона Гаусса получим $D_{3z} - D_{2z} = 0$. Отсюда находим $E = E_0/\varepsilon$, $P = \alpha E_0$, $\alpha = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)/\varepsilon$ — коэффициент поляризуемости пластины. Поскольку $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, то $E_{3z} - E_{2z} = -P_{3z}/\varepsilon_0$. Следовательно, на границе раздела вакуум — диэлектрик возникает скачок нормальной компоненты напряженности поля: $E - E_0 = -P/\varepsilon_0$.

Отметим, что согласно закону Гаусса (1.3.1) правая часть должна быть равна $-(1/\varepsilon_0)\Delta q/\Delta S$, где Δq — величина поверхностного заряда диэлектрика. Следовательно, $P = \Delta q/\Delta S = \sigma_n$ — поверхностная плотность связанных зарядов.

Б. Построим гауссову поверхность в виде куба, одна грань которого находится в пластине, другая — в диэлектрике, содержащего границы разделов пластина — вакуум и вакуум — диэлектрик. Тогда на основании модифицированного закона Гаусса получим $D_{3z} = \sigma_0$, или $\varepsilon E = \sigma_0/\varepsilon_0$.

Пример 1.5.3. Диэлектрический шар в однородном электростатическом поле. Пусть напряженность внешнего поля — $\vec{E}_0$, потенциал внешнего поля $\varphi^{(0)} = -\vec{E}_0\vec{r}$. Во внешнем поле шар поляризуется. Найдем напряженность электрического поля внутри шара $\vec{E}^{(i)}$ и вне шара $\vec{E}^{(e)}$ в точке P, радиус-вектор которой $\vec{r} = (x, y, z)$ в системе координат с началом в центре шара.

В шаре возникают плотность поляризации $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}^{(i)}$ и определенное распределение плотности поверхностных зарядов. Вследствие поляризации диэлектрика напряженность поля в шаре $\vec{E}^{(i)} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$, где $\vec{E}'$ — постоянный вектор. Тогда внутри шара в области $|r| \le a$ потенциал поля $\varphi^{(i)}(\vec{r}) = \varphi^{(0)} - \vec{E}'\vec{r}$. Вторичное внешнее поле в области $|r| \ge a$ эквивалентно полю диполя. Поэтому потенциал поля вне шара $\varphi^{(e)}(\vec{r}) = \varphi^{(0)} + k\vec{p}\vec{r}/r^3$, $\vec{p} = \vec{P}V$ — дипольный момент шара, $V = 4\pi a^3/3$ — объем шара. В однородном поле $\vec{P} = \alpha\vec{E}_0$, $\vec{E}' = \beta\vec{E}_0$, где α, β — неизвестные постоянные коэффициенты. Радиус-вектор точки на поверхности шара $\vec{r} = a\vec{n}$, где $\vec{n}$ — единичный вектор. Из граничных условий непрерывности потенциала на поверхности шара найдем $-\vec{E}'\vec{n} = k\vec{p}\vec{n}/a^3$, или $\beta = -\alpha/3\varepsilon_0$. Следовательно,

$$\vec{E}' = -(\alpha/3\varepsilon_0)\vec{E}_0 = -\vec{P}/3\varepsilon_0, \quad \vec{E}^{(i)} = \vec{E}_0 - \vec{P}/3\varepsilon_0.$$

Подставляя вектор $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}^{(i)}$, получим

$$\vec{E}^{(i)} = 3\vec{E}_0/(\varepsilon + 2), \qquad \alpha = 3\varepsilon_0[(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)].$$

α называют *коэффициентом поляризуемости шара*. Вектор электрической индукции $D = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}^{(i)}$.

Энергия взаимодействия шара со слабонеоднородным полем $W(\vec{r}) = -\alpha V E_0^2(\vec{r})/2$.

1.5.4. Скачок нормальной компоненты напряженности электрического поля. Можно связать величину скачка нормальной компоненты напряженности электрического поля с микроскопической плотностью связанных зарядов в среде. Пусть первая область $z > 0$ представляет собой вакуум, а вторая область $z < 0$ заполнена веществом. Вектор $\vec{P} = (0, 0, P)$ в веществе постоянен и направлен по оси z. В качестве гауссовой поверхности выберем поверхность цилиндра, один торец которого находится в веществе, а другой — в вакууме. Плоскости торцов цилиндра площадью ΔS перпендикулярны оси z. Согласно закону Гаусса для поля в среде, имеем $(D_{1z} - D_{2z})\Delta S = 0$ или

$$(E_{1z} - E_{2z})\Delta S = \frac{P\Delta S}{\varepsilon_0}.$$

С другой стороны, согласно закону Гаусса (1.3.1), правая часть должна быть равна $\Delta Q/\varepsilon_0$, где ΔQ — поверхностный заряд. Следовательно, $P = \dfrac{\Delta Q}{\Delta S} = \sigma_n$ — поверхностная плотность связанных зарядов.

1.5.5. Сила, действующая на диэлектрик в электрическом поле. Во внешнем поле диэлектрическое тело приобретает дипольный момент, на который со стороны внешнего поля действует сила. В случае шара радиусом a дипольный момент $\vec{p} = \vec{P}V$,

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon - 1}{k(\varepsilon + 2)} a^3 \vec{E}_0,$$

где $\vec{E}_0$ — напряженность поля в центре шара. Если сферу на рис. 1.4.1 заменить шаром, то сила притяжения, действующая на шар,

$$F_z = p\frac{\Delta E_0}{\Delta r}, \quad E_0 = \frac{kQ}{r^2}.$$

1.5.6. Энергия электрического поля в диэлектрике. Диэлектрик находится в электрическом поле, создаваемом свободными зарядами q и $-q$ на пластинах конденсатора (рис. 1.6.2). Напряженность электрического поля $\vec{E} = (0, 0, -E)$.

Найдем элементарную работу $\delta A = dE\Delta Q$, совершаемую внешней силой при переносе заряда ΔQ с левой на правую пластину. Согласно закону Гаусса (1.5.2) электрическая индукция связана со свободным зарядом пластины соотношением, $\sigma = D : Q = \sigma S\,\Delta Q = S\Delta D$. Следовательно,

$$\delta A = E\Delta D(Sd). \qquad (1.5.3)$$

Поскольку $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, то $\delta A = \Delta U_d$, где

$$U_d = (\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2)(Sd) = (\vec{E}\vec{D}/2)(Sd) \qquad (1.5.4)$$

энергия электрического поля в диэлектрике. Очевидно $\varepsilon_0 E\Delta P(Sd)$ — элементарная работа, необходимая для создания приращения плотности дипольного момента на ΔP.

Найдем теперь приращение плотности внутренней энергии диэлектрика, внесенного во внешнее поле напряженностью $\vec{E}_0$. Напряженность поля в диэлектрике $\vec{E}^{(i)}$, электрическая индукция $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}^{(i)} = \varepsilon_0\vec{E}_0$, плотность дипольного момента $\vec{P} = \varepsilon_0(\vec{E}_0 - \vec{E}^{(i)})$. Приращение плотности внутренней энергии

$$\Delta u_d = \frac{1}{2}\vec{E}^{(i)}\vec{D} - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}_0(\vec{E}^{(i)} - \vec{E}_0) = -\frac{1}{2}\vec{P}\vec{E}_0.$$

Подставляя значение $\vec{P}$, получим $\Delta u_d = -\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_0^2/2\varepsilon$.

Глава 3. Магнитное поле

3.1. Магнитная индукция. Силы Лоренца и Ампера

3.1.4. Заряженная частица в электромагнитном поле. Эксперимент Томсона. В 1897 г. Дж.Дж. Томсон впервые определил природу катодных лучей и показал, что они представляют собой поток частиц с наибольшим значением отношения заряда к массе e_0/m — электронов. Пучок электронов влетает в конденсатор, представляющий собой две параллельные, горизонтально расположенные пластины длиной l, помещенные в катодную трубку. В конце трубки на расстоянии s от пластин расположен экран, покрытый сернистым цинком.

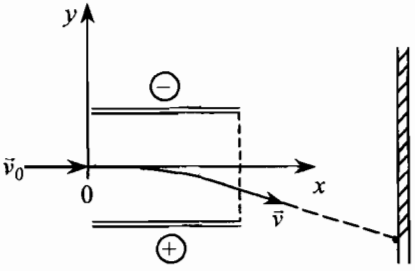


рис. Д. 3.1.1

Введем систему координат с направленной горизонтально осью x, ось y направим по вертикали вверх, начало координат поместим на входной плоскости конденсатора на равных расстояниях от пластин (рис. Д.3.1.1).

Напряженность электрического поля в конденсаторе $\vec{E} = (0, E, 0)$. Начальные условия $\vec{r}(0) = 0$, $\vec{v}(0) = (v_0, 0, 0)$.

В области $0 \le x \le l$ скорость электрона $\vec{v}(t) = \left(v_0, -\frac{e_0 Et}{m}, 0\right)$. В момент вылета из конденсатора $t_1 = l/v_0$ компонента скорости $v_y(t_1) = -\frac{e_0 El}{mv_0}$. Далее электрон движется по прямой с постоянной скоростью в интервале времени s/v_0. Величина отклонения по оси y равна $\Delta y = -h$, $h = \frac{e_0 Els}{mv_0^2}$.

Неизвестную скорость электрона v_0 можно исключить, помещая конденсатор в магнитное поле индукцией $\vec{B} = (0, 0, B)$. Теперь уравнения движения приобретают вид

$$m\frac{dv_x}{dt} = -e_0 Bv_y, \quad m\frac{dv_y}{dt} = -e_0 E + e_0 Bv_x, \quad m\frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $z(t) = 0$. Первое уравнение можно представить как полную производную

$$\frac{d}{dt}(mv_x + e_0 By) = 0, \text{ или } mv_x + e_0 By = const.$$

Согласно начальным условиям const $= v_0$. Подставляя v_x во второе уравнение, находим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{1}{m}(-e_0 E + e_0 Bv_0).$$

Индукция магнитного поля может быть выбрана так, что электроны в скрещенном электрическом и магнитном полях будут двигаться по прямой линии. Это произойдет при условии $E = Bv_0$. Тогда мы получим уравнение гармонического осциллятора, решение которого при начальных условиях нашей задачи $y(t) = 0$. Следовательно, $x(t) = v_0 t$. Отношение e_0/m принимает вид

$$\frac{e_0}{m} = \frac{Eh}{lsB^2}.$$

В опыте Томсона $E = 10^4$ В/м, $B = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$ Тл, $l = 0{,}05$ м, $s = 1{,}1$ м, $h = 0{,}1$ м.

Разделение изотопов. Если в рассмотренной системе движутся не электроны, а ионы изотопов некоторого элемента, то появляется возможность пространственного разделения ионов различной массы. После выхода из системы ионы направляют во второе магнитное поле индукцией $\vec{B}_2 = (0, 0, b)$. Ион массой m описывает полуокружность радиусом $R = \frac{mE}{qBb}$ и попадает на

фотопластинку. Массы ионов $m_a = R_a \dfrac{qBb}{E}$ пропорциональны радиусу описываемой окружности.

3.2.6. Магнитное поле объемного распределения тока. Закон Био-Савара представляет собой частный случай общего решения уравнений Максвелла. Пусть $\vec{j}\,(t, x, y, z)$ — плотность тока в среде объемом V. Если пренебречь магнитными свойствами среды (см. п. 5.5), то в точке $P(x, y, z)$ с радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$ вектор магнитной индукции можно представить в виде интеграла по объему

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = (\mu_0/4\pi)\int_V dV'\cdot\vec{j}(t,r')\times\vec{R}/R^3 .$$

где $\vec{r}'$ — вектор, проведенный из начала координат в точку окрестности элементарного объема dV', $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. В частности, при вращении сферы радиусом R, заряженной до потенциала V, следует заменить $\vec{j}dV$ на $\sigma(\vec{\omega}\times\vec{r}\,)dS$, где $\vec{\omega}$ — угловая скорость тела, $\sigma = \varepsilon_0 V/R$ — поверхностная плотность заряда, dS — площадь элементарной площадки на поверхности.

Рассмотрим два примера.

А. Магнитное поле, создаваемое свободными зарядами. Заряд q движется по прямой $\vec{r}(t) = \vec{b} + \vec{v}t$, вектор $\vec{b}$ перпендикулярен $\vec{v}$: $\vec{b}\vec{v} = 0$. Плотность тока не равна нулю только в одной точке $\vec{r}' = \vec{r}(t)$. Поэтому магнитная индукция

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = (q\mu_0/4\pi)(\vec{v}\cdot\vec{R}_v)/R_v^3,\ \vec{R}_v = \vec{r} - (\vec{b} + \vec{v}t).$$

В начале координат $\vec{B}\,(t, 0) = (q\mu_0/4\pi)(\vec{b}\times\vec{v}\,)/R_v^3$, $R_v = [b^2 + (vt)^2]^{1/2}$.

Б. Магнитное поле, создаваемое связанными зарядами. Если поляризационные заряды диэлектрика перемещаются, то возникает электрический ток, который является источником магнитного поля. В этом случае плотность тока $\vec{j} = d\vec{P}/dt$, где $\vec{P}$ — плотность дипольного момента.

3.3. Закон Максвелла-Ампера

Пример 3.3.2. По длинной трубке протекает ток силой I. Внешний и внутренний радиусы трубки $r_{2,1} = a \pm d/2$, толщина стенки $d << a$. Найдем давление, создаваемое магнитным полем, и напряжение в продольном сечении трубки.

Из закона Максвелла-Ампера следует, что внутри трубки магнитное поле отсутствует. Силовые линии магнитной индукции в металле образуют концентрические окружности с центром на оси трубки. Величина индукции на расстоянии r от оси

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} .$$

Полагая $r = a$, $r_{2,1} = a \pm d/2$, получим

$$B(a) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a}.$$

Теперь рассмотрим элементарный проводник — участок трубки толщиной d, длиной h вдоль образующей, ограниченный дугой $\Delta l = a\Delta\theta$, $\Delta\theta << 1$ (рис. Д.3.3.2). Площадь поверхности $\Delta S \approx h\Delta l = ha\Delta\theta$. Сила тока, текущего по проводнику

$$Ida\frac{\Delta\theta}{\pi\ (r_2^2 - r_1^2)} \approx I\frac{\Delta\theta}{2\pi}.$$

На проводник действует сила Ампера, направленная перпендикулярно поверхности трубки; величина силы

$$\Delta F = \frac{I\Delta\theta}{2\pi}hB.$$

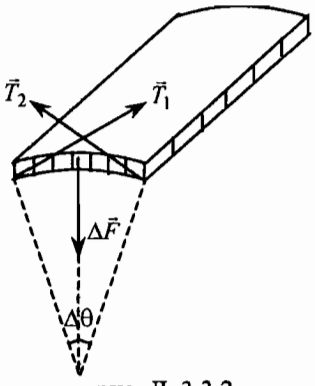


рис. Д. 3.3.2

Давление, создаваемое магнитным полем,

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{IB}{2\pi a} = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I}{2\pi a}\right)^2$$

можно представить в виде $p = 2B^2/\mu_0$.

На выделенную полоску со стороны остальной части оболочки действуют силы упругости $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ одинаковой величины ($T_1 = T_2 = T$). Силы упругости распределены по двум поверхностям продольных сечений трубки. Поскольку сумма сил, действующих на полоску равна нулю, то $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \Delta\vec{F} = 0$. Отсюда находим

$$T = \frac{\Delta F}{\Delta\theta}, \quad T = \mu_0\frac{h}{2a}\left(\frac{I}{2\pi}\right)^2.$$

Напряжение, возникающее в продольном сечении трубки $\sigma_{пр} = T/S$, где $S = hd$ — площадь поперечного сечения. Следовательно,

$$\sigma_{пр} = \frac{\mu_0}{2ad}\left(\frac{I}{2\pi}\right)^2.$$

Оцените значение силы тока, при котором медная трубка сплющится.

Глава 4. Магнитные свойства вещества

4.1. Диамагнетики и парамагнетики

Пример 4.2.1. Металлический шар радиуса a находится во внешнем магнитном поле индукцией $\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}_0$. Во внешнем поле шар намагничивается — в шаре возникают постоянная плотность магнитного момента $\vec{M} = (\mu - 1)\vec{H}^{(i)}$ и определенное распределение плотности поверхностных

токов $\vec{i}$. Найдем индукцию и напряженность магнитного поля внутри шара $\vec{H}^{(i)}$ и вне шара $\vec{H}^{(e)}$ в точке, радиус-вектор которой $\vec{r} = (x, y, z)$ в системе координат с началом в центре шара.

Внутри шара в области $|\vec{r}| \le a$ вследствие намагниченности вещества напряженность поля $\vec{H}^{(i)} = \vec{H}_0 + \vec{H}'$, где $\vec{H}'$ — напряженность поля, создаваемого намагничиванием. Индукция магнитного поля $\vec{B}^{(i)} = \mu_0\mu\,\vec{H}^{(i)}$. Вторичное внешнее поле в области $|\vec{r}| \ge a$ эквивалентно полю магнитного диполя, магнитный дипольный момент которого $\vec{p}_m = 4\pi a^3\vec{M}/3$. Поэтому напряженность поля вне шара

$$\vec{H}^{(e)} = \vec{H}_0 + \frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{p}_m) - \vec{p}_m}{4\pi r^3}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Индукция магнитного поля вне шара $\vec{B}^{(e)} = \mu_0\vec{H}^{(e)}$. В однородном внешнем магнитном поле $\vec{M} = \alpha\vec{H}_0$, $\vec{H}' = \beta\vec{H}_0$. Плотность магнитного момента найдем из условия равенства нормальных компонент векторов $\vec{B}^{(i)} = \mu\mu_0\vec{H}^{(i)}$, $\vec{B}^{(e)}$ или касательных компонент векторов $\vec{H}^{(i)}$, $\vec{H}^{(e)}$ на поверхности шара. Пусть $\vec{e}$ — единичный вектор, касательный к поверхности шара. Тогда из условия $\vec{e}\vec{H}^{(i)} = \vec{e}\vec{H}^{(e)}$ получим значение $\vec{e}\vec{H}' = -\vec{e}\vec{p}_m/4\pi a^3$ или $\beta = -\alpha/3$. Следовательно,

$$\vec{H}' = -(\alpha/3)\vec{H}_0 = -\vec{M}/3, \quad \vec{H}^{(i)} = \vec{H}_0 - \vec{M}/3.$$

Подставляя $\vec{M} = (\mu - 1)\vec{H}^{(i)}$, находим

$$\vec{H}^{(i)} = \frac{3}{\mu+2}\vec{H}_0, \quad \vec{M} = \alpha\vec{H}_0, \quad \alpha = \frac{3(\mu-1)}{\mu+2}.$$

Очевидно, векторы индукции и намагниченности связаны соотношением $\vec{M} = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{\vec{B}^{(i)}}{\mu_0}$. Касательные компоненты магнитной индукции имеют разрыв на поверхности шара. Величина скачка индукции связана с вектором плотности поверхностного тока соотношением $\mu_0\vec{i} = (B^{(i)} - B^{(e)}) \times \vec{n}$. Подставляя значение $B^{(i)} - B^{(e)}$ получим $\vec{i} = \alpha\vec{H}_0 \times \vec{n}$ или $\vec{i} = \vec{M} \times \vec{n}$.

В идеально проводящем диамагнетике $\mu = 0$. Следовательно, $\vec{B}^{(i)} = 0$, $\vec{H}^{(i)} = -\vec{M}$. Учитывая, что на поверхности идеального проводника напряженность магнитного поля имеет только тангенциальные компоненты, получим эквивалентное условие $\vec{M} = -3\vec{H}_0/2$. Очевидно, намагниченность испытывает разрыв на поверхности шара.

Пример 4.2.2. Энергия магнитного поля магнетика. Пусть намагничиваемое тело представляет собой тороид — тонкий «бублик». Длина осевой окружности бублика — l, площадь поперечного сечения — S. На поверхность тороида навита обмотка, имеющая N витков. Сопротивление обмотки — R. Обмотка присоединена к генератору напряжения с ЭДС равной ε.

Вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$, создаваемого током в обмотке, направлен по касательной к осевой окружности, индукция магнитного поля в тороиде $\vec{B}$. Согласно закону Ома

$$IR = \varepsilon - d\Phi/dt, \qquad (1)$$

где $\Phi = BNS$ — поток магнитной индукции через поперечное сечение тороида. Из (1) следует закон сохранения $\varepsilon I = I^2R + Id\Phi/dt$, который представим в виде

$$\varepsilon\Delta q = \delta Q + INS\Delta B, \qquad (2)$$

где $\delta Q = I^2R\Delta t$ — элементарное количество джоулева тепла. Исключим из (2) силу тока, используя закон Максвелла — Ампера, $Hl = NI$:

$$\varepsilon\Delta q = \delta Q + VH\Delta B, \qquad (3)$$

где $V = Sl$ — объем тороида. Последнее слагаемое в (2) — элементарная работа $\delta A_н = VH\Delta B$ по намагничиванию магнетика. В ферромагнетике величина индукции представляет собой функцию величины напряженности поля: $B = f(H)$. Поэтому работа внешнего генератора, необходимая для перемагничивания ферромагнетика, равна площади, ограниченной петлей гистерезиса на рис. 3.4.1. В ограниченной области изменения H работа $\delta A_н \approx \Delta W$, где $W = VHB/2$ — энергия магнитного поля в магнетике. В общем случае $\delta A_н = V\vec{H}\Delta\vec{B}$. Подставляя $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, получим

$$\delta A_н = \mu_0 V\vec{H}\Delta\vec{H} + \mu_0 V\vec{H}\Delta\vec{M} = \mu_0 V\Delta(\vec{H}^2/2) + \mu_0 V\vec{H}\Delta\vec{M}. \qquad (4)$$

Первое слагаемое в (4) представляет собой работу, необходимую для создания поля $\vec{H}$ независимо от наличия ферромагнетика. Следовательно, второе слагаемое $\mu_0\vec{H}\Delta\vec{M}$ — работа, необходимая для приращения намагниченности $\vec{M}$ на $\Delta\vec{M}$.

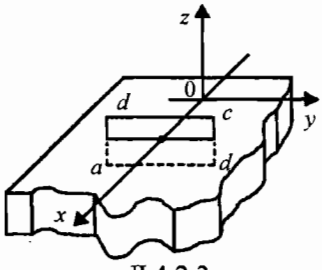


рис. Д.4.2.3 а

Пример 4.2.3. Отметим, что для вещества произвольного состава величина $\mu_0\vec{H}$ связана с током проводимости законом Ампера (4.1.2). Пусть полупространство $z > 0$ представляет собой вакуум с $\vec{M}_1 = 0$, а область $z < 0$ заполнена средой с постоянной намагниченностью $\vec{M}_2 = (0, M, 0)$ (рис. Д.4.2.3 *а*).

Выберем поверхность в виде прямоугольника $abcd$, охватывающего среду и вакуум, со сторонами ab и cd, параллельными оси y и сторонами bc и da, параллельными оси z. Если в контуре $abcd$ длины сторон bc и da устремить к нулю, то согласно закону Максвелла-Ампера получим

$$\mu_0 H_{2y} - \mu_0 H_{1y} = 0, \quad \text{или} \quad B_{2y} - B_{1y} = \mu_0 M.$$

На поверхности раздела двух сред возникает скачок тангенциальной компоненты индукции поля.

Покажем, что намагниченность M связана с током, текущим по поверхности раздела xy в направлении оси x, хотя внутри самого вещества плотность тока равна нулю. На рис. Д.4.2.3 *б* изображено распределение токов, удовлетворяющих этому условию; здесь показано сечение среды в плоскости xz, $z < 0$. Сечение разбито на элементарные ячейки-атомы или молекулы; внутри каждой циркулирует ток, создавая магнитный момент. Суммарный ток на границах, разделяющих ячейки, равен нулю, т. к. токи взаимно компенсируют друг друга. Однако на поверхности $z = 0$ такая компенсация отсутствует и поэтому существует поверхностный ток в x-направлении.

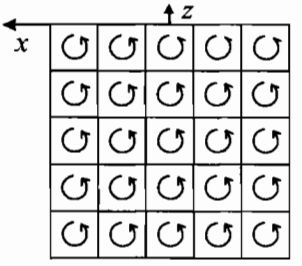


рис. Д.4.2.3 б

Плотность поверхностного тока i определяет заряд, протекающий в единицу времени через единицу длины прямой, проведенной на поверхности параллельно оси y. Сила тока, протекающего по полоске шириной Δy, равна $I = i\Delta y$. Поэтому магнитный момент, приобретаемый элементарным объемом, $M\Delta x\Delta y\Delta z = I\Delta x\Delta z$. Следовательно, $M = i$. Теперь полученное выше соотношение можно написать в векторном виде как $\vec{i} = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \times \vec{n}$, где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали, направленный от среды 2 к среде 1.

Величину тангенциального скачка магнитной индукции можно связать с микроскопической плотностью тока в среде $j(x, y, z) = (j, 0, 0)$. Обозначим длину отрезка $ab = \Delta y$. Тогда имеем соотношение $(B_{2y} - B_{1y})\Delta y = \mu_0 M\Delta y$. С другой стороны, согласно закону Максвелла-Ампера (3.3.1), вклад плотности микроскопических токов в правую часть должен быть равен $\mu_0 i\Delta y$, где I — поверхностная плотность тока. Следовательно, $M = i$, $B_{2y} - B_{1y} = \mu_0 i$.

Глава 5. Электрический ток в различных средах

5.3.4. Триод

Пример 5.3.6. Усилитель на вакуумном триоде. Упрощенная схема усилительного каскада показана на рис. Д.5.3.6: ЭДС батарей $\varepsilon_a = 100$ В, $\varepsilon_c = 3$ В, сопротивление нагрузки $R = 6$ кОм. Роль батареи ε_c состоит в том, чтобы сдвинуть рабочую точку в область отрицательных значений напряжения, где кривые $I = F(V_a, V_c)$ при $V_a = \text{const}$ с достаточной точностью параллельны. На

сетку триода, кроме напряжения смещения, подается переменное напряжение сигнала $\varepsilon(t)$. Напряжение на нагрузке должно быть во много раз больше $\varepsilon(t)$.

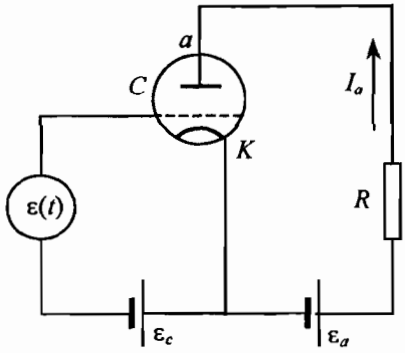


рис. Д.5.3.6

Из второго закона Кирхгофа следуют два уравнения

$$V_c = \varepsilon(t) - \varepsilon_c, \quad V_a + I_a R = \varepsilon_a, \qquad (1), (2),$$

к которым следует добавить характеристику триода

$$I = F(V_a, V_c). \qquad (3)$$

Определим вначале положение рабочей точки V_{a0}, V_{c0}, разрешая уравнения

$$V_{c0} = -\varepsilon_c, \quad V_{a0} + I_{a0}R = \varepsilon_a, \quad I_{a0} = F(V_{a0}, V_{c0}). \qquad (4)$$

Переходя к новым переменным $V_a = V_{a0} + u_a$, $V_c = -\varepsilon_c + u_c$, $I_a = I_{a0} + i_a$, получим из (1)-(4) систему уравнений

$$u_c = -\varepsilon(t), \quad u_a = -i_a R, \qquad (5), (6),$$

$$i_a = F(V_{a0} + u_a, V_{c0} + u_c) - F(V_{a0}, V_{c0}). \qquad (7)$$

Для малых сигналов $|u_c| << |V_{c0}|$, $|u_a| << V_{a0}$, можно представить (7) в виде

$$i_a = S_0 u_c + u_a/R_i, \qquad (8)$$

где S_0 — *статическая крутизна характеристики* триода, определяемая соотношением

$$S_0 = \Delta F/\Delta V_c, \quad V_a = V_{a0},$$

R_i — *внутренее сопротивление* триода, которое определяется по семейству сеточных характеристик

$$1/R_i = \Delta F/\Delta V_a, \qquad V_c = V_{c0}.$$

Например, при $V_{a0} = 200$ В, $V_{c0} = 2{,}5$ В, $\Delta I = 4$ мА крутизна $S_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ Ом, $R_i = 10$ кОм. Из (8) можно получить параметр, характеризующий эффективность воздействия на анодный ток приращений анодного и сеточного напряжений — *статический коэффициент усиления.* Эта характеристика триода пока-

зывает, во сколько раз приращение анодного напряжения должно быть больше приращения сеточного напряжения при приращении силы тока на одинаковую величину. Обозначая коэффициент усиления буквой μ, получим $\mu = S_0R_i$. В рассмотренном выше случае $\mu = 16$.

Подставляя (5), (6), в (8), находим переменное напряжение на нагрузке

$$u_a(t) = k\varepsilon(t),\ k = \mu R/(R + R_i),$$

где k — коэффициент усиления по напряжению, $k = 6$. Отметим, что (8) можно представить в виде $\mu u_c = i_a(R_i + R)$ — триод эквивалентен генератору тока с ЭДС равной μu_c и внутренним сопротивлением R_i.

Глава 7. Электромагнитная индукция

7.3. Универсальный закон электромагнитной индукции

Пример 7.3.6. Космическая электростанция. Запишем систему уравнений, определяющих динамику тросовой системы. Рассмотрим ограниченную задачу, предполагая, что трос находится на прямой, проходящей через центр Земли. Положение троса задается вектором $\vec{l}$ — направленным отрезком A_1A_2 (см. рис. 7.3.4). Пренебрегая неоднородностью поля тяжести в области размерами $\sim l$, запишем силу притяжения в виде

$$\vec{F} = -\frac{mga^2}{r^3}\vec{r},$$

где m — масса спутников, $\vec{r} = (x, y, 0)$ — радиус-вектор центра масс с началом в центре Земли. Сила сопротивления, действующая на связку в верхних слоях атмосферы, $\vec{F}_c = -k\rho(r)S v\vec{v}$. Здесь S — общая площадь сечения спутников в плоскости перпендикулярной скорости, $\rho(r)$ — плотность воздуха, k — коэффициент порядка единицы. На трос действует также сила Ампера

$$\vec{F}_A = I\vec{l} \times \vec{B}(r),$$

где I — сила тока, протекающего через трос. Из второго закона Ньютона получим уравнение движения центра масс связки

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mga^2\frac{\vec{r}}{r} - S\rho(\vec{r})v\vec{v} + I\vec{l} \times B(\vec{r}) \qquad (1)$$

Полная система, содержащая три неизвестных функции x, y и I, должна быть дополнена уравнением, следующим из закона Ома и (7.3.4)

$$IR = \varepsilon + \vec{v} \times \vec{B}(r)\vec{l}, \qquad (2)$$

где R — полное сопротивление электрической цепи.

Запишем теперь закон сохранения энергии. С этой целью образуем скалярное произведение (1) с $\vec{v}$, затем умножим (2) на I и сложим полученные выражения. В результате находим

$$\frac{dE}{dt} = -S\rho(r)v^3 + I\varepsilon - I^2 R, \tag{3}$$

где $E(t) = \frac{mv^2}{2} - mg\frac{a^2}{r}$ — полная энергия.

Предположим, что при отсутствии сопротивления атмосферы и тока через трос центр масс движется по окружности радиусом r с местной первой космической скоростью $v = \sqrt{ga^2/r}$. Рассмотрим далее движение центра системы со скоростью $v(t)$ по некоторой спиралеобразной траектории близкой к окружности радиусом $r(t)$, где $v(t)$ и $r(t)$ удовлетворяют тому же соотношению $v^2 = ga^2/r$. Тогда $E(t) = -mv^2/2$, а из (2) следует уравнение

$$IR = \varepsilon - vB(r)l \tag{4}$$

Подставляя $E(t)$ в (3), имеем

$$mv\frac{dv}{dt} = S\rho(r)v^3 - I\varepsilon + I^2 R. \tag{5}$$

Исключая I из (5), получим уравнение

$$m\frac{dv}{dt} = S\rho(r)v^2 + \mathrm{B}^2(r)\mathrm{l}^2\frac{\mathrm{v}}{R} - B(r)l\frac{\varepsilon}{R}, \tag{6}$$

из которого следует, что при $\varepsilon = 0$ величина скорости растет, хотя сила сопротивления и сила Ампера направлены в сторону противоположную вектору скорости $\vec{v}$. Действие этих сил приводит к уменьшению высоты полета связки. Полная энергия согласно (3) убывает. Подставляя в (6)

$$v = v_1\sqrt{\frac{a}{r}}, \quad \frac{dv}{dt} = \left(\frac{a}{r}\right)^{3/2}\frac{v_1}{2a}\frac{dr}{dt},$$

получим уравнение для определения функции $r(t)$.

Пример 7.3.7. Обруч радиусом a катится без проскальзывания по горизонтальной шероховатой плоскости с постоянной угловой скоростью ω. Часть дуги обруча AMC, стягивающая центральный угол α, представляет собой тонкий проводник. Найдем разность потенциалов точек A и C при движении обруча в однородном магнитном поле.

Введем систему координат xyz с горизонтально направленной осью x, ось y направим вертикально вверх (рис. Д.7.3.6). В этой системе угловая скорость $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, скорость центра обруча $\vec{u} = (-\omega a, 0, 0)$. Ориентацию обруча зададим углом $\varphi = \omega t$ между осью x и прямой, проходящей через центр обруча O и середину дуги M.

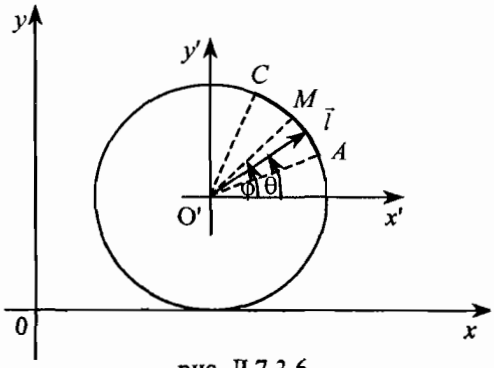


рис. Д.7.3.6

А. Пусть индукция магнитного поля $\vec{B} = (0, 0, B)$. Для вычисления ЭДС индукции (7.3.3) введем переменную θ — угол между осью x и вектором $\vec{l}$, соединяющим центр обруча с элементом дуги dl. Тогда

$$\vec{l} = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0), \quad d\vec{l} = (-\sin\theta\, ad\theta, \cos\theta\, ad\theta, 0).$$

Скорость элемента дуги $\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega}\times\vec{l}$, двойное векторное произведение $(\vec{\omega}\times\vec{l})\times\vec{B} = \vec{l}(\vec{B}\vec{\omega}) - \vec{\omega}(\vec{B}\vec{l})$.

Поскольку $\vec{l}d\vec{l} = 0$, $\vec{B}\vec{l} = 0$, $\vec{u}\times\vec{B} = (0, \omega aB, 0)$, то

$$(\vec{v}\times\vec{B})d\vec{l} = (\vec{u}\times\vec{B})d\vec{l} = \omega a^2 B\cos\theta\, d\theta.$$

Из (7.3.3) находим

$$\varepsilon = \omega a^2 B \int_{\varphi-\frac{\alpha}{2}}^{\varphi+\frac{\alpha}{2}} d\theta\cos\theta = 2\omega a^2 B\ \sin\frac{\alpha}{2}\ \cos\varphi.$$

Б. Покажите, что разность потенциалов точек A и C при движении в магнитном поле индукцией $\vec{B} = (0, B, 0)$ равна нулю.

Пример 7.3.8. Два гладкие параллельные металлические полосы, расположенные в горизонтальной плоскости на расстоянии h друг от друга, соединены перемычкой OC, содержащей резистор сопротивлением R (рис. Д.7.3.8). По полосам как направляющим может перемещаться проводник. Вся система находится в магнитном поле, создаваемом током силой I_0 в длинном проводе, находящимся в горизонтальной плоскости на расстоянии s от OC. Масса проводника — m. Найдем зависимость скорости проводника от x-координаты.

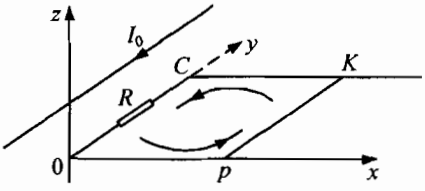


рис. Д.7.3.8

Обозначим x-координату центра масс проводника. Положительное направление на контуре ОРКС изображено стрелкой на рис. Д.7.3.8. Ток в длинном проводе создает в полуплоскости x>0 магнитное поле индукцией $\vec{B}$ = (0, 0, B),

$$B(x) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(s+x)}.$$

Сила Ампера, действующая на проводник и приращение магнитного потока

$$F_x = \frac{\mu_0 I_0 I h}{2\pi(s+x)}, \qquad \Delta\Phi = \frac{\mu_0 I_0 h}{2\pi(s+x)}\Delta x.$$

Из второго закона Ньютона и закона Ома получим уравнения

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 I h}{2\pi(s+x)}, \tag{1}$$

$$IR = -\frac{\mu_0 I_0 h}{2\pi(s+x)} v. \tag{2}$$

Исключая I из (1), получим уравнение

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{us}{(s+x)^2} v, \quad u = \frac{1}{mRs}\left(\frac{\mu_0 J_0 h}{2\pi}\right)^2. \tag{3}$$

Выберем начальные условия $x(0) = 0$ $v(0) = v_0$. Переходя к переменной $v = v(x)$, находим уравнение

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{us}{(s+x)^2}. \tag{4}$$

Решение уравнения (4)

$$v(x) = v_0 - \frac{ux}{s+x}.$$

Рассмотрим три случая.

A. Пусть $v_0 > u$. Тогда при $x >> s$ получим предельное значение скорости проводника $v(x) \to v_0 - u$, и силы тока $I \to 0$.

B. Если $v_0 = u$, то $x(t) = \sqrt{s^2 + 2sut} - s$. Скорость $v(t) = us/\sqrt{s^2 + 2sut}$.

C. Если $v_0 < u$, то проводник остановится, на расстоянии $x_c = sv_0/(u - v_0)$ от начала координат.

7.5. Индуктивность. Самоиндукция

Пример 7.5.2. Индуктивность провода. Найдем внутреннюю индуктивность единицы длины длинного прямолинейного провода радиусом a. Используя решение задачи 10.2, найдем плотность энергии магнитного поля в проводе:

$$u_m(r) = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{Ir}{2\pi a^2}\right)^2.$$

Согласно определению энергия магнитного поля отрезка провода длиной h равна

$$U_m = \frac{LI^2}{2},\ U_m = \int u_m dV,\ dV = 2\pi rh\, dr.$$

Следовательно,

$$\frac{L}{h} = \frac{\mu_0}{2\pi a^4}\int_0^a dr r^3 = \frac{\mu_0}{8\pi}.$$

7.8. Электромеханика

Электрическое и магнитное поля индуцируют в жидких и твердых телах (проводниках, диэлектриках и магнетиках) токи, дипольный и магнитный моменты. В результате взаимодействия наведенных моментов с неоднородным переменным полем на жидкость или твердое тело действуют электромагнитные силы. Появляются качественно новые возможности управления течением жидкости или движением тел. Такие задачи возникают во многих областях современной техники и технологии — при создании бесконтактных опор, новых видов транспорта, устройств для сепарации, транспортировки и упаковки деталей, очистки воды от диэлектрических примесей — нефти, мазута и пр. Другое направление исследований связано с созданием систем пассивной и активной стабилизации спутников, тросовых космических систем в режимах тяги или генерации электроэнергии в магнитном поле Земли. В рамках релятивистской электромеханики показано, что черная дыра, вращающаяся в магнитном поле, играет роль батареи, преобразующей энергию вращения в массу покоя и энергию выбросов в магнитосфере квазаров и активных ядрах галактик.

Последние работы открыли новую перспективную область исследований, связанную с разработкой микро и мезоустройств для научных и прикладных целей: микромоторов, микроманипуляторов для управления дисководом или конструктивными элементами роботов, микронасосов, микроцентрифуг, датчиков ускорения. Проводя эксперименты с бакиболами, ученые обнаружили новую область исследований — квантовую электромеханику.

Широко ведутся работы в области ферродинамики по созданию приборов и устройств, использующих содержащие ферромагнитные частицы жидкости, движущиеся в электромагнитом поле. Методы, использующие воздействие магнитного поля на твердые тела, находят широкое применение в технике для решения проблем автоматизации обработки и сортировки деталей.

7.8.1. Силы, действующие на проводник в электромагнитном поле.

А. Пусть в схему включен конденсатор, одна из пластин которого закреплена. Другая пластина может перемещаться относительно неподвижной в направлении перпендикулярном пластинам. Введем координату x, однозначно описывающую положение подвижной пластины. Тогда емкость такого конденсатора будет функцией x: $C = C(x)$. Роль потенциальной энергии взаимодействия пластин играет функция (см. IV.1.7.3)

$$W(q, x) = \frac{q^2}{2C(x)}, \tag{7.8.1}$$

где q — вторая независимая «координата» — значение заряда, протекшего в положительном направлении через провода, присоединенные к пластинам. Проекция на ось x силы, действующей на пластину со стороны электрического поля,

$$F_x = -\frac{dW}{dx}, \quad \text{или} \quad F_z(x) = -\frac{q^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{C}. \tag{7.8.2}$$

Б. Пусть схема содержит закрепленную катушку индуктивности и подвижный проводник, положение которого определяется координатой z. Тогда проекция на ось z силы, действующей на проводник со стороны магнитного поля,

$$F_z = \frac{dU_m}{dz} + I\frac{d\Phi_{\text{ext}}}{dz}, \tag{7.8.3}$$

где $U_m(z)$ — энергия магнитного поля системы, $\Phi_{\text{ext}}(t,z)$ — поток магнитной индукции внешнего магнитного поля через замкнутый контур, содержащий подвижный проводник. Коэффициенты индукции, взаимоиндукции проводника и поток внешнего поля представляют собой функции координаты z. Если виток с током может вращаться вокруг оси z, то проекция момента силы на ось z равна $M_z = Id\Phi_{\text{ext}}/d\theta$, где θ — угол поворота витка в положительном направлении.

Далее, учитывая (7.8.2) и (7.8.3), необходимо записать уравнения, следующие из второго закона Ньютона, и уравнения Кирхгофа, содержащие переменные q и $I = dq/dt$. Решение этих уравнений содержит полную информацию об эволюции электромеханической системы. Более того, эта система уравнений позволяет получить закон изменения полной энергии — суммы механической и электромагнитной энергий.

7.8.2. Подвижные элементы проводника в электрическом поле.

