МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МОДЕЛЕЙ И МЕТА-МАТЕМАТИКУ АЛГЕБРЫ

А. РОБИНСОН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МОДЕЛЕЙ И МЕТАМАТЕМАТИКУ АЛГЕБРЫ

А. РОБИНСОН

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
А. Б. ВОЛЫНСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. Д. ТАЙМАНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

INTRODUCTION TO MODEL THECRY AND TO THE METAMATHEMATICS CF ALGEBRA

ABRAHAM ROBINSON
University California, Los Angeles

1963
NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM

Авраам Робинсон

Введение в теорию моделей
и метаматематику алгебры.

(Серия: «Математическая логика и основания математики»).

М., 1967 г., 376 стр.

Редактор *В. В. Донченко*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова*

Корректоры *Е. А. Белицкая* и *М. Л. Липелис*

Сдано в набор 18/II 1967 г. Подписано к печати 4/VII 1967 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 11,75. Условн. печ. л. 19,74. Уч.-изд. л. 19,75. Тираж 13 000 экз. Цена книги 1 р. 65 к. Заказ № 594.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени
Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

2-2-3
99-67

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Понятие модели возникло в математике еще в девятнадцатом веке. Вплотную к нему подошел Н. И. Лобачевский, но в полной мере оно появилось в работах Э. Бельтрами и Ф. Клейна, посвященных непротиворечивости геометрии.

В дальнейшем понятие модели развивается и уточняется в связи с развитием формальных теорий и становится одним из основных понятий семантики символических языков.

Современная формулировка понятия модели и других понятий семантики (например, понятия истинности формулы узкого исчисления предикатов, понятия теории классов алгебраических систем и др.) сложилась в конце двадцатых и в начале тридцатых годов в работах Д. Гильберта и А. Тарского.

К тому же времени на основе фундаментальных работ Д. Гильберта и развития его идей в математической логике были получены и основные теоремы: теорема Гёделя о полноте узкого исчисления предикатов, локальная теорема Мальцева, теорема Левенгейма — Сколема, теорема о расширении моделей и др.

Естественно возникла идея применения этих достижений в математике. Формальные системы, изучаемые в математической логике, являются примерами алгебр с частичными операциями, и основные теоремы о формальных системах, основные методы математической логики являются алгебраическими. Видимо, по этой причине алгебра и арифметика явились первыми математическими объектами, где применялись методы математической логики.

Пионерами в этом направлении были А. И. Мальцев и Т. Сколем. Их первые работы показали плодотворность нового направления. В работе Сколема построен пример нестандартной модели арифметики, в работе Мальцева дан новый метод получения локальных теорем в теории групп, который позволил не только обобщить известные, но и получить новые локальные теоремы. В этих же работах введены новые понятия, оказавшиеся очень плодотворными (например, понятие операции ультрастепени модели, понятие описания модели). Хотя авторы явно не сформулировали введенные ими понятия, они играют в работах существенную роль.

Так на стыке двух наук, алгебры и математической логики, возникла новая теория, изучающая связь алгебры и арифметики с математической логикой, которую в первые годы считали алгебраической и называли метаматематикой алгебры. Дальнейшее развитие показало, что теория имеет свою систему понятий, свои методы и, что важнее всего, свою проблематику. В последние годы ее называют теорией моделей.

В сороковых годах началось интенсивное развитие теории, в которой деятельное участие приняли ее создатели. Теория моделей развивалась в разных направлениях: изучались модели узкого исчисления предикатов, исчисления второй ступени, модели многозначной логики, модели логики с бесконечно длинными формулами и т. д.

Развитие теории моделей узкого исчисления предикатов шло главным образом в двух направлениях: с одной стороны, под влиянием перечисленных выше работ возникла теория классов моделей, изучающая общие свойства классов алгебраических систем. Теоремы теории классов моделей возникают из объединения и обобщения однотипных теорем, доказываемых в разных отделах алгебры и первоначально кажущихся теоремами разной природы. Результаты этого направления систематизированы в обзорных статьях Воота [5], Линдона [2], Мальцева [26], Тарского [3] и в трех монографиях А. Робинсона [1], [3], [9].

С другой стороны, под влиянием теоремы А. Чёрча возникло направление, занимающееся алгоритмическими вопросами.

Последние относятся, главным образом, к разрешимости или неразрешимости теории классов алгебраических систем. В первых работах, посвященных алгоритмическим вопросам, даны методы доказательства неразрешимости теории классов моделей и доказана неразрешимость теории ряда классов алгебраических систем. Наиболее неожиданным результатом, полученным в первых работах, является теорема А. Тарского о разрешимости теории алгебраически замкнутых и вещественно замкнутых полей и теорема Ю. Робинсон о неразрешимости теории поля рациональных чисел.

Богатый материал, полученный в этом направлении, систематизирован в монографии А. Тарского, А. Мостовского, Ю. Робинсон [1] и в обзорной статье Ю. Л. Ершова, И. А. Лаврова, М. А. Тайцлина, А. Д. Тайманова [1], где изложены достижения теории до 1963 г.

В последние годы (1962—1966) развитие теории моделей продолжалось, и в ней получены важные результаты. В теории классов изучены модели полной теории; доказано существование универсальных моделей в полных теориях, решена проблема категоричности (если теория имеет единственную модель в некоторой несчетной мощности, то она имеет единственную модель во всех несчетных мощностях). В алгоритмических вопросах доказана неразрешимость теории различных классов конечных групп, колец, структур и найдены новые методы доказательства неразрешимости теории классов. Неожиданными были работы И. Акса, С. Кочена и Ю. Л. Ершова, где с помощью техники ультрапроизведений и метода модельной полноты доказана разрешимость теории полей p-адических чисел. В этих работах, выполненных независимо и одновременно, доказана разрешимость еще ряда теорий нормированных полей, а также указаны некоторые следствия, относящиеся к теории чисел и теории нормированных полей, например, к гипотезе Артина и к гипотезе Ленга. Заметим, что в теории p-адических чисел не было найдено алгоритма для решения уравнений даже четвертой степени.

Методом перекидывания *) доказана разрешимость теории упорядоченных абелевых групп (Гуревич [1]), методом модельной полноты доказана разрешимость теории конечно определенной коммутативной полугруппы (Тайцлин [8]) и т. д.

Широкое применение получила техника ультрапроизведений. Нестандартный анализ, созданный А. Робинсоном, за последние годы вырос в самостоятельную теорию, которой автор посвятил новую монографию [23], где изложены основы классического анализа теории линейных пространств с новой точки зрения. Методы нестандартного анализа оказались полезными не только в улучшении изложения известных результатов, но также оказались полезными и в решении трудных проблем.

*) Метод перекидывания (метод Фрессе) изложен в работах Фрессе [1], Эренфойхта [2], Тайманова [3], [6].

Так, в последнее время Бернштейном и А Робинсоном [1] дано решение проблемы Шмидта и Халмоша из теории операторов в гильбертовых пространствах.

Расширение области применения методов теории моделей (анализ, геометрия, топология) и обилие результатов, полученных в самой теории, вызвало интерес к теории моделей среди математиков разных специальностей.

В последние годы сильно ощущается отсутствие в советской литературе книг, содержащих основные методы и теоремы теории моделей и предназначенных для первоначального изучения. Этот пробел будет в некоторой степени заполнен предлагаемым советскому читателю переводом книги А. Робинсона, известного математика, внесшего существенный вклад в теорию моделей. А. Робинсону принадлежит теория идеалов, нестандартный анализ, метод модельной полноты и др. А. Робинсон является также страстным пропагандистом теории моделей и главой Иерусалимской школы. Книга А. Робинсона, возникшая из переработки трех его старых монографий ([1], [3], [9]), является пока лучшей книгой в мировой литературе для первоначального ознакомления с теорией моделей и содержит основные достижения теории моделей узкого исчисления предикатов, полученные до 1963 г. В ней подробно изложены основные теоремы общей теории классов моделей и основные методы доказательства разрешимости теории. Из методов доказательства разрешимости теории, применявшихся в последние годы для решения конкретных задач и не изложенных в книге А. Робинсона, можно отметить метод перекидывания.

От читателей требуется знакомство с математической логикой и алгеброй в объеме наших университетских курсов. После изучения первых четырех и последней главы читатель может ориентироваться в журнальной литературе.

Для удобства читателя сделаны примечания библиографического характера и библиографические дополнения. Все примечания и дополнения редактора отмечены звездочкой.

Переводчик А. Б. Волынский и редактор перевода поправили большое количество опечаток и неточностей, вкравшихся в оригинал. Исправления совершенно очевидных опечаток в тексте не отмечены.

А. Д. Тайманов

Souvienne vous de celuy à qui, comme on demanda à quoi faire il se peinoit si fort en un art qui ne pouvoit venir à la cognoissance de gueres de gents: «J'en ay assez de peu, repondit-il, j'en ay assez d'un, j'en ay assez de pas un».

MONTAIGNE, DE LA SOLITUDE *)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Прошло уже довольно значительное время с момента выхода в свет «Метаматематики алгебры» — предыдущей монографии автора, изданной в этой же серии в 1951 г. Основное внимание в этой работе было уделено логическому анализу методов абстрактной алгебры и применению результатов символической логики к соответствующим алгебраическим задачам. Дальнейшее развитие этой теории привело к появлению новых разделов математики, известных в настоящее время под общим названием «Теория моделей».

Со времени опубликования «Метаматематики алгебры» эта область значительно разрослась, ввиду чего было признано целесообразным заменить указанную работу совершенно новой.

Примерно половину объема настоящей книги занимает материал предыдущей работы, изложение его су-

---

*) Пусть вам припомнится тот, кто на вопрос, к чему он затрачивает столько усилий, постигая искусство, с которым все равно не сможет ознакомить людей, ответил: «С меня довольно очень немногих, с меня довольно и одного, с меня довольно, если даже не будет ни одного».

Монтень «Об уединении»

(Мишель Монтень, «Опыты», книга первая, глава XXXIX, Изд во АН щественно переработано и внесено много упрощений. За одним или двумя исключениями остальная часть этой книги посвящена более современным исследованиям. Общий характер работы до некоторой степени изменился, так что теперь книга может быть использована в качестве учебника для высших учебных заведений на первом году изучения данного предмета.

Бо́льшая часть тем, включенных в «Метаматематику алгебры», такие, как теория несчетного языка, свойства классов структур, замкнутых относительно расширения или пересечения, метод диаграмм, полнота теории алгебраически замкнутого поля данной характеристики, некоторые приложения к алгебре, — в настоящее время хорошо известны, так что нет надобности оправдывать включение их в данную книгу. С другой стороны, предложение обобщить многие важные вопросы алгебры в рамках теории моделей встретило менее живой отклик. Несмотря на это, автор до сих пор считает, что исследования в этом направлении представляют большой интерес и практическую ценность. Так, например, теория алгебраических идеалов и многообразий, вплоть до существования общей точки неприводимого многообразия, понятие алгебраически замкнутого расширения, понятие системы результантов для данного множества уравнений, — все это может быть довольно успешно рассмотрено средствами метаматематики. Помимо единой точки зрения, этот подход иногда также дает новые алгебраические результаты, например, в случае дифференциально замкнутого поля.

В последних трех разделах книги мы даем введение в нестандартный анализ. Это новое применение теории моделей, которое дает эффективные методы в исчислении бесконечно малых и обладает, по всей видимости, значительными потенциальными возможностями.

Как рабочая энергия автора, так и терпение, которого можно ожидать от будущего читателя, наложили некоторые ограничения на объем этой книги. Таким образом, не было возможности включить сюда ряд вопросов, имеющих прямое отношение к нашей тематике, таких, как теория неразрешимых алгебраических систем и проблем (Тарский, Мостовский, Р. М. Робинсон, Ю. Робинсон, Новиков, Бун, Марков, Рабин), теория вычислимых алгебраических систем (Фрелих — Шефердсон, Рабин, Хигман), исследование по теории доказательства в арифметике и алгебре (Крейсел), свойства прямых произведений заданных структур (Мостовский, Мак-Кинси, Хорн, Феферман, Воот, Бинг, Овершелп), решение проблемы гомоморфизма (Линдон), теоретико-модельный подход к теории множеств (Гёдель, Шефердсон, Воот, Монтегю, Мендельсон, Леви), алгебраизация теории кванторов (Тарский, Хенкин, Халмош) и различные другие темы, упоминающиеся в тексте. Автор пользуется случаем, чтобы подчеркнуть важность этих вопросов, по поводу которых читатель может обратиться к оригинальным работам.

В заключение я еще раз приношу свою благодарность редакторам «Studies in Logic» и Северо-Голландской издательской компании (the North-Holland Publishing Company), предложившим издать мою книгу в этой серии. В частности, я нахожусь в неоплатном долгу перед А. Гейтингом, который регулярно прочитывал мои книги и статьи — в некоторых случаях даже до публикации. Я также благодарю Д. Лувиша за его помощь в вычитывании гранок.

Еврейский университет
Иерусалим,
декабрь, 1961

Авраам Робинсон

УЗКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

1.1. Общее введение. Метаматематика алгебры изучает методами математической логики строение и развитие алгебры. Теория моделей рассматривает отношения между свойствами высказываний или множеств определенных высказываний в формализованном языке, с одной стороны, и математическими структурами или множествами структур, удовлетворяющих этим высказываниям, с другой. Так как методы, используемые в теории моделей, часто являются, если не по букве, то по духу, алгебраическими и так как алгебраические теории полей, колец, групп и т. п. ввиду прозрачности их структуры хорошо поддаются детальному логическому анализу, то теория моделей и метаматематика алгебры взаимно дополняют друг друга самым естественным образом, так что во многих случаях бывает нелегко решить, к какой из двух теорий относится данное свойство.

Алгебраический подход пронизывает в настоящее время самые разнообразные отрасли математики; таким образом, совершенно естественно ожидать, что развитие метаматематики алгебры пойдет по тому же пути. Кроме того, поскольку топологический язык оказывается в равной степени употребительным, он также может быть использован в связи с материалом, излагаемым в этой книге. На самом деле, проведение точных границ внутри математики — задача заведомо очень сложная, а приведенные выше определения лишь преследовали цель дать общее описание наших понятий. Однако для того, чтобы выдержать эту книгу в разумных пределах, бóльшая часть наших примеров будет из области алгебры, и мы, по возможности, будем обходиться без топологического языка.

План этой книги следующий. В настоящей главе мы изложим формализованный язык узкого исчисления предикатов, являющийся основой для дальнейшего. Мы будем изучать соотношения между высказываниями нашего формализованного языка и математическими структурами, в которых они имеют место. В заключение мы установим теорему о полноте в широком смысле для узкого исчисления предикатов и выведем некоторые непосредственные ее следствия.

Вторая глава начинается с обсуждения ряда основных понятий, относящихся к алгебраическим системам, таких, как понятие равенства, расширения, изоморфизма и гомоморфизма. За этим последует выделение аксиоматических систем некоторых общих алгебраических понятий. Глава заканчивается рядом непосредственных применений упомянутой выше теоремы о полноте, включая также теорию Мальцева о нормальных рядах.

В третьей главе мы исследуем ряд типичных проблем теории моделей. Сюда относятся теоретико-множественные характеристики систем структур, заданных аксиомами в предваренной нормальной форме с некоторыми специальными типами кванторных приставок (например, лишь с кванторами существования). Системы структур, замкнутые относительно пересечений, будут также рассмотрены нами.

В четвертой главе читатель познакомится с различными понятиями полноты, включая также модельную полноту и относительную модельную полноту. Некоторые наиболее важные примеры этих понятий будут изучаться очень детально.

В первых двух разделах пятой главы разбираются теорема Бета об определимости в узком исчислении предикатов и связанные с ней результаты. За этим следует рассмотрение другого рода проблемы определимости, возникающей в алгебре, и метаматематический анализ понятия алгебраически замкнутого расширения и связанных с ним вопросов. Глава заканчивается приложениями к дифференциальной алгебре и к теореме Гильберта о нулях полиномов (Nullstellensatz). Глава шестая содержит логический анализ и обобщения различных стандартных алгебраических понятий, таких, как полиномиальное расширение и сепарабельность.

Седьмая глава посвящена метаматематической теории идеалов, в то время как в восьмой главе рассматриваются многообразия метаматематических идеалов. Алгебраические многообразия, таким образом, включаются сюда как частный случай. Эти же методы применяются в теории дифференциальных идеалов и при обобщении теоремы Артина о семнадцатой проблеме Гильберта относительно представления определенных функций в виде суммы квадратов.

Использование функциональных символов и их применение к исключению кванторов рассматриваются в последней, девятой главе. За этим следует краткое описание конструкции ультрапроизведения и его фундаментальных свойств. Глава заканчивается введением в *нестандартный анализ*. Будет показано, что метаматематический подход является хорошим орудием для развития теории функций в определенных неархимедовых полях и что полученные методы могут быть использованы при доказательстве теорем классического анализа.

Предполагается знакомство читателя с элементами узкого исчисления предикатов вплоть до приведения выражений к предваренной нормальной форме. Что касается математической стороны, то мы используем лишь некоторые стандартные результаты из теории групп, колец и полей.

Мы примем следующую теоретико-множественную символику: $a \in A$ означает отношение включения, т. е. a — элемент из A; $A = B$ и $A \neq B$ означает, что множества A и B равны (равнообъемны, т. е. содержат одни и те же элементы) или не равны соответственно; $A \subset B$ и $B \supset A$ выражают тот факт, что A — подмножество B, включая также случай $A = B$. Объединение, пересечение и разность двух множеств A и B будут обозначаться $A \cup B$, $A \cap B$ и $A - B$ соответственно, а объединение и пересечение семейства множеств $\{A_\nu\}$ — посредством $\bigcup\limits_\nu \{A_\nu\}$ и $\bigcap\limits_\nu \{A_\nu\}$. Кардинальное число множества A будет обозначаться $|A|$. Знак равенства будет также использоваться при определении одного символа через другой или через группу символов, например, $X = [[A] \supset [B]]$.

1.2. Правила образования. В этом пункте мы строим формализованный язык L по следующим правилам.

Исходными символами L являются:

Символы объектов (или *предметные символы*), обозначаемые обычно a, b, c ... (малыми курсивными буквами из начала латинского алфавита, с индексами или без них), а иногда, сообразуясь с общепринятым употреблением, другими символами, такими, например, как натуральные числа 0, 1, 2 ... Символы объектов образуют вполне определенное множество произвольной трансфинитной мощности.

Символы переменных (или просто *переменные*) [dummy symbols] обозначаемые посредством u, v, w, x, ... множество их предполагается счетным.

Символы отношений распадаются на непересекающиеся классы R_n, $n=0, 1, 2, \ldots$ (символы отношений порядка n). Символы отношения порядка $n \geqslant 1$ будут обозначаться посредством $A(\ ,\ ,\ldots)B(,)$ (заглавными курсивными буквами с n пустыми местами, разделенными запятыми, в круглых скобках). Символы отношения порядка 0 будут обозначаться просто A, B, $C, \ldots$ Классы R_n являются вполне определенными множествами произвольной фиксированной мощности.

Пропозициональные связки (connectives) состоят из пяти символов: $\sim$ или $\urcorner$ (отрицание), $\vee$ (дизъюнкция), $\wedge$ или & (конъюнкция), $\supset$ (импликация) и $\equiv$ (эквивалентность).

Кванторы. Квантор общности, обозначаемый $\forall$, и квантор существования, обозначаемый $\exists$.

Разделительные символы: [— левая квадратная скобка, и] — правая квадратная скобка. На этом перечень исходных символов заканчивается.

Атомарные формулы получаются замещением пустых мест в символах отношений порядка n, $n=1, 2, \ldots$, символами объектов или переменных. Так, если $A(,,)$ — символ трехместного отношения, то $A(a, b, a)$ и $A(b, a, z)$ — атомарные формулы. Символы 0-местных отношений сами по определению являются элементарными формулами.

Правильно построенные формулы, кратко ппф, или просто формулы, будут определяться индуктивно. Обозначаться они будут заглавными курсивными буквами из конца латинского алфавита. Заметим, что эти символы не принадлежат формализованному языку L.

1.2.1. Атомарные формулы, заключенные в квадратные скобки, являются ппф.

1.2.2. Если X — ппф, то $[\sim X]$ также ппф. Если X и Y — ппф, то и $[X \vee Y]$, $[X \wedge Y]$, $[X \supset Y]$ и $[X \equiv Y]$ — все ппф.

1.2.3. Если X — ппф, то $[\forall y X]$ и $[\exists y X]$ — обе ппф, при условии, что X не содержит ни $\forall y$, ни $\exists y$ *).

Поэтому, например, $[\exists y[A(a, x)]]$ и $[\exists y[A(y)]]$ являются ппф, в то время как $[\forall y[\exists y[A(y)]]]$ не является ппф.

Мы не станем вдаваться в подробности относительно того, что понимать под фразой «X содержит $\forall y$» и т. п. Мы будем также говорить, что ппф X содержит ппф Y, если X сконструирована из Y и какой-то еще ппф посредством правил (возможно, несколько раз повторенных) 1.2.2 и 1.2.3.

Всюду будет предполагаться, что язык, с которым мы работаем, содержит по крайней мере одну формулу.

Среди ппф мы будем различать *полные формулы* **), или *высказывания*, и *неполные формулы*, или *предикаты*, следующим образом. Ппф X называется полной, если всякая входящая в X переменная, скажем y, входит в ппф Z так, что Z содержится в X в одной из следующих форм: $[\forall y\, Z]$ или $[\exists y\, Z]$. Если y входит в X более, чем один раз, за исключением того случая, когда y содержится после квантора, то данное выше определение предполагается выполненным для всякого вхождения y. Например, $[\forall y[[A(y)] \wedge [B(y)]]]$ и $[[\forall y[A(y)]] \supset [\exists y[C(y, a)]]]$ — полные ппф, в то время как $[[\forall y[A(y)]] \wedge [B(y)]]$ — неполная. Мы можем дать это определение другим образом, введя понятие области действия (предметных вхождений) квантора, например, $\exists y$, в ппф. Под этим мы будем понимать ппф, содержащуюся в X, которая начинается с левой скобки, непосредственно следующей за $\exists y$, и кончается соответствующей ей правой скобкой ***). Ппф называется тогда полной, если любая переменная,

---

*) Необходимо добавить, что все формулы языка L, кроме специально оговоренных случаев, могут, по определению, получаться только посредством правил 1.2.1, 1.2.2 и 1.2.3. *(Прим. перев.)*

**) В нашей литературе они также называются *замкнутыми формулами*. *(Прим. перев.)*

***) Доказательство того, что это действительно формула, легко следует из правила 1.2.3. *(Прим. перев.)*

входящая в X, содержится в области действия квантора по той же переменной. Переменная в X, не обладающая этим свойством, называется *свободной* (или, более точно, в этом случае говорят о свободном вхождении переменной).

Мы определим порядок ппф как число пар квадратных скобок, содержащихся в ней. Так, например, порядок $[A(b)]$ равен единице, а порядок $[[\forall x[B(x)]]\vee \vee[C(a)]]$ — четырем. Таким образом, порядок формулы, сконструированной с помощью отрицания или навешивания кванторов (см. 1.2.2 и 1.2.3), увеличивается на единицу по сравнению с формулой, из которой она была получена. Порядок формулы, сконструированной посредством дизъюнкции, конъюнкции, импликации или эквивалентности, на единицу превышает сумму порядков тех двух формул, из которых она была получена.

Построенный выше язык узкого исчисления предикатов характерен своей прямолинейностью за счет отказа от экономии. Так, например, известно, что три пропозициональные связки (конъюнкция, импликация, эквивалентность) и один из двух кванторов могут быть выражены через остальные символы. Кроме того, в наших формулах используется очень большое число скобок, даже для относительно простых выражений. Преимущество этих обозначений состоит в том, что они позволяют быстро и легко определять построение формулы. Тем не менее, ниже мы упростим наши обозначения, введя следующие правила.

При дальнейшем конструировании ппф из атомарных формул будут опускаться следующие квадратные скобки:

Квадратные скобки, заключающие атомарную формулу.

Квадратные скобки, следующие за отрицанием, в том случае, когда они сами заключают отрицание. Например, $[\sim[\sim X]]$ может быть заменено на $[\sim\,\sim X]$.

Квадратные скобки, предшествующие или следующие*) за символом конъюнкции, при условии, что они

*) Под предшествованием или следованием следует понимать порядок, в котором конструировалась данная формула с помощью правил 1.2.1, 1.2.2 и 1.2.3. *(Прим. перев.)*

заключают отрицание; квадратные скобки, предшествующие или следующие за символом дизъюнкции, в том случае, когда они заключают конъюнкцию или отрицание. Так, например, $[[X\wedge Y]\vee[\sim Z]]$ может быть заменено на $[X\wedge Y\vee \sim Z]$.

Квадратные скобки, предшествующие или следующие за знаком импликации или эквивалентности, при условии, что они заключают дизъюнкцию, конъюнкцию или отрицание.

В случае последовательного навешивания кванторов, когда кванторы слева и скобки справа непосредственно следуют друг за другом, все квадратные скобки могут быть опущены, за исключением самой внутренней и самой внешней пар скобок (которые, впрочем, тоже могут быть устранены посредством применения некоторого другого правила). Так, например, $[\forall x[\exists y[\forall z[\sim X]]]]$ превращается в $[\forall x\ \exists y\ \forall z[\sim X]]$.

И, наконец, самые внешние скобки ппф также могут быть убраны. Например, ппф

$$[\forall x[\forall y[\forall z[[[A(x, y)]\wedge[A(y, z)]]\supset[A(x, z)]]]]]$$

может быть просто записана

$$\forall x\ \forall y\ \forall z[A(x,\ y)\wedge A(y,\ z)\supset A(x,\ z)].$$

Данные выше правила построены с таким расчетом, чтобы любая формула, упрощенная одним или несколькими их применениями, легко могла быть восстановлена до полной скобочной формы, не опасаясь каких-либо двусмысленностей. В случае следующих друг за другом знаков конъюнкции или дизъюнкции соответствующего правила для опускания квадратных скобок не вводится, так как это автоматически влекло бы за собой закон ассоциативности для этих операций. Однако позже мы введем дальнейшее упрощение, обозначая конъюнкцию или дизъюнкцию любого числа формул, ассоциируемых в произвольном порядке, через $[X_1\wedge X_2\wedge\ \dots\ \wedge X_n]$ и $[X_1\vee X_2\vee\ \dots\ \vee X_n]$ соответственно. Предполагается, что любое утверждение или рассуждение, использующее подобные выражения, будет применимо независимо от того, каким образом последние заменяются соответствующими полными скобочными выражениями. Так, $[X_1\vee X_2\vee X_3]$

будет заменяться на $[X_1 \vee [X_2 \vee X_3]]$ или $[[X_1 \vee X_2] \vee X_3]$ там, где выбор полного скобочного выражения не играет роли. Ввиду этого, для одной и той же упрощенной формулы могут быть выбраны различные полные скобочные выражения, если эта формула встречается более чем один раз.

Наконец, упомянем о том, что последующая работа упрощается, если мы исключим ппф, в которых одинаковые переменные, встречающиеся после кванторов (например, x в $\exists x$), входят более чем один раз. Это может быть сделано без существенных ограничений на наш язык, однако здесь мы не будем придерживаться этой практики.

1.3. Правила вывода. Из множества всех высказываний языка L выделим с помощью чисто формальной процедуры некоторое его подмножество, элементы которого назовем *теоремами* L. Пусть X, Y, Z — произвольные высказывания в L; тогда следующие ппф суть теоремы.

1.3.1. $[X \supset [Y \supset X]]$

$[[X \supset [X \supset Y]] \supset [X \supset Y]]$

$[[X \supset Y] \supset [[Y \supset Z] \supset [X \supset Z]]]$

$[[X \wedge Y] \supset X]$

$[[X \wedge Y] \supset Y]$

$[[X \supset Y] \supset [[X \supset Z] \supset [X \supset [Y \wedge Z]]]]$

$[X \supset [X \vee Y]]$

$[Y \supset [X \vee Y]]$

$[[X \supset Z] \supset [[Y \supset Z] \supset [[X \vee Y] \supset Z]]]$

$[[X \equiv Y] \supset [X \supset Y]]$

$[[X \equiv Y] \supset [Y \supset X]]$

$[[X \supset Y] \supset [[Y \supset X] \supset [X \equiv Y]]]$

$[[X \supset Y] \supset [[\sim Y] \supset [\sim X]]]$

$[X \supset [\sim [\sim X]]]$

$[[\sim [\sim X]] \supset X]$.

В упрощенных обозначениях, например, шестая из написанных выше формул будет выглядеть так:

$$[X \supset Y] \supset [[X \supset Z] \supset [X \supset Y \wedge Z]].$$

Иногда при рассмотрении ппф X мы будем особо выделять некоторый предметный символ или *свободную* переменную, употребляя для этого запись $X(a)$ или $X(y)$ вместо X. Аналогично можно выделять несколько предметных символов или переменных, при этом не обязательно указывая все символы, входящие в X. Если дана ппф $X(a)$, то под $X(b)$ будет пониматься результат одновременной замены каждого вхождения a в $X(a)$ на вхождение b; подобные обозначения будут также использоваться при подстановке переменных. Учитывая эти соглашения, следующие выражения являются теоремами для любых X, a, y:

1.3.2. $[[\forall y[X(y)]]\supset X(a)]$
$[[X(a)]\supset[\exists y[X(y)]]]$

при условии, что они построены в соответствии с правилами образования.

Помимо конструкций 1.3.1 и 1.3.2, теоремы получаются также применением следующих трех правил:

1.3.3. Если X и $[X\supset Y]$ — теоремы, то Y — теорема (*модус поненс*).

Если $[X\supset Y(a)]$ — теорема, где X не содержит a, то $[X\supset[\forall zY(z)]]$ — теорема, при условии, что это высказывание.

Если $[Y(a)\supset X]$ — теорема, где X не содержит a, то $[[\exists zY(z)]\supset X]$ — теорема, при условии, что это высказывание.

Следует хорошо понимать, что символы a и z, указанные в этих правилах, обозначают соответственно произвольные предметные символы и переменные. Приняв во внимание это замечание, можно показать, что все известные в исчислении предикатов правила подстановки выводятся, следовательно, нет нужды вводить их в качестве постулатов. Вот два из них, наиболее часто используемые.

1.3.4. Из любой теоремы X, содержащей квантор с переменной y, можно получить другую теорему, заменяя y на любую другую переменную z одновременно после квантора и в его области действия, при условии, что последняя не является частью области действия другого квантора с переменной z.

1.3.5. Если в некоторую теорему подставить произвольное высказывание на место содержащейся в ней формулы, полученной заключением в квадратные скобки символа 0-местного отношения, то полученное выражение снова есть теорема, при условии, что оно ппф.

Следующие два стандартных результата будут часто использоваться в дальнейшем:

1.3.6. Если ппф $[[\ldots[[X_1 \wedge X_2] \wedge X_3] \wedge \ldots \wedge X_n] \supset Y_m]$, $m=1, 2, \ldots, k$, и $[[\ldots[[Y_1 \wedge Y_2] \wedge Y_3] \wedge \ldots \wedge Y_k] \supset Z]$ — теоремы, то ппф $[[\ldots[[X_1 \wedge X_2] \wedge X_3] \wedge \ldots \wedge X_n] \supset Z]$ также является теоремой.

1.3.7. Для каждого высказывания X существует такое высказывание X', содержащее те же символы объектов и отношений, что $X \equiv X'$ — теорема, и X' задано *в предваренной нормальной форме*, т. е. $X' = [q_1[q_2[q_3 \ldots [q_n Y] \ldots]]]$, где q_k обозначают кванторы, в то время как Y, матрица высказывания, является правильно построенной бескванторной формулой. Мы включаем также и случай $n=0$, при котором X' не содержит ни кванторов, ни переменных.

Пусть K — некоторое множество высказываний L. Мы скажем, что высказывание Y выводится из K, записывая это $K \vdash Y$, если существует конечная последовательность высказываний $X_1, \ldots, X_n$ из K таких, что формула $[[\ldots[[X_1 \wedge X_2] \wedge X_3] \wedge \ldots \wedge X_n] \supset Y]$ — теорема в L. В случае, когда высказывание Y уже само есть теорема, n полагается равным нулю, т. е. Y считается выводимым из любого (в том числе и пустого) множества высказываний. Множество высказываний, выводимых из K, будет обозначаться $S(K)$. $S(K)$ содержит K вместе со всеми теоремами L. Используя 1.3.6, легко видеть, что для любого K имеет место $S(S(K)) = S(K)$. K' считается выводимым из K, или $K \vdash K'$, если $K' \subset S(K)$.

Множество высказываний K называется *противоречивым*, если $S(K)$ содержит все высказывания L, в противном случае K *непротиворечиво*. K противоречиво тогда и только тогда, когда $S(K)$ содержит высказывания вида $[X \wedge [\sim X]]$.

Помимо теорем, полученных выше в качестве некоторого подкласса высказываний L, мы будем употреблять понятие теоремы в обычном смысле этого слова, выходящее за рамки языка L. Желая различать эти словоупотребления, последние иногда называют метатеоремами. Мы, однако, не будем пользоваться этим термином, так как из контекста всегда будет достаточно ясно, о чем идет речь.

1.4. Семантическая интерпретация. Мы перейдем теперь к семантической, или наглядной (дескриптивной) интерпретации высказываний в данном языке. Нами будет сейчас рассмотрена математическая *структура* M, описанная посредством предложений из L.

M состоит из множества *объектов* (*индивидов*), которые, подобно предметным символам, мы будем обозначать малыми курсивными буквами a, b, c, ..., и из множества n-местных отношений (например, $A(,)$, $B(,)$), так что для каждого n-местного отношения из M и для каждой n-ки $(a_1, \ldots, a_n)$ различных или одинаковых индивидов из M $A(a_1, \ldots, a_n)$ либо имеет место в M, либо не имеет. Мы будем также различать такие ситуации, говоря, что A истинно или ложно для $(a_1, \ldots, a_n)$. Мы не отождествляем отношения с множествами n-членных последовательностей объектов из M, так что вполне допускается случай истинности двух отношений для одних и тех же n-ок констант. Мы также включаем тот случай, когда в M содержится 0-местное отношение. Такие отношения верны или неверны в M вне зависимости от индивидов M. Отношения порядка 0 не появляются в известных математических структурах, которые будут рассмотрены несколько позже. Однако они естественно возникают как элементы структур, определенных в связи с исчислением высказываний; такие структуры, как правило, не содержат объектов и отношений положительного порядка.

Пусть C — взаимно однозначное соответствие, отображающее индивид из M на подмножество предметных символов L, сопоставляя в то же время каждому отношению из M символ отношения из L того же порядка. Пусть K — множество ппф из L, символы объектов и отношений которых являются образами C. Мы скажем тогда, что эти правильно построенные формулы определены в M посредством C.

Каждой атомарной формуле X из K, не содержащей переменных, соответствует выражение X' — отношение между определенными индивидами из M, которое либо имеет место в M, либо нет.

Последующие правила будут указывать, по определению, какие высказывания из K истинны в M, а какие нет (при соответствии C).

1.4.1. Пусть Y — высказывание порядка 1 в K, т. е. $Y=[X]$, где X — атомарная формула. Тогда Y истинно в M тогда и только тогда, когда выражение X', соответствующее X при отображении C, истинно в M.

1.4.2. Пусть даны два высказывания Y и Z из K. $[Y \vee Z]$ истинно в M тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из двух высказываний Y или Z истинно в M; $[Y \wedge Z]$ истинно в M тогда и только тогда, когда и Y и Z оба истинны в M; $[Y \supset Z]$ истинно в M тогда и только тогда, когда Z истинно в M, а также когда и Y и Z ложны в M; $[Y \equiv Z]$ истинно в M тогда и только тогда, когда Y и Z либо одновременно истинны в M, либо одновременно ложны; и, наконец, $[\sim Y]$ истинно в M тогда и только тогда, когда Y ложно в M.

1.4.3. Пусть дана ппф $V=Y(z)$, в которой z не содержится после квантора и в которой нет других свободных переменных.

Высказывание $[\forall z Y(z)]$ истинно в M тогда и только тогда, когда $Y(a)$ истинно в M для всех предметных символов a из L, которые соответствуют объектам из M; $[\exists z Y(z)]$ истинно тогда и только тогда, когда существует хоть один a из L, соответствующий объекту из M, такой, что $Y(a)$ истинно в M.

Так как каждое из приведенных выше правил 1.4.2 и 1.4.3 сводит вопрос об истинности высказываний в M к высказываниям низшего порядка, а правило 1.4.1 решает, истинно или нет высказывание порядка 1, то отсюда ясно, что тем самым для любого высказывания Y из L однозначно выясняется его истинность или ложность (при соответствии C). Правило 1.4.3, однако, неэффективно в конструктивном смысле, так как сводит вопрос об истинности или ложности Y в M к соответствующему вопросу для множества высказываний, которое может быть бесконечно.

Пусть теперь K — некоторое множество высказываний из L, и пусть C — взаимно однозначное соответствие, отображающее символы объектов высказываний из K (если они там вообще есть) на множество объектов из M и отображающее символы отношений из K на множество отношений из M соответствующего порядка. Пусть C некоторым способом продолжено до отображения C', подобного рассмотренному выше, т. е. так, что C' взаимно однозначно отображает *все* объекты и отношения M на символы объектов и отношений из L. Нетрудно видеть, что истинность или ложность высказывания из K в L (при отображении C') зависит только от C и не зависит от выбора его продолжения C'. Однако так как кардинальное число множества предметных символов из L ограничено, то при достаточно большом числе объектов в M требуемого продолжения не существует. Этого можно избежать, либо рассматривая в связи с данной структурой M только такие языки, в которых с самого начала задана достаточно большая совокупность предметных символов, либо вкладывая данный язык L в более широкий язык L', так как выбор L' снова не играет роли.

Если все высказывания K истинны в структуре M при соответствии C, то мы скажем, что M есть *модель* K относительно C. Если K состоит только из одного высказывания Y, то мы также будем говорить, что M — модель Y.

До сих пор мы делали строгое различение между символами объектов и отношений, с одной стороны, и индивидами и отношениями, с другой стороны. Однако часто дело значительно упрощается, если предположить, что объекты (индивиды) и отношения структуры M совпадают соответственно с символами объектов и отношений языка L, в котором M описана; C в этом случае становится не чем иным, как тождественным отображением.

В определенных ситуациях полезно бывает рассматривать язык, образованный из исходных символов того же типа, что и в языке, рассмотренном выше, но множество ппф которого расширено путем введения специальных бесконечных правил образования. Существует значительный объем информации о таких языках, но мы их будем использовать только в особых случаях. Таким образом, если $X_1, X_2, X_3, \ldots$ — счетная последовательность ппф, то мы можем также рассматривать в качестве ппф *бесконечную дизъюнкцию* $[X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee \ldots]$ и *бесконечную конъюнкцию* $[X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \ldots]$. Если символы всех объектов и отношений ппф X_i связаны с объектами и отношениями структуры M соответствием C так же, как и раньше, то мы говорим, что введенная выше бесконечная дизъюнкция истинна в M, если существует хоть одна ппф X_i, истинная в M; и бесконечная конъюнкция истинна в M, если все X_i истинны в M.

1.5. Связь между дедуктивными и семантическими понятиями. Пусть K — некоторое множество высказываний, определенных на структуре M при соответствии C. Тогда

1.5.1. Каждая теорема из L, содержащаяся в K, истинна в M.

Мы опускаем доказательство этого утверждения, которое сводится к простой проверке правил вывода 1.3. Требуется, однако, некоторая осторожность в обращении с правилами вывода 1.3.3.

1.5.2. Каждое высказывание Y из K, выводимое из множества высказываний, истинных в M, само истинно в M.

В самом деле, пусть Y выводимо из высказываний $X_1, X_2, \ldots, X_n$, истинных в M, т. е. высказывание

$$[[\ldots[[X_1 \wedge X_2] \wedge X_3] \wedge \ldots \wedge X_n] \supset Y]$$

является теоремой и потому истинно в M. Но тогда согласно 1.4.2 Y истинно в M.

Противоречивое множество K не имеет модели. В самом деле, по предположению, мы рассматриваем только языки, содержащие по меньшей мере одну формулу. А раз так, то K непусто, поскольку оно противоречиво*).

*) Действительно, если, наоборот, K пусто, то любое высказывание в L есть теорема (так как теоремы и только они выводимы из пустого множества высказываний, а в силу противоречивости K из него выводимо любое высказывание). Следовательно, любое множество высказываний из L, определенное в некоторой структуре M, всегда истинно в M (см. 1.5.1). Легко, однако, построить пример, когда это не так: достаточно взять M, в которой одно из отношений тождественно ложно. *(Прим. перев.)*

Пусть Y — элемент из K и пусть $Z=[Y\wedge[\sim Y]]$. Если K определено и истинно в некоторой структуре M при соответствии C, то Z истинно в M (как и любое другое высказывание, определенное в M). Но в таком случае Y одновременно истинно и ложно в M, что, разумеется, невозможно.

Начиная с этого момента, мы, как правило, не будем упоминать о соответствии C, устанавливающем связь между множеством высказываний K и структурой M. Таким образом, говоря о том, что высказывания из K определены в M, мы заранее будем предполагать существование такого соответствия.

1.5.3. Теорема. *Высказывание X из L, истинное в каждой структуре, в которой оно определено, является теоремой.*

По существу, это теорема Гёделя о полноте узкого исчисления предикатов.

1.5.4. Теорема. (Полнота узкого исчисления предикатов в широком смысле.) *Каждое непротиворечивое множество высказываний K в языке L обладает моделью.*

1.5.5. Теорема. *Если множество высказываний K и высказывание Y таковы, что Y определено и истинно в каждой структуре M, являющейся моделью K, то Y выводимо из K.* (Отсюда, в частности, следует, что Y выводимо из конечного подмножества K.)

Теоремы 1.5.5 и 1.5.3 обе сводятся к теореме 1.5.4. В самом деле, пусть высказывание X, указанное в 1.5.3, не является теоремой в L. В этом случае высказывание $[\sim X]$, или, точнее, одноэлементное множество, состоящее из $[\sim X]$, непротиворечиво. Действительно, если это не так, т. е. $[\sim X]$ противоречиво, то $[[\sim X]\supset Y]$ — теорема для любого высказывания Y, а тогда $[[\sim X]\supset X]$, $[[\sim[\sim X]]\vee X]$, $[X\vee X]$ и, наконец, X будут теоремами, согласно правилам исчисления высказываний. Это, однако, противоречит нашему предположению, согласно которому X не является теоремой. Следовательно, $[\sim X]$ непротиворечиво и ввиду 1.5.4 обладает моделью M. Но в таком случае X определено и ложно в M, вопреки условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает теорему 1.5.3.

Приступая к 1.5.5, предположим, что Y не выводимо из K. Тогда для любого конечного числа высказываний $X_1, \ldots, X_n$ из K конъюнкция

$$[\ldots[[X_1 \wedge X_2] \wedge X_3] \wedge \ldots \wedge [\sim Y]]$$

непротиворечива (так как иначе $[[\ldots[[X_1 \wedge X_2] \wedge X_3] \wedge \ldots \ldots \wedge X_n] \supset Y]$ было бы теоремой, т. е. Y было бы выводимо из K *). Но это означает, что множество $\{X_1, X_2, \ldots, X_n, \sim Y\}$ непротиворечиво для любых $X_1, \ldots, X_n$ из K, а следовательно, и множество $K \cup \{\sim Y\}$ непротиворечиво. А если это так, то согласно 1.5.4 существует модель M для $K \cup \{\sim Y\}$. M есть модель для K, в которой $[\sim Y]$ истинно, вопреки условию теоремы.

Для доказательства 1.5.4 предположим сначала, что высказывания из K не содержат кванторов и предметных символов. Другими словами, K состоит из высказываний, построенных из символов 0-местных отношений с помощью пропозициональных связок и заключения соответствующих выражений в кадратные скобки. Модель M множества K тогда представляет собой множество отношений порядка 0, находящихся во взаимно однозначном отношении с символами отношений из K, такое, что любое отношение из этого множества либо *тождественно истинно*, либо *тождественно ложно* в M, и такое, что из правил 1.4.2 тогда следует истинность всех высказываний K в M. Для упрощения наших рассуждений отношения будут отождествляться с соответствующими им символами отношений.

Пусть S — множество символов отношений из K. Тогда истинность или ложность произвольного $A \in S$ в структуре M может быть выражена *оценкой* (valuation function) $\varphi(A)$, определенной на M и принимающей значения 0 (в случае истинности A) и 1 (в случае ложности). Ссылка на правила 1.4.2 показывает, что вопрос о том, истинно или нет высказывание, полученное из элементов S, может быть решен с помощью стандартных истинностных таблиц, понимая под 0 «истину», а под 1 — «ложь». Таким образом, если K состоит только из од-

---

*) Поскольку в исчислении высказываний $\sim[Z \wedge [\sim Y]]$ и $[Z \supset Y]$ эквивалентны. *(Прим. перев.)*

ного высказывания X, то возможность такого подбора значений $\varphi(A)=0$ или $=1$ для символов отношений из X, который обеспечивал бы истинность X (и тем самым существование модели для X), следует из известной теоремы исчисления высказываний *). Случай, когда K только конечно, сводится к случаю, разобранному выше, взятием конъюнкции всех высказываний K в произвольном порядке. Если K имеет произвольную бесконечную мощность (счетную или несчетную), то для доказательства теоремы необходимо следующее дополнительное рассмотрение.

Не меняя наших обозначений, временно рассмотрим S как абстрактное множество, свойства элементов A, B, C, ... которого нам пока безразличны. Под *частичной оценкой* S понимается функция от одной переменной, определенная на подмножестве $V \subset S$ и принимающая значения в множестве из двух элементов $\{0, 1\}$. Частичная оценка φ называется *тотальной*, если ее область определения есть все множество S. $D\varphi$ будет обозначать область определения частичной оценки. Кроме того, если U — любое подмножество S, то $\varphi|U$ будет обозначать ограничение φ на $D\varphi \cap U$. Имея в виду эти обозначения, приступим к доказательству следующего предложения.

1.5.6. Специальная лемма об оценках. *Пусть $\Phi=\{\varphi_\nu\}$ — множество частичных оценок с множеством индексов $I=\{\nu\}$, такое, что для каждого конечного подмножества $U \subset S$ существует оценка $\varphi \in \Phi$, область определения которой содержит U. Тогда существует тотальная оценка ψ на S такая, что для каждого конечного подмножества $U \subset S$ существует $\varphi_\nu \in \Phi$, область определения которой содержит U и которая совпадает с ψ на множестве U, т. е. $\psi|U=\varphi_\nu|U$.*

Назовем частичную оценку ψ на S *допустимой*, если для любого конечного подмножества $U \subset S$ существует $\varphi_\nu \in \Phi$ такая, что $U \subset D\varphi_\nu$ и $\psi|U=\varphi_\nu|D\psi \cap U$, т. е. ψ совпадает с φ на пересечении U и $D\psi$. Пусть даны две

---

*) Имеется в виду теорема о разрешимости, утверждающая, что для всякого *выполнимого* высказывания X в исчислении высказываний можно построить модель. *(Прим. перев.)*

частичные оценки φ и ψ; будем называть ψ *продолжением* φ, обозначая это $\varphi<\psi$, если $D\varphi\subset D\psi$ и $\psi|D\varphi=\varphi$.

Пусть Ψ — множество всех допустимых частичных оценок S. Ψ — непусто, так как согласно условию леммы Ψ содержит пустую частичную оценку, т. е. частичную оценку, область определения которой есть пустое множество. Кроме того, Ψ частично упорядочено отношением продолжения, $<$, определенным выше. Любое непустое линейно упорядоченное подмножество $\Psi'\subset\Psi$ обладает верхней гранью ψ'. В самом деле, пусть $\Psi'=\{\psi_\mu\}$; тогда, взяв в качестве области определения ψ' объединение областей определения ψ_μ и положив значение ψ' для любого аргумента равным значению произвольной $\psi_\mu\in\Psi'$, определенной для этого аргумента, получим искомую оценку. Следовательно, согласно лемме Цорна Ψ содержит по крайней мере один максимальный элемент, скажем, ψ_0. Покажем, что ψ_0 — тотальная оценка в S.

Пусть, наоборот, $S-D\psi_0$ непусто, и пусть A — элемент этого множества. Определим тогда частичную оценку ψ_1 на S с областью определения $D\psi_0\cup\{A\}$, полагая $\psi_1=\psi_0$ на $D\psi_0$ и $\psi_1(A)=0$. Так как ψ_0 — максимальный элемент, то ψ_1 не может быть допустимой оценкой. Другими словами, существует конечное подмножество $V\subset S$ такое, что условия $V\subset D\varphi_\nu$ и $\psi_1|V=\varphi_\nu|D\psi_1\cap V$ не выполняются ни при какой $\varphi_\nu\in\Phi$. Определим частичную оценку ψ_2 на S с областью определения $D\psi_0\cup\{A\}$, полагая $\psi_2=\psi_0$ на $D\psi_0$ и $\psi_2(A)=1$. Аналогично, ψ_2 не может быть допустимой оценкой, а потому существует конечное подмножество $W\subset S$ такое, что условия $W\subset D\varphi_\nu$ и $\psi_2|W=\varphi_\nu|D\psi_2\cap W$ не выполняются ни при какой $\varphi_\nu\in\Phi$. Заметим, что V обязательно содержит A, так как иначе существование φ_ν, необходимого для допустимости ψ_1, следует из допустимости ψ_0. По тем же соображениям получаем, что и W содержит A. Рассмотрим теперь множество $U=V\cup W$. Так как ψ_0 допустима, то существует $\varphi_\mu\in\Phi$ такая, что $D\varphi_\mu\supset U$ и $\psi_0|U=\varphi_\mu|D\psi_0\cap U$. A принадлежит области определения φ_μ, так как $A\in U$ и, следовательно, либо $\varphi_\mu(A)=0$, либо $\varphi_\mu(A)=1$. Но в первом случае будем иметь $\psi_1|V=\varphi_\mu|D\psi_1\cap V$ и $V\subset D\varphi_\mu$, а во втором $\psi_2|W=\varphi_\mu|D\psi_2\cap W$ и $W\subset D\varphi_\mu$. Это, однако, противоречит ранее сделанному предположению о том, что элемента из Φ с подобными свойствами не существует. Окончательно получаем, что $S - D\psi_0$ пусто, ψ_0 — тотальная оценка, и ввиду допустимости ψ_0 условия 1.5.6 выполняются. На этом доказательство леммы заканчивается.

Возвратимся снова к доказательству 1.5.4 в случае, когда K бесконечно и не содержит ни кванторов, ни символов объектов. Таким образом, в высказывание K входят только символы 0-местных отношений. Обозначим через S множество всех символов отношений, присутствующих в K; пусть S' — конечное подмножество S, и пусть K' — множество высказываний из K, символы отношений которого все принадлежат S'. Хотя K' может быть и бесконечным, но, поскольку S' конечно, все высказывания из K' должны быть эквивалентны, в смысле исчисления высказываний, высказываниям из конечного подмножества K' *). Отсюда заключаем, что существует тотальная оценка φ_ν на S' (т. е. частичная оценка на S) такая, что φ_ν принимает значение 0 («истина») для всех элементов K', согласно известной оценке по таблице истинности. Для элементов S', не содержащихся ни в одном из высказываний K', значение φ_ν может быть выбрано произвольно, например, $\varphi_\nu=0$.

Пусть $\Phi=\{\varphi_\nu\}$ — множество всех частичных оценок S, полученных таким способом, и пусть ψ_0 — тотальная оценка S, удовлетворяющая свойствам, сформулированным в лемме 1.5.6. Пусть X — любое высказывание из K. Утверждается, что значения, которые принимает ψ_0 на символах отношений X, дают для X значение 0 («истину»). Действительно, если V — множество всех символов отношений из X, то $V\subset D\varphi_\nu=S$ для некоторого $\varphi_\nu\in\Phi$ и $\psi_0=\varphi_\nu$ на V. Отсюда следует, что X содержится в множестве K', определенном выше для конечного множества S'. А поскольку φ_ν дает 0 для X, то же самое верно и для оценки ψ_0, совпадающей с φ_ν на V. Таким образом, получаем, что ψ_0 дает 0 («истину») для всех высказываний из K. Это и доказывает теорему 1.5.4 в случае,

---

*) Это очевидно, если вспомнить, что любое высказывание в исчислении высказываний имеет эквивалентное высказывание в конъюнктивной нормальной форме. (*Прим. перев.*)

когда K построено только из символов отношений порядка 0.

Теперь предположим, что K уже может содержать символы отношений произвольного порядка, но не содержит еще ни кванторов, ни переменных. Как и прежде, будем рассматривать символы объектов и отношений из K как объекты и отношения структуры M, на которой K определено и истинно. Пусть S обозначает множество атомарных формул, содержащихся в высказываниях K. Возьмем множество S' символов 0-местных отношений, находящихся во взаимно однозначном соответствии C с элементами S. Две атомарные формулы считаются различными, если они содержат различные символы отношений или если они содержат одинаковые символы отношений, но отличаются хотя бы одним предметным символом на соответствующих местах. Согласно определению нашего языка L a priori не ясно, что в нашем распоряжении найдется достаточно символов 0-местных отношений для построения множества S'. В этом случае мы просто заменим L на более широкий язык. Условимся раз и навсегда, что подобные расширения молчаливо предполагаются выполненными всякий раз, когда возникают такого рода проблемы.

Пусть теперь K' — множество высказываний X', полученных из высказываний X, принадлежащих K, путем замены всех атомарных формул из S соответствующими символами отношений из S'. Утверждается, что K' непротиворечиво. Это очевидно, когда K и K' пусты. В общем случае, пусть A — элемент S, и пусть A' — соответствующий элемент S'. Если K' противоречиво, то оно содержит конечное множество высказываний $X'_1, \ldots, X'_n$, соответствующих высказываниям $X_1, \ldots, X_n$ в K, таких, что высказывание

$$[[\ldots[[X'_1 \wedge X'_2] \wedge X'_3] \wedge \ldots \wedge X'_n] \supset Y']$$

является теоремой, где $Y' = [[A'] \wedge [\sim [A']]]$. Следовательно, согласно правилам подстановки 1.3.5 высказывание

$$[[\ldots[[X_1 \wedge X_2] \wedge X_3] \wedge \ldots \wedge X_n] \supset Y]$$

является теоремой, где $Y = [[A] \wedge [\sim [A]]]$, причем A — атомарная формула, соответствующая A'. Это, однако, показывает, что K противоречиво, вопреки нашим предположениям. Таким образом, K' также непротиворечиво. Из доказанного ранее следует, что K' обладает моделью M', т. е. существует оценка на S', которая каждому элементу из K' сопоставляет «истину». Для любой атомарной формулы $R(a_1, \ldots, a_n)$ из S скажем, что отношение $R(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M тогда и только тогда, когда соответствующий символ отношения S' истинен в M'. Если символ отношения $R(\ldots)$ не входит в S и тем самым в K, то значение $R(a_1, \ldots, a_n)$ можно взять произвольным. Пусть, например, $R(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M. Так как вопрос об истинности в M высказывания X из K зависит только от истинности атомарных формул K в M и так как пропозициональные связки в M и M' одни и те же, то получаем, что все высказывания K истинны в M, т. е. M — модель K.

Теперь переходим к случаю, когда все ограничения на форму высказывания из K сняты. Впрочем, заранее отбрасывая очевидные случаи, мы будем предполагать, что K непусто и содержит по крайней мере одно высказывание, включающее квантор.

Заменим каждое высказывание X из K высказыванием X' в предваренной нормальной форме, описанной в 1.3.7, и пусть K' — множество всех высказываний X', полученных таким способом. Так как $X \equiv X'$ — теорема для всех $X \in K$, то отсюда следует, что каждая модель K' является моделью и K. А поскольку $X \supset X'$ — теорема для всех $X \in K$ и K непротиворечиво, получаем, что K' также непротиворечиво (ср. с 5.3.6). Ввиду этого мы ограничимся лишь случаем, когда все высказывания K с самого начала заданы в предваренной нормальной форме. Кванторы в таких высказываниях будем отсчитывать в их естественном порядке, слева направо. Для того чтобы на примерах пояснить дальнейшую процедуру, предположим, что в K имеется высказывание вида

1.5.7. $[\exists x[\forall y[\exists z[\exists v[\exists w Q(x, y, z, v, w)]]]]]$,

где Q уже не содержит никаких кванторов.

Символы отношений из K будут использоваться в качестве отношений модели M. Что же касается множества объектов M, то оно будет введено в ходе доказательства.

Определим теперь по индукции последовательность множеств высказываний $\{K_0, K_1, K_2, \ldots\}$ и последовательность множеств предметных символов $\{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ так: $K_0=K$, а P_0 — множество всех предметных символов, входящих в высказывания K. Если, однако, K не содержит предметных символов, то положим $P_0=\{a\}$, где a — произвольно выбранный символ объекта.

K_1 содержит все высказывания из K_0. Кроме того, если X — высказывание из K_0, начинающееся с квантора существования, то K_1 содержит высказывание X^*, полученное из X вычеркиванием этого квантора (а также внешних квадратных скобок) и заменой соответствующей переменной во всех ее вхождениях новым предметным символом. Таким образом, если X имеет вид 1.5.7, то в качестве X^* можно выбрать высказывание

1.5.8. $[\forall y[\exists z[\exists v[\exists w Q(b, y, z, v, w)]]]]$

при условии, что $b \notin P_0$. Подразумевается, что вводимые предметные символы различны для различных высказываний K_0. Эти условия и определяют K_1. P_1 получается как объединение P_0 и новых только что введенных предметных символов. K_2 содержит все высказывания K_1. Кроме того, если X — высказывание из K_1, начинающееся с квантора общности, то K_2 содержит все высказывания, которые получаются из X вычеркиванием квантора и заменой соответствующей переменной во всех ее вхождениях элементами P_1. Таким образом, из 1.5.8 мы получим высказывания

$$[\exists z[\exists v[\exists w Q(b, a, z, v, w)]]],$$

где a пробегает все элементы P_1. Эти условия полностью определяют K_2. Что касается P_2, то просто положим $P_1=P_2$.

Подобным образом мы получим K_n и P_n из K_{n-1} и P_{n-1} для нечетного n тем же способом, каким K_1 и P_1 получались из K_0 и P_0, а K_n и P_n для четного n из K_{n-1} и P_{n-1} тем же способом, каким K_2 и P_2 получались из K_1 и P_1. Пусть $K'=\bigcup_n\{K_n\}=K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \ldots$ и $P'=$ $=\bigcup_n\{P_n\}=P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \ldots$ Множество P' и будет служить множеством объектов искомой структуры M.

Мы намерены показать, что K' непротиворечиво. Поскольку K' может быть противоречивым только в том случае, когда противоречиво уже его конечное подмножество, и поскольку K' является объединением цепочки возрастающих множеств K_n, то достаточно доказать непротиворечивость всех K_n. Если это не так, то существует первый номер n, скажем, $n=m$, начиная с которого все K_n противоречивы. Понятно, что $m \geqslant 1$, так как, по условию, $K_0=K$ непротиворечиво.

Предположим сначала, что m четно. Тогда существуют высказывания $Y_1, \ldots, Y_k \in K_{m-1}$ и $Z_1, \ldots, Z_l \in$ $\in K_m - K_{m-1}$ такие, что множество $\{Y_1, \ldots, Y_k, Z_1, \ldots$ $\ldots, Z_l\}$ противоречиво, причем l обязательно положительно ввиду непротиворечивости K_{m-1}. По определению K_m существуют высказывания $V_1, \ldots, V_l \in K_{m-1}$, начинающиеся кванторами общности:

1.5.9. $V_i=[\forall x S_i(x)],\ i=1, \ldots, l,$

так что $Z_i=S_i(a_i)$, где a_i — некоторый предметный символ из P_m. Тогда согласно 1.3.2 высказывания $[V_i \supset Z_i]$ — теоремы. Кроме того, ввиду противоречивости множества $\{Y_1, \ldots, Y_k, Z_1, \ldots, Z_l\}$ из него выводимо высказывание $W=[[A] \wedge [\sim [A]]]$, где A — символ 0-местного отношения. Это эквивалентно тому, что

1.5.10. $[Y_1 \wedge [Y_2 \wedge [\ldots [\wedge Y_k] \ldots]] \supset W]$

выводимо из $\{Z_1, \ldots, Z_l\}$ (или, если $k=0$, то W само выводимо из $\{Z_1, \ldots, Z_l\}$). Но поскольку высказывания $[V_i \supset Z_i]$ суть теоремы, высказывание 1.5.10 выводимо из $\{V_1, \ldots, V_l\}$, и, следовательно, W выводимо из множества $\{Y_1, \ldots, Y_k, V_1, \ldots, V_l\}=H$. Таким образом, H оказывается противоречивым, хотя H — подмножество K_{m-1}, а последнее непротиворечиво.

Предположим теперь, что m нечетно. Тогда существуют высказывания $Y_1, \ldots, Y_k \in K_{m-1}$, $Z_1, \ldots, Z_l \in$ $\in K_m - K_{m-1}$, $l>0$, такие, что $\{Y_1, \ldots, Y_k, Z_1, \ldots, Z_l\}$ противоречиво. По определению K_m существуют высказывания $V_1, \ldots, V_l \in K_{m-1}$, начинающиеся кванторами существования:

1.5.11. $V_i = [\exists y S_i(y)]$, $i = 1, \ldots, l$,

такие, что $Z_i = S_i(a_i)$, где a_i — некоторый предметный символ, лежащий в $P_m - P_{m-1}$. Кроме того, мы можем предположить, что Z_i различны, а потому различны V_i и a_i. Ввиду противоречивости множества $\{Y_1, \ldots, Y_k, Z_1, \ldots, Z_l\}$ из него выводимо высказывание $W = [[A] \wedge [\sim A]]$, откуда согласно правилам исчисления высказываний.

1.5.12. $[[Y_1 \wedge [Y_2 \wedge \ldots \wedge [Y_k \wedge [Z_2 \wedge \ldots \wedge Z_l]] \ldots]] \supset W] = U$

выводимо из Z_1. Таким образом, $[Z_1 \supset U]$ — теорема, и, следовательно, по третьему правилу 1.3.3 $[V_1 \supset U]$ — теорема, а потому $\{Y_1, \ldots, Y_k, Z_1, \ldots, Z_l\}$ противоречиво. Применяя последовательно те же рассуждения к $Z_2, \ldots \ldots, Z_l$, заключаем, что $\{Y_1, \ldots, Y_k, V_1, \ldots, V_l\}$ противоречиво. Но это множество входит в K_{m-1}, что свидетельствует об ошибочности нашего предположения, т. е. о непротиворечивости K_m. Этим доказательство непротиворечивости K' полностью закончено.

Пусть K^* — множество всех высказываний из K', не содержащих никаких кванторов. K^* непротиворечиво, так как K^* — подмножество K'. Множество символов отношений K^* то же, что у K' и K, а множеством предметных символов K^* является P'. Следовательно, по доказанному ранее K^* обладает моделью M, отношения которой представляют собой только что указанные символы отношений, а множеством объектов является P'. Покажем, что M — модель K, и даже, точнее, что M — модель $K' \supset K$. Теорема 1.5.4 будет тогда установлена во всей своей общности.

Для доказательства истинности всех высказываний K' в M воспользуемся индукцией по числу кванторов в приставке. Относительно высказываний без кванторов наше утверждение очевидно, так как они входят в K^*, а M — модель K^*. Пусть это верно для всех высказываний из K' с числом кванторов $k < n$, $n \geqslant 1$, и пусть X — высказывание из K', содержащее точно n кванторов. Рассмотрим сначала случай, когда X начинается квантором существования, $X = [\exists y\, S(y)]$. Так как $X \in K'$, то $X \in K_m$, начиная с некоторого m. В частности, X принадлежит некоторому K_m с четным индексом m. А раз так, то K_{m+1} содержит высказывание $S(a)$, истинное в M, поскольку оно имеет только $n-1$ кванторов. Отсюда по правилам 1.4.3 семантической интерпретации X следует, что $[\exists y\, S(y)]$ также истинно в M.

Предположим теперь, что X содержит точно n кванторов, первый из которых — квантор общности, $X = [\forall y\, S(y)]$. Нам надо только показать, что $S(a)$ истинно в M для любого $a \in P'$. Но из конструкции K' и P' следует существование такого нечетного индекса m, что $X \in K_m$ и $a \in P_m$ (то же, разумеется, верно и для любого индекса, большего m). Следовательно, по определению K_{m+1} $S(a)$ лежит в этом множестве и, следовательно, в K'. Но $S(a)$ содержит только $n-1$ кванторов, а потому $S(a)$ истинно в M, что и утверждалось. На этом доказательство теоремы 1.5.4 закончено.

Постараемся теперь оценить кардинальное число объектов, необходимых для модели M множества K, в зависимости от числа высказываний в K. Если K — конечное множество, то все K_n и P_n также конечны, и, следовательно, P', самое большее, счетно. В том случае, когда K бесконечно и имеет кардинальное число k, все K_n и P_n имеют самое большее k элементов, ввиду чего P' имеет не больше $\aleph_0 k = k$ элементов. Таким образом, если определить кардинальное число модели как кардинальное число множества ее объектов, то получается

1.5.13. Теорема. *Если непротиворечивое множество K конечно, то оно обладает конечной или счетной моделью M. Если K бесконечно с кардинальным числом k, то оно обладает моделью, кардинальное число которой не превосходит k.*

Для конечного или счетного K это теорема Левенгейма — Сколема.

Понятие структуры можно определить и другим способом, который кажется довольно естественным с теоретико-множественной точки зрения. В новом определении n-местные отношения отождествляются с некоторым подмножеством множества n-членных упорядоченных последовательностей объектов структуры. В этом случае уже невозможна истинность двух различных отношений для одних и тех же n-ок индивидов из M, так как эти отношения не различаются в теоретико-множественном смысле. С другой стороны, может случиться, что соответствие между символами отношений и отношениями станет многозначным, и, в то время как символы объектов мы еще можем использовать в качестве объектов структуры, то же самое уже невозможно сделать с символами отношений и отношениями.

Для того чтобы обосновать наш подход с теоретико-множественных позиций, под объектами и отношениями различных порядков мы должны понимать элементы различных множеств индивидов в некоторой (абсолютной или аксиоматической) теории множеств. Утверждение о том, что $R(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в структуре M, будет тогда означать, что $(n+1)$-членная последовательность $R, a_1, \ldots, a_n$ принадлежит определенному наперед заданному множеству.

1.6. Множества высказываний и их многообразия. Начиная с этого момента, если не оговорено противное, будем предполагать совпадение предметных символов и символов отношений с соответствующими объектами и отношениями. Для данного непротиворечивого множества высказываний K из языка L существует, как мы видели выше, модель M, однако нельзя без существенных предположений относительно L утверждать, что все индивиды M содержатся в L. Ясно, впрочем, что если мы выберем «область» индивидов D достаточно большой (например, полагая, что D содержит, кроме объектов L, еще столько же элементов, сколько высказываний в L), то для любого непротиворечивого множества высказываний K из L найдется такая модель M, что все ее объекты лежат в D. Таким образом обеспечивается существование моделей для произвольных непротиворечивых множеств в одной общей области индивидов. Это замечание бывает очень полезным, так как часто избавляет нас от различных неопределенностей.

Множество высказываний K в данном языке L будет называться T-системой (по имени Тарского), если оно содержит все выводимые из него высказывания, т. е. $S(K)=K$. Так, например, множество всех теорем в L есть T-система.

Множество структур V (построенных в определенной области индивидов, как объяснялось выше) будет называться *многообразием* (структур), если V состоит из всех структур, являющихся моделями некоторого множества высказываний K из L *). В этом случае будем также говорить, что V — многообразие K, записывая это $K \to V$. Теория систем высказываний и многообразий структур будет развита нами немного позже (главы VII и VIII), при более разработанной теории. В настоящем разделе мы установим некоторые частные результаты относительно многообразий, тесно связанные с теоремой 1.5.4.

1.6.1. Теорема о компактности многообразий структур. *Пусть $\{V_\nu\}$ — множество многообразий структур, такое, что пересечение любого конечного числа элементов из $\{V_\nu\}$ непусто. Тогда пересечение всех V_ν, $\bigcap\limits_\nu \{V_\nu\}$, также непусто.*

Так как V_ν — многообразия, то существуют множества высказываний K_ν, такие, что $K_\nu \to V_\nu$ для каждого ν, т. е. V_ν — многообразие K_ν. Пусть $K = \bigcap\limits_\nu \{K_\nu\}$. Любая модель K является в то же время моделью для каждого K_ν и, следовательно, принадлежит всем V_ν. Поэтому для доказательства 1.6.1 нам достаточно показать, что K обладает моделью. Для этого согласно 1.5.4 необходима лишь непротиворечивость K, что эквивалентно непротиворечивости всякого конечного подмножества K. Пусть $\{X_1, \ldots, X_n\}$ — произвольное конечное подмножество K. Существуют множества K_ν, например, $K_1, \ldots, K_n$, такие, что $X_i \in K_i$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть M — элемент из $V_1 \cap \ldots \cap V_n$, где $K_i \to V_i$, $i = 1, \ldots, n$ (такая структура M существует по предположению 1.6.1). Тогда все высказывания X_i истинны в M, а это и доказывает непротиворечивость $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Таким образом, K непротиворечиво, и теорема доказана.

*) В нашей литературе принят также термин «аксиоматизируемый класс структур». Различными авторами этот термин варьируется по-своему: «арифметический класс» (Тарский), «элементарный класс» или «элементарно определенный класс» (Кейслер). (*Прим. перев.*)

Непосредственно с 1.6.1 связан следующий

1.6.2. Принцип локализации. *Множество высказываний К обладает моделью, если обладает моделью каждое его конечное подмножество.*

В самом деле, любое конечное подмножество K непротиворечиво, поскольку оно обладает моделью. Следовательно, K непротиворечиво и согласно 1.5.4 имеет модель, что и доказывает 1.6.2.

Имеется существенная разница между теоремой 1.5.4 и теоремами 1.6.1 и 1.6.2. В то время как 1.5.4 устанавливает связь между дедуктивными или синтаксическими свойствами множества высказываний, с одной стороны, и семантическими или теоретико-модельными его свойствами, с другой, 1.6.1 и 1.6.2 касаются только его моделей множества и не содержат никаких упоминаний о его дедуктивных свойствах. Оказывается, что во многих приложениях 1.6.2 может быть использована вместо 1.5.4. Встает вопрос, нельзя ли доказать предыдущие теоремы непосредственно, не используя правила вывода. Это действительно можно сделать, основываясь, например, на лемме 1.5.6. Однако даже в том случае, когда применение правил вывода не вызывается прямой необходимостью, использование их может быть весьма поучительно. Так как сама сущность дедуктивного исчисления показывает зависимость любого формального вывода лишь от конечного числа высказываний, непротиворечивость любого множества может быть определена как непротиворечивость любого его конечного подмножества. Таким образом, эквивалентность непротиворечивости и существования модели дает довольно естественное объяснение теоремам 1.6.2 и 1.6.1.

1.7. Задачи

1.7.1. Показать, как изменяется теория этой главы, если ввести в рассмотрение функции (функциональные символы), например, $\varphi(x, y)$ для $x+y$ (ср. с п. 9.1).

1.7.2. Показать, как меняется теория этой главы, если исключить предметные символы.

1.7.3. Вывести 1.6.2 и 1.6.1 (именно в этом порядке), не используя дедуктивного исчисления.

1.7.4. Видоизменить теорию семантической интерпретации (п. 1.4) так, чтобы она соответствовала теоретико-множественному определению структуры (конец п. 1.5).

Библиографическая справка. Исчисление, введенное в разделах 1.2 и 1.3, есть лишь видоизмененный вариант теории Гильберта и Бернайса [1]. Теорема 1.5.3 доказана в статье Гёделя [1]. Теоремы 1.5.4, 1.6.1 и 1.6.2 эквивалентны, если считать доказанным утверждение 1.5.3. Вначале Мальцевым была установлена теорема 1.6.2 (см. Мальцев [1]). Доказательства 1.5.4 приведены у Хенкина [1] и А. Робинсона [1] (см. также Расёва и Сикорский [1] и Бет [1]). Теорема 1.6.1 доказана в работе Тарского [2]. Относительно теоремы Лёвенгейма — Сколема см. статьи Лёвенгейма [1] и Сколема [1]. Теоретико-множественное определение структуры дано в работе Тарского [2] (структура у Тарского называется *реляционной системой* (relational system)). Лемма 1.5.6 — частный случай теоремы 9.3.2 (см. ниже), последняя же есть непосредственное следствие леммы Радо [1]. Дедуктивно-замкнутые системы (*T*-системы) рассмотрены в статьях Тарского [1]*).

---

*) Тарский [6] предложил новые значительно простые способы формализации узкого исчисления предикатов с равенством. Дальнейшие усовершенствования этих способов даны в работе Калиша и Монтегю [1]. Лось [1], Расёва и Сикорский [1] доказали эквивалентность обобщенной теоремы полноты и теоремы о максимальных идеалах в булевой алгебре. Лось и Рылль-Нардзевский [1], Хенкин [2] исследовали связь теоремы полноты с аксиомой выбора, а Галперн [1] доказал их неэквивалентность. Другие доказательства теоремы 1.6.2 даны в монографии Плоткина [1]. Усиления 1.6.2 даны в работах Когаловского [11], Мальцева [12], Тайманова [6]. (*Прим. ред.*)

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

2.1. Равенство. Едва ли существует математическая теория, в которой можно обойтись без понятия равенства. Часто это понятие рассматривается особо вне обычной теории узкого исчисления предикатов так, как мы это делали в предыдущей главе. Однако в дальнейшем мы не будем придерживаться этой точки зрения и определим равенство как бинарное отношение $E(x, y)$, удовлетворяющее следующим условиям:

2.1.1. $\forall x E(x, x)$ (рефлексивность),

$\forall x \forall y [E(x, y) \supset E(y, x)]$ (симметрия),

$\forall x \, \forall y \, \forall z [E(x, y) \wedge E(y, z) \supset E(x, z)]$ (транзитивность).

2.1.2. Для любого отношения, принадлежащего, например, заданной структуре, E удовлетворяет условию *подстановочности*. А именно, если дано отношение порядка n, скажем, $A(x_1, \ldots, x_n)$, то имеет место

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \forall y_1 \ldots \forall y_n [E(x_1, y_1) \wedge E(x_2, y_2) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge E(x_n, y_n) \wedge A(x_1, \ldots, x_n) \supset A(y_1, \ldots, y_n)].$$

(Заметим, что для $A = E$ 2.1.2 следует из 2.1.1.)

В дальнейшем мы будем часто пользоваться упрощенной скобочной символикой, подробно описанной выше в разделе 1.2. Отныне также, имея дело с отношениями, мы будем либо заполнять все их пустые места переменными, либо опускать скобки, запятые и все межскобочное пространство.

Любое отношение, удовлетворяющее условию 2.1.1, называется эквивалентностью. Вполне могут существовать два отношения эквивалентности, которые не являются *коэкстенсивными*. Вообще, два отношения $A(x_1, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, \ldots, x_n)$ *коэкстенсивны*, если для любых $a_1, \ldots, a_n$ из рассматриваемой структуры верно $A(a_1, \ldots, a_n) \equiv B(a_1, \ldots, a_n)$.

Два отношения равенства обязательно должны быть коэкстенсивными. Пусть $E_1(x, y)$ и $E_2(x, y)$ — два таких отношения; надо показать, что $E_1(a, b) \equiv E_2(a, b)$ истинно для любых объектов a, b из структуры.

В самом деле, согласно 2.1.2, полагая $E = E_1$, $A = E_2$ и используя 1.3.2, получим

$$E_1(a, a) \wedge E_1(a, b) \wedge E_2(a, a) \supset E_2(a, b).$$

Но $E_1(a, a)$ и $E_2(a, a)$ истинны по первому условию 2.1.1, отсюда истинно $E_1(a, b) \supset E_2(a, b)$; аналогично имеем $E_2(a, b) \supset E_1(a, b)$, а следовательно, $E_1(a, b) \equiv E_2(a, b)$, как и утверждалось. Заметим, что наравне с использованием правил вывода 1.3 для того, чтобы придать сгрогость доказательству типа, например, только что приведенного, вполне можно также на основании 1.5.3 рассуждать чисто интуитивно.

Вообще говоря, в дальнейшем будет удобно предполагать, что имеется лишь одно отношение равенства. Можно также предполагать, что $E(a, b)$ ложно всякий раз, когда a и b различны. В этом случае будем называть структуру *нормальной*. Любая ненормальная структура M может быть сведена к нормальной структуре M' заменой ее объектов классами эквивалентности, соответствующими отношению равенства, т. е. так, что элементы a и b принадлежат одному классу эквивалентности α, если $E(a, b)$ истинно в M. Таким образом, любое отношение $A(x_1, \ldots, x_n)$ считается истинным для объектов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из M' (т. е. для классов эквивалентности M), если для некоторых, и, следовательно, для всех элементов $a_1, \ldots, a_n$, принадлежащих соответственно $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $A(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M. Нетрудно проверить, что любое высказывание X, истинное в M, истинно также и в M'.

Две структуры назовем *подобными*, если они содержат одни и те же отношения. Пусть M и M' — подобные структуры. M называется *подструктурой* M', а M' — расширением M, если все объекты M лежат в M' и если для любого отношения $A(x_1, \ldots, x_n)$ и объектов $a_1, \ldots, a_n$ из M $A(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M' тогда и только тогда, когда оно истинно в M. Обозначать это обстоятельство будем посредством $M \subset M'$, как и в случае обычного включения.

Предположим теперь, что дано отношение равенства $E(x, y)$ в M и M', и $M \subset M'$. Приведенное выше определение не исключает возможности существования объекта a, принадлежащего M' и не принадлежащего M, такого, что $E(a, b)$ истинно в M' для некоторого b из M. Если это не происходит, то мы называем отношение включения между M и M' *нормальным*.

Пусть M — любая структура. Обозначим через $D^+(M)$ множество всех атомарных высказываний $A(a_1, \ldots, a_n)$, истинных в M, где A — отношение и $a_1, \ldots, a_n$ — индивиды этой структуры. Аналогично, множество всех высказываний вида $\sim A(a_1, \ldots, a_n)$, истинных в M, обозначим через $D^-(M)$. $D^+(M)$ и $D^-(M)$ назовем соответственно *положительной* и *отрицательной диаграммой* M. Наконец, множество $D(M) = D^+(M) \cup D^-(M)$ будем называть просто *диаграммой* M. Имеется простая, но важная

2.1.3. Теорема. *Пусть M и M' — две подобные структуры. M' является расширением M тогда и только тогда, когда M' является моделью $D(M)$ — диаграммы M.*

В формулировке теоремы подразумевается, что соответствие C, которое появляется при явном описании отношения между M' и $D(M)$, сводится просто к тождественному на индивидах из $D(M)$. Иными словами, объекты из $D(M)$ обозначают сами себя. Доказательство теоремы ввиду его очевидности опускается.

Взаимно однозначное соответствие C, относящее каждому индивиду и каждому отношению из структуры M индивид и отношение (того же порядка) из структуры M', называется *изоморфизмом*, если всякий раз, когда отношение истинно в M для некоторых индивидов из M, соответствующее отношение для соответствующих индивидов истинно в M', и наоборот. Если M и M' подобны, то будет предполагаться, что C отображает каждое отношение в него самого. В том случае, когда $M = M'$, изоморфизм называется автоморфизмом. Относительно двух структур говорят, что они *изоморфны*, если между ними можно установить изоморфизм.

Соответствие C между отношениями структур M и M', а также между объектами структуры M и *некоторыми* объектами структуры M' называется *гомоморфизмом*, если C взаимно однозначно на отношениях и каждый объект из M отображается в M' таким образом, что для любого отношения, истинного для объектов из M, соответствующее отношение для соответствующих объектов истинно в M'. M' называется *гомоморфным образом* M, если данный гомоморфизм есть отображение M *на* M', т. е. всякому объекту из M' соответствует объект из M.

Пусть K — множество высказываний, M — модель K и M' — структура, подобная и изоморфная M таким образом, что всем индивидам из M, которые встречаются в K, соответствуют при этом изоморфизме они сами. Тогда, как нетрудно видеть, M' также является моделью K.

2.2. Рассмотрение аксиоматических систем. Займемся теперь подробным рассмотрением аксиоматических систем для некоторых хорошо известных понятий алгебры. Необходимо заранее оговориться, что в терминологии, которой мы здесь придерживаемся, *аксиома* и *высказывание* являются синонимами, так что термин *«аксиома»* используется только лишь в целях удобства. Во многих случаях подробное описание аксиом бывает излишне, основной вопрос заключается в возможности или невозможности дать необходимую формулировку средствами языка L. В связи с этим очень важно, чтобы читатель научился без затруднений выяснять, формализуется ли данное неформальное утверждение или высказывание в языке узкого исчисления предикатов. Бывает, однако, что утверждению (или свойству), которое заранее не задано нужным образом, можно дать эквивалентную формулировку требуемыми средствами.

Все множества аксиом, которые в дальнейшем будут нами рассмотрены, содержат отношение равенства $E(x\ y)$. Под выражением «*аксиомы равенства*» мы будем понимать 2.1.1 и аксиому подстановочности 2.1.2, примененную к остальным отношениям из рассматриваемого множества. При описании аксиом мы оставляем в стороне все вопросы, связанные с их независимостью.

Используя двухместное отношение равенства $E(x, y)$ (читается «x равно y») и трехместное отношение $S(x, y, z)$ (читается «z — произведение x на y»), аксиоматизируем вначале понятие группы. При этой аксиоматизации объекты нам не понадобятся.

2.2.1. Аксиомы равенства (см. выше 2.1.1 и 2.1.2).

2.2.2. $\forall x \forall y \exists z S(x, y, z)$

$\forall x \forall y \forall z \forall w [S(x, y, z) \wedge S(x, y, w) \supset E(z, w)]$

$\forall x \forall y \forall z \forall t \forall u \forall v [S(x, y, z) \wedge S(z, t, u) \wedge \wedge S(y, t, v) \supset S(x, v, u)]$

$\exists x \forall y \exists z [S(x, y, y) \wedge S(z, y, x)]$.

Аксиомы 2.2.2 дают соответственно существование произведения, его единственность, ассоциативность и существование левой единицы так, что для каждого элемента имеется обратный (слева). Множество аксиом 2.2.1 и 2.2.2 обозначается K_G. В отличие от K_G, мы будем также рассматривать множество K'_G, получаемое введением предметной постоянной e и заменой последней аксиомы 2.2.2 высказыванием

2.2.3. $\forall y \exists z [S(e, y, y) \wedge S(z, y, e)]$.

Для того чтобы получить множество аксиом, характеризующих абелеву (коммутативную) группу, добавим к K_G и K'_G аксиому

2.2.4. $\forall x \forall y \forall z [S(x, y, z) \supset S(y, x, z)]$,

обозначая полученные множества соответственно K_{AG} и K'_{AG}.

Для аксиоматического описания понятия упорядоченной абелевой группы введем новое бинарное отношение $Q(x, y)$ (читается «x меньше или равно y»), добавляя к K_{AG} и K'_{AG} следующие аксиомы:

2.2.5. $\forall x \forall y \forall z \forall w [E(x, y) \wedge E(z, w) \wedge Q(x, z) \supset Q(y, w)]$,

2.2.6. $\forall x \forall y \forall z [Q(x, y) \wedge Q(y, z) \supset Q(x, z)]$

$\forall x \forall y [Q(x, y) \vee Q(y, x)]$

$\forall x \forall y [[Q(x, y) \wedge Q(y, x)] \equiv E(x, y)]$

$\forall x \forall y \forall z \forall w [S(x, y, z) \wedge S(x, v, w) \wedge \wedge Q(y, v) \supset Q(z, w)]$.

2.2.5 есть просто аксиома подстановочности для отношения $Q(x, y)$. Читателю не представит никакого труда аналогичным образом проинтерпретировать аксиомы

2.2.6. Полученные множества аксиом будут обозначаться соответственно K_{OAG} и K'_{OAG}. Хотя в настоящем случае и можно исключить отношение равенства как основное отношение, определяя его через $Q(x, y)$, мы, однако, не находим это целесообразным.

Введем теперь множество аксиом K_R, характеризующих понятие кольца. Нам потребуется при этом одно двухместное отношение — отношение равенства $E(x, y)$ и два трехместных отношения $S(x, y, z)$ и $P(x\ y, z)$ (первое интерпретируется как «$x+y=z$», второе — как «$xy=z$») (индивиды не используются). K_R по определению состоит из аксиом равенства для отношений K_R, высказываний 2.2.2 и 2.2.4 и следующих аксиом:

2.2.7. $\forall x \forall y \exists z\, P(x, y, z)$

$$\forall x \forall y \forall z \forall w [P(x, y, z) \wedge P(x, y, w) \supset E(z, w)]$$

$$\forall x \forall y \forall z \forall t \forall u \forall v [P(x, y, z) \wedge P(z, t, u) \wedge \wedge P(y, t, v) \supset P(x, v, u)]$$

$$\forall x \forall y \forall z \forall t \forall u \forall v \forall w [S(x, y, z) \wedge P(z, t, u) \wedge \wedge P(x, t, v) \wedge P(y, t, w) \supset S(v, w, u)]$$

$$\forall x \forall y \forall z \forall t \forall u \forall v \forall w [S(x, y, z) \wedge \wedge P(t, z, u) \wedge P(t, x, v) \wedge P(t, y, w) \supset S(v, w, u)].$$

Первые три аксиомы выражают соответственно существование, единственность и ассоциативность произведения, а последние две — закон дистрибутивности. Множество высказываний, описывающих понятие коммутативного кольца, получается из K_R добавлением закона коммутативности умножения,

2.2.8. $\forall x \forall y \forall z [P(x, y, z) \supset P(y, x, z)]$.

Множество аксиом, характеризующих понятие тела, является объединением K_R и

2.2.9. $\exists x \exists y [\sim E(x, y)]$

$$\forall x \forall y \exists z [S(x, x, x) \vee P(x, z, y)]$$

$$\forall x \forall y \exists z [S(x, x, x) \vee P(z, x, y)].$$

Первая из этих аксиом требует, чтобы наша структура содержала по крайней мере два различных индивида. Вторая аксиома дает разрешимость уравнения $xz=y$ для любого y и любого $x \neq 0$. Отметим, что предикат $S(x, x, x)$ был использован нами в качестве характеристического свойства 0. Можно, конечно, избежать этой несколько искусственной формулировки, вводя специальный символ для 0 из L. Третья аксиома 2.2.9 дает разрешимость $zx = y$ для любого y и любого $x \neq 0$. Объединяя K_F и 2.2.8, получим множество аксиом, описывающих (коммутативное) поле.

Формализуем теперь понятие характеристики поля. Для этой цели введем вначале рекурсивное определение предикатов $S_n(x, y)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.2.10. $S_0(x, y) = S(y, y, y)$

$S_n(x, y) = \exists z[S_{n-1}(x, z) \wedge S(z, x, y)]$, $n = 1, 2, \ldots$

В первой строке этого определения $S(y, y, y)$ снова использовался нами для того, чтобы характеризовать 0, нейтральный элемент для сложения. Заметим, что в записи $S_0(x\ y)$ мы употребили переменную x, хотя она и не присутствовала в правой стороне равенства. Впрочем, при желании, x можно ввести и в явном виде, взяв конъюнкции с $E(x, x)$. Предикат $S_n(x, y)$ интерпретируется как $y = nx$ (т. е. y есть результат n-кратного сложения x с самим собой). Следовательно, тот факт, что $nx = 0$ для любого x, может быть выражен высказыванием

2.2.11. $X_n = \forall x \forall y[S_n(x, y) \supset S(y, y, y)]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Таким образом, множество аксиом поля характеристики p (p — простое число), обозначаемое K_F^p, получается присоединением X_p к K_{CF}. С другой стороны, аксиоматика K_F^0, поля характеристики 0, есть объединение множества K_{CF} и множества высказываний

2.2.12. $\{\sim X_2, \sim X_3, \sim X_5, \ldots, \sim X_p, \ldots\}$,

где p пробегает все простые числа. K_F^0 — первое из всех рассмотренных нами множеств аксиом, которое содержит бесконечное число высказываний. Возникает естественный вопрос: можно ли найти эквивалентное ему множество, которое, однако, конечно. Ответ на это будет впоследствии дан теоремой 2.4.5.

Аксиомы поля (данной характеристики) можно видоизменить, введя две предметные постоянные 0 и 1 (как правило, обозначающие соответственно нейтральные элементы для сложения и умножения). Применяя эти символы, мы заменим последнюю аксиому 2.2.2 аксиомой

2.2.13. $\forall y \exists z [S(0, y, y) \wedge S(z, y, 0)]$

и высказывания 2.2.9 — высказываниями

2.2.14. $\sim E(0, 1)$

$\forall x \exists y [E(x, 0) \vee P(x, y, 1)]$,

принимая во внимание, что 2.2.8 также входит в наши аксиомы. Определение $S_0(x, y)$ из 2.2.10 можно теперь записать следующим образом:

2.2.15. $S_0(x, y) = E(y, 0)$.

Полученные множества высказываний, в отличие от K_{CF}, K_F^p, $p=0, 2, 3, 5, \ldots$, обозначим K'_{CF}, $K_F^{(p)}$. В дальнейшем мы редко будем пользоваться K_{CF} и K_F^p, предпочитая им K'_{CF} и $K_F^{(p)}$.

Множество аксиом K_{OF} упорядоченного поля можно построить, например, добавляя к K'_{CF} некоторое число аксиом, использующих отношение $Q(x, y)$ (читается, как и прежде, «x меньше или равно y»), а именно 2.2.5, 2.2.6 и

2.2.16. $\forall x \forall y \forall z [P(x, y, z) \wedge Q(0, x) \wedge Q(0, y) \supset Q(0, z)]$.

Постараемся теперь формализовать понятие архимедова (упорядоченного) поля. Аксиома Архимеда утверждает, что для любого положительного числа x и любого y найдется целое число $n \geqslant 1$ такое, что $nx \geqslant y$ (nx обозначает сумму $x + x + \ldots + x$ (n раз)). Используя 2.2.10, можно записать неравенство $nx \geqslant y$ в виде предиката

2.2.17. $Q_n(x, y) = \exists z [S_n(x, z) \wedge Q(y, z)]$.

С помощью бесконечной дизъюнкции, упомянутой в конце раздела 1.4, аксиома Архимеда записывается следующим образом:

2.2.18. $\forall x \forall y [E(0, x) \vee \sim Q(0, x) \vee Q_1(x, y) \vee$

$\vee Q_2(x, y) \vee \ldots \vee Q_n(x, y) \vee \ldots]$.

K_{OF} вместе с 2.2.18 и дает множество K_{AF} аксиом архимедова поля. Однако 2.2.18 не является высказыванием узкого исчисления предикатов в смысле определений гл. I, и потому встает вопрос о замене K_{AF} множеством аксиом, заданных целиком в терминах языка L. Ответ на это будет дан теоремой 2.4.22.

Приступим теперь к аксиоматизации понятия алгебраически замкнутого поля. Вначале мы определим предикаты $P_n(x, y)$, $n=0, 1, 2, \ldots$ так:

2.2.19. $P_0(x, y) = E(y, 1)$

$$P_n(x, y) = \exists z[P_{n-1}(x, z) \wedge P(z, x, y)], \quad n=1, 2, \ldots$$

Как легко видеть, $P_n(x, y)$ соответствует операции возведения в n-ю степень: $y=x^n$.

Соотношение

2.2.20. $x_0+x_1y+\ldots+x_ny^n=z$

выражается предикатом T_n от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и z:

2.2.21. $T_n(x_0, \ldots, x_n, y, z) = \exists u_0 \exists u_1 \ldots \exists u_n \exists v_0 \exists v_1 \ldots$

$$\ldots \exists v_n \exists w_1 \ldots \exists w_{n-1}[P_0(y, u_0) \wedge P_1(y, u_1) \wedge P_2(y, u_2) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge P_n(y, u_n) \wedge P(x_0, u_0, v_0) \wedge P(x_1, u_1, v_1) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge P(x_n, u_n, v_n) \wedge S(v_0, v_1, w_1) \wedge S(w_1, v_2, w_2) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge S(w_{n-2}, v_{n-1}, w_{n-1}) \wedge S(w_{n-1}, v_n, z)].$$

2.2.21 может рассматриваться как корректная формализация 2.2.20, за исключением некоторых очевидных модификаций при $n \leqslant 2$. Окончательно, для получения множества аксиом алгебраически замкнутого поля $\overline{K}_{CF}$ присоединим к K_{CF} последовательность аксиом

2.2.22. $\forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_{n-1} \exists y T_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 1, y, 0)$,

$$n=2, 3, \ldots$$

2.2.22, таким образом, утверждает, что произвольный унитарный многочлен *) степени n имеет по крайней мере один корень. Для получения множества аксиом $\overline{K}_F^{(p)}$, характеризующих понятие алгебраически замкнутого

*) Унитарным многочленом называют многочлен, старший коэффициент которого равен единице. *(Прим. перев.)*

поля характеристики p, присоединим к $K_F^{(p)}$, $p \geqslant 0$, аксиому 2.2.22.

Формально вещественное поле определяется как поле, в котором сумма квадратов отличных от 0 элементов не равна 0 *). Это условие можно записать в виде следующей последовательности аксиом:

2.2.23. $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n \forall z_2 \ldots$
$\ldots \forall z_{n-1}[P(x_1, y_1) \wedge P_2(x_2, y_2) \wedge \ldots \wedge P_2(x_n, y_n) \wedge$
$\wedge S(y_1, y_2, z_2) \wedge S(z_2, y_3, z_3) \wedge \ldots \wedge S(z_{n-2}, y_{n-1}, z_{n-1}) \wedge$
$\wedge S(z_{n-1}, y_n, 0) \supset E(x_1, 0) \wedge E(x_2, 0) \wedge \ldots \wedge E(x_n, 0)],$
$n = 2, 3, \ldots$

Объединяя 2.2.23 и K'_{CF}, получим требуемое множество аксиом K_{RF}, описывающих формально вещественное поле. Упорядоченное поле необходимо является формально вещественным. Поле называется вещественно замкнутым, если само оно формально вещественно, однако никакое его алгебраическое расширение уже не формально вещественно. Непосредственно это определение нельзя выразить средствами узкого исчисления предикатов. Однако известно, что упорядоченное поле F вещественно замкнуто, если каждый унитарный многочлен с коэффициентами в F нечетной степени обладает корнем, и из каждого положительного элемента извлекается в F квадратный корень **). В таком виде это понятие формализуется множеством аксиом $\overline{K}_{OF}$, которое получается присоединением к K_{OF}, $n = 3, 5, 7, \ldots$, аксиом 2.2.21 и

2.2.24. $\forall x \exists y[Q(0, x) \supset P(y, y, x)]$.

В вещественно замкнутом упорядоченном поле элемент неотрицателен тогда и только тогда, когда из него извлекается квадратный корень. В связи с этим истинно

*) Иногда формально вещественное поле определяют как поле, в котором -1 не представимо в виде суммы квадратов. Оба определения, разумеется, эквивалентны. *(Прим. перев.)*

**) Требование упорядоченности не накладывает существенных ограничений на вещественно замкнутое поле, так как известно, что любое вещественно замкнутое поле можно упорядочить и притом единственным способом. *(Прим. перев.)*

следующее высказывание (в любой модели $\overline{K}_{OF}$):

2.2.25. $\forall x \forall y [Q(x, y) \equiv [\exists z \exists w [S(x, z, y) \wedge P(w, w, z)]]]$.

Поэтому при желании можно заменить $Q(x, y)$ в аксиомах $\overline{K}_{OF}$ предикатом $\exists z \exists w [S(x, z, y) \wedge P(w, w, z)]$. В результате получается множество аксиом $\overline{K}_{RF}$ вещественно замкнутого поля, не содержащее отношение порядка в качестве основного понятия.

В будущем мы не всегда будем давать подробные описания аксиом рассматриваемых понятий. Читателю не составит особого труда восполнить все необходимые пробелы.

Вместо того, чтобы иметь в виду какое-то определенное множество аксиом некоторого понятия (или некоторой теории), нам иногда будет удобнее работать с «произвольным множеством аксиом». Так как последняя фраза выглядит несколько неопределенной, читатель может понимать ее как «некоторое множество аксиом, указанное ранее для данного понятия (или данной теории)». Мы будем тогда говорить, что понятие (или теория) как таковое обладает определенными свойствами, например «рассматриваемое понятие (или теория) непротиворечиво». При таком подходе смысл наших результатов (например, 4.2.14 и 4.2.25; см. ниже), становится интуитивно более ясным. Кроме того, иногда в соответствии с общим употреблением мы будем обращаться с объектами структуры просто как с ее элементами.

2.3. Связанные множества высказываний. В предыдущем разделе в отдельных случаях нами были введены различные множества аксиом, соответствующие интуитивно одинаковым понятиям. Такие множества, следовательно, взаимозаменяемы в некотором интуитивном, но определенном смысле. Последующие построения преследуют цель дать более точное выражение этим связям.

