

М. М. Постников

УСТОЙЧИВЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ



УРСС

М. М. Постников

УСТОЙЧИВЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Издание второе, стереотипное

Москва • 2004



УРСС

Постников Михаил Михайлович

Устойчивые многочлены. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 176 с.

ISBN 5-354-00637-6

Книга посвящена изложению основ теории устойчивых многочленов, играющих основную роль в проблемах устойчивости систем автоматического регулирования и других динамических систем. На простом элементарном материале книга вводит в круг важных идей классической алгебры и анализа. В последней главе, более трудной по содержанию, изложены основные результаты об устойчивости целых функций и, в частности, квазимоночленов.

Для школьников старших классов, студентов вузов и любителей математики.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 24.12.2003 г.

Формат 60×90/16. Тираж 600 экз. Печ. л. 11. Зак. № 2-1208/407.

Отпечатано в типографии ООО «РОХОС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

ISBN 5-354-00637-6

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

 E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в Internet: <http://URSS.ru>
Тел./факс: 7 (095) 136-42-18
Тел./факс: 7 (095) 136-42-48

© Едиториал УРСС, 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Вводная	9
1. Постановка задачи	9
Многочлены и их корни. — Задача о расположении корней. — Устойчивые многочлены.	
2. Многочлены малых степеней и теорема Стодола	12
Устойчивые многочлены первой и второй степени. — Многочлены с положительными коэффициентами.	
3. История задачи	14
Максвелл. — Вышнеградский. — Эрмит. — Раус. — Стодола и Гурвиц. — Ляпунов и Шварц.	
Глава 2. Теоретическая	17
1. Амплитудно-фазовый критерий устойчивости	17
Многочлены g и h . — Амплитудно-фазовая характеристика. — Многочлены без чисто мнимых корней. — Многочлены с вещественными коэффициентами. — Амплитудно-фазовая характеристика многочлена третьей степени. — Фазовая функция и фазовая характеристика. — Фазовые характеристики многочленов третьей степени. — Фазовая функция произведения. — Амплитудно-фазовый критерий устойчивости. — Критерий Вышнеградского.	
2. Теорема Эрмита — Билера	39
Амплитудно-фазовая характеристика устойчивого многочлена. — Многочлены с перемежающимися корнями. — Теорема Эрмита — Билера.	
3. Индекс рациональной функции	48
Полюсы рациональной функции и ее главные коэффициенты. — Индекс рациональной функции. — Простейшие свойства индекса. — Индекс универсальной функции.	
4. Индекс и условие устойчивости	58
Устойчивые многочлены и индекс функций h/g и g/h . — Многочлены с вещественными положительными коэффициентами.	
Глава 3. Вычислительная	66
1. Вычисление индекса	66
Алгоритм вычисления индекса. — Ряд Штурма. — Число перемен знака. — Теорема Штурма об индексе. — Теорема Штурма о числе корней.	
2. Теорема Рауса	77
Индекс на всей оси. — Регулярный случай. — Формулы деления с остатком. — Алгоритм вычисления индекса в регулярном случае. — Критерий того, что индекс рациональной функции равен степени знаменателя. — Критерий Рауса.	

3. Теоремы Гурвица и Лъенара — Шипара	83
Матрица Гурвица многочлена. — Критерий Гурвица устойчивости многочлена с вещественными коэффициентами. — Критерий Гурвица устойчивости многочлена с произвольными комплексными коэффициентами. — Матрица Гурвица многочлена одинаковой степени. — Критерий Лъенара — Шипара.	
4. Квадратичная форма, ассоциированная с рациональной функцией	97
Квадратичные формы. — Разложение рациональной функции на простейшие дроби. — Вычет рациональной функции в полюсе. — Разложение рациональной функции в ряд. — Ганкелевы формы, ассоциированные с рациональной функцией. — Рациональные функции, все полюсы которых вещественны и просты. — Рациональные функции, для которых ассоциированная ганкелева форма положительно определена. — Редукция условия Сильвестра к условию Гурвица.	
5. Теорема Шура	119
Многочлен P . — Определение и свойства преобразования Шура. — Многочлен $P(z, \zeta)$. — Многочлен P_z . — Теорема Шура. — Вспомогательная лемма. — Доказательство теоремы Гурвица.	
Глава 4. Дополнительная	125
1. Теоремы Чеботарева и Понтрягина	125
Целые функции. — Амплитудно-фазовая характеристика целой функции. — Условия Эрмита — Вилера. — Вещественные пары целых функций. — Сильно устойчивые целые функции и формулировка теоремы Чеботарева. — Квазимоночлены. — Результаты Понтрягина.	
2. Необходимые сведения из теории функций комплексного переменного	133
Регулярные функции. — Принцип максимума модуля. — Теорема о невязной функции. — Мероморфные функции. — Принцип аргумента. — Теорема Руше. — Лемма о существовании корня.	
3. Доказательство теоремы Чеботарева	143
Равносильность условий (A), (B) и (B'). — Доказательство теоремы Чеботарева. — Доказательство предположений о вещественных парах функций из п. 1.	
4. Квазимоночлены без главного члена	153
Две вспомогательные леммы. — Доказательство теоремы.	
5. Доказательство теоремы Понтрягина	156
Квазимоночлены с постоянными коэффициентами. — Квазимоночлены с переменными коэффициентами. — Доказательство теоремы Понтрягина.	
6. Вещественные тригонометрические многочлены	164
Введение. — Тригонометрические многочлены с постоянными коэффициентами. — Тригонометрические многочлены с главным членом. — Число корней тригонометрического многочлена.	
7. Теорема Эрмита — Вилера для квазимоночленов	171
Квазимоночлены и тригонометрические многочлены. — Теорема Эрмита — Вилера для квазимоночленов.	
Литература	176

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопрос об устойчивости положения равновесия динамической системы, как известно, сводится (при весьма общих предположениях) к вопросу, расположены ли слева от мнимой оси корни характеристического уравнения линеаризованной системы. Это объясняет живой и непрекращающийся интерес, проявляемый математиками и инженерами к задаче о характеристизации многочленов, корни которых расположены слева от мнимой оси (мы будем называть такие многочлены *устойчивыми*).

Цель этой книги — изложить решение задачи о характеристизации устойчивых многочленов в максимально простом виде, доступном каждому любителю математики, владеющему алгеброй в объеме, лишь незначительно превышающем объем курса средней школы (требуется знать формулировку основной теоремы алгебры, уметь строить графики простейших рациональных функций, владеть определением предела, уметь обращаться с комплексными числами и т. п.). Кроме того, желательно (но для основного текста необязательно) владеть понятием производной и знать, как производная применяется в задаче об отыскании точек локального экстремума. Исключением являются последние три пункта главы 3, где волей-неволей необходимо предполагать владение теорией определителей (поскольку определители входят в формулировку доказываемых в этих пунктах теорем).

Основной текст книги содержит три главы, разбитые на пункты. В п. 1 первой, вводной, главы обсуждается проблема локализации корней многочлена, дается определение устойчивого многочлена и объясняется роль таких многочленов в задаче об устойчиво-

сти положений равновесия динамических систем. В п. 2 доказывается простейший необходимый признак устойчивости многочлена (положительность всех коэффициентов) и приводится пример, показывающий его недостаточность. В п. 3 вкратце излагается история задачи об устойчивых многочленах.

Глава 2 посвящена критериям устойчивости «теоретического» плана, имеющим дело с числом полуоборотов или индексом. В п. 1 этой главы эксплуатируется принцип аргумента теории функций комплексного переменного, в п. 2 доказывается теорема Эрмита — Билера о перемежаемости корней, в п. 3 излагаются определение и свойства индекса Коши рациональной функции, который в заключительном п. 4 применяется к установлению двух критериев устойчивости (одного классического, идущего, по существу, от Штурма и Эрмита, и другого более нового, принадлежащего Льенару и Шипару).

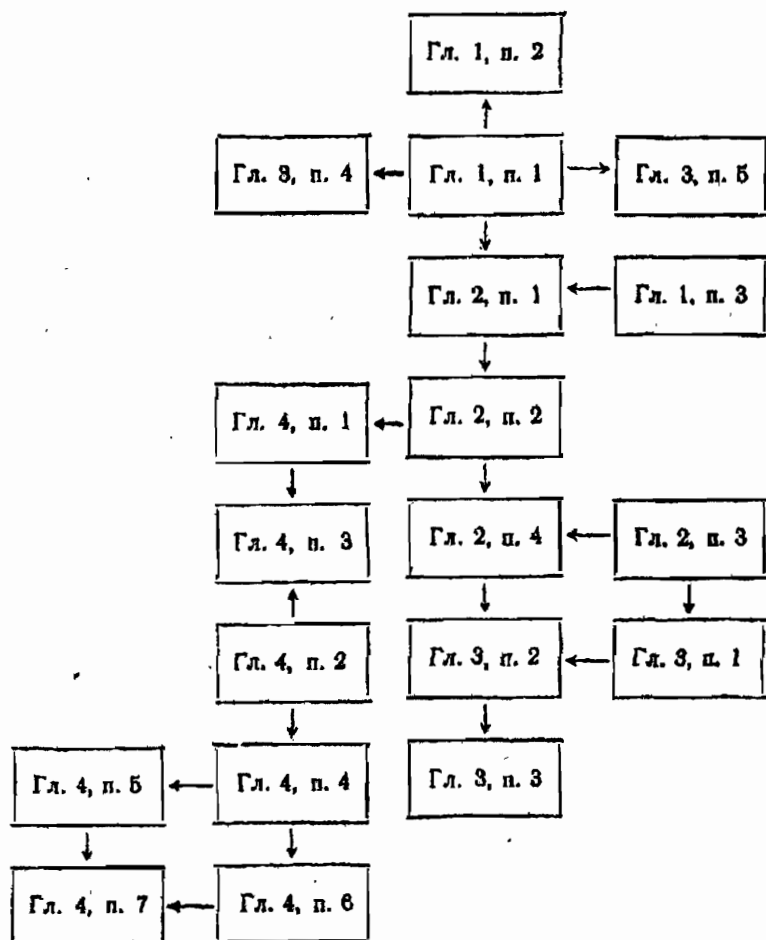
В главе 3 рассматриваются критерии «вычислительного» характера, позволяющие в конечном числе арифметических действий установить по коэффициентам многочлена, устойчив он или нет. В вводном п. 1 излагается классический метод Штурма вычисления индекса рациональной функции (ряд Штурма). Здесь же, в порядке некоторого отступления от темы, доказывается теорема Штурма о числе вещественных корней многочлена на данном интервале. В п. 2 на основе результатов п. 1 строится алгоритм Рауса, а в п. 3 выводятся детерминантные условия Гурвица и Льеара — Шипара. В п. 4 результаты п. 3 передоказываются с помощью квадратичных форм, а в п. 5 — на основе метода Шура.

Книга содержит также дополнительную главу 4, в которой обсуждается вопрос о перенесении результатов предыдущих глав на целые функции. В первых трех пунктах этой главы доказывается теорема Чеботарева, являющаяся обобщением на целые функции теоремы Эрмита — Билера. Оказывается, что эту теорему можно доказать на сравнительно элементарном уровне, не предполагая почти никаких предварительных сведений из теории функций комплексного переменного, кроме принципа максимума модуля. Для читателя, совершенно незнакомого с теорией функций, в п. 2 гл. 4 вкратце напоминаетесь весь необходимый

материал. Последние четыре пункта гл. 4, по существу не зависящие от первых трех, посвящены изложению результатов Л. С. Понтрягина об устойчивых квази-многочленах. Хотя гл. 4 и труднее предыдущих глав, но все же она вполне посильна внимательному и трудолюбивому читателю, знания которого лишь незначительно выходят за пределы курса средней школы (и который готов принять на веру теоремы из п. 2 гл. 4).

М. М. Постников

СХЕМА ЗАВИСИМОСТИ ГЛАВ



ВВОДНАЯ

1. Постановка задачи

Многочленом называется функция f комплексного переменного z , значения $f(z)$ которой вычисляются по формуле

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n. \quad (1)$$

Как правило, всегда предполагается, что $a_0 \neq 0$. При этом число n называется *степенью* многочлена.

Числа

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

называются *коэффициентами* многочлена (1). Пока мы будем считать эти коэффициенты произвольными комплексными числами.

Комплексное число z_0 называется *корнем* (а также *нулем*) многочлена f , если

$$f(z_0) = 0.$$

Если $z_1, \dots, z_m$ — все корни многочлена f , то

$$f(z) = a_0 (z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_m)^{n_m}, \quad (2)$$

где $n_1 \geq 1, \dots, n_m \geq 1$. Число $n_i, i = 1, \dots, m$, называется *кратностью* корня z_i . Сумма кратностей всех корней равна степени n многочлена:

$$n_1 + \dots + n_m = n,$$

так что число всех корней, сосчитанных столько раз, какова их кратность, равно n . Поэтому разложение (2) можно переписать в следующем виде:

$$f(z) = a_0 (z - z_1) \dots (z - z_n), \quad (3)$$

где теперь $z_1, \dots, z_n$ — корни многочлена, каждый из которых повторен столько раз, какова его кратность.

Так как мы будем интересоваться лишь корнями многочленов, то пропорциональные многочлены мы можем не различать. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $a_0 = 1$. Однако это нарушит симметрию некоторых формул. Вместе с тем считать коэффициент a_0 произвольным тоже не очень удобно. Мы выбираем золотую середину и будем считать коэффициент a_0 вещественным положительным числом:

$$a_0 > 0.$$

Корни являются комплексными числами и как-то расположены на плоскости комплексного переменного. Можно ли, не вычисляя корней, получить информацию об их расположении?

Задача 1. Пусть

$$A = \max(|a_1|, \dots, |a_n|).$$

Покажите, что все корни многочлена (1) (с $a_0 > 0$) расположены в круге с центром в точке 0 и радиусом $1 + \frac{A}{a_0}$, т. е. что

$$|z_0| \leq 1 + \frac{A}{a_0}$$

для любого корня z_0 многочлена (1).

Задача 2. В прежних обозначениях покажите, что если $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, то

$$|z_0| \leq 1 + \sqrt[n]{\frac{A}{a_0}}$$

для любого корня z_0 многочлена (1).

Имеется великое множество такого рода теорем. В каждой из них задается некоторый класс многочленов (например, многочлены с $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$) и некоторый класс областей (например, круги с центром в точке 0). Каждому многочлену данного класса сопоставляется некоторая область, и теорема утверждает, что все корни многочлена принадлежат этой области.

Однако есть теоремы и совсем другого типа. В них задается область и ищутся условия на коэффициенты многочлена, при выполнении которых все корни многочлена принадлежат этой области. Только такие теоремы мы и будем рассматривать.

Между обоими типами теорем непреходимой границы нет. Например, из результата задачи 1 вытекает следующая теорема,

принадлежащая ко второму типу: если $A \leq a_0$, то все корни многочлена лежат в круге $|z| \leq 2$. Однако при такого рода переформулировках мы либо теряем информацию, либо получаем чрезвычайнo искусственные утверждения.

Простейшими областями являются полуплоскости. Выберем для определенности так называемую *левую полуплоскость* Π_0 , состоящую из точек $z = x + iy$, для которых $x < 0$.

Задача 3. Пусть Π — произвольная полуплоскость. Покажите, что существуют такие комплексные числа $a \neq 0$ и b (вообще говоря, не единственные), что все корни многочлена f тогда и только тогда принадлежат полуплоскости Π , когда все корни многочлена g , определенного формулой

$$g(z) = f(az + b),$$

т. е. формулой

$$g(z) = a_0(az + b)^n + a_1(az + b)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(az + b) + a_n$$

принадлежат полуплоскости Π_0 .

Пример. Корни многочлена f тогда и только тогда принадлежат *верхней полуплоскости* $y > 0$, когда корни многочлена

$$g(z) = f(-iz)$$

принадлежат полуплоскости Π_0 .

Задача 4. Пусть K — произвольный круг на плоскости комплексного переменного. Покажите, что существуют такие комплексные числа a, b, c, d , удовлетворяющие соотношению $ad - bc \neq 0$, что все корни многочлена f тогда и только тогда лежат в круге K , когда все корни многочлена g , определенного формулой

$$g(z) = (cz + d)^n f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right),$$

т. е. формулой

$$f(z) = a_0(az + b)^n + a_1(az + b)^{n-1}(cz + d) + \dots$$

$$\dots + a_{n-1}(az + b)(cz + d)^{n-1} + a_n(cz + d)^n,$$

принадлежат полуплоскости Π_0 .

Пример. Если K — круг радиуса 1 с центром в точке 0, то годятся числа

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = -1.$$

Таким образом, если мы научимся определять, лежат ли корни данного многочлена в полуплоскости Π_0 , то мы сможем ответить на аналогичный вопрос и по отношению к произвольной полуплоскости и даже по отношению к произвольному кругу.

Определение 1. Многочлен

$$f = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad a_0 > 0,$$

называется *устойчивым*, если все его корни лежат в левой полуплоскости P_0 , т. е. если их вещественные части отрицательны.

Задача состоит в том, чтобы по коэффициентам многочлена (без вычисления корней) определить, устойчив он или нет.

Положение равновесия (или установившееся движение) механической или электрической системы может быть устойчивым или неустойчивым (например, маятник имеет два положения равновесия — нижнее и верхнее; нижнее положение равновесия устойчиво, а верхнее — неустойчиво). В теории малых колебаний показывается, что каждому положению равновесия можно сопоставить некоторый многочлен, называемый его *характеристическим многочленом* (степень n которого равна удвоенному числу степеней свободы системы) и обладающий тем свойством, что в случае, когда этот многочлен не имеет чисто мнимых корней, положение равновесия тогда и только тогда устойчиво, когда все его корни имеют отрицательные вещественные части. Это объясняет, почему многочлены, все корни которых имеют отрицательные вещественные части, называются устойчивыми.

Возникающие в технике многочлены имеют вещественные коэффициенты. Однако основные теоремы об устойчивых многочленах доказываются проще, если рассматривать произвольные комплексные коэффициенты. Вместе с тем при дальнейшем развитии теории будет выгодно ограничиться вещественными коэффициентами (это существенно упростит окончательные формулы).

2. Многочлены малых степеней и теорема Стодола

Для многочленов с вещественными коэффициентами степени ≤ 2 исследование на устойчивость тривиально.

Действительно, многочлен первой степени $a_0z + a_1$ имеет единственный корень $-\frac{a_1}{a_0}$. Этот корень тогда и только тогда отрицателен, когда $a_1 > 0$ (напомним, что согласно нашему предположению всегда $a_0 > 0$).

Многочлен второй степени

$$a_0z^2 + a_1z + a_2$$

имеет корни

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{a_0}.$$

Случай 1. $a_1^2 < 4a_0a_2$ (и, следовательно, $a_2 > 0$). В этом случае оба корня имеют одну и ту же вещественную часть $-\frac{a_1}{4a_0}$. Поэтому многочлен тогда и только тогда устойчив, когда $a_1 > 0$.

Случай 2. $a_1^2 \geq 4a_0a_2$. В этом случае оба корня вещественны. Если $a_1 > 0$, то один из корней отрицателен, а другой отрицателен тогда и только тогда, когда $a_2 > 0$. Если же $a_1 \leq 0$, то хотя бы один корень заведомо положителен.

Этим доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Многочлен первой или второй степени (с вещественными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом a_0) тогда и только тогда устойчив, когда все его коэффициенты положительны. $\square$*

Для устойчивости многочленов более высоких степеней условие положительности коэффициентов во всяком случае необходимо:

Теорема 2 (теорема Стодолы). *Если многочлен (1) с вещественными коэффициентами устойчив, то (при $a_0 > 0$) все его коэффициенты положительны.*

Доказательство. Известно, что любой многочлен с вещественными коэффициентами является произведением многочленов степени ≤ 2 (также с вещественными коэффициентами).

Действительно, известно, что для любого многочлена с вещественными коэффициентами наряду с некоторым корнем $z_0 = x_0 + iy_0$ комплексно сопряженное с ним число $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ будет корнем той же кратности. Поэтому в разложение многочлена на множители вида $z - z_i$ (см. формулу (3)) невещественные множители будут входить парами вида $(z - z_i)(z - \bar{z}_i)$.

Поскольку

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 + 2pz + q,$$

где $p = -x_0$, $q = x_0^2 + y_0^2$, откуда следует, что любой многочлен (1) с вещественными коэффициентами допускает разложение вида $p(z) = a_0(z - x_1) \dots (z - x_r)(z^2 + 2p_1z + q_1) \dots (z^2 + 2p_sz + q_s)$, где $x_1, \dots, x_r$ — вещественные корни (каждый корень повторен столько раз, какова его кратность), а $z^2 + 2p_1z + q_1, \dots, z^2 + 2p_sz + q_s$ — такие квадратные трехчлены (каждый из которых соответствует одной паре комплексно сопряженных корней), что $p_i^2 < q_i$.

Так как любой делитель устойчивого многочлена, очевидно, устойчив, откуда и из теоремы 1 следует, что любой устойчивый многочлен с вещественными коэф-

фициентами является произведением многочленов с положительными коэффициентами и потому сам является многочленом с положительными коэффициентами (ибо коэффициенты произведения получаются из коэффициентов множителей только действиями умножения и сложения, без вычитания). □

Обратное утверждение неверно уже для многочленов третьей степени.

Пр и м е р. Многочлен

$$z^3 + z^2 + 4z + 30$$

имеет положительные коэффициенты, но среди его корней

$$-3, 1 \pm 3i$$

два корня имеют положительные вещественные части.

Условия устойчивости многочленов третьей степени мы найдем в следующей главе.

3. История задачи

К середине XIX века, в связи с ростом мощности и быстроходности паровых машин, все чаще стала проявляться склонность этих машин к неустойчивой работе и самораскачиванию. Центробежные регуляторы Уатта, уверенно обеспечивающие надежную работу машин меньшей мощности, оказались для более мощных машин по непонятным причинам малопригодными.

Первую успешную попытку разобраться в принципах действия автоматических регуляторов паровых машин предпринял знаменитый физик, создатель теории электромагнетизма, Джеймс Максвелл. В 1868 году он опубликовал работу «О регуляторах», в которой впервые теоретически исследовал в общем виде работу системы «машина — регулятор» и выяснил причины ее неустойчивой работы. Однако упрощающие предположения, которые сделал Максвелл, исключили из рассмотрения наиболее важный для практики случай паровых машин, снабженных центробежным регулятором Уатта, и потому из работы Максвелла инженеры не получили четких рекомендаций к обеспечению устойчивой работы интересующих их устройств.

Выдающийся русский инженер И. А. Вышнеградский подошел к делу иначе, не как физик-теоретик, а как инженер-практик. Свою работу 1876 года «О ре-

регуляторах прямого действия» он посвятил именно системе «паровая машина — регулятор Уатта» и ее теоретическое исследование увенчал компактными формулами и элегантными графиками, непосредственно применимыми в конструкторских расчетах. С этой работы берет начало современная инженерная теория автоматического регулирования.

Вышнеградский впервые обнаружил и довел до сознания инженеров-конструкторов, что

1) увеличение массы грузов регулятора уменьшает устойчивость;

2) без трения не может быть устойчиво работающего регулятора;

3) необходима определенная неравномерность регулятора, т. е. нужно, чтобы при изменении нагрузки несколько менялась установившаяся угловая скорость.

Эти выводы Вышнеградского объясняют, почему регуляторы Уатта перестали надежно работать. Машины, которые строил сам Уатт, были машинами низкого давления, маломощными, с небольшим числом оборотов. Заслонки, регулирующие подачу пара, перемещались с существенным трением, обусловленным грубым выполнением, а регуляторы работали с большой неравномерностью (число оборотов при верхнем и нижнем положениях муфты было существенно различным). Все это и обеспечивало устойчивую работу машин.

Развитие техники выдвинуло повышенные требования к точности регулирования, для чего следовало уменьшать коэффициент неравномерности регулятора и увеличивать его чувствительность, т. е. уменьшать трение, а увеличение мощности машин потребовало увеличения массы грузов регулятора. Все это с неизбежностью вело к неустойчивости. Лишь после того как это обстоятельство было четко выяснено Вышнеградским, стало возможно целенаправленно бороться с неустойчивостью.

В работах Максвелла и Вышнеградского речь шла о системах, характеристические многочлены которых имеют третью степень. В наиболее завершенной форме условия устойчивости таких многочленов были сформулированы Вышнеградским, и потому они называются условиями Вышнеградского.

На заседании Лондонского Математического общества в 1868 году Максвелл поставил задачу о разграничении условий устойчивости многочленов любой степени. Между тем эта задача фактически была решена еще в 1851 году замечательным французским математиком Шарлем Эрмитом. Однако результаты Эрмита не были доведены до практически удобных алгоритмов или формул и остались не известными специалистам, работающим в прикладных областях.

Задачу Максвелла решил в 1875 году английский математик и механик Э. Раус. Он указал удобный алгоритм, позволяющий для любого многочлена определить в конечное число простых арифметических действий, является ли этот многочлен устойчивым.

В конце XIX века словацкий инженер, создатель теории регулирования турбин, А. Стодола, не зная работ Рауса, доказал необходимое условие устойчивости многочленов с вещественными коэффициентами (см. п. 2) и поставил задачу об отыскании необходимых и достаточных условий перед выдающимся немецким математиком А. Гурвицем. В 1895 году Гурвиц, опираясь на работы Эрмита, дал (независимое от Рауса) второе решение этой задачи в виде некоторых неравенств. Это решение получило всеобщую известность, и условия, найденные Гурвицем, называются теперь неравенствами Гурвица (или Рауса—Гурвица). Более того, некоторые авторы устойчивые многочлены даже называют многочленами Гурвица.

В дальнейшем условия Гурвица в той или иной форме неоднократно исследовались и переоткрывались инженерами и математиками. Например, в 1937 году определенную известность в технических кругах получил так называемый амплитудно-фазовый критерий инженера А. В. Михайлова. Однако этот критерий на самом деле знал еще Эрмит, и, более того, именно на нем Эрмит и основывал свои исследования.

В 1914 году крупного успеха добились французские математики А. Лъенар и М. Шипар, которым удалось примерно вдвое уменьшить число неравенств в критерии Гурвица.

Нужно сказать, что уже Раус (и все последующие математики, занимавшиеся устойчивыми многочленами) решали на самом деле более общую задачу: найти критерии того, что многочлен имеет справа от мнимой оси данное число k корней (при $k = 0$ эта задача сводится к задаче об устойчивых многочленах). Хотя решение задачи для любого k основывается на, по существу, тех же соображениях, что и для $k = 0$, во все же случай $k = 0$ оказывается значительно более простым. Поэтому мы будем заниматься только им.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ

1. Амплитудно-фазовый критерий устойчивости

Подставив в многочлен

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad a_0 > 0, \quad (1)$$

вместе с чисто мнимое число $i\omega$, мы получим комплексное число $f(i\omega)$. Отделим в нем вещественную и мнимую части:

$$f(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega).$$

Ясно, что здесь g и h — некоторые многочлены от ω . Например, если

$$f(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$$

— многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами, то

$$g(\omega) = -a_1 \omega^2 + a_3, \quad h(\omega) = -a_0 \omega^3 + a_2 \omega.$$

Вообще, если многочлен f имеет вещественные коэффициенты, то при нечетном $n = 2m + 1$

$$g(\omega) = (-1)^m a_1 \omega^{n-1} + (-1)^{m-1} a_3 \omega^{n-3} + \dots + a_n,$$

$$h(\omega) = (-1)^m a_0 \omega^n + (-1)^{m-1} a_2 \omega^{n-2} + \dots + a_{n-1} \omega,$$

а при четном $n = 2m$

$$g(\omega) = (-1)^m a_0 \omega^n + (-1)^{m-1} a_2 \omega^{n-2} + \dots + a_n,$$

$$h(\omega) = (-1)^{m-1} a_1 \omega^{n-1} + (-1)^{m-2} a_3 \omega^{n-3} + \dots + a_{n-1} \omega.$$

Чтобы записать эти формулы в удобном виде, целесообразно ввести многочлены G и H , определяемые формулами

$$G(x) = \begin{cases} a_1 x^m + a_3 x^{m-1} + \dots + a_n, & \text{если } n = 2m + 1, \\ a_0 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_n, & \text{если } n = 2m, \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} a_0 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_{n-1}, & \text{если } n = 2m + 1, \\ a_1 x^{m-1} + a_3 x^{m-2} + \dots + a_{n-1}, & \text{если } n = 2m. \end{cases}$$

Тогда

$$g(\omega) = G(-\omega^2), \quad h(\omega) = \omega H(-\omega^2). \quad (2)$$

Для доказательства этих формул достаточно заметить, что

$$f(z) = G(z^2) + zH(z^2),$$

и, следовательно, что

$$f(i\omega) = G(-\omega^2) + i\omega H(-\omega^2). \quad \square$$

Для многочлена с произвольными комплексными коэффициентами выражения для g и h будут несколько более сложными. Их явный вид нам не понадобится. Однако степени многочленов g и h будут те же, что и для вещественного случая:

Лемма 1. Если n четно, то степень многочлена g равна n , а степень многочлена h не превосходит $n-1$. Если же n нечетно, то наоборот, степень многочлена g не превосходит $n-1$, а степень многочлена h равна n .

Доказательство. Достаточно вспомнить, что, по условию, $a_0 > 0$. $\square$

Когда ω меняется от $-\infty$ до $+\infty$, комплексное число $f(i\omega)$ описывает на плоскости комплексного переменного некоторую кривую с параметрическими уравнениями

$$x = g(\omega), \quad y = h(\omega). \quad (3)$$

Определение 1. Кривая (3) называется *амплитудно-фазовой характеристикой* многочлена f .

Если на вход линейного электрического прибора с характеристическим многочленом f подать переменный ток частоты ω и амплитуды 1, то на выходе появится ток той же частоты, но с амплитудой $|f(i\omega)|$. При этом его фаза будет сдвинута на $\arg f(i\omega)$.

Это объясняет термин «амплитудно-фазовая характеристика». Таким образом, на практике амплитудно-фазовую характеристику можно снять экспериментально.

Внимание инженеров к амплитудно-фазовой характеристике было привлечено, как уже говорилось выше, А. В. Михайловым. Поэтому в некоторых технических руководствах она называется *годографом Михайлова*.

При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ точка $i\omega$ пробегает «мнимую ось» — границу левой полуплоскости. Амплитудно-фазовая характеристика является поэтому ничем иным как образом мнимой оси при отобра-

жении $z \mapsto f(z)$ плоскости комплексного переменного на себя, осуществляемом многочленом f .

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2. *Многочлен f тогда и только тогда имеет чисто мнимый корень $z_0 = i\omega_0$, когда многочлены g и h имеют общий вещественный корень ω_0 . $\square$*

Тот факт, что $g(\omega_0) = 0$ и $h(\omega_0) = 0$, означает, что при значении $\omega = \omega_0$ параметра кривая (3) проходит через точку O (начало координат). С другой стороны, наличие корня вида $i\omega_0$ означает, что многочлен f неустойчив. Таким образом, имеет место

Следствие. *Если многочлены g и h имеют общий вещественный корень, т. е. иными словами, если амплитудно-фазовая характеристика проходит через точку O , то многочлен f неустойчив.*

Поэтому исследование на устойчивость нам достаточно уметь делать только для многочлена, амплитудно-фазовая характеристика которого не проходит через точку O .

В случае, когда коэффициенты многочлена f вещественны, из формул (2) следует, что если мы заменим ω на $-\omega$, то $g(\omega)$ не изменится, а $h(\omega)$ поменяет знак. Поэтому кривая (3) симметрична относительно оси абсцисс (вещественной оси), причем симметричным точкам отвечают значения параметра, отличающиеся знаком.

При $n = 1$ мы имеем (в предположении вещественности коэффициентов), что

$$g(\omega) = a_1, \quad h(\omega) = a_0\omega.$$

Это означает, что для многочлена первой степени $f(z) = a_0z + a_1$ с вещественными коэффициентами амплитудно-фазовая характеристика является вертикальной прямой $x = a_1$. При возрастании параметра ω от $-\infty$ до $+\infty$ точка $M(g(\omega), h(\omega))$ характеристики монотонно движется по ней снизу вверх.

Аналогично при $n = 2$, т. е. при $f(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2$, мы имеем

$$g(\omega) = -a_0\omega^2 + a_2, \quad h(\omega) = a_1\omega.$$

Следовательно, при $a_1 = 0$ амплитудно-фазовая характеристика представляет собой дважды проходящую (сначала слева направо, а затем справа налево) полу-

ось $x \leq a_2$ оси абсцисс. При $a_1 \neq 0$ она является параболой

$$x = -\frac{a_2}{a_1^2} y^2 + a_2,$$

построенной на этой полуоси (см. рис. 1; указанное на этом рисунке направление движения по параболе соответствует случаю $a_1 > 0$; при $a_1 < 0$ оно будет противоположным).

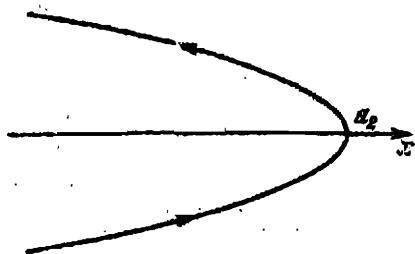


Рис. 1.

При $n = 3$ для многочлена $f(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ получается кривая

$$\begin{aligned} x &= -a_1 \omega^2 + a_3, \\ y &= -a_0 \omega^3 + a_2 \omega, \end{aligned} \quad -\infty < \omega < +\infty. \quad (4)$$

Это (при $a_1 \neq 0$) так называемая *полукубическая парабола*

$$y^2 = -\frac{a_0^2}{a_1^3} (x - a_3)(x - A)^2, \quad \text{где } A = a_3 - \frac{a_1 a_2}{a_0}$$

(или, — точнее, — одна ее ветвь). Вид этой кривой зависит от знаков коэффициентов a_1, a_2 . Его различные возможности изображены на рис. 2—4. На этих рисунках — как и на рис. 1 — указана только ось абсцисс $y = 0$, а положение оси ординат $x = 0$ может быть любым (в зависимости от числа $\frac{a_0^2}{a_1^3} a_3 A^2$).

В частности, мы видим, что характеристика тогда и только тогда проходит через точку $O(0, 0)$, когда либо $a_3 = 0$, либо $A = 0$ (при $a_2 > 0$), т. е. $a_3 a_2 = a_1 a_2$. $\square$

Пусть $a_3 \neq 0$ и $a_3 a_2 \neq a_1 a_2$ при $a_2 > 0$.

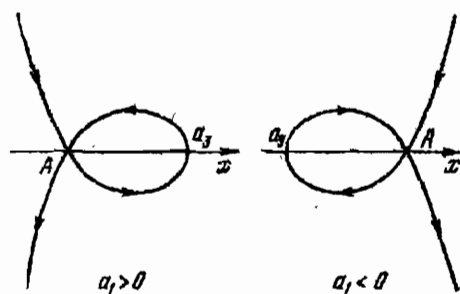


Рис. 2. Случай $a_2 > 0$.

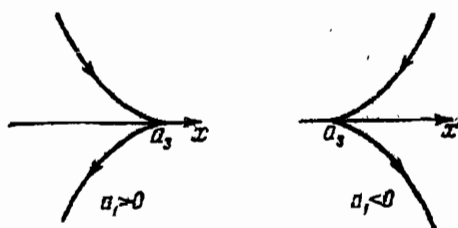


Рис. 3. Случай $a_2 = 0$.

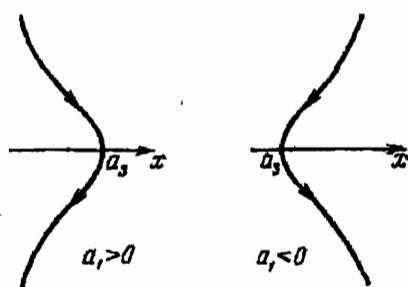


Рис. 4. Случай $a_2 < 0$.

Случай $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 a_2 < a_0 a_3$ (и, значит, $a_3 > 0$). Характеристика имеет вид, изображенный на левом рис. 2, причем точка O лежит слева от точки $x = A$. При $\omega \rightarrow -\infty$ координата y стремится к $+\infty$, а координата x к $-\infty$. Это означает, что амплитудно-фазовая характеристика «приходит из бесконечности» в верхнем левом квадранте. При $\omega \rightarrow +\infty$ обе координаты x и y стремятся к $-\infty$. Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика «уходит в бесконечность» в нижнем левом квадранте. Ось абсцисс $y = 0$ характеристика пересекает при $\omega = -\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$, 0 и $+\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$, а ось ординат $x = 0$ — при $\omega = -\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$ и $+\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$. Так как, по условию, $a_1 a_2 < a_0 a_3$, то

$$-\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} < -\sqrt{\frac{a_2}{a_0}} < 0 < \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} < \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}.$$

Это означает, что при монотонном изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ характеристика сначала пересекает ось ординат (в точке с ординатой $y = -a_0 \left(-\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}\right)^3 + a_2 \left(-\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}\right) = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \left(\frac{a_0 a_3}{a_1} - a_2\right) > 0$), затем трижды — ось абсцисс (последовательно в точках с абсциссами $-a_1 \left(\frac{a_2}{a_0}\right) + a_2 > 0$, $a_2 > 0$ и $-a_1 \left(\frac{a_2}{a_0}\right) + a_3$) и, наконец, опять ось ординат (в точке с ординатой $-\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \left(\frac{a_0 a_3}{a_1} - a_2\right) < 0$).

Все это наглядно видно на левом рис. 2, дополненном осью ординат слева от точки $x = A$.

Случай $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и $a_1 a_2 > a_0 a_3$ (т. е. $A < 0$). Кривая (4) изображается тем же левым рис. 2, но точка O лежит между точками $x = A$ и $x = a_3$. Характеристика сначала пересекает ось абсцисс, затем ось ординат, ось абсцисс, снова ось ординат и, наконец, ось абсцисс в прежней точке.

Случай $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$. Характеристика по-прежнему изображается левым рис. 2, но с осью ординат, проведенной правее точки $x = a_3$ и потому не пересекающей характеристику.

Случай $a_1 > 0, a_2 \leq 0, a_3 > 0$. Это левые рис. 3 и рис. 4 с осью ординат слева от точки $x = a_3$. Характеристика только один раз пересекает ось абсцисс (при $\omega = 0$) и дважды ось ординат.

Случай $a_1 > 0, a_2 \leq 0, a_3 < 0$. Теперь вся характеристика расположена слева от оси ординат и по-прежнему один раз пересекает ось абсцисс.

Случай $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0$. Это правый рис. 2 с осью ординат, расположенной слева от кривой. Характеристика начинается в правом верхнем квадранте, трижды пересекает ось абсцисс и уходит в бесконечность в правом нижнем квадранте. С осью ординат она не пересекается.

Случай $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0$. Это правый рис. 2 с осью ординат, расположенной справа от точки $x = a_3$ (но не проходящей через точку $x = A$) и потому дважды пересекающейся с характеристикой. В остальном поведение характеристики то же, что и в предыдущем случае.

Случай $a_1 < 0, a_2 \leq 0, a_3 > 0$. Это правые рис. 3 и рис. 4 с осью ординат слева от кривой. Характеристика не пересекает ось ординат и один раз пересекает ось абсцисс.

Случай $a_1 < 0, a_2 \leq 0, a_3 < 0$. Те же правые рис. 3 и рис. 4, но с осью ординат справа от точки $x = a_3$. Теперь характеристика дважды пересекает ось ординат и по-прежнему один раз ось абсцисс.

Вырожденный случай $a_1 = 0$. В этом случае координата x сохраняет постоянное значение a_3 . Это значит, что амплитудно-фазовая характеристика является вертикальной прямой $x = a_3$. Поскольку $y = -\omega(a_0\omega^2 - a_2)$, точка M характеристики, отвечающая значению параметра ω , при ω , очень больших по абсолютной величине и отрицательных, находится сверху прямой $x = a_3$; при увеличении ω она начинает спускаться вниз; при $\omega \rightarrow +\infty$ она уходит на бесконечность вниз. При этом, в зависимости от знака числа a_2 , точка M либо монотонно движется сверху вниз, либо совершает около точки пересечения с осью абсцисс одно колебание.

Напомним, что если точка M плоскости изображает комплексное число $z = x + iy$, т. е. имеет координаты (x, y) , и если $M \neq 0$, т. е. если $z \neq 0$, то угол φ , ко-

торый радиус-вектор OM образует с осью абсцисс (отсчитываемый в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки) обозначается через $\arg z$ и называется *аргументом* комплексного числа z (см. рис. 5). Аргумент определен только с точностью до чисел вида $2\pi n$, где n — целое, т. е. вместе с числом φ любое число вида $\varphi + 2\pi n$ также будет аргументом того же комплексного числа z . Для числа $z = 0$ аргумент не определяется. Для вычисления аргумента служат формулы

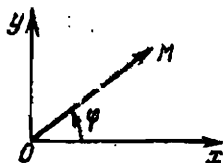


Рис. 5.

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.\end{aligned}\quad (5)$$

из которых, в частности, следует, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

Аргумент обладает следующими двумя основными свойствами:

Свойство 1. Аргумент произведения двух чисел равен сумме аргументов сомножителей

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Точный смысл этой формулы состоит в том, что, произвольно выбрав для аргументов чисел z_1 , z_2 и $z_3 = z_1 z_2$ значения φ_1 , φ_2 и φ_3 , мы будем иметь равенство

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi n,$$

где n — некоторое целое число. Доказательство этого равенства сводится к доказательству равенств $\cos \varphi_3 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ и $\sin \varphi_3 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$, которые непосредственно вытекают из формул (5), если сравнить формулы умножения комплексных чисел с формулами сложения для тригонометрических функций. $\square$

Свойство 2 относится к произвольной непрерывной функции $t \rightarrow z(t)$, заданной на отрезке $[a, b]$ (случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$ не исключаются) и принимающей различные от нуля комплексные значения. Положив $z(t) = x(t) + iy(t)$, мы можем трактовать эту функцию как непрерывную кривую на плоскости, не проходящую через точку O и имеющую параметрические уравнения

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Так как $z(t) \neq 0$, то определен аргумент $\arg z(t)$. Возникает вопрос: можно ли для любого t выбрать аргумент $\varphi(t)$ числа $z(t)$ так, чтобы получилась непрерывная функция? Наглядно очевидно, что такой выбор осуществить всегда можно, причем если для некоторого $t_0 \in [a, b]$ мы произвольно выберем аргумент φ_0 числа $z(t_0)$, то это вместе с условием непрерывности однозначно определит $\varphi(t)$ для любого t . Более того, хотя равенство $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, вообще говоря, не определяет аргумент φ числа $z = x + iy$ (поскольку вместе с φ ему удовлетворяет и $\varphi + \pi$), но — снова из-за непрерывности — функция $t \mapsto \varphi(t)$ равенством

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \quad (6)$$

(и начальным условием $\varphi(t_0) = \varphi_0$) характеризуется однозначно. Таким образом, имеет место следующее свойство:

Свойство 2. Пусть $z(t) = x(t) + iy(t)$ — непрерывная комплекснозначная функция, заданная на отрезке $[a, b]$, все значения которой отличны от нуля, и пусть φ_0 — аргумент числа $z(t_0)$, где $a \leq t_0 \leq b$. Тогда существует одна и только одна непрерывная функция $t \mapsto \varphi(t)$, $a \leq t \leq b$, удовлетворяющая соотношению (6) и такая, что $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

Как уже было сказано, это свойство наглядно очевидно. Его строгое доказательство требует неуместного здесь углубления в понятие непрерывной функции, и поэтому мы его опустим.