Пример 7.8.1. Движение пластины конденсатора. В схеме на рис. Д.7.8.1 электрическая цепь образована конденсатором, резистором и батареей с ЭДС равной V. Конденсатор представляет собой две плоских пластины площадью S. Нижняя пластина закреплена, положение верхней подвижной пластины конденсатора массой m определяется значением координаты z на числовой оси с началом на нижней пластине. Конденсатор помещают во внешнее поле напряженностью $\vec{E}_{\text{ext}} = (0, 0, G)$, потенциал которого $\varphi_{\text{ext}}(z) = -Gz$.

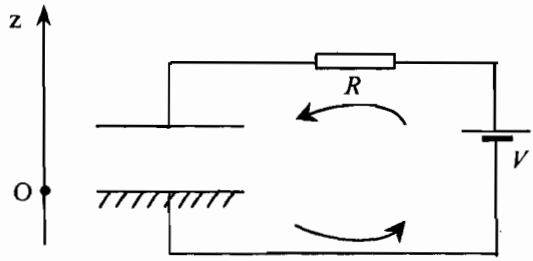


рис. Д. 7.8.1

А. Найдем силу $\vec{f}$, действующую на пластину со стороны электрического поля.

Пусть q — заряд верхней пластины в момент времени t. Используя закон Гаусса получим напряженность поля $\vec{E} = (0, 0, G)$ во внешнем пространстве конденсатора и $\vec{E} = (0, 0, G - q/\varepsilon_0 S)$ — внутри конденсатора. Пусть до внесения конденсатора во внешнее поле энергия поля имела значение U_0. После внесения конденсатора энергия поля

$$U = U_0 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 G^2 Sz + \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(G - \frac{q}{\varepsilon_0 S}\right)^2 Sz = U_0 - Gqz + \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}z.$$

или $U = U_0 + q^2/2C(z) + q\varphi_{ext}(z)$, где $C(z) = \varepsilon_0 S/z$. Функция $W_e(z) = q^2/2C(z) + q\varphi_{ext}(z)$ представляет собой потенциальную энергию взаимодействия пластины с электрическим полем: $W_e(z) = q^2 z/(2\varepsilon_0 S) - qGz$. z-компонента силы

$$f_z = -\frac{dW_e}{dz}, \quad f_z = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} + qG.$$

Отметим, что согласно IV.1.7 3 полную силу f_z можно представить в виде суммы сил, действующих на внутреннюю и внешнюю поверхности верхней пластины со стороны электрического поля:

$$f_z = -\varepsilon_0[G - q/(\varepsilon_0 S)]^2 S/2 + \varepsilon_0 G^2 S/2.$$

Б. *Пластина в положении равновесия.* Потенциальная энергия верхней пластины

$$W(q,z) = q^2 z/(2\varepsilon_0 S) - qGz + mgz.$$

Сила, действующая на пластину, $F_z = -dW/dz$, $F_z(z) = -q^2/(2\varepsilon_0 S) + qG - mg$.

Предположим, что пластина опирается на изолированную подставку на уровне $z = h$. Найдем силу реакции $\vec{N} = (0, 0, N)$, действующую на неподвижную пластину. Поскольку сумма сил равна нулю, то

$$-\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} + qG - mg + N = 0. \qquad (1)$$

Разность потенциалов между пластинами конденсатора

$$\left(\frac{q}{\varepsilon_0 S} - G\right)h = V. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) находим $q = q_0$, $q_0 = \varepsilon_0 S(V/h + G)$,

$$N = (\varepsilon_0 S/2)[(V/h)^2 - G^2] + mg.$$

В. Пластина движется в результате действия направленной вверх силы постоянной величиной $T > N$. На рис. Д.7.8.1 положительное направление тока обозначено стрелкой. Тогда координата пластины определяется решением системы уравнений

$$m\frac{dv_z}{dt} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} + qG - mg + T, \qquad (3)$$

$$IR + \left(\frac{q}{\varepsilon_0 S} - G\right)z = V, \qquad (4)$$

где $I = dq/dt$. Решение этой системы можно найти приближенными методами или численным расчетом на компьютере.

Теперь получим закон изменения полной энергии. С этой целью умножим (3), (4) соответственно на v_z, I и сложим полученные уравнения. Поскольку $qv + Iz = d(qz)/dt$, $q^2v/2 + qIz = d(q^2z/2)/dt$, то в результате находим

$$dU/dt = Tv_z + IV - I^2R, \quad U = mv_z^2/2 + W(z).$$

Здесь U — полная энергия системы.

Пример 7.8.2. Электростатический подвес. На рис. IV.1.8.8 (стр. 344) изображена схема модели электростатического подвеса — устройства, в котором тело, представляющее собой соединенные пластины трех конденсаторов общей массой m, может находиться в равновесии. Пусть углы между отрезками Oa, Ob, Oc равны 120°.

Используя данные примера IV.1.8.8, положим $Q = -2CV$. Тогда получим $q = -CV$, $q_3 = 0$. Величина сил, действующих на внутренние пластины конденсаторов C_1 и C_2, равна $q^2/(2\varepsilon_0 S) = C^2V^2/(2\varepsilon_0 S)$. Следовательно, в случае симметричной схемы подвес может удерживать три пластины массой $m = C^2V^2/(2\varepsilon_0 Sg)$.

Согласно теореме, доказанной английским математиком С. Ирншоу (S. Earnshaw), равновесие система неподвижных зарядов не может быть устойчивым.

Пример 7.8.3. Металлическая пластина в электрическом поле. Металлическая квадратная пластина с зарядом Q может перемещаться по гладкой непроводящей горизонтальной плоскости. Размеры пластины $a \times a$, толщина — h (рис. Д.7.8.2). Эту систему помещают в квазинеоднородное (от лат. *quasi* — почти, якобы) электрическое поле напряженностью $\vec{E}_{ext}(\vec{r})$.

Пластина находится в области пространства, где вектор $\vec{E}_{exp}(\vec{r}) \approx (0, 0, G(z))$ перпендикулярен плоскостям пластины. Пусть ось z проходит через центр масс пластины. Положение центра масс определяется координатой z_c. Координаты правой и левой граней пластины: $z_{2,1} = z_c \pm h/2$, $|dG/dz|h << G(z_c)$.

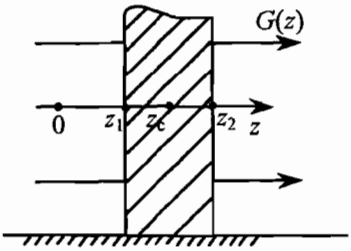


рис. Д.7.8.2

Во внешнем поле на правой и левой гранях пластины индуцируются поверхностные заряды $\sigma_{2,1}$. Найдем силу, действующую на пластину со стороны электрического поля. Используя решение задачи 1.3.2, получим поверхностную плотность зарядов

$$\sigma_{2,1} = \sigma_0 \pm \varepsilon_0 G_{2,1}, \quad \sigma_0 = Q/2S, \quad G_{2,1} = G(z_c \pm h/2)$$

и напряженность поля в окрестности пластины: у левой грани $E_z(z_1) = G_1 - \sigma_0/\varepsilon_0$, у правой грани $E_z(z_2) = G_2 + \sigma_0/\varepsilon_0$. Согласно п. 1.7.3 z-компонента полной силы, действующей на пластину со стороны поля,

$$F_z = (\sigma_1/2)S(G_1 - \sigma_0/\varepsilon_0) + (\sigma_2/2)S(G_2 + \sigma_0/\varepsilon_0) = \\ = \sigma_0 S(G_1 + G_2) + \varepsilon_0 S(G_2^2 - G_1^2)/2,$$

где $S = a^2$ — площадь поперечного сечения пластины. Поскольку

$$|dG/dz|h << G(z_c), \text{ то } G_{2,1} = G(z_c) \pm (h/2)dG/dz + \dots .$$

Следовательно, F_z принимает вид

$$F_z(z_c) \approx QG(z_c) + \varepsilon_0 VGdG/dz_c,$$

где $V = hS$ — объем пластины. Пластина приобретает индуцированный дипольный момент $p = \varepsilon_0 G(z)V$. Потенциальная энергия взаимодействия пластины с электрическим полем $W(z_c) = -\varepsilon_0 G^2 V/2 + Q\varphi_{ext}$, где $\varphi_{ext}(z_c)$ — потенциал внешнего поля, связанный с напряженностью поля соотношением $G = -d\varphi_{ext}/dz$. Если $G(z)$ — убывающая функция z, то $dG/dz < 0$. В этом случае положение равновесия пластины $z_c = z_{eq}$ найдем из условия $F_z(z_c) = 0$.

7.8.3. Подвижные элементы проводника в магнитном поле.

Пример 7.8.4. Электромагнитная пушка. Рассмотрим устройство, схема которого изображена на рис. 7.3.3 (стр. 447). Пусть внешнее магнитное поле и внешняя сила отсутствуют. Поскольку по контуру *OCKP* течет ток, то перемычка *KP* находится в собственном магнитном поле. Найдем выражение для силы F_x, действующей на перемычку со стороны собственного магнитного поля контура

$$m\frac{dv}{dt} = F_x . \qquad (1)$$

Учитывая (7.5.2), получим из закона Ома уравнение

$$IR = \varepsilon_0 - \frac{d}{dt}(LI). \qquad (2)$$

Отметим, что индуктивность $L = L(x)$ и сопротивление $R(x)$ контура являются функциями координаты x.

Умножим уравнение (1) на v, уравнение (2) — на I и сложим полученные выражения. В результате имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) + I\frac{d}{dt}(LI) = F_x v + I\varepsilon_0 - I^2 R. \qquad (3)$$

Однако закон сохранения энергии должен иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{L(x)I^2}{2}\right) = I\varepsilon_0 - I^2 R. \qquad (4)$$

Поскольку

$$I\frac{dLI}{dt} - \frac{1}{2}\frac{dLI^2}{dt} = \frac{I^2}{2}\frac{dL}{dt}, \qquad \frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx}v,$$

то сопоставляя (3) и (4) приходим к выводу, что

$$F_x = \frac{I^2}{2}\frac{dL}{dx} \text{ или } F_x = \frac{dU_m}{dx}, \quad U_m = \frac{1}{2}L(x)I^2,$$

где U_m — энергия магнитного поля контура. Следовательно, уравнение (1) приобретает вид

$$m\frac{dv}{dt} = \left(\frac{I^2}{2}\right)\frac{dL}{dx}.$$

Таким образом, собственное магнитное поле стремиться увеличить размеры контура. Рассматриваемая система — так называемый *рельсотрон* — хорошо известна уже десятки лет. В последние десятилетя были предприняты попытки разогнать перемычку — кусок металла — до космической скорости и использовать в качестве оружия.

Пусть p — объемная плотность энергии магнитного поля системы. Тогда $dU_m/dx = pS$, где S — площадь бокового сечения перемычки. Подставляя в (1) $m = \rho Sd$, получим ускорение $a = p/\rho d$. Положим $\rho d = 10^2$ кг/м^2. Значению $B = 10$ Тл соответствует давление $p = B^2/2\mu_0 = 4\cdot10^7$ Па и ускорение $a = 4 \cdot 10^5$ м/с^2. Перемычка достигает скорости $v = 10$ км/с на длине $s = 125$ м. Время разгона ~2,5 $\cdot 10^{-2}$ с. Перемычка массой $m = 2$ кг приобретает энергию 100 МДж.

Пример 7.8.5. Силы, действующие на обмотку соленоида. На основе приближенного выражения для энергии соленоида можно вычислить силы, действующие на соленоид и найти условия, при которых не происходит его разрушения. В качестве примера рассмотрим однослойную катушку, изображенную на рис. 3.3.1. Энергия магнитного поля соленоида $U_m = LI^2/2$. Согласно (7.5.1)

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}, \; l = z_2 - z_1,$$

где z_1, z_2 — координаты первого и последнего витков; z — компонента осевой силы (7.8.3), действующей на первый виток

$$F_{1z} = \frac{dU_m}{dz_1}, \quad F_{1z} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{2l^2}. \qquad (1)$$

Очевидно $F_{1z} = -F_{2z}$. Следовательно, возникают силы, сжимающие соленоид. Действительно, этот эффект обусловлен притяжением витков с коллинеарными токами.

Представим F_{1z} в виде $F_{1z} = pS$, где $p = B^2/(2\mu_0)$ — давление, создаваемое магнитным полем. Напряжение, в поперечном сечении соленоида, перпендикулярном оси z: $\sigma_z = pS/S_{ст}$, $S_{ст} = 2\pi ad$ — площадь сечения обмотки, d — диаметр провода. Следовательно, $\sigma_z = pa/(2d)$.

В продольном сечении, проходящем через ось z, действуют силы, растягивающие соленоид. Найдем напряжение в продольном сечении соленоида $\sigma_{пр} = T/S_{пр}$, где T — величина силы упругости, распределенная по поверхности сечения площадью $S_{пр} = ld$. Вычисляя величину $T = pla$, получим $\sigma_{пр} = pa/d = 2\sigma_z$.

Пример 7.8.6. Кольцо в постоянном неоднородном магнитном поле. На рис. Д.7.8.5 изображены силовые линии магнитного поля вблизи верхнего торца соленоида. Магнитное поле обладает осевой симметрией: индукция магнитного поля в точке $P(x,y,z)$ зависит от координаты z и расстояния r от оси z до точки P. Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ в точке P имеет осевую $B_z = b(z)$ и радиальную B_r компоненты. Тонкий проводник в форме кольца расположен в плоскости перпендикулярной оси z, центр кольца может перемещаться по оси z. Получим уравнения движения кольца (масса кольца — m, радиус — a, сопротивление — R) и закон сохранения полной энергии.

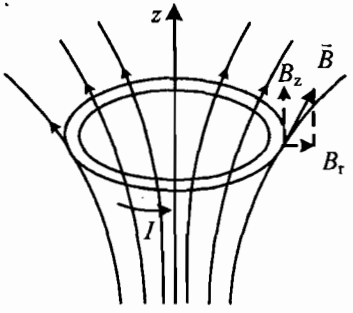


рис. Д. 7.8.5

При движении кольца возникает ЭДС индукции — по кольцу протекает ток силой I. Положительное направление тока указано стрелкой на рис. Д.7.8.5. На каждый элемент кольца Δl действует сила $\Delta F_z = -IB_r\Delta l$ и радиальная сила, приводя-

щая к деформации кольца. z-компонента полной силы, действующей на кольцо $F_z = -2\pi a I B_r$.

Свяжем теперь B_r с z-компонентой вектора магнитной индукции. С этой целью применим закон Гаусса (7.2.2) к цилиндру радиусом r, расположенному между плоскостями z и $z + \Delta z$. Поток через боковую поверхность равен $2\pi r \Delta z B_r$, а поток через верхнюю и нижнюю плоскости равен $\pi r^2[B_z(z + \Delta z) - B_z(z)]$. Согласно (7.2.2) имеем $B_r = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dz}$. Следовательно, $F_z = ISdb/dz$, где $S = \pi a^2$ - площадь кольца.

Отметим, что компонента F_z в соответствие с (7.8.3) быть представлена в виде $F_z = Id\Phi/dz$, где $\Phi = bS$ — поток магнитной индукции через плоскость, ограниченную кольцом.

Из второго закона Ньютона следует уравнение

$$mdv_z/dt = ISdb_z/dz - mg. \qquad (1)$$

При вычислении ЭДС индукции необходимо учесть, что координата центра кольца — функция времени: $db_z/dt = (db_z/dz)v_z$. Тогда ЭДС, индуцируемая в кольце $\varepsilon = -S(db_z/dz)v_z$. Из закона Ома следует еще одно уравнение

$$IR = -S(db_z/dz)v_z. \qquad (2)$$

Подставляя I из (2) в (1), получим уравнение

$$mdv_z/dt = -(1/R)(Sdb_z/dz)^2 v_z - mg, \qquad (3)$$

решение которого позволит найти функцию $z(t)$. Отметим, что при $v_z > 0$ компонента силы Ампера $F_z < 0$ — кольцо притягивается к соленоиду; при $v_z < 0$ компонента силы Ампера $F_z > 0$.
Из уравнений (1), (2) следует закон изменения полной энергии

$$dE/dt = -I^2R, \;\; E = mv_z^2/2 + mgz.$$

Пример 7.8.7. Электромагнит. В конструкции многих электротехнических устройств входят магнитные цепи — совокупность ферромагнитных тел, через которые проходят и замыкаются силовые линии магнитной индукции. Неразветвленная магнитная цепь является основой устройства с подвижным якорем — электромагнита, изображенного на рис. Д.7.8.6. Сердечник выполнен из стали в виде цилиндрического стержня сечением S, якорь представляет собой пластинку массой m. Обмотка сердечника электромагнита, содержащая N витков, подключена к генератору напряжения с ЭДС равной ε. Сопротивление обмотки — R. Получим полную систему уравнений электромагнита и найдем силу, действующую на пластинку (ε = 1 В, R = 1 Ом, N = 90, $S = 4 \cdot 10^{-4}$ м^2).

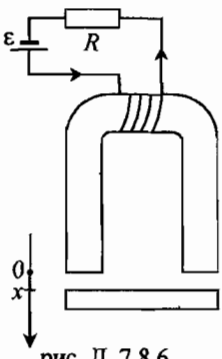


рис. Д. 7.8.6

Пусть толщина зазора между якорем и сердечником — $x(t)$, сила тока в цепи — $I(t)$. Положительное направление на контуре обозначено стрелкой. Из закона Ома следует уравнение

$$IR = \varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}, \tag{1}$$

где $\Phi = BNS$ — поток индукции через обмотку, B — индукция магнитного поля в сердечнике. На якорь действует сила тяжести и сила со стороны магнитного поля $\vec{F} = (F_x, 0, 0)$, $F_x = dU_m/dx$, где $U_m(x) = I\Phi/2$ — энергия магнитного поля. Из второго закона Ньютона получим еще одно уравнение

$$m\frac{dv}{dt} = mg + \frac{I}{2}\frac{d\Phi}{dx}. \tag{2}$$

Найдем величину индукции поля B в сердечнике в виде функции, зависящей от переменных x и I. Пусть H — величина напряженности магнитного поля в сердечнике и якоре, H_0 — в зазоре. Применяя закон Максвелла-Ампера, найдем соотношение

$$Hl + 2H_0x = IN, \tag{3}$$

где l — длина средней линии магнитопроводов — сердечника и якоря. Поскольку на поверхности раздела сердечник-якорь нормальная к поверхности стали компонента вектора $\vec{B}$ непрерывна, то $B = \mu_0 H_0$. Величина индукции зависит от характеристики намагничивания данного сорта стали — нелинейной функции $B = B(H)$. Учитывая (3), получим полную систему уравнений (1), (2), (4), (5):

$$\mu_0 Hl + 2xB(H) = \mu_0 IN, \tag{4}$$

$$B = B(H). \tag{5}$$

Пусть $x = 0$. Тогда $I = I_s$, $I_s = \dfrac{\varepsilon}{R} = 1$А. При значениях $x \ll l$, $l = 0{,}3$ м напряженность поля $H = H_s$, $H_s = \dfrac{\varepsilon N}{Rl} = 300$ А/м. Из графика функции $B = B(H)$ для электротехнической стали 1511 найдем значение индукции $B_s = B(H_s)$ и коэффициента магнитной проницаемости μ_s: $B_s = 1$ Тс, $\mu_s = B_s/\mu_0 H_s = 266$. В области $H < H_s$ функцию $B(H)$ можно представить в виде $B(H) \approx \mu_0\mu_s H$. Тогда из системы (4), (5) получим

$$H = \frac{1}{l + 2\mu_s x} IN, \quad B = \frac{\mu_s\mu_0}{l + 2\mu_s x} IN$$

Поток индукции представим в виде $\Phi = IL$, где $L(x) = \dfrac{\mu_s\mu_0}{1 + 2\mu_s x} N^2 S$ — индуктивность электромагнита.

Подставляя $\Phi = IL$ в (1), (2), получим систему уравнений относительно переменных x и I:

$$IR = \varepsilon - \frac{d(IL)}{dt}, \tag{6}$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg + \frac{I^2}{2}\frac{dL}{dx}. \tag{7}$$

Из уравнений (6), (7) следует закон изменения полной энергии системы

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon I - I^2 R,$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - mgx + L(x)\frac{I^2}{2}.$$

Важно отметить, что сила

$$F_x = \frac{I^2}{2}\frac{dL}{dx} = -\mu_0 S\left(\frac{IN\mu_s}{l + 2\mu_s x}\right)^2,$$

действующая на якорь, может быть представлена в виде

$$F_x = -H_0 BS = -\frac{B^2 S}{\mu_0}.$$

Полагая $x = 0$, получим $F_x(0) = -320$ *Н*.

Глава 8. Электромагнитные колебания

8.2. Генераторы электромагнитных колебаний

Пример 8.2.1. Возбуждение незатухающих колебаний дуговым разрядом. В п. 5.4.9 было отмечено, что вольт-амперная характеристика дуги $I = I(V)$ позволяет рассматривать ее как проводник с отрицательным сопротивлением

$$\frac{dI}{dV} = \frac{1}{R_i}, \quad R_i(V) = -\frac{(V - V_0)^2}{P_0} < 0.$$

Благодаря этой особенности можно создать генератор незатухающих колебаний, схема которого изображена на рис. Д.8.2.1.

Используя результаты анализа схемы рис. 5.4.5 *б* в задаче 5.4.4, выберем значение сопротивления $R < R_m$. Уравнения, следующие из законов Кирхгофа

$$I = I_1 + I_2, \quad IR + V = \varepsilon, \quad L\frac{dI_2}{dt} + rI_2 + \frac{Q_2}{C} = V,$$

дополним вольт-амперной характеристикой дуги $I = f(V)$, $V = \varphi_b - \varphi_k$.

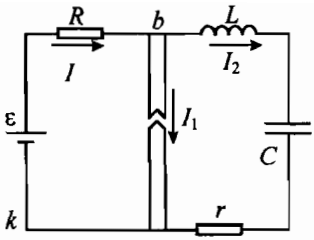


рис. Д. 8.2.1

При стационарном горении дуги

$$I_2 = 0,\ V = V_C,\quad Q_2 = Q_{20}.$$

В этом случае получим

$$\frac{\varepsilon - V_C}{R} = f(V_C),\quad \frac{Q_{20}}{C} = V_C.$$

Вследствие неустойчивости процесса горения напряжение V может отклонится от значения V_c — появятся переменные напряжение

$$V = V_c + u(t),$$

заряд $Q_2 = Q_{20} + q_2(t)$ и ток $I_2 = \dfrac{dq_2}{dt}$. Тогда полная система уравнений приобретает вид

$$I = I_1 + I_2, \tag{1}$$

$$IR + V_c + u = \varepsilon, \tag{2}$$

$$I_1 = f(V_c + u), \tag{3}$$

$$L\frac{dI_2}{dt} + rI_2 + \frac{q_2}{C} = u, \tag{4}$$

Исключая из (1)—(3) токи I и I_1 получим уравнение

$$I_2 = -\frac{u}{R} - [f(V_c + u) - f(V_c)]. \tag{5}$$

Ограничимся приближением $|u| << V_c$. В этом случае

$$[f(V_c + u) - f(V_c)] \approx \frac{u}{R_i(V_c)}.$$

Полагая

$$R_i(V_c) = -R_0,\quad R_0 = \frac{(V_c - V_0)^2}{P_0},$$

найдем из (5) силу тока $I_2 \approx \dfrac{u}{R_1}$, где $R_1 = \dfrac{RR_0}{R - R_0}$. Подставляя u в правую часть (4), получим уравнение колебательного контура

$$L\frac{dI_2}{dt} + (r - R_1)I_2 + \frac{q_2}{C} = 0 \qquad (6)$$

с «резистором» сопротивлением $(r - R_1)$.

Выберем значение V_C, при котором $R > R_0$, $R_1 > 0$. Если выполняется условие $r = R_1$, то уравнение (6) описывает незатухающие электромагнитные колебания с постоянной амплитудой. При значениях $r < R_1$ амплитуда колебаний возрастает. Следовательно, при условии $R_0 > \dfrac{Rr}{R + r}$ в системе могут возникнуть электромагнитные колебания. Недостатком такого генератора является нестабильность режима работы.

Пример 8.2.2. Параметрический резонанс в колебательном контуре. Пусть в результате действия внешней силы расстояние между пластинами конденсатора на рис. 8.1.1 зависит от времени: $d(t) = d_0 + x(t)$, $x(t) = h\sin\omega t$, где постоянная $h << d_0$. Оценим среднее значение суммы мощностей внешней силы и тепловых потерь $P(t)$.

Теперь в уравнении (8.1.2) электроемкость $C(t) = \varepsilon_0 S/d(t)$. Умножим (8.1.2) на I и учтем соотношение

$$\frac{d}{dt}\frac{q^2}{2C} \approx \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + \frac{q^2}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{C}.$$

Тогда получим уравнение $dU_{em}/dt = P(t)$, где

$$P(t) \approx \frac{q^2}{2d_0C_0}h\omega\cos\omega t - I^2R, \qquad (1)$$

гед $C_0 = \varepsilon_0 S/d_0$. Предположим, что в первом приближении сопротивлением резистора и изменением емкости можно пренебречь. В этом случае $q(t) \approx q_0\cos\omega_0 t$, $\omega_0 = (1/LC_0)^{1/2}$. Подставляя $q(t)$ в (1), получим

$$P(t) = \frac{q_0^2 h\omega}{2d_0C_0}\cos^2\omega_0 t\cos\omega t - (\omega_0 q_0)^2 R\sin^2\omega_0 t. \qquad (2)$$

Поскольку

$$\cos^2\omega_0 t\cos\omega t = (1/2)\cos\omega t + (1/4)[\cos(2\omega_0 - \omega)t + \cos(2\omega_0 + \omega)t],$$

то основной вклад в среднее значение $P(t)$ возникает при частоте $\omega = 2\omega_0$. Поэтому из (2) следует

$$\langle P(t)\rangle = \frac{q_0^2 h\omega_0}{4d_0C_0} - \frac{1}{2}(\omega_0 q_0)^2 R. \qquad (3)$$

Вводя добротность контура $Q = (\omega_0 C_0 R)^{-1}$, запишем (3) в виде

$$<P(t)> = \frac{\omega_0^2 q_0^2 R}{2}\left(\frac{Qh}{2d_0} - 1\right).$$

Следовательно, при условии $Q > 2d_0/h$ величина энергии в контуре и амплитуда электромагнитных колебаний возрастают. Это явление называется *параметрическим резонансом*, т. к. периодически с частотой $\omega = 2\omega_0$ изменяется собственный параметр конденсатора — расстояние между пластинами. Аналогичное явление возникает при раскачивании качелей.

8.3. Вынужденные колебания в последовательном контуре

Задача 8.3.4. В схеме рис. 8.2.1 ЭДС генератора $\varepsilon(t) = 0$ при $t < 0$; $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos^2 \omega t$ при $t \geq 0$. Найдите амплитуду напряжения на резисторе и конденсаторе.

Решение. Уравнение Кирхгофа приобретает вид

$$LdI/dt + RI + q/C = (\varepsilon_0/2)(1 + \cos 2\omega t),\ t \geq 0. \qquad (1)$$

После замены $q = Q + C\varepsilon_0/2$ получим уравнение

$$LdI/dt + RI + Q/C = (\varepsilon_0/2)\cos 2\omega t),\ t \geq 0. \qquad (1)$$

Следовательно, $V_C(t) = \varepsilon_0/2 + V_{C0}\sin(2\omega t + \varphi)$, $V_R(t) = V_{R0}\sin(2\omega t + \varphi)$,

$$V_{C0} = \varepsilon_0 X_C/2Z,\ V_{R0} = \varepsilon_0 R/2Z,$$

$$Z = [(X_C - X_L)^2 + R^2]^{1/2},\ X_C = 1/2\omega C,\ X_L = 2\omega L.$$

8.8. Представление уравнений Кирхгофа в комплексной форме

Если ЭДС представляет собой гармоническую функцию $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos\omega t$, то уравнения Кирхгофа для произвольной схемы в стационарном режиме можно записать на множестве комплексных чисел как алгебраические уравнения. Тогда анализ схем, содержащих резисторы, конденсаторы и индуктивности, формально не отличается от случая постоянных токов.

Комплексная функция $F(t) = u(t) + iv(t)$, где $u(t)$, $v(t)$ — действительные функции, i — мнимая «единица», $i^2 = -1$. Вначале отметим, что реальная, мнимая части и модуль комплексной функции $F(t)$ согласно определению равны

$$u = Re\, F = \frac{1}{2}(F + F^*),\quad v = Im\, F = \frac{1}{2i}(F - F^*),$$

$$|F| = \sqrt{FF^*} = \sqrt{u^2 + v^2}\ ,$$

где $F^*(t) = u(t) - iv(t)$ — функция, комплексно-сопряженная функции $F(t)$.

Для решения поставленной задачи необходимо использовать знаменитую формулу Леонарда Эйлера (1743 г.), связывающую тригонометрические и показательные функции

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

где θ — действительная функция некоторой переменной, $e \approx 2{,}7182$ — основание натуральных логарифмов. Часто эту функцию обозначают символом $\exp(i\theta) \equiv e^{i\theta}$ (от укороченного термина экспонента). Очевидно $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.

8.8.1. Последовательный контур. Рассмотрим сначала последовательный контур, изображенный на рис. 8.3.1. Будем искать решение уравнения (8.3.1) в виде $I(t) = I_0\cos(\omega t + \varphi)$. Тогда решение можно представить в комплексной форме

$$I(t) = Re[j\exp(i\omega t)]. \qquad (8.8.1)$$

Здесь $j = I_0\exp(i\varphi)$ — комплексная амплитуда силы тока, $I_0 = |j|$ — амплитуда силы тока, φ — фаза тока. Действительно, подставляя j в (8.8.1) и используя формулу Эйлера, получим

$$I(t) = Re[I_0\exp(i\omega t + i\varphi)] = I_0\cos(\omega t + \varphi). \qquad (8.8.2)$$

Тогда в уравнении (8.3.1) можно перейти к комплексной форме записи ЭДС и тока, производя замены силы тока, ЭДС

$$\varepsilon(t) \Rightarrow Re\,\varepsilon_0\exp(i\omega t), \quad I(t) \Rightarrow \mathrm{Re}\,j\exp(i\omega t)$$

и падений напряжения на конденсаторе, резисторе и индуктивности

$$U_C = q/C \Rightarrow Re\,j(-iX_C)\exp(i\omega t),\ U_R = IR \Rightarrow Re\,jR\exp(i\omega t),$$

$$U_L = LdI/dt \Rightarrow Re\,j(iX_L)\exp(i\omega t), \qquad (8.8.2)$$

В результате получим новое уравнение в комплексных переменных

$$Re[\mathrm{R} + (-iX_C + iX_L)]\,j\exp(i\omega t) = Re\,\varepsilon_0\exp(i\omega t). \qquad (8.8.3)$$

Отсюда следует алгебраическое уравнение

$$[R + (-iX_C + iX_L)]\,j = \varepsilon_0. \qquad (8.8.4)$$

Введем теперь «комплексные сопротивления» конденсатора $G_C = -iX_C$ и катушки $G_L = iX_L$. Тогда (8.8.4) равносильно уравнению

$$jG = \varepsilon_0,\ G = R + G_C + G_L, \qquad (8.8.5)$$

представляющему собой закон Ома в комплексной форме: $j = \varepsilon_0/G$. Теперь можно найти I_0 и φ. Вычисляя модуль j, находим

$$I_0 = |j|,\ I_0 = \varepsilon_0/Z,\ Z = |G|.$$

Используя формулу Эйлера, получим из (8.8.5) известный результат (8.3.4):

$$\exp(i\varphi) = j/I_0 = Z/G = G^*/Z =$$
$$= [R + i(X_C - X_L)]/Z, \rightarrow \cos\varphi = R/Z,\ \sin\varphi = (X_C - X_L)/Z.$$

8.8.2. Общий метод расчета схем. При расчете произвольных схем следует выбрать «положительные» направления токов между узлами и сопоставить каждому участку цепи между узлами комплексные токи j и сопротивления G. После этого следует записать систему алгебраических уравнений, используя два правила Кирхгофа или законы Ома, как в случае постоянных токов.

Среднее значение мощности, потребляемое контуром. Подставляя (8.8.1) в явном виде и функцию $\varepsilon(t) = (\varepsilon_0/2)[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)]$, получим

$$P = \langle I(t)\varepsilon(t) \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \, Re\, j. \qquad (8.8.6)$$

Среднее значение мощности, потребляемой резистором. Аналогичным образом получим

$$P_R = \langle I^2(t)R \rangle = \frac{1}{2}|j|^2 R. \qquad (8.8.7)$$

8.8.3. Параллельный контур. Для схемы рис. 8.5.1 имеем

$$j = j_1 + j_2, \quad \varepsilon_0 = G_1 j_1, \quad \varepsilon_0 = G_2 j_2,$$

где $G_1 = -iX_C$, $G_2 = R + iX_L$. Исключая токи, получим решение

$$j = \varepsilon_0/G, \; 1/G = 1/G_1 + 1/G_2,$$

$|G_1| = X_C$, $|G_2| = Z_2$. Отсюда следует очевидный результат: последовательно и параллельно соединенные «комплексные» сопротивления вычисляются так же, как и в случае схемы с постоянными токами. Для того, чтобы перейти к действительным переменным, пишем $I_0\exp(i\varphi) = \varepsilon_0/G$,

$$\frac{1}{G} = \frac{G_1^*}{|G_1|^2} + \frac{G_2^*}{|G_2|^2} = \frac{R}{Z_2^2} - i\left(\frac{X_L}{Z_2^2} - \frac{1}{X_C}\right).$$

Отсюда найдем амплитуду и фазу:

$$I_0 = \varepsilon_0/Z, \; Z = |G|; \; \exp(i\varphi) = Z/G, \; \cos\varphi = Re(Z/G), \; \sin\varphi = Im(Z/G).$$

Вычисляя реальную часть $I(t) = Re[I_0\exp(i\omega t + i\varphi)]$, получим выражение (8.5.3).

Среднее значение мощности, потребляемое контуром

$$P = \langle I(t)\varepsilon(t) \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} Re\, j = \frac{\varepsilon_0^2}{2}\frac{R}{Z_2^2}.$$

Среднее значение мощности, потребляемой резистором

$$P_R = \langle I_2^2(t)R \rangle = \frac{1}{2}|j_2|^2 R = \frac{\varepsilon_0^2 R}{2Z_2^2}.$$

Задача 8.8.1. Назовем элементом схемы резистор, конденсатор или катушку индуктивности. В схеме рис. Д.8.8.1 параллельно соединенные элемент E_2 и резистор E_3 сопротивлением R подключены к элементу E_1. ЭДС генератора $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$, $t \geq 0$. Найдите среднее значение мощности, потребляемое резистором.

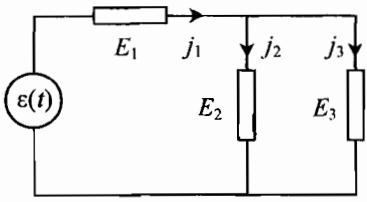


рис. Д.8.8.1

Решение. Положительные направления токов между узлами обозначены на рис. Д.8.8.1 стрелками. Комплексные сопротивления элементов соответственно равны G_1, G_2 и $G_3 = R$. Используя законы Кирхгофа, получим систему уравнений

$$j_1 = j_2 + j_3, \tag{1}$$

$$j_1G_1 + j_3R = \varepsilon_0, \tag{2}$$

$$-j_2G_2 + j_3R = 0. \tag{3}$$

Подставляя j_1 из (1) и j_2 из (3) в (2), получим уравнение

$$(G_1R/G_2 + G_1 + R)j_3 = \varepsilon_0. \tag{4}$$

Очевидно этот результат можно получить, используя три раза закон Ома:
1. $j_3 = U_{23}/R$.
2. $U_{23} = j_1G_{23}$,
3. $j_1 = \varepsilon_0/G$, $G = G_1 + G_{23}$, $1/G_{23} = 1/R + 1/G_2$, (5)
В результате имеем

$$j_3 = \varepsilon_0G_{23}/[(G_1 + G_{23})R] = \varepsilon_0\frac{1}{G_1 + R(G_1/G_2 + 1)}. \tag{6}$$

Подставляя значение $j_3 = I_{30}\exp(i\varphi)$ в (6), получим уравнение

$$I_{30}\exp(i\varphi) = \varepsilon_0\frac{1}{G_1 + R(1 + G_1/G_2)},$$

из которого найдем I_{30} и φ. Сила тока, протекающего через резистор $I_3(t) = Re[I_{30}\exp(i\omega t + i\varphi)]$. Среднее значение мощности, потребляемой резистором

$$P = \frac{1}{2}|j_3|^2R = \frac{\varepsilon_0^2R}{2}\left|\frac{1}{G_1 + R(G_1/G_2 + 1)}\right|^2. \tag{7}$$

Задача 8.8.2. На рис. Д.8.8.2 изображена схема Штейнмица, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$, $t > 0$. Используя комплексное представление, покажите, что при $\omega = \omega_0$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ амплитуда силы тока, протекающего через резистор, не зависит от сопротивления R.

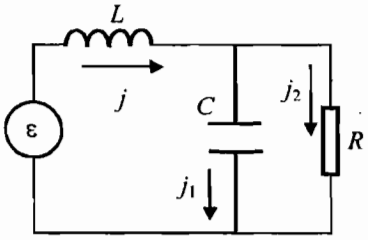


рис. Д. 8.8.2

Решение. В комплексном представлении первый закон Кирхгофа имеет вид $j = j_1 + j_2$. Уравнения, следующие из второго закона Кирхгофа для контура, содержащего ε, L, R, и контура, содержащего R и C, следует записать в виде

$$iX_L j + Rj_2 = \varepsilon_0, \quad j_2 R + iX_C j_1 = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$\left[iX_L + (X_C - X_L)\frac{R}{X_C}\right] j_2 = \varepsilon_0 .$$

Поскольку $X_L = X_C$, то

$$j_2 = -\frac{i\varepsilon_0}{X_L}, \quad I_2(t) = Rej_2 \exp(i\omega t) = \frac{\varepsilon_0}{X_L}\sin\omega t = \frac{\varepsilon_0}{R_B}\sin\omega t, \; R_B = \sqrt{\frac{L}{C}} .$$

Задача 8.8.3. В схеме рис. Д.8.8.3 лампа и катушка индуктивности подключены через резистор к генератору напряжения $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$, $t \geq 0$. Сопротивления лампы — R, резистора — r, индуктивность катушки — L. Найдите мощность P, потребляемую лампой.

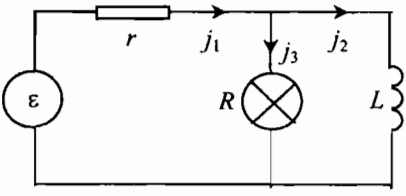


рис. Д. 8.8.3

Решение. Полагая в решении задачи 8.8.1 $G_1 = r$, $G_2 = iX_L$, получим силу тока, протекающего через резистор,

$$j_3 = \varepsilon_0/[r + R - irR/X_L] = I_0\exp(i\varphi),$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0 X_L}{\sqrt{X_L^2(r+R)^2 + (rR)^2}} .$$

Сила тока $I_3(t) = Re[I_0\exp(i\omega t + i\varphi)]$. Среднее значение мощности, потребляемой лампой $P = I^2_0 R/2$,

$$P = \frac{(\varepsilon_0\omega L)^2}{2R[(\omega L)^2(1 + r/R)^2 + r^2]} .$$

Заменим катушку индуктивности одним витком — толстой медной проволокой, сопротивлением которой можно пренебречь. В случае постоянного напряжения сила тока, протекающего через лампу равна нулю: $\omega = 0$, $P = 0$.

Лампа ярко светится при значениях частоты $\omega >> r/L$, где L – индуктивность медного провода. В этом случае потребляемая мощность $P \approx \dfrac{\varepsilon_0^2 R}{2(r+R)^2}$.

Задача 8.8.4. Электролампа включена в схему рис. Д.8.8.4, содержащую две катушки индуктивности. ЭДС генератора $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos\omega t$, $t \geq 0$. Объясните явление: если в первую катушку вдвинуть железный сердечник, свечение лампы ослабевает. Если же вдвинуть сердечник во вторую катушку, то свечение лампы увеличивается.

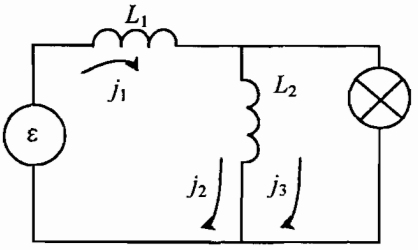


рис. 8.8.4

Решение. Полагая в решении задачи 8.8.1 $G_1 = iX_{L1}$, $G_2 = iX_{L2}$, получим силу тока, протекающего через резистор,

$$[R(1 + L_1/L_2) + i\omega L_1]j_3 = \varepsilon_0.$$

Сила тока $I_3(t) = Re[j_3 \exp(i\omega t)]$. Среднее значение мощности, потребляемой лампой $P = |j_3|^2 R/2$,

$$P = \frac{\varepsilon_0^2 R}{2[(\omega L_1)^2 + R^2(1 + L_1/L_2)^2]}.$$

Индуктивность катушки возрастает при введении сердечника в катушку. При увеличении индуктивности L_1 амплитуда напряжения на катушке L_1 возрастает, амплитуда напряжения на резисторе уменьшается, амплитуда силы тока, протекающего через лампу, убывает. Следовательно, мощность, потребляемая лампой, убывает. При увеличении индуктивности L_2 возрастает индуктивное сопротивление катушки — амплитуда силы тока через лампу возрастает.

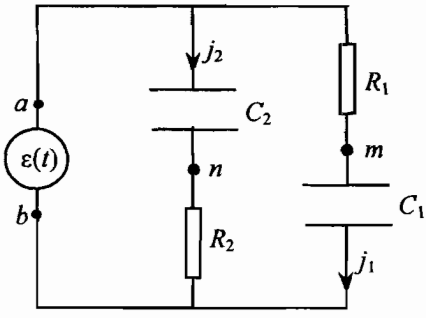


рис. Д. 8.8.5

Задача 8.8.5. Фазовращатель. Найдите разность потенциалов точек n и m в схеме рис. Д.8.8.5. Сопротивления резисторов $R_1 = R_2 = R$, емкости конденсаторов $C_1 = C_2 = C$.