Под *словарем* множества высказываний K мы будем понимать всю совокупность объектов и отношений, встречающихся в K; подобное определение принимается также для множества ппф (или одной ппф). Мы скажем, что ппф X *определена* в множестве K, если словарь X содержится в словаре K. Два множества высказываний K

и K' мы назовем *эквивалентными*, если высказывания в K' выводимы из K и наоборот, т. е. используя введенную ранее символику (раздел 1.3), $K \vdash K'$ и $K' \vdash K$. В частности, если у K и K' один и тот же словарь, то они эквивалентны в том и только в том случае, когда многообразия их высказываний совпадают.

Два множества высказываний K и K' будут называться *связанными*, если существует взаимно однозначное соответствие между объектами a из K и объектами a' из K'; $a \longleftrightarrow a'$, между отношениями A из K и некоторыми предикатами R', определенными в K': $A \longleftrightarrow R'$, и, наконец, между отношениями A' из K' и некоторыми предикатами R, определенными в K': $A' \longleftrightarrow R$, так, что отношения порядка n соответствуют предикатам точно с n свободными переменными и выполняются следующие условия 2.3.1 и 2.3.2:

2.3.1. Если в любом высказывании $X \in K$ заменить объекты соответствующими объектами из K', а отношения — соответствующими предикатами из K' (или, точнее, определенными в K'), то полученное высказывание X' выводимо из K'. Аналогично, если в любом высказывании $X' \in K'$ заменить объекты и отношения соответствующими объектами и предикатами из K, то полученное высказывание X выводимо из K.

2.3.2. Пусть $A(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольное отношение из словаря K и пусть $R'(x_1, \ldots, x_n)$ — соответствующий предикат из K'. Пусть $R(x_1, \ldots, x_n)$ есть результат замены объектов и отношений, входящих в K', соответствующими отношениями и предикатами из K. Тогда

$$K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [A(x_1, \ldots, x_n) \equiv R(x_1, \ldots, x_n)].$$

Аналогичное условие выполняется для отношений из K'.

Рассмотрим в качестве примера множество K'_{OAG} аксиом упорядоченной абелевой группы, записанных с помощью отношений E (равенство), S (сложение или умножение), Q (порядок) и предметной постоянной e (нейтральный элемент групповой операции). Обозначим через K^* множество высказываний, полученное вычеркиванием из K'_{OAG} аксиом, содержащих Q (2.2.5, 2.2.6), и введением одноместного отношения $P(x)$ (читается

«x неотрицательно»), удовлетворяющего следующим аксиомам:

$$
\begin{aligned}
\textbf{2.3.3.}\quad & \forall x \forall y [E(x, y) \wedge P(x) \supset P(y)] \\
& \forall x \forall y [S(x, y, e) \supset P(x) \vee P(y)] \\
& \forall x \forall y [S(x, y, e) \wedge P(x) \wedge P(y) \supset E(x, e)] \\
& \forall x \forall y \forall z [S(x, y, z) \wedge P(x) \wedge P(y) \supset P(z)].
\end{aligned}
$$

Таким образом, множество K^* есть объединение 2.3.3 и K'_{AG}. Легко проверить, что K^* связано с K'_{OAG} через соответствие, отображающее E, S, e в них самих, $Q(x, y)$ из K'_{OAG} — в предикат

$$\exists z [S(x, z, y) \wedge P(z)],$$

определенный в K^*, а $P(x)$ — в предикат $Q(e, x)$. Условия 2.3.1 и 2.3.2, как нетрудно проверить, при этом выполняются. Так, например, 2.3.2 при $A = Q$ превращается в высказывание

$$\forall x \forall y [Q(x, y) \equiv [\exists z [S(x, z, y) \wedge Q(e, z)]]],$$

которое действительно выводимо из K'_{OAG}.

Пусть X — любое высказывание, определенное в K, и пусть K' связано с K. Заменим в X объекты и отношения соответствующими объектами и отношениями из K'. В результате мы получим высказывание X', определенное в K'. Аналогичная процедура, примененная к X', дает высказывание X'', определенное в K. Хотя X'', вообще говоря, не совпадает с X, нетрудно заметить, что $X \equiv X''$ выводимо из K. Кроме того, $K \vdash X$ в том и только в том случае, когда $K' \vdash X'$. Это показывает, что два связанных множества могут быть противоречивы только одновременно.

Введенное нами понятие оказывается еще недостаточным для целого ряда возникающих вопросов. Так, пример K_G и K'_G показывает, что два множества могут описывать одно и то же понятие в то время, как одно из них содержит индивиды, а другое — нет. Ввиду сказанного мы вводим следующее определение.

Пусть K и K' — два множества высказываний, включающие отношение равенства $E(x, y)$, такие, что словарь K содержится в словаре K', а все отношения из K' принадлежат также и K. K будем тогда называть *сокращением* K', если $K' \vdash K$ и если для каждого индивида a, который встречается в K' и не встречается в K, существует предикат $Q_a(x)$, определенный в K, такой, что $Q_a(a)$ выводимо из K', а высказывание

2.3.4. $[\exists x Q_a(x)] \wedge [\forall x \forall y [Q_a(x) \wedge Q_a(y) \supset E(x, y)]]$

выводимо из K. Кроме того, если в $X = X(a, b, \ldots, c) \in K'$ имеются объекты $a, b, \ldots, c$, не входящие в словарь K, то высказывание

2.3.5. $\exists y \exists z \ldots \exists w [X(y, z, \ldots, w) \wedge Q_a(y) \wedge Q_b(z) \wedge \ldots$
$\ldots \wedge Q_c(w)]$

выводимо из K. (Если таких объектов в X нет, то предыдущее высказывание сводится просто к X.)

Можно показать, что любая модель K' является также моделью K. Обратно, модель M множества K будет моделью K', если мы установим общее соответствие между объектами M и предметными символами K', т. е. если мы возвращаемся к нашему первоначальному предположению о том, что предметные символы из K' и соответствующие объекты из M не обязательно отождествляются.

Множество K_G аксиом группы является, таким образом, сокращением множества K'_G. Предикат $Q_e(x)$, соответствующий объекту e в K'_G, можно определить, например, как $S(x, x, x)$.

Мы скажем, что множества K и K' *потенциально эквивалентны*, если они обладают связанными сокращениями. Хотя эти определения и не исчерпывают всей поставленной проблемы, они дают формальный аппарат, который может быть применен в более общих ситуациях, подобных тем, что мы рассматривали в этом разделе.

2.4. Теоремы вложения и принцип переноса. Теорема о полноте в широком смысле для узкого исчисления предикатов (см. 1.5.4) и эквивалентные ей теоремы дают мощные средства для решения некоторых классов алгебраических проблем.

Пусть M — структура и K — такое множество высказываний, что словарь K и словарь (т. е. множества отношений и объектов) M могут пересекаться, но не обязательно совпадают. Мы ставим вопрос: можно ли *вложить* M в некоторую модель M' множества K. Под этим понимается, что M' — модель K, если игнорировать отношения M', не лежащие в K, и M' есть расширение M, если игнорировать отношения M', не принадлежащие M. Имеет место простой, но фундаментальный результат.

2.4.1. Теорема. *Структура M может быть вложена в модель множества K в том и только в том случае, когда каждая конечная подструктура структуры M вкладывается в модель K.*

Любую конечную подструктуру в M можно получить, беря некоторое конечное подмножество M' множества объектов M и считая, по определению, что произвольное отношение из M истинно для элементов из M' тогда и только тогда, когда оно истинно для них в структуре M (ср. с разделом 2.1). Кратко будем говорить, что так полученная структура есть *ограничение* M на M'. Для того чтобы произвольная структура была расширением M, необходимо и достаточно, чтобы она являлась моделью $D(M)$ — диаграммы M. Следовательно, согласно 1.5.4 искомая структура существует при условии непротиворечивости $K \cup D(M)$. Предположим, что $K \cup D(M)$ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество $K \cup D(M)$. Отсюда следует противоречивость множества $K \cup D^*$, где D^* — некоторое конечное подмножество $D(M)$. Число элементов M, содержащихся в D^*, конечно, а потому они образуют конечную подструктуру $M^* \subset M$ в том смысле, как это разъяснялось выше. D^* содержится в $D(M^*)$ — диаграмме M^*, и поэтому $K \cup D(M^*)$ противоречиво. Это, однако, не согласуется с нашим предположением о том, что каждая конечная подструктура из M имеет некоторую модель K своим расширением. Следовательно, $K \cup D(M)$ непротиворечиво и теорема доказана.

Применяя 2.4.1, получаем, например, следующее утверждение.

2.4.2. Теорема. *Пусть R — кольцо. Если каждое его конечно порожденное подкольцо вкладывается в тело, то R также может быть вложено в тело.*

Доказательство. Пусть R^* — конечное множество элементов R; рассмогрим ограничение R на R^* в определенном ранее смысле. Полученную структуру, не опасаясь недоразумений, мы снова обозначим R^*. R^* не обязательно является кольцом, но пересечение всех подколец кольца R, содержащих R^*, есть кольцо R_1, являющееся конечно порожденным, так как оно порождено элементами R^*. По условию теоремы R_1 может быть вложено в тело и го же самое, очевидно, справедливо для R^*, которое лежит в R_1. Понятие тела формализуется в узком исчислении предикатов (например, посредством множества высказываний K_F). Истинность теоремы есть теперь прямое следствие 2.4.1.

С некоторыми видоизменениями получается также

2.4.3. Теорема. *Если каждая конечно порожденная подгруппа группы G может быть линейно упорядочена, то и сама группа G может быть линейно упорядочена.*

Доказательство. Вначале мы определим множество аксиом для понятия линейно упорядоченной группы (не обязательно абелевой). Требуемое множество K_{OG} получается удалением 2.2.4 из K_{OAG} и заменой четвертой аксиомы из 2.2.6 высказыванием

$$\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [S(x, y, z) \wedge S(u, v, w) \wedge Q(x, u) \wedge \wedge Q(y, v) \supset Q(z, w)].$$

Рассуждение, использованное при доказательстве предыдущей теоремы, показывает, что G может быть вложена в модель K_{OG}, т. е. в линейно упорядоченную группу G'. Но линейный порядок в G' индуцирует порядок в G, который также является линейным, что и доказывает 2.4.3.

Основой всех наших последующих результатов является то обстоятельство, что использование формального языка дает возможность делать некоторые утверждения о целых классах теорем там, где математические «условности» позволяют работать лишь с индивидуальными теоремами. В частности, иногда удается показать, что всякая теорема из некоторого класса, истинная для одного типа математических структур, истинна также и для другого типа. Результат подобного рода мы будем называть *принципом переноса*. Например, классический принцип двойственности в проективной геометрии может рассматриваться как метатеорема такого типа. Однако логический характер этого принципа настолько прост, что не нуждается в детальной формализации.

Мы будем говорить, что бесконечная последовательность высказываний Y_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, сформулированных в языке L (узкого исчисления предикатов, как обычно), образует *возрастающую цепь*, обозначая это

$$\ldots Y_{n+1} \supset Y_n \supset \ldots \supset Y_2 \supset Y_1,$$

если $Y_n \supset Y_m$ есть теорема для всех $n \geqslant m$. Заметим, однако, что введенное нами выражение $\ldots Y_n \supset \ldots \supset Y_1$ не принадлежит языку L.

Возрастающая цепь будет называться строго возрастающей, если $Y_n \supset Y_m$ есть теорема только для $n \geqslant m$.

2.4.4. Теорема. *Пусть K — множество высказываний $Y_1, Y_2, \ldots$, образующих строго возрастающую цепь. Тогда не существует высказывания Y, эквивалентного K, т. е. такого, что $K \vdash Y$ и $Y \vdash K$.*

Доказательство. Пусть, наоборот, для некоторого Y имеет место $K \vdash Y$ и $Y \vdash K$. В этом случае Y выводимо из конечного подмножества $K' \subset K$, $K' = \{Y_i, Y_j, \ldots, Y_l\}$, где индексы $i, j, \ldots, l$ записаны в их естественном порядке. Так как $Y_l \supset Y_m$ — теорема для всех $m < l$, то, в частности, имеем $Y_l \supset Y_i$, $Y_l \supset Y_j$ и т. д. Следовательно, Y выводимо из одного Y_l, т. е. $Y_l \supset Y$ — теорема. (Если K' пусто, то Y — теорема, и мы для определенности положим $l=1$.) С другой стороны, $Y \vdash K$ и потому, в частности, $Y \vdash Y_{l+1}$, т. е. $Y \supset Y_{l+1}$ — теорема в L. Отсюда следует, что $Y_l \supset Y_{l+1}$ также является теоремой, вопреки предположению о том, что Y_n образуют строго возрастающую цепь.

2.4.5. Теорема. *Понятие поля нулевой характеристики не может быть формализовано конечным числом аксиом средствами узкого исчисления предикатов. Точнее, не существует конечного множества, эквивалентного K^0_{CF} или $K^{(0)}_{CF}$.*

Доказательство. Если рассматриваемое понятие формализуется конечным числом аксиом, то, взяв их конъюнкцию, можно заменить их единственной аксиомой Y. Используя обозначения 2.2.11, мы определим высказывание Y_1 как конъюнкцию высказываний из K_{CF} или K'_{CF}, а затем положим $Y_2 = Y_1 \wedge \sim X_2$, $Y_3 = Y_2 \wedge \sim X_3$, ..., $Y_n = Y_{n-1} \wedge \sim X_{p_{n-1}}$, где p_n — n-е простое число: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ и т. д. Y_n утверждает, что рассматриваемая структура является полем с характеристикой $p \geqslant p_n$ или равной 0. Последовательность Y_1, Y_2, ... является возрастающей цепью, так как $Y_n \supset Y_{n-1}$ или, что то же самое, $\left[Y_{n-1} \wedge \sim X_{p_{n-1}}\right] \supset Y_{n-1}$ является теоремой для $n = 2, 3, \ldots$ Более того, эта последовательность строго возрастающая, так как для любого $n \geqslant 1$ поля характеристики p_n удовлетворяют Y_n и не удовлетворяют Y_m при $m > n$. Отсюда следует, что $Y_n \supset Y_m$ не может быть теоремой для $m > n$. Пусть $K = \{Y_1, Y_2, \ldots\}$. Тогда все модели K — это в точности поля нулевой характеристики, другими словами, K эквивалентно K^0_{CF} или $K^{(0)}_{CF}$. Отсюда следует, что K^0_{CF} и $K^{(0)}_{CF}$ не могут быть эквивалентны одному высказыванию, так как иначе то же самое было бы справедливо и для K, а это ввиду 2.4.4 приводит к противоречию.

Чуть более простые рассуждения дают следующий принцип переноса:

2.4.6. Теорема. *Пусть высказывание X, сформулированное в терминах равенства, сложения и умножения, истинно в любом поле характеристики 0. Тогда X истинно также в любом поле характеристики $p > p_0$, где p_0 — целое положительное число, зависящее от X.*

Доказательство. Так как X выводимо из $K^0_{CF} = K_{CF} \cup \{\sim X_2, \sim X_3, \sim X_5, \ldots\}$, то оно должно быть выводимо из K_{CF} и некоторого конечного подмножества $K' \subset \{\sim X_2, \sim X_3, \sim X_5, \ldots\}$. Пусть p_0 — наибольший из индексов высказываний, принадлежащих K' (если K' пусто, то положим $p_0 = 1$). Тогда все поля характеристики $p > p_0$ удовлетворяют $K_{CF} \cup K'$ и тем самым удовлетворяют X.

Продемонстрируем чисто алгебраическое применение теоремы 2.4.6.

Для любого многочлена $q(x_1, \ldots, x_n)$ с целыми рациональными коэффициентами обозначим через $q^{(p)}(x_1, \ldots, x_n)$ соответствующий многочлен с коэффициентами в простом поле характеристики p, т. е. многочлен, получающийся из $q(x_1, \ldots, x_n)$ редукцией коэффициентов по модулю p.

2.4.7. Теорема. *Если система полиномиальных уравнений с целыми коэффициентами*

2.4.8. $$q_1(x_1, \ldots, x_n)=0, \quad q_2(x_1, \ldots, x_n)=0, \quad \ldots, \quad q_k(x_1, \ldots, x_n)=0$$

не имеет решения в любом расширении поля рациональных чисел, то существует целое положительное число p_0, зависящее от данной системы, такое, что совокупность уравнений

2.4.9. $$q_1^{(p)}(x_1, \ldots, x_n)=0, \quad q_2^{(p)}(x_1, \ldots, x_n)=0, \quad \ldots, \quad q_k^{(p)}(x_1, \ldots, x_n)=0$$

не имеет решения в любом поле характеристики $p>p_0$.

Для того чтобы свести 2.4.7 к 2.4.6, построим вначале для любого многочлена $q(x_1, \ldots, x_n)$ с целыми коэффициентами предикат $Q_q(x_1, \ldots, x_n, y)$, который содержит отношения E, S, P, не содержит никаких объектов и выражает тот факт, что $y=q(x_1, \ldots, x_n)$ в любом поле характеристики 0. Такой предикат легко конструируется и даже не единственным способом. Можно, однако, так естественно выбрать Q_q, что этот же самый предикат выражает равенство $y=q^{(p)}(x_1, \ldots, x_n)$ в любом поле характеристики p, где p — произвольное простое число. Например, $y=3x^2$ может быть выражено в виде $Q_q(x, y) = \exists z[P(x, x, z) \wedge S_3(z, y)]$. Это же выражение Q_q может быть интерпретировано, например, в любом поле характеристики 2 как утверждение о том, что $y=3x^2$ или, что то же самое, $y=x^2$. Условие теоремы 2.4.7 означает, таким образом, что для многочленов $q_1, \ldots, q_k$ высказывание

$$X = \forall x_1 \ldots \forall x_n [\sim [Q_{q_1}(x_1, \ldots, x_n, 0) \wedge \ldots \wedge Q_{q_k}(x_1, \ldots, x_n, 0)]]$$

истинно в произвольном поле характеристики 0. Отсюда согласно 2.4.6 вытекает, что X истинно в любом поле характеристики $p>p_0$, где p_0 есть, следовательно, целое положительное число, зависящее от X. Но в таком поле истинность X как раз и выражает тот факт, что система 2.4.9 не имеет решения.

Математическое доказательство 2.4.7 проводится следующим образом. Если 2.4.8 не имеет решения в произвольном расширении поля рациональных чисел, то существуют многочлены $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)$ с рациональными коэффициентами, такие, что

$$f_1q_1+f_2q_2+\ldots+f_kq_k=1.$$

Умножая это равенство на подходящее целое число a, получим соотношение вида

$$g_1q_1+g_2q_2+\ldots+g_kq_k=a,$$

где $g_1, \ldots, g_k$ — многочлены с целыми коэффициентами. Пусть p_0 — наибольший простой делитель a. Тогда при $p>p_0$ имеем

$$g_1q_1+g_2q_2+\ldots+g_kq_k\not\equiv 0 \pmod p,$$

что и доказывает неразрешимость 2.4.9 в поле характеристики p. Таким образом, хотя математическое доказательство 2.4.7 было несложным, оно использовало некоторые алгебраические результаты, которые не потребовались при метаматематическом доказательстве *). Впрочем, нетрудно заменить 2.4.7 более общим результатом, чисто математическое доказательство которого, по-видимому, не столь просто, следующим образом.

Мы будем называть два решения системы 2.4.8 разными, если они отличаются по меньшей мере одним x_i, $i=1, \ldots, n$. Имеет место следующая

2.4.10. Теорема. *Если система полиномиальных уравнений 2.4.8 имеет не более m различных решений в любом поле нулевой характеристики, то эта система может иметь не более m различных решений в любом поле характеристики $p>p_0$, где p_0 зависит от данного множества многочленов.*

---

*) А именно, использовалась теорема Гильберта о нулях полиномов. *(Прим. перев.)*

Доказательство теоремы такое же, как для 2.4.7, и сводится, в сущности, к формализации утверждения «2.4.8 имеет не более m различных решений».

Теорему 2.4.6 можно варьировать несколькими способами, например, заменяя «поле» на «тело» или на «алгебраически замкнутое поле». При интерпретации этого результата для тела мы можем рассматривать полиномы, переменные которых не обязательно перестановочны.

Рассмотрим теперь область целостности R с единицей, каждый (ненулевой) элемент которой содержится в конечном числе простых идеалов из R. Примеры таких колец доставляются кольцами целых алгебраических чисел из любого конечного расширения поля рациональных чисел. Пусть X — произвольное высказывание, сформулированное в терминах равенства, сложения, умножения и элементов R. Имеет место

2.4.11. Теорема. *Пусть высказывание X, описанное выше, истинно в любом поле, которое является расширением R. Тогда для всех простых идеалов J из R, за исключением конечного числа, X истинно в любом поле, являющемся расширением фактор-кольца R/J.*

Доказательство. Обозначим через $D(R)$ диаграмму R. Условие теоремы означает, что X истинно в произвольной модели $K'_{CF} \cup D(R)$ и, следовательно, что X выводимо из этого множества. Поэтому существует конечное подмножество элементов из $D(R)$, скажем, $Y_1, \ldots, Y_k$, такое, что $Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_k \supset X$ выводимо из K'_{CF}. Высказывания Y_j, как легко видеть, имеют одну из следующих шести форм:

$$E(a, b),\ S(a, b, c),\ P(a, b, c),\ \sim E(a, b),\ \sim S(a, b, c),\ \sim P(a, b, c).$$

Мы можем исключить высказывания вида $\sim S(a, b, c)$, вводя элемент d, удовлетворяющий $S(a, b, d)$ в R, и заменяя $\sim S(a, b, c)$ на $S(a, b, d)$ и $\sim E(c, d)$. Высказывания типа $\sim P(a, b, c)$ исключаются таким же способом. Аналогично любое высказывание вида $\sim E(a, b)$ можно заменить на $\sim E(c, 0)$ и $S(a, c, b)$, где $c = b - a$ в R. Учитывая эти редукции, мы можем предполагать, что Y_j имеют одну из следующих четырех форм:

$$E(a, b),\ S(a, b, c),\ P(a, b, c),\ \sim E(c, 0).$$

Так как всех Y_j конечное число, то имеется лишь конечный набор индивидов $c_1, \ldots, c_m$, таких, что высказывания $\sim E(c_i, 0)$ содержатся среди Y_j. По предположению 2.4.11, множество простых идеалов, содержащих хотя бы один из элементов c_i, конечно. Мы хотим показать, что для всякого простого идеала J, не содержащегося в этом множестве, X истинно в любом поле F, которое является расширением R/J. Поскольку $Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_k \supset X$ выводимо из K_{CF}, мы должны лишь показать, что $Y_1, \ldots, Y_k$ истинны в F, а так как эти высказывания не содержат кванторов и переменных, то они истинны в F тогда и только тогда, когда они истинны уже в R/J. Но R/J — гомоморфный образ R и потому все Y_j вида $E(a, b)$, $S(a, b, c)$, $P(a, b, c)$ истинны в R/J, так как они истинны в R. С другой стороны, любое Y_j вида $\sim E(c_i, 0)$ также имеет место в R/J, поскольку истинность $E(c_i, 0)$ в R/J означает, что $c_i \in J$, а такие идеалы J мы заранее исключили. Теорема 2.4.11, таким образом, полностью доказана.

Важным применением полученного результата является

2.4.12. Теорема. *Пусть R — область целостности, такая, что каждый элемент из R содержится только в конечном числе простых идеалов R. Пусть $p(x_1, \ldots, x_n)$ — абсолютно неприводимый над R полином с коэффициентами из R; другими словами, $p(x_1, \ldots, x_n)$ неприводим над любым полем, которое является расширением R. Тогда $p(x_1, \ldots, x_n)$ неприводим также и в произвольном расширении фактор-кольца R/J, где в качестве J могут быть взяты любые простые идеалы R, за исключением, быть может, некоторого их конечного числа.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — коэффициенты $p(x_1, \ldots, x_n)$, расположенные в некотором произвольном, но фиксированном порядке. Если $p(x_1, \ldots \ldots, x_n)$ приводим, то степень каждого множителя обязательно меньше степени p. Поэтому утверждение «$p(x_1, \ldots, x_n)$ приводим» является перефразировкой утверждения «существуют многочлены $q(x_1, \ldots, x_n)$ и $r(x_1, \ldots, x_n)$ степени не выше $d-1$ *) такие, что

$$q(x_1, \ldots, x_n)\, r(x_1, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_n)».$$

Легко видеть, что это утверждение эквивалентно существованию решения некоторой системы уравнений относительно коэффициентов q и r. Так, например, приводимость $a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 + a_4x_1 + a_5x_2 + a_6$ эквивалентна предложению о том, что этот многочлен равен произведению $(y_1x_1 + y_2x_2 + y_3) \cdot (y_4x_1 + y_5x_2 + y_6)$, а это равнозначно разрешимости следующей системы уравнений:

2.4.13. $y_1y_4 = a_1,\ y_1y_5 + y_2y_4 = a_2,\ y_2y_5 = a_3,\ y_1y_6 + y_3y_4 = a_4,$
$$y_2y_6 + y_3y_5 = a_5,\ y_3y_6 = a_6.$$

Последняя формулировка неприводимости может быть без труда выражена в терминах E, S, D и объектов $a_1, \ldots, a_k$ высказыванием Y, которое выражает разрешимость 2.4.13 не только в любом расширении R, а также и в любом поле, которое является гомоморфным образом R. Полагая в 2.4.11 $X = \sim Y$, мы сводим 2.4.12 к 2.4.11.

Для числовых полей обычно вместо фразы «$p(x_1, \ldots, x_n)$ неприводим в любом расширении данной области целостности» говорят, что «$p(x_1, \ldots, x_n)$ абсолютно неприводим». Предположим, что R — кольцо целых алгебраических чисел некоторого конечного расширения поля рациональных чисел. Мы можем тогда сформулировать 2.4.12 следующим образом:

2.4.14. *Если многочлен $p(x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами из кольца R целых алгебраических чисел некоторого конечного расширения поля рациональных чисел абсолютно неприводим, то $p(x_1, \ldots, x_n)$ остается неприводимым над фактор-кольцом R/J для всех простых идеалов кольца R, за исключением, быть может, конечного числа.*

Имеется (и не одно) чисто алгебраическое доказательство теоремы 2.4.14. Читателю будет полезно сравнить классические доказательства, которые отнюдь не

*) Имеется в виду, что d — это степень $p(x_1, \ldots, x_n)$. *(Прим. перев.)*

являются тривиальными, с приведенным выше рассуждением. Если R — кольцо целых рациональных чисел, то 2.4.11 есть просто частный случай 2.4.6, так как R/J — это простые поля ненулевой характеристики. Нетрудно переформулировать 2.4.14 для этого частного случая в терминах полей с простой характеристикой.

Рассмотрим теперь вкратце некоторые свойства бесконечных конъюнкций и дизъюнкций, введенных в конце раздела 1.4. Пусть Y — бесконечная конъюнкция в ранее определенном смысле: $Y = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \ldots$, где X_i — обычные высказывания языка L узкого исчисления предикатов, в то время как Y — высказывание некоторого расширенного языка. Мы назовем Y *«эффективно конечным»*, если для одной из его *частичных конъюнкций* $Y_m = [X_1 \wedge [X_2 \wedge [\ldots \wedge X_m]\ldots]]$ выражение $Y_m \supset Y$ истинно в каждой модели, в которой определено Y. В качестве следствия 2.4.4 получается

2.4.15. Теорема. *Бесконечная конъюнкция Y эквивалентна высказыванию Z из L (в том смысле, что $Y \equiv Z$ истинно в любой модели, где оно определено) тогда и только тогда, когда Y эффективно конечна.*

В самом деле, $Y \supset Y_k$ истинно во всякой модели, в которой оно определено, $k = 1, 2, \ldots$. Если к тому же для некоторого m $Y_m \supset Y$ истинно в любой структуре, где определено это высказывание, то $Y_m \equiv Y$, что и показывает достаточность условия теоремы. Для доказательства необходимости рассмотрим последовательность Y_1, Y_2, $Y_3, \ldots$, которая образует возрастающую цепь, так как $Y_n \supset Y_m$ является теоремой, при $n \geqslant m$. Предположим теперь, что для любого целого положительного числа m существует $n > m$ такое, что $Y_m \supset Y_n$ не является теоремой. В этом случае из последовательности $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ можно выбрать строго возрастающую цепь

$$\ldots Y_{k_n} \supset \ldots \supset Y_{k_3} \supset Y_{k_2} \supset Y_{k_1}.$$

Множество K, элементами которого являются члены этой последовательности, истинно в том и только в том случае, когда истинно Y. Но тогда согласно 2.4.4 не существует высказывания Z из L, обладающего требуемыми свойствами. Поэтому, если такое Z существует, то при некотором m $Y_m \supset Y_n$ для всех $n > m$, а следовательно, и для всех $n = 1, 2, \ldots$ Теорема доказана.

Пусть теперь Y — бесконечная дизъюнкция, $Y = [X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee \ldots]$, где X_n — высказывание из L, а Y_m — соответствующая частичная дизъюнкция:

$$Y_m = [X_1 \vee [X_2 \vee [\ldots \vee X_m] \ldots]].$$

$Y_m \supset Y$ истинно в каждой модели, где определено Y, и $Y_m \supset Y_n$ является теоремой при $m < n$. Мы назовем Y *эффективно конечной*, если для некоторого m $Y \supset Y_m$ истинно в любой модели, где определено Y; в этом случае $Y \supset Y_n$ истинно во всех таких моделях при $n \geqslant m$. Отсюда вытекает, что $Y_k \supset Y_n$ истинно для всех k и $n \geqslant m$. Приведенное рассуждение является на самом деле доказательством необходимости в следующей теореме.

2.4.16. Теорема. *Бесконечная дизъюнкция Y эффективно конечна тогда и только тогда, когда существует целое положительное число m такое, что $Y_n \supset Y_m$ является теоремой при всех n* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Для доказательства достаточности этого условия покажем, что если оно выполнено, то $Y \supset Y_m$ истинно во всех моделях, где определено Y. В самом деле, если бы это было не так, то нашлась бы структура M, в которой Y истинно, а Y_m ложно. Это означало бы, что высказывания $X_1, \ldots, X_m$ ложны в M, в то время как X_l истинно в M при некотором $l > m$, а тем самым истинно и Y_l. Это, однако, невозможно, так как ввиду ложности Y_m высказывание $Y_l \supset Y_m$ не могло бы быть теоремой.

Рассмотрим выражение

$$\textbf{2.4.17.}\quad Z = \forall u \forall v \forall w \ldots \forall z [Z_1(u, v, w, \ldots, z) \vee \vee Z_2(u, v, w, \ldots, z) \vee \ldots \vee Z_n(u, v, w, \ldots, z) \vee \ldots],$$

где Z_n, компоненты бесконечной дизъюнкции, являются уже ппф в обычном смысле этого слова. Введем *частичную дизъюнкцию* $W_m(u, v, w, \ldots, z)$, полагая

$$W_m(u, v, w, \ldots, z) = [Z_1(u, v, w, \ldots, z) \vee \vee [Z_2(u, v, w, \ldots, z) \vee [\ldots \vee Z_m(u, v, w, \ldots, z)] \ldots]].$$

Пусть $Z_m^* = \forall u \forall v \forall w \ldots \forall z W_m(u, v, w, \ldots, z)$; $m = 1, 2, \ldots$ Понятно, что $Z_m^* \supset Z$ имеет место в любой модели, где определено Z. Назовем Z эффективно конечным, если найдется целое положительное число m такое, что $Z \supset Z_m^*$ истинно во всех моделях, где определено Z. Нетрудно показать, что $Z_m^* \supset Z_n^*$ есть теорема для $m \leqslant n$, и потому, если $Z \supset Z_m^*$ истинно в любой модели, где определено Z, то истинно также и $Z \supset Z_n^*$ для $n \geqslant m$.

2.4.18. Теорема. *Высказывание Z* (понимая этот термин в более широком смысле, как определено в 2.4.17) *эффективно конечно в том и только в том случае, когда существует множество K высказываний из L, словарь которого содержится в словаре Z, так что Z истинно в структуре M тогда и только тогда, когда M — модель K.*

Доказательство. Условие теоремы необходимо, так как, если Z эффективно конечно, а Z_m^* — высказывание, использованное выше для определения этого понятия, то множество $K = \{Z_m^*\}$ обладает требуемыми свойствами. Обратно, пусть K с такими свойствами существует; тогда мы должны показать, что Z эффективно конечно. В самом деле, если это не так, то для любого целого положительного числа m найдется структура M, в которой Z определено, но $Z \supset Z_m^*$ не имеет в ней места. В такой структуре Z_m^* ложно и Z истинно, а потому истинны и все высказывания из K. Таким образом, получаем, что $K \cup \{\sim Z_m^*\}$ непротиворечиво для всех m. Пусть теперь $a, b, c, \ldots, d$ — множество индивидов, находящихся во взаимно однозначном соответствии с переменными $u, v, w, \ldots, z$ из Z и не содержащихся в Z. Утверждается тогда, что множество

2.4.19. $$K \cup \{\sim Z_1(a, b, c, \ldots, d), \ \sim Z_2(a, b, c, \ldots, d), \ldots \ldots, \sim Z_n(a, b, c, \ldots, d), \ldots\}$$

непротиворечиво. Если это не так, то для некоторого целого положительного числа n

$$K \cup \{\sim Z_1(a, b, c, \ldots, d), \ldots, \sim Z_n(a, b, c, \ldots, d)\}$$

окажется противоречивым и $Z_1(a, b, c, \ldots, d) \vee \ldots \vee Z_n(a, b, c, \ldots, d)$ будет выводимо из K, а следовательно (так как $a, b, c, \ldots, d$ не входят в K), высказывание

$$\forall u \forall v \forall w \ldots \forall z [Z_1(u, v, w, \ldots, z) \vee [Z_2(u, v, w, \ldots, z) \vee \vee [\ldots \vee Z_n(u, v, w, \ldots, z)] \ldots]]$$

также будет выводимо из K. Но последнее высказывание есть не что иное, как Z_n^*, и мы имеем, с одной стороны, непротиворечивость $K \cup \{\sim Z_m^*\}$ для всех m и, с другой стороны, $K \vdash Z_n^*$. Полученное противоречие показывает, что множество 2.4.19 непротиворечиво.

Пусть M^* — модель 2.4.19. Тогда M^* удовлетворяет K, но не удовлетворяет Z, так как иначе по крайней мере одна из формул $Z_n(a, b, c, \ldots, d)$ оказалась бы истинной в M^* вопреки определению M^*. Однако согласно условию 2.4.18 Z истинно в каждой модели K. Таким образом, мы снова приходим к противоречию и заключаем отсюда, что Z эффективно конечно. Теорема 2.4.18 полностью доказана.

Пусть K — множество (конечное или бесконечное) высказываний из L и пусть K' получается из K добавлением высказывания $\sim Z$, где Z задано в 2.4.17, и таково, что высказывания $\sim Z_m^*$ выводимы из K для $m = 1, 2, \ldots$

2.4.20. Теорема. *Если высказывание X из L истинно в любой структуре, где имеет место K', то $K \vdash X$.*

В самом деле, по условию $K' \cup \{\sim X\}$ ложно в любой модели K'. Следовательно, множество

$$K \cup \{\sim X, \sim Z_1(a, b, c, \ldots, d), \ldots \ldots, \sim Z_n(a, b, c, \ldots, d), \ldots\}$$

противоречиво (где объекты $a, b, c, \ldots, d$ выбраны так, что они не содержатся ни в K, ни в X). Мы получаем тогда, что для некоторого целого положительного числа m противоречиво множество

$$K \cup \{\sim X, \sim [Z_1(a, b, c, \ldots, d) \vee \vee [\ldots \vee Z_m(a, b, c, \ldots, d)] \ldots]\}.$$

Как и при доказательстве 2.4.18, заключаем отсюда, что множество $K \cup \{\sim X, \sim Z_m^*\}$ противоречиво, т. е. $X \vee Z_m^*$ выводимо из K. Но так как, по предположению, $\sim Z_m^*$ выводимо из K, то мы получаем в результате, что и X выводимо из K. Теорема доказана.

Пусть K, Z и Z_m^* — ранее определенные высказывания, причем $\sim Z_m^*$ выводимо из K для всех m.

2.4.21. Теорема. *Если K непротиворечиво, то $\sim Z$ истинно в некоторой модели M множества K.*

Доказательство. Положим в 2.4.20 $X = A \wedge \sim A$, где A — произвольное отношение нулевого порядка. Если $K \cup \{\sim Z\}$ не имеет модели, то X истинно в любой модели $K \cup \{\sim Z\}$ и, следовательно, на основании 2.4.20 выводится из одного множества K. Это, однако, приводит к абсурду, так как, по предположению, K непротиворечиво. Теорема доказана.

Применим последние результаты для получения некоторой информации о понятиях, связанных с аксиомой Архимеда.

2.4.22. Теорема. *Множество аксиом K_{AF} архимедова упорядоченного поля нельзя заменить никаким множеством высказываний K из L (конечным или бесконечным), которое определялось бы в терминах словаря K_{AF}.*

Доказательство. Заменим вначале K_{AF} одним высказыванием вида 2.4.17. Пусть V — конъюнкция всех высказываний K_{OF} (число их конечно). Принимая во внимание 2.2.18, введем следующее высказывание из расширенного языка:

2.4.23. $$Z = \forall x \forall y [[V \wedge E(0, x)] \vee [V \wedge \sim Q(0, x)] \vee \vee [V \wedge \sim Q_1(x, y)] \vee [V \wedge \sim Q_2(x, y)] \vee \ldots].$$

Z, как легко видеть, и есть требуемая аксиома, описывающая понятие архимедова упорядоченного поля. Существование множества K, описанного в 2.4.22, влечет согласно 2.4.18 эффективную конечность 2.4.23, т. е. наличие такого m, что высказывание $Z \supset Z_m^*$ истинно для любой структуры, в которой определено Z, где

$$Z_m^* = \forall x \forall y [[V \wedge E(0, x)] \vee [V \wedge \sim Q(0, x)] \vee \ldots \ldots \vee [V \wedge \sim Q_{m-1}(x, y)]].$$

Это, однако, означало бы, что в любом архимедовом поле при x, равном 1, число $m - 1 = (m - 1) \cdot 1$ больше любого элемента этого поля. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

2.4.24. Теорема. *Если высказывание X, сформулированное на языке узкого исчисления предикатов в терминах отношений равенства, сложения, умножения и порядка (а также* 0 *и* 1), *истинно для всех неархимедовых упорядоченных полей, то оно истинно и в любом упорядоченном поле.*

Мы можем слегка переформулировать наше утверждение таким образом: если высказывание $\sim X$ совместно с K_{OF}, то $\sim X$ также совместно с K_{OF} и отрицанием 2.2.18.

В таком виде теорема сразу следует из 2.4.21 с Z, равным 2.2.18, поскольку $K_{OF} \cup \{\sim X\}$ непротиворечиво.

В настоящей работе мы будем иметь дело главным образом с узким исчислением предикатов, а потому не станем останавливаться на более подробном изучении расширенных языков, упомянутых выше, или любых других. Необходимо, однако, заметить, что предмет этот допускает более систематическое изложение и дает некоторые важные результаты.

2.5. Теория нормальных рядов Мальцева. Мы займемся теперь некоторыми разделами общей теории групп, которые поддаются изучению метаматематическими средствами. Ознакомление с вопросами этой теории показывает, что наиболее интересные задачи лежат вне языка узкого исчисления предикатов. Очень часто, например, в них идет речь о существовании или соотношениях в множестве всех подгрупп (или нормальных делителей) данной группы, а эти понятия, естественно, принадлежат языкам более высокого порядка. Однако, как впервые было показано Мальцевым, в некоторых случаях эти трудности могут быть обойдены.

В качестве стандартного множества аксиом понятия группы будем использовать K'_G, определенное в терминах E, S и e. Мы постараемся выразить тот факт, что группа G содержит подгруппы J и H, причем H является таким нормальным делителем J, что фактор-группа J/H удовлетворяет данному высказыванию X из языка L узкого исчисления предикатов. Для того чтобы это сделать, введем вначале два новых одноместных отношения, $R(x)$ и $T(x)$, которые выражают соответственно принадлежность к J и H. Высказывания

2.5.1. $\forall x \forall y [E(x, y) \wedge R(x) \supset R(y)]$
$\forall x \forall y [E(x, y) \wedge T(x) \supset T(y)]$

означают, что $E(x, y)$ обладает свойством подстановочности по отношению к R и T. Согласно терминологии, введенной в начале раздела 2.1, это означает, что отношения включения между G и J, а также между G и H нормальны.

Следующие высказывания выражают то обстоятельство, что элементы G, удовлетворяющие R, образуют подгруппу в G:

2.5.2. $\forall x \forall y \forall z [R(x) \wedge R(y) \wedge S(x, y, z) \supset R(z)]$
$R(e)$
$\forall x \forall y [R(x) \wedge S(x, y, e) \supset R(y)]$.

Мы обозначим это множество через K_{GR}, а соответствующее множество для T через K_{GT}. Следующие два высказывания утверждают, что H (т. е. множество элементов G, удовлетворяющих T) есть нормальный делитель в J (множество элементов G, удовлетворяющих R).

2.5.3. $\forall x [T(x) \supset R(x)]$
$\forall x \forall y \forall z \forall t \forall u [S(x, y, e) \wedge S(x, z, t) \wedge S(t, y, u) \wedge$
$\wedge R(x) \wedge T(z) \supset T(u)]$.

Пусть теперь X — произвольное высказывание, сформулированное в терминах E, S и e. Мы хотим выразить тот факт, что X истинно в J/H. Пусть $E^*(x, y)$ — отношение равенства в J/H, а $S^*(x, y, z)$ — отношение, представляющее групповую операцию. Вместо того, чтобы рассматривать J/H как множество классов эквивалентности J, мы будем предполагать, что оно составлено из тех же самых элементов, что и J, но определения равенства и групповой операции изменены так, что равенство в J/H означает эквивалентность в J относительно H — нормального делителя группы J. Ввиду сказанного $E^*(x, y)$ определяется следующим образом:

2.5.4. $E^*(x, y) = \exists z [T(z) \wedge S(x, z, y)]$.

По тем же соображениям $S^*(x, y, z)$ сводится к высказыванию $\exists w[S(x, y, w) \wedge E^*(w, z)]$ так, что требуемое определение $S^*(x, y, z)$ есть

2.5.5. $\exists w \exists t[S(x, y, w) \wedge S(w, t, z) \wedge T(t)]$.

Введем в рассмотрение высказывание X^*, получаемое из X следующим преобразованием. Вначале мы всюду в X заменяем E и S на E^* и S^* соответственно, а затем вместо E^* и S^* подставляем высказывания 2.5.4 и 2.5.5. Нетрудно видеть, что X^* истинно в G тогда и только тогда, когда X истинно в J/H. Это есть один из примеров редукции утверждения, непосредственно не заданного в узком исчислении предикатов, к высказыванию из этого исчисления.

Квазиэлементарное свойство группы есть свойство, задаваемое множеством высказываний P, сформулированных в узком исчислении предикатов в терминах E, S и e, и такое, что, если для группы G выполнено P, то P также верно и для каждой подгруппы в G. Мы будем отождествлять P с тем свойством, которое оно описывает.

Под *нормальным рядом* группы G понимается, как обычно, конечная последовательность подгрупп в G: $\{G_0, G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ таких, что

2.5.6. $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k = (e)$,

где G_j есть нормальный делитель в G_{j-1}, $j = 1, 2, \ldots, k$; число k называется *длиной* ряда. Пусть дана конечная последовательность квазиэлементарных свойств $\Pi = \{P_1, \ldots, P_k\}$. Мы скажем тогда, что группа G относится к типу Π, если G обладает нормальным рядом длины k (подобным 2.5.6), таким, что фактор-группа G_{j-1}/G_j удовлетворяет свойству P_j, $j = 1, \ldots, k$.

Если группа G относится к данному типу $\Pi = \{P_1, \ldots \ldots, P_k\}$, то и каждая подгруппа H из G также относится к типу Π. В самом деле, для G, по условию, существует требуемый нормальный ряд $\{G_0, G_1, \ldots, G_k\}$. Рассмотрим последовательность подгрупп в H: $\{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$, где $H_j = G_j \cap H$. Это есть нормальный ряд для H, так как $H_0 = H$, $H_k = (e)$ и $H_j = G_j \cap H$ — нормальный делитель в $H_{j-1} = G_{j-1} \cap H$, $j = 1, \ldots, k$. Кроме того, H_{j-1}/H_j изоморфна некоторой подгруппе группы G_{j-1}/G_j, а потому согласно определению квазиэлементарного свойства H_{j-1}/H_j, подобно G_{j-1}/G_j, удовлетворяет P_j. Следовательно, H также относится к типу П.

Для данного П мы построим следующее множество высказываний K_Π. Введем одноместные отношения R_j, $j=1, \ldots, k$, и условимся, что в K_Π, по определению, входят: (i) множество K'_G; (ii) высказывания, утверждающие, что отношение равенства подстановочно относительно всех R_j (ср. 2.5.1); (iii) высказывания, которые утверждают, что для каждого j множество G_j элементов, удовлетворяющих R_j, является подгруппой данной группы (см. 2.5.2); (iv) высказывания, утверждающие, что G_j — нормальный делитель в G_{j-1}, $j=1, \ldots, k$ (ср. 2.5.3); (v) высказывание, утверждающее, что G_k содержит только e и элементы, равные e, т. е. высказывания $\forall x[R_k(x) \supset E(x, e)]$; (vi) высказывания, утверждающие, что фактор-группа $G^*_j = G_{j-1}/G_j$ удовлетворяет свойству P_j, $j=1, \ldots, k$. Для того чтобы выразить этот факт, мы заменим каждое высказывание X, принадлежащее P_j, высказыванием X^*, которое получается из X посредством отношений R_{j-1} и R_j, так же, как в приведенном выше примере (см. 2.5.4 и 2.5.5) мы получали X^* из X, используя отношения R и T. Все полученные высказывания, по определению, составляют K_Π. Тем самым построение K_Π закончено. Из данного построения непосредственно следует, что каждая модель K_Π есть группа, относящаяся к типу П (подгруппы G_j определяются предикатами R_j). Данная группа G, относящаяся к типу П, не является в обычном смысле моделью K_Π, так как отношения R_j, которые возникли в словаре K_Π, не принадлежат G. Однако имеет место следующая

2.5.7. Теорема. *Для данного* П *группа G относится к типу* П *тогда и только тогда, когда множество $D(G) \cup K_\Pi$ непротиворечиво, где $D(G)$ — диаграмма G.*

Доказательство. Если группа G относится к типу П, то для G существует нормальный ряд $\{G_0, \ldots, G_k\}$, обладающий требуемыми свойствами. На структуре G мы введем отношения R_j, полагая, по определению, что $R_j(a)$ истинно для любого элемента a из G в том и только в том случае, когда a принадлежит G_j, $j=1, \ldots, k$. С этим дополнительным определением G становится моделью $D(G)$ и K_Π, что и доказывает непротиворечивость $D(G) \cup K_\Pi$.

Обратно, если $D(G) \cup K_\Pi$ непротиворечиво, то пусть G' будет моделью этого множества. Тогда G' является расширением G и относится к типу П, а потому согласно сделанному ранее замечанию G также относится к типу П. Теорема доказана.

Мы переходим теперь к основной теореме этого раздела.

2.5.8. Теорема. *Предположим, что каждая конечно порожденная подгруппа группы G относится к типу* П. *Тогда G также относится к типу* П.

Доказательство. Возьмем K_Π, построенное выше, и рассмотрим множество $D(G) \cup K_\Pi$. Согласно 2.5.7 мы должны лишь показать, что это множество непротиворечиво. С помощью обычного рассуждения это легко следует из непротиворечивости любого конечного подмножества в $D(G) \cup K_\Pi$, что будет заведомо так, если для каждого конечного подмножества элементов из G, скажем G', $D(G') \cup K_\Pi$ непротиворечиво, где $D(G')$ — диаграмма ограничения отношений из G на G'. Но если G'' — группа, порожденная элементами G', то, с одной стороны, $D(G'') \cup K_\Pi$ непротиворечиво согласно 2.5.7, а с другой стороны, $D(G') \subset D(G'')$. Следовательно, $D(G') \cap K_\Pi$ непротиворечиво, что и доказывает 2.5.8.

Из всех интересных многочисленных применений, полученных Мальцевым из его теоремы (2.5.8), мы укажем лишь следующие два.

Группа G называется разрешимой ранга k, если она обладает таким нормальным рядом длины k, что все фактор-группы G_{j-1}/G_j являются абелевыми. То же самое можно выразить, сказав, что G относится к типу П, где $\Pi = \{P_1, \ldots, P_k\}$, $P_1 = \ldots = P_k$, и P_i состоит из одного высказывания $\forall x \forall y \forall z [S(x, y, z) \supset S(y, x, z)]$, означающего коммутативность рассматриваемых групп. Квазиэлементарность P_i очевидна, а потому применима 2.5.8. Следовательно, имеет место

2.5.9. Теорема. *Если каждая конечно порожденная подгруппа группы G является разрешимой ранга k, то G также является разрешимой ранга k.*

Пусть теперь $\Pi=\{P_1, P_2\}$, где P_2 — любое высказывание, выводимое из K'_G, а P_1 означает для данного целого $n>0$, что в рассматриваемую группу входит не более, чем n различных (т. е. неравных) элементов*). Легко проверяется, что это свойство также квазиэлементарно. Отсюда, согласно 2.5.8, замечая, что $G_1/G_2=G_1/(e)$ изоморфна G_1, получаем следующую теорему.

2.5.10. Теорема. *Если каждая конечно порожденная подгруппа группы G содержит нормальный делитель индекса $\leqslant n$, то G также содержит нормальный делитель индекса $\leqslant n$.*

Ввиду важности той роли, которую играют в приведенной выше теории квазиэлементарные свойства, естественно спросить, что отличает множество высказываний, которое истинно в каждой подгруппе группы G всякий раз, когда оно истинно в самой группе G. Это типичная задача теории моделей, полное решение которой будет дано в следующей главе (п. 3.3).

2.6. Задачи

2.6.1. Пусть $S=\{A_\nu\}$ — множество непустых непересекающихся абстрактных множеств. Аксиома выбора устанавливает существование множества, имеющего по одному общему элементу с каждым множеством A_ν из S. Используя теорему 1.5.4 о полноте в широком смысле, доказать аксиому выбора для того случая, когда все A_ν конечны. (Указание. Ввести отношение равенства и отношения $R_\nu(x)$ такие, что $R_\nu(a)$ истинно тогда и только тогда, когда $a \in A_\nu$. Для дополнительного отношения $P(x)$ обеспечить с помощью высказываний формального языка L существование для каждого $R_\nu(x$ единственного элемента, удовлетворяющего $R_\nu(x)$ и $P(x)$.) Изложенный выше метод не годится для бесконечных A_ν. Почему?

2.6.2. Докажите с помощью 1.5.4 теорему о максимальных идеалах булевой алгебры (не используя, конечно, аксиому выбора).

2.6.3. Граф G называется *k-хроматическим*, если k — наименьшее целое положительное число, для которого существует разбиение вершин графа G на k множеств G_i, таких, что никакие два элемента из каждого G_i не соединены ребром графа G. Доказать теорему де Брейна и Эрдёша [1], утверждающую, что каждый k-хроматический граф содержит конечное число подграфов, которые также являются k-хроматическими.

---

*) В оригинале автор ошибочно полагал P_2 свойством коммутативности. *(Прим. перев.)*

2.6.4. Пусть K_0 — множество высказываний, определенное в терминах отношений сложения, умножения и равенства, S, P, E, а также предметных постоянных 0, 1, 2, ... (в их обычной интерпретации), и пусть каждое высказывание из K_0 истинно на множестве натуральных чисел M_0. Показать, что существует модель M множества K_0, являющаяся собственным расширением M_0. Такая структура M называется (сильной) нестандартной моделью арифметики (ср. раздел 9.3 ниже). (Указание. Определить H как множество высказываний $\sim E(a, n)$, где a — дополнительный объект, а $n=0$, 1, 2, ... Доказать, что $K_0 \cup H$ непротиворечиво.)

2.6.5. Показать, что не любой элемент модели M, определенной в 2.6.4, является произведением конечного числа простых элементов. Как это согласуется с тем фактом, что M есть модель K_0?

Библиографическая справка. Принципы вложения с математической точки зрения рассматриваются в работах Лося [1] и А. Робинсона [3] (см. также статью Неймана [1]). Теорема 2.4.6 приведена у Робинсона [1], а 2.4.12 — у Хенкина [2] и А. Робинсона [3]. Чисто математические доказательства 2.4.14 были даны в статьях Островского [1] и Эйхлера [1]. Анализ аксиомы Архимеда проведен в книге А. Робинсона [1]. Более современные исследования по бесконечным языкам принадлежат Скотту и Тарскому [1], Тарскому [4] и Энгелеру [1]. Работа Мальцева о нормальных рядах, включая также основную теорему 2.5.8, приведена в статье Мальцева [1].

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ И ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ

3.1. Функции Сколема; релятивизация. Рассмотрим произвольное высказывание из L, заданное в предваренной нормальной форме, например,

3.1.1. $\forall x \exists y \forall z \forall u \exists v \forall w \exists t Q(x, y, z, u, v, w, t)$,

где Q уже не содержит кванторов. Полагая

$$R(x, y) = \forall z \forall u \exists v \forall w \exists t Q(x, y, z, u, v, w, t),$$

получим из 3.1.1

3.1.2. $\forall x \exists y R(x, y)$.

Пусть M — любая модель высказывания 3.1.2. Согласно семантической интерпретации высказывания 3.1.2 тот факт, что данное высказывание истинно в M, означает, что для любого $a \in M$ существует такой элемент $b \in M$, что $R(a, b)$ истинно в M. Другими словами, существует функция $\varphi(x)$ с областью определения M, принимающая значения из M, такая, что для каждого $a \in M$ высказывание $R(a, \varphi(a))$ истинно в M. Заметим, что выражение $R(a, \varphi(a))$, как оно написано здесь, не является высказыванием языка L; оно лишь *обозначает* высказывание $R(a, b)$, которое принадлежит L.

Оставшиеся в 3.1.1 кванторы существования можно интерпретировать аналогичным способом. Таким образом, истинность высказывания 3.1.1 в M равносильна существованию функций $\varphi(x)$, $\psi(x, z, u)$, $\chi(x, z, u, w)$, определенных на M и принимающих значения из M, таких, что высказывание

3.1.3. $Q(a, \varphi(a), b, c, \psi(a, b, c), d, \chi(a, b, c, d))$

для любых элементов a, b, c, d из M истинно в M. Обычно принято заменять в этом выражении объекты a, b, c, d первоначальными переменными и говорить, что

3.1.4. $Q(x, \varphi(x), z, u, \psi(x, z, u), w, \chi(x, z, u, w))$

истинно в M. 3.1.4 называют *открытой (эрбрановой)* формой высказывания 3.1.1. Часто касается функциональных символов φ, ψ, χ, то они известны как функторы Сколема (или Эрбрана). Впервые они были введены Сколемом и Гильбертом, систематическое их применение принадлежит Эрбрану.

Таким образом, открытая форма высказывания X, заданного в предваренной нормальной форме, получается вычеркиванием кванторной приставки X (префикса) и заменой переменных из матрицы X, относящихся к кванторам существования, отличными друг от друга символами, обозначающими функции от всех тех переменных, которые относятся к кванторам общности, предшествующим данному квантору существования. В том случае, когда высказывание X начинается с квантора существования, предполагается, что его функтор обозначает функцию без переменных, т. е. фиксированный элемент из M. Функции, соответствующие функторам, определены для всех элементов M и значения свои также принимают из M; они называются функциями Сколема *). Как правило, мы не будем различать символы для обозначения функторов Сколема и символы для обозначения функций Сколема. Указанные функции дают конкретную интерпретацию того, что понимается под кванторами существования, и бывают очень полезны в различных ситуациях.

Пусть X — произвольное высказывание в языке L узкого исчисления предикатов и пусть M — модель X. При рассмотрении высказывания X, имея дело с некоторым фиксированным элементом из M или с вопросом о существовании элемента из M, мы, как правило, не указываем при этом явно на принадлежность данного элемента к M, так как по самому определению модели любой упомянутый объект есть объект *из* M. Предположим теперь, что M содержится в качестве подструктуры в некоторой большей структуре M'. В этом случае тот факт,

---

*) В нашей литературе они также называются *разрешающими* функциями. (*Прим. перев.*)

что X истинно в M, не может быть выражен в терминах семантической интерпретации X на M'. Для того чтобы это сделать, приходится вводить одноместное отношение $R(x)$, не принадлежащее M (а следовательно, и M' и X), такое, что $R(a)$ тогда и только тогда истинно для элемента a из M, когда a принадлежит M. Полученную структуру будем обозначать M'_R. Теперь мы в состоянии для любого высказывания Y, определенного в M, построить высказывание Y_R, истинное в M' в том и только в том случае, когда Y истинно в M.

Мы в действительности определим Y_R совершенно общим способом для любой ппф Y из L. Таким образом, сопоставляя Y_R каждому Y, мы приходим к отображению на себя множества ппф из L. Y_R называется *синтаксической трансформацией* Y. Суть этого названия состоит в том, что Y_R можно получить из Y с помощью чисто синтаксического правила, не вдаваясь в семантический смысл ппф. В нашем частном случае говорят просто, что Y_R получается из Y релятивизацией относительно R, кратко записывая это в виде $Y_R=\rho(Y)$. Отображение ρ определяется согласно правилам образования ппф (1.2.1—1.2.3). Последующие выражения записываются в полной скобочной форме.

3.1.5. Если X — атомарная формула, то $\rho([X])=[X]$.

3.1.6.
$$\begin{aligned}
&\rho([\sim X])=[\sim\rho(X)]\\
&\rho([X\vee Y])=[\rho(X)\vee\rho(Y)]\\
&\rho([X\wedge Y])=[\rho(X)\wedge\rho(Y)]\\
&\rho([X\supset Y])=[\rho(X)\supset\rho(Y)]\\
&\rho([X\equiv Y])=[\rho(X)\equiv\rho(Y)]
\end{aligned}$$

для любых ппф X и Y.

3.1.7.
$$\begin{aligned}
&\rho([\forall yX])=\forall y[[R(y)]\supset\rho(X)],\\
&\rho([\exists xX])=\exists y[[R(y)]\wedge\rho(X)],
\end{aligned}$$

где X — ппф, не содержащая кванторов по y.

Вся суть заключена в двух формулах 3.1.7. Они показывают, во-первых, что если в первоначальной ппф квантор общности применялся универсально, то в преобразованной ппф он применяется только к элементам, удовлетворяющим R; и, во-вторых, что, помимо существования элемента, удовлетворяющего X, теперь требуется, чтобы отношение R было для него истинным.

Пусть M и M' — подобные структуры, причем M' — расширение M. Пусть X определено в M, т. е. отношения и объекты из X входят в M, и пусть R — отношение, не принадлежащее M, а M'_R — определенная выше структура. Имеет место

3.1.8. Теорема. *X истинно в M тогда и только тогда, когда X_R истинно в M'_R.*

Доказательство проводится индукцией относительно порядка высказывания X (определение порядка ппф см. в п. 1.2). Пусть порядок X равен 1, т. е. X — атомарная формула, заключенная в квадратные скобки; тогда согласно 3.1.5 $\rho(X)=X_R=X$. В этом случае утверждение теоремы очевидно.

Пусть теперь $X=[Y\wedge Z]$ — конъюнкция высказываний меньшего порядка, для которых теорема предполагается верной; в этом случае $X_R=\rho(X)=[\rho(Y)\wedge\rho(Z)]$. Если X истинно в M, то Y и Z также истинны в M, а следовательно, по индуктивному предположению, $\rho(Y)$ и $\rho(Z)$ истинны в M'_R, что и влечет истинность $X_R=\rho(X)$ в M'_R. Обратно, пусть X ложно в M, тогда одно из высказываний Y или Z, например, Y, ложно в M, откуда вытекает, что $\rho(Y)$ ложно в M'_R, а потому и $X_R=\rho(X)$ также ложно в M'_R. Аналогичное рассуждение проводится для всех остальных пропозициональных связок.

Предположим теперь, что X получено из высказывания меньшего порядка навешиванием квантора. Пусть, например, $X=[\forall y\, Z(y)]$, теорема тогда предполагается выполненной для всех $Z(a)$, где a — произвольный элемент из M. Если X истинно в M, то $Z(a)$ истинно в M для любых a из M и, следовательно, $\rho(Z(a))$ истинно в M'_R. Отсюда, как легко видеть, $[R(a)\supset\rho(Z(a))]$ истинно в M'_R для любых элементов a из M'_R, так как при $a\in M$ истинен консеквент импликации, а при $a\notin M$ ложен антецедент. Таким образом (принимая во внимание тот факт, что, если $\rho(Z(a))=Z'(a)$, то и $\rho(Z(y))=Z'(y)$), $\forall y[[R(y)]\supset\supset\rho(Z(y))]=\rho(X)$ истинно в M'_R.

С другой стороны, если X ложно в M, то для некоторого элемента a из M $Z(a)$ ложно в M, а потому высказывания $\rho(Z(a))$ и $[R(a)\supset\rho(Z(a))]$ ложны в M'_R, откуда $\forall y[[R(y)]\supset\rho(Z(y))]=\rho(X)$ также ложно в M'_R.

Пусть, наконец, $X=[\exists y Z(y)]$, и предположим, что X истинно в M. Тогда $Z(a)$ истинно в M при некотором $a\in M$, откуда $[R(a)\wedge\rho(Z(a))]$ истинно в M'_R, и, следовательно, $\exists y[[R(y)]\wedge\rho(Z(y))]=\rho(X)$ истинно в M'_R, как и утверждалось. Обратно, если $\exists y[[R(y)]\wedge\rho(Z(y))]$ истинно в M'_R, то $[[R(a)]\wedge\rho(Z(a))]$ истинно в M'_R для некоторого элемента a, который принадлежит M, поскольку он удовлетворяет R. Таким образом, по индуктивному предположению, высказывания $Z(a)$ и $X=[\exists y Z(y)]$ истинны в M. Утверждение 3.1.8 доказано.

Рассмотрим теперь произвольное множество высказываний K, не содержащее R, и обозначим через K' множество всех высказываний вида $\rho(X)=X_R$, $X\in K$. Пусть M' — любая модель K'. Мы не можем тогда утверждать, что множество элементов M', удовлетворяющих R, образует модель K, так как это множество вполне может оказаться пустым. Например, если K состоит из одного высказывания $\forall x T(x)$, то единственным элементом K' является $\forall x[R(x)\supset T(x)]$, а это высказывание истинно в любой структуре M', которая содержит R и T и в которой R ложно для всех ее элементов. В соответствии с этим мы определим R-трансформацию множества высказываний K, $\rho(K)=K_R$, как множество, элементами которого являются высказывания $X_R=\rho(X)$, $X\in K$, и все высказывания вида $R(a)$, где a — индивид, встречающийся в K; если в K нет объектов, то мы присоединяем высказывание $\exists x R(x)$. Если M' — модель K_R, то теперь множество элементов M', удовлетворяющих R, не пусто. Взяв ограничение отношений M' на это множество, мы получим подструктуру M структуры M', в которой определены все высказывания K и которая согласно 3.1.8 является моделью K.

3.2. Расширение моделей. Множество высказываний K будем называть *полным,* если для каждого высказывания X, которое определено в K (т. е. отношения и объекты X содержатся в словаре K), выполняется одно из двух: $K \vdash X$ или $K \vdash \sim X$. Понятие полноты является одним из основных понятий теории моделей; его не следует путать с понятием полноты узкого исчисления предикатов, которое было введено в гл. I.

Пусть M и M' — две подобные структуры, и A — подмножество множества общих элементов M и M'. A может быть пустым и в том случае, когда пересечение M и M' непусто. M называется *элементарно* эквивалентным M' относительно A, если любое высказывание X, отношения которого входят в словарь M и M' и индивиды которого принадлежат A, либо одновременно истинно в M и M', либо одновременно ложно в них. То же самое определение можно дать и другим способом, введя для некоторого множества $A \subset M$, которое может быть и пустым, множество $S(M, A)$ всех высказываний X, истинных в M и таких, что все их объекты лежат в A. Две подобные структуры M и M' называются тогда элементарно эквивалентными относительно A, если $S(M, A) = S(M', A)$. Если A пусто, то мы будем просто говорить, что M и M' элементарно эквивалентны. Множество $S(M, A)$, как нетрудно заметить, полно, поскольку для любого высказывания X, определенного в $S(M, A)$, либо X, либо $\sim X$ входит в $S(M, A)$. Если A содержит все объекты M, то мы часто будем писать $S(M)$ вместо $S(M, A)$.

Пусть теперь M и M' — две подобные структуры, такие, что M' — расширение M, и пусть A — множество всех объектов, содержащихся в M. Мы скажем тогда, что M' есть *элементарное расширение* M, обозначая это $M \mathrel{ee} M'$, если M и M' элементарно эквивалентны относительно A. Понятие элементарного расширения принадлежит Тарскому и Вооту *).

Вполне может случиться так, что структура M' будет расширением M и даже элементарно эквивалентной M, не являясь в то же время элементарным расширением M.

---

*) Заметим одно простое обстоятельство, которым автор в дальнейшем часто пользуется.

Для элементарной эквивалентности M и M' (в частности, для того, чтобы M' было элементарным расширением M) достаточно уже одного из включений $S(M, A) \subset S(M', A)$ или $S(M, A) \supset S(M', A)$. *(Прим. перев.)*

Пусть, например, M' — структура, состоящая из множества объектов $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ и единственного отношения $Q(x, y)$ такого, что $Q(a_n, a_m)$ истинно тогда и только тогда, когда $n \leqslant m$. Обозначим через M ограничение M' на множество $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Структура M' элементарно эквивалентна M (т. е. элементарно эквивалентна относительно пустого множества), так как M' изоморфна M при соответствии $a_n \longleftrightarrow a_{n+1}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ С другой стороны, M' не является элементарным расширением M, поскольку высказывание $\forall x Q(a_1, x)$ истинно в M, но ложно в M'.

3.2.1. Теорема. *Пусть M' — расширение M и пусть A — множество объектов M. Для того чтобы M' было элементарным расширением M, необходимо и достаточно, чтобы для каждого высказывания X вида $X = \exists y Z(y)$, определенного в M и истинного в M', существовал элемент $a \in A$ такой, что $Z(a)$ истинно в M'.*

Доказательство. Условие необходимо, так как, если M' — элементарное расширение M, то X истинно в M, поскольку оно истинно в M'. А это означает не что иное, как существование $a \in A$ такого, что $Z(a)$ истинно в M, а следовательно, и в M'.

Докажем достаточность этого условия. Пусть X — произвольное высказывание, определенное в M и истинное в M'; мы должны показать тогда, что X истинно также и в M. Ввиду того, что каждое высказывание обладает эквивалентным высказыванием в предваренной нормальной форме с тем же словарем, мы можем сразу предполагать, что X задано в предваренной нормальной форме. Доказательство нашего утверждения будем проводить индукцией по числу кванторов в X. Если X не содержит кванторов, то, поскольку все элементарные формулы, содержащиеся в X, одновременно истинны или ложны в M и M' и поскольку вопрос об истинности X решается с помощью истинностных таблиц исчисления высказываний, отсюда следует, что истинность X в M' равнозначна истинности X в M. Предположим теперь, что существует высказывание в предваренной нормальной форме, истинное в M', но ложное в M. Из всех таких высказываний выберем одно с наименьшим числом кванторов; это число согласно сказанному выше должно быть положительным. Рассмотрим вначале тот случай, когда X начинается с квантора общности: $X = \forall y Z(y)$. Если X ложно в M, то при некотором $a \in A$ высказывание $Z(a)$ ложно в M, причем $Z(a)$ не может быть истинным в M', так как число кванторов в $Z(a)$ меньше, чем в X. Таким образом, $\forall y Z(y)$ ложно в M' вопреки предположению.

Предположим теперь, что X начинается с квантора существования: $X = \exists y Z(y)$. Поскольку X истинно в M', то согласно условию $Z(a)$ истинно в M' для некоторого $a \in A$. И снова $Z(a)$, а следовательно, $\exists y Z(y)$, истинно в M, так как в $Z(a)$ кванторов меньше, чем в X.

Пусть M' — элементарное расширение M и A, как и раньше, — множество индивидов M. Пусть X — произвольное высказывание в предваренной нормальной форме, определенное и истинное в M, например,

3.2.2. $X = \forall x \exists y \forall z \forall v \exists w Q(x, y, z, v, w)$,

где матрица Q уже не содержит кванторов. Рассмотрим открытую форму X; в нашем примере это будет выражение

$$Q(x, \varphi(x), z, v, \psi(x, z, v)),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x, z, v)$ — функторы Сколема высказывания X. Имеет место следующая

3.2.3. Теорема. *Рассмотрим определенные любым способом функции Сколема для высказывания X на множестве A объектов M (например, $\varphi(x)$, $\psi(x, z)$). Тогда эти функции могут быть продолжены на множество объектов M', так что в результате получатся функции Сколема для X на M'.*

В самом деле, кванторы общности X расположены в некотором порядке, например, $\forall x_1 \ldots \forall x_k$, а кванторы существования расположены между отдельными $\forall x_j$. Как легко видеть, утверждение теоремы означает, что если переменные $x_1, \ldots, x_j$ заменить индивидами из M (при этом все функции Сколема, не содержащие других переменных, приобретут некоторые значения из M), то оставшиеся функции, в которых имеются еще свободные переменные, могут быть подходящим образом доопределены на M' со значениями в M'. В нашем случае это всегда возможно, так как подстановкой в X индивидов из M

вместо $x_1, \ldots, x_j$ и значений функций Сколема, определенных для этих переменных, мы из высказывания X получим высказывание X', которое истинно в M, а следовательно, и в M'.

Но это как раз и означает, что оставшиеся функции можно продолжить требуемым способом. Так, например, если в 3.2.2 мы возьмем $j=2$ и заменим x, z элементами a, b из M, то единственной функцией Сколема, определенной для a и b, будет $\varphi(x)$. В соответствии со сказанным выше, $X'=\forall v \exists w Q(a, \varphi(a), b, v, w)$. Тогда X' истинно в M', а потому $\psi(a, b, v)$ можно доопределить для произвольных значений v из M'. Теорема доказана.

Ясно, что если M' — элементарное расширение M и M'' — элементарное расширение M', то M'' — элементарное расширение M. Верно также и то, что если M' — расширение M, а M'' — элементарное расширение M и M', то M' — элементарное расширение M. Действительно, если, например, предположить, что X истинно в M, но ложно в M', т. е. $\sim X$ истинно в M', то X и $\sim X$ должны быть одновременно истинны в M'', что невозможно.

Пусть $\Phi=\{M_\nu\}$ — линейно упорядоченное множество подобных структур, иными словами, для любых элементов M_μ, M_ν из Φ или $M_\mu \subset M_\nu$, или $M_\nu \subset M_\mu$. Определим объединение структур M_ν, $M=\bigcup\limits_\nu \{M_\nu\}$. Множество объектов M, как обычно, есть множество всех объектов M_ν; отношение $R(x_1, \ldots, x_n)$, по определению, истинно для $a_1, \ldots, a_n$ — элементов из M — тогда и только тогда, когда $R(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в некоторой, а следовательно, и во всех M_ν, которые содержат $a_1, \ldots, a_n$.

3.2.4. Теорема. *Пусть $\{M_\nu\}=\Phi$ — множество подобных структур таких, что для любых M_μ, M_ν из Φ или M_μ ее M_ν, или M_ν ее M_μ (так что Φ — линейно упорядоченное множество). Тогда объединение $M=\bigcup\limits_\nu \{M_\nu\}$ есть элементарное расширение каждого M_ν из Φ.*

Доказательство. Покажем сначала, что существует *некоторая* структура M', которая является элементарным расширением всех M_ν из Φ. Пусть $S(M_\nu)$ — множество всех высказываний, определенных и истинных в

M_ν; согласно принятым выше обозначениям $S(M_\nu) = S(M_\nu, A_\nu)$, где A_ν — множество объектов M_ν. Рассмотрим объединение $S = \bigcup_\nu \{S(M_\nu)\}$. $\{S(M_\nu)\}$ есть, очевидно, линейное упорядоченное множество высказываний, а потому каждое конечное подмножество $S' \subset S$ содержится уже в некотором $S(M_\nu)$. Следовательно, S непротиворечиво и обладает моделью M'. Но для всякого M_ν $S(M_\nu)$ содержит диаграмму M_ν, следовательно, S также содержит диаграмму M_ν и M' есть расширение M_ν. Более того, M' удовлетворяет всем высказываниям $S(M_\nu)$ и является поэтому элементарным расширением M_ν.

Пусть теперь $M = \bigcup_\nu \{M_\nu\}$. Мы хотим показать, что M' есть элементарное расширение M. Тогда согласно сделанным ранее замечаниям отсюда будет следовать, что M — элементарное расширение M_ν. Для доказательства того, что M' — элементарное расширение M, используем 3.2.1. Пусть $X = \exists y Z(y)$ определено в M и истинно в M'. Так как число объектов в X конечно, то X принадлежит некоторому $S(M_\nu)$. Отсюда для некоторого $a \in A_\nu$ $Z(a)$ истинно в M_ν, а следовательно, и в M'. Поскольку A_ν содержится в M, условие теоремы 3.2.1 выполнено, и M' есть элементарное расширение M.

3.2.5. Теорема. *Пусть M и M' — две подобные структуры, и пусть A — множество их общих объектов. Допустим, что M и M' элементарно эквивалентны относительно A: $S(M, A) = S(M', A)$. Тогда существует структура M^*, которая является элементарным расширением M и M'.*

Доказательство. Пусть $S(M)$ и $S(M')$ — множества всех высказываний, истинных соответственно в M и в M'. Покажем, что множество $S(M) \cup S(M') = T$ непротиворечиво. Если это не так, то противоречиво некоторое конечное подмножество $T' \subset T$. T' обязательно содержит элементы $S(M)$ и $S(M')$, так как иначе T было бы подмножеством одного из этих множеств и тем самым непротиворечивым. Заметим, что $S(M)$ вместе с любыми двумя высказываниями содержит их конъюнкцию; то же самое, разумеется, верно и для $S(M')$. В соответствии с этим мы можем предположить, что T' содержит только два высказывания: $X \in S(M)$ и $X' \in S(M')$ такие, что

$X \wedge X'$ противоречиво. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — объекты из X, не содержащиеся в M', и $b_1, \ldots, b_j$ — объекты из X', не содержащиеся в M. Мы можем тогда записать, что

$$X = Y(a_1, \ldots, a_k) \text{ и } X' = Y'(b_1, \ldots, b_j), \; k \geqslant 0, \; j \geqslant 0.$$

Если теперь $Y(a_1, \ldots, a_k) \wedge Y'(b_1, \ldots, b_j)$ противоречиво, то согласно правилам узкого исчисления предикатов

3.2.6. $\exists x_1 \ldots \exists x_k \, \exists y_1 \ldots \exists y_j [Y(x_1, \ldots, x_k) \wedge \wedge Y'(y_1, \ldots, y_j)]$

также должно быть противоречивым, где x_i, y_j, введенные нами, в предыдущих высказываниях не содержались. Поскольку $b_1, \ldots, b_j$ не входят в $Y(a_1, \ldots, a_k)$ и y_j не входит в $Y(x_1, \ldots, x_k)$, 3.2.6 можно заменить эквивалентным ему высказыванием.

3.2.7. $[\exists x_1 \ldots \exists x_k \, Y(x_1, \ldots, x_k)] \wedge \wedge [\exists y_1 \ldots \exists y_j Y'(y_1, \ldots, y_j)]$.

Обе части этой конъюнкции определены в M и M' и принадлежат $S(M, A)$ и $S(M', A)$ соответственно. Но $S(M, A) = S(M', A)$ и поэтому 3.2.7 истинно в M и в M'. Этим доказана непротиворечивость 3.2.7. Отсюда вытекает, что T непротиворечиво и обладает моделью M^*. А так как M^* удовлетворяет $S(M)$ и $S(M')$, то M^* является элементарным расширением M и M', что и требовалось доказать.

Займемся теперь вопросом о том, насколько произвольной может быть мощность рассматриваемого расширения. Кардинальное число структуры мы определим, не ссылаясь пока на отношение равенства, как кардинальное число множества ее индивидов. Пусть дана структура M с кардинальным числом α; нетрудно найти элементарное расширение M с наперед заданным кардинальным числом $\alpha' > \alpha$ следующим простым способом. Возьмем множество объектов B, элементы которого не принадлежат множеству A объектов M, так что кардинальное число B равно α' или $\alpha' - \alpha$ в зависимости от того, бесконечно или конечно α'. Выберем и зафиксируем также произвольный элемент $a \in A$. Структуру M' с множеством индивидов $A \cup B$ мы определим следующим образом. Для произвольного отношения $R(x_1, \dots, x_n)$ из M мы положим, что $R(a'_1, \dots, a'_n)$ истинно в M', $a'_1, \dots, a'_n \in A \cup B$, если $R(a_1, \dots, a_n)$ истинно в M, где $a_i = a'_i$, когда $a'_i \in A$, и $a_i = a$, когда $a'_i \in B$. Полученная структура M' является расширением M. Более того, мы намерены показать, что M' есть элементарное расширение M, т. е. все элементы $S(M)$ истинны в M', или, другими словами, любое высказывание, определенное в M и истинное в M', истинно также в M. Опять можно доказывать это утверждение для высказываний в предваренной нормальной форме, так как все прочие высказывания им эквивалентны. Каждому $X' \in S(M')$ в предваренной нормальной форме мы сопоставим высказывание $X \in S(M)$, заменяя все элементы $b \in B$ из X фиксированным элементом $a \in A$. В частности, если X' не содержит элементов из B, то $X' \to X = X'$, т. е. высказыванию X' сопоставляется оно само. Для доказательства теоремы достаточно показать, что X истинно в M, если только X' истинно в M'. Если X порядка 1, то по определению M' X' истинно в M' тогда и только тогда, когда X истинно в M. Если в X' нет кванторов, то X' получается из высказываний порядка 1 с помощью тех же пропозициональных связок, с помощью которых X получается из соответствующих высказываний порядка 1 (определенных в M). Следовательно, и в этом случае истинность X' в M' эквивалентна истинности X в M. В более общей ситуации, когда высказывание задано в предваренной нормальной форме, мы покажем только, что если X' истинно в M', то X истинно в M. Доказательство проведем индукцией по числу кванторов в X'. Как было показано, утверждение верно, когда число кванторов равно нулю. Если $X' = [\exists y Z'(y)]$ истинно в M' и $X' \to X = [\exists y Z(y)]$, то $Z'(b')$ истинно в M' для некоторого $b' \in A \cup B$. Но $Z'(b') \to Z(b)$, где $b \in A$, и потому $Z(b)$ истинно в M. Следовательно, $[\exists y Z(y)]$ истинно в M, как и утверждалось. Наконец, если $X' = [\forall y Z'(y)]$ истинно в M' и $X' \to X = [\forall y Z(y)]$, то $Z'(b')$ истинно в M' для всех $b' \in A \cup B$, и потому $Z(b)$ истинно в M для всех $b \in A$. Следовательно, $[\forall y Z(y)] = X$ истинно в M, что и требовалось доказать.

Несмотря на длину приведенного доказательства, результат совершенно очевиден. Однако более интересная задача возникает при рассмотрении кардинального числа расширений структур, содержащих отношение равенства.

Итак, пусть M — структура, содержащая отношение равенства. При изучении вопросов, связанных с кардинальным числом M, обычно предполагают M нормальной; иными словами, два различных индивида a и b из M никогда не равны в смысле отношения $E(x, y)$, т. е. $\sim E(a, b)$ истинно в M (см. п. 2.1). В том случае, когда M не нормальна, неявно полагают, что кардинальное число M равно кардинальному числу соответствующей нормальной структуры или, что то же самое, кардинальному числу множества классов эквивалентности индивидов из M относительно отношения $E(x, y)$.

Пусть M — структура с отношением равенства такая, что α — кардинальное число M — конечно (в только что определенном смысле). В этом случае, как нетрудно заметить, не существует элементарного расширения M с бóльшим кардинальным числом. В самом деле, не существует никакого собственного нормального расширения M, которое было бы элементарно эквивалентно M, поскольку высказывание

$$\exists x_1 \ldots \exists x_\alpha \forall y [E(x_1, y) \vee \ldots \vee E(x_\alpha, y)]$$

истинно в M, но ложно в любом собственном нормальном расширении M' структуры M, кардинальное число которого больше α.

Ситуация в корне меняется, если α бесконечно. Допустим вначале, что число отношений, определенных в M, не превышает α. В этом случае, как мы сейчас покажем, кардинальное число высказываний $S(M)$ равно α. Разбивая все высказывания на непересекающиеся группы по числу содержащихся в них элементарных символов, получим, что кардинальное число множества высказываний $S(M)$ не превышает

$$\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^n+\ldots=\alpha+\alpha+\alpha+\ldots+\alpha+\ldots=\alpha.$$

С другой стороны, рассматривая множество всех высказываний вида $\sim E(a, b_\nu)$, где a — произвольный, но фиксированный индивид из M, а b_ν пробегает все множество объектов из M, не равных a, мы видим, что кардинальное число $S(M)$ не меньше, чем α.

3.2.8. Теорема. *Пусть дана структура M с отношением равенства $E(x, y)$. Предположим, что число ее отношений не превосходит α — кардинального числа различных индивидов, которое является бесконечным. Тогда существует элементарное расширение M' структуры M, кардинальное число которого равно α и которое содержит по меньшей мере один элемент, не равный ни одному элементу из M. Кроме того, для любого кардинального числа $\alpha' > \alpha$ существует элементарное расширение M' структуры M с кардинальным числом α'.*

Для доказательства первой части теоремы мы выделим индивид c, не входящий в M, и возьмем множество K всех высказываний вида $\sim E(c, b_\nu)$, где b_ν пробегает все элементы M. Пусть $H = S(M) \cup K$. Мы утверждаем, что H непротиворечиво. В самом деле, если бы H было противоречивым, то было бы противоречивым и некоторое его конечное подмножество, т. е. для некоторых конечных подмножеств $K' \subset K$ и $S' \subset S(M)$ множество $S' \cup K' = H'$ оказалось бы противоречивым. K', как легко видеть, не может быть пустым, поскольку само $S(M)$ непротиворечиво. Пусть

$$K' = \{\sim E(c, b_1), \ldots, \sim E(c, b_k)\}, \qquad k \geqslant 1,$$

и пусть X обозначает конъюнкцию всех элементов S' (X также принадлежит $S(M)$). Если H' противоречиво, то то же самое верно и для

$$Y = X \wedge \sim E(c, b_1) \wedge \ldots \wedge \sim E(c, b_k)$$

— конъюнкции элементов H'. Таким образом, для произвольного высказывания Z из L, например, $Z = [A \wedge \sim A]$, где A — отношение порядка 0, высказывание $Y \supset Z$ является теоремой. Отсюда по третьему правилу 1.3.3 следует, что $Y' \supset Z$ также есть теорема, где

$$Y' = \exists z[X \wedge \sim E(z, b_1) \wedge \ldots \wedge \sim E(z, b_k)]$$

и переменная z не входит в X. Но если это так, то Y' тоже противоречиво, а следовательно, противоречиво и эквивалентное ему высказывание

$$Y''=X\wedge[\exists z[\sim E(z,b_1)\wedge\ldots\wedge\sim E(z,b_k)]].$$

Однако Y'' истинно в M, так как X истинно в M и истинна также вторая часть конъюнкции:

$$\exists z[\sim E(z,b_1)\wedge\ldots\wedge\sim E(z,b_k)],$$

которая выражает наличие в M элемента, не равного $b_1,\ldots,b_k$, что по условию выполнено. Таким образом, предполагая противоречивость H, мы пришли к противоречию. Следовательно, H непротиворечиво и имеет модель M'. Более того, согласно теореме 1.5.13 мы можем предполагать, что кардинальное число M' не превосходит числа высказываний H. Но, как мы уже видели, $S(M)$ содержит в точности α высказываний, и, кроме того, очевидно, что K также состоит из α элементов. Следовательно, H содержит α высказываний, и мы можем предположить, что M' содержит не более чем α различных (неравных) индивидов. С другой стороны, M' заведомо содержит α различных индивидов, а именно b_ν. Итак, получаем, что кардинальное число M' равно кардинальному числу M, т. е. α. В то же время M' содержит элемент c, не равный ни одному элементу из M, что завершает доказательство первой части теоремы.

В дальнейшем, вводя квантор по переменной по второму или третьему правилу 1.3.3, мы всегда будем молчаливо предполагать, что эта переменная в рассматриваемом высказывании ранее не встречалась.

Для доказательства второй части теоремы возьмем множество индивидов $C=\{c_\mu\}$, кардинальное число которого равно α' и которое не имеет общих элементов с множеством индивидов M. Введем множество $K_1=\{\sim E(c_\mu,b_\nu)\}$ (где b_ν пробегает все различные элементы M, а c_μ — все элементы C) и множество $K_2=\{\sim E(c_\mu,c_\nu)\}$ (где c_μ и c_ν независимо пробегают элементы C). Кардинальное число K_1 равно $\alpha'\cdot\alpha=\alpha'$, а кардинальное число K_2 равно $\alpha'\cdot\alpha'=\alpha'$. Рассмотрим множество

$$H=S(M)\cup K_1\cup K_2.$$

Кардинальное число H есть $\alpha+\alpha'+\alpha'=\alpha'$. Мы хотим показать, что H непротиворечиво. Если это не так, то тогда (см. первую часть доказательства) существует один элемент X из $S(M)$ и конечные подмножества $K_1'\subset K_1$ и $K_2'\subset K_2$ такие, что $\{X\}\cup K_1'\cup K_2'$ противоречиво. K_1' состоит из конечного числа высказываний вида $\sim E(c_\mu, b_\nu)$, а K_2' — из конечного числа высказываний вида $\sim E(c_\mu, c_\nu)$. Обозначим через $Y(b_1, \ldots, b_j, c_1, \ldots, c_l)$ конъюнкцию всех элементов $K_1'\cup K_2'$ (в записи Y указаны все входящие в него индивиды). В таком случае $Z=X\wedge Y(b_1, \ldots, b_j, c_1, \ldots, c_l)$ противоречиво, а это, как и раньше, влечет противоречивость $X\wedge[\exists z_1 \ldots \ldots \exists z_l Y(b_1, \ldots, b_j z_1, \ldots, z_l)]$. Поскольку $X\in S(M)$, X истинно в M. $[\exists z_1 \ldots \exists z_l Y(b_1, \ldots, b_j, z_1, \ldots, z_l)]$ также именно в M, так как истинность этого высказывания в M эквивалентна существованию объектов $b_1^*, \ldots, b_l^*$ из M, для которых в M имеет место $Y(b_1, \ldots, b_j, b_1^*, \ldots, b_l^*)$. Но последнее высказывание истинно при любых $b_1^*, \ldots, b_l^*$, которые попарно различны и отличны от элементов $b_1, \ldots, b_j$; такой выбор всегда возможен ввиду бесконечности M. Таким образом, мы заключаем, что H непротиворечиво и имеет модель M'. Кардинальное число $M'\geqslant\alpha'$, так как элементы C попарно различны (неравны) в M'. С другой стороны, поскольку α' есть кардинальное число H, мы можем предполагать, как и выше, что кардинальное число M' не больше, чем α'. Итак, кардинальное число M' равно α', и, кроме того, M' есть элементарное расширение M, так как M' — модель $S(M)$. Теорема полностью доказана.

Как правило, в алгебраических структурах имеется отношение равенства и число отношений конечно, так что такие бесконечные (относительно $E(x, y)$) структуры удовлетворяют условиям теоремы 3.2.8. Несмотря на это, тот случай, когда число отношений превосходит число индивидов, представляет значительный интерес. Используя рассуждения, подобные тем, что проводились в доказательстве 3.2.8, нетрудно показать, что если структура M с отношением равенства $E(x, y)$ бесконечна (относительно E) и α' — любое кардинальное число, которое не меньше суммы кардинальных чисел отношений и объектов (т. е. не меньше кардинального числа отношений, если мощность последних больше, чем мощность индивидов), то существует элементарное расширение M с кардинальным числом α'. Возникает, однако, вопрос, можно ли в случае, когда число отношений M больше числа индивидов, найти структуру M, кардинальное число которой было бы такое же, как и у M, и которая являлась бы нетривиальным элементарным расширением M в том смысле, что в этой структуре был бы хоть один индивид, отличный от всех элементов M. В некоторых случаях ответ будет отрицательным, как показывает теорема 3.2.9, принадлежащая Рабину.

Пусть A — бесконечное счетное множество и пусть на A определено отношение равенства $E(x, y)$, являющееся тождественным, иными словами, $E(a, a)$ истинно для всех $a \in A$ и $E(a, b)$ ложно для любых различных элементов a, b из A. Расположим элементы A в виде бесконечной последовательности, $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, и определим отношение P так, что $P(a_i, a_k)$ истинно тогда и только тогда, когда $i < k$. Таким образом, P есть отношение порядка, определяющее упорядоченное множество типа ω. Предположим, наконец, что каждому подмножеству B из A соответствует одноместное отношение $Q_B(x)$ такое, что $Q_B(a)$ истинно в том и только в том случае, когда $a \in B$. Все эти отношения определяют структуру M, для которой A есть множество объектов. Заметим, что число этих отношений равно $2^{\aleph_0}$.

В дальнейшем нам потребуется один результат Серпинского о существовании совокупности R счетных подмножеств множества A, такой, что пересечение любых двух элементов из R конечно и кардинальное число R равно $2^{\aleph_0}$. Пусть B_1 и B_2 — два элемента из R, тогда для них имеется высказывание $X_{B_1B_2}$, утверждающее, что пересечение B_1 и B_2 содержит в точности n элементов, где n неотрицательно и зависит от B_1 и B_2. Требуемое $X_{B_1B_2}$ есть высказывание

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y [E(x_1, y) \wedge E(x_2, y) \wedge \ldots \wedge E(x_n, y) \equiv$$
$$\equiv Q_1(y) \wedge Q_2(y)],$$

где Q_1 и Q_2 — одноместные отношения, соответствующие B_1 и B_2. Формулировка слегка изменяется, если пересечение B_1 и B_2 пусто.

3.2.9. Теорема. *Любое элементарное расширение M' структуры M, содержащее хоть один элемент, отличный от элементов M, имеет кардинальное число, большее или равное $2^{\aleph_0}$.*

Доказательство. Пусть a — элемент M', не равный ни одному элементу M. Нетрудно обнаружить тогда, что $P(a_i, a)$ истинно для всех $a_i \in A$. В самом деле, если $P(a, a_i)$ истинно для некоторого a_i, где $i>0$, то a должно быть равно некоторому $a_k \in A$, $k<i$, так как тот факт, что имеется только $i-1$ элементов из A, предшествующих a_i (относительно порядка в A), выражается высказыванием, принадлежащим $S(M)$. В то же время высказывание $\forall x[P(a_i, x) \vee P(x, a_i) \vee E(x, a_i)]$ также принадлежит $S(M)$, откуда и вытекает истинность $P(a_i, a)$ в M'. Аналогично, при $i=0$ a_i не равно a, так как $E(a_i, a)$ ложно, а потому $P(a_i, a)$ истинно в M', как и раньше. Пусть теперь B — любое бесконечное подмножество A и $Q_B(x)$ — соответствующее ему одноместное отношение. Тогда следующее высказывание принадлежит $S(M)$:

$$\forall x \exists y[P(x, y) \wedge Q_B(y) \wedge [\forall z[Q_B(z) \supset P(z, x) \vee E(z, x) \vee \vee P(y, z) \vee E(y, z)]]].$$

Это высказывание утверждает, что для каждого x существует y, больший, чем x, который лежит в B и который является первым элементом из B, бóльшим x. Другими словами, y есть первый элемент после x, содержащийся в B. Так как это высказывание входит в $S(M)$, то оно также истинно в M', и, в частности, высказывание

$$\exists y[P(a, y) \wedge Q_B(y) \wedge [\forall z[Q_B(z) \supset P(z, a) \vee E(z, a) \vee \vee P(y, z) \vee E(y, z)]]]$$

истинно в M'. Следовательно, существует и притом единственный (в смысле отношения равенства) индивид a_B из M' такой, что

$$[P(a, a_B) \wedge Q_B(a_B) \wedge [\forall z[Q_B(z) \supset P(z, a) \vee E(z, a) \vee \vee P(a_B, z) \vee E(a_B, z)]]].$$

Пусть теперь B_1 и B_2 — два различных элемента из R и пусть $b_1=a_B$ для $B=B_1$ и $b_2=a_B$ для $B=B_2$. Утверждается, что b_1 и b_2 различны в M', т. е. $\sim E(b_1, b_2)$ истинно в M'. Действительно, так как $X_{B_1B_2}$ истинно в M, то существует $a_k \in A$ такой, что

$$\forall y[P(a_k, y) \supset \sim Q_1(y) \vee \sim Q_2(y)]$$

истинно в M, а потому истинно и в M'. Но $P(a_k, a)$, $P(a, b_1)$ и $P(a, b_2)$ все истинны в M', следовательно, $P(a_k, b_1)$ и $P(a_k, b_2)$ также истинны в M' и согласно написанным выше высказываниям b_1 и b_2 не могут быть равны. Обозначим через A' множество всех b_j, соответствующих множествам $B_j \in R$. Так как кардинальное число R равно $2^{\aleph_0}$ и отображение R на A' является, как мы только что видели, взаимно однозначным, то кардинальное число A' также равно $2^{\aleph_0}$. Отсюда мы заключаем, что кардинальное число M' не меньше $2^{\aleph_0}$, что и требовалось доказать.

Доказанное выше утверждение есть важный пример одной из возможностей, которые могут представиться, если не выполнены условия теоремы 3.2.8.

3.3. Проблема приставки. Рассмотрим класс N всех ппф X в предваренной нормальной форме из языка L узкого исчисления предикатов. Мы будем разделять ппф X на две части: последовательность ее кванторов, или *приставка* (*префикс*), и ппф, непосредственно следующая за приставкой, называемая *матрицей* X. Высказывания из N мы будем классифицировать по строению их приставок следующим образом.

Блоком кванторов существования (соответственно общности) в ппф X из N будем называть последовательность следующих друг за другом кванторов существования (общности), которая не может быть расширена ни вправо, ни влево (либо из-за того, что следующий квантор другого типа, либо из-за того, что приставка высказывания начинается или кончается данным блоком). Например, все блоки кванторов в высказывании

$$\forall u \exists v \forall w \forall x \exists y \exists z Q(u, v, w, x, y, z)$$

с матрицей Q будет $\forall u$, $\exists v$, $\forall w \forall x$, $\exists y \exists z$. Будем говорить, что ппф из N принадлежит классу B_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, если она содержит не более n блоков кванторов. Так, например, указанное выше высказывание принадлежит B_n при $n \geqslant 4$. Кроме того, B_n можно разбить на два подкласса следующим способом. Скажем, что элемент X из B_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, принадлежит A_n, если X содержит менее n блоков (т. е. $X \in B_{n-1}$) или содержит точно n блоков, первый из которых состоит из кванторов общности. Аналогично скажем, что $X \in E_n$, если $X \in B_{n-1}$ или содержит точно n блоков, начинающихся блоком из кванторов существования. Таким образом, $B_0=A_0=E_0$ и вообще $B_n=A_n \cup E_n$. Ппф из N можно классифицировать и другими способами, например, по числу кванторов в каждом блоке.

Под *проблемой приставки* понимается раскрытие теоретико-множественных (или теоретико-модельных) свойств, которыми характеризуются многообразия структур, заданных высказываниями с приставками из некоторого класса. Мы не будем пытаться выяснить точное значение этих свойств в том смысле, чтобы определить их посредством какого-нибудь формального правила: однако в дальнейшем будет показано, что для некоторых классов структур проблема приставки имеет простые и замечательные решения.

Высказывание X будем называть *устойчивым при расширении*, если всякий раз, когда X истинно в структуре M, оно истинно в любом расширении M. Высказывание X будем называть *устойчивым при ограничении*, если всякий раз, когда X истинно в M, X истинно и в любой подструктуре M, в которой X определено. Если X устойчиво при расширении и при ограничении, то будем называть X *инвариантным*. Говоря о том, что X *устойчиво* (без пояснений), будем подразумевать, что X устойчиво при расширении.

В конкретных ситуациях, как правило, более интересно рассматривать не все структуры, а только такие, которые являются моделями некоторого наперед заданного множества аксиом (например, все группы, все поля и т. п.). Пусть дано множество аксиом K, тогда X будем называть *устойчивым (при расширений) относительно* K, если всякий раз, когда X истинно в модели M множества K, X истинно и в любой модели K, которая является расширением M. Соответственно X будем называть *устойчивым при ограничении относительно* K, если всякий раз, когда X истинно в модели M множества K, X также истинно и в любой подструктуре M, в которой X определено и которая является моделью K. Если X устойчиво при расширении и ограничении относительно K, то X будем называть *инвариантным* относительно K. Подобные определения применяются также и в том случае, когда вместо X рассматривается множество высказываний H.