Применительно к амплитудно-фазовой характеристике $\omega \mapsto f(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega)$ свойство 2 дает нам следующую лемму:

Лемма 3. Если многочлены g и h не имеют общих вещественных корней, то существует единственная функция $\omega \mapsto \varphi(\omega)$, $-\infty < \omega < +\infty$, обладающая следующими тремя свойствами:

а) функция φ непрерывна для любого ω , $-\infty < \omega < +\infty$;

б) при $\omega = 0$ число $\varphi(0)$ характеризуется условиями

$$-\pi < \varphi(0) \leq \pi$$

и

$$\cos \varphi(0) = \frac{g(0)}{\sqrt{g(0)^2 + h(0)^2}}, \quad \sin \varphi(0) = \frac{h(0)}{\sqrt{g(0)^2 + h(0)^2}};$$

а) для любого ω , $-\infty < \omega < +\infty$, имеет место равенство

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{h(\omega)}{g(\omega)}. \quad \square$$

Заметим, что для многочлена f с вещественными коэффициентами число $\varphi(0)$ равно нулю при $a_n > 0$ и π при $a_n < 0$. $\square$

Определение 2. Функция $\varphi: \omega \mapsto \varphi(\omega)$, удовлетворяющая условиям леммы 3, называется *фазовой функцией* многочлена f , а ее график — *фазовой характеристикой* этого многочлена.

Фазовая функция описывает, как вращается радиус-вектор точки амплитудно-фазовой характеристики при изменении ω .

Если n нечетно, то согласно лемме 1

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{\text{многочлен степени } n}{\text{многочлен степени } \leq n-1}.$$

Поэтому

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \infty.$$

Аналогично, если n четно, то

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{\text{многочлен степени } \leq n-1}{\text{многочлен степени } n},$$

и поэтому

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \varphi(\omega) = 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает следующая лемма:

Лемма 4. Для фазовой функции φ существуют оба предела

$$\varphi(-\infty) = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \varphi(\omega), \quad \varphi(+\infty) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega).$$

При этом, если n нечетно, то

$$\varphi(-\infty) = \frac{\pi}{2} + r\pi, \quad \varphi(+\infty) = \frac{\pi}{2} + q\pi,$$

а если n четно, то

$$\varphi(-\infty) = r\pi, \quad \varphi(+\infty) = q\pi,$$

где r и q — некоторые целые числа. $\square$

Эта лемма означает, что фазовая характеристика имеет две горизонтальные асимптоты, расстояние между которыми равно $(q - p)\pi$. Таким образом, хотя обе бесконечные ветви амплитудно-фазовой характеристики (при $\omega \rightarrow -\infty$ и при $\omega \rightarrow +\infty$) и не приближаются асимптотически к осям координат (обе координаты x и y неограниченно увеличиваются по абсолютной величине), но направление радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ стремится к направлению оси ординат при n нечетном и к направлению оси абсцисс при n четном. Суть дела здесь в том, что, скажем, при n нечетном, координата y возрастает (по абсолютной величине) значительно быстрее координаты x .

Из леммы 4 вытекает, что при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ делает целое число полуоборотов, равное $q - p$. Это число является очень важной характеристикой многочлена f . Мы будем обозначать его символом Δ_f . Таким образом,

$$\Delta_f = \frac{1}{\pi} (\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)).$$

Проделанное выше исследование амплитудно-фазовых характеристик многочленов степени ≤ 3 с вещественными коэффициентами позволяет сразу же представить себе ход их фазовых характеристик.

В зависимости от знаков коэффициентов для многочлена $a_0z + a_1$ возможны два типа фазовых характеристик (см. рис. 6), а для многочлена $a_0z^2 + a_1z + a_2$ — четыре типа (см. рис. 7) и еще один вырожденный тип, получающийся при $a_1 = 0$ и $a_2 < 0$; в этом случае характеристикой является горизонтальная прямая $\varphi = \pi$.

Для многочлена

$$f(z) = a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$$

следует рассмотреть десять случаев.

С л у ч а й $a_1 = 0$. Фазовая характеристика имеет вид, изображенный на рис. 8. Она монотонна, если $a_2 < 0$, и имеет два «горбика», если $a_2 > 0$. При $a_2 < 0$ фазовая функция меняется от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, а при $a_2 > 0$ — от $+\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$. Таким образом, здесь

$p = 0$ в обоих случаях, а $q = 1$ или -1 . Следовательно, $\Delta_f = 1$ или -1 .

Случай $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ и $a_1 a_2 < a_0 a_3$.

При изменении ω от нуля до $+\infty$ радиус-вектор $\vec{OM}$ сначала поднимается вверх, затем начинает опускаться, проходит горизонтальное положение, опускается до вертикали, проходит вертикаль и несколько отклонившись вбок асимптотически возвращается к вертикали.

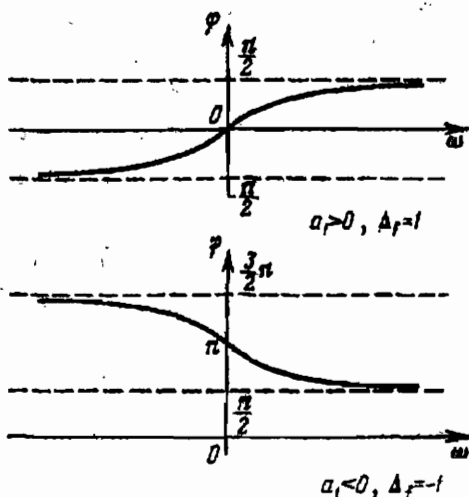


Рис. 6.

Это означает, что фазовая характеристика имеет вид, изображенный на рис. 9. Здесь $p = 0$, $q = -1$ и потому $\Delta_f = -1$.

Случай $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ и $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

При изменении ω от 0 до $+\infty$ угол φ монотонно возрастает от 0 до $\frac{3\pi}{2}$. Следовательно, фазовая характеристика имеет вид, изображенный на рис. 10. Здесь

$p = -2$, $q = 1$ и $\Delta_f = 3$.

Случай $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$. См. рис. 11. Здесь $p = 0$, $q = 1$ и $\Delta_f = 1$. Заметим, что фазовая характеристика имеет тот же вид, что и в случае $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$.

Случай $a_1 > 0$, $a_2 \leq 0$, $a_3 > 0$. См. рис. 12. Здесь $p = 0$, $q = -1$ и $\Delta_f = -1$.

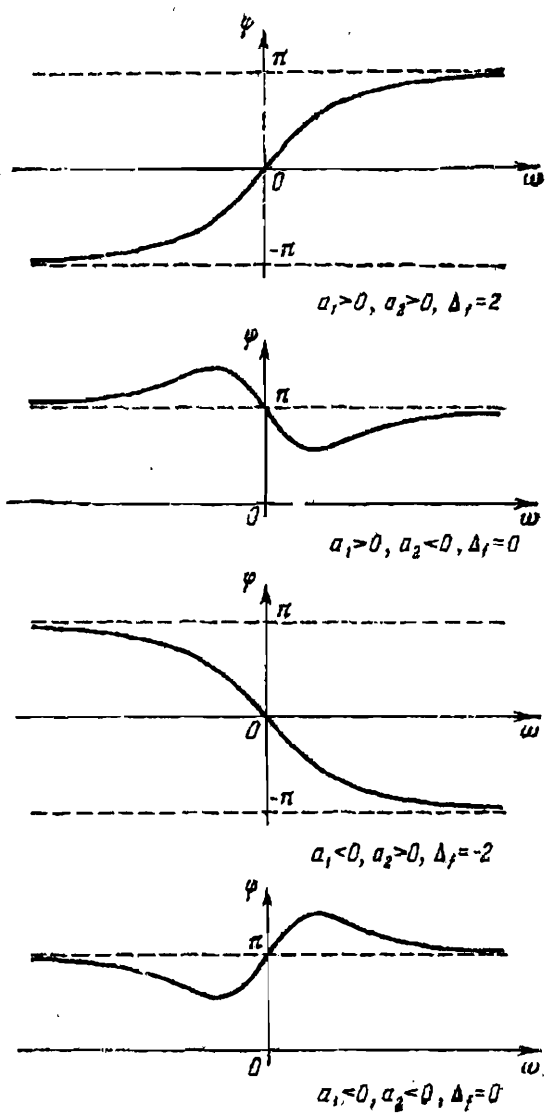


Рис. 7.

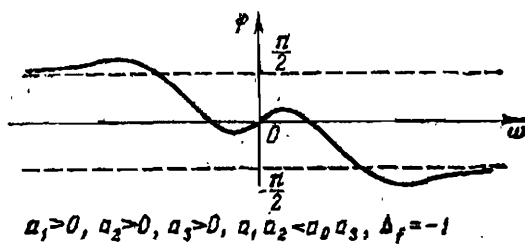


Рис. 9.

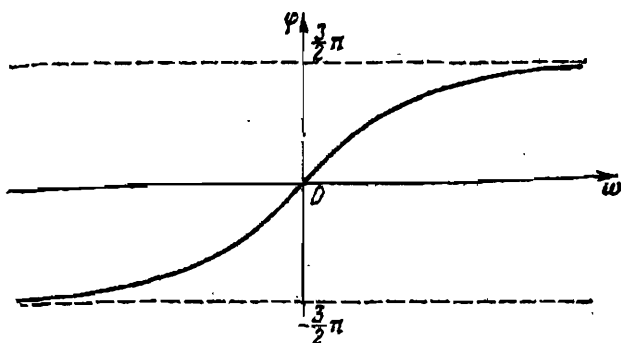


Рис. 10.

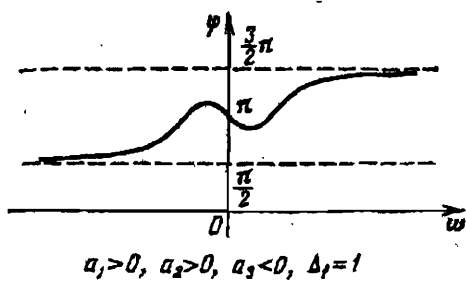


Рис. 11.

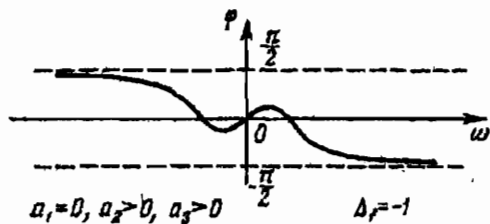
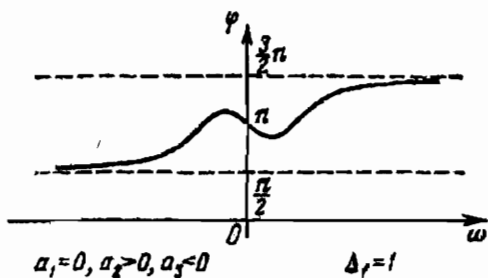
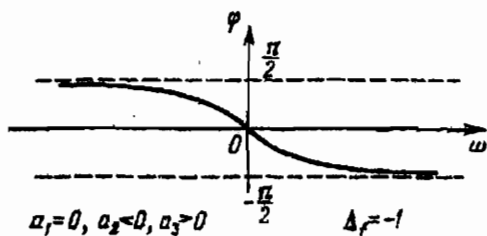
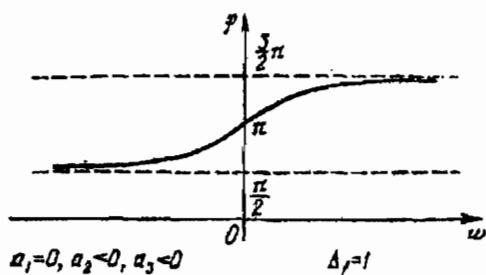
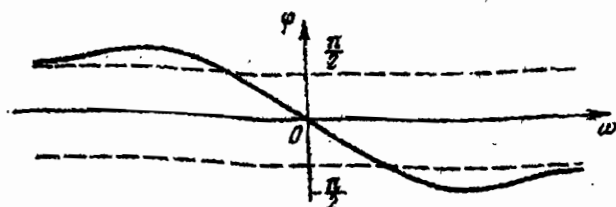


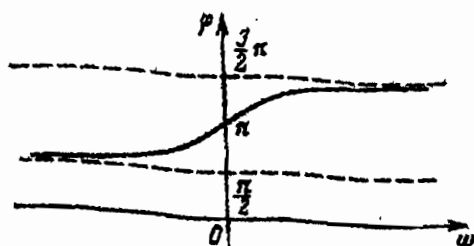
Рис. 8.

Случай $a_1 > 0, a_2 \leq 0, a_3 < 0$. См. рис. 13. Здесь $p = 0, q = 1$ и $\Delta_f = 1$. Фазовая характеристика имеет вид такой же, как и в случае $a_1 = 0, a_2 < 0, a_3 < 0$.



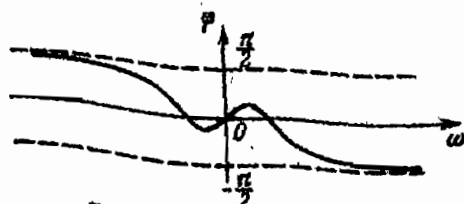
$$a_1 > 0, a_2 \leq 0, a_3 < 0, \Delta_f = 1$$

Рис. 12.



$$a_1 > 0, a_2 \leq 0, a_3 < 0, \Delta_f = 1$$

Рис. 13.



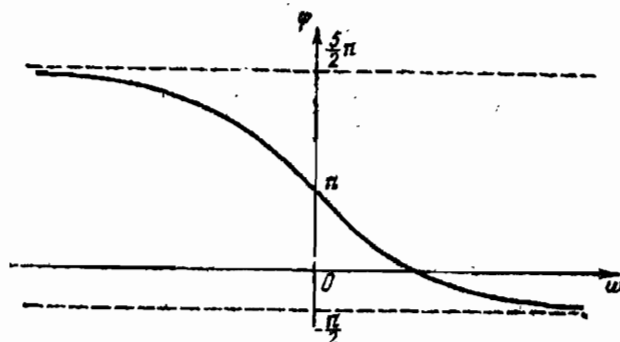
$$a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \Delta_f = -1$$

Рис. 14.

Случай $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0$. См. рис. 14. Здесь $p = 0, q = -1$ и $\Delta_f = -1$. Фазовая характеристика та же, что и в случае $a_1 = 0, a_2 > 0, a_3 > 0$.

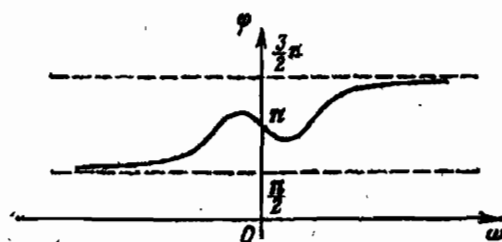
Случай $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0$ и $a_1 a_2 \geq a_0 a_3$. См. рис. 15. Здесь $p = 2, q = -1$ и $\Delta_f = -3$.

Случай $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0$ и $a_1 a_2 < a_0 a_3$. См. рис. 16. Здесь $p = 0, q = 1$ и $\Delta_f = 1$. Фазовая характеристика опять совпадает с фазовой характеристикой в случае $a_1 = 0, a_2 > 0, a_3 < 0$.



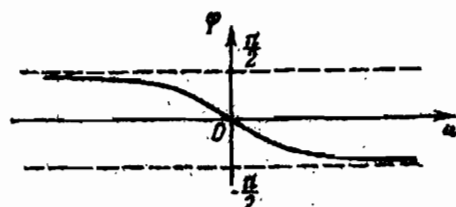
$$a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0, a_1 a_2 > a_0 a_3, \Delta_f = -3$$

Рис. 15.



$$a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0, a_1 a_2 < a_0 a_3, \Delta_f = 1$$

Рис. 16.



$$a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 > 0, \Delta_f = -1$$

Рис. 17.

Случай $a_1 < 0, a_2 \leq 0, a_3 > 0$. См. рис. 17. Здесь $p = 0, q = -1$ и $\Delta_f = -1$. Фазовая характеристика та же, что и в случае $a_1 = 0, a_2 < 0, a_3 > 0$.

Случай $a_1 < 0$, $a_2 \leq 0$, $a_3 < 0$. См. рис. 18. Здесь $\rho = 0$, $q = 1$ и $\Delta_1 = 1$.

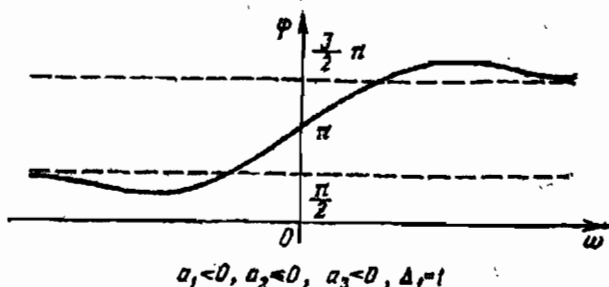


Рис. 18.

Это исследование фазовой функции многочлена третьей степени можно подытожить в виде следующего предложения:

Предложение 1. Для многочлена

$$f = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$$

с вещественными коэффициентами справедливы следующие импликации:

$$\Delta_1 = 3 \Leftrightarrow a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0 \text{ и } a_1 a_2 > a_0 a_3;$$

$\Delta_1 = 1 \Leftrightarrow a_3 < 0$, причем, если $a_1 < 0$ и $a_2 > 0$, то $a_1 a_2 < a_0 a_3$;

$\Delta_1 = -1 \Leftrightarrow a_3 > 0$, причем, если $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$, то $a_1 a_2 < a_0 a_3$;

$\Delta_1 = -3 \Leftrightarrow a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0$ и $a_1 a_2 > a_0 a_3$. $\square$

Здесь предполагается, что многочлен f не имеет мнимых корней, т. е. что $a_3 \neq 0$ и $a_1 a_2 \neq a_0 a_3$.

Мы видим, что вычисление фазовой функции является, если не сложным, то, во всяком случае, довольно утомительным занятием. Его существенно упрощает следующая общая лемма:

Лемма 5. Пусть $f = f_1 f_2$, и пусть φ , φ_1 и φ_2 — фазовые функции многочленов f , f_1 и f_2 соответственно. Тогда

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + 2\pi n$$

для любого ω , $-\infty < \omega < +\infty$, где $n = 0, \pm 1$ не зависит от ω .

Таким образом, с точностью до слагаемого вида $2\pi n$ фазовая функция произведения двух многочленов равна сумме фазовых функций сомножителей.

Доказательство. Согласно свойству 1 аргумента

$$\arg f(i\omega) = \arg f_1(i\omega) + \arg f_2(i\omega)$$

и, значит,

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + 2\pi n,$$

где n — целое число, непрерывно зависящее от ω и, следовательно, постоянное. В частности,

$$\varphi(0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0) + 2\pi n.$$

Но, по условию (см. условие б) в лемме 3),

$$-\pi < \varphi(0) \leq \pi, \quad -\pi < \varphi_1(0) \leq \pi, \quad -\pi < \varphi_2(0) \leq \pi,$$

и потому

$$-3\pi < \varphi(0) - \varphi_1(0) - \varphi_2(0) \leq 3\pi,$$

т. е. $-3\pi < 2\pi n \leq 3\pi$, что возможно только при $n = 0, \pm 1$. $\square$

Следствие. Для любых двух многочленов f_1 и f_2 имеет место равенство

$$\Delta_{f_1 f_2} = \Delta_{f_1} + \Delta_{f_2}. \quad \square$$

Выше мы исследовали многочлен

$$f(z) = a_0 z + a_1, \quad a_0 > 0,$$

первой степени при a_1 вещественном. Ничуть не труднее его исследование и при a_1 произвольном комплексном. Пусть

$$a_1 = \alpha + i\beta.$$

Тогда

$$g(\omega) = \alpha, \quad h(\omega) = a_0 \omega + \beta,$$

и потому амплитудно-фазовая характеристика многочлена f представляет собой прямую $x = \alpha$, причем, когда ω меняется от $-\infty$ до $+\infty$, точка $M(g(\omega), h(\omega))$ этой характеристики равномерно движется снизу вверх. Поэтому при $\alpha < 0$ угол φ , образованный

радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью абсцисс, убывает от $\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а при $\alpha > 0$ — возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, фазовая функция многочлена $f(z) = a_0 z + a_1$ при $\alpha < 0$ монотонно убывает, а при $\alpha > 0$ монотонно возрастает. При этом в первом случае $\Delta_f = -1$, а во втором $\Delta_f = 1$; ср. с рис. 6.

Предложение 2. Фазовая функция устойчивого многочлена монотонно возрастает.

Доказательство. Мы только что видели, что для многочленов первой степени это утверждение верно. Поскольку сумма монотонно возрастающих функций является, очевидно, монотонно возрастающей функцией, отсюда — в силу леммы 5 — следует, что предложение 2 справедливо для любого многочлена, являющегося произведением устойчивых многочленов первой степени. Для завершения доказательства остается заметить, что многочлен тогда и только тогда устойчив, когда он является произведением устойчивых многочленов первой степени. $\square$

Аналогичным образом доказывается и следующая основная теорема этого пункта:

Теорема 1. Если многочлен f без мнимых корней имеет k корней с отрицательной вещественной частью и l корней с положительной вещественной частью (каждый корень считается столько раз, какова его кратность, так что $k + l = n$), то

$$\Delta_f = k - l$$

и, следовательно, $\Delta_f = 2k - n$ и $\Delta_f = n - 2l$.

Доказательство. Обозначим число $k - l$ символом Δ'_f :

$$\Delta'_f = k - l.$$

Согласно доказанному выше, если f — многочлен первой степени, то

$$\Delta'_f = \Delta_f.$$

Но ясно, что

$$\Delta'_{f_1 f_2} = \Delta'_f + \Delta'_{f_2}$$

для любых многочленов f_1 и f_2 без мнимых корней. Поэтому $\Delta'_f = \Delta_f$ для любого многочлена f без мнимых

корней, являющегося произведением многочленов первой степени. Для завершения доказательства остается вспомнить, что последним свойством обладает каждый многочлен f (см. п. 1). $\square$

Непосредственным следствием теоремы 1 является следующий

Амплитудно-фазовый критерий устойчивости. *Многочлен f степени n без мнимых корней тогда и только тогда устойчив, когда*

$$\Delta_1 = n. \quad \square$$

З а м е ч а н и е 1. Мы видим, что всегда

$$-n \leq \Delta_1 \leq n,$$

причем числа Δ_1 и n имеют одну и ту же четность.

Крайний случай $\Delta_1 = n$ характеризует устойчивые многочлены. В другом крайнем случае, $\Delta_1 = -n$, многочлен f уместно назвать *вполне неустойчивым*. Такие многочлены характеризуется тем, что все их корни имеют положительные вещественные части (лежат справа от мнимой оси).

Для вполне неустойчивого многочлена фазовая функция, очевидно, монотонно убывает.

Произведенное выше исследование фазовой функции многочлена третьей степени (см. предложение 1) позволяет теперь без труда найти необходимые и достаточные условия устойчивости произвольного многочлена третьей степени с вещественными коэффициентами.

К р и т е р и й Вышнеградского. *Многочлен*

$$f = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3, \quad a_0 > 0,$$

с вещественными коэффициентами тогда и только тогда устойчив, когда все его коэффициенты положительны:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0,$$

и имеет место неравенство

$$a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Доказательство. Если многочлен f устойчив, то он не имеет чисто мнимых корней, и потому к нему

применим амплитудно-фазовый критерий устойчивости. Следовательно, $\Delta_1 = 3$. Но согласно предложению 1 это равенство имеет место только в единственном случае, когда все коэффициенты положительны и $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

Обратно, если все коэффициенты положительны и $a_1 a_2 > a_0 a_3$, то, во-первых, многочлен f не имеет чисто мнимых корней, и поэтому к нему применим амплитудно-фазовый критерий устойчивости. Во-вторых, согласно предложению 1 имеет место равенство $\Delta_1 = 3$. Следовательно, многочлен f устойчив. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Если $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и $a_1 a_2 > a_0 a_3$, то автоматически $a_3 > 0$. Поэтому условие $a_2 > 0$, строго говоря, излишнее.

З а м е ч а н и е 2. Сам Вышнеградский формулировал критерий лишь применительно к многочленам вида

$$z^3 + \sigma z^2 + \tau z + 1, \text{ где } \sigma > 0, \tau > 0. \quad (7)$$

Поскольку замена $z' = az$, где $a > 0$, любой многочлен (1) с положительными коэффициентами переводит в многочлен, пропорциональный многочлену вида

(7) (достаточно положить $a = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}$). рассмотрение только многочленов (7) общности не ограничивает.

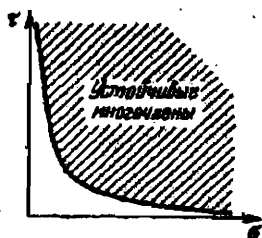


Рис. 19. Диаграмма Вышнеградского.

С другой стороны, ограничение только такими многочленами позволило Вышнеградскому дать красивую геометрическую интерпретацию своего критерия.

Для многочлена (7) условие устойчивости имеет вид $\sigma\tau > 1$. На плоскости с координатами σ , τ это неравенство (вместе с неравенствами $\sigma > 0$, $\tau > 0$) выделяет область, лежащую сверху от правой ветви гиперболы $\sigma\tau = 1$. Таким образом, если мы условимся изображать многочлен (7) точкой (σ, τ) плоскости, то устойчивые многочлены будут изображаться точками заштрихованной на рис. 19 области. Рисунок 19 называется иногда диаграммой Вышнеградского.

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия устойчивости произвольных многочленов второй и третьей степени

с комплексными коэффициентами. Условия должны иметь вид неравенств на вещественные и мнимые части коэффициентов.

Задача 2. Найдите условия устойчивости многочленов четвертой степени с вещественными коэффициентами.

Задача 3. Найдите необходимые и достаточные условия (в виде неравенств на коэффициенты) того, что все корни многочлена с вещественными коэффициентами степени не выше третьей лежат в единичном круге, т.е. удовлетворяют неравенству $|z| \leq 1$.

2. Теорема Эрмита — Билера

Пусть f — устойчивый многочлен степени n . Тогда, как было доказано в предыдущем пункте, при ω , монотонно возрастающем от $-\infty$ до $+\infty$, радиус-вектор $\vec{OM}$ точки амплитудно-фазовой характеристики монотонно поворачивается в положительном направлении (против часовой стрелки).

Если коэффициенты многочлена вещественны, то при $\omega \rightarrow -\infty$ и при $\omega \rightarrow +\infty$ координаты $x = g(\omega)$ и $y = h(\omega)$ точки амплитудно-фазовой характеристики имеют, как легко видеть, следующие знаки в зависимости от остатка при делении числа n на 4:

остаток	x	y
0	+	+
1	+	-
2	-	-
3	-	+

при $\omega \rightarrow -\infty$.

остаток	x	y
0	+	-
1	+	+
2	-	+
3	-	-

при $\omega \rightarrow +\infty$.

Другими словами, свое движение точка амплитудно-фазовой характеристики при $n = 2m + 1$ начинает либо в четвертом (правом нижнем) квадранте, если m четно, либо во втором (левом верхнем) квадранте, если m нечетно, а при $n = 2m$ либо в первом (правом

верхнем) квадранте, если m четно, либо в третьем (левом нижнем) квадранте, если m нечетно, и кончает при $n = 2m + 1$ и m четном в первом квадранте, при m нечетном в третьем квадранте, при $n = 2m$ и m четном в четвертом квадранте, а при m нечетном во втором квадранте. Кроме того, при $\omega \rightarrow \pm\infty$ направление радиус-вектора $\vec{OM}$ стремится при n нечетном к направлению оси ординат, а при n четном к направлению оси абсцисс. Примерный вид амплитудно-фазовой характеристики во всех четырех случаях изображен на рис. 20.

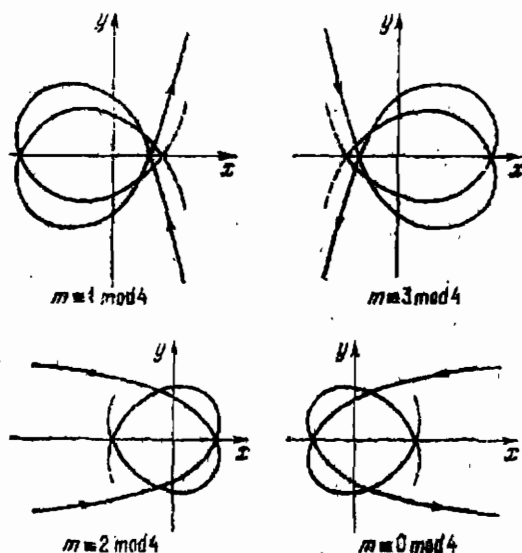


Рис. 20.

Что же касается фазовой характеристики, то во всех четырех случаях она имеет тип графика арктангенса, расположенного в горизонтальной полосе ширины π . Нижняя сторона этой полосы имеет уравнение $\varphi = -n \frac{\pi}{2}$, а верхняя — уравнение $\varphi = n \frac{\pi}{2}$; см. рис. 21.

При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ амплитудно-фазовая характеристика последовательно пересекает оси координат. При n нечетном она сначала пересекает ось абсцисс, потом ось ординат, снова ось абсцисс и т. д. Последний раз она пересекает ось абсцисс. При

n четном, наоборот, амплитудно-фазовая характеристика сначала пересекает ось ординат, потом ось абсцисс, снова ось ординат и т. д., пока, наконец, последний раз не пересечет ось ординат. В обоих случаях всех точек пересечения будет равно $2n - 1$. Пусть

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{2n-1} \quad (1)$$

— соответствующие значения параметра ω , т. е. значения, при которых амплитудно-фазовая характеристика пересекает оси координат.

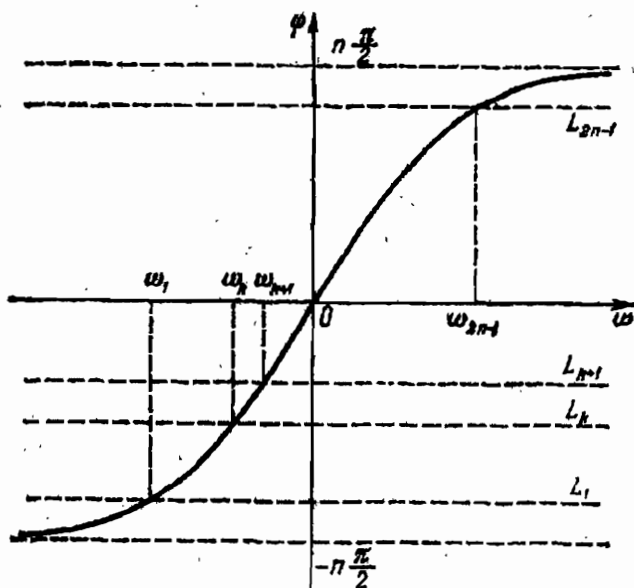


Рис. 21.

Если при $\omega = \omega_1$ амплитудно-фазовая характеристика пересекает ось абсцисс, то $h(\omega_1) = 0$, и, наоборот, если $h(\omega_1) = 0$, то при $\omega = \omega_1$ амплитудно-фазовая характеристика пересекает ось абсцисс. Аналогично значения ω_i , для которых $g(\omega_i) = 0$, — это в точности значения параметра ω , при которых амплитудно-фазовая характеристика пересекает ось ординат. Следовательно, числа (1) представляют собой корни многочленов g и h , причем никакие два соседних числа не являются корнями одного и того же многочлена. Точнее, если n нечетно, то $\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1}$ — это корни

многочлена h , а $\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n-2}$ — корни многочлена g , а если n четно, то, наоборот, $\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1}$ — это корни многочлена g , а $\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n-2}$ — корни многочлена h .

Все это еще нагляднее можно увидеть на фазовой характеристике. Рассмотрим на плоскости с координатами (ω, φ) горизонтальную прямую L_k с уравнением

$$\varphi = (k - n) \frac{\pi}{2}, \text{ где } k = 1, \dots, 2n - 1. \text{ Пусть } \omega_k —$$

значение параметра ω , при котором фазовая характеристика пересекает прямую L_k . Ясно, что если $k - n$ четно, то $h(\omega_k) = 0$, а если $k - n$ нечетно, то $g(\omega_k) = 0$. Следовательно, ω_k — это те же числа (1).

Заметим, что для каждого из многочленов g или h в ряду (1) находится ровно столько его корней, какова его степень. Поэтому корни из (1) исчерпывают все корни многочленов g и h . В частности, мы видим, что все корни этих многочленов вещественны и просты.

Найденные свойства многочленов g и h заслуживают специального определения.

Определение 1. Пусть g и h — многочлены с вещественными коэффициентами. Говорят, что корни этих многочленов *перемежаются*, если

а) оба многочлена имеют только вещественные и простые корни;

б) между любыми двумя соседними корнями одного многочлена содержится один и только один корень другого многочлена.

В частности, многочлены g и h не имеют общих корней (взаимно просты). Их степени либо равны, либо отличаются точно на единицу.

Полученные выше результаты мы можем теперь суммировать в следующем предложении:

Предложение 1. Если многочлен f устойчив, то корни многочленов g и h перемежаются. $\square$

В изложенном доказательстве этого предложения мы фактически пользовались только тем, что фазовая функция монотонна и амплитудно-фазовая характеристика делает n полных полуоборотов. Поскольку эти свойства устойчивого многочлена не зависят от предположения о вещественности коэффициентов, мы видим, что предложение 1 справедливо для многочленов с произвольными комплексными коэффициентами. $\square$

Является ли указываемое предложением 1 необходимое условие устойчивости достаточным? Легко видеть, что нет. Действительно, ясно, что все рассуждение полностью сохранится и для вполне неустойчивых многочленов, поскольку для таких многочленов фазовая функция также монотонна и амплитудно-фазовая характеристика также совершает π полуоборотов (но не против, а по часовой стрелке). Поэтому для вполне неустойчивого многочлена f корни многочленов g и h также перемещаются. Однако оказывается, что этим исчерпываются все возможности:

Предложение 2. Если корни многочленов g и h перемещаются, то многочлен f либо устойчив, либо вполне неустойчив.

Мы предположим доказательству этого предложения две леммы.

Заметим, прежде всего, что поскольку по условию многочлены g и h не имеют общих вещественных корней, то для многочлена f определена его фазовая характеристика.

Лемма 1. Фазовая функция φ произвольного многочлена f (без чисто мнимых корней) в любой точке ω имеет производную. Эта производная выражается формулой

$$\varphi'(\omega) = \frac{g(\omega)h'(\omega) - g'(\omega)h(\omega)}{g^2(\omega) + h^2(\omega)}. \quad (2)$$

Доказательство. По определению на каждом интервале оси $O\omega$, не содержащем корней многочлена g , имеет место равенство

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{h(\omega)}{g(\omega)} + N\pi,$$

где N — некоторое целое число, зависящее только от этого интервала (на рассматриваемом интервале число N непрерывно зависит от ω и, следовательно, будучи целым, одно и то же для всех ω). Поэтому по правилам дифференцирования

$$\varphi'(\omega) = \left(\operatorname{arctg} \frac{h(\omega)}{g(\omega)} \right)' = \frac{g(\omega)h'(\omega) - g'(\omega)h(\omega)}{g^2(\omega) + h^2(\omega)}.$$

Тем самым формула (2) доказана для всех ω , не являющихся корнями многочлена g . Но из дифферен-

циального исчисления известна следующая общая теорема:

Если

а) функция F определена и непрерывна для всех значений аргумента;

б) функция F дифференцируема во всех точках, кроме, быть может, некоторого их конечного множества K ;

в) существует такая всюду непрерывная функция G , что $F' = G$ во всех точках, не принадлежащих множеству K ,

то F' существует и в точках из K (т. е. всюду) и $F' = G$ всюду.

Поэтому формула (2) справедлива для всех ω . $\square$

Впрочем можно обойтись и без указанной общей теоремы. Именно, можно воспользоваться тем, что на каждом интервале, не содержащем корней многочлена h , имеет место формула

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{g(\omega)}{h(\omega)} + N\pi.$$

Дифференцируя эту формулу, мы докажем (2) для всех ω , не являющихся корнями многочлена h , и, в частности, для всех корней многочлена g .

Лемма 2. Если корни многочленов g и h перемежаются, то фазовая характеристика многочлена f не касается ни одной из прямых L_k , $k = 1, \dots, 2n - 1$.

Доказательство. Значение параметра ω , при котором фазовая характеристика касается некоторой прямой L_k , это, во-первых, корень либо многочлена g (если $k - n$ нечетно), либо многочлена h (если $k - n$ четно), а, во-вторых, корень производной φ' . Таким образом, если лемма 2 неверна, то существует такое ω_0 , что $\varphi'(\omega_0) = 0$ и либо $g(\omega_0) = 0$, либо $h(\omega_0) = 0$. Но если $\varphi'(\omega_0) = 0$, то согласно формуле (2)

$$g(\omega_0)h'(\omega_0) - g'(\omega_0)h(\omega_0) = 0.$$

Поэтому, если $g(\omega_0) = 0$, то $g'(\omega_0)h(\omega_0) = 0$ и, значит, $g'(\omega_0) = 0$ (ибо $h(\omega_0) \neq 0$, поскольку общих корней многочлены g и h , по условию, не имеют). Аналогично, если $h(\omega_0) = 0$, то $h'(\omega_0) = 0$. Но известно, что если в корне многочлена его производная обращается в нуль, то это — кратный корень. Таким образом, ω_0 является кратным корнем либо многочлена g , либо

многочлена h , что невозможно, так как, по условию, все корни многочленов g и h простые. Полученное противоречие доказывает лемму 2. $\square$

Заметим, что перемежаемость корней многочленов g и h в лемме 2 на самом деле не по существу. Достаточно, чтобы эти многочлены не имели вещественных кратных корней (и, конечно, чтобы у них не было общих корней).

Для амплитудно-фазовой характеристики лемма 2 означает, что эта характеристика пересекает оси координат, не касаясь их, т. е. переходя с одной стороны на другую.

Теперь мы уже легко можем доказать предложение 2.

Доказательство предложения 2. Пусть корни многочленов g и h перемежаются. Это означает, что точка $z = f(i\omega)$, двигаясь по характеристике (при ω возрастающем), попеременно пересекает оси координат. Так как согласно лемме 2 касаться осей координат она не может, то, следовательно, характеристика пересекает оси координат только в одном направлении, либо по часовой стрелке, либо против. Пусть, для определенности, все пересечения происходят против часовой стрелки (в положительном направлении). Тогда, при движении от одного корня многочленов g и h к следующему, фазовая функция φ увеличится ровно на $\frac{\pi}{2}$. Поскольку число этих корней равно $2n - 1$, этим доказано, что при возрастании ω от $-\infty$ до $+\infty$ функция φ увеличивается по крайней мере на $(2n - 1)\frac{\pi}{2} = (n - 1)\pi$, т. е. что $\Delta_f \geq n - 1$. Но мы знаем, что Δ_f имеет ту же четность, что и n , и удовлетворяет неравенству $|\Delta_f| \leq n$. Следовательно, $\Delta_f = n$ и, значит, многочлен f устойчив.

Если амплитудно-фазовая характеристика пересекает оси координат по часовой стрелке, то по аналогичным соображениям $\Delta_f = -n$ и многочлен f вполне неустойчив. $\square$

Следствие. Если корни многочленов g и h перемежаются, то фазовая функция многочлена f либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает (амплитудно-фазовая характеристика «крутится» все время в одну сторону).

Доказательство. Достаточно заметить, что как для устойчивого, так и для неустойчивого многочленов фазовая функция монотонна. $\square$

Остается научиться отличать случай, когда многочлен устойчив, от случая, когда он вполне неустойчив. В принципе это просто: для устойчивого многочлена фазовая функция возрастает, а для вполне неустойчивого убывает. Как известно, функция возрастает, если ее производная положительна, и убывает, если ее производная отрицательна. Как показывает формула (2), производная фазовой функции имеет тот же знак, что и многочлен $gh' - g'h$. Поэтому многочлен f устойчив, если многочлен $gh' - g'h$ положителен (принимает только положительные значения), и вполне неустойчив, если этот многочлен отрицателен (принимает только отрицательные значения). Более того, ясно, что знак многочлена $gh' - g'h$ достаточно определить хотя бы в одной точке, например в точке $\omega = 0$. В случае, когда коэффициенты многочлена f вещественны, многочлен $gh' - g'h$ в точке $\omega = 0$ равен, очевидно, $a_{n-1}a_n$. Этим доказана следующая теорема:

Теорема 1 (теорема Эрмита — Билера). *Многочлен f тогда и только тогда устойчив, когда корни многочленов g и h перемежаются и хотя бы для одного ω_0*

$$g(\omega_0)h'(\omega_0) - g'(\omega_0)h(\omega_0) > 0. \quad (3)$$

Для многочлена f с вещественными коэффициентами это неравенство равносильно неравенству $a_{n-1}a_n > 0$. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Тот факт, что для многочленов с вещественными коэффициентами неравенство $a_n a_{n-1} > 0$ выделяет устойчивые многочлены, можно показать и элементарно, не пользуясь производными. Действительно, при ω , достаточно близких к нулю, фазовая функция выражается формулой

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{h(\omega)}{g(\omega)} = \arctg \frac{\omega(\dots + a_{n-1})}{\dots + a_n},$$

где многоточия означают многочлены, обращающиеся в нуль при $\omega = 0$. Поэтому при ω , очень близких к нулю, число $\varphi(\omega)$ имеет тот же знак, что и число

$\operatorname{arctg} \frac{\omega a_{n-1}}{a_n}$, а значит, что и число $\frac{\omega a_{n-1}}{a_n}$ (заметим, что $a_n \neq 0$, поскольку многочлен f либо устойчив, либо вполне неустойчив, и потому не имеет корней, равных нулю). С другой стороны, функция φ тогда и только тогда возрастает при $\omega = 0$, когда при малых ω число $\varphi(\omega)$ имеет тот же знак, что и число ω (отрицательно при $\omega < 0$ и положительно при $\omega > 0$). Следовательно, φ возрастает при $\omega = 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{a_{n-1}}{a_n} > 0$, т. е. когда $a_{n-1}a_n > 0$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть g^* — тот из многочленов g и h , который имеет степень n , а h^* — другой многочлен (имеющий степень $n-1$; см. § 1, лемма 1). Точка $z = f(i\omega)$ последний раз пересекает оси координат при наибольшем корне ω_{2n-1} многочлена g^* . При этом многочлен g^* меняет знак с $(-1)^{m-1}$ на $(-1)^m$, где $m = \left[\frac{n}{2} \right]$, а многочлен h^* сохраняет знак, равный знаку его старшего коэффициента b_1 . Поэтому при $g^* = g$ (т. е. при n четном) это пересечение тогда и только тогда происходит против часовой стрелки, когда $(-1)^{m-1}b_1 > 0$, а при $g^* = h$ (т. е. при n нечетном) тогда и только тогда, когда $(-1)^{m-1}b_1 < 0$. Поскольку для многочлена f с вещественными коэффициентами $b_1 = (-1)^{m-1}a_1$, если n четно, и $b_1 = (-1)^ma_1$, если n нечетно, отсюда следует, что для многочлена f с вещественными коэффициентами условие (3) равносильно неравенству $a_1 > 0$. $\square$

В случае, когда многочлен f имеет вещественные коэффициенты, многочлены g и h выражаются, как мы знаем (см. формулы (2) п. 1), через многочлены G и H вдвое меньших степеней:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= G(-\omega^2), \\ h(\omega) &= \omega H(-\omega^2). \end{aligned}$$

Очевидно, что

1) все корни многочленов g и h тогда и только тогда просты, когда корни многочленов G и H просты и отличны от нуля;

2) все корни многочленов g и h тогда и только тогда вещественны, когда корни многочленов G и H вещественны и неположительны;

3) между двумя любыми соседними корнями одного из многочленов g и h тогда и только тогда содержатся корни другого многочлена, когда этим же свойством обладают многочлены G и H .