Решение. Положительные направления токов между узлами обозначены на рис. Д.8.8.5 стрелками. Поскольку разности потенциалов $\phi_a - \phi_n = -iX_C j_2$, $\phi_a - \phi_m = Rj_1$, то

$$\phi_n - \phi_m = iX_C j_2 + Rj_1. \qquad (1)$$

Используя второй закон Кирхгофа, получим уравнения

$$-iX_C j_1 + Rj_1 = \varepsilon_0, \qquad (2)$$

$$-iX_C j_2 + Rj_2 = \varepsilon_0, \qquad (3)$$

учитывая которые находим из (1)

$$\phi_n - \phi_m = \varepsilon_0 \frac{R + iX_C}{R - iX_C}.$$

Положим

$$R = Z\cos\alpha, \quad X_C = Z\sin\alpha, \quad Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}. \qquad (4)$$

Тогда $R + iX_C = Z e^{i\alpha}$,

$$\phi_n - \phi_m = \varepsilon_0 e^{2i\alpha}.$$

Искомая разность потенциалов

$$\varphi_n - \varphi_m = Re\varepsilon_0 e^{i\omega t + 2i\alpha} = \varepsilon_0\cos(\omega t + 2\alpha).$$

Учитывая (4), найдем

$$\cos 2\alpha = \frac{R^2 - X_C^2}{R^2 + X_C^2}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2X_C R}{R^2 + X_C^2}.$$

При значении $R = 0$ получим $\alpha = \pi/2$, $\varphi_n - \varphi_m = -\varepsilon_0 \sin\omega t$.

Задача 8.8.6. От середины катушки индуктивностью L сделан отвод. Схема подключения этой катушки и конденсатора емкостью C к генератору напряжения $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$ $(t>0)$ показана на рис. Д.8.8.6. Найдите силу тока, протекающего через амперметр.

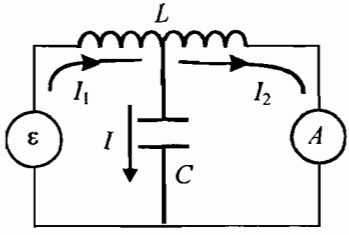


рис. Д. 8.8.6

Решение. Полная индуктивность $L = L_1 + L_2 + 2M$, где L_1 и L_2 — индуктивности первой и второй частей катушки, M — взаимная индуктивность. В случае идеальной связи $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Следовательно, $L_1 = L_2 = M = \frac{L}{4}$.

Уравнения для контуров, содержащих ε, L_1, C и L_2, C, имеют вид

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon(t), \qquad M\frac{dI_1}{dt} + L_2\frac{dI_2}{dt} - \frac{q}{C} = 0. \qquad (1), (2)$$

Переходя к комплексной форме, запишем уравнения, следующие из первого закона Кирхгофа и уравнений (1), (2)

$$j_1 = j + j_2,$$

$$iX_L j_1 + iX_M j_2 - iX_C j = \varepsilon_0, \quad iX_{L2} j_2 + iX_M j + iX_C j = 0.$$

Учитывая значения $X_{L1} = X_{L2} = X_M = \dfrac{X_L}{4}$, $X_L = \omega L$, находим $j_2 = -i\varepsilon_0\left(\dfrac{1}{X_L}+\dfrac{1}{4X_C}\right)$. Следовательно,

$$I_2(t) = Rej_2\exp(i\omega t) = \varepsilon_0\left(\frac{1}{\omega L}+\frac{\omega C}{4}\right)\sin\omega t.$$

Глава 9. Электромагнитные волны

9.1. Основы теории электромагнитных волн

9.1.10. Длинные линии передачи электромагнитной энергии. Рассмотрим линию передачи, образованную двумя параллельными тонкими проводами длиной h, расположенными на расстоянии s друг от друга (рис. Д.9.1.10). В сечении $z = 0$ к линии подключен генератор напряжения с ЭДС $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$, $t \geq 0$. На конце в сечении $z = h$ линия замкнута резистором сопротивлением R. В результате работы, совершаемой ЭДС, происходит перемещение электронов из одного провода в другой: возникает ток и разность потенциалов между проводами.

Обозначим $V(t, z)$ — напряжение между первым и вторым проводами в сечении с координатой z в момент времени t, $I(t, z)$ — силу тока протекающего через сечение z первого провода в положительном направлении. Если предположить, что электрическое поле между проводами в сечении, принадлежащем интервалу $[z, z + \Delta z]$, определяется зарядами элементов проводов Δz, то напряжение $V(t, z)$ окажется приложенным к обкладкам распределенной емкости. Обозначим C' — емкость единицы длины провода. Предположим также, что поток магнитной индукции, через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, содержащим отрезки $[z, z + \Delta z]$ двух проводов, связан с индуктивностью единицы длины провода L'. Эквивалентная схема длинной линии изображена на рис. 9.1.10.

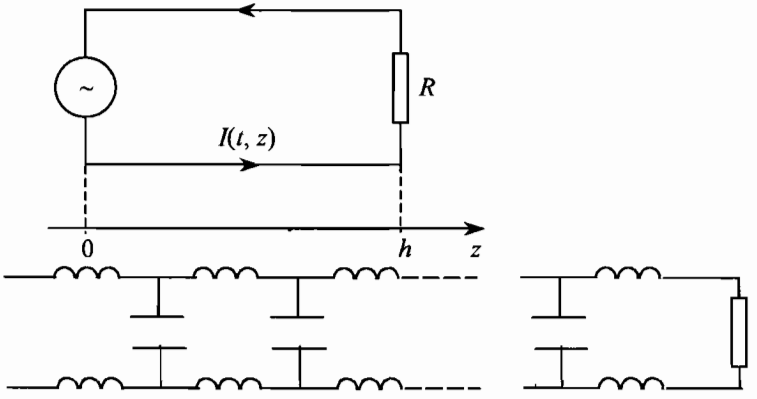


рис. Д. 9.1.10

Функции $V(t, z)$ и $I(t, z)$ определяются решением так называемых *телеграфных уравнений*:

$$V(t, z) = A\cos(\omega t - kz) + B\cos(\omega t + kz), \qquad (9.10.1)$$

$$I(t, z)R_в = A\cos(\omega t - kz) - B\cos(\omega t + kz), \qquad (9.10.2)$$

где A и B — произвольные постоянные, $k = \omega/v$ — волновое число, $v = (L'C')^{-1/2}$, $R_в = (L'/C')^{1/2}$ — волновое сопротивление, не зависящее от длины линии. Эти решения соответствуют решениям (III.5.5.1), (III..5.5.2) для звукового давления и скорости воздуха в трубе. Первое слагаемое представляет собой волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z со скоростью v. Второе слагаемое — волна, распространяющаяся в отрицательном направлении оси z. Отметим, что v — фазовая скорость волны, величина которой может быть больше скорости света. Длина волны $\lambda = vT$, $k = 2\pi/\lambda$. В высокочастотных линиях частота генератора ν~200 МГц, L'~1 мкГн/м, C'~25 пФ/м. Тогда v~$2 \cdot 10^8$ м/с, $\lambda = v/\nu$~1 м, $R_в = 200$ Ом.

Волны напряжения и тока в линии длиной $h = \lambda/4$. В этом случае $k = \pi/2h$. Найдем постоянные A и B. Учитывая граничные условия $V(t, 0) = \varepsilon_0$, $V(t, h) = I(t, h)R$, получим систему

$$A + B = \varepsilon_0,\ A - B = (R/R_в)(A + B),$$

из которой находим A, B и решение (9.10.1), (9.10.2)

$$V(t, z) = (\varepsilon_0/2)[(1 + R/R_в)\cos(\omega t - \pi z/2h) + \\ + (1 - R/R_в)\cos(\omega t + \pi z/2h)], \qquad (9.10.3)$$

$$I(t, z)R_в = (\varepsilon_0/2)[(1 + R/R_в)\cos(\omega t - \pi z/2h) - \\ - (1 - R/R_в)\cos(\omega t + \pi z/2h)], \qquad (9.10.4)$$

Отметим, что в линии, нагруженной на сопротивление равное волновому сопротивлению линии, отраженная волна отсутствует. Амплитуды силы тока и напряжения в любом сечении линии одинаковы.

Четвертьволновая линия — волновой трансформатор. Найдем напряжение $V_{вх}(t) = V(t, 0)$ и силу тока $I_{вх}(t) = I(t, 0)$ на входе линии:

$$V_{вх}(t) = \varepsilon_0\cos\omega t, \quad I_{вх}(t) = (\varepsilon_0/R_{вх})\cos\omega t,$$

где $R_{вх} = R_в^2/R$ — входное сопротивление линии. Напряжение $V_{вых}(t) = V(t,h)$ и сила тока $I_{вых}(t) = I(t,h)$ на выходе линии

$$V_{вых}(t) = (\varepsilon_0 R/R_в)\sin\omega t, \quad I_{вых}(t) = (\varepsilon_0/R_в)\sin\omega t.$$

Следовательно, отношение амплитуд напряжения на конце и входе линии равно $R/R_в$. Отношение амплитуд токов — $R_{вх}/R_в = R_в/R$. Очевидно, среднее значение мощности, развиваемой генератором, $< I_{вх}(t)V_{вх}(t) >$ равно

мощности, рассеиваемой нагрузкой $< I_{вых}^2(t)R >$. При $R > R_в$ линия подобна повышающему трансформатору, при $R < R_в$ —понижающему.

Отметим, что входное сопротивление короткозамкнутой четвертьволновой линии ($R = 0$) бесконечно велико. В этом случае ее можно использовать как изолятор.

Очевидно, волновые свойства линии не проявляются, если длина линии $h << \lambda$. В случае городской электросети $\lambda = 6000$ км.

9.4. Интерференция

Задача 9.4.3. Опыт Юнга. Свет от точечного монохроматического источника падает на два небольших отверстия S_1 и S_2 в экране, расположенном в плоскости $z = -b$ (рис. 9.4.1 стр. 502). Расстояние между отверстиями $d << b$. Отверстия играют роль вторичных взаимно-когерентных источников сферических волн. Интерференция наблюдается в области перекрытия световых пучков. Получите семейство поверхностей, на которых интенсивность поля максимальна.

Решение. В точке $M(x, y, z)$ напряженность поля

$$\vec{E}\,(t, x, y, z) \approx \vec{E}_0 \cos(\omega t - ks_1) + \vec{E}_0 \cos(\omega t - ks_2),$$

$$s_{2,1} = [(x \pm d/2)^2 + y^2 + (z + b)^2]^{1/2}.$$

Интенсивность поля в точке $M(x, y, z)$ равна

$$J(x, y, z) = 4J_0 \cos^2[k(s_2 - s_1)/2], \quad J_0 = c\varepsilon_0 \vec{E}_0^2/2.$$

Следовательно, интенсивность максимальна на поверхностях, удовлетворяющих условию $s_2 - s_1 = n\lambda$, $n \in N$:

$$[(x + d/2)^2 + y^2 + (z + b)^2]^{1/2} - [(x - d/2)^2 + y^2 + (z + b)^2]^{1/2} = n\lambda.$$

Разрешая иррациональное равенство, получим после алгебраических преобразований уравнение семейства гиперболоидов с осью вращения S_1S_2, имеющих общие фокусы в S_1 и S_2:

$$\left(\frac{y}{A_n}\right)^2 + \left(\frac{z+b}{A_n}\right)^2 - \left(\frac{x}{B_n}\right)^2 = -1, \qquad (1)$$

$$A_n = [d^2 - (n\lambda)^2]^{1/2}/2, \qquad B_n = n\lambda/2,$$

$d > n\lambda$. Максимумы интенсивности в плоскости $z = 0$ принадлежат семейству гипербол

$$(x/B_n)^2 - (y/A_n)^2 = 1 + (b/A_n)^2. \qquad (2)$$

При значениях $n\lambda << d$, $b >> d$ имеем $A_n \approx d/2$,

$$(xd/n\lambda b)^2 - (y/b)^2 = 1.$$

В области $y << b$ получим семейство прямых $x = n\lambda b/d$. В плоскости $x = x_0$ максимумы интенсивности лежат на семействе окружностей

$$y^2 + (z + b)^2 = r_n^2,\ r_n = x_0 d/n\lambda.$$

9.7. Дифракция

9.7.4. Доказательство Кирхгофа принципа Гюйгенса-Френеля. В 1882 г. Г. Кирхгоф, используя теорему Остроградского, получил интегральную форму соотношения, между напряженностью электрического поля волны в произвольной точке P объема, ограниченного замкнутой поверхностью, со значениями напряженности электрического поля волны на этой поверхности.

Рассмотрим объем V, ограниченный двумя замкнутыми произвольными поверхностями S и S_∞. Источник излучения монохроматической электромагнитной волны находится в точке O (0, 0, 0) внутри поверхности S. Точка P находится внутри объема V. Теорема Кирхгофа утверждает, что вектор напряженности электрического поля $\vec{E}(t, x, y, z)$ в точке P, удовлетворяющий уравнениям Максвелла, равен интегралу по поверхностям S и S_∞ с подинтегральной функцией, зависящей от значений напряженности поля $\vec{E}_S$ и производных напряженности поля на поверхностях. Разумеется, вектор $\vec{E}(t, x, y, z)$ в этом соотношении остается неизвестным. Однако теорему Кирхгофа можно использовать для приближенного решения задачи дифракции (см. 9.7.5).

В случае безграничного пустого пространства решения уравнений Максвелла хорошо известны. Поэтому исходя из теоремы Кирхгофа можно показать, что принцип Гюйгенса-Френеля является *строгим следствием* современной теории распространения волн.

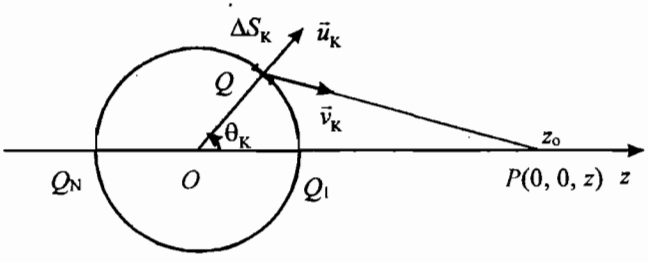


рис. Д. 9.7.3

Вектор напряженности электрического поля волны в пустом пространстве

$$\vec{E}(t, x, y, z) = \frac{G}{r}\vec{e}(x, y, z)\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}r), \qquad (9.7.1)$$

где r = OP, $\omega/c = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны. Вектор поляризации $\vec{e} = \vec{n}(\vec{n}\vec{d}) - \vec{d}$, $\vec{n} = \vec{r}/r$, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки P (см. рис. Д.9.7.3). Выберем в качестве

поверхности S фронт волны — сферу радиусом $r = a$ с центром в точке O. Поверхность S_∞ расположим на «бесконечно» большом расстоянии от источника. Здесь напряженности электрического и магнитного полей волны равны нулю.

Воспользуемся приближенной формой теоремы Кирхгофа, справедливой для оптических полей на расстояниях $r >> \lambda$ от точки O. В этом случае (9.7.1) можно представить в виде

$$\vec{E}(t, x, y, z) = Re\frac{\omega}{4\pi ica}\int dS_k \frac{G}{r_k} T_k \vec{e}_k \exp[i\phi_k - i\omega t], \qquad (9.7.2)$$

$$\phi_k = \frac{\omega}{c}(a + r_k), \quad T_k = 1 + \vec{u}_k \vec{v}_k .$$

Здесь dS_k — элементарная площадь поверхности сферы в окрестности точки сферы $Q(x_k, y_k, z_k)$, r_k — расстояние между точками Q и P, $\vec{e}_k$ — значение вектора $\vec{e}(Q)$ в точке Q, $\vec{u}_k$ — единичный вектор, перпендикулярный к поверхности сферы в точке Q, $\vec{v}_k$ — единичный вектор в точке Q, лежащий на прямой QP (рис. Д.9.7.3). В любой точке сферы векторы $\vec{u}_k$ и $\vec{e}_k$ перпендикулярны: $\vec{u}_k\vec{e}_k = 0$. Из теоремы «косинусов» находим

$$r_k^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta_k .$$

где θ_k — угол между вектором $\vec{u}_k$ и радиус-вектором $\vec{r}$ точки P.

Напомним, что определенный интеграл (9.7.2) представляет собой предел суммы. Следовательно, подинтегральное выражение соответствует принципу Гюйгенса-Френеля — точки волнового фронта являются центрами сферических волн. Напряженность электрического поля в точке P представляет собой суперпозицию напряженности полей элементарных волн. Фазу поля элементарной волны в точке P можно представить в виде

$$\Phi_k = \omega t - \omega\tau(\theta_k), \quad \tau(\theta_k) = \frac{1}{c}(a + r_k),$$

где $\tau(\theta_k)$ — время распространения волны по трассе OQP со скоростью света. Множитель $T_k\vec{e}_k$ — амплитуда вторичной волны, которая в теории Френеля осталась неопределенной. При значениях $0 \le \theta \le \pi$ получим неравенство $0 \le T_k \le 2$. Гипотеза Френеля приводит к правильному пониманию структуры выражения (9.7.2). Однако, она не учитывает вклад зон, принадлежащих к задней по отношению к точке O области волнового фронта. Более того, точное выражение подинтегрального выражения в (9.7.2) не соответствует примитивной формулировке принципа Гюйгенса.

Покажем, что правая часть (9.7.2) совпадает с (9.7.1). Поскольку $\omega a/c >> 1$, то подинтегральная функция быстро осциллирует при изменении угла θ_k. В этом случае основной вклад в интеграл дают области поверхности сферы в окрестности точек θ_k, удовлетворяющих условию $d\phi_k/d\theta_k = 0$. Вычисляя производную $d\phi_k/d\theta_k = \omega ar\sin\theta_k/cr_k$, получим корни уравнения $\theta_{k1} = 0$, $\theta_{k2} = \pi$. Учитывая, что $T_{k2} = 0$, $T_{k1} = 2$, заключаем, что необходимо найти вклад в интеграл области $\theta_k \sim 0$. В этой области

$$r_k^2 = (r-a)^2 + 2ar(1-\cos\theta_k) \approx r_{k1}^2 + ar\,\theta_k^2,\ r_{k1} = r - a,$$

$$r_k \approx r_{k1} + (ar/2r_{k1})\,\theta_k^2.$$

Перейдем в (9.7.2) к новым переменным интегрирования по сфере x_k, y_k. Направим ось z по радиус-вектору $\vec{r}$. Область интегрирования: $-a \le x_k \le a$, $-a \le y_k \le a$. Уравнение сферы и фазу можно представить в виде

$$x_k^2 + y_k^2 = a^2(1-\cos^2\theta_k) \approx a^2\theta_k^2,$$

$$\phi_k = \frac{\omega}{c}\left[r + \frac{r}{2ar_{k1}}(x_k^2 + y_k^2)\right].$$

Теперь можно вынести в точке $\theta_{k1} = 0$ значение вектора $\frac{1}{r_k}T_k\vec{e}_k = \frac{2}{r_{k1}}\vec{e}$ за знак интеграла и разнести пределы интегрирования до $\pm\infty$. Тогда из (9.7.2) получим

$$\vec{E}(t,x,y,z) = Re\frac{G\omega}{2\pi icar_{k1}}\,\vec{e}\int_{-\infty}^{\infty}dx_k\int_{-\infty}^{\infty}dy_k\,\exp(i\phi_k - i\omega t). \qquad (9.7.3)$$

Теперь, учитывая значение табличного интеграла Гаусса

$$\int_{-\infty}^{\infty}dp\,e^{-iqp^2} = \sqrt{\frac{\pi}{iq}},$$

получим (9.7.1).

9.7.5. Теория дифракции Кирхгофа. Интегральная теорема Кирхгофа является основой теории дифракции коротких волн на предметах с различной проводимостью. Пусть источник световой волны на рис. Д.9.7.4 находится в точке $O(0, 0, 0)$, приемник излучения — в точке $P(0, 0, z)$. Напряженность электрического поля волны задана выражением (9.7.1). Интенсивность волны $J_0 = c\varepsilon_0 G^2 e^2/2$. В плоскости $z = h$ расположен непрозрачный экран, в котором вырезано круглое отверстие радиусом $R >> \lambda$, $R << h$. Координаты центра отверстия $x = 0$, $y = 0$, $z = h$. Наша задача – найти интенсивность волнового поля в точке P.

Очевидно, что в безграничном пространстве соотношение (9.7.2) является, по существу, «тождеством». Если бы краевые значения вектора $\vec{E}$ в точках отверстия были бы известны, то было бы возможно на основе теоремы Кирхгофа получить точное значение напряженности электрического поля в любой точке за экраном. В действительности решение дифракционной задачи включает и нахождение краевых значений вектора $\vec{E}$. Кирхгоф показал, что для приближенного решения задачи дифракции можно использовать невозмущенные значения напряженности электрического поля (9.7.1) на поверхности S.

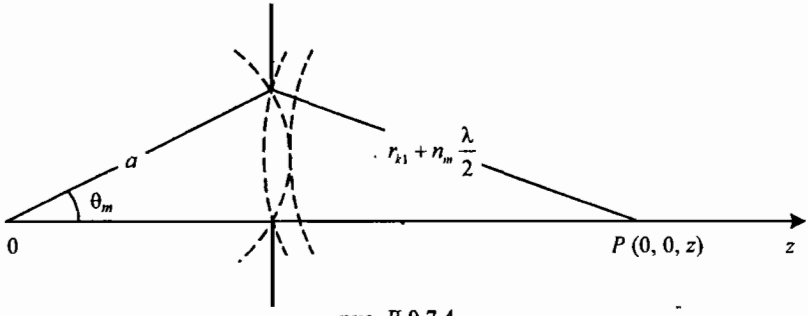


рис. Д.9.7.4.

Выберем в качестве поверхности S неосвещенную поверхность экрана S_c и поверхность шарового сегмента S_Q на сфере радиуса $a = \sqrt{h^2 + R^2}$, ограниченную окружностью радиуса R (рис. Д.9.7.4). На поверхности S_c напряженность поля равна нулю. В приближении Кирхгофа напряженность электрического поля дифрагированной волны $\vec{E}_P(t, x, y, z)$ равна правой части выражения (9.5.2), где подинтегральное выражение зависит от вектора (9.7.1) в точках поверхности S_Q. Ограничимся вычислением напряженности поля в точке $P(0, 0, z)$, полагая $r = z$.

Перейдем к новой переменной интегрирования r_k. Элемент площади шарового слоя $dS_k = 2\pi a^2 \sin\theta_k d\theta_k$. С другой стороны, дифференцируя r_k^2, находим $r_k dr_k = az\sin\theta_k d\theta_k$. Тогда $dS_k = 2\pi(a/z) r_k dr_k$. Пределы изменения угла θ: $0 \le \theta \le \theta_m$, $\cos\theta_m = h/a$, $\theta_m \approx R/a$, $a \approx h$. Из (9.7.2) получим напряженность электрического поля волны в точке P за экраном

$$\vec{E}_P(t, 0, 0, z) = Re\frac{G\omega}{2icz}\int_{r_{k1}}^{r_m} dr_k T_k \vec{e}_k \exp[i\frac{\omega}{c}(a + r_k) - i\omega t], \qquad (9.7.4)$$

$$r_{k1} = z - a, \quad r_m = r_k(\theta_m) = r_{k1} + \frac{zR^2}{2ar_{k1}}.$$

Для того чтобы вычислить правую часть (9.7.4) воспользуемся зонами Френеля. Произведем замену переменных $r_k = r_{k1} + n\lambda/2$, $n = 1, 2, \ldots$. В пределах

любой зоны вектор $T_k\vec{e}_k$ равен постоянному вектору $T_n\vec{e}_n$, где T_n – значение $T_k = 1 + \vec{u}_k\vec{v}_k$ в любой точке зоны. Соотношение между $\vec{u}_k\vec{v}_k = \cos\alpha_k$ и $\cos\theta_k$ найдем из теоремы «синусов» (см. рис. Д.9.7.3): $r_k\sin\alpha_k = z\sin\theta_k$ или $r_{k1}\alpha_k \approx z\theta_k$. Поскольку $\theta_k^2 = n\lambda r_{k1}/az$, то значение $T_n \approx 2 - \alpha_k^2/2 = 2 - n\lambda z/(2ar_{k1})$. Вклад в интеграл (9.7.4) зоны с номером $n \geq 1$ равен

$$I_n = \int\limits_{r_{k1}+(n-1)\lambda/2}^{r_{k1}+n\lambda/2} dr_k \exp[i\frac{\omega}{c}(a+r_k)] = \frac{c}{i\omega}e^{i\omega z/c}e^{i\pi n}(1-e^{-i\pi}) = \frac{2c}{i\omega}e^{i\omega z/c}(-1)^n .$$

Здесь учтено, что $e^{i\pi n} = (-1)^n$ для целых чисел n. Следовательно, (9.5.4) можно представить в виде

$$\vec{E}_P(t, 0, 0, z) = \frac{G}{z}\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}z)\sum_{n=1}^{n_m}(-1)^{n+1}T_n\vec{e}_n , \qquad (9.7.5)$$

где $n_m = \dfrac{zR^2}{\lambda ar_{k1}}$, $T_m = 2 - \dfrac{1}{2}(\dfrac{zR}{ar_{k1}})^2$.

Рассмотрим несколько частных случаев.

А. Пусть радиус отверстия равен радиусу первой зоны Френеля. В этом случае $n_m = 1$, $T_1 \approx 2$, $\vec{e}_1 \approx \vec{e}$,

$$\vec{E}_P(t, 0, 0, z) = 2\frac{G}{z}\vec{e}\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}z).$$

Интенсивность волны за экраном $J_P = 4J_0$ в четыре раза больше, чем в отсутствие экрана.

Б. Радиус отверстия равен радиусу второй зоны Френеля. В этом случае $n_m = 2$, $T_1 \approx 2$, $T_2 \approx 2$, $\vec{e}_2 \approx \vec{e}_1 \approx \vec{e}$, $\vec{E}_P(t, 0, 0, z) = 0$. Интенсивность волны $J_P = 0$.

В. Площадь отверстия равна сумме площади первой зоны и половине площади второй зоны радиусом R: $R^2 = \dfrac{3\lambda ar_{k1}}{2z}$. В этом случае $T_1 \approx T_2 \approx 2$, $\vec{e}_2 \approx \vec{e}_1 \approx \vec{e}$. Поскольку $n_m = 3/2$ не является целым числом, то вклад в интеграл I_n от половины второй зоны равен $\dfrac{c}{i\omega}e^{i\omega z/c}(1-i)$. Напряженность

$$\vec{E}_P(t, 0, 0, z) = \frac{G}{z}\vec{e}\,[\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}z) + \sin(\omega t - \frac{\omega}{c}z)].$$

Интенсивность волны $J_P = 2J_0$ в два раза больше, чем в отсутствие экрана.

Дополнение V. ОПТИКА

Глава 1. Законы геометрической оптики

1.2. Отражение и преломление света

1.2.6. Существенная область отражения. Излучатель электромагнитная волны находится в точке $L(0,\ 0,\ h)$, детектор — в точке $P(x_н,\ 0,\ z_н)$ (Гл.1., рис. 1.2.1). Отражающая поверхность представляет собой часть плоскости $z = 0$ площадью S. Согласно приближению геометрической оптики в точку P приходит луч, отраженный в точке $Q_0(x_0,\ 0,\ 0)$ под углом α: $\sin\alpha = x_0/(h^2 + x_0^2)^{1/2}$. Правильное зеркальное отражение возникает только в том случае, когда выполняются условия применимости геометрической оптики. Оценим значение площади отражающей поверхности, при котором луч отражается под углом α.

Пусть площадь отражающей плоскости равна S. Реальный физический луч отражается не в одной точке плоскости xy. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля поле в точке наблюдения формируется в результате интерференции «виртуальных» волн, «излучаемых» каждой точкой $Q(x,\ y,\ 0)$ плоскости xy. Однако наиболее существенной областью является область плоскости xy с центром в точке $Q_0(x_0,\ 0,\ 0)$ представляющий собой проекцию первых зон Френеля на плоскость xy.

Найдем уравнение кривой, которая ограничивает эту область в плоскости xy, и площадь области. Фаза волны, «излучаемая» одной из точек плоскости xy, равна

$$\Phi(x_н,\ 0,\ z_н) = \omega t - \omega(\ s_{LQ} + s_{QP})/c,$$

$$s_{LQ} = [x^2 + y^2 + h^2]^{1/2},\ s_{QP} = [(x_н - x)^2 + y^2 + z_н^2]^{1/2}.$$

Фаза реальной волны, принимаемой детектором

$$\Phi_н(x_н,\ 0,\ z_н) = \omega t - \omega(s + s_н)/c,$$

$$s = (x_0^2 + h^2)^{1/2},\ s_н = [(x_н - x_0)^2 + z_н^2]^{1/2}.$$

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля разность фаз

$$\Phi_н(x_н,\ 0,\ z_н) - \Phi(x_н,\ 0,\ z_н) = \pi n,\ n \in N.$$

Следовательно, $s_{LQ} + s_{QP} = s + s_н + n\lambda/2$. Положим

$$x = x_0 + x',\quad y = y',\quad x_н - x_0 = s_н\sin\alpha,\quad x_0 = s\sin\alpha,$$

и, считая $|x'|$, $|y'| << s$, $s_н$, разложим s_{LQ}, s_{QP} в ряд, в окрестности точки зеркального отражения Q_0, ограничиваясь величинами второго порядка

малости. Используя разложение $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon + n(n-1)\varepsilon^2/2 + \ldots$, находим

$$s_{QP} = [s_н^2 - 2s_н x'\sin\alpha + x'^2 + y^2]^{1/2} \approx s_н[1 - x'\sin\alpha/s_н + (x'^2 + y^2)/2s_н^2 - x'^2\sin^2\alpha/2s_н^2],$$

$$s_{LQ} = [s^2 + 2sx'\sin\alpha + x'^2 + y^2]^{1/2} \approx s[1 + x'\sin\alpha/s + (x'^2 + y^2)/2s^2 - x'^2\sin^2\alpha/2s^2].$$

В результате получим уравнение эллипса

$$(\cos^2\alpha x'^2 + y^2)(1/s + 1/s_н) = n\lambda.$$

В стандартной форме имеем

$$[(x - x_н)/A_n]^2 + (y/R_n)^2 = 1,$$

где полуоси элипса

$$A_n = R_n/\cos\alpha,\ R_n = [n\lambda s s_н/(s + s_н)]^{1/2}.$$

Эллипсы представляют собой границы сечения эллипсоида Френеля с фокусами в точках $P(x_н, 0, z_н)$, $L'(0, 0, -h)$ плоскостью $z = 0$ или проекции зон Френеля на плоскость $z = 0$. Эти эллипсы сильно вытянуты в направлении к источнику излучения — при скользящем падении ($\alpha \sim \pi/2$) уже первые зоны могут охватывать большую часть трассы между точками L и P.

Площадь эллипса с номером n равна

$$S_n = \pi A_n R_n = \pi n\lambda s s_н/[(s + s_н)\cos\alpha].$$

В случае $s >> s_н$, площадь первой зоны $S_1 = \pi\lambda s_н/(\cos\alpha)$. Закон отражения выполняется при условии $S_1 << S$:

$$\pi\lambda s_н/\cos\alpha << S \quad \text{или} \quad \pi\lambda z_н/\cos^2\alpha << S.$$

1.4. Отражение и преломление в анизотропной среде

1.4.1. Плоская монохроматическая волна в однородном одноосном кристалле. В 1669 г. датчанин Эразм Бартолин опубликовал работу, в которой описал «удивительное и странное» преломление света кристаллом исландского шпата. Луч света падает на плоскую поверхность пластинки и после преломления может раздвоится. Один из лучей подчиняется обычному закону преломления (1.2.2). Второй луч, называемый сейчас необыкновенным, этому закону не удовлетворяет. Существует также направление, вдоль которого луч не раздваивается.

Эффект двойного лучепреломления впервые объяснил Христиан Гюйгенс. В 1690 г. он опубликовал работу, законченную еще в 1678 г. Гюйгенс предположил, что в кристалле распространяются две независимые волны с различными скоростями распространения и используя свой принцип построения огибающих волн, получил результаты, согласующиеся с опытом. Это согласие представлялось ему триумфом теории.

Кристаллу исландского шпата можно придать форму параллелепипеда с гранями в виде ромбов с углами 102° и 78°. Прямая, проходящая через две противоположные вершины, в которых сходятся стороны трех тупых углов, называется оптической осью кристалла.

Оптические свойства кристалла определяются соотношением между вектором электрической индукции $\vec{D}$ и вектором напряженности электрического поля $\vec{E}$. В декартовой системе координат $\vec{D} = \varepsilon_0(\varepsilon E_1, \varepsilon E_2, \varepsilon_3 E_3)$, где ε_3, ε — постоянные коэффициенты, характеризующие анизотропию (от греч. *anisos* — неравный и *tropos* — направление) электрических свойств одноосного кристалла по оси z и в плоскостях, перпендикулярных оси z.

Ищем частое решение уравнений Максвелла в виде плоской волны

$$\vec{E}(t, x, y, z) = Re\ \vec{e}\exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}),$$
$$\vec{H}(t, x, y, z) = Re\ \vec{h}\exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}),$$

где $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ — волновой вектор. Постоянные векторы $\vec{e}$ и $\vec{h}$ удовлетворяют однородным уравнениям

$$\vec{k}\times\vec{e} = \mu_0\omega\vec{h}, \tag{1.4.1}$$

$$\vec{k}\times\vec{h} = -\omega\vec{d}, \tag{1.4.2}$$

где $\vec{d} = \varepsilon_0(\varepsilon e_1, \varepsilon e_2, \varepsilon_3 e_3)$. Электромагнитное поле в кристалле представляет собой суперпозицию двух независимых волн.

1. Поперечно-электрическая TE (от англ. *Transverse Electric*) или обыкновенная волна определяется вектором $\vec{w}_o = (0, 0, w_o)$: $\vec{e} = \mu_0\omega\,\vec{w}_o\times\vec{k}$. Тогда из (1.4.1) получим $\vec{h} = \vec{k}\times(\vec{w}_o\times\vec{k}) = \vec{w}_o k^2 - \vec{k}(\vec{k}\vec{w}_o)$. Следовательно,

$$e_1 = -\mu_0\omega k_2 w_o,\ e_2 = \mu_0\omega k_1 w_o,\ e_3 = 0, \tag{1.4.3}$$
$$h_1 = -k_3 k_1 w_o,\ h_2 = -k_3 k_2 w_o,\ h_3 = k_\perp^2 w_o.$$

где $k_\perp^2 = k_1^2 + k_2^2$. Подставляя (1.4.3) в (1.4.2) получим закон дисперсии обыкновенной волны

$$\varepsilon(\omega/c)^2 = \vec{k}^2. \tag{1.4.4}$$

2. Поперечно-магнитная TM (от англ. *Transverse Magnetic*) или необыкновенная волна определяется вектором $\vec{w}_н = (0, 0, w_н)$: $\vec{h} = \varepsilon_0\omega\,\vec{k}\times\vec{w}_н$. Подставим $\vec{h}$ в (1.4.2) и учтем соотношение $\vec{k}\times\vec{h} = \varepsilon_0\omega[\vec{k}(\vec{k}\vec{w}_н) - \vec{w}_н k^2]$. Тогда получим

$$e_1 = -(k_3 k_1/\varepsilon)w_н,\ e_2 = -(k_3 k_2/\varepsilon)w_н,\ e_3 = (k_\perp^2/\varepsilon_3)w_н, \tag{1.4.5}$$
$$h_1 = \varepsilon_0\omega k_2 w_н,\ h_2 = -\varepsilon_0\omega k_1 w_н,\ h_3 = 0.$$

Подставляя $\vec{e}$, $\vec{h}$ в (1.4.1), получим закон дисперсии необыкновенной волны

$$\frac{k_\perp^2}{\varepsilon_3}+\frac{k_3^2}{\varepsilon}=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \qquad (1.4.6)$$

Уравнения (1.4.4), (1.4.6) определяют поверхности волновых векторов $\vec{k}_o=(k_1, k_2, k_{3o})$, $\vec{k}_н=(k_1, k_2, k_{e3})$. Здесь k_{o3}, k_{e3} — корни уравнений (1.4.4), (1.4.6).

Полагая $\vec{k}=(\omega/c)\vec{n}$, получим из (1.4.3), (1.4.5) векторы напряженности электрического поля в случае обыкновенной и необыкновенной волн

$$\vec{e}_0=\frac{1}{n_\perp}\begin{pmatrix}-n_2\\ n_1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_н=\frac{1}{n_\perp}\begin{pmatrix}-n_1 n_{e3}/\varepsilon\\ -n_2 n_{e3}/\varepsilon\\ n_\perp^2/\varepsilon_3\end{pmatrix}. \qquad (1.4.7)$$

Отметим, что векторы $\vec{e}_0$ и $\vec{e}_н$ перпендикулярны друг другу: $\vec{e}_0\vec{e}_н=0$.

Общее решение уравнений Максвелла соответствует двум плоским волнам, поляризованным в двух взаимно перпендикулярных направлениях:

$$\vec{E}(t, x, y, z)=Re\,[C_o\,\vec{e}_0\exp(-i\omega t+i\,\vec{k}_0\vec{r})+$$
$$+C_н\,\vec{e}_н\exp(-i\omega t+i\,\vec{k}_e\vec{r})], \qquad (1.4.8)$$

где C_0, $C_н$ — постоянные коэффициенты.

1.4.2. Распространение волны через плоскопараллельную пластинку. Вырежем из шпата пластинку толщиной d так, чтобы оптическая ось z была параллельна граням пластинки, занимающую область $0 \le x \le d$. В положительном направлении оси x на пластинку падает линейно поляризованная волна. Наша задача — найти вектор напряженности электрического поля в области $x \ge d$.

Очевидно падающая волна отражается и преломляется на плоскости $x = 0$. Преломленная волна отражается и преломляется на плоскости $x = d$. Волна, отраженная от плоскости $x = d$, преломляется на плоскости $x = 0$. В результате интерференции интенсивность волн в областях $x < 0$ и $x > d$ имеет максимумы и минимумы, зависящие от толщины пластинки. Более того при определенной толщине пластинки интенсивность отраженной волны можно уменьшить до нуля. Для анализа этих эффектов необходимо учесть условия непрерывности компонент E_y, E_z, H_y, H_z на каждой плоскости, которые приводят к восьми алгебраическим уравнениям для коэффициентов отражения и преломления обыкновенной и необыкновенной волн. Поэтому ограничимся приближенным решением проблемы, пренебрегая отражением.

Вектор напряженности электрического поля в области $x \le 0$

$$E_x=0, \qquad E_y=Re\,a\exp(ikx-i\omega t), \qquad E_z=Re\,b\exp(ikx-i\omega t),$$

где a, b — амплитуды падающей волны, $k=\omega/c$. В области $0 \le x \le d$ в соответствии с (1.4.8) имеем

$$E_x = 0, \quad E_y = Re\, C_0 \exp(ik_0 x - i\omega t), \quad E_z = Re\, (C_н / n_e) \exp(ik_н x - i\omega t),$$

где $k_0 = \omega n_0 / c$, $n_0 = \sqrt{\varepsilon} = 1{,}658$; $k_н = \omega n_e / c$, $n_e = \sqrt{\varepsilon_3} = 1{,}486$. В области $x \geq d$ вектор напряженности

$$E_x = 0, \qquad E_y = Re\, A \exp(ikx - i\omega t), \qquad E_z = Re\, B \exp(ikx - i\omega t),$$

где A, B — амплитуды преломленной волны. Учитывая непрерывность компонент E_y, E_z, на плоскости $x = 0$, получим $C_0 = a$, $C_н = n_e b$. Условие непрерывности компонент E_y, E_z, на плоскости $x = d$ приводит к решению

$$A = a\exp(ik_0 d - ikd), \; B = b\exp(ik_н d - ikd).$$

Преобразование поляризации. В области $x \geq d$ в воздухе распространяется эллиптически поляризованная волна:

$$E_x = 0, \quad E_y = a\cos(\omega t - k_0 d - kx + kd),$$

$$E_z = b\cos(\omega t - k_н d - kx + kd).$$

1. Пусть $(k_0 - k_н)d = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда имеем линейно поляризованную волну

$$E_x = 0, \quad E_y = (-1)^n a\cos\varphi, \quad E_z = b\cos\varphi, \; \varphi = \omega t - k_н d - kx + kd.$$

2. Пусть $(k_0 - k_н)d = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В этом случае при выполнении условия $a = b = E$ получим волну круговой поляризации $E_x = 0$, $E_y = (-1)^n E\sin\varphi$, $E_z = E\cos\varphi$.

1.4.3. Лучевые скорости волн. Перенос энергии электромагнитной волны определяется вектором Пойнтинга $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Подставляя (1.4.8) и учитывая (1.4.1), получим среднее значение $\vec{s} = <\vec{S}> = \vec{s}_0 + \vec{s}_н$,

$$\vec{s}_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\, \vec{n}_0\, \vec{e}_0^{\,2}\, C_0^2, \qquad \vec{s}_н = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c[\, \vec{n}_н\, \vec{e}_н^{\,2} - \vec{e}_н(\vec{n}_н \vec{e}_н)\,]\, C_н^2, \tag{1.4.9}$$

Величина вектора $\vec{s}$ определяет интенсивность волны. В изотропной среде направление вектора $\vec{s}$ всегда совпадает с направлением волнового вектора. В анизотропной среде вектор $\vec{s}$ не коллинеарен вектору $\vec{k}$. Подставляя (1.4.7) в (1.4.9), находим

$$\vec{s}_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c(n_1, n_2, n_{o3})\, C_0^2, \quad \vec{s}_н = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\left(\frac{n_1}{\varepsilon_3}, \frac{n_2}{\varepsilon_3}, \frac{n_{e3}}{\varepsilon}\right) C_н^2.$$

Очевидно $\vec{s}_0 \vec{e}_0 = 0$, $\vec{s}_н \vec{e}_н = 0$. Плотность энергии поля

$$u_{em} = \frac{1}{2}(\, \vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\,).$$

Среднее значение плотности энергии поля $u = \langle u_{em} \rangle = u_0 + u_н$,

$$u_0 = \frac{1}{4}(\vec{e}_0\vec{d}_0 + \mu_0 \vec{h}_0^2)C_0^2 = \frac{1}{2}\vec{e}_0\vec{d}_0\ C_0^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon C_0^2,$$

$$u_н = \frac{1}{4}(\vec{e}_н\vec{d}_н + \mu_0 \vec{h}_н^2)C_н^2 = \frac{1}{2}\vec{e}_н\vec{d}_н\ C_н^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 C_н^2,$$

где $\vec{d}_0 = \varepsilon_0(\varepsilon e_{01}, \varepsilon e_{02}, 0)$, $\vec{d}_н = \varepsilon_0(\varepsilon e_{н1}, \varepsilon e_{н2}, \varepsilon_3 e_{н3})$.