В дальнейшем нам понадобятся аналогичные понятия относительно предикатов, и введение их в настоящий момент представляется наиболее целесообразным. Пусть $Q(x_1, \ldots, x_n)$ — предикат, определенный в структуре M (т. е. отношения и индивиды Q принадлежат M). n-мерное декартово пространство M^n над M, $n \geqslant 1$, определим как множество n-членных последовательностей $(a_1, \ldots, a_n)$, называемых точками M^n, с *координатами* a_i из M, $i=1, \ldots, n$. При желании M можно отождествлять с M^1. Будем говорить, что предикат Q истинен в точке $P \in M^n$, $P=(a_1, \ldots, a_n)$, если $Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M. Q назовем *устойчивым* (*при расширении*) в точке $P \in M^n$, если $Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M и во всех расширениях M. Q *устойчив в* M, если Q устойчив во всех точках M^n, в которых он истинен. И наконец, Q называется *устойчивым*, если Q устойчив во всех точках, где он истинен, над любыми структурами, в которых Q определен. Аналогично, Q *устойчив при ограничении* в точке $P \in M^n$, если $Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M и во всех подструктурах M, в которых определено высказывание $Q(a_1, \ldots, a_n)$. Q устойчив при ограничении в M, если он устойчив при ограничении во всех точках M^n, где Q истинен. Если это верно для всех структур, в которых Q определен, то Q называется устойчивым при ограничении. Если Q устойчив при расширении и при ограничении для любого из трех только что определенных видов устойчивости, то Q будем называть *инвариантным*, соответственно инвариантным в точке, в данной структуре или просто инвариантным. Мы можем релятивизировать эти понятия, ограничившись, как это делалось ранее, моделями данного множества аксиом K. В этом случае M также предполагается моделью K. Например, Q устойчив в точке $P \in M^n$ над M, если в точке P Q истинен в M и в любых расширениях M, являющихся моделями K. Q устойчив, если Q устойчив во всех моделях K. Мы можем рассматривать данные ранее определения различных типов устойчивости и инвариантности как частные случаи устойчивости и инвариантности предиката (относительно данного множества аксиом). Как нетрудно видеть, устойчивость в любом смысле сохраняется при взятии конъюнкции или дизъюнкции. Таким образом, если два высказывания X и Y устойчивы при ограничении относительно данного множества аксиом K, то $X \wedge Y$ и $X \vee Y$ устойчивы при ограничении относительно K и т. д.

Если высказывание X неустойчиво (при расширении) относительно множества высказываний K, то $\sim X$, как легко усмотреть, неустойчиво при ограничении относительно K. Действительно, согласно предположению существуют две модели K: M_1 и M_2, такие, что M_2 есть расширение M_1 и X истинно в M_1, но ложно в M_2, т. е. $\sim X$ ложно в M_1 и истинно в M_2. Обратно, если высказывание X неустойчиво при ограничении относительно множества высказываний K, то существуют модели K: M_1 и M_2, такие, что M_2 — расширение M и X определено и ложно в M_1, но истинно в M_2. Следовательно, $\sim X$ истинно в M_1, но ложно в M_2. Мы получаем, таким образом, что X устойчиво при расширении относительно множества высказываний K тогда и только тогда, когда $\sim X$ устойчиво при ограничении относительно K. Отсюда вытекает, что X инвариантно относительно K в том и только в том случае, когда $\sim X$ инвариантно относительно K. Соответствующий результат верен, разумеется, и для предикатов.

Множество высказываний H назовем *конъюнктивным*, если для любых X_1 и X_2 из H существует $X_3 \in H$ такое, что $X_1 \wedge X_2 \equiv X_3$ является теоремой. H *конъюнктивно относительно* данного множества высказываний K, если для любых $X_1, X_2 \in H$ существует $X_3 \in H$ такое, что $K \vdash X_1 \wedge X_2 \equiv X_3$. Аналогичные определения приводят к понятию дизъюнктивного множества и множества, дизъюнктивного относительно данного множества аксиом.

При рассмотрении соответствующих определений для произвольных ппф необходима некоторая осторожность. Мы будем говорить, что множество ппф H конъюнктивно, если для любых X_1, $X_2 \in H$ существует $X_3 \in H$ такое, что

$$\forall y_1 \dots \forall y_n [X_1 \wedge X_2 \equiv X_3]$$

является теоремой, где кванторы общности проставлены для всех свободных переменных в формуле $X_1 \wedge X_2 \equiv X_3$. Заметим, что согласно этому определению вполне может оказаться так, что множество H, состоящее из двух предикатов $Q(x)$ и $R(x)$, конъюнктивно, в то время как множество $J = \{Q(x),\ R(y)\}$ таковым не является. Пусть, например, A и B — два одноместных отношения и пусть

$$Q(x) = A(x), \quad R(x) = A(x) \wedge B(x).$$

Тогда $\forall x[Q(x) \wedge Q(x) \equiv Q(x)]$, $\forall x[R(x) \wedge R(x) \equiv R(x)]$ и $\forall x[Q(x) \wedge R(x) \equiv R(x)]$ все будут теоремами, и потому H конъюнктивно. Но ни $\forall x \forall y[Q(x) \wedge R(y) \equiv Q(x)]$, ни $\forall x \forall y[Q(x) \wedge R(y) \equiv R(y)]$ не являются теоремами, следовательно, J не конъюнктивно.

Конъюнктивность относительно данного множества высказываний и дизъюнктивность определяются соответствующим образом.

Из сделанного ранее замечания вытекает, что множество H всех высказываний, устойчивых (или устойчивых при ограничении) относительно множества высказываний K, является конъюнктивным и дизъюнктивным относительно этого множества. Аналогично, если H есть множество всех предикатов (со свободными переменными $x_1, \dots, x_n$), которые устойчивы относительно множества K, то H конъюнктивно и дизъюнктивно. Такие же рассуждения применимы, если ограничить H каким-нибудь специальным словарем.

Множество $B_0 = A_0 = E_0$, определенное в начале этого раздела, является конъюнктивным и дизъюнктивным; то же самое верно и для A_n и E_n. Множество B_1 не конъюнктивно, как будет показано в этом разделе немного позже. При доказательстве конъюнктивности A_n и E_n рассмотрим, для определенности, класс A_3. Типичными элементами класса A_3 являются ппф вида

$$X_1 = \forall w_1 \ldots \forall w_g \exists x_1 \ldots \exists x_h \forall y_1 \ldots \forall y_i Q(w_1, \ldots \\ \ldots, w_g, x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_i, z_1, \ldots, z_j)$$

и ппф вида

$$X_2 = \forall w_1 \ldots \forall w_k \exists x_1 \ldots \exists x_l \forall z_1 \ldots \forall z_m Q_2(w_1, \ldots \\ \ldots, w_k, x_1, \ldots, x_l, z_1, \ldots, z_m, y_1, \ldots, y_p),$$

где $g \geqslant 0$, $h \geqslant 0$, $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $p \geqslant 0$. Заметим, что в нашем примере переменные из X_1 и X_2 перекрываются. Для того чтобы найти подходящее X_3, заменим сначала переменные w_q, x_q, z_q в X_2 на s_q, t_q, u_q и переменные y_q в X_1 на v_q соответственно. В результате получим высказывания X_1' и X_2' такие, что

$$\vdash \forall z_1 \ldots \forall z_j [X_1 \equiv X_1'] \quad \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_p [X_2 \equiv X_2'].$$

В обоих высказываниях мы меняли только связанные переменные для того, чтобы свободные переменные одного высказывания не перекрывались со связанными переменными другого. Определим теперь высказывание:

$$X_3 = \forall w_1 \ldots \forall w_g \forall s_1 \ldots \forall s_k \exists x_1 \ldots \exists x_h \exists t_1 \ldots \\ \ldots \exists t_l \forall v_1 \ldots \forall v_i \forall u_1 \ldots \forall u_m [Q(w_1, \ldots \\ \ldots, w_g, x_1, \ldots, x_h, v_1, \ldots, v_i, z_1, \ldots, z_j) \wedge Q_2(s_1, \ldots \\ \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_l, u_1, \ldots, u_m, y_1, \ldots, y_p].$$

Тогда, как легко видеть, высказывание

$$\forall z_1 \ldots \forall z_j \forall y_1 \ldots \forall y_p [X_1 \wedge X_2 \equiv X_3]$$

есть теорема узкого исчисления предикатов (перестановка кванторов возможна, так как нежелательные перекрытия переменных в X_1 и X_2 устранены). Если случайно одна и та же свободная переменная встречается в X_1 и X_2, то мы ее оставим без изменения. Этот пример иллюстрирует то рассуждение, которое совершенно аналогично проводится в общем случае.

Очевидно, что если в классах A_n и E_n ограничиться только содержащимися в них *высказываниями*, то полученные множества будут по-прежнему конъюнктивны и дизъюнктивны. То же самое верно для ппф или высказываний, сформулированных в терминах некоторого специального словаря.

О высказываниях, содержащихся в классе $A_0=E_0$, мы будем говорить, что они *бескванторные*. Легко проверяется (посредством рассуждения, проведенного ранее для частного типа свободных высказываний), что бескванторное высказывание инвариантно. Высказывание X, принадлежащее классу A_1, будем называть *универсальным* высказыванием,

$$X=\forall y_1 \ldots \forall y_k Q(y_1, \ldots, y_k),$$

где матрица Q не содержит никаких кванторов. Предположим, что X истинно в структуре M и определено в ее подструктуре M', иными словами, объекты, входящие в X, содержатся в M'. Ясно, что X истинно в M'. Действительно, пусть $a_1, \ldots, a_k$ — произвольные индивиды из M'. Тогда высказывание $Q(a_1, \ldots, a_k)$ истинно в M и, будучи бескванторным, истинно также в M'. Таким образом, X истинно в M', что означает устойчивость X при ограничении.

Возникает естественный вопрос: верно ли обратное, т. е. всякое ли высказывание X, устойчивое при ограничении, необходимо будет универсальным? Ответ, как легко видеть, отрицательный, поскольку все *теоремы* устойчивы при ограничении. Логично, однако, ожидать, что данное X будет эквивалентно универсальному высказыванию, и это, как будет показано, на самом деле верно. Для доказательства этого результата нам придется рассмотреть несколько более общую ситуацию.

Пусть K — множество высказываний (оно будет фиксировано во всех дальнейших рассмотрениях) и пусть X и Y — два высказывания, определенные в K, а следовательно, и во всех моделях K. Мы хотим найти условия, при которых всякий раз, когда X истинно в модели M множества K, Y истинно в любой подструктуре $M' \subset M$, являющейся моделью K. Как нетрудно заметить, это заведомо будет так, если существует универсальное высказывание Z, определенное в K, такое, что $K \vdash X \supset Z$ и $K \vdash Z \supset Y$. В самом деле, так как X и $X \supset Z$ истинны в M, то Z также истинно в M, и, следовательно, как универсальное высказывание, Z истинно в M', а поскольку $Z \supset Y$ тоже истинно в M', отсюда и вытекает, что Y

истинно в M'. Следующая теорема устанавливает справедливость обратного утверждения.

3.3.1. Теорема. *Пусть даны высказывания X и Y, определенные в K и такие, что всякий раз, когда X истинно в модели M множества K, Y истинно в любой подструктуре M' структуры M, являющейся моделью K. Тогда существует универсальное высказывание Z, определенное в K, такое, что $K \vdash X \supset Z$ и $K \vdash Z \supset Y$.*

Доказательство. Пусть H — множество всех универсальных высказываний W, определенных в K, таких, что $K \vdash X \supset W$. Как легко усмотреть, H конъюнктивно и дизъюнктивно. Рассмотрим множество $J = K \cup H \cup \cup \{\sim Y\}$. Допустим, что J непротиворечиво и пусть M' — модель J. Отсюда согласно условию теоремы следует, что не существует никакого расширения M структуры M', которое было бы моделью K и в котором имело бы место X (в противном случае Y было бы истинным в M'). Таким образом, $K \cup D' \vdash \sim X$, где D' — диаграмма M'. Как обычно, заключаем отсюда, что $K \cup D^* \vdash \sim X$, где D^* — некоторое конечное подмножество D'. Пусть $Q(a_1, \ldots, a_k)$ — конъюнкция всех элементов D^*, где явно выписаны лишь индивиды, не принадлежащие K (если они вообще есть). Мы можем всегда предполагать, что D^* непусто, вводя, если это необходимо, произвольный элемент из D'. Имеем тогда $K \vdash Q(a_1, \ldots, a_k) \supset \sim X$ и, следовательно, $K \vdash X \supset \sim Q(a_1, \ldots, a_k)$. Так как $a_1, \ldots, a_k$ не содержатся в K и, следовательно, не содержатся в X, то мы получаем, что

$$K \vdash X \supset [\forall z_1 \ldots \forall z_k [\sim Q(z_1, \ldots, z_k)]],$$

где переменные $z_1, \ldots, z_k$ не входили ранее в Q. Таким образом, высказывание $W = \forall z_1 \ldots \forall z_k [\sim Q(z_1, \ldots, z_k)]$ является элементом H и, следовательно, истинно в M'. Но $\sim W$ эквивалентно $\exists z_1 \ldots \exists z_k Q(z_1, \ldots, z_k)$, а это высказывание истинно в M', так как $Q(a_1, \ldots, a_k)$ есть конъюнкция элементов диаграммы M' и потому истинно в M'. Ясно, однако, что W и $\sim W$ не могут быть одновременно истинны в M' и, следовательно, предположение о непротиворечивости J оказывается неверным. Отсюда следует существование конечного подмножества $H^* \subset H$ такого, что $K \cup H^* \cup \{\sim Y\}$ противоречиво. Мы можем предполагать H^* непустым. Действительно, для произвольного отношения $A(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащего словарю K, $n \geqslant 0$, высказывание $\forall x_1 \ldots \forall x_n [A(x_1, \ldots, x_n) \vee \vee \sim A(x_1, \ldots, x_n)]$ принадлежит H, и при желании мы можем ввести это высказывание в H^*. Пусть Z — универсальное высказывание, эквивалентное конъюнкции элементов H^*, тогда $Z \in H$ и $K \vdash \sim [Z \wedge \sim Y]$. Это означает, что $K \vdash Z \supset Y$, т. е. Z удовлетворяет требуемому условию. Теорема доказана.

Предположим, в частности, что X совпадает с Y. Тогда $K \vdash X \equiv Z$ и мы получаем следующий результат.

3.3.2. Теорема. *Пусть X — высказывание, определенное в множестве высказываний K, такое, что всякий раз, когда X истинно в модели M множества K, оно истинно также и во всех подструктурах M, которые являются моделями K (другими словами, X устойчиво при ограничении относительно K). Тогда существует универсальное высказывание Z, определенное в K, такое, что $K \vdash X \equiv Z$.*

В том виде, как они написаны, последние теоремы не приложимы к тому случаю, когда K пусто, поскольку описанных высказываний X и Y просто не существует. Тем не менее, применив несложный прием, мы получим следующую теорему:

3.3.3. Теорема. *Пусть X и Y — два высказывания, такие, что всякий раз, когда X истинно в структуре M и Y определено в подструктуре $M' \subset M$, Y истинно в M'. Тогда существует универсальное высказывание Z, отношения и индивиды которого содержатся в X или в Y, такое, что $X \vdash Z$ и $Z \vdash Y$.*

Для того чтобы свести 3.3.3 к 3.3.1, вводим множество высказываний K, состоящее из конечного числа *теорем*, все отношения и индивиды которых содержатся в X или Y и только в них. Таким образом, если отношение $A(x_1, \ldots, x_n)$ входит в X или Y, $n \geqslant 0$, то по определению включаем в K высказывание $\forall x_1 \ldots \forall x_n [A(x_1, \ldots \ldots, x_n) \vee \sim A(x_1, \ldots, x_n)]$. Аналогично, для любого объекта, входящего в X или в Y, включаем в K какое-нибудь высказывание вида $A(b, \ldots, b) \vee \sim A(b, \ldots, b)$, где A — одно из отношений, содержащихся в X или в Y. Так определенное K удовлетворяет требованиям теоремы

3.3.1. В самом деле, произвольная структура M есть модель K при том лишь условии, что все отношения и индивиды, входящие в X или в Y, содержатся в M. Отсюда, если X истинно в модели M множества K, то Y истинно во всех подструктурах M, которые являются моделями K. Ввиду 3.3.1 существует универсальное высказывание Z, определенное в K (т. е. отношения и индивиды Z содержатся в X или в Y), такое, что $X \supset Z$ и $Z \supset X$ — теоремы.

В частности,

3.3.4. Теорема. *Если высказывание X устойчиво при ограничении, то существует такое универсальное высказывание Z, отношения и индивиды которого принадлежат X, что Z эквивалентно X.*

Высказывание X, содержащееся в E_1, будем называть *экзистенциальным высказыванием.* Экзистенциальное высказывание, как легко видеть, устойчиво. Из теорем 3.3.1—3.3.4 для этих высказываний вытекают соответствующие результаты, два из которых мы приведем.

3.3.5. Теорема. *Пусть высказывания X и Y определены в множестве высказываний K таким образом, что всякий раз, когда X истинно в модели M множества K, Y истинно во всех расширениях M, являющихся моделями K. Тогда существует экзистенциальное высказывание Z, определенное в K и такое, что $K \vdash X \supset Z$ и $K \vdash Z \supset Y$.*

Действительно, условия теоремы 3.3.1 будут выполнены, если X и Y из этой теоремы заменить соответственно нашими $\sim Y$ и $\sim X$. В соответствии с этим существует универсальное высказывание $Z' = \forall y_1 \ldots \forall y_k Q(y_1, \ldots, y_k)$, определенное в K и такое, что $K \vdash \sim Y \supset Z'$ и $K \vdash Z' \supset \sim X$. Отсюда следует, что $K \vdash \sim Z' \supset Y$ и $K \vdash X \supset \sim Z'$. Но Z' эквивалентно $Z = \exists y_1 \ldots \exists y_k [\sim Q(y_1, \ldots, y_k)]$, которое и есть требуемое экзистенциальное высказывание.

3.3.6. Теорема. *Если высказывание X определено в множестве высказываний K и устойчиво относительно него, то существует экзистенциальное высказывание Z, определенное в K и такое, что $K \vdash X \equiv \mathbf{Z}$.*

Доказательство проводится сведéнием к теореме 3.3.2.

Некоторые из соотношений, наличие которых предполагалось в приведенных выше теоремах (например, Y истинно во всех расширениях структуры M, в которых оно определено, если только X истинно в M), могут рассматриваться как некоторые частные случаи отношений следствия. Естественно спросить, будет ли это отношение следствия подчиняться принципу локализации или какому-нибудь другому принципу такого рода. Ответ на это дает

3.3.7. Теорема. *Пусть H — множество высказываний и X — высказывание, истинное во всех структурах, в которых оно определено и которые являются расширениями моделей H. Тогда существует конечное подмножество H' множества H, такое, что для любого расширения M' модели M множества H' X истинно в M', если только X определено в M'.*

Доказательство. Релятивизируем множество H с помощью одноместного отношения R, которое не встречается ни в K, ни в X (ср. п. 3.1). Полученное множество обозначим H_R. X истинно в любой модели H_R, в которой оно определено. Отсюда следует, что X выводимо из конечного подмножества H_1 множества H_R. Пусть H_2 — множество таких элементов из H, релятивизация которых принадлежит H_1 (H_2, разумеется, конечно). Для всякого индивида a, такого, что $R(a) \in H_1$, присоединим к H_2 высказывание из H, включающее a. Полученное множество обозначим H'. Как легко видеть, высказывание X истинно в любых расширениях моделей H', в которых оно определено, что и требовалось доказать.

Аналогично верна

3.3.8. Теорема. *Предположим, что высказывание X истинно во всех структурах, в которых оно определено и которые являются подструктурами моделей данного множества высказываний H. Тогда существует конечное подмножество H' множества H, такое, что X истинно во всех подструктурах моделей H', в которых X определено.*

Для доказательства релятивизируем X с помощью R, обозначив полученное высказывание X_R. В этом случае множество $H \cup \{[\exists x R(x)] \wedge X_R\}$ противоречиво, так как иначе $\sim X_R$ было бы истинным в некоторой модели M множества H, которая содержала бы по меньшей мере один элемент a, удовлетворяющий $R(x)$ (т. е. такой, что

$R(a)$ истинно в M). Но тогда $\sim X$ было бы истинно в подструктуре M' структуры M, которая получается ограничением отношений M на элементы, удовлетворяющие R. Поскольку это противоречит предположению теоремы, мы заключаем, что $H \cup \{[\exists x R(x)] \wedge \sim X_R\}$ противоречиво. Отсюда вытекает существование конечного подмножества H' множества H, такого, что $H' \vdash [\exists x R(x)] \supset X_R$; H', как легко видеть, является искомым.

Результаты, подобные 3.3.7 и 3.3.8, можно сформулировать относительно данного множества высказываний K. Например, для 3.3.8 мы получаем, предполагая для простоты, что X определено в K, следующую теорему:

3.3.9. Теорема. *Пусть высказывание X истинно во всех моделях множества высказываний K, которые являются подструктурами моделей $K \cup H$. Тогда существует конечное подмножество H' множества H, такое, что X истинно во всех моделях K, которые являются подструктурами моделей $K \cup H'$.*

Ввиду изложенного, достаточно лишь указать общий ход доказательства. Как и раньше, легко устанавливается противоречивость $K \cup H \cup \{\sim X_R\}$, откуда следует противоречивость $K \cup H' \cup \{\sim X_R\}$ при некотором конечном подмножестве H' множества H. И, наконец, проверяется, что H' и есть искомое множество.

Теперь мы в состоянии доказать результаты, аналогичные теоремам 3.3.2 и 3.3.6, для множества высказываний.

3.3.10. Теорема. *Пусть H — множество высказываний, определенных в данном множестве высказываний K, устойчивое при ограничении относительно K. Иными словами, всякий раз, когда модель M множества K является, кроме того, моделью H, любая подструктура M, являющаяся моделью K, есть также модель H. Тогда существует множество высказываний J, определенное в K и принадлежащее A_1, такое, что J эквивалентно H относительно K, т. е. $K \cup H \vdash J$ и $K \cup J \vdash H$.*

Доказательство. Пусть J — множество всех универсальных высказываний Y, определенных в K, таких, что $K \cup H \vdash Y$. Тогда $K \cup H \vdash J$. Мы должны лишь показать, что $K \cup J \vdash X$ для любого $X \in H$. Так как $X \in H$, то X истинно во всех подструктурах модели $K \cup H$, которые сами при этом являются моделями K. Отсюда согласно 3.3.9 вытекает существование конечного подмножества $H' \subset H$, такого, что X истинно в любых моделях K, которые в то же время являются подструктурами моделей $K \cup H'$. Обозначим через Z конъюнкцию всех элементов H'. Тогда из 3.3.1 следует наличие универсального высказывания W, определенного в K, такого, что $K \vdash Z \supset W$ и $K \vdash W \supset X$. Но Z есть конъюнкция элементов H', и потому $K \cup H \vdash W$, т. е. $W \in J$. Следовательно, поскольку $K \vdash W \supset X$ влечет $K \cup J \vdash X$, наша теорема доказана.

Соответствующий результат также имеет место для устойчивости при расширении. В этом случае J есть множество экзистенциальных высказываний.

Некоторые из приведенных выше утверждений относительно высказываний остаются верными и для предикатов. Например,

3.3.11. Теорема. *Пусть $Q(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, — предикат, определенный в множестве высказываний K и устойчивый относительно него. Таким образом, Q устойчиво во всех точках пространства M^n над произвольной моделью M множества K. Тогда существует экзистенциальный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ (т. е. предикат, принадлежащий E_1) такой, что $P(x_1, \ldots, x_n)$ определено в K и*

$$K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv P(x_1, \ldots, x_n)].$$

Доказательство. Исключив тривиальные случаи, мы можем предполагать, что K содержит по крайней мере одно отношение положительного порядка $A(x_1, \ldots, x_k)$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — множество различных индивидов, не появляющихся в K. Присоединим к K теорему Y, содержащую $a_1, \ldots, a_n$,

$$Y = [A(a_1, \ldots, a_1) \vee \sim A(a_1, \ldots, a_1)] \wedge [A(a_2, \ldots, a_2) \vee \\ \vee \sim A(a_2, \ldots, a_2)] \wedge \ldots \wedge [A(a_n, \ldots, a_n) \vee \\ \vee \sim A(a_n, \ldots, a_n)].$$

Пусть $K' = K \cup \{Y\}$; тогда высказывание $X = Q(a_1, \ldots, a_n)$ определено в K' и устойчиво относительно K', так как X устойчиво относительно K. Отсюда согласно 3.3.6 вытекает существование экзистенциального высказывания Z, определенного в K', $Z = P(a_1, \ldots, a_n)$ (явно выписаны лишь те объекты, которые не входят в K), такого, что $K' \vdash Q(a_1, \ldots, a_n) \equiv P(a_1, \ldots, a_n)$ или

$$K \vdash Y \supset [Q(a_1, \ldots, a_n) \equiv P(a_1, \ldots, a_n)];$$

но Y — теорема, и потому

$$K \vdash Q(a_1, \ldots, a_n) \equiv P(a_1, \ldots, a_n).$$

Поскольку $a_1, \ldots, a_n$ не появляются в K, окончательно получаем

$$K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv P(x_1, \ldots, x_n)].$$

Тем самым наше утверждение доказано. Заметим, что редукция 3.3.11 к 3.3.6 есть, по существу, лишь техническое средство.

На этом мы заканчиваем рассмотрение высказываний и предикатов, принадлежащих классам A_1 и E_1. Равным образом можно найти удовлетворительное описание характерных свойств высказываний класса A_2. Этому вопросу будет посвящен следующий раздел.

3.4. Препятствия к элементарному расширению. Пусть M — произвольная структура и M' — расширение M. Мы будем говорить, что M' *препятствует* M, если не существует никакого расширения M', которое являлось бы элементарным расширением M.

3.4.1. Теорема. *Пусть структура M' — расширение структуры M. Для того чтобы M' препятствовала M, необходимо и достаточно, чтобы существовало высказывание $X \in A_1$, такое, что X истинно в M, но ложно в M'.*

Доказательство. Докажем вначале необходимость условия теоремы. Пусть $H = S(M) \cup D(M')$, где $D(M')$ — диаграмма M', а $S(M)$ — множество всех высказываний, определенных и истинных в M. Допустим, что H непротиворечиво и, следовательно, обладает моделью M^*. Структура M^* — расширение M', поскольку она модель $D(M')$, и M^* — элементарное расширение M, поскольку M^* — модель $S(M)$. Однако ввиду того, что такой структуры по предположению не существует, мы заключаем, что H противоречиво. Таким образом, существует конечное подмножество J множества $D(M')$, такое, что $S(M) \cup J$ противоречиво. Пусть $Y(a_1, \ldots, a_n)$ —

конъюнкция всех элементов J, $n \geqslant 0$, где явно выписаны лишь те объекты, которые встречаются в Y и не принадлежат M. Тогда $S(M) \vdash \sim Y(a_1, \ldots, a_n)$, а так как $a_1, \ldots, a_n$ не входят в M, то $S(M) \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [\sim Y(x_1, \ldots, x_n)]$. Высказывание $X = \forall x_1 \ldots \forall x_n [\sim Y(x_1, \ldots, x_n)]$ определено и истинно в M, поскольку оно выводимо из $S(M)$, и, следовательно, принадлежит $S(M)$. С другой стороны, так как $Y(a_1, \ldots, a_n)$ есть конъюнкция элементов из диаграммы M', то это высказывание истинно в M', а потому высказывание $\exists x_1 \ldots \exists x_n Y(x_1, \ldots, x_n)$ истинно в M'. Но последнее высказывание эквивалентно $\sim X$, что и доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства достаточности предположим существование высказывания X, описанного в условии 3.4.1; $X = \forall x_1 \ldots \forall x_n Y(x_1, \ldots, x_n)$, где Y не содержит кванторов. В этом случае $\sim X$ и, следовательно, $Z = \exists x_1 \ldots \exists x_n [\sim Y(x_1, \ldots, x_n)]$, по предположению, истинны в M'. Но тогда Z, как экзистенциальное высказывание, истинно в любых расширениях M'. С другой стороны, Z определено и ложно в M, так как X истинно в этой структуре. Отсюда, таким образом, следует, что не существует расширения M', которое являлось бы элементарным расширением M.

Пусть M — структура и K' — множество высказываний. K' может содержать отношения, не входящие в M. В дальнейшем, говоря о том, что модель M' множества K' есть расширение M, мы будем игнорировать такие отношения. Учитывая это соглашение, мы скажем, что K' *препятствует* M, если каждая модель M' множества K', являющаяся расширением M, препятствует M.

3.4.2. Теорема. *Для того чтобы множество высказываний K' препятствовало структуре M, необходимо и достаточно, чтобы существовало высказывание $X \in A_1$, такое, что X определено и истинно в M и $\sim X$ выводимо из K'.*

Доказательство. Пусть X — высказывание, описанное в условии 3.4.2, и пусть M' — расширение M и модель K'. Тогда $\sim X$ определено в M', так как оно определено в M, и $\sim X$ истинно в M', так как оно выводимо из K'. Но, с другой стороны, X истинно в M. Следовательно, согласно 3.4.1 не существует расширения M', которое являлось бы элементарным расширением M. Достаточность условия теоремы, таким образом, доказана. Для доказательства необходимости предположим, что подобного высказывания X не существует. Пусть H — множество всех высказываний класса A_1, определенных и истинных в M. Если K' противоречиво, то теорема 3.4.2 верна очевидным образом. Допустим, что K' непротиворечиво; покажем тогда, что $K' \cup H$ также непротиворечиво. Пусть, наоборот, $K' \cup H$ противоречиво, тогда $Y = \sim[X_1 \wedge \ldots \ldots \wedge X_n]$ выводимо из K' для некоторых элементов $X_1, \ldots, X_n$ из H, $n \geqslant 1$. Однако A_1 — конъюнктивное множество, и потому для некоторого $X \in H$ высказывание $Z = \sim X$ выводимо из K', что противоречит нашему предположению. Отсюда следует, что $K' \cup H$ непротиворечиво и обладает моделью M'. M' является расширением M, так как M' — модель H, а H содержит диаграмму M. Допустим, что M' препятствует M. Тогда согласно теореме 3.4.1 существует высказывание $X \in A_1$, истинное в M, но ложное в M'. Однако, поскольку X истинно в M, оно содержится в H и, следовательно, истинно в M'. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Будем говорить, что множество высказываний K' *препятствует* множеству высказываний K, если существует такая модель M множества K, что K' препятствует M.

3.4.3. Теорема. *Для того чтобы множество высказываний K' препятствовало множеству высказываний K, необходимо и достаточно, чтобы существовало высказывание $Y \in A_2$ такое, что Y определено в K' и выводимо из него, в то время как $\sim Y$ совместимо с K (т. е. $K \cup \{\sim Y\}$ непротиворечиво).*

Доказательство. Предположим, что условие теоремы выполнено, и пусть M — модель $K \cup \{\sim Y\}$. Поскольку $Y \in A_2$,

$$Y = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y_1 \ldots \exists y_m Z(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m), \quad k \geqslant 0,\ m \geqslant 0,$$

где Z не содержит кванторов, $\sim Y$ истинно в M, а потому существуют такие объекты $a_1, \ldots, a_k$ из M, что высказывание

$$X = \forall y_1 \ldots \forall y_m [\sim Z(a_1, \ldots, a_k, y_1, \ldots, y_m)]$$

истинно в M. Но Y выводимо из K' и, следовательно, из K' выводимы высказывания $\exists y_1 \ldots \exists y_m Z(a_1, \ldots, a_k, y_1, \ldots, y_m)$ и $\sim[\forall y_1 \ldots \forall y_m[\sim Z(a_1, \ldots, a_k, y_1, \ldots, y_m)]] = \sim X$. Таким образом, условия теоремы 3.4.2 выполнены и K' препятствует M, что доказывает достаточность условия теоремы 3.4.3.

Для доказательства необходимости допустим, что K' препятствует модели M множества высказываний K. Тогда существует высказывание $X \in A_1$,

$$X = \forall y_1 \ldots \forall y_m Z(a_1, \ldots, a_k, y_1, \ldots, y_m),$$

где Z не содержит кванторов, такое, что X истинно в M и $\sim X$ выводимо из K'. В связи с этим мы выписали явно лишь те объекты $a_1, \ldots, a_k$, которые встречаются в X, но не встречаются в K', если такие вообще есть. Применяя второе правило 1.3.3, получаем, что высказывание

$$Y = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y_1 \ldots \exists y_m[\sim Z(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m)]$$

выводимо из K'. С другой стороны, высказывание

$$\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_m[Z(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m)]$$

истинно в M (так как X истинно в M). Последнее высказывание эквивалентно $\sim Y$, которое, следовательно, также имеет место в M. Отсюда следует, что $K \cup \{\sim Y\}$ непротиворечиво, так как все элементы этого множества истинны в M. Теорема 3.4.3 доказана.

Пусть X — произвольное высказывание класса A_2 и пусть $\{M_\nu\}$ — линейно упорядоченное (по включению) множество моделей X. Тогда, как легко убедиться, X истинно в $\bigcup_\nu \{M_\nu\} = M$. В самом деле, предположим, что

3.4.4. $X = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y_1 \ldots \exists y_m Z(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$,

где Z не содержит кванторов. Соответствующая открытая форма этого высказывания есть

3.4.5. $Z(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n))$,

и мы должны показать существование функций от n переменных, реализующих функторы $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, так что высказывание

$$Z(a_1, \ldots, a_n, \varphi_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \varphi_m(a_1, \ldots, a_n))$$

истинно в M при любых $a_1, \ldots, a_n$ из M. Для каждой последовательности $(a_1, \ldots, a_n)$ из M найдем M_ν, содержащую все элементы этой последовательности. В качестве значений функций φ_j в M для $x_i = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, мы возьмем любые подходящие значения φ_j в M_ν. Такие значения заведомо существуют, так как M_ν удовлетворяет X, и наше утверждение, таким образом, доказано.

Высказывание X назовем σ-устойчивым, если всякий раз, когда X истинно в каждой структуре из возрастающей последовательности структур $\{M_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, X истинно также и в $\bigcup_n \{M_n\}$. ($\{M_n\}$ есть возрастающая последовательность, если $M_n \subset M_k$ при $n \leqslant k$.) Из сказанного ранее очевидным образом следует

3.4.6. Теорема. *Любое высказывание $X \in A_2$ является σ-устойчивым.*

Обратное утверждение, как было показано Лосем и Сушко, тоже верно (см. теорему 3.4.9 ниже). Мы будем рассматривать несколько более общую ситуацию.

Высказывание X будем называть *σ-устойчивым* относительно данного множества высказываний K_0, если выполнены следующие условия. Пусть $\{M_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — любая возрастающая последовательность структур, и пусть $M = \bigcup_n \{M_n\}$. Тогда, если $M_1, M_2, \ldots$ — модели K_0 и X, а M — модель K_0, то M есть модель X. Аналогичное определение мы примем также для множества высказываний H вместо одного высказывания X.

3.4.7. Теорема. *Если множество высказываний H σ-устойчиво относительно множества высказываний K_0, то существует множество H' высказываний класса A_2 такое, что H эквивалентно H' относительно K_0.*

Доказательство. Пусть H' — множество высказываний класса A_2, определенных и выводимых из $H \cup K_0$. Теорема наша будет доказана, если мы покажем, что H выводимо из $H' \cup K_0$.

Пусть, наоборот, существует $X \in H$, такое, что X не выводимо из $H' \cup K_0$. В этом случае множество $K = H' \cup \cup K_0 \cup \{\sim X\}$ непротиворечиво и обладает моделью M_1. Допустим, что $H \cup K_0$ не препятствует K. Тогда существует расширение M_2 структуры M_1, такое, что M_2 есть модель $H \cup K_0$ и некоторое расширение M_3 структуры M_2 является элементарным расширением M_1. M_3 — снова модель K и потому существуют расширения $M_4 \supset M_3$ и $M_5 \supset \supset M_4$, такие, что M_4 — модель $H \cup K_0$ и M_5 — элементарное расширение M_3. Продолжая наше рассуждение дальше, мы получим возрастающую последовательность структур $\{M_n\}$, обладающую тем свойством, что M_{2k} — модель $H \cup K_0$ и M_{2k+1} — элементарное расширение M_{2k-1}, $k=1, 2, \ldots$ Тогда, как было показано в п. 3.2, структура

$$M = \bigcup_n \{M_n\} = \bigcup_k \{M_{2k}\} = \bigcup_k \{M_{2k+1}\}$$

есть элементарное расширение каждой структуры M_{2k+1}, и M, следовательно, удовлетворяет $\sim X$ и K_0. Но M является также и моделью H, поскольку H устойчиво относительно K_0, а M_{2k} удовлетворяет H и K_0, в то время как M удовлетворяет K_0. Ввиду этого M удовлетворяет X, что, разумеется, невозможно. Таким образом, заключаем, что $H \cup K_0$ препятствует K. Отсюда согласно 3.4.4 вытекает существование высказывания Y класса A_2, определенного и выводимого из $H \cup K_0$, такого, что $\sim Y$ совместимо с K. Но по определению H' имеем $Y \in H'$, а $H' \subset K$. В соответствии с этим $Y \in K$, что опять приводит нас к противоречию. Получаем, следовательно, что $H' \cup K_0 \vdash X$ для всех $X \in H$, как и утверждалось.

Предположим теперь, что множество H в 3.4.7 состоит из одного высказывания X. Тогда теорема показывает, что существует множество высказываний $H' \subset A_2$, такое, что $\{X\} \cup K_0 \vdash H'$ и $H' \cup K_0 \vdash X$. Существует поэтому конечное подмножество H^* множества H' такое, что $\{X\} \cup K_0 \vdash H^*$ и $H^* \cup K_0 \vdash X$. Пусть X^* — высказывание класса A_2, эквивалентное конъюнкции элементов H^*. Такое высказывание существует, так как A_2 конъюнктивно. Тогда $\{X\} \cup K_0 \vdash X^*$ и $\{X^*\} \cup K_0 \vdash X$ и потому $K_0 \vdash X \equiv X^*$. Таким образом, имеет место

3.4.8. Теорема. *Если высказывание X σ-устойчиво относительно множества высказываний K_0, то существует высказывание $X^* \in A_2$ такое, что $K_0 \vdash X \equiv X^*$.*

В частности, если K_0 пусто, получается

3.4.9. Теорема. *Если высказывание X σ-устойчиво, то существует высказывание $X^* \in A_2$ такое, что X эквивалентно X^*.*

3.5. Выпуклые системы. Мы рассмотрим теперь важный класс множеств аксиом, характеризуемых теоретико-множественными свойствами соответствующих им многообразий структур. На протяжении всего раздела мы будем предполагать наличие отношения равенства в множествах аксиом и рассматриваемых структурах. Кроме того, если не оговорено противное, мы будем также предполагать, что отношение включения между двумя структурами всегда нормально (ср. п. 2.1). Иными словами, если $M \subset M'$ и a и b — два объекта из M' такие, что $E(a, b)$ истинно в M' и a принадлежит M, то b также принадлежит M.

Основное свойство присущее всем известным алгебраическим понятиям, состоит, грубо говоря, в том, что пересечение двух моделей или даже любого числа моделей есть снова модель. В соответствии с этим мы вводим следующее определение.

Множество высказываний K, включающее отношение равенства E, назовем выпуклым, если для любых двух моделей M_1 и M_2 множества K, принадлежащих некоторой его модели M, пересечение $M_1 \cap M_2$ снова есть модель K при условии, что оно непусто. $M_1 \cap M_2$ мы рассматриваем как структуру, понимая под этим ограничение M на пересечение M_1 и M_2 (опять при условии, что это множество непусто). Легко проверяется, что введенные ранее множества, описывающие понятия группы, кольца и тела, все выпуклы. Очень важно иметь в виду то условие, что M является моделью K и нормальным расширением M_1 и M_2. Так, например, если взять $K = K_G$ — множество аксиом группы — и откинуть это условие, то пересечение $M_1 \cap M_2$ вполне может быть непустым, не образуя в то же время группу. Простой пример невыпуклого множества дает понятие плотного упорядоченного множества с разными начальным и конечным элементами.

3.5.1. Теорема. *Пусть $\{M_\nu\}$ — линейно упорядоченное семейство моделей выпуклого множества аксиом K. Тогда $M = \bigcup_\nu \{M_\nu\}$ тоже есть модель K.*

Доказательство. Пусть D — диаграмма M. Тогда диаграммы D_ν структуры M_ν являются подмножествами D. Рассмотрим множество высказываний $K \cup D$. Обычное рассуждение показывает непротиворечивость этого множества. Действительно, если D' — любое конечное подмножество D, то существует M_ν такое, что $D' \subset D_\nu$. Но M_ν удовлетворяет K и потому $K \cup D_\nu$ непротиворечиво, что тем более верно и для $K \cup D'$ — подмножества $K \cup D_\nu$. Итак, $K \cup D$ непротиворечиво и обладает моделью M^*. M является подструктурой M^*, но, вообще говоря, не обязательно нормальной. Однако ситуацию можно легко исправить, заменив каждый объект a из M^*, лежащий вне M, но равный объекту b из M, просто этим же элементом b.

Пусть теперь $R(x)$ — одноместное отношение, не содержащееся в M. По определению, положим, что $R(a)$ для любого $a \in M^*$ истинно тогда и только тогда, когда a содержится в M. Структуру, полученную таким образом из M^*, обозначим M_R. Мы должны показать, что M есть модель K. Пусть D^* — диаграмма M^* и K_R — релятивизация K относительно R (см. выше п. 3.1). Рассмотрим множество

$$H = D^* \cup K \cup K_R \cup \{R(a_\lambda),\ \sim R(b_\mu),\ \forall x \forall y [E(x, y) \wedge \wedge R(x) \supset R(y)]\},$$

где a_λ пробегает все элементы M, а b_μ — все элементы $M^* - M$. Убедимся в непротиворечивости H. В самом деле, в противном случае найдутся элементы $a_1, \ldots, a_l$ из M и $b_1, \ldots, b_m$ из M^*, такие, что множество

$$H' = D^* \cup K \cup K_R \cup \{R(a_1), \ldots, R(a_l),\ \sim R(b_1), \ldots \ldots, \sim R(b_m),\ \forall x \forall y [E(x, y) \wedge R(x) \supset R(y)]\}$$

противоречиво. Существует структура M_ν, содержащая все объекты $a_1, \ldots, a_l$. Согласно определению, $R(a_1), \ldots \ldots, R(a_l)$ истинны в M_R, в то время как $R(b_1), \ldots, R(b_m)$ в ней ложны. Кроме того, M^* является моделью D^* и K и нормальным расширением M_ν. Отсюда последовательно вытекает, что H' истинно в M_R, что H' непротиворечиво, а следовательно, непротиворечиво и H. Пусть $\overline{M}$ — модель H. Тогда $\overline{M}$ есть модель K и расширение M^*.

Подходящим образом выбрав объекты из $\overline{M}$, мы можем, как и раньше, считать, что $\overline{M}$ — нормальное расширение M^*. С другой стороны, $\overline{M}$ — нормальное расширение структуры $\overline{M}_R$, которая есть ограничение $\overline{M}$ на множество ее элементов, удовлетворяющих R. Исключив из рассмотрения отношение R в $\overline{M}_R$, мы получим структуру $\overline{M}_0$ — модель K, являющуюся расширением M. Но тогда пересечение $M^* \cap \overline{M}_0$ также должно быть моделью K и расширением M. Однако это пересечение на самом деле просто совпадает с M, так как все элементы из M^*, не лежащие в M, удовлетворяют $\sim R(x)$ в $\overline{M}$ и потому не могут принадлежать $\overline{M}_R$ и $\overline{M}_0$. Таким образом, $M^* \cap \overline{M}_0 = M$ есть модель K, что и требовалось доказать.

Теорема 3.5.1 показывает, что выпуклое множество аксиом σ-устойчиво. Это влечет согласно 3.4.9 эквивалентность этого множества множеству высказываний класса A_2. Однако, обратное, вообще говоря, неверно. Так, например, если к аксиомам поля K_{CF} добавить аксиому, утверждающую, что многочлен $x^3 - 2$ имеет корень, то полученное множество будет σ-устойчивым, но не выпуклым.

3.5.2. Теорема. *Пусть $\{M_\nu\}$ — совокупность моделей выпуклого множества аксиом K такая, что все M_ν содержатся в одном общем расширении M, которое является моделью K. Предположим, что $\bigcap_\nu \{M_\nu\} = M'$ непусто. Тогда M' — модель K.*

Пересечение $\bigcap_\nu \{M_\nu\}$, рассматриваемое как структура, есть ограничение M на множество $\bigcap_\nu \{M_\nu\}$.

Доказательство. Пусть D — диаграмма M и D_ν — диаграмма M_ν, при этом $D_\nu \subset D$. Выведем новое одноместное отношение $R(x)$ и рассмотрим следующее множество высказываний:

$$H = D \cup K \cup K_R \cup \{R(a_\lambda),\ \sim R(b_\mu),\ \forall x \forall y [E(x, y) \wedge R(x) \supset \supset R(y)]\},$$

где a_λ пробегает все элементы M', а b_μ — все элементы $M - M'$. В том случае, когда H противоречиво, существуют элементы $a_1, \ldots, a_l \in M'$ и $b_1, \ldots, b_m \in M - M'$

такие, что множество

$$H' = D \cup K \cup K_R \cup \{R(a_1), \ldots, R(a_l), \ \sim R(b_1), \ldots, \sim R(b_m), \\ \forall x \forall y [E(x, y) \wedge R(x) \supset R(y)]\}$$

противоречиво. Но $M' = \bigcap_{\nu} \{M_\nu\}$ и, следовательно, существует некоторое M_μ, содержащее $a_1, \ldots, a_l$, но не содержащее $b_1, \ldots, b_m$ *). Отсюда следует, что если в M ввести отношение R, истинное для элементов M_μ, и только для них, то полученная структура будет моделью H'. Мы заключаем, таким образом, что H непротиворечиво и имеет модель M^*. Рассмотрим теперь пересечение $M_\lambda \cap \cap M_0^*$, где M_λ — произвольный элемент множества $\{M_\nu\}$, а M_0^* получена ограничением M^* на множество элементов, удовлетворяющих $R(x)$, и отбрасыванием отношения R. M^* можно, как и раньше, предполагать нормальным расширением структуры M, а тем самым и структуры M_λ. Кроме того, M^* — нормальное расширение M_0^*, поскольку M^* удовлетворяет высказыванию $\forall x \forall y [E(x, y) \wedge R(x) \subset R(y)]$. Следовательно, $M_\lambda \cap M_0^*$ — модель K. Мы утверждаем, что эта структура совпадает с M'. Действительно, по определению H $M' \subset M_\lambda \cap M_0^*$. С другой стороны, если $a \notin M_\lambda$ и $a \notin M' = \bigcap_{\nu} \{M_\nu\}$, то $\sim R(a)$ истинно в M^* и $a \notin M_0^*$. Итак, $M' = M_\lambda \cap M_0^*$ — модель K, и теорема 3.5.2 полностью доказана.

Множество K назовем *строго выпуклым*, если оно выпукло и если пересечение любой совокупности моделей K, принадлежащих некоторой общей модели K, непусто. В качестве простого примера выпуклого, но не строго выпуклого множества рассмотрим множество K, состоя-

---

*) Автор допускает неточность. Из того, что $M' = \bigcap_{\nu} \{M_\nu\}$ и $b_1, \ldots, b_m \notin M'$, вовсе не следует существование такой структуры $M_\mu \in \{M_\nu\}$, что $b_1, \ldots, b_m \notin M_\nu$. Можно лишь утверждать, что для каждого элемента b_i найдется $M_{\mu_i} \in \{M_\nu\}$ такая, что $b_i \notin M_{\mu_i}$. Пользуясь выпуклостью K, мы заключаем, что $\bigcap_{i=1}^{m} M_{\mu_i}$ — модель K, и дальнейшее рассуждение автора полностью проходит с $\bigcap_{i=1}^{m} M_{\mu_i}$ вместо M_μ. (*Прим. перев.*)

щее из обычных аксиом отношения эквивалентности (см. 2.1.1). Ясно, что любая подструктура модели K тоже удовлетворяет K, однако пересечение двух подструктур вполне может оказаться пустым.

С другой стороны, если K содержит хотя бы один объект a и является выпуклым, то оно и строго выпукло, так как любая модель K содержит a.

Пусть K строго выпукло. Всякую модель M_0 множества K, не содержащую собственных подструктур, являющихся моделями K, будем называть *модельным ядром* K. Пусть M — произвольная модель K. M содержит единственное модельное ядро M_0 — пересечение всех подструктур M, которые являются моделями K. M_0 назовем ядром M. Пусть $K=K_{CF}$ — множество аксиом поля; тогда, как легко выяснить, модельные ядра K — это в точности простые подполя произвольной характеристики $p=0, 2, 3, 5, \ldots$

Пусть K выпукло, M — модель K и S — непустое множество объектов из M. В этом случае пересечение всех подструктур M, содержащих S и являющихся моделями K, снова есть модель K, о которой будем говорить, что она *порождена* S. Варьируя эту ситуацию, рассмотрим подструктуру M' структуры M, которая есть модель K, и пусть S — некоторое множество объектов из M, не принадлежащих M'. Скажем тогда, что пересечение (обозначаемое $M'(S)$) всех подструктур M, которые содержат M' и S и являются моделями K, получено *присоединением* S *к* M. Если S содержит только один элемент, $S=\{a\}$, то мы будем писать $M'(a)$ вместо $M'(S)$ и назовем $M'(a)$ *простым расширением*. В алгебраической теории полей и их расширений, а также в связанных с ними теориях, пытаясь понять структуру всевозможных расширений, всегда начинают с изучения простых расширений. Все остальные модели получаются из основных последовательными одноэлементными присоединениями. Как показывает следующая теорема, подобную процедуру можно применять к произвольным выпуклым системам

3.5.3. Теорема. *Пусть M — модели выпуклого множества аксиом K и пусть M' — подструктура M, являющаяся моделью K, $M'\subset M$. Тогда существует вполне упорядоченное множество $\{M_\nu\}$ моделей K такое, что $M_0=$*

$=M'$; *если* ν — *изолированное порядковое число (не предельное), то* M_ν — *простое расширение* $M_{\nu-1}$; *если* ν — *предельное число, то* M_ν — *простое расширение* M'_ν, *где* M'_ν — *объединение всех* M_μ *для* $\mu<\nu$; *и, наконец,* M *есть объединение всех* M_ν.

Для доказательства существования искомого множества $\{M_\nu\}$ введем в рассмотрение функцию выбора $f(M^*)$, сопоставляющую каждой подструктуре M^* структуры M (при этом M^* отлична от M и является моделью K) элемент из M, не лежащий в M^*. Вполне упорядоченное множество $\{M_\nu\}$ мы определим теперь посредством трансфинитной индукции.

Положим $M_0=M'$. Допустим, что M_ν уже определены для всех порядковых чисел $\nu<\mu$. Если μ — изолированное число, то мы положим $M_\mu=M_{\mu-1}(f(M_{\mu-1}))$, если $M_{\mu-1}$ — собственная подструктура M (т. е. $M_{\mu-1}\neq M$), и $M_\mu=M$, если $M_{\mu-1}=M$. Если μ — предельное число, то мы положим $M_\mu=M^*_\mu(f(M^*_\mu))$ (где $M^*_\mu=\bigcup\limits_{\nu<\mu}\{M_\nu\}$), если M^*_μ — собственная подструктура M, и $M_\mu=M$, если $M^*_\mu=M$. Согласно этому определению все структуры M_μ и M^*_μ (M^*_μ определена только для предельного числа μ) являются моделями K. Начиная с некоторого порядкового числа λ, все M_μ становятся равными M, $\mu\geqslant\lambda$, причем кардинальное число λ не превышает кардинального числа M *). Иными словами, наша процедура завершается в тот момент, когда $M_\lambda=M$. Таким образом, все расширения структуры M', являющиеся моделями K, могут быть получены последовательными одноэлементными присоединениями.

С понятием выпуклости нам придется столкнуться в гл. VI при освещении некоторых стандартных понятий алгебры.

3.6. Модельная непротиворечивость. Пусть K — непротиворечивое множество высказываний. Высказывание X будем называть *модельно непротиворечащим* K, если $K\cup D(M)\cup\{X\}$ непротиворечиво для каждой модели M

*) Говоря точнее, кардинальное число множества типа λ не превышает кардинального числа M. (*Прим. перев.*)

множества K, где $D(M)$, как обычно, есть диаграмма M. Иначе говоря, X модельно не противоречит K тогда и только тогда, когда для каждой модели M множества K существует структура M', которая является расширением M и моделью K и такова, что X истинно в M'. Аналогично, множество высказываний H назовем модельно не противоречащим K, если $K \cup D(M) \cup H$ непротиворечиво для любых моделей M множества K.

3.6.1. Теорема. *Пусть K — непротиворечивое множество высказываний, принадлежащих классу A_2, а X — высказывание из этого класса:*

$$X = \forall y_1 \ldots \forall y_n Z(y_1, \ldots, y_n), \qquad n \geqslant 0,$$

где Z — экзистенциальный предикат. Для того чтобы X модельно не противоречило K, необходимо и достаточно, чтобы для каждой модели M множества K и для любого набора $a_1, \ldots, a_n$ элементов из M существовало расширение M' структуры M такое, что M' есть модель K и высказывание $Z(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M'.

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна, так как если модель M множества K содержит элементы $a_1, \ldots, a_n$ и X модельно не противоречит K, то существует расширение M' структуры M такое, что M' — модель K и X истинно в M'. Но

$$X \supset Z(a_1, \ldots, a_n)$$

является теоремой и потому $Z(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M'.

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть S — множество всех высказываний вида $Z(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_1, \ldots, a_n$ — произвольный набор n индивидов из M, и пусть D — диаграмма M. Мы утверждаем, что $K \cup D \cup S'$ непротиворечиво для любого конечного подмножества $S' \subset S$. В самом деле, пусть $S' = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$, где

$$Z_j = Z(a_1^j, \ldots, a_n^j), \qquad j = 1, \ldots, m,$$

и a_i^j — объекты из M. $K \cup D \cup \{Z_1\}$ непротиворечиво согласно условию теоремы. Пусть $M^{(1)}$ — модель $K \cup D \cup \{Z_1\}$ и $D^{(1)}$ — диаграмма $M^{(1)}$. Опять согласно условию теоремы $K \cup D^{(1)} \cup \{Z_2\}$ непротиворечиво и обладает моделью $M^{(2)}$, диаграмму которой обозначим $D^{(2)}$. $M^{(2)}$ удовлетворяет также и Z_1, поскольку Z_1 экзистенциально. Подобным же образом $K \cup D^{(2)} \cup \{Z_3\}$ непротиворечиво и обладает моделью $M^{(3)}$, удовлетворяющей Z_1, Z_2 и Z_3 Продолжая это построение, мы придем в конце концов к модели $M^{(m)}$ множества K, которая является расширением M и удовлетворяет $S' = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$. Следовательно, $K \cup D \cup S'$ непротиворечиво, а поскольку это верно для любого конечного подмножества $S' \subset S$, то $K \cup D \cup S$ также непротиворечиво.

Пусть M_1 — модель $K \cup D \cup S$, D_1 — диаграмма M_1 и S_1 — множество всех высказываний вида $Z(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_1, \ldots, a_n \in M_1$. Так же, как и раньше, устанавливается, что множество $K \cup D_1 \cup S_1$ непротиворечиво и обладает моделью M_2. Пусть D_2 — диаграмма M_2 и S_2 — множество всех высказываний вида $Z(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n \in M_2$; тогда $K \cup D_2 \cup S_2$ непротиворечиво и обладает моделью M_3. Продолжая наше рассуждение, мы получим последовательность моделей K:

$$T = \{M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots\},$$

так что $M_k \subset M_l$ при $k \leqslant l$. Пусть $M^* = \bigcup_k \{M_k\}$. M^* есть расширение M, удовлетворяющее всем высказываниям K, поскольку $K \subset A_2$ (см. 3.4.6). Пусть теперь $a_1, \ldots, a_n$ — произвольное множество объектов из M^*. Тогда $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n \in M_k$ для некоторого целого положительного k. По построению высказывание $Z(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M_{k+1}, а потому и в M_l для всех $l > k$ и, следовательно, $Z(a_1, \ldots, a_n)$ истинно также в M^*.

Таким образом, $X = \forall y_1 \ldots \forall y_n Z(y_1, \ldots, y_n)$ истинно в структуре M^*, которая является моделью K и расширением M. Теорема 3.6.1 доказана.

В точности такие же рассуждения приводят к следующему небольшому обобщению 3.6.1.

3.6.2. Теорема. *Пусть K — непротиворечивое множество высказываний класса A_2 и пусть $H = \{X_\nu\}$ — множество высказываний того же класса,*

$$X_\nu = \forall y_1 \ldots \forall y_{n_\nu} Z_\nu(y_1, \ldots, y_{n_\nu}), \qquad n_\nu \geqslant 0,$$

Z_ν экзистенциально. Для того чтобы H модельно не противоречило K, необходимо и достаточно, чтобы для каждой модели M множества K, для каждого Z_ν и для

каждого набора элементов $a_1, \ldots, a_{n_\nu}$ из M существовало расширение M' структуры M такое, что M' есть модель K и $Z_\nu(a_1, \ldots, a_{n_\nu})$ истинно в M'.

Заметим, что единственное отличие от имевшейся ранее ситуации состоит в том, что теперь мы имеем дело с конечными множествами высказываний S', элементы которых получаются заменой переменных в различных Z_ν на объекты. В остальном доказательство проводится точно так же, как и в теореме 3.6.1.

Теорема 3.6.2 может быть использована вместо леммы Цорна или теоремы о том, что любое множество может быть вполне упорядочено, для доказательства того факта, что каждое поле может быть вложено в алгебраически замкнутое поле. В самом деле, пусть $K = K'_{CF}$ — множество аксиом поля, введенное в разделе 2.2. Высказывания K, как легко усмотреть, принадлежат классу A_2. Пусть $H = \{Y_n\}$, $n = 2, 3, \ldots,$ — последовательность высказываний, утверждающих, что каждый унитарный многочлен степени n имеет корень. Относительно этих высказываний также можно предполагать, что они принадлежат классу A_2. Условие теоремы 3.6.2 состоит в том, что для каждого унитарного многочлена с коэффициентами в данном поле M найдется расширение M, в котором этот многочлен имеет корень. Если принять это утверждение на веру (оно доказывается с помощью известной конструкции Кронекера — Штейница), то отсюда на основании 3.6.2 мы заключаем, что любое поле может быть вложено в алгебраически замкнутое поле. Из этого рассуждения, однако, уже нельзя извлечь доказательство того, что любое поле обладает алгебраически замкнутым *алгебраическим* расширением.

3.7. Задачи

3.7.1. Доказать следующую теорему. Для того чтобы любые две модели множества аксиом K, общие объекты которых все принадлежат K, обладали общим расширением, необходимо и достаточно, чтобы множество высказываний, определенных в K и совместимых с K, было конъюнктивным.

Высказывание X называется *совместимым* с K, если $K \cup \{X\}$ непротиворечиво.

3.7.2. Доказать, что понятие кольца нельзя сформулировать только лишь в терминах высказываний класса B_1 (т. е. экзистенциальных и универсальных высказываний).

3.7.3. Доказать следующую теорему. Для того чтобы высказывание X было истинным в гомоморфных образах всех расширений произвольной структуры M всякий раз, когда X истинно в M, необходимо и достаточно, чтобы X было эквивалентно экзистенциальному высказыванию, матрица которого есть конъюнкция атомарных ппф.

3.7.4. Найти другой пример непротиворечивого множества аксиом, которое было бы σ-устойчивым, но не выпуклым.

3.7.5. Доказать следующую теорему. Высказывание X модельно не противоречит множеству высказываний K тогда и только тогда, когда для любого экзистенциального высказывания Y, определенного в K и совместимого с K, высказывание $X \wedge Y$ также совместимо с K.

Библиографическая справка. Различные применения функторов Сколема были даны Эрбраном [1] и Гильбертом и Бернайсом [1]. Операция релятивизации рассматривалась в работах Эрбрана [1] и Тарского, Мостовского и Робинсона [1]. Понятие элементарного расширения было введено Тарским и Воотом [1]. Другой вариант теоремы 3.2.5 был доказан настоящим методом А. Робинсоном [9] (с более слабым заключением о том, что существует общее расширение M^*, элементарно эквивалентное M и M'); настоящий вариант принадлежит Кейслеру. Относительно последней части п. 3.2 см. А. Робинсон [1] и Рабин [1]. Теорема Серпинского, использованная при доказательстве 3.2.9, содержится в работе Серпинского [1]. Понятие устойчивости введено в книге А. Робинсона [1]. Доказательство теоремы 3.2.9 было дано Лосем [2] и А. Робинсоном [10]. Это есть обобщение теоремы 3.2.4, принадлежащей Тарскому [3]. Рассуждение, проведенное в разделе 3.3, целиком следует А. Робинсону [18]. Теорему 3.4.9 можно найти в статьях Лося и Сушко [1] и Чанга [1]. Относительно методов и остальных результатов п. 3.4 см. А. Робинсон [14]. Дополнительные исследования по проблеме приставки изложены Линдоном [1]. Теорема 3.5.1 доказана А. Робинсоном [1] с использованием несколько более сильного определения выпуклости. Улучшения были внесены Чангом [1] и Рабином, предложившим теорему 3.5.2. Рабином недавно получена полная синтаксическая характеристика выпуклых множеств *).

---

*) Простое доказательство теоремы 3.2.8 дал Чжан [4]. Обобщение теоремы 3.4.9 см. в работе Тайманова [3]. Выпуклые классы изучены Воотом [6]. *(Прим. ред.)*

ПОЛНОТА

4.1. Признак полноты. Напомним (см. п. 3.2), что множество высказываний K называется полным, если для любого высказывания X, определенного в K (т. е. все отношения и объекты X встречаются в высказываниях из K), либо $K \vdash X$, либо $K \vdash \sim X$. Имеется два тривиальных примера полного множества: противоречивое и пустое.

Следующий основной результат о полноте принадлежит Линденбауму.

4.1.1. Теорема. *Пусть K — непустое и непротиворечивое множество высказываний. Тогда найдется множество $K' \supset K$, не содержащее по сравнению с K новых отношений и объектов, такое, что K' непротиворечиво и полно.*

Доказательство. Пусть H — множество всех высказываний, определенных в K, и пусть $J = \{K_\nu\}$ — множество всех непротиворечивых подмножеств множества H, содержащих K; очевидно, что $K \in J$. J частично упорядочено по включению, и каждое линейно упорядоченное подмножество $J' \subset J$ имеет в J верхнюю грань, которая представляет собой просто объединение всех элементов J' (обозначим его через K_0). Действительно, поскольку J' линейно упорядочено, всякое конечное подмножество K_0 принадлежит некоторому элементу из J'. Следовательно, если бы K_0 было противоречиво, то, вопреки предположению, было бы противоречиво и некоторое множество из J'. Таким образом, лемма Цорна применима, и мы заключаем, что J содержит по крайней мере один максимальный элемент, скажем, K^*. K^* непротиворечиво и содержит K. Покажем, что K^* к тому же и полно.

Действительно, пусть X — такой элемент из H, что X не выводимо из K^*. Мы утверждаем тогда, что $\sim X$ выводимо из K^*. Рассмотрим множество $K^* \cup \{X\} = K_1$. Ввиду максимальности K^* имеются две возможности: либо $X \in K^*$, либо K_1 противоречиво. Поскольку X не выводимо из K^*, оно тем более не может ему принадлежать. Следовательно, $K^* \cup \{X\}$ противоречиво. Это равносильно существованию такого конечного подмножества множества K^*, скажем, $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$, что $\{Y_1, \ldots, Y_m, X\}$ противоречиво. Таким образом, высказывания $\sim[Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_m \wedge X]$ и $Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_m \supset \sim X$ являются теоремами, причем последнее из них как раз и означает, что $\sim X$ выводимо из K^*. Заметим, что если $m=0$, то мы всегда можем ввести произвольные элементы из K^* с тем, чтобы антецедент импликации $Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_m \supset X$ не был пустым. Теорема 4.1.1 доказана.

За исключением того тривиального случая, когда K само полно, у K, как правило, имеется довольно много не эквивалентных между собой полных расширений. Пусть K непусто и непротиворечиво, и пусть высказывание X из H таково, что ни X, ни $\sim X$ не выводимы из K. В этом случае множества $K_1 = K \cup \{X\}$ и $K_2 = K \cup \{\sim X\}$ оба непротиворечивы. В самом деле, повторяя приведенное ранее рассуждение, мы получаем, например, что, если $K \cup \{\sim X\}$ противоречиво, то противоречиво и $X_1 \wedge \ldots \wedge X_m \wedge \sim X$ для некоторых $X_1, \ldots, X_m \in K$, и потому высказывание $X_1 \wedge \ldots \wedge X_m \supset X$ является теоремой, т. е. X выводимо из K. (В том вырожденном случае, когда K пусто, X будет теоремой и в силу принятого соглашения будет выводимо из пустого множества.) K_2 непротиворечиво в точности по тем же соображениям. Следовательно, на основании 4.1.1 K_1 и K_2 обладают соответственно полными расширениями K'_1 и K'_2, которые представляют собой два существенно различных полных расширения K.

Важность понятия полноты для математических приложений в значительной степени объясняется тем фактом, что если две неизоморфные структуры являются моделями одного и того же полного множества высказываний K, то каждое множество высказываний, определенное в K и истинное в одной из структур, истинно также и в другой. В связи с этим представляется довольно интересным установить, какие из известных алгебраических понятий задаются полным множеством аксиом.

Простым, но эффективным признаком полноты является следующая теорема.

4.1.2. Теорема (признак Воота). *Пусть K — непротиворечивое множество аксиом с отношением равенства $E(x, y)$ и пусть α — (конечное или бесконечное) кардинальное число множества K. Предположим, что все модели K бесконечны и что для некоторого бесконечного кардинального числа $\alpha' \geqslant \alpha$ все модели K мощности α' изоморфны* (*в том смысле, как это определялось для множеств с отношением равенства*). *При этих условиях K полно.*

Если K содержит какие-то объекты, то заранее предполагается, что отображение, устанавливающее изоморфизм между двумя моделями K, является на них тождественным отображением.

Доказательство. Допустим, что условия 4.1.2 выполнены, и пусть X — высказывание, определенное в K. Мы должны показать, что либо X, либо $\sim X$ выводимо из K. Пусть, наоборот, ни X, ни $\sim X$ не выводимы из K; тогда согласно обычному рассуждению множества $K_1 = K \cup \{\sim X\}$ и $K_2 = K \cup \{X\}$ оба непротиворечивы. Их кардинальное число равно $\alpha + 1$ и, поскольку α' бесконечно, $\alpha' \geqslant \alpha + 1$. Отсюда на основании теоремы 1.5.13 следует существование таких моделей M_1 и M_2 множеств K_1 и K_2 соответственно, что кардинальные числа M_1 и M_2 равны α'. Но тогда, по условию теоремы, M_1 и M_2 изоморфны и, следовательно, либо X, либо $\sim X$ истинно в них обеих одновременно. Это, однако, противоречит определению M_1 и M_2 и наша теорема, таким образом, доказана.

В качестве первого примера полного множества, естественно возникающего в математике, мы рассмотрим множество аксиом K понятия плотно упорядоченного множества без начального и конечного элементов. K может быть записано посредством конечного числа высказываний, сформулированных в терминах отношения равенства $E(x, y)$, отношения порядка $Q(x, y)$ (x меньше или равно y) и без фиксированных объектов. Тогда любая модель K бесконечна и все счетные модели K изоморфны согласно известному результату Кантора*).

---

*) См. Ф. Хаусдорф, «Теория множеств», ОНТИ, 1937, гл. III, § 11. *(Прим. перев.)*

Следовательно, по признаку Воота K полно. Сформулируем этот результат, впервые доказанный Ленгфордом, в виде отдельной теоремы.

4.1.3. Теорема. *Теория плотно упорядоченного множества без первого и последнего элемента является полной.*

Заметим, что соответствующий результат справедлив также для теории бесконечного плотно упорядоченного множества с первым и последним элементами и для теории плотно упорядоченного множества с первым элементом, но без последнего, или с последним, но без первого.

Рассмотрим теперь множество высказываний $\overline{K}_F^{(p)}$ (п. 2.2) для понятия алгебраически замкнутого поля данной характеристики p $(p=0,\ 2,\ 3,\dots)$. Существует теорема Штейница, утверждающая, что любые два алгебраически замкнутых поля одной и той же характеристики и одинаковой несчетной мощности $\alpha' > \aleph_0$ изоморфны. Отсюда по признаку Воота вытекает

4.1.4. Теорема. *Теория алгебраически замкнутого поля данной характеристики является полной.*

Этот результат показывает, что если некоторое утверждение X, сформулированное на языке узкого исчисления предикатов в терминах равенства, сложения и умножения, доказано каким-нибудь способом для поля комплексных чисел, то оно также верно и для любого другого алгебраически замкнутого поля нулевой характеристики. Это есть одна из теорем переноса, которые мы обсуждали в свое время в п. 2.4. Она придает ограниченный, но зато вполне четкий смысл известному эвристическому аргументу — принципу Лефшеца. Однако вполне вероятно, что принцип Лефшеца имеет также некоторое эвристическое значение и в случаях, выходящих за рамки узкого исчисления предикатов *).

Комбинируя 4.1.4 с методами п. 2.4, мы получаем следующий результат.

---

*) Принцип Лефшеца используется в алгебраической геометрии. С его помощью можно переносить определенные результаты, полученные комплексно-аналитическими методами, на произвольные алгебраически замкнутые поля нулевой характеристики (см. Weil A. «Foundations of algebraic geometry», Colloquium Publ., New York, 1946. *(Прим. перев.)*

4.1.5. Теорема. *Пусть X — высказывание, сформулированное на языке узкого исчисления предикатов в терминах отношений равенства, сложения, умножения и предметных постоянных* 0 *и* 1 *(или без предметных постоянных — разница несущественная). Тогда, если X истинно в поле комплексных чисел, то оно истинно также и в любом алгебраически замкнутом поле характеристики $p>p_0$, где p_0 — некоторая константа, зависящая от X.*

4.2. Модельная полнота. Несмотря на заметную эффективность признака Воота, существует много важных примеров полных множеств аксиом, полнота которых может быть установлена совершенно иными методами. В настоящем разделе мы опишем один из таких методов, который может быть довольно успешно применен для целого ряда подобных вопросов.

Введем вначале понятие *модельной полноты*. Пусть K — непустое и непротиворечивое множество высказываний. Всякий раз, когда мы будем говорить, что M есть модель K, будет подразумеваться, что все отношения M встречаются в K. K назовем *модельно полным*, если для любой модели M множества K множество $K \cup D$ полно, где D — диаграмма M. Эквивалентно этому определению следующее: *K модельно полно*, если для каждой модели M множества K любое ее расширение M', которое также является моделью K, является *элементарным* расширением M. В самом деле, пусть K модельно полно согласно первому определению, а M и M' — модели K такие, что M' — расширение M. Обозначим через D диаграмму M. Тогда M' удовлетворяет K и D, и, кроме того, $K \cup D$ полно. Пусть теперь X — произвольное высказывание, определенное и истинное в M. В этом случае X определено в $K \cup D$ и, следовательно, выводимо из $K \cup D$. Отсюда следует, что X истинно также в M', и M', таким образом, есть элементарное расширение M.

Обратно, предположим, что K модельно полно согласно второму определению, и пусть D — диаграмма модели M множества K. Мы должны показать, что $K \cup D$ полно. Если $K \cup D$ не полно, то найдется высказывание X, определенное в $K \cup D$, такое, что ни X, ни $\sim X$ не выводимы из $K \cup D$. Одно из этих высказываний должно быть истинно в M — мы можем предположить без ограничения общности, что X истинно в M. Если X не выводимо из $K \cup D$, то $K \cup D \cup \{\sim X\}$ непротиворечиво и имеет модель M'. Но M' — расширение M и модель K. Отсюда вытекает, что M' должно быть элементарным расширением, а следовательно, должно удовлетворять X. Полученное противоречие показывает, что $K \cup D$ полно, и, таким образом, два определения модельной полноты действительно эквивалентны.

Понятие полноты и модельной полноты частично перекрывают друг друга, но ни одно из них не содержит другое. В самом деле, пусть K — множество всех высказываний, сформулированных с помощью отношения порядка $Q(x, y)$ (т. е. $x \leqslant y$) без индивидов; эти высказывания выполняются в любой упорядоченной последовательности $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, например, в последовательности целых положительных чисел. Заметим, что отношение равенства в этом случае может быть заменено предикатом $Q(x, y) \wedge Q(y, x)$. Диаграммой D структуры M является множество всех высказываний вида $Q(a_i, a_j)$ при $i \leqslant j$ и $\sim Q(a_i, a_j)$ при $i > j$, i, $j = 1, 2, \ldots$ Высказывание $\forall x Q(a_1, x)$ определено в $K \cup D$ и истинно в M, однако оно ложно в структуре M', которая задается бесконечной последовательностью $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ (a_0 — дополнительный индивид), хотя M' изоморфно M и является в одно и то же время моделью K и расширением M *).

С другой стороны, как мы вскоре покажем, понятие алгебраически замкнутого поля, сформулированное в терминах обычных отношений E, S, P, модельно полно. Однако это понятие, безусловно, не полно, так как ввиду неопределенности характеристики поля высказывание

$$X = \forall x \forall y [S(x, x, y) \supset S(y, y, y)]$$

не может быть ни доказано, ни опровергнуто (т. е. ни X, ни $\sim X$ не выводимы).

Займемся теперь выяснением необходимого и достаточного условия модельной полноты. Правильно построенную формулу (ппф), заданную в предваренной нормальной форме, будем называть *примитивной*, если

*) Остается заметить, что множество K полно. (*Прим. перев.*)

она экзистенциальна (т. е. принадлежит классу E_1) и ее матрица является конъюнкцией формул первого порядка (т. е. заключенных в скобки атомарных формул) и отрицаний таких формул. Ввиду сказанного мы получим примитивное высказывание, если возьмем конъюнкцию некоторого числа элементов диаграммы, заменим отдельные элементы этой конъюнкции переменными и впереди поставим соответствующие кванторы существования.

4.2.1. Теорема. (Признак модельной полноты.) *Пусть K — непустое и непротиворечивое множество высказываний. Для того чтобы K было модельно полным, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух моделей M и M' множества K, таких, что $M \subset M'$, любое примитивное высказывание, определенное в M, было истинно в M' тогда и только тогда, когда оно истинно в M.*

Доказательство. Условие теоремы необходимо. Пусть M и M' — модели непустого множества K и M' — расширение M такое, что некоторое примитивное высказывание X, определенное в M, истинно в M', но ложно в M. Но тогда согласно второму определению модельной полноты K не может быть модельно полным.

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть $S = \{(M, X)\}$ — множество всех таких пар, что M — модель K (с диаграммой D), X — высказывание, определенное в M (и, следовательно, в $K \cup D$), такое, что ни X, ни $\sim X$ не выводимы из $K \cup D$. Если K не является модельно полным, то S непусто. Более того, в этом случае S содержит пару, второй элемент которой задан в предваренной нормальной форме. Действительно, если (M, X) — любой элемент из S и X' — эквивалентное X высказывание в предваренной нормальной форме с теми же отношениями и индивидами, что и у X (такое X', как известно, существует), то (M, X') также принадлежит S. Кроме того, в любом элементе из S второй член пары должен обязательно содержать по меньшей мере один квантор. В самом деле, если X не содержит кванторов и истинно в M, то оно также истинно в любом расширении M и, следовательно, выводимо из одного D; если же $\sim X$ истинно в M, то тогда $\sim X$ выводимо из D. Таким образом, (M, X) не может принадлежать S. Наконец, если S не пусто, то в S найдется пара, второй член которой задан в предваренной нормальной форме и начинается квантором существования. Действительно, если $(M, X) \in \in S$, то $(M, \sim X) \in S$; если X начинается квантором общности, то обычная редукция $\sim X$ к предваренной нормальной форме (например, от $\sim[\forall x Z(x)]$ к $\exists x[\sim Z(x)]$) приводит к высказыванию, начинающемуся с квантора существования. Таким образом, пусть $S' = \{(M, X)\}$ — множество всех таких пар, что M — модель K (с диаграммой D), X — высказывание в предваренной нормальной форме, которое определено в M и начинается квантором существования, и ни X, ни $\sim X$ не выводимы из K. Тогда мы уже показали, что S' не может быть пустым, если K не является модельно полным.

Предположим, что K не является модельно полным, и пусть (M, X_0) — элемент из S', у которого высказывание X_0 имеет минимальное число кванторов. Пусть, скажем, $X_0 = \exists z Q(z)$, где число кванторов в Q на единицу меньше, чем в X_0. По предположению, множество $K \cup D \cup \{X_0\}$ непротиворечиво и обладает моделью M'. M' является тогда моделью K и расширением M таким, что при некотором $a \in M'$ $Q(a)$ истинно в этой структуре. Поскольку $Q(a)$ содержит меньше кванторов, чем X_0, пара $(M', Q(a)) \notin S'$. Но, с другой стороны, $Q(a)$ определено в M' и потому либо $Q(a)$, либо $\sim Q(a)$ должно быть выводимо из $K \cup D'$, где D' — диаграмма M' *). Но $\sim Q(a)$ не может быть выводимо из $K \cup D'$, так как $Q(a)$ истинно в структуре M', которая является моделью $K \cup D'$. Следовательно, $Q(a)$ выводимо из $K \cup D'$ и, поскольку $Q(a) \supset [\exists z Q(z)]$, т. е. $Q(a) \supset X_0$, является теоремой узкого исчисления предикатов, X_0 также выводимо из $K \cup D'$. Отсюда следует, что найдется высказывание Y,

*) Допущена небольшая неточность. Из того, что $(M', Q(a)) \notin S'$ вовсе не следует, что либо $Q(a)$, либо $\sim Q(a)$ выводимо из $K \cup D'$ так как $(M', Q(a))$ может принадлежать S. Однако характер проводимых редукций от S к S' показывает, что если пара (M', X_0) имеет минимальное число кванторов в S', то эта пара по-прежнему остается минимальной в множестве S'' всех пар $(M, X) \in S$, где X задано в предваренной нормальной форме. Отсюда уже следует, что $(M', Q(a)) \notin S$, так как иначе $(M', Q(a)) \in S''$. *(Прим. перев.)*

которое представляет собой конъюнкцию элементов из D' и тем самым не содержит кванторов, такое, что $Y \supset X_0$ выводимо из K. Пусть $Y = Y(a_1, \ldots, a_m)$, где явно выписаны лишь индивиды, встречающиеся в Y, но не содержащиеся в M, $m \geqslant 0$. Так как X_0 определено в M и все индивиды K принадлежат M, то индивиды $a_1, \ldots, a_m$ не входят в X_0 и K. Кроме того, m должно быть обязательно положительным, так как в противном случае Y было бы конъюнкцией элементов из D и, следовательно, выводимо из D. Но $Y \supset X_0$ выводимо из K, а потому X_0 выводимо из $K \cup D$, вопреки предположению. Теперь из $K \vdash Y \supset X_0$ следует, что $Z \wedge Y \supset X_0$ является теоремой узкого исчисления предикатов, где Z — некоторая конъюнкция конечного числа элементов из K. Отсюда получаем, что $Y(a_1, \ldots, a_m) \supset [Z \supset X_0]$ — теорема, и на основании одного из правил вывода в исчислении предикатов

$$[\exists y_1 \ldots \exists y_m Y(y_1, \ldots, y_m)] \supset [Z \supset X_0]$$

является теоремой при подходящем выборе переменных y_i (т. е. y_i не должны выходить в $Y(a_1, \ldots, a_m)$). Полагая $X_1 = \exists y_1 \ldots \exists y_m Y(y_1, \ldots, y_m)$, мы получаем, что $Z \supset [X_1 \supset X_0]$ — теорема, и потому $K \vdash [X_1 \supset X_0]$. Утверждается, что $(M, X_1) \in S'$. В самом деле, X_1 определено в M, задано в предваренной нормальной форме и начинается квантором существования. В то же время X_1 не выводимо из $K \cup D$, так как иначе ввиду $K \vdash [X_1 \supset X_0]$ X_0 было бы выводимым из $K \cup D$, вопреки нашему предположению. С другой стороны, $\sim X_1$ также не выводимо из $K \cup D$, поскольку X_1 истинно в M', которая является моделью $K \cup D$. Итак, $(M, X_1) \in S'$. Но X_1 примитивно и потому, если условие теоремы выполнено, X_1 истинно в M' только в том случае, когда X_1 истинно в M. Поскольку X_1 экзистенциально, оно должно иметь место в любом расширении M и, следовательно, быть выводимым из D. Это, однако, противоречит сделанному ранее заключению о том, что X_1 не выводимо из $K \cup D$. Мы получаем, таким образом, что если условия 4.2.1 выполнены, то S' и S пусты, т. е. K модельно полно.

Как будет видно в дальнейшем, понятие модельной полноты достаточно важно само по себе. Однако во многих случаях оно может быть также использовано для установления обычной полноты следующим способом.

Пусть K — непустое и непротиворечивое множество высказываний. Модель M_0 множества K будем называть *простой моделью* K, если каждая модель M множества K обладает подструктурой, изоморфной M_0. Так, например, если K — множество аксиом плотно упорядоченного множества, то простой моделью K является любое счетное плотно упорядоченное множество без первого и последнего элементов *). Действительно, известно (и легко проверяется), что каждое плотно упорядоченное бесконечное множество содержит плотно упорядоченное счетное подмножество без первого и без последнего элементов. Как показывает этот пример, данная модель K может содержать различные простые модели. В самом деле, в нашем примере упорядоченное множество типа ω **) также является простой моделью K, так что две простые модели данного множества K, вообще говоря, не изоморфны. С другой стороны, допустим, что K — множество аксиом поля фиксированной характеристики p ($p=0$, 2, 3, ...). В этом случае все простые модели изоморфны простому полю, т. е. полю рациональных чисел при $p=0$ и полю вычетов по модулю p при $p \neq 0$. Кроме того, каждая модель K содержит одну-единственную простую модель.

4.2.2. Теорема. *Пусть M_0 — простая модель множества высказываний K и пусть D_0 — диаграмма M_0. Тогда любое высказывание X, определенное в K и выводимое из $K \cup D_0$, выводимо также из одного K.*

Доказательство. Согласно предположению, существуют такие $Y_1, \ldots, Y_m \in D$ (где m всегда для простоты можно предполагать положительным), что $K \vdash$ $\vdash Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_m \supset X$ или $K \vdash Y \supset X$, где $Y = Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_m$. Пусть $Y = Y(a_1, \ldots, a_n)$, где явно выписаны лишь те индивиды, которые входят в Y, но не встречаются в K. Тогда, применяя рассуждение, использованное при

*) Множество K обязательно должно содержать аксиому, гарантирующую бесконечность любой модели K. *(Прим. перев.)*

**) Здесь ω обозначает тип множества неотрицательных рациональных чисел. *(Прим. перев.)*

доказательстве 4.2.1, мы получаем, что

$$K \vdash \exists y_1 \ldots \exists y_n Y(y_1, \ldots, y_n) \supset X.$$

Экзистенциальное высказывание $Z = \exists y_1 \ldots \exists y_n Y(y_1, \ldots$ $\ldots, y_n)$ истинно в M_0 и потому истинно также в любой структуре, изоморфной M_0, и в любом расширении такой структуры. Но, по нашему предположению, *все* модели K являются расширениями структур, изоморфных M_0, а следовательно, Z истинно в любой модели K. Отсюда вытекает, что X также истинно в любой модели K и, следовательно, $K \vdash X$. Теорема доказана.

4.2.3. Теорема (признак простой модели). *Если K — модельно полное множество высказываний, обладающее простой моделью, то K полно.*

Доказательство. Пусть M_0 — простая модель K и X — любое высказывание, определенное в K. Мы должны доказать, что либо $K \vdash X$, либо $K \vdash \sim X$. Поскольку X определено в M_0, либо X, либо $\sim X$ истинно в M_0, и мы будем предполагать без ограничения общности, что X истинно в M_0. Из модельной полноты K следует, что X выводимо из $K \cup D_0$, где D_0 — диаграмма M_0. Но так как M_0 — простая модель K, то в силу 4.2.2 X выводимо из K. Теорема доказана.

Другой признак, посредством которого устанавливается обычная полнота с помощью модельной полноты, непосредственно зависит от существования общих расширений. В некоторых случаях он оказывается довольно полезным, хотя и реже, чем 4.2.3.

4.2.4. Теорема. *Предположим, что любые модели M_1 и M_2 модельно полного множества высказываний K, общие индивиды которых встречаются в K, могут быть обе вложены как подструктуры в одну общую модель множества K. Утверждается, что при этих условиях K полно.*

Доказательство. Предположим, что K не полно. Тогда найдется такое высказывание X, определенное в K, что ни X, ни $\sim X$ не выводимо из K. Таким образом, множества $K \cup \{\sim X\}$ и $K \cup \{X\}$ непротиворечивы и обладают соответственно моделями M_1 и M_2. При этом M_1 и M_2 мы всегда можем выбрать таким способом, что их общими индивидами будут только индивиды из K. По условию теоремы K обладает моделью M, которая является расширением обеих структур M_1 и M_2. Но поскольку K модельно полно, из истинности $\sim X$ в M_1 следует истинность $\sim X$ в M. Аналогично, поскольку X истинно в M_2, X тоже истинно и в M, и мы приходим к противоречию, которое и доказывает полноту K.

В качестве первого приложения теорем 4.2.1 и 4.2.3 снова рассмотрим множество K аксиом плотно упорядоченного множества без первого и последнего элементов в терминах отношений равенства $E(x, y)$ и порядка $Q(x, y)$ (т. е. $x \leqslant y$). Мы намерены показать, что K модельно полно.

Пусть M и M' — два плотно упорядоченных множества без первого и последнего элементов такие, что M' — расширение M. Пусть X — примитивное высказывание, сформулированное в терминах отношений E и Q и некоторого числа индивидов из M, такое, что X истинно в M'. Мы должны показать, что X истинно уже в M. Пусть

4.2.5. $X = \exists y_1 \ldots \exists y_n Z(y_1, \ldots, y_n)$,

где матрица Z не содержит никаких кванторов. По предположению, предикат $Z(y_1, \ldots, y_n)$ истинен для некоторого множества объектов $b_1, \ldots, b_n \in M'$ (т. е. истинен в точке $(b_1, \ldots, b_n)$ пространства M'^n), и мы должны показать истинность этого предиката для некоторого множества $c_1, \ldots, c_n \in M$. Интерпретируя 4.2.5 в обычном математическом языке, мы видим, что X означает существование решения конечной системы равенств и неравенств вида

4.2.6. $\alpha = \beta, \alpha \neq \beta, \alpha \leqslant \beta, \alpha > \beta$.

В этой записи α и β обозначают либо элементы M, либо y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

По условию, рассматриваемая система имеет решение $y_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в M', и мы должны показать, что эта система разрешима уже в M. Займемся вначале тем, что сократим число условий в 4.2.6 следующим способом. Соотношение вида $\alpha \neq \beta$, содержащееся в 4.2.6, мы заменим на $\alpha < \beta$ или $\beta < \alpha$, в соответствии с тем, какое отношение истинно в M' для $y_i = b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Аналогично, соотношение вида $\alpha \leqslant \beta$ заменим на $\alpha < \beta$ или $\alpha = \beta$ в зависимости от того, какое из них истинно в M' для $y_i = b_i$, $i = 1, \ldots, n$. И, наконец, мы можем исключить соотношения вида $\alpha = \beta$, подставив во все остальные отношения α вместо β. Таким образом, мы видим, что при доказательстве модельной полноты K можно ограничиться конечной системой неравенств

4.2.7. $\alpha_j < \beta_j$, $j = 1, \ldots, m$,

где α_j, β_j обозначают либо элементы $a_i \in M$, либо неизвестные y_i, причем все неравенства этой системы выполняются в M' при $y_i = b_i$. Если в множестве элементов a_i и b_i найдется пара равных элементов (в смысле отношения равенства в M и в M'), то один из элементов этой пары опять можно исключить. В конце концов мы придем к такой ситуации, когда все a_i отличны друг от друга, b_i отличны от a_i и различны между собой.

Пусть все a_i, встречающиеся в полученной системе, которую снова обозначим 4.2.7, расположены в определенном порядке: $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, $k \geqslant 0$. Эти элементы подразделяют M' на $k+1$ интервалов $I'_0, I'_1, \ldots, I'_k$, задаваемых соответственно неравенствами $y \leqslant a_1$, $a_1 < y \leqslant a_2, \ldots, a_k < y$. Если $k = 0$, то I'_0 содержит все элементы M'. Константы b_i находятся *внутри* интервалов I'_j, так как $b_i \neq a_j$. Пусть интервал I'_j содержит элементы $b_1^{(j)} < b_2^{(j)} < \ldots < b_{l_j}^{(j)}$ из множества элементов b_i, так что $a_{j-1} < b_1^{(j)}$, если в I'_j есть левый конец, и $b_{l_j}^{(j)} < a_j$, если в I'_j есть правый конец. Пусть $(c_1^{(j)}, \ldots, c_{l_j}^{(j)})$ — любое множество из l_j элементов, принадлежащих M и находящихся внутри интервала I'_j, так что $c_1^{(j)} < c_2^{(j)} < \ldots < c_{l_j}^{(j)}$. Отобразим множество $S' = \{a_i, b_m^{(j)}\}$, $i = 1, \ldots, k$; $j = 0, \ldots, k$; $m = 1, \ldots, l_j$, на множество $S = \{a_i, c_m^{(j)}\}$ с теми же i, j, m, сопоставляя $a_i \leftrightarrow a_i$, $b_m^{(j)} \leftrightarrow c_m^{(j)}$ и замечая, что множество $\{b_m^{(j)}\}$, $m = 1, \ldots, l_j$; $j = 0, \ldots, k$, совпадает с множеством $(b_1, \ldots, b_n)$. Соответствие $S \leftrightarrow S'$ сохраняет порядок. Отсюда следует, что мы снова получим решение системы 4.2.7, заменив все b_i соответствующими c_i. Но все объекты c_i принадлежат M и нами, следовательно, доказана

4.2.8. Теорема. *Теория плотно упорядоченного множества без первого и без последнего элементов модельно полна.*

Заметив, что любое счетное плотно упорядоченное множество без первого и последнего элементов является простой моделью для рассматриваемой теории, мы на основании 4.2.3 заключаем, что теория плотно упорядоченного множества без первого и последнего элементов полна. Таким образом, 4.1.3 получена нами еще раз, но уже другим способом.

Следующий результат имеет несколько более глубокий характер.

Пусть K — множество аксиом понятия дискретно упорядоченного множества с первым элементом, но без последнего, сформулированное в терминах отношений $E(x, y)$ и $Q(x, y)$ (т. е. $x \leqslant y$, как и раньше). K содержит аксиомы эквивалентности для E и аксиому подстановочности относительно Q (см. 2.1 выше). В дополнение к этим аксиомам K содержит следующие высказывания:

4.2.9. $\forall x \forall y \forall z[Q(x, y) \wedge Q(y, z) \supset Q(x, z)]$

$$\forall x \forall y[Q(x, y) \wedge Q(y, x) \supset E(x, y)]$$

$$\forall x \forall y[Q(x, y) \vee Q(y, x)]$$

$$\exists x \forall y[Q(x, y) \supset E(x, y)]$$

$$\forall x \exists y \forall z[Q(x, y) \wedge \sim E(x, y) \wedge [Q(x, z) \wedge \wedge Q(z, y) \supset E(x, z) \vee E(z, y)]]$$

$$\forall x \exists y \forall z \forall v[[Q(v, x) \supset E(x, v)] \vee [Q(y, x) \wedge \wedge \sim E(x, y) \wedge [Q(z, x) \wedge Q(y, z) \supset E(x, z) \vee E(z, y)]]].$$

Первые два из этих высказываний не требуют никаких комментариев. Четвертое утверждает наличие первого элемента, а два последних высказывания утверждают, что для каждого элемента существует непосредственно следующий за ним и непосредственно предшествующий ему (если, конечно, этот элемент не первый).

4.2.10. Теорема. *Множество K полно.*

Мы хотим доказать эту теорему, используя модельную полноту, однако, как легко усмотреть, множество K

не является модельно полным. В самом деле, высказывание $\forall y[Q(y, a) \supset E(a, y)]$, утверждающее, что объект a — первый элемент, вполне может оказаться истинным в модели M множества K и ложным в некотором расширении M' структуры M, которое также есть модель K. Такая структура M' получается из M добавлением нового элемента, предшествующего первому элементу a в M. В соответствии с этим дополним K следующим образом. Введем индивид a и бинарный предикат $S(x, y)$ (читается «y непосредственно следует за x» или «x — предшественник y») и обозначим через K' множество, полученное из K заменой двух последних высказываний в 4.2.9 аксиомами

4.2.11. $\forall y[Q(y, a) \supset E(a, y)]$

$$\forall x \forall y \forall z[[S(x, y) \wedge S(x, z) \supset Q(x, y) \wedge \sim E(x, y) \wedge \wedge E(y, z)] \wedge [S(x, y) \wedge Q(x, z) \wedge Q(z, y) \supset E(x, z) \vee E(z, y)]]$$

$$\forall x \exists y \exists z \forall v[S(x, y) \wedge [Q(v, x) \supset E(x, v)] \vee S(z, x)]]^{*)}.$$

Как легко видеть, $K' \vdash K$. Мы намерены доказать модельную полноту K'. Действительно, пусть M — модель K' и M' — расширение M, которое также есть модель K'. Модельный признак 4.2.1 в этом случае означает следующее. Пусть дана система отношений типа

4.2.12. $\alpha = \beta$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha > \beta$, $S(\alpha, \beta)$, $\sim S(\alpha, \beta)$,

где α, β обозначают элементы M или неизвестные y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Допустим, что эта система имеет в M' решение $y_i = b_i$; мы должны тогда показать, что система разрешима также и в M. Рассмотрим любое высказывание вида $\sim S(\alpha, \beta)$, которое, по условию, имеет место в M'. Это может произойти в тех случаях, когда $\beta < \alpha$, $\beta = \alpha$ или когда существует элемент b такой, что $\alpha < b$ и $b < \beta$, однако в каждом конкретном случае выполняется лишь одна из этих возможностей. Исключим отношение $\sim S(\alpha, \beta)$ и вместо него добавим в нашу систему $\beta < \alpha$ в первом случае и $\alpha = \beta$ — во втором. В третьем случае

---

*) Эта аксиома, так же как и шестая аксиома 4.2.9, пропущена автором. Без них, как легко видеть, не верны все сформулированные здесь теоремы о понятии дискретно упорядоченного множества. *(Прим. перев.)*

введем новую неизвестную y' и $\sim S(\alpha, \beta)$ заменим отношениями $\alpha<y'$ и $y'<\beta$. Применяя этот метод ко всем высказываниям вида $\sim S(\alpha, \beta)$, мы получим другую систему, состоящую из выражений типа первых пяти, указанных в 4.2.12. С помощью редукции, использованной при доказательстве 4.2.8, мы можем теперь привести данную систему к виду

$$\alpha<\beta, \quad S(\alpha, \beta).$$

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — индивиды из M (расположенные именно в этом порядке), встречающиеся в нашей системе. Пусть также в систему входят неизвестные y_i, $i=1, \ldots, m$, и $y_i=b_i$, $i=1, \ldots, m$, есть решение системы, где $b_1, \ldots, b_m \in M'$. При этом мы опять можем полагать, что все элементы множества $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m)$ попарно различны. Как и раньше, a_i подразделяют M и M' на $k+1$ интервалов I_l, I_l' соответственно, $l=0, 1, 2, \ldots, k$, задаваемых условиями $y\leqslant a_1$, $a_1<y\leqslant a_2, \ldots, a_k<y$. Этими интервалами множество элементов b_i разделяется на $k+1$ множеств, $b_1^{(j)}<b_2^{(j)}< \ldots <b_{l_j}^{(j)}$, лежащих внутри интервала I_j'. Нам теперь достаточно показать, что элементы $b_i^{(j)}$ можно заменить элементами $c_i^{(j)} \in M$ с сохранением порядка так, что если $S(a_{j-1}, b_1^{(j)})$, $S(b_i^{(j)}, b_{i+1}^{(j)})$ или $S(b_{l_j}^{(j)}, a_j)$ истинно в M', то соответствующее отношение $S(a_{j-1}, c_1^{(j)})$, $S(c_i^{(j)}, c_{i+1}^{(j)})$ или $S(c_{l_j}^{(j)}, a_j)$ истинно в M. Заметим, что если элемент $c \in M$ находится на n-м месте после элемента b, где n — целое положительное число, то при переходе от M к M' в интервале от b до c не появится никаких новых элементов. В связи с этим будем различать I_j, состоящие из конечного числа индивидов, и бесконечные I_j. В первом случае все $b_i^{(j)}$ уже с самого начала лежали в M. Во втором случае те элементы $b_i^{(j)}$, которые находятся на n-м месте после a_j (n — любое целое положительное число), также необходимо принадлежат M; то же самое, разумеется, верно и для n-х «предшественников» a_j. Оставшиеся $b_i^{(j)}$ разбиваются на конечное число *сегментов*, где под *сегментом* мы понимаем множество следующих друг за другом элементов

из M'. Поскольку, однако, наша система содержит выражения вида $S(\alpha, \beta)$ и не содержит выражений $\sim S(\alpha, \beta)$, для получения искомого соответствия достаточно отобразить все эти $b_i^{(j)}$ на множество следующих друг за другом элементов из I_j. Такое множество в M обязательно существует, так как число элементов в интервале между a_{j-1} и a_j бесконечно по предположению. В заключение отметим, что то же самое рассуждение с очевидными модификациями проходит для первого и последнего интервалов. Таким образом, нами доказана

4.2.13. Теорема. *Множество K' модельно полно.*

Более того, K' обладает простой моделью M_0 и эта простая модель единственна с точностью до изоморфизма. В качестве M_0 можно взять любое упорядоченное множество порядкового типа ω, начальным элементом которого является a. Следовательно, имеет место

4.2.14. Теорема. *K' — полное множество высказываний.*

Осталось показать, что полнота K' влечет полноту K. Пусть X — любое высказывание, определенное в K. X определено также в K', и, поскольку K' полно, либо X, либо $\sim X$ выводимо из K'. Допустим, для определенности, что $K' \vdash X$, и покажем тогда, что $K \vdash X$. Обозначим через Z_1, Z_2, Z_3 соответственно аксиомы 4.2.11, а через W — конъюнкцию оставшуюся в K' высказываний. Так как эти высказывания принадлежат K, то $K \vdash W$. По предположению, высказывание

$$Z_1 \wedge Z_2 \wedge Z_3 \wedge W \supset X$$

или, что то же самое, высказывание

$$Z_1 \supset [Z_2 \wedge Z_3 \wedge W \supset X]$$

является теоремой. Поскольку в выражении $[Z_2 \wedge Z_3 \wedge W \supset X]$ индивид a не встречается, Z_1 можно заменить высказыванием

$$Z_1^* = \exists x \forall y [Q(x, y) \supset E(x, y)],$$

так что $Z_1^* \supset [Z_2 \wedge Z_3 \wedge W \supset X]$ и тем самым $Z_2 \wedge Z_3 \supset [Z_1^* \wedge W \supset X]$ являются теоремами. Допустим теперь, что существует M — модель K, в которой X ложно. Введем в M дополнительно бинарное отношение $S(x, y)$, полагая по определению, что $S(b, c)$ истинно для b, $c \in M$ в том и только в том случае, когда

$$[Q(b, c) \wedge \sim E(b, c) \wedge [\forall z[Q(b, z) \wedge Q(z, c) \supset E(b, z) \vee \vee E(z, c)]]]$$

истинно в M. Обозначим полученную структуру через M'. Легко проверяется, что Z_2 и Z_3 истинны в M'. Кроме того, Z_1^* и W также истинны в M', поскольку они истинны в M. Таким образом, мы приходим к противоречию, которое показывает, что X на самом деле выводимо из K. Итак, K полно.