Следовательно,

4) корни многочленов g и h тогда и только тогда перемежаются, когда корни многочленов G и H перемежаются и отрицательны.

Поэтому справедлива следующая теорема:

Теорема 2 (теорема Эрмита — Билера для многочленов с вещественными коэффициентами). Многочлен f с вещественными коэффициентами тогда и только тогда устойчив, когда $a_{n-1}a_n > 0$ (или $a_1 > 0$) и корни многочленов G и H перемежаются и отрицательны. $\square$

Заметим, что в обоих теоремах Эрмита — Билера нет нужды априори предполагать, что многочлен f не имеет мнимых корней.

3. Индекс рациональной функции

Для практического применения теоремы Эрмита — Билера желательно уметь отвечать на вопрос, перемежаются ли корни двух данных многочленов, не вычисляя этих корней. Мы сейчас разовьем маленькую теорию, позволяющую отвечать на многие вопросы такого рода.

Рациональной функцией называется функция $S = \frac{G}{F}$, являющаяся отношением двух многочленов.

Таким образом, для любого x , не являющегося корнем многочлена F , значение $S(x)$ функции S выражается формулой

$$S(x) = \frac{G(x)}{F(x)}, \quad F(x) \neq 0. \quad (1)$$

Условно считается, что при умножении G и F на произвольный многочлен функция S не меняется. Поэтому всегда можно считать, что многочлены G и F взаимно просты (не имеют общих корней). Запись рациональной функции в виде отношения взаимно простых многочленов называется **несократимой**. С точностью до пропорциональности многочлены G и F несократимой записи определены однозначно. Если запись $S = \frac{G}{F}$

несократима, то формула (1) задает функцию S во всей области ее определения.

Мы будем рассматривать только вещественные рациональные функции S , т. е. такие, что многочлены G и F имеют вещественные коэффициенты, и только для вещественных значений аргумента.

Определение 1. Точки, принадлежащие области определения рациональной функции S , называются ее *полюсами*. Это в точности корни многочлена F из несократимой записи функции S . *Кратностью* (или *порядком*) полюса называется его кратность как корня многочлена F .

Таким образом, если $S = \frac{G}{F}$ — несократимая запись рациональной функции S и если $F = (x - x_0)^{v_0} F_0$, где $F_0(x_0) \neq 0$, то x_0 — это полюс, а v_0 — его кратность.

Определение 2. Число

$$A_0 = \frac{G(x_0)}{F_0(x_0)}$$

называется *главным коэффициентом* функции S в полюсе x_0 . По определению оно отлично от нуля.

Поскольку

$$(x - x_0)^{v_0} S(x) = \frac{G(x)}{F_0(x)} \quad \text{при } x \neq x_0,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{v_0} S(x) = A_0.$$

Ясно, что если $m > v_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^m S(x) = 0,$$

а если $m < v_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^m S(x) = \infty.$$

Это означает, что справедлива следующая лемма:

Лемма 1. Точка x_0 тогда и только тогда является полюсом кратности v_0 рациональной функции S , когда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^m S(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } m < v_0, \\ \infty, & \text{если } m > v_0. \end{cases} \quad (2)$$

При этом число

$$A_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{\nu_0} S(x)$$

отлично от нуля и является главным коэффициентом функции S в полюсе x_0 . $\square$

Заметим, что предельные соотношения (2) имеют место не только для полюсов, но и для любых x_0 . При этом, если $G(x_0) \neq 0$ (и $F(x_0) \neq 0$), то $\nu_0 = 0$, а если x_0 — корень многочлена Q кратности μ_0 , то $\nu_0 = -\mu_0$. На этом основании точки, в которых рациональная функция определена и отлична от нуля, называются иногда ее *полюсами кратности 0*, а точки в которых она имеет нуль кратности μ_0 — ее *полюсами кратности $-\mu_0$* .

По определению, если x_0 — полюс рациональной функции S , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \infty.$$

Чтобы точнее охарактеризовать поведение функции S в окрестности точки x_0 , рассмотрим ее график.

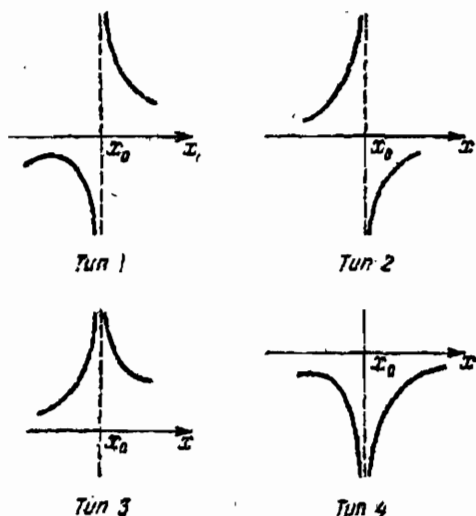


Рис. 22.

Ясно, что вблизи полюса x_0 график функции S может иметь один из четырех типов, изображенных на рис. 22.

Тип 1 характеризуется тем, что при x , близких к x_0 , но меньших чем x_0 , функция S отрицательна, а при

x , больших чем x_0 , положительна. Можно сказать, что в таком полюсе функция скачком переходит от $-\infty$ к $+\infty$.

Тип 2 характеризуется противоположным поведением: при $x < x_0$ функция положительна, а при $x > x_0$ отрицательна. В полюсе этого типа функция скачком переходит от $+\infty$ к $-\infty$.

В обоих случаях при переходе через полюс функция меняет знак.

Остальные два типа (тип 3 и тип 4) характеризуются тем, что при переходе через них функция знака не меняет: в случае полюса типа 3 она остается положительной, а в случае полюса типа 4 — отрицательной.

С помощью «односторонних» пределов

$$S(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} S(x), \quad S(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} S(x)$$

эту классификацию полюсов можно суммировать в следующей таблице:

тип	$S(x_0 - 0)$	$S(x_0 + 0)$
1	$-\infty$	$+\infty$
2	$+\infty$	$-\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$
4	$-\infty$	$-\infty$

Пусть ν_0 — кратность полюса x_0 , а A_0 — его главный коэффициент. Так как

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{\nu_0} S(x) = A_0,$$

то при x , близких к x_0 , число $(x - x_0)^{\nu_0} S(x)$ имеет тот же знак, что и число A_0 . Следовательно, справедливо следующее предложение:

Предложение 1. Полюс имеет

$$\left. \begin{array}{l} \text{тип 1} \\ \text{тип 2} \\ \text{тип 3} \\ \text{тип 4} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{тогда} \\ \text{и только тогда,} \\ \text{когда} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A_0 > 0 \text{ и } \nu_0 \text{ нечетно,} \\ A_0 < 0 \text{ и } \nu_0 \text{ нечетно,} \\ A_0 > 0 \text{ и } \nu_0 \text{ четно.} \\ A_0 < 0 \text{ и } \nu_0 \text{ четно.} \end{array} \right. \quad \square$$

Определение 3. Индексом рациональной функции S в полюсе x_0 называется число $\text{Ind}_{x_0} S$, определяемое формулой

$$\text{Ind}_{x_0} S = \begin{cases} +1, & \text{если } \nu_0 \text{ нечетно и } A_0 > 0; \\ -1, & \text{если } \nu_0 \text{ нечетно и } A_0 < 0; \\ 0, & \text{если } \nu_0 \text{ четно.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\text{Ind}_{x_0} S = +1 \quad \text{в полюсах типа 1,}$$

$$\text{Ind}_{x_0} S = -1 \quad \text{в полюсах типа 2,}$$

$$\text{Ind}_{x_0} S = 0 \quad \text{в полюсах типа 3 и 4.}$$

Индексом $\text{Ind}_a^b S$ рациональной функции на (открытом!) интервале $]a, b[$ (случаи $a = -\infty$ и $b = +\infty$ не исключаются) называется сумма индексов этой функции по всем полюсам x_0 , лежащим в этом интервале:

$$\text{Ind}_a^b S = \sum_{a < x_0 < b} \text{Ind}_{x_0} S \quad (3)$$

(если в интервале $]a, b[$ полюсов нет, то, конечно, $\text{Ind}_a^b S = 0$).

Для любого числа $A \neq 0$ положим

$$\text{sign } A = \begin{cases} +1, & \text{если } A > 0, \\ -1, & \text{если } A < 0 \end{cases}$$

($\text{sign } A$ читается «знак A »). Тогда формулу (3) можно переписать в следующем виде:

$$\text{Ind}_a^b S = \sum_{\substack{a < x_i < b \\ \nu_i \text{ нечет}}} \text{sign } A_i, \quad (4)$$

где суммирование распространено на все полюсы x_i нечетного порядка ν_i , лежащие в интервале $]a, b[$, а символ A_i обозначает главный коэффициент функции S в полюсе x_i .

Индекс $\text{Ind}_{-\infty}^{+\infty} S$ функции S на всей оси Ox обозначается символом $\text{Ind } S$ и называется просто индексом (без добавления слов «на всей оси»).

Ясно, что индекс функции $S = \frac{G}{F}$ удовлетворяет неравенствам

$$-n \leq \text{Ind}_a^b S \leq n, \quad (5)$$

где n — степень многочлена F .

Установим простейшие свойства индекса.

Свойство 1. Пусть $a < c < b$ (случаи $a = -\infty$ и $b = +\infty$ не исключаются). Если точка c не является полюсом рациональной функции S , то

$$\text{Ind}_a^b S = \text{Ind}_a^c S + \text{Ind}_c^b S.$$

Если же c — полюс, то

$$\text{Ind}_a^b S = \text{Ind}_a^c S + \text{Ind}_c^b S + \text{Ind}_c S.$$

Это свойство очевидно. $\square$

Свойство 2. Пусть S и T — рациональные функции и x_0 — полюс функции S кратности v_0 . Предположим, что точка x_0 либо не является полюсом функции T , либо представляет собой полюс этой функции кратности, меньшей чем v_0 . Тогда x_0 является полюсом функции $S + T$ кратности v_0 и

$$\text{Ind}_{x_0}(S + T) = \text{Ind}_{x_0} S. \quad (6)$$

Доказательство. По условию

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{v_0} T(x) = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{v_0} (S(x) + T(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{v_0} S(x) = A_0.$$

Следовательно, x_0 — полюс функции $S + T$ кратности v_0 с главным коэффициентом A_0 . Формула (6) теперь очевидна. $\square$

Свойство 3. Если на интервале $]a, b[$ рациональные функции S и T не имеют общих полюсов одной и той же кратности, то

$$\text{Ind}_a^b (S + T) = \text{Ind}_a^b S + \text{Ind}_a^b T.$$

В частности, если функция T не имеет на $]a, b[$ полюсов (например, является многочленом), то

$$\text{Ind}_a^b (S + T) = \text{Ind}_a^b S.$$

Это непосредственно вытекает из свойства 2. $\square$

Индекс произведения рациональных функций вычисляется в общем случае довольно сложно. Мы ограничимся лишь следующим очевидным частным случаем, вполне достаточным для наших целей:

Свойство 4. Если рациональная функция T не имеет на интервале $]a, b[$ ни корней, ни полюсов (и потому сохраняет постоянный знак), то для любой рациональной функции S

$$\text{Ind}_a^b(S, T) = \begin{cases} \text{Ind}_a^b S, & \text{если } T > 0 \text{ на }]a, b[; \\ -\text{Ind}_a^b S, & \text{если } T < 0 \text{ на }]a, b[. \end{cases} \quad \square$$

Для любых двух рациональных функций S и T сложная функция $S \circ T: x \mapsto S(T(x))$ также, очевидно, рациональна. Общая формула для ее индекса сложна. Мы вычислим этот индекс в специальном случае, когда $T(x) = -x^2$.

Свойство 5. Пусть рациональная функция T определена формулой

$$T(x) = S(-x^2),$$

где S — такая рациональная функция, что $S(0)$ определено и отлично от нуля. Тогда все (вещественные) полюсы функции T имеют вид $\pm \sqrt{-x_0}$, где x_0 — произвольный отрицательный полюс функции S . Кратность полюса $\pm \sqrt{-x_0}$ равна кратности полюса x_0 . Для индексов имеют место равенства

$$\text{Ind}_{-\sqrt{-x_0}} T = \text{Ind}_{x_0} S, \quad \text{Ind}_{+\sqrt{-x_0}} T = -\text{Ind}_{x_0} S.$$

Доказательство. Если $0 < x < \sqrt{-x_0}$, то $0 < x^2 < -x_0$, а если $\sqrt{-x_0} < x$, то $-x_0 < x^2$. Кроме того, если $x < \sqrt{-x_0}$, то $x^2 \rightarrow -x_0$. Поэтому при любом $x_0 < 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{-x_0} \\ x < \sqrt{-x_0}}} T(x) = \lim_{\substack{x^2 \rightarrow -x_0 \\ x^2 < -x_0}} S(-x^2) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} S(x) = S(x_0 + 0)$$

и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{-x_0} \\ x > \sqrt{-x_0}}} T(x) = \lim_{\substack{x^2 \rightarrow -x_0 \\ x^2 > -x_0}} S(-x^2) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} S(x) = S(x_0 - 0).$$

Если же $x < -\sqrt{-x_0}$, то $x^2 > -x_0$, и, если $-\sqrt{-x_0} < x < 0$, то $-x_0 > x^2 > 0$. Поэтому

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\sqrt{-x_0} \\ x < -\sqrt{-x_0}}} T(x) = \lim_{\substack{x^2 \rightarrow -x_0 \\ x^2 > -x_0}} S(-x^2) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} S(x) = S(x_0 - 0)$$

и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\sqrt{-x_0} \\ x > -\sqrt{-x_0}}} T(x) = \lim_{\substack{x^2 \rightarrow -x_0 \\ x^2 < -x_0}} S(-x^2) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} S(x) = S(x_0 + 0).$$

Это доказывает формулы для индексов. Остальные утверждения очевидны. $\square$

Для любой рациональной функции S функция $\frac{1}{S}$ также рациональна. Она называется *инверсной функцией*. Ее полюсами являются нули функции S , а нулями — полюсы.

Предложение 2. Пусть S — рациональная функция, a, b — такой интервал, что $S(a) \neq 0$, ∞ и $S(b) \neq 0$, ∞ . Тогда

$$\text{Ind}_a^b S + \text{Ind}_a^b \frac{1}{S} = \frac{\text{sign } S(b) - \text{sign } S(a)}{2}. \quad (7)$$

Доказательство. Формула (7) утверждает, что

$$\text{Ind}_a^b S + \text{Ind}_a^b \frac{1}{S} = \begin{cases} 1, & \text{если } S(b) > 0 \text{ и } S(a) < 0; \\ -1, & \text{если } S(b) < 0 \text{ и } S(a) > 0; \\ 0, & \text{если } S(b) \text{ и } S(a) \text{ имеют} \\ & \text{один и тот же знак.} \end{cases}$$

Для ее доказательства мы рассмотрим произвольный нуль x_0 функции S (полюс функции $\frac{1}{S}$). Вблизи этого нуля график функции S принадлежит к одному из четырех типов, изображенных на рис. 23. Типы 1 и 2 характеризуются тем, что при переходе через нуль функция меняет знак (с — на + и с + на —), а типы 3 и 4 — тем, что знак функции остается прежним. Как полюс функции $\frac{1}{S}$ точка x_0 будет иметь тип с тем же номером. Поэтому в подсчете индекса $\text{Ind}_a^b \frac{1}{S}$ будут

участвовать принадлежащие интервалу $[a, b[$ нули x_0 функции S типов 1 и 2. При этом нуль типа 1 даст вклад в индекс, равный $+1$, а нуль типа 2 — вклад, равный -1 .

Это доказывает, что

$$\text{Ind}_a^b S + \text{Ind}_a^b \frac{1}{S} = p - q,$$

где p — число полюсов и нулей функции S , принадлежащих интервалу $[a, b[$ и имеющих тип 1, а q — число полюсов и нулей, имеющих тип 2.

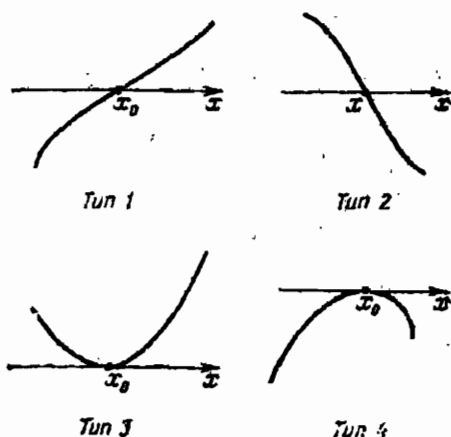


Рис. 23.

Подсчитаем теперь разность $p - q$ другим способом. Проследим за движением точки $(x, S(x))$ графика функции S при изменении x от a до b . Пусть, для определенности, $S(a) > 0$. Это означает, что при $x = a$ график функции S расположен выше оси Ox (в верхней полуплоскости). При возрастании x график перейдет в нижнюю полуплоскость, когда x пройдет полюс или нуль функции S типа 2. Обратно в верхнюю полуплоскость график вернется, когда x пройдет полюс или нуль типа 1, и т. д. Это показывает, что нули и полюса типов 1 и 2 чередуются и число p нулей и полюсов типа 1 либо равно числу q нулей и полюсов типа 2 (если $S(b) > 0$), либо меньше q на единицу (если $S(b) < 0$). Аналогично, если $S(a) < 0$, то

$p = q$ при $S(b) < 0$ и $p = q + 1$ при $S(b) > 0$. Таким образом,

$$p - q = \begin{cases} 1, & \text{если } S(a) < 0 \text{ и } S(b) > 0; \\ -1, & \text{если } S(a) > 0 \text{ и } S(b) < 0; \\ 0, & \text{если } S(a) \text{ и } S(b) \text{ имеют} \\ & \text{один и тот же знак.} \end{cases}$$

Тем самым, предложение 2, очевидно, полностью доказано. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Для любого (конечного или бесконечного) интервала $]a, b[$ и любой рациональной функции S все числа $S(a')$, где $a' > a$ и достаточно близко к a , имеют один и тот же знак. Поэтому, положив

$$\text{sign } S(a) = \text{sign } S(a'),$$

мы получим корректно определенное число $\text{sign } S(a) = \pm 1$. Аналогично формула

$$\text{sign } S(b) = \text{sign } S(b'),$$

где $b' < b$ и достаточно близко к b , также корректно определяет число $\text{sign } S(b) = \pm 1$.

Если a конечно и $S(a) \neq 0, \infty$, то так определенное число $\text{sign } S(a)$ совпадает с определенным ранее. Если $a = -\infty$ и предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} S(x)$ конечен и равен,

скажем, $A \neq 0$, то $\text{sign } S(a) = \text{sign } A$. Эта формула останется верной и при $\lim_{x \rightarrow -\infty} S(x) = \pm \infty$, если под A

понимать этот предел и условно считать, что $\text{sign}(\pm \infty) = \pm 1$. Она остается также верной и когда a — полюс ($S(a) = \infty$), если под A понимать односторонний предел $S(a + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} S(x)$. Однако в слу-

чае $S(a) = 0$ обозначение $\text{sign } S(a)$ нельзя связывать с $S(a)$ и следует рассматривать как единый, неразчленимый символ. Аналогично дело обстоит, конечно, и с $\text{sign } S(b)$.

Подчеркнем, что так определенный знак $\text{sign } S(a)$ (и $\text{sign } S(b)$) зависит не только от числа a (или соответственно числа b), но также и от того, левым или правым концом интервала $]a, b[$ это число является.

Введение символов $\text{sign } S(a)$ и $\text{sign } S(b)$ оправдывается тем, что теперь, как легко видеть, формула (7) оказывается верной для любого интервала $]a, b[$ и любой рациональной функции S .

4. Индекс и условие устойчивости

Применим теперь понятие индекса к задаче характеристики устойчивых многочленов.

Пусть, как и выше,

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 > 0,$$

— произвольный многочлен с комплексными коэффициентами, а g и h — многочлены с вещественными коэффициентами, связанные с многочленом f соотношением

$$f(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega).$$

Напомним, что уравнения

$$x = g(\omega), \quad y = h(\omega), \quad -\infty < \omega < +\infty,$$

задают амплитудно-фазовую характеристику многочлена f . Если эта характеристика не проходит через начало координат, т. е. если многочлены g и h не имеют общих вещественных корней, то для многочлена f определена фазовая функция φ , удовлетворяющая соотношению

$$\text{tg } \varphi = \frac{h}{g}.$$

В этом пункте мы сосредоточим внимание на рациональной функции $\frac{h}{g}$ и инверсной функции $\frac{g}{h}$. Предположения, что g и h не имеют общих вещественных корней, мы делать не будем.

Пусть ω_0 — произвольный вещественный полюс функции $\frac{h}{g}$ (функции $\frac{g}{h}$), т. е. корень многочлена g (многочлена h), не являющийся корнем многочлена h (многочлена g). Тогда при $\omega = \omega_0$ амплитудно-фазовая характеристика пересекает ось ординат (ось абсцисс) в точке, отличной от начала координат.

Лемма 1. *Равенство $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{h}{g} = -1$ (равенство $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{g}{h} = 1$) имеет место тогда и только тогда, когда амплитудно-фазовая характеристика многочлена f пе-*

пересекает при $\omega = \omega_0$ ось ординат (ось абсцисс) против часовой стрелки, т. е. в верхней (правой) полуплоскости справа налево (снизу вверх), а в нижней (левой) полуплоскости слева направо (сверху вниз).

Доказательство. Пусть при $\omega = \omega_0$ амплитудно-фазовая характеристика пересекает ось ординат (абсцисс) в верхней (правой) полуплоскости. Тогда $h(\omega) > 0$ ($g(\omega) > 0$) при $\omega = \omega_0$ и, значит, при всех ω , достаточно близких к ω_0 . Поэтому равенство $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{h}{g} = -1$ (равенство $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{g}{h} = 1$) означает, что для тех же ω имеет место неравенство $g(\omega) > 0$ (неравенство $h(\omega) < 0$) при $\omega < \omega_0$ и неравенство $g(\omega) < 0$ (неравенство $h(\omega) > 0$) при $\omega > \omega_0$, т. е. что характеристика пересекает ось ординат (ось абсцисс) справа налево (снизу вверх).

При $h(\omega_0) < 0$ (при $g(\omega_0) < 0$) все неравенства сменятся на противоположные, и характеристика будет пересекать ось ординат (ось абсцисс) слева направо (сверху вниз). $\square$

Теорема 1. Многочлен f степени n тогда и только тогда устойчив, когда

$$\begin{aligned} \text{Ind} \frac{h}{g} &= -n, \quad \text{если } n \text{ четно,} \\ \text{Ind} \frac{g}{h} &= n, \quad \text{если } n \text{ нечетно.} \end{aligned} \quad (1)$$

Доказательство. Если многочлен f устойчив (и, следовательно, в частности, многочлены g и h взаимно просты), то его фазовая функция φ монотонно возрастает и, значит, его амплитудно-фазовая характеристика пересекает оси координат против часовой стрелки. Поэтому согласно лемме 1 для каждого корня ω_0 многочлена g (многочлена h) имеет место равенство $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{h}{g} = -1$ (равенство $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{g}{h} = 1$). Поскольку все корни многочлена g (многочлена h) вещественны и различны, а степень его согласно лемме 1 п. 3 равна n при n четном (при n нечетном), этим доказано, что для любого устойчивого многочлена условие (1) справедливо.

Обратно, пусть имеет место условие (1). При n четном это означает, что

$$p - q = -n,$$

где p — число полюсов функции $\frac{h}{g}$ индекса 1, а q — число полюсов этой функции индекса -1 . С другой стороны, так как степень многочлена g при n четном равна n , то

$$p + q \leq n.$$

Следовательно, $p = 0$, $q = n$, и потому, в частности, все корни многочлена g вещественны, различны и ни один из них не является корнем многочлена h (так что многочлены g и h взаимно просты). Кроме того (см. лемму 1), амплитудно-фазовая характеристика пересекает ось ординат в n точках и каждый раз против часовой стрелки.

Пусть теперь ω_i и ω_{i+1} — два последовательных корня многочлена g . Как уже доказано, $h(\omega_i) \neq 0$. Пусть для определенности $h(\omega_i) > 0$. Тогда при $\omega = \omega_i$ амплитудно-фазовая характеристика входит в левую полуплоскость. Значит, при $\omega = \omega_{i+1}$ она из этой полуплоскости выходит. При этом вход осуществляется в верхней полуплоскости, а выход — в нижней. Поэтому при изменении ω от ω_i до ω_{i+1} амплитудно-фазовая характеристика хотя бы один раз пересекает ось абсцисс, т. е. на интервале $[\omega_i, \omega_{i+1}]$ будет хотя бы один корень многочлена h . Поскольку интервалов вида $[\omega_i, \omega_{i+1}]$ ровно $n - 1$, тем самым доказано, что многочлен h имеет по крайней мере $n - 1$ различных вещественных корней, перемежающихся с корнями многочлена g .

Но при n четном степень многочлена h не больше $n - 1$. Следовательно, найденные корни исчерпывают все корни многочлена h . Этим доказано, что корни многочленов g и h перемежаются.

Поскольку имеются значения параметра (например, все корни многочлена g), в которых фазовая функция возрастает, то по теореме Эрмита — Билера многочлен f устойчив.

При n нечетном условие (1) означает, что

$$p - q = n,$$

где теперь p — число полюсов функции $\frac{g}{h}$ индекса 1, а q — число полюсов этой функции индекса -1 (так что по-прежнему $p + q \leq n$). Поэтому $p = n$ и $q = 0$,

и, значит, в частности, все корни многочлена h вещественны, различны и ни один из них не является корнем многочлена g . Кроме того, амплитудно-фазовая характеристика пересекает ось абсцисс в n точках и каждый раз против часовой стрелки, откуда следует, что многочлен g имеет по крайней мере $n - 1$ вещественных и различных корней, перемежающихся с корнями многочлена h . Поскольку других корней у этого многочлена нет (его степень $\leq n - 1$) и поскольку в корнях многочлена h фазовая функция возрастает, этим снова доказано, что для многочлена f выполнены условия теоремы Эрмита — Билера. Следовательно, многочлен f устойчив. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Случаи n четного и n нечетного в условии (1) можно записать единым образом, если ввести в рассмотрение многочлены $\hat{g}$ и $\hat{h}$, определяемые формулами

$$\hat{g} = \begin{cases} (-1)^m g, & \text{если } n = 2m, \\ (-1)^m h, & \text{если } n = 2m + 1, \end{cases}$$

$$\hat{h} = \begin{cases} (-1)^{m-1} h, & n = 2m, \\ (-1)^m g, & n = 2m + 1. \end{cases}$$

Действительно, если $n = 2m$, то $\frac{\hat{h}}{\hat{g}} = -\frac{h}{g}$, и потому $\text{Ind } \frac{\hat{h}}{\hat{g}} = -n$ тогда и только тогда, когда $\text{Ind } \frac{h}{g} = n$. Если же $n = 2m + 1$, то $\frac{\hat{h}}{\hat{g}} = \frac{g}{h}$ и, значит, $\text{Ind } \frac{\hat{h}}{\hat{g}} = n$ тогда и только тогда, когда $\text{Ind } \frac{h}{g} = n$. Мы видим, следовательно, что многочлен f тогда и только тогда устойчив, когда

$$\text{Ind } \frac{\hat{h}}{\hat{g}} = n. \quad \square$$

З а м е ч а н и е 2. С многочленом f многочлены $\hat{g}$ и $\hat{h}$ связаны формулой

$$i^n f(i\omega) = \hat{g}(\omega) + i\hat{h}(\omega).$$

Если коэффициенты многочлена f вещественны, то

$$\hat{g} = a_0 x^n - a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} - \dots,$$

$$\hat{h} = a_1 x^{n-1} - a_3 x^{n-3} + a_5 x^{n-5} - \dots$$

Подчеркнем, что в отличие от амплитудно-фазового критерия устойчивости в теореме 1 заранее не предполагается, что многочлен f не имеет чисто мнимых корней. Если же, однако, это предположение выполнено и, следовательно, определено число Δ_f , то в случае, когда многочлен f устойчив, будет иметь место равенство

$$\Delta_f = \begin{cases} -\operatorname{Ind} \frac{h}{g}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \operatorname{Ind} \frac{g}{h}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

т. е. равенство

$$\Delta_f = \operatorname{Ind} \frac{h}{g}.$$

Задача. Будет ли это равенство верно для любых многочленов f (без мнимых корней)? Вопрос не так прост, поскольку в нем заранее не предполагается, что многочлены g и h не имеют кратных корней.

Сложность задачи о вычислении индекса рациональной функции растет вместе со степенью ее знаменателя. В этом смысле сложность критерия устойчивости, установленного в теореме 1, равна n . Если мы хотим эту сложность уменьшить, следует ограничить класс рассматриваемых многочленов. Посмотрим, что получится, если мы ограничимся лишь многочленами с вещественными коэффициентами.

В этом случае (см. формулу (2) п. 1)

$$g(\omega) = G(-\omega^2), \quad h(\omega) = \omega H(-\omega^2),$$

где

$$G(x) = \begin{cases} a_1 x^m + \dots + a_n, & \text{если } n = 2m + 1, \\ a_0 x^m + \dots + a_n, & \text{если } n = 2m, \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} a_0 x^m + \dots + a_{n-1}, & \text{если } n = 2m + 1, \\ a_1 x^{m-1} + \dots + a_{n-1}, & \text{если } n = 2m. \end{cases}$$

Мы положим $h^*(\omega) = H(-\omega^2)$, так что $h(\omega) = \omega h^*(\omega)$.

Пусть сначала $n = 2m$, и пусть $G(0) = a_n \neq 0$. Тогда точка $\omega = 0$ не будет полюсом функции $\frac{h}{g}$, и по-

тому (см. п. 3, свойства 1 и 4 индекса) будет иметь место равенство

$$\text{Ind} \frac{h}{g} = \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{h}{g} + \text{Ind}_0^{+\infty} \frac{h}{g} = -\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{h^*}{g} + \text{Ind}_0^{+\infty} \frac{h^*}{g}.$$

С другой стороны, согласно свойству 5 индекса

$$\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{h^*}{g} = \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{H}{G}, \quad \text{Ind}_0^{+\infty} \frac{h^*}{g} = -\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{H}{G}.$$

Поэтому

$$\text{Ind} \frac{h}{g} = -2 \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{H}{G}.$$

Этим доказано, что при $a_n \neq 0$ и $n = 2m$ равенство $\text{Ind} \frac{h}{g} = -n$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{H}{G} = m. \quad \square$$

Пусть $n = 2m + 1$, и пусть $G(0) = a_n \neq 0$, $H(0) = a_{n-1} \neq 0$. Тогда точка $\omega = 0$ будет полюсом функции $\frac{g}{h}$ порядка 1 с главным коэффициентом $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Поэтому, если $a_{n-1}a_n > 0$, то индекс функции $\frac{g}{h}$ в точке $\omega = 0$ будет равен 1 и, следовательно, будет иметь место равенство

$$\begin{aligned} \text{Ind} \frac{g}{h} &= \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{g}{h} + \text{Ind}_0^{+\infty} \frac{g}{h} + 1 = \\ &= -\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{g}{h^*} + \text{Ind}_0^{+\infty} \frac{g}{h^*} + 1 = -2 \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{G}{H} + 1. \end{aligned}$$

Этим доказано, что при $a_n a_{n-1} > 0$ и $n = 2m + 1$ равенство $\text{Ind} \frac{g}{h} = n$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{G}{H} = -m. \quad \square$$

Согласно теореме Стодолы (см. п. 2 гл. 1) устойчивым может быть только многочлен с положительными коэффициентами. Поэтому нам достаточно исследовать лишь такие многочлены.

Но если многочлен f имеет положительные коэффициенты, то многочлены G и H также будут многочле-

нами с положительными коэффициентами и потому не будут иметь неотрицательных корней, т. е. функции $\frac{H}{G}$ и $\frac{G}{H}$ не будут иметь неотрицательных полюсов. Поэтому

$$\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{H}{G} = \text{Ind} \frac{H}{G} \quad \text{и} \quad \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{G}{H} = \text{Ind} \frac{G}{H}.$$

Вместе с полученными выше результатами это доказывает следующую теорему:

Теорема 2. Многочлен

$$f(z) = G(z^2) + zH(z^2)$$

степени n с вещественными положительными коэффициентами тогда и только тогда устойчив, когда

$$\begin{aligned} \text{Ind} \frac{H}{G} &= m, & \text{если } n &= 2m, \\ \text{Ind} \frac{G}{H} &= -m, & \text{если } n &= 2m + 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Сложность этого условия вдвое меньше сложности условия теоремы 1 (m вместо n).

З а м е ч а н и е 1. При n четном мы фактически пользовались положительностью коэффициентов только многочлена G , а при n нечетном — только многочлена H (и тем, что $a_n > 0$). Поэтому для справедливости теоремы 2 достаточно потребовать, чтобы у многочлена f были положительны лишь коэффициенты с четными индексами и (при n нечетном) коэффициент a_n :

$$a_0 > 0, \quad a_2 > 0, \quad \dots, \quad a_{2m} > 0 \quad \text{и} \quad a_n > 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Если $n = 2m$, то

$$\frac{H(x)}{G(x)} = \frac{a_1 x^{m-1} + \dots}{a_0 x^m + \dots}$$

при $|x| \rightarrow \infty$ мало отличается от $\frac{a_1}{a_0} x$ и потому имеет тот же знак. В силу формулы (5) п. 3 отсюда следует, что

$$\text{Ind} \frac{H}{G} + \text{Ind} \frac{G}{H} = 1.$$

Поэтому $\text{Ind } \frac{H}{O} = m$ тогда и только тогда, когда $\text{Ind } \frac{O}{H} = -(m-1)$. Следовательно, условие (2) равносильно тому, что

$$\text{Ind } \frac{O}{H} = \begin{cases} -(m-1), & \text{если } n=2m, \\ -m, & \text{если } n=2m+1. \end{cases}$$

Этот вариант условия (2) иногда предпочтительнее.

З а м е ч а н и е 3. Условие (2) можно, конечно, сформулировать единым образом, подобно тому как выше это мы сделали в отношении условия (1).

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ

1. Вычисление индекса

Практический метод (алгоритм) вычисления индекса $\text{Ind}_a^b S$ произвольной рациональной функции S на произвольном интервале $]a, b[$ непосредственно получается на основе предложения 2 п. 3 гл. 2. Этот алгоритм заключается в построении конечной последовательности

$$S_1 = S, S_2, S_3, \dots, S_q \quad (1)$$

рациональных функций, начинающейся с данной функции S , и состоит в попеременном применении следующих двух шагов:

Шаг 1. Если степень знаменателя рациональной функции S_i больше нуля (т. е. если эта рациональная функция не является многочленом), а степень числителя больше или равна степени знаменателя, то следующая функция S_{i+1} получается из функции S_i выделением целой части, так что

$$S_{i+1} = S_i - Q_i,$$

где Q_i — некоторый многочлен («целая часть» функции S_i), а степень числителя функции S_{i+1} меньше степени знаменателя. Согласно свойству 3 индексов (см. п. 3 гл. 2) индекс при этом не меняется:

$$\text{Ind}_a^b S_i = \text{Ind}_a^b S_{i+1}. \quad (2)$$

Шаг 2. Если степень числителя рациональной функции S_i меньше степени знаменателя, то

$$S_{i+1} = \frac{1}{S_i}.$$

Согласно предложению 2 п. 3 гл. 2 (примененному к функции S_{i+1})

$$\text{Ind}_a^b S_i = -\text{Ind}_a^b S_{i+1} + \frac{\text{sign } S_{i+1}(b) - \text{sign } S_{i+1}(a)}{2}. \quad (3)$$

Ясно, что после применения шага 1 применим шаг 2, а после применения шага 2 либо получается многочлен (и тогда алгоритм останавливается), либо применим шаг 1. Поскольку при шаге 1 степень знаменателя уменьшается, алгоритм обязательно останавливается на некотором (отличном от нуля) многочлене S_q . Поскольку индекс любого многочлена на каждом интервале равен нулю, мы, двигаясь «вспять» по последовательности (1) и применяя попеременно соотношения (2) и (3), найдем искомый индекс рациональной функции $S = S_1$.

Последний этап вычислений можно, конечно, записать в виде формулы, выражающей $\text{Ind}_a^b S$ через числа $\text{sign } S_i(a)$ и $\text{sign } S_i(b)$. Эта формула будет иметь довольно неприятный вид из-за знака минус в правой части соотношения (3). Можно несколько видоизменить алгоритм так, чтобы этого знака не было. В измененном алгоритме шаг 2 остается прежним, а шаг 1 заменяется следующим шагом 1*:

Шаг 1*. Если степень знаменателя рациональной функции S_i больше нуля и степень числителя больше или равна степени знаменателя, то

$$S_{i+1} = Q_i - S_i,$$

где Q_i — целая часть функции S_i . Таким образом, S_{i+1} является «дробной» частью рациональной функции S_i , взятой с обратным знаком.

Теперь

$$\text{Ind}_a^b S_i = -\text{Ind}_a^b S_{i+1},$$

и потому, если мы применим к S_{i+1} шаг 2 и перейдем к функции $S_{i+2} = \frac{1}{S_{i+1}}$, то будет иметь место формула

$$\text{Ind}_a^b S_i = \text{Ind}_a^b S_{i+2} - \frac{\text{sign } S_{i+2}(b) - \text{sign } S_{i+2}(a)}{2}. \quad (4)$$

уже не содержащая знака минус перед $\text{Ind}_a^b S_{i+2}$.

Отсюда легко получается явная формула для индекса функции S .

а применение шага 2 — к перестановке числителя и знаменателя, так что фактически мы имеем дело не столько с рациональными функциями, сколько с их числителями и знаменателями, т. е. с некоторыми многочленами. Поэтому целесообразно переизложить алгоритм непосредственно для этих многочленов. Это позволит, в частности, записать формулы для $\text{Ind}_a^b S$ в очень изящном виде.

Пусть $S = \frac{G}{F}$, где многочлены G и F необязательно взаимно просты. Мы положим $F_1 = F$, $F_2 = G$, а при $i \geq 3$ примем за многочлен F_i взятый с обратным знаком остаток от деления многочлена F_{i-2} на многочлен F_{i-1} . Таким образом, для любого $i \geq 3$ многочлен F_i однозначно характеризуется как такой многочлен степени, меньшей степени предыдущего многочлена F_{i-1} , что существует многочлен Q_i , удовлетворяющий соотношению

$$F_{i-2} = F_{i-1}Q_i - F_i.$$

Построение многочленов F_i останавливается на многочлене F_p , без остатка делящем предыдущий многочлен F_{p-1} .

Если степень m числителя G рациональной функции S меньше степени ее знаменателя F (и, следовательно, алгоритм вычисления индекса начинается с шага 2), то рациональные функции $S_2, S_3, \dots, S_q$, получающиеся из функции $S = S_1$ применением шагов 1° и 2 нашего алгоритма, выражаются формулами

$$S_2 = \frac{F_1}{F_2}, \quad S_3 = \frac{F_2}{F_3}, \quad S_4 = \frac{F_3}{F_4}, \quad \dots, \quad S_{2k-1} = \frac{F_{k+1}}{F_k},$$

$$S_{2k} = \frac{F_k}{F_{k+1}}, \quad \dots, \quad S_q = \frac{F_{p-1}}{F_p}$$

(так что, в частности, $q = 2p - 2$), т. е. однозначно восстанавливаются по многочленам

$$F_1 = F, \quad F_2 = G, \quad F_3, \dots, F_p. \quad (5)$$

Естественно поэтому ожидать, что индекс $\text{Ind}_a^b S$ может быть выражен через ряд (5) (по крайней мере, при $m < n$).

Определение 1. Ряд (5), начинающийся с данных многочленов $F = F_1$ и $G = F_2$, в котором каждый сле-

дующий многочлен F_i , $i \geq 3$, является взятым с обратным знаком остатком от деления многочлена F_{i-2} на многочлен F_{i-1} , называется *рядом Штурма* многочленов F и G .

Подчеркнем, что ряд Штурма можно составить для любых многочленов F и G , не обязательно взаимно простых. При этом ясно, что если некоторый многочлен D делит многочлены $F = F_1$ и $G = F_2$, то он делит и многочлен $F_3 = F_2 Q_2 - F_1$, а потому и многочлены $F_4 = F_3 Q_3 - F_2$, $F_5 = F_4 Q_4 - F_3$, ..., а значит, и многочлен $F_p = F_{p-1} Q_p - F_{p-2}$. С другой стороны, так как многочлен F_p делит, по условию, многочлен F_{p-1} , то он делит и многочлен $F_{p-2} = F_{p-1} Q_p - F_p$, а потому и многочлены $F_{p-3} = F_{p-2} Q_{p-1} - F_{p-1}$, $F_{p-4} = F_{p-3} Q_{p-2} - F_{p-2}$, ..., а значит, и многочлены $F_2 = F_3 Q_4 - F_4$ и $F_1 = F_2 Q_3 - F_3$, т. е. многочлены G и F . Этим доказано, что последний член F_p ряда Штурма является наибольшим общим делителем многочленов F и G (и любых двух соседних многочленов F_i и F_{i+1}).

Определение 2. Пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_s, \quad s > 1, \quad (6)$$

— конечная последовательность отличных от нуля вещественных чисел (или символов $+\infty$ и $-\infty$). Говорят, что в этой последовательности наблюдается *перемена знака на i -м месте*, $i = 1, \dots, s-1$, если знаки членов a_i и a_{i+1} различны, т. е. (при конечных a_i и a_{i+1}), если $a_i a_{i+1} < 0$. Если перемена знака наблюдается на $k \leq s-1$ местах, то говорят, что *число перемен знака* последовательности (6) равно k . При конечных $a_1, \dots, a_s$ число перемен знака равно, следовательно, числу отрицательных чисел в последовательности произведений

$$a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{s-1} a_s.$$

Мы будем писать

$$k = \text{ЧПЗ}(a_1, \dots, a_s).$$

Число перемен знака тогда и только тогда равно нулю, когда все члены последовательности (6) одного знака. Оно принимает наибольшее возможное значение $s-1$ тогда и только тогда, когда знаки членов последовательности (6) чередуются.

Заметим, что для любого $i = 2, \dots, s-1$ имеет место формула

$$\begin{aligned} \text{ЧПЗ}(a_1, \dots, a_s) &= \\ &= \text{ЧПЗ}(a_1, \dots, a_i) + \text{ЧПЗ}(a_i, \dots, a_s), \end{aligned} \quad (7)$$

выражающая свойство аддитивности функции ЧПЗ.

Если многочлены F и G не обращаются в нуль в точке a (например, если $a = \pm\infty$), то определено число перемен знака двучленной последовательности $F(a)$, $G(a)$. Ясно, что оно равно нулю, если $S(a) > 0$, где $S = \frac{G}{F}$, и равно единице, если $S(a) < 0$. Это означает, что

$$\text{ЧПЗ}(F(a), G(a)) = \frac{1 - \text{sign } S(a)}{2}.$$

Следовательно, если многочлены F и G не обращаются в нуль в точках a и b , то

$$\begin{aligned} \text{ЧПЗ}(F(a), G(a)) - \text{ЧПЗ}(F(b), G(b)) &= \\ &= \frac{\text{sign } S(b) - \text{sign } S(a)}{2}, \quad (8) \end{aligned}$$

где $s = \frac{G}{F}$.