Лучевые скорости обыкновенной и необыкновенной волн определяются отношениями

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{s}_0}{u_0},\quad \vec{v}_0 = c\frac{\vec{n}}{\varepsilon}, \tag{1.4.10}$$

$$\vec{v}_н = \frac{\vec{s}_н}{u_н},\quad \vec{v}_н = c\left(\frac{n_1}{\varepsilon_3}, \frac{\vec{n}_2}{\varepsilon_3}, \frac{n_{e3}}{\varepsilon}\right). \tag{1.4.11}$$

Лучевая (или групповая) скорость волны определяет скорость переноса электромагнитной энергии.

1.4.4. Траектории лучей в кристалле. Из (1.4.4) найдем величину вектора $n = n_0$, где $n_0 = \sqrt{\varepsilon}$ — показатель преломления обыкновенной волны. Полагая в (1.4.6) $n_1 = n_e\sin\theta$, $n_2 = 0$, $n_{e3} = n_e\cos\theta$, получим

$$n_e^2\left(\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_3} + \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon}\right) = 1, \tag{1.4.12}$$

где $n_e(\theta)$ — «показатель преломления» необыкновенной волны. В отличие от изотропной среды величина n_e зависит от направления вектора $\vec{n}_e$ и не имеет непосредственного отношения к закону преломления (1.2.2).

В геометрической оптике анизотропных сред волну представляют в виде семейства кривых, касательные к которым в каждой точке направлены по лучевой скорости.

Из (1.4.11) и (1.4.12) получим лучевую поверхность в пространстве скоростей необыкновенного луча,

$$\varepsilon_3 v_{н\perp}^2 + \varepsilon v_{н3}^2 = c^2, \tag{1.4.13}$$

которая представляет собой эллипсоид вращения. Лучевая поверхность в пространстве скоростей обыкновенного луча является сферой $\varepsilon v_0^2 = c^2$, которая в случае шпата находится внутри эллипсоида. Волновой вектор $\vec{k}_0$ перпендикулярен к поверхности сферы, вектор $\vec{k}_н$ — к поверхности эллипсоида.

Вернемся к задаче, рассмотренной в п. 1.4.2. Пусть луч света падает на пластинку под углом α к оси x (рис. Д.1.4.1). Углы преломления необыкно-

венной и обыкновенной волн соответственно равны β и β_o. Из граничных условий непрерывности касательной компоненты волнового вектора следует, что $\sin\alpha = n_3$ или $\sin\alpha = n_e\cos\theta$ для необыкновенной волны и $\sin\alpha = n_o\sin\beta_o$ для обыкновенной волны.

Получим закон преломления необыкновенной волны. Траектория луча — отрезок прямой, образующий угол β с осью x, $\mathrm{tg}\beta = v_{нz}/v_{нx}$. Учитывая (1.4.11), получим систему уравнений

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\varepsilon_3 \cos\theta}{\varepsilon \sin\theta}, \qquad \sin\alpha = n_e\cos\theta,$$

из которой находим

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{\varepsilon_3}\sin\alpha}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon)\sin^2\alpha}}.$$

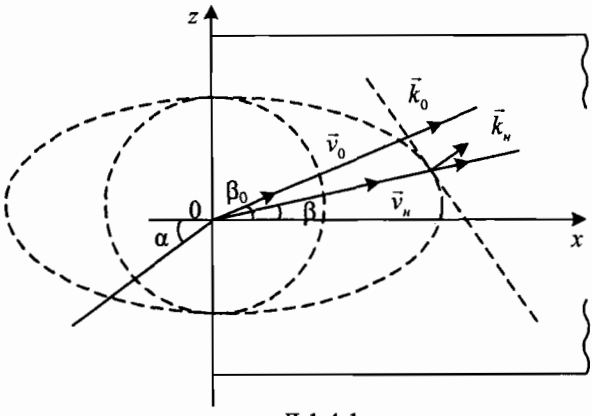


рис. Д.1.4.1.

Пример 1.4.1. Двоякопреломляющая пластинка. Вырежем из шпата пластинку толщиной d так, что оптическая ось z образует угол γ с координатной осью z', перпендикулярной плоским граням пластинки в области $0 \le z' \le d$. Луч света падает на пластинку в положительном направлении оси z'. Наша задача — найти расстояние между обыкновенным и необыкновенным лучами h в области $z' \ge d$.

Падающая волна делится на обыкновенную и необыкновенную волны. Из граничных условий следует, что волновые векторы обеих волн направлены по оси z'. На рис. Д.1.4.2 изображены сечения эллипсоида и сферы плоскостью zx. Величины большой и малой полуосей эллипса равны $1/n_e$ и $1/n_0$. Волновые векторы $\vec{k}_0$ и $\vec{k}_н$ перпендикулярны к прямым $z' = \mathrm{const}$, касающихся окружности и эллипса. В координатах системы xyz вектор

$\vec{n} = n_e(\sin\gamma, 0, \cos\gamma)$. Траектории лучей представляют собой отрезки прямых, параллельных векторам $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_н$.

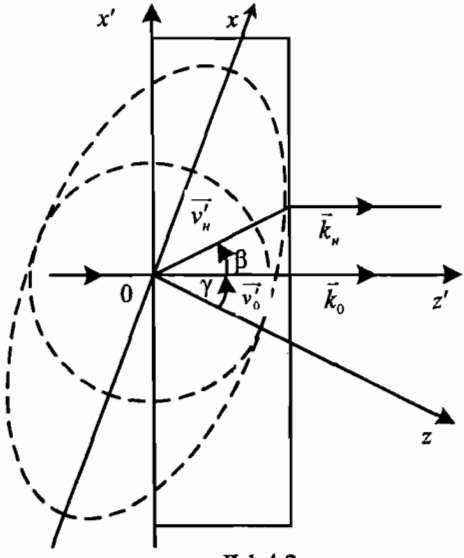


рис. Д.1.4.2

Найдем компоненты этих векторов в системе координат $x'y'z'$, используя соотношение между компонентами любого вектора $\vec{V}$ в двух системах координат:

$$V'_x = V_x\cos\gamma - V_z\sin\gamma, \quad V'_y = V_y, \quad V'_z = V_x\sin\gamma + V_z\cos\gamma.$$

Учитывая (1.4.10), (1.4.11), получим $v'_{ox} = 0$, $v'_{oz} = c/n_o$,

$$v'_{нx} = cn_e\sin\gamma\cos\gamma(1/\varepsilon_3 - 1/\varepsilon),\ v'_{нz} = cn_e(\sin^2\gamma/\varepsilon_3 + \cos^2\gamma/\varepsilon).$$

Отметим, что вектор $\vec{v}_н$ можно представить в форме, не связанной с выбором системы координат:

$$\vec{v}_н = c\frac{\vec{n}}{\varepsilon_3} + c\vec{a}(\vec{a}\vec{n})\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_3}\right),$$

где $\vec{a}$ — единичный вектор, параллельный оптической оси. Из рис. Д.1.4.2 следует, что $h = d\,\mathrm{tg}\beta$, $\mathrm{tg}\beta = v'_{нx}/v'_{нz}$,

$$h = d\frac{\sin\gamma\cos\gamma(\varepsilon - \varepsilon_3)}{\varepsilon\sin^2\gamma + \varepsilon_3\cos^2\gamma}.$$

Отметим, что при $\gamma = \pi/4$ значение $h = d(\varepsilon - \varepsilon_3)/(\varepsilon + \varepsilon_3)$. Если грани пластинки перпендикулярны или параллельны оптической оси, то $h = 0$.

Глава 3. Основы голографии

3.1. Голография

3.1.1. Принципы голографии. Световой пучок, отраженный от предмета, представляет собой наложение электромагнитных волн, исходящих от различных точек предмета. Информация об объемности предмета, т. е. о различии расстояний от наблюдателя до каждой точки предмета, содержится в фазах волн. При обычном фотографировании степень почернения негатива определяется интенсивностью волны — суммой интенсивностей волн, исходящих от каждой точки предмета и зависящих только от амплитуд волн. Информация о фазе безвозвратно теряется — предмет на фотографии выглядит плоским. Для получения объемного изображения предмета необходимо регистрировать на фотопленке амплитуды и фазы Эта задача была решена на основе нового метода, открытого Д. Габором в 1948 г. (Нобелевская премия, 1971 г.). Новый метод получил название голография (от греч. *holos* — весь, *grapho*-пишу). Этот термин, означающий «полная запись», удачно передает возможности нового метода.

Одна из схем метода включает две операции. 1. Предмет освещают когерентным источником света — лазером. Волна от источника и волна, рассеянная предметом, образуют интерференционную картину, которую фиксируют на фотопленку и затем проявляют. Так изготовляют голограмму. 2. Голограмму освещают когерентным источником света. В результате дифракции восстанавливается волна, рассеянная предметом.

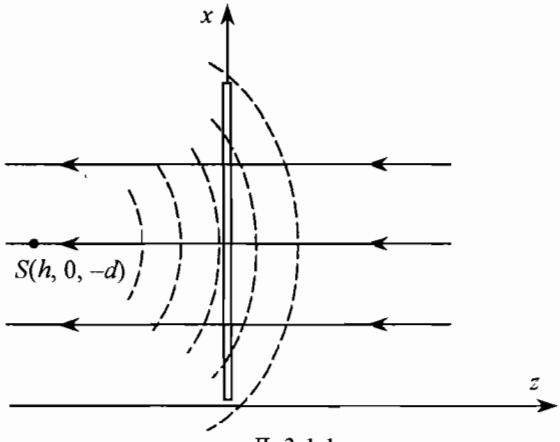


рис. Д. 3.1.1.

3.1.2. Формирование голограммы. На рис. Д.3.1.1 фотопленка с достаточно прозрачным слоем эмульсии расположена в плоскости xy, точечный предмет — в точке $S(h, 0, -d)$. Опорная линейно — поляризованная плоская волна, излучаемая лазером, распространяется в отрицательном направлении

оси z. Напряженность электрического поля $\vec{E}_л(t, x, y, z) = a\vec{e}\cos(\omega t + \omega z/c)$, $\vec{e} = (e, 0, 0)$ — вектор поляризации, размерность e — В/м. Интенсивность волны $J_0 = c\varepsilon_0 a^2/2$. В результате рассеяния волны предметом возникает сферическая «предметная волна» напряженностью

$$\vec{E}_S(t, x, y, z) = (G\,\vec{e}_{SM}/r)\cos(\omega t - \omega r/c - \phi),$$

где r — расстояние от точки S до точки $M(x, y, z)$, $\vec{e}_{SM} = \vec{n}_M(\vec{n}_M\vec{d}) - \vec{d}$, $\vec{n}_M$ — единичный вектор на прямой SM, $\vec{d} = (-1, 0, 0)$, $\phi = \omega d/c + \alpha$, α — фаза отраженной волны.

В точке фотопленки $Q(x, y, 0)$ напряженность электрического поля

$$\vec{E}(t, x, y, 0) = \vec{e}\cos\omega t + (G\vec{e}_{SQ}/r_{SQ})\cos(\omega t - \omega r_{SQ}/c - \phi),$$
$$r_{SQ} = [(x-h)^2 + y^2 + d^2)]^{1/2}.$$

Интенсивность поля в точке Q равна $J(x, y) = c\varepsilon_0\langle E^2\rangle_{ср}$,

$$J(x, y) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c[(G\vec{e}_{SQ}/r_{QS})^2 + a^2 + 2(Ga\vec{e}\vec{e}_{SQ}/r_{QS})\cos(\omega r_{SQ}/c + \phi)]. \quad (3.1.1)$$

Благодаря введению опорной волны возникла интерференционная картина. Проявленная пленка — негатив или позитив — представляет собой голограмму точечного объекта. Голограмма трехмерного предмета напоминает засвеченную пленку, на которой нельзя обнаружить изображение.

3.1.3. Восстановление изображения предмета. Для получения изображения поместим голограмму в плоскость xy и осветим ее параллельным пучком света от лазера с напряженностью электрического поля $E_л(t, x, y, z) = e\cos(\omega t - \omega z/c)$, распространяющегося в положительном направлении оси z (рис. Д.3.1.2). Амплитуда волны, прошедшей через голограмму $A(x, y) = T(x, y)e$, зависит от коэффициента пропускания негатива $T(x, y)$, который определяется экспозицией и свойствами эмульсии. В наиболее благоприятном случае

$$T(x, y) = \nu_0 - \nu_1[J(x,y) - J_0], \quad (3.1.2)$$

где ν_0, ν_1 — постоянные коэффициенты. Первое слагаемое в (3.1.1) меньше остальных и им можно пренебречь. Подставляя (3.1.1) в (3.1.2), получим

$$T(x, y) = \nu_0 - \nu/ar_{SQ}\cos(\omega r_{SQ}/c + \phi), \quad (3.1.3)$$

где $\nu = G\,J_0\,\vec{e}\vec{e}_{SQ}\,\nu_1 \approx G\,J_0\nu_1$.

Напряженность поля с правой стороны от голограммы в точке $P(x, 0, z)$ определяется соотношением, полученным Г. Кирхгофом в теории дифракции:

$$\vec{E}_0(t, x, 0, z) = 1/\lambda\sum_{k=1}^{N}(\Delta S_k/r_k)\,[\vec{n}_k(\vec{e}\vec{n}_k) - \vec{e}]\,T(x_k, y_k)\sin(\omega t - \omega r_k/c). \quad (3.1.4)$$

Здесь ΔS_k — площадь малого участка поверхности голограммы в окрестности точки $Q(x_k, y_k, 0)$, n_k — единичный вектор, параллельный отрезку прямой QP, $r_k = r_{QP}$ — расстояние от точки Q до точки P. Суммирование проводится по всем N элементам ΔS_k голограммы ($k = 1,2, ..., N$). Поскольку

$$T(x_k, y_k)\sin(\omega t - \omega r_k/c) =$$
$$= v_0\sin(\omega t - \omega\tau_{QP}) - v/(ar_{SQ})\sin(\omega t - \omega\tau_1 - \phi) - v/(ar_{SQ})\sin(\omega t - \omega\tau_2 + \phi),$$
$$c\tau_{1,2}(x_k, y_k) = r_{QP} \pm r_{SQ} = [(x - x_k)^2 + y_k^2 + z^2]^{1/2} \pm [(x_k - h)^2 + y_k^2 + d^2)^{1/2},$$

$c\tau_{QP} = r_{QP}$, то (3.1.4) представляет собой сумму трех слагаемых, соответствующих трем волнам, возникающим за голограммой.

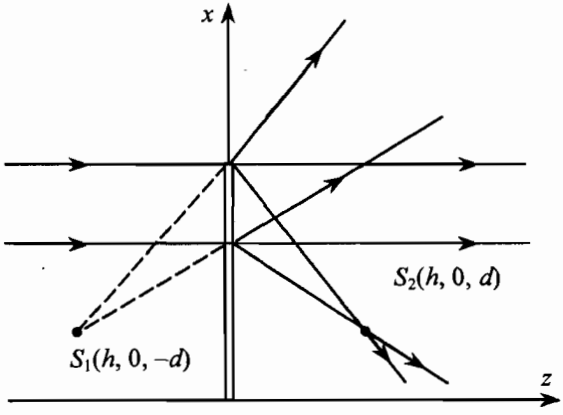


рис. Д. 3.1.2

Первое слагаемое соответствует плоской волне, распространяющейся в направлении оси z, поскольку основной вклад в (3.1.4) в соответствии с принципом Ферма дают точки, удовлетворяющие условию $d\tau_{QP}/dx_k = 0$, $d\tau_{QP}/dy_k = 0$ или $x_k = x$, $y_k = 0$. Следовательно, минимальное значение τ_{QP} равно $\tau_0 = \tau_{QP}(x, 0) = z/c$.

Второе слагаемое соответствует волне, исходящей из точки $S_1(h, 0, -d)$. Действительно, согласно принципу Ферма, наименьшее значение времени распространения волны от голограммы до точки P определяется условием $d\tau_1/dx_k = 0$, $d\tau_1/dy_k = 0$: $(x - x_k)/r_{QP} = (x_k - h)/r_{SQ}$, $y_{k0} = 0$. Отсюда находим экстремальное значение $x_k = x_{k0}$, $x_{k0} = (xd + hz)/(z + d)$. Наименьшее значение времени $\tau_м = \tau_1(x_{k0},0) = r_{SP}/c$, $r_{SP} = [(x - h)^2 + (z + d)^2]^{1/2}$, где r_{SP} — расстояние между точками $S_1(h, 0, -d)$ и $P(x, 0, z)$.

Аналогичным образом находим, что функция $\tau_2(x_k, y_k)$ достигает наименьшего значения при $y_{k0} = 0$ и $x_{k0} = (hz - xd)/(z - d)$. Следовательно, $\tau_R = \tau_1(x_{k0}, 0) = r_{RP}/c$, где $r_{RP} = [(x - h)^2 + (z - d)^2]^{1/2}$ — расстояние между точками $S_2(h, 0, d)$ и $P(x, 0, z)$. Поэтому третье слагаемое соответствует волне,

исходящей из точки $S_2(h, 0, d)$. В результате вычисления суммы (3.1.4) (в действительности интеграла по площади голограммы) получим

$$\vec{E}_0(t, x, 0, z) = \vec{e}\, v_0 \cos(\omega t - \omega z/c) - G\, \vec{e}_{SP}\, v_1/(2r_{SP}) \cos(\omega t - \omega r_{SP}/c - \phi) +$$

$$+ G\, \vec{e}_{RP}\, v_1/(2r_{RP}) \cos(\omega t - \omega r_{RP}/c + \phi). \qquad (3.1.5)$$

На рис. Д.3.1.2 «изображены» волны, порождаемые дифракцией плоской волны на голограмме. Сквозь голограмму можно хорошо рассмотреть мнимое изображение S_1 предмета S, который был расположен в том же самом месте. *Мы восстановили сферическую волну, совпадающую с реальной волной, исходящей от предмета S.* Одновременно возникает действительное изображение S_2, расположенное симметрично мнимому изображению S_1.

Точно так же получают голограмму трехмерного предмета и восстанавливают трехмерное изображение — его можно рассматривать с разных сторон. Создается полное ощущение объемности. Действительное изображение имеет существенный недостаток — оно псевдоскопично: впадины выглядят как выпуклости и, наоборот, выпуклые области вогнуты.

3.1.4. Некоторые свойства голограмм. Голограммы обладают уникальными свойствами. Если вы повредили часть голограммы, то по оставшейся части можно восстановить изображение объекта, так как любой фрагмент голограммы содержит полную информацию об амплитуде и фазе волны. Рис. Д.3.1.2 иллюстрирует эту ситуацию.

На одной и той же фотопленке можно записать множество голограмм, каждая из которых соответствует предмету или сценам, освещаемым опорными волнами, падающими под различными углами к плоскости пленки. Для последующего считывания какой-либо сцены необходимо соответственно ориентировать голограмму относительно опорной волны.

Можно осуществить *ассоциативный* поиск информации: освещая голограмму, на которой записано изображение нескольких предметов, светом лазера, отраженным от одного из них, вы получите изображение всех предметов: возникают *фантомные* (от франц. *fantome* — призрак) изображения. Возможно, так реализуется механизм памяти нейроклетками мозга.

С помощью голографической установки можно произвести «вычитание» предметов. Эта операция осуществляется наложением двух интерференционных картин. Пусть фотопленка содержит запись предметов A_1, A_2,... . Затем добавим предмет C, осветим все предметы опорной волной, прошедшей через фазовую пластинку, сдвигающую фазу на π, снова произведем экспозицию и только после этого проявим пленку. Мы получим голограмму, на которой останется запись предмета C. По-существу, этот метод позволяет наблюдать интерференционную картину двух световых потоков, освещавших фотопленку в различные интервалы времени.

Задача 3.1.1. Для регистрации голограммы точки $S(0, 0, -d)$ использована опорная линейно — поляризованная плоская волна, распространяющаяся

в положительном направлении оси z, с напряженностью электрического поля $\vec{E}_л(t, x, y, z) = \vec{e}\cos(\omega t - \omega z/c)$.

Покажите, что в окрестности начала координат $(x^2 + y^2)^{1/2} << d$ негатив–голограмма представляет собой систему концентрических прозрачных и темных колец. Радиусы прозрачных колец $R_n = (2n\lambda d)^{1/2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Голограмма точечного объекта представляет собой так называемую *зонную пластинку Френеля.*

3.1.5. Необъятные возможности голографии. В 1962 г. Ю.Н. Денисюк, будучи аспирантом, предложил новый метод записи голограмм в трехмерных средах. Эти толстослойные голограммы, получившие широкое распространение, обладают поразительной особенностью — для восстановления изображения достаточно осветить ее обычной лампой. Наиболее простой способ получения толстослойных голограмм изображен на рис. Д.3.1.1

Голограмму можно получить в результате интерференции пучков элементарных частиц. Используя приемник — преобразователь энергии и ЭВМ для обработки данных, получают голограммы в любом диапазоне электромагнитных и звуковых волн. Изображение можно восстановить в видимом свете или на дисплее и использовать его для последующей обработки. На ЭВМ можно получить искусственную цифровую голограмму и восстановить объемное изображение несуществующих объектов.

Трехмерные свойства голографических изображений уже нашли применение при анализе деформаций, в медицинской диагностике, в геофизике, гидролокации и т. д. Ведутся работы по созданию голографического кинематографа и трехмерного телевидения. Виртуальные линзы на оконном стекле, образуемые голограммой, обеспечивают постоянное освещение комнаты от восхода Солнца до заката. Наличие голограммы на упаковке продуктов или лекарств затрудняет их подделку. В 1987 г. получен патент по технологии изготовления «голографических» конфет: при повороте прозрачной конфеты появляются кадры из мультфильмов.

3.2. Радар бокового обзора

Радиолокационная установка (или радар) состоит из трех блоков — генератора напряжения высокой частоты, приемника и индикатора. Излучение и прием радиоволн осуществляются одной и той же антенной. На экране индикатора отображается информация о дальности, скорости и других характеристиках отражающего объекта.

Проблема повышения разрешающей способности радара особенно актуальна при обзоре поверхности под летательным аппаратом — спутником или самолетом. Обычно передатчик излучает последовательность электромагнитных волн, представляющих высокочастотные импульсы частотой $\nu = \omega/2\pi$, длительностью τ с периодом повторения T. Волна, отразившись от объекта, возвращается к радару. Ошибка в определении дальности $\Delta s \approx \lambda$. Точность определения направления на объект определяется размерами антенны. Основная часть энергии излучения антенны диаметром D сосредоточена внутри

конуса с углом раствора $\theta \approx \lambda/D$. На расстоянии s от антенны линейные размеры освещенной области $L \approx s\lambda/D$. Поэтому при наблюдении отраженной волны точность определения координат объекта ограничена значением дифракционного разрешения L. Для того чтобы с помощью радара получить изображение местности, не уступающее по разрешению аэрофотоснимкам, необходимо иметь антенну большого размера, которую невозможно установить на самолете. Например, для получения такого же разрешения, как у объектива диаметром D_c = 10 см в видимой части спектра (λ_c = 500 нм), размер антенны, излучающей волны длиной λ = 3 см, должен быть равен D = 6000 м. Это ограничение удалось преодолеть с помощью радара бокового обзора и когерентной обработке отраженных сигналов.

Радар, установлен на самолете, летящем в плоскости xz со скоростью $\vec{v} = (v, 0, 0)$ на высоте b (рис. Д.3.2.1). Антенна шириной a, длиной $D >> a$, вытянута вдоль оси самолета и формирует диаграмму направленности, перпендикулярную оси самолета, широкую в пределах угла $\sim\lambda/a$ в вертикальной плоскости и узкую в интервале углов $\theta \approx \lambda/D$ в горизонтальной плоскости. Излучаемые импульсы создаются напряжением $V_C(t) = V(t)\cos\omega t$, где функция

$$V(t) = \varepsilon_0,\ nT \le t \le \tau + nT; \qquad V(t) = 0,\ nT + \tau \le t \le (n+1)T,$$

n — целое число. В пределах диаграммы направленности электромагнитная волна занимает шаровой слой толщиной $c\tau$, распространяющийся со скоростью c.

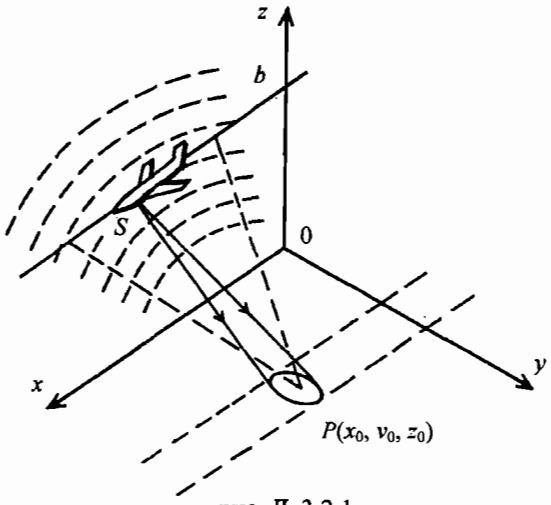


рис. Д. 3.2.1

В точке $P(x_0, y_0, z_0)$ возникает отраженная от объекта волна. Электромагнитное поле в некоторой точке $F(x, y, z)$ в момент времени t определяется значением функции $V_C(t')$ в предшествующий момент времени $t' = t - \dfrac{2R}{c}$,

где $R = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ — расстояние между точками F и P. Поэтому фаза волны в точке F равна

$$\Phi(t, x, y, z) = \omega\left(t - \frac{2R}{c}\right) + \alpha,$$

где α — фаза отраженной волны. В каждой небольшой области пространства отраженную волну можно рассматривать как плоскую волну, распространяющуюся в направлении волнового вектора $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$,

$$k_x = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta x},\ k_y = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta y},\ k_z = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}.$$

В окрестности антенны в точке с координатами $x = vt$, $y = 0$, $z = b$ волновой вектор

$$k_x = 2\omega\frac{vt - x_0}{cs},\ k_y = -2\omega\frac{y_0}{cs},\ k_z = 2\omega\frac{b - z_0}{cs}, \qquad (3.2.1)$$

где $s(t) = \sqrt{(vt-x_0)^2+y_0^2+(b-z_0)^2}$ — расстояние от объекта до самолета. Фаза волны, принимаемой антенной $\phi(t) = \Phi(t, vt, 0, b)$,

$$\phi(t) = \omega\left(t - \frac{2s(t)}{c}\right) + \alpha.$$

Эта волна индуцирует в приемном блоке приемника напряжение

$$V_0(t) = \sigma V\left(t - 2\frac{s}{c}\right)\cos\left[\omega\left(t - 2\frac{s}{c}\right) + \alpha\right]. \qquad (3.2.2)$$

Постоянная σ зависит от отражательных свойств объекта и состояния атмосферы. Среднее расстояние от самолета до освещенного участка поверхности $s_0 = \sqrt{y_0^2 + b^2}$, называют *наклонной дальностью*. Величина облучаемой области в направлении перпендикулярном скорости самолета определяется длительностью импульса, а в направлении полета — шириной диаграммы направленности на расстоянии s_0 от самолета $L \approx s_0\theta = \frac{s_0\lambda}{D}$. При $\lambda = 25$ см, $D = 2$ м, $s_0 = 8$ км, имеем $L = 1$ км; та же антенна, установленная на спутнике, облучает с высоты орбиты $s_0 = 800$ км полосу местности размером $L = 100$ км. Поскольку линейный размер освещенной области в направлении оси x лежит в интервале $|x_0 - vt| \le \frac{L}{2}$, то сигналы, отраженные от точки P, принимаются в течение времени $\Delta t \approx \frac{L}{v}$.

Обычно величина L мала по сравнению с s_0. В этом случае расстояние s и фазу волны приближенно можно записать в виде

$$s \approx s_0 + \frac{(x_0 - vt)^2}{2s_0} - \frac{bz_0}{s_0},$$

$$\phi(t) \approx \omega\left(t - 2\frac{s_0}{c}\right) + \alpha - \omega\frac{(x_0 - vt)^2}{cs_0} + 2\omega\frac{bz_0}{s_0} + \alpha .$$

Для того, чтобы зарегистрировать амплитуду и фазу отраженной волны на вход детектора подается сумма напряжения $V_0(t)$ и опорного напряжения генератора $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$. На выходе детектора регистрируется среднее значение величины $W = [\varepsilon(t) + V_0(t)]^2$. Подставляя (3.2.2), получим

$$W_{\text{ср}}(t) = \frac{1}{2}[\,\varepsilon_0^2 + \sigma^2 V^2 + 2\sigma\varepsilon_0 V\cos\gamma],$$

$$\gamma = \frac{2\omega s_0}{c} + \omega\frac{(x_0 - vt)^2}{cs_0} - 2\omega\frac{bz_0}{cs_0} - \alpha .$$

Так осуществляется *когерентный прием* отраженного сигнала.

При импульсном режиме работы радара реализуется, так называемая *синтезированная антенна,* аналогичная реальной антенне, из большого числа приемных элементов, расположенных на траектории самолета на расстояниях vT друг от друга.

Для оценки азимутального разрешения по оси x заметим, что согласно (3.2.1) за время пролета $\Delta t \approx \dfrac{L}{v}$ антенна принимает плоские волны, в интервалах направлений, определяемых приращениями волнового вектора

$$\Delta k_x = \frac{2\omega L}{cs_0}, \quad \Delta k_y = 0, \quad \Delta k_z = 0.$$

Поскольку $L = \dfrac{s_0\lambda}{D}$, то $\Delta k_x = \dfrac{4\pi}{D}$. Согласно дифракционной теории изображения при наблюдении, исходящего из точки пучка волн в интервале направлений Δk_x невозможно отличить эту точку от объекта, размеры которого Δx_0 удовлетворяют условию

$$\Delta x_0 \Delta k_x = 2\pi, \quad \text{или} \quad \Delta x_0 = \frac{D}{2}.$$

Следовательно, азимутальное разрешение двух точек $\Delta x_0 = D/2$. Отсюда следует парадоксальный вывод: *разрешение в направлении полета улучшается с уменьшением размеров антенны.*

После когерентного суммирования отраженных сигналов синтезируется напряжение, соответствующее волнам или пучку лучей, распространяющихся от точки P в направлении перпендикулярном оси x в интервале углов $\theta_x = \frac{2L}{s_0} = \frac{2\lambda}{D}$. Разрешение в направлении излучения $\sim c\tau/2$. Действительно, объект, находящийся на расстоянии s_0 от самолета, порождает на экране в момент времени $t_0 + \frac{2s_0}{c}$ отраженный импульс длительностью τ. Импульс от объекта, находящегося на расстоянии $(s_0 + \Delta s_0)$, приходит к радару в момент времени $t_0 + \frac{2(s_0 + \Delta s_0)}{c}$. Два импульса не перекрываются при условии $\frac{2\Delta s_0}{c} > \tau$.

Если нас интересует обзор реальной поверхности и анализ элементов рельефа, то наиболее удобными являются оптические методы обработки сигналов сразу для всех элементов дальности. Напряжение $W_{ср}(t)$, соответствующее сигналам, отраженным от объектов с различной наклонной дальностью, модулирует интенсивность луча электронно-лучевой трубки и отображается на экране в виде отрезка светящихся точек. Следующий импульс порождает новую цепочку точек. Изображение экрана проектируется на фотопленку, движущуюся перпендикулярно направлению развертки. Сигналы от объектов, находящихся на различных расстояниях от самолета будут зафиксированы в различных точках по ширине пленки вдоль оси дальности. Объекты, находящиеся на расстоянии s_0, отображаются на пленке в виде прямолинейного следа переменной яркости вдоль оси азимута. Экспонированная пленка представляет собой двумерную голограмму. Если осветить ее пучком света от лазера, то получим обычные действительное и мнимое изображения поверхности. Подбором линз и других оптических элементов можно получить неискаженное действительное изображение рельефа. Для восстановления изображения используется и цифровая запись параметров отраженных волн.

Применение радаров бокового обзора дает принципиально новые возможности для дистанционного зондирования Земли (*remote sensing*). Облака, дождь и туман, мешающие фотосъемкам, полностью прозрачны для излучения с длиной волны более 2 см.

Дополнение VI.
ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Глава 2. Релятивистская динамика

2.1. Преобразование Лоренца электромагнитного поля

Только после создания теории относительности стало ясно, что электрическое и магнитное поля представляют собой две формы единого электромагнитного поля. Закон преобразования напряженности электрического поля и индукции магнитного поля, измеренных в инерциальных системах K и K', движущейся со скоростью $\vec{u} = (u, 0, 0)$, имеет вид

$$E'_x = E_x,\ E'_y = \gamma(E_y - uB_z),\ E'_z = \gamma(E_z + uB_y), \tag{2.1.1}$$

$$B'_x = B_x,\ B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{uE_z}{c^2}\right),\ B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{uE_y}{c^2}\right).$$

При этом преобразовании сохраняются инварианты $\vec{E}\vec{B}$ и $\vec{E}^2 - (c\vec{B})^2$.

Обратное преобразование получается из (2.1.1) перестановкой штриха и изменением знака при скорости u на противоположный.

Пусть в системе К вектор $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Тогда в системе К′:

$$E'_x = 0,\quad E'_y = -u\gamma B_z,\quad E'_z = 0,$$

$$B'_x = 0,\quad B'_y = 0,\quad B'_z = \gamma B. \tag{2.1.2}$$

В наиболее важном случае, когда u≈c, величины векторов $\vec{E}'$ и $c\vec{B}'$ одинаковы. В системе K' частица движется в скрещенных электрическом и магнитном полях.

При малых скоростях $u << c$ из (2.1.1) имеем:

$$\vec{E}' \approx \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B},\ \vec{B}' \approx \vec{B} - \frac{\vec{u} \times \vec{E}}{c^2}. \tag{2.1.3}$$

Поправка, линейная по скорости u, представляет собой классический эффект, который следует из интегральной формы уравнений Максвелла (IV. 7.3.3) без явного использования теории относительности.

Задача 2.1.1. При производстве пленки широкая тонкая полоса пластмассы протягивается со скоростью u через два последовательно расположенных ролика. В процессе обработки поверхность пленки приобретает

плотность поверхностного заряда σ. Оцените индукцию магнитного поля вблизи поверхности в центре пролета между роликами.

Решение. Пусть пленка расположена в плоскости xy, скорость пленки $\vec{u} = (0, u, 0)$. В системе отсчета, связанной с пленкой, напряженность электрического поля в окрестности центра поверхности $\vec{E}' \approx (0, 0, \sigma/2\varepsilon_0)$, $z > 0$ (см. задача IV. 1.3.1). Поскольку $u << c$, то в неподвижной системе отсчета $\vec{B} = (\mu_0\sigma u/2, 0, 0)$, $\vec{E} = (0, 0, E'_z)$, $z > 0$.

Пример 2.1.2. Эффект Доплера. Пусть плоскополяризованная монохроматическая волна распространяется в направлении единичного вектора $\vec{n}$. Напряженность электрического поля волны

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{e}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\vec{n}\vec{x}\right),$$

магнитная индукция

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{b}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\vec{n}\vec{x}\right), c\vec{b} = \vec{n}\times\vec{e},$$

где $\vec{e}$ — постоянный вектор, ω — частота волны. Отметим, что $\omega t - \vec{n}\vec{x}/c$ — инвариант преобразования Лоренца.

Теперь можно получить строгие результаты в рамках теории относительности, используя преобразование Лоренца (1.3.3), частоты ω и волнового вектора волны $\omega\vec{n}/c$.

Пусть $\vec{u} = (u, 0, 0)$ — скорость источника излучения, с которым свяжем систему отсчета K'. Частота излучаемой волны ω'. Наблюдатель находится в системе K и регистрирует волну, приходящую в направлении единичного вектора $\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, α — угол между вектором $\vec{n}$ и осью x. Частота ω и волновой вектор волны $\omega\vec{n}/c$ преобразуются как энергия и импульс (1.3.3):

$$\omega' = \gamma\left(\omega - \frac{\omega}{c}\vec{n}\vec{u}\right) \to \omega = \omega'\frac{\sqrt{1-(u/c)^2}}{1-\vec{n}\vec{u}/c}.$$

Положим $u = 0{,}8\,c$. Если источник удаляется от наблюдателя, то $\vec{n}\vec{u} = -u$, $\omega = \frac{1}{3}\omega'$. Уменьшение частоты принимаемого излучения называют *красным смещением*. При сближении источника и наблюдателя $\omega = 3\omega'$. В случае $\alpha = \pi/2$ на траверсе имеем:

$$\omega = \omega'\sqrt{1-(u/c)^2}, \omega = 0{,}6\omega'.$$

В нерелятивистском приближении получим уже знакомое нам соотношение

$$\omega \approx \omega'(1 + \vec{n}\vec{u}/c).$$

Глава 3. Ускорители заряженных частиц

3.1. Множественные процессы

Один из наиболее плодотворных методов исследования природы взаимодействия элементарных частиц основан на проведении экспериментов, в которых изучаются закономерности процессов рассеяния и рождения новых частиц. Чем выше энергия сталкивающихся частиц, тем больше удается получить данных о взаимных превращениях и структуре частиц, на основе которых можно построить более совершенные теории и законы Природы.

При увеличении энергии сталкивающихся частиц открываются новые каналы, рождается большое число вторичных частиц. Сейчас основную часть наших знаний об элементарных частицах мы получаем в результате экспериментов по множественному рождению в столкновениях частиц высоких энергий, проводимых на гигантских ускорителях. По этой причине ведущие страны мира сооружают ускорители — дорогостоящие установки для получения частиц с энергиями $T >> mc^2$.

Согласно (2.2.4) заряженные частицы можно ускорить лишь электрическим полем, т. к. работа, совершаемая магнитной силой, равна нулю.

3.2. Циклотрон

В 1929 г. американский физик Э. Лоуренс предложил идею резонансного циклического ускорителя (Нобелевская премия, 1939 г.). Между полюсами электромагнита находится вакуумная камера. Внутри расположены два электрода, представляющие собой две слегка раздвинутые половинки разрезанной по диаметру плоской цилиндрической коробки. Они называются *дуантами*. К ним подводится высокочастотное напряжение. Внутри дуантов на частицу действует только магнитное поле. Дважды за период обращения частица проходит зазор между дуантами и ускоряется электрическим полем.

В циклотроне частицы начинают движение из центра камеры. Генератор работает на фиксированной частоте $\omega_e = \dfrac{eB}{m}$. Поскольку при каждом прохождении зазора кинетическая энергия частицы растет, то согласно (2.2.7) увеличивается радиус орбиты $R = p/eB$. На первый взгляд кажется, что предельная энергия частиц определяется диаметром полюсов электромагнита. Например, задавая значения B и T, получим для протонных циклотронов вполне приемлемые радиусы орбит:

$$B = 2 \text{ Тл}, T = 20 \text{ МэВ}, pc = 200 \text{ МэВ}, R = 0{,}32 \text{ м};$$

$$B = 2 \text{ Тл}, T = 680 \text{ МэВ}, pc = 1{,}3 \text{ ГэВ}, R = 2{,}1 \text{ м}.$$

Однако с помощью циклотронов удается получить пучки протонов с энергиями не более 20 МэВ. Причина в том, что с ростом энергии уменьша-

ется частота обращения ω. Вследствие этого нарушается условие резонансного ускорения

$$\omega_e = \omega = \frac{eBc^2}{mc^2 + T}.$$

3.3. Бетатрон

В 1940 г. американскому физику Д. Керсту удалось создать новый тип ускорителя электронов, в котором магнитное поле выполняет две функции: управляющую и ускоряющую. Основная идея состояла в использовании переменного магнитного поля. Действительно, переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, а работа силы, действующей на электрон со стороны поля на замкнутом контуре не равна нулю. В цепи электромагнита, содержащей катушки индуктивности и конденсатор, возбуждались электромагнитные колебания с частотой $\nu = \omega/2\pi = 180$ Гц. Поскольку переменное неоднородное магнитное поле индукцией $B \sim \cos \omega t$ порождает переменное электрическое поле, то в течение четверти периода электрон движется по круговой орбите постоянного радиуса R и ускоряется электрическим полем.

Рассмотрим ускорение электрона зарядом $e = -e_0$ в плоскости $z = 0$. Пусть магнитное поле симметрично относительно поворотов вокруг оси z. В этом случае силовые линии электрического поля представляют собой концентрические окружности радиусов r. Найдем условие, при котором электрон будет вращаться по окружности фиксированного радиуса R в нарастающем магнитном поле индукцией $\vec{B} = \vec{B}(t, r)$. Согласно (IV. 7.3.1, 7.3.2) имеем:

$$2\pi RE = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где E — касательная к силовой линии радиусом R компонента электрического поля. Из (2.2.4) получим уравнение

$$\frac{dT}{dt} = \frac{e_0 v}{2\pi R}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Поскольку при движении по окружности $p = e_0 B_z R$, то

$$\frac{dT}{dt} = v\frac{dp}{dt} = e_0 v R\frac{dB_z}{dt}.$$

Сопоставляя оба выражения, получим соотношение

$$\frac{dB_z}{dt} = \frac{1}{2\pi R^2}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Пусть $B_z(0, R) = 0$, $\Phi(0) = 0$. Промежуток времени цикла ускорения равен τ. Тогда

$$B_z(\tau, R) = \frac{1}{2\pi R^2}\Phi(\tau).$$

Величина $\Phi(\tau)/\pi R^2$ равна отношению магнитного потока через площадь орбиты к площади орбиты, т. е. среднему значению магнитного поля $(B_z)_{ср}$. Следовательно, $B_z(\tau, R) = (B_z)_{ср}/2$. Это условие, известное как *бетатронное* правило «2 : 1», получено Р. Видерое и советским физиком Я.П. Терлецким. Согласно (1.3.2) при увеличении индукции поля до значения $B_z(\tau, R) = b$ энергия частицы достигает величины

$$T_m = \left((mc^2)^2 + (e_0 cRb)^2\right)^{\frac{1}{2}} - mc^2 \approx e_0 cRb.$$

В бетатроне Керста электроны приобретали кинетическую энергию 20 МэВ на орбите радиусом R = 18,75 см при значении b = 0,36 Тл. Поскольку $T >> mc^2$, то $T \approx pc = e_0 cbR$. Запишем это соотношение в форме наиболее удобной для численных оценок: T(МэВ) = $300b$(Тл)R(м).