Приведенный выше пример показывает, как можно расширять границы применимости признака модельной полноты путем введения вспомогательных отношений и индивидов. Различные другие применения понятия модельной полноты можно найти в работе А. Робинсона [7]. В дальнейшем мы установим в дополнение к разобранному выше модельную полноту только для двух наиболее важных случаев.

Пусть $K = \overline{K}'_{CF}$ (см. п. 2.2) — множество аксиом алгебраически замкнутого поля. Мы намерены показать, что K модельно полно. Среди всех возможных доказательств этого факта мы выбрали то, которое, на наш взгляд, требует относительно мало алгебраических результатов.

Итак, пусть M — алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики и пусть M' — другая модель K, являющаяся собственным расширением M. Предположим, что некоторое примитивное высказывание X определено в M и истинно в M'. Нам нужно показать, что X истинно также и в M. В нашем случае X выражает разрешимость конечной системы T уравнений и неравенств следующего типа:

4.2.15. $\alpha=\beta$, $\alpha\neq\beta$, $\alpha+\beta=\gamma$, $\alpha+\beta\neq\gamma$, $\alpha\beta=\gamma$, $\alpha\beta\neq\gamma$.

В этих соотношениях, записанных с помощью обычных алгебраических обозначений, греческие буквы означают либо индивиды a_i, $i=1, \ldots, k$, принадлежащие M, либо «неизвестные» y_i, $i=1, \ldots, m$. По предположению, системе T удовлетворяют элементы $y_i=b_i$ из M'. Рассмотрим алгебраическое замыкание M^* поля $M(b_1, \ldots, b_m)$.

Степень трансцендентности M^* над M не больше m, и система T разрешима в M^*. Если $b_1, \ldots, b_m$ все принадлежат M, то $M^* = M$ и доказывать нечего. Пусть, следовательно, не все b_i входят в M. В этом случае существует цепочка из $l+1$ алгебраически замкнутых полей:

$$M = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_l = M^*, \ l \leqslant m,$$

таких, что каждое поле имеет степень трансцендентности 1 над предшествующим, если таковое имеется. Если теперь T имеет решение в M_0, то доказательство окончено; если же нет, то найдутся два таких поля $M_i \subset M_{i+1}$, что T разрешима в M_{i+1}, но не в M_i (т. е. X истинно в M_{i+1} и ложно в M_i). Поскольку X определено в M_i, мы можем заменить M и M' на M_i и M_{i+1} соответственно. Мы видим, таким образом, что доказательство нашего первоначального утверждения достаточно провести в том частном случае, когда степень трансцендентности M' над M равна 1. Понятно, что X истинно в любом алгебраически замкнутом поле M'', которое является собственным расширением M, поскольку существует изоморфное вложение M' в M'', составляющее на месте все элементы M.

Пусть c — индивид, не входящий в M. Для любого полинома $p(x)$ с коэффициентами в M через $Q_p(x)$ обозначим предикат, выражающий равенство $p(x)$ нулю. Пусть H — множество всех высказываний $\sim Q_p(c)$ для всевозможных $p(x)$, не равных тождественно нулю. H утверждает, что c трансцендентно над M. Пусть $K' = K \cup H \cup D$, где D — диаграмма M. Так как каждая модель K' имеет по меньшей мере степень трансцендентности 1 над M, то ввиду сказанного ранее X истинно в ней. Отсюда вытекает, что X выводимо из K' и, следовательно, из объединения $K \cup D$ с некоторым конечным множеством высказываний: $\sim Q_{p_1}(c), \ldots, \sim Q_{p_j}(c)$. Эти высказывания можно заменить одним-единственным высказыванием $\sim Q_{p_0}(c)$, где

$$p_0(x) = p_1(x) \ldots p_j(x).$$

Итак,

$$K \cup D \vdash \sim Q_{p_0}(c) \supset X$$

и потому на основании стандартного рассуждения

4.2.16. $K \cup D \vdash [\exists x[\sim Q_{p_0}(x)]] \supset X.$

K и D истинны в M. То же самое будет справедливо и для высказывания $\exists x[\sim Q_{p_0}(x)]$, если в M найдется элемент, отличный от всех корней полинома $p_0(x)$ (т. е. от элементов конечного множества). Но любое алгебраически замкнутое поле бесконечно, а коль скоро это так, существует такой индивид d, что $\sim Q_{p_0}(d)$ истинно в M. Это показывает, что $\exists x[\sim Q_{p_0}(x)]$ истинно в M, и на основании 4.2.16 мы заключаем, что X также истинно в M. Таким образом, установлена

4.2.17. Теорема. *Теория алгебраически замкнутого поля является модельно полной.*

Ввиду того, что $\overline{K}'_{CF}$ не полно, мы получаем обещанный ранее пример модельно полного, но не полного множества высказываний. Однако если добавить к $\overline{K}'_{CF}$ аксиому (при $p \neq 0$) или множество аксиом (при $p = 0$), фиксирующих характеристику поля, то полученное множество $\overline{K}_F^{(p)}$ имеет простую модель, т. е. алгебраическое замыкание простого поля данной характеристики. Отсюда следует, что множества $\overline{K}_F^{(p)}$, которые по-прежнему модельно полны, являются также (как показывалось раньше другим способом) полными.

В качестве последнего применения признака модельной полноты докажем полноту множества $K = \overline{K}_{OF}$ аксиом вещественно замкнутого упорядоченного поля, сформулированных в терминах отношений равенства, сложения, умножения и порядка: E, S, P, Q. Наша ближайшая цель — показать, что $\overline{K}_{OF}$ модельно полно. В дальнейшем нам потребуется следующий вспомогательный результат.

4.2.18. Теорема. *Пусть M — вещественно замкнутое поле, и пусть $M(b)$ — простое трансцендентное упорядоченное расширение M. Тогда порядок $M(b)$ однозначно определяется множеством отношений*

4.2.19. $b \leqslant a_\nu$ *или* $a_\nu \leqslant b$,

истинных в $M(b)$, где a_ν пробегают все элементы M.

Доказательство. Достаточно показать, что на основании 4.2.19 однозначно выясняется для любого элемента $t \in M(b)$, $t \neq 0$, положительный он или отрицательный. Итак, пусть $t \in M(b)$ и

4.2.20.

$$t = a\,\frac{a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + b^k}{a_0' + a_1' b + a_2' b^2 + \ldots + b^m}, \qquad k \geqslant 0, \quad m \geqslant 0,$$

где a, a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_0', a_1', a_2', $\ldots$ принадлежат M. Если $t \in M$ и $t \neq 0$, то t положителен или отрицателен, в зависимости от того, равен он квадрату некоторого элемента из M или нет. В общем случае числитель и знаменатель 4.2.20 могут быть разложены на линейные и квадратичные множители:

4.2.21. $$t = \frac{a \prod (b - b_j) \prod \left((b - b_j)^2 + c_j^2\right)}{\prod (b - b_j) \prod \left((b - b_j)^2 + c_j^2\right)},$$

где b_j, $c_j \in M$ (в различных символах произведения j пробегает различные множества индексов). Знак a определен, так как $a \in M$. Квадратичные множители в 4.2.21 положительны, в то время как знак линейных множителей определяется 4.2.19. Все вместе однозначно выясняет знак t, что и требовалось доказать.

Для доказательства модельной полноты $\overline{K}_{OF}$ рассмотрим систему T отношений типа

4.2.22. $$\alpha = \beta, \ \ \alpha \neq \beta, \ \ \alpha \leqslant \beta, \ \ \alpha > \beta, \ \ \alpha + \beta = \gamma,$$
$$\alpha + \beta \neq \gamma, \ \ \alpha\beta = \gamma, \ \ \alpha\beta \neq \gamma,$$

где греческие буквы обозначают либо элементы a_i, принадлежащие модели M множества $\overline{K}_{OF}$, $i = 1, \ldots, k$, либо неизвестные y_i, $i = 1, \ldots, m$. Мы должны показать, что если T имеет решение $y_i = b_i$ в некотором расширении M' структуры M, которое также является моделью K, то T разрешима уже в M. Дело в том, что существование решения T выражается примитивным утверждением, определенным в M:

$$X = \exists y_1 \ldots \exists y_m Q(y_1, \ldots, y_m),$$

которое предполагается истинным в M' и истинность которого в M мы хотим доказать. Рассуждение, подобное тому, которое проводилось при доказательстве 4.2.17, показывает, что степень трансцендентности M' над M можно предполагать равной 1. Пусть b — произвольный фиксированный элемент из M', не содержащийся в M, тогда M' есть вещественное замыкание $M(b)$. Пусть H — совокупность всех высказываний $\sim E(b, a_\nu)$, где a_ν пробегают M, и всех высказываний

4.2.23. $Q(b, a_\nu)$ и $Q(a_\nu, b)$,

истинных в M'. Положим $K' = K_{OF} \cup D \cup H$, где D — диаграмма M. Пусть M'' — любая модель K' и M^* — вещественное замыкание $M(b)$ в M''. Согласно 4.2.18 M^* изоморфна M' и, следовательно, X истинно в M^*, а тем самым и в M''. Отсюда видно, что X выводимо из K', а потому выводимо из $\overline{K}_{OF} \cup D$ и из некоторого конечного подмножества H' множества H, скажем, $H' = \{Y_1, \ldots, Y_h\}$. Пусть $Y = Y(b) = Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_h$, где явно выписан лишь индивид b, встречающийся в Y, поскольку все остальные индивиды из Y, как легко заметить, содержатся в M. Во избежание тривиальных затруднений мы можем заранее позаботиться о том, чтобы H' не было пустым. Имеем тогда

$$\overline{K}_{OF} \cup D \vdash Y(b) \supset X$$

и, следовательно, как обычно,

$$\overline{K}_{OF} \cup D \vdash [\exists y Y(y)] \supset X.$$

Таким образом, для того, чтобы показать истинность X в M, мы должны лишь установить истинность в M высказывания $Z = \exists y Y(y)$. Z — примитивное высказывание, и потому мы вновь сталкиваемся с существованием решения некоторой системы отношений T'. Однако T' имеет специальные свойства: в T' входит одна-единственная неизвестная y и T' содержит только отношения одного из двух типов:

4.2.24. $\alpha \leqslant \beta, \quad \alpha \neq \beta,$

где греческие буквы означают либо y, либо элементы M. Мы знаем, что $y = b$ является решением T' в M', причем b отличен от всех элементов M, а потому мы можем заменить систему 4.2.24 другой, состоящей только из отношений типа $\alpha < \beta$. Окончательная система запишется в виде

4.2.25. $a_i<y, \qquad i=1, \ldots, j,$

$y<a_i, \qquad i=j+1, \ldots, l,$

причем одно из этих множеств может оказаться пустым. Мы будем также предполагать, что все a_i различны и их нумерация согласована с порядком в M. Если оба множества непусты (т. е. $j\geqslant 1$ и $l\geqslant j+1$), то, поскольку система в M' разрешима, $a_j<a_{j+1}$. В этом случае система имеет решение в M при $y=(a_j+a_{j+1})/2$. Если второе множество пусто, то решением является $y=a_j+1$, а если пусто первое (т. е. $j=0$ и $a_{j+1}=a_1$), то $y=a_1-1$. Нами, таким образом, доказана следующая

4.2.26. Теорема. *Теория вещественно замкнутого поля является модельно полной.*

Остается заметить, что поле вещественных алгебраических чисел является (единственной) простой моделью $\overline{K}_{OF}$. Следовательно, на основании 4.2.3 имеет место

4.2.27. Теорема (Тарский). *Теория вещественно замкнутого упорядоченного поля является полной.*

Этот важный результат совсем другим методом был впервые доказан Тарским.

4.3. Относительная модельная полнота. На протяжении этого раздела мы будем предполагать множества высказываний K и K^* непустыми и непротиворечивыми. Напомним, что множество K^* называется *модельно непротиворечивым* относительно множества K, если каждая модель M множества K может быть вложена в модель M^* множества K^*. (Другими словами, M^* есть модель D диаграммы M.) Таким образом, K^* модельно непротиворечиво относительно K, если для каждой модели M множества K с диаграммой D множество $K^*\cup D$ непротиворечиво *). K^* будем называть *модельно полным относительно* K, если для любой модели M множества K с диаграммой D множество $K^*\cup D$ полно.

---

*) Заметим, что модельная непротиворечивость K^* относительно K не совпадает с модельной непротиворечивостью K^* множеству K (см. п. 3.6). Однако в дальнейшем нас будут интересовать лишь те случаи, когда $K^*\supset K$, при которых оба определения совпадают. (*Прим. перев.*)

4.3.1. Теорема. *Пусть множества высказываний K и K^* таковы, что $K \subset K^*$, K^* не содержит новых отношений и индивидов по сравнению с K и K^* модельно непротиворечиво относительно K. Для того чтобы K^* было модельно полным относительно K, необходимо и достаточно, чтобы для любой модели M множества K и любого примитивного высказывания X, определенного в M, X было истинно либо во всех расширениях M, которые являются моделями K^*, либо не было истинно ни в одном из них.*

Доказательство этой теоремы является, по существу, небольшой модификацией доказательства 4.2.1. Необходимое условие теоремы эквивалентно утверждению о том, что или X или $\sim X$ выводимо из $K^* \cup D$. Ввиду того, что для любого K^*, модельно полного относительно K, это свойство выполняется для *всех* высказываний X (а не только для примитивных), необходимость очевидна.

Для доказательства достаточности предположим, что K^* не модельно полно относительно K. Тогда существуют модель M множества K и высказывание X, определенное в M, такие, что ни X, ни $\sim X$ не выводимы из $K^* \cup D$, где D — диаграмма модели M. Мы можем предполагать X заданным в предваренной нормальной форме, выбрав при этом из всех таких моделей M и соответствующих им высказываний X пару (M, X) с минимальным числом кванторов у X. Этот минимум обязательно должен быть положительным, так как в противном случае X или $\sim X$ было бы выводимо уже из одного D. Кроме того, мы можем предполагать, что X начинается квантором существования, беря, если нужно, $\sim X$ и сводя обычным способом это высказывание к предваренной нормальной форме. Итак, пусть $X = \exists z Q(z)$, где $Q(z)$ — ппф в предваренной нормальной форме. X определено в модели M множества K, но ни X, ни $\sim X$ не выводимы из $K^* \cup D$, где D — диаграмма M. Отсюда вытекает существование такой модели M^* множества K^*, что M^* — расширение M и X истинно в M^*, т. е. $Q(a)$ истинно в M^* для некоторого индивида a. Пусть D^* — диаграмма M^*. Поскольку M^* — модель K и $Q(a)$ истинно в M^*, $Q(a)$ выводимо из $K^* \cup D^*$ ввиду минимального свойства X. Таким образом, $K^* \cup D^* \vdash X$, так как $Q(a) \supset X$ —

теорема. Мы хотим показать, что $K^* \cup D \vdash X$. Множество $K^* \cup D^*$ содержит по сравнению с $K^* \cup D$ только высказывания порядка 1 или отрицания таких высказываний. Обозначим через D' множество $D^* - D$. D' не пусто и потому найдется высказывание $Y(a_1, \ldots, a_m)$ (конъюнкция конечного числа элементов из D'), такое, что

$$K^* \cup D \vdash Y(a_1, \ldots, a_m) \supset X.$$

В Y указаны лишь те индивиды, которые не содержатся в M, и, следовательно, не встречаются ни в X, ни в $K^* \cup \cup D$. Отсюда получаем

$$K^* \cup D \vdash [\exists z_1 \ldots \exists z_m Y(z_1, \ldots, z_m)] \supset X.$$

Но $\exists z_1 \ldots \exists z_m Y(z_1, \ldots, z_m)$ — примитивное высказывание, определенное в M и истинное в M^*. Следовательно, в силу условия 4.3.1 $\exists z_1 \ldots \exists z_m Y(z_1, \ldots, z_m)$ выводимо из $K^* \cup D$, а коль скоро это так, X также выводимо из $K^* \cup D$. Последнее, однако, противоречит выбору X, что и завершает доказательство теоремы.

В некоторых случаях относительную модельную полноту бывает легче вывести из обычной полноты, чем непосредственно применять указанный выше признак. Один из таких способов дает следующая

4.3.2. Теорема. *Пусть множества высказываний K и K^* таковы, что $K \subset K^*$, K^* не содержит новых отношений и индивидов по сравнению с K и K^* модельно непротиворечиво относительно K. Если K^* модельно полно в обычном смысле и если для каждой модели M множества K с диаграммой D множество $K^* \cup D$ обладает простой моделью, то K^* модельно полно относительно K.*

Доказательство. Пусть M — произвольная модель K и D — диаграмма M. Мы должны показать, что $K^* \cup D$ полно.

Пусть M_0 — любая простая модель $K^* \cup D$ с диаграммой D_0^* и X — любое высказывание, определенное в $K^* \cup \cup D$, а тем самым и в D. Так как K^* модельно полно, то либо X, либо $\sim X$ выводимо из $K^* \cup D_0^*$; примем для определенности, что $K^* \cup D_0^* \vdash X$. В этом случае X выводимо из $K^* \cup D$ и некоторого конечного множества высказываний $S \subset D_0^* - D$. Если S пусто, то доказывать нечего. Пусть S не пусто и $Y = Y(a_1, \ldots, a_n)$ — конъюнкция элементов S, где явно указаны лишь те индивиды, которые не входят в M, $n \geqslant 1$. Итак,

$$K^* \cup D \vdash Y(a_1, \ldots, a_n) \supset X$$

и, следовательно,

$$K^* \cup D \vdash [\exists y_1 \ldots \exists y_n Y(y_1, \ldots, y_n)] \supset X.$$

Таким образом, для доказательства того, что $K^* \cup D \vdash X$, достаточно установить, что $K^* \cup D \vdash Z$, где $Z = [\exists y_1 \ldots \ldots \exists y_n Y(y_1, \ldots, y_n)]$, иными словами, нужно проверить, что Z истинно во всех моделях $K^* \cup D$. Пусть M_1 — любая модель этого множества; согласно определению простой модели существует изоморфизм M_0^* на подструктуру M_1^* структуры M_1, оставляющий на месте индивиды из D. Отсюда непосредственно следует, что Z истинно в M_1^*, а ввиду экзистенциальности Z оно истинно также и в M_1 (расширении M_1^*). Доказательство теоремы закончено.

Рассмотрим теперь некоторые примеры относительной модельной полноты. Ясно, что обычная модельная полнота есть частный случай относительной модельной полноты при $K = K^*$.

Пусть $K = K'_{CF}$ — множество аксиом поля, описанное выше в п. 2.2, и K^* — множество K'_{CF} аксиом алгебраически замкнутого поля. $K \subset K^*$, и легко проверяется, что K^* по сравнению с K не содержит дополнительных отношений и индивидов. Кроме того, K^* модельно непротиворечиво относительно K, т. е. каждое поле может быть вложено в алгебраически замкнутое поле. Согласно 4.2.17 K^* модельно полно, и для любой модели M множества K с диаграммой D $K^* \cup D$ имеет простую модель — алгебраическое замыкание M. Таким образом, применима теорема 4.3.2 и получается

4.3.3. Теорема. *Теория алгебраически замкнутого поля модельно полна относительно теории поля.*

Пусть теперь $K^* = \overline{K}_F^{(p)}$ — множество аксиом алгебраически замкнутого поля данной характеристики p, $p = 0, 2, 3, \ldots$ Как выяснялось раньше, K^* модельно полно и модельно непротиворечиво относительно множества $K = K_{CF}^{(p)}$ аксиом поля той же характеристики.

Легко проверить, что условия теоремы 4.3.2 выполнены, и имеет место следующая

4.3.4. Теорема. *Теория алгебраически замкнутого поля данной характеристики модельно полна относительно теории поля той же характеристики.*

Пусть $K^* = \overline{K}_{OF}$ — множество аксиом вещественно замкнутого упорядоченного поля. K^* согласно 4.2.26 модельно полно. Пусть $K = K_{OF}$ — множество аксиом упорядоченного поля. Так как каждое упорядоченное поле может быть вложено в вещественно замкнутое поле (в частности, в его вещественное замыкание), то опять на основании 4.3.2 получается

4.3.5. Теорема. *Теория вещественно замкнутого поля модельно полна относительно теории упорядоченного поля.*

Пусть K и K^* — множества аксиом формально вещественного и вещественно замкнутого поля, сформулированные в терминах отношений E, S, P и предметных постоянных 0 и 1 (см. п. 2.2). В этом случае $K \subset K^*$, словарь K и K^* один и тот же, и K^* модельно непротиворечиво относительно K. Как нетрудно заметить из 4.2.26, K^* модельно полно. Тем не менее, как мы сейчас покажем, K^* не модельно полно относительно K. В самом деле, пусть M — поле, полученное присоединением ξ — квадратного корня из двух — к полю рациональных чисел. M есть модель K. Рассмотрим высказывание

$$X = \exists y P(y, y, \xi).$$

Мы утверждаем, что ни X, ни $\sim X$ не выводимы из $K^* \cup D$, где D — диаграмма M. Действительно, существуют два вещественно замкнутых расширения M, скажем, M_1^* и M_2^* такие, что ξ положительно в M_1^* и отрицательно в M_2^*. X тогда истинно в M_1^*, а $\sim X$ истинно в M_2^*. Но поскольку обе структуры M_1^* и M_2^* — модели $K^* \cup D$, наше утверждение доказано.

Вполне возможна ситуация, когда K^* модельно полно относительно двух неэквивалентных множеств. Так, например, если K^* — множество аксиом алгебраически замкнутого поля (см. 4.3.3), то K^* модельно полно не только относительно понятия поля, но также относительно понятия поля данной характеристики (при этом K^* модельно полно относительно самого себя). С другой стороны, как будет показано, если K является подмножеством K^* с тем же самым словарем таким, что K^* модельно непротиворечиво и модельно полно относительно K, то K^* существенно единственно. В этом случае множество K^* будем называть *модельным пополнением* K.

4.3.6. Теорема. *Пусть K, K_1^*, K_2^* — три непустых и непротиворечивых множества высказываний, $K \subset K_1^*$, $K \subset K_2^*$, таких, что все отношения и индивиды K_1^* и K_2^* содержатся в K и оба множества K_1^* и K_2^* модельно непротиворечивы и модельно полны относительно K. При этих условиях K_1^* и K_2^* эквивалентны, т. е. каждое выводимо из другого и, следовательно, оба имеют одни и те же модели.*

Доказательство. Пусть $X \in K_1^*$, и мы должны показать, что $K_2^* \vdash X$. Предположим противное: $X \in K_1^*$, $K_2^* \cup \{\sim X\}$ непротиворечиво. Пусть M — модель $K_2^* \cup \{\sim X\}$ с диаграммой D. Так как K_2^* модельно полно относительно K, то $\sim X$ выводимо из $K_2^* \cup D$ и в то же время X очевидным образом выводимо из $K_1^* \cup D$. Отсюда видно, что для доказательства теоремы достаточно установить справедливость следующего утверждения: для каждой модели M множества K с диаграммой D и для каждого высказывания X, определенного в M, либо X, либо $\sim X$ выводимо из $K_1^* \cup D$ и $K_2^* \cup D$, причем возможны только два эти случая.

Пусть, наоборот, существует модель M множества K и высказывание X, определенное в K, такие, что X выводимо из $K_1^* \cup D$ и $\sim X$ выводимо из $K_2^* \cup D$, где D — диаграмма M. Как обычно, можно предполагать, что X задано в предваренной нормальной форме и содержит по меньшей мере один квантор. Мы будем рассматривать такую модель M и такое высказывание X, удовлетворяющие этим условиям, что число кванторов в X минимально. Более того, мы можем предполагать, что X начинается квантором существования, так как в противном случае мы рассмотрим $\sim X$, приведенное к предваренной нормальной форме, поменяв местами K_1^* и K_2^*. Пусть, таким образом, $X = \exists y Z(y)$, где Z еще может содержать кванторы.

Пусть M_1^* — модель $K_1^* \cup D$ с диаграммой D_1^*. X истинно в M_1^*, поскольку X выводимо из $K_1^* \cup D$. Следовательно,

M_1^* содержит индивид a такой, что $Z(a)$ истинно в M_1^*. Но M_1^* — модель K, а потому $K_1^* \cup D_1^*$ полно и $K_1^* \cup D_1^* \vdash Z(a)$. Кроме того, $Z(a)$ содержит на один квантор меньше, чем X, и $K_2^* \cup D_1^* \vdash Z(a)$, а отсюда и $K_2^* \cup D_1^* \vdash X$. С другой стороны, по предположению, $K_2^* \cup D \vdash \sim X$ и тем самым $K_2^* \cup D_1^* \vdash \sim X$. Итак, мы пришли к заключению о противоречивости $K_2^* \cup D_1$, что не согласуется с модельной непротиворечивостью K_2^* относительно K, поскольку M_1^* — модель K. Таким образом, мы видим, что ситуация, при которой $K_1^* \cup D \vdash X$ и $K_2^* \cup D \vdash \sim X$ для любой модели M множества K, невозможна.

Теорема 4.3.6 показывает, что данное множество аксиом K может, по существу, иметь не более одного расширения $K^* \supset K$, удовлетворяющего условиям 4.3.6. В частности, многообразие всех алгебраически замкнутых полей занимает вполне определенное место относительно (более широкого) многообразия всех полей той же характеристики. В аналогичном положении находится многообразие всех вещественно замкнутых упорядоченных полей относительно многообразия всех упорядоченных полей. Как мы увидим позже (п. 5.4), соответствующее понятие можно также сформулировать для понятия дифференциального поля. Однако, с другой стороны, можно найти такие K, для которых описанные множества K^* не существуют вовсе (см. задачу 5.6.4).

4.4. Задачи

4.4.1. Установить полноту теории бесконечной абелевой группы, каждый элемент которой имеет порядок, равный фиксированному простому числу p.

4.4.2. Пусть K — непустое и непротиворечивое множество высказываний. Предположим, что для любых двух моделей M и M' множества K, таких, что $M \subset M'$, всякое примитивное высказывание, определенное в M, истинно в M' только в том случае, когда оно истинно в M. Показать, что при этих условиях любой экзистенциальный предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$, определенный в K, эквивалентен относительно K некоторому универсальному предикату $R(x_1, \ldots, x_n)$ (т. е. $K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv R(x_1, \ldots, x_n)]$); иными словами, дать другое доказательство признака модельной полноты 4.2.1.

4.4.3. Абелева группа G называется *полной* (или *группой с делением*), если для любого целого n и любого $a \in G$ существует такой элемент $b \in G$, что $nb = a$. Доказать, что теория полной упорядоченной абелевой группы, содержащей по меньшей мере два различных элемента, является полной.

4.4.4. Установить модельную полноту теории дискретно упорядоченного множества без первого и последнего элементов, сформулированного в терминах отношений E, Q и $S(x, y)$ («x — предшественник y»). Показать, что эта теория модельно полна относительно множества K, состоящего из аксиом упорядоченного множества (см. 4.2.9), аксиомы подстановочности для $S(x, y)$ и высказывания

$$\forall x \forall y \forall z\, [S(x, z) \wedge S(z, y) \supset \sim E(x, y) \wedge Q(x, y) \wedge \wedge \sim [E(x, z) \wedge E(z, y)]\,].$$

Библиографическая справка. Относительно теоремы Линденбаума см. Тарский [1]. Признак Воота можно найти в статье Воота [1]. Теорема 4.1.3 доказана различными способами в работе Ленгфорда [1]. Для полей нулевой характеристики 4.1.4 есть следствие теоремы Тарского 4.2.27, для произвольной характеристики это утверждение было впервые установлено А. Робинсоном [1]. Теорема Штейница, использованная при доказательстве 4.1.4, приведена у Штейница [1]. Теория модельной полноты детально разобрана в статье А. Робинсона [9]. 4.2.10 без доказательства высказана Тарским [1] и доказана настоящим методом в работе Робинсона и Зекона [1]. По поводу теоремы Тарского 4.2.28 см. Тарский и Мак-Кинси [1]. Теории модельной полноты посвящена статья А. Робинсона [11] *).

*) В работе Воота [5] дан обзор статей, посвященных изучению теорий и их моделей. Метод модельной полноты применялся в работах Ершова [6]—[10], Каргаполова [1], [3], Тайцлина [8].

Разрешимость элементарной теории упорядоченных абелевых групп доказана Гуревичем [1]. Элементарная классификация упорядоченных групп дана там же. При этом Гуревич пользуется методом распространения отображений, впервые разработанных Фрессе [1], см. также Эренфойхт [2], Тайманов [6]. Этот метод применялся в работах Алмагамбетова [2], Тайцлина [6]. *(Прим. ред.)*

ОПРЕДЕЛИМОСТЬ

5.1. Лемма о непротиворечивости. В настоящей главе мы займемся изучением связей между высказываниями (или множествами высказываний) с различными словарями. Мы примем следующие обозначения. Для данного множества высказываний K через $W_i(K)$ и $W_r(K)$ обозначим соответственно множество индивидов и множество отношений, содержащихся в высказываниях из K. Таким образом, если $W(K)$ — словарь K, то $W(K) = W_i(K) \cup W_r(K)$. В том случае, когда K состоит из одного высказывания, $K=\{X\}$, мы будем писать $W_i(X)$ и $W_r(X)$ вместо $W_i(\{X\})$ и $W_r(\{X\})$.

5.1.1. Теорема. *Пусть K — непустое полное множество высказываний и пусть K_0, K_1 — два непротиворечивых множества высказываний, таких*, что

$$K_0 \supset K,\ K_1 \supset K,\ W_i(K_0) \subset W_i(K),\ W_r(K_1) \subset W_r(K).$$

При этих условиях $K_0 \cup K_1$ непротиворечиво.

Доказательство. Пусть, наоборот, $K_0 \cup K_1$ противоречиво. Тогда найдутся такие высказывания $X_1, \ldots, X_j \in K_0 - K_1$ и $Y_1, \ldots, Y_m \in K_1$, что высказывание

$$X_1 \wedge \ldots \wedge X_j \wedge Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_m$$

противоречиво, т. е.

5.1.2. $Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_m \supset \sim [X_1 \wedge \ldots \wedge X_j]$.

Ни $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$, ни $\{X_1, \ldots, X_j\}$ не могут быть пустыми, так как K_0 и K_1 оба непротиворечивы.

Пусть $Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_m = Y(a_1, \ldots, a_n)$, где явно выписаны лишь те индивиды, которые встречаются в этой конъюнкции и не принадлежат словарю K (а тем самым и словарю $X_1, \ldots, X_j$). Из 5.1.2 получаем тогда

5.1.3. $\vdash Z \supset \sim [X_1 \wedge \ldots \wedge X_j]$, где $Z = \exists z_1 \dots \exists z_n Y(z_1, \dots, z_n)$, $n \geqslant 0$. Кроме того, высказывание $Y(a_1, \dots, a_n) \supset Z$ является теоремой, и потому $K_1 \vdash Z$. Поскольку $W(Z) \subset W(K)$ и K полно, имеем либо $K \vdash Z$, либо $K \vdash \sim Z$. Если предположить, что верно последнее, то $K_1 \vdash \sim Z$, так как $K \subset K_1$. Однако, как только что было замечено, $K_1 \vdash Z$ и, следовательно, в силу непротиворечивости K_1 наше предположение неверно. Итак, мы заключаем, что $K \vdash Z$. Но тогда и подавно $K_0 \vdash Z$, так как $K_0 \supset K$. Следовательно, в силу 5.1.3 $K_0 \vdash \sim [X_1 \wedge \dots \dots \wedge X_j]$, что невозможно, так как $X_i \in K_0$, $i = 1, \dots, j$. Полученное противоречие доказывает теорему.

5.1.4. Теорема. *Пусть K — полное непустое множество высказываний и пусть X — некоторое высказывание, совместимое с K (т. е. $K \cup \{X\}$ непротиворечиво), такое, что $W_i(X) \subset W_i(K)$. Если M — любая модель K и K_1 — множество всех высказываний, определенных и истинных в M, то $K_1 \cup \{X\}$ непротиворечиво.*

Доказательство. Положим $K_0 = K \cup \{X\}$. Множества K, K_0, K_1, как легко проверить, удовлетворяют условиям теоремы 5.1.1, и мы приходим к заключению о непротиворечивости $K_0 \cup K_1 = K_1 \cup \{X\}$.

Заметим, что если $W_r(X) \subset W_r(K)$, то теорема становится очевидной.

5.1.5. Теорема. *Пусть M_1 — произвольная структура, а M_1^* получается из M_1 выбрасыванием некоторых (но не всех) отношений M_1. Пусть M_2^* — любое элементарное расширение M_1^*. Тогда существует элементарное расширение M_1, которое является (в то же время) элементарным расширением M_2^*, если игнорировать отношения, не входящие в M_2^*.*

Доказательство. Обозначим через K_1 и K_2^* множества всех высказываний, определенных и истинных в M_1 и в M_2^* соответственно. Любая модель множества $H = K_1 \cup K_2^*$ является элементарным расширением как M_1, так и M_2^*. Поэтому для доказательства 5.1.5 достаточно установить непротиворечивость H. Если H противоречиво, то найдется конечное подмножество $\{X_1, \dots, X_k\} \subset \subset K_2^*$, $k \geqslant 1$, такое, что противоречиво $K_1 \cup \{X_1, \dots, X_k\}$. Пусть $X_1 \wedge \dots \wedge X_k = Y(a_1, \dots, a_n)$, где явно указаны лишь те индивиды, которые не содержатся в M_1. Тогда $K_1 \vdash \sim Y(a_1, \dots, a_n)$ и, так как $a_1, \dots, a_n \notin K_1$, то

$K_1 \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n[\sim Y(x_1, \ldots, x_n)]$. Высказывание $Z = \forall x_1 \ldots \forall x_n[\sim Y(x_1, \ldots, x_n]$ определено в M_1, и все его отношения принадлежат M_2^*, а тем самым и M_1^*. Итак, Z определено и истинно в M_1^* (так как Z истинно в M_1 — модели K_1). Отсюда вытекает, что Z истинно также и в M_2^*. Но, с другой стороны, $Y(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M_2^* и, следовательно, высказывание $Z' = \exists x_1 \ldots \exists x_n Y(x_1, \ldots, x_n)$ истинно в M_2^*. Однако ввиду эквивалентности Z' и $\sim Z$ мы приходим к противоречию, что доказывает непротиворечивость H и нашу теорему.

5.1.6. Теорема (лемма о непротиворечивости). *Пусть K — непустое полное множество высказываний и пусть H_1, H_2 — два непротиворечивых множества, содержащих K, $H_1 \cap H_2 \supset K$. Если $W(H_1) \cap W(H_2) \subset W(K)$, то $H_1 \cup H_2$ непротиворечиво.*

Доказательству теоремы предпошлем следующую редукцию. Если $H_1 \cup H_2$ противоречиво, то найдутся такие конечные подмножества $\{X_1, \ldots, X_h\} \subset H_1$, $\{Y_1, \ldots, Y_k\} \subset H_2$, что $X \wedge Y$ противоречиво, где $X = X_1 \wedge \ldots \wedge X_h$ и $Y = Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_k$. Заметим, что $h \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$. X и Y оба в отдельности совместимы с K (т. е. $\{X\} \cup K$ и $\{Y\} \cup K$ непротиворечивы), так как $K \cup \{X\}$ выводимо из H_1, а $K \cup \{Y\}$ — из H_2. Таким образом, для доказательства 5.1.6 достаточно доказать следующую теорему:

5.1.7. Теорема. *Пусть K — полное множество высказываний, а X_1 и X_2 — два высказывания, таких, что $W(X_1) \cap W(X_2) \subset W(K)$. Если X_1 и X_2 оба по отдельности совместимы с K, то конъюнкция $X_1 \wedge X_2$ непротиворечива.*

При доказательстве теоремы можно предполагать, что $W_i(X_1) \subset K$ и $W_i(X_2) \subset K$. В самом деле, допустим, что для этого частного случая теорема уже доказана. Пусть

$$X_1 = Y_1(a_1, \ldots, a_m) \quad \text{и} \quad X_2 = Y_2(b_1, \ldots, b_n),$$

где явно выписаны лишь те индивиды, которые не содержатся в K. Множества $a_1, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_n$ не пересекаются. Положим

$$Z_1 = [\exists x_1 \ldots \exists x_m Y_1(x_1, \ldots, x_m)],$$
$$Z_2 = [\exists y_1 \ldots \exists y_n Y_2(y_1, \ldots, y_n)]$$

(где переменные x_i, y_i не входят ни в одно из предыдущих выражений). Z_1 и Z_2 также по отдельности совместимы с K, и, следовательно, по нашему предположению, $Z_1 \wedge Z_2$ непротиворечиво. Если же $X_1 \wedge X_2 = Y_1(a_1, \ldots, a_m) \wedge \wedge Y_2(b_1, \ldots, b_n)$ противоречиво, то на основании обычного рассуждения высказывание

$$Z = \exists x_1 \ldots \exists x_m \exists y_1 \ldots \exists y_n [Y_1(x_1, \ldots, x_m) \wedge Y_2(y_1, \ldots, y_n)]$$

также должно быть противоречивым. Но $\vdash Z \equiv Z_1 \wedge Z_2$, а $Z_1 \wedge Z_2$, как только что было доказано, непротиворечиво.

Итак, на основании сказанного выше мы предполагаем, что

$$W_i(X_1) \subset W(K), \quad W_i(X_2) \subset W(K).$$

Пусть M_1 — модель $K \cup \{X_1\}$, M_1^* — структура, полученная из M_1 выбрасыванием отношений, не входящих в K. Обозначим через K_1^* множество всех высказываний, определенных и истинных в M_1^*. Поскольку X_2 совместимо с K, а M_1^* — модель K, условия теоремы 5.1.4 выполнены, и, следовательно, множество $K_1^* \cup \{X_2\}$ непротиворечиво. Пусть M_2 — модель этого множества и M_2^* — структура, полученная из M_2 выбрасыванием отношений, не входящих в K. M_2^*, будучи моделью K_1^*, является элементарным расширением M_1^*. Таким образом, структуры M_1, M_1^*, M_2^* удовлетворяют условиям 5.1.5. Отсюда вытекает существование элементарного расширения M_3 структуры M_1, которое также является элементарным расширением M_2^*, если игнорировать не входящие в M_2^* отношения. Таким образом, если M_3^* получена из M_3 выбрасыванием не входящих в M_2^* отношений, то M_3^* есть элементарное расширение M_2^*. Отсюда в силу 5.1.5 опять вытекает существование структуры M_4, которая является элементарным расширением M_2, такой, что M_4^* — элементарное расширение M_3^*, где M_4^* получена из M_4 выбрасыванием не входящих в M_3^* отношений. Продолжая это построение, мы получаем последовательность структур $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n, \ldots$ и соответствующую последовательность $M_1^*, M_2^*, M_3^*, \ldots, M_n^*, \ldots$, причем выполняются следующие условия. Структуры $M_1, M_3, M_5, \ldots$ содержат одинаковые отношения, и $M_1 ee M_3 ee M_5 ee \ldots$ (т. е. M_3 — элементарное расширение M_1, M_5 — элементарное расширение M_3 и т. д.). Аналогично, структуры M_2, M_4, $M_6, \ldots$ содержат одни и те же отношения и $M_2 ee M_4 ee M_6 ee \ldots$ Наконец, $M_1^* ee M_2^* ee M_3^* ee \ldots$, причем M_i^* получается из M_i, если ограничиться только отношениями K, принадлежащими в совокупности структурам с четными и нечетными индексами.

Пусть $M^* = \bigcup\limits_n \{M_n^*\}$, $M' = \bigcup\limits_k \{M_{2k+1}\}$ и $M'' = \bigcup\limits_k \{M_{2k}\}$. Множества индивидов трех структур, M^*, M', M'', совпадают, и, кроме того, M^* получается из M' и из M'' выбрасыванием не содержащихся в K отношений. Определим теперь структуру M, присоединяя к M^* *одновременно* отношения M' и M'' так, как они даны в этих структурах. Поскольку общими отношениями M' и M'' являются только отношения M^*, наше определение корректно. Однако M_1 удовлетворяет X_1, а потому M_3, $M_5, \ldots$ и, наконец, M' удовлетворяют X_1. Аналогично, M_2 удовлетворяет X_2 и, следовательно, M_4, $M_6, \ldots$ и, наконец, M'' удовлетворяют X_2. Таким образом, M удовлетворяет X_1 и X_2, а тем самым и конъюнкции $X_1 \wedge X_2$.

Заметим, что наше предположение о полноте K существенно для доказательства, так как в противном случае, если K непусто, найдется такое высказывание X, определенное в K, что ни X, ни $\sim X$ не выводимы из K. Тогда множества $K \cup \{\sim X\}$ и $K \cup \{X\}$ оба непротиворечивы, а $\sim X \wedge X$ таковым не является.

Следующая теорема, по существу, эквивалентна лемме о непротиворечивости, но, в отличие от нее, носит чисто синтаксический характер.

5.1.8. Теорема (лемма Крейга). *Пусть $X \supset Y$ — теорема узкого исчисления предикатов. Если $W_r(X) \cap W_r(Y)$ непусто, то существует высказывание Z_0, такое, что $W(Z_0) \subset W(X) \cap W(Y)$, $\vdash X \supset Z_0$ и $\vdash Z_0 \supset Y$. Если $W_r(X) \cap \cap W_r(Y)$ пусто и X непротиворечиво, то $\vdash Y$.*

Доказательство. Допустим сначала, что $W_r(X) \cap \cap W_r(Y)$ непусто. Обозначим через S (непустое) множество высказываний Z таких, что $W(Z) \subset W(X) \cap W(Y)$. Мы можем считать X непротиворечивым, так как в противном случае любой противоречивый элемент из S, например, высказывание Z_0 вида $Z \wedge \sim Z$, где $Z \in S$, удовлетворяет условию теоремы. Для непротиворечивого X через S' обозначим множество элементов $Z \in S$ таких, что $\vdash X \supset Z$. Мы должны показать, что $\vdash Z \supset Y$ для некоторого $Z \in S'$. Если такого Z не существует, то $S' \cup \{\sim Y\}$ непротиворечиво, так как иначе Y было бы выводимо из конечного подмножества $S'' \subset S'$, а тем самым из конъюнкции элементов S'', которая сама также принадлежит S'. Итак, предположим, что $S' \cup \{\sim Y\}$ непротиворечиво; пусть M — модель этого множества и K — множество всех высказываний из S, истинных в M. K очевидным образом полно. Понятно, что $\sim Y$ совместимо с K, так как $\sim Y$ истинно в M. Мы утверждаем, что X также совместимо с K. Действительно, если бы это было не так, то для некоторого конечного подмножества $K' \subset K$, $K' = \{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \geqslant 1$, множество $K' \cup \{X\}$ было бы противоречивым, и потому $X \vdash \sim [X_1 \wedge \ldots \wedge X_n]$, или $X \vdash \sim X'$, где $X' = X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$. Но тогда, по определению S', $\sim X' \in S'$ и, следовательно, $\sim X' \in K$. Это, однако, невозможно, поскольку K непротиворечиво, а X' тоже принадлежит S. Таким образом, X не противоречит K, и в качестве частного случая леммы о непротиворечивости мы получаем непротиворечивость $X \wedge \sim Y$ вопреки условию: $\vdash X \supset Y$. Отсюда вытекает, что для некоторого $Z_0 \in S'$ будет $\vdash Z_0 \supset Y$, в то время как $\vdash X \supset Z_0$ по определению S'. Первая часть теоремы доказана.

Допустим теперь, что $W_r(X) \cap W_r(Y)$ пусто, но Y не является теоремой. Тогда для $\sim Y$ найдется модель M, такая, что все индивиды Y присутствуют в M. Кроме того, мы можем предположить, что кардинальное число M равно в точности $\aleph_0$, где кардинальное число M определяется без всякой ссылки на отношение равенства. Мы можем также предполагать, что индивиды X, не встречающиеся в Y, входят в M, и определить отношения из X в M таким образом, что M превратится в модель X. Таким образом, $X \wedge \sim Y$ непротиворечиво, вопреки нашему предположению.

Нетрудно вывести и обратно теорему 5.1.7 и, следовательно, 5.1.6 из теоремы 5.1.8. Пусть X_1 и X_2 оба по отдельности совместимы с множеством высказываний K. Мы должны показать, что конъюнкция $X_1 \wedge X_2$ непротиворечива. Пусть, напротив, $X_1 \wedge X_2$ противоречиво, так что $\vdash X_1 \supset \sim X_2$. Поскольку X_2 совместимо с K, $\sim X_2$ не является теоремой, и, следовательно, в силу 1.5.8 пересечение $W_r(X_1) \cap W_r(X_2)$ непусто. В соответствии с этим для некоторого Z, где $W(Z) \subset W(X_1) \cap W(X_2)$, имеем $\vdash X_1 \supset Z$ и $\vdash Z \supset \sim X_2$. По предположению 5.1.7, $W(K) \supset W(X_1) \cap W(X_2)$, и, следовательно, Z определено в K. Отсюда вытекает, что Z или $\sim Z$ выводимо из K. Однако, если $K \vdash Z$, то $K \vdash \sim X_2$, так как $\vdash Z \supset \sim X_2$ и $K \cup \{X_2\}$ не может быть непротиворечивым. Аналогично, если $\sim Z$ выводимо из K, то $K \vdash \sim X_1$, так как $\vdash \sim Z \supset \sim X_1$, и $K \cup \{X_1\}$ оказывается противоречивым.

5.2. Теорема Бета. В этом разделе мы будем пользоваться обозначением $X(F, G_1, G_2, \ldots, G_m)$, выражающим тот факт, что высказывание X узкого исчисления предикатов сформулировано в терминах отношения $F(x_1, \ldots, x_k)$, $k \geqslant 0$, и отношений $G_1, \ldots, G_m$, $m \geqslant 1$. Кроме того, X может содержать индивиды, не указанные в приведенном выше обозначении. Пусть $Y = \forall x_1 \ldots \forall x_k [F(x_1, \ldots, x_k) \equiv F'(x_1, \ldots, x_k)]$, где F' — дополнительное k-местное отношение (в случае $k=0$ кванторы отсутствуют), и пусть

$$Z = X(F, G_1, \ldots, G_m) \wedge X(F', G_1, \ldots, G_m),$$

где второй член конъюнкции получен из первого заменой F на F'. Мы будем говорить, что X *неявно* определяет F в терминах $G_1, \ldots, G_m$, если $Z \supset Y$ является теоремой. Мы скажем также, что X *явно* определяет F в терминах $G_1, \ldots, G_m$, если существует ппф $Q(x_1, \ldots, x_k)$, определенная в терминах $G_1, \ldots, G_m$ и индивидов высказывания $X(F, G_1, \ldots, G_m)$, такая, что

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k [F(x_1, \ldots, x_k) \equiv Q(x_1, \ldots, x_k)]$$

выводимо из $X(F, G_1, \ldots, G_m)$. Теорему Бета об определимости можно теперь сформулировать следующим образом:

5.2.1. Теорема (Бет). *Если отношение $F(x_1, \ldots, x_k)$ неявно определено в терминах отношений $G_1, \ldots, G_m$ высказыванием $X(F, G_1, \ldots, G_m)$, то F может быть также определено и явно в терминах $G_1, \ldots, G_m$ и индивидов высказывания X.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — индивиды, не содержащиеся в X. Согласно условию теоремы

5.2.2. $\vdash X(F, G_1, \ldots, G_m) \wedge X(F', G_1, \ldots, G_m) \supset$
$$\supset [F(a_1, \ldots, a_k) \equiv F'(a_1, \ldots, a_k)].$$

Следовательно,

$$\vdash X(F, G_1, \ldots, G_m) \wedge F(a_1, \ldots, a_k) \supset$$
$$\supset [X(F', G_1, \ldots, G_m) \supset F'(a_1, \ldots, a_k)].$$

По лемме Крейга 5.1.8 существует высказывание $W = Q(a_1, \ldots, a_k)$, сформулированное в терминах словаря X (за исключением отношения F), такое, что

5.2.3. $\vdash X(F, G_1, \ldots, G_m) \wedge F(a_1, \ldots, a_k) \supset Q(a_1, \ldots, a_k)$

и

5.2.4. $\vdash Q(a_1, \ldots, a_k) \supset [X(F', G_1, \ldots, G_m) \supset F'(a_1, \ldots, a_k)]$.

Слегка преобразуя 5.2.3, получим

5.2.5. $\vdash X(F, G_1, \ldots, G_m) \supset [F(a_1, \ldots, a_k) \supset Q(a_1, \ldots, a_k)]$.

Аналогично, подставляя F вместо F' в 5.2.4 и используя простое правило преобразования в исчислении высказываний, имеем

5.2.6. $\vdash X(F, G_1, \ldots, G_m) \supset [Q(a_1, \ldots, a_k) \supset F(a_1, \ldots, a_k)]$.

Комбинируя 5.2.5 с 5.2.6 и применяя одно из правил вывода, приходим к заключению

5.2.7. $\vdash X(F, G_1, \ldots, G_m) \supset \forall x_1 \ldots \forall x_k [F(x_1, \ldots, x_k) \equiv$
$$\equiv Q(x_1, \ldots, x_k)],$$

которое и составляет содержание теоремы Бета.

Понятно, что приведенное доказательство нуждается в некоторых тривиальных модификациях для случая $k=0$. Если $k \geqslant 1$ и по меньшей мере одно G_i положительного порядка, скажем, $G_1 = G(x_1, \ldots, x_l)$, то мы всегда можем считать, что все a_i входят в W, беря, если нужно, конъюнкцию W с высказыванием

$$[G(a_1, \ldots, a_1) \equiv G(a_1, \ldots, a_1)] \wedge \ldots \wedge [G(a_k, \ldots, a_k) \equiv$$
$$\equiv G(a_k, \ldots, a_k)].$$

Если все G_i имеют порядок 0, то W не содержит ни одной переменной.

5.3. Относительные определения. Пункты 5.2 и 5.3 имеют некоторые общие точки соприкосновения, однако в настоящем разделе основное внимание будет сосредоточено на различных ситуациях, возникающих в алгебре.

Пусть K и K^* — два множества высказываний. Высказывание X', определенное в K, будем называть *инвариантным* относительно K^* над K, если для любой модели M множества K X удовлетворяет либо всем моделям K^*, которые являются расширениями M, либо не удовлетворяет ни одной.

5.3.1. Теорема. *Пусть K и K^* — два непустых непротиворечивых множества высказываний, таких, что все отношения и индивиды K^* содержатся в K и K^* модельно непротиворечиво относительно K. Пусть X^* — высказывание, определенное в K^* (а следовательно, и в K) и инвариантное относительно K^* над K. Тогда существует высказывание X, определенное в K, такое, что X истинно в любой модели M множества K тогда и только тогда, когда X^* истинно во всех моделях K^*, которые являются расширениями M.*

Доказательство. Обозначим через K_R множество, полученное релятивизацией K с помощью отношения $R(x)$, которое не содержится в K, а следовательно, не содержится в K^* и в X^*. Напомним (см. п. 3.1), что K_R получается присоединением к множеству R-трансформаций высказываний из K всех высказываний $R(a)$ (где a пробегает индивиды из K) или высказывания $\exists x R(x)$, если в K нет индивидов.

Сейчас мы займемся доказательством существования высказывания X, определенного в K, такого, что

5.3.2. $K_R \cup K^* \vdash X^* \equiv X_R$.

С помощью этого результата уже нетрудно получить 5.3.1. В самом деле, допустим, что подобное X существует, и пусть M и M^* — модели K и K^* соответственно, причем M^* — расширение M. Введем на M^* отношение $R(x)$, полагая $R(a)$ истинным в M^* в том и только в том случае, когда $a \in M$. Полученную структуру обозначим через M^*_R. M_R является моделью K_R и K^* и, следовательно, согласно 5.3.2 $X^* \equiv X_R$ истинно в M^*_R. Допустим, что X^* истинно в M^*, а тем самым и в M^*_R. Так как $X^* \equiv X_R$

истинно в M^*_R, то X_R истинно в M^*_R, а это означает, что X истинно в M. С другой стороны, если $\sim X^*$ истинно в M^*, то аналогичное рассуждение показывает, что $\sim X$ истинно в M. Таким образом, для доказательства 5.3.1 достаточно найти высказывание X такое, что X_R удовлетворяет 5.3.2.

Пусть S — множество высказываний X, определенных в K и таких, что $X^* \supset X_R$ выводимо из $K_R \cup K^*$. S непусто, поскольку оно включает все теоремы (узкого исчисления предикатов), определенные в K. Кроме того, S конъюнктивно, так как если $X^* \supset X_R$ и $X^* \supset Y_R$ выводимы из $K_R \cup K^*$, то $X^* \supset [X_R \wedge Y_R]$ также выводимо из этого множества. Но $[X_R \wedge Y_R]$ совпадает с $[X \wedge Y]_R$, а потому $X \wedge Y \in S$.

Пусть T — множество всех высказываний X_R, где $X \in S$. Положим

$$H = K_R \cup K^* \cup T \cup \{\sim X^*\}.$$

Если это множество непротиворечиво, то оно обладает некоторой моделью M^*_R. Индивиды M^*_R, удовлетворяющие $R(x)$, образуют модель M_R множества K_R. Если в M_R отбросить отношение $R(x)$, то мы получим модель M множества K. Обозначим через D и D_R диаграммы M и M_R соответственно. Ясно, что D_R получается из D присоединением всех высказываний вида $R(a)$, где a пробегает M. Множество $H' = D_R \cup K_R \cup K^*$ непротиворечиво, так как M^*_R — модель этого множества. Покажем, что $H' \vdash \sim X^*$.

Действительно, если множество $H' \cup \{X^*\} = D_R \cup K_R \cup \cup K^* \cup \{X^*\}$ непротиворечиво, то для него найдется некоторая модель N^*_R. Индивиды N^*_R, удовлетворяющие $R(x)$, образуют модель N_R множества K_R, которая в то же время есть расширение M_R. Таким образом, N^*_R и M^*_R — модели K^* и расширения M_R. N^*_R удовлетворяет X^*, а M^*_R удовлетворяет $\sim X^*$. Отсюда следует, что структуры N^* и M^*, полученные из N^*_R и M^*_R отбрасыванием $R(x)$, также удовлетворяют X^* и $\sim X^*$ соответственно, хотя обе они являются расширениями M. Это, однако, противоречит предположению 5.3.1, и мы заключаем, что $H' \vdash \vdash \sim X^*$.

Итак, существует конъюнкция Y конечного числа элементов D_R, $Y=Y_1\wedge\ldots\wedge Y_k$, такая, что высказывание $Y\supset\sim X^*$, а тем самым и $X^*\supset\sim Y$, выводимо из $K_R\cup K^*$. Каждое Y_i либо имеет вид $R(a)$, либо является формулой порядка 1, либо отрицанием такой формулы. В соответствии с этим $\sim Y$ может быть приведено к виду

$$R(a_1)\wedge\ldots\wedge R(a_n)\supset Z,$$

где Z — дизъюнкция отрицаний элементов D. Добавляя, если нужно, подходящие элементы к первоначальному множеству $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$, мы можем всегда считать, что Z непусто и все его индивиды — это в точности $a_1, \ldots, a_n$. Итак,

$$K_R\cup K^*\vdash X^*\supset[R(a_1)\wedge\ldots\wedge R(a_n)\supset Z].$$

Конъюнкцию $R(a_1)\wedge\ldots\wedge R(a_n)$ можно сократить, выбрасывая члены $R(a_j)$, где a_j содержится в K, поскольку все такие члены входят в K_R. Таким образом, если a_j принадлежат K для $j=m+1, \ldots, n$, то

5.3.3. $K_R\cup K^*\vdash X^*\supset[R(a_1)\wedge\ldots\wedge R(a_m)\supset Z]$.

В случае $m=0$ это высказывание читается просто как $X^*\supset Z$.

Индивиды $a_1, \ldots, a_m$ не содержатся в K_R, K^* или X^*, и потому из 5.3.3 вытекает, что высказывание

$$X^*\supset[\forall x_1\ldots\forall x_m[R(x_1)\wedge\ldots\wedge R(x_m)\supset\\ \supset Z(x_1, \ldots, x_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)]]$$

выводимо из $K_R\cup K^*$. Отсюда следует, что высказывание $X^*\supset W_R$ выводимо из $K_R\cup K^*$, где

$$W_R=\forall x_1[R(x_1)\supset[\forall x_2[R(x_2)\supset\ldots\supset[\forall x_m[R(x_m)\supset\\ \supset Z(x_1, \ldots, x_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)]]\ldots]]].$$

Однако W_R есть не что иное, как R-трансформация высказывания

$$W=\forall x_1\ldots\forall x_m Z(x_1, \ldots, x_m, a_{m+1}, \ldots, a_n),$$

а коль скоро это так, $K_R\cup K^*\vdash X^*\supset W_R$ влечет $W\in S$ и $W_R\in T$.

Напомним теперь, что M_R^* есть модель $H=K_R\cup K^*\cup\cup T\cup\{\sim X^*\}$ и, следовательно, M_R^* удовлетворяет W_R. Отсюда вытекает, что M_R^* удовлетворяет также высказыванию

$$R(a_1)\wedge\ldots\wedge R(a_m)\supset Z(a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n).$$

Но $R(a_1)\wedge\ldots\wedge R(a_m)$ истинно в M_R^*, так как M_R^* — модель D_R, а поэтому $Z(a_1, \ldots, a_n)$ также истинно в M_R^*. $Z(a_1, \ldots, a_n)$ эквивалентно отрицанию конъюнкции Z' элементов диаграммы D структуры M, так что Z' истинно в M и в M_R^*. Таким образом, $\sim Z(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M_R^* и мы приходим к противоречию, которое показывает, что множество H противоречиво. Поскольку T конъюнктивно, это влечет существование элемента $X_R\in\in T$, такого, что

$$K_R\cup K^*\vdash X_R\supset X^*.$$

Но в то же время

$$K_R\cup K^*\vdash X^*\supset X_R$$

согласно определению T и, следовательно,

$$K_R\cup K^*\vdash X^*\equiv X_R,$$

что и требовалось доказать. Заметим, что высказывание X, существование которого утверждалось теоремой 5.3.1, по существу, определено однозначно, т. е., если X_1 и X_2 оба удовлетворяют условию теоремы, то $X_1\equiv X_2$ выводимо из K.

Соответствующий результат имеет место для предикатов. Пусть K и K^* — два множества высказываний. Предикат $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$, $n\geqslant 1$, определенный в K, назовем *инвариантным* относительно K^* над K, если для любой фиксированной модели M множества K и для любой совокупности элементов $a_1, \ldots, a_n$ из M либо $Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ истинно во всех расширениях M, которые являются моделями K^*, либо не истинно ни в одном.

5.3.4. Теорема. *Пусть K и K^* — два непустых непротиворечивых множества высказываний таких, что отношения и индивиды K^* содержатся в K и K^* модельно непротиворечиво относительно K. Пусть $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$, $n\geqslant 1$, — предикат, определенный в K^* и инвариантный относительно K^* над K. Тогда существует предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$, определенный в K, такой, что если M — любая модель K и $(a_1, \ldots, a_n)$ — любой набор элементов из M, то высказывание $Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M*

тогда и только тогда, когда $Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в любой модели K^*, которая является расширением M.

Доказательство. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — некоторое множество индивидов, не встречающихся в K. Расширим K и K^*, не вводя новых отношений, а присоединяя всевозможные теоремы (узкого исчисления предикатов), индивиды которых исчерпываются $b_1, \ldots, b_n$. Обозначим полученные множества K_0 и K_0^*.

Рассмотрим высказывание $X^*=Q^*(b_1, \ldots, b_n)$. X^* определено в K_0^* и в K_0. Проверим, что X^* инвариантно относительно K_0^* над K_0. В самом деле, если M_0 — любая модель K_0, а M_1^* и M_2^* *) — модели K_0^*, то $b_1, \ldots, b_n$ содержатся во всех этих трех структурах. Так как $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$ инвариантно относительно K^* над K и так как M_0 — модель K, а M_1^*, M_2^* — модели K^*, то отсюда вытекает, что X^* либо истинно в обеих M_1^* и M_2^*, либо в обеих ложно. Аналогично устанавливается модельная непротиворечивость K_0^* относительно K_0. Действительно, отношения и индивиды K_0^* содержатся в K_0 и если M_0 — модель K_0, а тем самым и K, то M_0 имеет расширение M_0^*, которое является моделью K^*. Но $b_1, \ldots, b_n$ содержатся в $M_0 \subset M_0^*$ и, кроме того, K_0^* по сравнению с K^* содержит только теоремы узкого исчисления предикатов. Отсюда вытекает, что M_0^* — модель K_0^*, т. е. K_0^* модельно непротиворечиво относительно K_0. Таким образом, условия теоремы 5.3.1 выполнены, следовательно, существует высказывание X, определенное в K_0, такое, что X истинно в любой фиксированной модели M_0 множества K_0 тогда и только тогда, когда X^* истинно во всех моделях K_0^*, которые являются расширениями M_0. Мы можем предполагать, что X содержит индивиды $b_1, \ldots, b_n$, так как в противном случае мы просто возьмем вместо X конъюнкцию X с теоремой (узкого исчисления предикатов), содержащей $b_1, \ldots, b_n$. В соответствии с этим мы будем писать $X=Q(b_1, \ldots, b_n)$. Покажем теперь, что $Q(x_1, \ldots, x_n)$ и есть искомый предикат.

Пусть M — любая модель K, и $a_1, \ldots, a_n$ — произвольное множество элементов M. Пусть M^* — расшире-

*) Подразумевается, что M_1^* и M_2^* — расширения M_0. (*Прим. перев.*)

ние M, являющееся моделью K^*. Очевидно, что определение $Q(x_1, \ldots, x_n)$ не зависит от выбора $b_1, \ldots, b_n$ при условии, что эти индивиды не содержатся в K, и мы можем поэтому предполагать, что $b_1, \ldots, b_n$ лежат вне M^*. Расширим M, добавляя $b_1, \ldots, b_n$ к множеству ее индивидов и полагая, по определению, что любое отношение $A(x_1, \ldots, x_k)$ истинно для некоторого множества объектов (возможно содержащего b_i), если $A(x_1, \ldots, x_k)$ истинно в M для множества объектов, полученного из первоначального заменой каждого b_i на a_i с теми же индексами. Полученную структуру обозначим через M_0. Расширяя тем же способом M^* с помощью тех же $b_1, \ldots, b_n$, мы получим структуру M_0^*, которая является расширением M_0. M_0 и M_0^* — модели K_0 и K_0^* соответственно.

Допустим, что $Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M^*; тогда $X^* = Q^*(b_1, \ldots, b_n)$ истинно в M_0^* по построению M_0^*, и потому $X = Q(b_1, \ldots, b_n)$ истинно в M_0 в силу 5.3.1. Следовательно, $Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M по построению. Аналогично, если $\sim Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M^*, то $\sim Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M. Теорема 5.3.4 доказана.

Высказывание X, существование которого установлено теоремой 5.3.1, *устойчиво* относительно K (см. п. 3.3). Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим любые две модели M и M' множества K, такие, что M' — расширение M и X истинно в M. Допустим, что X ложно в M', так что $\sim X$ истинно в этой структуре. Пусть M^* — любое расширение M', которое есть в то же время модель K^*. Такое M^* существует, поскольку K^* модельно непротиворечиво относительно K. Тогда $\sim X^*$ истинно в M^* согласно основному свойству X. Но, с другой стороны, M^* также есть расширение структуры M, которая удовлетворяет X. Следовательно, M^* удовлетворяет X^* и мы приходим к противоречию, которое означает, что X истинно в M', т. е. устойчиво относительно K. Аналогичные рассуждения показывают, что $\sim X$ также устойчиво относительно K и тем самым X инвариантно относительно K. Отсюда на основании теорем 3.3.2 и 3.3.3 получаем

5.3.5. Следствие. *Высказывание X, удовлетворяющее условиям теоремы* 5.3.1, *может быть выбрано из экзистенциальных или из универсальных высказываний.*

По аналогичным соображениям предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$, возникающий в теореме 5.3.4, инвариантен относительно K.

5.3.6. Следствие. *Предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям теоремы* 5.3.4, *может быть выбран среди экзистенциальных или универсальных предикатов.*

Для практических целей полезно связать полученные выше результаты с понятием относительной модельной полноты.

5.3.7. Теорема. *Пусть K и K^* — два непустых и непротиворечивых множества высказываний, таких, что отношения и индивиды K^* содержатся в K и K^* модельно непротиворечиво и модельно полно относительно K. Пусть X^* — любое высказывание, определенное в K^*. Тогда существует высказывание X, определенное в K, такое, что если M — произвольная модель K и M^* — модель K^*, являющаяся расширением M, то X истинно в M тогда и только тогда, когда X^* истинно в M^*. Кроме того, X может быть выбрано среди экзистенциальных или универсальных высказываний. Аналогично, для любого предиката $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$, определенного в K^*, $n \geqslant 1$, существует предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$, определенный в K, такой, что если $a_1, \ldots, a_n$ — элементы любой модели M множества K и M^* — модель K^*, являющаяся расширением M, то $Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M тогда и только тогда, когда $Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M^*. Предикат Q инвариантен относительно K и, следовательно, может быть выбран среди экзистенциальных или универсальных предикатов.*

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы мы должны лишь показать в силу 5.3.1, что любое высказывание X^*, определенное в K^*, инвариантно относительно K^* над K. Пусть M — любая модель K с диаграммой D. Множество $K^* \cup D$ полно, поскольку K^* модельно полно относительно K. Отсюда следует, что одно из высказываний X^* или $\sim X^*$ выводимо из $K^* \cup D$ и потому имеет место во всех моделях K^*, которые являются расширениями M.

Вторая часть теоремы доказывается совершенно аналогично.

В качестве приложения 5.3.7 рассмотрим следующую ситуацию. Пусть K — множество аксиом упорядоченного поля (см. п. 2.2), $K=K_{OF}$ и K^* — множество аксиом вещественно замкнутого поля, $K^*=\overline{K}_{OF}$. Предположения теоремы 5.3.7 относительно K и K^* выполнены. Пусть теперь $p(u)$ — любой унитарный многочлен заданной степени $m>0$ с коэффициентами в упорядоченном поле M и I — замкнутый интервал в M. Если k — произвольное фиксированное натуральное число, то свойство многочлена $p(u)$ иметь точно k различных корней в I может быть выражено предикатом от коэффициентов $x_0, \ldots, x_{m-1}$ этого многочлена (старший коэффициент по условию равен 1) и от концевых точек I : y и z. Однако в алгебре, в отличие от арифметики, интересуются главным образом не числом корней в данном поле M, а «общим» числом корней в I (точнее, числом корней в I, принадлежащих вещественному замыканию M). Таким образом, если M — поле рациональных чисел, то желательно определить число вещественных корней в интервале I или, что то же самое, число вещественных алгебраических корней. В соответствии с этим предикат $Q^*(x_0, \ldots, x_{m-1}, y, z)$, выражающий тот факт, что $p(u)=x_0+x_1u+\ldots \ldots+x_{m-1}u^{m-1}+u^m$ имеет в точности k корней в замкнутом интервале $y\leqslant u\leqslant z$, рассматривается в M^* *). Теорема 5.3.7 в этом случае утверждает существование предиката $Q(x_0, \ldots, x_{m-1}, y, z)$, истинного в M, т. е. в первоначальном поле, тогда и только тогда, когда $p(u)$ имеет точно k корней в интервале вещественно замкнутого расширения M, определенном y и z. Таким образом, мы разделались с довольно важной задачей, которая в высшей алгебре решается с помощью метода Штурма. Аналогично, задача о разрешимости системы уравнений над данным полем в его алгебраическом замыкании или в любом алгебраически замкнутом расширении этого поля снова попадает в сферу действия 5.3.7. В высшей алгебре эта проблема решается с помощью теории результантов.

---

*) Имеется в виду, что M^* — вещественное замыкание M. (*Прим. перев.*)

В следующем разделе мы дадим приложение 5.3.7, демонстрирующее эффективность наших методов при доказательстве существования некоторых числовых границ в различных алгебраических задачах.

5.4. Приложение к теореме Гильберта о нулях. Теорема Гильберта о нулях системы многочлена (коротко *Nullstellensatz*) обычно формулируется следующим образом:

5.4.1. *«Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots$ $\ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n)$ — полиномы из кольца многочленов $M[x_1, \ldots, x_n]$ над данным полем M, такие, что f обращается в 0 во всех общих нулях $f_1, \ldots, f_r$. Тогда существует целое положительное число ρ, такое, что f^ρ принадлежит идеалу $(f_1, \ldots, f_r)$».*

Заметим, что приведенное выше утверждение становится корректным, если под фразой «все общие нули» понимать «все общие нули в любых полях, являющихся расширениями M», или «все общие нули в любых алгебраически замкнутых расширениях M», или даже «все общие нули в алгебраическом замыкании M». Утверждение будет, вообще говоря, неверным, если под «всеми общими нулями» понимать «все общие нули в M». Первая из указанных ранее интерпретаций неявно принимается в качестве основной, а вторая и третья, по существу, эквивалентны модельной полноте понятия алгебраически замкнутого поля.

Более точно, пусть

5.4.2. $$Q^* = \forall x_1 \ldots \forall x_n [f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \wedge \ldots \\ \ldots \wedge f_r(x_1, \ldots, x_n) = 0 \supset f(x_1, \ldots, x_n) = 0];$$

запись сделана без излишних деталей средствами узкого исчисления предикатов в терминах отношений равенства, сложения и умножения: E, S и P. Q^* можно рассматривать как предикат от коэффициентов многочленов $f_1, \ldots, f_r, f$, взятых в произвольном, но фиксированном порядке, скажем, $y_1, \ldots, y_k$. Таким образом, $Q^* = Q^*(y_1, \ldots, y_k)$ формулируется в терминах E, S и P без индивидов. Отсюда вытекает, что для $K = K_{CF}$ (множества аксиом поля) и для $K^* = \overline{K}_{CF}$ (множества аксиом алгебраически замкнутого поля) условия теоремы 5.3.7

выполнены. В соответствии со сказанным существует предикат $Q(y_1, \ldots, y_k)$, сформулированный в терминах E, S и P без индивидов, такой, что для любого поля M и элементов $a_1, \ldots, a_k$ из M предикат $Q(a_1, \ldots, a_k)$ истинен в M в том и только в том случае, когда f обращается в нуль во всех общих нулях $f_1, \ldots, f_r$ в алгебраическом замыкании M (или в любом другом алгебраически замкнутом расширении M). Любопытно заметить, что определение Q не зависит от характеристики рассматриваемого поля.

Заключение теоремы 5.4.1 утверждает существование целого положительного числа ρ и таких многочленов $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_r(x_1, \ldots, x_n)$, что

5.4.3. $$(f(x_1, \ldots, x_n))^\rho = g_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot f_1(x_1, \ldots, x_n) + \\ + \ldots + g_r(x_1, \ldots, x_n) \cdot f_r(x_1, \ldots, x_n).$$

Предполагается, что коэффициенты $g_1, \ldots, g_r$ принадлежат полю M. Последнее суждение в том виде, как оно высказано, нельзя сформулировать средствами узкого исчисления предикатов. Однако для любой фиксированной пары целых неотрицательных чисел ρ и μ, как легко проверяется, утверждение

«Существуют многочлены $g_1, \ldots, g_r$ степени не выше μ, для которых выполняется тождество 5.4.3»

может быть сформулировано на языке узкого исчисления предикатов посредством предиката от коэффициентов $y_1, \ldots, y_k$ многочленов $f_1, \ldots, f_r$ и f. Для данных ρ и μ соответствующий предикат обозначим через $Q_{\rho\mu}(y_1, \ldots, y_k)$. $Q_{\rho\mu}$ не содержит индивидов.

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — произвольный набор индивидов и пусть H — множество высказываний $\sim Q_{\rho\mu}(a_1, \ldots, a_k)$, ρ. $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ Обозначим через H' множество $K_{CF} \cup \cup H \cup \{Q(a_1, \ldots, a_k)\}$. Если H' непротиворечиво, то существует поле M и полиномы $f_1, \ldots, f_r, f$ с коэффициентами $a_1, \ldots, a_k$ из M такие, что f обращается в нуль во всех общих нулях $f_1, \ldots, f_r$ в любом алгебраически замкнутом расширении M, но, тем не менее, тождество 5.4.3 не выполняется ни при каких ρ и $g_i(x_1, \ldots, x_n)$. Это, однако, противоречит Nullstellensatz, и мы заключаем, что множество H противоречиво. Отсюда вытекает существование целых положительных $\rho_1, \ldots, \rho_l, \mu_1, \ldots, \mu_l$, для которых высказывание

5.4.4. $$Q(a_1, \ldots, a_k) \supset Q_{\rho_1\mu_1}(a_1, \ldots, a_k) \vee \ldots \\ \ldots \vee Q_{\rho_l\mu_l}(a_1, \ldots, a_k)$$

выводимо из K_{CF}. Тождество

$$f^\rho = \Sigma g_i f_i$$

влечет

$$f^{\rho+\lambda} = \Sigma G_i f_i$$

для любого натурального числа λ, где $G_i = f^\lambda g_i$. Следовательно, $Q_{\rho'\mu}(a_1, \ldots, a_k) \supset Q_{\rho\mu}(a_1, \ldots, a_k)$ выводимо из K_{CF} при $\rho' \leqslant \rho$. С другой стороны, $Q_{\rho\mu'}(a_1, \ldots, a_k) \supset \supset Q_{\rho\mu}(a_1, \ldots, a_k)$ также по очевидным соображениям выводится из K_{CF} для всех $\mu' \leqslant \mu$. В силу сказанного выше, полагая

$$\rho_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \rho_i, \quad \mu_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \mu_i,$$

получим ввиду 5.4.4, что

$$K_{CF} \vdash Q(a_1, \ldots, a_k) \supset Q_{\rho_0\mu_0}(a_1, \ldots, a_k)$$

и, следовательно,

5.4.5. $$K_{CF} \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_k [Q(y_1, \ldots, y_k) \supset Q_{\rho_0\mu_0}(y_1, \ldots, y_k)].$$

Непосредственной интерпретацией 5.4.5 является следующий результат:

5.4.6. Теорема. *Для данной границы степеней $f_1, \ldots, f_r, f$ в формулировке Nullstellensatz существуют ρ_0, μ_0 — границы показателя степени при f и степеней полиномов g_i соответственно, фигурирующих в заключении теоремы* (см. 5.4.3).

Эти границы не зависят от выбора поля M и его характеристики.

Заметим, что в приведенном выше рассуждении теорема Гильберта принималась нами как некий стандартный алгебраический результат. Как мы увидим в дальнейшем, этот факт имеет и чисто метаматематическую интерпретацию. С другой стороны, существование границ ρ_0 и μ_0 может быть также установлено традиционными алгебраическими методами, хотя и весьма утомительной процедурой.

В различных подобных ситуациях приведенный здесь метод оказывается довольно эффективным; другие его применения будут рассмотрены в п. 8.5 в связи с теорией определенных функций. Идея метода находится в тесной связи с комплексом понятий и теорем, полученных выше для бесконечной дизъюнкции в п. 2.4.

5.5. Модельное пополнение. Как было в свое время показано в п. 4.3 (теорема 4.3.6), данное множество K может иметь с точностью до эквивалентности не более одного расширения K^* с тем же словарем, что и K, модельно непротиворечивого и модельно полного относительно K. Такое множество K^* мы назвали модельным пополнением K. Тогда же мы обратили внимание на то, что не каждое непротиворечивое множество аксиом имеет модельное пополнение. Существует, однако, важный класс множеств K, для которых вопрос о существовании модельного пополнения выясняется применением конкретного признака. Для того чтобы оценить возможности этого результата, который будет дан ниже, полезно вспомнить (см. теорему 3.4.7), что всякое непротиворечивое множество аксиом K эквивалентно множеству K' высказываний класса A_2 (т. е. множеству высказываний, заданных в предваренной нормальной форме, в которых кванторы существования не предшествуют кванторам общности) в том и только в том случае, когда K σ-устойчиво (т. е. тогда и только тогда, когда объединение любой линейно возрастающей последовательности моделей K снова является моделью K). Кроме того, если K σ-устойчиво, то K' можно сформулировать в терминах словаря K.

5.5.1. Теорема. *Предположим, что множество высказываний K непусто, непротиворечиво и σ-устойчиво. Для того чтобы K обладало модельным пополнением K^*, необходимо и достаточно, чтобы для каждой примитивной ппф $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$, определенной в K, нашлась экзистенциальная ппф $Q(x_1, \ldots, x_n)$, тоже определенная в K, такая, что для любой модели M множества K и любой совокупности $a_1, \ldots, a_n$ индивидов из M*

$Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M в том и только в том случае, когда $Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в некотором расширении M, являющемся моделью K.

Доказательство. Условие теоремы необходимо. В самом деле, допустим, что K обладает модельным пополнением K^*, и пусть $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$ — любая примитивная ппф, определенная в K. Таким образом, Q^* — экзистенциальная ппф, матрица которой состоит из формул порядка 1 и отрицаний таких формул. Пусть Q — та ппф, существование которой для данной Q^* обеспечивается теоремами 5.3.1 и 5.3.4. Согласно 5.3.5 и 5.3.6 ппф Q можно считать экзистенциальной. Мы намерены показать, что Q является искомой. Пусть M — модель K и $a_1, \ldots, a_n \in M$. Предположим, что $Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в расширении M' структуры M, которое является моделью K. Пусть M^* — произвольное расширение M', которое является моделью K^*. Такая структура M^* существует по определению модельной непротиворечивости. В этом случае $Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ истинно также в M^* в силу экзистенциальности Q^*, а это влечет истинность $Q(a_1, \ldots, a_n)$ в M.

Обратно, допустим, что $Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ ложно в любом расширении M, которое является моделью K. Пусть M^* — произвольное расширение M, являющееся моделью K^*. $Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ не может быть истинным в M^* и потому $Q(a_1, \ldots, a_n)$ не может быть истинным в M. Таким образом, Q удовлетворяет требуемому условию в отношении Q^*, что и доказывает необходимость условия теоремы.

Для доказательства достаточности предположим, что нам дано непустое, непротиворечивое и σ-устойчивое множество K, обладающее нужными свойствами. Модельное пополнение K^* множества K мы будем строить следующим способом.

Пусть $J^* = \{Q_\nu^*(x_1, \ldots, x_{k_\nu})\}$, $k_\nu \geqslant 0$, — множество всех примитивных ппф, определенных в K и $J = \{Q_\nu(x_1, \ldots, x_{k_\nu})\}$ — множество соответствующих *экзистенциальных* ппф Q. Всякая $Q_\nu \in J$ может быть записана в виде

5.5.2. $$Q_\nu(x_1, \ldots, x_{k_\nu}) = \exists y_1 \ldots \exists y_k R(x_1, \ldots, x_{k_\nu}, y_1, \ldots, y_k),$$

где R не содержит кванторов. Для каждой $Q_\nu^* \in J^*$ мы определим высказывание

5.5.3.

$$X_\nu = \forall x_1 \ldots \forall x_{k_\nu} [Q_\nu(x_1, \ldots, x_{k_\nu}) \supset Q_\nu^*(x_1, \ldots, x_{k_\nu})].$$

Обозначим через H множество всех таких высказываний X_ν. Утверждается, что множество $K^* = K \cup H$ является искомым модельным пополнением K.

Понятно, что K^* есть расширение K с тем же самым словарем. Покажем, что K^* модельно непротиворечиво относительно K. Пусть M — любая модель K. Мы должны установить существование расширения M^* структуры M, которое являлось бы моделью K^*. Положим $m = 2^{m_0}$, где

$$m_0 = \max(|K|, |M|, \aleph_0)$$

($|K|$ и $|M|$ — кардинальные числа множества высказываний K и множества индивидов M соответственно). Ясно, что кардинальное число J не превышает m. Обозначим через S_0 множество всех высказываний вида $Q_\nu^*(a_1, \ldots, a_{k_\nu})$, где $a_1, \ldots, a_{k_\nu} \in M$ и $Q(a_1, \ldots, a_{k_\nu})$ истинно в M. Пусть Σ—множество всех моделей K, которые являются расширениями M и кардинальное число которых не превосходит m. Определим A как множество всех упорядоченных пар $\alpha_\mu = (\sigma_\mu, M_\mu)$ таких, что σ_μ — подмножество S_0 и $M_\mu \in \Sigma$, и таких, что каждый элемент $X = Q_\nu^*(a_1, \ldots, a_{k_\nu})$ из σ_μ истинен в M_μ. Множество A непусто, так как A содержит пару $(\varnothing, M)$, где $\varnothing$ — пустое множество.

Введем отношение $\prec$ между (не всеми) элементами A, полагая по определению $\alpha_\lambda \prec \alpha_\mu$ для пар $\alpha_\lambda = (\sigma_\lambda, M_\lambda)$ и $\alpha_\mu = (\sigma_\mu, M_\mu)$, если $\sigma_\lambda \subset \sigma_\mu$ и $M_\lambda \subset M_\mu$. В том случае, когда $\sigma_\lambda = \sigma_\mu$, мы дополнительно потребуем $M_\lambda = M_\mu$, т. е. $\alpha_\lambda = \alpha_\mu$. Таким образом, отношение $\prec$ не определено для тех пар α_λ, α_μ, для которых $\sigma_\lambda = \sigma_\mu$, $M_\lambda \subset M_\mu$, $M_\lambda \neq M_\mu$. Мы утверждаем, что $\alpha_\lambda \prec \alpha_\mu$ определяет в A частичную упорядоченность. Действительно, $\alpha_\lambda \prec \alpha_\lambda$ очевидно, а если $\alpha_\lambda \prec \alpha_\mu$ и $\alpha_\mu \prec \alpha_\lambda$, то $\alpha_\lambda = \alpha_\mu$. Кроме того, если $\alpha_\lambda \prec \alpha_\mu$ и $\alpha_\mu \prec \alpha_\nu$, то $\sigma_\lambda \subset \sigma_\nu$ и $M_\lambda \subset M_\nu$. Допустим, что $\sigma_\lambda = \sigma_\nu$, тогда $\sigma_\lambda = \sigma_\mu = \sigma_\nu$, а следовательно, $M_\lambda = M_\mu = M_\nu$, т. е. $\alpha_\lambda = \alpha_\nu$. Таким образом, транзитивность также имеет место, и $<$ в самом деле определяет в A частичную упорядоченность.

Пусть теперь $A'=\{\alpha_\mu\}$ — линейно упорядоченное непустое подмножество A. Покажем, что $\bar\alpha=(\bar\sigma, \bar M)=(\bigcup_\mu\{\sigma_\mu\}, \bigcup_\mu\{M_\mu\})$ является верхней гранью (и даже точной верхней гранью) множества A'. Действительно, пусть $X\in\bar\sigma=\bigcup_\mu\{\sigma_\mu\}$, тогда $X\in\sigma_\nu$ для некоторого ν. В этом случае X истинно в M_ν и, будучи экзистенциальным высказыванием, истинно также в каждом расширении M_ν и, в частности, в $\bar M$. Более того, $\bar M$ — расширение M и модель K, так как K σ-устойчиво. Таким образом, $\bar\alpha\in A$. Ясно также, что для каждой $\alpha_\mu=(\sigma_\mu, M_\mu)\in A$ будет $\sigma_\mu\subset\bar\sigma$ и $M_\mu\subset\bar M$. Для доказательства того, что $\alpha_\mu<\bar\alpha$, осталось показать, что равенство $\sigma_\mu=\bar\sigma$ влечет $M_\mu=\bar M$. Однако если $\sigma_\mu=\bar\sigma$, то отношение $\alpha_\mu<\alpha_\nu$, где $\alpha_\nu=(\sigma_\nu, M_\nu)\in A'$, влечет $\sigma_\mu=\sigma_\nu$, и потому, согласно определению нашей частичной упорядоченности, $M_\mu=M_\nu$. Следовательно, $\bar M=\bigcup_\tau\{M_\tau\}=M_\mu$, т. е. $\alpha_\mu=\bar\alpha$. И, наконец, $|\bar M|\leqslant m$.

Итак, применима лемма Цорна, и A содержит по крайней мере одну максимальную пару $\alpha_1=(\sigma_1, M_1)$. Мы хотим показать, что $\sigma_1=S_0$.

Пусть, наоборот, $Q^*_\nu(a_1, \ldots, a_{k_\nu})$ не принадлежит σ_1, хотя и содержится в S_0, $Q_\nu(a_1, \ldots, a_{k_\nu})$ истинно в M по определению S_0, и в силу экзистенциальности Q_ν это высказывание истинно также в M_1. Отсюда согласно условию теоремы вытекает, что $Q^*_\nu(a_1, \ldots, a_{k_\nu})$ истинно в некотором расширении M' структуры M, которое также является моделью K. В силу обычного рассуждения мы можем предполагать, что $|M'|\leqslant m$ и, следовательно, $M'\in\Sigma$. Кроме того, все высказывания σ_1 истинны в M', поскольку все они экзистенциальны. Таким образом, $\alpha'=(\sigma_1\cup\{Q^*_\nu(a_1, \ldots, a_{k_\nu})\}, M')\in A$ и $\alpha_1<\alpha'$, $\alpha_1\neq\alpha'$, вопреки максимальности α_1, что и доказывает равенство $\sigma_1=S_0$.

Применяя теперь аналогичную процедуру к M_1 вместо M, получим расширение M_2 структуры M_1, являющееся моделью K и такое, что для всех $Q_\nu(a_1, \ldots, a_{k_\nu})$, истинных в M_1, соответствующие $Q_\nu^*(a_1, \ldots, a_{k_\nu})$ истинны в M_2. Продолжая это построение, мы придем к последовательности моделей K с кардинальным числом, не превосходящим m,

$$M \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$$

Пусть $M^* = \bigcup_n \{M_n\}$. M^* является моделью K ввиду σ-устойчивости K. Более того, мы утверждаем, что M^* удовлетворяет всем высказываниям из H. В самом деле, пусть $X_\nu \in H$; мы должны показать, что X_ν истинно в M^* или, что то же самое,

$$\textbf{5.5.4.}\quad [Q_\nu(a_1, \ldots, a_{k_\nu}) \supset Q_\nu^*(a_1, \ldots, a_{k_\nu})]$$

истинно в M^* для всех $a_1, \ldots, a_{k_\nu} \in M^*$. Итак,

$$Q_\nu(a_1, \ldots, a_{k_\nu}) = \exists y_1 \ldots \exists y_l R_\nu(a_1, \ldots, a_{k_\nu}, y_1, \ldots, y_l),$$

где R_ν не содержит кванторов, поэтому, если это высказывание истинно в M^*, то найдутся такие индивиды $b_1, \ldots, b_l$, что $Z_\nu = R_\nu(a_1, \ldots, a_{k_\nu}, b_1, \ldots, b_l)$ истинно в M^*. Но коль скоро $M^* = \bigcup_n \{M_n\}$, существует структура M_s такая, что $a_1, \ldots, a_{k_\nu}, b_1, \ldots, b_l \in M_s$ и, следовательно, Z_ν, а тем самым и $Q_\nu(a_1, \ldots, a_{k_\nu})$ истинны в M_s. Но тогда по построению, Q_ν^* истинно в M_{s+1}. Вновь используя экзистенциальность Q_ν^*, мы заключаем, что $Q_\nu^*(a_1, \ldots, a_{k_\nu})$ также истинно в M^*. Отсюда следует, что 5.5.4 истинно в M^*, как и утверждалось. Так как $K^* = K \cup H$, то мы доказали, что M^* — модель K^* и, следовательно, K^* модельно непротиворечиво относительно K.

Для того чтобы установить модельную полноту K^* относительно K, мы можем использовать полученный ранее признак относительной модельной полноты (4.3.1). Применяя этот признак к нашему случаю, мы должны показать, что если M — модель K и X — примитивное высказывание, определенное в M, то либо X истинно во всех расширениях M, которые являются моделями K, либо не истинно ни в одном из них.

Итак, пусть M — модель K и X — примитивное высказывание, определенное в M. Запишем X в виде $Q^*(a_1, \ldots, a_k)$, указывая явно лишь те индивиды, которые присутствуют в M, но не в K. По предположению, найдется ппф $Q(x_1, \ldots, x_k)$, определенная в K, такая, что высказывание

5.5.5. $\forall x_1 \ldots \forall x_k [Q(x_1, \ldots, x_k) \supset Q^*(x_1, \ldots, x_k)]$

принадлежит K^*, и такая, что $Q(a_1, \ldots, a_k)$ истинно в M тогда и только тогда, когда $Q^*(a_1, \ldots, a_k)$ истинно в некотором расширении M, которое является моделью K^*. Допустим, что $Q^*(a_1, \ldots, a_k)$ истинно в таком расширении, тогда $Q(a_1, \ldots, a_k)$ истинно в M, и потому $Q^*(a_1, \ldots, a_k)$ истинно во всех расширениях M, которые являются моделями K^*. Это доказывает модельную полноту K^* относительно K, а следовательно, и нашу теорему.

Отметим, что построенное K^*, кроме всего прочего, модельно полно. Действительно, если M^* — любая модель K^* с диаграммой D^*, то мы должны лишь показать, что $K^* \cup D^*$ полно, а это следует из того, что K^* полно относительно K и M^* — модель K.

Приведенное выше построение K^* из K является в некотором смысле каноническим. Всякий раз, когда множество K вообще обладает модельным пополнением K^*, это K^* (с точностью до эквивалентности) может быть получено из K только что описанным способом. Для некоторых наиболее важных случаев, как, например, для поля или для упорядоченного поля, соответствующие модельные пополнения формулируются довольно простым образом. Однако теперь мы будем рассматривать такие ситуации, в которых K^* получается обычным способом с помощью указанной выше процедуры.

Пусть $K = K_{DF}$ — множество аксиом *дифференциального поля характеристики* 0. Дифференциальным полем называется поле, в котором определен дифференциальный оператор, обозначаемый $\Delta(x)$, такой, что

5.5.6. $\Delta(a+b)=\Delta(a)+\Delta(b)$,
$\Delta(ab)=\Delta(a)\cdot b+a\cdot\Delta(b)$

для любых a и b из нашего поля.

Для ознакомления с некоторыми простейшими понятиями и результатами относительно дифференциальных полей, которые будут здесь использованы, мы отсылаем читателя к работе Ритта [1].

K_{DF} нетрудно сформулировать средствами узкого исчисления предикатов в терминах предметных постоянных 0 и 1 и в терминах отношений E, S, P и дополнительного отношения $A(x, y)$ (читается $y=\Delta(x)$). Так, например, две аксиомы 5.5.6 могут быть выражены высказываниями:

5.5.7. $\forall x\forall y\forall z\forall u\forall v\forall w[A(x, y)\wedge A(z, u)\wedge \wedge S(x, z, v)\wedge S(y, u, w)\supset A(v, w)]$,

$\forall x\forall y\forall z\forall s\forall t\forall u\forall v\forall w[A(x, y)\wedge A(z, s)\wedge \wedge P(x, z, t)\wedge P(y, z, u)\wedge P(x, s, v)\wedge S(u, v, w)\supset A(t, w)]$.

Дифференциальный многочлен $p\{x_1, \ldots, x_n\}$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами в дифференциальном поле M, по определению, представляет собой обыкновенный многочлен с коэффициентами в M от переменных $x_i^{(k)}$, $i=1, \ldots, n, k=0, 1, 2, \ldots$ (где $x_i^{(k)}$, $k\geqslant 1$, интерпретируются как производные от $x_i^{(0)}=x_i$). Многочлену $p\{x_1, \ldots, x_n\}$ в точке $(a_1, \ldots, a_n)$ с координатами в расширении M' поля M мы приписываем значение обычным образом, т. е. подставляя $a_i, a_i', \ldots, a_i^{(k)}, \ldots$ вместо $x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(k)}, \ldots$

Пусть $n\geqslant 1$, $m\geqslant 0$, $r\geqslant 0$, $s\geqslant 0$, $d\geqslant 0$ — фиксированное множество целых чисел и пусть

5.5.8. $p_1\{y_1, \ldots, y_n\}, \ldots, p_m\{y_1, \ldots, y_n\}$,
$q_1\{y_1, \ldots, y_n\}, \ldots, q_r\{y_1, \ldots, y_n\}$

— множество *общих* дифференциальных многочленов от n переменных порядка s и степени d с неопределенными коэффициентами, различными для различных многочленов из этого множества. Степень d дифференциального многочлена есть совместная степень по всем $y_i^{(k)}$. Многочлен называется *общим*, если все одночлены данного порядка и данной степени действительно содержатся в нем. Выпишем все неопределенные коэффициенты полиномов 5.5.8, занумеровав их в некотором произвольном фиксированном порядке $z_1, \ldots, z_k$. Для любого множества $a=(a_1, \ldots, a_k)$ обозначим через $p_i[a]\{y_1, \ldots, y_n\}$, $q_i[a]\{y_1, \ldots, y_n\}$ многочлены, получаемые подстановкой a_j вместо z_j, $j=1, \ldots, k$.

Как было показано Зейденбергом, существует множество дифференциальных многочленов от $z_1, \ldots, z_n$ с целыми коэффициентами

5.5.9. $$p_{i1}\{z_1, \ldots, z_k\}, \ldots, p_{il_i}\{z_1, \ldots, z_k\},$$
$$Q_i\{z_1, \ldots, z_k\}, \qquad i=1, \ldots, \lambda,$$

таких, что для каждого дифференциального поля M и каждого набора элементов $a_1, \ldots, a_k$ из M множество полиномиальных уравнений и неравенств (т. е. отрицаний равенств)

5.5.10.
$$p_1[a]\{y_1, \ldots, y_n\}=0, \ldots, p_m[a]\{y_1, \ldots, y_n\}=0,$$
$$q_1[a]\{y_1, \ldots, y_n\}\neq 0, \ldots, q_r[a]\{y_1, \ldots, y_n\}\neq 0$$

обладает решением в некотором дифференциальном поле M', которое является расширением M, в том и только в том случае, когда для некоторого i, $1\leqslant i<s$, в M имеет место

5.5.11. $$p_{i1}\{a_1, \ldots, a_k\}=0, \ldots, p_{il_i}\{a_1, \ldots, a_k\}=0,$$
$$Q_i\{a_1, \ldots, a_k\}\neq 0.$$

Нетрудно вывести, что утверждение это остается верным, если коэффициенты p_i, q_i представляют собой не сами неизвестные $z_1, \ldots, z_k$, а некоторые многочлены от этих неизвестных с целыми коэффициентами.