Возвращаясь к ряду Штурма (5), предположим, что ни один из многочленов $F_1, \dots, F_p$ не обращается в нуль в точках a и b . Тогда для каждого $k = 1, \dots, p$ к функции $S_{k+1} = \frac{F_k}{F_{k+1}}$ будет применима формула (8), согласно которой

$$\begin{aligned} \frac{\text{sign } S_{k+1}(b) - \text{sign } S_{k+1}(a)}{2} &= \\ &= \text{ЧПЗ}(F_k(a), F_{k+1}(a)) - \text{ЧПЗ}(F_k(b), F_{k+1}(b)). \end{aligned}$$

Складывая эти соотношения, мы слева получим $\text{Ind}_a^b S$ (см. предложение 1; мы по-прежнему предполагаем, что $m < n$), а справа — разность двух сумм: суммы

$$\begin{aligned} \text{ЧПЗ}(F_1(a), F_2(a)) + \text{ЧПЗ}(F_2(a), F_3(a)) + \dots \\ \dots + \text{ЧПЗ}(F_{p-1}(a), F_p(a)) \quad (9) \end{aligned}$$

и аналогичной суммы для правого конца b интервала $]a, b[$. Но, применив $p - 1$ раз формулу (7), мы немедленно получим, что сумма (9) равна

$$\text{ЧПЗ}(F_1(a), \dots, F_p(a)),$$

где

$$F_1(a), \dots, F_p(a) \quad (10)$$

— последовательность значений, принимаемых многочленами ряда Штурма (5) в точке a . Поскольку аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для суммы, соответствующей правому концу b интервала $]a, b[$, тем самым для случая $m < n$ нами доказана следующая теорема:

Теорема 1 (теорема Штурма об индексе)

Пусть $S = \frac{G}{F}$. Составим ряд Штурма

$$F_1 = F, \quad F_2 = G, \quad F_3, \dots, F_p.$$

Если в точках a и b ни один член этого ряда не обращается в нуль, то индекс рациональной функции S на интервале $]a, b[$ равен разности между числом перемен знака в последовательности значений, принимаемых многочленами ряда Штурма в точке a , и числом перемен знака в последовательности значений, принимаемых многочленами ряда Штурма в точке b :

$$\text{Ind}_a^b S = \text{ЧПЗ}(F_1(a), \dots, F_p(a)) - \\ - \text{ЧПЗ}(F_1(b), \dots, F_p(b)). \quad \square \quad (11)$$

Подчеркнем, что в этой теореме многочлены F и G взаимно простыми не предполагаются.

Покажем, что теорема 1 справедлива и при $m \geq n$.

Действительно, если $m > n$, то ряд Штурма имеет вид

$$F_1 = F, \quad F_2 = G, \quad F_3 = -F, \quad F_4, \dots, F_p,$$

тогда как

$$S_1 = \frac{G}{F} = \frac{F_2}{-F_1}, \quad S_2 = \frac{F_4}{-F_3}, \\ S_3 = \frac{-F_2}{F_4}, \dots, \quad S_{2k-1} = \frac{-F_{k+1}}{F_{k+2}}, \\ S_{2k} = \frac{F_{k+2}}{-F_{k+3}}, \dots, \quad S_q = \frac{F_{p-1}}{-F_p}$$

(если $F_{i-2} = F_{i-1}Q_i - F_i$, то $F_{i-2} = (-F_{i-1})(-Q_i) - (-F_i)$). Следовательно, согласно формуле (8)

$$= \frac{\text{sign } S_{2k-1}(b) - \text{sign } S_{2k-1}(a)}{2} = \\ = \text{ЧПЗ}(F_{k+1}(a), F_{k+2}(a)) - \text{ЧПЗ}(F_{k+1}(b), F_{k+2}(b)).$$

Из предложения 1 и формулы (7) теперь легко получаем уже известным нам способом, что

$$\text{Ind}_a^b S = \text{ЧПЗ}(F_3(a), \dots, F_p(a)) - \\ - \text{ЧПЗ}(F_3(b), \dots, F_p(b)). \quad (11')$$

Но согласно той же формуле (7)

$$\begin{aligned} \text{ЧПЗ}(F_1(a), \dots, F_p(a)) - \text{ЧПЗ}(F_3(a), \dots, F_p(a)) = \\ = \text{ЧПЗ}(F_1(a), F_2(a), F_3(a)) = \\ = \text{ЧПЗ}(F(a), G(a), -F(a)) = 1 \end{aligned}$$

и аналогично

$$\text{ЧПЗ}(F_1(b), \dots, F_p(b)) - \text{ЧПЗ}(F_3(b), \dots, F_p(b)) = 1.$$

Поэтому формула (11') равносильна формуле (11).

Наконец, при $m = n$ член F_3 ряда Штурма выражается формулой $F_3 = qG - F$, где q — некоторое отличное от нуля число. Поэтому $\frac{F_3}{F} = q \frac{G}{F} - 1$, т. е.

$$S = \frac{1}{q} + \frac{F_3}{qF}.$$

Это означает, что

$$S_2 = -\frac{F_3}{qF}$$

и, следовательно,

$$S_3 = -\frac{qF}{F_3}.$$

Так как $1 = q \frac{G}{F_3} - \frac{F}{F_3}$ и так как $G = F_3 Q_4 - F_4$, где Q_4 — некоторый многочлен, то

$$\frac{F}{F_3} = q \frac{G}{F_3} - 1 = (qQ_4 - 1) - \frac{qF_4}{F_3},$$

т. е.

$$S_3 = -q(qQ_4 - 1) + q^2 \frac{F_4}{F_3}.$$

Это означает, что

$$S_4 = -\frac{q^2 F_4}{F_3}.$$

Следовательно,

$$S_5 = -\frac{F_3}{q^2 F_4}.$$

Дальнейшее вычисление трудностей не представляет:

$$S_6 = -\frac{F_5}{q^3 F_4}, \quad S_7 = -\frac{q^2 F_4}{F_6},$$

$$S_8 = -\frac{q^2 F_5}{F_6}, \quad S_9 = -\frac{F_5}{q^2 F_6}, \dots$$

Таким образом,

$$S_3 = -\frac{q F_1}{F_3}, \quad S_5 = -\frac{F_3}{q^3 F_4},$$

$$S_7 = -\frac{q^2 F_4}{F_6}, \quad S_9 = -\frac{F_5}{q^2 F_6}, \dots$$

Поскольку положительное число q^2 на знаки не влияет, отсюда известным уже рассуждением получается формула

$$\text{Ind}_a^q S = \text{ЧПЗ}(qF_1(a), F_3(a), F_4(a), \dots, F_p(a)) - \\ - \text{ЧПЗ}(qF_1(b), F_3(b), F_4(b), \dots, F_p(b)). \quad (11'')$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &\text{ЧПЗ}(F_1(a), F_2(a), F_3(a), \dots, F_p(a)) - \\ &\quad - \text{ЧПЗ}(qF_1(a), F_3(a), \dots, F_p(a)) = \\ &= \text{ЧПЗ}(F_1(a), F_2(a), F_3(a)) - \text{ЧПЗ}(qF_1(a), F_3(a)). \end{aligned}$$

С л у ч а й 1. Числа $qF_1(a)$ и $F_3(a)$ имеют один и тот же знак $\varepsilon = \pm 1$, т. е.

$$\text{ЧПЗ}(qF_1(a), F_3(a)) = 0.$$

Пусть $q > 0$. Тогда $\text{sign } F_1(a) = \varepsilon$, а так как

$$F_2(a) = G(a) = \frac{1}{q}(F_1(a) + F_3(a)),$$

то и $\text{sign } F_2(a) = \varepsilon$. Поэтому

$$\text{ЧПЗ}(F_1(a), F_2(a), F_3(a)) = 0, \quad q > 0.$$

Если же $q < 0$, то $\text{sign } F_1(a) = -\varepsilon$, и потому, каков бы ни был знак числа $F_2(a)$,

$$\text{ЧПЗ}(F_1(a), F_2(a), F_3(a)) = 1, \quad q < 0.$$

С л у ч а й 2. Числа $qF_1(a)$ и $F_3(a)$ имеют противоположные знаки:

$$\text{ЧПЗ}(qF_1(a), F_3(a)) = 1.$$

Пусть $\varepsilon = \text{sign } F_3(a)$ и, значит, $\text{sign } qF_1(a) = -\varepsilon$.

Если $q < 0$, то $\text{sign } F_1(a) = \varepsilon$ и $\text{sign } F_2(a) = -\varepsilon$, а если $q > 0$, то $\text{sign } F_1(a) = -\varepsilon$. Поэтому

$$\text{ЧПЗ}(F_1(a), F_2(a), F_3(a)) = \begin{cases} 1, & \text{если } q > 0, \\ 2, & \text{если } q < 0. \end{cases}$$

Мы видим, что в обоих случаях

$$\begin{aligned} \text{ЧПЗ}(F_1(a), F_2(a), F_3(a)) - \text{ЧПЗ}(qF_1(a), F_3(a)) &= \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } q > 0, \\ 1, & \text{если } q < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, разность

$$\text{ЧПЗ}(F_1(a), F_2(a), F_3(a)) - \text{ЧПЗ}(qF_1(a), F_3(a))$$

не зависит от a , и в частности, одна и та же как в точке a , так и в точке b . Отсюда непосредственно следует, что формула (11'') равносильна формуле (11).

Тем самым теорема 1 доказана для любых комбинаций степеней m и n . $\square$

З а м е ч а н и е 1. Осложняющим моментом в применении теоремы 1 на практике является предположение, что числа a и b не являются корнями ни одного из многочленов ряда Штурма. Оказывается, что от этого предположения можно почти полностью освободиться.

Для этого нам надо в первую очередь придать смысл правой части формулы (11) для случая, когда некоторые члены последовательности (10) (и аналогичной последовательности для правого конца b) равны нулю. С этой целью предположим, что в последовательности (10) нет двух рядом стоящих нулей. Каждому нулю мы припишем знак, который имеют рядом стоящие члены последовательности, если эти члены имеют одинаковые знаки (если нулю равен первый член, то ему приписывают знак второго члена), и произвольный знак, если рядом стоящие члены имеют разные знаки. Число перемен знака полученной последовательности мы и назовем числом перемен знака последовательности (10). Легко видеть, что это определение корректно и, более того, получающееся число перемен знака равно числу перемен знака последовательности, возникающей при вычеркивании всех нулей. Если в последовательности (10) имеются два рядом стоящие нуля, т. е. если число a будет общим корнем

двух соседних многочленов ряда Штурма, то оно будет корнем всех многочленов и, в частности, исходных многочленов F и G . Обратно, для любого общего корня a многочленов F и G последовательность (10) состоит только из нулей. Исключая этот случай, мы видим, что теперь утверждение теоремы 1 имеет смысл для любого интервала $]a, b[$, концы которого не являются общими корнями многочленов F и G (вообще говоря, не взаимно простых).

Задача. Докажите, что теорема 1 остается в этом случае верной.

В заключение, отклоняясь от основной темы, применим теорему 1 к классической задаче отыскания числа вещественных корней данного многочлена F (с вещественными коэффициентами), принадлежащих данному интервалу $]a, b[$ (концы которого корнями не являются).

Предложение 2. Число s различных корней многочлена F , принадлежащих интервалу $]a, b[$, равно индексу на этом интервале логарифмической производной F'/F этого многочлена:

$$s = \text{Ind}_a^b \frac{F'}{F}. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть $F = F_1 F_2$. Тогда, как легко видеть,

$$\frac{F'}{F} = \frac{F'_1}{F_1} + \frac{F'_2}{F_2}.$$

Поэтому, если многочлены F_1 и F_2 взаимно просты (не имеют общих корней), то правая часть формулы (12) равна сумме аналогичных выражений для многочленов F_1 и F_2 . Поскольку левая часть также, очевидно, обладает этим свойством, нам, следовательно, достаточно доказать формулу (12) только для многочленов F вида $(x - x_0)^k$, а также для многочленов, вообще не имеющих вещественных корней. Но для таких многочленов формула (12) очевидна. $\square$

Из предложения 2 и теоремы 1 немедленно вытекает теперь следующая теорема:

Теорема Штурма. Пусть F — произвольный многочлен с вещественными коэффициентами. Составим для F и F' ряд Штурма:

$$F_1 = F, \quad F_2 = F', \quad F_3, \dots, F_p.$$

Тогда для любого интервала $]a, b[$, концы которого не являются кратными корнями многочлена F , число s его различных корней на этом интервале выражается формулой

$$s = \text{ЧПЗ}(F_1(a), \dots, F_p(a)) - \text{ЧПЗ}(F_1(b), \dots, F_p(b)).$$

Здесь мы воспользовались теоремой 1, усиленной в соответствии с замечанием 1. Если же пользоваться первоначальной теоремой 1, необходимо потребовать, чтобы многочлены ряда Штурма не обращались в нуль в точках a и b .

2. Теорема Рауса

Теоремы п. 4 гл. 2 показывают, что индекс $\text{Ind}_a^b S$ интересен для нас в первую очередь при $a = -\infty$ и $b = +\infty$. Оказывается, что в этом случае результатам предыдущего пункта можно придать более простой вид.

Действительно, ясно, что для любого многочлена $F(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$ пределы $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ и $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ однозначно определяются его степенью n и знаком старшего коэффициента a_0 :

$$F(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a_0 > 0, \\ -\infty, & \text{если } a_0 < 0, \end{cases}$$

$$F(-\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } (-1)^n a_0 > 0, \\ -\infty, & \text{если } (-1)^n a_0 < 0. \end{cases}$$

Поэтому теорему 1 п. 1 мы можем для случая $a = -\infty$, $b = +\infty$ переформулировать следующим образом:

Предложение 1. Пусть F и G — произвольные многочлены (с вещественными коэффициентами), и пусть

$$\alpha_0^{(1)} = a_0, \quad \alpha_0^{(2)} = b_0, \quad \alpha_0^{(3)}, \dots, \alpha_0^{(p)}$$

и

$$n^{(1)} = n, \quad n^{(2)} = m, \quad n^{(3)}, \dots, n^{(p)}$$

— старшие коэффициенты и степени многочленов их ряда Штурма. Тогда

$$\text{Ind} \frac{G}{F} = \text{ЧПЗ}((-1)^{n^{(1)}} \alpha_0^{(1)}, \dots, (-1)^{n^{(p)}} \alpha_0^{(p)}) - \\ - \text{ЧПЗ}(\alpha_0^{(1)}, \dots, \alpha_0^{(p)}). \quad (1)$$

Таким образом, для вычисления $\text{Ind } \frac{G}{F}$ нам достаточно найти лишь старшие коэффициенты многочленов ряда Штурма и их степени.

Особенно просто дело обстоит в так называемом «регулярном случае».

Определение 1. Говорят, что для многочленов F и G имеет место *регулярный случай*, если степень каждого многочлена их ряда Штурма ровно на единицу меньше степени предыдущего, т. е. если

$$n^{(2)} = m = n - 1, \quad n^{(3)} = n - 2, \quad \dots, \quad n^{(p)} = n - p + 1,$$

где n — степень многочлена F , а m — степень многочлена G .

Поскольку при умножении числовой последовательности на $(-1)^n$ ее число перемен знака не меняется, в регулярном случае имеет место формула

$$\text{Ind } \frac{G}{F} = \text{ЧПЗ}(a_0^{(1)}, -a_0^{(2)}, \dots, (-1)^{p-1}a_0^{(p)}) - \\ - \text{ЧПЗ}(a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(p)}). \quad (1')$$

Как же вычислять старшие коэффициенты многочленов ряда Штурма? Чтобы ответить на этот вопрос, решим сначала задачу о вычислении коэффициентов взятого с обратным знаком остатка при делении многочлена степени n на многочлен степени $n-1$.

Пусть

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n, \quad \beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}$$

— произвольные многочлены степеней n и $n-1$, и пусть

$$\gamma_0 x^{n-2} + \gamma_1 x^{n-3} + \dots + \gamma_{n-2}$$

— взятый с обратным знаком остаток от деления первого многочлена на второй. Произведя деление, мы немедленно получим, что коэффициенты взятого с обратным знаком остатка выражаются формулой

$$\gamma_i = \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} \beta_{i+2} - \alpha_{i+2} \right) + \frac{\beta_{i+1}}{\beta_0} \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_0}{\beta_0} \beta_1 \right), \quad (2) \\ i = 0, 1, \dots, n-2$$

(при $i = n-2$ условно считаем, что $\beta_n = 0$).

Формула (2) мотивирует следующее построение.
Пусть

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

$$G(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}, \quad b_0 \neq 0,$$

— произвольные многочлены с вещественными коэффициентами степеней n и $n-1$ соответственно. Построим таблицу чисел

$$\begin{array}{ccccccc} a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} & \dots & & \\ a_0^{(2)} & a_1^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_0^{(p)} & a_1^{(p)} & \dots & a_n^{(p)} & \dots & & \end{array} \quad (3)$$

по следующим правилам:

1) В первую строку записываем строчку коэффициентов многочлена F , неограниченно продолженную вправо нулями:

$$a_0^{(1)} = a_0, \quad a_1^{(1)} = a_1, \quad \dots, \quad a_n^{(1)} = a_n, \quad a_{n+1}^{(1)} = 0, \quad \dots$$

2) Во вторую строку записываем строчку коэффициентов многочлена G , также неограниченно продолженную вправо нулями:

$$a_0^{(2)} = b_0, \quad a_1^{(2)} = b_1, \quad \dots, \quad a_{n-1}^{(2)} = b_{n-1}, \quad a_n^{(2)} = 0, \quad \dots$$

3) Элементы k -й строки при $k \geq 3$ вычисляем по элементам предыдущих двух строк посредством формулы

$$\begin{aligned} a_i^{(k)} = & \frac{a_0^{(k-2)}}{a_0^{(k-1)}} a_{i+2}^{(k-1)} - a_{i+2}^{(k-2)} + \\ & + \frac{a_{i+1}^{(k-1)}}{a_0^{(k-1)}} \left(a_1^{(k-2)} - \frac{a_0^{(k-2)}}{a_0^{(k-1)}} a_1^{(k-1)} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

4) Построение останавливаем на p -й строке, если начальный член $a_0^{(p+1)}$ следующей $(p+1)$ -й строки оказался равным нулю.

Сопоставив формулы (4) и (2), мы немедленно получим, что строками таблицы (3) являются (пополненные нулями) строки коэффициентов тех первых многочленов ряда Штурма многочленов F и G , сте-

пени которых последовательно убывают на единицу. Построение таблицы (3) обрывается, когда степень остатка первый раз уменьшается не менее чем на две единицы. Тот факт, что для многочленов F и G имеет место регулярный случай, означает, что оказался равным нулю не только начальный, но и каждый элемент $(p+1)$ -й строки.

Таким образом, предложение 1 для регулярного случая мы можем переформулировать в следующем виде:

Предложение 2. Если при построении таблицы (3) все члены $(p+1)$ -й строки оказались равными нулю, то индекс рациональной функции $S = \frac{G}{F}$ выражается через первый столбец таблицы (3) по формуле

$$\text{Ind } S = \text{ЧПЗ} (a_0^{(1)}, -a_0^{(2)}, \dots, (-1)^{p-1} a_0^{(p)}) - \\ - \text{ЧПЗ} (a_0^{(1)}, a_0^{(2)}, \dots, a_0^{(p)}). \quad \square \quad (5)$$

Заметим, что $p \leq n+1$, причем если $p = n+1$, то обязательно имеет место регулярный случай.

Несмотря на то, что предложение 2 дает ответ только в регулярном случае, его вполне достаточно для наших целей. Действительно, нам нужно (см. теоремы 1 и 2 п. 4 гл. 2) не столько вычисление индекса $\text{Ind } S$, сколько проверка того, что этот индекс равен степени n многочлена F . Но число p членов ряда Штурма самое большее равно $n+1$, причем $p = n+1$ тогда и только тогда, когда имеет место регулярный случай и последний многочлен F_p ряда Штурма является постоянным числом (т. е. многочлены F и G взаимно просты). С другой стороны, число перемен знака последовательности, состоящей из p членов, не больше $p-1$ и равно $p-1$, когда знаки всех членов последовательности чередуются. Поэтому правая часть формулы (5) тогда и только тогда равна n , когда $p = n+1$ и все числа $a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(p)}$ имеют один и тот же знак (при $a_0 = a_0^{(1)} > 0$ — положительны). Это показывает, что справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $S = \frac{G}{F}$, где F — многочлен степени n с положительным старшим коэффициентом a_0 ,

а G — многочлен степени, не большей $n - 1$. Равенство $\text{Ind } S = n$ имеет место тогда и только тогда, когда построение таблицы (3) для многочленов F и G не останавливается до $(n + 1)$ -й строки и все элементы начального столбца этой таблицы положительны¹⁾. $\square$

Применим эту теорему к критерию устойчивости из теоремы 1 п. 4 гл. 2, предполагая, что многочлен

$$f = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

устойчивость которого мы исследуем, имеет вещественные коэффициенты. В этом случае (см. замечания 1 и 2 к теореме 1 п. 4, гл. 2) многочлен f тогда и только тогда устойчив, когда

$$\text{Ind } \frac{h}{g} = n,$$

где

$$\begin{aligned} g &= a_0 x^n - a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} - \dots, \\ h &= a_1 x^{n-1} - a_3 x^{n-3} + a_5 x^{n-5} - \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, ввиду теоремы 1 многочлен f тогда и только тогда устойчив, когда построение таблицы (3) для многочленов h и g не останавливается до $(n + 1)$ -й строки и все элементы первого столбца этой таблицы положительны.

Но первые две строки этой таблицы имеют вид

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & 0 & -a_2 & 0 & a_4 & 0 & \dots \\ a_1 & 0 & -a_3 & 0 & a_5 & 0 & \dots, \end{array}$$

так что все их члены с нечетными номерами будут равны нулю. С другой стороны, формула (4) показывает, что если в двух последовательных строках таблицы (3) все члены с нечетными номерами равны нулю, то и следующая строка также обладает этим свойством. Следовательно, в таблице (3), построенной для многочленов (6), все столбцы с нечетными номерами равны нулю. Естественно поэтому эти столбцы вообще не писать. Кроме того, поскольку $a_1^{(n)} = 0$ для всех k ,

¹⁾ Если степень многочлена G меньше $n - 1$, то построения таблицы (3) останавливается на первой строке (т. е. $p = 1$). Равенство $\text{Ind } S = n$ в этом случае невозможно.

формула (4) теперь упрощается и принимает вид

$$a_i^{(k)} = \frac{a_0^{(k-2)}}{a_0^{(k-1)}} a_{i+2}^{(k-1)} - a_{i+2}^{(k-2)}.$$

Таким образом, мы видим, что для многочленов (6) вместо таблицы (3) можно рассматривать таблицу

$$\begin{array}{ccccccc} b_0^{(1)} & b_1^{(1)} & \dots & b_i^{(1)} & \dots & & \\ b_0^{(2)} & b_1^{(2)} & \dots & b_i^{(2)} & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ b_0^{(p)} & b_1^{(p)} & \dots & b_i^{(p)} & \dots & & \end{array}$$

строящуюся по формуле

$$b_i^{(k)} = \frac{b_0^{(k-2)}}{b_0^{(k-1)}} b_{i+1}^{(k-1)} - b_{i+1}^{(k-2)}, \quad k = 3, \dots, p,$$

причем

$$\begin{array}{lll} b_0^{(1)} = a_0, & b_1^{(1)} = -a_2, & b_2^{(1)} = a_4, \dots, \\ b_0^{(2)} = a_1, & b_1^{(2)} = -a_3, & b_2^{(2)} = a_5, \dots \end{array}$$

Далее, можно уничтожить неприятные знаки на нечетных местах. С этой целью мы положим

$$c_i^{(k)} = \begin{cases} b_i^{(k)}, & \text{если } i \text{ четно,} \\ -b_i^{(k)}, & \text{если } i \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В результате мы получим таблицу

$$\begin{array}{ccccccc} c_0^{(1)} & c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & \dots & & & \\ c_0^{(2)} & c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ c_0^{(p)} & c_1^{(p)} & c_2^{(p)} & \dots & & & \end{array} \quad (7)$$

строящуюся по следующим правилам:

1) В первую строку таблицы (7) записываются коэффициенты многочлена f , имеющие четные номера.

2) Во вторую строку таблицы (7) записываются коэффициенты многочлена f , имеющие нечетные номера.

3) Члены k -й строки при $k \geq 3$ вычисляются по членам предыдущих двух строк посредством формулы

$$c_i^{(k)} = c_{i+1}^{(k-2)} - \frac{c_0^{(k-2)}}{c_0^{(k-1)}} c_{i+1}^{(k-1)}. \quad (8)$$

4) Построение останавливается на p -й строке, если число $c_0^{(p+1)}$ оказалось равным нулю.

Правило (8) словами можно описать следующим образом.

Чтобы построить k -ю строку, нужно из $(k-2)$ -й строки вычесть $(k-1)$ -ю строку, умноженную на такое число, чтобы начальный член обратился в нуль. Затем нужно, отбросив этот нулевой член, сдвинуть получившуюся строку на один шаг влево.

Все это дает нам следующую теорему:

Теорема 2 (теорема Рауса). Многочлен f степени n с вещественными коэффициентами (и положительным старшим коэффициентом a_0) тогда и только тогда устойчив, когда построение таблицы (7) для этого многочлена не останавливается до $(n+1)$ -й строки и все элементы начального столбца этой таблицы положительны. $\square$

Таблица (7) называется схемой Рауса для многочлена f , а описанный метод установления устойчивости — алгоритмом Рауса.

Аналогичное преобразование критерия устойчивости, установленного в теореме 2 п. 4 гл. 2, приводит к вычислительной схеме, не дающей никакого реального выигрыша по сравнению со схемой Рауса. Действительно, хотя эта схема и будет вдвое короче (в ней будет только $[n/2] + 1$ строк), но каждая строка будет получаться по более сложным формулам (4).

3. Теоремы Гурвица и Лъснара — Шипара

В этом пункте мы предполагаем, что читатель владеет теорией определителей.

Пусть, как и выше,

$$f = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 > 0,$$

— произвольный многочлен с вещественными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом.

Условимся считать, что коэффициенты a_k определены для всех неотрицательных k , причем $a_k = 0$ при $k > n$ (фактически нам понадобятся эти коэффициенты только при $k \leq 2n$).

Определение 1. Матрицей Гурвица многочлена f называется квадратная матрица n -го порядка, имеющая вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

При четном n последняя строка матрицы Гурвица имеет вид

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ a_2 \ a_4 \ \dots \ a_n),$$

а при нечетном n — вид

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ a_1 \ a_3 \ \dots \ a_n).$$

В последнем столбце матрицы Гурвица может быть отличен от нуля лишь последний элемент a_n .

Определителями Гурвица $D_1, \dots, D_n$ многочлена f называются главные миноры его матрицы Гурвица. Таким образом,

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

Заметим, что $D_n = a_n D_{n-1}$.

Обратим внимание, что первой (второй) строкой матрицы Гурвица является вторая (первая) строка схемы Рауса. Поэтому матрицу Гурвица, пользуясь обозначениями из схемы Рауса, мы можем переписать в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} c_0^{(2)} & c_1^{(2)} & \dots & c_{n-1}^{(2)} \\ c_0^{(1)} & c_1^{(1)} & \dots & c_{n-1}^{(1)} \\ 0 & c_0^{(2)} & \dots & c_{n-2}^{(2)} \\ 0 & c_0^{(1)} & \dots & c_{n-2}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Предположим теперь, что построение схемы Рауса для многочлена f останавливается на p -й строке ($p \geq 2$). Тогда $c_0^{(2)} \neq 0, \dots, c_0^{(p)} \neq 0$ и $c_0^{(p+1)} = 0$. В частности, $c_0^{(2)} \neq 0$, и потому определено число $c_0^{(0)}/c_0^{(2)} = a_0/a_1$.

Преобразуем матрицу Гурвица, вычитая из каждой строки с четным номером предыдущую строку, умноженную на $c_0^{(1)}/c_0^{(2)}$. Тогда в каждой четной строке мы получим, очевидно, соответствующим образом сдвинутую третью строку схемы Рауса:

$$\begin{vmatrix} c_0^{(2)} & c_1^{(2)} & \dots & c_{n-1}^{(2)} \\ 0 & c_0^{(3)} & \dots & c_{n-2}^{(3)} \\ 0 & c_0^{(2)} & \dots & c_{n-2}^{(2)} \\ 0 & 0 & \dots & c_{n-3}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Оставляя без изменения первые две строки получившейся матрицы, сделаем над остальными строками аналогичное преобразование, а именно, из каждой строки с нечетным номером вычтем предыдущую, умноженную на число $c_0^{(2)}/c_0^{(3)}$ (это число определено, так как по условию $c_0^{(3)} \neq 0$). В результате в каждой нечетной строке (кроме первой, которую мы не трогали) появится вместо второй строки схемы Рауса ее четвертая строка (соответствующим образом сдвинутая).

На следующем шаге мы аналогичным образом преобразуем все строки, кроме первых трех (в четных строках, начиная с четвертой, появится пятая строка схемы Рауса), и т. д.

После p шагов мы получим из матрицы Гурвица матрицу

$$\begin{vmatrix} c_0^{(2)} & c_1^{(2)} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_0^{(3)} & c_1^{(3)} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_0^{(4)} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_0^{(p+1)} & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & c_0^{(p)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \quad (1)$$

первые p строк и столбцов которой составляют треугольную матрицу

$$\begin{vmatrix} c_0^{(2)} & c_1^{(2)} & . & . & . & . & . \\ 0 & c_0^{(3)} & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & c_0^{(4)} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_0^{(p+1)} \end{vmatrix} \quad (2)$$

с элементами начального столбца схемы Рауса на главной диагонали (кроме его первого элемента $c_0^{(1)} = a_0$).

Главными минорами порядка не большего p матрицы (1), т. е. главными минорами треугольной матрицы (2), являются, очевидно, последовательные произведения элементов главной диагонали

$$c_0^{(2)}, c_0^{(2)}c_0^{(3)}, \dots, c_0^{(2)}c_0^{(3)} \dots c_0^{(p+1)}. \quad (3)$$

Но ясно, что при описанных преобразованиях главные миноры не меняются. Следовательно, числа (3) совпадают с определителями Гурвица $D_1, D_2, \dots, D_p$. Поскольку $c_0^{(p+1)} = 0$, тем самым доказано следующее предложение:

Предложение 1. Если построение схемы Рауса останавливается на p -й строке, то p -й определитель Гурвица многочлена f равен нулю, а предыдущие определители Гурвица являются последовательными произведениями элементов начального столбца схемы Рауса, начиная со второго:

$$D_1 = c_0^{(2)}, \quad D_2 = c_0^{(2)}c_0^{(3)}, \quad \dots, \quad D_{p-1} = c_0^{(2)}c_0^{(3)} \dots c_0^{(p)},$$

и потому все отличны от нуля. $\square$

Из предложения 1 и теоремы Рауса немедленно вытекает теперь следующая теорема:

Теорема 1 (теорема Гурвица для многочлена с вещественными коэффициентами). Многочлен f с вещественными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом a_0 тогда

и только тогда устойчив, когда все его определители Гурвица положительны:

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0. \quad \square$$

Для выяснения устойчивости конкретных многочленов (с данными числовыми коэффициентами), алгоритм Рауса удобнее теоремы Гурвица. Более того, если для такого многочлена надо вычислить определитель Гурвица, то проще всего (по крайней мере в регулярном случае) составить схему Рауса и вычислить определитель Гурвица, пользуясь предложением 1. Однако для изучения устойчивости многочленов «в общем виде» (с буквенными коэффициентами) удобнее конечно, критерий Гурвица.

Основой изложенного доказательства теоремы Гурвица является предложение 1, выражающее элементы начального столбца схемы Рауса через определители. Оказывается, что аналогичное предложение имеет место и для общей таблицы (3) п. 2.

Пусть

$$F = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

— произвольный многочлен с вещественными коэффициентами степени n с положительным старшим коэффициентом a_0 , а

$$G = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

— произвольный многочлен степени, не большей $n - 1$. (Таким образом, мы здесь отказываемся от стандартного соглашения предполагать старший коэффициент многочлена обязательно отличным от нуля.) Будем считать, что числа a_k и b_k определены для всех k , причем $a_k = 0$, если $k > n$, и $b_k = 0$, если $k \geq n - 1$.

Определение 2. Квадратная матрица

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{2n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{2n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{2n-1} \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

порядка $2n$ называется *матрицей Гурвица* многочленов F и G . Ее главные миноры четного порядка

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & b_0 \end{vmatrix} = a_0 b_0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix},$$

.....

называются *определителями Гурвица* многочленов F и G .

Заметим, что если степень многочлена G меньше $n-1$, то $\Delta_1 = 0$. $\square$

Пусть

$$R = c_0 x^{n-2} + \dots + c_{n-2}$$

— взятый с обратным знаком остаток от деления многочлена F на многочлен G . Мы не предполагаем, что степень многочлена R равна $n-2$, так что число c_0 вполне может быть равно нулю.

Пусть $\Delta'_1, \dots, \Delta'_{n-1}$ — определители Гурвица многочленов G и R .

Лемма 1. При $b_0 \neq 0$ (т. е. при $\Delta_1 \neq 0$) имеют место равенства

$$\Delta_2 = \Delta_1 \Delta'_1, \quad \Delta_3 = \Delta_1 \Delta'_2, \quad \dots, \quad \Delta_n = \Delta_1 \Delta'_{n-1}.$$

Доказательство. Коэффициенты многочлена R мы можем найти по формулам (2) п. 2, которые в используемых сейчас обозначениях имеют вид

$$c_i = \left(\frac{a_n}{b_0} b_{i+2} - a_{i+2} \right) + \frac{b_{i+1}}{b_0} \left(a_1 - \frac{a_0}{b_0} b_1 \right).$$

Руководствуясь этими формулами, преобразуем матрицу Гурвица многочленов F и G , вычитая из каждой нечетной строки, кроме первой, предыдущую строку, умноженную на $\frac{a_0}{b_0}$, и последующую строку, умноженную на $-\frac{1}{b_0} \left(a_1 - \frac{a_0}{b_0} b_1 \right)$. В результате мы,

очевидно, получим матрицу

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -c_0 & -c_1 & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Переставляя каждую нечетную строку, кроме первой, со следующей и меняя знак всех ее элементов, мы получим матрицу

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

выделенная часть которой является не чем иным, как матрицей Гурвица многочленов G и R .

Лемма 1 вытекает отсюда непосредственно, поскольку все сделанные преобразования не меняют, очевидно, главных миноров четного порядка. $\square$

Рассмотрим теперь таблицу (3) п. 2, построенную для многочленов F и G . Пусть, как в п. 2, p — число ее строк. (Заметим, что теперь возможен случай $p=1$; он имеет место тогда и только тогда, когда степень многочлена G меньше $n-1$.)

Предложение 2. *Определитель Гурвица Δ_p многочленов F и G равен нулю. Предшествующие определители выражаются через элементы начального столбца таблицы (3) п. 2 по формулам*

$$\Delta_1 = a_0^{(1)} a_0^{(2)}, \quad \Delta_2 = a_0^{(1)} (a_0^{(2)})^2 a_0^{(3)}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad \Delta_{p-1} = a_0^{(1)} (a_0^{(2)})^2 \dots (a_0^{(p-1)})^2 a_0^{(p)}.$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу строк p . При $p=1$ утверждение очевидно. Пусть

оно уже доказано для любых многочленов F и G , для которых число строк в таблице (3) п. 2 равно $p-1$. Рассмотрим многочлены F и G , для которых это число равно p .

Вспомнив происхождение таблицы (3) п. 2, мы немедленно получим, что аналогичной таблицей для многочленов G и R , где R , как и выше, — взятый с обратным знаком остаток от деления многочлена F на многочлен G , является таблица из $p-1$ строк, получающаяся из таблицы для многочленов F и G вычеркиванием первой строки. Поэтому, согласно предположению индукции,

$$\Delta'_1 = a_0^{(3)} a_0^{(3)}, \Delta'_2 = a_0^{(2)} (a_0^{(3)})^2 a_0^{(4)}, \dots \\ \dots, \Delta'_{p-2} = a_0^{(2)} (a_0^{(3)})^2 \dots (a_0^{(p-1)})^2 a_0^{(p)}, \Delta'_{p-1} = 0,$$

где, как и выше, $\Delta'_1, \dots, \Delta'_{p-1}$ — определители Гурвица многочленов G и R . Предложение 1 непосредственно следует теперь из леммы 1 (напомним, что по построению $a_0^{(1)} = a_0$ и $a_0^{(2)} = b_0$). $\square$

Из предложения 2 вытекает, что определители $\Delta_1, \dots, \Delta_p$ положительны тогда и только тогда, когда положительны числа $a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(p)}$ (напомним, что по условию $a_0^{(1)} = a_0 > 0$). Поэтому согласно предложению 3 п. 2 имеет место следующая теорема:

Теорема 2. Пусть $S = \frac{G}{F}$, где F — многочлен степени n с положительным старшим коэффициентом, а G — многочлен степени, не большей $n-1$. Равенство $\text{Ind } S = n$ имеет место тогда и только тогда, когда все определители Гурвица многочленов F и G положительны:

$$\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad \square$$

Задача. Докажите, что если многочлены F и G взаимно просты и все их определители Гурвица отличны от нуля (имеет место регулярный случай), то индекс рациональной функции $S = \frac{G}{F}$ выражается (при $a_0 > 0$) формулой

$$\text{Ind } S = n - 2 \text{ ЧПЗ } \left(1, D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}} \right)$$

или (что равносильно) формулой

$$\text{Ind } S = n - 2 [\text{ЧПЗ } (1, D_1, D_2, \dots) + \text{ЧПЗ } (1, D_2, D_3, \dots)].$$

Задача. Условимся считать, что если в последовательности $a_1, \dots, a_n$ имеется k последовательных нулей, то они вносят вклад в ЧПЗ, равный $\frac{k}{2}$, если k четно, и равный $\frac{1}{2} \left[k + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \varepsilon \right]$, где $\varepsilon = +1$, если нули окаймлены числами одного знака, и $\varepsilon = -1$, если они окаймлены числами разных знаков. Покажите, что при этом соглашении утверждение предыдущей задачи останется в силе и в нерегулярном случае.

Применим теорему 2 к задаче характеристики устойчивого многочлена f степени n (вообще говоря, с комплексными коэффициентами). Пусть, как всегда, $f(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega)$, и пусть $\tilde{g} = (-1)^n g$, $\tilde{h} = (-1)^{n-1} h$, если $n = 2m$, и $\tilde{g} = (-1)^n h$, $\tilde{h} = (-1)^n g$, если $n = 2m + 1$. Согласно замечанию 1 к теореме 1 п. 4 гл. 2 многочлен f тогда и только тогда устойчив, когда $\text{Ind} \frac{\tilde{h}}{\tilde{g}} = n$. Поэтому имеет место следующая теорема:

Теорема 3 (теорема Гурвица для многочлена с комплексными коэффициентами). *Многочлен f с комплексными коэффициентами (и положительным старшим коэффициентом a_0) тогда и только тогда устойчив, когда положительные все определители Гурвица многочленов $\tilde{g}$ и $\tilde{h}$. $\square$*

Для многочлена f с вещественными коэффициентами многочлены $\tilde{g}$ и $\tilde{h}$ выражаются, как мы знаем, формулами

$$\tilde{g}(\omega) = a_0 \omega^n - a_2 \omega^{n-2} + \dots,$$

$$\tilde{h}(\omega) = a_1 \omega^{n-1} - a_3 \omega^{n-3} + \dots$$

Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — определители Гурвица этих многочленов. Чтобы вывести из теоремы Гурвица для многочленов с комплексными коэффициентами доказанную выше теорему Гурвица для многочленов с вещественными коэффициентами, достаточно, очевидно, показать, что определители Гурвица $D_1, \dots, D_n$ многочлена f связаны с определителями $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ формулами

$$\Delta_1 = a_0 D_1 D_0, \quad \Delta_2 = a_0 D_2 D_1, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_0 D_n D_{n-1}$$

(условно считается, что $D_0 = 1$), т. е. что для любых вещественных чисел $a_0, a_1, \dots, a_n$ и произвольного

$k = 1, \dots, n$ справедливо равенство

$$\begin{vmatrix}
 a_0 & 0 & -a_2 & 0 & a_4 & 0 & \dots \\
 0 & a_1 & 0 & -a_3 & 0 & a_5 & \dots \\
 0 & a_2 & 0 & -a_4 & 0 & a_6 & \dots \\
 0 & 0 & a_1 & 0 & -a_3 & 0 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{vmatrix}
 \begin{matrix}
 \text{порядка } 2k
 \end{matrix}
 =
 \begin{vmatrix}
 a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\
 a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\
 0 & a_1 & a_3 & \dots \\
 0 & a_0 & a_2 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{vmatrix}
 \cdot
 \begin{vmatrix}
 a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\
 a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\
 0 & a_1 & a_3 & \dots \\
 0 & a_0 & a_2 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{vmatrix}
 \begin{matrix}
 \text{порядка } k-1
 \end{matrix}$$

Доказательство немедленно получится, если мы левый определитель сначала разложим по элементам первого столбца, а затем оставшийся определитель порядка $2k - 1$ разложим, пользуясь теоремой Лапласа, в сумму произведений миноров порядка k , содержащихся в его нечетных столбцах, на дополнительные миноры порядка $k - 1$ (взятые с соответствующими знаками). В этой сумме будет только один член (а именно, произведение, стоящее справа), поскольку все остальные миноры порядка k , содержащиеся в нечетных строках, равны нулю. $\square$

Задача. Проведите подробно это доказательство (и, в частности, вычислите все знаки).

Задача. Докажите, что для многочлена f с произвольными коэффициентами определитель Гурвица Δ_k , $k = 1, \dots, n$, многочленов g и h выражаются через коэффициенты многочлена f по формуле

$$\Delta_k = \frac{-1}{2^k} \begin{vmatrix}
 a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\
 a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 & a_4 & \dots \\
 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\
 0 & a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{vmatrix}$$

Теорема 2 может быть обобщена в направлении, указанном в замечании 1. Мы этим заниматься не будем.

Напротив, обобщение на случай, когда степень многочлена G равна n , нам понадобится.

Пусть многочлен F тот же, что и выше, и пусть G — произвольный многочлен степени, не большей n .

Мы запишем многочлен G в виде

$$G = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n.$$

(Таким образом, в случае, когда степень многочлена G меньше n , введенные сейчас обозначения для коэффициентов многочлена G не будут совпадать с обозначениями, использовавшимися ранее. Чтобы сохранить прежние обозначения, пришлось бы обозначать старший коэффициент многочлена G символом b_{-1} .)

Определение 3. Матрицей Гурвица многочленов F и G называется квадратная матрица порядка $2n$, имеющая вид

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{2n-1} \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{2n-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & b_0 & \dots & b_{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

а ее главные миноры четного порядка называются *определятелями Гурвица* многочленов F и G . (Как и выше, мы считаем, что числа a_k и b_k определены для всех $k \geq 0$, причем $a_k = b_k = 0$ при $k > n$.)

Заметим, что это определение *согласуется* с определением для случая, когда степень многочлена G меньше n (т. е. при $b_0 = 0$ мы получаем, с точностью до обозначений, прежнюю матрицу Гурвица).

Докажем теперь следующее предложение:

Предложение 3. Теорема 2 остается в силе и для случая, когда степень многочлена G равна n .