Вначале казалось, индукционный метод ускорения электронов позволит достичь сверхвысоких энергий. Однако вскоре было установлено, что существует явление, принципиально ограничивающее возможности бетатрона. Дело в том, что благодаря огромному центростремительному ускорению электроны генерируют мощное электромагнитное излучение. Из-за потерь энергии на излучение возможности увеличения энергии электронов существенно ограничены величиной ~300 МэВ. Наибольшее распространение получили бетатроны на энергии 20—50 МэВ. Дальнейший прогресс в увеличении энергии частиц связан с открытием явления автофазировки и нового принципа фокусировки.

3.4. Автофазировка

В резонансных ускорителях частицы пролетают через ускоряющий промежуток — зазор, в котором возбуждается высокочастотное электрическое поле. Рост энергии частиц обеспечивается тем, что частота высокочастотного напряжения ω_e совпадает с частотой вращения по орбите $\omega = \dfrac{eB_z c^2}{mc^2 + T}$.

Поскольку кинетическая энергия — возрастающая функция времени, то соотношение $\omega_e = \omega$ может выполняться только в том случае, когда ω_e и B также являются функциями времени.

Пусть условие $\omega_e = \omega$ выполняется для некоторой частицы (называемой резонансной), проходящей через ускоряющий промежуток в момент времени t_0. Для других частиц, проходящих зазор в момент времени $t \neq t_0$, это условие не выполняется.

Разработка ускорителей современного типа началась с анализа механизма автофазировки, открытого независимо в 1944 г. советским физиком

В.И. Векслером и в 1945 г. американским физиком Э. Мак-Милланом. Оказалось, что фазы частиц, пришедших к зазору в некотором интервале фаз в окрестности равновесной фазы, при последующих прохождениях зазора совершают колебания в окрестности значения φ_e (область захвата). Механизм автофазировки приводит к тому, что при достаточно медленном возрастании величин ω_e и B_z энергия частиц, находящихся в области захвата, автоматически принимает значение, близкое к резонансному, т. е. все эти частицы ускоряются.

Применение принципа автофазировки привело к появлению новых типов ускорителей.

3.5. Электронный синхротрон

Появилась возможность радикально изменить индукционный метод ускорения электронов. Вначале они ускоряются в бетатронном режиме до энергий 2—4 МэВ, при которой их скорость практически равна скорости света. Затем включается высокочастотное напряжение и в ускоряющем промежутке происходит дальнейшее ускорение на орбите постоянного радиуса R. Поэтому магнитное поле создается только в окрестности узкой кольцевой дорожки в вакуумной камере, имеющей форму тора. Поскольку $v = \omega R \sim c$, то частота генератора должна быть постоянной и равна частоте обращения электронов $\omega_e = c / R$:

$$\frac{c}{R} = \frac{eB_z c^2}{mc^2 + T}.$$

Следовательно, приращение энергии должно удовлетворять уравнению

$$\frac{dT}{dt} = e_0 c R \frac{dB_z}{dt}.$$

Таким образом, необходимое приращение энергии в ускоряющем промежутке за время одного оборота $\Delta t = 2\pi / \omega_e$ определяется скоростью нарастания индукции магнитного поля

$$\Delta T = \frac{dT}{dt}\Delta t = 2\pi e_0 R^2 \frac{dB_z}{dt}.$$

Следовательно, для выполнения условия синхронизации электрон на каждом обороте должен ускоряться равновесной разностью потенциалов

$$V_p = \frac{\Delta T}{e_0}, \quad V_p = 2\pi R^2 \frac{dB_z}{dt}.$$

Потери энергии на излучение автоматически компенсируются изменением равновесной фазы ускоряющего электрического поля. Трудности созда-

ния мощных ускоряющих устройств, компенсирующих потери на излучение, ограничивают предельные достижимые энергии.

Первый ускоритель такого типа с энергией электронов 300 МэВ, построенный в 1947 г., получил название *синхротрон*. Синхротрон является редким примером ускорителей, в которых за короткое время были достигнуты максимальные энергии 5—10 ГэВ. В 1964 г. был запущен самый большой в Европе синхротрон лаборатории *DESY* (*Deutsches Electronen Synchrotron*, Гамбург) с максимальной энергией пучка электронов 7,5 ГэВ.

3.6. Фазотрон (синхроциклотрон)

В фазотроне частица движется по спирали от центра, приобретая энергию при многократном прохождении ускоряющего зазора. Мгновенный радиус орбит также увеличивается, достигая максимального значения, ограниченного размерами установки. Резонанс поддерживается автоматически благодаря автофазировке. Фазотрон представляет собой усовершенствованный циклотрон, в котором магнитное поле постоянно, а частота ускоряющего напряжения уменьшается в соответствии с условием $\omega_e = \omega$:

$$\omega_e(t) = \frac{eBc^2}{mc^2 + T(t)}.$$

Максимально достижимая энергия частицы определяется величиной индукции магнитного поля и максимальным радиусом орбиты.

3.7. Синхрофазотрон

Это — наиболее современный циклический резонансный ускоритель протонов, позволяющий получить энергии в несколько тысяч ГэВ. В синхрофазотроне принцип автофазировки достигает своего наивысшего развития. Здесь комбинируются технические особенности синхротрона и фазотрона. Для сохранения постоянства радиуса индукция магнитного поля возрастает по мере нарастания энергии. Протоны ускоряются в одном или нескольких промежутках, расположенных на орбите. Однако в отличие от электронов, для которых скорость близка к скорости света уже при небольшой энергии ($v = 0{,}98c$ при $T = 2$ МэВ) и частота обращения практически постоянна, скорость протонов становится постоянной лишь при гораздо больших значениях энергии ($v = 0{,}98c$ при $T = 4$ ГэВ). Поэтому в процессе ускорения скорость и частота обращения протонов возрастают. Следовательно, для сохранения резонанса частота ускоряющего поля быть связана с законом нарастания индукции магнитного поля соотношением

$$\omega_e = \frac{ecB}{\sqrt{(mc)^2 + (eBR)^2}}.$$

Первая машина такого типа — *космотрон* на 3 ГэВ (Брукхейвен, США) была запущена в 1952 г. На синхрофазотроне с максимальной энергией протонов 6,3 ГэВ, получившем название беватрон (Беркли, США), был открыт

антипротон (Нобелевская премия, 1955 г.) и антинейтрон (1956 г.). В 1965 г. было получено первое антиядро-антидейтрон-связанное состояние антипротона и антинейтрона. На синхрофазотроне в Серпухове с максимальной энергией протонов 76 ГэВ, запущенном в 1967 г., открыты ядра антигелия-3 (1969 г.) и антитрития (1974 г.).

3.8. Жесткая фокусировка

Дальнейшее увеличение энергии связано с применением новых методов фокусировки частиц. Для того, чтобы достичь энергии, скажем 10 ГэВ, протон совершает 4,5 млн оборотов, проходя путь в 2,5 раза больший, чем расстояние от Земли до Луны. Поэтому необходимо обеспечить такую устойчивость пучка, чтобы небольшие отклонения от равновесной орбиты не приводили бы к потере частиц. В 1950 г. греком Н. Кристофилосом и независимо в 1952 г. американцами Е. Курантом, М. Ливингстоном и Г. Снайдером был открыт новый тип магнитной фокусировки, получившей название *сильной или жесткой фокусировки*. Они предложили собрать магнит в виде периодически чередующихся секторов, каждый из которых фокусирует частицы по одной поперечной к скорости координате и дефокусирует по другой. В результате возникает эффективная фокусировка по радиальному и вертикальному направлениям. Значительно сокращается стоимость магнита и системы питания. Именно это открытие сделало возможным создание синхрофазотронов на сверхбольшие энергии.

Устойчивость такого типа можно пояснить примером из оптики. Согласно формуле (6) в тексте примера 2.3.8 оптическая система, состоящая из рассеивающей и собирающей линз эквивалентна собирающей линзе.

Самый большой ускоритель этого типа «Тэватрон» с длиной кольца 27 км, действующий в Фермиевской национальной ускорительной лаборатории (*FNAL*, Батавия, США, 1972 г.), разгоняет встречные пучки протонов и антипротонов до энергии 1 ТэВ (1 ТэВ = 10^{12} эВ).

3.9. Ускорители на встречных пучках

Рассмотрим столкновение частиц равных масс $m_1 = m_2 = m_0$. Пусть кинетическая энергия первой частицы, взаимодействующей с неподвижной мишенью равна T_L. В примере VI. 1.5.2 показано, что полная энергия частиц в системе центра масс (с. ц. м.) равна $\sqrt{(2m_0c^2)^2 + 2m_0c^2T_L}$. В ускорителе на встречных пучках кинетическая энергия каждой частицы равна T_0. В этом случае полная энергия частиц в с. ц. м. равна $2(m_0c^2 + T_0)$. Приравнивая полные энергии частиц в с. ц. м., получим уравнение

$$2(m_0c^2 + T_0) = \sqrt{(2m_0c^2)^2 + 2m_0c^2T_L} ,$$

из которого найдем значение энергии частицы $T_L = T_{L0}$, $T_{L0} = 4T_0 + \dfrac{2T_0^2}{m_0c^2}$, взаимодействующей с неподвижной мишенью при условии, что оба ускори-

теля имеют равные возможности порождать новые частицы. Когда $T_0 >> mc^2$, получаем существенное увеличение энергии $T_{L0} = 2\,T_0^2\,/mc^2 >> 4T_0$.

Линейный коллайдер. В 1966 г. в Станфордском ускорительном центре (*SLAC*, *USA*) был построен самый большой линейный ускоритель электронов длиной 3,2 км, имеющих на выходе энергию 23 ГэВ. Через 20 лет на базе старого ускорителя началось осуществление нового проекта — создание первого в мире линейного *коллайдера SLC* (*Stanford Linear Colliger*). Начиная с весны 1987 г., в течение двух лет, усилиями тысячного коллектива центра были разрешены многочисленные физико-технические проблемы и запущены параллельные пучки электронов и позитронов с энергиями по 50 ГэВ. На выходе пучки отклоняются в две большие дуги, и производится встречное столкновение. Этот ускоритель эквивалентен ускорителю с одним пучком энергией $T_{L0} \sim 10$ ТэВ. 11 апреля 1989 г. детектор обнаружил первую Z^0-частицу массой 91,2 ГэВ — переносчика электрослабого взаимодействия, которая «согласно» теории трансформировалась в два ливня адронов. В 1990 г. на *SLC* установлен 4 000-тонный детектор, позволяющий с высокой точностью исследовать каждый трек частиц.

Самый большой синхрофазотрон — «Тэватрон» Фермиевской национальной ускорительной лаборатории в Батавии (США) разгоняет пучки встречных пучков протонов и антипротонов до энергии $T_0 = 1$ ТэВ (1 ТэВ = 10^{12} эВ). Поскольку масса протона $m_p = 938{,}2796$ МэВ/с^2, то этот ускоритель эквивалентен обычному с энергией одного пучка $T_{L0} \sim 2 \cdot 10^3$ ТэВ.

3.10. Накопительные кольца

Ускорители на встречных пучках имеют накопительные кольца — вакуумные камеры, в которые поступают частицы из обычного ускорителя и ускоряются собственной электромагнитной системой. В 1982 г. было остановлено главное кольцо синхрофазотрона *FNAL* (*Fermi National Accelerator Laboratory*). Под ним смонтировали второе кольцо для антипротонов. В 1983 г. была достигнута энергия пучков 500 МэВ. Сейчас энергия пучков доведена до 1 ТэВ. Детектор частиц фиксирует 120 тыс. столкновений за 1 сек. «Теватрон» — самый мощный в мире ускоритель — призван внести ясность в актуальные проблемы физики элементарных частиц.

Сейчас на базе лаборатории ДЕЗИ работают протон-электронные накопительные кольца *HERA* (*Hadron Electron Ring Accelerator*) — электронное кольцо (энергия пучка электронов 30 ГэВ, энергия пучка позитронов 27,5 ГэВ, 1988 г.) и протонное кольцо (энергия пучка 820 ГэВ, 1991 г.). Энергия пучка электронов ограничена из-за потерь на синхротронное излучение, которые уже невозможно скомпенсировать (см. п. 4.5). В этой уникальной установке использована самая совершенная в то время технология. Поперечник сфокусированного пучка, состоящего из 210 протонных банчей длиной метр каждый, равен примерно одной тысячной миллиметра. Участки кольца длиной 6,3 км составлены из 840 магнитных модулей (420 — для

верхнего протонного кольца и 420 — для нижнего — электронного) длиной 12 и 14 метров, индукция поля B = 4,53 Тл создается током силой 6 000 А при температуре жидкого гелия. Ускорительные промежутки работают на частоте 52 МГц. 250 датчиков позволяют контролировать поведение пучка. На этой установке можно детально исследовать структуру протона и взаимодействие между электроном и кварком, поскольку электроны не участвуют в сильных цветовых взаимодействиях.

В 1995 г. на накопителе антипротонов Европейской организации ядерных исследований вблизи Женевы (*CERN — Conseil Europeen pour la Recheche Nucleaire*) были синтезированы первые антиатомы — антиводород. Это открытие позволит осуществить проверку основных принципов теории. В 2007 г. ЦЕРН планирует запустить гигантский ускоритель *Lagre Hadron Collider* на встречных пучках протонов с энергией пучка 7 ТэВ. Он будет расположен на глубине 45 м в замкнутом тоннеле протяженностью 88 км. Для ускорения и фокусировки потребуется свыше 10 тыс. сверхпроводящих магнитов с индукцией 6 Тл. В шести местах тоннеля пучки будут пересекаться, порождая 108 столкновений в секунду. Стоимость проекта — свыше 5 млрд долларов.

Сейчас обсуждается проект создания к 2007 г. крупнейшего комплекса пучков радиоактивных ионов в японском центре РИКЕН. Максимальная энергия ионов 1 – 1,45 ГэВ/нукл. Реализация проекта откроет принципиально новые возможности исследований в физике ядра, позволит предельно расширить семейство изучаемых ядер, формируя любые разрешенные природой комбинации нуклонов: ожидается получение до 2,5 тысяч новых изотопов ядер. Возможно, мы станем свидетелями рождения нового направления — ядерной астрофизики, исследующей проблемы синтеза элементов во Вселенной.

Каким будет следующее поколение ускорителей? Удастся ли найти новые принципы увеличения темпа роста энергии?

Глава 4. Эффекты теории относительности в электродинамике

4.1. Электродинамика движущихся сред

4.1.1. Преобразование Лоренца источников поля — заряда и тока. Рассмотрим проводящее тело, движущееся поступательно со скоростью $\vec{u} = (u, 0, 0)$ относительно системы отсчета K. Свяжем с телом собственную систему отсчета K'. В этой системе плотность заряда равна ρ', плотность тока $\vec{j}' = (j_x', j_y', j_z')$. Соответствующие величины в неподвижной системе K имеют вид

$$j_x = \gamma(j_x' + \rho' u), \quad j_y = \gamma j_y', \quad j_z = \gamma j_z'. \tag{4.4.1}$$

$$\rho = \gamma\left(\rho' + \frac{j_x' u}{c^2}\right), \tag{4.1.2}$$

Физический смысл соотношений (4.1.1) совершенно ясен: второй член в j_x обусловлен переносом заряда. Смысл соотношения (4.1.2) не столь очевиден: оно показывает, что электрически нейтральный неподвижный проводник с током ($\rho = 0$, $j_x \neq 0$) в движущейся системе отсчета не является нейтральным: $\rho' = -\frac{\gamma j_x u}{c^2}$. Причина в том, что плотности положительно заряженных ядер и электронов в системе K' становятся различными. Отметим, что соотношение (4.1.2) не имеет нерелятивистского аналога.

Пример 4.1.1. По длинному прямолинейному проводу сечением S течет ток силой I. Тогда наблюдатель в системе отсчета K' обнаружит согласно (4.1.2) заряженный провод с линейной плотностью заряда $\sigma = \rho' S = -\frac{\gamma u I}{c^2}$, где $I = j_x S$.

Полезно получить этот результат менее формально. Предположим, что параллельно проводу на расстоянии d от него движется заряд q со скоростью u.

А. Вначале найдем в системе K силу, действующую на заряд. Совместим с проводом ось x, направление тока совпадает с положительным направлением оси. Пусть радиус-вектор заряда $\vec{r}(t) = (ut, d, 0)$. Согласно (IV.4.2.3) вектор индукции магнитного поля тока в этой точке $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, $B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$. На заряд q действует сила Лоренца $\vec{F} = (0, F_y, 0)$, $F_y = -quB_z = -\frac{qu\mu_0 I}{2\pi d}$. Поскольку $\mu_0\varepsilon_0 = c^{-2}$, то $F_y = -\frac{2kquI}{dc^2}$, где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Б. Найдем теперь силу, действующую на заряд в системе отсчета K', движущуюся со скоростью $\vec{u}$. В этой системе скорость заряда равна нулю. Следовательно, на заряд может действовать сила только со стороны электрического поля. Поскольку $\vec{r}'(t') = (0, d, 0)$, то согласно (2.1.1)

$$E'_y = -\gamma u B_z = -\frac{2k\gamma uI}{dc^2}, \; B'_z = \gamma B_z.$$

Следовательно, на заряд действует сила $F'_y = q E'_y$. Подставляя значение E'_y, найдем

$$F'_y = -\frac{2k\gamma quI}{dc^2}.$$

Согласно преобразованию Лоренца $F'_y = F_y$. Мы приходим к выводу: в движущейся системе электростатическое поле создается некоторым распределением зарядов. Найдем линейную плотность заряда $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta x}$. Дейст-

вительно, применяя закон Гаусса (IV. 1.3.1) к прямому цилиндру радиусом d, окружающему провод, имеем

$$2\pi d\Delta x\, E'_y = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0} \text{ или } \sigma = 2\pi d\varepsilon_0\, E'_y = -\frac{\gamma u I}{c^2}.$$

Пример 4.1.2. Покажем, что движущийся нейтральный контур с током приобретает дипольный момент в неподвижной системе отсчета.

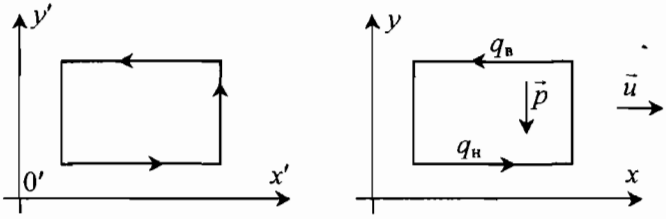


рис. Д. 4.1.1

Рассмотрим прямоугольный контур, по которому течет ток силой I' (рис. Д.4.1.1). Предположим, что скорость контура $u << c$, и ограничимся приближением, учитывающем величины линейные по скорости. Согласно (4.1.2) в системе K на верхнем проводнике длиной a, сечением s, параллельном оси x, наблюдатель обнаружит заряд $q_в = \rho as \approx \frac{j'_x uas}{c^2} = -\frac{I'ua}{c^2}$. На нижнем проводнике расположенном на расстоянии b от верхнего проводника, заряд $q_н \approx \frac{I'ua}{c^2}$. Следовательно, контур создает дипольный электрический момент $p = (0, p_y, 0)$, $p_y = -\frac{I'uab}{c^2}$. В векторной форме

$$\vec{p} = \frac{\vec{u} \times \vec{p}_m}{c^2},\ \vec{p}_m = \vec{n}\, I'S,$$

где $S = ab$, $\vec{p}_m$ — магнитный момент петли, $\vec{n} = (0, 0, 1)$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости контура.

Этот эффект связан с тем обстоятельством, что в системе K скорость движения электронов проводника в направлении движения контура отличается от скорости движения в противоположном направлении. В результате возникает поляризация зарядов и электростатическое поле. Если контур представляет собой окружность, то $\vec{E}' = 0$, а в окрестности центра $\vec{B}' \approx (0, 0, B'_z)$. В соответствии с (4.1.2) имеем $\vec{E} \approx (0, E_y, 0)$, $E_y = uB_z$, $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, $B_z = B'_z$.

Пример 4.1.3. Закон Ома для металлического проводника, движущегося в магнитном поле. При движении проводника со скоростью $u << c$

плотность тока согласно (4.1.1) тока $\vec{j} \approx \vec{j}'$. В собственной системе закон Ома имеет вид $\vec{j}' = \sigma \vec{E}'$, где σ — проводимость металла. Подставляя $\vec{E}'$ из (2.1.3), найдем плотность тока в лабораторной системе отсчета $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$.

4.2. Преобразование поляризации и намагниченности

Ограничимся практически важным случаем нерелятивистского движения. В этом пределе, учитывающем только члены порядка не выше u/c, проявляется ряд интересных явлений.

В электродинамике сплошных сред электромагнитное состояние среды в отсутствие внешнего поля определяется векторами намагниченности $\vec{M}$ и поляризации $\vec{P}$. С другой стороны, если среда деформируется или находится во внешнем поле, то намагниченность и поляризация возникают в результате отклика среды на поле, создаваемое внешними токами и зарядами: в среде появляются индуцированные заряды и токи. Вычисление намагниченности, поляризации и предсказание, связанных с ними новых эффектов — основная задача физиков-теоретиков, работающих в области физики твердого тела и плазмы.

Закон Лоренц-преобразования векторов $\vec{M}$ и $\vec{P}$ совпадает с соотношениями (2.1.1)

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{u} \times \vec{M}' \frac{1}{c^2}, \tag{4.2.1}$$

$$\vec{M} = \vec{M}' - \vec{u} \times \vec{P}', \tag{4.2.2}$$

Пример 4.2.1. Из (4.2.2) следует, что движущийся поляризованный диэлектрик эквивалентен веществу с магнитным моментом $\vec{M} = \vec{P}' \times \vec{u}$. Физический смысл этого эффекта легко понять, рассматривая движение пластины поляризованного диэлектрика, изображенной на рис. IV. 1.5.1, со скоростью параллельной плоскости пластины. В неподвижной системе отсчета поляризационные заряды на поверхностях пластины эквивалентны противоположно направленным токам. Эти разделенные в пространстве токи и образуют замкнутый контур, обладающий магнитным моментом.

4.3. Материальные уравнения в движущейся среде

В электродинамике сплошных сред вводят векторы электрической индукции $\vec{D}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$, связанные с векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$ соотношениями

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \tag{4.3.1}$$

где $\vec{M}$ — намагниченность, $\vec{P}$ — поляризация среды. В СИ размерности пар $[cD, H]$, $[E, cB]$ и $[cP, M]$ одинаковы.

Отметим, что индукция магнитного поля в среде равна $\vec{B}$. Однако легче всего измерить свободные токи I_f в проводах, связанные с вектором $\vec{H}$ в магнитных средах законом Максвелла-Ампера (IV. 4.1.2). В отличие от напряженности электрического поля $\vec{E}$, создаваемого полным зарядом, вектор электрической индукции $\vec{D}$ связан только со свободными зарядами Q_f законом Гаусса (IV. 1.5.2).

Уравнения Максвелла для полей в среде представляют собой систему из шести дифференциальных уравнений относительно двенадцати компонент пар векторов $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{D}$, $\vec{H}$. Для того чтобы система уравнения поля стала замкнутой, необходимо дополнить ее так называемыми *материальными уравнениями*, которые связывают векторы $\vec{D}$, $\vec{H}$ и $\vec{E}$, $\vec{B}$. В случае достаточно слабых полей в изотропной неподвижной среде материальные уравнения приведены в главах IV.1 и IV.2: $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$. Здесь ε и μ — безразмерные коэффициенты электрической и магнитной проницаемостей.

Движение среды во внешнем электромагнитном поле приводит к возникновению поля, обусловленного ее диэлектрическими и магнитными свойствами. В этом случае связи векторов $\vec{D}$, $\vec{B}$ с $\vec{E}$, $\vec{H}$ не должны совпадать с приведенными выше соотношениями. Получим материальные уравнения при движении тела со скоростью, малой по сравнению со скоростью света.

Прежде всего запишем Лоренц-преобразование векторов $\vec{D}$ и $\vec{H}$, которые преобразуются также как и векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$:

$$\vec{D}' = \vec{D} + \vec{u}\times\vec{H}\frac{1}{c^2}, \tag{4.3.2}$$

$$\vec{H}' = \vec{H} - \vec{u}\times\vec{D}. \tag{4.3.3}$$

В системе отсчета K' среда неподвижна, так что имеем соотношения

$$\vec{D}' = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}', \tag{4.3.4}$$

$$\vec{B}' = \mu\mu_0\vec{H}'. \tag{4.3.5}$$

Подставляя в (4.3.4) $\vec{D}'$ из (4.3.2) и $\vec{E}'$ из (2.1.3), получим

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0(\vec{E} - \vec{u}\times\vec{B}) - \vec{u}\times\vec{H}\frac{1}{c^2}. \tag{4.3.6}$$

Далее, подставляя в (4.3.5) $\vec{H}'$ из (4.3.3) и $\vec{B}'$ из (2.1.3), находим

$$\vec{B} = \mu\mu_0(\vec{H} - \vec{u}\times\vec{D}) + \vec{u}\times\vec{E}\frac{1}{c^2}. \tag{4.3.7}$$

Материальные уравнения (4.3.6) и (4.3.7), вместе с уравнениями Максвелла, составляют основу электродинамики движущихся изотропных диэлектриков, диамагнетиков и парамагнетиков.

4.4. Излучение релятивистских частиц

Заряженные частицы, взаимодействующие в общем случае с переменным, неоднородным электромагнитным полем, движутся с ускорением и излучают электромагнитные волны. Используя пучки электронов, удалось создать несколько типов источников интенсивного излучения, которые находят широкое применение в науке и технике.

4.4.1. Электромагнитное поле, излучаемое заряженной частицей. Выберем начало координат внутри системы зарядов. Радиус-вектор заряда e пусть будет $\vec{R}(t)$, скорость заряда $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{R}}{dt}$. Радиус-вектор точки наблюдения обозначим $\vec{r} = \vec{n}r$. Расстояние от заряда до точки наблюдения $\rho(t) = |\vec{r} - \vec{R}(t)|$. Очевидно, что поле в точке наблюдения в момент времени t определяется положением заряда в предшествующий момент времени τ, для которого

$$t - \tau = \frac{\rho(t)}{c}.$$

Полная система уравнений, описывающая систему зарядов, движущихся во внешнем электромагнитном поле, и электромагнитное поле излучения, содержит уравнения Максвелла и уравнения релятивистской динамики. Из анализа уравнений следует, что поле излучения взаимодействует с зарядами системы. Мы ограничимся приближением заданного тока зарядов, пренебрегая обратным влиянием излучения на движение зарядов во внешнем поле. Поэтому основная задача — найти напряженность электрического и магнитного полей, излучаемых частицей, движущейся во внешнем поле по траектории $\vec{R}(t)$. На больших расстояниях от системы $r >> R$ приближенно имеем:

$$\rho(t) = \sqrt{r^2 - 2r\vec{n}\vec{R} + R^2} \approx r - \vec{n}\vec{R}(t).$$

В этом случае решение уравнений Максвелла для индукции магнитного поля и напряженности электрического поля волны в точке наблюдения в момент времени t можно представить в виде

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{1}{c}\frac{d\vec{A}(t,\vec{r})}{dt} \times \vec{n}, \tag{4.4.1}$$

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = c\,\vec{B}(t,\vec{r}) \times \vec{n}, \tag{4.4.2}$$

где вектор

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \frac{e\mu_0}{4\pi r}\frac{\vec{v}(\tau)}{1 - \dfrac{\vec{n}\vec{v}(\tau)}{c}}. \tag{4.4.3}$$

Здесь функция $\tau(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\tau = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{R}(\tau)}{c}. \qquad (4.4.4)$$

Напряженность электрического поля

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\frac{d\vec{A}(t,\vec{r})}{dt} + \vec{n}\left(\vec{n}\frac{d\vec{A}(t,\vec{r})}{dt}\right).$$

Очевидно $\vec{E}\vec{n} = 0$, $\vec{B}\vec{n} = 0$, $(c\vec{B})^2 = \vec{E}^2$: электромагнитное поле на больших расстояниях от системы зарядов представляет собой плоскую волну.

Представим правую часть (4.4.3) в компактной форме. С этой целью, дифференцируя (4.4.4), находим

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \vec{n}\frac{d\vec{R}(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\frac{1}{c} \to \frac{d\tau}{dt}\left(1 - \frac{\vec{n}\vec{v}(\tau)}{c}\right) = 1. \qquad (4.4.5)$$

Следовательно, из (4.4.3), (4.4.5) получим

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \frac{e\mu_0}{4\pi r}\frac{d\vec{R}(\tau)}{dt}, \quad \vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{e\mu_0}{4\pi r}\frac{d^2\vec{R}(\tau)}{dt^2}\times\vec{n}.$$

Перенос электромагнитной энергии характеризуется вектором Пойнтинга (IV. 9.1.4)

$$\vec{S} = c^2\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{c}{\mu_0}\vec{n}B^2.$$

В эксперименте измеряют мгновенное $P(t,\vec{n})$ или среднее по времени угловое распределение мощности излучения $P(\vec{n}) = \langle P(t,\vec{n})\rangle$ электромагнитной энергии, распространяющейся в направлении вектора $\vec{n}$ через элементарную площадку шаровой поверхности площадью $dA = r^2 dO$ внутри телесного угла dO. Мгновенная мощность излучения $P(t,\vec{n})$ определяется соотношением

$$\vec{n}\vec{S}\,dA \equiv P(t,\vec{n})dO,$$

$$P(t,\vec{n}) = \frac{cB^2r^2}{\mu_0} = \frac{E^2r^2}{c\mu_0}.$$

Подставляя $\vec{B}$ или $\vec{E}$, получим мгновенную мощность излучения в элемент телесного угла в направлении вектора $\vec{n}$:

$$P(t,\vec{n}) = \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{e}{4\pi}\right)^2\left(\vec{n}\times\frac{d^2\vec{R}(\tau)}{dt^2}\right)^2. \qquad (4.4.6)$$

Суммируя мощности излучения каждой частицы, найдем мощность излучения системы частиц.

4.4.2. Поляризация излучения. Предположим, что экспериментатор принимает излучение, распространяющееся в направлении вектора $\vec{n} = (\cos\theta,\ 0,\ \sin\theta)$. Введем три взаимно перпендикулярных единичных вектора: $\vec{e}^{(1)} = (0,\ 1,\ 0)$, $\vec{e}^{(2)} = (-\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$ и $\vec{n}$, образующих правую тройку векторов. Можно получить информацию о поляризации электромагнитной волны, используя детектор, откликающийся на излучение с компонентами вектора напряженности электрического поля

$$\vec{E}\vec{e}^{(s)} = -\vec{e}^{(s)}\frac{d\vec{A}(t,\vec{r})}{dt} = -\frac{e\mu_0}{4\pi r}\vec{e}^{(s)}\frac{d^2\vec{R}(\tau)}{dt^2},\ (s = 1, 2). \qquad (4.4.7)$$

Мгновенная мощность компонент излучения

$$P_s(t,\vec{n}) = \frac{r^2}{\mu_0 c}(\vec{E}\vec{e}^{(s)})^2 \qquad (4.4.8)$$

связана с полной мгновенной мощностью (4.4.6) соотношением

$$P(t,\vec{n}) = P_1(t,\vec{n}) + P_2(t,\vec{n}).$$

Для полного анализа поляризации излучения необходимо использовать спектральный прибор, реализующий пространственное разделение излучения по частотам ω. Этому процессу соответствует представление напряженности электрического и магнитного полей волны в виде суммы монохроматических компонент $\vec{E}_\omega$ и $\vec{B}_\omega$ с различными частотами ω.

Монохроматическая волна по определению непременно поляризована. Характер движения проекции вектора напряженности электрического поля монохроматической компоненты волны $\vec{E}_\omega$ в плоскости перпендикулярной вектору $\vec{n}$, определяет тип поляризации.

Разложим вектор $\vec{E}_\omega$ по трем взаимно перпендикулярным единичным векторам $\vec{e}^{(1)}$, $\vec{e}^{(2)}$ и $\vec{n}$. Пусть детектор регистрирует излучение с компонентой $\vec{E}_\omega\vec{e}^{(s)}$, $s = 1, 2$. Среднее значение мощности компонент излучения частотой ω следует из (4.4.8)

$$P_s(\omega,\vec{n}) = \frac{r^2}{\mu_0 c}\left\langle(\vec{E}_\omega\vec{e}^{(s)})^2\right\rangle. \qquad (4.4.9)$$

4.4.3. Излучение медленных частиц (дипольное излучение). Рассмотрим вначале излучение нерелятивистских частиц, скорость которых $v \ll c$. В этом случае можно пренебречь временем запаздывания $\frac{\vec{n}\vec{R}(\tau)}{c}$ в (4.4.3). Тогда из (4.4.3), (4.4.4) находим

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \frac{e\mu_0}{4\pi r}\vec{v}(\tau),\ \ \tau = t - \frac{r}{c}.$$

Пусть заряд колеблется параллельно оси x: $\vec{R}(t) = \vec{p}a\sin\omega_0 t$, $\vec{p} = (1, 0, 0)$. В этом случае имеем:

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \vec{A}_0\cos\left[\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right],\ \vec{A}_0 = \frac{e\mu_0 a\omega_0}{4\pi r}\vec{p}.$$

Электромагнитное поле представляет собой монохроматическую волну частоты $\omega = \omega_0$, $\vec{E}_\omega = \vec{E}$, $\vec{B}_\omega = \vec{B}$. Две компоненты поляризации напряженности электрического поля волны соответственно равны

$$\vec{E}\vec{e}^{(1)} = 0,\ \vec{E}\vec{e}^{(2)} = -\vec{e}^{(2)}\frac{d\vec{A}(t,\vec{r})}{dt} = -\frac{e\mu_0 a\omega_0^2}{4\pi r}\sin\theta\sin\left[\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right].$$

Следовательно, мы имеем линейно поляризованное излучение. Среднее значение мощности излучения (31.9) частотой $\omega = \omega_0$ в направлении, образующим угол θ с осью x равно

$$P(\omega,\vec{n}) = P_2(\omega,\vec{n}) = \frac{\mu_0}{2c}\left(\frac{ea\omega_0^2}{4\pi}\right)^2\sin^2\theta. \qquad (4.4.10)$$

Из (4.4.10) следует, что мощность излучения в направлении движения ($\theta = 0, \pi$) равна нулю. Отметим, что $\mu_0 = \dfrac{4\pi k}{c^2}$, $k = 9\cdot 10^9$ Н·м²/Кл².

4.4.4. Излучение ультрарелятивистских частиц. Положение меняется при излучении частиц, движущихся со скоростями $v \sim c$, $1-\dfrac{v}{c} \sim \dfrac{1}{2\gamma_L^2}$, $\gamma_L >> 1$. Мы убедимся, что в этом случае излучение заключено в узком конусе вокруг вектора скорости, а основная часть энергии излучения сосредоточена на частотах $\omega >> \omega_0$. При вычислении второй производной в (4.4.6) необходимо учитывать соотношение (4.4.5). В результате получим функцию $P(t, \vec{n})$, содержащую высокие степени разности $1-\dfrac{\vec{n}\vec{v}(\tau)}{c}$ в знаменателе. По этой причине мощность велика в интервале углов, для которых $\dfrac{\vec{n}\vec{v}(\tau)}{c} \sim 1$. Если α — малый угол между $\vec{v}$ и $\vec{n}$, то

$$1-\frac{\vec{n}\vec{v}(\tau)}{c} = 1-\frac{v}{c}\cos\alpha \approx 1-\frac{v}{c}+\frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2\gamma_L^2}+\frac{\alpha^2}{2}.$$

Поэтому при $\alpha \sim \dfrac{1}{\gamma_L} << 1$ знаменатель $\sim \dfrac{1}{\gamma_L^2} << 1$. Следовательно, частицы излучают, в основном, в направлении вектора скорости в конусе с углом

раствора $\sim \frac{2}{\gamma_L} << 1$. Это общее свойство распределения мощности излучения ультрарелятивистских частиц. Однако ширина спектра излучения зависит от соотношения между углом $\alpha \sim \frac{1}{\gamma_L}$ и полным углом отклонения частицы при движении во внешнем поле.

Далее мы рассмотрим две электромагнитные системы, соответствующие двум характерным ситуациям.

4.5. Синхротронное излучение

Электрон движется в магнитном поле индукцией $\vec{B} = (0, 0, B)$ по окружности радиусом R. Зависимость координат от времени имеет вид (рис. Д.4.5.1)

$$R_1(t) = R\sin\omega_0 t, \quad R_2(t) = R(1 - \cos\omega_0 t), \quad R_3(t) = 0, \tag{4.5.1}$$

$$\omega_0 = \frac{eB}{m\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}},$$

$v_0 = \omega_0 R$ — величина скорости электрона. Скорость электрона $\vec{v}(t) = (v_1, v_2, 0)$, $v_1 = v_0\cos\omega_0 t$, $v_2 = v_0\sin\omega_0 t$. При движении электронов в синхротроне

$$v_0 \approx c, R = \frac{c}{\omega_0}, \frac{c}{R} = \frac{eB}{m\gamma_0},$$

B — максимальное значение индукции.

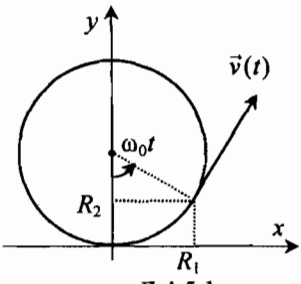


рис. Д.4.5.1

Найдем мощность излучения в направлении $\vec{n}$. В этом случае из (4.4.7) имеем:

$$\vec{E}\vec{e}^{(1)} = \frac{-dA_2(t,\vec{r})}{dt} = \frac{-e\mu_0 v_0\omega_0}{4\pi r}\frac{\cos\omega_0\tau - \frac{v_0}{c}\cos\theta}{\left(1-\frac{v_0}{c}\cos\theta\cos\omega_0\tau\right)^3}, \tag{4.5.2}$$

$$\vec{E}\vec{e}^{(2)} = \sin\theta\frac{dA_1(t,\vec{r})}{dt} = -\frac{e\mu_0 v_0\omega_0}{4\pi r}\frac{\sin\theta\sin\omega_0\tau}{\left(1-\frac{v_0}{c}\cos\theta\cos\omega_0\tau\right)^3}, \tag{4.5.2}$$

Величина $\tau(t)$ определяется решением уравнения (4.4.4)

$$\tau - \frac{R}{c}\sin\omega_0\tau = t - \frac{r}{c}. \tag{4.5.3}$$

Излучение в направлении $\vec{n} = \vec{n}_0$, $\vec{n}_0 = (1, 0, 0)$ в плоскости орбиты ($\theta = 0$) линейно поляризовано. В этом случае мгновенная мощность излучения

$$P(t, \vec{n}_0) = P_1(t, \vec{n}_0) = \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{eR\omega_0^2}{4\pi}\right)^2 \frac{\left(\cos\omega_0\tau - \frac{v_0}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v_0}{c}\cos\omega_0\tau\right)^6}. \qquad (4.5.4)$$

При значениях $\omega_0\tau = (2s + 1)\pi$, ($s = 0, 1, \ldots$) функция $P(t, \vec{n}_0)$ принимает наименьшее значение

$$P_{\min} \approx \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{eR\omega_0^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2^4}.$$

При значениях $\omega_0\tau = 2s\pi$ функция $P(t, \vec{n}_0)$ достигает максимального значения $P_{\max} = (2\gamma_0)^8 P_{\min} >> P_{\min}$. Следовательно, один раз за период возникает мощный импульс электромагнитного поля в направлении вектора $\vec{n}_0$.

Для того чтобы найти эффективную ширину спектра излучения необходимо оценить длительность импульса излучения в направлении вектора $\vec{n}_0$. Длительность импульса определяется интервалом времени, в течение которого $|\cos\omega_0\tau| \sim 1$. Полагая $\omega_0\tau = 2\pi s + \varepsilon$ ($\varepsilon << 1$, $s = 0, 1, 2, \ldots$), представим знаменатель в виде

$$1 - \frac{v_0}{c}\cos\omega_0\tau \approx \frac{1}{2\varepsilon_0\gamma_0^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Очевидно, знаменатель мал при значении $\alpha \sim 1/\gamma_0$. Подставляя $\omega_0\tau = 2\pi s + \varepsilon$ в (4.5.3), получим уравнение, из которого определим моменты времени прихода излучения в точку наблюдения

$$\omega_0 t_s = \frac{\omega_0 r}{c} + 2\pi s + \varepsilon - \frac{v_0}{c}\sin\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon << 1$, то $\sin\varepsilon \approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6}$,

$$\omega_0 t_s = \frac{\omega_0 r}{c} + 2\pi s + \frac{\varepsilon}{2\gamma_0^2} + \frac{\varepsilon^3}{6}.$$

Подставляя значение $\varepsilon \sim 1/\gamma_0$, найдем длительность импульса $\Delta t = \frac{2}{3\omega_0\gamma_0^3}$.

Область частот $\Delta\omega$, в которой мощность излучения максимальна, связана с длительностью импульса соотношением $\Delta t\Delta\omega \sim 1$. Соответственно спектр излучения занимает область частот $\Delta\omega = \frac{3}{2}\omega_0\gamma_0^3$ $\left(\omega_0 \approx \frac{c}{R}\right)$ или интервал

длин волн $\Delta\lambda = \dfrac{4\pi R}{3\gamma_0^3}$. Следовательно, основная часть излучения сосредоточена в области частот $(0, \omega_c)$, где

$$\omega_c = \frac{3}{2}\omega_0\gamma_0^3 = \frac{3eB\gamma_0^2}{2m} >> \omega_0.$$

Максимум мощности излучения наблюдается на частоте $\omega = \omega_m$, $\omega_m = 0{,}29\omega_c$. Для синхротрона *DESY* $\gamma_0 = 15\,000$, $R = 31{,}7$ м, $\lambda_m = 0{,}014$ нм. Излучение темно-красного цвета уже заметно при энергии $T = 60$ МэВ. При энергии $T = 200$ МэВ излучение переходит в белый свет и становится более интенсивным.

Полная мощность излучения по всем направлениям на всех частотах

$$P(t) = \frac{\mu_0 e^2 c^3 \gamma_0^4}{6\pi R^2}.$$

Например, при энергии $T = 300$ МэВ потери на излучение составляют 1000 эВ на один оборот.

Может показаться необычным поведение функции $P(t, \vec{n}_0)$, полученной дифференцированием «гладких» функции $\cos\omega_0\tau$ или $\sin\omega_0\tau$ по t. Выдающийся американский физик-теоретик Р. Фейнман предложил оригинальный метод, позволяющий исследовать зависимость этих функции от времени t. В случае $\vec{n} = \vec{n}_0$ представим (4.5.3) в виде

$$x_c = \varphi - \frac{v_0}{c}\sin\varphi, \quad x_c = \omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad \varphi = \omega_0\tau,$$

Тогда в декартовых координатах (x_c, y_c) уравнения

$$x_c = \varphi - \frac{v_0}{c}\sin\varphi, \quad y_c = \frac{v_0}{c}\cos\varphi,$$

задают в параметрической форме кривую, называемую укороченной циклоидой, которую описывает точка, расположенная на расстоянии $v_0/c \approx 1$ от центра круга единичного радиуса, катящегося без проскальзывания по прямой $y_c = 0$ (рис. Д.4.5.2).