Пусть $Q^*(z_1, \ldots, z_k)$, $k\geqslant 0$, — любая примитивная ппф, определенная в K:

$$Q^*(z_1, \ldots, z_k)=\exists y_1 \ldots \exists y_n R^*(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_k),$$

где R^* уже не содержит кванторов. R^* можно интерпретировать как систему равенств и неравенств, коэффициенты которой являются (очень простыми) многочленами от $z_1, \ldots, z_k$. Следовательно, на основании приведенного выше результата существует экзистенциальная ппф от $z_1, \ldots, z_k$, $Q(z_1, \ldots, z_k)$, такая, что $Q(a_1, \ldots, a_k)$ истинно в произвольной модели M множества K, содержащей $a_1, \ldots, a_k$, тогда и только тогда, когда $Q^*(a_1, \ldots \ldots, a_k)$ истинно в некотором расширении M, которое является моделью K. Q получается непосредственной формализацией 5.5.11 в терминах словаря K. Как легко усмотреть, условия 5.5.1 выполняются, и мы заключаем, что K обладает модельным пополнением $K^* = \overline{K}_{DF}$, которое может быть сконструировано описанным выше способом. Модели K^* будут называться *дифференциально замкнутыми полями.*

Заметим уже сейчас, что множество K^*, полученное этим способом, модельно полно не только относительно K, но и просто модельно полно. Более того, как нетрудно видеть, K^* полно. Поскольку любая модель K^* содержит поле рациональных чисел M_0, M_0 также становится моделью K, если положить $\Delta(a) = 0$ тождественно для всех $a \in M_0$. Пусть D_0 — диаграмма структуры M_0, модифицированной добавлением отношения $A(x, y)$, соответствующего $y = \Delta(x)$. Множество $K^* \cup D_0$ в силу модельной полноты полно, и потому любое высказывание X, определенное в K^*, либо истинно во всех моделях K^*, либо во всех ложно *). Итак, справедлива

5.5.12. Теорема. *Теория дифференциально замкнутого поля является полной и модельно полной.*

Очень важно иметь в виду то обстоятельство, что множество аксиом K^* дает не единственное расширение данного дифференциального поля. Напротив, модель K может, вообще говоря, иметь много расширений, которые являются моделями K^*. Естественно спросить, будет ли любое данное дифференциальное поле M обладать наименьшим дифференциально замкнутым расширением M^*, подобно тому, как алгебраическое замыкание данного поля есть наименьшее алгебраически замкнутое расширение. К сожалению, в этом случае, по-видимому,

---

* Иными словами, M_0 — простая модель K и ввиду модельной непротиворечивости его полнота следует из признака 4.2.3. (*Прим.

невозможно определить понятие *замыкания* (в отличие от замкнутого расширения) для дифференциальных полей.

Уже из одного факта существования дифференциально замкнутого поля довольно быстро вытекает следующая теорема:

5.5.13. Теорема. *Пусть M_1 и M_2 — два расширения дифференциального поля M_0, все общие элементы которых содержатся в M_0. При этих условиях M_1 и M_2 могут быть вложены в общее расширение M_3.*

Некоторая осторожность в формулировке теоремы продиктована намерением избежать различных тривиальных аномалий. Если не требовать того, чтобы общие элементы M_1 и M_2 содержались в M_0, то вполне возможна такая ситуация, когда два индивида, a и b, входят в M_1 и M_2, причем $a+b=0$ в M_1, но $a+b=1$ в M_2.

Доказательство. Пусть M_1^* и M_2^* — два дифференциально замкнутых расширения M_1 и M_2 соответственно, не имеющие других общих элементов, кроме элементов M_0. Обозначим через D_0, D_1^*, D_2^* диаграммы M_0, M_1^*, M_2^*, сформулированные, как обычно, в терминах индивидов соответствующих структур, так что $D_0 \subset D_1^*$ и $D_0 \subset D_2^*$. Мы утверждаем, что $K^* \cup D_1^* \cup D_2^*$ непротиворечиво. В самом деле, если это не так, то противоречиво уже множество $K^* \cup \{Y_1 \wedge Y_2\}$, где Y_1 и Y_2 — некоторые конъюнкции элементов из D_1^* и D_2^* соответственно. Запишем $Y_1 = Q(a_1, \ldots, a_m)$, $Y_2 = Q_2(b_1, \ldots, b_n)$, явно указывая лишь те индивиды M_1^* и M_2^*, которые не принадлежат M_0. Множество

$$H = K^* \cup D_0 \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_m Q_1(x_1, \ldots, x_m),\; \exists y_1 \ldots \exists y_n Q_2(y_1, \ldots, y_n)\}$$

также противоречиво. Но высказывание $Z_1 = \exists x_1 \ldots \ldots \exists x_m Q_1(x_1, \ldots, x_m)$ определено в $K^* \cup D_0$ и истинно в M_1^*. Отсюда ввиду полноты $K^* \cup D_0$ вытекает, что $K^* \cup \cup D_0 \vdash Z_1$. Аналогично, $K^* \cup D_0 \vdash Z_2$, где $Z_2 = \exists y_1 \ldots \ldots \exists y_n Q_2(y_1, \ldots, y_n)$. Поскольку $K^* \cup D_0$ непротиворечиво, $H = K^* \cup D_0 \cup \{Z_1, Z_2\}$ также является непротиворечивым, вопреки сказанному ранее. Таким образом, $K^* \cup D_1^* \cup D_2^*$ непротиворечиво, и любая модель M_3 этого множества удовлетворяет условию 5.5.13.

Можно показать, что теорема 5.5.13 уже не верна для дифференциальных полей характеристики $p>0$. С другой стороны, нетрудно видеть, что методы, использованные при доказательстве 5.5.13, в действительности применимы ко всем случаям, которые описываются в рамках общей теории этого раздела. Таким образом, эта теория уже неприложима к дифференциальным полям характеристики >0.

В качестве другого применения наших результатов докажем теорему о специализации параметров дифференциального поля.

5.5.14. Теорема. *Пусть M_0 — дифференциальное поле и $Q(y_1, \ldots, y_n)$, $n \geqslant 1$, — предикат, определенный в M_0. Пусть M^* — дифференциально замкнутое расширение M_0 и $a_1, \ldots, a_n$ — такая совокупность элементов из M^*, что для любого ненулевого дифференциального многочлена $q\{y_1, \ldots, y_n\}$ с коэффициентами из M_0 $q\{a_1, \ldots, a_n\}$ отлично от нуля.* (Такие элементы $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n$ называется *дифференциально независимыми* над M_0.) *Допустим, что $Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M^*. Тогда существует ненулевой дифференциальный многочлен $q\{y_1, \ldots, y_n\}$ с коэффициентами из M_0, такой, что для произвольных $b_1, \ldots, b_n$ из любого дифференциально замкнутого расширения M поля M_0 $Q(b_1, \ldots, b_n)$ истинно в M при условии $q\{b_1, \ldots, b_n\} \neq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим поле M_1, полученное присоединением n дифференциальных неизвестных $c_1, \ldots, c_n$ к M_0, и поле M_2, полученное присоединением $a_1, \ldots, a_n$ к M_0 в M^*. $M_2 \subset M^*$ и, кроме того, существует дифференциальный изоморфизм M_2 на M_1, оставляющий на месте элементы M_0 и переводящий a_i в c_i, $i=1, \ldots, n$. Пусть M_1^* — дифференциально замкнутое расширение M_1. Тогда существует дифференциально замкнутое расширение M_2^* поля M_2, изоморфное M_1^* таким образом, что на M_2 этот изоморфизм совпадает с построенным раньше. Высказывание $Q(a_1, \ldots, a_n)$, определенное в M_2, истинно в M^* — модели K^*, причем K^* модельно полно относительно K. Отсюда следует, что $Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M_2^*, и ввиду изоморфизма между M_1^* и M_2^* $Q(c_1, \ldots, c_n)$ истинно в M_1^*. Снова пользуясь модельной полнотой K^* относительно K, мы заключаем, что $Q(c_1, \ldots, c_n)$ истинно в любом дифференциально замкнутом расширении M_1.

Пусть $d_1, \ldots, d_n$ — любая совокупность дифференциально независимых элементов из дифференциально замкнутого расширения M_3^* поля M_0. $Q(d_1, \ldots, d_n)$ истинно в M_3^*, так как если бы M_3^* удовлетворяло $\sim Q(d_1, \ldots, d_n)$, то, повторив предыдущие рассуждения, мы пришли бы к заключению, что $\sim Q(c_1, \ldots, c_n)$ истинно в любом дифференциально замкнутом расширении M_1, что невозможно.

Для произвольного ненулевого дифференциального многочлена $p\{y_1, \ldots, y_n\}$ с коэффициентами в M_0 обозначим через $Q_p(y_1, \ldots, y_n)$ определенный в M_0 предикат, выражающий тот факт, что $p\{y_1, \ldots, y_n\}=0$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — некоторое множество индивидов, не содержащихся в M_0, и R — множество высказываний $\sim Q_p(e_1, \ldots, e_n)$, где Q_p пробегает все только что определенные предикаты. Легко видеть, что $Q(e_1, \ldots, e_n)$ выводимо из $H=K^* \cup D_0 \cup R$, где D_0 — диаграмма M_0. В самом деле, модели H — это дифференциально замкнутые расширения M_0, в которых $e_1, \ldots, e_n$ дифференциально независимы над M_0, а нами уже было установлено, что $Q(e_1, \ldots, e_n)$ истинно во всех таких структурах. Таким образом, $Q(e_1, \ldots, e_n)$ выводимо из $K \cup D_0 \cup R'$, где R' — некоторое конечное подмножество R.

Пусть $R'=\{\sim Q_{p_1}(e_1, \ldots, e_n), \ldots, \sim Q_{p_j}(e_1, \ldots, e_n)\}$ и, следовательно,

5.5.15. $K^* \cup D_0 \vdash \sim Q_{p_1}(e_1, \ldots, e_n) \wedge \ldots$
$$\ldots \wedge \sim Q_{p_j}(e_1, \ldots, e_n) \supset Q(e_1, \ldots, e_n).$$

Положим
$$p\{y_1, \ldots, y_n\}=p_1\{y_1, \ldots, y_n\}p_2\{y_1, \ldots, y_n\}\ldots$$
$$\ldots p_j\{y_1, \ldots, y_n\}.$$

5.5.15 влечет тогда
$$K^* \cup D_0 \vdash \sim Q_p(e_1, \ldots, e_n) \supset Q(e_1, \ldots, e_n)$$
и, тем самым,

5.5.16. $K^* \cup D_0 \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n[\sim Q_p(y_1, \ldots, y_n) \supset$
$$\supset Q(y_1, \ldots, y_n)],$$
что эквивалентно утверждению теоремы 5.5.14.

5.6. Задачи

5.6.1. Вывести теорему Бета 5.2.1 непосредственно из леммы о непротиворечивости 5.1.6 (А. Робинсон [8]).

5.6.2. Доказать следующее обобщение теоремы Бета.

Пусть высказывание $X(F_1, \ldots, F_l, G_1, \ldots, G_m)$ формулируется в терминах отношений $F_1, \ldots, F_l, G_1, \ldots, G_m$ и, возможно, в терминах некоторого числа индивидов, не указанных явно в этом обозначении. Через $X(F'_1, \ldots, F'_l, G_1, \ldots, G_m)$ обозначим высказывание, полученное из первоначального заменой отношений $F_1, \ldots, F_l$ соответственно новыми отношениями $F'_1, \ldots, F'_l$ с тем же числом переменных. Допустим, что $\vdash Z \supset Y$, где

$$Y = \forall x_1 \ldots \forall x_k \left[F_1(x_1, \ldots, x_k) \equiv F'_1(x_1, \ldots, x_k)\right],$$

$$Z = X\left(F_1, \ldots, F_l, G_1, \ldots, G_m\right) \wedge X\left(F'_1, \ldots, F'_l, G_1, \ldots, G_m\right).$$

Тогда существует ппф $Q(x_1, \ldots, x_k)$, все индивиды и отношения которой, за исключением $F_1, \ldots, F_l$, содержатся в X, так что

$$\vdash X(F_1, \ldots, F_l, G_1, \ldots, G_m) \supset [\forall x_1 \ldots \forall x_k [F(x_1, \ldots, x_k) \supset \supset Q(x_1, \ldots, x_k)]]$$

(Крейг [2]).

5.6.3. Пусть $p(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_j z^j$,

$$q(z) = x_{j+1} + x_{j+2} z + \ldots + x_n z^{n-j-1},$$

где j и n — фиксированные натуральные числа. Сформулировать в терминах отношений E, S, P предикат $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$, выражающий существование такого z, что $p(z) = 0$ и $q(z) \neq 0$. Пусть K — множество аксиом упорядоченного поля и K^* — множество аксиом вещественно замкнутого поля. Используя стандартные алгебраические результаты относительно вещественных полей, построить предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям теоремы 5.3.4.

5.6.4. Доказать, что теория вещественного поля не имеет модельного пополнения.

Библиографическая справка. Лемма о непротиворечивости приведена у А. Робинсона [7] и использовалась для семантического доказательства теоремы Бета 5.2.1. Теорема Бета впервые была сформулирована Бетом [2] (см. также Бет [3]). Свою лемму Крейг доказал синтаксическим методом (Крейг [1], [2]) и в свою очередь применял ее к доказательству теоремы Бета. На то обстоятельство, что 5.1.6 влечет 5.1.8, автору было указано несколькими логиками из Варшавы и Беркли. Теория относительных определений взята из работы А. Робинсона [11], включающей также анализ Nullstellensatz (раздел 5.4). Доказательство 5.4.6 имеется в статье А. Робинсона [3]. Теорема 5.4.6 показывает, что ρ_0, μ_0 могут быть выбраны как общерекурсивные функции от n и данных границ на $f_1, \ldots, f_\nu, f$. Этот результат был улучшен Крейселом, который показал, что указанные функции могут быть сделаны примитивно рекурсивными (Крейсел [2]). Теория модельной полноты и ее приложения к дифференциальным полям даны в статье А. Робинсона [13]. Основная работа по дифференциальной алгебре принадлежит Ритту [1] (см. также Капланский [1]). Относительно некоторых других алгебраических результатов, использованных в этом разделе, см. работы Зейденберга [1] и [3] *).

---

*) Лемма Крейга усилена Линдоном [2]. Теорема Крейга — Линдона обобщена Хенкиным [9]. Из доказательства Хенкина легко следует обобщенная теорема полноты.

Теорема Бета усилена и обобщена разными авторами. См. работы Кочена [1], Маккая [3], Тайманова [7], Чжана [3]. (*Прим. ред.*)

ОБОБЩЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

6.1. Многочлены в общих аксиоматических системах. Имеются различные алгебраические понятия, основанные на определенных фундаментальных идеях, сфера действий которых (хотя и довольно туманная) простирается гораздо дальше непосредственного определения. В качестве примера таких концепций можно указать понятие кольца многочленов от n переменных над данным коммутативным кольцом; понятие свободной группы; понятие алгебраического числа; понятие идеала. Кроме того, довольно часто бывает и так, что одно конкретное понятие воплощает несколько основных идей. В более общих ситуациях такое понятие может расщепиться на несколько понятий, или же может быть по-разному проинтерпретировано в различных теориях. В настоящей главе мы рассмотрим отдельные из указанных выше концепций, так же как и некоторые другие, и сформулируем соответствующие определения для общих множеств аксиом узкого исчисления предикатов. Наиболее важное понятие идеала будет изучено в отдельной главе.

Существует и другая теория, а именно, теория универсальных алгебр, называемых также алгебрами Биркгофа, которая естественно обобщает некоторые алгебраические понятия. Действительно, частным случаем понятия универсальной алгебры является, например, понятие группы, а понятие свободной алгебры есть наиболее естественное обобщение понятия свободной группы. Но, с другой стороны, можно показать, что понятие поля нельзя включить в теорию универсальных алгебр *). В соответствии с этим различные понятия теории полей,

*) По существу, дело состоит в том, что в поле операция взятия обратного элемента определена не для всех элементов. (*Прим. перев.*)

обобщения которых будут рассмотрены в настоящей работе, не имеют своего подобия в теории универсальных алгебр. Однако даже в тех случаях, когда оба метода дают разумные обобщения, специфический характер метаматематического подхода проявляется в явном использовании понятия выводимости. Это верно независимо от того факта, что выводимость может быть переопределена в теоретико-модельных терминах.

Первоначальная концепция, которую мы сформулируем для общего множества аксиом узкого исчисления предикатов, — это концепция многочлена.

Всюду на протяжении этого раздела будет предполагаться наличие отношения равенства. Впрочем, это отношение можно добавить к данному множеству аксиом, если его там не было вначале.

Понятие многочлена в алгебре, например, многочлена от одной переменной $p(x)$ в коммутативном кольце R, существенно отличается от соответствующего понятия в анализе. Естественным отправным пунктом анализа является общее понятие функции как соответствия между независимыми и зависимыми переменными. Постепенно сужая класс рассматриваемых функций, мы приходим к характеризации многочленов как элементов класса целых аналитических функций, имеющих в бесконечно удаленной точке полюс (конечного порядка). На самом деле даже в анализе такому описанию многочленов, как правило, предшествует обычное определение через равенство вида

6.1.1. $y=p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$.

Тем не менее основным понятием является функция (как соответствие), а уравнение 6.1.1 носит лишь вспомогательный характер и может рассматриваться как некое правило для нахождения соответствующего значения зависимой переменной по данному значению аргумента.

С другой стороны, в алгебре многочлен определяется как выражение, подобное правой части 6.1.1. Здесь уже выражение как таковое приобретает доминирующее значение, в то время как функциональная зависимость отходит на задний план. Например, многочлены $p(x)=1+x^2$ и $q(x)=1-x$ рассматриваются как разные, хотя как функции, аргумент которых пробегает простое поле характеристики 2, они тождественны.

Сразу же вслед за этим встает вопрос: как естественно включить многочлены в принятые математические конструкции. Один из таких подходов состоит в том, что многочлены рассматриваются как векторы (т. е. упорядоченные множества) произвольной конечной длины с координатами из первоначального кольца. Таким образом, $p(x)$ представляется вектором $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, а *неизвестная* x — вектором $(0, 1)$. Кроме того, соответствующим образом определяются правила действия с этими векторами. Конечно, там, где такой подход применим, он не является чем-то предосудительным. Тем не менее, похоже, что это является отклонением от первоначального алгебраического понимания многочлена как правила действия. Такое правило, собственно говоря, принадлежит формальному языку, в рамках которого рассматривалось кольцо. В соответствии со сказанным, мы будем представлять многочлены как некоторые предикаты $R(x, y)$, такие, что высказывания $\forall x \exists y R(x, y)$ и $\forall x \forall y \forall z [R(x, y) \wedge R(x, z) \supset E(y, z)]$ выводимы из данного множества аксиом.

Итак, пусть K — непротиворечивое множество аксиом узкого исчисления предикатов, включающее отношение равенства. Мы будем рассматривать предикаты $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ от $(n+1)$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y$, где $n \geqslant 1$. Порядок переменных в настоящем контексте существен: так, например, $R(x_1, x_2, y)$ нельзя заменять на $R(x_2, x_1, y)$.

$R(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *предмногочленом* в K, если высказывания

6.1.2. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y R(x_1, \ldots, x_n, y)$,

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y \forall z [R(x_1 \ldots, x_n, y) \wedge \wedge R(x_1, \ldots, x_n, z) \supset E(y, z)]$$

выводимы из K. При $n=0$ кванторы, предшествующие $\forall y$, отсутствуют.

Из всей совокупности предмногочленов в K выделим элементы вида

6.1.3. $\exists z_1 \ldots \exists z_m Q(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n, y)$, где матрица Q уже не содержит кванторов и является конъюнкцией ппф порядка 1 (т. е. атомарных ппф). Такие предмногочлены мы назовем *многочленами*. Понятно, что $z_1, \ldots, z_m$ — произвольные переменные, тогда как $x_1, \ldots, x_n, y$ зафиксированы с самого начала. Для $n \geqslant 1$ множество многочленов (а следовательно, и множество предмногочленов) непусто, так как содержит элементы вида

6.1.4. $$R(x_1, \ldots, x_n, y) = [E(x_1, x_1) \wedge E(x_2, x_2) \wedge \ldots \ldots \wedge E(x_i, y) \wedge \ldots \wedge E(x_n, x_n)], \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В самом деле, для таких предикатов высказывания 6.1.2 выводимы из аксиом 2.1.1, а следовательно, из любого множества аксиом, содержащего отношение равенства. Для $n = 0$ множество предмногочленов $R(x_1, \ldots \ldots x_n, y)$ может оказаться пустым, но мы будем предполагать, что в рассматриваемых случаях эта возможность исключена.

Для данного $n \geqslant 0$ обозначим через C_n множество индивидов, находящихся во взаимно однозначном соответствии с предмногочленами $R(x_1 \ldots, x_n, y)$ в K, $R \longleftrightarrow c_R$. На множестве индивидов из C_n мы следующим образом определим структуру M_n. Для любого отношения $A(y_1, \ldots, y_k)$, $k \geqslant 0$, входящего в K, и для любого множества $R_1, \ldots, R_k$ предмногочленов в K, соответствующих индивидам $c_1, \ldots, c_k$ из C_n, положим, по определению, что $A(c_1, \ldots, c_k)$ истинно в M_n тогда и только тогда, когда высказывание

6.1.5. $$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_k [R_1(x_1, \ldots, x_n, y_1) \wedge \wedge R_2(x_1, \ldots, x_n, y_2) \wedge \ldots \wedge R_k(x_1, \ldots, x_n, y_k) \supset \supset A(y_1, \ldots, y_k)]$$

выводимо из K. M_n будем называть *предполиномиальной* структурой порядка n над K. Ограничивая отношения из M_n на множество индивидов C'_n, соответствующих многочленам над K, мы получим подструктуру $M'_n \subset M_n$, которую будем называть *полиномиальной структурой* порядка n над K. Можно также ввести предполиномиальную структуру M_∞, полагая $C_\infty = \bigcup\limits_n C_n$, где множества C_n

предполагаются непересекающимися. Мы скажем тогда, что $A(c_1, \ldots, c_k)$ истинно в M_∞, где $c_i \in C_\infty$ соответствуют $R_i(x_1, \ldots, x_{n_i}, y_i)$, если высказывание

6.1.6.

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_k \left[R_1(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1) \wedge \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \wedge R_k(x_1, \ldots, x_{n_k}, y_k) \supset A(y_1, \ldots, y_k)\right]$$

выводимо из K, $n = \max(n_1, \ldots, n_k)$. M'_∞ получается, как и раньше, ограничением M_∞ на множество индивидов, соответствующих многочленам в K. Подобным образом нетрудно определить предполиномиальную и полиномиальную структуру для множества переменных с произвольным кардинальным числом.

При $n > m$ M_n содержит подструктуру M^*_m, изоморфную M_m. Индивиды c^* из M^*_m определяются следующим образом. Пусть $c \in M_m$ соответствует предмногочлену $R(x_1, \ldots, x_m, y)$; тогда мы сопоставляем c индивид $c^* \in C_n$, который соответствует предмногочлену $E(x_{n+1}, x_{n+1}) \wedge \ldots \wedge E(x_m, x_m)' \wedge R(x_1, \ldots, x_m, y)$. Аналогично, M'_n содержит подструктуру, изоморфную M'_m.

Очевидно, что если K и K' — эквивалентные множества аксиом, содержащие одинаковые отношения и индивиды, то соответствующие им полиномиальные и предполиномиальные структуры совпадают.

Для данного n все отношения из K принадлежат M_n. Следующим рассуждением можно также убедиться в том, что все индивиды из K, если они там вообще есть, содержатся в M_n. Для любого индивида a из K рассмотрим предикат

$$R_a(x_1, \ldots, x_n, y) = E(x_1, x_1) \wedge \ldots \wedge E(x_n, x_n)' \wedge E(a, y).$$

Легко проверяется, что R_a — многочлен в K. Мы будем предполагать, что соответствующий ему индивид из C_n есть именно a. При этом предположении все высказывания K определены в M_n. Сразу же возникает вопрос, будет ли M_n моделью K. Если это так для всех n, то K называется *предтранзитивным*. Аналогично, все высказывания K определены в M'_n, и K называется *транзитивным*, если все они истинны в M'_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Нетрудно построить пример, показывающий, что не каждое K транзитивно или предтранзитивно. Так, например, $K=K_{CF}$ — множество аксиом поля — не является ни транзитивным, ни предтранзитивным (см. задачу 6.6.1). Можно, однако, выделить важные классы высказываний, истинных в M_n или в M'_n при условии, что они выводимы из K.

6.1.7. Теорема. *Высказывание X, определенное в K, выводимое из K и принадлежащее одному из перечисленных ниже классов высказываний, истинно в M_n.*

6.1.8. X есть высказывание порядка 1 (т. е. взятая в скобки атомарная ппф), или отрицание высказывания порядка 1, или конъюнкция (нескольких) высказываний порядка 1.

6.1.9. $X=q_1q_2\ldots q_mQ(z_1,\ldots,z_m)$, $\quad m=0, 1, 2,\ldots,$

где q_i — квантор, содержащий z_i, $i=0, 1,\ldots,m$, и где матрица Q не содержит никаких кванторов и является либо формулой порядка 1, либо конъюнкцией таких формул, либо импликацией, антецедент и консеквент которой представляют собой формулы порядка 1, либо конъюнкцией (нескольких) таких импликаций. Кроме того, для любого q_i, который является квантором существования, высказывание

6.1.10.

$$X=\forall z_1\forall z_2\ldots\forall z_{i-1}\forall z'_i\forall z''_i q_{i+1}\ldots q_m[Q(z_1,\ldots,z_{i-1},z'_i,z_{i+1},\ldots,z_m)\wedge Q(z_1,\ldots,z_{i-1},z''_i,z_{i+1},\ldots,z_m)\supset \supset E(z'_i,z''_i)]$$

выводимо из K, $i=1,\ldots,m-1$.

Заметим, что классы 6.1.8 и 6.1.9, вообще говоря, пересекаются.

Доказательство 6.1.7 для некоторых из указанных случаев довольно утомительно, и мы дадим его только для первых двух, отмеченных в 6.1.8.

Итак, предположим, что

$$X=A(a_1,\ldots,a_m),$$

где A — отношение порядка m и $a_1,\ldots,a_m$ — индивиды, содержащиеся в K. $a_1,\ldots,a_m$ соответствуют определен-

ным выше предмногочленам $R_{a_1}(x_1, \ldots, x_n, y), \ldots$
$\ldots, R_{a_m}(x_1, \ldots, x_n, y)$. Для того чтобы показать, что X истинно в M_n, мы должны проверить, что высказывание

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m [R_{a_1}(x_1, \ldots, x_n, y_1) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge R_{a_m}(x_1, \ldots, x_n, y_m) \supset A(y_1, \ldots, y_m)]$$

выводимо из K. Расписав это высказывание более подробно:

6.1.11. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m [[E(x_1, x_1) \wedge \ldots$
$$\ldots \wedge E(x_n, x_n) \wedge E(a_1, y_1)] \wedge [E(x_1, x_1) \wedge \ldots \wedge E(x_n, x_n) \wedge$$
$$\wedge E(a_2, y_2)] \wedge [\ldots \wedge E(a_m, y_m)] \supset A(y_1, \ldots, y_m)],$$

мы видим, что оно выводимо из K, поскольку оно выводимо из X и аксиом подстановочности 2.1.2.

С другой стороны, если $K \vdash \sim A(a_1, \ldots, a_m)$, то 6.1.11 не может быть выводимо из K, поскольку K предполагается непротиворечивым. Отсюда следует, по определению, что $\sim A(a_1, \ldots, a_m)$ истинно в M_n.

6.1.12. Теорема. *Если высказывание X, определенное и выводимое из K, принадлежит классу высказываний* 6.1.8, *то X истинно в M'_n. X также истинно в том случае, когда X представляется в виде*

6.1.13. $X = \forall z_1 \ldots \forall z_m Q(z_1, \ldots, z_m)$,

где ппф Q типа, описанного в 6.1.9, *или в том случае, когда*

6.1.14. $X = \forall z_1 \ldots \forall z_{m-1} \exists z_m Q(z_1, \ldots, z_m)$, $m = 1, 2, \ldots$,

при условии, что Q — ппф порядка 1 *(или конъюнкция ппф порядка* 1) *и высказывание*

6.1.15.
$$\forall z_1 \ldots \forall z_{m-1} \forall z'_m \forall z''_m [Q(z_1, \ldots, z_{m-1}, z'_m) \wedge$$
$$\wedge Q(z_1, \ldots, z_{m-1}, z''_m) \supset E(z'_m, z''_m)]$$

выводимо из K.

Как можно заметить, этот результат несколько слабее, чем соответствующий результат для предмногочленов.

Доказательство снова опускается.

Хотя классы высказываний, описанные теоремами 6.1.7 и 6.1.12, носят довольно специфический характер, простая проверка показывает, что они устанавливают транзитивность и предтранзитивность для множества аксиом группы, абелевой группы, кольца и коммутативного кольца. Более того, если K — одно из только что указанных множеств аксиом и M — модель K с диаграммой D, то $K \cup D$ транзитивно и предтранзитивно. Действительно, элементы D все принадлежат классу 6.1.8 и потому M_n и M'_n являются на самом деле расширениями M для всех n.

Более точно, пусть $K = K^*_{CR}$ — множество аксиом коммутативного кольца с единицей, и пусть M — модель K^*_{CR} с диаграммой D. K^*_{CR} получается из K_{CR} (множества аксиом коммутативного кольца, определенного в разделе 2.2) добавлением высказывания

$$\forall x P(1, x, x).$$

Мы хотим показать, что при $n \geqslant 1$ полиномиальная структура M'_n над $K \cup D$ изоморфна *кольцу полиномов* $M[x_1, \ldots, x_n]$ от n переменных над кольцом M.

Пусть $q(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный элемент из $M[x_1, \ldots, x_n]$, т. е. многочлен с коэффициентами из M (в алгебраическом смысле). Нетрудно найти определенный в K предикат $R_q(x_1, \ldots, x_n, y)$, формализующий отношение $y = q(x_1, \ldots, x_n)$. Для того чтобы понять, как это делается, достаточно рассмотреть пример

$$y = q(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2, \quad \text{где} \quad a_0,\ a_1,\ a_2 \in M.$$

В этом случае требуемый предикат есть

6.1.16.

$$R_q(x_1, y) = \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \exists z_4 [P(x_1, x_1, z_1) \wedge P(a_2, z_1, z_2) \wedge \\ \wedge P(a_1, x_1, z_3) \wedge S(z_1, z_3, z_4) \wedge S(z_4, a_0, y)].$$

$R_q(x_1, y)$ — предмногочлен в $K \cup D$ и даже многочлен в $K \cup D$ (в метаматематическом смысле), соответствующий элемент в M'_n обозначим c_q. Аналогичная процедура применяется ко всем элементам $M[x_1, \ldots, x_n]$. Можно считать, что константы из $M[x_1, \ldots, x_n]$, которые мы отождествляем с элементами M*)), соответствуют в M'_n сами себе.

Обратно, покажем, что каждый элемент c из M'_n равен в M'_n некоторому c_q, $q \in M[x_1, \ldots, x_n]$. В самом деле, c соответствует метаматематическому многочлену $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ в K. Пусть

$$R(x_1, \ldots, x_n, y) = \exists z_1 \ldots \exists z_m Q(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n, y),$$

где

6.1.17. $$Q = A_1(z_1, \ldots, x_n, y) \wedge A_2(z_1, \ldots, x_n, y) \wedge \ldots \ldots \wedge A_s(z_1, \ldots, x_n, y)$$

(A_1 — ппф порядка 1, причем переменные $z_1, \ldots, x_n, y$ вовсе не обязательно входят во все A_i). Поскольку R — метаматематический многочлен в $K \cup D$, высказывание $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y R(x_1, \ldots, x_n, y)$, т. е.

6.1.18. $$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \exists z_1 \ldots \exists z_m Q(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots \ldots, x_n, y)$$

выводимо из $K \cup D$. Пусть $M' = M[d_1, \ldots, d_n]$ — кольцо, полученное присоединением неизвестных $d_1, \ldots, d_n$ к M. Тогда M', будучи изоморфно $M[x_1, \ldots, x_n]$, является моделью $K \cup D$ и, следовательно, удовлетворяет 6.1.18. Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\exists y \exists z_1 \ldots \exists z_m Q(z_1, \ldots, z_m, d_1, \ldots, d_n, y)$$

истинно в M'. Иными словами, существуют элементы M', т. е. многочлены $y = q_0(d_1, \ldots, d_n)$, $z_i = q_i(d_1, \ldots, d_n)$ от $d_1, \ldots, d_n$ с коэффициентами в M, такие, что

$$Q(q_1(d_1, \ldots, d_n), \ldots, q_m(d_1, \ldots, d_n), d_1, \ldots \ldots, d_n, q_0(d_1, \ldots, d_n))$$

истинно в M'. Согласно 6.1.17 это влечет истинность

6.1.19. $$A_i(q_1(d_1, \ldots, d_n), \ldots, q_m(d_1, \ldots, d_n), d_1, \ldots \ldots, d_n, q_0(d_1, \ldots, d_n))$$

в $M[d_1, \ldots, d_n]$ при $i = 1, 2, \ldots, s$. A_i есть одно из отношений E, S, P и, вообще говоря, содержит не все d_i, q_0

---

*) Благодаря наличию в M единицы. (*Прим. перев.*)

и q_i. Кроме того, A_i может содержать один или больше элементов из M.

Приступим теперь к доказательству того, что c равно c_{q_0} согласно отношению равенства в M'. По определению, это означает, что

$$K \cup D \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y \forall z [R(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \wedge R_{q_0}(x_1, \ldots, x_n, z) \supset E(y, z)].$$

Так как R и R_{q_0} оба являются (метаматематическими) многочленами, то вместо этого достаточно показать, что

6.1.20. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y [R(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge R_{q_0}(x_1, \ldots, x_n, y)]$

истинно во всех моделях $K \cup D$. Высказывание 6.1.19 истинно для неизвестных $d_1, \ldots, d_n$, а потому, по принципу подстановки в кольце, оно будет также истинно, если $d_1, \ldots, d_n$ заменить произвольными элементами из любого кольца, которое является расширением M. Таким образом, если M'' — модель $K \cup D$ и $b_1, \ldots, b_n \in M''$, то $A_i(q_1(b_1, \ldots, b_n), \ldots, q_m(b_1, \ldots, b_n),\ b_1, \ldots, b_n,\ q_0(b_1, \ldots \ldots, b_n))$ истинно в M'' при $i = 1, 2, \ldots, s$, а тем самым и $R(b_1, \ldots, b_n, q_0(b_1, \ldots, b_n))$ истинно в M''. В то же время $R_{q_0}(b_1, \ldots, b_n, q_0(b_1, \ldots, b_n))$ истинно в M'' по определению R_{q_0}. Следовательно,

$$\exists y [R(b_1, \ldots, b_n, y) \wedge R_{q_0}(b_1, \ldots, b_n, y)]$$

истинно в M''. Но $b_1, \ldots, b_n$ — произвольные элементы в M'' и, значит, 6.1.20, как и утверждалось, истинно в M''. Итак, доказано, что $E(c, c_{q_0})$ истинно в M'_n.

Пусть теперь $q_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $q_2(x_1, \ldots, x_n)$ — два разных многочлена из полиномиального кольца $M[x_1, \ldots, x_n]$. Высказывание

$$\forall x_1, \ldots, \forall x_n \forall y \forall z [R_{q_1}(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \wedge R_{q_2}(x_1, \ldots, x_n, z) \supset E(y, z)]$$

не выводимо из $K \cup D$, поскольку оно ложно в кольце $M[x_1, \ldots, x_n]$, которое является моделью $K \cup D$. Отсюда следует, что $E(c_{q_1}, c_{q_2})$ ложно в M'_n, так что c_{q_1} и c_{q_2} различны в M'_n. И наконец, нетрудно показать, что если q_1 и q_2 — любые два элемента из $M[x_1, \ldots, x_n]$, R_{q_1}, R_{q_2}, $R_{q_1+q_2}$, $R_{q_1 q_2}$ — метаматематические многочлены и c_{q_1}, c_{q_2}, $c_{q_1+q_2}$,

$c_{q_1q_2}$ — соответствующие элементы M'_n, то отношения $S(c_{q_1}, c_{q_2}, c_{q_1+q_2})$ и $P(c_{q_1}, c_{q_2}, c_{q_1q_2})$ оба истинны в M'_n. Таким образом, M'_n изоморфно $M[x_1, \ldots, x_n]$.

В отличие от M'_n, M_n не соответствует непосредственно какой-нибудь стандартной математической конструкции. Тем не менее, исследование структуры M_n представляет некоторый интерес.

Допустим теперь, что K — множество аксиом (некоммутативного) кольца с единицей в M — модель K с диаграммой D. Структуры M_n и M'_n определенные для $K \cup D$, являются кольцами с единицей и расширениями M. Однако, если мы определим, как это иногда делается, кольцо полиномов $M[x_1, \ldots, x_n]$ над M как множество выражений

$$\sum a_k x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

предполагая, что переменные x_i коммутируют с элементами M и друг с другом, то структура M'_n окажется неизоморфной $M[x_1, \ldots, x_n]$. В этой ситуации уже довольно трудно охарактеризовать M'_n алгебраически. Так, например, предположение о том, что $c_1, \ldots, c_n$ принадлежат центру кольца, где $c_1, \ldots, c_n$ — элементы M'_n, соответствующие метаматематическим многочленам

$$E(x_1, x_1) \wedge \ldots \wedge E(x_i, y) \wedge \ldots \wedge E(x_n, x_n), \quad i=1, \ldots, n,$$

заведомо не выполняется во всех случаях. Вопрос о равенстве или неравенстве двух элементов b_1 и b_2 из M'_1, соответствующих метаматематическим полиномам $P(a, x_1, y)$ и $P(x_1, a, y)$ для $a \in M$, зависит лишь от того, верно или нет, что

6.1.21. $K \cup D \vdash \forall x_1 \forall y \forall z [P(a, x_1, y) \wedge P(x_1, a, z) \supset \supset E(y, z)]$.

Это вовсе не эквивалентно утверждению о том, что $ax_1 = x_1a$ тождественно для любых x_1 из M, и в элементарном смысле весьма сложно решить, истинно ли 6.1.21. b_1 и b_2 равны соответственно ac_1 и c_1a в M'_1, так что $ac_1 = c_1a$ тогда и только тогда, когда выполняется 6.1.21. Хотя, как видно отсюда, обоснованность $ac_1 = c_1a$ в M'_1 связана с довольно запутанными рассмотрениями, структура M_1' (или, более общо, M_n') является очень естественной реализацией понятия некоммутативного полиномиального кольца.

Другой интересный случай получается рассмотрением множества $K=K_{CR}$ аксиом коммутативного кольца с единицей, не опираясь при этом на какие-нибудь фиксированные модели. В этом случае M_0' изоморфно кольцу целых чисел. В самом деле, в качестве метаматематического многочлена, соответствующего 0, мы можем взять $S(y, y, y)$, а для целого положительного n — предикат $S_n(1, y)$, определенный в 2.2.10 и приведенный надлежащим образом к нормальной форме. Для любого целого отрицательного $(-n)$, $n>0$, можно взять предикат

$$\exists w \exists z[S_n(1, z) \wedge S(y, z, w) \wedge S(w, w, w)],$$

также приведенный подходящим способом к нормальной форме. Нетрудно теперь показать, что элементы M_0', соответствующие указанным выше метаматематическим многочленам, образуют кольцо, изоморфное кольцу целых чисел, и, кроме того, любой элемент из M_0' равен некоторому элементу из этого кольца. Таким образом, в связи со сказанным выше мы можем *определить* кольцо целых чисел как кольцо M_0'.

Аналогично, структуры M_n', $n \geqslant 1$, построенные для того же множества K, изоморфны полиномиальному кольцу от n переменных над кольцом целых чисел.

Вернемся опять к общему случаю. Пусть M_n и M_n' — предполиномиальные и полиномиальные структуры над множеством K и M — модель K. Мы можем тогда выделить некоторые подструктуры в M, гомоморфные M_n или M_n', следующим образом. Для данного n зафиксируем произвольные элементы $a_1, \ldots, a_n$ из M. Пусть $R(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, y)$ — предмногочлен в K, тогда высказывания $\exists y R(a_1, \ldots, a_n, y)$ и

$$\forall y \forall z[R(a_1, \ldots, a_n, y) \wedge R(a_1, \ldots, a_n, z) \supset E(y, z)]$$

оба истинны в M. Таким образом, с точностью до равных объектов, имеется единственный элемент b из M, удовлетворяющий $R(a_1, \ldots, a_n, b)$. Итак, каждый элемент c из

M_n соответствует предмногочлену, и каждый предмногочлен соответствует элементу b из M (как только что было определено): $c \to R \to b$. Беря композицию этих отображений (т. е. опуская R), получим отображение $M_n \to M$, $c \to b$. Пусть M^* — ограничение M на множество элементов b, полученных при этом соответствии. Мы утверждаем тогда, что M^* есть гомоморфный образ M_n. В самом деле, допустим, что $A(c_1, \ldots, c_m)$ истинно в M_n для некоторого отношения A, и обозначим через $R_1, \ldots$ $\ldots, R_m$ предмногочлены, соответствующие $c_1, \ldots, c_m$, а через $b_1, \ldots, b_m$ — образы $c_1, \ldots, c_m$ в M^*. Из определения M_n получим, что

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m [R_1(x_1, \ldots, x_n, y_1) \wedge \ldots \\ \ldots \wedge R_m(x_1, \ldots, x_n, y_m) \supset A(y_1, \ldots, y_m)]$$

выводимо из K, а потому

$$R_1(a_1, \ldots, a_n, b_1) \wedge \ldots \wedge R_m(a_1, \ldots, a_n, b_m) \supset A(b_1, \ldots, b_m)$$

истинно в M. Но на основании выбора b_i антецедент этой импликации истинен и, следовательно, $A(b_1, \ldots, b_m)$ истинно в M. Последнее означает, что M^* есть гомоморфный образ M_n. Отсюда уже вытекает, что некоторая подструктура $M' \subset M^*$ является гомоморфным образом M'_n. При $n=0$ предварительный выбор $a_1, \ldots, a_n$ не нужен.

Предположим теперь, что K транзитивно, так что M'_n — модель K. Обозначим через $R_{x_k}(x_1, \ldots, x_n, y)$ (метаматематические) многочлены

$$E(x_1, x_1) \wedge E(x_2, x_2) \wedge \ldots \wedge E(x_k, y) \wedge \ldots \wedge E(x_n, x_n), \\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Это обозначение не противоречит введенному ранее опрелению метаматематического многочлена $R_q(x_1, \ldots, x_n, y)$ (ср. 6.1.16). Пусть c_k — элемент из M'_n, соответствующий R_{x_k}. Поскольку M'_n — модель K и $c_1, \ldots, c_k \in M'_n$, мы находимся в описанной выше ситуации, поэтому, взяв $M = M'_n$ и $a_k = c_k$, получим гомоморфное отображение M_n в M'_n. Более того, легкая проверка показывает, что это есть отображение *на*, и оно оставляет на месте все элементы M'_n.

6.2. Ограниченные предикаты. Обращение в нуль многочлена, в частности, многочлена от одной переменной, налагает некоторое условие на его аргумент. Именно, если элемент a обращает в нуль многочлен от одной переменной с коэффициентами в поле M, не равный тождественно нулю, то a алгебраичен над M. В последующих разделах мы будем анализировать некоторые метаматематические аспекты этого условия.

Пусть K — непротиворечивое множество аксиом, включающее отношение равенства $E(x, y)$. Предикат $Q(x)$, определенный в K, назовем *ограниченным* в K, если для некоторого целого положительного m высказывание

6.2.1.
$$X_m = \forall x_1 \ldots \forall x_m [Q(x_1) \wedge \ldots \wedge Q(x_{m+1}) \supset \\ \supset E(x_1, x_2) \vee E(x_1, x_3) \vee \ldots \vee E(x_1, x_{m+1}) \vee \\ \vee E(x_2, x_3) \vee \ldots \vee E(x_m, x_{m+1})]$$

выводимо из K. Наименьшее m, для которого $K \vdash X_m$, называется степенью предиката, $m = \deg Q(x)$. Если, однако, $K \vdash \forall x[\sim Q(x)]$, то мы положим $\deg Q = 0$.

Мы можем также определить понятие ограниченности для предикатов от n переменных, $n > 1$. Предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$, определенный в K, назовем ограниченным в K, если для некоторого целого положительного m

6.2.2.
$$K \vdash X_m = \forall x_1^1 \ldots \forall x_n^1 \forall x_1^2 \ldots \forall x_n^2 \ldots \forall x_1^{m+1} \ldots \\ \ldots \forall x_n^{m+1} \left[Q(x_1^1, \ldots, x_n^1) \wedge \ldots \wedge Q(x_1^{m+1}, \ldots, x_n^{m+1}) \supset \\ \supset E(x_1^1, x_1^2) \wedge E(x_2^1, x_2^2) \wedge \ldots \wedge E(x_n^1, x_n^2) \vee \\ \vee E(x_1^1, x_1^3) \wedge \ldots \wedge E(x_n^1, x_n^3) \vee \ldots \\ \ldots \vee E(x_1^m, x_1^{m+1}) \wedge \ldots \wedge E(x_n^m, x_n^{m+1})\right].$$

Наименьшее m, для которого $K \vdash X_m$, снова назовем степенью Q. Если же $\forall x_1 \ldots \forall x_n [\sim Q(x_1, \ldots, x_n)]$ выводимо из K, то мы положим $\deg Q = 0$; в этом случае мы также будем считать Q ограниченным.

Нетрудно проверить, что конъюнкция и дизъюнкция двух ограниченных предикатов над данным K снова ограничена, и

6.2.3. $\deg[Q_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge Q_2(x_1, \ldots, x_n)] \leqslant$
$\leqslant \min[\deg Q_1(x_1, \ldots, x_n), \deg Q_2(x_1, \ldots, x_n)]$,

6.2.4. $\deg[Q_1(x_1, \ldots, x_n) \vee Q_2(x_1, \ldots, x_n)] \leqslant$
$\leqslant \deg Q_1(x_1, \ldots, x_n) + \deg Q_2(x_1, \ldots, x_n)$.

Кроме того, конъюнкция ограниченного предиката Q_1 и неограниченного предиката Q_2 с теми же переменными снова есть ограниченный предикат, степень которого не выше $\deg Q_1$.

Рассмотрим теперь следующее теоретико-модельное свойство предикатов $Q(x)$ от одной переменной, определенных в K. Мы скажем, что предикат $Q(x)$ является *насыщенным* в K, если для любой цепочки моделей K:

6.2.5. $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots \subset M_k \subset \ldots$

и любой последовательности индивидов $\{a_n\}$, где $a_n \in M_n$ и $Q(a_k)$ истинно в M_n при всех $k \leqslant n$, существует n_0 такое, что для всех $n > n_0$ a_n равно некоторому a_m, $m \leqslant n_0$; другими словами, число различных элементов в последовательности $\{a_n\}$ конечно.

6.2.6. *Предикат $Q(x)$ насыщен в K тогда и только тогда, когда $Q(x)$ ограничен в K.*

Доказательство. Как легко видеть, Q насыщен в K, если Q ограничен. В самом деле, если это не так, то найдется цепочка 6.2.5 такая, что для любого достаточно большого n множество $\{a_1, \ldots, a_n\}$ содержит по меньшей мере $\deg Q + 1$ различных индивидов. В результате получим, что высказывания $Q(a_i)$ истинны в M_n при $i = 1, \ldots, n$, что, разумеется, невозможно.

Обратно, допустим, что Q не ограничен в K. Покажем тогда, что Q не может быть насыщен в K. Множество

6.7.2. $H = K \cup \{\sim X_1, \sim X_2, \ldots, \sim X_m, \ldots\}$,

где X_m определено в 6.2.1, непротиворечиво, так как в противном случае $K \cup \{\sim X_1, \ldots, \sim X_m\}$ оказалось бы противоречивым для некоторого m. Но $K \vdash X_l \supset X_m$ для $l < m$, и потому $K \vdash \sim X_m \supset \sim X_l$; отсюда вытекало бы, что

$K \cup \{\sim X_m\}$ противоречиво и, следовательно, $K \vdash X_m$, вопреки неограниченности Q.

Пусть M_1 — модель H. В M_1 существует бесконечная последовательность индивидов $\{a_i\}$, $i=1, 2, \ldots$, таких, что все они различны в M_1 и $Q(a_i)$ истинно в M_1. Пусть K_1 — множество всех высказываний, определенных и истинных в M_1, b_2 — индивид, не содержащийся в M_1, и H_1 — множество высказываний $\{\sim E(b_2, a_i)\}$, $i=1, 2, \ldots$

Рассмотрим множество $H_2 = K_1 \cup H_1 \cup Q(b_2)$; любое его конечное подмножество H_2' содержит только конечное число a_i и не содержит a_i для $i>j$, где j зависит от H_2'. Поскольку все a_i различны в M_1, то $\sim E(a_k, a_i)$ истинно в M_1 для некоторого a_k $(k>j)$, $i=1, \ldots, j$. В то же время a_k удовлетворяет $Q(x)$ по определению последовательности $\{a_i\}$. Отсюда следует, что если в H_2' заменить всюду b_2 на a_k, то M_1 будет удовлетворять полученному множеству, которое, следовательно, непротиворечиво. Таким образом, само H_2' непротиворечиво, а тем самым непротиворечиво и H_2.

Пусть M_2 — модель H_2. M_2 содержит индивиды a_1, b_2, a_2, a_3, $\ldots$, удовлетворяющие $Q(x)$ в M_2. Более того, M_2 — элементарное расширение M_1 и, следовательно, модель K. Рассуждая аналогичным образом, можно построить модель M_3 множества K, которая является элементарным расширением M_2 и которая содержит индивид b_3, удовлетворяющий $Q(x)$ в M_3 и отличный от a_1, b_2, a_2, a_3, $\ldots$ Продолжая этот процесс, мы получим цепочку моделей K, $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots$, такую, что $a_1 \in M_1$, $b_i \in M_i$, $i=2, 3, \ldots$; $Q(a_1)$ истинно в M_j для всех j; $Q(b_i)$ истинно в M_j для $2 \leqslant i \leqslant j$ и индивиды a_1, b_2, b_3, $\ldots$ все различны. Это показывает, что $Q(x)$ не насыщен, и наша теорема, таким образом, доказана.

Понятие насыщенного предиката $Q(x_1, \ldots, x_n)$ в K для произвольного n может быть обобщено следующим образом. Пусть $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ — бесконечная цепочка моделей K. Обозначим через M_i^n n-мерное декартово пространство над M_i, а через V_i — многообразие $Q(x_1, \ldots, x_n)$ в M_i, т. е. множество точек $(a_1, \ldots, a_n)$ с координатами в M_i, таких, что $Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M_i. Пусть $W_i = V_i \cap V_{i+1} \cap V_{i+2} \cap \ldots$ Тогда $Q(x_1, \ldots, x_n)$ *на-*

сыщен в K, если для любой такой цепочки моделей $W_i = W_{i+1} = W_{i+2} = \ldots$ для достаточного большого i. При $n=1$ это определение сводится к первоначальному. С другой стороны, тот факт, что Q является ограниченным предикатом степени m, означает, что для любого пространства M^n над моделью M множества K многообразие Q содержит не более чем m различных точек и в то же время существует модель M, для которой V содержит в точности m точек. Как и раньше, имеет место

6.2.8. Теорема. *Предикат* $Q(x_1, \ldots, x_n)$ *ограничен тогда и только тогда, когда он насыщен.*

Следующий, более простой результат довольно легко получается с помощью одного из использованных ранее рассуждений при доказательстве 6.2.6.

6.2.9. Теорема. *Если предикат* $Q(x_1, \ldots, x_n)$, *определенный в* K, *обладает тем свойством, что для любой модели* M *множества* K *многообразие* V *предиката* Q *в* M^n *конечно, то* Q *ограничен.*

Покажем теперь, что при некоторых условиях ограниченные предикаты могут быть разложены подобно многочленам в теории поля. В последующих рассмотрениях предполагается, что все предикаты принадлежат множеству J_Q предикатов от n переменных ($n \geqslant 1$), определенных в K, где K — непротиворечивое множество высказываний с отношением равенства. Предикат $Q_1(x_1, \ldots, x_n)$ делит предикат $Q_2(x_1, \ldots, x_n)$, сокращенно $Q_1 | Q_2$, если

6.2.10. $K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q_1(x_1, \ldots, x_n) \supset Q_2(x_1, \ldots, x_n)]$.

Два предиката, Q_1 и Q_2, назовем *ассоциированными*, сокращенно $Q_1 \approx Q_2$, если $Q_1 | Q_2$ и $Q_2 | Q_1$. Если $Q_1 | Q_2$, то $\deg Q_1 \leqslant \deg Q_2$, а если $Q_1 \approx Q_2$, то $\deg Q_1 = \deg Q_2$.

Ограниченный предикат положительной степени называется *простым*, если он ассоциирован со всеми своими простыми делителями положительной степени. Таким образом, степень делителя простого предиката равна либо нулю, либо степени Q. Последнее условие, однако, недостаточно для того, чтобы предикат был простым. Все предикаты нулевой степени ассоциированы.

Допустим, что J_Q конъюнктивно (относительно K), и пусть Q_1 и Q_2 просты в множестве J_Q. Тогда, если для некоторой модели M множества K пересечение многообразий V_1 и V_2 предикатов Q_1 и Q_2 не пусто, то Q_1 и Q_2 ассоциированы. Верен даже более общий факт. Если Q_1 — простой предикат, многообразие которого $V_1 \subset M^n$ над некоторой моделью M множества K имеет общую точку с многообразием V_2 предиката Q_2, то $Q_1 | Q_2$. В самом деле, рассмотрим предикат $Q_3 \in J_Q$, для которого

$$K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q_3(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge \wedge Q_2(x_1, \ldots, x_n)].$$

Такой предикат Q_3 существует ввиду конъюнктивности J_Q относительно K. Степень Q_3 положительна, поскольку Q_3 истинен во всех точках $V_1 \cap V_2$. Ясно, что $Q_3 | Q_1$ и, так как Q_1 простой, то это означает, что $Q_3 \approx Q_1$ и тем самым $Q_1 | Q_3$. С другой стороны, $Q_3 | Q_2$ и, следовательно, $Q_1 | Q_2$, что и требовалось доказать. Если Q_1 и Q_2 оба простые, то мы, естественно, заключаем, что $Q_1 \approx Q_2$.

Допустим теперь, что J_Q также и дизъюнктивно. Предикат Q назовем *разложимым*, если существуют такие предикаты Q_1 и Q_2, что

$$0 < \deg Q_1 < \deg Q, \quad 0 < \deg Q_2 < \deg Q$$

и $Q \approx Q_1 \vee Q_2$; в противном случае будем называть предикат *неразложимым*. Простой предикат, как нетрудно видеть, неразложим. Индукцией по степени легко показывается, что каждый предикат положительной степени ассоциирован с дизъюнкцией конечного числа неразложимых предикатов:

6.2.11. $Q \approx Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_m$.

Такое представление назовем *несократимым*, если при вычеркивании одного из членов дизъюнкции справедливость формулы нарушается. Представление предиката в виде несократимой дизъюнкции не обязательно единственно. Однако единственность необходимо имеет место при выполнении следующего дополнительного условия:

6.2.12. Если $Q_1 | Q_2$ и $\deg Q_1 = \deg Q_2 > 0$, то $Q_1 \approx Q_2$.

Пусть при этом предположении

6.2.13.

$$Q \approx Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_m \approx Q'_1 \vee Q'_2 \vee \ldots \vee Q'_{m'},$$

где Q положительной степени и $Q_1, \ldots, Q_m, Q'_1, \ldots, Q'_{m'}$ неразложимы. Тогда для $i = 1, 2, \ldots, m$

$$Q_i \approx Q_i \wedge Q \approx Q_i \wedge [Q'_1 \vee Q'_2 \vee \ldots \vee Q'_{m'}] \approx$$
$$\approx [Q_i \wedge Q'_1] \vee [Q_i \wedge [Q'_2 \vee \ldots \vee Q'_{m'}]],$$

так что

$$\deg [Q_i \wedge Q'_1] \leqslant \deg Q_i$$
$$\deg [Q_i \wedge [Q'_2 \vee \ldots \vee Q'_{m'}]] \leqslant \deg Q_i.$$

В силу неразложимости Q_i имеются четыре возможности:

$$\deg [Q_i \wedge Q'_1] = 0, \quad \deg [Q_i \wedge Q'_1] = \deg Q_i,$$
$$\deg [Q_i \wedge [Q'_2 \vee \ldots \vee Q'_{m'}]] = 0,$$
$$\deg [Q_i \wedge [Q'_2 \vee \ldots \vee Q'_{m'}]] = \deg Q_i.$$

При этом на основании выписанных ранее неравенств и 6.2.4 первая возможность влечет четвертую, а третья — вторую, так что верно одно из двух: или $\deg [Q_i \wedge Q'_1] = \deg Q_i$ или

$$\deg [Q_i \wedge [Q'_2 \vee \ldots \vee Q'_{m'}]] = \deg Q_i.$$

Но $Q_i \wedge Q'_1 | Q_i$ и потому, если $\deg [Q_i \wedge Q'_1] = \deg Q_i$, то $Q_i \wedge Q'_1 \approx Q_i$ согласно 6.2.12. Но в этом случае $Q_i | Q_i \wedge Q'_1$ и, следовательно, $Q_i | Q'_1$. Аналогично, если $\deg [Q_i \wedge [Q'_2 \vee \ldots \vee Q'_{m'}]] = \deg Q_i$, то $Q_i | Q'_2 \vee \ldots \vee Q'_{m'}$. Таким образом, во всех случаях имеет место хотя бы одно соотношение: $Q_i | Q'_1$ или $Q_i | Q'_2 \vee \ldots \vee Q'_{m'}$. Если первое из них неверно, то

$$Q_i \approx Q_i \wedge [Q'_2 \vee \ldots \vee Q'_{m'}] \approx$$
$$\approx [Q_i \wedge Q'_2] \vee [Q_i \wedge [Q'_3 \vee \ldots \vee Q'_{m'}]],$$

и мы, как и раньше, заключаем, что имеет место хотя бы одно соотношение $Q_i | Q'_2$ или $Q_i | Q'_3 \vee \ldots \vee Q'_{m'}$.

Продолжая дальше наше рассуждение, мы получим в конце концов, что Q_i делит по крайней мере один Q'_k, $1 \leqslant k \leqslant m'$. Аналогично, каждый Q'_k делит хотя бы один Q_j. Таким образом, для любого i $Q_i \mid Q'_k$, $Q'_k \mid Q_j$ и, следовательно, $Q_i \mid Q_j$. Но коль скоро это так, $Q_i \vee Q_j \approx Q_j$, а при $i \neq j$ это означает, что Q_i сократимо в представлении Q. Следовательно, $i = j$ и $Q_i \approx Q'_k$. Отсюда вытекает, что каждый Q_i ассоциирован с некоторым Q'_k, и наоборот. Но так как два представления Q несократимы, то никакие два члена одной и той же дизъюнкции не могут быть ассоциированы друг с другом. Итак,

6.2.14. Теорема. *Для любых двух представлений одного и того же предиката посредством несократимой дизъюнкции неразложимых предикатов*

$$Q \approx Q_1 \vee \ldots \vee Q_m \approx Q'_1 \vee \ldots \vee Q'_{m'}$$

имеем $m = m'$ и, после соответствующей перенумерации,

$$Q_i \approx Q'_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

6.3. Алгебраические предикаты. Хотя понятие ограниченного предиката от одной переменной довольно похоже на понятие полиномиального уравнения $q(x) = 0$, первое еще слишком широко для того, чтобы быть подлинным обобщением последнего. Проиллюстрируем это для множества K_{CF} аксиом поля. Пусть M — поле, полученное присоединением вещественного корня многочлена

6.3.1. $x^4 - 2x^2 - 1$

к полю рациональных чисел. $\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ — вещественные корни 6.3.1, а $\pm\sqrt{1-\sqrt{2}}$ — мнимые. Таким образом, M содержит оба вещественных корня многочлена 6.3.1 и не содержит мнимых. Пусть

6.3.2. $q(x) = x^2 - 2x - 1$

и $Q_q(x)$ — предикат, утверждающий, что x есть корень $q(x)$. Нетрудно сформулировать $Q_q(x)$ в терминах отношений E, S, P без индивидов. Определим теперь предикат

6.3.3. $Q(x) = Q_q(x) \wedge [\exists y P(y, y, x) \wedge [\forall z [Q_q(z) \wedge$
$$\wedge [\exists w P(w, w, z)] \supset E(x, z)]]$$

(читается «x — корень $q(x)$ и квадрат некоторого элемента, и любой другой элемент, обладающий этими свойствами, равен x»). Легко проверяется, что $Q(x)$ — ограниченный предикат степени 1 в K_{CF}. Кроме того, при $a = 1 + \sqrt{2}$ $Q(a)$ истинно в M, хотя степень алгебраичности a над M равна 2 *).

$Q(a)$ ложно в поле M', которое получается из M присоединением $\sqrt{1 - \sqrt{2}}$. Мы видим, таким образом, что $Q(x)$ — случайное свойство a. Однако мы хотели бы ограничиться такими предикатами, которые выражали бы наиболее характерные свойства удовлетворяющих им индивидов. Нельзя, конечно, сказать, что индивид сам по себе обладает каким-то свойством при всевозможных включениях его в некоторое множество, не ссылаясь при этом на структуру или множество аксиом, в которых он содержится. В соответствии с этим, чтобы дать точное описание понятия характерного свойства или предиката, мы вновь возвращаемся к понятию устойчивости, введенному в разделе 3.3, и даем следующее определение.

Предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$ называется *алгебраическим* в K, если он ограничен в K и устойчив при расширении относительно K, $Q(x_1, \ldots, x_n)$ назовем *строго алгебраическим* в K, если Q алгебраичен в K и устойчив при ограничении относительно K. Комбинируя известные свойства ограниченности и устойчивости, легко усмотреть, что конъюнкция и дизъюнкция алгебраических предикатов алгебраична и что конъюнкция и дизъюнкция строго алгебраических предикатов также строго алгебраична.

Пусть J_S — множество строго алгебраических предикатов от n переменных для данного K. Допустим, что элементы J_S удовлетворяют следующему условию:

6.3.4. Если степень $Q(x_1, \ldots, x_n)$ равна m и многообразие V предиката Q в n-мерном пространстве M^n над

*) Иными словами, степень расширения $M \subset M(a)$ равна 2. (*Прим. перев.*)

моделью M множества K содержит в точности $k \leqslant m$ различных точек, то существует такое расширение $M' \supset M$, что M' — модель K и многообразие V' предиката Q в M'^n над M' содержит m различных точек.

Мы покажем сейчас, что условие 6.2.12 следует из 6.3.4 для $J_Q = J_S$. Пусть Q_1 и Q_2 — два элемента J_S такие, что $Q_1 | Q_2$ и $\deg Q_1 = \deg Q_2 = m$. Нам нужно установить, что Q_1 ассоциирован с Q_2 (т. е. $Q_2 | Q_1$). Иными словами, мы должны показать, что если Q_2 истинен в точке $P \in M^n$ (над моделью M множества K), то Q_1 также истинен в P.

Итак, пусть M — любая модель K, и предположим, что многообразие V_1 предиката Q_1 в M^n содержит в точности k различных точек, а многообразие V_2 предиката Q_2 содержит в точности l различных точек, $l \leqslant m$. Поскольку $Q_1 | Q_2$, имеем $V_1 \subset V_2$ и, следовательно, $k \leqslant l$. Утверждение, которое мы должны доказать, по существу, означает, что $k = l$. Пусть, напротив, $k < l \leqslant m$. Согласно 6.3.4 существует расширение $M' \supset M$ такое, что M' — модель K, и многообразие V_1' предиката Q_1 в M'^n над M' содержит в точности m различных элементов. Ввиду устойчивости Q_1 при расширении $V_1 \subset V_1'$ и, следовательно, $V_1' - V_1$ содержит ровно $m - k$ различных точек. Но $Q_1 | Q_2$ и потому $V_1' \subset V_2'$, где V_2' — многообразие Q_2 в M'^n. С другой стороны, Q_1 устойчив при ограничении, и, значит, точки $V_1' - V_1$ не могут принадлежать $V_2 - V_1$. Таким образом, V_2' содержит непересекающиеся множества V_1, $V_1' - V_1$, $V_2 - V_1$, общее число элементов которых равно $m + l - k > m$. Последнее, однако, невозможно, так как степень Q_2 равна m. Следовательно, $k = l$, $Q_1 | Q_2$ и тем самым $Q_1 \approx Q_2$, что и требовалось доказать.

6.3.5. Теорема. Пусть $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ..., $Q_m(x)$ — *множество алгебраических предикатов от одной переменной и* $R(x_1, \ldots, x_m, y)$ — *метаматематический многочлен в* K (см. раздел 6.1). *Тогда предикат*

$$Q(x) = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_m [Q_1(x_1) \wedge Q_2(x_2) \wedge \ldots \\ \ldots \wedge Q_m(x_m) \wedge R(x_1, \ldots, x_m, x)]$$

алгебраичен в K и $\deg Q(x) \leqslant \deg Q_1(x) \deg Q_2(x) \ldots \ldots \deg Q_m(x)$.

Доказательство. Пусть дана произвольная модель M множества K и допустим, что $Q_i(x)$ истинен для j_i различных индивидов из M, так что $j_i \leqslant \deg Q_i$. R — многочлен в K, поэтому $Q(x)$ истинен не более чем для $j_1 j_2 \ldots j_m \leqslant \deg Q_1 \deg Q_2 \ldots \deg Q_m$ различных индивидов в M. Следовательно, $Q(x)$ ограничен и степень его не превышает $\deg Q_1 \deg Q_2 \ldots \deg Q_m$. Для доказательства того, что $Q(x)$ устойчив (при расширении), вспомним, что по определению метаматематического многочлена R — экзистенциальный предикат и потому устойчив. Допустим теперь, что $Q(a)$ истинен в модели M множества K для $a \in M$. Тогда существуют элементы $b_1, \ldots, b_m \in M$ такие, что $Q_1(b_1) \wedge Q_2(b_2) \wedge \ldots \wedge Q_m(b_m) \wedge R(b_1, \ldots, b_m, a)$ истинно в M. Отсюда видно, что это высказывание истинно также в любом расширении $M' \supset M$, которое является моделью K. Это показывает, что $Q(a)$ истинно в M', и, следовательно, $Q(x)$ устойчив. Поскольку $Q(x)$ к тому же и ограничен, то этот предикат алгебраичен, и теорема 6.3.5 доказана.

Пусть M — любая модель K. Элемент a из M называется (строго) алгебраичным, если a удовлетворяет (строго) алгебраическому предикату в K. Наименьшую возможную степень алгебраического предиката, которому удовлетворяет a, назовем степенью a. Модель, все элементы которой алгебраичны, будем называть алгебраической. Модель M множества K назовем *алгебраически полной*, если каждый алгебраический предикат $Q(x)$ от одной переменной в K удовлетворяется некоторым индивидом из M при условии, что он удовлетворяется в некоторой модели K, которая является расширением M. Модель M множества K с диаграммой D называется *алгебраически замкнутой*, если каждый алгебраический предикат положительной степени в $K \cup D$ удовлетворяется некоторым элементом M. Алгебраически замкнутая модель K является также алгебраически полной. Если K полно (в смысле главы IV) и M — модель K, то M алгебраически полна (относительно K). Действительно, пусть $Q(x)$ — любой алгебраический предикат. Тогда высказывание $\exists x Q(x)$ либо выводимо из

K, так что $Q(x)$ истинен для некоторого элемента из M, либо противоречит K, так что $Q(x)$ ложен для всех индивидов из любой модели K.

6.3.6. Теорема. *Пусть M — алгебраически замкнутая модель K с диаграммой D и пусть M' — расширение M, которое также является моделью K. Тогда любой элемент $a \in M'$, удовлетворяющий алгебраическому предикату в $H = K \cup D$, должен быть равен в M' некоторому элементу из M.*

Доказательство. Пусть $Q(x)$ — тот алгебраический предикат в H, для которого $Q(a)$ истинно в M'. В силу алгебраической замкнутости M существует $b_1 \in M$ такой, что $Q(b_1)$ истинно в M. В силу ограниченности $Q(x)$ найдется конечный набор элементов из M, скажем, $b_1, \ldots, b_n$, такой, что

$$\forall x[Q(x) \supset E(x, b_1) \vee E(x, b_2) \vee \ldots \vee E(x, b_n)]$$

истинно в M. Рассмотрим предикат

$$Q'(x) = Q(x) \wedge \sim E(x, b_1) \wedge \sim E(x, b_2) \wedge \ldots \sim E(x, b_n).$$

$Q'(x)$ алгебраичен в H, но не удовлетворяется ни одним элементом из M. В соответствии с этим $Q'(x)$ не удовлетворяется также и в любой модели H. Следовательно,

$$H \vdash \forall x[Q(x) \supset E(x, b_1) \vee \ldots \vee E(x, b_n)]$$

и потому

$$H \vdash E(a, b_1) \vee \ldots \vee E(a, b_n).$$

6.3.7. Теорема. *Каждая модель M множества K обладает таким расширением M', которое является моделью K и алгебраически полным* *).

Доказательство. Пусть J_A — множество всех алгебраических в K предикатов от одной переменной. Для каждого $Q(x) \in J_A$ введем отдельный индивид, не при-

---

*) На самом деле автор будет доказывать следующее более сильное утверждение.

Для произвольного непротиворечивого множества высказываний K имеется такое непротиворечивое множество $K' \supset K$, любая модель которого алгебраически полна. Наша теорема получается отсюда при K, равном $K \cup D$. (*Прим. перев.*)

надлежащий K. Рассмотрим множество $Q(a_Q)=H$. Нетрудно заметить, что для любой линейно упорядоченной системы подмножеств H, совместных с K, объединение этих подмножеств также совместно с K. Следовательно, по лемме Цорна существует максимальное совместное с K подмножество $H' \subset H$. Пусть M — модель $K \cup H'$. Мы утверждаем тогда, что M алгебраически полна. Допустим, что это не так. Тогда существует $Q'(x) \in J_A$, такой, что $\exists x Q'(x)$ ложно в M, но истинно в некотором расширении $M' \supset M$, которое является моделью K. Согласно построению M высказывание $Q'(a_{Q'})$ принадлежит $H - H'$. Отсюда, по определению H', найдется такой конечный набор элементов из H':

$$Q_1(a_{Q_1}), \ldots, Q_m(a_{Q_m}), \text{ что } K \vdash \sim [Q_1(a_{Q_1}) \wedge \ldots \\ \ldots \wedge Q_m(a_{Q_m}) \wedge Q'(a_{Q'})]$$

и

$$K \vdash Q_1(a_{Q_1}) \wedge \ldots \wedge Q_m(a_{Q_m}) \supset \sim Q'(a_{Q'}),$$

а следовательно,

$$K \vdash X = [\exists x_1 Q_1(x_1)] \wedge \ldots \wedge [\exists x_m Q_m(x_m)] \supset [\forall y [\sim Q'(y)]].$$

Но предикаты $Q_i(x)$ алгебраичны и, тем самым, устойчивы при расширении относительно K. Отсюда вытекает, что антецедент X истинен во всех расширениях M, которые являются моделями K, и потому $\exists x Q(x)$ ложно в любой такой структуре.

При рассмотрении специального случая $K = K_{CF}$ (множества аксиом поля) наше употребление слова «алгебраический» будет в некотором смысле оправдано. Прежде всего (для этого множества) мы установим справедливость следующей теоремы:

6.3.8. Теорема. *Если предикат $Q(x)$ алгебраичен в множестве $K \cup D$, где D — диаграмма некоторого поля M, и a — такой элемент из расширения $M' \supset M$ (M' — модель K), что a трансцендентно над M, то $Q(a)$ ложно в M'.*

Доказательство. Допустим, что $Q(a)$ истинно в M' для элемента a, трансцендентного над M. Ввиду устойчивости $Q(x)$ $Q(a)$ истинно также в алгебраическом замыкании M^* поля M'. Пусть b — произвольный элемент из M^*, трансцендентный над M. Тогда существует автоморфизм M^*, переводящий a в b и оставляющий элементы M на месте. Отсюда следует, что $Q(b)$ истинно в M^*. Однако число различных элементов M^*, трансцендентных над M, бесконечно, так что $Q(x)$ истинен для бесконечного числа различных элементов M^*. Это, однако, противоречит ограниченности $Q(x)$ в $K \cup D$ и наша теорема доказана.

6.3.9. Теорема. *Пусть $q(x)$ — ненулевой многочлен с коэффициентами в некотором поле M. Тогда существует предикат $Q(x)$, строго алгебраичный в $K_{CF} \cup D$ (D — диаграмма M) и такой, что для каждого элемента a из любого поля $M' \supset M$ $Q(a)$ истинно в M' тогда и только тогда, когда $q(a)=0$. Обратно, для каждого строго алгебраического предиката в $K \cup D$ существует ненулевой многочлен с коэффициентами в M, такой, что для всякого элемента a из произвольного поля $M' \supset M$ $Q(a)$ истинно в M' тогда и только тогда, когда $q(a)=0$.*

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы нам достаточно найти формальное выражение уравнения $q(x)=0$ в терминах E, S, P и коэффициентов $q(x)$, а это всегда возможно.

Обратно, для данного строго алгебраического предиката $Q(x)$ в $K \cup D$ мы должны отыскать соответствующий многочлен $q(x)$. Пусть M^* — алгебраическое замыкание M. Для любых двух элементов из M^*, сопряженных над M (т. е. a и a' — корни одного и того же неприводимого над M многочлена с коэффициентами в M), существует автоморфизм M^*, переводящий a в a' и оставляющий на месте элементы M. Отсюда следует, что $Q(a)$ истинно в M^* тогда и только тогда, когда $Q(a')$ истинно в M^*. Таким образом, для любого многочлена $p(x)$ с коэффициентами в M, неприводимого над M, $Q(x)$ либо истинно в M^* для всех корней $p(x)$, либо не истинно ни для одного из них. Пусть $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_j(x)$ — множество унитарных многочленов положительной степени с коэффициентами в M, неприводимых над M и таких, что $Q(x)$ истинен для всех корней $p_i(x)$, $i=1, \ldots, j$. Число таких многочленов конечно, поскольку

$Q(x)$ ограничен. Положим $q(x)=p_1(x)\ldots p_j(x)$. Тогда для любого $a\in M^*$ будет $q(a)=0$ тогда и только тогда, когда $Q(a)$ истинно в M. То же самое будет справедливо, если мы заменим поле M^* любым его расширением, ввиду строгой алгебраичности $Q(x)$ и 6.3.8. Наконец, если M' — любое расширение M и $a\in M'$, то $q(a)=0$ тогда и только тогда, когда $Q(a)$ истинно в M', поскольку M' может быть вложено в расширение M^* и $Q(x)$ устойчиво при ограничении и расширении.

Заметим, что вторая часть теоремы уже не обязательно верна для алгебраического, но не строго алгебраического предиката. Рассмотрим предикат

6.3.10. $Q(x)=P(x,\,x,\,2)\wedge[\exists y P(y,\,y,\,x)]$

— читается «x — квадратный корень из 2 и квадрат некоторого элемента». Пусть M — поле рациональных чисел и $M'=M\left(\sqrt[4]{2}\right)$ (здесь $\sqrt[4]{2}$ — вещественный корень). $Q(x)$ удовлетворяется в M' только при $x=+\sqrt{2}$, хотя $-\sqrt{2}$ сопряжен с $+\sqrt{2}$ и содержится в M'. Таким образом, для $Q(x)$ не существует многочлена $q(x)$, описанного во второй части 6.3.9. Несложная проверка показывает, что $Q(x)$ алгебраичен, но не строго алгебраичен. В соответствии со сказанным выше, мы видим, что понятие строго алгебраического предиката может рассматриваться как естественное обобщение алгебраической зависимости (т. е. условий, налагаемых полиномиальным уравнением).

В рассматриваемом частном случае ($K=K_{CF}$) два строго алгебраических предиката ассоциированы тогда и только тогда, когда соответствующие многочлены имеют одинаковые неприводимые (над M) множители. Условие 6.3.4 и, следовательно, 6.2.12 выполнены для строго алгебраических предикатов в $K_{CF}\cup D$; это уже будет не так для соответствующей совокупности алгебраических предикатов. Так, например, алгебраический предикат 6.3.10 делит алгебраический предикат $P(x,x,2)$, но не ассоциирован с ним, хотя оба предиката имеют степень 2. Неразложимые строго алгебраические предикаты соответствуют степеням неприводимых многочленов.

Если для данного M построить его алгебраически полное расширение M_1, заменив в 6.3.7 множество K множеством $K_{CF} \cup D$, то все многочлены положительной степени с коэффициентами в M будут иметь корни в M_1. Заменяя M на M_1 и строя алгебраически полное расширение M_2 поля M_1 относительно множества $K_{CF} \cup D_1$, где D_1 — диаграмма M_1, мы получим, что все многочлены с коэффицентами в M_1 имеют корни в M_2. Продолжая наше построение, мы придем к цепочке полей $M \subset M_1 \subset \subset M_2 \subset \ldots$, объединение которых будет алгебраически замкнуто в обычном алгебраическом смысле и, следовательно, также в метаматематическом смысле, определенном ранее в этом разделе. Таким образом, нами получена другая метаматематическая процедура построения алгебраически замкнутого расширения для данного поля.

Если вместо множества $K_{CF} \cup D$ рассмотреть множество аксиом K_{CF}^p поля характеристики $p \geqslant 0$, то в этом случае строго алгебраические предикаты соответствуют многочленам с коэффициентами в простом поле характеристики p. Во всех этих случаях алгебраические предикаты от более чем одной переменной соответствуют множествам многочленов, поскольку, вообще говоря, отдельные многочлены от нескольких переменных дают неограниченные предикаты.

6.4. Алгебраические предикаты и выпуклые системы. Как и в предыдущем разделе, пусть K — непротиворечивое множество аксиом с отношением равенства $E(x, y)$. Предположим дополнительно, что K *строго выпукло* (см. п. 3.5) и M — модельное ядро K.

6.4.1. Теорема. *Каждый элемент M удовлетворяет алгебраическому предикату в K.*

Доказательство. Пусть a — элемент из M, равный некоторому элементу c, встречающемуся в K. Для такого a $Q(x) = E(x, c)$ есть искомый алгебраический предикат. Таким образом, теорему осталось доказать для элементов M, не равных индивидам из K. Пусть D — диаграмма M и M' — модель K, изоморфная M и такая, что общими элементами M и M' являются только индивиды из K (если они там вообще есть). Пусть D' —

диаграмма M'. Мы утверждаем, что множество $H = K \cup D \cup D'$ непротиворечиво.

В самом деле, если H противоречиво, то для некоторой конъюнкции Y элементов из D и некоторой конъюнкции Y' элементов из D' будем иметь $K \vdash \sim [Y \wedge Y']$. Пусть $Y' = Y'(a'_1, \ldots, a'_m)$, где явно указаны лишь те индивиды, которые не содержатся в K. Обозначим через $a_1, \ldots, a_m$ элементы M, соответствующие $a'_1, \ldots, a'_m$ при некотором фиксированном изоморфизме между M и M'. Заметим, что в нашем случае индивиды из K можно считать инвариантными при этом изоморфизме. Поскольку $a'_1, \ldots, a'_m$ не содержатся ни в K, ни в Y, то мы заключаем, что (при подходящих $z_1, \ldots, z_m$)

6.4.2. $K \cup \{Y\} \vdash \forall z_1 \ldots \forall z_m [\sim Y'(z_1, \ldots, z_m)]$.

Однако K, Y и $\exists z_1 \ldots \exists z_m Y'(z_1, \ldots, z_m)$ все истинны в M (в частности, для последнего высказывания это верно, потому что $Y'(a_1, \ldots, a_m)$ истинно в M). Таким образом, 6.4.2 невозможно и H непротиворечиво.

Пусть теперь a — произвольный элемент из M и пусть J — множество высказываний $\sim E(a, b_\nu)$, где b_ν пробегает все элементы M'. Мы намерены показать, что множество $H^* = H \cup J$ противоречиво. Предположим противное, и пусть M^* — некоторая модель H^*. M^* — модель K и расширение M и M'. Пересечение всех нормальных подструктур M^*, являющихся моделями K, по предположению, непусто и в соответствии с этим является нормальной подструктурой N структур M и M'. M — модельное ядро и потому $N = M$. Но тогда получается, что M' содержит элемент b, равный элементу a в M^*, вопреки построению M^*.

Отсюда ввиду противоречивости J вытекает существование конечного числа элементов M', скажем, $b_1, \ldots, b_l$, $l \geqslant 1$, таких, что $H \vdash E(a, b_1) \vee \ldots \vee E(a, b_l)$. Это в свою очередь означает, что $K \vdash Z \wedge Z' \supset E(a, b_1) \vee \ldots \vee E(a, b_l)$, где Z и Z' — конъюнкции элементов D и D' соответственно. Пусть $c_1, \ldots c_i$ и $c'_1, \ldots, c'_j$ — индивиды высказываний Z и Z', не совпадающие ни с каким-либо индивидом из K, ни с $b_1, \ldots, b_l$, a. Учитывая это, запишем

$$Z = Z(c_1, \ldots; c_i), \quad Z' = Z'(c'_1, \ldots, c'_j),$$

и положим

$$W = \exists w_1 \ldots \exists w_i Z(w_1, \ldots, w_i),$$
$$W' = \exists w'_1 \ldots \exists w'_j Z'(w'_1, \ldots, w'_j).$$

Тогда

6.4.3. $K \vdash W \wedge W' \supset E(a, b_1) \vee \ldots \vee E(a, b_l)$.

Поскольку a и $b_1, \ldots, b_l$ принадлежат M и M', мы можем предполагать, добавляя, если нужно, соответствующие элементы из D и D', что эти индивиды содержатся в Z и Z', а следовательно, в W и W' соответственно. Как выяснялось выше, мы можем считать, что a отличен в M от всех индивидов из K. Более того, мы можем также считать, что и $b_1, \ldots, b_l$ отличны в M' от всех индивидов из K. В самом деле, предположим, что b_1, например, равняется в M' индивиду c из K. Тогда $\sim E(a, c)$ входит в D, а $E(b_1, c)$ — в D'. Так как E — отношение равенства,

$$K \vdash \sim E(a, c) \wedge E(b_1, c) \supset \sim E(a, b_1).$$

Следовательно, принимая во внимание 6.4.3,

$$K \vdash [W \wedge \sim E(a, c)] \wedge [W' \wedge E(b_1, c)] \supset E(a, b_2) \vee \ldots \vee E(a, b_l).$$

Расширив область действия квантора существования в W с тем, чтобы она включала $\sim E(a, c)$ (с аналогичной модификацией для $W' \wedge E(b_1, c)$), мы получим высказывания, которыми можно заменить W и W', опуская в консеквенте этой импликации $E(a, b_1)$. Продолжая эту процедуру, мы получим в итоге такой консеквент, что фигурирующие в нем b_k отличны от всех индивидов из K. При этом исключена возможность того, что в конечном счете не останется ни одного b_i. Действительно, в этом случае $E(a, b_1) \vee \ldots \vee E(a, b_l)$ означало бы, что a равно в M^**), а следовательно, и в M, некоторому индивиду из K, а это противоречит нашему предположению. Перепишем 6.4.3, указывая явно a в W и $b_1, \ldots, b_l$ в W':

6.4.4. $K \vdash W(a) \wedge W'(b_1, \ldots, b_l) \supset E(a, b_1) \vee \ldots \vee E(a, b_l)$.

---

*) Имеется в виду, что M^* — некоторая модель H. (*Прим. перев.*)

Отсюда следует, что

6.4.5. $K\vdash \forall x \forall y_1 \ldots \forall y_l [W(x) \wedge W'(y_1, \ldots, y_l) \supset$
$$\supset E(x, y_1) \vee \ldots \vee E(x, y_l)].$$

Заменяя последовательно x переменными $x_1, \ldots, x_l$, нетрудно вывести, что

6.4.6. $K\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_l \forall x \forall y_1 \ldots \forall y_l [W(x_1) \wedge \ldots$
$$\ldots \wedge W(x_l) \wedge W(x) \wedge W'(y_1, \ldots, y_l) \supset [E(x_1, y_1) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee E(x_1, y_l)] \wedge \ldots \wedge [E(x_l, y_1) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee E(x_l, y_l)] \wedge [E(x, y_1) \vee \ldots \vee E(x, y_l)]].$$

Это необходимо влечет, что

6.4.7. $K\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_l \forall x \forall y_1 \ldots \forall y_l [W(x_1) \wedge \ldots$
$$\ldots \wedge W(x_l) \wedge W(x)\, W'(y_1, \ldots, y_l) \supset E(x_1, x_2) \vee$$
$$\vee E(x_1, x_3) \vee \ldots \vee E(x_1, x_l) \vee \ldots \vee E(x_{l-1}, x_l) \vee$$
$$\vee E(x, x_1) \vee \ldots \vee E(x, x_l)].$$

Следовательно, для произвольных констант $c_1, \ldots, c_l$, не содержащихся в K,
$$K\vdash W'(c_1, \ldots, c_l) \supset \forall x_1 \ldots \forall x_l \forall x [W(x_1) \wedge \ldots \wedge W(x_l) \wedge$$
$$\wedge W(x) \supset E(x_1, x_2) \vee E(x_1, x_3) \vee \ldots \vee E(x, x_l)]$$
и потому
$$K\vdash [\exists y_1 \ldots \exists y_l W'(y_1, \ldots, y_l)] \supset \forall x_1 \ldots \forall x_l \forall x [W(x_1) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge W(x_l) \wedge W(x) \supset E(x_1, x_2) \vee E(x_1, x_3) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee E(x, x_l)].$$

Таким образом, если положить
$$Q(x) = [W(x) \wedge [\exists y_1 \ldots \exists y_l W'(y_1, \ldots, y_l)]],$$
то
$$K\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_l \forall x [Q(x_1) \wedge \ldots \wedge Q(x_l) \wedge Q(x) \supset$$
$$\supset E(x_1, x_2) \vee \ldots \vee E(x_{l-1}, x_l) \vee E(x, x_1) \vee \ldots \vee E(x, x_l)].$$

Отсюда видно, что $Q(x)$ является ограниченным в K степени не выше l. Кроме того, меняя местами кванторы, нетрудно заменить $Q(x)$ экзистенциальным предикатом, эквивалентным Q (относительно K). Итак, $Q(x)$ устойчив при расширении относительно K и, следовательно, алгебраичен. Так как $Q(a)$ истинно в M, то теорема доказана.

Следующий пример показывает, что ограниченный предикат $Q(x)$, существование которого утверждается в 6.4.1, не обязательно имеет степень 1. Допустим, что K содержит отношение равенства $E(x, y)$ и другое бинарное отношение $F(x, y)$, так что E удовлетворяет аксиомам эквивалентности и подстановочности относительно F (см. 2.2.2). В дополнение к этому предполагается, что K содержит следующие аксиомы:

6.4.8. $\forall y[[F(a_0, y) \supset E(a_0, y)] \wedge [\forall z[E(a_0, z) \vee \vee[\exists v F(z, v) \wedge \sim E(z, v)]]]],$

$$\forall x \forall y[F(x, y) \wedge \sim E(x, y) \supset [\exists z[F(x, z) \wedge \wedge \sim E(x, z) \wedge \sim E(y, z)]]],$$

$$\forall x \forall y \forall z \forall v[F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge F(x, v) \supset E(x, y) \vee \vee E(x, z) \vee E(x, v) \vee E(y, z) \vee E(y, v) \vee E(z, v)]$$

и

6.4.9. $\forall x F(x, x)$

$$\forall x \forall y[F(x, y) \supset F(y, x)]$$

$$\forall x \forall y \forall z[F(x, y) \wedge F(y, z) \supset F(x, z)].$$

Аксиомы 6.4.9 утверждают, что F, подобно E, является отношением эквивалентности (но не отношением равенства). Первая аксиома 6.4.8 постулирует существование единственного элемента a_0 (единственного — в смысле отношения равенства), такого, что $F(a_0, y)$ ложно для любого y, отличного от a_0. Вторая аксиома гласит, что если $F(x, y)$ истинно для двух различных x и y, то оно также истинно для x и некоторого z, не равного ни x, ни y. И, наконец, последняя аксиома выражает тот факт, что число различных классов эквивалентности относительно F не больше трех.

Любая модель K может быть описана следующим образом. M состоит из некоторого числа классов эквивалентности $\{N_\nu\}$ относительно F. Один из них, скажем, N_0, содержит единственный элемент a_0. Все другие классы, если они вообще есть, содержат (по второй и третьей аксиомам 6.4.8) ровно три элемента. Любая нормальная подструктура $M' \subset M$, также являющаяся моделью K, должна включать N_0. Кроме того, если M' содержит хотя бы один элемент из другого N_ν, то M' содержит и все элементы этого N_ν. Из сказанного непосредственно вытекает строгая выпуклость K. K непротиворечиво, так как следующая структура M^* есть модель K.

M^* содержит четыре индивида a_0, a_1, a_2, a_3. Отношения E и F истинны в M^* только в перечисленных ниже случаях:

6.4.10. $E(a_i, a_i)$, $\quad i=0, 1, 2, 3,$

$F(a_0, a_0)$

$F(a_i, a_j)$, $\quad i, j=1, 2, 3.$

M^* содержит два класса эквивалентности относительно F: $N_0=\{a_0\}$ и $N_1=\{a_1, a_2, a_3\}$. Ядром M^* является структура M_0, содержащая единственный элемент a_0, так что и $E(a_0, a_0)$ и $F(a_0, a_0)$ истинны в M_0.

Пусть теперь $K'=K\cup\{\sim E(a_0, a_1)\}$. K' по-прежнему строго выпукло, и его модели фактически являются моделями K, содержащими, помимо a_0, элемент a_1, отличный от a_0. Приведенная выше структура M^* является моделью K' и даже модельным ядром K', так как она не содержит ни одной собственной (нормальной) подструктуры, которая была бы моделью K'. Для каждого элемента M^* нетрудно указать удовлетворяющий ему предикат, определенный и алгебраический в K'. Так, a_0 удовлетворяет $E(a_0, x)$, a_1 удовлетворяет $E(a_1, x)$, a_2 и a_3 оба удовлетворяют $F(a_1, x)\wedge\sim E(a_1, x)$. Первые два предиката имеют степень 1, а последний — степень 2. a_1 и a_2 не могут удовлетворять никакому алгебраическому предикату степени 1, так как автоморфизм M^*, переводящий $a_0\longleftrightarrow a_0$, $a_1\longleftrightarrow a_1$, $a_2\longleftrightarrow a_3$, $a_3\longleftrightarrow a_2$, преобразует друг в друга a_2 и a_3, так что a_2 и a_3 одновременно удовлетворяют любому определенному в K' предикату.

Возвратимся к общему случаю. Пусть $M'(S)\subset M$ получена присоединением подмножества S модели M выпуклого множества аксиом K к подструктуре $M'\subset M$, которая является моделью K (п. 3.5). Пусть $K'=K\cup\{E(a_\nu, a_\nu)\}$, где a_ν пробегает все элементы M' и S. K' строго выпукло, поскольку в нем содержится по крайней мере один индивид. (Высказывания $E(a_\nu, a_\nu)$ мы добавили к K только для того, чтобы ввести индивиды a_ν в множество аксиом; они, очевидно, не меняют совокупности высказываний, выводимых из этого множества.) $M'(S)$ есть ядро M относительно K' и потому каждый элемент $M'(S)$ удовлетворяет алгебраическому предикату в K'. Напомним, что $M'(S)$ — пересечение всех *нормальных* подструктур M, которые содержат M' и S и являются моделями K.

Если при данных K и M каждый элемент $M'(S)$ удовлетворяет алгебраическому предикату *первой степени* в K' для любой модели $M' \subset M$ множества K и для любого подмножества $S \subset M$, то M называется *дефинитной* (*определенной*) относительно K. Выпуклое множество K назовем дефинитным (определенным), если все модели K относительно него дефинитны.

Под автоморфизмом g структуры M, содержащей отношение равенства E, мы понимаем взаимно однозначное отображение множества классов эквивалентности, определенных отношением E, *на* себя, так что соответствующие элементы удовлетворяют одним и тем же отношениям. Однако если a — элемент M, то мы будем использовать запись ga для обозначения произвольного элемента из того класса эквивалентности, в который g отображает класс, содержащий a.

Пусть M — модель строго выпуклого множества K, дефинитная относительно K, и пусть M_0 — модельное ядро M. Всякий автоморфизм M, оставляющий на месте элементы M_0 (точнее, классы эквивалентности), назовем *допустимым*. Допустимые автоморфизмы M образуют группу G.

6.4.11. Теорема. *Пусть g — допустимый автоморфизм; тогда множество элементов M, инвариантных при действии g, образует подструктуру M, которая является моделью K.*

Доказательство. Пусть S_g — множество элементов M, инвариантных относительно g, и пусть M_g — структура, полученная ограничением отношений M на S_g, $M_g \supset M_0$.

Пусть $K' = K \cup \{E(a_\nu, a_\nu)\}$, где a_ν пробегает все элементы M_g (т. е. S_g), и пусть a — любой элемент M, такой, что $Q(a)$ истинно в M для некоторого алгебраического предиката Q степени 1 в K'. Поскольку $Q(x)$ определен в K', то все индивиды предиката Q инвариантны относительно g. В соответствии с этим то обстоятельство, что $Q(a)$ истинно в M, влечет истинность $Q(ga)$ в M, где ga обозначает элемент (с точностью до равенства), в который g отображает a. Но $Q(x)$ имеет степень 1, и потому ga равно a, т. е. a инвариантно при действии g.

Возьмем в качестве M' модельное ядро M_0, а в качестве S — множество S_g. Тогда из определения дефинитной модели относительно K мы получим, что все элементы $M_0(S_g)$ инвариантны относительно g и тем самым принадлежат S_g. Следовательно, $M_0(S_g)=M_g$ и M_g — модель K.

6.4.12. Теорема. *При тех же условиях на K и M, что и раньше, предположим дополнительно существование такого алгебраического предиката $Q(x)$ степени $n (n \geqslant 1)$ в K, что M порождается n различными элементами $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющими $Q(x)$.* (Иными словами $M=M_0(S)$, где $S=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и M_0 — модельное ядро в M.) *При этих условиях G конечна и ее порядок $m \leqslant n!$.*

Доказательство. Для любого допустимого g последовательность элементов $\{ga_i\}$, $i=1, \ldots, n$, должна быть перестановкой $\{a_1, \ldots, a_n\}$. В самом деле, поскольку все индивиды, которые содержатся в $Q(x)$ (если они там вообще есть), инвариантны относительно g, то $Q(ga_i)$ истинно в M, $i=1, \ldots, n$. Так как ga_i все различны и степень Q равна n, то последовательность $\{ga_i\}$, как и утверждалось, получается перестановкой $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Допустим теперь, что $E(g_1a_i, g_2a_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, истинно в M для двух допустимых автоморфизмов g_1 и g_2. Тогда $E(g_2^{-1}g_1a_i, a_i)$ истинно в M при $i=1, 2, \ldots, n$. Пусть a — произвольный элемент M и пусть $Q'(x)$ — алгебраический предикат степени 1 в $K \cup \{E(a_1, a_1), \ldots$ $\ldots, E(a_n, a_n)\}$, удовлетворяющий a. Такой предикат Q' существует для данного a в силу одного из условий 6.4.12. Ввиду того, что все индивиды, входящие в $Q'(x)$, инвариантны относительно $g_2^{-1}g_1$, $Q'(g_2^{-1}g_1a)$ истинно в M, а потому $g_2^{-1}g_1a$ равно a и g_1a равно g_2a. Это показывает, что если два допустимых изоморфизма совпадают на $\{a_1, \ldots, a_n\}$, то они совпадают и на всей структуре M. Так как число перестановок из n элементов равно $n!$, то отсюда вытекает, что G содержит не более чем $n!$ элементов.

Если K — множество аксиом поля нулевой характеристики, а $Q(x)$ обозначает то свойство, что x — корень некоторого многочлена $q(x)$ положительной степени n с рациональными коэффициентами, то корни $q(x)$ порождают поле M, которое может служить иллюстрацией к теоремам 6.4.11 и 6.4.12. В этом случае G есть группа Галуа поля M *).

6.5. Сепарабельность. Пусть K — множество аксиом с отношением равенства, и пусть M — модель K с диаграммой D. Естественно спросить, будет ли каждый (строго) алгебраический предикат первой степени в $K \cup D$ удовлетворяться некоторым индивидом из M? Можно слегка изменить постановку вопроса: будет ли каждый строго алгебраический предикат первой степени в $K \cup D$ истинным для некоторого индивида из M. Эти вопросы побуждают ввести следующие определения.

Модель M множества аксиом K (с отношением равенства) назовем *сепарабельной* (относительно K), если для каждой модели $M' \subset M$ множества K с диаграммой D' любой алгебраический предикат первой степени в $K \cup D'$ истинен в M' для некоторого индивида из M' тогда и только тогда, когда он истинен в M для некоторого индивида из M. Множество аксиом K (с отношением равенства) назовем *совершенным*, если все модели K сепарабельны относительно него.