Доказательство. Так как степени многочленов F и G одинаковы, то число перемен знака в двучленной последовательности $F(a)$, $G(a)$ одно и то же как при $a = -\infty$, так и при $a = +\infty$. Следовательно, при вычислении индекса функции $S = \frac{G}{F}$ по методу Штурма (предложение 1 п. 2) мы можем в ряду Штурма отбросить первый член, т. е. строить ряд Штурма многочленов G и R , где, как и выше, R — взятый с обратным знаком остаток от деления многочлена F на многочлен G . Это показывает, что $\text{Ind } \frac{G}{F} = \text{Ind } \frac{R}{G}$.

С другой стороны, поскольку степень остатка R меньше степени n многочлена G , к рациональной функции $\frac{R}{G}$ применима теорема 1. Поэтому для до-

казательства предложения 3 достаточно доказать следующую лемму (ср. лемму 1):

Лемма 2. *Определители Гурвица многочленов F и G совпадают с определителями Гурвица многочленов G и R .*

Доказательство. Пусть

$$R = c_0 x^{n-1} + \dots + c_{n-1}.$$

Так как

$$F = \frac{a_0}{b_0} G - R,$$

то

$$c_k = \frac{a_0}{b_0} b_{k-1} - a_{k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Следовательно, если из каждой четной строки матрицы Гурвица

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ 0 & c_0 & c_1 & \dots \\ 0 & b_2 & b_1 & \dots \\ 0 & 0 & c_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

многочленов G и R мы вычтем предыдущую строку, умноженную на $\frac{a_0}{b_0}$, то получится матрица

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots \\ 0 & b_2 & b_1 & \dots \\ 0 & -a_2 & -a_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Переставив в получившейся матрице каждую четную строку с предыдущей и одновременно изменив знак всех ее элементов, мы, очевидно, получим матрицу Гурвица многочленов F и G .

Поскольку при всех этих преобразованиях главные миноры четного порядка, как легко видеть, не меняются, тем самым лемма 2 полностью доказана. $\square$

Вместе с тем доказано и предложение 3. $\square$

Возвращаясь к исследованию устойчивости многочлена

$$f = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 > 0,$$

с вещественными коэффициентами (и с $a_0 > 0$), мы применим теорему 2 (с учетом предложения 4) к многочленам G и H , связанным с многочленом f соотношением

$$f(z) = G(z^2) + zH(z^2),$$

т. е. к многочленам

$$G = \begin{cases} a_1 x^m + a_3 x^{m-1} + \dots + a_n, & \text{если } n = 2m + 1, \\ a_0 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_n, & \text{если } n = 2m, \end{cases}$$

$$H = \begin{cases} a_0 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_{n-1}, & \text{если } n = 2m + 1, \\ a_1 x^{m-1} + a_3 x^{m-2} + \dots + a_{n-1}, & \text{если } n = 2m. \end{cases}$$

Согласно теореме 2 п. 4 гл. 2 многочлен f с положительными коэффициентами тогда и только тогда устойчив, когда $\text{Ind} \frac{-G}{H} = m$ при $n = 2m + 1$ и

$\text{Ind} \frac{H}{G} = m$ при $n = 2m$. Поэтому при $n = 2m + 1$ мы должны рассмотреть определители Гурвица многочленов H и $-G$, а при $n = 2m$ — многочленов G и H .

Но при $n = 2m + 1$ матрица Гурвица многочленов H и $-G$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ -a_1 & -a_3 & -a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ 0 & -a_1 & -a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

и, значит, превращается в матрицу Гурвица многочлена f , когда каждую строку с нечетным номером мы переставим со следующей строкой, одновременно изменив знак всех ее членов. Поскольку главные миноры четного порядка при этой операции, очевидно, не меняются, этим доказано, что при $n = 2m + 1$ определители Гурвица многочленов H и $-G$ являются определителями Гурвица многочлена f четного порядка. $\square$

Если же $n = 2m$, то матрица Гурвица многочленов G и H имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Мы видим, что при вычеркивании из этой матрицы первого столбца и первой строки получается матрица Гурвица многочлена f . Следовательно, ее главные миноры равны умноженным на $a_0 > 0$ главным минорам матрицы Гурвица многочлена f на единицу меньшего порядка. Таким образом, при $n = 2m + 1$ определители Гурвица многочленов G и H совпадают с определителями Гурвица многочлена f нечетного порядка. $\square$

Эти замечания в сочетании с теоремой 2 и теоремой 2 п. 4 гл. 2 немедленно приводят к следующей теореме:

Теорема 4 (теорема Лъенара — Шипара). Многочлен f нечетной (четной) степени n с положительными вещественными коэффициентами тогда и только тогда устойчив, когда положительные его определители Гурвица четного (нечетного) порядка:

$D_2 > 0, D_4 > 0, \dots, D_{n-1} > 0$, если n нечетно,

$D_1 > 0, D_3 > 0, \dots, D_{n-1} > 0$, если n четно. $\square$

Как и следовало ожидать, эта теорема по сравнению с теоремой Гурвица требует для доказательства устойчивости данного многочлена проверки вдвое меньшего числа детерминантных неравенств. Впрочем на практике это преимущество довольно эфемерно, поскольку для вычисления каждого определителя Гурвица по существу необходимо вычислить все определители меньшего порядка (ср. конец п. 2).

З а м е ч а н и е 1. В сочетании с теоремой Гурвица теорема Лъенара — Шипара показывает, что если все элементы матрицы Гурвица некоторого многочлена положительны, то из положительности ее главных миноров четного (нечетного) порядка вытекает положительность ее главных миноров нечетного (четного) порядка.

Было бы очень интересно найти прямое доказательство этого утверждения.

З а м е ч а н и е 2. Как вытекает из замечания 1 к теореме 2 п. 4 гл. 2, теорема Лъенара — Шипара остается в силе, если у многочлена f положительны лишь коэффициенты $a_0, a_2, \dots, a_{2m}$ с четными индексами, а при $n = 2m + 1$ — еще и коэффициент a_n .

Задача. Докажите, что если $a_1 > 0, a_{n-1} > 0, a_n > 0$ и $a_0 > 0, a_2 > 0, \dots, a_{2n-2} > 0$, то $D_2 > 0, \dots, D_{2n} > 0$ тогда и только тогда, когда $D_1 > 0, \dots, D_{2n-1} > 0$, а при $n = 2m + 1$ еще и $D_{2m+1} > 0$.

4. Квадратичная форма, ассоциированная с рациональной функцией

Квадратичной формой от n переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$ называется однородный многочлен второй степени по совокупности переменных:

$$\Phi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ при $i > j$, или, в развернутом виде,

$$\Phi(\xi_1, \dots, \xi_n) = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + \dots + 2a_{1n}\xi_1\xi_n +$$

$$+ a_{22}\xi_2^2 + \dots + 2a_{2n}\xi_2\xi_n +$$

$$\dots \dots \dots$$

$$+ a_{nn}\xi_n^2.$$

Такой многочлен однозначно определяется симметрической матрицей

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

называемой *матрицей квадратичной формы* Φ . Глав-
ные миноры

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

этой матрицы называются *главными минорами* формы Φ .

При $\xi_1 = 0, \dots, \xi_l = 0$ любая квадратичная форма равна нулю. Если при всех остальных значениях переменных $\xi_1, \dots, \xi_l$ квадратичная форма принимает положительные значения:

$\Phi(\xi_1, \dots, \xi_n) > 0$, если $(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (0, \dots, 0)$,
то форма называется *положительно определенной*.

Нам будет нужна следующая теорема:

Теорема Сильвестра. *Квадратичная форма тогда и только тогда положительно определена, когда все ее главные миноры положительны.*

Доказательство этой теоремы можно найти в любом учебнике по высшей алгебре.

В этом пункте мы изложим изящный метод доказательства основной теоремы 2 предыдущего п. 3, использующий вместо рядов Штурма квадратичные формы. Никаких свойств квадратичных форм, кроме теоремы Сильвестра, нам не понадобится.

Простейшей дробью называется рациональная функция вида

$$\frac{A}{(x - x_0)^v}, \quad (1)$$

где $A \neq 0$ и x_0 — произвольные, вообще говоря, комплексные числа, а v — натуральное число. Эта функция имеет единственный полюс x_0 , и порядок этого полюса равен v . Простейшая дробь (1) называется *вещественной*, если числа A и x_0 вещественны. Простейшей дробью, *комплексно сопряженной* с (невещественной) дробью (1), называется простейшая дробь

$$\frac{\bar{A}}{(x - \bar{x}_0)^v}.$$

Лемма 1. *Любая (не обязательно вещественная) рациональная функция S разлагается в сумму простейших дробей и некоторого многочлена Q . Если рациональная функция S вещественна, то простейшие дроби, в сумму которых она разлагается, либо вещественны, либо попарно комплексно сопряжены.*

Доказательство. Пусть n — число полюсов (вообще говоря, комплексных) функции S (каждый полюс считается столько раз, каков его порядок). Если $S = \frac{G}{F}$ — несократимая запись функции S в виде отношения двух многочленов, то n равно степени многочлена F .

Проведем индукцию по числу n .

Если $n = 0$, то многочлен F является отличным от нуля постоянным числом и, значит, функция S представляет собой многочлен. Поэтому в этом случае лемма 1 тривиальным образом верна.

Предположим, что лемма I уже доказана для всех рациональных функций, число полюсов которых меньше n , и рассмотрим рациональную функцию S с числом полюсов, равным n .

Пусть x_0 — произвольный полюс функции S и v_0 — его порядок, а A_0 — главный коэффициент. Положим

$$S_1(x) = S(x) - \frac{A_0}{(x - x_0)^{v_0}}.$$

Так как по определению

$$A_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{v_0} S(x),$$

то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{v_0} S_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{v_0} S(x) - A_0 = 0,$$

и, следовательно, точка x_0 либо вообще не является полюсом функции S_1 , либо будет полюсом, но порядка, меньшего чем v_0 . С другой стороны, ясно, что любой полюс функции S , отличный от полюса x_0 , является полюсом функции S_1 и притом того же порядка. При этом точка, не являющаяся полюсом функции S , не будет полюсом и функции S_1 . Следовательно, число полюсов функции S_1 меньше n , и потому согласно предположению индукции функция S_1 разлагается в сумму многочлена и простейших дробей. Присоединив к этой сумме дробь $\frac{A_0}{(x - x_0)^{v_0}}$, мы и получим разложение функции S .

Тем самым первое утверждение леммы I по индукции полностью доказано.

Если функция S вещественна, то ее полюса (являясь корнями многочлена F с вещественными коэффициентами) либо вещественны, либо попарно комплексно сопряжены. Кроме того, согласно формуле (1) п. 3 гл. 2 главные коэффициенты вещественных полюсов вещественны, а комплексно сопряженных — комплексно сопряжены. Это, очевидно, доказывает и второе утверждение леммы. $\square$

Задача. Докажите, что разложение рациональной функции в сумму многочлена и простейших дробей единственно (если, конечно, все слагаемые, отличающиеся только числителями, объединены в одну дробь).

З а м е ч а н и е 1. Участвующий в разложении рациональной функции на простейшие дроби многочлен

Q является, как нетрудно сообразить, частным от деления с остатком ее числителя G на знаменатель F . Поэтому, если, например, степень m многочлена G меньше степени n многочлена F , то многочлен Q равен нулю, а если $m = n$, то он является отличным от нуля постоянным числом (равным отношению b_0/a_0 старших коэффициентов многочленов G и F).

З а м е ч а н и е 2. Как показывает доказательство леммы 1, в разложение рациональной функции S входят лишь простейшие дроби (1), для которых числа x_0 являются полюсами функции S , а показатель ν не превосходит порядка ν_0 этого полюса. При этом простейшая дробь с $\nu = \nu_0$ входит обязательно (и соответствующий коэффициент A равен главному коэффициенту функции в полюсе x_0).

Если в разложение рациональной функции S на простейшие дроби (и многочлен) входит простейшая дробь вида $\frac{A}{x - x_0}$ (т. е. дробь с $\nu = 1$), то число A называется *вычетом* функции S в полюсе x_0 . Если такой дроби нет, то вычет считается равным нулю.

Ясно, что в полюсе *первого порядка* (с $\nu_0 = 1$) *вычет непременно отличен от нуля* (ибо он совпадает в этом случае с главным коэффициентом в этом полюсе).

Стоит также заметить, что вычеты вещественной функции в комплексно сопряженных полюсах комплексно сопряжены.

Лемма 2. Любая рациональная функция $S = \frac{G}{F}$, степень m числителя G которой не превосходит степени n знаменателя F , разлагается в бесконечный ряд вида

$$S(x) = t_0 + \frac{t_1}{x} + \frac{t_2}{x^2} + \dots + \frac{t_k}{x^k} + \dots, \quad (2)$$

сходящийся для всех достаточно больших $|x|$.

Если функция S вещественна, то все числа $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$ вещественны.

Доказательство. Для простейшей дроби $\frac{A}{x - x_0}$ возможность разложения (2) немедленно вытекает из формулы суммы бесконечной геометрической

прогрессии:

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-x_0} &= \frac{A}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{x_0}{x}} = \frac{A}{x} \left(1 + \frac{x_0}{x} + \frac{x_0^2}{x^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{A}{x} + \frac{Ax_0}{x^2} + \frac{Ax_0^2}{x^3} + \dots, \quad (2_1)\end{aligned}$$

а для простейших дробей вида $\frac{A}{(x-x_0)^v}$ с $v > 1$ оно получается возведением в v -ю степень этой формулы:

$$\begin{aligned}\frac{A}{(x-x_0)^v} &= \frac{A}{x^v} \left(1 - \frac{1}{1-\frac{x_0}{x}} \right)^v = \frac{A}{x^v} \left(1 + \frac{x_0}{x} + \frac{x_0^2}{x^2} + \dots \right)^v = \\ &= \frac{A}{x^v} \left(1 + \frac{vx_0}{x} + \frac{v(v+1)}{2} \frac{x_0^2}{x^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{A}{x^v} + \frac{Avx_0}{x^{v+1}} + \frac{Av(v+1)x_0^2}{2x^{v+2}} + \dots \quad (2_v)\end{aligned}$$

Следовательно, ряд (2) мы получим, просуммировав ряды (2_v) для всех простейших дробей, суммой которых является функция S (и прибавив при $m = n$ число $t_0 = \frac{b_0}{a_0}$). Ряды (2_v) сходятся при $|x| > |x_0|$. По-

этому ряд (2) будет сходиться при $|x| > \max(|x_1|, \dots, |x_s|)$, где $x_1, \dots, x_s$ — все полюсы функции S .

Для вещественной функции S ряды (2_v) либо вещественны, либо попарно комплексно сопряжены. Поэтому их сумма (2) вещественна (имеет вещественные коэффициенты).

Тем самым, лемма 2 полностью доказана. $\square$

Это доказательство не только устанавливает существование ряда (2), но и позволяет вычислять его коэффициенты. Например, поскольку члены вида A/x содержат только ряды (2₁), из него непосредственно вытекает следующая лемма:

Лемма 3. Коэффициент t_1 ряда (2) является суммой вычетов функции S во всех ее полюсах (в том числе и комплексных). $\square$

Для произвольной вещественной рациональной функции S , удовлетворяющей условиям леммы 2, мы,

обозначив через n число ее полюсов (сосчитанных столько раз, каков их порядок), т. е. степень знаменателя P несократимой записи функции S , составим из первых $2n - 1$ коэффициентов $t_1, t_2, \dots, t_{2n-1}$ ряда (2) симметрическую матрицу

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_n \\ t_2 & t_3 & \dots & \dots & t_{n+1} \\ t_3 & t_4 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_n & t_{n+1} & \dots & \dots & t_{2n-1} \end{vmatrix}$$

порядка n и рассмотрим соответствующую квадратичную форму

$$\Phi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n t_{i+j-1} \xi_i \xi_j. \quad (3)$$

Заметим, что коэффициент t_0 в квадратичной форме Φ не участвует.

Определение 1. Квадратичная форма (3) называется *ганкелевой формой, ассоциированной с вещественной рациональной функцией S* .

Пусть $x_1, \dots, x_s$ — все вещественные полюсы нечетного порядка функции S , и пусть $A_1, \dots, A_s$ — их главные коэффициенты. Ясно, что число $n - s$ четно.

Предложение 1. Существует n линейных форм

$$\eta_1, \dots, \eta_s, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-s}$$

с вещественными коэффициентами от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, через которые ганкелева форма Φ , ассоциированная с функцией S , выражается по формуле

$$\Phi = A_1 \eta_1^2 + \dots + A_s \eta_s^2 + \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_3 \zeta_4 + \dots + \zeta_{n-s-1} \zeta_{n-s}.$$

Доказательство. Пусть

$$H(x) = \xi_1 + \xi_2 x + \dots + \xi_n x^{n-1}.$$

Рассмотрим вспомогательную рациональную функцию

$$S_1(x) = S(x) H(x)^2,$$

зависящую от параметров $\xi_1, \dots, \xi_n$ и имеющую те же полюсы, что и функция S . Согласно формуле (2)

$$S_1(x) = \left(t_0 + \frac{t_1}{x} + \dots + \frac{t_n}{x^n} + \dots \right) (\xi_1 + \xi_2 x + \dots + \xi_n x^{n-1})^2.$$

Раскрыв скобки в произведении умножение, мы получим для функции S_z разложение в ряд вида (2). Коэффициент при $\frac{1}{z}$ в этом ряде, очевидно, равен

$$\begin{aligned}
 & i_1 \xi_1^2 + 2i_2 \xi_1 \xi_2 + \dots + 2i_n \xi_1 \xi_n + \\
 & + i_3 \xi_2^2 + \dots + 2i_{n+1} \xi_2 \xi_n + \\
 & \dots \dots \dots + i_{2n-1} \xi_n^2
 \end{aligned}$$

т. е. равен ганкелевой форме (3). В силу леммы 3 этим доказано, что ганкелева форма, ассоциированная с функцией S_t , равна сумме всех вычетов этой функции.

Поэтому предложение 1 вытекает из следующей леммы:

Лемма 4. Пусть x_0 — произвольный полюс функции S , и пусть ν_0 — его порядок. Если этот полюс вещественный и $\nu_0 = 2\mu_0 + 1$ нечетно, то существуют такие линейные формы $\eta_0, \xi_1, \dots, \xi_{\mu_0}$, с вещественными коэффициентами от переменных $\xi_1, \dots, \xi_{\mu_0}$, что вычет R_2 функции S в полюсе x_0 выражается формулой

$$R_k = A_0 n_0^2 + \zeta_1 \zeta_2 + \dots + \zeta_{2k-1} \zeta_{2k},$$

где A_0 — главный коэффициент функции S в полюсе x_0 ,

Если x_0 — вещественный полюс, то порядок $v_0 = 2\mu_0$ четен, то аналогично

$$R_i = \zeta_1 \zeta_2 + \dots + \zeta_{2i-1} \zeta_{2i},$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2k-1}, \xi_{2k}$ — некоторые линейные формы от $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Наконец, если полюс x_0 не вещественный, то существуют такие линейные формы $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2n}$ с вещественными коэффициентами от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, что сумма $R_1 + \bar{R}_1$ вычетов функции S_1 в полюсе x_0 и в комплексно сопряженном полюсе $\bar{x}_0$ выражается формулой

$$R_k + \bar{R}_k = \zeta_1 \zeta_2 + \dots + \zeta_{2v_1-1} \zeta_{2v_1}$$

Доказательство. По определению вычет R_k равен числителю простейшей дроби со знаменателем $x - x_0$, участвующей в разложении рациональной функции S_k на простейшие дроби. С другой стороны,

чтобы найти это разложение, достаточно разложение на простейшие дроби функции S умножить на многочлен H^2 и разложить каждое слагаемое в сумму простейших дробей (и затем привести подобные члены). Для этого удобно представить предварительно многочлен H^2 в виде многочлена от $x - x_0$. Мы положим

$$H = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1}.$$

Ясно, что коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ являются линейными формами от $\xi_1, \dots, \xi_n$ (вообще говоря, с комплексными коэффициентами):

$$c_0 = \xi_1 + x_0 \xi_2 + \dots + x_0^{n-1} \xi_n = H(x_0),$$

$$c_1 = \xi_2 + 2x_0 \xi_3 + \dots + (n-1)x_0^{n-2} \xi_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

(вообще, по формуле Тейлора $c_k = \frac{1}{k!} H^{(k)}(x_0)$; однако явные выражения коэффициентов c_k — кроме коэффициента c_0 — нам не понадобятся). Возводя в квадрат и приводя подобные члены, мы получим для H^2 следующее выражение:

$$\begin{aligned} H^2 = & c_0^2 + 2c_0c_1(x_1 - x_0) + (2c_0c_1 + c_0^2)(x_1 - x_0)^2 + \dots \\ & \dots + (2c_0c_{2k-1} + 2c_1c_{2k-2} + \dots + 2c_{k-1}c_k)(x - x_0)^{2k-1} + \\ & + (2c_0c_{2k} + 2c_1c_{2k-1} + \dots + 2c_{k-1}c_{k+1} + c_k^2)(x - x_0)^{2k} + \dots \\ & \dots + 2c_{n-2}c_{n-1}(x - x_0)^{2n-3} + c_{n-1}^2(x - x_0)^{2n-2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Ясно, что простейшая дробь со знаменателем $x - x_0$ может получиться после умножения на H^2 только из простейшей дроби вида $\frac{A_v}{(x - x_0)^v}$, где $v = 1, \dots, v_0$. При этом, согласно формуле (4), числитель этой дроби будет равен

$$\begin{aligned} & A_v(2c_0c_{v-1} + 2c_1c_{v-2} + \dots + 2c_{\mu-1}c_\mu), \\ & \text{если } v = 2\mu, \\ & A_v(2c_0c_{v-1} + 2c_1c_{v-2} + \dots + 2c_{\mu-1}c_\mu + c_\mu^2), \\ & \text{если } v = 2\mu + 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно, умножив на H^2 разложение на простейшие дроби функции S и разложив каждый член

произведения на простейшие дроби, мы получим сумму простейших дробей, среди которых дробь со знаменателем $x - x_0$ будет иметь числитель R_2 , равный сумме по всем $v = 1, 2, \dots, v_0$ выражений (б). Вынося в этой сумме линейные формы $c_0, \dots, c_{\mu_0-1}$ за скобки, мы получим для R_2 формулу

$$R_2 = \begin{cases} c_0 d_0 + c_1 d_1 + \dots + c_{\mu_0-1} d_{\mu_0-1}, & \text{если } v_0 = 2\mu_0, \\ c_0 d_0 + c_1 d_1 + \dots + c_{\mu_0-1} d_{\mu_0-1} + A_0 c_{\mu_0}^2, & \text{если } v_0 = 2\mu_0 + 1, \end{cases} \quad (6)$$

где $A_0 = A_{v_0}$ — главный коэффициент функции S в полюсе x_0 , а $d_0, \dots, d_{\mu_0-1}$ — некоторые линейные комбинации форм $c_0, \dots, c_{\mu_0-1}$ (например, $d_0 = 2A_1 c_0 + 2A_2 c_1 + \dots + 2A_{v_0} c_{v_0-1}$), т. е. снова линейные формы от $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Если полюс x_0 вещественный, то все формы c_k, d_k имеют, очевидно, вещественные коэффициенты. Поэтому в этом случае равенства (б) доказывают лемму 4 (достаточно положить $\zeta_1 = c_0, \zeta_2 = d_0, \zeta_3 = c_1, \zeta_4 = d_1, \dots, \zeta_{2\mu_0-1} = c_{\mu_0-1}, \zeta_{2\mu_0} = d_{\mu_0-1}$ и $\eta_0 = c_{\mu_0}$ при $v_0 = 2\mu_0 + 1$).

Пусть теперь полюс x_0 не вещественный. Тогда для комплексно сопряженного полюса $\bar{x}_0$ формы c_k и d_k будут формами $\bar{c}_k$ и $\bar{d}_k$, получающимися из форм c_k и d_k для полюса x_0 заменой всех коэффициентов на комплексно сопряженные числа (а главным коэффициентом будет число $\bar{A}_0$, комплексно сопряженное с главным коэффициентом A_0 в полюсе x_0). Так как

$$cd + \bar{c}\bar{d} = \frac{(c + \bar{c})(d + \bar{d}) + (c - \bar{c})(d - \bar{d})}{2} = \gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{c + \bar{c}}{\sqrt{2}}, \quad \delta_1 = \frac{d + \bar{d}}{\sqrt{2}}, \quad \gamma_2 = \frac{c - \bar{c}}{i\sqrt{2}}, \quad \delta_2 = -\frac{d - \bar{d}}{i\sqrt{2}}.$$

¹⁾ В частности, мы видим, что при $v_0 = 1$ (т. е. в случае, когда x_0 — простой полюс) имеет место равенство $\eta_0 = c_0$.

и аналогично

$$Ac^2 + \bar{A}\bar{c}^2 = \gamma\delta,$$

где

$$\gamma = \frac{\sqrt{A}}{1-i} c + \frac{\sqrt{A}}{1+i} \bar{c},$$

$$\delta = (1-i)\sqrt{A} \cdot c + (1+i)\sqrt{A} \cdot \bar{c},$$

то, следовательно, лемма 4 верна и в этом случае, причем

$$\xi_1 = \frac{c_0 + \bar{c}_0}{\sqrt{2}},$$

$$\xi_2 = \frac{d_0 + \bar{d}_0}{\sqrt{2}},$$

$$\xi_3 = \frac{c_0 - \bar{c}_0}{i\sqrt{2}},$$

$$\xi_4 = -\frac{d_0 - \bar{d}_0}{i\sqrt{2}},$$

.....

$$\xi_{4\mu-3} = \frac{c_{\mu-1} + \bar{c}_{\mu-1}}{\sqrt{2}},$$

$$\xi_{4\mu-2} = \frac{d_{\mu-1} + \bar{d}_{\mu-1}}{\sqrt{2}},$$

$$\xi_{4\mu-1} = \frac{c_{\mu-1} - \bar{c}_{\mu-1}}{i\sqrt{2}},$$

$$\xi_{4\mu} = -\frac{d_{\mu-1} - \bar{d}_{\mu-1}}{i\sqrt{2}},$$

и (при нечетном $\nu = 2\mu_0 + 1$)

$$\xi_{4\mu+1} = \frac{\sqrt{A_0}}{1-i} c_{\mu} + \frac{\sqrt{A_0}}{1+i} \bar{c}_{\mu},$$

$$\xi_{4\mu+2} = (1-i)\sqrt{A_0} \cdot c_{\mu} + (1+i)\sqrt{A_0} \cdot \bar{c}_{\mu}.$$

Тем самым лемма 4 полностью доказана. Вместе с тем доказано и предложение 1. $\square$

В частном случае, когда $z = n$, т. е. когда все полюсы функции S вещественны и просты (имеют первый порядок), формы ξ_k отсутствуют и форма Φ выражается формулой $\Phi = A_1 \eta_1^2 + \dots + A_n \eta_n^2$. Кроме того, оказывается, что в этом случае формы $\eta_1, \dots, \eta_n$ линейно независимы, т. е. составленный из их коэффициентов определитель отличен от нуля.

Действительно, просматривая заново доказательство леммы 4, мы замечаем (см. подстрочное примечание на стр. 106), что форма η_k , соответствующая простому полюсу x_k , является не чем иным, как формой c_0 , и потому выражается формулой $\eta_k = H(x_k)$, т. е.

формулой

$$\eta_k = \xi_1 + x_k \xi_2 + \dots + x_k^{n-1} \xi_n, \quad k = 1, \dots, n.$$

Это показывает, что определитель, составленный из коэффициентов форм $\eta_1, \dots, \eta_n$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

т. е. является известным определителем Вандермонда. Из теории определителей известно, что он равен произведению всевозможных разностей $x_i - x_j$, $i > j$, и потому для попарно не совпадающих чисел $x_1, \dots, x_n$ отличен от нуля. Но это и означает, что формы $\eta_1, \dots, \eta_n$ линейно независимы. $\square$

Приведем для полноты вычисление определителя Вандермонда. При $n = 2$ он равен

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Пусть уже известно, что определитель Вандермонда V_{n-1} порядка $n-1$ (составленный для $x_1, \dots, x_{n-1}$) равен произведению всевозможных разностей $x_i - x_j$, где $1 \leq j < i \leq n-1$. Вычтем из каждого (кроме первого) столбца определителя Вандермонда V_n порядка n предыдущий столбец, умноженный на x_n . Тогда этот определитель примет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1^2 - x_1 x_n & \dots & x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_{n-1} x_n & \dots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2} x_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по элементам последней строки и вынося из i -й строки общий множитель $x_i - x_n = -(x_n - x_i)$, мы получим, что он равен $(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) V_{n-1}$, и, следовательно, в силу предположения индукции равен произведению всех разностей вида $x_i - x_j$, где $1 \leq j < i \leq n$. $\square$

Мы видим, таким образом, что справедливо следующее предположение:

Предложение 2. Если все полюсы рациональной функции вещественны и просты, то существуют такие линейно независимые линейные формы $\eta_1, \dots, \eta_n$ от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, что

$$\Phi = A_1 \eta_1^2 + \dots + A_n \eta_n^2, \quad (7)$$

где $A_1, \dots, A_n$ — вычеты рациональной функции S (в рассматриваемом случае все отличные от нуля). $\square$

Теперь мы можем доказать основную теорему этого пункта:

Теорема 1. Ганкелева форма Φ , ассоциированная с вещественной рациональной функцией S , тогда и только тогда положительно определена, когда

$$\text{Ind } S = n,$$

где, как и выше, n — число полюсов функции S , сосчитанных столько раз, каков их порядок.

Доказательство. Так как $\text{Ind } S \leq p \leq n$, где p — число вещественных полюсов функции S , считаемых без учета их порядков, то при $\text{Ind } S = n$ имеет место равенство $p = n$, означающее, что все полюсы функции S вещественны и просты. Поэтому применимо предложение 2, согласно которому форма S выражается формулой (7). С другой стороны, ввиду формулы (2) п. 3 гл. 2, которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\text{Ind } S = \sum_{k=1}^n \text{sign } A_k,$$

из равенства $\text{Ind } S = n$ следует, что $A_k > 0$ для всех $k = 1, \dots, n$. Это показывает, что форма (7) при всех значениях переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$ неотрицательна и равна нулю только тогда, когда $\eta_1 = 0, \dots, \eta_n = 0$. Но последние равенства представляют собой систему линейных однородных уравнений от $\xi_1, \dots, \xi_n$ с отличным от нуля определителем. Известно, что такая система может иметь только тривиальное решение $\xi_1 = 0, \dots, \xi_n = 0$. Следовательно, если $(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (0, \dots, 0)$, то $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_n) > 0$. Таким образом, форма Φ положительно определена.

Обратно, пусть форма Φ положительно определена. Согласно предложению 1 существуют такие линейные формы $\eta_1, \dots, \eta_s, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-s}$, что

$$\Phi = A_1 \eta_1 + \dots + A_s \eta_s + \zeta_1 \zeta_2 + \dots + \zeta_{n-s-1} \zeta_{n-s}. \quad (8)$$

Предположим, что $s < n$.

Случай 1. Формы $\eta_1, \dots, \eta_s, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-s}$ линейно независимы. Тогда равенства

$$\eta_1 = 0, \dots, \eta_s = 0, \quad \zeta_1 = 1, \quad \zeta_2 = -1,$$

$$\zeta_3 = 0, \dots, \zeta_{n-s} = 0$$

представляют собой систему неоднородных линейных уравнений относительно неизвестных $\xi_1, \dots, \xi_n$ с отличным от нуля определителем. Поэтому они имеют единственное решение $(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}) \neq (0, \dots, 0)$, и согласно (8)

$$\Phi(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}) = -1.$$

Поскольку это противоречит положительной определенности формы Φ , тем самым доказано, что случай 1 невозможен.

Случай 2. Формы $\eta_1, \dots, \eta_s, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-s}$ линейно зависимы. Тогда нетривиальное решение $(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}) \neq (0, \dots, 0)$ будет иметь система однородных линейных уравнений

$$\eta_1 = 0, \dots, \eta_s = 0, \quad \zeta_1 = 0, \dots, \zeta_{n-s} = 0,$$

и для этого решения

$$\Phi(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}) = 0.$$

Поскольку это снова противоречит положительной определенности формы Φ , случай 2 также невозможен.

Следовательно, $s = n$, и потому все полюсы функции S вещественны и просты. Значит, согласно предложению 2 форма Φ имеет вид

$$\Phi = A_1 \eta_1^2 + \dots + A_n \eta_n^2,$$

где $\eta_1, \dots, \eta_n$ — линейно независимые линейные формы.

Так как формы $\eta_1, \dots, \eta_n$ линейно независимы, то система линейных неоднородных уравнений

$$\eta_1 = 1, \quad \eta_2 = 0, \dots, \eta_n = 0$$

имеет решение $(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}) \neq (0, \dots, 0)$. Так как $\Phi(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}) = A_1$, а форма Φ положительно определена, то, следовательно, $A_1 > 0$. Аналогично доказывается, что $A_k > 0$ для любого $k = 1, \dots, n$. Поэтому

$$\text{Ind } S = \sum_{k=1}^n \text{sign } A_k = n. \quad \square$$

Чтобы вывести из теоремы 1 теорему 2 п. 3 (вместе с предложением 3 п. 3), нужно выразить коэффициенты $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$ ряда (2) для функции $S = \frac{G}{F}$ (с необязательно взаимно простыми многочленами F и G) через коэффициенты многочленов F и G .

Пусть, как и в п. 3,

$$F(x) = a_0 x^n + \dots + a_n, \quad G(x) = b_0 x^n + \dots + b_n,$$

где $a_0 > 0$, а b_0 — любое число (возможно, равное нулю).

Лемма Б. Для каждого $p = 0, 1, 2, \dots$ имеет место равенство

$$a_0 t_p + a_1 t_{p-1} + \dots + a_p t_0 = b_p, \quad (9)$$

где, как всегда, считается, что $a_k = b_k = 0$ при $k > n$.

Доказательство. Умножив ряд (2) на многочлен F , мы получим некоторый ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные степени x . Наивысшей степенью x будет, очевидно, x^n , и коэффициент при ней будет равен $a_0 t_0$. При следующей степени x^{n-1} коэффициент будет равен $a_0 t_1 + a_1 t_0$, и, вообще, коэффициент при x^{n-p} , где $p = 0, \dots, n$, будет равен $a_0 t_p + a_1 t_{p-1} + \dots + a_p t_0$. Что же касается отрицательных степеней, то коэффициент при x^{-k} , $k = 1, 2, \dots$, будет, очевидно, равен $a_0 t_{n+k} + a_1 t_{n+k-1} + \dots + a_n t_k$.

Но произведение SF равно многочлену G , и потому этот ряд не должен содержать отрицательных степеней x , а его коэффициенты при положительных степенях должны совпадать с соответствующими коэффициентами многочлена G . Таким образом, должны иметь место равенства

$$a_0 t_0 = b_0,$$

$$a_0 t_1 + a_1 t_0 = b_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_0 t_p + a_1 t_{p-1} + \dots + a_p t_0 = b_p,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \dots + a_{n-1} t_1 + a_n t_0 = b_n,$$

$$a_0 t_{n+1} + a_1 t_n + \dots + a_{n-1} t_2 + a_n t_1 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_0 t_{n+k} + a_1 t_{n+k-1} + \dots + a_{n-1} t_{k+1} + a_n t_k = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

Следствие 3. Для любого $p = 1, \dots, n$ определитель Гурвица Δ_p многочленов F и G выражается формулой

$$\Delta_p = a_0^{2p} \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_p \\ t_2 & t_3 & \dots & t_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_p & t_{p+1} & \dots & t_{2p-1} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. В силу правила умножения определителей из соотношений (9) непосредственно вытекает, что

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{2p-1} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{2p-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{2p-2} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{2p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_p \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{2p-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_0 & t_1 & \dots & t_{2p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & t_0 & t_1 & \dots & t_p \end{vmatrix} \times$$

Второй определитель справа треуголен и потому равен a_0^{2p} . Что же касается первого определителя, то, собирая все его нечетные строки вверху и располагая в обратном порядке четные строки, мы, получим, что он равен

$$\begin{array}{|c|c|}
 \hline
 \begin{array}{ccc}
 1 & & \\
 & 1 & 0 \\
 & & \ddots \\
 0 & & 1
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 0
 \end{array}
 \\
 \hline
 \begin{array}{ccc}
 0 & \dots & 0 & t_0 \\
 0 & \dots & t_0 & t_1 \\
 \vdots & & \vdots & \vdots \\
 t_0 & \dots & t_{p-2} & t_{p-1}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccc}
 t_1 & t_2 & \dots & t_p \\
 t_2 & t_3 & \dots & t_{p+1} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 t_p & t_{p+1} & \dots & t_{2p-1}
 \end{array}
 \end{array}
 = \begin{vmatrix}
 t_1 & t_2 & \dots & t_p \\
 t_2 & t_3 & \dots & t_{p+1} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 t_p & t_{p+1} & \dots & t_{2p-1}
 \end{vmatrix}$$

(легко видеть, что при описанном передвижении строк мы произведем четное число $p(p-1)$ транспозиций).

Тем самым следствие 3 полностью доказано. $\square$

В силу следствия 3 теорема 2 п. 3 (вместе с предложением 4) непосредственно вытекает из следствия 2.

З а м е ч а н и е 4. Подчеркнем, что тем самым мы доказали теорему 2 п. 3, не пользуясь рядами Штурма. Одновременно получено «нештурмовское» доказательство теоремы Льенара — Шипара и теоремы Гурвица для многочленов с комплексными коэффициентами, а следовательно, и теоремы Гурвица для многочленов с вещественными коэффициентами (а значит, и теоремы Рауса). Таким образом, метод квадратичных форм позволяет получить все основные результаты этой главы без обращения к методу Штурма.

5. Теорема Шура

В этом пункте излагается доказательство теоремы Гурвица, данное Шуром. Оно не использует ни квадратичных форм, ни рядов Штурма. Зато его «внутренние пружины» тщательно спрятаны. Задачу его расшивки мы оставляем читателю.

Пусть

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

— произвольный многочлен степени n (вообще говоря, с комплексными коэффициентами). Обозначим через $\bar{f}$ многочлен, получающийся из многочлена f заменой всех коэффициентов комплексно сопряженными числами:

$$\bar{f}(z) = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{a}_n,$$

а через f^* — многочлен, получающийся из многочлена $\bar{f}$ переменной знаков коэффициентов при нечетных степенях z :

$$f^*(z) = (-1)^n \bar{a}_0 z^n + (-1)^{n-1} \bar{a}_1 z^{n-1} + \dots + a_n.$$

Ясно, что

$$f^*(z) = \bar{f}(-z)$$

для любого z .

Лемма 1. Если $f = f_1 + f_2$ или $f = f_1 f_2$, то $f^* = f_1^* + f_2^*$ и соответственно $f^* = f_1^* f_2^*$. Если $g = af$, то $g^* = \bar{a} f^*$. Кроме того, $f^{**} = f$ для любого многочлена f .

Доказательство. Так как коэффициенты многочлена f получаются из коэффициентов многочленов f_1 и f_2 действиями сложения и умножения, то $f = f_1 +$

$+ \bar{f}_2$ и соответственно $\bar{f} = \bar{f}_1 \bar{f}_2$. Поэтому, например, при $\bar{f} = \bar{f}_1 \bar{f}_2$

$$f^*(z) = \bar{f}(-z) = \bar{f}_1(-z) \bar{f}_2(-z) = f_1^*(z) f_2^*(z)$$

для любого z . Для многочлена $f = f_1 + f_2$ доказательство аналогично. Равенства $(af)^* = \bar{a}f^*$ и $f^{**} = f$ очевидны. $\square$

Следствие. Число z_0 тогда и только тогда является корнем многочлена $\bar{f}$, когда число $-\bar{z}_0$ служит корнем многочлена f^* . Кратности корней z_0 и $-\bar{z}_0$ одинаковы.

Доказательство. Пусть $z_1, \dots, z_n$ — все корни многочлена f (каждый корень выписан столько раз, какова его кратность). Тогда

$$f = a_0(z - z_1) \dots (z - z_n), \quad (1)$$

и потому согласно лемме 1

$$\begin{aligned} f^* &= \bar{a}_0(-z - \bar{z}_1) \dots (-z - \bar{z}_n) = \\ &= (-1)^n \bar{a}_0(z + \bar{z}_1) \dots (z + \bar{z}_n). \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно, числа $-\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_n$ являются корнями многочлена f^* . $\square$

Лемма 2. Если многочлен f устойчив, то

$$0 \leq |f(z)| < |f^*(z)| \text{ при } \operatorname{Re} z < 0,$$

$$0 \leq |f^*(z)| < |f(z)| \text{ при } \operatorname{Re} z > 0,$$

$$0 < |f(z)| = |f^*(z)| \text{ при } \operatorname{Re} z = 0.$$

Доказательство. Пусть, как и выше, $z_1, \dots, z_n$ — все корни многочлена f . Так как для любого z

$$|z + \bar{z}_j|^2 - |z - z_j|^2 = 4 \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} z_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

и так как по условию $\operatorname{Re} z_j < 0$, то

$$|z - z_j| < |z + \bar{z}_j|, \text{ если } \operatorname{Re} z < 0,$$

$$|z + \bar{z}_j| < |z - z_j|, \text{ если } \operatorname{Re} z > 0,$$

$$|z - z_j| = |z + \bar{z}_j|, \text{ если } \operatorname{Re} z = 0.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться разложениями (1) и (2). $\square$

Определение 1. Многочлен g называется *преобразованием Шура* многочлена f , если существуют такие комплексные числа α и β , что $g = \alpha f - \beta f^*$ и

$$|\alpha| > |\beta|. \quad (3)$$

Лемма 3. Если многочлен g является преобразованием Шура многочлена f , то многочлен f также будет преобразованием Шура многочлена g .

Доказательство. Так как $g = \alpha f - \beta f^*$, то (см. лемму 1)

$$g^* = \bar{\alpha} f^* - \bar{\beta} f.$$

Поэтому, если

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}, \quad \beta_1 = \frac{-\beta}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}$$

и, значит,

$$\alpha\alpha_1 + \bar{\beta}\beta_1 = 1, \quad \alpha_1\beta + \bar{\alpha}\beta_1 = 0,$$

то

$$\begin{aligned} \alpha_1 g - \beta_1 g^* &= \alpha_1 (\alpha f - \beta f^*) - \beta_1 (\bar{\alpha} f^* - \bar{\beta} f) = \\ &= (\alpha\alpha_1 + \bar{\beta}\beta_1) f - (\alpha_1\beta + \bar{\alpha}\beta_1) f^* = f \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что условие (3) для чисел α_1 и β_1 очевидным образом выполнено. $\square$

Предложение 1. Многочлен f устойчив тогда и только тогда, когда устойчиво каждое его преобразование Шура $g = \alpha f - \beta f^*$.

Доказательство. Если многочлен f устойчив, то согласно лемме 2 и условию (3)

$$|\alpha f(z)| > |\beta f^*(z)| \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} z \geq 0.$$

Поэтому равенство $g(z_0) = 0$ возможно только при $\operatorname{Re} z_0 < 0$. Следовательно, многочлен g устойчив.

Обратно, если многочлен g устойчив, то, по уже доказанному, многочлен f также устойчив, поскольку согласно лемме 3 этот многочлен является преобразованием Шура многочлена g . $\square$

Введем теперь в рассмотрение многочлен $F(z, \zeta)$ от двух переменных z и ζ , определенный формулой

$$F(z, \zeta) = \frac{f^*(\zeta) f(z) - f(\zeta) f^*(z)}{z - \zeta}.$$

По каждой из переменных он является, очевидно, многочленом степени $n - 1$. Кроме того, многочлен F симметричен, т. е.

$$F(z, \zeta) = F(\zeta, z)$$

для любых z и ζ .