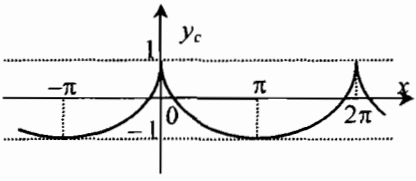


рис. Д. 4.5.2

В окрестности точек $x_c = 2s\pi$ ($s = 0, 1, \ldots$) функция $y_c(x_c)$ изменяется наиболее быстро и здесь величина второй производной достигает максимальной величины.

Пример 4.5.1. Найдем уравнение траектории электрона в системе отсчета K', движущейся со скоростью $\vec{u} = (v_0, 0, 0)$, $v_0 = R\omega_0$.

Из (1.2.2), (4.5.1) получим неявную зависимость координат от времени t':

$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v_0 R_1}{c}\right), \rightarrow \omega_0 t' = \gamma\left[\omega_0 t - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2 \sin\ \omega_0 t\right],$$

$$R_1' = \gamma(R_1 - v_0 t) = \gamma R[\sin\omega_0 t - \omega_0 t],\ R_2' = R_2 = R[1 - \cos\omega_0 t],$$

Разумеется, что в системе K' траектория электрона не является окружностью. В координатах (R_1'/γ, R_2') траектория представляет собой циклоиду.

Уникальные характеристики синхротронного излучения (спектр от инфракрасной до рентгеновской области, угловое распределение, сосредоточенное в малом конусе в плоскости орбиты, поляризационные свойства) используются в современных исследованиях в области физики твердого тела, химии, биологии, технике и технологии изготовления микросхем. В настоящее время в мире действуют более 50 источников синхротронного излучения.

4.6. Ондуляторное излучение

Новый класс приборов — генераторов излучения, представляет собой периодические структуры — *вигглеры* (от англ. *wiggle* — покачивание) и *ондуляторы* (от англ. *ondulation* — колыхание). К ним относятся плоскослоистые среды (например, листы картона), кристаллы, магниты с чередующейся полярностью и др., через которые пропускают пучок релятивистских электронов. Ондуляторы часто вводят в прямолинейные промежутки ускорителя или накопительного кольца. Эти приборы, получившие название *лазеры на свободных электронах*, представляют собой источники интенсивного когерентного излучения в диапазонах длин волн от миллиметрового до ультрафиолетового.

Рассмотрим движение электрона в системе магнитов, создающих периодическое магнитное поле с периодом l_0. Уравнение траектории можно приближенно представить в виде $R_1(t) = v_0 t$, $R_2(t) = 0$, $R_3(t) = a\cos\omega_0 t$, где $\omega_0 = \dfrac{2\pi c}{l_0}$, $a\omega_0 << v_0 \sim c$.

Рассмотрим излучение в направлении вектора $\vec{n} = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$. В этом случае

$$\vec{n}\vec{v} = -a\omega_0 \sin\theta \sin\omega_0 t + v_0 \cos\theta.$$

Если максимальный угол отклонения электрона в xz-плоскости $\delta \sim \dfrac{a\omega_0}{v_0} < \dfrac{1}{\gamma_0}$, то величина τ определяется решением уравнения (4.4.4), которое теперь приобретает вид

$$\tau \approx t - \frac{r}{c} + \frac{v_0}{c}\tau\cos\theta\ .$$

Следовательно,

$$\omega_0\tau = \omega\left(t - \frac{r}{c}\right),\ \omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v_0}{c}\cos\theta}.$$

Электромагнитное поле излучения представляет собой монохроматическую волну частотой ω. Напряженность электрического поля $\vec{E} = \vec{E}_\omega$. Компоненты напряженности электрического поля:

$$\left(\vec{E}_\omega \vec{e}^{(1)}\right) = 0,\ \left(\vec{E}_\omega \vec{e}^{(2)}\right) = E_\omega,$$

$$E_\omega = \frac{e\mu_0 a\omega^2}{4\pi r}\cos\theta\cos(\omega t - \omega r/c).$$

Поляризация излучения. Очевидно, ондуляторное излучение линейно поляризовано. Среднее значение полной мощности излучения (4.4.9)

$$P(\omega, \vec{n}) = P_2(\omega, \vec{n}) = \frac{\mu_0}{2c}\left(\frac{ea\omega^2}{4\pi}\right)^2 \cos^2\theta.$$

При излучении в направлении $\theta = 0$ частота излучения $\omega \approx 2\gamma_0^2\omega_0$. Пучок релятивистских электронов, проходя через периодическую структуру, порождает когерентное излучение частотой $\omega >> \omega_0$. При кинетической энергии $T = 500$ МэВ величина $\gamma_0 \approx \frac{T}{mc^2} = 10^3$. Полагая $l_0 = 5$ см, получим излучение в рентгеновском диапазоне с длиной волны $\lambda = \frac{l_0}{2\gamma_0^2} = 25$ нм.

4.7. Черенковское излучение

В 1934 г. П.А. Черенков обнаружил излучение быстрых электронов в веществе. Природа излучения была выяснена в 1937 г. советскими физиками-теоретиками И.Е. Таммом и И.М. Франком. Оказалось, что при движении электронов с постоянной скоростью $\vec{v}$ в изотропном прозрачном диэлектрике возникает излучение частотой ω при условии $v > v_c$, где $v_c = \frac{c}{n(\omega)}$ — скорость света в среде, $n(\omega)$ — коэффициент преломления. Волна излучается в направлениях, образующих угол α ($\cos\alpha = v_c/v$) с направлением скорости, и распространяется со скоростью $v_c < v$. Поэтому фронт волны представляет собой конус с вершиной, совпадающей с частицей в данный момент времени.

На основе этого эффекта разработаны черенковские счетчики, широко применяемые для регистрации элементарных частиц высоких энергий, измерения скорости и массы.

Пример 4.7.1. Покажем, что законы сохранения энергии и импульса запрещают процесс излучения фотона свободной частицей, движущейся в вакууме.

Пусть ε, $\vec{p}$, ε', $\vec{p}'$ — энергия и импульс частицы до и после излучения фотона частотой ν. Импульс и энергия фотона соответственно равны $\frac{h\nu}{c}\vec{n}$ и $h\nu$, $\vec{n}$ — единичный вектор. Согласно законам сохранения энергии-импульса имеем уравнения

$$\varepsilon = \varepsilon' + h\nu,\ \vec{p} = \vec{p}' + \frac{h\nu}{c}\vec{n}.$$

Учитывая, что $\varepsilon'^2 - (c\vec{p}')^2 = \varepsilon^2 - (c\vec{p})^2$, получим: $c\vec{n}\vec{p} = \varepsilon$. Поскольку скорость частицы $\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{\varepsilon}$, то отсюда следует условие $\frac{\vec{n}\vec{v}}{c} = 1$ или $\cos\alpha = \frac{c}{v}$, где α — угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{v}$. Так как $c > v$, то имеем неравенство $\cos\alpha > 1$: следовательно, в вакууме свободная частица не может излучить фотон.

Положение меняется при движения частицы в среде. В этом случае импульс фотона энергией $h\nu$ равен $\frac{h\nu n(\omega)}{c}\vec{n}$. Теперь из закона сохранения энергии-импульса получим

$$\cos\alpha = \frac{c}{n(\omega)v}\left(1 - \frac{h\nu}{2\varepsilon}\left[1 - n^2(\omega)\right]\right).$$

В классическом приближении величина $\cos\alpha = \frac{c}{nv}$ может быть меньше или равна единице. Это означает, что закон сохранения энергии-импульса не запрещает излучение фотона свободной частицей, движущейся в среде.

Глава 5. Общая теория относительности

Согласно теории относительности нельзя разделить наше четырехмерное пространство-время на трехмерное пространство и одномерное время — истинным элементом реальности является событие, определенное четырьмя числами t, x, y, z. Однако само пространство рассматривается как независимый абсолютный элемент физической реальности. В 1915 г. А.Эйнштейн после десяти лет поисков предложил общую теорию относительности или

теорию тяготения, в которой пространство-время порождаются материей и теряют свое самостоятельное существование. Структура четырехмерного пространства зависит от распределения и движения материи — частиц и полей. В отличие от «плоского» пространства специальной теории относительности, реальное «искривленное» пространство описывается на языке неевклидовой геометрии в терминах нового понятия — кривизна пространства. Движение частицы в искривленном пространстве — это и есть движение в гравитационном поле: общая теория относительности «геометризировала» силы тяготения. Если искривление пространства мало, то его можно учесть, вводя «фиктивную» силу тяжести $m\vec{g}$ в плоском пространстве, как это делается в механике Ньютона.

Изложим основные идеи этого подхода по книге А.Эйнштейна «Сущность теории относительности» (ИЛ.: М. 1955).

5.1. Гравитационная и инертная массы

Отношение масс двух тел определяется в механике двумя принципиально различными способами. Согласно второму закону Ньютона одна и та же сила сообщает телам с инертными массами m_1 и m_2 ускорения величиной a_1 и a_2. Отношение инертных масс $m_2/m_1 = a_1/a_2$. С другой стороны отношение гравитационных масс M_1 и M_2 этих тел равно отношению величин сил $F_1 = GM_1M_0/r^2$ и $F_2 = GM_2M_0/r^2$, действующих на них со стороны массы M_0: $M_2/M_1 = F_2/F_1$. Равенство инертной и гравитационной масс $m = M$ подтверждено экспериментами с большой точностью. Эйнштейн предложил обоснование этого совпадения.

5.2. Принцип эквивалентности

Этой цели можно достичь путем расширения принципа относительности. Предварительно отметим, что *в гравитационном поле все тела движутся с одинаковым ускорением.* Это возможно только при равенстве инертной и гравитационной масс. Действительно, из второго закона Ньютона $m\vec{a} = M\vec{g}$ следует, что $\vec{a} = \vec{g}$ при $m = M$.

Пусть теперь K — некоторая инерциальная система. Уравнение движения частицы в однородном поле тяжести

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}. \qquad (5.2.1)$$

Рассмотрим движение этой частицы в свободно падающей с ускорением $\vec{g}$ системе K'. Координаты $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{r}' = (x', y', z')$ точки пространства в системах отсчета K и K' связаны соотношением:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \frac{1}{2}\vec{g}t^2.$$

При переходе в систему K' сила $m\vec{g}$ в (5.2.1) компенсируется инерциальной «силой» и уравнение движения в системе K' приобретает вид

$$m\vec{a}' = \vec{F}. \qquad (5.2.2)$$

Например, масса Солнца определяет движение свободно падающей Земли, но как только мы свяжем нашу систему отсчета с Землей, мы не можем обнаружить гравитационное поле Солнца. В действительности из-за того, что Земля не является бесконечно малым объектом, поле Солнца проявляется благодаря эффектам приливов. Следовательно, наблюдатель в системе К обнаружит воздействие гравитационного поля, а в системе K' нет никакого гравитационного поля. Эйнштейн назвал предположение о полной физической эквивалентности систем K и K' *принципом эквивалентности.*

Такая концепция приводит нас к признанию единства природы инерции и тяготения.

5.3. Основные идеи теории тяготения

Инерциальные системы обладают существенным преимуществом — в любой из них законы природы описываются одинаково. Такие области пространства Эйнштейн назвал «галилеевыми областями». Однако закон инерции вынуждает нас приписать пространству абсолютные свойства. Такое представление встречает серьезные возражения. Закон инерции выполняется только при пренебрежении вращением Земли и взаимодействием частицы с Солнцем и планетами. Возникает вопрос: можно ли изучать законы природы, опираясь на такое абстрактное понятие, как инерциальная система? Существуют ли вообще какие-либо инерциальные системы в больших областях пространства?

Принцип эквивалентности требует, чтобы при рассмотрении галилеевых областей мы могли использовать и неинерциальные системы. Теория тяготения, созданная А. Эйнштейном, основана на принципе относительности в наиболее широком смысле: все системы отсчета равноправны, если уравнения, описывающие физические законы, сохраняют свою форму при произвольных преобразованиях координат и времени.

Для того чтобы ввести в физическую систему гравитационное поле, необходимо выполнить два действия:

1. Записать уравнения движения частиц и полей в системе К′ в отсутствие гравитационного поля.

2. Произвести преобразование координат ($x_0' = ct'$, x', y', z') системы K' к координатам ($x_0 = ct$, x, y, z) системы K. Это преобразование задается 10 функциями $g_{ik}(x_0, x, y, z)$ — четыре функции с одинаковыми индексами и шесть — с различными индексами ($g_{ik} = g_{ki}$, $i, k = 0,1,2,3$).

Гравитационное поле полностью определяется функциями g_{ik}, которые удовлетворяют уравнениям, впервые полученным Эйнштейном в 1916 г. Распределение и движение материи, создающей гравитационное поле, должны быть определены одновременно с самим гравитационным полем. Таким образом, частицы и поля порождают искривление пространства-времени, которое эквивалентно гравитационному полю, влияющему в свою очередь на динамику частиц и полей.

Пусть два события происходят в одной точке пространства через промежуток времени Δt. Согласно теории инвариантный интервал собственного времени $\Delta\tau = [g_{00}(x_0, x, y, z)]^{1/2}\Delta t$. Следовательно, собственное время зависит от координат мировой точки. Поэтому нельзя определить длину эталона как расстояние между двумя одновременными событиями, полагая $\Delta t = 0$. Теперь длина эталона в постоянном гравитационном поле зависит от его положения и ориентации, т. к. пространство не является евклидовым — оно «искривлено».

5.4. Проверка теории Эйнштейна

Из решения уравнений Эйнштейна следует, что при прохождении вблизи Солнца должна проявиться кривизна пространства: световой луч отклоняется от первоначального направления. Эйнштейн предложил сопоставить видимое положение звезд у края солнечного диска во время затмения с их положениями ночью за шесть месяцев до затмения, когда те же звезды видимы на небе с Земли на противоположной стороне от Солнца. Смещение луча согласно теории равно 1,75″. Английская группа в 1919 г. получила хорошее согласие с эйнштейновским предсказанием. Этот эффект поразил уставших от первой мировой войны (15 авг. 1914 г. — 11 нояб. 1918 г.) европейцев и впервые привлек внимание широкой публики к теории относительности.

8 октября 2002 г. Юпитер почти точно заслонил Землю от квазара. Анализ обработки наблюдений десятка радиотелескопов, расположенных в разных частях планеты, позволил обнаружить смещение изображения квазара, обусловленное сильным гравитационным полем Юпитера.

Другое следствие теории позволило объяснить смещение перигелия *ближайшей к Солнцу планеты Меркурия*, впервые обнаруженного У. Леверье в 1845 г. В 1967 г. был проведен эксперимент по измерению времени запаздывания радиосигнала, отраженного от Меркурия, который дал хорошее согласие теории и наблюдений.

Сильное впечатление произвел эксперимент по обнаружению изменения частоты электромагнитной волны, распространяющейся в гравитационном поле, проведенный в 1957 г. Приемник, расположенный ниже излучателя на расстоянии d = 22,6 м, обнаружил относительное увеличение частоты $\Delta\nu/\nu = gd/c^2$, $\Delta\nu/\nu = 2{,}46\ 10^{-15}$. Точно так же наблюдатель обнару-

жит замедление хода часов вблизи массивного тела. В одном из таких экспериментов точные цезиевые часы были установлены в самолете. После 15 — часового полета оказалось, что часы ушли вперед на 47 нс по сравнению с показаниями часов на Земле. Согласно теории изменяется масштаб времени в двух различных точках пространства, поскольку инвариантный интервал между двумя событиями — положениями стрелки часов, которые движутся со скоростью $v << c$ на высоте $h << R$ (R — радиус Земли) равен $\Delta s \approx c\Delta t(1 - v^2/2c^2 - gR/c^2 + gh/c^2)$. Отсюда находим соотношение $\Delta t_з(1 - gR/c^2) = \Delta t_с(1 - v^2/2c^2 - gR/c^2 + gh/c^2)$ или $\Delta t_с \approx \Delta t_з\,(1 + v^2/2c^2 - gh/c^2)$. При полете на большой высоте проявляются гравитационный эффект «ускорения» времени на 53 нс и уже знакомое нам релятивистское замедление времени на 6 нс.

Теория предсказывает, что при столкновении двух черных дыр, при взрыве сверхновой звезды или слиянии двойной нейтронной звезды происходит возмущение кривизны пространства — времени и возникают *гравитационные волны*, сжимающие и растягивающие вещество и пространство. Возможно существует фон гравитационного излучения реликтового происхождения.

Лучшим доказательством корректности эксперимента будет регистрация гравитационной волны несколькими установками, независимо от расстояния между ними. Наибольшей чувствительностью обладает модифицированный лазерный интерферометр Майкельсона. В 2001 г. закончено сооружение двух обсерваторий LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, США) в Ливингстоне и Ханфорде, разнесенных на 3000 км. Антенны представляют собой зеркала из плавленого кварца массой 10 кг, плечи интерферометра - соответственно 4 и 2 км. В это же время был закончен монтаж установки GEO 600 в Ганновере. В 2006 г. LIGO планируют усовершенствовать. Зеркала заменят «ювелирными изделиями» из сапфира массой 40 кг каждый. Запланированы и другие новшества, максимально повышающие чувствительность. В режиме ожидания на выходе интерферометра наблюдается темная полоса. В результате изменения разности хода световых волн датчик «увидит» свет. Для того чтобы зарегистрировать гравитационную волну необходимо, обнаружить относительные деформации порядка 10^{-21}! Если не удастся обнаружить гравитационных волн, то возможно, будут сделаны другие, не менее важные открытия.

В настоящее время глубокие идеи, заложенные в общей теории относительности, являются основой для построения квантовой теории тяготения, которая позволит объяснить эволюцию Вселенной.

Дополнение VII.
АТОМНАЯ ФИЗИКА

Глава 1. Атомная физика

1.6. «Парадоксы» квантовой физики

Невозможность одновременно измерить точные значения координаты и импульса не связана с несовершенством приборов. Любые измерения отражают эту новую квантово-механическую закономерность поведения частиц. Если рассматривать квантовые явления с позиций классической физики, то все следствия приобретают, как правило, форму парадоксов и противоречат здравому смыслу. Но тем не менее эти «парадоксы» соответствуют реальным явлениям природы. От теории требуется только то, чтобы она описывала наблюдаемые явления. Здравый смысл, как сказал Эйнштейн, «это тот пласт предрассудков, который мы накапливаем до 16 лет». Здравый смысл современного поколения физиков опирается на квантовую теорию. Новые эксперименты лишь подтверждают замечание Н. Бора: «Если квантовая физика не приводит вас в замешательство, то вы ее не поняли по-настоящему».

1.6.1. «Квантовый ластик». Противопоставление волн частицам приводит к проблеме: что же такое фотоны и электроны — частицы или волны? С точки зрения квантовой теории и фотоны и электроны являются частицами, «чистое» состояние которых описывается волновой функцией, которой нельзя сопоставить реальную волну.

Пусть тождественные частицы (фотоны или электроны) с одинаковыми импульсами падают на экран, в котором имеются два отверстия. В направлении экрана можно направить плотный пучок частиц или многократно повторить эксперимент с отдельными частицами. За экраном находится детектор — счетчик частиц, который в любом из этих случаев регистрирует распределение частиц, соответствующее интерференционной картине. В втором случае детектор фиксирует отдельные частицы и постепенно возникает интерференционная картина — признак того, что *каждая частица проходит сквозь оба отверстия*.

При необратимом взаимодействии с измерительной аппаратурой фотон переходит в новое «смешанное» состояние, зависящее от параметров фотона и прибора. Если экспериментатор с помощью прибора обнаружит, что частица прошла сквозь одно из отверстий, то интерференционная картина

исчезает. Создается впечатление, что это явление само по себе не имеет ни волнового, ни корпускулярного характера; его природа не определена до того момента, когда мы получаем информацию о состоянии квантового объекта. Следовательно, в квантовой механике процедура измерения влияет на состояние системы. Однако эксперимент, проведенный в 1991 г. с двумя пучками фотонов, показал, что, получая в результате измерения информацию о состоянии одного фотона, нарушающего волновые свойства, можно восстановить их, «стирая» полученную информацию. Это явление назвали «*квантовым ластиком*».

Новые эксперименты позволяют глубже понять сущность поражающих воображение основных принципов квантовой теории и придать строгое определение понятию «физическая реальность».

1.6.2. Квантовый компьютер. Квантовый объект существует *одновременно* в виде суперпозиции всех возможных состояний. Например, электрон может находиться в двух независимых спиновых состояниях, соответствующих двум возможным проекциям спина $s_z = 1/2$ и $s_z = -1/2$ на некоторую ось z. В классической механике состояния такого типа невозможны. Процесс измерения проекции спина переводит электрон в одно из состояний. Здесь проявляется важное различие между квантовой и классической механикой — квантовая механика утверждает, что каждое состояние реализуется с определенной вероятностью. Если спин электрона направлен по оси z, то вероятности того, что спин направлен параллельно или антипараллельно оси x равны 1/2.

Другой пример — атомное ядро, спин которого равен J, приобретает в магнитном поле индукцией $\vec{B}$ энергию $\Delta E_J = -\mu_J B$, где $\mu_J = g\mu_N M_J$, g — структурный фактор ядра, $\mu_N = 3{,}15 \cdot 10^{-8}$ эВ/Тл — ядерный магнетон, $M_J = -J, \ldots, +J$ — магнитное квантовое число – проекция спина на направление вектора $\vec{B}$. Проекция M_J принимает $2J + 1$ значений, соответствующих $2J + 1$ состояниям.

Причем здесь компьютеры? Биты 0 и 1 (*bit* — единица количества информации от англ. *binary* — двоичный, *digit* — цифра), представляющие два электрических состояния в цепях ЭВМ, напоминают состояния двухуровневой квантовой системы. Квантовую единицу информации – суперпозицию двух состояний – назвали квантовым битом или «кубитом» (*qubits*). Переходы между состояниями реализуются в результате взаимодействия спина с радиочастотными импульсами. N кубитов образуют вычислительный базис. Однако каждый кубит может находиться в двух состояниях одновременно. Следовательно, квантовый компьютер может оперировать одновременно на комбинациях кажущихся несовместимыми входов и производить параллельные вычисления, позволяющие повысить быстродействие на несколько порядков.

В 1978 г. была разработана новая схема кодировки текста (RSA-код), основанная на факторизации большого числа, равного произведению двух простых чисел. Код с 129-значным числом был взломан через 17 лет. Для этого

потребовались 1600 объединенных в сеть компьютеров. Неожиданно секрет шифровальной системы стал ненадежным — в 1994 г. Питер Шор показал, что квантовый компьютер мог бы решить эту задачу значительно быстрее. Статья Шора стимулировала работы в области квантовых компьютеров и квантовой криптографии (от греч. *krypte* — тайный). В августе 1999 г. фирма IBM объявила о создании квантового компьютера из 5 атомов.

Пока что квантовые компьютеры не вышли из лабораторий. Ожидаемый технологический прорыв должен превзойти достижения полупроводниковой революции.

1.6.3. Квантовая телепортация. Один из самых поразительных эффектов получил название «квантовой телепортации» (от греч. *tele* — далеко). Оказалась возможной передача квантового состояния одной частицы другой частице.

Предположим, что система содержит фотоны. Два чистых состояния фотона φ^+ и φ^- соответствуют линейной поляризации P_x и P_y по двум взаимно перпендикулярным осям, перпендикулярным импульсу. Произвольное состояние фотона φ_1 представляет собой суперпозицию чистых состояний $\varphi_1 = a\varphi^+ + b\varphi^-$. Два фотона — второй и третий — могут находиться в четырех чистых состояниях $\psi_{23}^{\pm}$, $\Phi_{23}^{\pm}$, называемых состояниями Белла. Состояние системы из трех фотонов 1, 2 и 3 в этом случае можно представить как суперпозицию четырех состояний, соответствующих произведениям функций $\psi^{\pm}_{12}$, $\Phi^{\pm}_{12}$ на одну из функций φ_3 с коэффициентами разложения, пропорциональными множителям $\pm a$ и $\pm b$. Тогда при любом из состояний φ_3 фотоны 1 и 2 с равной вероятностью 1/4 находятся в каждом из возможных состояний $\psi^{\pm}_{12}$, $\Phi^{\pm}_{12}$. Если известно, что фотоны 1 и 2 находятся в одном из этих состояний, то можно определить состояние фотона 3.

Пусть фотоны 2 и 3 находятся в состоянии ψ^-_{23}. Квантовая физика предсказывает: при регистрации фотонов 1 и 2 в состоянии ψ^-_{12} состояние фотона 3 совпадет с начальным состоянием фотона 1. Процесс передачи информации от фотона 1 к фотону 3 не зависит от расстояния между фотонами. Это и есть телепортация фотона, предсказанная в 1994 г. американцем Ч. Беннетом.

Эксперимент австрийских физиков, проведенный в 1997 г., подтвердил предсказания теории. В этом эксперименте ультрафиолетовые фотоны проходят через нелинейный кристалл, порождая пары фотонов 2 и 3, сумма энергий которых равна энергии первичного фотона. После переотражения в кристалле фотоны еще порождают пару фотонов 1 и 4. Фотон 1 переводят в состояние φ_1, предназначенное для телепортации. Регистрация фотона 4 позволяет убедиться, что телепортируется именно фотон 1. Передача информации осуществляется благодаря «спутыванию» состояний пары фотонов (*entangled pair*) – переходу в состояние Белла ψ^-_{12}.

Схема телепортации поляризации фотона 1 фотону 3 состоит в следующем. Фотоны 1 и 2 с помощью зеркал направляются к отправителю, названному авторами статьи Алисой. Алиса, используя фотодетекторы f_1 и f_2, выделяет состояние ψ^-_{12}. Эту «классическую» информацию она сообщает

получателю фотона 3 – Бобу. Теперь Боб знает, что его фотон 3 находится в начальном состоянии фотона 1. Если начальное состояние известно, то Боб может подтвердить этот факт, анализируя поляризацию фотонов с помощью поляризационного фотоделителя и детекторов d_1 и d_2.

Эксперимент показал, что квантовая корреляция (от познелат. *correlatio* — соотношение) фотонов 1 и 3 наблюдается на расстояниях свыше 10 км. Такое странное поведение называют *нелокальным взаимодействием*. Состояние φ_1 после измерения полностью разрушается, т. к. спутываются состояния фотонов 1 и 2. Существенное отличие квантовой информации от классической состоит в том, что квантовой информацией можно обмениваться, но ее нельзя дублировать.

Явление квантовой телепортации можно использовать для телепортации частиц ненулевой массы, для переноса информации от фотонов на ионы, захваченные в электромагнитную ловушку, передачи информации в условиях сильных помех и в квантовых вычислениях.

1.7. Квантовая электродинамика

1.7.1. Физический вакуум. Метод описания процессов рождения и уничтожения частиц был предложен в 1927 г. П. Дираком. Любую физическую систему можно представить в виде множества частиц — носителей энергии и импульса — квантов различных полей. Состояние системы задается «числами заполнения» — последовательностью целых чисел N_a, каждое из которых равно числу различных частиц в состояниях $a = 1, 2, \ldots$. Некоторые «частицы» — фононы, экситоны, ротоны и др. могут существовать только в ограниченном объеме твердого тела или в жидкости, описывая возбужденные состояния системы.

Фундаментальную роль играет состояние, в котором нет ни одной возбужденной частицы. Это состояние называется *физическим вакуумом*. Корпускулярная картина является лишь одной стороной содержания теории. Другой ее стороной является волновая картина. В случае электромагнитного поля точное знание числа фотонов исключает возможность точного определения интенсивности поля. Таким образом, даже в вакууме должны существовать флуктуации напряженностей электрического и магнитного полей. Это флуктуирующее поле вакуума взаимодействует с заряженными частицами и реально проявляются в различных эффектах. Например, в 1947 г. американский физик-теоретик Г. Бете интерпретировал большую часть лембовского сдвига как уменьшение энергии электрона в результате взаимодействия с так называемыми нулевыми флуктуациями электромагнитного поля вакуума.

1.7.2. Эффект Казимира. В реальности ненаблюдаемого поля в состоянии физического вакуума можно убедиться, в экспериментах с незаряженными макроскопическими телами. Возьмем металлическую пластину в виде квадрата со стороной L. Поместим на расстоянии $a << L$ от нее такую же пластину. В результате электромагнитное поле физического вакуума перестроится, т. к. установятся новые граничные условия, которым должны удовлетворять векторы

напряженности поля. Энергия поля в пространстве между пластинами становится равной $U_0 + U$, $U = -(\pi^2 L^2/720)\hbar c/a^3$, где U_0 — ненаблюдаемый вклад энергии вакуумного свободного поля. На каждую пластину действует сила притяжения величиной $F = |\Delta U/\Delta a| = (\pi^2 L^2/240)\hbar c/a^4$. Этот эффект, предсказанный в 1948 г. Г. Казимиром, экспериментально обнаружен в 1958 г.

1.7.3. Поляризация вакуума. Благодаря квантовым эффектам в электромагнитном поле могут самопризвольно рождаться электрон-позитронные пары. В сильном электрическом поле возможно появление из вакуума электрон-позитронной пары с неопределенностью энергии $\Delta E = mc^2$. В соответствие с (1.5.2) за время существования $\Delta t = \hbar/(mc^2)$ размеры пары могут достичь значения $\Delta r = c\Delta t \sim \hbar/(mc)$. Если теперь электрическое поле способно произвести работу $eE\Delta r = mc^2$, то рождение пары из вакуума полем напряженностью $E_{кр} = m^2c^3/e\hbar$ становится реальностью. Учитывая значения $mc^2 = 0{,}511$ Мэв, 1 эВ/hc = 806548 м$^{-1}$, получим величину напряженности поля $E_{кр} = 1{,}27\ 10^{18}$ В/м !

1.7.4. Квантованные сопротивление и магнитный поток. Комбинация постоянной Планка и элементарного заряда h/e^2 имеет размерность сопротивления: $h/e^2 = 25\ 812{,}8$ Ом. Поэтому можно утверждать, что квантовые эффекты могут проявиться в «электротехнике». В 1980 г. немецкий физик К. фон Клитцинг исследовал влияние магнитного поля на проводимость n-канала полевого МОП-транзистора — тонкой (толщиной 10 нм) почти двумерной полоски, расположенной перпендикулярно вектору магнитной индукции $\vec{B}$. В случае макроскопической «толстой» полоски должен проявиться эффект Холла известный еще с 1880 г. — на боковых гранях полоски возникнет разность потенциалов $V = IR$, $R = B/(\text{end})$, d — толщина полоски, n — концентрация электронов. Оказалось, что график $R = R(B)$ представляет собой последовательность ступенек при значениях $R = h/Ne^2$, $N = 4,3,2,1$ (Нобелевская премия, 1985г.).

Квант магнитного потока $\Phi_0 = h/2e$, $\Phi_0 = 2{,}07 \cdot 10^{-15}$ Вб представляет собой минимальное значение магнитного потока. Квантование магнитного потока $\Phi = N\Phi_0$ ($N = 1, 2, \ldots$), открытое в 1961 г., проявляется в сверхпроводящем кольце, интерференции сверхпроводящих токов во внешнем магнитном поле, в системах типа металлической петли из тонкой проволоки размером 1 мкм, присоединенной к двум проводникам, и т. д.

Рассмотренные структуры получили название «мезоскопических» систем (от греч. *mesos* — средний, промежуточный). Размеры таких структур велики в атомных масштабах, но достаточно малы для того, чтобы эффекты квантования и квантовой интерференции играли главную роль в физических процессах.

1.7.5. Нанотехнология. Последние десять лет бурно развивается новая область прикладной физики — нанотехнология, которая приведет к созданию механизмов размером с простейшие одноклеточные организмы. Существуют два пути в микромир. В первом случае структуры размерами порядка нанометра строят из отдельных атомов и молекул. На таком bottom-up

принципе и основана нанотехнология. В расширенном понимании она включает методы конструирования макромолекул, имеющих заданную структуру. Манипуляции с белками обещают переворот в фармацевтике и молекулярной электронике. Во втором случае берут пластинку кремния и вытравливают искомый продукт. По такому top-down принципу изготавляют микроструктуры: микромоторы, микронасосы, микророботы, пинцеты и пр. Один из первых электростатических микродвигателей имел ротор диаметром 130 мкм. Наноцех — предвестник новой промышленной революции.

Глава 2. Прикладная атомная физика

2.4. Квантовая теория вещества

Классическое описание, основанное на законах Ньютона и электродинамике Максвелла, приближенно отражает закономерности реальных явлений. Огромное число экспериментальных данных позволяет утверждать, что квантовая теория является более высоким уровнем познания явлений природы. В этом параграфе рассматриваются несколько явлений, имеющих важное значение для понимания квантовых представлений. Приведенные примеры относятся к различным областям физики.

2.4.1. Квантовая химия. Химия — одна из древнейших наук, доказавшая свою эффективность задолго до создания квантовой теории. Молекулярно- кинетическая теория и термодинамика не затронули ее существа. И только квантовая механика превратила химию в современную науку, т. к. любое вещество состоит из типично квантовых объектов — атомов и молекул. Новая область науки — *квантовая химия* впервые позволила построить теории валентности, химической связи и химической активности. Основную роль здесь играет принцип неразличимости одинаковых частиц, новая характеристика электрона — спин и принцип Паули. Поясним понятие спин (англ. *spin* — вращение).

В теории Бора ориентацию орбиты, по которой движется электрон в атоме водорода, можно задать вектором момента импульса l, перпендикулярным плоскости орбиты. При движении по окружности радиусом r со скоростью v его величина $l = mrv$; размерность l совпадает с размерностью постоянной Планка. Согласно более поздней квантовой теории проекция момента импульса l_z на выделенное направление (ось z) при заданном значении l может принимать 2l + 1 дискретных значений: $l_z = -l, -l + 1, ..., 0,... l-1, l$.

В 1925 г. для объяснения расщепления линий спектра щелочных металлов пришлось предположить, что *электрон обладает собственным моментом импульса — спином*, не связанным с его движением в пространстве. Эта характеристика электрона является проявлением его внутренних свойств и принципиально не допускает классической интерпретации. Величина собст-

венного момента электрона в единицах $h/2\pi$ равна $s = 1/2$. Число возможных проекций спина s_z на любое выделенное направление равно $2s + 1$. Для электрона $2s + 1 = 2$: возможны состояния с $s_z = -1/2$ и $s_z = 1/2$. В устойчивом состоянии молекулы водорода спины двух электронов всегда имеют противоположные направления.

Принцип Паули. В 1925 г. швейцарский физик В. Паули открыл фундаментальный закон природы: *две тождественные частицы с полуцелым спином не могут одновременно находиться в одном состоянии.*

2.4.2. Квантовая теория атома. Первые шаги к построению современной теории атомных явлений были сделаны в 1925—28 гг. после создания квантовой механики. В первой квантовой теории атома водорода (1927 г.) было показано, что *главное квантовое число* в (1.4.4) $n = l + l + k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для нас наиболее важным следствием является то, что эта теория не описывает движение электрона по траектории, а позволяет предсказать положение пространственной области наиболее вероятного местонахождения электрона и вычислить значение полной энергии атома. Эти области получили название орбит или *электронных орбиталей*, а значение полной энергии — энергетического уровня. Полная энергия электрона зависит от *квантовых чисел* n и l. При фиксированном значении n квантовое число l может принимать n значений $l = 0, 1, \ldots, n-1$. О распределении электронов в атоме по состояниям с различными l, n говорят, как об электронной конфигурации. Одинаковые значения n, l могут иметь не более $2(2l + 1)$ электронов атома.

Энергетические уровни и состояния электронов атома обозначают символом nl, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, а численные значения l заменяют соответствующими буквами латинского алфавита: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots \rightarrow s, p, d, f, g, \ldots$. Согласно принципу Паули в каждом s-состоянии может быть не более двух электронов, в p-состоянии — не более 6, в d-состоянии — не более 10. При $n = 1$ имеем два состояния $1s$ ($l = 0$, $l_z = 0$, $s_z = \pm 1/2$). При $n = 2$ имеем два состояния $2s$ ($l = 0$, $l_z = 0$, $s_z = \pm 1/2$) и шесть состояний $2p$ ($l = 1$, $l_z = -1, 0, 1$, $s_z = \pm 1/2$) — всего восемь состояний. Энергетическим уровням с $n = 3$ могут принадлежать, помимо одной s-орбитали, соответственно три p и пять d-орбиталей, определяющих возможную электронную конфигурацию атома.

Периодическая система Менделеева. Периодическая система элементов состоит из десяти горизонтальных рядов, которые образуют семь периодов, и девяти вертикальных столбцов, в которых расположены элементы со сходными химическими свойствами. Квантовые закономерности заполнения электронных оболочек позволили объяснить структуру периодической системы элементов, установленной в 1868 г. русским химиком Д. И. Менделеевым.

В основном состоянии атомов электроны заполняют нижние энергетические состояния. О совокупности электронов, заполняющих все состояния с данными n и l, говорят как о *заполненной оболочке* данного типа. Сначала

заполняются s, затем p и далее d-оболочки. Однако это правило нарушается для атомов с зарядом ядра $Z \geq 19$. Порядок расположения горизонтальных рядов таблицы Менделеева соответствует номеру оболочки. Каждая новая оболочка начинается с орбитали, заполненной электронами в s-состоянии. Периодам системы элементов Менделеева соответствуют оболочки ($1s$), ($2s$, $2p$), ($3s$, $3p$), ($4s$, $3d$, $4p$), ... , последовательно заполняемые 2, 8, 8, 18, 18 и 32 электронами.

В атоме водорода $_1$H имеется всего один электрон в состоянии $1s$. В атоме следующего элемента — гелия $_2$He — два электрона в $1s$-состоянии заполняют первую оболочку. Заполнение второй оболочки начинается с лития $_3$Li. В атоме неона $_{10}$Ne десять электронов полностью заполняют все состояния $1s$ и $2s$, $2p$ двух оболочек. Три оболочки заполнены в атоме аргона $_{18}$Ar($1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$). Заполнение второй и третьей соответствует двум первым (малым) периодам. Далее следуют два больших периода системы по 18 элементов; четыре оболочки заполнены в атоме криптона $_{36}$Kr, пять — в атоме ксенона $_{54}$Xe. Большой период, включающий 32 элемента, завершается атомом радона $_{86}$Ra с шестью заполненными оболочками. Последняя группа состояний полностью не заполнена.

Химические свойства элементов определяются электронной конфигурацией внешней оболочки. Например, все атомы с одним электроном сверх заполненных оболочек имеют близкие свойства и относятся к щелочным металлам. С устойчивостью электронных конфигураций атомов с заполненными оболочками — атомов благородных газов — связана химическая инертность этих элементов.

Теория валентности. Под валентностью понимают свойство атома соединиться с определенным числом других атомов. Каждому атому приписывается определенная валентность — это удвоенный спин атома. Один и тот же атом может обладать различной валентностью, зависящей от состояния атома. Численная величина положительной валентности определяется числом электронов внешней оболочки с нескомпенсированным спином, которые атом отдает другому атому. При соединении атомов каждой валентной связи атома должна соответствовать валентная связь другого атома.

2.5. Квантовая жидкость — жидкий гелий

2.5.1. Энергия нулевых колебаний. Изотоп гелия ^{4}He переходит из газообразного состояния в жидкое при атмосферном давлении и температуре, равной всего 4,22 K. Такое малое значение температуры связано со слабым межатомным взаимодействием инертных атомов гелия, у которых внешняя оболочка полностью заполнена. Далее гелий остается жидким и при температуре $T = 0$ K. Странное поведение жидкого гелия объясняется существованием энергии *нулевых колебаний*.

Согласно соотношению неопределенностей атом гелия должен обладать кинетической энергией нетеплового происхождения $E_0 = p^2/2m > (1/2m)(\hbar/a)^2$, где $a = 0{,}27$ нм — диаметр «шарика» — атома гелия. Поскольку $E_0 > 7{,}14 \cdot 10^{-4}$ эВ, то кинетическая энергия E_0 оказывается одного порядка с энергией взаимодействия атомов гелия. При нормальной плотности $\rho = 0{,}146$ г/см^3 на каждый атом приходится сфера объемом $V_0 = M/\rho N_A$, диаметром $d = (6V_0/\pi)^{1/3}$, $d = 0{,}45$ нм: атомы в жидкости неплотно прижаты друг к другу. И только заметное давление может сблизить атомы гелия. Величина потенциальной энергии взаимодействия атомов возрастет и станет больше энергии нулевых колебаний: гелий кристаллизуется. Этот процесс происходит при давлении ~ 30 *атм*.

У водорода энергия нулевых колебаний больше, чем у гелия. Однако из-за большой величины энергии взаимодействия он кристаллизуется. Для остальных жидкостей нулевые колебания несущественны. Жидкий гелий называют квантовой жидкостью, подчеркивая роль квантовых законов, объясняющих его поведение при низких температурах.

2.5.2. Бозе-конденсат — 5-е состояние вещества. Постараемся теперь выяснить, при каких условиях классическая теория газа как системы многих частиц, движущихся в соответствии со вторым законом Ньютона, не приведет к противоречию с экспериментальными данными. Классическое рассмотрение будет справедливо, если выполняются квантово-механические условия, «препятствующие» локализации молекулы в пределах объема размером V/N, где N — число молекул в объеме V. В состоянии теплового равновесия значение среднеквадратичного импульса молекулы $p = (3mk_БT)^{1/2}$, а длина «тепловой» волны де Бройля $\lambda = h/p = h/(3mk_БT)^{1/2}$. Допустим, что каждая молекула находится в центре куба объемом a^3. Тогда $a^3N = V$. Теперь условие применимости классического рассмотрения $\lambda << a$ принимает вид

$$h^3(3mk_БT)^{-3/2}(N/V) << 1. \qquad (2.5.1)$$

Неравенство (2.5.1) нарушается при высоких концентрациях атомов N/V, низких температурах и малой массе атомов.