Легко видеть, что если множество аксиом K (с отношением равенства) обладает тем свойством, что для каждой модели M' множества K с диаграммой D' любой алгебраический предикат первой степени в $K \cup D'$ истинен для некоторого индивида из M', то K совершенно. Это условие также и необходимо. Действительно, допустим, что существует модель M' с диаграммой D' и алгебраический предикат $Q(x)$ первой степени в $K \cup D'$, такой, что $Q(x)$ не удовлетворяется ни одним индивидом

*) Точнее, G есть группа Галуа расширения $M \supset M_0$, где M_0 — поле рациональных чисел. (*Прим. перев.*)

из M'. Так как $Q(x)$ — алгебраический предикат первой степени, то существует модель M множества $K \cup D'$ (т. е. расширение M'), такая, что $Q(a)$ истинно в M для некоторого индивида $a \in M$. Следовательно, если K совершенно, то $Q(a')$ истинно в M' для некоторого индивида $a' \in M'$, вопреки нашему предположению.

Займемся теперь тем, что установим связь между нашими определениями и соответствующими понятиями алгебры. Пусть M — поле и M^* — расширение M. M^* будем называть сепарабельным расширением M в алгебраическом смысле, если каждый элемент M^* удовлетворяет ненулевому многочлену с коэффициентами в M без кратных множителей. В соответствии с этим определением M^* должно быть алгебраическим расширением M.

6.5.1. Теорема. *Пусть M — поле с диаграммой D и M^* — алгебраическое расширение M. Тогда, для того чтобы M^* было сепарабельным расширением M в алгебраическом смысле, необходимо и достаточно, чтобы M^* было сепарабельным относительно $K = K_{CF} \cup D$.*

Доказательство. Предположим, что M^* — сепарабельное расширение M в алгебраическом смысле, и пусть M' — произвольная подструктура M^*, которая является моделью $K \cup D$. Пусть $Q(x)$ — алгебраический предикат первой степени в K', где $K' = K \cup D'$, а D' — диаграмма M'. Допустим, что $Q(a)$ истинно в M' для некоторого элемента $a \in M^*$, a алгебраичен над M и, следовательно, над M'. Это означает существование неприводимого (над M') многочлена $p(x)$ степени $n \geqslant 1$ с коэффициентами в M', такого, что $p(a) = 0$. Обозначим через $\overline{M}$ алгебраическое замыкание M^*. $\overline{M}$ содержит n различных корней $p(x)$, включая a, $Q(a)$ истинно в $\overline{M}$, так как $Q(x)$ устойчив относительно K'. Допустим, что $n > 1$. Тогда $Q(x)$ истинен в $\overline{M}$ также и для всех остальных корней $p(x)$, поскольку имеется автоморфизм $\overline{M}$, переводящий a в любой заданный корень $p(x)$ и оставляющий на месте элементы M'. Однако, по предположению, $Q(x)$ имеет степень 1, и мы заключаем, что $n = 1$, т. е. $p(x)$ — линейный многочлен и $a \in M'$.

Обратно, предположим, что M^* содержит элемент a, не сепарабельный над M. Таким образом, a — корень ненулевого неприводимого многочлена $f(x)$ степени n с коэффициентами в M вида $f(x)=q(x^p)$, где p — характеристика рассматриваемых полей, $p\neq 0$. Пусть $M'=M(a^*)$, где $a^*=a^p$, так что степень расширения M' над M равна n/p. Отсюда вытекает, что элемент a не принадлежит M', так как степень расширения $M(a)$ над M равна n. Рассмотрим теперь предикат $Q(x)$, формализующий утверждение: «a^* есть p-я степень x», т. е. $x^p=a^*$. Понятно, что $Q(x)$ можно сформулировать в терминах словаря $K\cup D'$, где D' — диаграмма M'. $Q(x)$ будет устойчивым (и даже инвариантным) относительно $K\cup D'$, причем $Q(a)$ истинно в M. Кроме того, уравнение $x^p=a^*$ имеет не более одного корня в любом расширении M', так как $x^p-a^*=x^p-a^p=(x-a)^p$. Таким образом, $Q(x)$ является ограниченным предикатом степени 1, и тем самым $Q(x)$ — алгебраический предикат первой степени. Итак, a удовлетворяет в M^* алгебраическому предикату первой степени в $K\cup D'$, несмотря на то, что $Q(x)$ ложен для любого индивида из M'. Это означает, что M^* не сепарабельно в метаматематическом смысле, и теорема 6.5.1 доказана.

Пусть дан предикат $R(x_1, \ldots, x_n, y)$, $n\geqslant 1$. Рассмотрим всевозможные предикаты, получающиеся из R перестановкой индексов у переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (включая сам R). Пусть

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ k_1 & k_2 & k_3 & \ldots & k_n\end{pmatrix}$$

— любая подстановка порядка n. Предикат $R_\pi(x_1, \ldots, x_n, y)$ определим следующим равенством:

$$R_\pi(x_1, \ldots, x_n, y)=R(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, y).$$

Например, если

$$R(x_1, x_2, y)=\exists z[S(x_1, y, z)\wedge P(x_2, x_1, z)]$$

и $\pi=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$, то

$$R_\pi(x_1, x_2, y)=\exists z[S(x_2, y, z)\wedge P(x_1, x_2, z)].$$

Ясно, что $R_\varepsilon=R$, где ε — тождественная подстановка.

Предикат $R(x_1, \ldots, x_n, y)$, $n \geqslant 1$, назовем *симметричным*, если

6.5.2. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y [R(x_1, \ldots, x_n, y) \supset$
$$\supset R_\pi(x_1, \ldots, x_n, y)]$$

для любой подстановки π порядка n. Соответственно R будем называть симметричным относительно данного множества высказываний K, если 6.5.2 выводимо из K.

Пусть M — сепарабельная модель строго выпуклого множества высказываний K (с отношением равенства), и пусть $Q(x)$ — алгебраический предикат n-й степени в K, удовлетворяющий n *различным* элементам $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n \in M$. Обозначим через M_0 модельное ядро K в M. Пусть $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ — устойчивый и симметричный относительно K предикат. Допустим, что $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ определяет y как некоторую *частичную* функцию от $x_1, \ldots, x_n$, т. е.

6.5.3. $K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y \forall z [R(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge$
$$\wedge R(x_1, \ldots, x_n, z) \supset E(y, z)].$$

При этих условиях имеет место

6.5.4. Теорема. *Если $R(a_1, \ldots, a_n, a)$ истинно в M при некотором $a \in M$, то $a \in M_0$.*

Доказательство. Рассмотрим предикат

$$Q^*(y) = \exists x_1 \ldots \exists x_n [\sim E(x_1, x_2) \wedge \sim E(x_1, x_3) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \sim E(x_{n-1}, x_n) \wedge Q(x_1) \wedge Q(x_2) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge Q(x_n) \wedge R(x_1, \ldots, x_n, y)].$$

Нетрудно заметить, что $Q^*(y)$ устойчив относительно K. Помимо этого, $Q^*(y)$ — ограниченный предикат степени 1 в K. Действительно, если M^* — любая модель K, такая, что $Q^*(a^*)$ истинно в M^* для некоторого элемента $a^* \in M^*$, то $Q^*(a_i^*)$ истинно в M^* для n различных элементов $a_i^* \in M^*$, определенных в M^* единственным образом (с точностью до порядка). При этом $R(a_1^*, \ldots, a_n^*, a^*)$ истинно в M^*, и a^* в силу симметричности R определено множеством $\{a_1^*, \ldots, a_n^*\}$ единственным образом, даже несмотря на порядок. Таким образом, степень

$Q^*(y)$ не выше первой. Но тогда из условия теоремы следует, что степень Q^* равна 1. Итак, $Q^*(y)$ — алгебраический предикат первой степени в K. Легко усмотреть, что $Q^*(y)$ является также алгебраическим предикатом первой степени в $K \cup D_0$, где D_0 — диаграмма модельного ядра M_0. Ввиду сепарабельности M относительно K $Q^*(y)$ истинен для некоторого элемента $a_1 \in M_0$, который, таким образом, равен a в M. Однако, по определению модельного ядра, M_0 нормально в M и поэтому $a \in M_0$.

Пусть $K = K_{CF}^0 \cup D$, где D — диаграмма некоторого поля нулевой характеристики. Пусть $Q(x)$ утверждает, что x — корень некоторого ненулевого неприводимого многочлена, и $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ выражает тот факт, что y — рациональная симметрическая функция от $x_1, \ldots, x_n$. Легко видеть, что в этом случае 6.5.4 является основной теоремой о симметрических функциях. Алгебраические ресурсы, использованные при доказательстве этой теоремы, содержатся в 6.5.1. Они выражают тот факт, что алгебраический предикат $Q(y)$ первой степени в $K_{CF}^0 \cup$ $\cup D$, где D — диаграмма поля M нулевой характеристики, должен удовлетворяться некоторым элементом из M.

Заметим под конец, что множество K_{CF}^p не совершенно при $p \neq 0$, так как найдется поле M характеристики p, в котором некоторый многочлен $x^p - a$ неприводим. Любому многочлену такого типа соответствует алгебраический предикат $Q(y)$ n-й степени в $K_{CF}^p \cup D$ (где D — диаграмма M) такой, что $Q(y)$ не удовлетворяется ни одним элементом M. Это и означает, что K_{CF}^p не совершенно. С другой стороны, множество аксиом поля нулевой характеристики K_{CF}^0 совершенно, так как все поля нулевой характеристики сепарабельны в алгебраическом смысле, а следовательно, и в метаматематическом.

6.6. Задачи

6.6.1. Проверить, что предикаты $E(x, y)$ и $E(x_1, x_1) \wedge S(y, y, y)$ принадлежат полиномиальной структуре M_1' относительно K_{CF}. Показать, что K_{CF} не транзитивно и не предтранзитивно.

6.6.2. Показать, что понятие свободной алгебры (например, свободной группы) включается в наше определение полиномиальной структуры.

6.6.3. Исследовать свойства предполиномиальных и полиномиальных структур M'_0 и M'_1 относительно множества K^*_{CR} аксиом коммутативного унитарного кольца.

6.6.4. Сформулировать обобщение понятия алгебраической зависимости.

Библиографическая справка. Глава VI целиком взята из книги А. Робинсона [1] с незначительными изменениями и дополнениями. Относительно теории универсальных алгебр см. работы Биркгофа [1] и Мальцева [2] *).

---

*) См. также А. Г. Курош [1] и Кон [1].

Относительно обобщения алгебраических понятий см. Йонсон [2]. (*Прим. ред.*)

МЕТАМАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛОВ

7.1. Введение. Если взглянуть на те свойства идеала J коммутативного кольца M, которые можно определить без ссылки на кольцевые операции, то, пожалуй, наиболее характерным из них является сопоставление идеалу J фактор-кольца $M/J = M'$. M' состоит из множеств элементов M, так что каждый элемент M принадлежит лишь одному элементу M'. Более того, существует естественный гомоморфизм M на M', который каждый элемент M переводит в содержащий его элемент M'. При этом идеал J совпадает с нулем M'. Аналогичную роль играют в некоммутативном кольце двусторонний идеал, а в группе — нормальный делитель.

В соответствии с этим, пытаясь отделить понятие идеала от специфических кольцевых операций, можно было бы отождествить его с указанным выше гомоморфизмом. Такой подход очень прост и не требует большого использования формального языка. С другой стороны, имеются различные понятия, связанные с идеалами, которые не могут быть непосредственно выражены в терминах соответствующих гомоморфизмов. Таково, например, очень важное в теории идеалов понятие базиса идеала.

К упомянутому выше гомоморфизму можно, однако, подойти следующим образом. Пусть D^+ — положительная диаграмма коммутативного кольца M, J — идеал в M и M' — фактор-кольцо M/J. Как обычно, предполагается полная идентичность объектов языка и соответствующих индивидов из M. Обозначим через D^* множество высказываний, полученное присоединением к D^+ всех высказываний вида $E(a, b)$, где a и b соответствуют в M' одному и тому же элементу. Иными словами, мы прибавляем к D^+ множество высказываний, которое отождествляет (делает равными) любые два элемента, разность которых лежит в идеале J. Очевидно, что M' — модель D^*. Таким образом, идеал ассоциируется с определенным множеством высказываний (вида $E(a, b)$), которое добавляется к данному множеству (в нашем случае к объединению D^+ и множества аксиом коммутативного кольца). В дальнейшем мы углубим эту идею и покажем, как можно развить в соответствующих терминах некоторые разделы теории идеалов.

7.2. Метаматематические идеалы. Пусть K и J_0 — два множества высказываний языка L узкого исчисления предикатов. Подмножество $J \subset J_0$ назовем *идеалом* в J_0 над K, если $S(K \cup J) \cap J_0 \subset J$ (т. е. все высказывания J_0, выводимые из объединения J и K, содержатся в J). Мы будем рассматривать K как аксиоматическую систему теории, а J_0 — как ее область. Данное понятие идеала совпадает с понятием *относительной системы* (relative system), определенной Тарским в его теории систем, в том частном случае, когда K — подмножество J_0, рассматриваемое как множество «логических» или тавтологических высказываний теории.

На протяжении всего раздела мы будем предполагать множества K и J_0 фиксированными, так что под *идеалом* всегда будет пониматься идеал в J_0 над K. Обозначим через C множество таких идеалов; в частности, $J_0 \in C$.

Без особого труда проверяется, что пересечение любого числа идеалов снова есть идеал. Пересечение конечного числа идеалов $J_1, \ldots, J_m$ будем обозначать $[J_1, \ldots, J_m]$, не опасаясь путаницы в связи с другим употреблением квадратных скобок в языке L.

Сумма любого числа идеалов определяется как пересечение всех идеалов, содержащих их объединение. Сумму конечного числа идеалов будем обозначать $(J_1, \ldots$ $\ldots, J_m)$. Более общо́, если $A_1, \ldots, A_m$ — произвольные подмножества J_0, то посредством $(A_1, \ldots, A_m)$ будем обозначать пересечение всех идеалов, содержащих $A_1 \cup \ldots \cup A_m$, и будем говорить, что $(A_1, \ldots, A_m)$ порождено $A_1, \ldots, A_m$. Немного изменяя нашу символику, для идеала J, порожденного множеством $\{X_1, \ldots, X_m\}$, примем обозначение $(X_1, \ldots, X_m)$ и $\{X_1, \ldots, X_m\}$ назовем базисом J. Аналогично, в более общей ситуации подмножество B идеала J будем называть его базисом, если J есть пересечение всех идеалов, содержащих B.

Таким образом, B будет базисом J в том и только в том случае, если $J \subset S(K \cup B)$.

Если J и J' — два идеала таких, что $J' \supset J$, то будем говорить, что J' *делит* J, или что J' — *делитель* J; если к тому же $J' \neq J$, то J' назовем *собственным* делителем J. Идеал J неприводим, если для любых двух идеалов J_1 и J_2 из равенства $[J_1, J_2] = J$ следует либо $J_1 = J$, либо $J_2 = J$. Соответственно J *неразложим* *), если для любых двух идеалов J_1 и J_2 соотношение $(J_1, J_2) = J$ влечет $J_1 = J$ или $J_2 = J$. В дальнейшем нам придется иметь дело главным образом с неприводимостью.

Мы скажем, что идеалы C удовлетворяют *условию максимальности*, если любое непустое подмножество идеалов $C' \subset C$ имеет по меньшей мере один максимальный элемент (т. е. идеал, для которого ни один идеал из C' не является его собственным делителем). Эквивалентное условие состоит в том, что любая возрастающая цепочка идеалов

$$J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \ldots \subset J_n \subset \ldots,$$

начиная с некоторого места, стабилизируется (т. е., начиная с некоторого целого положительного n, будет $J_n = J_{n+1} = J_{n+2} = \ldots$). Другое эквивалентное условие состоит в том, что каждый идеал из C имеет конечный базис. Доказательство равносильности трех условий проводится точно так же, как и в обычной теории идеалов. Для классов идеалов, удовлетворяющих этим условиям, имеется следующий *принцип индукции.*

Если некоторое свойство верно для J_0 и если из того факта, что оно верно для всех собственных делителей идеала J, следует его справедливость для J, то этому свойству удовлетворяют все идеалы (в J_0 над K).

Мы покажем, что выполнено *условие минимальности*, если каждое непустое подмножество идеалов $C' \subset C$ содержит по крайней мере один идеал $J \in C'$ такой, что J

---

*) Автор пользуется термином «indecomposable» — «неразложимый» В обычной теории колец идеал J называется неразложимым, если он не представим в виде $J = J_1 \oplus J_2$. (*Прим. перев.*)

не является собственным делителем никакого идеала из C'. Эквивалентное условие состоит в том, что для любой убывающей последовательности идеалов

$$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots \supset J_n \supset \ldots$$

существует целое положительное n, такое, что $J_n = J_{n+1} = J_{n+2} = \ldots$

Для класса C, удовлетворяющего условию максимальности, имеет место следующая основная

7.2.1. Теорема. *Каждый идеал разлагается в пересечение конечного числа неприводимых идеалов.*

Доказательство основывается на принципе индукции и почти целиком повторяет соответствующее алгебраическое доказательство.

Теорема очевидным образом верна для всех неприводимых идеалов, в частности для J_0. Допустим, что она верна для всех собственных делителей идеала J. Если J неприводим, то доказывать нечего; если нет, то $J = [J', J'']$, где J', J'' — собственные делители J. Так как для J' и J'' теорема верна, то, по предположению, имеем

$$J' = [J'_1, J'_2, \ldots, J'_m], \qquad m \geqslant 1;$$

$$J'' = [J''_1, J''_2, \ldots, J''_n], \qquad n \geqslant 1,$$

где J'_i, J''_j все неприводимы. Отсюда

$$J = [J'_1, J'_2, \ldots, J'_m, J''_1, J''_2, \ldots, J''_n]$$

есть искомое представление J в виде пересечения неприводимых идеалов.

7.3. Связь между идеалами в различных областях. Пусть K, K^* и J_0 — три множества высказываний таких, что $K \subset K^*$. Все идеалы в J_0 над K^* могут рассматриваться как идеалы в J_0 над K, в то время как обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть теперь K, J_0 и $\overset{*}{J_0}$ — такие множества высказываний, что $J_0 \subset J_0^*$. Наша ближайшая цель — изучить соотношения между классом C идеалов в J_0 над K и классом C^* идеалов в J_0^* над K.

Пусть J — любой идеал в J_0. Обозначим через J^* множество тех высказываний из J_0^*, которые выводимы из

$K\cup J$, т. е. $J^*=S(K\cup J)\cap J_0^*$. J^* назовем замыканием J в J_0^*. Обратно, если J' — идеал в C^*, то $J=J'\cap J_0$ — идеал в J_0. Если J_1' и J_2' — два различных идеала в J_0^*, то соответствующие им идеалы J_1 и J_2 таковыми быть не обязаны, т. е. вполне может случиться так, что $J_1'\cap J_0=$ $=J_2'\cap J_0$. С другой стороны, если J^* — замыкание $J\in C$ в J_0^*, то $J=J^*\cap J_0$.

Если для C^* выполнено условие максимальности, то оно также выполнено и для C. Действительно, из существования бесконечной строго возрастающей цепи идеалов в J_0: $J_1\subset J_2\subset J_3\subset\ldots$ вытекает, что цепь замыканий этих идеалов в J_0^* также строго возрастает. Аналогичное утверждение справедливо также и в том случае, когда C^* удовлетворяет условию минимальности. Обратное, вообще говоря, неверно: из выполнения условия максимальности в C не следует его выполнимость в C^*. Однако в некоторых частных случаях это заключение оказывается верным; две такие ситуации мы сейчас и рассмотрим.

Для данного J_0 через $J_0^\wedge$ обозначим множество высказываний, состоящее из всевозможных конъюнкций элементов J_0 (включая элементы J_0). Например, если X, Y, $Z\in J_0$, то высказывания X, $X\wedge Y$, $X\wedge[Y\wedge Z]$, $[X\wedge Y]\wedge Z$ все являются элементами $J_0^\wedge$. Аналогично, через $J_0^\vee$ обозначим множество высказываний, состоящее из всевозможных дизъюнкций элементов J_0 (включая само J_0). Классы идеалов в J_0, $J_0^\wedge$ и $J_0^\vee$ над фиксированным множеством аксиом мы обозначим соответственно через C, $C^\wedge$ и $C^\vee$.

Имеется совсем простая связь между C и $C^\wedge$. Пусть $J^\wedge$ — любой идеал в $C^\wedge$ и J — пересечение J_0 и $J^\wedge$. Мы хотим показать, что $J^\wedge$ есть замыкание J в $J_0^\wedge$. В самом деле, если J^* — замыкание J в $J_0^\wedge$, то J^* содержит все высказывания, полученные из высказываний J взятием конъюнкции, поскольку все они выводимы из J. Предположим теперь, что в J^* имеется высказывание, которое не является конъюнкцией элементов J (хотя по определению все высказывания $J_0^\wedge$ могут быть получены таким способом). Допустим, в частности, что упомянутое выше высказывание X получено из элементов J_0 с помощью минимального числа конъюнктивных операций. Само X не может содержаться в J_0, так как тогда, по определению, X содержалось бы в J. В соответствии с этим, X может быть записано в виде $X_1 \wedge X_2$, где X_1 и X_2 получены из J_0 посредством меньшего числа конъюнктивных операций по сравнению с X. Но X_1 и X_2 оба выводимы из X и тем самым принадлежат J^*. Следовательно, в силу минимального свойства X, X_1 и X_2 являются конъюнкциями элементов из J_0. То же самое верно и для X (так как $X = X_1 \wedge X_2$), вопреки нашему предположению. Отсюда вытекает, что J^*, как и утверждалось, совпадает с $J^\wedge$.

Итак, каждый идеал $J^\wedge \in C^\wedge$ есть замыкание $J^\wedge \cap J_0$. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между идеалами C и идеалами $C^\wedge, J \leftrightarrow J^\wedge$, так что включение $J_1 \subset J_2$ для любых двух идеалов из C равносильно включению $J_1^\wedge \subset J_2^\wedge$ для соответствующих идеалов из $C^\wedge$. Отсюда следует, что $C^\wedge$ удовлетворяет условию максимальности (минимальности) в том и только в том случае, когда C удовлетворяет этому же условию.

Связь между C и $C^\vee$ описывается менее просто. Однако нами будет доказана следующая

7.3.1. Теорема. *Если в C выполняется условие максимальности, то оно выполняется также и в $C^\vee$.*

Доказательство. Допустим, что $C^\vee$ не удовлетворяет условию максимальности. Мы хотим показать, что в подобном случае C также не может удовлетворять этому условию.

Поскольку в $C^\vee$ не выполняется условие максимальности, существует идеал $J^\vee \in C^\vee$, не имеющий конечного базиса. В $J^\vee$ можно выделить последовательность элементов $\{Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\}$ такую, что в возрастающей последовательности идеалов $J_k^\vee = (Y_1, \ldots, Y_k)$ в $J_0^\vee$ бесконечное число ее членов попарно различны.

Так как все Y_i представляют собой дизъюнкции высказываний из J_0 и порядок этих высказываний не существен (например, высказывания вида $X \vee [Y \vee Z]$ и $[X \vee Y] \vee Z$ взаимозаменяемы), то мы можем записать

$$Y_i = X_1^{(i)} \vee X_2^{(i)} \vee \ldots \vee X_{m_i}^{(i)}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $X_k^{(i)} \in J_0$. Покажем, как из множества $\{X_k^{(i)}\}$, $i, k = 1, 2, \ldots$, выбрать бесконечное подмножество $Y_1^{(1)} = X_{k_1}^{(i_1)}$, $Y_2^{(2)} = X_{k_2}^{(i_2)}, \ldots, Y_n^{(n)} = X_{k_n}^{(i_n)}$ такое, что возрастающая цепочка идеалов $J_1^* \subset J_2^* \subset \ldots \subset J_n^* \subset \ldots$ имеет бесконечное число отличных друг от друга членов (где $J_n^* = (Y_1^{(1)}, \ldots, Y_n^{(n)})$ — идеал, порожденный $Y_1^{(1)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ в J_0 над K).

Если $m_1 = 1$, т. е. Y_1 само принадлежит J_0, то мы положим $Y_1^{(1)} = Y_1$. Если $m_1 > 1$, то, как мы покажем, Y_1 можно заменить высказыванием Y_1', которое является дизъюнкцией, составленной из некоторых (но не всех) высказываний $X_1^{(1)}, \ldots, X_m^{(1)}$, так что последовательность $\{Y_1', Y_2, Y_3, \ldots, Y_n, \ldots\}$ по-прежнему дает возрастающую цепочку идеалов с бесконечным числом различных членов*). В самом деле, положим $Z_1' = X_1^{(1)}$, $Z_1'' = X_2^{(1)} \vee \ldots \vee X_m^{(1)}$, тогда $[Y_1 \equiv Z_1' \vee Z_1'']$ — теорема. Рассмотрим в $J_0^{\vee}$ две последовательности идеалов $\{J_k'\}$ и $\{J_k''\}$, где $J_k' = (Z_1', Y_2, \ldots, Y_k)$ и $J_k'' = (Z_1'', Y_2, \ldots, Y_k)$

Легко видеть, что $J_k^{\vee} = [J_k', J_k'']$. Действительно, $Z_1' \vee Z_1''$ выводится как из Z_1', так и из Z_1'', а потому принадлежит $[J_k', J_k'']$. Следовательно, $J_k^{\vee} \subset [J_k', J_k'']$ С другой стороны, согласно известным правилам исчисления высказываний любое высказывание, выводимое как из $K \cup \{Z_1', Y_2, Y_3, \ldots\}$, так и из $K \cup \{Z_1'', Y_2, Y_3, \ldots\}$, выводимо также из $K \cup \{Z_1' \vee Z_1'', Y_2, Y_3, \ldots\}$. Следовательно, $[J_k', J_k''] \subset J_k^{\vee}$, и тем самым, как и утверждалось, $J_k^{\vee} = [J_k', J_k'']$.

---

*) В дальнейшем автор называет такую последовательность идеалов эффективно бесконечной. (*Прим. перев.*)

Отсюда вытекает, что по меньшей мере одна из двух цепочек

$$J_1' \subset J_2' \subset J_3' \subset \ldots$$

и

$$J_1'' \subset J_2'' \subset J_3'' \subset \ldots$$

эффективно бесконечна. В противном случае мы имели бы для некоторых k и l $J_k' = J_{k+1}' = J_{k+2}' = \ldots$ и $J_l'' = J_{l+1}'' = J_{l+2}'' = \ldots$ и, следовательно, для $m = \max(k, l)$ $[J_m', J_m''] = [J_{m+1}', J_{m+1}''] = [J_{m+2}', J_{m+2}''] = \ldots$, т. е. $J_m^{\vee} = J_{m+1}^{\vee} = J_{m+2}^{\vee} = \ldots$, вопреки нашему предположению. Таким образом, одна из последовательностей $\{Z_1', Y_2, Y_3, \ldots\}$ и $\{Z_1'', Y_2, Y_3, \ldots\}$ (или даже обе) дают эффективно бесконечную цепочку идеалов. Если имеет место вторая возможность и $m_1 > 2$, то мы повторяем ту же процедуру для Z_1'' и т. д. В конце концов, мы придем к высказыванию $X_{k_1}^{(1)}$ (одному из дизъюнктивных членов высказывания Y_1) такому, что последовательность $\{X_{k_1}^{(1)}, Y_2, Y_3, \ldots\}$ дает эффективно бесконечную цепочку идеалов в $J_0^{\vee}$: $J_{11} \subset J_{12} \subset \ldots$, где $J_{1k} = (X_k^{(1)}, Y_2, \ldots, Y_k)$. Из последовательности $\{X_k^{(1)}, Y_2, Y_3, \ldots\}$ выбросим все высказывания, содержащиеся в $J_{11} = (X_{k_1}^{(1)})$, исключая, разумеется, само $X_{k_1}^{(1)}$. Полученная последовательность $\{Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}, \ldots\}$ по-прежнему будет давать эффективно бесконечную цепочку идеалов: $J_1^{(1)} \subset J_2^{(1)} \subset J_3^{(1)} \subset \ldots \subset \subset J_k^{(1)} \subset \ldots$

Высказывание $Y_2^{(1)}$ имеет вид

$$Y_2^{(1)} = X_1^{(i_2)} \vee X_2^{(i_2)} \vee \ldots X_{m_{i_2}}^{(i_2)}.$$

Если $m_{i_2} = 1$, т. е. $Y_2^{(1)} \in J_0$. то мы просто положим $Y_2^{(2)} = Y_2^{(1)}$. Пусть $m_{i_2} > 1$, обозначим

$$Z_2' = X_1^{(i_2)}, \quad Z_2'' = X_2^{(i_2)} \vee \ldots \vee X_{m_{i_2}}^{(i_2)},$$

так что $\lfloor Y_2^{(1)} \equiv Z_2' \vee Z_2''\rfloor$ будет теоремой. Как и раньше, рассмотрим две последовательности $\{{}^2J'_k\}$ и $\{{}^2J''_k\}$, где

$${}^2J'_1 = {}^2J''_1 = (Y^{(1)}_1),$$
$${}^2J'_2 = (Y^{(1)}_1,\ Z'_2) \qquad {}^2J''_2 = (Y^{(1)}_1,\ Z''_2)$$

и при $k \geqslant 3$

$${}^2J'_k = (Y^{(1)}_1,\ Z'_2,\ Y^{(1)}_3,\ \ldots,\ Y^{(1)}_k),$$
$${}^2J''_k = (Y^{(1)}_1,\ Z''_2,\ Y^{(1)}_3,\ \ldots,\ Y^{(1)}_k)$$

(напоминаем, что все идеалы рассматриваются в $J^{\vee}_0$). Снова $J^{(1)}_k = [{}^2J'_k,\ {}^2J''_k]$ и мы, как и прежде, заключаем, что по меньшей мере одна из последовательностей $\{{}^2J'_k\}$ и $\{{}^2J''_k\}$ эффективно бесконечна. Повторив нужное число раз эту процедуру, мы выделим в итоге такое высказывание $X^{(l_2)}_{k_2}$, что последовательности $\{X^{(1)}_{k_1},\ X^{(l_2)}_{k_2},\ Y^{(1)}_3,\ Y^{(1)}_4,\ \ldots\}$ соответствует эффективно бесконечная цепочка идеалов

$$J^{(2)}_1 \subset J^{(2)}_2 \subset J^{(2)}_3 \subset \ \ldots,$$

где

$$J^{(2)}_1 = (X^{(1)}_{k_1}), \qquad J^{(2)}_2 = (X^{(1)}_{k_1},\ X^{(l_2)}_{k_2})$$

и при $k \geqslant 3$

$$J^{(2)}_k = (X^{(1)}_{k_1},\ X^{(l_2)}_{k_2},\ Y^{(1)}_3,\ Y^{(1)}_4,\ \ldots).$$

$J^{(2)}_1$ — собственное подмножество $J^{(2)}_2$, так как $Y^{(1)}_2$ выводимо из $X^{(l_2)}_{k_2}$ и, если $X^{(l_2)}_{k_2} \in J^{(2)}_1$, то $Y^{(1)}_2$ принадлежало бы $J^{(2)}_1 = J^{(1)}_1$, что противоречит нашей конструкции.

Опять, выбрасывая все $Y^{(1)}_k$, $k \geqslant 3$, содержащиеся в $J^{(2)}_2$, мы получим последовательность

$$\{Y^{(2)}_1,\ Y^{(2)}_2,\ Y^{(2)}_3,\ \ldots\},$$

где $Y^{(2)}_1 = Y^{(1)}_1 = X^{(1)}_{k_1}$, $Y^{(2)}_2 = X^{(l_2)}_{k_2}$, такую, что соответствующая цепочка идеалов $J^{(2)}_1 \subset J^{(2)}_2 \subset \ \ldots$ эффективно бесконечна и $J^{(2)}_1 \neq J^{(2)}_2$, $J^{(2)}_2 \neq J^{(2)}_3$.

Продолжая дальше тем же способом, мы получим, наконец, последовательность

$$\{Y^{(1)}_1,\ Y^{(2)}_2,\ Y^{(3)}_3,\ \ldots\},$$

в которой каждый $Y_i^{(i)}$ есть дизъюнктивный член одного из высказываний первоначальной последовательности $\{Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\}$ и $Y_i^{(i)}$, $i = 2, 3, 4, \ldots$, не выводится из $K \cup \{Y_1^{(1)}, \ldots, Y_{i-1}^{(i-1)}\}$. Отсюда следует, что цепочка идеалов $J_1^* \subset J_2^* \subset J_3^* \subset \ldots$ в J_0, где $J_k^* = (Y_1^{(1)}, \ldots, Y_k^{(k)})$ — идеал, порожденный $Y_1^{(1)}, \ldots, Y_k^{(k)}$ в J_0, является строго возрастающей. Поскольку C, по предположению, удовлетворяет условию максимальности, мы пришли к противоречию, которое и доказывает нашу теорему.

7.4. Дизъюнктивные идеалы. Область J_0 назовем *дизъюнктивной относительно* K, если для любых X_1, $X_2 \in J_0$ найдется высказывание $X \in J_0$ такое, что $[X_1 \vee \vee X_2] \equiv X$ выводимо из K. Например, для любого J_0 область $J_0^{\vee}$ дизъюнктивна.

Излагаемая ниже теория идеалов в дизъюнктивных областях носит чрезвычайно прозрачный характер. Рассматриваемые идеалы будем для краткости называть *дизъюнктивными идеалами*.

Для произвольных дизъюнктивных идеалов J, J_1, J_2 имеют место следующие два закона дистрибутивности:

7.4.1. $[(J, J_1), (J, J_2)] = (J, [J_1, J_2])$,

7.4.2. $([J, J_1], [J, J_2]) = [J, (J_1, J_2)]$.

Доказательство 7.4.1. Пусть X — любой элемент идеала, стоящего в левой части 7.4.1. X выводим одновременно из множеств $K \cup J \cup J_1$ и $K \cup J \cup J_2$. Это означает существование таких элементов $Y_1, \ldots, Y_l \in J_1$ и $Z_1, \ldots$ $\ldots, Z_m \in J_2$, что $K \cup J \vdash Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_l \supset X$ и $K \cup J \vdash Z_1 \wedge \ldots$ $\ldots \wedge Z_m \supset X$. В силу обычных правил исчисления высказываний высказывание

$$[Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_l] \vee [Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_m] \supset X$$

и тем самым высказывание

7.4.3. $[Y_1 \vee Z_1] \wedge [Y_1 \vee Z_2] \wedge \ldots \wedge [Y_i \vee Z_k] \wedge \ldots$
$\ldots \wedge [Y_l \vee Z_m] \supset X$

выводимы из $K \cup J$. Ввиду дизъюнктивности J_0 относительно K существует высказывание $X_{ik} \in J_0$ такое, что $K \vdash X_{ik} = [Y_i \vee Z_k]$. Однако все высказывания $Y_i \vee Z_k$ выводимы как из J_1, так и из J_2. Следовательно, X_{ik} выводимо из $K \cup J_1$ и принадлежит J_1; аналогично, X_{ik} выводимо из $K \cup J_2$ и принадлежит J_2. Таким образом, $X_{ik} \in \in [J_1, J_2]$ и ввиду 7.4.3 X выводимо из $K \cup J \cup [J_1, J_2]$, т. е. X принадлежит идеалу в правой части 7.4.1.

Обратно, допустим, что $X \in (J, [J_1, J_2])$. Тогда X выводимо из $K \cup J \cup [J_1, J_2]$ и потому тем более выводимо из $K \cup J \cup J_1$. Отсюда видно, что $X \in (J, J_1)$. По аналогичным соображениям $X \in (J, J_2)$ и, следовательно, $X \in [(J, J_1), (J, J_2)]$.

Доказательство 7.4.2. Допустим, что $X \in [J, (J_1, J_2)]$. Тогда $X \in J$ и $K \cup J_1 \cup J_2 \vdash X$. Найдутся такие $Y_1, \ldots, Y_l \in J_1$ и $Z_1, \ldots, Z_m \in J_2$, что высказывание

$$Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_l \wedge Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_m \supset X$$

и, следовательно, высказывание

7.4.4. $$[X \vee Y_1] \wedge \ldots \wedge [X \vee Y_l] \wedge [X \vee Z_1] \wedge \ldots \\ \ldots \wedge [X \vee Z_m] \supset X$$

выводимы из K. Поскольку J_0 дизъюнктивна, существуют высказывания $Y_1', \ldots, Y_l', Z_1', \ldots, Z_m' \in J_0$ такие, что все высказывания $Y_i' \equiv [X \vee Y_i]$ и $Z_i' = [X \vee Z_i]$ выводимы из K. Следовательно, $Y_i' \in [J, J_1]$, $i = 1, \ldots, l$, $Z_i' \in [J, J_2]$, $i = 1, \ldots, m$, и потому на основании 7.4.4 $X \in ([J, J_1], [J, J_2])$.

Обозначим левую часть 7.4.2 через J'. Поскольку $[J, J_1] \subset J$ и $[J, J_2] \subset J$, то $J' \subset J$. Кроме того, $J' \subset (J_1, J_2)$, так как $[J, J_1] \subset J_1$ и $[J, J_2] \subset J_2$. Таким образом, $J' \subset [J, (J_1, J_2)]$ и наше утверждение доказано.

Всюду на протяжении оставшейся части раздела мы будем предполагать (если только это не приводит к явной бессмыслице), что все рассматриваемые идеалы дизъюнктивны.

7.4.5. Теорема. *Пусть B_1 и B_2 — базисы двух идеалов J_1 и J_2 соответственно. Если для любых $Y_i \in B_1$ и $Z_k \in B_2$ определено высказывание $X_{ik} \in J_0$ такое, что*

$[Y_i \vee Z_k] \equiv X_{ik}$ выводимо из K), то множество $\{X_{ik}\} = B$ является базисом $[J_1, J_2]$.*

Доказательство. Поскольку $[Y_i \supset X_{ik}]$ и $[Z_k \supset X_{ik}]$ выводимы из K, имеет место включение $B \subset [J_1, J_2]$. Пусть X — любой элемент $[J_1, J_2]$. Тогда существуют такие высказывания $Y_1, \ldots, Y_l \in B_1$ и $Z_1, \ldots, Z_m \in B_2$, что высказывания

$$Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_l \supset X$$

и

$$Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_m \supset X$$

и, следовательно,

$$[Y_1 \vee Z_1] \wedge [Y_1 \vee Z_2] \wedge \ldots \wedge [Y_i \vee Z_k] \wedge \ldots \wedge [Y_l \vee Z_m] \supset X$$

выводимы из K. Таким образом,

$$K \vdash X_{11} \wedge X_{12} \wedge \ldots \wedge X_{ik} \wedge \ldots \wedge X_{lm} \supset X,$$

а это как раз и означает, что B — базис $[J_1, J_2]$.

7.4.6. Теорема. *Для неприводимости идеала J необходимо и достаточно, чтобы для любых X, X_1, $X_2 \in J_0$, таких, что $K \vdash X_1 \vee X_2 \equiv X$, $X \in J$ влекло по крайней мере одно из двух включений $X_1 \in J$ или $X_2 \in J$.*

Доказательство. Для доказательства необходимости предположим существование таких X, X_1, $X_2 \in J_0$, что $K \vdash X_1 \vee X_2 \equiv X$ и $X \in J$, но ни X_1, ни X_2 не принадлежат J. Мы должны показать, что J приводим. Положим $J_1 \equiv (J, (X_1))$, $J_2 \equiv (J, (X_2))$. Тогда $J_1 \neq J$ и $J_2 = J$. С другой стороны, на основании 7.4.1 и 7.4.5

$$[J_1, J_2] = [(J, (X_1)), (J, (X_2))] = (J, [(X_1), (X_2)]) = \\ = (J, (X)) = J,$$

откуда видно, что J и в самом деле приводим.

Для доказательства достаточности допустим, что J приводим, т. е. $J = [J_1, J_2]$, где $J_1 \neq J$ и $J_2 \neq J$. Пусть $X_1 \in J_1 - J$, $X_2 \in J_2 - J$. Так как J_0 дизъюнктивна относительно K, то существует $X \in J_0$ такое, что $K \vdash X \equiv X_1 \vee X_2$. Поскольку $X_1 \supset X$ и $X_2 \supset X$ оба выводимы из K, то $X \in J_1$

*) Вообще говоря, это условие излишнее, так как, по словам автора, все идеалы (а следовательно, и область J_0) считаются дизъюнктивными. Однако теорема, как легко видеть, верна и в том случае, если не предполагать область дизъюнктивной. (*Прим. перев.*)

и $X \in J_2$, а потому $X \in J$. Таким образом, условие теоремы не выполняется для приводимого J.

7.4.7. Теорема. *Пусть J — идеал в J_0 и $Y \in J_0 - J$. Тогда существует идеал J', делящий J и не содержащий Y, который является максимальным среди всех идеалов, обладающих этим же свойством (т. е. содержащих J и не содержащих Y).*

Вообще говоря, под фразой «J максимален среди всех идеалов, обладающих некоторым свойством» мы понимаем лишь то, что ни для одного идеала с этим свойством J не является собственным подмножеством. Аналогично, J минимален относительно данного свойства, если J не содержит ни одного идеала с этим свойством в качестве собственного подмножества.

Доказательство. Пусть T — множество всех идеалов, которые включают J и не включают Y. T не пусто, так как $J \in T$. T частично упорядочено по включению. Пусть $\{J_\nu\}$ — линейно упорядоченное подмножество T (т. е. для всех J_ν и J_μ из этого множества либо $J_\nu \subset J_\mu$, либо $J_\mu \subset J_\nu$). Тогда $\{J_\nu\}$ имеет в T верхнюю грань, так как объединение $\bigcup\limits_\nu \{J_\nu\}$ также является идеалом, содержащим J и не содержащим Y. Наше утверждение является теперь непосредственным следствием леммы Цорна.

7.4.8. Теорема. *Пусть J — идеал в J_0 и $Y \in J_0 - J$. Если J — максимальный среди всех идеалов, включающих J и не включающих Y, то J неприводим.*

Доказательство. Допустим, что J приводим. Согласно 7.4.6 существуют высказывания X, X_1, $X_2 \in J_0$ такие, что $K \vdash X \equiv X_1 \vee X_2$, $X \in J$, но $X_1 \notin J$ и $X_2 \notin J$. В силу максимального свойства J идеал $(J, (X_1))$ содержит Y, а потому $K \cup J \vdash X_1 \supset Y$ и аналогично $K \cup J \vdash X_2 \supset Y$. Следовательно, $K \cup J \vdash X_1 \vee X_2 \supset Y$ и $K \cup J \vdash X \supset Y$. Но $X \in J$, и поэтому $K \cup J \vdash Y$, т. е. $Y \in J$, вопреки предположению.

Комбинируя 7.4.7 и 7.4.8, получаем теорему:

7.4.9. Теорема. *Пусть J — идеал и $Y \in J_0 - J$. Тогда существует неприводимый идеал, содержащий J и не содержащий Y.*

Действительно, идеал J', существующий по теореме 7.4.7, является максимальным в множестве всех идеалов, которым принадлежит J и не принадлежит Y. Следовательно, согласно 7.4.8 J' неприводим.

7.4.10. Теорема. *Любой идеал является пересечением всех содержащих его неприводимых идеалов.*

Это очевидно для $J=J_0$ и легко следует из 7.4.8 для $J \neq J_0$.

7.4.11. Теорема. *Пусть J — любой идеал, а J' — неприводимый идеал, содержащий его. Тогда существует идеал $J'' \subset J$, минимальный среди всех неприводимых идеалов, принадлежащих J' и содержащих J.*

Доказательство. Пусть T — множество всех неприводимых идеалов, которые принадлежат J' и содержат J. T не пусто, так как $J' \in T$. Кроме того, T частично упорядочено по включению. Пусть $\{J_\nu\}$ — линейно упорядоченное подмножество T. Утверждается, что $J^* = \bigcap_\nu \{J_\nu\}$ принадлежит T. В самом деле, J^* — идеал, содержащий J и принадлежащий J'. Предположим, что J^* приводим. Тогда найдутся высказывания X, X_1, $X_2 \in J_0$ такие, что $K \vdash X \equiv X_1 \vee X_2$, $X \in J^*$, но $X_1 \notin J^*$ и $X_2 \notin J^*$. Иными словами, $X \in J_\nu$ для всех ν, но существуют μ и ρ, для которых $X_1 \notin J_\mu$ и $X_2 \notin J_\rho$. Пусть, например, $J_\mu \subset J_\rho$. Тогда $X_1 \notin J_\mu$ и $X_2 \notin J_\mu$, вопреки тому, что J_μ неприводим и $X \in J_\mu$. Таким образом, J^* является неприводимым и 7.4.11 вытекает теперь из леммы Цорна.

7.4.12. Теорема. *Любой идеал J является пересечением минимальных неприводимых идеалов, содержащих J.*

Доказательство. Согласно 7.4.9 и 7.4.11 множество минимальных неприводимых идеалов, содержащих J, не пусто. Более того, если $Y \in J_0 - J$, то в силу 7.4.9 существует неприводимый идеал J' такой, что $Y \notin J'$ и $J \subset J'$. На основании 7.4.11 существует неприводимый идеал J'', для которого $Y \notin J''$, $J \subset J'' \subset J'$ и который минимален в смысле 7.4.11 (и, следовательно, 7.4.12). Приведенное рассуждение дает доказательство 7.4.12 для случая $J \neq J_0$. Если $J=J_0$, то теорема становится тривиальной.

Предположим теперь, что область J_0, помимо дизъюнктивности, обладает свойством максимальности. В этом случае имеет место

7.4.13. Теорема. *Любой идеал представим, и притом единственным способом (с точностью до порядка), в виде несократимого пересечения конечного числа неприводимых идеалов.*

Пересечение идеалов $J=[J_1, \ldots, J_k]$ мы называем несократимым, если $[J_1, \ldots, J_{i-1}, J_{i+1}, \ldots, J_k] \neq J$ для любого J_i.

Доказательство. Допустим, что

$$J=[J_1, \ldots, J_k]=[J'_1, \ldots, J'_m],$$

где оба представления несократимы и все идеалы J_i, J'_i неприводимы. Рассмотрим идеалы (J_i, J'_1) и $(J_i, [J'_2, \ldots, J'_m])$, $i=1, 2, \ldots, k$. Согласно 7.4.1

$$(J_i, J'_1) \cdot (J_i, [J'_2, J'_3, \ldots, J'_m])] =$$
$$=(J_i, [J'_1, [J'_2, \ldots, J'_m]])=(J_i, [J'_1, \ldots, J'_m])=(J_i, J)=J_i.$$

Однако J_i неприводим, и поэтому либо $(J_i, J'_1)=J_i$ и, следовательно, $J_i \supset J'_1$, либо $(J_i, [J'_2, \ldots, J'_m])=J_i$ и, следовательно, $J_i \supset [J'_2, \ldots, J'_m]$. Если имеет место второй случай, то мы рассмотрим выражение

$$[(J_i, J'_2), (J_i, [J'_3, \ldots, J'_m])] =$$
$$=(J_i, [J'_2, [J'_3, \ldots, J'_m]])=(J_i, [J'_2, \ldots, J'_m])=J_i.$$

Опять ввиду неприводимости J_i мы получаем, что $J_i \supset J'_2$ или $J_i \supset [J'_3, \ldots, J'_m]$. Продолжив наше рассуждение, мы увидим, в конце концов, что J_i делит по меньшей мере один J'_l, $1 \leqslant l \leqslant m$. Аналогично доказывается, что любой J'_l делит по крайней мере один J_i. Таким образом, для любого J_i найдутся такие J'_l и $J_{i'}$, что $J_{i'} \subset J'_l \subset J_i$. Поскольку представление несократимо, $J_{i'} \not\subset J_i$ при $i' \neq i$ (так как иначе J_i можно было бы опустить в пересечении $J=[J_1, \ldots, J_m]$). Следовательно, $i'=i$ и $J_i=J'_l$. Отсюда видно, что все идеалы, фигурирующие в первом представлении, появляются во втором, и наоборот. Иными словами, оба представления (с точностью до порядка) совпадают.

Для того чтобы установить существование хотя бы одного представления подобного рода, рассмотрим любое представление J в виде пересечения конечного числа идеалов: $J=[J_1, \ldots, J_n]$. Такое представление по теореме 7.2.1 всегда существует. Из всех последовательностей $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leqslant n$, $j \leqslant n$, для которых пересечение $[J_{i_1}, J_{i_2}, \ldots, J_{i_j}]$ все еще равно J, выберем последовательность наименьшей длины. Легко видеть, что соответствующее этой последовательности представление J будет несократимым.

Заметим, что неприводимые идеалы J_i, участвующие в несократимом представлении $J=[J_1, \ldots, J_n]$, являются минимальными в множестве всех неприводимых идеалов, содержащих J. Действительно, $J_i \supset J$ и, следовательно, по теореме 7.4.11 найдется неприводимый идеал J'_i, для которого $J \subset J'_i \subset J_i$ и который в этом смысле минимален. Тогда

$$J=[J, J'_i]=[J_1, \ldots, J_i, \ldots, J_n, J'_i]= \\ =[J_1, \ldots, J_{i-1}, J_i, J_{i+1}, \ldots, J_n].$$

Нетрудно видеть, что последнее представление J должно быть несократимым, а поэтому $J'_i=J_i$ и J_i сам является минимальным.

Пусть теперь J_0 — любая область (не обязательно дизъюнктивная), а $J_0^{\vee}$ — область высказываний, составленная из всевозможных дизъюнкций элементов J_0. $J_0^{\vee}$, очевидно, дизъюнктивна.

7.4.14. Теорема. *Для любого неприводимого идеала $J^{\vee}$ в $J_0^{\vee}$ $J^{\vee}$ является замыканием идеала $J=J_0 \cap \cap J^{\vee}$ в $J_0^{\vee}$.*

Доказательство. Пусть $X=[Y_1 \vee \ldots \vee Y_n]$ — произвольный элемент из $J^{\vee}$, где $Y_i \in J_0$, $i=1, \ldots, n$. Применяя (возможно, несколько раз) теорему 7.4.6, мы получим, что по меньшей мере один Y_i принадлежит $J^{\vee}$, а тем самым $Y_i \in J$. Поскольку $[Y_i \supset X]$ — теорема, X лежит в замыкании J в $J_0^\vee$. Таким образом, $J^\vee$ входит в замыкание J в $J_0^\vee$. Обратно, любое высказывание, выводимое из $K \cup J$, выводимо также из $K \cup J^\vee$, а это как раз и означает, что $J^\vee$ содержится в замыкании J в $J_0^\vee$.

Итак, каждый неприводимый идеал в $J_0^\vee$ есть замыкание идеала в J_0.

7.4.15. Теорема. *Допустим, что J_0 удовлетворяет условию максимальности. Пусть J — идеал в J_0, а $J^\vee$ — замыкание J в $J_0^\vee$. Неприводимость J влечет тогда неприводимость $J^\vee$.*

Доказательство. Если $J^\vee$ приводим, то его можно представить в виде пересечения конечного числа неприводимых идеалов в J_0: $J^\vee = [J_1^\vee, \ldots, J_n^\vee]$. Каждый идеал $J_i^\vee$, как неприводимый, является замыканием идеала $J_i = J_0 \cap J_i^\vee$ в $J_0^\vee$. Если хотя бы для одного i $J_i = J$, то $J_i^\vee = J^\vee$ и $J^\vee$ неприводим. Пусть $J_i \neq J$, $i = 1, \ldots, n$, $n > 1$. Тогда

$$J_0 \cap J^\vee = J_0 \cap [J_1^\vee, \ldots, J_n^\vee] = [J_0 \cap J_1^\vee, \ldots, J_0 \cap J_n^\vee] = [J_1, \ldots, J_n].$$

Но $J_0 \cap J^\vee = J$, так как любое высказывание в J_0, выводимое из $K \cup J^\vee$, выводимо также из $K \cup J$. Следовательно, $J = [J_1, \ldots, J_n]$, так что J оказывается приводимым идеалом, вопреки нашему предположению.

7.5. Идеалы и гомоморфизмы. Пусть H — непротиворечивое множество высказываний, содержащее отношение равенства $E(x, y)$, и пусть M — модель H. Обозначим через D^+ положительную диаграмму M. Для простоты будем полагать, что отношения и индивиды в D^+ и H (постольку, поскольку они встречаются в H) обозначают сами себя в структуре M. Пусть $K = H \cup D^+$ и J_0 — множество всех атомарных высказываний, образованных из отношений и индивидов M. Мы намерены установить связь между гомоморфными образами M, которые являются моделями H, и некоторыми идеалами в J_0 над K.

Итак, пусть M' есть модель H и гомоморфный образ M (см. п. 2.1), так что отношения и индивиды, встречающиеся в H, обозначают сами себя также и в M'. Пусть J — идеал в J_0, порожденный высказываниями $E(a, b) \in J_0$, такими, что гомоморфизм M на M' переводит a и b в равные элементы. Мы утверждаем, что верно и обратное: высказывание вида $E(a, b)$ принадлежит J *только* в том случае, если a и b соответствуют равным в M' индивидам.

Для того чтобы убедиться в этом, построим структуру M^* с такими же, как у M, индивидами и отношениями, полагая, по определению, любое отношение истинным в M, если оно истинно для соответствующих индивидов в M'. Учитывая тот факт, что M' — гомоморфный образ M, легко усмотреть, что всякий раз, когда отношение истинно в M, оно истинно также и в M^* для тех же самых индивидов. Таким образом, M^* гомоморфна M' и, поскольку M' — модель H, а M — модель D^+, то M^* — модель H и D^+. Итак, M^* является моделью K. Пусть теперь $E(c, d)$ принадлежит J. Для доказательства нашего утверждения о том, что c и d соответствуют одинаковые индивиды в M', достаточно лишь показать, что $E(c, d)$ истинно в M^*. Однако M^* — модель K и модель всех высказываний $E(a, b)$, образующих базис J. Истинность $E(c, d)$ в M^* становится теперь очевидной, если учесть, что $K \cup J \vdash E(c, d)$.

Таким образом, каждому гомоморфизму M сопоставляется в указанном выше смысле идеал J в J_0. Легко видеть, что если два гомоморфных образа M приводят к одному и тому же идеалу в J_0, то соответствующие нормальные структуры изоморфны.

В частности, если $H = K_R$, где K_R — множество аксиом кольца (см. п. 2.2), то мы уже можем не только найти идеал J по любому гомоморфизму кольца M, но и, обратно, для всякого идеала J в J_0 указать структуру M', которая является гомоморфным образом M и которой (указанным выше образом) соответствует идеал J. Это вытекает из взаимно однозначного соответствия, которое будет установлено между идеалами J в J_0 и «обычными» двусторонними идеалами в M. Последние, в отличие от наших метаматематических идеалов, мы будем для краткости называть *арифметическими* идеалами.

Данному идеалу J в J_0 сопоставим множество J_* всех индивидов $a \in M$, таких, что $E(a, 0) \in J$, где 0 — нейтральный по сложению элемент кольца M. (Если структура M не нормальна, то в M может быть и не один нейтральный элемент; однако все такие элементы равны между собой, так что произвол в выборе 0 не играет роли.)

J_* — арифметический идеал в M. Действительно, пусть $E(a, 0) \in J$, $E(b, 0) \in J$ и $S(a, b, c)$ истинно в M (а следовательно, $S(a, b, c) \in D^+ \subset K$). Тогда $E(c, 0) \in J$, поскольку $K_R \cup \{E(a, 0),\ E(b, 0),\ S(a, b, c)\} \vdash E(c, 0)$ и, тем более, $K \cup J \vdash E(c, 0)$, где $K = K_R \cup D^+$. Аналогично, если $E(a, 0)$, $E(c, 0) \in J$ и $S(a, b, c)$ истинно в M (т. е. $S(a, b, c) \in D^+$), то $E(b, 0) \in J$. Иными словами, мы показали, что вместе с любыми двумя элементами J_* содержит также их сумму и разность. Кроме того, если $E(h, 0) \in J$ и $P(h, a, f)$, $P(a, h, g)$ истинны в M (т. е. лежат в D^+), то $E(f, 0)$ и $E(g, 0)$ принадлежат J. Итак, вместе с любым элементом h J_* содержит все элементы ha и ah, где a — произвольный элемент M. И, наконец, J_* не пусто, так как $E(0, 0) \in J$ и $0 \in J$. Таким образом, J_* в самом деле является арифметическим идеалом в M.

Обратно, пусть J_* — произвольный арифметический идеал в M и M' — фактор-кольцо M/J_*. Пусть J — метаматематический идеал в J_0, соответствующий в разобранном выше смысле кольцу M'. Тогда высказывание вида $E(a, 0)$ принадлежит J в том и только в том случае, когда a содержится в J_*, т. е. соответствие $J \longleftrightarrow J_*$ между J и J_* взаимно однозначно. Более того, если $J^{(1)} \longleftrightarrow J_*^{(1)}$, $J^{(2)} \longleftrightarrow J_*^{(2)}$ и $J^{(1)} \subset J^{(2)}$, то $J_*^{(1)} \subset J_*^{(2)}$, и обратно.

Пусть $J \longleftrightarrow J_*$. Множество $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ является базисом J_* тогда и только тогда, когда высказывания $E(a_1, 0)$, $E(a_2, 0)$, $\ldots$, $E(a_n, 0)$, $\ldots$ образуют базис J. Действительно, если J'_* — арифметический идеал, порожденный одним элементом a_1, $J'_* = (a_1)$, то соответствующий метаматематический идеал J' содержит высказывание $E(a_1, 0)$. Пусть J'' — метаматематический идеал, порожденный $E(a_1, 0)$. Тогда $J'' \subset J'$, и потому соответствующий арифметический идеал J''_* является подмножеством J'_*. Но $a_1 \in J''_*$, а следовательно, $J''_* = J'_*$ и $J'' = J'$. Обратно, если метаматематический идеал порожден $E(a_1, 0)$, то соответствующий арифметический идеал порожден a_1. Наконец, если множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ образует базис J_*, то J_* является пересечением всех арифметических идеалов, содержащих идеалы $(a_1), (a_2), \ldots, (a_n), \ldots$ Отсюда вытекает, что идеал J_*, соответствующий J, представляет собой пересечение всех идеалов в J_0, содержащих идеалы $(E(a_1, 0))$, $(E(a_2, 0)), \ldots, (E(a_n, 0)), \ldots$ Таким образом, идеал J, как и утверждалось, порождается множеством $\{E(a_1, 0), E(a_2, 0), \ldots, E(a_n, 0), \ldots\}$. В этом смысле настоящее обобщение понятия идеала сохраняет идею базиса. Аналогично, условию максимальности в J_0 соответствует условие максимальности в множестве арифметических идеалов; неприводимым идеалам соответствуют неприводимые арифметические идеалы, и представления в виде пересечения таких идеалов тоже соответствуют друг другу. Все наши выводы применимы также и в случае коммутативного кольца, т. е. для $H = K_{CR}$.

Пусть $H = K_{CR}$. Займемся изучением идеалов в дизъюнктивной области $J_0^\vee$, получаемой из области J_0 описанным ранее способом. Таким образом, элементами $J_0^\vee$ служат высказывания

$$X = X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, представляют собой высказывания вида $E(a, b)$, $S(a, b, c)$ или $P(a, b, c)$. Не стесняя себя существенно, положим для простоты структуру M нормальной. Мы можем теперь обозначить посредством $a+b$, $a-b$, ab индивиды, равные соответственно сумме, разности и произведению любых двух элементов a и b из M.

Наша ближайшая цель — охарактеризовать множества дизъюнкций, образующих идеалы $J^\vee$ в $J_0^\vee$, чисто арифметическими условиями. Начать с того, что высказывание $X = X_1 \vee \ldots \vee X_n$, в котором X_k имеет вид $E(a, b)$, принадлежит дизъюнктивному идеалу $J^\vee$ тогда и только тогда, когда высказывание X', полученное из X

заменой $E(a, b)$ на $E(a-b, 0)$, также принадлежит $J^{\vee}$. Аналогично, если X_k — вида $S(a, b, c)$ (соответственно $P(a, b, c)$), то X содержится в $J^{\vee}$ тогда и только тогда, когда высказывание X', полученное из X заменой X_k на $E(a+b-c, 0)$ (соответственно на $E(ab-c, 0)$), также содержится в $J^{\vee}$. В соответствии с этим мы можем ограничиться рассмотрением высказываний вида

7.5.1. $X=E(a_1, 0)\vee E(a_2, 0)\vee \ldots \vee E(a_n, 0)$

(скобки, как обычно, игнорируются). Таким образом, если обозначить через G_0 множество высказываний вида 7.5.1, то имеется взаимно однозначное соответствие между идеалами G в G_0 над K и их замыканиями $J^{\vee}$ в $J_0^{\vee}$ над K.

7.5.2. Теорема. *Для того чтобы непустое множество G высказываний 7.5.1 составляло идеал в G_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

7.5.3. *Если в некотором высказывании из G изменить любым способом порядок атомарных высказываний, то полученное высказывание будет снова принадлежать G;*

7.5.4. *Если $X\in G$ или $Y\in G$, то $X\vee Y\in G$;*

7.5.5. *Если $X\in G$ содержит некоторое атомарное высказывание более чем один раз, то, вычеркивая все такие высказывания, кроме одного, мы не выйдем за пределы G* (например, если $E(a, 0)\vee E(b, 0)\vee E(a, 0)\in G$, то и $E(a, 0)\vee E(b, 0)\in G$);

7.5.6. *Наконец, если*

$$X=E(a_1, 0)\vee E(a_2, 0)\vee \ldots \vee E(a_n, 0)\in G, \qquad n\geqslant 1,$$

и

$$Y=E(b_1, 0)\vee E(b_2, 0)\vee \ldots \vee E(b_m, 0)\in G, \qquad m\geqslant 1,$$

то $Z\in G$, где Z есть дизъюнкция (в любом порядке) mn атомарных высказываний

$$E(c_{ik}a_i \pm p_{ik}a_i + d_{ik}b_k \pm q_{ik}b_k, 0),$$
$$i=1, 2, \ldots, n, \quad k=1, 2, \ldots, n.$$

В этом выражении c_{ik} и d_{ik} — произвольные элементы M, а p_{ik} и q_{ik} — целые неотрицательные числа (так что $0 \cdot a = 0$, $1 \cdot a = a$, $2 \cdot a = a + a$, и т. д.).

В частности, согласно 7.5.5 и 7.5.6 $E(0, 0) \in G$. Другими частными случаями 7.5.6 являются следующие утверждения:

7.5.7. Если $E(a_1, 0) \vee E(a_2, 0) \vee \ldots \vee E(a_n, 0) \in G$,

то

$$E(c_1 a_1,\ 0) \vee E(c_2 a_2,\ 0) \vee \ldots \vee E(c_n a_n,\ 0) \in G,$$

где c_k — произвольный элемент M или целое неотрицательное число, которое можно рассматривать как оператор.

7.5.8. Если $E(a_1, 0) \vee E(a_2, 0) \vee \ldots \vee E(a_n, 0) \in G$, то высказывания $E(\pm a_1, 0) \vee E(\pm a_2,\ 0) \vee \ldots \vee E(\pm a_n, 0) \in G$ при любом распределении $+$ и $-$.

Доказательство 7.5.2. Условия 7.5.3—7.5.6 необходимы. Действительно, 7.5.3 очевидно, а 7.5.4 и 7.5.5 немедленно следуют из того факта, что $X \supset X \vee Y$ и $X \vee \vee X \supset X$ — теоремы узкого исчисления предикатов при произвольных X и Y. Для доказательства необходимости 7.5.6 мы должны установить, что Z можно вывести из $K_{CR} \cup D^+ \cup \{X\} \cup \{Y\}$, где X и Y таковы, как указано в 7.5.6. Другими словами, нам нужно показать, что если X и Y истинны в коммутативном кольце M', которое является моделью D^+, то Z также истинно в M'. Истинность X и Y в M' означает, что при некоторых i и k $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant \leqslant k \leqslant n)$ $E(a_i, 0)$ и $E(b_k, 0)$ истинны в M'. Но тогда высказывание

$$E(c_{ik} a_i \pm p_{ik} a_i + d_{ik} b_k \pm q_{ik} b_k, 0)$$

истинно в M', а следовательно, истинно и Z.

Докажем достаточность условий 7.5.3—7.5.6. Допустим, что непустое множество $G \subset G_0$ удовлетворяет этим условиям. Мы должны установить, что любое высказывание $X \in G_0$, выводимое из $K_{CR} \cup D^+ \cup G$, содержится в G. Пусть $X = E(b_1, 0) \vee \ldots \vee E(b_n, 0)$. По предположению, существуют $Y_1, \ldots, Y_j \in G$ такие, что высказывание

$$Z = Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_j \supset X$$

выводимо из $K_{CR} \cup D^+ = K$. Пусть $Y_i = E(a_1^{(i)}, 0) \vee \vee E(a_2^{(i)}, 0) \vee \ldots \vee E(a_m^{(i)}, 0)$, $i = 1, \ldots, j$. Отсюда видно, что $K \vdash Z$ в том и только в том случае, когда высказывание

$$[E(a_{k_1}^{(1)}, 0) \wedge E(a_{k_2}^{(2)}, 0) \wedge \ldots] \vee \\ \vee [E(a_{l_1}^{(1)}, 0) \wedge E(a_{l_2}^{(2)}, 0) \wedge \ldots] \vee \ldots \supset X$$

выводимо из K, где антецедент импликации содержит все возможные комбинации индексов. В этом случае высказывание

7.5.9. $$E(a_{k_1}^{(1)}, 0) \wedge E(a_{k_2}^{(2)}, 0) \wedge \ldots \supset X$$

также выводимо из K при любой комбинации индексов $k_1, k_2, \ldots$ Отсюда видно, что для фиксированного набора $k_1, k_2, \ldots$ X принадлежит идеалу G^* в G_0, порожденному множеством $\{E(a_{k_1}^{(1)}, 0), E(a_{k_2}^{(2)}, 0), \ldots\}$. Но тогда тем более X принадлежит J^* — замыканию G^* в J_0. С другой стороны, пусть J — идеал, порожденный множеством $\{E(a_{k_1}^{(1)}, 0), E(a_{k_2}^{(2)}, 0) \ldots\}$ в J_0. Как указывалось в начале этого раздела, с J ассоциируется некоторый гомоморфизм M. В частности, можно выбрать такой гомоморфный образ M^* структуры M, соответствующий J, что элементы M^* совпадают с элементами M и M^* — модель $D^+ \cup J$. Отсюда вытекает, что $X = E(b_1, 0) \vee \vee E(b_2, 0) \vee \ldots$ истинно в M^*, т. е. $E(b_i, 0)$ истинно в M^* при некотором i. Это означает, что b_i принадлежит арифметическому идеалу, порожденному $a_{k_1}^{(1)}, a_{k_2}^{(2)}, \ldots$; иными словами, b_i есть элемент вида $\sum_l (c_l a_{k_l}^{(l)} \pm p_l a_{k_l}^{(l)})$, где c_i — элементы M и p_i — целые неотрицательные числа. Таким образом, X — это дизъюнкция, членами которой являются высказывания

7.5.10. $$E\left(\sum_l (c_l a_{k_l}^{(l)} \pm p_l a_{k_l}^{(l)}), 0\right),$$

где $a_{k_1}^{(1)}, a_{k_2}^{(2)}, \ldots$ пробегают все возможные сочетания, которые могут встретиться в 7.5.9, и, возможно, некоторые высказывания $E(b_h, 0)$, не представимые в виде

7.5.10. Вполне возможно также, что 7.5.10 отвечает одному и тому же $E(b_i, 0)$ при различных наборах $a_{k_1}^{(1)}$, $a_{k_2}^{(2)}$, ... и $a_{l_1}^{(1)}$, $a_{l_2}^{(2)}$, ... Обозначим через X' дизъюнкцию всех высказываний 7.5.10, соответствующих различным комбинациям $a_{k_1}^{(1)}$, $a_{k_2}^{(2)}$, ... Используя (может быть, несколько раз) условие 7.5.6, нетрудно усмотреть, что $X' \in G$. Остается заметить, что X' получается из X вычеркиванием некоторых членов и ввиду 7.5.4 $X \in G$, что и требовалось доказать.

Для того чтобы теорема 7.5.2 осталась справедливой в случае произвольного (некоммутативного) кольца $H=K_R$, необходимо слегка модифицировать условие 7.5.6, заменив его следующим:

7.5.11. *Если*

$$E(a_1, 0) \vee E(a_2, 0) \vee \ldots \vee E(a_n, 0) \in G$$

и

$$E(b_1, 0) \vee E(b_2, 0) \vee \ldots \vee E(b_m, 0) \in G,$$

то $Z \in G$, *где* Z — *дизъюнкция* nm *высказываний*

$$E\left(c_{ik}a_i + a_i c'_{ik} \pm p_{ik}a_i + d_{ik}b_i + b_i d'_{ik} \pm q_{ik}b_i, 0\right),$$

так что c_{ik}, c'_{ik}, d_{ik}, d'_{ik} — *любые элементы* M, *а* p^{ik} *и* q_{ik}, *как и раньше, — целые неотрицательные числа.*

Понятие дизъюнктивного идеала можно ввести, совершено не касаясь метаматематики. Надо лишь каждое высказывание вида $E(a_1, 0) \vee E(a_2, 0) \vee \ldots \vee E(a_k, 0)$ заменить конечным *множеством* $(a_1, \ldots, a_k)$. Таким образом, дизъюнктивные идеалы превращаются в множество конечных множеств элементов данного кольца, таких, что выполняются условия 7.5.4—7.5.6 в случае коммутативного кольца или 7.5.4, 7.5.5, 7.5.11 в случае произвольного кольца.

7.6. Задачи

7.6.1. Связать нормальные делители данной группы с некоторыми метаматематическими идеалами.

7.6.2. Установить связь между левыми идеалами данного кольца и некоторыми метаматематическими идеалами. (Указание. Использовать модифицированное множество аксиом подстановочности относительно умножения, требуя лишь

$$\forall x \forall y \forall v \forall w\, [E(y, v) \wedge E(z, w) \supset [P(x, y, z) \equiv P(x, v, w)]].)$$

7.6.3. Пусть $K = K_{CF} \cup D$, где K_{CF}, как обычно, — множество аксиом поля, а D — диаграмма модели M множества K_{CF}. Для каждого многочлена $q(x)$ с коэффициентами в M построить высказывание X_q, утверждающее, что $q(x)$ обладает хотя бы одним корнем. Пусть J_0 — множество всех таких высказываний. Рассмотреть теорию метаматематических идеалов в J_0 над K.

7.6.4. Какая из теорем 7.4 (i) остается справедливой; (ii) совсем неверна; (iii) верна в измененной форме, если отбросить предположение о дизъюнктивности J_0 относительно K.

Библиографическая справка. Глава VII целиком взята с некоторыми упрощениями из работ А. Робинсона [1] и [3]. Теория систем, упомянутая в начале п. 7.2, изложена в работе Тарского [1].

МЕТАМАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОГООБРАЗИЙ

8.1. Многообразия структур. В том частном случае, когда K пусто, а J_0 содержит все высказывания языка L, идеалы в J_0 над K совпадают с T-системами (см. п. 1.6). При этом область J_0, очевидно, дизъюнктивна. Мы будем строить теорию множеств моделей, соответствующих идеалам J_0, в общем случае, когда J_0 дизъюнктивна над данным множеством K.

Предположим, что помимо K и J_0 задано множество V_0 моделей множества K, обладающее следующими свойствами. Все высказавания из J_0 определены в $M \in V_0$; для любого множества H, элементами которого являются (не обязательно все) высказывания J_0 или отрицания (уже других) высказываний J_0 и которое совместно с K (т. е. $K \cup H$ непротиворечиво), среди структур V_0 существует модель H. Такое множество V_0 будем называть *полной системой структур для* J_0 *над* K.

Пусть A — произвольное подмножество J_0. Совокупность тех структур из V_0, которые являются моделями $K \cup A$, назовем многообразием структур множества A, $V = V(A)$. То обстоятельство, что $V(A)$ — многообразие A, мы будем в соответствии с обозначениями п. 1.6 записывать также в виде $A \to V(A)$. Если $J = (A)$ — идеал, порожденный A в J, то, как легко видеть, $V(J) = V(A)$. В соответствии с этим, изучая класс всех многообразий структур, мы можем предполагать, что многообразия определяются идеалами в J_0.

8.1.1. Теорема. *Если идеал J_1 принадлежит идеалу J_2, то $V(J_1) \supset V(J_2)$.*

Доказательство. Очевидно.

8.1.2. Теорема. *Если J_1 и J_2 — два неравных идеала, то $V(J_1) \neq V(J_2)$.*

Доказательство. По предположению, один из идеалов, скажем, J_1, содержит высказывание X, которое не принадлежит J_2. Это означает, что $K \cup J_2 \cup \{\sim X\}$ непротиворечиво и, следовательно, имеет модель $M \in V_0$. Таким образом, $M \in V(J_2)$, но $M \notin V(J_1)$.

В частности, если J_2 — собственное подмножество J_1, то на основании 8.1.1 $V(J_1)$ — собственное подмножество $V(J_2)$.

Поскольку каждое многообразие есть многообразие некоторого идеала, то 8.1.2 показывает, что соответствие между идеалами и многообразиями взаимно однозначно.

8.1.3. Теорема. *Если V — многообразие идеала J в J_0, то J состоит из всех высказываний в J_0, истинных в каждой модели из V.*

Доказательство. Пусть J_1 — множество всех высказываний из J_0, истинных в каждой структуре из V. Из определения многообразия видно, что $J_1 \supset J$. Допустим, что $J_1 \neq J$, и пусть $X \in J_1 - J$. Тогда множество $K \cup J \cup \cup \{\sim X\}$ непротиворечиво, и пусть M — модель этого множества. Ясно, что $M \in V$, вопреки тому, что M удовлетворяет не всем высказываниям J_1.

Непосредственным следствием 8.1.3 является

8.1.4. Теорема. *Для любых двух идеалов J_1 и J_2 в J_0 включение $V(J_1) \supset V(J_2)$ влечет $J_1 \subset J_2$.*

8.1.5. Теорема $V((J_1, J_2)) = V(J_1) \cap V(J_2)$ *и*

$$V([J_1, J_2]) = V(J_1) \cup V(J_2)$$

для произвольных идеалов J_1, J_2 в J_0.

Доказательство. Любая модель (J_1, J_2) является моделью J_1 и J_2. Следовательно,

$$V((J_1, J_2)) \subset V(J_1) \cap V(J_2).$$

Обратно, если $M \in V(J_1) \cap V(J_2)$ (т. е. M — модель $K \cup J_1$ и $K \cup J_2$), то M удовлетворяет всем высказываниям, определенным в M и выводимым из $K \cup J_1 \cup J_2$. Следовательно, $M \in V((J_1, J_2))$ и тем самым

$$V(J_1) \cap V(J_2) \subset V((J_1, J_2)).$$

Таким образом, первое равенство 8.1.5 доказано. Для доказательства второго заметим, что $V(J_1) \subset V([J_1, J_2])$ и $V(J_2) \subset V([J_1, J_2])$, и поэтому

$$V(J_1) \cup V(J_2) \subset V([J_1, J_2]).$$

Допустим теперь, что структура $M \in V([J_1, J_2])$, но не является моделью ни J_1, ни J_2. Тогда существуют высказывания $X_1 \in J_1$ и $X_2 \in J_2$, ложные в M. Поскольку эти высказывания определены в M, M удовлетворяет $\sim X_1 \wedge \wedge \sim X_2$. В силу дизъюнктивности J_0 найдется такое высказывание $X \in J_0$, что $K \vdash X \equiv X_1 \vee X_2$. В соответствии с этим, M удовлетворяет $\sim X$. Однако $X \in [J_1, J_2]$, так как $K \vdash X_1 \supset X$ и $K \vdash X_2 \supset X$. Отсюда видно, что M не может быть моделью $[J_1, J_2]$, вопреки нашему предположению.

Таким образом, соответствие $J \to V$ устанавливает структурную двойственность между множеством идеалов и множеством многообразий, т. е. сумме двух идеалов соответствует пересечение соответствующих многообразий, а пересечению двух идеалов — объединение многообразий.

8.1.6. Теорема. *Пусть* $\{V_\nu\}$ — *произвольная совокупность многообразий и* $\{J_\nu\}$ — *соответствующая совокупность идеалов. Тогда* $\bigcup_\nu \{J_\nu\} \to \bigcap_\nu \{V_\nu\}$.

Доказательство. С одной стороны, все структуры из $\bigcap_\nu \{V_\nu\}$ удовлетворяют каждому высказыванию J_ν и, следовательно, $V(\bigcup_\nu \{J_\nu\}) \supset \bigcap_\nu \{V_\nu\}$. С другой стороны, если структура является моделью всех J_ν, то она принадлежит всем V_ν, так что $V(\bigcup_\nu \{J_\nu\}) \subset \bigcap_\nu \{V_\nu\}$. Заметим, что $\bigcup_\nu \{J_\nu\}$, вообще говоря, не является идеалом.

Многообразие V называется *приводимым*, если существуют многообразия V_1 и V_2 такие, что

8.1.7. $V = V_1 \cup V_2, \quad V \neq V_1, \quad V \neq V_2;$

в противном случае V называется *неприводимым*. Установленное выше взаимно однозначное соответствие между идеалами и многообразиями показывает, что многообразие неприводимо тогда и только тогда, когда неприводим соответствующий идеал.

Структуру $M \in V_0$ назовем *общей структурой* многообразия $V \subset V_0$, если любое высказывание из J_0 истинно в M в том и только в том случае, если оно истинно во всех структурах многообразия V. Таким образом, если $V = V(J)$, где J — идеал в J_0, то высказывание из J_0

принадлежит J тогда и только тогда, когда оно истинно в M. Из этого определения сразу же вытекает, что $M \in V$. M будем также называть общей структурой J.

8.1.8. Теорема. *Для того чтобы непустое многообразие V было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы V обладало общей структурой.*

Доказательство. Пусть $J \to V$. Предположим, что V и, следовательно, J неприводимы. Если $J = J_0$ и V непусто, то любая структура $M \in V$ будет общей структурой V. Допустим, что $J \neq J_0$ и пусть H — объединение J и отрицаний всех высказываний из $J_0 - J$. Мы утверждаем, что $K \cup H$ непротиворечиво. В самом деле, $K \cup J$ непротиворечиво, так как в противном случае $J = J_0$, вопреки нашему предположению. Таким образом, если $K \cup H$ противоречиво, то найдутся такие высказывания $Y_1, \ldots, Y_l \in J_0 - J$, $l \geqslant 1$, что $K \cup J \cup \{\sim Y_1, \sim Y_2, \ldots, \sim Y_l\}$ противоречиво. Отсюда $K \cup J \vdash Y_1 \vee Y_2 \vee \ldots \vee Y_l$ и тем самым $Y_1 \vee Y_2 \vee \ldots \vee Y_l \in J$. Однако J неприводим и потому $Y_j \in J$ при некотором j, $1 \leqslant j \leqslant l$, что противоречит нашему предположению. Итак, $K \cup H$ непротиворечиво и обладает моделью $M \in V_0$. M и есть искомая общая структура V.

Обратно, предположим, что V обладает общей структурой M. Мы должны доказать неприводимость V или, что то же самое, неприводимость J. Пусть X, X_1, X_2 — три высказывания из J_0, такие, что $K \vdash X \equiv X_1 \vee X_2$ и $X \in J$. X тогда истинно в M, и, следовательно, хотя бы одно из двух высказываний X_1 или X_2 будет истинно в M и поэтому принадлежит J. Согласно теореме 7.4.6 неприводимость J доказана.

8.1.9. Теорема. *Пусть $V = \bigcup_{\nu} \{V_\nu\}$, где V и V_ν — многообразия такие, что $V_\nu \neq \varnothing$ и $V_\nu \neq V$ для всех ν (число ν может быть и бесконечным). Тогда V обязательно приводимо.*

Таким образом, неприводимое многообразие нельзя представить нетривиальным образом даже посредством бесконечной суммы многообразий.

Доказательство. Допустим, что, вопреки утверждению теоремы, V неприводимо. По условию, V непусто и, следовательно, обладает общей структурой $M \in V$.

Так как $V=\bigcup_{\nu}\{V_\nu\}$, то $M\in V_\mu$ при некотором μ. Пусть J и J_μ — идеалы, отвечающие соответственно многообразиям V и V_μ. Поскольку $V\supset V_\mu$, то $J\subset J_\mu$. M удовлетворяет всем высказываниям J_μ, так как $M\in V_\mu$, и не удовлетворяет ни одному высказыванию из $J_\mu - J$, так как M — общая структура V. Следовательно, $J=J_\mu$ и $V=V_\mu$, что, однако, противоречит условию.

Пусть M — любая структура, принадлежащая V_0, и пусть J_M — множество всех высказываний из J_0, истинных в M. Легко проверяется, что J_M — идеал и соответствующее многообразие $V_M=V(J_M)$ содержит M. Более того, M есть общая структура V_M, так что V_M — неприводимое многообразие.

8.1.10. Теорема. *Каждое многообразие V представляет собой объединение неприводимых многообразий.*

Теорема тривиальна, если V пустое, так как тогда уже само V неприводимо. Для непустого V мы имеем $V=\bigcup_{\nu}\{V_\nu\}$, где $V_\nu=V_{M_\nu}$ и M_ν пробегает все структуры V.

8.1.11. Теорема. *Пусть $V=\bigcup\{V_\nu\}=\bigcup\{V'_\mu\}$ — два представления многообразия в виде объединения неприводимых многообразий. Тогда каждое многообразие V_ν из первого представления содержится в некотором многообразии V'_μ из второго представления, и наоборот.*

Доказательство. Если данное V_ν пусто, то наше утверждение очевидно. Допустим, что $V_\nu\neq\varnothing$, тогда V_ν имеет общую структуру M. $M\in V$, и потому M принадлежит V'_μ — одному из неприводимых многообразий второго представления. Пусть J'_μ — идеал, соответствующий V'_μ. Так как все высказывания J'_μ удовлетворяют M, то J'_μ принадлежит идеалу многообразия V_ν, а следовательно, как и утверждалось, $V_\nu\subset V'_\mu$.

Пусть V, V' — два многообразия, $V'\subset V$ и V' неприводимо. Тогда V' называется максимальным в V, если любое неприводимое многообразие V'', такое, что $V'\subset V''\subset V$, равно V'.

8.1.12. Теорема. *Пусть V, V' — два многообразия, $V'\subset V$ и V' неприводимо. Тогда существует максимальное многообразие V'' в V, такое, что $V'\subset V''\subset V$.*

Доказательство. Пусть J и J' — идеалы, соответствующие V и V'. $J \subset J'$ и J' неприводим. Согласно теореме 7.4.11 существует идеал $J'' \subset J'$, минимальный в множестве всех неприводимых идеалов, содержащих J. Пусть V'' — многообразие, соответствующее J''. V'', как легко видеть, удовлетворяет условию теоремы.

8.1.13. Теорема. *Каждое многообразие V является объединением всех неприводимых многообразий, максимальных в V.*

Доказательство. Пусть $\{V_\nu\}$ — совокупность неприводимых многообразий, максимальных в V. Мы должны показать, что любая структура $M \in V$ содержится в некотором V_ν. M содержится в неприводимом многообразии $V_M \subset V$. В силу 8.1.12 существует неприводимое многообразие, максимальное в V и содержащее V_M (а следовательно, и M).

8.1.14. Теорема. *Любые два представления многообразия V в виде объединения неприводимых многообразий, максимальных в V, совпадают.*

Действительно, пусть $V = \bigcup\limits_{\nu}\{V_\nu\} = \bigcup\limits_{\nu}\{V'_\nu\}$ — два таких представления. По теореме 8.1.11 каждое V_ν содержится в некотором V'_μ. Но V_ν максимален в V и потому $V_\nu = V'_\mu$, что и доказывает наше утверждение.

Теорема 8.1.14 показывает единственность представления, существование которого утверждается 8.1.13.

Мы будем говорить, что класс многообразий удовлетворяет *условию минимальности*, если любая непустая совокупность многообразий этого класса имеет хотя бы одно многообразие, не содержащее никакого другого многообразия этой совокупности. Из структурного соответствия между идеалами и многообразиями легко следует, что условие минимальности для многообразий равнозначно условию максимальности для идеалов (см. 7.1). Эквивалентным этому условию является *условие обрыва убывающих цепей для многообразий*, которое состоит в том, что для любой убывающей последовательности многообразий

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$$

найдется такое n, что $V_n = V_{n+1} = V_{n+2} = \ldots$

Прямым следствием теоремы 7.4.13, учитывая соответствие между многообразиями и идеалами, является

8.1.15. Теорема. *Допустим, что для многообразий выполнено условие минимальности. Тогда каждое многообразие V может быть представлено одним (с точностью до порядка) и только одним способом в виде несократимого объединения конечного числа неприводимых многообразий:*

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n.$$

Представление $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ называется несократимым, если при вычеркивании из правой части любого многообразия V_i равенство нарушается. Используя замечание, сделанное в п. 7.4, нетрудно заметить, что все многообразия, фигурирующие в представлении, максимальны в V. Теоремы 8.1.13 и 8.1.14 показывают тогда, что $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ — совокупность всех идеалов, максимальных в V.

В качестве иллюстрации теории этой главы рассмотрим K_{ID} — множество аксиом (коммутативной) области целостности. Под областью целостности мы понимаем коммутативное кольцо с единицей (отличной от 0) без делителей нуля. В качестве K_{ID} можно взять объединение K_{CR} — множества аксиом коммутативного кольца — и высказываний

8.1.16. $\forall x P(1, x, x), \qquad \sim S(1, 1, 1),$

$$\forall x \forall y \forall z [P(x, y, z) \wedge S(z, z, z) \supset S(x, x, x) \vee \vee S(y, y, y)],$$

содержащих предметную постоянную 1. Как обычно, предполагается, что 1 обозначает саму себя в любой модели K_{ID}.

Пусть M_0 — некоторая область целостности (т. е. модель K_{ID}) и D_0^+ — положительная диаграмма M_0, отношения и индивиды которой обозначают сами себя в M_0. Обозначим через K множество $K_{ID} \cup D_0^+$ и через J_0 — множество высказываний $E(a, 0)$, где 0 — нейтральный элемент по сложению в M_0 и a пробегает все индивиды M_0. Мы утверждаем, что J_0 дизъюнктивно относительно K.

В самом деле, пусть $X_1=E(a, 0)$ и $X_2=E(b, 0)$ — два произвольных элемента J_0. Возьмем индивид c такой, что $P(a, b, c) \in D_0^+$, и положим $X=E(c, 0)$. Легко понять, что $K \vdash X \equiv X_1 \vee X_2$. Действительно, любая модель K является областью целостности, которая представляет собой расширение гомоморфного образа M_0. В такой модели $P(a, b, c)$ истинно и ввиду отсутствия делителей нуля истинно в ней тогда и только тогда, когда истинно одно из высказываний $E(a, 0)$ или $E(b, 0)$. Таким образом, дизъюнктивность J_0 над K доказана.

Любой гомоморфный образ M_0 можно реализовать структурой M *), все отношения и индивиды которой совпадают с отношениями и индивидами M_0, так что D_0^+ — подмножество положительной диаграммы M. Пусть V_0 — множество всех структур, которые являются областями целостности **). V_0 не содержит ни одной модели $K \cup J_0$, поскольку в это множество входит как высказывание $\sim S(1, 1, 1)$, так и высказывания $S(0, 0, 0)$ и $E(0, 1)$. $K \cup J_0$ содержит также аксиому подстановочности и поэтому $K \cup J_0 \vdash S(1, 1, 1)$, так что $K \cup J_0$ оказывается противоречивым.

Пусть теперь H — любое непротиворечивое множество высказываний, состоящее из K, некоторого подмножества J_0 и множества, элементы которого представляют собой отрицания высказываний (не обязательно всех) из J_0. Мы намерены показать, что среди структур V_0 имеется модель H.

В самом деле, так как H непротиворечиво, то оно обладает моделью M. M, будучи моделью K_{ID} и D_0^+, является областью целостности и расширением гомоморфного образа M_0. Более того, мы можем считать, что все индивиды, которые попадаются в H, фигурируют также в качестве элементов M и как таковые обозначают сами себя. По построению все эти индивиды принадлежат также структуре M_0. Ограничивая M на эти индивиды,

---

*) В том смысле, что этот гомоморфный образ естественно изоморфен структуре M. (*Прим. перев.*)

**) Кроме того, требуется, чтобы все структуры из V_0 были гомоморфными образами M_0 с теми же индивидами и отношениями. (*Прим. перев.*)

мы получаем область целостности $M' \in V_0$. Любое атомарное высказывание, определенное в M' и истинное в M, истинно также и в M'. Таким образом, M' — модель D_0^+, так что все высказывания из J_0 определены в M' и любое высказывание из J_0 истинно в M' тогда и только тогда, когда оно истинно в M. Ввиду сказанного M' — модель H, что и требовалось показать. Итак, V_0 — полная система структур для J_0 над K (см. начало этого раздела). Таким образом, вся развитая выше теория многообразий применима и в нашем случае.

Так как K содержит множество аксиом коммутативного кольца, то идеалы в J_0 над K образуют подмножество множества идеалов, полученных из той же области в предыдущем разделе. Таким образом, для любого идеала $J=\{E(a_\nu, 0)\}$ в J_0 над K индивиды a_ν, встречающиеся в J, составляют арифметический идеал J_* в M_0. Однако не каждый арифметический идеал $J_*=\{a_\nu\}$ соответствует метаматематическому идеалу в J_0 над K. Суть дела полностью вскрывается следующими двумя теоремами.

8.1.17. Теорема. *Множество $J=\{E(a_\nu, 0)\}$ является неприводимым идеалом в J_0 над K в том и только в том случае, когда соответствующее множество $J_*=\{a_\nu\}$ — простой идеал в M_0.*

Доказательство. Предположим, что $J=\{E(a_\nu, 0)\}$ — неприводимый идеал в J_0 над K. Множество $J_* = \{a_\nu\}$ является идеалом. Пусть произведение $bc \in J_*$, тогда $E(bc, 0) \in J$. Поскольку в K имеются аксиомы области целостности, высказывание

$$E(bc, 0) \equiv E(b, 0) \vee E(c, 0)$$

выводимо из K. J неприводим, и по теореме 7.4.6 либо $E(b, 0)$, либо $E(c, 0)$ принадлежит J. Отсюда либо b, либо c принадлежит J_*, что и доказывает простоту J_*.

Обратно, допустим, что J_* — простой идеал. Если J_* содержит все элементы M_0, то J совпадает с J_0 и, следовательно, неприводим. Если J_* не исчерпывает всех элементов M_0, то фактор-кольцо M_0/J_* является областью целостности. Как и раньше, мы можем считать, что M_0/J_* реализовано на множестве индивидов структуры M_0 и что M_0/J_* является моделью D_0^+ относительно соответствия, при котором индивиды из M_0 обозначают сами себя. Тогда $E(a_\nu, 0)$ истинно в M_0/J_* в том и только в том случае, если $a_\nu \in J_*$. Таким образом, M_0/J_* — общая структура, $J=\{E(a_\nu, 0)\}$, и потому J, как и утверждалось, является неприводимым идеалом.

8.1.18. Теорема. *Множество $J=\{E(a_\nu, 0)\}$ является идеалом в J_0 над K тогда и только тогда, когда соответствующее множество $J_*=\{a_\nu\}$ представляет собой арифметический идеал, совпадающий со своим радикалом.*

Радикал J' арифметического идеала J — это множество всех элементов b таких, что некоторая положительная степень b принадлежит J. Легко видеть, что J' — арифметический идеал, содержащий J. $J'=J$ в том и только в том случае, когда включение $b^n \in J$ влечет $b \in J$ для всех элементов b из этого кольца. Идеалы, совпадающие со своим радикалом, носят название *радикальных идеалов*.

Доказательство 8.1.18. Допустим сначала, что $J=\{E(a_\nu, 0)\}$ — идеал в J_0 над K. В этом случае J можно представить согласно 7.4.10 в виде пересечения неприводимых идеалов: $J=\bigcap_\nu \{J_\nu\}$. Пусть $\{J_{*\nu}\}$ — множество соответствующих арифметических идеалов; тогда $J_*= = \bigcap\{J_{*\nu}\}$. На основании 8.1.17 это есть представление J_* в качестве пересечения простых идеалов. Пусть $b^n \in J_*$ для некоторого $b \in M_0$. Для всех ν $b^n \in J_{*\nu}$, а потому и $b \in J_{*\nu}$ ввиду простоты $J_{*\nu}$. Таким образом, $b \in J_*$ и, следовательно, J_* совпадает со своим радикалом.

Обратно, допустим, что J_* — радикальный идеал. Для доказательства того, что $J=\{E(a_\nu, 0)\}$ является метаматематическим идеалом, мы должны показать, что любое высказывание $E(b, 0)$, где $b \notin J_*$, невыводимо из $K \cup J$. В силу радикальности J_* тот факт, что $b \notin J_*$, означает, что множество $B=\{b, b^2, b^3, \ldots\}$ не пересекается с J_*. С помощью обычного рассуждения, использующего лемму Цорна, легко показывается существование радикального идеала J'_*, который содержит J_*, не пересекается с B и максимален в множестве всех таких идеалов. J'_*, помимо прочего, прост. Действительно, если $cd \in J'_*$ для некоторых $c, d \in M_0$ и ни c, ни d не принадлежат J'_*, то по максимальному свойству J'_* существуют такие $r_1, r_2 \in M_0$, $j_1, j_2 \in J'_*$ и такие целые положительные числа m и n, что

$$r_1 c + j_1 = b^m, \quad r_2 d + j_2 = b^n.$$

Отсюда

$$b^{m+n} = b^m \cdot b^n = (r_1 c + j_1)(r_2 d + j_2) =$$
$$= r_1 r_2 c\, d + r_1 c j_2 + r_2 d j_1 + j_1 j_2 \in J'_*$$

Однако J'_* совпадает со своим радикалом, и потому $b \in J'_*$, вопреки нашему предположению. Итак, J'_* — простой идеал, и соответствующее ему подмножество $J' \subset J_0$ является неприводимым идеалом в J_0 в силу 8.1.17. Кроме того, $J' \supset J$, но $E(b, 0) \notin J'$. Последнее означает, что $E(b, 0)$ невыводимо из $K \cup J'$ и a fortiori из $K \cup J$.

Читатель, возможно, заметил, что во второй части теоремы использовалось простое, но решающее рассуждение, хорошо известное в обычной теории коммутативных колец *). В настоящей ситуации это рассуждение понадобилось нам не для того, чтобы развить нашу теорию идеалов, а для того, чтобы установить связь между нашими метаматематическими идеалами и идеалами в коммутативной теории.

8.2. Пред-идеалы и их многообразия. Пусть $W = \{x_\nu\}$ — фиксированное непустое множество различных переменных с множеством индексов $N = \{\nu\}$, причем W и N могут быть как конечными, так и бесконечными. Мы будем рассматривать правильно построенные формулы, свободные переменные которых (если они там вообще есть) принадлежат W, а связанные переменные не содержатся в W. Множество таких ппф обозначим через H_W. Пусть H — некоторое подмножество H_W и $Q \in H_W$. Мы скажем тогда, что Q выводимо из H, символически $H \vdash Q$, если существуют такие $Q_1, \ldots, Q_m \in H$, что

8.2.1. $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_m \supset Q]$,

где $x_1, \ldots, x_n$ — все элементы W, которые хотя бы один раз встречаются в $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, Q$.

*) Под названием теоремы Крулля. (*Прим. перев.*)

Пусть K и J_0 — подмножества H_W; мы предположим, что в $K \cup J_0$ содержится по крайней мере одно отношение положительного порядка. Назовем тогда множество $J \subset J_0$ *предикатным идеалом* (коротко, *пред-идеалом*) *в* J_0 *над* K, если $K \cup J \vdash Q$ влечет $Q \in J$ для любой ппф $Q \in J_0$.

Для того чтобы свести теорию пред-идеалов к теории обычных идеалов, рассмотренных в пп. 7.2—7.4, введем множество $P^* = \{a_\nu^*\}$ различных индивидов с прежним множеством индексов N, так что все элементы не встречаются ни в одной из ппф K или J_0. Для любой ппф $Q \in K \cup J_0$ обозначим через Q^* высказывание, полученное из Q замещением всех свободных переменных x_ν соответствующими a_ν^*. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между ппф Q из множества $K \cup J_0$ и некоторыми высказываниями. Пусть K^* и J_0^* — множества высказываний, отвечающих соответственно множествам ппф K и J_0. Тогда 8.2.1 имеет место в том и только в том случае, если

$$\vdash Q_1^* \wedge \ldots \wedge Q_m^* \supset Q^*.$$

Это означает, что подмножество $J \subset J_0$ будет пред-идеалом тогда и только тогда, когда соответствующее подмножество $J^* \subset J_0^*$ будет идеалом в J_0 над K^*. Таким образом, теория пред-идеалов целиком сводится к теории идеалов (пп. 7.2—7.4). Все определения и результаты этих разделов остаются в силе, если вместо идеалов рассматривать пред-идеалы. Однако теорию многообразий пред-идеалов приходится развивать отдельно.