Предложение 2. Если многочлен f устойчив, то при $\operatorname{Re} \zeta < 0$ многочлен F , рассматриваемый как многочлен от z , устойчив и имеет место неравенство

$$|f(\zeta)| < |f^*(\zeta)|. \quad (4)$$

Обратно, если хотя бы для одного ζ такого, что $\operatorname{Re} \zeta < 0$, многочлен F от z устойчив и имеет место неравенство (4), то многочлен f устойчив.

Доказательство. Если многочлен f устойчив, то неравенство (4) имеет место согласно лемме 2. Оно означает, что числа $\alpha = f^*(\zeta)$ и $\beta = f(\zeta)$ удовлетворяют условию (3). Следовательно, определено преобразование Шура

$$g(z) = f^*(\zeta)f(z) - f(\zeta)f^*(z)$$

многочлена f . Согласно предложению 1 многочлен g устойчив. Число ζ является корнем этого многочлена и

$$F(z, \zeta) = \frac{g(z)}{z - \zeta}.$$

Поэтому многочлен F также устойчив.

Обратно, если при некотором ζ с $\operatorname{Re} \zeta < 0$ многочлен F устойчив, то ввиду условия $\operatorname{Re} \zeta < 0$ устойчив и многочлен $g(z) = (z - \zeta)F = f^*(\zeta)f - f(\zeta)f^*$. Ввиду (4) этот многочлен является преобразованием Шура многочлена f (с $\alpha = f^*(\zeta)$ и $\beta = f(\zeta)$). Следовательно, согласно предложению 1 многочлен f также устойчив. $\square$

Расположив многочлен $F(z, \zeta)$ по степеням ζ :

$$F(z, \zeta) = F_0(z)\zeta^{n-1} + \dots + F_{n-2}(z)\zeta + F_{n-1}(z), \quad (5)$$

где $F_0(z), \dots, F_{n-2}(z), F_{n-1}(z)$ — некоторые многочлены от z степеней, не больших $n-1$, введем в рассмотрение многочлен от z

$$f_\zeta(z) = F_{n-2}(z)\zeta + F_{n-1}(z)$$

(«хвост» многочлена $F(z, \zeta)$).

Лемма 4. Имеют место тождества

$$z^2 f_\zeta(z) = f(z)\varphi(z) - f^*(z)\psi(z),$$

$$z^2 [f_\zeta(z)\varphi^*(z) + f_\zeta^*(z)\psi(z)] =$$

$$= f(z)[\varphi^*(z)\varphi(z) - \psi^*(z)\psi(z)],$$

$$\text{где } \varphi(z) = \bar{a}_n(z + \zeta) - \bar{a}_{n-1}\zeta, \quad \psi(z) = a_n(z + \zeta) + a_{n-1}\zeta.$$

Доказательство. Умножив (5) на $z - \zeta$, мы получим тождество

$$(z - \zeta) [F_0(z) \zeta^{n-1} + \dots + F_{n-2}(z) \zeta + F_{n-1}(z)] = \\ = f^*(\zeta) f(z) - f(\zeta) f^*(z),$$

т. е. тождество

$$-F_0(z) \zeta^n + [zF_0(z) - F_1(z)] \zeta^{n-1} + \dots \\ \dots + [zF_{n-2}(z) - F_{n-1}(z)] \zeta + zF_{n-1}(z) = \\ = [(-1)^n \bar{a}_0 \zeta^n + \dots - \bar{a}_{n-1} \zeta + \bar{a}_n] f(z) - \\ - [a_0 \zeta^n + \dots + a_{n-1} \zeta + a_n] f^*(z) = \\ = [(-1)^n \bar{a}_0 f(z) - a_0 f^*(z)] \zeta^n + \dots \\ \dots + [-\bar{a}_{n-1} f(z) - a_{n-1} f^*(z)] \zeta + [\bar{a}_n f(z) - a_n f^*(z)].$$

Приравняв свободные члены и коэффициенты при ζ , мы получим отсюда тождества

$$\bar{a}_n f(z) - a_n f^*(z) = zF_{n-1}(z), \\ -\bar{a}_{n-1} f(z) - a_{n-1} f^*(z) = zF_{n-2}(z) - F_{n-1}(z). \quad (6)$$

Первое из тождеств леммы вытекает отсюда непосредственно:

$$z^2 f_\zeta(z) = z^2 F_{n-2}(z) \zeta + z^2 F_{n-1}(z) = \\ = z \zeta [zF_{n-2}(z) - F_{n-1}(z)] + (z + \zeta) zF_{n-1}(z) = \\ = z \zeta [-\bar{a}_{n-1} f(z) - a_{n-1} f^*(z)] + (z + \zeta) [\bar{a}_n f(z) - a_n f^*(z)] = \\ = f(z) [\bar{a}_n (z + \zeta) - \bar{a}_{n-1} \zeta] - f^*(z) [a_n (z + \zeta) + a_{n-1} \zeta].$$

В силу этого тождества (и леммы 1)

$$z^2 f_\zeta^*(z) = [z^2 f_\zeta(z)]^* = f^*(z) \varphi^*(z) - f(z) \psi^*(z).$$

Следовательно,

$$z^2 [f_\zeta(z) \varphi^*(z) + f_\zeta^*(z) \psi(z)] = \\ = [f(z) \varphi(z) - f^*(z) \psi(z)] \varphi^*(z) + \\ + [f^*(z) \varphi^*(z) - f(z) \psi^*(z)] \psi(z) = \\ = f(z) [\varphi(z) \varphi^*(z) - \psi(z) \psi^*(z)].$$

Этим доказано и второе тождество. $\square$

Теорема 1 (теорема Шура). Если многочлен f устойчив, то

$$a_n \neq 0, \quad \operatorname{Re} \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0 \quad (7)$$

и при $\operatorname{Re} \zeta < 0$ многочлен f_ζ устойчив. Обратно, если выполнены неравенства (7) и хотя бы для одного ζ такого, что $\operatorname{Re} \zeta < 0$, многочлен f_ζ устойчив, то многочлен f также устойчив.

Доказательство. Если многочлен f устойчив, то он не может иметь нуль своим корнем. Поэтому $a_n \neq 0$. Согласно формулам Вьета число $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ равно взятой со знаком минус сумме обратных величин всех корней многочлена f . Но ясно, что знаки вещественных частей чисел z_0 и $\frac{1}{z_0} = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2}$ одинаковы. Следовательно, для устойчивого многочлена f число $\operatorname{Re} \frac{a_{n-1}}{a_n}$ положительно. Это доказывает неравенства (7).

Чтобы доказать, что многочлен f_ζ при $\operatorname{Re} \zeta < 0$ устойчив, нужно доказать, что $f_\zeta(z_0) \neq 0$ для любого z_0 , для которого $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$.

Случай 1. $F_{n-1}(z_0) \neq 0$. Введем в рассмотрение многочлен

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= t^{n-1} F\left(z_0, \frac{1}{t}\right) = \\ &= F_{n-1}(z_0) t^{n-1} + F_{n-2}(z_0) t^{n-2} + \dots + F_0(z_0). \end{aligned}$$

Так как $F_{n-1}(z_0) \neq 0$, то степень этого многочлена равна $n-1$.

Легко видеть, что вещественные части всех корней многочлена Φ неотрицательны. Действительно, если $\operatorname{Re} t_0 < 0$, то $\operatorname{Re} \frac{1}{t_0} < 0$, и потому согласно предложению 2 многочлен $F\left(z, \frac{1}{t_0}\right)$ от z устойчив. Следовательно, $F\left(z_0, \frac{1}{t_0}\right) \neq 0$ и, значит, $\Phi(t_0) \neq 0$.

Так как согласно формулам Вьета сумма всех корней многочлена Φ равна $-\frac{F_{n-1}(z_0)}{F_{n-1}(z_0)}$, то

$$\operatorname{Re} \left(-\frac{F_{n-1}(z_0)}{F_{n-1}(z_0)} \right) \geq 0.$$

Но если $f_{\zeta}(z_0) = 0$, т. е. $F_{n-2}(z_0)\zeta + F_{n-1}(z_0) = 0$, то

$$-\frac{F_{n-1}(z_0)}{F_{n-2}(z_0)} = \frac{1}{\zeta},$$

и потому $\operatorname{Re} \frac{1}{\zeta} \geq 0$, т. е. $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$, что противоречит выбору числа ζ . Следовательно, $f_{\zeta}(z_0) \neq 0$.

Случай 2. $F_{n-1}(z_0) = 0$. Если $f_{\zeta}(z_0) = 0$, то в этом случае $F_{n-2}(z_0) = 0$ (ибо $\zeta \neq 0$), и потому согласно тождествам (6) имеют место равенства

$$\bar{a}_n f(z_0) - a_n f^*(z_0) = 0,$$

$$\bar{a}_{n-1} f(z_0) + a_{n-1} f^*(z_0) = 0,$$

из которых следует, что

$$(\bar{a}_n a_{n-1} + a_n \bar{a}_{n-1}) f(z_0) = 0.$$

Но так как многочлен f устойчив и $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$, то $f(z_0) \neq 0$. Поэтому $\bar{a}_n a_{n-1} + a_n \bar{a}_{n-1} = 0$, т. е.

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\left(\frac{\bar{a}_{n-1}}{\bar{a}_n}\right).$$

Это означает, что $\operatorname{Re} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 0$. Поскольку это равенство противоречит второму из уже доказанных неравенств (7), тем самым показано, что $f_{\zeta}(z_0) \neq 0$ и в случае 2.

Обратно, пусть имеют место неравенства (7), и пусть для некоторого ζ , такого, что $\operatorname{Re} \zeta < 0$, многочлен f_{ζ} устойчив. Покажем, что многочлен f также устойчив. Рассуждая от противного, предположим, что $f(z_0) = 0$ для некоторого z_0 , такого, что $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$. Тогда в силу второго из тождеств леммы 4

$$z_0^2 [f_{\zeta}(z_0) \Phi^*(z_0) + f_{\zeta}^*(z_0) \Phi(z_0)] = 0$$

и, следовательно,

$$f_{\zeta}(z_0) \Phi^*(z_0) + f_{\zeta}^*(z_0) \Phi(z_0) = 0$$

(ибо $z_0 \neq 0$, так как $a_n \neq 0$). Поэтому

$$|f_{\zeta}(z_0)| \cdot |\Phi^*(z_0)| = |f_{\zeta}^*(z_0)| \cdot |\Phi(z_0)|.$$

Но, так как многочлен f_{ζ} устойчив и $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$, то согласно лемме 2

$$|f_{\zeta}(z_0)| > |f_{\zeta}^*(z_0)| \quad \text{или} \quad |f_{\zeta}(z_0)| = |f_{\zeta}^*(z_0)| > 0.$$

Поэтому

$$|\varphi^*(z_0)| \leq |\psi(z_0)|. \quad (8)$$

С другой стороны, легко видеть, что при $\operatorname{Re} z < 0$ и $\operatorname{Re} a < 0$ имеет место неравенство

$$|z + \bar{a}| > |z - a| \quad (9)$$

(достаточно, например, применить лемму 2 к устойчивому многочлену $z - a$). Это неравенство для чисел $a = \frac{1}{\zeta}$ и $z = -\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{1}{z_0}$ (неравенство $\operatorname{Re} a < 0$ выполнено в силу условия $\operatorname{Re} \zeta < 0$, а неравенство $\operatorname{Re} z < 0$ — в силу условий $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$ и $\operatorname{Re} \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0$) дает неравенство

$$\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{1}{z_0} - \frac{1}{\zeta} \right| > \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{1}{z_0} + \frac{1}{\zeta} \right|.$$

умножив которое на $|a_n z_0 \bar{\zeta}| = |a_n z_0 \zeta|$, мы получим неравенство

$$|a_{n-1} z_0 \bar{\zeta} + a_n \bar{\zeta} - a_n z_0| > |a_{n-1} z_0 \zeta + a_n \zeta + a_n z_0|$$

т. е. неравенство

$$|\varphi^*(z_0)| > |\psi(z_0)|,$$

противоречащее неравенству (8).

Таким образом, равенство $f(z_0) = 0$ при $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$ невозможно, и потому многочлен f устойчив. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Ясно, что степень многочлена f_ζ не больше $n - 1$. Более того, легко видеть, что при выполнении неравенства (7) *степень многочлена f_ζ точно равна $n - 1$* . Действительно, если эта степень меньше $n - 1$, то коэффициент при z^{n+1} в правой части первого из тождеств леммы 4 равен нулю, т. е. имеет место равенство

$$a_0(\bar{a}_n - \bar{a}_{n-1}\zeta) - (-1)^n \bar{a}_0(a_n + a_{n-1}\zeta) = 0,$$

а значит, и равенство

$$|\bar{a}_n - \bar{a}_{n-1}\zeta| = |a_n + a_{n-1}\zeta|. \quad (10)$$

С другой стороны, неравенство (9) при $z = \frac{1}{\zeta}$ и $a = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ дает неравенство

$$\left| \frac{1}{\zeta} - \frac{\bar{a}_{n-1}}{\bar{a}_n} \right| > \left| \frac{1}{\zeta} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|.$$

умножив которое на $|\bar{a}_n \bar{c}| = |a_n \bar{c}|$, мы придем к противоречию с равенством (10). $\square$

Теорема Шура указывает достаточно простой индуктивный процесс исследования на устойчивость многочлена f . Из нее можно легко вывести и доказанные в п. 3 теоремы Гурвица. Мы ограничимся случаем, когда *многочлен f имеет вещественные коэффициенты*, оставляя разбор случая многочлена с комплексными коэффициентами инициативе читателя.

Как всегда, будем считать, что $a_0 > 0$.

По чисто техническим причинам удобно вместо многочлена

$$f = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

рассматривать «обращенный» многочлен

$$\bar{f} = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

Так как

$$\bar{f}(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$$

и так как вещественные части чисел z и $\frac{1}{z}$ имеют один и тот же знак, то *многочлен f устойчив тогда и только тогда, когда устойчив многочлен $\bar{f}$* .

Мы применим теорему Шура к многочлену $\bar{f}$ и числу $\xi = -1$. Пусть

$$f^{(1)} = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

— многочлен $\overline{1/2 \bar{f}}_{-1}$, получающийся обращением многочлена $1/2 \bar{f}_{-1}$. Согласно теореме Шура и только что сделанному замечанию *многочлен $\bar{f}$ тогда и только тогда устойчив, когда устойчив многочлен $f^{(1)}$ и имеет место неравенство $a_1 > 0$* (напомним, что по условию $a_2 > 0$). $\square$

Пусть

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}, \dots$$

— определители Гурвица многочлена f , а

$$D_1^{(1)} = b_1, \quad D_2^{(1)} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \dots$$

— определители Гурвица многочлена $f^{(1)}$.

Лемма 5. Для любого $j = 1, \dots, n-1$ имеет место равенство

$$D_j^{(1)} = \begin{cases} (a_0 a_1)^{\frac{j-1}{2}} D_{j+1}, & \text{если } j \text{ нечетно,} \\ a_0 (a_0 a_1)^{\frac{j-2}{2}} D_{j+1}, & \text{если } j \text{ четно.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть

$$\tilde{g} = a_0 + a_2 z^2 + \dots,$$

$$\tilde{h} = a_1 z + a_3 z^3 + \dots$$

Так как $f = \tilde{g} + \tilde{h}$ и $f^* = \tilde{g} - \tilde{h}$, то первое тождество леммы 4, примененное к многочлену f , дает нам соотношение

$$\begin{aligned} z^2 f_{-1}(z) &= (\tilde{g}(z) + \tilde{h}(z))[(a_0 + a_1)z - a_0] - \\ &\quad - (\tilde{g}(z) - \tilde{h}(z))[(a_0 - a_1)z - a_0] = \\ &= 2a_1 z \tilde{g}(z) + 2(a_0 z - a_0) \tilde{h}(z). \end{aligned}$$

т. е. соотношение

$$\begin{aligned} z^2(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) &= \\ &= a_1 z(a_0 + a_2 z^2 + \dots) + a_0(z-1)(a_1 z + a_3 z^3 + \dots). \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z , мы получим равенства

$$b_0 = a_0 a_1,$$

$$b_1 = a_1 a_2 - a_0 a_3,$$

$$\dots \dots \dots k = 0, 1, \dots,$$

$$b_{2k} = a_0 a_{2k+1},$$

$$b_{2k+1} = a_1 a_{2k+2} - a_0 a_{2k+3},$$

$$\dots \dots \dots$$

показывающие, что матрица Гурвица многочлена $f^{(1)}$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & \dots & a_1 a_{2k} - a_0 a_{2k+1} & \dots \\ a_0 a_1 & a_0 a_3 & \dots & a_0 a_{2k+1} & \dots \\ 0 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & \dots & a_1 a_{2k-2} - a_0 a_{2k-1} & \dots \\ 0 & a_0 a_1 & \dots & a_0 a_{2k-3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Удобно вместо этой матрицы рассмотреть окаймленную матрицу

$$\begin{vmatrix} a_0 a_1 & a_0 a_3 & a_0 a_5 & \dots & a_0 a_{2k+1} & \dots \\ 0 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_0 a_1 & a_0 a_3 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_0 a_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Ясно, что главные миноры матрицы (11) выражаются формулами

$$a_0 a_1, a_0 a_1 D_1^{(1)}, a_0 a_1 D_2^{(1)}, \dots, a_0 a_1 D_{n-1}^{(1)}. \quad (12)$$

Преобразуем матрицу (11), прибавляя первую строку ко второй, третью — к четвертой и т. д. В результате мы получим матрицу

$$\begin{vmatrix} a_0 a_1 & a_0 a_3 & a_0 a_5 & \dots & a_0 a_{2k+1} & \dots \\ a_1 a_0 & a_1 a_2 & a_1 a_4 & \dots & a_1 a_{2k} & \dots \\ 0 & a_0 a_1 & a_0 a_3 & \dots & a_0 a_{2k-1} & \dots \\ 0 & a_1 a_0 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_{2k-2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad (13)$$

главные миноры которой равны тем же числам (12).

Но ясно, что вынеся из всех нечетных строк матрицы (13) общий множитель a_0 , а из всех четных строк — общий множитель a_1 , мы получим как раз матрицу Гурвица многочлена f . Это показывает, что главные миноры матрицы (13) имеют вид

$$a_0 a_1, a_0 a_1 D_2, a_0^2 a_1 D_3, \dots, a_0^k a_1^k D_{2k}, a_0^{k+1} a_1^k D_{2k+1}, \dots \quad (14)$$

Таким образом, числа (14) совпадают с числами (12).

Лемма 5 вытекает отсюда непосредственно. $\square$

Теперь у нас уже все готово для доказательства теоремы Гурвица. Воспользуемся индукцией по степени n . При $n = 1$ теорема Гурвица очевидна. Пусть она уже доказана для всех многочленов, степени которых меньше $n - 1$. Согласно сделанному выше замечанию многочлен f степени n с вещественными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом a_0 тогда и только тогда устойчив, когда $a_1 > 0$ и устойчив многочлен $f^{(1)}$, степень которого не превосходит $n - 1$. Следовательно, по предположению индукции многочлен f тогда и только тогда устойчив,

когда $a_1 > 0$ и все определители $D_1^{(1)}, \dots, D_{n-1}^{(1)}$ положительны (заметим, что, как выше было показано, старший коэффициент b_0 многочлена $f^{(1)}$ равен $a_0 a_1$ и потому при $a_0 > 0$ и $a_1 > 0$ положителен). Но согласно лемме 5 неравенства $a_1 > 0$, $D_1^{(1)} > 0, \dots, D_{n-1}^{(1)} > 0$ (вместе с неравенством $a_0 > 0$) равносильны неравенствам $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$ (напомним, что $D_1 = a_1$). Следовательно, многочлен f тогда и только тогда устойчив, когда $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$. $\square$

З а м е ч а н и е 2. Аналогичное рассуждение доказывает, очевидно, и теорему Льенара — Шипара из п. 3.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

1. Теоремы Чеботарева и Понтрягина

Естественным обобщением многочленов являются так называемые *целые функции*, т. е. функции $f(z)$ комплексного переменного z , разлагающиеся в степенной ряд

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots,$$

сходящийся при всех значениях z . Все многочлены являются, конечно, целыми функциями. Целые функции, не являющиеся многочленами, называются *трансцендентными*. (В соответствии с этим многочлены называются также *целыми рациональными функциями*.) Примером целой трансцендентной функции является *показательная функция*

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

а также функции

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots,$$

являющиеся распространением в комплексную область элементарных тригонометрических функций $\sin$ и $\cos$.

Вообще говоря, целая трансцендентная функция имеет бесконечное (счетное) число корней (что вполне согласуется с представлением о такой функции как о «многочлене бесконечной степени»). Однако она может совсем не иметь корней (примером является функция e^z) или иметь конечное число корней (примером является функция вида $e^z f(z)$, где $f(z)$ — многочлен).

Мы будем называть целую функцию *устойчивой*, если у нее нет корней с положительной вещественной частью. В частности, согласно этому определению, функции, не имеющие корней, устойчивы.

К сожалению, ни один из доказанных в предыдущих главах критериев устойчивости многочленов не обобщается без дополнительных оговорок на произвольные целые функции. Поэтому никаких общих теорем об устойчивых целых функциях неизвестно (и вряд ли они могут быть).

Пример 1. Функция

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \dots$$

устойчива (она вообще не имеет корней). Тем не менее, не все ее коэффициенты положительны. Таким образом, даже столь простой критерий устойчивости, как критерий Стодола, в классе всех целых функций места не имеет.

Так же как и для многочленов, мы для любой целой функции $f(z)$ положим

$$f(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega),$$

где g и h — целые функции с вещественными коэффициентами. Ясно, что функции g и h этим условием определяются однозначно.

Линию на плоскости Oxy с параметрическими уравнениями

$$x = g(\omega), \quad y = h(\omega)$$

мы будем называть *амплитудно-фазовой характеристикой* целой функции f . Она является образом мнимой оси $z = i\omega$ при отображении $z \mapsto f(z)$, осуществляемом функцией f .

Амплитудно-фазовый критерий устойчивости, установленный в п. 1 гл. 2, на целые трансцендентные функции непосредственно, конечно, не переносится, поскольку в нем участвует степень многочлена. Что касается критерия Эрмита — Билера, то, хотя его формулировка и имеет смысл для любых целых функций, но, как показывают приводимые ниже примеры, в классе всех целых функций он не является ни необходимым, ни достаточным для устойчивости.

По аналогии со случаем многочленов мы будем говорить, что корни целых функций g и h перемежаются, если

- 1) все корни каждой из функций g и h вещественны и просты (т. е. не являются корнями производной);
- 2) между любыми двумя соседними корнями одной функции лежит один и только один корень другой функции.

Мы скажем, далее, что функция f удовлетворяет условию Эрмита — Билера, если корни соответствующих функций g и h перемежаются и хотя бы в одной точке вещественной оси функция $gh' - hg'$ положительна.

Согласно теореме Эрмита — Билера из п. 2 гл. 2 условие Эрмита — Билера необходимо и достаточно для устойчивости многочленов. Покажем, что для устойчивости целых трансцендентных функций оно ни необходимо, ни достаточно.

Пример 2. Функция e^{-iz^2} не имеет корней и поэтому устойчива. Однако соответствующие функции

$$g(\omega) = \cos \omega^2, \quad h(\omega) = \sin \omega^2$$

имеют не вещественные корни (например, $h(i\sqrt{\pi}) = 0$). Следовательно, условие Эрмита — Билера не необходимо для устойчивости.

Пример 3. Пусть $f(z) = e^{iz} + ie^{-iz}$. Тогда $g(\omega) = e^{-\omega}$, $h(\omega) = e^{\omega}$. Эти функции вообще не имеют корней, и поэтому условие перемежаемости их корней выполнено. Кроме того, функция $gh' - g'h$ тождественно равна двум i , значит, при всех ω положительна. Тем не менее, функция f имеет, как легко видеть, положительный корень $3\pi/4$. Следовательно, условие Эрмита — Билера не достаточно для устойчивости.

Ситуация кажется безнадежной. Однако, как впервые заметил Н. Г. Чеботарев, теорему Эрмита — Билера можно переформулировать так, чтобы она оказалась верной и для любых целых функций.

Определение 1. Будем говорить, что целые функции g и h с вещественными коэффициентами, не имеющие общих вещественных корней, составляют *вещественную пару*, если для любых вещественных λ и μ все

корни функции

$$\lambda g + \mu h$$

вещественны.

Заметим, что функция $\lambda g + \mu h$ не может в силу этого условия быть тождественно равной нулю, так что функции g и h , составляющие вещественную пару, не пропорциональны.

В п. 3 мы докажем следующее предложение:

Предложение 1. Если функции g и h составляют вещественную пару, то корни этих функций перемежаются.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 4. Корни функций $g(\omega) = e^{-\omega}$ и $h(\omega) = e^{\omega}$ из примера 3 перемежаются (их вообще нет). Вместе с тем функция $e^{-\omega} - e^{\omega}$ имеет не вещественный корень πi (напомним, что $e^{\pm \pi i} = -1$).

Пример 5. Функция $g(\omega) = (1 - \omega^2)e^{\omega}$ имеет простые вещественные корни ± 1 , а функция $h(\omega) = \omega e^{\omega^2}$ — простой корень 0. Таким образом, корни функций g и h перемежаются. Вместе с тем функция

$\lambda g + \mu h$ имеет при $\lambda = 1$, $\mu = -\frac{\pi^2 + 4}{2\pi} e^{\frac{\pi^2}{2}}$ не вещественный корень $\frac{\pi}{2} i$.

Однако для многочленов обратное утверждение верно:

Предложение 2. Если корни многочленов g и h (имеющих вещественные коэффициенты) перемежаются, то эти многочлены составляют вещественную пару.

Мы также докажем это предложение в п. 3.

В силу предложений 1 и 2 мы можем в теореме Эрмита — Билера условие перемежаемости корней многочленов g и h заменить требованием, чтобы эти многочлены составляли вещественную пару. Как следует из формулируемой ниже теоремы Чеботарева, усиленное таким образом условие Эрмита — Билера уже достаточно для устойчивости произвольной целой функции. Однако, как показывает тот же пример 2, оно не является необходимым. Поэтому нужно соответствующим образом усилить и условие устойчивости.

Целые функции g и h , построенные по целой функции f , мы можем, конечно, рассматривать для любых комплексных значений аргумента. Ясно, что тогда функция f выражается через функции g и h по формуле

$$f(z) = g(-iz) + ih(-iz).$$

Определение 2. Функция f называется *сильно устойчивой*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого комплексного числа $\zeta = \xi + i\eta$ с $|\zeta| < \varepsilon$ целая функция

$$f_{\zeta}(z) = g(-iz) + (1 + \zeta)h(-iz)$$

устойчива. В частности, сама функция $f = f_0$ также должна быть устойчива.

Заметим, что функции g и h для функции f_{ζ} , $\zeta = \xi + i\eta$ (обозначим их через g_{ζ} и h_{ζ}), выражаются формулами

$$g_{\zeta} = g + \xi h, \quad h_{\zeta} = (1 + \eta)h.$$

В п. 3 докажем следующую теорему:

Теорема 1 (теорема Чеботарева). *Целая функция f тогда и только тогда сильно устойчива, когда соответствующие функции g и h составляют вещественную пару и хотя бы в одной точке вещественной оси функция $gh' - g'h$ положительна.*

Известно (теорема о непрерывной зависимости корней многочлена от коэффициентов), что при малом изменении коэффициентов многочлена его корни меняются мало. Поэтому, в частности, если многочлен устойчив, то при любом достаточно малом изменении его коэффициентов он останется устойчивым. Это показывает, что *любой устойчивый многочлен сильно устойчив*. Следовательно, теорема Эрмита — Билера является частным случаем теоремы Чеботарева.

З а м е ч а н и е 1. Таким образом, доказав теорему Чеботарева, мы одновременно получим новое доказательство теоремы Эрмита — Билера. Любопытно, что для многочленов доказательство теоремы Чеботарева не становится более простым.

В отличие от теоремы Эрмита — Билера из п. 2 гл. 2 теорема Чеботарева на практике мало эффективна, потому что не существует простых способов

проверить, составляют ли данные функции g и h вещественную пару. Естественно поэтому искать более практичные критерии, справедливые если не для всех целых функций f , то хотя бы для некоторого достаточно широкого их класса.

В 1941 г. Н. Г. Чеботарев привлек внимание математиков к целым функциям вида

$$f_1(z)e^{\lambda_1 z} + \dots + f_n(z)e^{\lambda_n z}, \quad (1)$$

где $f_1, \dots, f_n$ — многочлены, а $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — произвольные числа. Функции такого рода возникают в технике при исследовании устойчивости положений равновесия систем с запаздыванием и с распределенными параметрами. Уже в 1942 г. Л. С. Понтрягин практически полностью решил вопрос о критериях устойчивости такого рода функций, доказав для них аналоги амплитудно-фазового критерия устойчивости и теорему Эрмита — Билера. Дальнейшие попытки ряда авторов доказать для функций (1) теоремы, аналогичные теореме Гурвица, оказались малоперспективными, поскольку выяснилось, что хотя функция (1) и зависит от конечного числа параметров (коэффициентов многочленов $f_1, \dots, f_n$), но соотношения на эти параметры, необходимые и достаточные для устойчивости, настолько сложны, что выписать их в явном виде можно только в самых простых случаях.

В технических приложениях встречается лишь случай, когда все показатели $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ вещественны. Поэтому мы ограничимся только им. Кроме того, поскольку функция $e^{\lambda z}$ не имеет корней, можно без ограничения общности считать, что все показатели $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ неотрицательны (в противном случае надо умножить функцию (1) на $e^{\lambda z}$ с достаточно большим λ). Мы будем предполагать, что эти показатели рациональны. (Все основные результаты верны и без этого предположения, но оно позволит нам несколько облегчить формулировки и иногда упростить доказательства.) Пусть N — общий знаменатель показателей $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Заменяя z на Nz (что, очевидно, не влияет на устойчивость), мы получим функцию (1) уже с целыми положительными показателями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тем самым мы приходим к задаче исследования на устойчивость целых функций, описываемых в следующем определении:

Определение 3. Квазимногочленом называется целая функция $f(z)$, получающаяся из некоторого многочлена $F(z, w)$ от двух переменных z и w (и имеющего, вообще говоря, комплексные коэффициенты) подстановкой вместо w функции e^z :

$$f(z) = F(z, e^z).$$

Многочлен $F(z, w)$ мы будем называть *определяющим* *многочленом* квазимногочлена $f(z)$.

Пусть

$$az^r w^s, \quad a \neq 0,$$

— произвольный член многочлена $F(z, w)$. Л. С. Понтрягин называет этот член *главным*, если показатели r и s одновременно достигают для него наибольших возможных значений, т. е. если для любого другого члена $a'z^{r'}w^{s'}$ многочлена $F(z, w)$ имеют место неравенства

$$r' \leq r, \quad s' \leq s$$

(причем, конечно, $r' < r$, если $s' = s$, и $s' < s$, если $r' = r$). Не любой многочлен имеет главный член. Квазимногочлен $f(z)$ называется квазимногочленом *без главного члена*, если многочлен $F(z, w)$ не имеет главного члена.

Следующая теорема принадлежит Л. С. Понтрягину:

Теорема 2. Квазимногочлен без главного члена обязательно неустойчив и, более того, имеет корни со сколь угодно большой положительной вещественной частью.

Мы докажем эту теорему в п. 4.

Согласно теореме 2 исследованию на устойчивость подлежат лишь квазимногочлены f с главным членом.

Если многочлен $F(z, w)$ имеет главный член вида $az^m w^n$, $a \neq 0$, то мы будем говорить, что *бистепень* соответствующего квазимногочлена $f(z) = F(z, e^z)$ равна (m, n) . Для квазимногочлена без главного члена бистепень не определяется.

Рассмотрим для произвольного квазимногочлена f с главным членом амплитудно-фазовую характеристику

$$x = g(\omega), \quad y = h(\omega), \quad -\infty < \omega < +\infty.$$

Как всегда, будем предполагать, что функции g и f не имеют общих вещественных корней, т. е. что квазимногочлен f не имеет чисто мнимых корней. Тогда для любого интервала $]\alpha, \beta[$ будет определен угол, на который поворачивается радиус-вектор точки амплитудно-фазовой характеристики при изменении ω от α до β . Этот угол, разделенный на π , мы будем обозначать символом $\Delta_f(\alpha, \beta)$. (Таким образом, число Δ_f из п. 1 гл. 2 является не чем иным, как числом $\Delta_f(-\infty, +\infty)$. Мы теперь вынуждены рассматривать конечные α и β , поскольку для квазимногочленов, вообще говоря, $\Delta_f(-\infty, +\infty) = \pm\infty$.)

Обозначение. Пусть $A(N)$ и $B(N)$ — две функции целого положительного N . Мы будем писать

$$A(N) \sim B(N),$$

если $|A(N) - B(N)| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. В этом случае говорят также, что функции $A(N)$ и $B(N)$ *асимптотически равны* (при $N \rightarrow \infty$).

В п. 4 мы введем понятие числа a , *исключительного* для квазимногочлена f , и покажем, что на каждом конечном отрезке количество таких чисел конечно. В этом смысле почти любое вещественное число *неисключительно* (для данного квазимногочлена f). В частности, *неисключительные* числа существуют.

Пользуясь этим, мы выберем произвольное *неисключительное* число a и рассмотрим горизонтальную полосу

$$a - 2\pi N < \operatorname{Im} z < a + 2\pi N.$$

Пусть L_N — число корней квазимногочлена f с положительной вещественной частью, расположенных в этой полосе.

Теорема 3 (теорема Понтрягина). Для любого квазимногочлена f без мнимых корней и с главным членом бистепени (m, n) имеет место асимптотическое равенство

$$\Delta_f(a - 2\pi N, a + 2\pi N) \approx 4\pi N + m - 2L_N, \quad (2)$$

где a — произвольное число, *неисключительное* для f .

Следствие. Для любого $N > 0$ число L_N конечно.

Эта теорема аналогична теореме 1 п. 1 гл. 2 (и, как мы увидим, доказывается по существу тем же методом).

Обратим внимание, что в силу этой аналогии «степенью» квазимногочлена f является не число, а линейная функция $4\pi N + m$ параметра N .

Из теоремы Понтрягина непосредственно вытекает следующий критерий устойчивости квазимногочленов, аналогичный критерию устойчивости многочленов из п. 2 гл. 2:

Амплитудно-фазовый критерий устойчивости квазимногочленов. *Квазимногочлен f с главным членом бистепени (m, n) (не имеющий чисто мнимых корней) тогда и только тогда устойчив, когда для всех достаточно больших целых N имеет место асимптотическое равенство*

$$\Delta_f(a - 2\pi N, a + 2\pi N) \approx 4\pi N + m,$$

где a — произвольное неисключительное (для квазимногочлена f) число. $\square$

Замечание 1. Можно показать, что это следствие верно и для исключительных a (так что, в частности, всегда можно считать, что $a = 0$). Мы на этом останавливаться не будем.

Из амплитудно-фазового критерия устойчивости вытекает, как и следовало ожидать, что для квазимногочленов справедлива теорема Эрмита — Билера. Однако вывод этой теоремы опирается на некую теорему о тригонометрических многочленах (также принадлежащую Л. С. Понтрягину), аналогичную утверждению о том, что если алгебраический многочлен степени n имеет n вещественных корней, то все его корни вещественны. Мы доказываем эту теорему в п. 6 (а теорему Эрмита — Билера для квазимногочленов — в п. 7).

2. Необходимые сведения из теории функций комплексного переменного

В этом пункте излагаются некоторые стандартные теоремы теории функций комплексного переменного, которые можно найти в любом учебнике по теории функций, а также выводятся некоторые их следствия в форме, для нас наиболее удобной.

Функция f комплексного переменного z называется *регулярной в точке z_0* , если она разлагается в ряд вида

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots, \quad (1)$$

сходящийся для всех z , удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число. Этот ряд определяется функцией f единственным образом.

Функция f , определенная в области (открытом множестве) D плоскости комплексного переменного, называется *регулярной в области D* , если она регулярна в каждой точке этой области. Такая функция непрерывна в области (и дифференцируема любое число раз).

Если $|z_1 - z_0| < \varepsilon$, то, подставив $z - z_0 = (z - z_1) + (z_1 - z_0)$ в ряд (1), раскрыв скобки и перегруппировав члены, мы получим ряд по степеням $z - z_1$. Этот ряд заведомо сходится при $|z - z_1| < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon - |z_1 - z_0|$. Это показывает, что функция (1) регулярна во всех точках круга $|z - z_0| < \varepsilon$. Верно и обратное: если функция регулярна в круге $|z - z_0| < \varepsilon$, то ее разложение (1) сходится при всех z , удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \varepsilon$.

В частности, мы видим, что *целые функции — это в точности функции, регулярные во всей плоскости комплексного переменного.*

Пусть функция f регулярна в ограниченной области D и непрерывна в ее замыкании $\bar{D}$. Тогда модуль $|f|$ этой функции непрерывен в $\bar{D}$ и потому достигает в $\bar{D}$ максимума. Одним из основных свойств регулярных функций является тот факт, что если функция f непостоянна, то в описанной ситуации максимум достигается только на границе области D . Мы сформулируем это утверждение в следующем виде:

Принцип максимума модуля. Пусть D — ограниченная область, Γ — ее граница, и пусть f — функция, регулярная в D и непрерывная в $\bar{D} = D \cup \Gamma$. Тогда

1) если $|f(z)| \leq 1$ во всех точках $z \in \Gamma$, то $|f(z)| \leq 1$ для любой точки $z \in D$;

2) если, кроме того, функция f непостоянна и существует такое $z_0 \in \Gamma$, что $|f(z_0)| = 1$ (в частности, если $|f| = 1$ на Γ), то $|f(z)| < 1$ для любой точки $z \in D$. $\square$

Для неограниченной области эта теорема без дополнительных условий неверна. Простейшим условием, обеспечивающим ее справедливость, является ограниченность модуля $|f|$ в области D (для ограниченной

области это условие выполняется автоматически). Мы докажем это для единственно нужного нам случая, когда областью D является верхняя полуплоскость, т. е. множество всех z , для которых $\operatorname{Im} z > 0$, и когда на всей ее границе (являющейся в этом случае вещественной осью $\operatorname{Im} z = 0$) имеет место равенство $|f| = 1$.

Предложение 1. Пусть непрерывная при $\operatorname{Im} z \geq 0$ непостоянная функция f регулярна при $\operatorname{Im} z > 0$, и пусть существует такое $C > 0$, что $|f(z)| \leq C$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда, если $|f(z)| = 1$ при $\operatorname{Im} z = 0$, то

$$|f(z)| < 1 \text{ при } \operatorname{Im} z > 0.$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$f_\delta(z) = \frac{f(z)}{1 + \delta z}.$$

Поскольку $\delta > 0$, линейная функция $1 + \delta z$ не обращается в нуль в верхней полуплоскости и, следовательно (см. ниже), функция $f_\delta(z)$ регулярна в верхней полуплоскости. Пусть D_R — расположенный в верхней полуплоскости полукруг с центром в точке 0, имеющий радиус $R > 0$. Граница этого полукруга состоит из отрезка $[-R, R]$ вещественной оси и полуокружности $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Так как $|1 + \delta z| \geq 1$ для любого вещественного z , то $|f_\delta(z)| \leq |f(z)| = 1$ при $\operatorname{Im} z = 0$ и, в частности, при z , принадлежащих отрезку $[-R, R]$. С другой стороны, из рассмотрения треугольника с вершинами в точках 0, i и $i + \delta z$ немедленно вытекает, что для любой точки z полуокружности $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ имеет место неравенство

$$|1 + \delta z| \geq \sqrt{1 + \delta R}.$$

Следовательно, если $R \geq \frac{1}{\delta}(\delta^2 - 1)$, то $|f_\delta(z)| \leq 1$ и на полуокружности. Таким образом, при любом достаточно большом R на всей границе полукруга D_R имеет место неравенство $|f_\delta| \leq 1$. То тогда согласно принципу максимума модуля неравенство $|f_\delta| \leq 1$ будет иметь место и во всем полукруге D_R . Поскольку любая точка верхней полуплоскости при достаточно большом R принадлежит полукругу D_R , этим доказано, что $|f_\delta| \leq 1$ всюду в верхней полуплоскости.

Устремим теперь δ к нулю. Поскольку $f_\delta(z) \rightarrow f(z)$ при любом z , из неравенства $|f_\delta(z)| \leq 1$ вытекает неравенство $|f(z)| \leq 1$. Таким образом, нам осталось лишь доказать, что знак равенства здесь невозможен.

Рассмотрим снова полукруг D_R . По уже доказанному $|f| \leq 1$ всюду на границе этого полукруга, причем на его нижнем диаметре $|f| = 1$. Поэтому согласно принципу максимума модуля $|f| < 1$ всюду внутри этого полукруга. Поскольку радиус R может быть любым, этим доказано, что $|f| < 1$ всюду в верхней полуплоскости. $\square$

Другой стандартной теоремой теории функций является теорема, обеспечивающая существование и регулярность неявной функции, заданной уравнением. Для простоты мы сформулируем эту теорему только для случая, когда левая часть уравнения, определяющего неявную функцию, является целой функцией по обоим переменным.

Теорема о неявной функции. Пусть $F(z, w)$ — такая функция двух переменных z и w , являющаяся целой функцией по каждой переменной (при любом значении другой переменной), что

$$F(0, 0) = 0, \quad F'_w(0, 0) \neq 0.$$

Тогда существует такая единственная функция $w(z)$, регулярная в точке 0 (т. е. в некотором круге $|z| < r$), что $w(0) = 0$ и

$$F(z, w(z)) = 0 \quad \text{для всех } z, \quad |z| < r.$$

Разложение функции $w(z)$ в ряд по степеням z имеет вид

$$w(z) = -\frac{F'_z(0, 0)}{F'_w(0, 0)} z + \dots \quad \square \quad (2)$$

Заметим, что основная трудность в доказательстве этой теоремы состоит в установлении существования и регулярности функции $w(z)$. Коль скоро это сделано, разложение (2) немедленно получается методом неопределенных коэффициентов. Действительно, условия, наложенные на функцию F , означают, что ее разложение в ряд по степеням w имеет вид

$$F(z, w) = A_0(z) + A_1(z)w + \dots + A_n(z)w^n + \dots,$$

где

$$A_k(z) = a_{k0} + a_{k1}z + \dots + a_{kn}z^n + \dots, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

— целые функции, причем $a_{00} = 0$ и $a_{10} \neq 0$. Полагая теперь

$$w(z) = c_1z + c_2z^2 + \dots,$$

где $c_1, c_2, \dots$ — неизвестные коэффициенты, мы получим, что

$$\begin{aligned} F(z, w(z)) &= (a_{01}z + a_{02}z^2 + \dots) + \\ &+ (a_{10} + a_{11}z + \dots)(c_1z + c_2z^2 + \dots) + \\ &+ (a_{20} + a_{21}z + \dots)(c_1z + c_2z^2 + \dots)^2 + \dots = \\ &= (a_{01} + a_{10}c_1)z + (a_{02} + a_{10}c_2 + a_{11}c_1 + a_{20}c_1^2)z^2 + \dots \end{aligned}$$

Поскольку функция $F(z, w(z))$ тождественно равна нулю, все коэффициенты полученного ряда должны быть равны нулю. В частности, $a_{01} + a_{10}c_1 = 0$, т. е. $c_1 = -\frac{a_{01}}{a_{10}}$, что и дает формулу (2), поскольку $a_{01} = F'_z(0, 0)$, а $a_{10} = F'_w(0, 0)$.