Приведем численные оценки. Для гелия ^{4}He, находящегося в нормальных условиях, из уравнения состояния получим число Лошмидта $N/V = 2{,}68 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$, $a = 0{,}36$ *нм*. Учитывая значения $k_БT_0 = 2{,}352 \cdot 10^{-2}$ эВ, $mc^2 = 3727{,}379$ МэВ, находим $\lambda = 0{,}012$ *нм*. Таким образом, условие $(\lambda/a)^3 = 3{,}7 \cdot 10^{-5} << 1$ выполняется. Такой газ называют *невырожденным*. Для газообразного гелия при давлении 100 кПа и температуре $T = 5$ К имеем $N/V = 1{,}449 \cdot 10^{27}$ *м*$^{-3}$, $a = 0{,}884$ нм, $\lambda = 0{,}564$ нм. Величина $(\lambda/a)^3 = 0{,}26$ и классическое рассмотрение не является надежным. Когда классическое приближение неприменимо, говорят, что газ вырожден.

Условие (2.5.1) эквивалентно неравенству

$$T >> T_0,\ T_0 = n^{2/3}\,(h^2/3mk_Б), \qquad (2.5.2)$$

где $n = N/V$ — концентрация атомов ^{4}He. Величину T_0 называют *температурой вырождения*. Строгая теория, не учитывающая взаимодействие атомов гелия-4, приводит к значению температуры вырождения $T_0' = 3{,}31n^{2/3}\,\hbar^2/(mk_Б)$, $T_0' = 3{,}1$ K.

Анализ распределения атомов с целым спином по энергиям показывает, что при температурах $T < T_0$ число атомов с полной энергией $\varepsilon > 0$ равно $N_\varepsilon = N(T/T_0)^{3/2}$. Остальные $N_0 = N[1 - (T/T_0)^{3/2}]$ атомов находятся в основном состоянии с энергией $\varepsilon = 0$. При $T = 0$ возникает интересный эффект: все атомы «конденсируются» на основном уровне в состоянии с энергией $\varepsilon = 0$. Увеличение числа атомов в основном состоянии при температурах ниже T_0 называют *конденсацией Бозе-Эйнштейна* (1925 г.). В 1995 г. этот эффект был обнаружен в разреженном газе ультрахолодных атомов рубидия и натрия (Нобелевская премия, 2001 г.). Конденсат Бозе представляет собой 5-е состояние вещества.

Дополнительную информацию о распределении атомов по энергиям при температурах $T >> T_0$ можно получить из условия (2.5.1). Запишем его в виде

$$N \ll N_t, \quad N_t = V/V_q, \quad V_q = (h^2/3mk_БT)^{3/2}, \qquad (2.5.3)$$

где V_q — *«квантовый объем»*, N_t приближенно равно числу возможных квантовых состояний, в которых могут находиться частицы. Следовательно, среднее число частиц в каждом из квантовых состояний значительно меньше единицы. Вероятность полного отсутствия частиц в данном состоянии близка к единице, а вероятность наличия одной частицы в данном состоянии достаточно мала. Условие (2.5.3) означает, что в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы. При $T < T_0$ реализуется другая ситуация. Теперь число возможных состояний меньше полного числа частиц. В этом случае проявляется новый квантовый эффект: своеобразное взаимное влияние частиц, находящихся в одинаковом квантовом состоянии, — так называемое обменное взаимодействие.

2.5.3. Принцип неразличимости одинаковых частиц. При $T >> T_0$ газ частиц удовлетворительно описывается в рамках классической механики. В классической теории отсутствует математический аппарат, позволяющий описать состояние тождественных частиц — электронов, атомов или молекул. Здесь частицы не теряют своей индивидуальности — их можно «пронумеровать» и следить за движением каждой из них по своей траектории. Поэтому вопреки реальной ситуации, предполагается, что идентичные молекулы являются раз-

личными частицами, которые движутся по определенным траекториям. Напротив, в квантовой статистической физике основную роль играет принцип неразличимости одинаковых частиц. В частности, различие квантовой и классической статистик проявляется при подсчете числа возможных состояний.

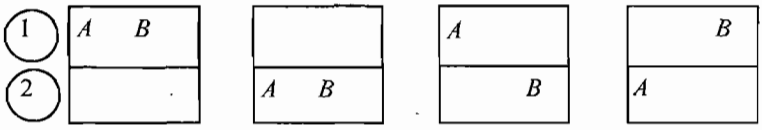


рис. Д. 2.5.1

Пусть, например, имеются две ячейки, в которых мы хотим разместить частицы A и B. Тогда возможны 4 комбинации (рис. Д.2.5.1). Если частицы неразличимы ($A = B$), то возможны только 3 комбинации. При $T > T_0$ разница в результатах счета на основе двух статистик не проявляется, поскольку число частиц меньше числа возможных состояний. Положение меняется при $T < T_0$: число возможных состояний резко уменьшается. В этом случае использование классической статистики недопустимо. При температуре меньшей T_0 начинают проявляться квантовые свойства системы, обусловленные тождественностью частиц. Из (2.5.3) следует, что наиболее благоприятные условия для наблюдения квантового поведения возможны при низкой температуре в плотном газе с малой относительной массой.

Наличие у частиц спина приводит к новым эффектам при распределении атомов и молекул по различным состояниям. Особый интерес представляет изотоп гелия ^{3}He, имеющий спин $s = 1/2$. Согласно принципу Паули два атома гелия-3 с одинаковыми проекциями спина на некоторое выделенное направление не смогут приблизиться друг к другу на расстояние меньше чем $\lambda = h/(3mk_БT)^{1/2}$. В этой области мы имеем деструктивную интерференцию, отражающую волновые свойства частиц, которая проявляется как обменное взаимодействие, приводящее к «отталкиванию» атомов гелия-3. Поэтому с уменьшением температуры обычное взаимодействие атомов ^{3}He становится несущественным. Это приводит к тому, что гелий-3 представляет собой новое состояние материи, проявляющей множество совершенно неожиданных квантовых свойств. Например, при высоком давлении достаточно упорядочить спины атомов ^{3}He с помощью лазерного излучения и он превратится в твердое тело, образуя фазу менее плотную, чем исходная.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

I. МЕХАНИКА

3.4.3. $h_m = gT^2/8$, $h_m = 4{,}9$ м.

3.4.6. $D = \dfrac{2H}{tg\beta - tg\alpha}$.

4.5.16. $N = (m_1 - m_2)(g + w)/2$; $T = (1 + w/g)T_0$, $T_0 = (m_1 + m_2)g/2$.

5.5.2. $v = 3{,}29$ м/с.

Глава 4. Тест

N1	N2	N3	N4	N5	N6
А	**Д**	**Д**	**А**	**Г**	**Б**

Глава 12. Тест.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9
В	**Д**	**Б**	**Г**	**Д**	**Б**	**А**	**Д**	**В**

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

1.1.2. 1/2 моля молекул кислорода.

1.1.3. $N = N_A m/M_a$, $M_a = 0{,}05585$ г/моль, $N = 1{,}08\ 10^{14}$.

1.1.4. 28 г.

1.1.5. $4 \times 4 = 16$ г кислорода дают 23 г оксида азота (IV)-NO_2,
$5 \times 4 = 20$ г кислорода дают 27 г оксида азота (V)-N_2O_5,

1.1.8. $N_A = N_L v$, $v = 22{,}4\ 10^3$ см^3/моль

1.2.1. При образовании молекулы два атома водорода должны передать энергию «третьему телу» — атому водорода или молекуле H_2.

2.5.1. $t_C = 232{,}77°$ С.

2.5.2. $t_C = t_F = -40°$

2.7.2. $\langle E\rangle = 3\kappa T/2$, $\langle E\rangle = 6{,}21\ 10^{-21}$ Дж.

2.7.3. $m = 3kT/v_{\text{т}}^2$, $m = 8\ 10^{-16}$ г.

2.8.3. $\Delta N/N \sim 1/(N)^{1/2}$, $N = \lambda^3 N_L$, $\Delta N/N \sim 5{,}5 \cdot 10^{-4}$.

3.7.4. На рис. 1 изображен цикл в координатах T-V.

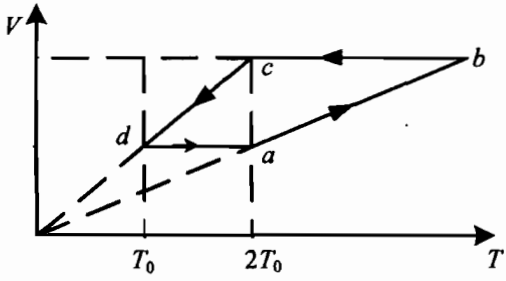


рис. 1

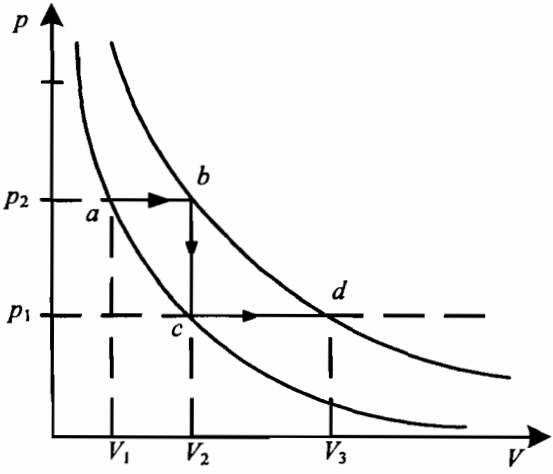


рис. 2

4.3.1. Б. $A' = -(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$.

4.5.5 А. На рис. 2 изображен цикл в координатах (V,p).

4.6.2. Из первого закона термодинамики имеем уравнения $\nu_1 C_v(T'_1 - T_1) = Q - A'$, $\nu_2 C_v(T'_2 - T_2) = 0 + A$. Поскольку $A = A'$, то $Q = C_v[\nu_1(T'_1 - T_1) + \nu_2(T'_2 - T_2)]$. Записывая две пары уравнений состояния, получим $V\Delta p = R[\nu_1(T'_1 - T_1) + \nu_2(T'_2 - T_2)]$; $\Delta p = QR/VC_v$.

4.6.3. В диаграмме перехода $a \to c \to b$ процесс ac — адиабатическое сжатие в состояние c с параметрами $p_c > p_0$, $V_c < V_1$, $t_c = 30°$ С , процесс cb — изотермическое расширение.

4.7.1. $mc_v\Delta t + m_0(3R/M)(t_0 + \Delta t - t_к) = 0$, $M = 0{,}25$ кг/моль.

4.8.1. $(t_1 + t_2)/2 = 28°C$.

4.8.3. В невесомости гидростатическое давление равно нулю. Поэтому равна нулю и выталкивающая сила.

5.2.2. Из-за различия теплопроводности металла и биологической ткани температура кожи становится меньше 0° С. Поэтому замерзает тонкий слой влаги на пальцах.

5.5.1. $\Delta m = A'M_В/RT$.

5.6.3. В открытом чайнике масса воды уменьшается благодаря испарению. Температура кипения в закрытом чайнике выше, чем в закрытом. Однако основным эффектом является увеличение потока теплоты от нагревателя на испарение. Поэтому открытый чайник закипит позже закрытого.

5.6.4. Время выкипания $rm/P = 75{,}3$ мин.

5.6.5. За время Δt испаряется Δm воды. Имеем систему уравнений $P\Delta t = r\Delta m$, $\Delta m = \rho_п Sv\Delta t$. $\rho_п = 0{,}6$ кг/м^3, $v = 1$ м/с.

5.7.1. $\Delta m = c(t_к - t_0)m/r$, $\Delta m = 0{,}37$ кг.

6.2.1. Б. $m_п = 1{,}679$ кг.

6.2.2. В. $p_{п3} = 0{,}4\ p_0$.

6.2.4. $\Delta m = (h\rho_{н2} - \rho_{н1})V$, $\Delta m = 1{,}26$ кг.

III. МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

1.10.1. При давлении p воздух массой m вблизи поверхности воды содержит насыщенный водяной пар массой $m_п = m/[1 + M_в/M_п(p/p_н - 1)]$, где $p_н(T)$ — давление насыщенного пара. При температурах меньших температуры кипения масса пара $m_п \approx m(M_в/M_п)(p_н(T)/p)$. При переходе в равновесное состояние с температурой $T_1 > T$ должна испариться масса воды $\Delta m_в = [p_н(T_1) - p_н(T)](m/p)(M_в/M_п)$, поглощая количество теплоты $r\Delta m_в$. Эффект обусловлен быстрым ростом функции $p_н(T)$ с увеличением T.

1.10.2. Плотность пара в окрестности нижней кромки облака равна плотности насыщенного пара. Чем выше начальная влажность воздуха, тем меньше высота, на которой начинается конденсация и образуются облака.

1.10.3. Представим уравнение движения в виде $dv'/dt' = 1 - v'$, $v' = v/v_0$, $t' = t/\tau$, $\tau = v_0/g$.

1.10.5. Воздух, насыщенный относительно воды является пересыщенным для льда. Поэтому кристаллик льда растет в результате конденсации пара. Вода переходит к кристаллику от окружающих его капелек.

3.6.1. $F = ES\alpha\Delta t$, $F = 195{,}6$ Н.

4.5.1. Условие всплывания $\Delta T_в/\Delta z < -g/c_p$. приводит к неравенству $T_2 - T_1 > gd/c_p$.

IV. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 1. Электростатика

1.1.2. $6{,}25 \cdot 10^{18}$.

1.2.3. $\vec{E} = (0,\ 0,\ E_z)$, $E_z = kQz/(R^2 + z^2)^{3/2}$; $E_{z\max} = 2\sqrt{3}\ kQ/9R^2$, при $z = z_m$, $z_m = R/\sqrt{2}$.

1.2.4. Б. $A = -2qEl$.

1.2.5. $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{qE}{mg}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

1.2.7. $E_0 = 5{,}6 \cdot 10^{-11}$ Н/Кл.

1.2.8. В. $v = 0{,}94 \cdot 10^8$ м/с.

1.2.9. А. $E = 5{,}1 \cdot 10^{11}$ В/м;

Б. $\varphi = 27{,}2$ В;

В. $v = 1{,}5 \cdot 10^6$ м/с.

1.2.11. $A = -\dfrac{kqQa}{r^2 - a^2/4}$

1.4.1. $N = N_A m/A$, $m = \rho V$, $n = N/V$. $n = N_A\rho/A$, $n = 8{,}4{,}10^{28}$ м$^{-3}$.

1.4.7. $N = \dfrac{V}{V_0} \cdot \dfrac{R_1}{R_2}$, $N = 200$.

1.6.1. Не изменится.

1.6.2. Нельзя.

1.7.2. Б. $A' = \Delta W = \varepsilon_0 E_0^2 Sl/2$.

1.8.2. $C = NC_0$, $C = 11$ мкФ.

1.8.5. Б. $\Delta q = \dfrac{q}{3} - \left(-\dfrac{q}{3}\right) = \dfrac{2}{3}q$.

Тест

1	2	3	4	5	6	7
Б	А	Д	А	Д	Д	Г

Задачи 1 – 3. Пусть E_1, E_2, E_3 — напряженности поля в областях $z < 0$, $0 < z < a$, $z > a$. Очевидно, $E_{1z} = -E_{3z}$. Из закона Гаусса для параллелепипеда, пересекающего левую плоскость, имеем $E_{1z} + E_{2z} = \sigma_1/\varepsilon_0$. Аналогично для правой пластины получим $-E_{2z} + E_{3z} = \sigma_2/\varepsilon_0$. Следовательно,

$$E_{3z} = -E_{1z} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}, \quad E_{2z} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Задача 4. Согласно свойству суперпозиции

$$E_{1z} = E_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0},\ E_{2z} = E_0 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0},\ E_{3z} = E_0 + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Задача 5. Пусть σ_1, σ_2 — поверхностные плотности зарядов на левой и правой пластинках после соединения проводником. Между пластинами напряженность поля $E_{2z} = 0$, заряд системы $Q = -q$. Имеем два уравнения $Q = (\sigma_1 + \sigma_2)S$, $0 = E_0 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}$. Отсюда находим

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2S} - \varepsilon_0 E_0,\ \sigma_2 = \frac{Q}{2S} + \varepsilon_0 E_0.$$

Заряд правой пластины $\sigma_1 S = -3q/2$.

Задача 6. Из решения задачи 4 следует $E_{1z} = E_0 - \frac{Q}{2S\varepsilon_0}$, $E_{3z} = E_0 + \frac{Q}{2S\varepsilon_0}$.

Задача 7. Направим ось z с началом на верхней пластине вертикально вниз. Координата внутренней пластины равна z. Представим систему в виде двух конденсаторов емкостями $C_1 = \varepsilon_0 S/z$ и $C_2 = \varepsilon_0 S/(d - z)$. Пусть V_1 — разность потенциалов внутренней и верхней пластины, V_2 — внутренней и нижней пластины. Тогда $V_1 = V_2$, $C_1V_1 + C_2V_2 = Q$. Следовательно, заряд верхней пластины $q_1 = -C_1V_1 = -Q\left(1 - \frac{z}{d}\right)$. Приращение заряда $\Delta q_1 = Q\Delta z/d$.

Глава 2. Законы постоянного тока

2.1.3. $R = 6$ Ом.

2.1.6. Б. Обозначим $\varphi_c - \varphi_b = V$. Тогда имеем систему уравнений $V = V_2 + V_1$, $V = V_3 + V_4$, $V = V_3 + V_c + V_1$, $V_4/V_3 = 5$. Отсюда находим $V_1 = 80$ В, $V_2 = 40$ В, $V_3 = 20$ В, $V_4 = 100$ В.

2.1.6. В. Заряд правой пластины $q = C(\varphi_b - \varphi_c)$, $\varphi_b - \varphi_c = -36$ В, $q = -36$ мкКл.

2.1.7. В. $R = \frac{r_1 + r_2}{2}$, $\varphi_b - \varphi_c = V\frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}$.

2.1.8. А. $Q_1 = V\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$, $Q_1 = 48$ мкКл.

2.1.8. Б. $Q_1' = C_1 V \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$, $Q_1' = 36$ мкКл,

2.1.8. В. $\Delta Q = -12$ мкКл.

2.1.9. Имеем систему уравнений

$$I_1 + I_2 = I_3,$$

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = V_1,\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = V_2.$$

А. $I_3 = \dfrac{V_1}{R_1} + \dfrac{V_2}{R_2}$.

Б. $I_1 = \dfrac{V_1 - V_2}{R_2}$.

В. $I_1 = I_3 \approx \dfrac{V_1}{R_1 + R_3}$ $I_2 \approx 0$.

Г. $I_1 = I_2 = \dfrac{V}{3R}$, $I_3 = \dfrac{2V}{3R}$.

2.2.2. $\dfrac{\varepsilon - V}{\varepsilon} = \dfrac{r}{R + r}$, относительная погрешность 0,25 %.

2.3.2. $\varphi_a - \varphi_b - Ir_1 = -\varepsilon_1$, $\varphi_a - \varphi_b + Ir_2 = \varepsilon_2$, $\varphi_a - \varphi_b = \dfrac{\varepsilon_2 r_1 - \varepsilon_1 r_2}{r_1 + r_2}$.

2.3.3. Б. $\varphi_b - \varphi_k = \varepsilon_1$.

2.3.4. Пусть после замыкания ключа правая пластина конденсатора C_1 и верхняя пластина конденсатора C_2 приобретают положительные заряды. Имеем два уравнения: $V_1 - V_2 = \varepsilon_1$, $V_2 = \varepsilon_2$. Искомый заряд $q = C_1 V_1 + C_2 V_2$ равен 14 мкКл.

2.4.4. В сеть необходимо включить цепь из лампы $Л_3$, к которой присоединим параллельно соединенные лампы $Л_1$ и $Л_2$.

2.4.6. Нельзя. Предохранитель изготовлен из легкоплавкого тонкого провода сопротивлением r, который должен расплавиться при протекании тока силой $I \geq I_m$. Максимальное значение мощности, потребляемой предохранителем $P_m = I_m^2 r$. Пусть V — напряжение в сети. Поскольку сопротивление подводящих проводов и нагрузки $R >> r$, то мощность, потребляемую предохранителем можно представить в виде $P = I^2 r \approx P_m \left(\dfrac{V}{I_m R}\right)^2$. Она достигает максимума при уменьшении сопротивления R до значения $R_0 = V/I_m$. Если заменить предохранитель проводом большего сечения, то его сопротивление $R_ж < r$. При $I = I_m$ мощность, потребляемая таким «жучком», $P_ж = I_m^2 R_ж = P_m(R_ж/r) < P_m$. Следовательно, благодаря такому «предохрани-

телю», сила тока при уменьшении сопротивления нагрузки может достичь величины $I = I_m\sqrt{r/R_ж}$, превышающей максимальное значение I_m.

Тест

1	2	3	4	5	6	7	8	9
А	А	Д	А	Б	Г	Б	В	Г

Задача 4. Пусть верхние пластины конденсаторов C_2, C_3, и правая пластина C_1 имеют положительные заряды. Тогда $V_3 - V_2 - V_1 = 0$, $V_2 + V_3 = \varepsilon$, $\varepsilon = 30$В. Для контура, содержащего, C_3, C_1, R_2, имеем $V_1 + V_3 - V = 0$, где согласно закону Ома $V = \dfrac{\varepsilon\ R_2}{R_1 + R_2}$, $V = 18$ В. Решая систему, содержащую три уравнения, находим $V_1 = \dfrac{2V - \varepsilon}{3}$, $V_1 = 2$ В.

Задачи 7-9. Когда ключ находится в положении a, заряд верхней пластины конденсатора $q_0 = 5C\varepsilon$. После переключения ключа в положение b заряд этой пластины $q_k = C\varepsilon$.

$$\Delta U_e = \frac{q_k^2}{2C} - \frac{q_0^2}{2C},\ \delta A = \varepsilon_2 \Delta q = \varepsilon\left(q_k - q_0\right),\ \delta Q = \delta A - \Delta U_e .$$

Глава 3. Магнитное поле

3.1.4. $F_z = 2IB^2a$, $I = V/r$, $r = 2\ R$. $F_z = 4 \cdot 10^{-4}$ Н.

Глава 5. Электрический ток в различных средах

5.2.1. Два моля.

5.2.2. А. Уравнение реакции: 1 моль воды + 0,286 МДж = 1 моль водорода + 1/2 моля кислорода. Следовательно, объем водорода — 2,24 л, объем кислорода — 1,12 л.

Б. При электролизе воды объем, выделяющегося на катоде водорода в два раза больше объема кислорода, выделяющегося на аноде.

5.3.1. Давление $p = 0{,}056\dfrac{kT}{\lambda a^2}$. $p \approx 8 \cdot 10^{-5}$ Па.

Глава 8. Электромагнитные колебания

Тест.

1	2	3	4	5	6	7
В	А	Г	А	Б	В	Г

V. ОПТИКА

2.2.4. $s = a - b$.

2.4.3.

Б. D = 2 дптр.

В. S = 12,5 см

2.4.4. $F_{ок} = 3$ см.

Тест.

1	2	3	4	5	6	7
Д	В	Г	Д	В	Г	Д

VI ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1	2	3	4	5	6	7
А	Б	Д	Г	Б	А	Б

ВОПРОСЫ И БЛИЦ-ОТВЕТЫ

Механика

1. Задача — шутка Фейнмана. Лауреат Нобелевской премии, физик-теоретик Ричард Фейнман (1918—1988) взял лекало и начал медленно поворачивать. «Это лекало сделано так, что независимо от того, как вы его повернете, в наинизшей точке контура касательная горизонтальна» — сказал он. Студенты стали приставлять карандаш к нижней точке и были крайне возбуждены от этого открытия. Докажите утверждение Фейнмана.

Ответ. Производная в минимуме для любой кривой равна нулю. Следовательно, тангенс угла наклона касательной к горизонтали равен нулю.

2. Найдите ошибки в определении: движение тела называется равномерным, если тело за равные промежутки времени проходит одинаковые расстояния.

Ответ: Две ошибки. 1. Необходимо вставить: за **любые** равные... . 2. Необходимо отметить, что тело движется по прямой линии.

Правильное определение: прямолинейное движение называется равномерным, если тело за любые равные промежутки времени проходит одинаковые расстояния, или совсем строго $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$.

3. Приведите определение равнопеременного движения.

Ответ. Невозможно дать корректное определение. В действительности тело движется с постоянным ускорением. Например, из второго закона Ньютона следует, что брошенный вверх камень движется в пустом пространстве с постоянным ускорением $\vec{g}$. При движении вверх и вниз ускорение равно $\vec{g}$. В верхней точке траектории, где скорость равна нулю, ускорение также равно $\vec{g}$. Есть ли смысл в разделении движения на две фазы?

4. По реке плывет щепка. Первый гребец плывет по течению и обгоняет щепку на 20 метров, второй — плывет против течения и отстает от щепки на 20 метров. Гребцы перемещают весла с одинаковой интенсивностью. Какой из гребцов затратил больше времени — первый или второй?

Ответ: Каждый гребец затратил одно и то же время. Лодка по отношению к воде в находится покое. Гребец работает веслами так же, как в неподвижной воде.

5. Объясните происхождение терминов «кардан» и «карданов подвес».

Ответ. Эти термины связаны с именем выдающегося итальянского математика и философа Джероламо Кардана (1501—1576). Нашел решение в радикалах неполного кубического уравнения, занимался вопросами передачи движения, теорией рычага и др.

6. Можно услышать, что потенциальная энергия представляет собой запас работы. Правильно ли это утверждение?

Ответ. Нет, это утверждение неверно. Работа связана не с потенциальной энергией, а с приращением потенциальной энергии при перемещении частицы из одной точки в другую. Потенциальная энергия $W(x, y, z)$ представляет собой функцию координат частицы, а понятие работы силы можно ввести только при перемещении частицы. При приращении радиус-вектора $\Delta\vec{r}$ элементарная работа $\delta A = -\Delta W(x, y, z)$. В фиксированной точке сила не совершает работы. Работу силы нельзя «запасти» — совершая работу, мы изменяем полную энергию частицы.

7. Шарик, прикрепленный к нити, колеблется в вертикальной плоскости по окружности. Укажите направление равнодействующей силы натяжения и силы тяжести.

Ответ. Параллельно ускорению шарика. Вектор ускорения всегда направлен внутрь окружности. Сумма сил направлена не по касательной, как можно услышать или увидеть на рисунках в некоторых пособиях по физике.

8-9. Частица массой m, висит на нити длиной l, прикрепленной к оси вращения. После сообщения начальной скорости v_0 частица вращается в вертикальной плоскости.

8. Может ли быть величина силы натяжения $T = 1000\ mg$?

Ответ. Может. Величина силы натяжения зависит от величины начальной скорости.

9. Найдите наименьшее значение проекции силы натяжения на радиус-вектор частицы.

Ответ. Сила натяжения в верхней точке окружности $T_{min} = mv_0^2/l - 5mg$.

10. У вас имеется фиксированная горизонтальная ось и однородный стержень с отверстием в середине. Что необходимо сделать для того чтобы устроить рычажные весы?

Ответ. Согнуть стержень или прикрепить в середине стрелку. Иначе «весы» при равных моментах сил натяжения всегда будут находится в состоянии безразличного равновесия.

Молекулярная физика и термодинамика

1. Реки всего мира каждую секунду вливают в океаны и моря 10^9 кг пресной воды. Почему этот постоянный поток не приводит к уменьшению солености морей?

Ответ. Дождевая вода, просачиваясь через сушу, растворяет минералы и вносит каждый год $3 \cdot 10^{11}$ кг растворенных солей в моря. Морская вода является концентрированной речной водой.

2. Почему из уравнения состояния идеального гааз $p = \rho RT/M$ следует завышенное значение давления?

Ответ. Идеальный газ представляет собой модель реального газа в состоянии теплового равновесия. Это — система невзаимодействующий частиц. В реальном разреженном газе действуют силы притяжения молекул друг к другу.

3. Как изменится расстояние между молекулами, если вода в бутылке замерзнет ?

Ответ: расстояния между молекулами увеличиваются. Поскольку плотность льда меньше плотности воды, то объем льда станет больше объема воды.

4. Книга упала со стола на пол. Куда «пропала» потенциальная энергия книги ?

Ответ: Внутренняя энергия молекул книги и пола возросли на величину потенциальной энергии книги.

5. Знаете ли Вы величину давления насыщенного пара при температуре 100°С?

Ответ: Давление насыщенного пара при 100°С равно нормальному атмосферному давлению. При нормальном атмосферном давлении вода в неглубоком сосуде кипит при температуре 100°С.

6. Температура лавы у жерла подводного вулкана достигает 400°С. Почему же не закипает морская вода у жерла вулкана?

Ответ: Вода не кипит, потому что не выполняется условие кипения: давление насыщенных паров при температуре 400°С меньше внешнего давления.

7. Выпал иней — в каком состоянии находится вода?

Ответ: в кристаллическом. Иней представляет собой кристаллики льда.

8. Почему пар обжигает сильнее, чем вода при той же температуре?

Ответ: количество теплоты, которое выделяется при конденсации воды, намного больше количества теплоты, передаваемого той же массой воды при охлаждении.

9. Космонавт должен работать в открытом космосе 2 часа. Почему в скафандре без подогрева космонавт не замерзает на «космическом холоде»?

Ответ: В вакууме отсутствуют два механизма потерь теплоты — теплопроводность и конвекция. Остается один — лучеиспускание. За 2 часа не происходит заметного понижения температуры.

10. Почему нельзя реализовать цикл Карно?

Ответ. В идеальных изотермических процессах с рабочим телом подвод и отвод теплоты должен происходить при постоянной температуре. В этом случае теплообмен невозможен, т. к. поток теплоты возникает лишь при наличии конечной разности температур рабочего тела и нагревателя или холодильника. Реальный теплообмен является необратимым процессом.

11. Количество теплоты и температура. Как «связаны» эти понятия?

Ответ. Эти понятия не «связаны». Температура – параметр равновесного состояния. Количество теплоты зависит от уравнения процесса и в общем случае зависит от работы, совершенной газом и разности температур конечного и начального состояний.

Гидростатика

1. В программе по физике для учащихся и абитуриентов, которую переиздают различные высшие учебные заведения в течении почти пятидесяти лет, в разделе «Механика жидкостей и газов» есть пункт — «Давление на дно и стенки сосуда». Правильно ли сформулировано это предложение?

Ответ. Это предложение лишено смысла, т. к. давление является функцией координат (и времени). Правильное утверждение — давление в точке. «Давление на стенку» — синоним утверждения «скорость за час».

2. Сформулируйте определение условия плавания тела.

Ответ: Сумма силы тяжести и выталкивающей силы равна нулю. Обычно приводят неверный ответ — сила тяжести равна выталкивающей силе.

3. Кусок пробки плавает сначала в воде, а потом в масле. В каком случае величина силы Архимеда больше?

Ответ: *В каждом случае сила* Архимеда одинакова. Согласно условию плавания в каждом случае величина силы Архимеда равна величине силы тяжести, действующей на кусок пробки.

4. Корабль переплыл из Волги в Каспийское море. Как изменилось расстояние между поверхностью палубы и поверхностью воды ?

Ответ: Расстояние между поверхностями палубы и воды увеличилось.

5. Изменится ли положение коромыслов весов, уравновешивающих стакан с водой и гирю, если в стакан погрузить палец? Палец не касается стакана.

Ответ: Чаша весов со стаканом перетянет. Согласно закону Паскаля поверхностные силы создают давление одинаковое в любой точке воды — давление на дно стакана увеличится.

6. Трубка с поршнем имеет длину 12 метров. Можно ли таким насосом поднять воду на поверхность земли из колодца глубиной 11 метров.

Ответ: Нельзя. Сила реакции, действующая на поршень со стороны воды обращается в нуль при значении высоты столба воды $h = p_{ат}/\rho_в g$, $h = 10{,}332$м — результат, известный еще древним шумерам, жившим в третьем тысячелетии до н. э.

7. Взвесили резиновый шарик, а затем тот же шарик, надутый воздухом, имеющим температуру воздуха в комнате. Почему показания весов в обоих случаях одинаковы?

Ответ: На надутый шарик действуют сила тяжести шарика с воздухом и выталкивающая сила. Выталкивающая сила равна весу воздуха в шаре. Этот опыт служил «доказательством» того, что воздух не имеет «веса».

Электродинамика

1. Заряд Q движется по оси неподвижного кольца с зарядом Q. Когда сила, действующая на заряд, обратится в нуль?

Ответ: когда заряд достигнет центра кольца.

2. Стеклянную палочку натерли шелком. Почему небольшие обрывки бумаги притягиваются к палочке?

Ответ. В результате натирания палочка приобретает положительный заряд, который создает электростатическое поле. В этом поле электроны молекул бумаги смещаются относительно ядер. Молекулы приобретают дипольный момент — бумага поляризуется. Ближайший к палочке слой бумаги приобретает отрицательный заряд, удаленный — положительный заряд. Этот эффект возможен только в неоднородном поле — сила, действующая на обрывок бумаги направлена к области наибольшего значения напряженности поля.

3. В центр заземленной металлической сферы радиусом R поместили заряд Q. Определите напряженность электрического поля $\vec{E}$ на расстоянии $r > R$ от центра сферы.

Ответ: $\vec{E} = 0$. Выберем гауссову поверхность в виде сферы, расположенной внутри металла, где напряженность электрического поля равна нулю. На внутренней поверхности сферы индуцируется заряд q'. Тогда согласно закону Гаусса заряд $q' = -Q$. Применяя закон Гаусса к сфере радиусом r, получим $\vec{E} = 0$.

4. В центр изолированной металлической сферы радиусом R поместили заряд Q. Определите величину напряженности электрического поля E на расстоянии $r > R$ от центра сферы.

Ответ: $E = kQ/r$. Выберем гауссову поверхность в виде сферы, расположенной внутри металла, где напряженность электрического поля равна нулю. Тогда согласно закону Гаусса на внутренней поверхности сферы индуцируется заряд $q' = -Q$. Поскольку сфера изолирована, то на внешней поверхности распределяется заряд Q. Применяя закон Гаусса к сфере радиусом r, получим $E = kQ/r$.

5. На расстоянии $r > R$ от центра металлической изолированной сферы радиусом R находится заряд Q. Сила, действующая на заряд или на сферу, равна нулю. Заряжена ли сфера?

Ответ: Заряд сферы не равен нулю. В поле заряда Q электроны в металле незаряженной сферы перераспределяются; сфера приобретает дипольный момент и притягивается к заряду. Если сфере сообщить определенный положительный заряд, то сила, действующая на сферу может обратится в нуль.

6. Разность потенциалов между пластинами конденсатора уменьшили в два раза. Как изменится энергия электростатического поля конденсатора?

Ответ. Уменьшится в 4 раза.

7. Пространство между пластинами конденсатора, подключенного к генератору постоянного напряжения, заполнили диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Как изменится энергия электростатического поля конденсатора?

Ответ. Увеличится в 2 раза.

8. Назовите причину возникновения электрического тока в проводе.

Ответ: Ток возникает в результате взаимодействия электронов с электрическим полем, создаваемым разностью потенциалов на участке провода.

9. В электростатическом поле потенциалы двух точек удовлетворяют неравенству $\varphi_a > \varphi_b$. Расположим в этом поле замкнутый провод, проходящий через точки *a* и *b*. Почему сила тока в проводе равна нулю?

Ответ: После внесения проводника электрическое поле перестроится так, что напряженность поля в проводнике обратится в нуль в результате перераспределения электронов на поверхности проводника.

10. Относительное удлинение провода $\Delta l/l = \varepsilon$. Найдите относительное приращение сопротивления $\Delta R/R$.

Ответ: $\Delta R/R = 2\varepsilon$. Сопротивление провода $R = \rho l/S$, $lS = V$, где V — объем провода. Следовательно, $R = \rho l^2/V$, $\Delta R = 2\rho l\Delta l/V$.

11. Три одинаковые лампы, подключенные последовательно к батарейке, потребляют мощность P. Объясните, почему возрастает потребляемая мощность, если уменьшить число ламп до двух.

12. Две лампочки мощностью $P_1 = 25$ и $P_2 = 75$ Вт, рассчитанные на напряжение $U = 220$ В, подключены последовательно в сеть напряжением $U = 220$ В. Найдите отношение мощности, потребляемой второй лампой P'_2, к номинальной мощности P_2.

Ответ: $P'_2/P_2 = 1/16$. Из уравнений $P_1 = U^2/R_1$, $P_2 = U^2/R_2$, $P'_2 = U^2 R_2/(R_1 + R_2)^2$ находим $P'_2 = P_2[P_1/(P_1 + P_2)]^2$.

13. Конденсатор подключен к батарейке. Опишите энергетический баланс при увеличении расстояния между пластинами.

Ответ: ЭДС батарейки — ε, внутреннее сопротивление не равно нулю. При изменении расстояния между пластинами в цепи протекает переменный ток. Поэтому в батарейке выделяется количество теплоты Q. Пусть C_1, $U_1 = C_1\varepsilon^2/2$ — емкость конденсатора и энергия электрического поля в начальном состоянии, $C_2 < C_1$, $U_2 = C_2\varepsilon^2/2$ — емкость конденсатора и энергия электрического поля в конечном состоянии. Из закона изменения энергии следует уравнение энергетического баланса — сумма работы A_e, совершаемой внешней силой, и работы , совершаемой ЭДС $\varepsilon(C_2\varepsilon - C_1\varepsilon)$, равна приращению энергии электрического поля $U_2 - U_1$ и джоулева тепла. Следовательно, $A_\varepsilon = Q - (C_2 - C_1)\varepsilon^2/2 > 0$.

14. Остается ли верным закон индукции Фарадея в случае контура, не содержащего проводников?

Ответ. Да, поскольку закон индукции представляет собой следствие уравнений Максвелла, согласно которым переменное магнитное поле в вакууме создает переменное электрическое поле, а переменное электрическое поле создает переменное магнитное поле.

15. Как предсказать направление индукционного тока?

Ответ. Направление индукционного тока определяется автоматически вследствие однозначного соответствия между положительным направлением на замкнутом контуре, которому принадлежат проводники, и вектором

внешней нормали, который *необходимо* задать для вычисления потока магнитной индукции. В электродинамике принято правило, согласно которому положительное направление на контуре связано с выбором вектора внешней нормали к элементарной площадке $\Delta\vec{n}$ на поверхности: при обходе контура в положительном направлении вектор $\Delta\vec{n}$ остается с левой стороны или правилом буравчика.

16. Последовательно соединенные резистор, катушка индуктивности и конденсатор подключены к генератору напряжения, ЭДС которого $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$, $t \geq 0$. Запишите условие, при котором разность потенциалов на концах участка L–C равна нулю.

Ответ. $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

17. Полное сопротивление, последовательно соединенных резистора сопротивлением R и катушки индуктивности L, подключенных к генератору напряжения, ЭДС которого $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$, $t \geq 0$ равно Z. Затем точно такую же цепь включили параллельно первой. Определите общее сопротивление схемы Z'.

Ответ. $Z' = Z/2$, $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

18. Катушку индуктивности в виде соленоида индуктивности L и сопротивлением провода R подключили к генератору напряжения, ЭДС которого $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$, $t \geq 0$. Затем поверх этой катушки намотали такое же количество витков и включили ее в цепь параллельно первой. Определите общее сопротивление схемы Z'.

Ответ. $Z' = \sqrt{(R/2)^2 + (\omega L)^2}$. (Для решения задачи необходимо учесть, что коэффициент взаимоиндукции $L_{12} = L$.)

19. Имеем замкнутую цепь, состоящую из генератора постоянного напряжения и резистора, соединенных проводом пренебрежимо малого сопротивления. Разность потенциалов на выходе генератора $\varphi_a - \varphi_b = U$. В резисторе выделяется некоторое количество теплоты. Как генератор компенсирует потери энергии электронами при столкновении с кристаллической решеткой?

Ответ. В результате втекания в резистор потока электромагнитной энергии. (Ток течет по цепи из точки a в точку b. Однако поток электромагнитной энергии движется во внешней среде вдоль проводов от точек a и b генератора к резистору.)

Механические колебания

1. Можно ли сложить два колебания?

Ответ. Сложить два движения нельзя. Термин «сложение колебаний» — это жаргон (от фр. *jargon* — язык, непонятный непосвященным). Мы же не говорим, что движение частицы в поле тяжести Земли по параболе представляет собой сумму двух движений — по горизонтали и по вертикали. Здесь речь идет о движении системы, описываемом двумя функциями $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ и $y(t) = B\cos(\omega t + \beta)$. В плоскости xy точка с координатами $x(t)$, $y(t)$ движется по эллипсу.

2. Приведите определение резонанса.

Ответ. Резонансом называется избирательный отклик колебательной системы на действие внешней периодической силы с частотой, близкой к собственной частоте колебательной системы.

Волны

1. Вектор напряженности монохроматической плоской бегущей электромагнитной волны $\vec{E}(t, x, y, z) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \omega z/c)$. «Что» колеблется в волне?

Ответ. «Ничего» не колеблется. (Электромагнитная волна — *процесс распространения* электрического и магнитного полей в пространстве. В некоторой точке, координаты которой x_0, y_0, z_0, имеем три функции $\vec{F}(t) = \vec{E}(t, x_0, y_0, z_0) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \omega z_0/c)$, не связанные с процессом распространения волны. Если же «фиксировать» волну в моменты времени $t = 0$, t_1, t_2, ... , то получим функции координат — косинусоиды $\vec{E}_0 \cos[\omega(z - ct_1)/c]$, $\vec{E}_0 \cos\ \cos[\omega(z - ct_2)/c]$, ... , сдвинутые по оси z вправо относительно $\vec{E}_0 \cos(\omega z/c)$ на расстояния ct_1, ct_2, ... Это и есть процесс распространения напряженности электрического поля бегущей волны. Отметим, что вектор $\vec{E}(t, x, y, z)$ и соответствующий вектор $\vec{B}(t, x, y, z)$ удовлетворяют шести уравнениям Максвелла.)

2. Приведите пример бегущей звуковой волны.

Ответ. Звуковая волна — процесс распространения деформации в среде. В сферической волне, распространяющейся в безграничном пространстве, акустическое давление $p_{ac}(t, x, y, z) = (1/r)f(r - ct)$, где c — скорость волны, $f(r - ct)$ — произвольная функция, r — расстояние от точечного источника деформации среды. (Эта функция может описывать волну, возбуждаемую хлопком. Волновой процесс реализуется элементарными массами воздуха, которые не колеблются, а последовательно смещаются и возвращаются в равновесные положения. Волна в среде и колебания частиц среды — совершенно различные явления. Отметим, что функция $p_{ac}(t, x, y, z)$ удовлетворяет основному уравнению акустики — волновому уравнению.)

3. Антенна радиоприемника представляет собой отрезок провода, присоединенный к колебательному контуру. Объясните, почему линейно поляризованная электромагнитная волна возбуждает ток в проводе.

Ответ. Если провод ориентировать параллельно вектору напряженности электрического поля волны, то на отрезке провода длиной l создается разность потенциалов El.