Пусть H — любое подмножество введенного ранее множества H_W. Слегка обобщая нашу первоначальную терминологию, мы назовем структуру M *моделью* H, если все объекты и символы отношений в H находятся во взаимно однозначном соответствии с индивидами и отношениями M, так что все *высказывания* H истинны в M. В частности, как и раньше, допускается, что индивиды и символы отношений обозначают в M сами себя.

Для данного множества индексов N и для любой структуры M обозначим через M^N пространство всех наборов $P = \{a_\nu\}$, $a_\nu \in M_\nu$, с множеством индексов N. В частности, если N конечно и содержит ровно n элементов, то M^N есть не что иное, как n-мерное декартово пространство M^n, определенное ранее в п. 3.3. Набор P — точка этого пространства. Если M — структура и P — точка в M^N, то мы назовем *составной точкой* упорядоченную пару (M, P).

Пусть M — модель $H \subset H_W$, где для простоты предположено, что символы объектов и отношений из H обозначают в M сами себя. Пусть Q — произвольная ппф, принадлежащая H, и пусть P — точка M^N. Заменим все свободные переменные $x_\nu \in W$, фигурирующие в Q, соответствующими элементами из P (т. е. константами a_ν с теми же индексами). Полученное высказывание (мы его обозначим Q_P) определено, если принять (естественное) соглашение о том, что элементы P обозначают сами себя. Если Q_P истинно в M, то мы скажем, что ппф Q истинна в точке $P \in M^N$ или что точка P удовлетворяет Q в M^N, или, наконец, что Q истинна в составной точке (M, P). В частности, если Q — высказывание, то оно будет истинно во всех точках $P \in M^N$, так как по условию Q истинно в M.

Пусть V_0 — множество составных точек, удовлетворяющее следующим условиям. Если $(M, P) \in V_0$ для некоторой структуры M и некоторой точки $P \in M^N$, то $(M, P') \in V_0$ также и для любой другой точки $P' \in M^N$. Если $(M, P) \in V_0$, то все ппф из $K \cup J_0$ определены в M *). Если подмножество $H \subset H_W$, состоящее из K, некоторого подмножества J_0 и отрицаний элементов другого подмножества J_0, таково, что H^* непротиворечиво, то существует составная точка $(M, P) \in V_0$, удовлетворяющая всем ппф из H **).

Нетрудно установить существование множества, удовлетворяющего этим условиям. В самом деле,

---

*) Учитывая последующую теорию, необходимо еще потребовать истинность каждой ппф из K во всех составных точках $(M, P) \in V_0$. (*Прим. перев.*)

**) Ввиду предыдущего замечания, здесь (а также и дальше при доказательстве существования V_0) под H^* нужно понимать множество H'^*, где H' получается из H заменой всех ппф $Q(x_1, \ldots, x_n)$ из K на $\forall x_1 \ldots \forall x_n \; Q(x_1 \ldots x_n)$. В дальнейшем это будет несущественно, поскольку K, как правило, будет состоять из одних высказываний. (*Прим. перев.*)

рассмотрим совокупность $\{H_\mu\}$ всех множеств, подобных описанному выше H. Так как $\overset{*}{H}_\mu$ непротиворечиво, то у него имеется модель $\overset{*}{M}_\mu$. Добавляя к $\overset{*}{H}_\mu$, если нужно, отдельные теоремы узкого исчисления предикатов, содержащие $\overset{*}{a}_\nu$, мы можем считать, что все $\overset{*}{a}_\nu \in \overset{*}{M}_\mu$ и, следовательно, $P^* \in \overset{*}{M}{}_\mu^N$ *). Все ппф из H_μ будут при этом истинны в $P^* \in \overset{*}{M}{}_\mu^N$. Пусть V_0 — множество $\{\overset{*}{M}_\mu, P_\lambda\}$ всех составных точек, где P_λ пробегают все точки $\overset{*}{M}_\mu$. Легко проверяется, что построенное множество V_0 удовлетворяет всем перечисленным выше условиям.

Такое множество V_0 мы будем называть полной системой составных точек для J_0 над K.

Пусть A — произвольное подмножество J_0. Назовем (геометрическим) многообразием A, обозначая его $V(A)$, множество таких элементов $(M, P) \in V_0$, что все ппф из A истинны в точке $P \in M^N$. То обстоятельство, что $V(A)$ — многообразие A, мы будем также указывать посредством $A \to V(A)$. Если $J = (A)$ — пред-идеал, порожденный A в J_0, то легко усмотреть, что $V(J) = V(A)$.

В дальнейшем будет также предполагаться дизъюнктивность J_0 над K, т. е., по определению, дизъюнктивность $\overset{*}{J}_0$ над K^*.

Заменяя в 8.1.1 слово «идеал» на «пред-идеал», мы получаем соответствующую теорему для пред-идеалов, доказательство которой также тривиально. Аналогично, разным пред-идеалам отвечают разные многообразия, так что соответствие между пред-идеалами и их многообразиями взаимно однозначно.

8.1.3 заменяется следующей теоремой:

8.2.2. Теорема. *Если V — многообразие пред-идеала J в J_0, то J состоит из всех ппф J_0, истинных в каждой составной точке $(M, P) \in V$.*

Доказательство. Пусть J_1 — множество всех ппф из J_0, истинных в каждой составной точке V. Ясно, что $J_1 \supset J$. Допустим $J_1 \neq J$. Тогда существует ппф $Q \in J_1 - J$ такая, что $K^* \cup J^* \cup \{\sim Q^*\}$ непротиворечиво. Пусть

---

*) Кроме того, добавляя надлежащие теоремы, мы можем считать, что все ппф из $K \cup J_0$ определены в $\overset{*}{M}_\mu$. (*Прим. перев.*)

(M, P) — составная точка V_0, удовлетворяющая всем ппф из $K \cup J \cup \{\sim Q\}$. Такая точка существует согласно условиям, наложенным на V_0. Итак, $(M, P) \in V$, Q ложно в (M, P) и $Q \in J_1$, несмотря на то, что все ппф из J_1 истинны в точках из V.

Остаются в силе и теоремы 8.1.4—8.1.6, если «идеалы» всюду заменить «пред-идеалами». Как и прежде, мы приходим к заключению о том, что взаимно однозначное соответствие $J \to V$ переводит сумму двух пред-идеалов в пересечение соответствующих многообразий, а пересечение двух пред-идеалов — в объединение многообразий.

Определение неприводимого подмногообразия остается прежним. Многообразие будет неприводимо в том и только в том случае, когда соответствующий пред-идеал неприводим.

Составная точка $(M, P) \in V_0$ называется *общей точкой* многообразия V, если каждая ппф $Q \in J_0$ истинна в (M, P) тогда и только тогда, когда Q принадлежит пред-идеалу J многообразия V. В этом случае (M, P) называется также общей точкой пред-идеала J. Мы вскоре увидим, что общая точка в алгебраической геометрии может рассматриваться как частный случай нашей общей точки.

8.2.3. Теорема. *Для того чтобы непустое многообразие V было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы V обладало общей точкой.*

Доказательство приводится параллельно доказательству 8.1.8. Пусть $J \to V$, и допустим, что V, а следовательно, и J неприводимы. Предположим сначала, что $J \neq J_0$. Обозначим через H объединение J и отрицаний всех высказываний из $J_0 - J$. Как и в доказательстве 8.1.8, $K^* \cup H^*$ непротиворечиво и потому имеет модель M^*, относительно которой мы можем предполагать, что все координаты P^* принадлежат M^*. Тогда $(M^*, P^*) \in$ $\in V_0$ и все ппф из $K \cup H$ истинны в (M^*, P^*). Таким образом, (M^*, P^*) и есть искомая общая точка V. Если $J = J_0$ и V непусто, то любой элемент из V является общей точкой.

Обратно, допустим, что у V имеется общая точка. Докажем неприводимость J. Пусть Q, Q_1, $Q_2 \in J_0$ таковы, что $K \vdash Q \equiv Q_1 \vee Q_2$ и $Q \in J$. Ппф Q истинна в (M, P), т. е.

высказывание Q_P истинно в M. Отсюда вытекает, что либо Q_{1P}, либо Q_{2P} истино в M, т. е. одна из ппф Q_1 или Q_2 истинна в (M, P) и тем самым принадлежит J. Таким образом, согласно теореме, аналогичной 7.4.6, J неприводим.

Теоремы 8.1.9 и 8.1.10 остаются справедливыми без каких бы то ни было переформулировок. Для доказательства последней теоремы определяется пред-идеал $J_{(M,\, P)}$, состоящий из всех ппф J_0, истинных в данной точке (M, P).

Наконец, теоремы 8.1.11—8.1.15 также остаются в силе, как и все связанные с этими теоремами понятия (например, несократимое представление).

Заметим, что в общей теории пред-идеалов и их многообразий в множестве V_0 составных точек (M, P) участвует, вообще говоря, не одна структура M. Однако вполне возможно, что некоторое множество составных точек (M, P) с фиксированной структурой M удовлетворяет всем условиям, наложенным на V_0. Именно такая ситуация и возникает в классическом случае, рассмотрением которого мы займемся в следующем разделе.

8.3. Метаматематические и алгебраические многообразия. Пусть K'_{CF} — множество аксиом поля, введенное в п. 2.2. K'_{CF} содержит константы 0 и 1, обозначающие соответственно нейтральные элементы по сложению и умножению. Пусть M_0 — модель K'_{CF} и D_0 — диаграмма M_0. При этом, как обычно, все отношения и индивиды из $K'_{CF} \cup D_0$ обозначают сами себя в M_0, так что 0 и 1 в M_0 действительно являются нейтральными элементами. K положим равным $K'_{CF} \cup D_0$.

Пусть $M_n = M_0[x_1, \ldots, x_n]$ — полиномиальное кольцо от n переменных с коэффициентами в M_0, $n \geqslant 1$. Для каждого многочлена $q(x_1, \ldots, x_n) \in M_n$ выделим предикат $Q_q(x_1, \ldots, x_n)$, сформулированный в терминах индивидов и отношений из K и утверждающий, что $q(x_1, \ldots, x_n)$ равно 0. Обозначим через J_0 множество всех таких предикатов. Мы будем рассматривать теорию пред-идеалов в J_0 над K. J_0, как легко видеть, дизъюнктивно, поскольку для любых $Q_{q_1}(x_1, \ldots, x_n)$, $Q_{q_2}(x_1, \ldots \ldots, x_n) \in J_0$

8.3.1.

$$K \vdash Q_{q_1 q_2}(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q_{q_1}(x_1, \ldots, x_n) \vee Q_{q_2}(x_1, \ldots, x_n).$$

В качестве V_0 возьмем множество, указанное в предыдущем разделе. Заметим, что $K^* \cup J_0^* = K \cup J_0^*$ противоречиво, поскольку J_0^* содержит высказывание $Q_1(a_1^*, \ldots \ldots, a_n^*)$, утверждающее, что постоянный многочлен $q=1$ равен 0 при некоторых значениях аргументов $a_1^*, \ldots, a_n^*$.

По любому пред-идеалу $J = \{Q_{q_\mu}(x_1, \ldots, x_n)\}$ в J_0 над K определим множество $J_* = \{q_\mu(x_1, \ldots, x_n)\}$ всех многочленов $q_\mu(x_1, \ldots, x_n) \in M_n$, играющих роль индексов для предикатов J. Как будет сейчас показано, J_* является идеалом в M_n в обычном смысле. Такой идеал мы по-прежнему будем называть арифметическим идеалом.

В самом деле, пусть $Q_{q_1}(x_1, \ldots, x_n)$, $Q_{q_2}(x_1, \ldots \ldots, x_n) \in J$. Поскольку K содержит аксиомы поля,

$$K \vdash Q_{q_1}(x_1, \ldots, x_n) \wedge Q_{q_2}(x_1, \ldots, x_n) \supset Q_{q_1 \pm q_2}(x_1, \ldots, x_n)$$

и

$$K \vdash Q_q(x_1, \ldots, x_n) \supset Q_{rq}(x_1, \ldots, x_n),$$

где $r(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный элемент из M_n.

8.3.2. Теорема. *Подмножество $J = \{Q_\mu(x_1, \ldots \ldots, x_n)\} \subset J_0$ тогда и только тогда будет неприводимым пред-идеалом в J_0 над K, когда соответствующее подмножество $J_* = \{q_\mu(x_1, \ldots, x_n)\} \subset M_n$ будет простым идеалом в M_n.*

Доказательство. Пусть J — неприводимый пред-идеал в J_0 над K. Как было уже показано, J_* — идеал в M_n. Предположим, что произведение $q(x_1, \ldots, x_n) = r(x_1, \ldots, x_n) \cdot s(x_1, \ldots, x_n) \in J_*$, где $r, s \in M_n$. $Q_q(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит J. Модель K не может иметь делителей нуля и потому

$$K \vdash Q_q(x_1, \ldots, x_n) \supset Q_r(x_1, \ldots, x_n) \vee Q_s(x_1, \ldots, x_n).$$

Но коль скоро J неприводим, одна из ппф Q_r или Q_s принадлежит J и, следовательно, один из многочленов $r(x_1, \ldots, x_n)$ или $s(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит J_*, что и доказывает простоту J_*.

Обратно, допустим, что J_* — простой идеал. Если $J_* = M_n$, то $J = J_0$ и, в частности, J неприводим. Если $J_* \neq M_n$, то M_n/J_* есть область целостности, изоморфная расширению M_0. Для удобства заменим M_n изоморфным ему кольцом M_n^*, подставляя вместо символов $x_1, \ldots, x_n$, играющих в нашем языке только роль переменных, индивиды $a_1^*, \ldots, a_n^*$. Эта подстановка преобразует J_* в идеал J_*^* в M_n^* так, что фактор-кольцо M_n^*/J_*^* изоморфно M_n/J_*. Точнее, мы можем предполагать, что M_n^*/J_*^* является расширением M_0, содержащим индивиды $a_1^*, \ldots, a_n^*$. $Q_q(a_1^*, \ldots, a_n^*)$ истинно в M_n^*/J_*^* тогда и только тогда, когда $q(a_1^*, \ldots, a_n^*) \in J_*^*$, т. е. тогда и только тогда, когда $q(x_1, \ldots, x_n) \in J_*$ и $Q_q(x_1, \ldots, x_n) \in J_0$. M_n^*/J_*^*, вообще говоря, не является моделью K, так как M_n^*/J_*^* не всегда поле. Однако это кольцо можно вложить в его поле отношений M'. Тогда составную точку $(M', P^*) = (M', (a_1^*, \ldots, a_n^*))$ можно рассматривать как элемент V_0 и общую точку J. Действительно, каждая ппф из J_0 истинна в (M', P^*) в том и только в том случае, когда она принадлежит J. Следовательно, J — пред-идеал в J_0 над K и, так как ппф Q_r или Q_s истинны в (M', P^*) тогда и только тогда, когда Q_{rs} истинна в (M', P^*), то J — неприводимый пред-идеал.

8.3.3. Теорема. *Подмножество $J = \{Q_{q_\mu}(x_1, \ldots, x_n)\}$ является пред-идеалом в J_0 над K тогда и только тогда, когда соответствующее подмножество $J_* = \{q_\mu(x_1, \ldots, x_n)\}$ является радикальным идеалом в M^n.*

Доказательство. Допустим сначала, что J — пред-идеал в J_0 над K. Тогда J — пересечение неприводимых пред-идеалов: $J = \bigcap_\lambda \{J_\lambda\}$. Отсюда $J_* = \bigcap_\lambda \{J_{*\lambda}\}$, где $\{J_{*\lambda}\}$ — множество соответствующих простых арифметических идеалов. Пусть $b^m \in J_*$ для некоторого $b \in M_n$, $m \geqslant 1$. Тогда $b^m \in J_{*\lambda}$ для всех λ, и, следовательно, учитывая простоту $J_{*\lambda}$, имеем $b \in J_{*\lambda}$. Таким образом, $b \in J_*$ и радикальность J_* доказана.

Обратно, допустим, что J_* — радикальный идеал. Для доказательства того, что соответствующее множество J представляет собой пред-идеал в J_0 над K, мы должны показать, что для любого многочлена $q(x_1, \ldots$

$\ldots, x_n) \in M_n - J_*$ предикат $Q_q(x_1, \ldots, x_n)$ не выводим из $K \cup J$.

Так как J_* — радикальный идеал в M_n, то множество $B = \{q, q^2, q^3, \ldots\}$ не имеет элементов, общих с J_*. Следовательно (ср. с доказательством 8.1.18), существует простой идеал J'_* в M_n, содержащий J_* и не пересекающийся с B. Соответствующее подмножество $J' \subset J_0$ согласно 8.3.2 является неприводимым пред-идеалом в J_0 над K. При этом $J' \supset J$ и $Q_q(x_1, \ldots, x_n) \notin J'$, откуда видно, что $Q_q(x_1, \ldots, x_n)$ не выводимо из $K \cup J$. Теорема полностью доказана.

По теореме Гильберта о базисе арифметические идеалы в M_n удовлетворяют условию максимальности, поэтому то же условие выполнено для радикальных идеалов в M_n и, следовательно, для пред-идеалов в J_0 над K. Теоремы 8.3.2 и 8.3.3 никак не связаны с этим условием и равным образом могут быть доказаны для произвольного множества индексов N, т. е. для кольца многочленов от бесконечного множества переменных W. Однако мы будем по-прежнему придерживаться классического случая: $W = (x_1, \ldots, x_n)$.

Первую часть теоремы 8.3.3, как мы сейчас увидим, можно рассматривать как переформулировку слабого варианта Nullstellensatz (см. п. 5.4), гласящего следующее:

8.3.4. Теорема. *Пусть* $q(x_1, \ldots, x_n)$, $q_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $q_r(x_1, \ldots, x_n)$ — *многочлены из полиномиального кольца* $M_0[x_1, \ldots, x_n]$ *над полем* M_0, *такие, что в любом расширении* M_0 q *обращается в нуль во всех общих нулях многочленов* $q_1, \ldots, q_r$. *Тогда существует такое целое положительное число* ρ, *что* q^ρ *принадлежит идеалу* $(q_1, \ldots, q_r)$ *в* $M_0[x_1, \ldots, x_n]$.

Доказательство. По условию теоремы во всех моделях K имеет место

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n [Q_{q_1}(x_1, \ldots, x_n) \wedge \ldots \wedge Q_{q_r}(x_1, \ldots, x_n) \supset \supset Q_q(x_1, \ldots, x_n)].$$

Это означает, что $Q_q(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит пред-идеалу J, порожденному $Q_{q_1}, \ldots, Q_{q_r}$ в J_0 над K.

Пусть J_* — соответствующий радикальный арифметический идеал. Легко понять, что J_* — радикал идеала $(q_1, \ldots, q_r)$ в $M_0[x_1, \ldots, x_n]$ *) и, так как $Q_q(x_1, \ldots, x_n) \in J_0$, то $q(x_1, \ldots, x_n) \in J_*$, т. е. некоторая степень q содержится в $(q_1, \ldots, q_r)$.

Очевидно, что в формулировке теоремы 8.3.4 «любые расширения M_0» можно заменить «любыми алгебраическими замкнутыми расширениями M_0». Это вытекает из того простого факта, что если в расширении M поля M_0 $q_i(b_1, \ldots, b_n) = 0$, $i = 1, \ldots, r$, и $q(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$ для некоторых $b_1, \ldots, b_n \in M$, то это остается верным и в любом алгебраически замкнутом расширении поля M. Более того, метаматематических средств оказывается вполне достаточно, чтобы еще больше ослабить условие теоремы (см. п. 5.4). А именно, используя модельную полноту, предположение о том, что q обращается в нуль во всех общих нулях $q_1, \ldots, q_r$ в любом алгебраически замкнутом расширении поля M_0, можно заменить более слабым предположением, которое требует выполнения этого условия лишь в алгебраическом замыкании M_0.

В то время как в общей теории многообразий в множестве V_0 составных точек (M, P) фигурировала, вообще говоря, не одна структура M, в нашем частном случае можно найти V_0 с фиксированной моделью M. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим множество $\{(A_\mu, B_\mu)\}$ всех пар подмножеств J_0 таких, что $K \cup A_\mu^* \cup \overline{B}_\mu^*$ непротиворечиво, где $\overline{B}_\mu$ — множество отрицаний элементов B_μ, а звездочка по-прежнему означает замену переменных x_ν соответствующими индивидами a_ν^*, $\nu = 1, \ldots, n$. (Заметим, что настоящей ситуации $K^* = K$.). Заменим теперь a_ν^* в различных множествах $A_\mu^* \cup B_\mu^*$ различными индивидами a_ν^μ. Полученные множества обозначим через $A_\mu^\mu \cup B_\mu^\mu$. Утверждается, что множество

---

*) Действительно, пусть J'_* — радикал идеала $(q_1, \ldots, q_r)$. Поскольку $q_1, \ldots, q_r \in J_*$ и J_* — радикальный идеал, то $J_* \supset J'_*$. J'_* — радикальный идеал и, следовательно, ему соответствует некоторый пред-идеал J' в J_0 над K. Так как $Q_{q_1}, \ldots, Q_{q_r} \in J'$, то $J' \supset J$. Отсюда $J'_* \supset J$ и потому $J'_* = J$. (*Прим. перев.*)

$H = K \cup \bigcup_{\mu} \{A_{\mu}^{\mu} \cup \overline{B}_{\mu}\}$ непротиворечиво. Для доказательства этого достаточно показать непротиворечивость любого конечного подмножества H. Иными словами, мы должны показать, что множество $K \cup \bigcup_{\mu} \{A_{\mu}^{\mu} \cup \overline{B}_{\mu}^{\mu}\}$, $\mu = 1, \ldots, l$, непротиворечиво для конечных A_{μ}^{μ} и B_{μ}^{μ}, если непротиворечиво каждое множество $K \cup A_{\mu}^{\mu} \cup \overline{B}_{\mu}^{\mu}$.

Пусть Y_{μ} — ппф, полученная из конъюнкции элементов $A_{\mu}^{\mu} \cup \overline{B}_{\mu}^{\mu}$ замещением констант a_{ν}^{μ} различными переменными x_{ν}^{μ}. Соответственно пусть Z_{ν} — высказывание, полученное из Y_{ν} навешиванием кванторов $\exists x_{\nu}^{\mu}$. Стандартное рассуждение исчисления предикатов показывает, что, установив непротиворечивость $K \cup \{Z_1, \ldots, Z_l\}$, мы тем самым установим непротиворечивость $K \cup \bigcup_{\mu} \{A_{\mu}^{\mu} \cup \overline{B}_{\mu}^{\mu}\}$. Поскольку $K \cup \{Z_{\mu}\}$ непротиворечиво, оно обладает моделью M_{μ}, которая является расширением M_0. Z_{μ} выражает разрешимость некоторой системы уравнений и неравенств (вида $q \neq 0$). Поэтому данная система имеет также решение в любом расширении M_{μ}, в частности, в любом алгебраически замкнутом расширении M_{μ}. В силу модельной полноты теории алгебраически замкнутого поля Z_{μ} истинно уже в алгебраическом замыкании $\overline{M}_0$ поля M_0. Поскольку $K, Z_1, \ldots, Z_l$ истинны в $\overline{M}_0$, множество $K \cup \{Z_1, \ldots, Z_l\}$ непротиворечиво. Таким образом, множество H также непротиворечиво и обладает моделью M. Все составные точки (M, P), где $P \in M^n$, образуют полную систему составных точек для J_0 над K. В самом деле, по построению любое непротиворечивое множество $A_{\mu} \cup \overline{B}_{\mu}$ истинно в некоторой точке $P \in M^n$. Кроме того, в V_0 нет точки, удовлетворяющей всем ппф из J_0, так как $K \cup J_0$ противоречиво.

Было бы в корне ошибочным считать, что в качестве M можно взять $\overline{M}_0$ — алгебраическое замыкание M_0. Действительно, пусть $n=1$ и B^* — множество всех элементов $Q_q(a_1^*) \in J_0$, за исключением высказывания $Q_0(a_1^*)$, соответствующего нулевому многочлену. Пусть $\overline{B}^*$ — множество отрицаний элементов B^*. $K \cup \overline{B}^*$ непротиворечиво, так как $\overline{B}^*$ только утверждает, что индивид a_1^* не алгебраичен над M_0. Таким образом, B^* имеет место в тех и только тех расширениях M_0, которые не являются чисто алгебраическими над M_0 и, в частности, $\overline{M}_0$ не удовлетворяет $\overline{B}^*$.

Несложные вычисления с трансфинитными числами позволяют найти оценку кардинального числа M, зависящую, конечно, от мощности M_0. Если $m = \max(\aleph_0, |M_0|)$, где $|M_0|$ — кардинальное число M_0, то $|K|$ и $|J_0|$ не превосходят m. Поэтому кардинальное число пар (A_μ, B_μ) подмножеств J_0 не превышает 2^m. Отсюда следует, что можно найти требуемую структуру M, кардинальное число которой ограничено числом 2^m.

Более точную оценку кардинального числа M можно получить, привлекая алгебраические средства. А именно, мы покажем сейчас, что в качестве M можно взять алгебраически замкнутое поле, имеющее счетную степень трансцендентности над M_0. Такое поле в алгебраической геометрии носит название *универсальной области* *). Таким образом, если M_0 конечно, то M счетно, а если M_0 бесконечно, то M и M_0 равномощны.

Пусть $H = K \cup A_\mu \cup B_\mu$, где A_μ и B_μ — подмножества J_0. Допустим, что $H^* = K \cup A_\mu^* \cup B_\mu^*$ непротиворечиво (звездочка по-прежнему указывает, что переменные x_i заменены константами a_i^*). Тогда H^* обладает моделью M', которая является расширением M_0. Беря, если нужно, алгебраическое замыкание M', мы можем считать, что поле M' алгебраически замкнуто. Все элементы множества H истинны в точке $P^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*) \in M'^n$, а следовательно, истинны и в $P^* \in M^{*n}$, где M^* — алгебраическое замыкание $M_0(a_1^*, \ldots, a_n^*)$. Ясно, что степень трансцендентности M^* над M_0 не больше n. Поскольку поле M алгебраически замкнуто и имеет над M_0 степень трансцендентности $\aleph_0$, то существует изоморфное отображение M^* на некоторое подполе $M'' \subset M$, при котором M_0 остается инвариантным и $a_1^*, \ldots, a_n^*$ переходят в $b_1, \ldots, b_n$. Ввиду этого изоморфизма точка $P = (b_1, \ldots, b_n)$ удовлетворяет H в поле M'', а следовательно, и

*) В алгебраической геометрии в определении универсальной области предполагается, что M имеет бесконечную степень трансцендентности над всеми промежуточными полями между M_0 и M, которые возникают в процессе рассмотрения. (*Прим. перев.*)

в поле M. Таким образом, мы доказали, что множество составных точек (M, P), где P имеет координаты в M, является полной системой составных точек для J_0 над K.

Покажем теперь, что теория метаматематических многообразий, рассмотренная в п. 8.2, совпадает с классической теорией алгебраических многообразий в пространстве M^n над универсальной областью M. В качестве V_0 мы можем взять множество всех составных точек (M, P), где $P \in M^n$. Тогда многообразию любого метаматематического идеала $J \subset J_0^*$ отвечает алгебраическое многообразие V арифметического идеала $J_* \subset M_0[x_1, \ldots, x_n]$, соответствующего J. Так как J_* — радикальный идеал, то все многочлены, обращающиеся в нуль на V, принадлежат J (т. е. идеал J ассоциирован с многообразием V). Обратно, так как каждый радикальный идеал в $M_0[x_1, \ldots, x_n]$ соответствует некоторому идеалу $J \subset J_0$, все алгебраические многообразия получаются указанным выше способом. Более того, неприводимые метаматематические многообразия переходят в неприводимые алгебраические многообразия, и соответственно общая точка метаматематического многообразия становится общей точкой алгебраического многообразия. В этом смысле теория метаматематических многобразий, развитая в этой главе, является обобщением классической теории алгебраических многообразий.

8.4. Дифференциальные идеалы. Естественно ожидать, что теория дифференциальных идеалов, развитая Риттом и его учениками, тоже в каком-то смысле вкладывается в метаматематическую теорию идеалов. В настоящем разделе мы будем изучать кольцо дифференциальных многочленов.

Пусть K_{DF} — множество аксиом дифференциального поля нулевой характеристики (см. п. 5.5). K_{DF} содержит отношения A, E, S, P, а также предметные постоянные 0 и 1. Пусть M_0 — модель K_{DF} и D_0 — ее диаграмма. K положим равным $K_{DF} \cup D_0$.

Пусть $M_n = M_0\{y_1, \ldots, y_n\}$ — кольцо дифференциальных многочленов с коэффициентами в M_0, $n \geqslant 1$. Для каждого многочлена $q\{y_1, \ldots, y_n\} \in M_n$ выделим специальный предикат $Q_q(y_1, \ldots, y_n)$, определенный в K и утверждающий, что $q\{y_1, \ldots, y_n\}=0$. Обозначим через J_0 множество всех таких предикатов. Мы постараемся связать пред-идеалы в J_0 над K с некоторыми идеалами в M_n. Теория пред-идеалов в J_0 над K, как легко видеть, дизъюнктивна.

Если ввести множество высказываний J_0^*, как это делалось в п. 8.2, то множество $K \cup J_0^*$ окажется противоречивым. Пусть V_0 — полная система составных точек для J_0 над K, определенная в п. 8.2. Для любого идеала J в J_0 над K обозначим через J_* множество дифференциальных многочленов $q\{y_1, \ldots, y_n\}$, фигурирующих в качестве индексов предикатов из J. Как и в п. 8.3, доказывается, что J_* — обычный идеал в M_n.

8.4.1. Теорема. *Подмножество* $J=\{Q_{q_\mu}(y_1, \ldots, y_n)\}\subset J_0$ *будет неприводимым предидеалом в* J_0 *над* K *тогда и только тогда, когда соответствующее подмножество* $J_*=\{q_\mu(x_1, \ldots, x_n)\}\subset M_n$ *будет простым дифференциальным идеалом в* M_n.

Идеал в M_n называется *дифференциальным*, если он замкнут относительно операции дифференцирования.

Доказательство. Допустим, что J — неприводимый пред-идеал в J_0 над K. Доказательство простоты J_* проводится точно так же, как и в теореме 8.3.2. Осталось показать, что если $q\{y_1, \ldots, y_n\}$ принадлежит J_* и $r\{y_1, \ldots, y_n\}$ — производная q, то $r\{y_1, \ldots, y_n\}$ также принадлежит J_*. Иными словами, мы должны установить, что

$$\mathbf{8.4.2.}\quad K \cup J \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n [Q_q(y_1, \ldots, y_n) \supset Q_r(y_1, \ldots, y_n)].$$

Утверждается даже большее, а именно, что

$$\mathbf{8.4.3.}\quad K \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n [Q_q(y_1, \ldots, y_n) \supset Q_r(y_1, \ldots, y_n)].$$

Действительно, предположим, что $b_1, \ldots, b_n$ — элементы какого-то дифференциального поля M' — расширения M, такие, что $q\{b_1, \ldots, b_n\}=0$ в M'. Дифференцируя это равенство, мы получим $r\{b_1, \ldots, b_n\}=0$, что и означает истинность $Q_r(b_1, \ldots, b_n)$ в M'. Таким образом, первая часть теоремы доказана. Тот факт, что из простоты идеала J_* следует неприводимость J, устанавливается с помощью фактор-кольца так, как это делалось при доказательстве теоремы 8.3.2.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся два простых вспомогательных результата (см. Ритт [1]).

8.4.4. Теорема. *Пусть F—дифференциальное кольцо, содержащее поле рациональных чисел, и J_* — идеал в F* *). *Допустим, что некоторая положительная степень элемента b принадлежит J_*. Тогда некоторая положительная степень производной b также содержится в J_*. Тем самым это верно и для всех производных b.*

8.4.5. Теорема. *Пусть F — дифференциальное кольцо, содержащее поле рациональных чисел, и J_* — идеал в F. Допустим, что произведение $bc \in J_*$, где b, $c \in F$. Тогда для любой пары целых неотрицательных чисел i и j некоторая степень $a^{(i)}b^{(j)}$ принадлежит J_* ($a^{(i)}$ и $b^{(j)}$ обозначают соответственно i-ю и j-ю производные a и b).*

Используя 8.4.4 и 8.4.5, мы получим следующий результат:

8.4.6. Теорема. *Подмножество $J=\{Q_{q_\mu}(y_1, \ldots$ $\ldots, y_n)\}\subset J_0$ является пред-идеалом в J_0 тогда и только тогда, когда соответствующее подмножество $J_*=$ $=\{q_\mu\{y_1, \ldots, y_n\}\}$ — совершенный идеал в M_n.*

Идеал в M_n называется *совершенным*, если он дифференциальный и совпадает со своим радикалом.

Доказательство. Если J — пред-идеал в J_0, то он представляется в виде пересечения неприводимых пред-идеалов: $J=\bigcap\limits_{\lambda}\{J_\lambda\}$. Соответствующие множества $J_{*\lambda}$ в M_n — простые дифференциальные идеалы, и потому их пересечение J_* — радикальный идеал (см. доказательство теоремы 8.3.3). Более того, J_* — дифференциальный идеал, так как J_* является пересечением идеалов, замкнутых относительно дифференцирования. Таким образом, J_* — совершенный идеал.

Обратно, допустим, что J_* — совершенный идеал. Для доказательства того, что J — предидеал в J_0, мы должны показать, что любой предикат $Q_q(y_1, \ldots, y_n) \in J_0 - J$ не выводится из $K \cup J$.

По предположению, $q\{y_1, \ldots, y_n\} \notin J_*$. Обозначим через T множество всех совершенных идеалов в M_n,

*) Здесь, как и в следующей теореме, под идеалом в F подразумевается дифференциальный идеал. (*Прим. перев.*)

содержащих J_* и не содержащих q. T не пусто, так как $J_* \in T$, и частично упорядочено по включению. Объединение элементов любого упорядоченного подмножества T служит верхней гранью этого множества. Следовательно, по лемме Цорна T содержит максимальный элемент J'_*. J'_* — дифференциальный идеал, совпадающий со своим радикалом. Докажем, что J'_*, помимо прочего, — простой идеал. Пусть, наоборот, для некоторых r, $s \in M_n$ будет $rs \in J'_*$, а $r \notin J'_*$ и $s \notin J'_*$. Поскольку J'_* совершенный, то в силу 8.4.4 и 8.4.5 все произведения вида $r^{(i)}s^{(j)}$ принадлежат J'_*.

Обозначим через J_1 множество всех элементов M_n вида

$$b = b_0 r + b_1 r' + \ldots + b_k r^{(k)} + j_1,$$

где $k \geqslant 0$, $b_0, b_1, \ldots, b_k \in M_n$ и $j_1 \in J_*$. Пусть J'_1 — радикал J_1. По теореме 8.4.4 J'_1 — дифференциальный идеал и, следовательно, J'_1 — совершенный. Но J'_1 — собственное расширение J'_*, так как $r \in J'_1 - J'_*$. Поэтому в силу максимального свойства J'_* q принадлежит J'_1 и некоторая степень q принадлежит J_1, скажем,

$$q^m = b_0 r + b_1 r' + \ldots + b_k r^{(k)} + j_1.$$

Аналогично,

$$q^l = c_0 s + c_1 s' + \ldots + c_i s^{(i)} + j_2,$$

где $l > 0$, $i \geqslant 0$, $c_0, \ldots, c_i \in M_n$ и $j_2 \in J'_*$, откуда

$$q^{m+l} = \sum b_\lambda c_\mu r^{(\lambda)} s^{(\mu)} + j_3, \quad \text{где} \quad j_3 \in J'_*.$$

Однако, как уже указывалось, все произведения $r^{(\lambda)}s^{(\mu)}$ и, в частности, rs содержатся в J'_*. Отсюда вытекает, что $q^{m+l} \in J'_*$, и, следовательно, ввиду радикальности J'_* будет $q \in J'_*$. Полученное противоречие означает, что J'_* — простой идеал. На основании теоремы 8.4.1 мы заключаем, что соответствующее множеству J'_* множество J' предикатов в J_0 является неприводимым пред-идеалом. Но раз $J' \supset J$ и $Q_q(y_1, \ldots, y_n) \notin J'$, то тем более $Q_q(y_1, \ldots, y_n)$ нельзя вывести из $K \cup J$.

8.4.7. Теорема (Ритт). *Пусть $q\{y_1, \ldots, y_n\}$, $q_1\{y_1, \ldots, y_n\}, \ldots, q_r\{y_1, \ldots, y_n\}$—такие дифференциальные многочлены из кольца $M_0\{y_1, \ldots, y_n\}$ над дифференциальным полем M_0, что q обращается в нуль во всех общих нулях $q_1, \ldots, q_r$ в любом дифференциальном поле — расширении M_0. Тогда некоторая положительная степень q^ρ многочлена q принадлежит дифференциальному идеалу $[q_1, \ldots, q_r]$, порожденному $q_1, \ldots, q_r$ в M_0.*

Доказательство. Обозначим через J_* множество всех дифференциальных многочленов из кольца $M_0\{y_1, \ldots, y_n\}$, некоторая степень которых содержится в $[q_1, \ldots, q_r]$. С помощью 8.4.4 легко заметить, что J_* — совершенный идеал. Мы должны показать, что q принадлежит J_*. По условию теоремы, высказывание

8.4.8. $$\forall y_1 \ldots \forall y_n [Q_{q_1}(y_1, \ldots, y_n) \wedge \ldots \wedge Q_{q_r}(y_1, \ldots, y_n) \supset Q_q(y_1, \ldots, y_n)]$$

истинно во всех моделях K. Иными словами высказывание 8.4.8 выводимо из K. Таким образом, $Q_q(y_1, \ldots, y_n)$ принадлежит пред-идеалу J, порожденному $Q_{q_1}, \ldots, Q_{q_r}$ в J_0 над K. Пусть J_* — множество дифференциальных многочленов из $M_0\{y_1, \ldots, y_n\}$, соответствующее J. Поскольку J'_* содержит $q_1, \ldots, q_r$ и является пересечением содержащих его совершенных идеалов, то J'_* совпадает с J_*. Учитывая, что $Q_q \in J$, мы получаем, что $q \in J'_* = J_*$.

Аналогично Nullstellensatz для обычных многочленов, предположение о том, что q обращается в нуль во всех общих нулях $q_1, \ldots, q_r$ в любом дифференциальном поле (расширении M_0), можно заменить более слабым требованием. В самом деле, так как каждое дифференциальное поле (нулевой характеристики) вкладывается в дифференциально замкнутое поле, то в формулировке теоремы вместо фразы «в любом дифференциальном поле — расширении M_0''» можно употребить «в любом дифференциально замкнутом расширении M_0''». Более того, в силу модельной полноты теории дифференциально замкнутого поля 8.4.8 будет истинно во *всех* дифференциально замкнутых расширениях M_0, если оно истинно *хотя бы в одном* дифференциально замкнутом расширении M_0. В соответствии с этим, в теореме 8.4.7 фразу «в любом дифференциальном поле — расширении M_0» можно заменить фразой «в некотором дифференциально замкнутом расширении M_0».

Заключение теоремы Ритта, если расписать его более подробно, состоит в следующем:

Существуют целое число $\rho>0$ *и целые числа* $l_i\geqslant 0$, $i=1, \ldots, r$, *такие, что*

8.4.9.

$$q\{y_1, \ldots, y_n\})^{\rho}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k} p_{ij}\{y_1, \ldots, y_n\}\, q_i^{(j)}\{y_1, \ldots, y_n\}.$$

В таком виде это утверждение не формализуется в качестве какого-нибудь предиката от коэффициентов многочленов $q_1, \ldots, q_r, q$. Однако несложное рассуждение, параллельное доказательству теоремы 5.4.6, приводит к следующей теореме:

8.4.10. Теорема. *При данных границах для n, для порядков и степеней $q_1, \ldots, q_r, q$ в условиях теоремы 8.4.7 существуют границы ρ_0, λ_0, μ_0 для показателя степени q, для порядков производных $q_i^{(j)}$ и для порядков и степеней многочленов p_{ij} соответственно. Указанные границы не зависят от частного выбора дифференциального поля M_0.*

Читателю не составит особого труда полностью воспроизвести это доказательство.

Выбрав подходящим образом полную систему составных точек для J_0 над K, мы можем применить к настоящему случаю общую теорию многообразий, развитую в п. 8.2. Нетрудно проверить, что теория полученных таким способом многообразий полностью совпадает с теорией Ритта для дифференциальных многообразий. Любопытно отметить, что в теории Ритта в том виде, как она была им первоначально представлена, ее автору пришлось рассматривать точки нескольких полей, т. е., по нашей терминологии, ввести составные точки. Конструкция Колчина [1] показывает, что на самом деле можно ограничиться множеством точек одного дифференциального расширения M_0. Соответствующая задача для алгебраических многообразий была решена нами в конце п. 8.3. Поскольку для дифференциальных полей мы не располагаем понятием, подобным алгебраическому замыканию (в отличие от понятия алгебраически замкнутого расширения), рассуждение, использованное в той ситуации, сюда непосредственно не переносится. В заключение этого раздела мы установим еще один результат, который в ряде случаев оказывается довольно полезным.

8.4.11. Теорема. *Пусть* M_0 — *дифференциальное поле и* $P=\{(A_\mu, B_\mu)\}$ — *множество всех упорядоченных пар подмножеств кольца* $M_0\{y_1, \ldots, y_n\}$, *таких, что система уравнений и неравенств*

8.4.12. $q\{y_1, \ldots, y_n\}=0$ *для всех* $q \in A_\mu$,

$r\{y_1, \ldots, y_n\}=0$ *для всех* $r \in B_\mu$

имеет решение в некотором расширении M_0. *Тогда существует расширение* M' *поля* M *такое, что для любой пары* $(A_\mu, B_\mu) \in P$ *система* 8.4.12 *разрешима в* M'.

Доказательство. Пусть D_0 — диаграмма M_0, и пусть $Q_q(y_1, \ldots, y_n)$—сформулированный в терминах словаря D_0 предикат, утверждающий, что $q\{y_1, \ldots, y_n\}=0$. Для каждой пары $(A_\mu, B_\mu) \in P$ введем различные индивиды a_ν^μ, $\nu=1, \ldots, n$. Обозначим через A_μ^* множество всех высказываний $Q_q(a_1^\mu, \ldots, a_n^\mu)$, где $q \in A_\mu$, и через $\overline{B}_\mu^*$ — множество всех высказываний $\sim Q_r(a_1^\mu, \ldots, a_n^\mu)$, где $r \in B_\mu$. Понятно, что любая модель M' множества $H=K_{DF} \cup D_0 \cup \bigcup_\mu \{A_\mu^* \cup \overline{B}_\mu^*\}$ удовлетворяет условию теоремы. В соответствии с этим, мы должны лишь доказать непротиворечивость H. Но это следует из того факта, что любая конечная система уравнений и неравенств 8.4.12, обладающая решением в *некотором* расширении поля M_0, разрешима в *каждом* дифференциально замкнутом расширении поля M_0.

8.5. Семнадцатая проблема Гильберта. Теория формально вещественных и вещественно замкнутых полей была первоначально развита Артином и Шрейером для решения семнадцатой проблемы Гильберта относительно представления рациональных функций в виде суммы квадратов. Хотя определение вещественно замкнутого поля, приведенное в п. 8.2, не зависит от понятия формально вещественного поля, методы теории формально вещественных полей часто оказываются полезными при выводе некоторых фундаментальных результатов о вещественно замкнутых полях. В настоящем разделе мы получим основные результаты Артина, основываясь на том факте, что теория вещественно замкнутого упорядоченного поля является модельным пополнением теории упорядоченного поля. Мы докажем также существование некоторых границ в представлении положительных функций, подобно тому, как это делалось в теоремах Гильберта и Ритта о нулях (дифференциальных) многочленов (см. 5.4.6 и 8.4.10).

Прежде всего (хотя для доказательства теоремы Артина это и не понадобится нам) мы займемся тем, что дадим описание проблемы упорядочения для (коммутативных) полей средствами метаматематической теории идеалов.

Пусть $K_{CF}^{(0)}$ — множество аксиом поля нулевой характеристики, сформулированное в терминах отношений E, S, P и предметных постоянных 0 и 1 (см. п. 2.2). Пусть M — модель $K_{CF}^{(0)}$ с диаграммой D. Обозначим через H объединение множеств аксиом 2.2.5, 2.2.6 и 2.2.16, в которых введено отношение порядка $Q(x, y)$ (интерпретируемое как $x \leqslant y$). $K'_{OF} = K_{CF}^{(0)} \cup H$ — это не что иное, как множество аксиом упорядоченного поля.

Пусть J_0 — множество всех высказываний вида $Q(0, a)$, где $a \in M$ и $a \neq 0$. Мы будем изучать теорию идеалов в J_0 над множеством $K = K'_{OF} \cup D$.

Каждому подмножеству $J = \{Q(0, a_\nu)\} \subset J_0$ соответствует подмножество $J_* = \{a_\nu\}$ множества $M_0 = M - \{0\}$. Если J — идеал в J_0 (над K), то мы назовем J_0 *порядковым идеалом в* M. Попытаемся теперь охарактеризовать подмножества J_0, которые являются идеалами, или, что то же самое, порядковые идеалы в M. Пусть J — идеал в J_0 и J_* — соответствующий ему порядковый идеал в M. Поскольку все модели K являются упорядоченными полями, необходимо выполняются следующие условия:

8.5.1. J_* аддитивно и мультипликативно замкнут, т. е. $a, b \in J_*$ влечет $a+b \in J_*$ и $ab \in J_*$; J_* содержит квадраты всех элементов M_0, в частности, $1 \in J_*$.

Кроме того, имеет место

8.5.2. Теорема. *Если порядковый идеал J_* содержит элемент $a \neq 0$ вместе с обратным к нему $(-a)$, то $J_* = M_0$.*

Доказательство. Положим $a' = -a$. По условию, D содержит высказывание $S(a, a', 0)$, а J содержит высказывания $\sim E(0, a)$, $Q(0, a)$ и $Q(0, a')$. Отсюда вытекает, что множество $K \cup J$ противоречиво, так как соотношения $a + a' = 0$, $0 \leqslant a$, $0 \leqslant a'$ в упорядоченном поле возможны только при $a = 0$. В связи с этим $K \cup J \vdash X$ для всех $X \in J_0$, так что $J = J_0$ и $J_* = M_0$.

С другой стороны, J_* действительно представляет собой порядковый идеал, так как соответствующее ему множество J является идеалом в J_0 над K. $J_* = M_0$ мы будем называть *несобственным* порядковым идеалом, а все остальные порядковые идеалы — *собственными.*

Обозначим через Φ множество всех подмножеств $J_* \subset M_0$, удовлетворяющих 8.5.1 и следующему условию:

8.5.3. Для всякого $a \in M_0$ a и $(-a)$ не могут одновременно содержаться в J_*.

Все элементы Φ содержат любую сумму квадратов элементов из M_0. Обратно, множество J_S всех сумм квадратов $a_1^2 + \ldots + a_n^2$, $n \geqslant 1$, $a_i \in M_0$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяет 8.5.1. Если 0 представим в таком виде: $0 = a_1^2 + \ldots + a_n^2$, то $n > 1$, так как $a_1 \neq 0$. Но тогда элемент $a = a_1^2$ и обратный к нему $-a = a_2^2 + \ldots + a_n^2$ оба принадлежат J_S. Это противоречит 8.5.3 и, следовательно, в этом случае Φ пусто. С другой стороны, если 0 не представляется в виде суммы квадратов, то Φ непусто, поскольку $J_S \in \Phi$. Таким образом, Φ непусто тогда и только тогда, когда M формально вещественно. Ясно, что M_0 не содержится в Φ.

8.5.4. Теорема. *Пусть $J' \in \Phi$ и $a \in M_0 - J'$. Тогда существует элемент $J'' \in \Phi$ такой, что $J'' \supset J'$ и $(-a) \in J''$.*

Доказательство. Обозначим через J'' множество всех элементов вида $p(-a)$, где $p(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$, $b_n \neq 0$, $n \geqslant 0$, — многочлен, ненулевые коэффициенты которого принадлежат J'. Беря многочлены вида $p(x)=b_0$ и $p(x)=x$, мы видим, что J'' содержит J' и $(-a)$. Кроме того, очевидно, что J'' удовлетворяет 8.5.1 и включает в себя все квадраты элементов из M_0. Допустим теперь, что для некоторого $b\in M_0$ b и $-b$ принадлежат J''. Тогда $b+(-b)=0$ также представимо в виде $p(-a)$, где $p(x)$ — один из описанных выше многочленов. Разделяя в $p(x)$ четные и нечетные степени x, мы можем написать

8.5.5. $p(x)=q(x^2)+xr(x^2)$,

где q и r — многочлены, ненулевые коэффициенты которых по-прежнему принадлежат J'. По предположению,

8.5.6. $p(-a)=q(a^2)-ar(a^2)=0$.

Если $r(y)$ — нулевой многочлен (от y), то ввиду 8.5.6 $q(a^2)=0$. Допустим, что

$$q(y)=c_jy^j+c_ly^l+\ldots+c_my^m,$$
$$j<l<\ldots<m,\quad c_j\neq 0,\ c_l\neq 0,\ \ldots,\ c_m\neq 0.$$

Тогда равенство $q(a^2)=c_ja^{2j}+c_la^{2l}+\ldots+c_ma^{2m}=0$ означает, что ненулевой элемент c_ja^{2j} и его обратный $-c_ja^{2j}$ оба принадлежат J'. Отсюда вытекает, что $q(y)$ — также нулевой многочлен. Это, однако, невозможно, поскольку $p(x)$, по условию, ненулевой многочлен. Таким образом, $r(y)$ — ненулевой многочлен от y и $r(a^2)\in J'$, и, следовательно, $r(a^2)\neq 0$. Аналогично, $q(y)$ не может быть нулевым многочленом, и потому $q(a^2)\in J'$ и $q(a^2)\neq$ $=0$. 8.5.6 переписывается следующим образом:

$$a=q(a^2)\,r(a^2)\left(\frac{1}{r(a^2)}\right)^2.$$

Поскольку множители $q(a^2)$, $r(a^2)$ и $(r(a^2)^{-1})^2$ в правой части все содержатся в J', то a также принадлежит J', вопреки условию теоремы. Таким образом, $J''\in\Phi$ и наше утверждение доказано.

Если Φ непусто, то оно частично упорядочено по включению. Более того, объединение элементов любого линейно упорядоченного подмножества Φ снова принадлежит Φ. Используя лемму Цорна, мы заключаем, что каждый элемент Φ содержится в некотором максимальном элементе.

8.5.7. Теорема. *Если J' — максимальный элемент Φ и a — любой элемент M_0, то J' содержит либо a, либо $(-a)$. Обратно, если $J' \in \Phi$ и для каждого $a \in M_0$ либо $a \in J'$, либо $(-a) \in J'$, то J' максимален в Φ.*

Доказательство. Пусть J' максимален в Φ и $a \in M_0 - J'$. По теореме 8.5.4 существует элемент $J'' \in \Phi$ такой, что $J'' \supset J'$ и $(-a) \in J''$. Но в силу максимальности J' имеем $J'' = J'$ и $(-a) \in J'$, что и требовалось доказать. Обратное очевидно.

Отсюда вытекает, что каждый максимальный элемент J' можно рассматривать как множество положительных элементов при некотором упорядочении M. Справедлив даже более общий результат.

8.5.8. Теорема. *Пусть J_* — собственное подмножество M_0, J_* является порядковым идеалом тогда и только тогда, когда J_* удовлетворяет* 8.5.1 *и* 8.5.3.

Доказательство. Утверждение теоремы состоит в том, что J_* является порядковым идеалом (отличным от M_0) тогда и только тогда, когда J_* принадлежит Φ. Как мы уже видели, условия 8.5.1 и 8.5.3 (в силу 8.5.2) необходимы. Нам остается лишь доказать их достаточность. Допустим, что $J_* \in \Phi$ и пусть J — соответствующее подмножество J_0. Мы должны показать, что J — идеал в J_0. Это эквивалентно тому, что высказывание $Q(0, a)$ для любого $a \in M_0 - J_*$ не выводится из $K \cup J$. Согласно теореме 8.5.4 существует элемент $J' \in \Phi$ такой, что $J' \supset J_*$ и $(-a) \in J'$. По лемме Цорна, J' в свою очередь содержится в некотором максимальном элементе $J'' \in \Phi$. J'' определяет порядок в M, при котором a отрицательно, а все элементы J'' и, в частности, все элементы J_* положительны. Отсюда следует, что $Q(0, a)$ не может быть выведено из $K \cup J$, и наша теорема доказана.

Таким образом, теоремой 8.5.8 установлено, что Φ есть не что иное, как множество порядковых идеалов (не равных M_0), в то время как теоремой 8.5.7 вскрыта структура максимальных порядковых идеалов.

8.5.9. Теорема. *Любой собственный порядковый идеал есть пересечение всех содержащих его максимальных порядковых идеалов. Иными словами, каждый собственный идеал в J_0 над K есть пересечение всех содержащих его максимальных идеалов.*

Это немедленно следует из доказанного ранее утверждения о том, что для любого элемента $a \in M_0 - J_*$ найдется собственный максимальный порядковый идеал J'_* такой, что $J'_* \supset J_*$ и $a \notin J'_*$.

8.5.10. Теорема. *Пусть C — любое подмножество M с тем лишь условием, что $0 \notin C$ и $1 \in C$. Для того чтобы элемент $a \in M$ был положительным при любом упорядочении поля M, при котором все элементы C положительны, необходимо и достаточно, чтобы a представлялся в виде*

8.5.11.
$$a = c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + \ldots + c_n a_n^2,$$
$$n \geqslant 1,\ a_i \in M,\ a_i \neq 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где c_i — произведения элементов из C.

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости обозначим через J_* множество элементов, представимых в виде 8.5.11. Во всяком случае, J_* удовлетворяет 8.5.1. Допустим, что $0 \in J_*$. Это означает существование тождества

8.5.12.
$$0 = c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + \ldots + c_n a_n^2$$

такого, как описано в 8.5.11. Понятно, что в этом случае M уже нельзя упорядочить так, что все элементы C и, следовательно, элементы J_* будут положительны. Покажем тогда, что все элементы могут быть представлены в виде 8.5.11. В 8.5.12 $n > 1$, так как $c_1 a_1^2 \neq 0$. Для произвольного $a \in M$

$$c_1 c_n \left(\frac{a_1(1-a)}{2c_n a_n}\right)^2 + \ldots + c_{n-1} c_n \left(\frac{a_{n-1}(1-a)}{2c_n a_n}\right)^2 + \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1+a^2}{4c_n a_n^2}\left(c_1 a_1^2 + \ldots + c_{n-1} a_{n-1}^2 + c_n a_n^2\right) +$$
$$+ \frac{a}{2c_n a_n^2}\left(-c_1 a_1^2 - \ldots - c_{n-1} a_{n-1}^2 + c_n a_n^2\right) =$$
$$= \frac{1+a^2}{4c_n a_n^2} \cdot 0 + \frac{a}{2c_n a_n^2} \cdot 2c_n a_n^2 = a.$$

Итак,

8.5.13.

$$a = c_1 c_n \left(\frac{a_1(1-a)}{2c_n a_n}\right)^2 + \ldots$$
$$\ldots + c_{n-1} c_n \left(\frac{a_{n-1}(1-a)}{2c_n a_n}\right)^2 + \left(\frac{1+a}{2}\right)^2.$$

Это и есть требуемое представление a.

Допустим теперь, что $0 \notin J_*$. Тогда $J_* \subset M_0$ и J_* удовлетворяет 8.5.3 (так как $a \in J_*$ и $(-a) \in J_*$ влечет $0 = a + (-a) \in J_*$). Таким образом, J_* — порядковый идеал, и, следовательно, для любого $a \notin J_*$ существует упорядочение M, при котором a отрицательно, а все элементы J_* (и тем самым элементы C) положительны.

Отметим, что область J_0, вообще говоря, не дизъюнктивна. Это подсказывается тем, что для дизъюнкции двух высказываний типа $0 \leqslant a$ и $0 \leqslant b$ непосредственно не видно какого-нибудь простого эквивалентного высказывания типа $0 \leqslant c$. Пусть $M = R(t)$ — поле функции от одной переменной над полем рациональных чисел R. Покажем, что соответствующая область J_0 не дизъюнктивна *).

Положим $f_1(t) = t^2 - 2$ и $f_2(t) = t$ и докажем отсутствие такого элемента $f(t) \in M$, что

$$K \vdash Q(0, f_1(t)) \vee Q(0, f_2(t)) \equiv Q(0, f(t))$$

(ясно, что $f(t)$ можно считать многочленом). Разобьем числовую ось на три интервала: $I_1 = (-\infty, -\sqrt{2})$, $I_2 = (-\sqrt{2}, 0)$, $I_3 = (0, +\infty)$. Если $x \in I_1 \cup I_3$, то одно из двух чисел, $f_1(x)$ или $f_2(x)$, строго больше нуля. Пусть, например, $f_1(x) > 0$, тогда найдется такая окрестность U точки x, что $f_1(y) > 0$ для любого $y \in U$. Поэтому существует последовательность *трансцендентных* чисел x_n, имеющая пределом x, так что $f_1(x_n) > 0$. Для каждого n в $R(t)$ можно ввести порядок, полагая $\varphi(t) > 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x_n) > 0$. Так как $f_1(x_n) > 0$, то, учитывая условие, которому удовлетворяет $f(t)$, мы приходим

*) Доказательство этого факта, приведенное в оригинале, ошибочно. (*Прим. перев.*)

к выводу, что $f(x_n)\geqslant 0$. Замечая, что $x_n \to x$, получаем $f(x)\geqslant 0$. Аналогично доказывается, что $f(x)\leqslant 0$, если $x\in I_2$. Таким образом, $f(t)$ в точках 0 и $-\sqrt{2}$ меняет знак. Следовательно, $f(0)=f(-\sqrt{2})=0$ и, кроме того, 0 и $-\sqrt{2}$ являются корнями *нечетной* кратности. Посмотрим, какие корни, отличные от 0 и $-\sqrt{2}$, могут быть у $f(t)$. Пусть $f(x_0)=0$, но $x_0\neq 0$ и $x_0\neq -\sqrt{2}$. x_0 лежит внутри одного из интервалов I_i, так что $f(t)$ не меняет знак при переходе через точку x_0. Следовательно, x_0 — корень *четной* кратности. Итак, корнями $f(t)$ нечетной кратности могут быть только 0 и $-\sqrt{2}$. Однако коэффициенты $f(t)$ лежат в поле рациональных чисел, а потому число $\sqrt{2}$, сопряженное над R числу $-\sqrt{2}$, также должно быть корнем $f(t)$ и притом той же кратности. Ввиду сказанного выше мы пришли к противоречию, которое и доказывает требуемое утверждение.

Используем полученные нами результаты, в частности, 8.5.10, для доказательства некоторых обобщений теоремы Артина об определенных функциях.

Пусть M_0 — упорядоченное поле, M — его вещественное замыкание, M^n — n-мерное декартово пространство с координатами в M и $M_1=M_0[x_1, \ldots, x_n]$. Пусть также J^* — простой идеал в M_1 и V — соответствующее многообразие в M^n. (Таким образом, V неприводимо над полем M_0, но, вообще говоря, не над полем M.) Имея в виду эти обозначения, сформулируем следующую теорему:

8.5.14. Теорема. *Пусть*

8.5.15. $f(x_1, \ldots, x_n),\ g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots$
$$\ldots, g_r(x_1, \ldots, x_n),\ r\geqslant 1,$$

— *такое множество многочленов из* M_1, *что* $g_i(x_1, \ldots, x_n)\notin J^*$, $i=1, \ldots, r$, *и для любой точки* $(a_1, \ldots, a_n)\in V$ *совокупность неравенств*

$$g_i(a_1, \ldots, a_n)>0, \qquad i=1, \ldots, r,$$

влечет

$$f(a_1, \ldots, a_n)\geqslant 0.$$

Тогда существуют многочлены $h_0(x_1, \ldots, x_n)$, $h_1(x_1, \ldots \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)$, *принадлежащие* M_1, *для которых выполняется сравнение*

8.5.16.

$$(h_0(x_1, \ldots, x_n))^2 f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \equiv \sum_{i=1}^{m} k_i(x_1, \ldots, x_n)(h_i(x_1, \ldots, x_n))^2 (\mathrm{mod}\, J^*).$$

где $h_0(x_1, \ldots, x_n) \notin J^*$, *а* $k_i(x_1, \ldots, x_n)$ — *произведение всех или некоторых многочленов* $g_j(x_1, \ldots, x_n)$ *и положительных элементов поля* M_0.

Мы всегда можем предполагать, что произведение $k_i(x_1, \ldots, x_n)$ содержит каждый множитель $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ не более, чем в первой степени, так как все четные степени многочленов $g_j(x_1, \ldots, x_n)$ можно отправить в соответствующий многочлен $h_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказательство 8.5.14. Пусть $p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots \ldots, p_s(x_1, \ldots, x_n)$ — любой базис идеала J^*. Допустим, что не существует сравнения типа 8.5.16. Обозначим через M_2 фактор-кольцо $M[x_1, \ldots, x_n]/J^*$. Символы f, $g_1, \ldots \ldots, g_r$ мы будем использовать для обозначения не только многочленов 8.5.15, но и для соответствующих им классов эквивалентности в M_2 (это не грозит нам серьезной путаницей). По предположению, не существует равенства вида

8.5.17. $$h_0^2 f = \sum_{i=1}^{m} k_i h_i^2,$$

где $h_0, h_1, \ldots, h_m \in M_2$, $h_0 \neq 0$ и k_i являются произведениями g_j и положительных элементов поля M_0, которое рассматривается как подполе кольца M_2.

Пусть M_3 — поле частных M_2, так что M_3 есть расширение M_0 и, следовательно, имеет нулевую характеристику. Таким образом, наше предположение означает, что равенство вида

8.5.18. $$f = \sum_{i=1}^{m} k_i h_i^2$$

невозможно в M_3, где k_i — произведения g_j и положительных элементов M_0, а h_i — элементы M_3. Обозначим через C подмножество M_3, состоящее из $g_1, \ldots, g_r$ и всех положительных элементов M_0. Можно видеть, что все условия теоремы 8.5.10 выполняются. Поэтому отсутствие тождеств типа 8.5.18 показывает, во-первых, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ не принадлежит J^* (так как в противном случае равенство 8.5.18 удовлетворялось бы при $h_i=0$), и, во-вторых, что существует упорядочение поля M_3, при котором f отрицателен, а все элементы C положительны. Пусть M_3^* — поле M_3, рассматриваемое вместе с этим упорядочением. M_3^* содержит M_0 как упорядоченное подполе (т. е. упорядочения в M_0 и M_3 согласованы), поскольку все положительные элементы M_0 принадлежат C.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — элементы поля M_3, соответствующие неизвестным $x_1, \ldots, x_n$ в $M_1=M_0[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда $f, g_1, \ldots, g_r$ можно интерпретировать как некоторые значения, принимаемые целыми рациональными *функциями* на M_3 при значениях аргумента $x_1=\xi_1$, $x_2=\xi_2, \ldots, x_n=\xi_n$. В соответствии со сказанным в M_3 имеет место следующее утверждение:

8.5.19. Существуют индивиды $y_1, \ldots, y_n$ такие, что

$$p_i(y_1, \ldots, y_n)=0, \qquad i=1, \ldots, s,$$

и

$$g_i(y_1, \ldots, y_n)>0, \qquad i=1, \ldots, r,$$

но

$$f(y_1, \ldots, y_n)<0.$$

Утверждение 8.5.19 нетрудно сформулировать в качестве (экзистенциального) высказывания, все индивиды которого содержатся в M_0. X по-прежнему истинно в (упорядоченном) вещественном замыкании поля M_3^*, которое мы обозначим через M_4. Однако теория вещественно замкнутого упорядоченного поля модельно полна относительно теории упорядоченного поля. Поэтому, если X истинно в одном вещественно замкнутом расширении поля M_0, то оно истинно и в другом, что противоречит условию.

Частным случаем этой теоремы для $J^*=0$, $r=1$, $g_1(x_1, \ldots, x_n)=1$ является

8.5.20. Теорема. *Пусть M_0 — упорядоченное поле и M — его вещественное замыкание. Допустим, что много-*

член $f(x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами в M_0 (положительно) определен, т. е. неравенство

$$f(a_1, \ldots, a_n) \geqslant 0$$

выполняется для всех $a_1, \ldots, a_n \in M$. Тогда существуют положительные элементы $c_1, \ldots, c_m \in M_0$ и рациональные функции $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами в M_0, такие, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i (f_i(x_1, \ldots, x_n))^2.$$

Основной результат Артина получается из этой теоремы, если в качестве M_0 взять поле рациональных чисел, или поле вещественных алгебраических чисел, или поле действительных чисел. В первом случае каждое положительное число представляется в виде суммы четырех квадратов *), а во втором и в третьем случаях каждое положительное число само есть квадрат. Таким образом, во всех трех случаях $f(x_1, \ldots, x_n)$ представляется в виде суммы квадратов:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} (f_i(x_1, \ldots, x_n))^2.$$

Более того, во втором и в третьем случаях M совпадает с M_0. Хотя в первом случае это уже не так, тем не менее утверждение о том, что $f(a_1, \ldots, a_n) \geqslant 0$ для всех $a_1, \ldots, a_n \in M_0$, эквивалентно утверждению о том, что $f(a_1, \ldots, a_n) \geqslant 0$ для всех $a_1, \ldots, a_n \in M$. Итак,

8.5.21. Теорема. *Пусть M_0 обозначает любое из трех полей: поле рациональных чисел, поле вещественных алгебраических чисел и поле действительных чисел. Допустим, что для всех $a_1, \ldots, a_n \in M_0$*

$$f(a_1, \ldots, a_n) \geqslant 0.$$

---

*) Имеется в виду теорема Лагранжа, утверждающая, что каждое положительное рациональное число есть сумма четырех квадратов, она является, например, частным случаем следующей известной теоремы:

Каждая квадратичная форма с рациональными коэффициентами от четырех и более переменных представляет рациональное число $a \neq 0$ в поле рациональных чисел тогда и только тогда, когда она представляет a в поле вещественных чисел (см., например З. И. Боревич и И. Р. Шафаревич. «Теория чисел», «Наука», 1964). *(Прим. перев.)*

Тогда существуют рациональные функции $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ *с коэффициентами в* M_0 *такие, что*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} (f_i(x_1, \ldots, x_n))^2.$$

Другие частные случаи теоремы 8.5.14 были доказаны Артином и Ленгом.

Предположим теперь, что многообразие V идеала J^* является гиперповерхностью в M^n, т. е. V — $(n-1)$-мерное неприводимое многообразие. В этом случае J^* порождается одним многочленом, скажем, $p(x_1, \ldots, x_n)$, и имеет место следующая

8.5.22. Теорема. *Предположим, что все условия теоремы* 8.5.14 *выполнены и степени многочленов* $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_i(x_1, \ldots, x_n)$, $p(x_1, \ldots, x_n)$ *не превышают некоторого фиксированного числа* ν. *Тогда равенство* 8.5.16 *выполняется для* $m+1$ *многочленов* $h_0(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)$ *и для* m *многочленов* $k_i(x_1, \ldots, x_n)$ *таких, что число* m *и степени* k_i *и* h_i *ограничены соответственно числами* μ_0 *и* λ_0, *зависящими только от* n *и* ν, *но не зависящими от частного выбора коэффициентов в многочленах* f, g_i, p *и даже от выбора поля* M_0.

Доказательство. Сформулируем в виде предиката $Q^*(z_1, \ldots, z_j)$ предположения теоремы 8.5.14 для обобщенных многочленов $f, g_1, \ldots, g_r$ и p степени ν с неопределенными коэффициентами $z_1, \ldots, z_m$. Соответственно для любой пары целых положительных чисел μ и λ сформулируем предикат $Q_{\mu\lambda}(z_1, \ldots, z_j)$, утверждающий существование многочленов $h_0, h_1, \ldots, h_\mu$ степени не выше λ, для которых

$$(h_0(x_1, \ldots, x_n))^2 f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{\mu} k_i(x_1, \ldots, x_n)(h_i(x_1, \ldots, x_n))^2 = g(x_1, \ldots, x_n)\, p(x_1, \ldots, x_n),$$

где $h_0(x_1, \ldots, x_n)$ не делится на $p(x_1, \ldots, x_n)$, а $k_i(x_1, \ldots, x_n)$ являются произведениями *различных* $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ и положительных элементов (поля M_0). Предикаты $Q^*(z_1, \ldots, z_j)$, $Q_{\mu\lambda}(z_1, \ldots, z_j)$ выражаются в терминах отношений E, S, P, Q и предметных постоянных 0 и 1, т. е. в терминах словаря K'_{OF}.

Теорема 8.5.14 гласит, что если $Q^*(a_1, \ldots, a_j)$ истинно в M для $a_1, \ldots, a_j \in M_0$, то $Q_{\mu\lambda}(a_1, \ldots, a_j)$ истинно в M_0 хотя бы для одной пары μ, λ. В силу теоремы 5.3.7 существует предикат $Q(z_1, \ldots, z_j)$ такой, что $Q(a_1, \ldots$ $\ldots, a_j)$ для любых $a_1, \ldots, a_j \in M_0$ истинно в M_0 тогда и только тогда, когда $Q^*(a_1, \ldots, a_j)$ истинно в M. Таким образом, для произвольных $a_1, \ldots, a_j \in M_0$, если $Q(a_1, \ldots, a_j)$ истинно в M_0, то $Q_{\mu\lambda}(a_1, \ldots, a_j)$ истинно в M_0 по крайней мере для одной пары μ, λ. В соответствии с этим объединение K'_{OF} и множества

8.5.23. $\{Q(a_1, \ldots, a_j), \sim Q_{\mu\lambda}(a_1, \ldots, a_j)\}$

противоречиво, где μ и λ независимо пробегают все положительные целые числа и $a_1, \ldots, a_j$ — произвольные индивиды, отличные от 0 и 1. Отсюда мы заключаем, что существует некоторое конечное подмножество множества 8.5.23:

8.5.24. $\{Q(a_1, \ldots, a_j), \sim Q_{\mu_1\lambda_1}(a_1, \ldots, a_j), \ldots$
$\ldots, \sim Q_{\mu_r\lambda_r}(a_1, \ldots, a_j)\}$

такое, что объединение его с K'_{OF} противоречиво. Следовательно,

8.5.25.

$$K'_{OF} \vdash Q(a_1, \ldots, a_j) \supset Q_{\mu_1\lambda_1}(a_1, \ldots, a_j) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee Q_{\mu_r\lambda_r}(a_1, \ldots, a_j).$$

Обозначим $\mu_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \mu_i$, $\lambda_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \lambda_i$. Поскольку

$$K'_{OF} \vdash Q_{\mu_i\lambda_i}(a_1, \ldots, a_j) \supset Q_{\mu_0\lambda_0}(a_1, \ldots, a_j), \quad i = 1, \ldots, r,$$

то мы получаем, что

$$K'_{OF} \vdash Q(a_1, \ldots, a_j) \supset Q_{\mu_0\lambda_0}(a_1, \ldots, a_j)$$

и тем самым

8.5.26.

$$K'_{OF} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q(x_1, \ldots, x_n) \supset Q_{\mu_0\lambda_0}(x_1, \ldots, x_n)].$$

Последнее есть не что иное, как формализованное утверждение теоремы 8.5.22.

8.6. Задачи

8.6.1. *Разностным полем* называется поле с заданным на нем *оператором сдвига* $T(x)$. Оператор $T(x)$ удовлетворяет тождествам:

$$T(a+b)=T(a)+T(b),\quad T(ab)=T(a)T(b)$$

для всех a и b из этого поля и $T(1)=1$. Развить метаматематическую теорию разностных идеалов и многообразий по аналогии с п. 8.4 (см. Ритт и Роденбуш [1]).

8.6.2. Рассмотреть теорию идеалов в структурах и полуструктурах *) с метаматематической точки зрения.

8.6.3. Обозначим через K объединение множества аксиом области целостности с единицей и диаграммы M, где M — модель этого множества. Пусть J_0 — множество высказываний вида $\exists z P(a, z, b)$ (т. е. «a делит b»), где a и b пробегают все элементы M. Исследовать теорию идеалов в J_0 над K и в $J_0^{\vee}$ над K.

8.6.4. Пусть K и M те же, что и в 8.6.3. Для каждого многочлена $p(x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами в M определим предикат $R_p(x_1, \ldots, x_n, y)$, утверждающий, что $y=p(x_1, \ldots, x_n)$. Для любой пары многочленов $p(x_1, \ldots, x_n)$ и $q(x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами в M обозначим через $Q_{pq}(x_1, \ldots, x_n)$ предикат

$$\exists y \exists z \exists w\, [R_p(x_1, \ldots, x_n) \wedge R_q(x_1, \ldots, x_n) \wedge P(y, w, z)].$$

Таким образом, $Q_{pq}(x_1, \ldots, x_n)$ выражает тот факт, что функциональное значение $p(x_1, \ldots, x_n)$ делит функциональное значение $q(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть J_0 — множество всех Q_{pq} для фиксированного n. Развить теорию пред-идеалов в J_0 над K и их многообразий.

8.6.5. Исследовать многообразия структур метаматематических идеалов, введенных в п. 7.6.3.

8.6.6. Развить теорию идеалов и многообразий для систем полиномиальных неравенств типа $p(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$ и $p(x_1, \ldots, x_n) > 0$.

Библиографическая справка. Изложение разделов 8.1—8.4 следует А. Робинсону [1] и [3]. Стандартное доказательство теоремы Ритта 8.3.7 приведено в книге Ритта [1]. Первоначальные результаты о формально вещественных полях и семнадцатой проблеме Гильберта содержатся в статьях Артина и Шрейера [1] и Артина [1] (см. также работу Ленга [1]). Относительно изложенной здесь теории смотри А. Робинсон [3], [7], [11]. Дальнейшие исследования этих вопросов читатель сможет найти в работах Хенкина [7] и Крейсела [2].

---

*) Здесь имеются в виду структуры в смысле Биркгофа. *Полуструктурой* называется универсальная алгебра с одной коммутативной, ассоциативной, идемпотентной бинарной операцией $x \cap y$ (интерпретируется как пересечение x и y). В полуструктуре естественным образом вводится частичная упорядоченность: $x \leqslant y$, если $x \cap y = x$. (*Прим. перев.*)

РАЗЛИЧНЫЕ ВОПРОСЫ

9.1. Введение функциональных символов. В п. 3.1 в связи с интерпретацией кванторов существования мы ввели для удобства функциональные символы (или, иначе, *функторы Сколема*). Такие функторы естественным образом возникают в большинстве алгебраических структур, например, функторы суммы и произведения $\sigma(x, y)$ и $\pi(x, y)$ в кольце или в поле. (Такой стиль обозначений мы будем предпочитать обычному: $x+y$ или $x \cdot y$, который удобен только для двуместных функторов.) До сих пор мы избегали введения функциональных символов в наш формальный язык L, заменяя их символами отношений, специфический характер которых описывался множеством аксиом (например, отношения $S(x, y, z)$ и $P(x, y, z)$ обозначали соответственно сумму и произведение). Однако для некоторых целей становится необходимым рассмотрение функторов как составной части формального языка. Мы укажем теперь, какие изменения нужно сделать в материале главы II для того, чтобы оформить эту мысль.

Исходными символами языка являются, во-первых, символы, введенные в начале п. 1.2 (символы объектов, переменные, символы отношений, пропозициональные связки, кванторы и скобки), и, во-вторых, *функциональные символы* (*символы функций*) или *функторы*. Последние распадаются на счетное число непересекающихся классов F_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ (функторы *порядка* n, или n*-местные функторы*, или n*-арные функторы*). Функторы мы будем обозначать посредством $\chi(\ )$, $\varphi(\ )$, $\psi(\ )$ (строчными греческими буквами с n пустыми местами, отделенными запятыми при $n>1$ и окаймленными круглыми скобками). Классы F_n являются вполне определенными множествами произвольной фиксированной мощности.

С помощью введенных символов определим по индукции *термы*. Термами, во-первых, являются символы объектов и переменные и, во-вторых, выражения, полученные замещением пустых мест функтора термами. Терм называется *полным*, если он не содержит ни одной переменной. Атомарные формулы являются результатом замены пустых мест символа отношений термами.

Правильно построенные формулы (ппф) определяются точно так же, как в п. 1.2, начиная с атомарных формул. Мы, естественно, будем говорить, что ппф X содержит переменную y, не только тогда, когда y замещает одно из пустых мест отношения в X, но и тогда, когда y фигурирует внутри терма, который в свою очередь замещает пустое место некоторого отношения в X (например, $A(\psi(x, y), b))$. Деление ппф на высказывания и предикаты остается прежним, и, кроме того, сохраняются все наши соглашения относительно скобочной символики.

Аксиомы языка и его правила вывода остаются такими же, как в п. 1.3, с одним добавлением: в качестве a в 1.3.2 можно брать любой полный терм. В правилах 1.3.3 символ a по-прежнему обозначает символ объекта, который, однако, может содержаться внутри функтора, входящего в терм. Как и прежде, правила подстановки 1.3.4—1.3.7 являются следствиями правил вывода.

Структуры, которые будут здесь рассмотрены, содержат, помимо отношений, ряд функций от n переменных. Говорят, что функция $\varphi(,\ldots,)$ задана в структуре M, если каждой n-ке $(a_1, \ldots, a_n)$ объектов из M сопоставляется определенное функциональное значение в M. Так же как и в случае отношений (п. 1.4), мы не исключаем возможности того, что две различные функции совпадают в теоретико-множественном смысле.

Пусть C — взаимно однозначное соответствие, отображающее соответственно объекты, отношения и функции структуры M на некоторые множества символов объектов, символов отношений и функторов, так что порядок отношений и функций сохраняется *). Мы скажем,

---

*) В этом разделе автор уже не делает строго различия между отношениями и символами отношений, а также между объектами и символами объектов. В каждом конкретном случае из контекста будет ясно, о чем идет речь. (*Прим. перев.*)

что символ *обозначает* отношение, функцию или объект, если этот символ и то, что он обозначает, связаны соответствием C.

Данное соответствие C естественным образом продолжается и на те полные термы, функторы и символы объектов которых являются образами C. А именно, если $a_1, \ldots, a_n$ — символы объектов и $\varphi(, \ldots ,)$ — функтор порядка n, так что $C: a_i \to a_i'$, $\varphi \to \varphi'$, то мы положим, по определению, $\varphi(a_1, \ldots, a_n) \to \varphi'(a_1', \ldots, a_n')$, где $\varphi'(a_1', \ldots, a_n')$ — функциональное значение φ' в M для n-ки объектов $(a_1', \ldots, a_n')$. Указанная процедура легко продолжается с помощью индуктивного определения терма. Иными словами, если мы уже отобразили термы $t_1, \ldots, t_m$ в объекты $b_1', \ldots, b_m' \in M$ и если функтор $\psi(, \ldots ,)$ порядка m отображается в функцию ψ', то $\psi(t_1, \ldots, t_m)$ мы отобразим в объект $\psi'(b_1', \ldots, b_m') \in M'$.

Пусть K — множество правильно построенных формул языка, определенных в M относительно C (т. е. объекты, отношения и функциональные символы этих формул являются образами C). Каждой атомарной формуле X из K посредством C и построенного выше продолжения C соответствует X' — отношение между индивидами M, которое либо истинно, либо ложно в M. Отправляясь от атомарных формул, определения 1.4.1—1.4.3 однозначно выясняют для любого высказывания из K, истинно оно или нет в структуре M.

Соотношения между дедуктивной и дескриптивной концепциями остаются теми же, что и в случае языка без функторов (п. 1.5). Это очевидно для высказываний, которые не содержат никаких символов отношений положительного порядка. Для высказываний, содержащих символы отношений положительного порядка, но не содержащих кванторов, надо лишь слегка изменить процедуру, описанную в п. 1.5. А именно, для данного множества высказываний K мы определим структуру M, отношениями которой служат символы отношений K и объектами которой являются *термы* K, а не только символы объектов. Любой функтор $\varphi(, \ldots ,)$ из K порядка m рассматривается как функция на M, функциональные значения которой определяются следующим образом. Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — произвольные объекты структуры M, так что $t_1, \ldots, t_m$, по определению, являются термами K. Тогда функциональное значение φ для аргументов $t_1, \ldots, t_m$ полагается равным терму $\varphi(t_1, \ldots, t_m)$, рассматриваемому как объект M. Во всех остальных отношениях процедура остается без изменения, и, как прежде, мы приходим к заключению, что M — модель K.

Предположим, наконец, что по крайней мере одно из высказываний K содержит квантор. Как и в главе I, каждое высказывание X эквивалентно высказыванию X' в предваренной нормальной форме, т. е. высказывание $[X \equiv X']$ — теорема нашего исчисления. В соответствии с этим мы можем ограничиться лишь тем случаем, когда все высказывания K заданы в предваренной нормальной форме. Поступая так же, как в п. 1.5, мы получим из K множество K^*, свободное от кванторов. Далее тем же способом показывается, что K^* непротиворечиво и, следовательно, обладает моделью, которая является моделью K. Аналогичным образом устанавливается теорема полноты и ее обобщения и следствия (1.5.3—1.5.5) для формального языка, содержащего функторы.

Читатель без особых затруднений сможет убедиться в том, что все общие определения и результаты, установленные ранее для языка без функторов, остаются в силе и в настоящем случае с небольшими изменениями. В частности, по-прежнему будут справедливы понятия и результаты, связанные с проблемой приставки и теорией модельной полноты; некоторые из них будут впоследствии использоваться без дополнительных комментариев. Так, например, диаграмма структуры по-прежнему состоит из атомарных формул и их отрицаний, однако теперь атомарные формулы содержат термы, а не только символы и переменные.

Как мы увидим впоследствии, функторы могут быть использованы для исключения кванторов существования в любом высказывании в предваренной нормальной форме. В одних случаях эти функторы определяются однозначно, а в других — с некоторым произволом. Займемся теперь тем, что переформулируем наиболее важные си-

Следующая система аксиом описывает понятие группы в терминах символа объекта e (нейтральный элемент), отношения (равенства) $E(x, y)$, функторов $\pi(x, y)$ (умножение $x \cdot y$) и $\rho(x)$ (обратный элемент x^{-1}). Заметим, что пустые места функторов мы заполнили переменными только лишь для удобства чтения.

Требуемыми аксиомами являются, во-первых, аксиомы эквивалентности (2.1.1) и, во-вторых,

9.1.1. $\forall x \forall y \forall z \forall w[E(x, z) \wedge E(y, w) \supset$
$$\supset E(\pi(x, y), \pi(z, w))],$$
$$\forall x \forall y[E(x, y) \supset E(\rho(x), \rho(y))],$$
$$\forall x \forall y \forall z[E(\pi(\pi(x, y), z), \pi(x, \pi(y, z)))],$$
$$\forall x E(\pi(e, x), x), \quad \forall x E(\pi(\rho(x), x), e).$$

Отметим, что первые две аксиомы в 2.2.2 не имеют себе подобных в 9.1.1, так как само использование функтора $\pi(x, y)$ предполагает однозначность и полную определенность групповой операции. Полученное множество мы обозначим через H_G. Множество H_{AG} аксиом абелевой группы есть объединение H_G и аксиомы коммутативности:

9.1.2. $\forall x \forall y[E(\pi(x, y), \pi(y, x))]$.

Множество H_R аксиом, характеризующих понятие кольца, формулируется с помощью символа объекта 0, отношения $E(x, y)$ и функторов $\sigma(x, y)$ (для $x+y$), $\pi(x, y)$ (для $x \cdot y$) и $\mu(x)$ (для $-x$) следующим образом:

9.1.3. $\forall x \forall y \forall z \forall w[E(x, z) \wedge E(y, w) \supset$
$$\supset E(\sigma(x, y), \sigma(z, w)) \wedge E(\pi(x, y), \pi(z, w)) \wedge$$
$$\wedge E(\mu(x), \mu(z))],$$
$$\forall x \forall y \forall z E(\sigma(\sigma(x, y), z), \sigma(x, \sigma(y, z))),$$
$$\forall x \forall y \forall z E(\pi(\pi(x, y), z), \pi(x, \pi(y, z))),$$
$$\forall x E(\sigma(0, x), x), \quad \forall x E(\sigma(\mu(x), x), 0),$$
$$\forall x \forall y E(\sigma(x, y), \sigma(y, x)),$$

Множество аксиом (коммутативного) поля H_{CF} получается введением символа объекта 1, функтора $\rho(x)$ (обратный элемент для $x\neq 0$) и присоединением к 9.1.3 следующих аксиом:

9.1.4. $\forall x \forall y[E(x, y) \supset E(\rho(x), \rho(y))]$,

$$\forall x \forall y E(\pi(x, y), \pi(y, x)), \quad \forall x E(\pi(1, x), x),$$

$$\forall x[\sim E(x, 0) \subset E(\pi(\rho(x), x), 1)].$$

При желании мы можем для определенности добавить аксиому, которая определяет значение $\rho(x)$ для $x=0$, например, $E(\rho(0), 0)$. Однако в дальнейшем нам это просто не понадобится.

Обзор 9.1.1—9.1.4 показывает, что все множество аксиом рассмотренных выше понятий состоят из высказываний в предваренной нормальной форме, включающих только кванторы общности. Следующий результат является основным в теории систем:

9.1.5. Теорема (Бернайс). *Пусть дано экзистенциальное высказывание*

9.1.6. $X=\exists y_1 \ldots \exists y_m Q(y_1, \ldots, y_m), \qquad m\geqslant 1,$

где матрица Q уже не содержит кванторов. Предположим, что X выводимо из множества универсальных высказываний $\{X_1, \ldots, X_k\}$, в которых имеется по крайней мере один символ объекта. Обозначим через T множество всех полных термов, функторы и символы объектов которых входят в $X_1, \ldots, X_k$. Тогда существуют элементы $t_i^j \in T$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, l$, $l\geqslant 1$, такие, что высказывание

9.1.7.

$$Y=Q(t_1^1, \ldots, t_m^1) \vee Q(t_1^2, \ldots, t_m^2) \vee \ldots \vee Q(t_1^l, \ldots, t_m^l)$$

выводимо из $\{X_1, \ldots, X_k\}$.

Отметим, что теорема, обратная к теореме 9.1.5, заведомо верна, так как $Y\supset X$ — теорема нашего исчисления.

Доказательство 9.1.5. Допустим, что теорема не верна. Обозначим через H множество всех высказываний вида $\sim Q(t_1, \ldots, t_m)$, где $t_1, \ldots, t_m \in T$. Множество $H' = \{X_1, \ldots, X_k\} \cup H$ должно быть непротиворечивым. Действительно, если оно противоречиво, то противоречиво уже $\{X_1, \ldots, X_k\} \cup H''$, где H'' — некоторое конечное подмножество H, которое в нашем рассуждении можно предполагать непустым. Пусть

$$H'' = \{\sim Q(t_1^1, \ldots, t_m^1), \ldots, \sim Q(t_1^l, \ldots, t_m^l)\}.$$

Но коль скоро $\{X_1, \ldots, X_k, \sim[Q(t_1^1, \ldots, t_m^1) \vee \ldots \ldots \vee Q(t_1^l, \ldots, t_m^l)]\}$ противоречиво, высказывание $X_1 \wedge \ldots X_k \supset Y$ является теоремой. Отсюда видно, что если теорема не верна, то H' обязательно непротиворечиво.

Пусть теперь K' — множество высказываний, полученное из $X_1, \ldots, X_k$ вычеркиванием кванторов и заменой переменных термами из T всеми возможными способами. Если элемент $Z \in K'$ получается подобным образом из некоторого X_i, то $X_i \supset Z$ — теорема. Отсюда вытекает, что $K' \cup H$ не может быть противоречивым, так как в противном случае $\{X_1, \ldots, X_k\} \cup H = H'$ также оказалось бы противоречивым.

Обозначим через K'' множество высказываний, полученное из $K' \cup H$ заменой всех атомарных высказываний, встречающихся в элементах множества $K' \cup H$, символами отношений нулевого порядка, причем различные атомарные высказывания заменяются различными символами отношений. K'', очевидно, непротиворечиво и, следовательно, имеет модель M''.

Определим теперь структуру M следующим образом. Объектами M будут служить все элементы T. В качестве отношений и функций на M мы возьмем соответственно символы отношений и функторы, содержащиеся в $X_1, \ldots, X_k$. Если $\varphi(, \ldots,)$ — такой функтор порядка p и $t_1, \ldots, t_p \in T$, то в качестве функционального значения φ для $(t_1, \ldots, t_p)$ мы возьмем терм $\varphi(t_1, \ldots, t_p)$. Наконец если $R(, \ldots,)$ — отношение порядка q в M и $t_1, \ldots, t_q \in \in T$, то истинностное значение $R(t_1, \ldots, t_q)$ в M мы определим по следующему правилу. Если $R(t_1, \ldots, t_q)$ встречается среди атомарных высказываний $K' \cup H$, то $R(t_1, \ldots, t_q)$ истинно в M тогда и только тогда, когда 0-арный символ отношения, соответствующий

$R(t_1, \ldots, t_q)$ в K'', истинен в M''. Если $R(t_1, \ldots, t_q)$ не встречается среди атомарных высказываний $K' \cup H$, то его истинностное значение можно взять произвольным (пусть, например, $R(t_1, \ldots, t_q)$ в этом случае истинно). Согласно этим определениям M становится моделью $K' \cup H$ и $H' = \{X_1, \ldots, X_k\} \cup H$. Но высказывание X (см. 9.1.6) не может быть истинно в M, так как $\sim Q(t_1, \ldots \ldots, t_m)$ истинно в M для всех объектов M. Это, однако, противоречит тому, что высказывание X выводимо из $\{X_1, \ldots, X_k\}$, и наше утверждение, таким образом, доказано.

9.2. Удаление кванторов. Пусть K — непротиворечивое множество универсальных высказываний, определенных в расширенном (функторном) языке. Пусть $Q(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 0$, — ппф, определенная в K (т. е. все объекты, отношения и функциональные символы формулы Q присутствуют в K). Кроме того, если $n=0$, то мы предположим, что в K содержится хотя бы один символ объекта.

Очевидная адаптация результатов п. 3.3 показывает, что если $Q(x_1, \ldots, x_n)$ устойчиво относительно K при расширении, то существует экзистенциальное высказывание $Q_1(x_1, \ldots, x_n)$, определенное в K, такое, что

9.2.1. $K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q_1(x_1, \ldots, x_n)]$.

Соответственно, если $Q(x_1, \ldots, x_n)$ устойчиво относительно K при ограничении, то существует универсальное высказывание $Q_2(x_1, \ldots, x_n)$, определенное в K, такое, что

9.2.2. $K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q_2(x_1, \ldots, x_n)]$.

Предположим теперь, что Q устойчиво относительно K как при расширении, так и при ограничении, т. е. в терминологии п. 3.3 Q инвариантно относительно K. При этих условиях имеет место

9.2.3. Теорема. *Существует ппф $Q'(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в K и не содержащая кванторов, такая, что*

9.2.4. $K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q'(x_1, \ldots, x_n)]$.

Доказательство. Поскольку Q устойчиво относительно K и при ограничении и при расширении, найдутся предикаты Q_1 и Q_2, указанные в 9.2.1 и 9.2.2. Пусть

$$Q_1(x_1, \ldots, x_n) = \exists y_1 \ldots \exists y_m S_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), \quad m \geqslant 0,$$

$$Q_2(x_1, \ldots, x_n) = \forall z_1 \ldots \forall z_l S_2(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_l), \; l \geqslant 0.$$

Вводя не встречавшиеся ранее символы объектов $a_1, \ldots, a_n$, мы заключаем на основании 9.2.1 и 9.2.2, что

$$K \vdash [\forall z_1 \ldots \forall z_l S_2(a_1, \ldots, a_n, z_1, \ldots, z_l)] \supset \supset [\exists y_1 \ldots \exists y_m S_1(a_1, \ldots, a_n, y_1, \ldots, y_m)].$$

Таким образом, существует конечное подмножество $\{X_1, \ldots, X_k\} \subset K$, $k \geqslant 1$, такое, что высказывание $\exists y_1 \ldots \exists y_m S_1(a_1, \ldots, a_n, y_1, \ldots, y_m)$ выводимо из

9.2.5. $\{X_1, \ldots, X_k, [\forall z_1 \ldots \forall z_l S_2(a_1, \ldots, a_n, z_1, \ldots, z_l)]\}$.

Отсюда в силу 9.1.5 вытекает существование термов t_i^j, сформулированных посредством некоторых (или всех) объектов и функциональных символов высказываний $X_1, \ldots, X_k$,

$$\forall z_1 \ldots \forall z_l S_2(a_1, \ldots, a_n, z_1, \ldots, z_l),$$

таких, что высказывание

$$S_1(a_1 \ldots, a_n, t_1^1, \ldots, t_m^1) \vee \ldots \vee S_1(a_1, \ldots, a_n, t_1^p, \ldots, t_m^p)$$

выводится из 9.2.5. Положим

$$Q'(x_1, \ldots, x_n) = S_1(x_1, \ldots, x_n, \tau_1^1, \ldots, \tau_m^1) \vee \ldots \ldots \vee S_1(x_1, \ldots, x_n, \tau_1^p, \ldots, \tau_m^p),$$

где τ_i^j получены из t_i^j заменой $a_1, \ldots, a_n$ переменными $x_1, \ldots, x_n$. Согласно одному из правил вывода

9.2.6. $K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [[\forall z_1 \ldots \forall z_l S_2(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_l)] \supset Q'(x_1, \ldots, x_n)]$.

С другой стороны, высказывание

$$Q'(a_1, \ldots, a_n) \supset \exists y_1 \ldots \exists y_m S_1(a_1, \ldots, a_n, y_1, \ldots, y_m)$$

является теоремой нашего исчисления, и потому

9.2.7. $K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q'(x_1, \ldots, x_n) \supset Q_1(x_1, \ldots, x_n)]$.

Переписав 9.2.6 в виде

9.2.8. $K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q_2(x_1, \ldots, x_n) \supset Q'(x_1, \ldots, x_n)]$,

мы получаем согласно 9.2.1 и 9.2.7

9.2.9. $K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q'(x_1, \ldots, x_n) \supset Q(x_1, \ldots, x_n)]$.

Аналогично, комбинируя 9.2.2 и 9.2.8, получаем

9.2.10. $K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q(x_1, \ldots, x_n) \supset Q'(x_1, \ldots, x_n)]$.

И, наконец, два последних утверждения вместе дают 9.2.4.

Пусть K и $Q(x_1, \ldots, x_n)$ по-прежнему удовлетворяют всем свойствам, перечисленным в начале этого пункта. Предположим дополнительно, что K модельно полно (см. п. 4.2). В этом случае легко показать справедливость теоремы 9.2.3 без каких-либо предположений о характере Q. Для этого достаточно установить, что каждая ппф Q описанного типа устойчива при расширении (и, следовательно, каждая такая ппф инвариантна *)) относительно K. Но это непосредственно следует из определения модельной полноты, которое утверждает, что если $Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в модели M множества K, то $Q(a_1, \ldots, a_n)$ также истинно и в любом расширении M, которое является моделью K. Это как раз и показывает, что Q устойчиво относительно K при расширении.

Впрочем, даже и без предположения о модельной полноте K утверждение 9.2.3 справедливо для *всех* Q, если оно выполняется только для *экзистенциальных* ппф $Q(x_1, \ldots, x_n)$. В самом деле, справедливость 9.2.3 для всех экзистенциальных ппф влечет во всяком случае его справедливость для всех универсальных ппф. Действительно, если ппф $Q(x_1, \ldots, x_n)$ универсальна, то

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n [\sim Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q_1(x_1, \ldots, x_n)]$$

будет теоремой, где $Q_1(x_1, \ldots, x_n)$ — экзистенциальная ппф, полученная из Q заменой всех кванторов общности

---

*) Поскольку в этом случае $\sim Q(x_1 \ldots, x_n)$ также будет устойчиво при расширении. (*Прим. перев.*)

кванторами существования и введением знака отрицания между приставкой и матрицей. Но тогда существует бескванторная ппф Q_1' такая, что

$$K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q_1'(x_1, \ldots, x_n)]$$

и, тем самым,

$$K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sim Q_1'(x_1, \ldots, x_n)].$$

Таким образом, $\sim Q_1'$ и есть искомая ппф.

В общем случае мы проиллюстрируем нашу процедуру на примере ппф

9.2.11. $\forall x \exists y \forall z \exists w Q(x, y, z, w, u)$,

где Q не содержит кванторов.

По условию, существует бескванторная ппф $Q_1(x, y, z, u)$ такая, что

$$K \vdash \forall u \forall x \forall y \forall z [[\exists w Q(x, y, z, w, u)] \equiv Q_1(x, y, z, u)].$$

Следовательно,

9.2.12. $K \vdash \forall u [[\forall x \exists y \forall z \exists w Q(x, y, z, w, u)] \equiv$
$\equiv [\forall x \exists y \forall z Q_1(x, y, z, u)]]$.