Аналогичным образом можно последовательно найти все коэффициенты ряда (2).

Следствие. Если функция $f(z)$ регулярна в точке 0 и отлична от нуля в этой точке, то для любого $n \geq 1$ существует n различных регулярных в точке 0 функций $w_1(z), \dots, w_n(z)$, для которых

$$[w_k(z)]^n = f(z) \quad \text{при всех } z.$$

Значениями $w_1(0), \dots, w_n(0)$ этих функций в точке 0 являются n значений корня n -й степени из $f(0)$.

Доказательство. Пусть ζ_k — одно из значений корня n -й степени из $f(0)$. Рассмотрим функцию $F(z, v) = (v + \zeta_k)^n - f(z)$. Ясно, что $F(0, 0) = 0$ и $F'_v(0, 0) \neq 0$. Поэтому существует единственная функция $v_k(z)$, регулярная в точке 0 и такая, что $v_k(0) = 0$ и $F(z, v_k(z)) = 0$ для всех z . Для завершения доказательства остается заметить, что функция $w_k(z) = v_k(z) + \zeta_k$ удовлетворяет уравнению $w_k^n = f$ и при $z = 0$ равна ζ_k . $\square$

Нам придется рассматривать функции f , являющиеся отношением h/g двух целых функций (обобщение

рациональных функций). Такие функции называются *мероморфными*. Они определены и регулярны всюду, за исключением точек, являющихся корнями знаменателя g (и не являющихся одновременно корнями числителя h той же или большей кратности¹⁾). Эти исключительные точки называются *полюсами* мероморфной функции. Каждый полюс z_0 обладает тем свойством, что предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ существует и равен ∞ .

Без труда показывается, что в каждой ограниченной области целая функция, не равная тождественно нулю, может иметь только конечное число корней. (Вообще, функция, регулярная в области D , может иметь только конечное число нулей в каждой ограниченной подобласти, замыкание которой целиком содержится в D). Поэтому любая мероморфная функция имеет в каждой ограниченной области конечное число полюсов.

Чтобы доказать, что вне полюсов мероморфная функция

$$\frac{h(z)}{g(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots}$$

регулярна, достаточно доказать, что регулярна мероморфная функция $1/g$ (ибо произведение двух сходящихся рядов снова будет сходящимся рядом). Если точка 0 не является корнем функции g , т. е. если $a_0 \neq 0$, мы полагаем $g(z) = a_0(1 - g_1(z))$, где $g_1(0) = 0$, и разлагаем функцию $1/(1 - g_1)$ по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1 - g_1(z)} = 1 + g_1(z) + [g_1(z)]^2 + \dots$$

Раскрыв все степени и приведя подобные члены, мы получим ряд по степеням z , сходящийся при $|g_1(z)| < 1$, т. е. (в силу условия $g_1(0) = 0$) при достаточно малом $|z|$. Следовательно, функция $1/g$ регулярна в точке 0. Чтобы доказать ее регулярность в любой другой точке z_0 , не являющейся полюсом, достаточно пе-

¹⁾ По аналогии со случаем многочленов, *кратностью* корня z_0 целой функции g называется такое число $v_0 \geq 1$, что

$$g(z_0) = g'(z_0) = \dots = g^{(v_0-1)}(z_0) = 0 \text{ и } g^{(v_0)}(z_0) \neq 0.$$

Корень z_0 называется *простым*, если $v_0 = 1$, и *кратным*, если $v_0 > 1$.

разложить функцию g в ряд по степеням разности $\xi = z - z_0$. Тогда по доказанному функция $1/g$ будет регулярна в точке $\xi = 0$, т. е. в точке $z = z_0$.

Изложенных элементарных сведений из теории функций уже вполне достаточно для доказательства теоремы Чеботарева и предложений 1 и 2 из п. 1. Однако для доказательства теорем Понтрягина нам будут нужны еще некоторые дополнительные факты.

Пусть Γ — простая замкнутая линия на плоскости комплексного переменного, ограничивающая некоторую область D . Пусть, далее, f — регулярная функция в области D , непрерывная в $\bar{D} = D \cup \Gamma$ и не принимающая на Γ значение 0. Тогда для любой точки $z \in \Gamma$ будет определен (с точностью до слагаемого вида $2\pi i$) аргумент $\arg f(z)$ комплексного числа $f(z)$. Выбрав точку $z_0 \in \Gamma$, зафиксируем в этой точке некоторое значение θ_0 аргумента $\arg f(z_0)$ числа $f(z_0)$. Затем, двигаясь по Γ в положительном направлении (т. е. так, чтобы область D оставалась слева), будем для любого $z \in \Gamma$ выбирать значение аргумента $\arg f(z)$ числа $f(z)$ так, чтобы получилась непрерывная функция от z (см. свойство 2 аргумента в п. 1 § 1). Обойдя весь контур Γ и вернувшись в z_0 , мы получим для $\arg f(z_0)$ некоторое новое значение $\theta_0 + 2\pi$. Легко видеть, что возникающее таким образом число n не зависит от выбора точки z_0 и значения θ_0 . Оно называется *числом оборотов* функции f на контуре Γ и обозначается символом $\Delta_\Gamma(f)$.

Для любой точки $z \in \Gamma$ комплексное число $\frac{f(z)}{|f(z)|}$ можно трактовать как единичный вектор. При обходе контура Γ в положительном направлении этот вектор, возвращаясь в прежнее положение, делает некоторое число полных оборотов. Число этих оборотов (засчитываемых со знаком «плюс», если вектор двигался против часовой стрелки, и со знаком «минус» в противном случае) как раз и равно числу $\Delta_\Gamma(f)$. Эта интерпретация числа $\Delta_\Gamma(f)$ делает совершенно очевидным его независимость от z_0 и θ_0 (и заодно объясняет его название).

Принцип аргумента. Число $\Delta_\Gamma(f)$ равно числу корней функции f в области D (считанных с учетом их кратности). $\square$

Доказательство принципа аргумента основывается на следующих соображениях. Очевидно, что число оборотов $\Delta_\Gamma(f)$ не меняется, если контур Γ непрерывно деформировать в области, где функция f не имеет корней. Действительно, при такой деформации число $\Delta_\Gamma(f)$ должно меняться непрерывно и, следовательно, являясь целым числом, оно остается прежним. Отсюда уже следует справедливость принципа аргумента для случая, когда функция f не имеет корней в области D . На самом деле, выбрав произвольную точку $z_0 \in D$, мы можем продеформировать контур Γ в произвольно малую окружность с центром в этой точке. На таком контуре значения функции f близки к постоянному числу $f(z_0) \neq 0$, и потому при обходе этого контура приращение аргумента равно нулю. Аналогично доказывается принцип аргумента и для случая, когда функция f имеет в D единственный простой корень z_0 . Действительно, в этом случае значение функции f на малой окружности с центром в точке z_0 мало отличается от значений, принимаемых функцией $z - z_0$, а приращение аргумента для последней функции, очевидно, равно 1. Общий случай сводится к разобранным в силу формулы

$$\Delta_\Gamma(f_1 f_2) = \Delta_\Gamma(f_1) + \Delta_\Gamma(f_2), \quad (3)$$

немедленно вытекающей из того, что аргумент произведения двух комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей.

З а м е ч а н и е 1. При соответствующих оговорках принцип аргумента справедлив и для контуров Γ , уходящих в бесконечность. Теорема 1 п. 1 гл. 2 представляет собой частное проявление этого принципа для случая, когда Γ является мнимой осью, а функция f — многочленом. (Заметим, что и доказательство этой теоремы по существу следует намеченному выше доказательству принципа аргумента.)

Непосредственным следствием принципа аргумента является следующая теорема:

Теорема Руше. Пусть f и g — регулярные функции в области D , непрерывные в $\bar{D} = D \cup \Gamma$. Если для любой точки $z \in \Gamma$ имеет место неравенство

$$|g(z)| < |f(z)|,$$

то функции f и $f + g$ имеют в D одно и то же число корней.

Доказательство. Так как на Γ

$$|f| > |g| \geq 0 \quad \text{и} \quad |f + g| \geq |f| - |g| > 0,$$

то функции f и $f + g$ не обращаются в нуль на Γ . Поэтому к ним применим принцип аргумента. Но $f + g = f\left(1 + \frac{g}{f}\right)$, и потому (см. формулу (3))

$$\Delta_{\Gamma}(f + g) = \Delta_{\Gamma}(f) + \Delta_{\Gamma}\left(1 + \frac{g}{f}\right).$$

Поскольку $|g/f| < 1$ на Γ , конец вектора $\xi = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ для любой точки $z \in \Gamma$ лежит в круге $|\xi - 1| < 1$ радиуса 1 с центром в точке 1 и потому при обходе контура Γ не может сделать ни одного полного оборота. Следовательно,

$$\Delta_{\Gamma}\left(1 + \frac{g}{f}\right) = 0.$$

Таким образом, $\Delta_{\Gamma}(f + g) = \Delta_{\Gamma}(f)$, и потому согласно принципу аргумента функции f и $f + g$ имеют в области D одно и то же число корней. $\square$

З а м е ч а н и е 2. Интересно, что принцип максимума является непосредственным следствием теоремы Руше. Действительно, пусть модуль $|f|$ непостоянной функции f , регулярной в ограниченной области D и непрерывной в ее замыкании $\bar{D}$, достигает максимума в некоторой точке $z_0 \in D$. Так как функция f не постоянна и, в частности, не равна тождественно нулю, то $|f(z_0)| > 0$. Поэтому в некотором достаточно малом круге S с центром в точке z_0 , целиком лежащем в области D , функция f не обращается в нуль, и, значит, в этом круге регулярна функция $1/f$. Будем для простоты считать, что точка максимума z_0 изолирована (легким дополнительным рассуждением общий случай сводится к этому). Тогда при достаточно малом радиусе круга S функции $1/f$ и постоянная функция $g = -\frac{1}{f(z_0)}$ удовлетворяют условиям теоремы Руше и, следовательно, функции $\frac{1}{f(z)}$ и $\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)}$ имеют в круге S одно и то же число корней. Но функция $\frac{1}{f(z)}$

корней не имеет, а функция

$$\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)} = \frac{f(z_0) - f(z)}{f(z)f(z_0)}$$

обращается в точке z_0 в нуль. Полученное противоречие показывает, что точка максимума z_0 не может принадлежать области D и должна лежать на ее границе. $\square$

Существенную роль теорема Руше играет и в доказательстве теоремы о неявной функции. Мы на этом останавливаться не будем.

Важным следствием теоремы Руше является теорема о связи между корнями функций некоторой последовательности $\{f_n\}$ и корнями предельной функции f . Мы не будем формулировать эту теорему (впервые доказанную, по-видимому, Гурвицом) в полной общности, а ограничимся ее частным случаем, достаточным для наших целей.

Напомним, что функция $\delta_n(z)$, зависящая от целочисленного параметра n , называется *равномерно сходящейся к нулю* в области D при $n \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N > 0$, что $|\delta_n(z)| < \varepsilon$ для любого $n > N$ и любой точки $z \in D$.

Предложение 2. Пусть f и δ_n , $n = 1, 2, \dots$, — функции, регулярные в замкнутом круге $|z| \leq 1$, и пусть функция δ_n равномерно стремится к нулю в этом круге при $n \rightarrow \infty$. Пусть, кроме того, $f(0) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что при любом $n > N$ функция $f + \delta_n$ имеет корень z_n , для которого $|z_n| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть Γ — окружность радиуса $r < 1$ с центром в точке 0. При достаточно малом r (скажем, при $r < r_0$) функция f отлична от нуля на Γ (ибо эта функция имеет в замкнутом единичном круге только конечное число корней), и потому ее модуль $|f|$ имеет на Γ положительный минимум η_r . Выбрав r меньшим данного ε , рассмотрим такое число N_r , что $|\delta_n(z)| < \eta_r$ при $n > N_r$ для всех $z \in \Gamma$. Тогда функции f и δ_n удовлетворяют на Γ условиям теоремы Руше, и потому число корней функций f и $f + \delta_n$ внутри Γ одно и то же. Но функция f имеет внутри Γ корень 0 (может быть, кратный). Поэтому и функция

$f + \delta_n$ имеет внутри Γ , хотя бы один корень z_n . Так как $|z_n| < r < \epsilon$, то, тем самым, предложение 2 полностью доказано. $\square$

3. Доказательство теоремы Чеботарева

Пусть f — целая функция, и пусть, как и в п. 1, g и h — такие целые функции с вещественными коэффициентами, что

$$f(z) = g(-iz) + ih(-iz).$$

Рассмотрим следующие условия на функцию f :

(А) Функция f сильно устойчива.

(Б) Для любого z при $\operatorname{Im} z > 0$ точка $\frac{h(z)}{g(z)}$ также принадлежит верхней полуплоскости:

$$\operatorname{Im} \frac{h(z)}{g(z)} > 0, \text{ если } \operatorname{Im} z > 0.$$

(В) Для любого z , такого, что $\operatorname{Im} z > 0$, имеет место неравенство

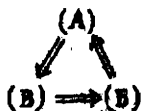
$$\left| \frac{g(z) + ih(z)}{g(z) - ih(z)} \right| < 1.$$

(Г) Функции g и h не имеют общих корней, составляют вещественную пару и функция $gh' - g'h$ положительна хотя бы в одной точке вещественной оси.

Теорема Чеботарева, сформулированная в п. 1, утверждает, что условия (А) и (Г) равносильны. Мы докажем, что равносильны все четыре условия (А) — (Г):

Теорема 1. Условия (А), (Б), (В), (Г) равносильны.

Доказательство. Докажем сначала импликации



обеспечивающие равносильность условий (А), (Б) и (В).

Импликация $(A) \Rightarrow (B)$. По условию существует такое $\epsilon > 0$, что при $|z| < \epsilon$ функция

$$f_\epsilon(z) = g(-iz) + (1 + \epsilon)h(-iz)$$

устойчива, т. е. не обращается в нуль при $\operatorname{Re} z > 0$. Поскольку $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re}(i\bar{z})$, это означает, что функция

$$\overline{f_{\xi}(i\bar{z})} = g(z) - ih(z) + \bar{\xi}h(z) = \left[\frac{g(z)}{h(z)} - (i - \bar{\xi}) \right] \cdot h(z)$$

не обращается в нуль при $\operatorname{Im} z > 0$, т. е. что функция $\frac{g(z)}{h(z)}$ не принимает при $\operatorname{Im} z > 0$ ни одного значения вида $i - \bar{\xi}$, где $|\xi| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\left| \frac{g(z)}{h(z)} - i \right| \geq \varepsilon \quad \text{при } \operatorname{Im} z > 0,$$

и, значит,

$$|g(z) - ih(z)| \geq \varepsilon |h(z)| \quad \text{при } \operatorname{Im} z > 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(z) + ih(z)}{g(z) - ih(z)} \right| &\leq \frac{|g(z) - ih(z)| + 2|h(z)|}{|g(z) - ih(z)|} < \\ &\leq 1 + \frac{2}{\varepsilon} = \frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon} \quad \text{при } \operatorname{Im} z > 0. \end{aligned}$$

Этим доказано, что регулярная в верхней полуплоскости функция

$$\varphi = \frac{g + ih}{g - ih}$$

ограничена. Кроме того, ясно, что $|\varphi| = 1$ на вещественной оси. Таким образом, функция φ удовлетворяет всем условиям предложения 1 п. 2 и, следовательно, $|\varphi(z)| < 1$ при $\operatorname{Im} z > 0$.

Импlication (B) $\Rightarrow$ (B). Поскольку

$$\frac{g + ih}{g - ih} = \frac{1 + i \frac{h}{g}}{1 - i \frac{h}{g}},$$

достаточно доказать, что из неравенства

$$\left| \frac{1 + i\omega}{1 - i\omega} \right| < 1$$

вытекает неравенство $\operatorname{Im} \omega > 0$. Но это очевидно, поскольку при $\omega = u + iv$

$$\left| \frac{1 + i\omega}{1 - i\omega} \right|^2 = \frac{(1 - v)^2 + u^2}{(1 + v)^2 + u^2} = 1 - \frac{4uv}{(1 + v)^2 + u^2}.$$

Импликация $(B) \Rightarrow (A)$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ (например, можно взять $\varepsilon = 1/2$). Тогда $\operatorname{Im}(-i + \zeta) < 0$ при $|\zeta| < \varepsilon$. С другой стороны, по условию при $\operatorname{Im} z > 0$ имеет место неравенство $\operatorname{Im} \frac{h(z)}{g(z)} > 0$, т. е. неравенство $\operatorname{Im} \frac{g(z)}{h(z)} < 0$. Поэтому ни для какого ζ с $|\zeta| < \varepsilon$ и ни для какого z с $\operatorname{Im} z > 0$ равенство $\frac{g(z)}{h(z)} - i + \zeta = 0$, т. е. равенство $g(z) + (-i + \zeta)h(z) = 0$, невозможно. Это означает, что при $|\zeta| \leq \varepsilon$ уравнение

$$g(z) + (-i + \zeta)h(z) = 0$$

корней с $\operatorname{Im} z \geq 0$ не имеет. Но тогда уравнение

$$g(-iz) + (i + \zeta)h(z) = 0,$$

т. е. уравнение $f_{\zeta}(z) = 0$, не имеет корней с $\operatorname{Re} z > 0$. Следовательно, функция f сильно устойчива.

Доказательству равносильности условий (A), (B) и (B) условию (Г) мы предположим две леммы.

Лемма 1. Если функции g и h составляют вещественную пару, то функция $\operatorname{Im} \frac{h}{g}$ не обращается в верхней полуплоскости ни в нуль, ни в бесконечность и потому сохраняет постоянный знак.

Доказательство. Равенство $\operatorname{Im} \frac{h(z_0)}{g(z_0)} = 0$ при $\operatorname{Im} z_0 > 0$ означает, что число $\frac{h(z_0)}{g(z_0)} = \lambda$ вещественно. Поэтому функция $\lambda g - h$ имеет вопреки предположению не вещественный корень z_0 . Если же $\operatorname{Im} \frac{h(z_0)}{g(z_0)} = \infty$, то $g(z_0) = 0$, и потому не вещественный корень z_0 имеет функция g .

Лемма 2. Если функция $\operatorname{Im} \frac{h}{g}$ сохраняет в верхней полуплоскости один и тот же знак $\tau = \pm 1$, то

$$\tau (h'(x)g(x) - h(x)g'(x)) \geq 0 \quad (1)$$

для всех вещественных x .

Доказательство. Пусть x_0 — произвольное вещественное число, не являющееся корнем функции g .

Рассмотрим функцию

$$\varphi(y) = \operatorname{Im} \frac{h(x_0 + iy)}{g(x_0 + iy)}, \quad y \geq 0.$$

Эта функция имеет при всех $y > 0$ один и тот же знак τ , и $\varphi(0) = 0$. Поэтому, если $\varphi'(0) \neq 0$, то $\operatorname{sign} \varphi'(0) = \tau$. Это означает, что $\tau \varphi'(0) \geq 0$ (в том числе и при $\varphi'(0) = 0$).

С другой стороны, по формуле дифференцирования дроби

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &= \operatorname{Im} \left(\frac{h(x_0 + iy)}{g(x_0 + iy)} \right)' = \\ &= \operatorname{Im} \frac{ih'(x_0 + iy)g(x_0 + iy) - ih(x_0 + iy)g'(x_0 + iy)}{g(x_0 + iy)^2}, \end{aligned}$$

и потому

$$\varphi'(0) = \frac{h'(x_0)g(x_0) - h(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Таким образом,

$$\tau(h'(x_0)g(x_0) - h(x_0)g'(x_0)) \geq 0$$

для всех вещественных x_0 , за исключением, быть может, отдельных изолированных точек, являющихся корнями функции g . Но тогда по непрерывности это неравенство верно и в этих точках. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Ниже мы докажем (см. следствие из леммы 3), что если функции g и h составляют вещественную пару, то для всех x неравенство (1) строгое. Пока что нам достаточно заметить, что на любом конечном интервале может существовать лишь конечное число точек, в которых неравенство (1) обращается в равенство. Действительно, в противном случае целая функция $h'g - hg'$ тождественно равна нулю и, следовательно, функции h и g пропорциональны, чего, как мы знаем, для функций, составляющих вещественную пару, быть не может. $\square$

Из леммы 1 и 2 непосредственно вытекает, что $(Г) \Rightarrow (Б)$. Действительно, по лемме 1 функция $\operatorname{Im} \frac{h}{g}$ сохраняет в верхней полуплоскости постоянный знак $\tau = \pm 1$, т. е. при $\operatorname{Im} z \geq 0$ точка $\tau \frac{h(z)}{g(z)}$ принадлежит верхней полуплоскости, а в силу леммы 2 из условия, что функция $h'g - hg'$ положительна хотя бы в одной точке вещественной оси, следует, что $\tau = 1$.

Пусть теперь функция f удовлетворяет условиям (А), (Б) и (В). Покажем, что она удовлетворяет условию (Г). Доказательство мы разобьем на несколько этапов.

1) Функции g и h не имеют общих корней. Немедленно вытекает, как мы знаем, из (А).

2) Функция g не имеет невещественных корней. Действительно, пусть функция g имеет невещественный корень z_0 . Поскольку коэффициенты функции g вещественны, ее корнем будет и комплексно сопряженное число $\bar{z}_0$. Следовательно, без ограничения общности мы можем считать, что $\text{Im } z_0 > 0$. Но так как $g(z_0) = 0$ и $h(z_0) \neq 0$, то

$$\left| \frac{g(z_0) + ih(z_0)}{g(z_0) - ih(z_0)} \right| = 1,$$

что противоречит условию (В).

3) Функции g и h составляют вещественную пару. Вместе с функцией f условию (А), а значит, и условию (В), удовлетворяет, очевидно, и функция $(\lambda - i\mu)f(z)$, где λ и μ — произвольные вещественные числа, одновременно не равные нулю. Но для этой функции функцией g является, как легко видеть, функция $\lambda g + \mu h$. Поэтому согласно 2) функция $\lambda g + \mu h$ невещественных корней не имеет.

4) Существует такое вещественное x_0 , что $h'(x_0)g(x_0) - h(x_0)g'(x_0) > 0$. Согласно лемме 2 и условию (Б) для любых вещественных x имеет место неравенство

$$h'(x)g(x) - h(x)g'(x) \geq 0.$$

С другой стороны, согласно 3) и замечанию 1 существуют точки x_0 , в которых левая часть этого неравенства отлична от нуля.

Тем самым, теорема 1 полностью доказана. В частности, полностью доказана и теорема Чеботарева из п. 1. $\square$

Докажем теперь предложения 1 и 2 из п. 1.

Лемма 3. Если функции g и h составляют вещественную пару, то все их корни вещественны и просты.

Доказательство. Вещественность корней очевидна, поскольку функция g получается из функции $\lambda g + \mu h$ при $\lambda = 1$, $\mu = 0$, а функция h — при $\lambda = 0$,

$\mu = 1$. Поэтому доказательства требует только простота корней.

Пусть x_0 — корень, скажем, функции h , и пусть n — его кратность. Тогда разложение функции h по степеням разности $\zeta = z - x_0$ имеет вид

$$h(z) = b_n \zeta^n + b_{n+1} \zeta^{n+1} + \dots,$$

где $b_n \neq 0$. Аналогично

$$g(z) = a_0 + a_1 \zeta + \dots,$$

где $a_0 \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$w(\zeta) = \frac{h(z)}{\zeta^n g(z)} = \frac{b_n + b_{n+1} \zeta + \dots}{a_0 + a_1 \zeta + \dots}.$$

Эта функция регулярна в точке $\zeta = 0$, и $w(0) = \frac{b_n}{a_0} \neq 0$. Поэтому (следствие из теоремы о неявной функции; см. п. 2) существуют такие регулярные в точке 0 функции $w_1(\zeta), \dots, w_n(\zeta)$, что

$$[w_k(\zeta)]^n = w(\zeta), \quad k = 1, \dots, n,$$

причем $w_1(0), \dots, w_n(0)$ являются значениями корня n -й степени из $w(0) = \frac{b_n}{a_0}$. Если $n > 2$, то среди этих значений непременно найдутся невещественные. При $n = 2$ оба значения будут невещественными, если $\frac{b_n}{a_0} < 0$. При $n = 2$ и $\frac{b_n}{a_0} > 0$ мы вместо функций g и h рассмотрим функции g и $-h$. Поскольку функции g и $-h$, очевидно, также составляют вещественную пару, и для них отношение $\frac{b_n}{a_0}$ отрицательно, мы, следовательно, без ограничения общности можем считать, что при $n \geq 2$ хотя бы одно из чисел $w_1(0), \dots, w_n(0)$ невещественно. Для определенности будем считать, что невещественно число $w_1(0)$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\zeta w_1(\zeta) - \alpha = 0.$$

Поскольку функция $F(\alpha, \zeta) = \zeta w_1(\zeta) - \alpha$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции ($F(0, 0) = 0$ и $F'_\zeta(0, 0) = w_1(0) \neq 0$), это уравнение имеет регулярное в точке $\alpha = 0$ решение

$$\zeta = \zeta(\alpha).$$

Это означает, что для любого α_0 с достаточно малым модулем $|\alpha_0|$ существует такое число $\zeta_0 = \zeta(\alpha_0)$, что $\zeta_0 \psi_1(\zeta_0) = \alpha_0$. При этом (см. формулу (2) п. 2)

$$\zeta_0 = -\frac{1}{\psi_1(0)} \alpha_0 + \dots,$$

откуда вытекает, что если α_0 вещественно (и его модуль $|\alpha_0|$ достаточно мал), то ζ_0 не вещественно.

Возводя равенство $\zeta_0 \psi_1(\zeta_0) = \alpha_0$ в степень n и вспоминая определение функции $\psi_1(\zeta)$, мы получаем, что

$$\psi(\zeta_0) = \frac{\alpha_0^n}{\zeta_0^n}.$$

Но по построению $\psi(\zeta_0) = \frac{h(z_0)}{\zeta_0^n g(z_0)}$, где $z_0 = x_0 + \zeta_0$.

Следовательно,

$$\frac{h(z_0)}{g(z_0)} = \alpha_0^n,$$

т. е. $\alpha_0^n g(z_0) - h(z_0) = 0$.

Поскольку при не вещественном ζ_0 число $z_0 = x_0 + \zeta_0$ также не вещественно, тем самым доказано, что при $\lambda = \alpha_0^n$ и $\mu = -1$ функция $\lambda g + \mu h$ имеет не вещественный корень z_0 . Так как по условию это невозможно, то, следовательно, $n = 1$.

Для корней функции g доказательство аналогично. $\square$

Следствие. Если функции g и h , не имеющие общих корней, составляют вещественную пару, то

$$h'(x)g(x) - h(x)g'(x) \neq 0$$

для любого вещественного x .

Доказательство. Пусть существует такое x_0 , что

$$h'(x_0)g(x_0) - h(x_0)g'(x_0) = 0.$$

Предполагая для определенности, что $g(x_0) \neq 0$, положим

$$\lambda_0 = \frac{h(x_0)}{g(x_0)} = \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Тогда функция $\lambda_0 g - h$ будет иметь корень x_0 , причем этот корень будет кратным (ибо $\lambda_0 g'(x_0) - h'(x_0) = 0$). Но это противоречит лемме 3, поскольку функ-

ции g и $\lambda_0 g - h$, очевидно, составляют вещественную пару. $\square$

Лемма 4. Пусть g и h — вещественные функции, определенные и непрерывно дифференцируемые на всей вещественной оси и не имеющие общих вещественных корней. Функция $\psi = h'g - hg'$ тогда и только тогда отлична от нуля во всех вещественных корнях функций g и h , когда эти корни просты.

Доказательство. Если x_0 — простой корень, скажем, функции h , то $h'(x_0) \neq 0$. Кроме того, по условию $g(x_0) \neq 0$. Следовательно,

$$\psi(x_0) = h'(x_0)g(x_0) \neq 0.$$

Обратно, если $h(x_0) = 0$ и $\psi(x_0) \neq 0$, то $h'(x_0)g(x_0) \neq 0$, и потому $h'(x_0) \neq 0$. $\square$

Лемма 5. Пусть g и h — вещественные функции, определенные и непрерывно дифференцируемые на всей вещественной оси и не имеющие общих корней. Предположим, что все вещественные корни этих функций просты. Тогда для того чтобы между любыми двумя соседними корнями одной функции лежал один и только один корень другой функции, необходимо и достаточно, чтобы во всех корнях функций g и h функция $\psi = h'g - hg'$ имела один и тот же знак.

Доказательство. Пусть между любыми двумя корнями одной из функций g и h лежит один и

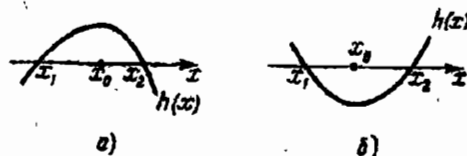


Рис. 24.

только один корень другой функции. Рассмотрим пару соседних корней x_1 и x_2 , скажем, функции h . Пусть x_0 — корень функции g , лежащий между x_1 и x_2 . Очевидно, достаточно доказать, что

$$\text{sign } \psi(x_1) = \text{sign } \psi(x_0) = \text{sign } \psi(x_2). \quad (2)$$

Но так как x_1 и x_2 — соседние и простые корни, то функция h' принимает в них противоположные по знаку значения (см. рис. 24):

$$\text{sign } h'(x_1) = -\text{sign } h'(x_2),$$

а так как между точками x_1 и x_2 содержится только один и притом простой корень функции g , то эта функция также принимает в них противоположные по знаку значения (см. рис. 25):

$$\operatorname{sign} g(x_1) = -\operatorname{sign} g(x_2).$$

Кроме того (см. тот же рис. 25),

$$\operatorname{sign} g'(x_0) = -\operatorname{sign} g(x_1)$$

и (см. рис. 24)

$$\operatorname{sign} h(x_0) = \operatorname{sign} h'(x_1).$$

Поскольку

$$\psi(x_1) = h'(x_1)g(x_1), \quad \psi(x_0) = -h(x_0)g'(x_0),$$

$$\psi(x_2) = h'(x_2)g(x_2),$$

равенства (2) тем самым полностью доказаны.

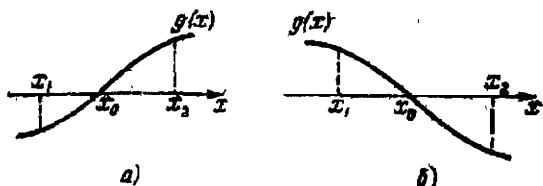


Рис. 25.

Обратно, пусть функция ψ во всех корнях функций g и h имеет один и тот же знак. Если утверждение леммы неверно, то найдутся два соседних корня x_1 и x_2 , скажем, функции h , между которыми функция g не обращается в нуль и потому сохраняет постоянный знак. В частности,

$$\operatorname{sign} g(x_1) = \operatorname{sign} g(x_2).$$

Но поскольку корни x_1 и x_2 функции h простые, то (см. выше)

$$\operatorname{sign} h'(x_1) = -\operatorname{sign} h'(x_2).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \psi(x_1) &= \operatorname{sign} h'(x_1)g(x_1) = \\ &= -\operatorname{sign} h'(x_2)g(x_2) = -\operatorname{sign} \psi(x_2), \end{aligned}$$

что противоречит условию. Следовательно, между любыми соседними корнями одной из функций g и h лежит один и только один корень другой функции.

Тем самым лемма 5 полностью доказана. $\square$

Замечание 2. В случае, когда функции g и h являются многочленами с вещественными корнями, из результатов п. 2 гл. 1 и леммы 5 вытекает, что если многочлен $\psi = h'g - hg'$ отличен от нуля и сохраняет постоянный знак во всех корнях многочленов g и h , то он отличен от нуля при всех вещественных x . Как показывает пример функций $g(x) = (1 - x^2)e^x$, $h(x) = xe^{x^2}$ для произвольных целых функций это неверно (для данных функций $\psi(x) = (-2x^4 + x^3 + 3x^2 - x + 1)e^{x^2+x}$ и $\psi(-2) < 0$, тогда как в корнях ± 1 и 0 функций g и h функция ψ положительна). Заметим, однако, что согласно замечанию 1 для функций g и h , составляющих вещественную пару, это утверждение верно.

Теперь мы уже можем непосредственно перейти к доказательству предложений 1 и 2 п. 1.

Доказательство предложения 1. Если функции g и h составляют вещественную пару, то согласно лемме 3 их корни вещественны и просты, а потому согласно лемме 4 функция $\psi = h'g - hg'$ во всех корнях функций g и h отлична от нуля. С другой стороны, согласно леммам 1 и 2 эта функция во всех точках, где она отлична от нуля, имеет один и тот же знак. Поэтому согласно лемме 5 корни функций g и h перемежаются. $\square$

Доказательство предложения 2. Пусть корни многочленов g и h перемежаются. Рассмотрим корни $x_1, \dots, x_n$ многочлена g . Поскольку все эти корни по условию просты, разложение на простейшие дроби функции $S = \frac{h}{g}$ имеет вид

$$S(x) = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

где $A_1, \dots, A_n$ — вещественные числа. При этом

$$A_k = \frac{h(x_k)}{g'_k(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$g_k(x) = \frac{g(x)}{x - x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Но ясно, что $g_k(x_k) = g'(x_k)$. Таким образом, для любого $k = 1, 2, \dots, n$

$$A_k = \frac{h(x_k)}{g'(x_k)} = \frac{h(x_k)g'(x_k)}{[g'(x_k)]^2} = -\frac{\psi(x_k)}{[g'(x_k)]^2}.$$

где, как и выше, $\psi = h'g - hg'$. Поэтому

$$\operatorname{sign} A_k = -\operatorname{sign} \psi(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В силу леммы 5 это доказывает, что все числа $A_1, \dots, A_n$ имеют один и тот же знак. Заменяя, если нужно, h на $-h$, мы можем считать, что $A_1 \leq 0, \dots, A_n \leq 0$.

Пусть теперь $z = x + iy$ — произвольная точка верхней полуплоскости $y > 0$. Так как

$$\operatorname{Im} \frac{A_k}{z - x_k} = \frac{-A_k y}{(x - x_k)^2 + y^2} > 0,$$

то функция $\operatorname{Im} \frac{h}{g}$ является в верхней полуплоскости суммой положительных слагаемых и потому сама положительна. Следовательно, согласно теореме 1 (импликация (Б) $\Rightarrow$ (Г)) многочлены g и h составляют вещественную пару. $\square$

4. Квазимоночлены без главного члена

В этом пункте мы докажем теорему 2 из п. 1 о квазимоночленах без главного члена.

Пусть, как и в п. 1,

$$az^r w^s, \quad a \neq 0,$$

— произвольный член многочлена $F(z, w)$, определяющего квазимоночлен f .

Мы сопоставим этому члену точку плоскости с прямоугольными координатами (r, s) . Отсутствие у многочлена $F(z, w)$ главного члена означает, что в этой конечной системе точек нет точки одновременно самой правой и самой верхней. Поэтому (см. рис. 26) существует прямая вида $y + \alpha x = \beta$ с положительным рациональным коэффициентом α , проходящая по крайней мере через две точки этой системы и обладающая тем свойством, что все остальные точки лежат ниже этой прямой. Этим доказана следующая лемма:

Лемма 1. Если многочлен $F(z, w)$ не имеет главного члена, то существуют такое положительное ра-



Рис. 26.

циональное число α и такое рациональное число β , что

$$r + \alpha s \leq \beta \quad (1)$$

для всех членов $\alpha z^r w^s$, $\alpha \neq 0$, многочлена $F(z, w)$, причем равенство имеет место по крайней мере для двух разных членов. $\square$

В дальнейшем мы будем считать числа α и β раз навсегда выбранными и фиксированными. Число $r + \alpha s$ мы будем называть *весом* члена $\alpha z^r w^s$.

Пусть $F_1(z, w)$ — сумма всех членов многочлена $F(z, w)$, для которых в (1) достигается равенство, а $F_2(z, w)$ — сумма всех остальных членов. Таким образом,

$$F(z, w) = F_1(z, w) + F_2(z, w),$$

где $F_1(z, w)$ — многочлен, все члены которого имеют один и тот же вес β , а $F_2(z, w)$ — многочлен, вес каждого члена которого меньше β . При этом многочлен $F_1(z, w)$ состоит не менее, чем из двух членов, т. е. имеет вид

$$F_1(z, w) = \sum_{k=1}^m \alpha_k z^{r_k} w^{s_k},$$

где $r_k + \alpha s_k = \beta$ и $m \geq 2$.

Лемма 2. Уравнение

$$F_1(i, \theta) = \sum_{k=1}^m \alpha_k i^{r_k} \theta^{s_k} = 0 \quad (2)$$

имеет хотя бы один отличный от нуля корень θ (вообще говоря, комплексный).

Доказательство. Эта лемма очевидна, поскольку многочлен $F_1(i, \theta)$ от θ содержит по крайней мере два различных члена. $\square$

Теперь мы уже можем доказать теорему 2 п. 1.

Доказательство теоремы 2 п. 1. Выбрав и зафиксировав некоторый корень $\theta \neq 0$ уравнения (2), введем новую переменную ζ , связанную с переменной z формулой

$$z = a \ln 2\pi i + 2\pi i i + \ln \theta + \zeta, \quad (3)$$

где n — некоторое положительное натуральное число, которое мы будем считать очень большим. Таким образом,

$$z = 2\pi ni (1 + \delta_n^{(1)}(\zeta)),$$

где

$$\delta_n^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi ni} (\zeta + \ln \theta + \alpha \ln 2\pi n)$$

— регулярная (даже линейная) функция от ζ , равномерно стремящаяся к нулю при $n \rightarrow +\infty$, скажем, в круге $|\zeta| \leq 1$. Поэтому

$$z' = (2\pi ni)' (1 + \delta_n^{(2)}(\zeta)),$$

где $\delta_n^{(2)}(\zeta)$ — регулярная функция, равномерно стремящаяся к нулю при $n \rightarrow +\infty$ в круге $|\zeta| \leq 1$.

Отсюда следует, что, перейдя в произвольном члене $az'e^{sz}$ квазимногочлена $f(z) = F(z, e^z)$ к переменной ζ , мы получим функцию вида

$$a(2\pi n)^{r+\alpha s} i^s \theta^s e^{r\zeta} (1 + \delta_n^{(2)}(\zeta)) \quad (4)$$

(ибо $e^z = (2\pi n)^{\alpha} \theta e^{\zeta}$). Таким образом, весь квазимногочлен $f(z)$ представляется в виде суммы функций вида (4). Обратим внимание, что $2\pi n$ входит в (4) в степени, равной весу соответствующего члена $az'e^{sz}$ многочлена $F(z, w)$.

Рассмотрим сначала слагаемые, отвечающие членам многочлена $F_1(z, w)$. Их сумма, очевидно, имеет вид

$$(2\pi n)^{\beta} \Phi(\zeta) + (2\pi n)^{\beta} \delta_n^{(3)}(\zeta), \quad (5)$$

где $\delta_n^{(3)}(\zeta)$ — регулярная функция, равномерно стремящаяся к нулю при $n \rightarrow +\infty$ в круге $|\zeta| \leq 1$, а

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^m a_k i^{r_k} \theta^{s_k} e^{r_k \zeta}. \quad (6)$$

Все остальные слагаемые (4), отвечающие членам многочлена $F_2(z, w)$, содержат $2\pi n$ в степени, меньшей чем β . Поэтому их сумма может быть представлена в виде $(2\pi n)^{\beta} \delta_n^{(4)}(\zeta)$, где $\delta_n^{(4)}(\zeta)$ — регулярная функция, равномерно стремящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$ в круге $|\zeta| \leq 1$. Прибавив их к (5), мы изменим только функ-

цию $\delta_n^{(3)}(\zeta)$. Этим доказано, что в переменной ζ квазимногочлен $f(z)$ имеет вид

$$(2\pi n)^{\beta} \Phi(\zeta) + (2\pi n)^{\beta} \delta_n(\zeta), \quad (7)$$

где $\delta_n(\zeta)$ — регулярная функция, равномерно стремящаяся к нулю, при $n \rightarrow \infty$ в круге $|\zeta| \leq 1$. Сокращая на $(2\pi n)^{\beta}$, мы, следовательно, получаем для корней квазимногочлена $f(z)$ уравнение вида

$$\Phi(\zeta) + \delta_n(\zeta) = 0. \quad (8)$$

Заметим теперь, что функция Φ от n не зависит и, кроме того,

$$\Phi(0) = F_1(i, \theta) = 0.$$

Следовательно, к уравнению (8) применимо предложение 2 п. 2. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ (например, для $\varepsilon = 1$) существует такое N_0 , что при любом $n > N_0$ уравнение (8) имеет такой корень ζ_n , что $|\zeta_n| < \varepsilon$. Тем самым доказано, что для любого $n > N_0$ квазимногочлен $f(z)$ имеет корень вида

$$z_n = \alpha \ln 2\pi n + 2\pi n i + \ln \theta + \zeta_n, \quad \text{где } |\zeta_n| < 1.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 остается заметить, что, так как

$$\operatorname{Re} z_n = \alpha \ln 2\pi n + \ln |\theta| + \operatorname{Re} \zeta_n > \alpha \ln 2\pi n + \ln |\theta| - 1,$$

то при достаточно большом n вещественная часть этого корня положительна (и сколь угодно велика).

Тем самым теорема 2 п. 1 полностью доказана. $\square$

5. Доказательство теоремы Понтрягина

Теорема Понтрягина, подобно теореме 1 п. 1 гл. 2, доказывается с помощью принципа аргумента. Однако ее идейно простое доказательство существенно осложнено необходимостью ряда оценок, с которых мы поэтому и начнем.

Определение 1. Квазимногочлен $f(z)$ мы будем называть квазимногочленом с постоянными коэффициентами, если его определяющий многочлен не зависит от z , т. е. является многочленом $F(w)$ только от w . Бистепень такого квазимногочлена равна $(0, n)$, где n —

степень многочлена $F(w)$. Число n мы будем называть степенью квазимногочлена $f(z)$ с постоянными коэффициентами.

Лемма 1. Любой квазимногочлен $f(z)$ с постоянными коэффициентами является периодической функцией от z с периодом $2\pi i$. В каждой горизонтальной полосе

$$a \leq \operatorname{Im} z < a + 2\pi$$

ширины 2π он имеет не более n корней. Число корней (с учетом кратности) равно n тогда и только тогда, когда свободный член многочлена $F(w)$ отличен от нуля.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из того, что функция $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, где $z = x + iy$, имеет период $2\pi i$. Для доказательства второго утверждения рассмотрим все корни $w_1, \dots, w_n$ многочлена $F(w)$, отличные от нуля. Чтобы найти все корни квазимногочлена $f(z)$, достаточно, очевидно¹⁾, решить все уравнения $e^z = w_1, \dots, e^z = w_n$. Но известно²⁾, что в каждой горизонтальной полосе $a \leq \operatorname{Im} z < a + 2\pi$ уравнение вида $e^z = w$ с $w \neq 0$ имеет одно и только одно решение. Наконец, для доказательства последнего утверждения достаточно заметить, что уравнение $e^z = 0$ корней не имеет. $\square$

Определение 2. Число a из полуоткрытого интервала $[0, 2\pi]$ мы будем называть *неисключаемым*

¹⁾ Следует также проверить, что если w_1 — корень многочлена $F(w)$ кратности n_1 , то корень z_1 квазимногочлена $f(z)$, удовлетворяющий соотношению $e^{z_1} = w_1$, также имеет кратность n_1 . Но это непосредственно вытекает из формулы

$$f^{(k)}(z) = F^{(k)}(e^z)(e^z)^k + c_1 F^{(k-1)}(e^z)(e^z)^{k-1} + \dots + c_{k-1} F'(e^z) e^z,$$

где $c_1, \dots, c_{k-1}$ — некоторые целые числа, вычислять которые нам нет необходимости. Что же касается этой формулы, то она немедленно доказывается индукцией по k с помощью формулы дифференцирования сложной функции.