4. Почему солнечный свет, преломляясь на оконном стекле, не разлагается в непрерывный спектр?

Ответ. Если обе поверхности стекла параллельны, то не происходит пространственного разделения световой волны на монохроматические компоненты.

5. Объясните, почему в отраженном свете выглядят окрашенными пятна масла на асфальте или тонкие мыльные пузыри?

Ответ. В результате интерференции волн — w_1, w_2, отраженных от внешней и внутренней поверхностей. Падающая волна отражается (w_1) и преломляется на внешней поверхности. Преломленная волна преломляется на внутренней поверхности и отражается от нее. Отраженная волна преломляется на внешней поверхности, образуя волну w_2. При освещении солнечным светом возникают максимумы интенсивности, соответствующие в зависимости от толщины пленки различным цветам.

6. Световая волна падает перпендикулярно поверхности плоскопараллельной прозрачной пленки. Возможно ли прохождение волны, не сопровождающееся отражением волны?

Ответ. При определенной длине волны возможна деструктивная интерференция волн отраженных от двух поверхностей пленки.

7. Плоская монохроматическая электромагнитная волна падает по нормали к плоской металлической поверхности. Почему образуется стоячая волна?

Ответ. В результате интерференции падающей и отраженной волн. (Отраженная волна должна возникнуть только потому, что должны выполняться граничные условия: на поверхности металла касательная компонента вектора $\vec{E}$ равна нулю.)

8. Во всех учебниках можно прочитать, что максимум интенсивности при интерференции двух световых волн находится в точках, для которых разность хода равна четному числу «полуволн». Может ли возникнуть максимум интенсивности, если в разности хода укладывается нечетное число полуволн?

Ответ. Может — при падении на зеркало или металлический экран волны, поляризованной в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Интерференция проявляется при наложении падающей волны (E_{iy}) и волны (E_{0y}), отраженной от металлического покрытия зеркала. (Пусть зеркало расположено в плоскости $x = 0$. В этом случае проекция напряженности электрического поля равна $E_y \approx E_{iy} - E_{0y}$, поскольку на поверхности экрана в плоскости $x = 0$ должно выполняться граничное условие $E_y = 0$. Тогда интенсивность $J(x) = 4J_0\sin^2(2\pi hx/\lambda s)$, где h — расстояние от излучателя до плоскости зеркала, s — расстояние от излучателя до точки отражения.)

9. В каких эффектах проявляются волновые свойства частиц?

Ответ. В дифракции и интерференции. В 1927 г. впервые обнаружили дифракцию электронов на кристалле никеля. В 1960 г. наблюдали интерференцию двух пучков электронов, разделенных в пространстве соленоидом. Согласно квантовой физике корпускулярные и волновые свойства частиц – электронов, атомов, молекул, фотонов, вирусов и т. д. следует рассматривать не как взаимоисключающие, а как взаимодополняющие друг друга. Движение частиц описывается волной в абстрактном пространстве состояний. Длина волны $\lambda = h/p$, где p — импульс частицы. При попадании частиц

на экран волновые свойства проявляются в зависимости вероятности плотности распределения от координат.

10. В установке Юнга фотоны падают на экран с двумя отверстиями. Как проявляются волновые свойства фотонов?

Ответ. Согласно квантовой теории состояние фотона описывается ненаблюдаемой волной вероятности, представляющей собой сумму двух слагаемых — фотон *одновременно* находится в состояниях, соответствующих прохождению через первое и второе отверстия. (Интерференция электромагнитных волн — квантовый эффект. В рамках классической физики фотон может пройти сквозь первое или сквозь второе отверстия. Возникновение интерференции существенно связано с невозможностью предсказать, через какое отверстие пролетел фотон. Всякая попытка определить, по какому пути пролетел фотон, уничтожает интерференционную картину.)

11. Приведите оценку расстояния, начиная с которого проявится дифракция электромагнитных или звуковых волн, падающих на отверстие радиусом R.

Ответ. На расстояниях $s > R^2/\lambda$, λ — длина волны. (Дифракция становится заметной, когда площадь первой зоны Френеля, равная $\pi s\lambda$ для наблюдателя на расстоянии s от отверстия, больше площади отверстия.)

12. Что означает понятие «прямолинейное распространение света»?

Ответ. Этот термин — из жаргона популяризаторов науки. Свет — электромагнитная волна, которая не связана с какими либо прямыми. (В геометрической оптике, которая является весьма грубым приближением в теории распространения волн, электромагнитную волну представляют как пучок кривых - лучей, ортогональных к волновому фронту, совершенно игнорируя волновую природу. Свет, излучаемый точечным диполем представляет собой на расстояниях $s \gg \lambda$ сферическую электромагнитную волну. Фронт волны — сфера, лучи — полупрямые, исходящие из точки, представляют собой математическую абстракцию. Следует все-таки отметить, что наиболее существенной областью, в которой распространяется волна, принимаемая детектором D на расстоянии s от источника O, является область пространства, представляющая собой эллипсоид вращения с фокусами в точках O и D. Максимальный диаметр окружности сечения плоскостью, перпендикулярной отрезку OD равный $\sqrt{\lambda s}$ находится на середине отрезка OD. Электромагнитное поле в этой области образует реальный физический луч).

13. Грани кристалликов льда отражают солнечный свет и мы видим блестки на снегу. Однако на несколько большем расстоянии снежное поле выглядит равномерно освещенным. Объясните причину этого явления.

Ответ. Правильное зеркальное отражение возможно только тогда, когда выполняются условия применимости геометрической оптики: площадь грани кристаллика должна быть больше площади нескольких первых зон Френеля. При наблюдении отражения света от более удаленных кристалликов площади зон Френеля возрастают.

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

Физические постоянные

Гравитационная постоянная	G	$6,6720 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Атомная единица массы	а.е.м	$1,66056 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Больцмана	k, $k_Б$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж·К$^{-1}$
Постоянная Авогадро	N_A	$6,022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Газовая постоянная	R	8,314 Дж · моль$^{-1}$·К$^{-1}$
Элементарный заряд	e	$1,6021 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона	m_e	$9,1095 \cdot 10^{-31}$ кг = 0,511 МэВ/с^2
Удельный заряд электрона	e/m_e	$1,7588 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Масса протона	m_p	$1,67265 \cdot 10^{-27}$ кг = 938,2796 МэВ/с^2
Масса нейтрона	m_n	$1,67495 \cdot 10^{-27}$ кг = 939,5731 МэВ/с^2
Электрическая постоянная	ε_0	$10^{-9}/36\pi$ Кл^2/Н·м^2 =$8,85419 \cdot 10^{-12}$ Ф · м$^{-1}$
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А^2 = $1,256637 \cdot 10^{-6}$ Гн · м$^{-1}$
Скорость света	c	$2,99792458 \cdot 10^8$м/с
Постоянная Планка	h	$6,626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с = $4,13567 \cdot 10^{-15}$ Эв·с
Постоянная Планка	$\hbar = h/2\pi$	$1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с = $6,5821 \cdot 10^{-16}$ эВ · с

Соотношения между внесистемными единицами и единицами си

1Ангстрем = 0,1 нм.
1мм рт. ст. = 133,332 Па, 1 Па = $7,5 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст.,
1 атм = $1,01 \cdot 10^5$ Па, 1 бар = 10^5 Па.
1Кл = $3 \cdot 10^9$ СГСЭ(q), 1В = (1/300) СГСЭ(φ),
1 Дж = $6,2418 \cdot 10^{18}$ эВ, 1эВ = $1,6021892 \cdot 10^{-19}$ Дж,
В(гаусс) = Н(эрстед), 1 Тл = 10^4 гаусс, 1 А/м = $4\pi \cdot 10^{-3}$ эрстед.
1Эв/(hc) = 8065,479 см$^{-1}$, hc/(1эВ) = 1242 нм,
1эВ/h = $2,41798 \cdot 10^{14}$ Гц.

Солнечная система

Планеты	Расстояние от Солнца, млн км	Радиус, км	Масса (Земля – 1,0)
Меркурий	57,9	2440	0,055
Венера	108,209	6052	0,816
Земля	149,597	6371	1
Марс	227,941	3393	0,107
Юпитер	740-814	71400	318
Сатурн	1426,99	60400	95
Уран	2870,93	24300	14,6
Нептун	4498,51	25050	17,2
Плутон	5912	1500	0,0017

Астрономическая единица (среднее расстояние от Земли до Солнца) — а.е. $1{,}495978 \cdot 10^{11}$ м,
Световой год $9{,}46053 \cdot 10^{15}$ м,
Парсек (пк) $3{,}085678 \cdot 10^{16}$ м.

Масса Солнца $m_C = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг,
Средний радиус Солнца $6{,}96 \cdot 10^5$ км.
Гравитационный параметр Солнца $Gm_C = 1{,}32712 \cdot 10^{11}$ км^3/с^2.

Масса Земли $m_З = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг,
Средний радиус Земли 6371,03 км.
Гравитационный параметр Земли $Gm_З = 3{,}9860 \cdot 10^5$ км^3/с^2.
Один год $3{,}16 \cdot 10^7$ с

Приставки для образования десятичны кратных и дробей

фемто	ф	10^{-15}	дека	да	10
пико	п	10^{-12}	гекто	г	10^2
нано	н	10^{-9}	кило	к	10^3
микро	мк	10^{-6}	мега	М	10^6
милли	м	10^{-3}	гига	Г	10^9
санти	с	10^{-2}	тера	Т	10^{12}
деци	д	10^{-1}	пета	П	10^{15}

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная температура, 203, 704
Абсолютно черное тело, 232, 586
Авогадро закон, 195, 208
число, 191
Автофазировка, 789
Адрон, 646
Ампер, 350, 379
Ампер А.М., 378
Амплитуда, 181, 304, 462, 468
Анион, 405
Аннигиляция, 613
Анод, 405
Антенна, 496,
Синтезированная, 780
Аристотель, 59, 268
Аромат кварка, 653
Архимеда закон, 273
Атмосферное давление, 267
Атом, 191
Атом водорода, 196
Атомная единица массы, 191
Атомный взрыв, 619, 632

Барионный заряд, 647
Батарея, 358, 359
Беккерель А., 417
Беккерель, 614
Бел, 307
Белл А., 307
Бернулли закон, 290
Бета-лучи, 611
Био-Савара закон, 388
Бозе-конденсат, 822
Бозон, 645
Больцман Л., 202, 227, 232, 586,703
Больцмана постоянная, 202
Бора квантовые постулаты, 594

Вакуум, 407
Ватт, 88
Вебер, 443
Вектор, 20
Венера, 145
Ветродвигатель, 292
Взаимоиндукция, 459
Влажность воздуха, 249
Волна де Бройля, 597
звуковая, 299
звуковая бегущая, 302,
на воде, 310
плоская монохроматическая, 488
пульсовая, 311
стоячая, 304, 508
электромагнитная, 487
Волновая функция, 599
Волновое число, 304, 488
Вольт, 321
Вольта А., 361
Вольт-амперная характеристика, 408
Вояджер, 151
Время жизни частицы, 598, 637, 644
Выпрямитель переменного напряжения, 411
Высота звука, 308

Галактика, 121
Галилей Г., 60, 119
Галилея принцип относительности, 175, 563
Галлея комета, 120
Гальвани Л., 361
Гальванический элемент, 359
Гаусса закон, 327
Генератор постоянного напряжения, 450
Генератор переменного напряжения, 478
Гельмгольца резонатор, 719
Гиббс Д., 706
Гидравлический пресс, 267
Гистерезис, 400
Граничные условия, 304, 305, 331, 333, 504
Герц Г., 484, 486, 491
Герц, 181
Генри, 453

Гироскоп, 696
Главное квантовое число, 820
Глаз, 551
Глория, 529
Глюон, 659
Грей, 630
Громкость звука, 308
Голография, 776
Гука закон, 283
Гюйгенса-Френеля принцип, 508, 763

Давление гидростатическое, 269
звуковое, 299
парциальное, 211
Дальтона закон, 211
Дедвейт, 274
Дейтрон, 578
Детекторный приемник, 498
Дефект массы, 578
Деформация, поперечная, 285
продольная, 283
Децибел, 307
Диаграмма деформации, 285
фазовая, 244
Диамагнетик, 398
Диод вакуумный, 408
полупроводниковый, 430
Диполь, 316
Диполь Герца, 486
Дирак П., 599, 612
Дирижабль, 276
Дисперсия среды, 516
Диссоциация, 404
Дифракция Фраунгофера, 512
Френеля, 512
Диэлектрик, 335
Джоуль, 87
Джоуля-Ленца закон, 370
Длина свободного пробега, 407
Доза поглощенная, 630
эквивалентная, 631
Доливо-Добровольский М.О., 478, 479
Домен, 400

Доплера эффект, 493, 574, 720, 786
Дуга электрическая, 423

Заряд электрический, 315
Закон всемирного тяготения, 124
газовые, 215
Гаусса, 327
Дюлонга-Пти, 230
Кулона, 314
Максвелла-Ампера, 392
сохранения импульса, 82
сохранения заряда, 314
сохранения полной энергии, 98
Стефана-Больцмана, 232
электромагнитной индукции,443
Законы Кеплера, 119, 120, 128
Земля, 158
Зеркало плоское, 530
сферическое, 531
Зиверт, 631
Зона энергетическая, 427

Идеальный газ, 208
Излучение атомов и молекул, 600
гравитационное, 812
индуцированное, 602
ондуляторное, 806
реликтовое, 588
рентгеновское, 417, 596
синхротронное, 485, 803
спонтанное, 602
черенковское, 484, 808
Изотоп, 612
Изотопический спин, 646
Импульс, 78
Инвариант, 571
Инверсная заселенность, 603
Индукция магнитного поля,
Индукция электростатическая, 330
электромагнитная, 443
Инжекция носителей тока, 431
Интеграл, 29, 30, 38
Интенсивность волны, звуковой, 307
электромагнитной, 489

Интернет, 439
Интерференция, 501
Интерферометр, 503
Инфразвук, 306
Инфракрасное излучение, 232, 233, 490, 516
Ион, 404
Испарение, 239

Кавитация, 243
Калория, 198, 223
Калибровочная симметрия, 655
Камера Вильсона, 251
пузырьковая, 244
счетно- ионизационная, 422
Каналовые лучи, 416
Каоны, 649
Капиллярность, 279
Катион, 405
Катод, 405
Катодные лучи, 416
Квазар, 123
Квант энергии, 587
Квантовая механика, 595
радиофизика, 602
телепортация, 816
хромодинамика, 655
Квантовые числа, 820
Квантовый объем, 823
Квантовый поток, 818
Квантовое сопротивление, 818
Кварк, 652
Кварковые струи, 656
Кельвина шкала, 103
Кельтский камень, 691
Кеплер И., 120
Кипение, 241
Кирхгоф Г.Р. 367, 513, 593, 763, 765
Кластер, 236
Когерентность, 501, 604
Коллайдер линейный, 793
Колебания механические одномерные, 180
вынужденные, 187,
свободные, 182,

Колебания электромагнитные,
вынужденные, 468, 472, 475
собственные, 460
Количество теплоты, 225
Кольцо накопительное, 793
Комета, 156, 157
Конденсатор, 337
Конденсация, 240
Контур, последовательный, 468
параллельный, 475
Конфайнмент, 656
Координаты, 17
Коперник Н., 119
Космический ливень, 636
лифт, 179
Космические лучи, 635
Космическая скорость
первая, 126
вторая, 134
третья, 135
четвертая, 135
Космическая электростанция, 449
Коэрцитивная сила, 401
Коэффициент взаимоиндукции, 459
диэлектрической проницаемости, 335
магнитной проницаемости, 399
поверхностного натяжения, 253
полезного действия, 258
Пуассона, 285
трения, 65
Кристалл, 235
Крукс У., 416, 496
Кулон, 315
Кусто Ж.И., 213
Кюри М., 610

Легирование, 429
Ленгмюр И., 408
Ленца закон, 370
Лептон, 652
Линза, 535
Линия винтовая, 484
Лоренца преобразования, 565

Лошмидта число, 196
Луна, 142
Лупа, 553
Луч геометрический, 509
физический, 509

Магнит, 378
Магнитная индукция, 380
Магнитное поле витка 390
прямого провода, 389, 392
соленоида, 393
Магические числа, 618
Магнитный момент, 387, 397
Максвелл Дж., 327, 387, 392, 397, 484, 491, 517, 699, 770
Максвелла распределение, 211, 699
Майкельсон А., 503, 564
Маркони М.,497
Марс, 147
Масконы, 144
Масса гравитационная, 809
инвариантная, 579
инертная, 810
системы частиц, 577
Массовое число, 612
Мгновенная ось вращения, 688
Микроскоп, 554, 555
Милликен Р., 324, 590
Модуляция амплитудная, 495, 721
частотная, 722
Молекула, 191, 195, 196
Моль, 191
Момент гироскопический, 697
дипольный, 331
инерции, 690
силы, 160
магнитный дипольный, 397
Монгольфьер, 276
Мощность, 88
Мюоны, 637

Намагниченность, 398
Напряжение, механическое, 281
электрическое, 351

Напряженность магнитного поля, 398
электрического поля, 318
Невесомость, 70
Нейтринная астрономия, 642
Нейтрон, 611
Неопределенностей соотношение, 598
Нептун, 121, 151, 153
Нулевые колебания, 822
Ньютон И., 61, 120

Обратимый процесс, 256
Ом, 351
Ома закон, 351
Оптическая сила линзы, 537
Оптическое изображение, 531
Орган, 305
Остров стабильности, 616
Ось числовая, 18
Открытие катодных лучей, 416
нейтрона, 611
протона, 611
реликтового излучения, 588
странных частиц, 647
электрона, 417
ядерной реакции, 611
Отрицательное сопротивление, 750
Очарованные частицы, 654
Очки, 552

Пар, насыщенный, 239
переохлажденный, 251
Парадокс спутника, 132
Парамагнетик, 398
Парниковый эффект, 233
Паскаля закон, 266
Паскаль, 205
Паули принцип, 427, 647, 653, 820
Перегрузка, 70
Период колебаний, 181
Пионы, 637
Плазма, 421
Планка постоянная, 587

Плотность тока, 351, 731
энергии электрического поля, 340
энергии магнитного поля, 456
Показатель преломления, 516, 773
Поток магнитной индукции, 442
электрического поля, 327
Пойнтинга вектор, 396,
Поверхностная плотность, тока, 401, 733, 735
заряда, 327
Позитрон, 612
Поляризация диэлектрика, 335
электромагнитной волны, 485
вакуума, 818
Попов А. С., 496
Постоянная Больцмана, 202
газовая, 205, 209
Ридберга, 593, 595
Стефана-Больцмана, 232
Потенциал, 321
Потенциальная энергия, 91
Пояс радиационный, 137, 141
Правила Кирхгофа, 367
Правило бетатронное, 789
Предел Роша, 288
Призма, 525
Прецессия, 118
Приемник детекторный, 498
Прилив, лунный, 714
Примесь акцепторная, 430
донорная, 429
Принцип эквивалентности, 810
Приращение функции, 26
Проекция, 22
Произведение, векторное, 25
скалярное, 24
Производная, 26
Протон, 611
Процесс адиабатический, 216
изобарический, 229
изотермический, 228
изохорический, 229
политропический, 230
Пушка электромагнитная, 745

Рабочее тело, 257
Работа механическая, 87, 89, 90
Радар бокового обзора, 780
Радиоактивность, 610
Радиосвязь, 496
Радиус-вектор, 32
Разряд искровой, 421
коронный, 421
несамостоятельный, 418
самостоятельный, 418
тлеющий, 419
Радуга, 528
Реактор, на быстрых нейтронах, 622
тепловых нейтронах, 621
природный, 624
термоядерный, 628
Резистор, 351
Резонанс, в механических колебаниях, 189
параметрический, 752
в электрических колебаниях, 471, 476
как нестабильная частица, 644
Рекомбинация, 415
Рентген К., 417

Сатурн, 152
Сверхновая СН1987А, 642
Световое давление, 492
Связь обратная, 466, 603
Секстант, 558
Сила Ампера, 379
выталкивающая, 273
давления, 265
инерции, 176, 178
консервативная, 91
Кориолиса, 179
Лоренца, 381
объемная, 265
поверхностная, 265
подъемная, 276
равнодействующая, 162
реакции, 64
трения покоя, 65
трения скольжения, 64
центробежная, 178

Сила тока, 350
Синтез легких ядер, 627
Синхротрон электронный, 790
Синхрофазотрон, 791
Система координат, 17, 31
Система отсчета инерциальная, 175
неинерциальная, 176
Силовая линия, 319, 380
Скаляр, 17
Скорость частицы, 32
Соленоид, 393, 747
Солитон, 311
Солнечная система, 145
Солнечный ветер, 141, 155
Спектр линейный, 601
полосатый, 601
Спектральный анализ, 595, 600
вещества, 600
звука, 305
света, 516
функции, 494
Спин частицы, 398, 645
Спутник астрофизический, 141
геодезический, 138
геостационарный, 138
геофизический, 141
навигационный, 138
свободный от сноса, 132
синхронно-солнечный, 140
Странность, 649
Странный аттрактор, 199
Сфера действия Земли, 680

Тахион, 574
Твел, 625
Телескоп, 559
Температура, 202
Теорема об изменении кинетической энергии, 93
Тепловое загрязнение, 262
Тепловое равновесие, 201
Тепловой двигатель, 256
Тепловой насос, 264

Теплоемкость молярная, 226
удельная, 226
Теплопроводность, 231
Термодинамика, 221
Термодинамики закон второй, 254, 703
первый, 222
Термодинамическая работа, 223
Термодинамический процесс, 214
Термометр, 215
Тесла,380
Толстая линза, 548
Томография, 602
Томсон Дж. Дж., 417, 729
Томсон У. (Кельвин), 203, 354, 462, 724
Точка росы, 250
критическая, 245
Кюри, 400
тройная, 245
Тритий, 612, 627
Тройной α-резонанс, 645

Угловая скорость частицы, 40
твердого тела, 687
Ультразвук, 307
Уравнение Мещерского, 80
Уран, 120, 153
Уравнение состояния, 204
Усилитель на вакуумном триоде, 735
на транзисторе, 434
Ускорение, 36
Условие равновесия газа и жидкости, 269

Фаза вещества, 236
волны, 487
колебаний, 181, 462, 468, 476
Фазовые диаграммы, 244
Фазовое равновесие, 236
Фазовращатель, 758
Фазотрон, 791
Фарад, 337
Фарадей М., 246, 314, 318, 406, 430, 442, 491
Фарадея закон электромагнитной индукции, 443
электролиза, 404
постоянная, 404

Фаренгейта шкала, 204
Фен, 298
Ферма принцип, 518
Ферми Э.,
Фермион, 645
Фокусировка жесткая, 792
Фотон, 589, 600
Фотоэффекта пороговая частота, 590
Френеля дифракция, 512
зоны, 508
зонная пластинка, 780
Франклин Б., 313
Фронт волны, 304, 487
Фуко маятник, 80
Фуллерен, 236

Хаос, 199
Хромоплазма, 657
Холодильная машина, 263

Цветовой заряд, 653
Цветовое состояние, 653
Центр масс, 79
тяжести, 162
удара, 693
Цепная ядерная реакция, 620
Цикл Брайтона, 261
Дизеля, 261
Карно, 257
Отто, 261
Стирлинга, 261

Частица виртуальная, 638
элементарная, 635
Частота колебаний, 181
Частота монохроматической электромагнитной волны, 487
Чедвик Дж., 611
Четность, 650
Чинук, 298
Чип, 435

Шар воздушный, 276
Шкала электромагнитных волн, 490

Эйнштейн А. 124, 565, 566. 590, 809
Эйнштейна принцип относительности, 565
эквивалентности, 810
Электризация, 312
Электромагнит, 748
Электромотор, 451
Электрон-вольт, 321
Электропокрытие, 405
Электрорецептор, 363
Электростатический подвес, 744
Элемент электрохимический, 359
Элементарная ячейка, 235
Эмиссия термоэлектронная, 423
Энергия внутренняя, 222
кинетическая, 93
магнитного поля, 456
полная механическая, 94
потенциальная, 91
релятивистская, 576
связи, 578, 618
Ферми, 427
электрического поля, 340, 375
электромагнитная, 461
Энтропия, 703
Эратосфен, 118
Эрстед Г., 378

Юнг Т., 283, 311, 502
Юнга модуль, 283

Ядерная зима, 633
Ядерный конфликт, 633
Ядерные испытания, 632
Ядерный магнитный резонанс, 601

ЧТО ЧИТАТЬ?

1. Ландау Л. Д., Китайгородский А. И. Физика для всех. М.: ГИФМЛ. 1963.

2. Орир Дж.. Физика. Т.1, Т.2. М.: Мир. 1981.

3. Мерион Дж. Б.. Общая физика с биологическими примерами. М.: Высшая школа. 1986.

4. Павленко Ю.Г. Начала физики. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1988 (639 С.).

5. Роуэлл Г., Герберт С. Физика. М.: Просвещение. 1994.

6. Павленко Ю. Г. Физика. М.: Джангар. Большая медведица. 1998, 2001—2002 (574 С.).

7. Павленко Ю. Г. Физика. М.: Новая волна. 2002 (719 С.).

8. Уокер Д. Ж.. Физический фейерверк. М.: Мир. 1979.

9. Соросовский образовательный журнал. Биология. Химия. Науки о Земле. Математика. Физика. Главный редактор В. Н. Сойфер (1995—2002 гг.).

10. Липсон Г. Великие эксперименты в физике. М.: Мир. 1972.

11. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. М.: Наука. 1964.

12. Александрова Н. В. Формирование основных понятий векторного исчисления. Историко-математические исследования. М.: Наука. 1982. Вып. 26. С. 205

13. Кордемский Б. А. Великие жизни в математике. М.: Просвещение. 1995.

14. Льоцци М. История физики. М.: Мир. 1970.

15. Храмов Ю. А. Физики. Библиографический справочник. М. Наука. 1983.

16. Лауреаты Нобелевской премии. М.: Прогресс. 1992.

17. Клайн Б. В поисках. М.: Атомиздат. 1997.

18. Лурье С. Я. Архимед. М-Л: Изд-во АН СССР. 1945.

19. Уилсон М. Американские ученые и изобретатели. М.: Знание. 1964.

20. Фейнман Р. Характер физических законов. М.: Мир. 1968.

21. Бялко А. В. Наша планета — Земля. Библиотечка «Квант», вып. 29. М.: Наука, 1989.

22. Богданов К. Ю. Физик в гостях у биолога. М.: Наука. 1986.

23. Полищук В.Р. Как исследуют вещества. Библиотечка «Квант», вып. 72, М.: Наука, 1989.

24. Пиментал Дж., Кунрод Дж.. Возможности химии сегодня и завтра. М.: Мир. 1992.

25. Популярная энциклопедия «Радость познания». Наука и Вселенная. Т.1. М.: Мир. 1983

26. Популярная энциклопедия «Радость познания». Человек и машины. Т.4. М.: Мир. 1986

27. Образованный ученый. М.: Наука. 1979.

28. Книга рекордов Гиннесса 1998. Ридерс Дайджест. Guinness.

29. Рыжов К. В. Сто великих изобретений, М.: Вече. 2000.

30. Internationally Adopted Values'. Успехи физических наук. 2003. Т. 173. № 3.

30. Перельман Я. И. Занимательная механика. Знаете ли вы физику? М.: АСТ. 1999.

31. Эйнштейн А. Мир и физика. Сборник. М.: Тайдекс Ко. 2003.

МЕХАНИКА

1. Ишлинский А. Ю. Механика. Идеи, задачи, приложения. М.: Наука. 1985.

2. Кириллин В. А. Страницы истории науки и техники. М.: Наука. 1986.

3. Силин А.А. Трение и мы. Библиотечка «Квант», вып.57. М.: Наука 1987.

4. Павленко Ю.Г. Парадокс спутника. Квант. 1970. № 5, С. 14.

5. Левантовский В. И. Механика космического полета. М.: Наука. 1980.

6. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Поиски и открытия планет. М.: Наука. 1984.

7. Космонавтика. Энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия. 1985.

8. Демин В. Г. Судьба Солнечной системы. М.: Наука. 1975.

9. Гетман В.С. Внуки Солнца. Библиотечка «Квант», вып.76, М.: Наука, 1989.

10. Рябов Ю.А. Движения небесных тел. М.: Наука. 1988.

ФИЗИКА КОСМОСА

1. Физика космоса. Маленькая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия. 1986.

2. Сучков А.А. Галактики знакомые и незнакомые. М.: Наука. 1988.

3. Нарликар Дж. От черных облаков к черным дырам. М.: Энергоатомиздат. 1989.

4. Киппенхан Р. 100 миллиардов солнц. М.: Мир. 1990.

5. Новиков И.Д. Как взорвалась Вселенная. Библиотечка «Квант». вып.68. М.: Наука. 1988.

6. Чернин А.Д. Звезды и физика. Библиотечка «Квант», вып. 38. М.: Наука. 1984.

7. Рис М. Черные дыры в центрах Галактик. В мире науки. 1991. №1. С. 16.

8. Берг С., Хессер Дж. Происхождение Млечного Пути. В мире науки. 1993. № 2 — 3. С. 96.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

1. Бахтамов Р. Фигуры не имеет. М.: Знание. 1977.

2. Полищук В.Р. Как разглядеть молекулу. М.: Изд-во Химия. 1979.

3. Кузнецов М.А., Мильман Б.Л., Шевченко С.М. Облик молекулы. Л.: Химия. 1989

4. Компанеец А.С. Законы физической статистики. М.: Наука, 1980.

5. Смородинский Я.А. Температура. Библиотечка «Квант», вып.12, М.: Наука, 1981.

6. Смирнов Г.В. Под знаком необратимости. М.: Знание, 1977.

7. Штейнберг А.С. Репортаж из мира сплавов. Библиотечка «Квант», вып. 71, М.: Наука, 1989.

8. Фен Дж. Машины. Энергия. Энтропия. М.: Мир, 1986.

9. Дэвинс Д. Энергия. М.: Энергоатомиздат. 1985.

10. Шмидт-Нильсен К. Как работает организм животного? М.: Мир, 1976.

11. Гегузин Я.Е. Капля. М.: Наука. 1977.

МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

1. Займовский В.А., Колупаева Т.Л. Необычные свойства обычных металлов. Библиотечка «Квант», вып.32. М.: Наука, 1984.

2. Вейль П. Популярная океанография. Л.: Гидрометеоиздат. 1977.

3. Вайсберг Дж. Погода на Земле. М.: Гидрометеоиздат, 1980.

4. Нейбургер М., Эдингер Дж., Боннер У. Познание окружающей нас атмосферы М.: Знание, 1986.

5. Шилов Г.Е. Простая гамма. Устройство музыкальной щкалы. М.: ГИФМЛ. 1963.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. Поль Р. В. Учение об электричестве. М.: ГИФМЛ. 1962.

2. Карцев В. Приключения великих уравнений. М.: Знание.1986.

3. Кляус Е. М. Поиски и открытия. М.: Наука. 1986.

4. Вяльцев А. Н., Григорян А.Г. Генрих Герц. М.: Наука. 1968.

5. Беркинблит М.Б., Глаголева Е.Г. Электричество в живых организмах. Библиотечка «Квант», вып. 69, М.: Наука. 1988.

6. Стикс Г. Микронные механизмы. В мире науки. 1993. № 1. С.68.

7. Ливинштейн М. Е., Симин Г.С. Знакомство с полупроводниками. Библиотечка «Квант», вып. 33, М.: Наука. 1984.

8. Ливинштейн М. Е., Симин Г.С. Барьеры. Библиотечка «Квант», вып. 65, М.: Наука. 1987.

9. Кава Р. Новые сверхпроводящие керамики. В мире науки. 1990. № 10. С. 16.

10. Андрианов В.И., Бородин В.А., Соколов А.В. «Шпионские штучки» и устройства для защиты объектов и информации. Лань. Санкт-Петербург. 1996.

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Эйнштейн А., Инфельд Л. Эволюция физики. М.: ГИТТЛ. 1956.

2. Тейлор Э., Уилер Дж. Физика пространства- времени. М.: Мир. 1971.

3. Либшер Д.Э. Теория относительности с циркулем и линейкой. М.: Мир. 1980.

4. Вайскопф В. Видимая форма быстродвижущихся тел. Успехи физических наук. 1964. Т. 84, вып.1. С.183.

5. Кауфман У. Космические рубежи теории относительности. М.: Мир. 1981.

6. Копылов Г. И. Всего лишь кинематика. Библиотечка «Квант», вып. 11, М.: Наука, 1981.

7. Гольдин Л. Л. Физика ускорителей. М.: Наука. 1983.

8. Окунь Л. Б. Понятие массы. Успехи физических наук. 1989. Т. 158, вып. 3. С.511.

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

1. Пономарев Л. И. Под знаком кванта. М.: Наука. 1989.

2. Клайн Б. В поисках. Физики и квантовая теория. М. Атомиздат. 1971.

3. Герц Г. Из первых лет квантовой физики. Успехи физических наук. 1977. Т. 122, вып.3. С. 497.

4. Хорган Дж. Квантовая философия. В мире науки. 1992. № 9–10. С. 70.

5. Тарасов Л. В. Знакомьтесь — лазеры. М.: Радио и связь. 1988.

6. Фрейнд Г., Паркер Р. Лазеры на свободных электронах. В мире науки. 1989. № 6. С. 42.

7. Чу С. Лазерный захват нейтральных частиц. В мире науки. 1992. № 4. С. 41.

8. Пеппер Д., Фейнберг Дж., Кухтарев Н.В. Фоторефрактивный эффект. В мире науки. 1990. № 12. С. 22.

9. Субботин В. И. Двадцать первый век — век ядерной энергетики. Физика элементарных частиц и атомного ядра. Дубна. 1998. ЭЧАЯ Т. 29. вып. 2. С. 333.

10. Абрамов А. И. Измерение «неизмеримого». М.: Энергоатомиздат. 1986.

11. Содди Ф. История атомной энергии. М.: Атомиздат. 1979.

12. Петров Ю. В. Естественный ядерный реактор Окло. Успехи физических наук. 1977. Т. 123, вып.3. С. 473.

13. Турко Р. П., Тун О.Б. и др. Климат и дым: оценка физических эффектов, приводящих к ядерной зиме. Успехи физических наук. 1991. Т. 161. № 3. С. 89.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

1. Зельдович Я. Б., Хлопов М. Ю. Драма идей в познании природы. Библиотечка «Квант», вып.67, М.: Наука, 1988.

2. Гинцбург М. А. Визуальное наблюдение космических лучей. Успехи физических наук. 1973. Т.109, вып. 2. С. 411.

3. Фритш Г. Основа нашего мира. М.: Энергоатомиздат. 1985.

4. Дубовой Э. И. По следам невидимок. М.: Знание. 1985.

5. Вайнберг С. Открытие субатомных частиц. М.: Наука. 1986.

6. Халлиуэл Дж. Квантовая космология и происхождение Вселенной. В мире науки. 1992. № 2. С. 16.

7. Бакал Дж. Н. Нейтринная астрофизика. М.: 1993.

8. Исаев П. С. Обыкновенные, странные, очарованные, прекрасные ... . М.: Мир, 1995.

9. Флеров Г. Н., Молчанов Е.М. Эти вездесущие ионы. Дубна. 1998.

10. Валошек П. Путешествие вглубь материи. С ускорителем ГЕРА к границам познания. М.: Мир, 1995.

11. Любимов А., Киш Д. Введение в экспериментальную физику частиц. М.. Физматлит, 2001.

Учебник

Павленко Юрий Григорьевич

НАЧАЛА ФИЗИКИ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ 77.99.02.953.Д.008330.09.06 от 14.09.2006 г.

Главный редактор *Яновский Д.В.*
Дизайн обложки *Захаркина И.Р.*
Компьютерная верстка *Алексеева А.А., Иванова И.Ю.*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры,
литература учебная

Издание осуществлено при техническом содействии ООО «Издательство АСТ»

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).

УВАЖАЕМЫЕ ПОКУПАТЕЛИ!

Книги издательства ***«ЭКЗАМЕН»*** можно приобрести оптом и в розницу в следующих книготорговых организациях:

Москва
ТД «Библио-глобус» — Тел. (495) 928-43-51
Детский мир центр — Тел. (495) 781-09-75
ДК Медведково — Тел. (495) 476-16-90
ООО «Библиосфера» — Тел. (495) 670-52-17
«Молодая гвардия» — Тел. (495) 780-33-70
«Шаг к пятерке» — Тел. (495) 411-08-29
Сеть магазинов «Мир школьника»

Архангельск
АВФ-книга — Тел. (8182) 65-41-34

Благовещенск
ЧП Калугин — Тел. (4162) 35-25-43

Волгоград
Предприниматель Гражданкин Н.Н. — Тел. (8442) 95-54-11
ООО «Кассандра» — Тел. (8442) 97-55-55

Владивосток
ОАО «Приморский торговый дом книги» — Тел. (4232) 63-73-18

Воронеж
ООО «Амиталь» — Тел. (4732) 23-00-02
ООО «Риокса» — Тел. (4732) 21-08-66
Книжный мир семьи — Тел. (4732) 51-28-90

Екатеринбург
ООО «Валео Книга» – Тел. (343) 374-54-59
ПО «Кримп» — Тел. (343) 369-29-25, 369-22-22
ООО «Фолиант» — Тел. (3432) 74-45-33
ООО «Алис» — Тел. (3432) 55-10-06

Ессентуки
ЧП Зинченко — Тел. (87961) 5-11-28

Иваново
«Мысль» — Тел. (4932) 30-00-65

Ижевск
ООО «УМК» — Тел. (3412) 78-35-04

Иркутск
«ПродалитЪ» — Тел. (3952) 24-17-77
«Антей книга» — Тел. (3952) 24-20-95

Казань
ООО «Аист-пресс» — Тел. (8432) 43-12-20
ООО «Таис» — Тел. (8432) 72-34-55

Киров
«Книги детям» — Тел. (8332) 51-30-90

Краснодар
ООО «БукПресс» — Тел. (8612) 62-55-48
ООО «Когорта» — Тел. (8612) 62-54-97
Перспективы образования — Тел. (8612) 54-25-67

Красноярск
ООО «Градъ» — Тел. (3912) 59-11-52

Ленинск-Кузнецкий
Магазин № 85 — Тел. (38456) 7-30-07

Мурманск
ООО «Тезей» — Тел. (8152) 43-63-75

Новосибирск
ООО «Топ-книга» — Тел. (3832) 36-10-28
ООО «Модус-2» — Тел. (3832) 44-34-44

Нижний Новгород
«Учебная книга» — Тел. (8312) 46-38-66
Дом книги — Тел. (8312) 77-52-07

Омск
«Омсккнига» — Тел. (3812) 23-52-08

Оренбург
«Фолиант» — Тел. (3532) 77-46-92

Пермь
ЧП Нежданов — Тел. (3422) 45-24-37
«Лира-2» — Тел. (3422) 26-66-91

Петропавловск-Камчатский
ЧП Кожан — Тел. (4152) 11-12-60

Прокопьевск
Книжный дом — Тел. (38466) 3-25-30

Псков
ООО «Гелиос» — Тел. (8112) 44-09-89

Пятигорск
ПБОЮЛ Бердникова — Тел. (87933) 3-05-86

Ростов-на-Дону
«Фаэтон-пресс» — Тел. (8632) 65-61-64
«Магистр» — Тел. (8632) 99-98-96

Рязань
ТД «Просвещение» — Тел. (4912) 44-67-75
ООО «Барс» — Тел. (4912) 93-29-54

Самара
«Реал +» — Тел. (8462) 41-87-30
«Чакона» — Тел. (8462) 42-96-30

Санкт-Петербург
«Санкт-Петербургский дом книги» — Тел. (812) 318-64-38
ООО «Буквоед» — Тел. (812) 346-33-27

Саратов
Читающий Саратов — Тел. (8452) 51-87-62
Полиграфист — Тел. (8452) 29-43-96
ООО «Стрелец и К°» — Тел. (8452) 52-25-24
«Гемера» — Тел. (8452) 64-37-37

Смоленск
ООО «Кругозор» — Тел. (4812) 65-86-65
ООО «Родник» — Тел. (4812) 55-71-05
ООО «Книжный мир» — Тел. (4812) 29-16-02
«Эрудит» — Тел. (4812) 65-62-94

Тверь
«Книжная лавка» — Тел. (4822) 33-93-03

Тула
«Галатея» — Тел. (4872) 35-60-87
«Система +» — Тел. (4872) 31-29-23

Тюмень
ООО «Друг» — Тел. (3452) 21-34-39
ООО «Знание» — Тел. (3452) 25-23-72
ЗАО «Фолиант» — Тел. (3452) 27-36-06

Уфа
ООО «Эдвис» — Тел. (3472) 25-83-92

Хабаровск
ООО «Мирс» — Тел. (4212) 29-25-65

Челябинск
Интерсервис ЛТД — Тел. (3512) 21-34-53

Чита
«Экслибрис» — Тел. (3022) 32-59-64

Якутск
ЧП Аксенчук — Тел. (4112) 42-89-60
«Якутский книжный дом» — Тел. (4112) 34-10-12

Ярославль
Академия — Тел. (4852) 31-43-26

По вопросам прямых оптовых закупок обращайтесь
по тел. (495) 641-00-30 (многоканальный), sale@examen.biz
www.examen.biz

Ю.Г. ПАВЛЕНКО

НАЧАЛА ФИЗИКИ

В основу учебника положены материалы лекций, которые в течение ряда лет читались учащимся физико-математической школы им. А.Н. Колмогорова при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. В нем подробно изложен теоретический материал по всем темам программы физики средней школы, а также приведены решения более 450 примеров и задач.

Достаточно полно обсуждаются разделы программы, которые, как показала практика преподавания в школе им. А.Н. Колмогорова и приемных экзаменов на естественные факультеты МГУ, наиболее сложны для учащихся.

Цель книги – помочь освоить материал программы, научить активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи, и приобрести уверенность в самостоятельной работе.

Учебник предназначен для учащихся средних школ, лицеев, гимназий, преподавателей и абитуриентов.

ISBN 978-5-377-00559-9

В ЭТОЙ СЕРИИ:

- ХИМИЯ
- АЛГЕБРА
- ГЕОМЕТРИЯ
- ФИЗИКА
- ГЕОГРАФИЯ
- РУССКИЙ
- ИНФОРМАТИКА
- ЛИТЕРАТУРА
- БИОЛОГИЯ
- ИСТОРИЯ
- АНГЛИЙСКИЙ
- НЕМЕЦКИЙ
- ФРАНЦУЗСКИЙ