²⁾ Напомним доказательство. Пусть $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Тогда уравнение $e^z = w$ равносильно двум уравнениям $e^x \cos y = u$ и $e^x \sin y = v$. Поэтому $x = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) = \ln |w|$ определяется однозначно, а $y = \arccos \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \arcsin \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ — с точностью до слагаемого вида $2\pi k$.

для квазимногочлена $f(z)$ с постоянными коэффициентами, если на горизонтальной прямой $\operatorname{Im} z = a$ нет корней этого квазимногочлена. Согласно лемме 1 все точки интервала $[0, 2\pi[$, кроме конечного числа, неисключительны.

Лемма 2. Любой квазимногочлен $f(z) = F(e^z)$ степени n с постоянными коэффициентами может быть представлен в виде

$$f(z) = e^{nz} (a_0 + \delta(z)),$$

где $a_0 \neq 0$ — старший коэффициент многочлена $F(w)$, а $\delta(z) = \delta(x, y)$ — функция, равномерно по y стремящаяся к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Пусть

$$F(w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Тогда

$$\delta(z) = \frac{a_1}{a_0} e^{-z} + \dots + \frac{a_n}{a_0} e^{-nz}.$$

Поскольку $|e^{kx}| = e^{kx}$, где $x = \operatorname{Re} z$, а $e^{-kx} < e^{-x}$ при $k > 1$ и $x > 0$, то

$$|\delta(z)| \leq \left| \frac{a_1}{a_0} \right| e^{-x} + \dots + \left| \frac{a_n}{a_0} \right| e^{-nx} < A e^{-x},$$

где $A = \left| \frac{a_1}{a_0} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{a_0} \right|$. Следовательно, $\delta(z) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ равномерно по y . $\square$

Следствие 1. Для любого квазимногочлена $f(z)$ степени n с постоянными коэффициентами существует такое $A > 0$, что

$$|f(z)| \leq A e^{n \operatorname{Re} z} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} z \geq 0. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть, как всегда, $x = \operatorname{Re} z$. Существует такое $M > 0$, что $|\delta(z)| < \frac{|a_0|}{2}$ при $x > M$, и потому

$$|f(z)| = e^{nx} |a_0 + \delta(z)| \leq \frac{3}{2} |a_0| e^{nx}, \quad x > M.$$

С другой стороны, вещественная функция $|f(z)|$ двух вещественных переменных $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$ непрерывна на замкнутом прямоугольнике $0 \leq x \leq M$, $0 \leq y \leq 2\pi$ и потому ограничена на этом прямоугольнике, т. е. существует такое $C > 0$, что

$$|f(z)| \leq C \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq M, \quad 0 \leq y \leq 2\pi.$$

Но согласно лемме 1 функция $|f(z)|$ имеет по y период 2π . Поэтому

$$|f(z)| \leq C \quad \text{при } 0 \leq x \leq M \text{ и всех } y.$$

Этим доказано, что неравенство (1) при $A = \max\left(C, \frac{3}{2}|a_0|\right)$ имеет место для всех $x \geq 0$ и всех y . $\square$

Следствие 2. Для любого квазимногочлена $f(z)$ степени n с постоянными коэффициентами существуют такое $B > 0$ и такое $M > 0$, что

$$|f(z)| \geq Be^{nx} \quad \text{при } x > M.$$

Доказательство. Пусть снова $M > 0$ — такое число, что $|\delta(z)| < \frac{|a_0|}{2}$ при $x > M$. Тогда

$$|f(z)| \geq e^{nx} (|a_0| - |\delta(z)|) \geq Be^{nx} \quad \text{при } x > M,$$

где $B = \frac{|a_0|}{2}$. $\square$

Рассмотрим теперь квазимногочлены с переменными коэффициентами. Любой такой квазимногочлен $f(z)$ может быть записан в виде

$$f(z) = z^m f_0(z) + z^{m-1} f_1(z) + \dots + f_m(z),$$

где $f_0(z), f_1(z), \dots, f_m(z)$ — квазимногочлены с постоянными коэффициентами. При этом тот факт, что $f(z)$ является квазимногочленом с главным членом бистепени (m, n) , означает, что степень квазимногочлена $f_0(z)$ равна n , а степени квазимногочленов $f_1(z), \dots, f_m(z)$ не больше n . Мы будем записывать квазимногочлен $f(z)$ в виде

$$f(z) = z^m f_0(z) (1 + v(z)),$$

где

$$v(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{f_1(z)}{f_0(z)} + \dots + \frac{1}{z^m} \cdot \frac{f_m(z)}{f_0(z)}.$$

Число a мы будем называть *неисключительным* для квазимногочлена f , если оно *неисключительно* для квазимногочлена f_0 .

Лемма 3. Для каждого квазимногочлена $f(z)$ с главным членом функция $v(z) = v(x, y)$ равномерно по y стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Если число a

неисключительное для квазимногочлена f , то для любого $x \geq 0$

$$e(x, a + 2\pi N) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |N| \rightarrow \infty$$

равномерно по x .

Доказательство. Так как степени квазимногочленов $f_1(z), \dots, f_m(z)$ с постоянными коэффициентами не превосходят n , то согласно следствию 1 существует такое число $A > 0$ (которое, очевидно, можно выбрать одним и тем же для всех $s = 1, \dots, m$), что при $x \geq 0$

$$|f_s(z)| \leq A e^{nx}, \quad s = 1, \dots, m. \quad (2)$$

С другой стороны, согласно следствию 2 существуют такие числа $B > 0$ и $M > 0$, что

$$|f_0(z)| \geq B e^{nx} \quad \text{при} \quad x > M.$$

Поэтому

$$|e(z)| \leq \frac{A}{B} \left(\frac{1}{|z|} + \dots + \frac{1}{|z|^m} \right) \quad \text{при} \quad x > M.$$

Ясно, что без ограничения общности мы можем считать, что $M > 1$. Тогда для любого $s = 1, \dots, m$

$$\frac{1}{|z|^s} \leq \frac{1}{x^s} \leq \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x > M,$$

и потому

$$|e(z)| \leq \frac{Am}{B} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x > M.$$

Поскольку $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, тем самым доказано, что $e(z) \rightarrow 0$ равномерно по y , когда $x \rightarrow +\infty$.

Аналогично, если $|y| > 1$, то

$$\frac{1}{|z|^s} \leq \frac{1}{|y|^s} \leq \frac{1}{|y|}, \quad s = 1, \dots, m,$$

и потому

$$|e(z)| < \frac{Am}{B} \cdot \frac{1}{|y|} \quad \text{при} \quad x > M.$$

Следовательно, если $x > M$, то $e(z) \rightarrow 0$ равномерно по x при $|y| \rightarrow +\infty$. В частности, $e(x, a + 2\pi N) \rightarrow 0$ равномерно по $x > M$ при $|N| \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $0 \leq x \leq M$. Поскольку число a неисключительно для f (а значит, и для f_0), непрерывная

функция $|f_0(x + ia)|$ переменной x не обращается в нуль на замкнутом отрезке $[0, M]$, и потому ее нижняя грань на этом отрезке положительна. Это означает, что существует такое $c > 0$, что

$$|f_0(x + ia)| > c \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq M.$$

Так как согласно лемме 1 функция $|f_0(z)|$ имеет период $2\pi i$, отсюда вытекает, что и для любого целого N

$$|f_0(x + i(a + 2\pi N))| > c \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq M.$$

Следовательно (см. (2)), при $z = x + i(a + 2\pi N)$, $0 \leq x \leq M$,

$$|v(z)| \leq \frac{Ae^{nx}}{c} \left(\frac{1}{|z|} + \dots + \frac{1}{|z|^m} \right) \leq \frac{Ae^{Mn}}{c} \left(\frac{1}{|z|} + \dots + \frac{1}{|z|^m} \right).$$

Но для любого $s = 1, \dots, m$ и любого $z = x + i(a + 2\pi N)$ при $|N| > 1$

$$\frac{1}{|z|^s} \leq \frac{1}{|a + 2\pi N|^s} \leq \frac{1}{|a + 2\pi N|} \leq \frac{1}{2\pi N}$$

(напомним, что по условию $0 \leq a < 2\pi$), и потому

$$|v(x, a + 2\pi N)| \leq \frac{Ame^{Mn}}{2\pi c} \cdot \frac{1}{|N|} \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq M.$$

Это доказывает, что и при $0 \leq x \leq M$ функция $v(x, a + 2\pi N)$ равномерно по x стремится к нулю, когда $|N| \rightarrow \infty$.

Следовательно, $v(x, a + 2\pi N) \rightarrow 0$ при $|N| \rightarrow \infty$ равномерно по всем $x \geq 0$. $\square$

Лемма 4. Пусть Γ — произвольный контур (вообще говоря, разомкнутый) и $\eta(z)$ — такая функция, непрерывная на Γ , что $|\eta(z)| < \varepsilon$ для любого $z \in \Gamma$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда изменение аргумента функции $1 + \eta(z)$ на контуре Γ меньше 4ε .

Доказательство. Значения, принимаемые функцией $1 + \eta(z)$ на контуре Γ , лежат в круге радиуса ε с центром в точке 1. Поэтому изменение аргумента этой функции, когда z пробегает Γ , не может превышать угла $2\operatorname{arcsin} \varepsilon$, под которым этот круг виден из точки 1. Остается заметить, что $2\operatorname{arcsin} \varepsilon < 4\varepsilon$ при $0 < \varepsilon < 1$.

Теперь у нас уже все готово для доказательства теоремы Понтрягина (теорема 3 п. 1).

Доказательство теоремы Понтрягина. Рассмотрим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ прямоугольник $\Pi = \Pi_{N, R}$, определенный неравенствами

$$0 < x < R, \quad a - 2\pi N < y < a + 2\pi N,$$

где R — произвольное положительное число, которое мы будем считать достаточно большим (см. рис. 27),

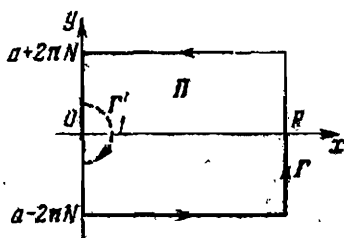


Рис. 27.

и вычислим число $L_{N, R}$ корней квазимногочлена f в этом прямоугольнике.

Для этого мы, как и выше, положим

$$f(z) = z^m f_0(z) (1 + \varepsilon(z)). \quad (3)$$

Пусть Γ — контур, состоящий из трех сторон прямоугольника Π , — нижней, правой и верхней. Согласно

лемме 3 при достаточно больших N и R величина $|\varepsilon(z)|$ на контуре Γ меньше единицы, и потому функция $1 + \varepsilon(z)$ не обращается в нуль на этом контуре. Так как при достаточно большом R квазимногочлен $f_0(z)$ также не обращается в нуль на Γ (на верхней и нижней сторонах потому, что число a неисключительно, а на правой стороне — в силу следствия 2 из леммы 2), то, следовательно, при достаточно больших N и R квазимногочлен $f(z)$ не обращается в нуль на контуре Γ . Поскольку этот квазимногочлен не имеет по условию корней на мнимой оси, этим доказано, что при достаточно больших N и R квазимногочлен f не обращается в нуль на границе Π прямоугольника Π , и потому согласно принципу аргумента число $L_{N, R}$ его корней в прямоугольнике Π равно числу $\Delta_{\Pi}(f)$ оборотов аргумента функции $f(z)$ на границе этого прямоугольника:

$$L_{N, R} = \Delta_{\Pi}(f).$$

Но число $\Delta_{\Pi}(f)$ является, очевидно, суммой числа оборотов аргумента функции f на контуре Γ и числа оборотов аргумента этой функции на левой стороне

прямоугольника Π , равного по определению $-\frac{1}{2}\Delta_f(a-2\pi N, a+2\pi N)$ (знак «минус» получается потому, что при обходе границы Π прямоугольника Π в положительном направлении левая сторона пробегается «сверху вниз», а множитель $\frac{1}{2}$ — потому, что число Δ_f является по определению числом полуборотов аргумента). Следовательно,

$$\Delta_{N,R} = \Delta_f(f) - \frac{1}{2}\Delta_f(a-2\pi N, a+2\pi N). \quad (4)$$

Таким образом, нам остается только вычислять число $\Delta_f(f)$. Мы сделаем это в несколько этапов.

1) Число оборотов аргумента функции z^m на контуре Γ равно $\frac{m}{2}$. Пусть Γ' — полуокружность $|z|=1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$. Рассмотрим контур Γ^* , составленный из полуокружности Γ' и границы Π прямоугольника Π , из которой вырезан диаметр полуокружности Γ' (см. рис. 27). На этом контуре и внутри него функция z^m в нуль не обращается. Поэтому по принципу аргумента число оборотов аргумента функции z^m на контуре Γ^* равно нулю. Поскольку на отрезках мнимой оси, входящих в контур Γ^* , число оборотов аргумента функции z^m , очевидно, равно нулю (аргумент функции z^m на мнимой оси постоянен), этим доказано, что интересующее нас число оборотов аргумента функции z^m на контуре Γ равно числу оборотов аргумента функции z^m на полуокружности Γ' , пробегаемой против часовой стрелки. Но на этой полуокружности $z^m = e^{im\theta}$, где θ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, и потому изменение аргумента равно $m\pi$.

2) Число оборотов аргумента функции e^{az} на правой стороне прямоугольника Π равно $2\pi N$. Достаточно заметить, что на этой стороне $e^{az} = e^{aRe}e^{iNy}$, где y меняется от $a-2\pi N$ до $a+2\pi N$ и, следовательно, изменение аргумента равно $4\pi N$.

3) Число оборотов аргумента функции $f_0(z)$ на контуре Γ равно $2\pi N + \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$. Действительно, во-первых, на верхней и нижней сторонах прямоугольника Π функция f_0 в силу периодичности (лемма 1) принимает одинаковые значения, и эти сто-

роны пробегаются в противоположных направлениях. Поэтому вклады этих сторон в изменение аргумента на контуре Γ сокращается. Во-вторых, из леммы 2, леммы 4 и утверждения 2) следует, что число оборотов аргумента функции f_0 на остающейся правой стороне равно $2\pi N + \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$.

4) Число $\Delta_\Gamma(f)$ оборотов аргумента функции f на контуре Γ равно $2\pi N + \frac{m}{2} + \varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$ и $N \rightarrow +\infty$. Действительно, из формулы (3) следует, что число $\Delta_\Gamma(f)$ равно сумме чисел оборотов аргумента функций z^m , $f_0(z)$ и $1 + \varepsilon(z)$. Поэтому 4) вытекает из 1) и 3), если заметить, что согласно леммам 3 и 4 число оборотов аргумента функции $1 + \varepsilon(z)$ стремится к нулю, когда $R \rightarrow +\infty$ и $N \rightarrow +\infty$.

Подставляя найденное значение $\Delta_\Gamma(f)$ в формулу (4) и преобразовывая, мы получаем, что

$$\Delta_f(a - 2\pi N, a + 2\pi N) = 4\pi N + m - 2L_{N, R} + 2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$ и $R \rightarrow +\infty$, то эта формула показывает, что при достаточно больших N и R ближайшим целым к числу $\Delta_f(a - 2\pi N, a + 2\pi N)$ будет число $4\pi N + m - 2L_{N, R}$. Поскольку это ближайшее целое число не зависит от R (ибо от R не зависит число $\Delta_f(a - 2\pi N, a + 2\pi N)$), тем самым доказано, что при достаточно большом R число $L_{N, R}$ не зависит от R и равно, следовательно, L_N . Выбрав и зафиксировав такое R , мы получаем, таким образом, что

$$\Delta_f(a - 2\pi N, a + 2\pi N) = 4\pi N + m - 2L_N + 2\varepsilon,$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$, т. е. получаем формулу (2) п. 1.

Теорема Понтрягина, тем самым, полностью доказана. $\square$

6. Вещественные тригонометрические многочлены

Целые функции g и h , соответствующие квазимногочлену f , являются многочленами от z , $\cos z$ и $\sin z$. Несколько отходя от общепринятого словопотребления, мы будем называть такие функции «тригонометрическими многочленами». Дадим точное определение.

Определение 1. *Вещественным тригонометрическим многочленом называется целая функция $g(z)$, получающаяся из некоторого многочлена $G(z, u, v)$ от трех переменных z, u, v с вещественными коэффициентами подстановкой $u = \cos z, v = \sin z$:*

$$g(z) = G(z, \cos z, \sin z).$$

Многочлен $G(z, u, v)$ называется *определяющим* многочленом тригонометрического многочлена $g(z)$. Он имеет вид

$$G(z, u, v) = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n z^r G_r^{(s)}(u, v), \quad (1)$$

где $G_r^{(s)}(u, v)$ — однородные многочлены от u и v степеней $s = 0, \dots, n$ (некоторые из этих многочленов могут быть тождественно равны нулю). Поскольку $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, можно без ограничения общности считать, что для любых r и s , для которых многочлен $G_r^{(s)}(u, v)$ не равен тождественно нулю, этот многочлен не делится на $u^2 + v^2$, т. е. что

$$G_r^{(s)}(1, \pm i) \neq 0. \quad (2)$$

Многочлен (1), удовлетворяющий условиям (2), называется *приведенным*. Легко видеть, что для любого вещественного тригонометрического многочлена g приведенный определяющий многочлен G единствен.

В этом пункте мы, следуя в основном Л. С. Понтрягину, докажем некоторые вспомогательные результаты о числе корней вещественных тригонометрических многочленов, аналогичные теореме о существовании у алгебраического многочлена точно n корней.

Мы начнем с тригонометрических многочленов g , для которых определяющий многочлен G не зависит от z , т. е. имеет вид

$$G(u, v) = \sum_{s=0}^n G^{(s)}(u, v), \quad (3)$$

где $G^{(s)}(u, v)$ — однородные многочлены степеней $s = 0, 1, \dots, n$ (не делящиеся на $u^2 + v^2$). Такие тригонометрические многочлены мы будем называть тригонометрическими многочленами с *постоянными коэф-*

фициентами. В записи (3) определяющего многочлена G мы всегда будем считать, что многочлен $G^{(n)}$ не равен тождественно нулю, т. е. что n является степенью многочлена G . Это число n мы будем называть *степенью* тригонометрического многочлена с постоянными коэффициентами.

Для упрощения формул мы положим

$$A_g = \frac{1}{2^n} G^{(n)}(1, -i).$$

Согласно условию (2) число A_g отлично от нуля.

Для любого многочлена (3) мы положим

$$\Phi(w) = w^n G\left(\frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right), \frac{1}{2i}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right). \quad (4)$$

Ясно, что $\Phi(w)$ является многочленом от w (вообще говоря, с комплексными коэффициентами) степени, не большей $2n$. Более того, легко видеть, что *степень* многочлена Φ *точно равна* $2n$, поскольку коэффициент при w^{2n} равен A_g . Свободным членом этого многочлена является, очевидно, число $\bar{A}_g = \frac{1}{2^n} G(1, i)$, так что *свободный член* многочлена Φ *отличен от нуля*.

Пусть $\varphi(z)$ — квазимногочлен с постоянными коэффициентами, определенный многочленом $\Phi(w)$:

$$\varphi(z) = \Phi(e^z).$$

Из формул

$$\frac{1}{2}\left(e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}}\right) = \cos z, \quad \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}}\right) = \sin z$$

немедленно вытекает, что этот квазимногочлен связан с тригонометрическим многочленом $g(z) = G(\cos z, \sin z)$ соотношением

$$\varphi(iz) = e^{inz} g(z). \quad (5)$$

Это соотношение позволяет немедленно перенести результаты п. 5, касающиеся квазимногочленов с постоянными коэффициентами, на случай вещественных тригонометрических многочленов с постоянными коэффициентами.

Лемма 1. *Любой тригонометрический многочлен $g(z)$ с постоянными коэффициентами является перио-*

дической функцией от z с периодом 2π . В каждой вертикальной полосе

$$a \leq \operatorname{Re} z < a + 2\pi$$

ширины 2π он имеет точно 2π корней (с учетом кратности).

Доказательство немедленно вытекает в силу соотношения (5) из леммы 1 п. 5, если учесть, что функция e^{inz} в нуль не обращается, а свободный член многочлена Φ отличен от нуля. $\square$

Определение. Число a из полуоткрытого интервала $[0, 2\pi[$ называется *неисключительным* для тригонометрического многочлена g с постоянными коэффициентами, если на вертикальной прямой $\operatorname{Re} z = a$ нет корней этого многочлена. Согласно лемме 1 все точки интервала $[0, 2\pi[$, кроме конечного числа, неисключительны.

Лемма 2. Любой вещественный тригонометрический многочлен g степени n с постоянными коэффициентами может быть записан в любом из следующих двух видов:

$$\begin{aligned} g(z) &= e^{-inz} (\bar{A}_g + \delta^{(+)}(z)), \\ g(z) &= e^{inz} (A_g + \delta^{(-)}(z)), \end{aligned} \quad (6)$$

где функции $\delta^{(+)}(z) = \delta^{(+)}(x, y)$, $\delta^{(-)}(z) = \delta^{(-)}(x, y)$ равномерно по x стремятся к нулю соответственно при $y \rightarrow +\infty$ и $y \rightarrow -\infty$.

Доказательство. Согласно лемме 1 п. 5 квазимногочлен Φ имеет вид

$$\Phi(z) = e^{2nz} (A_g + \delta(z)),$$

где $\delta(z) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ равномерно по y . Поскольку $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$ и $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$, отсюда в силу соотношения (5) непосредственно вытекает вторая из формул (6) при $\delta^{(-)}(z) = \delta(iz)$.

Так как коэффициенты тригонометрического многочлена g вещественны, то $\overline{g(z)} = g(\bar{z})$. Поэтому из уже доказанной второй формулы (6) следует, что

$$g(\bar{z}) = e^{-i\bar{n}\bar{z}} (\bar{A}_g + \delta^{(-)}(\bar{z})).$$

Заменив здесь $\bar{z}$ на z и учтя, что $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$, а $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$, мы немедленно получим и первую формулу (6) (при $\delta^{(+)}(z) = \delta^{(-)}(\bar{z})$). $\square$

Следствие 1. Для любого вещественного тригонометрического многочлена g с постоянными коэффициентами существует такое $A > 0$, что

$$|g(z)| \leq A e^{n|y|} \text{ для всех } z = x + iy. \quad (7)$$

Доказательство. Это следствие выводится из леммы 2 теми же рассуждениями, которыми следствие 1 п. 5 было выведено из леммы 2 п. 5. Впрочем, его можно непосредственно вывести и из следствия 1 п. 5. Действительно, применяя это следствие к квази-многочлену φ , мы получаем неравенство

$$|\varphi(z)| \leq A e^{2nx},$$

верное для любых $z = x + iy$ при $x \geq 0$. Заменяя здесь z на iz , мы в силу соотношения (5) получим неравенство

$$|g(z)| \leq A e^{-ny}, \quad (7')$$

верное для любого $z = x + iy$ при $y \leq 0$. Заменяя затем в этом неравенстве z на $\bar{z}$ и учтя, что $|g(\bar{z})| = |\overline{g(z)}| = |g(z)|$, мы получим неравенство

$$|y(z)| \leq A e^{ny}, \quad (7'')$$

верное для любого $z = x + iy$ при $y \geq 0$. Остается заметить, что оба неравенства (7') и (7'') в совокупности равносильны неравенству (7). $\square$

Следствие 2. Для любого вещественного тригонометрического многочлена g степени n с постоянными коэффициентами существуют такое $B > 0$ и такое $M > 0$, что

$$|g(z)| \geq B e^{n|y|} \text{ при } |y| > M. \quad (8)$$

Доказательство. Подобно следствию 1 следствие 2 можно вывести либо из леммы 2, либо из соответствующего следствия 2 п. 5. Для разнообразия выведем его из леммы 2.

Пусть $M^{(+)} > 0$ — такое число, что $|\delta^{(+)}(z)| < \frac{1}{2} |A_g|$ при $y > M^{(+)}$ и любом x . Тогда согласно первой из формул (6) при $y > M^{(+)}$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |e^{-i\lambda z}| \cdot |\bar{A}_g + \delta^{(+)}(z)| \geq \\ &\geq e^{ny} (|A_g| - |\delta^{(+)}(z)|) \geq \frac{|A_g|}{2} e^{ny}. \end{aligned}$$

Аналогично из второй формулы (6) следует, что существует такое $M^{(-)} > 0$, что при $-y < -M^{(-)}$ имеет место неравенство

$$|g(z)| \geq \frac{|A_g|}{2} e^{-ny}.$$

Это доказывает (8) (при $B = \frac{|A_g|}{2}$ и $M = \max(M^{(+)}, M^{(-)})$). $\square$

Продолжая следовать п. 5, перейдем теперь к вещественным тригонометрическим многочленам с переменными коэффициентами. Любой такой многочлен g может быть записан в виде

$$g(z) = z^m g_0(z) + z^{m-1} g_1(z) + \dots + g_m(z), \quad (9)$$

где $g_1(z), \dots, g_m(z)$ — вещественные тригонометрические многочлены с постоянными коэффициентами. Пусть n — степень тригонометрического многочлена $g_0(z)$ (который мы предполагаем не равным тождественно нулю).

Определение 2. Тригонометрический многочлен g называется тригонометрическим многочленом с *главным членом*, если степени всех тригонометрических многочленов $g_1, \dots, g_m$ не больше n или, что равносильно, если в записи (1) соответствующего определяющего приведенного многочлена $G(z, u, v)$ однородный многочлен $G_m^{(n)}(u, v)$ тождественно не равен нулю. О тригонометрическом многочлене вида (9) с главным членом мы будем говорить, что его *бистепень* равна (m, n) .

Запишем многочлен (9) в виде

$$g(z) = z^m g_0(z) (1 + v(z)), \quad (10)$$

где

$$v(z) = \frac{1}{z} \frac{g_1(z)}{g_0(z)} + \dots + \frac{1}{z^m} \frac{g_m(z)}{g_0(z)}.$$

Лемма 3. Для любого вещественного тригонометрического многочлена g с *главным членом бистепени* (m, n) функция $v(z) = v(x, y)$ равномерно по x стремится к нулю при $|y| \rightarrow +\infty$. Если число α неисключительно для тригонометрического многочлена $g_0(z)$, то

$$v(\alpha + 2\pi N, y) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |N| \rightarrow +\infty$$

равномерно по y .

Доказательство этой леммы практически дословно совпадает с доказательством леммы 3 и 5, и потому мы его опустим. $\square$

Пусть a — произвольное число, неисключительное для тригонометрического многочлена $g_0(z)$. Для любых целых положительных N и R обозначим символом $\Pi_{N, R}$ прямоугольник, определенный неравенствами

$$a - 2\pi N < \operatorname{Re} z < a + 2\pi N, \quad -R < \operatorname{Im} z < R.$$

Теорема 1. Для каждого вещественного тригонометрического многочлена g с главным членом бистепени (m, n) существуют такие числа N_0 и R_0 , что при любых $N > N_0$ и $R > R_0$ число корней (с учетом кратности) тригонометрического многочлена g в прямоугольнике $\Pi_{N, R}$ равно $4\pi N + m$.

Доказательство. Согласно следствию 2 существует такое $M > 0$, что при $|y| > M$ имеет место неравенство $|g_0(z)| \geq Be^{my} \geq Be^{nM}$. Поэтому при любом $R > M$ мы можем утверждать, что, во-первых, на горизонтальных сторонах прямоугольника $\Pi_{N, R}$ функция $z^m g_0(z)$ не обращается в нуль, а во-вторых, что все корни функции $z^m g_0(z)$, расположенные в вертикальной полосе $a - 2\pi N \leq \operatorname{Re} z < a + 2\pi N$ (а их ровно $4\pi N + m$ — один m -кратный корень 0 множителя z^m и, согласно лемме 1, по 2π корней в каждой вертикальной полосе ширины 2π), лежат в прямоугольнике $\Pi_{N, R}$. Кроме того, по условию (a неисключительно) на вертикальных сторонах прямоугольника $\Pi_{N, R}$ функция $z^m g_0(z)$ также не обращается в нуль. Поэтому, если на всех сторонах прямоугольника $\Pi_{N, R}$ при $R > M$ выполняется неравенство $|e(z)| < 1$, то функции $z^m g_0(z)$ и $z^m g_0(z)e(z)$ удовлетворяют условиям теоремы Руше и, следовательно, число корней функции $g(z) = z^m g_0(z)(1 + e(z))$ в прямоугольнике $\Pi_{N, R}$ равно числу корней функции $z^m g_0(z)$, т. е. равно $4\pi N + m$.

Для завершения доказательства остается заметить, что согласно лемме 3 существуют такие числа N_0 и $R_0 > M$, что при любых $N > N_0$ и $R > R_0$ на сторонах прямоугольника $\Pi_{N, R}$ неравенство $|e(z)| \leq 1$ выполнено. $\square$

Следствие. Для любого неисключительного a вещественный тригонометрический многочлен g с главным членом бистепени (m, n) имеет на интервале

$]a - 2\pi N, a + 2\pi N[$ для всех достаточно больших N не более $4\pi N + t$ вещественных корней и имеет ровно $4\pi N + t$ корней, если все его корни вещественны. Если он хотя бы для одного неисключительного a имеет на интервале $]a - 2\pi N, a + 2\pi N[$ для всех достаточно больших N ровно $4\pi N + t$ вещественных корней, то все его корни вещественны. $\square$

Нам будет нужно только это следствие. Оно является аналогом утверждения, что если алгебраический многочлен степени n имеет n вещественных корней, то все его корни вещественны.

Замечание 1. Пользуясь результатами п. 4, легко показать, что вещественный тригонометрический многочлен без главного члена всегда имеет не вещественные корни. Этот факт нам не понадобится.

7. Теорема Эрмита — Билера для квазимоночленов

Возможность применения результатов п. 6 к квазимоночленам основывается на следующем предложении:

Предложение 1. Для любого квазимоночлена $f(z)$ с главным членом бистепени (m, n) целые функции $g(z)$ и $h(z)$, определяемые соотношением

$$f(iz) = g(z) + ih(z),$$

являются вещественными тригонометрическими многочленами с главным членом бистепени (m, n) .

Доказательство. Пусть $F(z, w)$ — определяющий многочлен квазимоночлена $f(z)$. Положим

$$F(iz, u + iv) = G(z, u, v) + iH(z, u, v), \quad (1)$$

где G и H — многочлены с вещественными коэффициентами. Ясно, что это соотношение однозначно определяет многочлены G и H .

Из формулы Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ непосредственно следует, что

$$g(z) = G(z, \cos z, \sin z), \quad h(z) = H(z, \cos z, \sin z),$$

т. е. что функции g и h являются вещественными тригонометрическими многочленами с определяющими многочленами G и H соответственно. Таким образом, для доказательства предложения 1 достаточно доказать, что многочлены G и H являются многочленами с главным членом бистепени (m, n) .

С этой целью мы заметим, что соответствие $F \mapsto (G, H)$, задаваемое формулой (1), обладает, очевидно, следующими свойствами:

1) Если $F_1 \mapsto (G_1, H_1)$ и $F_2 \mapsto (G_2, H_2)$, то

$$\lambda F_1 + \mu F_2 \mapsto (\lambda G_1 + \mu G_2, \lambda H_1 + \mu H_2)$$

для любых вещественных λ и μ (свойство вещественной линейности).

2) Если $F \mapsto (G, H)$, то $iF \mapsto (-H, G)$.

3) Если $F(z, w) = z^m w^n$, то $G(z, u, v) = z^m G_1(u, v)$, $H(z, u, v) = z^m H_1(u, v)$, где G_1 и H_1 — однородные многочлены от u и v степени n , не делящиеся на $u^2 + v^2$.

В последнем свойстве не совсем тривиально лишь утверждение, что многочлены G_1 и H_1 не делятся на $u^2 + v^2$, т. е. что $G_1(1, \pm i) \neq 0$, $H_1(1, \pm i) \neq 0$. Докажем это.

Ясно, что с точностью до знака и до порядка многочлены G_1 и H_1 совпадают с многочленами G и H , отвечающими многочлену $F(z, w) = w^n$, т. е. с многочленами, удовлетворяющими соотношению

$$(u + iv)^n = G(u, v) + iH(u, v).$$

Поскольку многочлены G и H имеют вещественные коэффициенты, из этих соотношений следует, что

$$G(u, v) = \frac{(u + iv)^n + (u - iv)^n}{2},$$

$$H(u, v) = \frac{(u + iv)^n - (u - iv)^n}{2i}.$$

Поэтому

$$G(1, \pm i) = \frac{(1 \pm i)^n + (1 \mp i)^n}{2} = 2^{n-1},$$

и аналогично

$$H(1, \pm i) = \pm i 2^{n-1}.$$

Таким образом, действительно, $G(1, \pm i) \neq 0$ и $H(1, \pm i) \neq 0$.

Из свойств 1), 2) и 3) предложение 1 следует немедленно. $\square$

Теорема 1 (теорема Эрмита—Билера для квазимногочленов). Квазимногочлен

$$f(z) = g(-iz) + ih(-iz)$$

с главным членом тогда и только тогда устойчив, когда корни вещественных тригонометрических многочленов g и h перемежаются и хотя бы для одного вещественного ω_0 имеет место неравенство

$$h'(\omega_0)g(\omega_0) - h(\omega_0)g'(\omega_0) > 0.$$

Доказательство. Мы разобьем доказательство на семь этапов. Пусть (m, n) — бистепень квазимногочлена f , а значит (см. предложение 1), и тригонометрических многочленов g и h . Пусть, кроме того, a — число, неискл. для тригонометрического многочлена g и для квазимногочлена f .

1) Если квазимногочлен f устойчив, то все корни тригонометрического многочлена g вещественны и просты. Согласно амплитудно-фазовому критерию устойчивости (условия применения этого критерия выполнены, поскольку устойчивый квазимногочлен не имеет чисто мнимых корней) имеет место асимптотическое равенство

$$\Delta_f(a - 2\pi N, a + 2\pi N) \approx 4\pi N + m,$$

означающее, что при ω , изменяющемся от $a - 2\pi N$ до $a + 2\pi N$, радиус-вектор точки амплитудно-фазовой характеристики делает для достаточно больших N почти $4\pi N + m$ полных полуоборотов. Поэтому при изменении ω от $a - 2\pi N$ до $a + 2\pi N$ амплитудно-фазовая характеристика должна не меньше $4\pi N + m$ раз пересечь ось ординат, т. е. на интервале $]a - 2\pi N, a + 2\pi N[$ должно быть не меньше $4\pi N + m$ различных вещественных корней тригонометрического многочлена g . Поэтому согласно следствию из теоремы 1 п. 5 все корни тригонометрического многочлена g вещественны и различны.

2) Если квазимногочлен f устойчив, то тригонометрические многочлены g и h составляют вещественную пару (см. п. 1). Для любых вещественных λ и μ функцией g , соответствующей квазимногочлену $(\lambda - i\mu)f$, является, очевидно, функция $\lambda g + \mu h$. Поскольку квазимногочлен $(\lambda - i\mu)f$ также устойчив, то, следовательно, согласно 1) функция $\lambda g + \mu h$ имеет только вещественные корни.

3) Если квазимногочлен f устойчив, то корни тригонометрических многочленов g и h перемежаются. Это немедленно вытекает из 2) в силу предложения 1

п. 1. (Заметим, что наиболее трудным моментом в доказательстве предложения 1 п. 1 была лемма 3 п. 3, утверждающая простоту корней функций g и h . В частности, только в этой лемме мы использовали теорему о неявной функции. В рассматриваемом сейчас случае эта лемма не нужна, поскольку простота корней функций g и h обеспечивается утверждением 1). Более того, можно вообще не ссылаться на предложение 1 п. 1, а непосредственно вывести утверждение 3) из амплитудно-фазового критерия устойчивости, для чего достаточно заметить — ср. соответствующие рассуждения в п. 2 гл. 2, — что амплитудно-фазовая характеристика, делая максимально возможное число полуоборотов, не может пересечь, скажем, ось ординат, не пересекая ось абсцисс.)

4) Если квазимногочлен f устойчив, то $h'(\omega_0)g(\omega_0) - h(\omega_0)g'(\omega_0) > 0$ хотя бы для одного ω_0 . Достаточно заметить, что так как

$$\frac{h'(\omega)g(\omega) - h(\omega)g'(\omega)}{g(\omega)^2 + h(\omega)^2} = \left(\operatorname{arctg} \frac{h(\omega)}{g(\omega)} \right)',$$

то при $h'(\omega)g(\omega) - h(\omega)g'(\omega) \leq 0$ радиус-вектор точки амплитудно-фазовой характеристики вращается в отрицательном направлении (по часовой стрелке), и потому число полуоборотов $\Delta_f(a - 2\pi N, a + 2\pi N)$ не может быть асимптотически равно положительному числу $4\pi N + m$.

(На самом же деле, если квазимногочлен f устойчив, то $h'(\omega)g(\omega) - h(\omega)g'(\omega) > 0$ для всех ω , т. е. радиус-вектор точки амплитудно-фазовой характеристики вращается в положительном направлении с положительной скоростью. Это непосредственно вытекает в силу утверждения 2) из леммы 1 п. 3, леммы 2 п. 3 и следствия из леммы 3 п. 3.)

5) Если корни тригонометрических многочленов g и h перемежаются, то для любого достаточно большого N

$$\Delta_f(a - 2\pi N, a + 2\pi N) = \tau(4\pi N + m) + \alpha, \quad (2)$$

где $|\alpha| < 1$, а $\tau = \pm 1$. Действительно, из перемежаемости корней непосредственно следует, что радиус-вектор точки амплитудно-фазовой характеристики делает на любом интервале изменения ω столько полуоборотов в одном и том же направлении, сколько на этом

интервале имеется корней многочлена g или многочлена h плюс, возможно, еще некоторую долю полуоборота. Но согласно следствию из теоремы Понтрягина (см. п. 5) тригонометрические многочлены g и h имеют на интервале $]a - 2\pi N, a + 2\pi N[$ ровно $4nN + t$ корней. Это доказывает (2) (знак t зависит от того, в каком направлении вращается радиус-вектор, а число α оценивает дополнительную долю полуоборота).

6) Если $h'(\omega_0)g(\omega_0) - h(\omega_0)g'(\omega_0) > 0$ хотя бы для одного ω_0 , то в формуле (2) $\tau = +1$. Очевидно (ср. 4)).

7) Если выполнено (2) при $\tau = +1$, то квазимногочлен f устойчив. Действительно, согласно теореме Понтрягина

$$\Delta_f(a - 2\pi N, a + 2\pi N) \approx 4nN + t - 2L_N.$$

Поэтому если $L_N \neq 0$, т. е. если $2L_N \geq 2$, то равенство (2) при $\tau = 1$, $|\alpha| < 1$ и при достаточно больших N невозможно.

Тем самым теорема 1 полностью доказана. $\square$

В отличие от теоремы Чеботарева (см. п. 1) условия этой теоремы уже вполне могут быть проверены для любого конкретного квазимногочлена более или менее автоматическими выкладками.

Следствие 1. Любой устойчивый квазимногочлен сильно устойчив.

Доказательство. В силу утверждений 2) и 4) из доказательства теоремы 1 устойчивый квазимногочлен удовлетворяет условиям теоремы Чеботарева. Поэтому он сильно устойчив.

Следствие 2. Если корни вещественных тригонометрических многочленов g и h перемежаются, то эти многочлены составляют вещественную пару.

Доказательство. Если корни многочленов g и h перемежаются, то квазимногочлен f либо устойчив, либо вполне неустойчив. В обоих случаях многочлены g и h составляют вещественную пару. $\square$

Замечание. Ясно, что из следствий 1, 2 и теоремы Чеботарева вытекает теорема 1. Однако, если прямое доказательство следствия 1 не вызывает никаких затруднений, то со следствием 2 дело обстоит, по видимому, существенно хуже.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц — 1-е изд. М.: Гостехиздат, 1953; 2-е изд. М.: Наука, 1966; 3-е изд. — М.: Наука, 1967.

В последней гл. XVI этой монографии («Проблема Рауса — Гурвица и смежные вопросы») налагается решение общей задачи о вычислении числа корней многочлена, вещественная часть которых положительна.

2. Крейн М. Г., Наймарк М. А. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. — Харьков, 1936.

Книга задумывалась как статья в энциклопедии. Поэтому наложение конспективно и доказательствами, как правило, не сопровождается. Означен обширный материал, нигде более в русской литературе не имеющийся. Является библиографической редкостью.

3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — 1-е — 5-е изд. — М.: Гостехиздат, 1946, 1950, 1953, 1955, 1956.

В § 48 «Теорема Гурвица» наложение доказательства теоремы Шура и вывод из нее теоремы Гурвица. В следующих изданиях курса этот параграф исключен.

4. Мейман Н. Н., Чеботарев Н. Г. Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций. — Труды МИАН, 1949, т. 26.

Первая глава посвящена многочленам.

5. Наймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. — Л.: 1949.

Исследование математических вопросов устойчивости наглядным геометрическим методом, ведущим начало от Н. А. Вилинградского и американского инженера Найквиста и детально развитым автором. Книга является библиографической редкостью.

6. Понтрягин Л. С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций. — ИАН СССР, сер. матем., 1942, т. 6, с. 115—134.

Основные результаты этой работы воспроизведены нами в пп. 4—7 гл. 4.

Издательство УРСС

специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.



Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским фондом фундаментальных исследований и Российским гуманитарным научным фондом, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

- Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований.
Стинрод Н. Топология косых произведений.
Габриель П., Цисман М. Категории частных и теория гомотопий.
Чеботарев Н. Г. Введение в теорию алгебр.
Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций.
Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли.
Данилов Ю. А. Многочлены Чебышева.
Супруненко Д. А. Группы подстановок.
Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы.
Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Т. 1–3.
Клейн Ф. Неевклидова геометрия.
Клейн Ф. Высшая геометрия.
Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени.
Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными.
Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ.
Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии.
Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория.
Краснов М. Л. и др. Вся высшая математика. Т. 1–6.
Краснов М. Л. и др. Сборники задач с подробными решениями.
Грин Б. Элегантная Вселенная. Суперструны и поиски окончательной теории.
Пенроуз Р. НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ. О компьютерах, мышлении и законах физики.
Л. С. Понтрягин: Серия «Знакомство с высшей математикой»

Метод координат.

Анализ бесконечно малых.

Алгебра.

Дифференциальные уравнения и их приложения.

Другие книги *Л. С. Понтрягина:*

Основы комбинаторной топологии.

Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий.

Обобщения чисел.

Жизнеописание Льва Семеновича Понтрягина, математика, составленное им самим.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс (095) 135–42–16, 135–42–46
или электронной почтой URSS@URSS.ru
Полный каталог изданий представляется
в Интернет-магазине: <http://URSS.ru>

Издательство УРСС

Научная и учебная
литература

Книга посвящена изложению основ теории устойчивых многочленов, играющих основную роль в проблемах устойчивости систем автоматического регулирования и других динамических систем. На простом элементарном материале книга вводит в круг важных идей классической алгебры и анализа. В последней главе, более трудной по содержанию, изложены основные результаты об устойчивости целых функций и, в частности, квазимногочленов.

2318 ID 19295



Издательство **УРСС**
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ



E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в Internet: <http://URSS.ru>
Тел./факс: 7 (095) 135-42-16
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46