Согласно доказанному выше существует ппф $Q_2(x, y, u)$, не содержащая кванторов, и такая, что

$$K \vdash \forall u \forall x \forall y [[\forall z Q_1(x, y, z, u)] \equiv Q_2(x, y, u)].$$

Следовательно,

9.2.13. $K \vdash \forall u [[\forall x \exists y \forall z Q_1(x, y, z, u)] \equiv$
$\equiv [\forall x \exists y Q_2(x, y, u)]]$.

Аналогично, существуют ппф $Q_3(x, u)$ и $Q_4(u)$ такие, что

9.2.14. $K \vdash \forall u [[\forall x \exists y Q_2(x, y, u)] \equiv [\forall x Q_3(x, u)]]$

и

9.2.15. $K \vdash \forall u [[\forall x Q_3(x, u)] \equiv Q_4(u)]$.

Комбинируя 9.2.12—9.2.15, мы получаем

9.2.16. $K \vdash \forall u [[\forall x \exists y \forall z \exists w Q(x, y, z, w, u)] \equiv Q_4(u)]$,

так что $Q_4(u)$ и есть искомый предикат.

9.2.17. Теорема. *Пусть K — непротиворечивое множество высказываний, определенных в (функторном) формальном языке. Если для каждой экзистенциальной ппф $Q(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 0$, определенной в K, существует ппф $Q'(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в K и не содержащая кванторов, такая, что*

9.2.18. $K \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q'(x_1, \ldots, x_n)]$,

то K модельно полно.

Доказательство. Пусть M и M' — модели K такие, что M' — расширение M. (Понятие расширения, очевидно, согласовано с функциями на M и M'.) Мы должны показать, что любое высказывание X, определенное и истинное в M, истинно также и в M'. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — все символы объектов высказывания X, не присутствующие в K, $n \geqslant 0$. Таким образом, $X = Q(a_1, \ldots, a_n)$, где ппф $Q(x_1, \ldots, x_n)$ определена в K. Согласно условию теоремы и сделанному выше замечанию существует ппф $Q'(x_1, \ldots, x_n)$, не содержащая кванторов и определенная в K, для которой

9.2.19. $K \vdash Q(a_1, \ldots, a_n) \equiv Q'(a_1, \ldots, a_n)$.

Отсюда, поскольку M — модель K, $Q'(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M. А так как высказывание $Q'(a_1, \ldots, a_n)$ не содержит кванторов, то оно истинно также и в M'. Снова используя 9.2.19, мы видим, что $X = Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M', как и утверждалось теоремой.

Теорема 9.2.17 показывает, что если для каждой экзистенциальной ппф Q найдется эквивалентная бескванторная ппф Q', то это обязательно влечет модельную полноту K. А если, кроме того, применим модельный признак 4.2.3, то изложенная выше процедура доказывает полноту K в обычном смысле. Это и есть метод *удаления кванторов*. Если удаление кванторов возможно, то отсюда непосредственно вытекает применимость признака модельной полноты 4.2.1, однако мы пользовались этим фактом при доказательстве 9.2.17. Заметим, что признак модельной полноты иногда применим в таких случаях, когда доказать возможность удаления либо не очень легко, либо невозможно.

С другой стороны, теорема 9.2.3 показывает, что модельную полноту можно использовать в некоторых случаях для того, чтобы установить возможность удаления кванторов. Однако полученный таким образом для данной ппф Q бескванторный предикат Q' может все же оказаться неудовлетворительным. Рассмотрим, например, понятие вещественно замкнутого упорядоченного поля. Множество аксиом $\overline{K}_{OF}$, описывающих это понятие, было определено в п. 2.2 с помощью отношений $E(x, y)$, $S(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y)$ (равенство, сумма, произведение и порядок). Для того чтобы использовать 9.2.3, мы должны заменить $\overline{K}_{OF}$ множеством аксиом, содержащих только универсальные высказывания. Естественно попытаться сделать это, вводя функторы Сколема. С самого начала нужно ввести символы объектов для 0 и 1, а также функторы для суммы, произведения и для обратных элементов по сложению и умножению (с каким-нибудь специальным соглашением относительно значения соответствующей функции в нуле). Кроме того, необходимо ввести функторы, соответствующие корням уравнений нечетной степени, и функторы для квадратных корней (с каким-нибудь специальным соглашением относительно значений соответствующей функции для отрицательного аргумента). Только что указанные функторы определяют функции не единственным образом, и в связи с этим полученное множество аксиом будет неполным. Полнота в этом случае достигается введением дополнительных аксиом, однозначно определяющих эти функции. Так, для функтора квадратного корня мы можем заранее условиться, что значение этого корня неотрицательно. Для многочленов нечетной степени мы можем потребовать, чтобы рассматриваемый функтор обозначал наименьший корень. Новые функторы, вообще говоря, войдут в ппф Q', которая, таким образом, может содержать квадратные корни и корни уравнений высших степеней и в которой переменные $x_1, \ldots, x_n$ играют роль параметров. На самом деле введения таких иррациональных функций можно избежать, комбинируя 9.2.3 с 5.3.7.

9.2.20. Теорема. *Пусть K — непустое и непротиворечивое множество универсальных высказываний, сфор-*

мулированных в языке L, содержащем функциональные символы. Пусть K^* — модельное пополнение K и пусть $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 0$, — ппф, определенная в K^* и K. Если $n=0$, то мы предположим, что в K присутствует хотя бы один символ объекта Тогда существует ппф $Q'(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в K, не содержащая кванторов и такая, что $Q'(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ модели M множества K тогда и только тогда, когда $Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ истинно во всех расширениях M, которые являются моделями K^* (формулировка заключения теоремы для $n=0$ модифицируется очевидным образом.)

Доказательство. По теореме 5.3.7 существует ппф $Q(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в K, такая, что если $a_1, \ldots, a_n$ — элементы модели M множества K, то $Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в M в том и только в том случае, когда $Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ истинно во всех расширениях M, которые являются моделями K^*. $Q(x_1, \ldots, x_n)$ инвариантно относительно K. Отсюда в силу 9.2.3 Q можно заменить ппф $Q'(x_1, \ldots, x_n)$, которая не содержит кванторов и тем самым удовлетворяет условию теоремы.

В качестве применения 9.2.20 рассмотрим множество K универсальных аксиом, характеризующих понятие упорядоченного поля, сформулированных с помощью отношений равенства, порядка и предметных постоянных 0 и 1, а также с помощью функторов сложения, умножения и обратных элементов для этих операций. Пусть K^* — множество аксиом вещественно замкнутого упорядоченного поля, получаемое добавлением к K аксиом, постулирующих существование квадратных корней из положительных элементов и корней унитарных многочленов нечетной степени. Эти аксиомы могут быть определены в терминах словаря K, но в них обязательно должны присутствовать, наряду с кванторами общности, и кванторы существования. K и K^* удовлетворяют условиям теоремы 9.2.20. Так, например, если в качестве $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$ взять предикат, утверждающий, что многочлен $y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_n$ имеет корень, то соответствующий предикат $Q'(x_1, \ldots, x_n)$ можно сформулировать целиком в терминах равенства, порядка, 0, 1 и четырех функторов, использованных при определении K.

Мы можем улучшить этот результат, взяв в качестве K множество универсальных аксиом упорядоченной области целостности с 1. Легко проверяется, что K допускает формулировку в терминах указанных выше отношений и индивидов, а также в терминах сложения, умножения и обратного элемента по сложению. В качестве K^* по-прежнему берется множество аксиом вещественно замкнутого упорядоченного поля, формулируемое в терминах тех же самых констант, отношений и функторов, что и K. Условия теоремы 9.2.20 снова оказываются выполненными. Таким образом, для данной ппф $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$ соответствующая ппф Q' может быть сформулирована в терминах сложения, умножения, обратного элемента по сложению (или вычитания), а также в терминах отношений равенства и порядка и предметных постоянных 0 и 1. Небольшая модификация показывает, что Q' эквивалентна дизъюнкции систем полиномиальных уравнений и неравенств с целыми коэффициентами вида

$$p_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \qquad q_i(x_1, \ldots, x_n) > 0, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Если $x_1, \ldots, x_n$ — коэффициенты упомянутого выше многочлена от y, то такая дизъюнкция непосредственно дается теоремой Штурма. В общем случае существование ппф Q' требуемого вида было установлено Тарским, который доказал таким способом полноту (и разрешимость) теории вещественно замкнутого поля.

Рассмотрим другой классический пример, когда K — множество универсальных аксиом области целостности с 1, а K^* — множество аксиом алгебраически замкнутого поля. Используемый словарь таков же, как и в предыдущем примере, за исключением отношения порядка. В этом случае применима теорема 9.2.20. Допустим, например, что предикат $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$ выражает разрешимость некоторой системы полиномиальных уравнений и неравенств с неизвестными $y_1, \ldots, y_m$:

$$p_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k;$$
$$q_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \neq 0, \qquad i = 1, \ldots, l.$$

Коэффициентами этой системы служат многочлены от $x_1, \ldots, x_n$ с целыми коэффициентами. В этой ситуации теорема 9.2.20 устанавливает существование дизъюнкции систем уравнений и неравенств с целыми коэффициентами вида

$$r_i(x_1, \ldots, x_n)=0, \quad i=1, \ldots, j, \quad s_i(x_1, \ldots, x_n)\neq 0, \quad i=1, \ldots, m,$$

такой, что для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из данного поля (или области целостности) M система $p_i(a_1, \ldots, a_n, y_1, \ldots, y_m)=0$, $q_i(a_1, \ldots, a_n, y_1, \ldots, y_m)\neq 0$ имеет решение в алгебраическом замыкании M тогда и только тогда, когда хотя бы для одной из систем, входящих в дизъюнкцию, будет $r_i(a_i, \ldots, a_n)=0$, $s_i(a_1, \ldots, a_n)\neq 0$ в M. Существование такого признака вытекает из анализа теории результантов в классической алгебре, подобного тому, который был проведен в свое время Зейденбергом. Работа Зейденберга в этой области тесно связана с его результатами в дифференциальной алгебре, которые использовались в п. 5.5 при доказательстве существования модельного пополнения для понятия дифференциального поля.

9.3. Прямые произведения и ультрапроизведения. В определенных разделах алгебры довольно важную роль играют некоторые стандартные конструкции, с помощью которых из данных структур какого-то типа получаются новые структуры. В качестве примера можно указать конструкции фактор-группы или фактор-кольца, метаматематическое значение которых обсуждалось в главе VII.

Другая конструкция подобного типа приводит к *прямому произведению* данного множества групп или колец. Обобщение этого понятия на произвольные структуры (с функциями или без них) производится непосредственно. Пусть $T=\{M_\nu\}$ — множество подобных структур с непустым множеством индексов $I=\{\nu\}$, которое может быть как конечным, так и бесконечным. Прямым произведением $\prod\limits_\nu M_\nu$ называется структура M^*, определенная следующим образом. Множество индивидов M^* состоит из всех функций $f=f(\nu)$, определенных на M_ν и таких, что

$f(\nu) \in M_\nu$ для всех $\nu \in I$. В таких ситуациях очень важно понимать различие между функциями (т. е. «операциями») структуры, такими как сложение или умножение, которые являются составной частью структуры, и любыми другими функциями, которые могут быть определены в рассматриваемой области.

Произвольную функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, содержащуюся в структурах T, мы определим в M^*, полагая

9.3.1. $\varphi(f_1, \ldots, f_n) = \varphi(f_1(\nu), \ldots, f_n(\nu))$

в M_ν для всех $\nu \in I$. Другими словами, для любых $f_1, \ldots, f_n$ в M^* значением для n-ки $(f_1, \ldots, f_n)$ является функция $f(\nu)$, задаваемая правой частью 9.3.1. Кроме того, если индивид a содержится во всех M_ν, то мы можем отождествить постоянную функцию $f(\nu) \equiv a$ с a.

Пусть $R(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольное отношение, содержащееся в структурах T. Для любого множества индивидов $f_1, \ldots, f_n \in M^*$ мы положим, по определению, что $R(f_1, \ldots, f_n)$ истинно в M^* тогда и только тогда, когда $R(f_1(\nu), \ldots, f_n(\nu))$ истинно в M_ν для всех $\nu \in I$.

Легко проверяется, что если все структуры M_ν являются кольцами, определенными, например, как модели K_R в терминах отношений E, S, P без индивидов и функций, то M^* также является моделью K_R и прямым произведением колец M_ν в обычном смысле. Если M_ν — (коммутативные) поля, то M^* — коммутативное кольцо, но при $|I| > 1$ уже не поле, так как M^* содержит делители нуля. Мы видим, таким образом, что высказывание X может быть истинным во всех M_ν и в то же время ложным в M^*. Вопросу о том, какие свойства остаются инвариантными относительно прямых произведений, посвящен целый ряд статей.

Теперь мы опишем конструкцию, принадлежащую в основном Лосю, хотя некоторые близкие идеи можно найти в более ранних работах Сколема. Для этой цели нам потребуется обобщение леммы об оценках 1.5.6. Для формулировки этого результата мы воспользуемся принятыми в 1.5.6 обозначениями. Непустое множество Λ непустых подмножеств множества I называется *сеткой на* I, если для любых $J_1, J_2 \in \Lambda$ существует $J_3 \in \Lambda$ такое, что $J_1 \cap J_2 \supset J_3$.

9.3.2. Лемма об оценках. *Пусть $I=\{\nu\}$ — множество индексов для множества $\Phi=\{\varphi_\nu\}$ — частичных оценок множества S. Пусть Λ — сетка на I, такая, что для каждого конечного подмножества U множества S и для каждого элемента J множества Λ существует $\nu \in J$, для которого $U \subset D\varphi_\nu$. Тогда существует тотальная оценка ψ множества S такая, что для каждого конечного подмножества $U \subset S$ и для каждого $J \in \Lambda$ существует $\nu \in J$ такое, что $U \subset D\varphi_\nu$ и $\psi | U = \varphi_\nu | U$.*

Мы докажем 9.3.2, обобщая доказательство 1.5.6. Частичную оценку на S назовем *допустимой*, если для любого подмножества $U \subset S$ и для любого $J \in \Lambda$ существует $\nu \in J$ такое, что $U \subset D\varphi_\nu$ и $\psi | U = \varphi_\nu | D\psi \cap U$.

Множество Ψ допустимых частичных оценок непусто, так как оно содержит пустую частичную оценку. Ψ частично упорядочено отношением продолжения так, как это было определено при доказательстве 1.5.6. Любое непустое линейно упорядоченное подмножество $\Psi' = \{\psi_\mu\} \subset \Psi$ обладает в Ψ верхней гранью ψ'. В самом деле, если в качестве области определения ψ' взять $D' = D\psi' = \bigcup_\mu \{D\psi_\mu\}$ и положить значение ψ' для любого аргумента $A \in D'$ равным значению произвольной $\psi_\mu \in \Psi'$, определенной для A, то для всех $\psi_\mu \in \Psi'$ будем иметь $\psi_\mu < \psi'$. Более того, ψ' допустима. Действительно, пусть U — конечное подмножество множества S и $J \in \Lambda$. Поскольку $U' = U \cap D'$ конечно, существует $\psi_\lambda \in \Psi'$ такая, что $U \subset D\psi_\lambda$. Так как ψ_λ допустима, то существует $\nu \in J$ такое, что $U' \subset D\varphi_\nu$ и $\psi_\lambda | U' = \varphi_\nu | U'$. Но $D\psi_\lambda \subset D'$ и $\psi_\lambda | U' = \psi' | U'$, а следовательно, $\psi' | U' = \varphi_\nu | U'$, что и означает допустимость ψ'.

По лемме Цорна Ψ содержит максимальный элемент ψ_0. Мы утверждаем, что ψ_0 — тотальная оценка на S. Предположим противное: пусть $S - D\psi_0$ непусто и $A \in S - D\psi_0$. Определим частичную оценку ψ_1 на S с областью определения $D\psi_0 \cup \{A\}$, полагая $\psi_1 = \psi_0$ на $D\psi_0$ и $\psi_1(A) = 0$. Так как ψ_0 — максимальный элемент, то ψ_1 не может быть допустимой оценкой. Иными словами, существует конечное подмножество $V \subset S$ такое, что для некоторого элемента $J_1 \in \Lambda$ условия $V_1 \subset D\varphi_\nu$ и $\psi_1 | V_1 = \varphi_\nu | D\psi_1 \cap V_1$ при любом $\nu \in J_1$ не выполняются. V_1 содержит A, так как в противном случае $\psi_1|D\psi_1\cap V_1=$ $=\psi_0|D\psi_0\cap V_1$. Но поскольку ψ_0 допустима, найдется $\nu\in J_1$ такое, что $V_1\subset D\psi_0\subset D\psi_1$ и $\varphi_\nu|D\psi_0\cap V_1=\varphi_\nu|D\psi_1\cap$ $\cap V_1=\psi_1|V_1$, а это противоречит нашему предположению о V_1. Определим теперь частичную оценку ψ_2 на S с областью определения $D\psi_0\cup\{A\}$, полагая $\psi_2=\psi_0$ на $D\psi_0$ и $\psi_2(A)=1$. Аналогично в силу максимального свойства ψ_0 мы заключаем, что существует такое конечное подмножество $V_2\subset S$ и такой элемент $J_2\in\Lambda$, что $A\in V_2$ и условия $V_2\subset D\varphi_\nu$ и $\psi_2|V_2=\varphi_\nu|D\psi_2\cap V_2$ при любом $\nu\in J_2$ не выполняются. Но коль скоро Λ — сетка, найдется элемент $J_3\in\Lambda$ такой, что $J_1\cap J_2\supset J_3$. ψ_0 допустима, а потому существует $\nu\in J_3$, для которого $V_1\cup V_2\subset$ $\subset D\varphi_\nu$ и $\psi_0|V_1\cup V_2=\varphi_\nu|D\psi_0\cap(V_1\cup V_2)$. Допустим сначала, что $\varphi_\nu(A)=0$. В этом случае $\psi_1|V_1=\varphi_\nu|D\psi_1\cap V_1$, т. е. ψ_1 совпадает с φ_ν на пересечении V_1 с областью определения ψ_1, и, следовательно, ψ_1 допустима, что, однако, противоречит нашей конструкции. Аналогично, из условия $\varphi_\nu(A)=1$ выводится допустимость ψ_2. Итак, допуская, что множество $S-D\psi_0$ непусто, мы во всех случаях приходим к абсурду. Таким образом, оценка ψ_0 тотальная, и наше утверждение доказано.

Заметим, что лемма 1.5.6 есть частный случай 9.3.2 при $\Lambda=\{I\}$.

Предположим теперь, что Λ — ультрафильтр (или, иначе, максимальный дуальный идеал) в (булевой) алгебре подмножеств множества I. Иными словами, Λ удовлетворяет следующим условиям:

9.3.3. Λ — непустая совокупность *непустых* подмножеств множества I; если $J_1, J_2\in\Lambda$, то $J_1\cap J_2\in\Lambda$, и если $J\subset I$, то либо $J\in\Lambda$, либо $I-J\in\Lambda$.

Из условий 9.3.3 немедленно вытекает, что если $J\subset J'\subset I$ и $J\in\Lambda$, то $J'\in\Lambda$. Действительно, одно из двух множеств J' или $I-J'$ принадлежит Λ согласно последнему правилу 9.3.3. Но если $I-J'$ принадлежит Λ, то пустое множество, равное пересечению J и $I-J'$, также принадлежит Λ. Это невозможно, и, следовательно, $J'\in\Lambda$.

9.3.4. Теорема. *Пусть $\Phi=\{\varphi_\nu\}$ — множество тотальных оценок на S с множеством индексов $I=\{\nu\}$ и пусть Λ — ультрафильтр на I. Тогда существует единственная тотальная оценка ψ на S такая, что для* *каждого конечного подмножества $U \subset S$ и для каждого $J \in \Lambda$ найдется такое $\nu \in J$, что $\psi | U = \varphi_\nu | U$.*

Доказательство. Легко проверяется, что тотальная оценка $\psi = \psi_0$, существование которой обеспечивается теоремой 9.3.2, удовлетворяет также заключению теоремы 9.3.4. Для доказательства единственности указанной оценки заметим, что $\psi(A) = 0$ (соответственно $\psi(A) = 1$) при любом $A \in S$ тогда и только тогда, когда множество тех ν, для которых $\varphi_\nu(A) = 0$, принадлежит (соответственно не принадлежит) Λ. В самом деле, обозначим через J множество всех $\nu \in I$ таких, что $\varphi_\nu(A) = 0$, и допустим, что $J \in \Lambda$. Положим $U = \{A\}$, тогда, по предположению, для некоторого $\nu \in J$ $\psi | U = \varphi_\nu | U$, т. е. $\psi(A) = = \varphi_\nu(A) = 0$. С другой стороны, если $J \notin \Lambda$, то $I - J \in \Lambda$, поскольку Λ — ультрафильтр на S, и, следовательно, $\psi(A) = \varphi_\nu(A) = 1$ для некоторого $\nu \in I - J$. Таким образом, ψ определяется однозначно с помощью Φ и Λ.

Пусть $T = \{M_\nu\}$ — непустое множество подобных структур с множеством индексов I и пусть Λ — ультрафильтр на I. Определим теперь структуру $M' = (\prod_\nu M_\nu)_\Lambda$. В качестве индивидов M' возьмем функции f, определенные на I, такие, что $f(\nu) \in M_\nu$ при всех $\nu \in T$. Любой индивид a, содержащийся во всех M_ν, мы отождествляем с постоянной функцией $f(\nu) \equiv a$, как и в определении прямого произведения. Каждую функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, заданную в структурах M_ν, мы определим на M', полагая

$$\varphi(f_1, \ldots, f_n) = \varphi(f_1(\nu), \ldots, f_n(\nu))$$

(как в определении обычного прямого произведения). Для любого отношения $R(x_1, \ldots, x_n)$, содержащегося в структурах M_ν, и для любой n-ки $(f_1, \ldots, f_n)$ индивидов M' обозначим через N множество всех таких ν, что $R(f_1(\nu), \ldots, f_n(\nu))$ истинно в M_ν. Положим, по определению, $R(f_1, \ldots, f_n)$ истинным в M' тогда и только тогда, когда $N \in \Lambda$. Структура M', получаемая таким способом, называется *ультрапроизведением* или, точнее, ультрапроизведением $\{M_\nu\}$ относительно Λ.

9.3.5. Теорема. *Пусть X — высказывание, которое определено и истинно во всех элементах множества подобных структур $\{M_\nu\}$, и пусть Λ — ультрафильтр на* *множестве индексов $I=\{\nu\}$ множества $\{M_\nu\}$. Тогда X истинно также в ультрапроизведении $M'=(\prod_\nu M_\nu)_\Lambda$.*

Доказательство. Ясно, что теорему достаточно доказать для случая, когда X задано в предваренной нормальной форме. Проиллюстрируем нашу процедуру на примере: пусть

9.3.6. $X=\exists x\forall y\exists z\forall u\forall v\exists w Q(x, y, z, u, v, w, a, b, c)$,

где матрица Q не содержит ни кванторов, ни констант, отличных от a, b, c. Пусть X' — открытая форма Сколема высказывания X, т. е. для 9.3.6

9.3.7. $X'=(\varphi, y, \psi(y), u, v, \chi(y, u, v), a, b, c)$.

Для доказательства того, что X истинно в M', мы должны найти постоянную функцию φ, а также функции $\psi(y)$ и $\chi(y, u, v)$, определенные в M', такие, что для произвольных g, h, $k\in M'$

9.3.8. $Q(\varphi, g, \psi(g), h, k, \chi(g, h, k), a, b, c)$

истинно в M'. Заметим, что a, b, c в 9.3.8 обозначают соответственно постоянные функции $f(\nu)\equiv a$, $f(\nu)\equiv b$, $f(\nu)\equiv c$.

Мы знаем, что высказывание X истинно в M_ν при любом $\nu\in I$. Таким образом, для каждого $\nu\in I$ найдется индивид $\varphi_\nu\in M_\nu$ и функции $\psi_\nu(y)$ и $\chi_\nu(y, u, v)$, определенные в M_ν, такие, что

9.3.9. $Q(\varphi_\nu, p, \psi_\nu(p), q, r, \chi_\nu(p, q, r), a, b, c)$

истинно в M_ν. В соответствии с этим мы определим функции Сколема на M', полагая

9.3.10.

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_\nu, \\ \psi(g) &= \psi_\nu(g(\nu)), \\ \chi(g, h, k) &= \chi_\nu(g(\nu), h(\nu), k(\nu)) \end{aligned}\right\} \text{ для всех } \nu\in I.$$

Таким образом, правая часть этих равенств действительно определяет значения функций φ, ψ, χ для любых значений аргумента. Покажем, что с этими определениями высказывание 9.3.8 истинно в M' для произвольных g, h, $k \in M'$.

Для данных g, h, k истинностное значение высказывания 9.3.8 полностью определяется истинностными значениями встречающихся в нем атомарных высказываний. Поэтому для доказательства истинности 9.3.8 в M' нам достаточно установить существование такого $\nu \in I$, что истинностные значения атомарных высказываний в 9.3.8 совпадают с истинностными значениями *соответствующих* высказываний в 9.3.9. Атомарным высказыванием, *соответствующим* атомарному высказыванию $Y = R(f_1, \ldots, f_n)$ в 9.3.8, является по определению ппф, получаемая из Y заменой $f_1, \ldots, f_n$ их функциональными значениями в M_ν, $a_i = f_i(\nu)$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $Y_1, \ldots, Y_m$ — все фигурирующие в 9.3.8 атомарные высказывания, выписанные в некотором фиксированном порядке. Обозначим через $Y_1^\nu, \ldots, Y_m^\nu$ соответствующие атомарные формулы в 9.3.9. По определению истинностного значения Y_i в M', множество J_i всех ν, для которых истинностное значение Y_i^ν в M_ν совпадает с истинностным значением Y_i в M', принадлежит $\Lambda: J_i \in \Lambda$. Пусть $J = J_1 \cap J_2 \cap \ldots \cap J_m$, тогда $J \in \Lambda$ и J непусто. Для любого $\nu \in J$ истинностные значения Y_i^ν, $i = 1, \ldots, m$, совпадают с истинностными значениями Y_i, $i = 1, \ldots, m$, что и требовалось доказать.

В частности, если все M_ν совпадают, т. е. $M_\nu = M$ для всех ν, то $(\prod\limits_\nu M_\nu)_\Lambda$ называется *ультрастепенью* M и обозначается M_Λ^I. На основании теоремы 9.3.5 мы заключаем, что любое высказывание X, определенное и истинное в M, истинно также и в M_Λ^I. Таким образом, M_Λ^I является элементарным расширением M (M естественно вкладывается в M_Λ^I посредством отождествления индивидов с постоянными функциями на I).

Предположим, в частности, что M — система натуральных чисел с отношениями E, S и P (равенство, сложение и умножение). Допустим, что I — также совокупность натуральных чисел, а Λ содержит дополнения всех конечных подмножеств I. Покажем, что в этом случае M_Λ^I является собственным расширением M.

Элементы M представляются в M^I_Λ постоянными функциями $f_n(\nu)\equiv n$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Рассмотрим функцию $f(\nu)=\nu$, которая также принадлежит M^I_Λ. Утверждается, что $f_n<f$ в M^I_Λ для всех натуральных n *). В самом деле, для любого натурального n множество N всех ν таких, что $f_n(\nu)\geqslant\nu$, т. е. $n\geqslant\nu$, конечно, а потому дополнение $I-N\in\Lambda$. Это и означает, что $f_n<f$ для каждого n и, следовательно, M^I_Λ — собственное расширение M.

Собственное элементарное расширение системы натуральных чисел называется *сильной нестандартной моделью арифметики*. Более ранние методы Сколема, о которых мы упоминали выше, дают другую, но связанную с нашей конструкцию таких моделей. В том случае, когда M — поле вещественных чисел, процедура ультрастепени совпадает с конструкцией, играющей важную роль в теории колец непрерывных функций.

На первый взгляд может создаться впечатление, что конструкция ультрастепени может дать немного новой информации в какой-то определенной теории, сформулированной в языке узкого исчисления предикатов, поскольку сам характер этой операции имеет те же элементарные свойства, что и первоначальная структура. Однако, оказывается, что комбинируя разумным образом эти свойства с другими свойствами структуры, описание которых невозможно дать средствами языка L, можно получить далеко идущие результаты. Например, теория ультрапроизведений дает возможность по-новому доказать уже полученные нами результаты. Ультрапроизведения находят также некоторое применение в связи с теорией нестандартного анализа, рассмотрению которой посвящен весь следующий раздел.

9.4. Нестандартный анализ. Пусть R_0 — поле действительных чисел и K — множество всех высказываний, сформулированных в языке L узкого исчисления предикатов в терминах (символов объектов для) всех элементов R_0 и в терминах (символов отношений для) всех

*) В том смысле, что высказывание $\exists x[S(x, f_n, f) \wedge \sim E(x, 0)]$ истинно в M^I_Λ. (*Прим. перев.*)

отношений положительного порядка, определенных в R_0 *). Обозначим через K_0 множество всех высказываний K, истинных в R_0. Хотя мы и не включаем функциональные символы в словарь K_0, тем не менее некоторые из высказываний можно интерпретировать как утверждения о функциях на R_0 точно так, как это делалось в предыдущих главах. Прежде всего, для любой вещественной функции $f(x)$ с областью определения $A \subset R_0$ в словаре K_0 существует бинарное отношение $F(x, y)$ такое, что $F(a, b)$ истинно в R_0 тогда и только тогда, когда $a \in A$ и $b = f(a)$. Если $E(x, y)$ — отношение равенства в R_0 и $T(x)$ — одноместное отношение, определяющее A (т. е. $T(a)$ истинно тогда и только тогда, когда $a \in A$), то тот факт, что отношение $F(x, y)$ соответствует функции с областью определения A, выражается высказыванием

$$\forall x \forall y [F(x, y) \supset T(x)] \wedge [\forall x [T(x) \supset [\exists y \forall z [F(x, y) \wedge \wedge [F(x, z) \supset E(y, z)]]]]].$$

Это высказывание принадлежит K_0. Отметим, что $F(x, y)$ соответствует функции $f(x)$ *вместе с ее областью определения*. Аналогично, если $S(x, y, z)$ и $P(x, y, z)$ — отношения сложения и умножения в R_0, а $H(a, b)$ истинно в том и только в том случае, когда $b = e^a$ (где e^x — экспоненциальная функция), то следующее высказывание:

9.4.1. $$\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [H(x, u) \wedge H(y, v) \wedge \wedge H(z, w) \wedge S(x, y, z) \supset P(u, v, w)]$$

снова принадлежит K_0, поскольку 9.4.1 представляет собой функциональное уравнение экспоненциальной функции.

Другим важным отношением, определенным в R_0 и, следовательно, принадлежащим словарю K_0, является унарное отношение $N(x)$, истинное для каждого $a \in R_0$ тогда и только тогда, когда a — натуральное число: $a = 0, 1, 2, \ldots$

Любая модель множества K_0 является элементарным расширением R_0. Собственное расширение R_0, которое

*) Здесь уже подразумевается, что два отношения совпадают, если они совпадают в теоретико-множественном смысле, так как в противном случае K может и не быть множеством (*Прим. перев.*)

является моделью K_0, носит название *нестандартной модели анализа*.

Нестандартные модели анализа существуют. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим индивид a, не содержащийся в R_0, и множество G всех высказываний $\sim E(a, b_\nu)$, где b_ν пробегает все элементы R_0. Предположим, что множество $K \cup G$ противоречиво. Тогда противоречиво уже множество $K \cup G'$, где G' — некоторое конечное подмножество G. G' не может быть пусто, так как K_0 обладает моделью R_0 и, следовательно, непротиворечиво. Пусть

$$G' = \{\sim E(a, b_1), \sim E(a, b_2), \ldots, \sim E(a, b_n)\}, \qquad n \geqslant 1.$$

Но коль скоро $K_0 \cup \{\sim E(a, b_1) \wedge \sim E(a, b_2) \wedge \ldots \ldots \wedge \sim E(a, b_n)\}$ противоречиво, то

$$K_0 \vdash E(a, b_1) \vee E(a, b_2) \vee \ldots \vee E(a, b_n)$$

а отсюда вытекает, что

9.4.2. $K_0 \vdash \forall x [E(x, b_1) \vee E(x, b_2) \vee \ldots \vee E(x, b_n)]$.

9.4.2 означает, что все элементы рассматриваемой структуры равны одному из $b_1, \ldots, b_n$, но это, разумеется, неверно ни в одной модели K_0. Таким образом, $K \cup G$ непротиворечиво и обладает моделью R^*, которая является собственным расширением R_0, так как содержит элемент a, отличный (в R^*) от всех элементов R_0. Иными словами, R^* — нестандартная модель анализа.

Нестандартную модель анализа можно также получить, используя ультрапроизведение. В качестве множества индексов I возьмем множество натуральных чисел, а в качестве Λ ультрафильтр, содержащий дополнения конечных множеств в I. В силу 9.3.5 $R^I_{0\Lambda}$ является элементарным расширением R_0. Для доказательства того, что $R^I_{0\Lambda}$ — собственное расширение R_0, возьмем элемент $f \in R^I_{0\Lambda}$, задаваемый равенством $f(n) = n$. Таким образом, f принимает значение n, которое рассматривается как элемент R_0 при значении аргумента, равном n, где это n — уже элемент I. $N(f)$ истинно в этой структуре по определению $R^I_{0\Lambda}$. Как и в п. 9.3, можно показать, что f не равен никакому натуральному числу 0, 1, 2, 3, ...

С другой стороны, $\mathfrak{f}$ не может равняться в $R^I_{0\Lambda}$ ни одному элементу $a \in R_0$, который не является натуральным числом в R_0, так как в этом случае $\sim N(a)$ истинно в R_0, а тем самым и в $R^I_{0\Lambda}$. Таким образом, $\mathfrak{f}$ отличен в $R^I_{0\Lambda}$ от всех элементов R_0 и, следовательно, $R^I_{0\Lambda}$ — собственное элементарное расширение R_0, т. е. $R^I_{0\Lambda}$ — нестандартная модель анализа. Заметим, что кардинальное число $R^I_{0\Lambda}$ равно $c^{\aleph_0}=c$, где c — мощность континуума. Существование нестандартной модели анализа не следует из первоначальной конструкции с использованием расширенной теоремы полноты, так как кардинальное число K_0 равно 2^c. Модель $R^I_{0\Lambda}$, рассматриваемая как поле, встречается также в теории колец непрерывных функций, где эта структура принадлежит классу *гипервещественных полей*.

Пусть R^* — любая нестандартная модель анализа. Так как R^* — упорядоченное поле и собственное расширение R_0, то R^* должно быть неархимедовым *). Отсюда вытекает, что для двух подмножеств M_0 и M_1 множества R^* описанные ниже множества $R^* - M_0$ и $M_1 - \{0\}$ непусты.

9.4.3. M_0 — множество всех $a \in R^*$, таких, что $|a|<r$ для некоторого $r \in R_0$; M_1 — множество всех $a \in R^*$, таких, что $|a|<r$ для всех положительных $r \in R_0$.

Элементы M_0 называются *конечными*, а элементы M_1 — *бесконечно малыми*. Элементы R_0 назовем *стандартными*, они образуют подмножество в M_0. Кроме того, элементы $R^* - M_0$ будем называть *бесконечными*, а элементы $R^* - R_0$ — *нестандартными*.

M_0 — кольцо, а M_1 — идеал в M_0. Более того, нетрудно проверить, что M_1— максимальный простой идеал в M_0. Следовательно, фактор-кольцо M_0/M_1 — поле и содержит в качестве подполя поле R_0, так как различные элементы поля R_0 различны и по модулю M_1. С другой

---

*) Поскольку существует теорема о том, что любое архимедово кольцо без делителей нуля изоморфно некоторому подкольцу поля действительных чисел с его естественной упорядоченностью (см., например, А. Г. Курош «Лекции по общей алгебре», Физматгиз, 1962, гл. VI, § 3). (*Прим. перев.*)

стороны, каждый элемент из M_0 задает в R_0 дедекиндово сечение, и по модулю M_1 этот элемент сравним с действительным числом, определяющим данное сечение. Таким образом, M_0/M_1 изоморфно R_0.

Выше мы ввели одноместное отношение $N(x)$, определяющее множество N_0 натуральных чисел в R_0. Это же отношение определяет в R^* множество N^*. N^* — сильная нестандартная модель арифметики. В самом деле, N^* — собственное расширение N_0, так как N_0 — конфинальная часть R_0 *), и это свойство, формулируемое в терминах словаря K_0, сохраняется также и для $N^* \subset R^*$. Кроме того, все свойства N_0 относительно сложения, умножения и равенства, которые могут быть выражены средствами языка L, принадлежат K_0, и в соответствии с этим должны быть выполнены для N^*.

Мы собираемся показать, что в настоящих рамках можно развить исчисление бесконечно малых и бесконечно больших величин. Это дает нам возможность заново сформулировать многие известные результаты теории функций на языке бесконечно малых так, как это было предсказано в неопределенной форме еще Лейбницем. Классический анализ строго вкладывается в нашу конструкцию. Так, обычные свойства специальных функций (например, экспоненциальных или бесселевых функций) в поле вещественных чисел остаются в силе и для нестандартного анализа. Однако теперь мы можем обогатить эту теорию новыми свойствами (такими, например, как свойство принадлежать M_1), которые не имеют себе подобных в обычном анализе.

Начиная с этого момента и впредь, все функции, множества, отношения и т. д., определенные уже в R_0, мы будем называть *стандартными* (функциями, множествами и т. д.). Например, интервал $a<x<b$ стандартный, если a и b — стандартные числа (т. е. элементы R_0), в то время как интервал $\varepsilon<x<b$, где b стандартно, а ε бесконечно мало, не является стандартным (за исключением $\varepsilon=0$). Функция $\ln x$ — стандартная функция,

---

*) Пусть $A \subset B$ — два упорядоченных множества. A называется *конфинальной частью* B, если для всякого $x \in B$ существует такое $y \in A$, что $x \leqslant y$. (*Прим. перев.*)

определенная в стандартном интервале $0<x<+\infty$, т. е. для всех положительных $x \in R^*$.

Для того чтобы эффективно использовать наши средства, мы должны в каждом конкретном случае уметь выяснять, формализуется ли данное утверждение в терминах языка L; в то же время мы должны пытаться по возможности уменьшить количество написанных формул, что необходимо, если мы хотим выразить все утверждения, для которых это можно сделать (и которые участвуют в рассуждении), в явном виде средствами языка L. В соответствии с этим мы будем также пользоваться такими принятыми выражениями, как $|f(x)-a|<\varepsilon$, рассматривая их как часть наших высказываний, предоставляя читателю проверку того, что использованное нами выражение в самом деле можно перевести на язык L.

Первой темой, которую мы рассмотрим с точки зрения нестандартного анализа, будет теория бесконечных последовательностей. А именно, $\{s_n\}$ есть функция от n, определенная вначале для всех стандартных натуральных чисел N и принимающая значения в R_0. Переход к R^* автоматически расширяет определение $\{s_n\}$ для всех $n \in N^*$, т. е. также и для всех нестандартных натуральных чисел. Нестандартные натуральные числа мы будем также называть *бесконечными* натуральными числами (или бесконечно большими целыми положительными числами).

9.4.4. Теорема. *Стандартная последовательность $\{s_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда число s_ω конечно для любого бесконечного натурального числа ω.*

Доказательство. Если $\{s_n\}$ ограничена, то существует положительное стандартное число μ такое, что

9.4.5. $\forall x\,[N(x) \supset [\,|s_x| \leqslant \mu]]$,

где отношение $N(x)$, как и раньше, определяет множество натуральных чисел. 9.4.5 может быть сформулировано как высказывание множества K_0 и потому должно быть истинно в R^*. Отсюда следует, что $|s_\omega| \leqslant \mu$ для всех бесконечных целых положительных ω. Обратно, если s_ω конечно для всех бесконечных натуральных чисел ω, то s_ω конечно для всех натуральных чисел ω.

В соответствии с этим, если μ — бесконечное положительное число (т. е. число, принадлежащее $R^* - M_0$), то $\forall x [N(x) \supset [|s_x| \leqslant \mu]]$ истинно в R^* и потому

9.4.6. $\exists y \forall x [N(x) \supset [|s_x| \leqslant y]]$

истинно в R^*. Однако 9.4.6 можно записать в виде высказывания K и, следовательно, оно должно быть истинно также и в R_0 (так как R^* — элементарное расширение R_0). Итак, существует действительное число μ_0 такое, что $\forall x [N(x) \supset [|s_x| \leqslant \mu_0]]$ истинно в R_0, т. е. $\{s_n\}$ ограничена.

9.4.7. Теорема. *Стандартное число s является пределом стандартной последовательности $\{s_n\}$, $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$, тогда и только тогда, когда $s - s_\omega$ бесконечно мало для всех бесконечных положительных целых ω.*

Доказательство. Допустим, что $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$. Пусть ε — любое стандартное положительное число. Тогда существует стандартное положительное целое число ν такое, что утверждение

9.4.8. $\forall x [N(x) \wedge [x > \nu] \supset [|s - s_x| < \varepsilon]]$

истинно в R_0. 9.4.8 можно представить как высказывание K_0 и потому оно истинно также в R^*. Любое бесконечное натуральное число ω больше ν, следовательно, на основании 9.4.8 $|s - s_\omega| < \varepsilon$. Поскольку это верно для всех стандартных положительных чисел, $|s - s_\omega|$ бесконечно мало, а потому бесконечно мало и $s - s_\omega$. Обратно, допустим, что s_n и s стандартны и $s - s_\omega$ бесконечно мало́ для всех бесконечных натуральных чисел ω. Пусть ε — любое стандартное положительное число и ν — некоторое бесконечное целое положительное число. Так как $s - s_\omega$ бесконечно мало́ для всех бесконечных целых положительных чисел, то утверждение

9.4.9. $\forall x [N(x) \wedge [x > \nu] \supset [|s - s_x| < \varepsilon]]$

истинно в R^*. Это утверждение не формализуется средствами словаря K, так как оно содержит индивид ν. Однако, согласно 9.4.9, высказывание

9.4.10. $\exists y [N(y) \wedge \forall x [N(x) \wedge [x > y] \supset [|s - s_x| < \varepsilon]]]$

истинно в R^* и может быть сформулировано средствами K. Отсюда мы, как и раньше, заключаем, что 9.4.10 истинно в R_0, т. е. существует (стандартное) целое положительное число ν_0 такое, что

$$\forall x\,[N(x) \wedge [x > \nu_0] \supset [\,|s - s_x| < \varepsilon]]$$

истинно в R_0. Это и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$ в соответствии с общим определением.

Для любых a и b из R^* запись $a \simeq b$ будет означать, что $a - b$ бесконечно мало́, и мы будем говорить в этом случае, что b бесконечно близко к a. Согласно этой терминологии 9.4.7 утверждает, что $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$ для стандартных $\{s_n\}$ и s тогда и только тогда, когда s_ω бесконечно близко к s для всех бесконечных натуральных чисел ω. Отношение $\simeq$ есть отношение эквивалентности.

9.4.11. Теорема. *Стандартное число s является предельной точкой стандартной последовательности $\{s_n\}$ в том и только в том случае, когда s_ω бесконечно близко к s для некоторого бесконечного натурального числа ω.*

Доказательство. Допустим, что стандартное число s есть предельная точка стандартной последовательности $\{s_n\}$. При этом следующее утверждение истинно в R_0:

$$\textbf{9.4.12.}\quad \forall x \forall y [[x > 0] \wedge N(y) \supset \exists z [N(z) \wedge [z > y] \wedge \wedge [\,|s - s_z| < x]]].$$

Это утверждение можно переформулировать в терминах словаря K_0 и потому оно истинно также и в R^*. Пусть ε — положительная бесконечно малая и η — бесконечное натуральное число. Тогда в силу 9.4.12 утверждение

$$\exists z [N(z) \wedge [z > \eta] \wedge [\,|s - s_z| < \varepsilon]]$$

истинно в R^*. Отсюда вытекает существование элемента $\omega \in R^*$, такого, что $N(\omega)$ истинно в R^* (т. е. ω — натуральное число), $[\omega > \eta]$ истинно в R^* (т. е. ω — бесконечное натуральное число) и $|s - s_\omega| < \varepsilon$ также истинно в R^*. Таким образом, $s \simeq s_\omega$, и первая часть теоремы 9.4.11 доказана.

Обратно, допустим, что для стандартных $\{s_n\}$ и s и некоторого бесконечного натурального числа ω s_ω бесконечно близко к s. Пусть ε — произвольное стандартное положительное число и пусть η — любое стандартное натуральное число. Тогда следующее предложение истинно в R^*:

9.4.13. $$[\varepsilon>0]\wedge N(\eta)\supset\exists z\,[N(z)\wedge[z>\eta]\wedge\wedge[|s-s_z|<\varepsilon]].$$

Действительно, консеквент импликации

$$\exists z\,[N(z)\wedge[z>\eta]\wedge[|s-s_z|<\varepsilon]]$$

истинен в R^*, поскольку $[N(\omega)\wedge[\omega>\eta]\wedge[|s-s_\omega|<\varepsilon]]$ истинно в R^*. Таким образом, 9.4.13 истинно в R^* и, следовательно, согласно обычному рассуждению, это высказывание истинно также и в R_0, т. е. s — предельная точка $\{s_n\}$.

Признаку сходимости Коши соответствует

9.4.14. Теорема. *Стандартная последовательность сходится* (имеет предел) *тогда и только тогда, когда* $s_\lambda\simeq s_\mu$ *для всех бесконечных целых положительных чисел* λ *и* μ.

9.4.14 можно доказать тем же способом, что и 9.4.7, основываясь на признаке Коши, утверждающем, что стандартная последовательность $\{s_n\}$ сходится в том и только в том случае, когда

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}(s_n-s_m)=0.$$

Однако мы можем применить другую и в некотором смысле более интересную процедуру. Другими словами, мы можем попытаться использовать R^* для того, чтобы исключить, насколько это возможно, традиционную ε-технику. Конечно, эта мысль — только основной путеводный принцип, так как все традиционные методы попрежнему применимы, по крайней мере ко всем стандартным понятиям.

Таким образом, мы будем доказывать 9.4.14, используя в качестве *определения* предела условие $s_\omega\simeq s$ для всех бесконечных ω. Отсюда немедленно следует необходимость условия 9.4.14. В самом деле, пусть λ и μ — два бесконечных целых положительных числа. Тогда, по предположению, $s_\lambda \simeq s$ и $s_\mu \simeq s$ и, следовательно, $s_\lambda \simeq s_\mu$, так как $\simeq$ — отношение эквивалентности.

Допустим теперь, что условие 9.4.14 выполнено для последовательности $\{s_n\}$. Прежде всего, утверждается, что s_λ конечно для некоторого бесконечного натурального числа λ. В самом деле, если это не так, то последовательность $\{s_n\}$ согласно 9.4.4 неограничена. В соответствии с этим в R_0 (а следовательно, и в R^*) для любого положительного ν существуют α и β, бо́льшие ν, такие, что $|s_\alpha - s_\beta| > 1$. Беря ν бесконечным, мы получим, что s_α не бесконечно близко к s_β для бесконечных α и β, а это противоречит условию теоремы. Отсюда вытекает, что s_λ конечно для некоторого бесконечного натурального числа λ, т. е. $s_\lambda \in M_0$. Как показывалось выше, каждое конечное число $a \in M_0$ бесконечно близко к единственному элементу $b \in R_0$. Мы будем называть b *стандартной частью* a, записывая это $b = \operatorname{st} a$. Итак, пусть $s = \operatorname{st}(s_\lambda)$. Мы утверждаем, что s есть предел $\{s_n\}$. В самом деле, $s \simeq s_\lambda$, так как $s = \operatorname{st}(s_\lambda)$, и, по условию, $s_\lambda \simeq s_\mu$ для всех остальных бесконечных натуральных чисел μ. Следовательно, $s \simeq s_\mu$ для всех бесконечных натуральных чисел и потому, согласно 9.4.14, s есть предел $\{s_n\}$.

Докажем теперь существенно *нестандартным способом* теорему Больцано — Вейерштрасса.

9.4.15. Теорема. *Любая ограниченная бесконечная последовательность имеет* (стандартную) *предельную точку.*

Доказательство. Для ограниченной последовательности $\{s_n\}$ и любого бесконечного натурального ω s_ω конечно в силу 9.4.4 и имеет стандартную часть s. По теореме 9.4.11 s есть предельная точка $\{s_n\}$.

Рассмотрим другое поучительное доказательство этого факта. Выберем стандартное число a такое, что $-a < s_n \leqslant a$ для всех стандартных целых положительных n (а следовательно, также и для всех бесконечных целых положительных чисел). Пусть m — произвольное стандартное натуральное число. Подразделим интервал $-a < x \leqslant a$ на $2n$ интервалов Δ_k длины a/m:

$$\Delta_k : \left(\frac{k-1}{m} - 1\right) a < x \leqslant \left(\frac{k}{m} - 1\right) a, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2m.$$

Поскольку число интервалов Δ_k конечно, найдется такое k, что Δ_k содержит s_n для бесконечного числа индексов n. Таким образом, в R_0 истинно следующее утверждение:

9.4.16. *Для каждого целого положительного числа w существует целое положительное число x, $x \leqslant w$, обладающее тем свойством, что для каждого целого положительного числа y найдется целое положительное число z, $z > y$, такое, что*

$$\left(\frac{x-1}{w} - 1\right) a < s_z \leqslant \left(\frac{x}{w} - 1\right) a.$$

Нетрудно проверить, что 9.4.16 может быть сформулировано как высказывание K_0, а следовательно, оно истинно также и в R^*. Поэтому если в качестве w взять бесконечное целое положительное число m, то тогда найдется целое положительное число $k \leqslant m$ такое, что если $y = \nu$ — любое бесконечное положительное число, то существует положительное целое число $z = \mu$, большее ν (и, следовательно, тоже бесконечное), для которого

$$\left(\frac{k-1}{m} - 1\right) a < s_\mu \leqslant \left(\frac{k}{m} - 1\right) a.$$

Обозначим через s стандартную часть числа

$$\left(\frac{k}{m} - 1\right) a.$$

Так как

$$\left(\frac{k}{m} - 1\right) a - \left(\frac{k-1}{m} - 1\right) a = \frac{a}{m}$$

бесконечно мало́, то s также является стандартной частью

$$\left(\frac{k-1}{m} - 1\right) a$$

и s_μ. Таким образом, $s_\mu \simeq s$ и s — предельная точка $\{s_n\}$.

Доказательство признака Коши обычно производится с помощью 9.4.15. Однако в нестандартном анализе теорему 9.4.15 можно обойти, доказав сначала 9.4.14 и показав затем, что 9.4.14 эквивалентно общему признаку сходимости, как указывалось выше.

Теорема о том, что предел суммы двух стандартных последовательностей равен сумме пределов этих последовательностей, немедленно следует из того факта, что M_1 — аддитивная группа. Предположим теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$, где $\{s_n\}$, s, $\{t_n\}$ и t стандартны. Тогда $s_\omega \simeq s$, $t_\omega \simeq t$ при любых бесконечных натуральных ω и поэтому $s_\omega t_\omega \simeq st$, так как M_1 — идеал в M_0. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n t_n = st$.

9.5. Нестандартная теория функций вещественной переменной. Пусть a — стандартное действительное число и пусть $f(x)$ — стандартная функция, определенная в интервале $b<x<a$, где b стандартно. Рассмотрим поведение $f(x)$, когда x стремится к a слева.

9.5.1. Теорема. *Стандартное число l является пределом $f(x)$ при x, стремящемся к a слева (т. е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = l$*)), тогда и только тогда, когда $f(a-\eta)\simeq l$ для всех бесконечно малых положительных η.*

Доказательство. Допустим, что $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = l$. Тогда для каждого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что

$$\forall y[[0<y<\delta]\supset[|f(a-y)-l|<\varepsilon]].$$

Это утверждение можно выразить в терминах словаря K_0 и в соответствии с этим оно истинно также и в R^*. Отсюда вытекает, что $|f(a-\eta)-l|<\varepsilon$ для всех бесконечно малых положительных η. Так как ε может быть любым стандартным положительным числом, то это означает, что $f(a-\eta)-l$ бесконечно мало́, и необходимость условия теоремы, таким образом, доказана.

---

*) Автор пользуется обозначением $\lim\limits_{x\uparrow a} f(x)$. Мы предпочли более привычную символику, принятую в нашей литературе. (*Прим. перев.*)

Обратно, предположим, что $f(a-\eta)\simeq l$ для всех бесконечно малых положительных η. Тогда для любого стандартного ε найдется такое положительное число δ (например, любое положительное бесконечно малое число), что $|f(a-y)-l|<\varepsilon$ для любого положительного y, меньшего δ. Если не обращать внимания на взятую в скобки фразу — «например, любое положительное бесконечно малое число», то последнее утверждение, справедливое в R^*, может быть сформулировано в терминах словаря K. Поэтому это утверждение истинно в R_0, что и доказывает достаточность условия теоремы.

Соответствующий результат верен также для предела справа.

Пусть $f(x)$ — стандартная вещественная функция от вещественной переменной, определенная в стандартном интервале I, который может быть открытым, замкнутым или полуоткрытым.

9.5.2. Т е о р е м а. *Функция $f(x)$ непрерывна в стандартной точке x_0, принадлежащей внутренности интервала I, тогда и только тогда, когда $f(x_0+\eta)\simeq f(x_0)$ для всех бесконечно малых η.*

Теорема непосредственно вытекает из 9.5.1.

9.5.3. Т е о р е м а. *Стандартная функция $f(x)$ непрерывна в стандартном открытом интервале I тогда и только тогда, когда $f(x_0+\eta)\simeq f(x_0)$ для всех стандартных $x_0 \in I$ и всех бесконечно малых η.*

Понятие стандартного открытого интервала обладает следующей очень простой нестандартной характеристикой.

9.5.4. Т е о р е м а. *Стандартный интервал I является открытым тогда и только тогда, когда $x+y$ принадлежит I для любого $x \in I$ и любого бесконечно малого y.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если I открыт и x — стандартное число, принадлежащее I, то при некотором стандартном $\varepsilon>0$ будет $x+y \in I$ для всех y таких, что $|y|<\varepsilon$. В частности, $x+y \in I$ при любом бесконечно малом y. Обратно, если условие теоремы выполнено, то для любого бесконечно малого ε следующее утверждение истинно в R^*:

9.5.5. $\forall y[[|y|<\varepsilon]\wedge J(x)\supset J(x+y)]$, где $J(x)$ — одноместное отношение, определяющее интервал I. $J(x)$, по предположению, содержится в словаре K. Из 9.5.5 вытекает

9.5.6. $\exists z[[z>0]\wedge[\forall y[[|y|<z]\wedge J(x)\supset J(x+y)]]]$.

Это утверждение формализуется средствами словаря K, а следовательно, принадлежит K_0 и истинно в R_0. Это, по определению, означает, что I открыт, и наша теорема доказана.

Введя соответствующую модификацию понятия непрерывности в конечных точках данного интервала, мы вместо 9.5.3 получаем следующую теорему для произвольного интервала:

9.5.7. Теорема. *Стандартная функция $f(x)$ непрерывна в стандартном интервале I тогда и только тогда, когда $f(x_0+\eta)\simeq f(x_0)$ для всех стандартных $x_0\in I$ и всех бесконечно малых η, таких, что $x_0+\eta$ принадлежит I.*

Для того чтобы от обычной непрерывности перейти к равномерной непрерывности, условие теоремы 9.5.7 необходимо усилить следующим образом:

9.5.8. Теорема. *Стандартная функция $f(x)$ равномерно непрерывна в стандартном интервале I тогда и только тогда, когда $f(x_0+\eta)\simeq f(x_0)$ для всех $x_0\in I$ и всех бесконечно малых η, таких, что $x_0+\eta\in I$.*

Доказательство. Пусть $J(x)$, как и раньше, отношение, определяющее интервал I. Предположим, что $f(x)$ равномерно непрерывна в I и пусть ε — любое стандартное положительное число. Тогда для некоторого стандартного $\delta>0$ следующее утверждение истинно в R_0:

9.5.9. $\forall x\forall y[[|y|<\delta]\wedge J(x)\wedge J(x+y)\supset$

$$\supset[|f(x+y)-f(x)|<\varepsilon]].$$

Это утверждение истинно также и в R^*. Отсюда вытекает, что для всех $x\in I$ и для всех бесконечно малых δ $|f(x+y)-f(x)|<\varepsilon$ при условии, что $x+y\in I$. Таким образом, если x и $x+y\in I$, то $f(x+y)-f(x)$ бесконечно мало́.

Обратно, если условие теоремы 9.5.8 выполнено, то 9.5.9 истинно в R^*. Но тогда утверждение

$$\exists z[[z>0]\wedge[\forall x\forall y[[|y|<z]\wedge J(x)\wedge J(x+y)\supset$$

$$\supset[|f(x+y)-f(x)|<\varepsilon]]]],$$

формулируемое в терминах словаря K, истинно в R^*, а тем самым и в R_0. Последнее как раз и означает, что $f(x)$ равномерно непрерывна в I.

Если условия теорем 9.5.4, 9.5.7, 9.5.8, 9.4.24 рассматривать как определения соответствующих понятий и если определить замкнутый интервал как интервал, дополнение которого представляет собой объединение открытых интервалов, то доказательство следующей хорошо известной теоремы становится почти очевидным.

9.5.10. Теорема. *Стандартная функция $f(x)$, непрерывная в замкнутом ограниченном стандартном интервале I, равномерно непрерывна в этом интервале.*

Доказательство. Допустим, что $f(x)$ непрерывна в I, но не равномерно непрерывна. Тогда найдется такое $a \in I$ и такое бесконечно малое η, что $a+\eta \in I$ и $f(a+\eta)-f(a)$ не является бесконечно малым. Так как по условию интервал I замкнут и ограничен, то число a конечно и имеет стандартную часть a_0. По теореме 9.5.4 a_0 принадлежит I, так как дополнение I представляет собой (два) открытых интервала и число a, бесконечно близкое к a_0, принадлежит I. В силу обычной непрерывности $f(a) \simeq f(a_0)$ и $f(a+\eta) \simeq f(a_0)$, а потому $f(a+\eta) \simeq$ $\simeq f(a)$. Следовательно, вопреки предположению, $f(a+\eta)-f(a)$ бесконечно мало́.

Докажем теперь нестандартным способом теорему Вейерштрасса о нулях непрерывных функций.

9.5.11. Теорема. *Пусть a и b — два стандартных числа $a<b$, и пусть $f(x)$ — стандартная функция, определенная и непрерывная в замкнутом интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Предположим, что $f(a)<0$ и $f(b)>0$. Тогда существует стандартное число c, такое, что $f(c)=0$, где $a<c<b$.*

Доказательство. Пусть m — любое стандартное целое положительное число. Положим

$$a_k = a + \frac{k}{m}(b-a), \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ m.$$

Тогда $a_0=a$ и $a_m=b$, $f(a_0)<0$ и $f(a_m)>0$. Отсюда следует, что для некоторого стандартного числа j будет $f(a_j)<0$ и $f(a_{j+1}) \geqslant 0$. Таким образом, в R_0 имеет место следующее утверждение:

9.5.12. Для каждого целого положительного числа m существует целое неотрицательное число j такое, что

$$f\left(a+\frac{j}{m}(b-a)\right)<0$$

и

$$f\left(a+\frac{j+1}{m}(b-a)\right)\geqslant 0.$$

9.5.12 можно представить как высказывание из K_0, что влечет его истинность в R^*. Пусть ω — любое бесконечное натуральное число, тогда для некоторого целого положительного λ

9.5.13.

$$f\left(a+\frac{\lambda}{\omega}(b-a)\right)<0 \quad \text{и} \quad f\left(a+\frac{\lambda+1}{\omega}(b-a)\right)\geqslant 0.$$

Оба числа $a+\frac{\lambda}{\omega}(b-a)$ и $a+\frac{\lambda+1}{\omega}(b-a)$ имеют одну и ту же стандартную часть, которую мы обозначим через c. $f(c)$ — стандартное число и

9.5.14.

$$f\left(a+\frac{\lambda}{\omega}(b-a)\right)\simeq f(c), \quad f\left(a+\frac{\lambda+1}{\omega}(b-a)\right)\simeq f(c).$$

Комбинируя 9.5.13 с 9.5.14, мы получаем, с одной стороны, $f(c)\leqslant 0$ и $f(c)\geqslant 0$, — с другой. Следовательно, $f(c)=0$, где $a\leqslant c\leqslant b$, при этом c не может равняться ни a, ни b, так как $f(a)<0$ и $f(b)>0$.

9.5.15. Теорема. *Пусть $f(x)$ — стандартная функция, непрерывная в замкнутом стандартном интервале $a\leqslant x\leqslant b$. Существует стандартная точка c, $a\leqslant c\leqslant b$, в которой $f(x)$ достигает максимума* (т. е. $f(c)\geqslant f(x)$ для всех x из этого интервала).

Доказательство. Положим, как и в доказательстве 9.5.11,

$$a_k=a+\frac{k}{m}(b-a),$$

где m — произвольное стандартное целое положительное число, $k=0, 1, \ldots, m$. Тогда при некотором значении k, равном h, будет $f(a_h)\geqslant f(a_k)$ для $k=0, 1, 2, \ldots, m$, поскольку число точек a_k конечно. Этот факт можно выразить средствами K и в соответствии с этим он верен также и в R^*. Возьмем в качестве m бесконечное натуральное число, и пусть c — стандартная часть соответствующего числа a_h. Мы утверждаем, что c и есть искомая точка максимума. Пусть, наоборот, $f(c)<f(c')$ для некоторого стандартного c'. Так как m бесконечно, то некоторое a_k бесконечно близко к c'. Следовательно, в силу непрерывности $f(c')\simeq f(a_k)$. Но поскольку в то же время $f(c)<f(c')$ и $f(c)\simeq f(a_h)$, то $f(a_h)$ меньше $f(a_k)$. Последнее, однако, противоречит выбору h, так что наша теорема доказана для всех стандартных x из заданного интервала. Однако, так как заключение теоремы можно сформулировать в терминах K_0, оно остается в силе и для R^*, т. е. для всех x из этого интервала.

Пусть теперь $\{f_n\}$ — последовательность вещественных функций, определенных в интервале $I\subset R_0$. В соответствии с нашим определением стандартных понятий $\{f_n(x)\}$ может рассматриваться как стандартная функция от двух переменных x и n, определенная для всех x из стандартного интервала I и для всех (стандартных или нестандартных) натуральных чисел n. Мы будем говорить в этом случае, что $\{f_n(x)\}$ есть *стандартная последовательность функций*. По теореме 9.4.7 последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится (в обычном смысле) к стандартной функции $f(x)$ в I, если для любого стандартного $x_0\in I$ будет $f_\omega(x_0)\simeq f(x_0)$ для всех бесконечных натуральных чисел ω.

9.5.16. Теорема. *Для того чтобы стандартная последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходилась к стандартной функции $f(x)$ в стандартном интервале I, необходимо и достаточно, чтобы $f_\omega(x_0)\simeq f(x_0)$ для всех $x_0\in I$ и для всех бесконечных натуральных чисел ω.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f(x)$ равномерно в I. Пусть ε — произвольное стандартное положительное число. Тогда найдется стандартное натуральное число ν такое, что $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ для всех натуральных чисел $n>\nu$ и для всех $x\in I$. Этот факт формулируется в терминах K и потому истинен в R^*. Отсюда следует, что $|f_\omega(x)-f(x)|<\varepsilon$ для всех бесконечных натуральных чисел ω и для *всех* $x\in I$

(а не только для стандартных). Поскольку это верно для всех стандартных $\varepsilon > 0$, то мы заключаем, что $f_\omega(x_0) \simeq f(x_0)$ при любом $x_0 \in I$.

Достаточность. Пусть ε — произвольное стандартное положительное число и пусть ν — бесконечное натуральное число. По условию теоремы для каждого натурального y, большего ν, и для каждого $x \in I$ имеет место $|f_y(x) - f(x)| < \varepsilon$ (в R^*). Отсюда вытекает, что утверждение

9.5.17. «Существует натуральное число z такое, что для каждого натурального числа y, большего z, выполняется

$$|f_y(x) - f(x)| < \varepsilon»,$$

формулируется в терминах K и истинно в R^*. Следовательно, оно истинно и в R_0 и, поскольку 9.5.17 истинно для любого стандартного $\varepsilon > 0$, то $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно в I.

Заметим, что если $\{f_n(x)\}$ — стандартная последовательность непрерывных функций, определенных в стандартном интервале I, то $f_\omega(x)$ (где ω — бесконечное натуральное число), вообще говоря, не является стандартной. Однако $f_\omega(x)$ — по-прежнему непрерывная функция в соответствии с обычным (вейерштрассовым) определением непрерывности. Это объясняется тем, что утверждение

«Для каждого натурального числа n $f_n(x)$ непрерывна (в обычном смысле)» может быть формализовано в качестве высказывания K_0 и тем самым истинно также и для нестандартных n. Однако для таких n функции f_n вовсе необязательно удовлетворяют нестандартному условию 9.5.2. Например, это условие не выполняется для $f_n(x) = (x^2 + n^2)^{-2}$ в точке $x_0 = 0$ при бесконечном n.

Комбинируя стандартные и нестандартные рассуждения, докажем следующий известный результат:

9.5.18. Теорема. *Если стандартная функция $f(x)$ является пределом равномерно сходящейся последовательности $\{f_n(x)\}$ непрерывных стандартных функций, определенных в интервале I, то $f(x)$ также непрерывна в I.*

Доказательство. Пусть x_0 — любая стандартная точка в I. Предположим для простоты, что x_0 — внутренняя точка. Для любого данного стандартного $\varepsilon>0$ мы должны доказать, что утверждение

9.5.19. $\exists z[[z>0]\wedge[\forall y[[|y|<z]\supset[|f(x_0+y)-$

$-f(x_0)|<\varepsilon]]]]$

истинно в R_0. Так как 9.5.19 может быть формализовано в терминах K, нам достаточно доказать его истинность в R^*. Пусть ω — любое нестандартное натуральное число. Поскольку $f_\omega(x)$ непрерывна в I (в обычном смысле), утверждение

9.5.20. $\exists z[[z>0]\wedge[\forall y[[|y|<z]\supset[|f_\omega(x_0+y)-$

$-f_\omega(x_0)|<\varepsilon]]]]$

истинно в R^* (число $z=\delta$, существующее согласно 9.5.20, может быть как стандартным, так и нестандартным). Но $f_\omega(x_0)\simeq f(x_0)$ и $f_\omega(x_0+y)\simeq f(x_0+y)$, а потому неравенство $|f_\omega(x_0+y)-f_\omega(x_0)|<\varepsilon$ влечет $|f(x_0+y)-f(x_0)|<$ $<\varepsilon$. Таким образом, 9.5.19 истинно в R^*, что и требовалось доказать.

Пусть $f(x)$ — стандартная функция, определенная в стандартном интервале I, и пусть x_0 — стандартная внутренняя точка этого интервала. Следующая теорема является непосредственным следствием нестандартного определения предела 9.5.1.

9.5.21. Теорема. *Стандартное число a является производной функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ тогда и только тогда, когда для всех бесконечно малых $\eta\neq0$ имеет место*

9.5.22. $$\frac{f(x_0+\eta)-f(x_0)}{\eta}\simeq a.$$

9.5.23. Теорема Ролля. *Пусть дана стандартная функция $f(x)$, определенная и дифференцируемая в стандартном замкнутом интервале $a\leqslant x\leqslant b$. Предположим, что $f(a)=f(b)=0$. Тогда существует внутренняя точка c этого интервала, такая, что $f'(c)=0$.*

Доказательство. Если $f(x)=0$ тождественно на всем интервале, то для любой стандартной внутренней точки c и для любого бесконечно малого $\eta \neq 0$ будет

$$\frac{f(c+\eta)-f(c)}{\eta}=0$$

и потому $f'(c)=0$ согласно 9.5.22. Допустим теперь, что $f(x) \neq 0$ в некоторой точке интервала — без ограничения общности мы можем предположить, что $f(x)>0$. В силу 9.5.15 $f(x)$ достигает максимума в некоторой внутренней точке c интервала. Пусть η бесконечно мало́; тогда

$$f(c+\eta) \leqslant f(c) \quad \text{и} \quad f(c-\eta) \leqslant f(c).$$

Пусть $f'(c)=a$; отсюда на основании 9.5.22

$$0 \geqslant \frac{f(c+\eta)-f(c)}{\eta} \simeq a$$

и

$$0 \leqslant \frac{f(c-\eta)-f(c)}{\eta} \simeq a.$$

Но коль скоро стандартное число a бесконечно близко как к положительным, так и к отрицательным числам, оно обязательно равно нулю.

Теорема о среднем значении может быть выведена из 9.5.23 обычным способом.

Уже одного приведенного выше примера достаточно, чтобы убедиться в том, что нестандартное дифференциальное исчисление может конкурировать в простоте с самым ортодоксальным подходом.

Займемся теперь определенным интегрированием, для начала, непрерывных функций. Для удобства мы ограничимся разбиением интервала интегрирования на интервалы одинаковой длины. Пусть $f(x)$ — стандартная и непрерывная функция в замкнутом интервале $a \leqslant x \leqslant b$.

Пусть

$$a_k = a + \frac{k}{m}(b-a), \qquad 0 \leqslant k \leqslant m,$$

где m — стандартное положительное число. Тогда для больших m

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{b-a}{m} f(a_k) = \frac{b-a}{m} \sum_{k=1}^{m} f(a_k)$$

аппроксимирует значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Принимая во внимание, что сумма s_m определена также и для бесконечных значений, получаем, что верна

9.5.24. Теорема. $s_m \simeq \int\limits_a^b f(x)\,dx$

для всех бесконечных целых положительных чисел m.

Это утверждение непосредственно вытекает из 9.4.7 и из данного в условии предельного равенства

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Однако наше ограничение разбиениями на интервалы одинаковой длины слишком искусственно. Сейчас мы построим аппарат, который позволит нам рассматривать более общие разбиения.

Пусть I — фиксированный стандартный замкнутый интервал $[a, b]$. Пусть p — любая последовательность из $k+1$ стандартных вещественных чисел

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k = b,$$

где k может быть любым целым положительным числом. Последовательность p мы будем называть *разбиением* интервала I и множество всех разбиений обозначим через P_{ab}. Нетрудно проверить, что множество P_{ab} имеет мощность континуума: $|P_{ab}| = 2^{\aleph_0}$. Выберем и зафиксируем какое-нибудь взаимно однозначное соответствие между P_{ab} и R_0; через r_p будем обозначать действительное число, соответствующее разбиению $p \in P_{ab}$ при этом соответствии: $p \leftrightarrow r_p$. Тогда следующие отношения принадлежат словарю K:

$F(x, y)$ — бинарное отношение, истинное тогда и только тогда, когда x — вещественное число, а y — *длина* разбиения, соответствующего x (т. е. y — целое положительное число k);

$G(x, y)$ — отношение, истинное тогда и только тогда, когда x — вещественное число, а y — максимум длин интервалов (a_l, a_{l+1}), которые фигурируют в соответствующем разбиении (таким образом, y — положительное вещественное число);

$N(x, y, z)$ — тернарное отношение, истинное тогда и только тогда, когда x — вещественное число, y — натуральное число, а z есть y-й элемент разбиения, соответствующего x (начиная с нулевого элемента), т. е. $z = a_y$.

Отношения $F(x, y)$ и $G(x, y)$ задают функции $y = \varphi(x)$ и $y = \gamma(x)$, определенные для всех действительных чисел. Аналогично, $N(x, y, z)$ определяет функцию $z = \nu(x, y)$, определенную для всех действительных чисел x и всех натуральных чисел y, таких, что $y \leqslant \varphi(x)$.

Пусть $y = f(x)$ — фиксированная стандартная функция, определенная и ограниченная на I. Для любых двух чисел x_1 и x_2 из I, $x_1 < x_2$, мы определим две функции $z = m(x_1, x_2)$ и $z = \mu(x_1, x_2)$, означающие соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани значений $f(x)$ в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$. Для любого $r \in R_0$ положим

9.5.25. $$J(r) = \sum_{l=1}^{k} (a_l - a_{l-1})\, m(a_{l-1}, a_l)$$

и

9.5.26. $$j(r) = \sum_{l=1}^{k} (a_i - a_{l-1})\, \mu(a_{i-1}, a_l),$$

где $p(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — разбиение, соответствующее действительному числу r.

Введенные нами функции и отношения существуют также и в R^*. Мы назовем нестандартное вещественное число r *допустимым* (разумеется, только в настоящем контексте), если максимум длин интервалов разбиения p, соответствующего r, т. е. $\gamma(r)$, есть бесконечно малая величина. Заметим, что в этом случае $\varphi(r)$ — число интервалов разбиения — обязательно является бесконечно большой величиной.

Обозначим через $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ и $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ соответственно верхний и нижний интегралы Дарбу для $f(x)$ на интервале I. С помощью уже известной читателю техники легко доказывается следующая

9.5.27. Теорема. $J(r) \simeq \overline{\int\limits_a^b} f(x)\,dx$ *и* $j(r) \simeq \underline{\int\limits_a^b} f(x)\,dx$ *для каждого допустимого* r *из* R^*.

Следовательно, верна

9.5.28. Теорема. *Интеграл (по Риману)* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *от стандартной и ограниченной на отрезке* $[a, b]$ *функции* $f(x)$ *существует тогда и только тогда, когда* $J(r) \simeq j(r)$ *для некоторого* (а следовательно, для каждого) *допустимого* r.

Как мы видели, выбор вещественных чисел r, соответствующих разбиениям p, осуществлялся с очень большим произволом. Более того, мы могли бы изменить нашу процедуру, рассматривая одновременно *все* разбиения конечных интервалов, или же рассматривая одновременно интегралы от *семейства* функций. Ввиду этой неопределенности можно было бы подумать, что при переходе к нестандартным r величины $J(r)$ и $j(r)$, определенные первоначально как суммы произведений, теряют бо́льшую часть свойств, которые интуитивно связываются с ними. К счастью, этого не происходит, поскольку большинство важнейших свойств этих выражений формализуется средствами K_0. Мы могли бы, как обычно, использовать это обстоятельство, чтобы дать другие доказательства известных теорем об интеграле Римана. Приведем лишь один простой пример. Предположим, что стандартные и ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$. Пусть $J_f(r)$, $j_f(r)$, $J_g(r)$, $j_g(r)$, $J_{f+g}(r)$, $j_{f+g}(r)$ — функции, определенные равенствами 9.5.25 и 9.5.26 для $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ соответственно. На любом отрезке, содержащемся в $[a, b]$, $\min f(x) + \min g(x) \leqslant \min(f(x)+g(x)) \leqslant \max(f(x)+g(x)) \leqslant \max f(x) + \max g(x)$. Отсюда для любых стандартных r

$$j_f(r) + j_g(r) \leqslant j_{f+g}(r) \leqslant J_{f+g}(r) \leqslant J_f(r) + J_g(r).$$

Но для каждого допустимого r, по предположению, $j_f(r) \simeq J_f(r)$ и $j_g(r) \simeq J_g(r)$, а потому

$$j_f(r) + j_g(r) \simeq j_{f+g}(r) \simeq J_{f+g}(r) \simeq J_f(r) + J_g(r).$$

Это показывает, что $f(x)+g(x)$ интегрируема по Риману и

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

9.6. Нестандартный анализ функций нескольких переменных. Пусть R_0^n — n-мерное евклидово пространство над полем вещественных чисел R_0. *Расстояние* PP' *между* двумя точками $P=(x_1, \ldots, x_n)$ и $P'=(x'_1, \ldots, x'_n)$ пространства определяется по формуле

$$PP' = \sqrt{(x_1-x'_1)^2 + \ldots + (x_n-x'_n)^2}.$$

Пусть R^{*n} — соответствующее пространство над R^* с тем же определением расстояния, $R^{*n} \supset R_0^n$. Точка $P \in R^{*n}$ называется *стандартной*, если все ее координаты стандартны (т. е. если $P \in R_0^n$).

Пусть S — некоторое подмножество в R_0^n. S задается определенным отношением $Q(x_1, \ldots, x_n)$ из R_0^n в том смысле, что точка $(a_1, \ldots, a_n)$ из R_0^n принадлежит S тогда и только тогда, когда $Q(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в R_0. Это же отношение определяет некоторое множество S^* в R^{*n} *). Такие подмножества согласно принятой выше терминологии мы будем называть *стандартными*, в то время как все остальные подмножества в R^{*n} — *нестандартными*.

Бесконечно малая окрестность точки $P \in R^{*n}$ определяется как множество всех точек P', для которых PP' бесконечно мало.

9.6.1. Теорема. *Стандартное подмножество S n-мерного евклидова пространства открыто тогда и только тогда, когда бесконечно малая окрестность стандартной точки $P \in S$ целиком содержится в S.*

Доказательство. Допустим, что S открыто, и пусть P — стандартная точка из S. Найдется стандартное $\delta > 0$ такое, что все точки P', для которых $PP' < \delta$,

*) В дальнейшем S и S^* автор обозначает одной и той же буквой. (*Прим. перев.*)

принадлежат S. Отсюда следует, что и все точки бесконечно малой окрестности тоже принадлежат S.

Обратно, допустим, что бесконечно малая окрестность стандартной точки P из S принадлежит S. Тогда для любого бесконечно малого положительного δ множество точек P' таких, что $PP'<\delta$, целиком содержится в S. В соответствии с этим утверждение

9.6.2. «Существует $\delta>0$ такое, что любая точка P', для которой $PP'<\delta$, принадлежит S»

истинно в R^*. Но 9.6.2 можно представить как высказывание K, а поэтому оно истинно также и в R_0. Это означает, что P — внутренняя точка S в обычном смысле. Таким образом, поскольку P — произвольная стандартная точка из S, S является открытым множеством.

9.6.3. Теорема. *Если стандартное множество S замкнуто и ограничено в обычном смысле и если точка $P \in S$, то точка $\mathrm{st}(P)$, координаты которой являются стандартными частями координат точки P, также принадлежит S.*

Доказательство. Так как S ограничено, то все координаты P конечны и потому существует $\mathrm{st}\,(P)$. Обозначим через S' дополнение S в R^{*n}. Если S' содержит $\mathrm{st}\,(P)$, то S' должно содержать и точку P, которая лежит в бесконечно малой окрестности $\mathrm{st}\,(P)$. Следовательно, $\mathrm{st}\,(P) \in S$, и теорема доказана.

В дальнейшем иногда вместо $f(a_1, \ldots, a_n)$ мы будем писать просто $f(P)$, где $P=(a_1, \ldots, a_n)$.

9.6.4. Теорема. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — стандартная функция, определенная на стандартном множестве S. Для того чтобы $f(x_1, \ldots, x_n)$ была непрерывной в S, необходимо и достаточно, чтобы для любых точек P и P' из S таких, что P стандартна, а PP' бесконечно мало, $f(P) \simeq f(P')$. Для того чтобы $f(x_1, \ldots, x_n)$ была равномерно непрерывной в S, необходимо и достаточно, чтобы $f(P) \simeq f(P')$ для всех точек P и P' из S таких, что PP' бесконечно мало.*

9.6.4 является непосредственным обобщением 9.5.7 и 9.5.8, и читателю не составит особого труда доказать эту теорему. Мы также предоставляем читателю доказательство следующего обобщения 9.5.16:

9.6.5. Теорема. *Для того чтобы стандартная последовательность функций* $\{f_k(x_1, \ldots, x_n)\}$ *равномерно сходилась в* S *к стандартной функции* $f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f_\omega(P) \simeq f(P)$ *для всех бесконечных натуральных чисел* ω *и для всех* $P \in S$.

Дадим в качестве примера нестандартное доказательство теоремы Дини для функций нескольких переменных.

9.6.6. Теорема. *Пусть* $\{f_k(x_1, \ldots, x_n)\}$ — *стандартная последовательность непрерывных функций, определенных в стандартном замкнутом и ограниченном множестве* S, *которая сходится на этом множестве к стандартной функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$. *Предположим, что* $\{f_k(x_1, \ldots, x_n)\}$ *не возрастает для всех точек* S, *т. е.* $f_k(P) \geqslant f_m(P)$ *при* $k \leqslant m$. *Тогда сходимость* $\{f_n\}$ *к* f *является равномерной в* S.

Доказательство. Мы можем предположить, что $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ тождественно на S, рассмотрев, если нужно, последовательность $\{f_n - f\}$ вместо $\{f_n\}$. Пусть P — любая точка S (не обязательно стандартная). Согласно теореме 9.6.5 мы должны показать, что $f_\omega(P)$ бесконечно мало́ для всех бесконечных целых положительных чисел ω.

Во всяком случае $f_\omega(P) \geqslant 0$, поскольку $f_n \geqslant 0$ для всех стандартных n, и $f_\omega(P) \geqslant f(P)$, так как f_n — невозрастающая последовательность. Пусть, наоборот, $f_\omega(P)$ не является бесконечно малой. Тогда $f_\omega(P) > \varepsilon$ для некоторого стандартного положительного ε и, следовательно, $f_n(P) > \varepsilon$ для всех стандартных n. Пусть $P_0 = \mathrm{st}(P)$, тогда $P_0 \in S$ согласно 9.6.3. Кроме того, P_0P бесконечно мало́ и потому $f_n(P_0) \simeq f_n(P)$ для всех стандартных n. Следовательно, $f_n(P_0) > \varepsilon$, а это противоречит нашему предположению о том, что $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(P_0) = 0$.

Заметим, что, в отличие от классического доказательства теоремы Дини, в приведенном выше рассуждении не потребовалась теорема Больцано — Вейерштрасса.

Для частных производных остаются в силе все основные результаты, доказанные для обыкновенных производных.

В дальнейшем нам потребуются следующие символы. Для любого (конечного или бесконечного) множества

$\{\eta_\nu\}$ элементов R^* обозначим через $O\{\eta_\nu\}$ множество всех конечных сумм $\sum a_\nu \eta_\nu$, где a_ν конечно, и через $o\{\eta_\nu\}$ — множество всех конечных сумм $\sum b_\nu \eta_\nu$, где b_ν бесконечно мало́. Если множество $\{\eta_\nu\}$ конечно: $\{\eta_\nu\}=\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$, то мы будем также писать $O(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ и $o(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ вместо $O\{\eta_\nu\}$ и $o\{\eta_\nu\}$. Так, например, $M_0=O(1)$ и $M_1=o(1)$. Множества $O\{\eta_\nu\}$ и $o\{\eta_\nu\}$ являются модулями над кольцом M_0. В соответствии с этим мы будем писать $a\equiv b \pmod{O\{\eta_\nu\}}$, если $(a-b)\in O\{\eta_\nu\}$ и $a\equiv b \pmod{o\{\eta_\nu\}}$, если $(a-b)\in o\{\eta_\nu\}$.

9.6.7. Теорема. *Пусть $P_0=(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ — стандартная точка n-мерного евклидова пространства. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — стандартная функция, определенная на множестве точек P, таких, что $P_0P<r$ (r — стандартное положительное наперед заданное число), — обладает первыми производными, непрерывными в каждой точке этого множества. Пусть $(dx_1, \ldots, dx_n)$ — произвольное множество бесконечно малых величин, и*

$$df=f(x_{01}+dx_1, \ldots, x_{0n}+dx_n)-f(x_{01}, \ldots, x_{0n})$$

Тогда

9.6.8.

$$df\equiv\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 dx_1+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 dx_n \pmod{o(dx_1, \ldots, dx_n)},$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$ обозначает частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в точке P_0.

Доказательство. Положим $g(t)=f(x_{01}+t\,dx_1, \ldots, x_{0n}+t\,dx_n)$, где t — параметр. Тогда $df=g(1)-g(0)$. Кроме того, при $0\leqslant t\leqslant 1$

$$g'(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)dx_1+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)dx_n,$$

где $\partial f/\partial x_i$ берется при определенном значении t, указанном в левой части. Отсюда по теореме о среднем значении

$$df=g(1)-g(0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{t=\theta}dx_1+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{t=\theta}dx_n,$$

где $0<\theta<1$. Все эти равенства, безусловно, верны для конечных $dx_1, \ldots, dx_n$, но поскольку они могут быть записаны как высказывания K, все остается в силе и для бесконечно малых $dx_1, \ldots, dx_n$.

Величина

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{t=\theta}-\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0=b_i$$

бесконечно мала, $i=1, \ldots, n$, так как первая производная непрерывна в рассматриваемой области. И, наконец,

$$df-\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 dx_1-\ldots-\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 dx_n=$$
$$=\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{t=\theta}-\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0\right)dx_1+\ldots$$
$$\ldots+\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{t=\theta}-\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0\right)dx_n=b_1\,dx_1+\ldots+b_n\,dx_n,$$

а $b_1, dx_1, \ldots, b_n, dx_n \in M_1$.

Несмотря на то, что 9.6.8 не дает обычного равенства между обеими частями этого сравнения, его можно с успехом использовать в ряде случаев, например, при вычислении производной от неявно заданной функции. Сделав соответствующие изменения, мы можем таким же образом оправдать использование бесконечно малых в классической дифференциальной геометрии и аналитической механике.

Начав рассмотрение со стандартных функций, мы естественным образом пришли к функциям более общего типа. Так, например, если $\{f_i(x)\}$ — стандартная последовательность, то функция $f_\omega(x)$ (где ω бесконечно), естественно возникающая при рассмотрении этой последовательности, вообще говоря, не является стандартной функцией. Чтобы представить такие функции в более законченном виде, введем $G(x, t)$ — стандартную функцию от двух переменных. Пусть τ — любой элемент из R^*; тогда

9.6.9. $$g_\tau(x)=G(x, \tau)$$

называется *квазистандартной функцией* от x. Это определение можно, разумеется, обобщить на случай нескольких переменных $x_1, \ldots, x_n$ и нескольких параметров $t_1, \ldots, t_k$.

Стандартные функции в то же время и квазистандартны. Функция $f_\omega(x)$, упомянутая выше, является квазистандартной.

Все функционалы и операторы, применимые к функциям $g_t(x) = G(x, t)$ для любых стандартных t из некоторого стандартного множества T, могут быть естественно и однозначно продолжены на функции $g_\tau(x)$, определяемые равенством 9.6.9 для некоторых нестандартных τ, принадлежащих T. Мы не будем описывать эту ситуацию в общем случае, а рассмотрим лишь один пример, который впоследствии нам пригодится. Предположим, что функции $g_t(x)$ интегрируемы в некотором определенном смысле (например, по Риману) на стандартном отрезке $[a, b]$ для всех стандартных t из T:

9.6.10. $$\int_a^b g_t(x)\,dx = \int_a^b G(x, t)\,dx = J(t).$$

Мы определим тогда интеграл $\int_a^b g_\tau(x)\,dx$ для нестандартных τ, полагая просто

9.6.11. $$\int_a^b g_\tau(x)\,dx = J(\tau).$$

Это определение сохраняет все свойства интеграла, которые могут быть определены в узком исчислении предикатов. Например, если $g(x)$ бесконечно мала в замкнутом интервале $[a, b]$, то она достигает в этом интервале своих экстремальных значений, которые, очевидно, должны быть бесконечно малыми. Поскольку для всех стандартных $h(x)$

$$(b-a)\min h(x) \leqslant \int_a^b h(x)\,dx \leqslant (b-a)\max h(x),$$

то это же верно и для квазистандартной функции $g(x)$. Отсюда следует, что если $g(x)$ бесконечно мала на всем отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b g(x)\,dx$ также бесконечно мало.

Приведенные выше определения становятся более конкретными, если в качестве нашей нестандартной модели анализа взять одну из ультрастепеней $R^I_{0\Lambda}$, введенных в начале п. 9.4. Напомним, что I обозначает здесь множество натуральных чисел, а Λ — ультрафильтр в множестве всех подмножеств I. Элементами $R^I_{0\Lambda}$ являются функции $f(\nu)$, определенные на I со значениями в R_0. Может случиться и так, что две разные функции могут оказаться равными в смысле отношения равенства в $R^I_{0\Lambda}$. Те элементы $R^I_{0\Lambda}$, которые являются постоянными функциями (или постоянными функциями на некотором подмножестве I, принадлежащем Λ), образуют подполе, изоморфное R_0. Элемент $\tau=f(\nu)$ принадлежит стандартному множеству T, если множество всех натуральных чисел ν, для которых $f(\nu)\in T$, есть элемент из Λ. Пусть дана стандартная функция $F(t)$, определенная на элементах T. Тогда для любого $\tau=f(\nu)\in T$ найдется такой элемент $\lambda\in\Lambda$, что функция $F(\tau)$, рассматриваемая как функция от ν, равна $F(f(\nu))$ для всех ν из λ. В частности, если $F(t)$ совпадает с интегралом $J(t)$ (см. 9.6.10), то для всех ν из множества $\lambda\in\Lambda$ $F(\tau)$, как функция от ν, принимает значения $\int\limits_a^b G(x, f(\nu))\,dx$.

Квазистандартные конструкции могут быть также с успехом использованы для представления обобщенных функций, таких, например, как дельта-функция Дирака. Мы, однако, не станем углубляться в эту область, а дадим еще один последний пример нестандартного доказательства существования решения дифференциального уравнения первого порядка с заданным начальным значением. Формулировка теоремы относится целиком к полю действительных чисел R_0.

9.6.12. Теорема. *Предположим, что функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике $\{|x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\}$ и $|f(x,y)|\leqslant M$. Тогда существует функция $\varphi(x)$ с непрерывной первой производной, заданная на отрезке $[x_0-c,\ x_0+c]$, где $c=\min(a, bM^{-1})$, так что $\varphi(x_0)=y_0$ и*

9.6.13. $\varphi'(x)=f(x, \varphi(x))$

для

$$x_0 - c \leqslant x \leqslant x_0 + c.$$

Доказательство. Отметим, прежде всего, что достаточно доказать существование функции $\varphi(x)$, непрерывной для всех $x \in [x_0, x_0+c]$ и удовлетворяющей уравнению

9.6.14. $$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt.$$

В этом случае, дифференцируя 9.6.14 на отрезке $[x_0, x_0+c]$ и проводя аналогичное рассмотрение для $[x_0 - c, x_0]$, мы получим 9.6.13 для всего отрезка $[x_0 - c, x_0+c]$. Кроме того, для $x = x_0$ 9.6.14 дает требуемое равенство $\varphi(x_0) = y_0$.

Для того чтобы получить функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую новому условию, подразделим отрезок $[x_0, x_0+ +c]$ на m отрезков равной длины точками $x_k = x_0 + kc/m$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, где m — любое целое положительное число (в R_0). Определим функцию $\varphi_m(x)$, полагая

9.6.15. $$\varphi_m(x_0) = y_0,$$
$$\varphi_m(x) = \varphi_m(x_i) + f(x_i, \varphi_m(x_i))(x - x_i),$$

где $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. 9.6.15, как нетрудно видеть, задает непрерывную функцию на отрезке $[x_0, x_0+c]$, такую, что $\varphi'_m(x)$ постоянна в каждом $[x_i, x_{i+1}]$ (т. е. графиком $\varphi_m(x)$ служит ломаная линия). Для любых x и x' из этого отрезка

9.6.16. $$|\varphi_m(x) - \varphi_m(x')| \leqslant M(x - x'),$$

в частности, $|\varphi_m(x) - y_0| \leqslant M|x - x_0|$, и, следовательно, $|\varphi_m(x)| < Mc + |y_0| \leqslant |y_0| + b$. Ясно также, что для любого данного $\varepsilon > 0$ существует целое положительное число μ, такое, что для всех $m > \mu$

9.6.17. $$|\varphi'_m(x) - f(x, \varphi_m(x))| < \varepsilon$$

во всех точках $[x_0, x_0+c]$, где φ'_m существует. Кроме того, из 9.6.17 мы получаем

9.6.18.
$$\left|\varphi_m(x)-\left(y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ \varphi_m(t))\,dt\right)\right| < \varepsilon(x-x_0)\leqslant \varepsilon c,$$
$$x_0\leqslant x\leqslant c,\quad m>\mu.$$

До этого момента мы полностью следовали *стандартной* процедуре (в любом смысле этого слова). Однако здесь мы делаем шаг в сторону и полагаем m равным бесконечному целому положительному числу ω. Тогда 9.6.18 истинно для всех стандартных положительных ε, и потому

9.6.19. $$\varphi_\omega(x)\simeq y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ \varphi_\omega(t))\,dt.$$

Заметим, что $\varphi_\omega(x)$ — квазистандартная функция, а потому $f(x, \varphi_\omega(x))$ и правая часть равенства 9.6.19 определены в том смысле, как указывалось выше. Но поскольку неравенства 9.6.16 выполняются для всех конечных m, они верны также и для $m=\omega$.

Функция $\varphi_\omega(x)$ непрерывна, так как непрерывны функции $\varphi_m(x)$ для конечных m. Неравенство $|\varphi_\omega(x)-\varphi_\omega(x')|\leqslant M|x-x'|$ показывает, что $\varphi_\omega(x)\simeq\varphi_\omega(x')$ при $x\simeq x'$ для любых $x, x'\in[x_0, x_0+c]$.

Согласно 9.6.16 функция $\varphi_\omega(x)$ ограничена в $[x_0, x_0+c]$ некоторым стандартным числом. В соответствии с этим мы можем определить стандартную функцию, полагая $\varphi(x)=\mathrm{st}(\varphi_\omega(x))$ для всех стандартных $x\in[x_0, x_0+c]$. Заметим, что хотя $\mathrm{st}(\varphi_\omega(x))$ определена также для нестандартных x, в этих точках $\mathrm{st}(\varphi_\omega(x))$, вообще говоря, не совпадает с $\varphi(x)$ *).

По определению $\varphi(x)$, имеем $\varphi(x)\simeq\varphi_\omega(x)$ для всех стандартных $x\in[x_0, x_0+c]$. Следовательно, на основании первого неравенства 9.6.16 получаем

9.6.20. $|\varphi(x)-\varphi(x')|\leqslant M|x-x'|+\eta$

для произвольных стандартных x и x' из $[x_0, x_0+c]$, где η бесконечно мало́. Так как $|\varphi(x)-\varphi(x')|$ и $M|x-x'|$ — стандартные числа, то 9.6.20 дает нам стан-

*) Поскольку тот факт, что $a_0=\mathrm{st}(a)$, не выражается в терминах словаря K. (*Прим. перев.*)

дартное неравенство $|\varphi(x)-\varphi(x')|\leqslant M|x-x'|$, из которого, в частности, следует непрерывность $\varphi(x)$.

Мы утверждаем, что $\varphi_\omega(x)\simeq\varphi(x)$ для *всех* x из отрезка $[x_0, x_0+c]$. По определению $\varphi(x)$, это верно для всех стандартных x. Для любого другого x положим $x'=\mathrm{st}\,(x)$. Тогда $\varphi_\omega(x')\simeq\varphi(x')$ и, кроме того, как указывалось выше, $\varphi_\omega(x')\simeq\varphi_\omega(x)$. В силу непрерывности $\varphi(x)$ (см. 9.5.7) $\varphi(x')\simeq\varphi(x)$. Соединяя вместе все три указанные соотношения, мы получаем доказательство нашего утверждения $\varphi_\omega(x)\simeq\varphi(x)$ для всех x. В силу сказанного расстояние между двумя точками $(x, \varphi_\omega(x))$ и $(x, \varphi(x))$ прямоугольника $\{|x-x_0|\leqslant a, |y-y_0|\leqslant b\}$ бесконечно мало́. Таким образом, в силу непрерывности $f(x, y)$ (а значит, и равномерной непрерывности) в замкнутом прямоугольнике $|x-x_0|\leqslant a$, $|y-y_0|\leqslant b$ для всех $x\in[x_0, x_0+c]$ имеем

$$f(x, \varphi_\omega(x))\simeq f(x, \varphi(x)).$$

Отсюда следует, что интеграл $\int\limits_{x_0}^{x}[f(t, \varphi_\omega(t))-f(t, \varphi(t))]\,dt$ бесконечно мал для всех стандартных x из отрезка $[x_0, x_0+c]$ (а также и для нестандартных x, хотя мы и не будем пользоваться этим фактом). Итак, $\varphi_\omega(x)\simeq\varphi(x)$ для всех стандартных x и в то же время $\int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_\omega(t))\,dt\simeq$ $\simeq\int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt$. Комбинируя эти соотношения с 9.6.19, мы получаем

9.6.21. $$\varphi(x)\simeq y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt.$$

Однако числа в обеих частях 9.6.21 стандартны, и потому $\simeq$ можно заменить на знак равенства, что и дает нам требуемое соотношение 9.6.14.

Теорема 9.6.12 с одним лишь требованием непрерывности принадлежит Пеано. Некоторый исторический интерес представляет одна из его работ, посвященная этому вопросу (Пеано [1]), в которой Пеано использовал один из ранних вариантов символической логики. Он оправдывал употребление своих обозначений тем, что доказательство, полностью изложенное на обычном языке, было бы чрезмерно громоздким.

В проведенных выше рассуждениях нам не требовался принцип компактности (а именно, теорема Асколи — Арцела), который мы заменили некоторыми нестандартными рассмотрениями. Напомним, что аналогичная ситуация имела место и в случае теоремы Дини 9.6.6. Нельзя, конечно, сказать, что наши методы вообще исключают такие принципы и в данном случае использование аксиомы выбора. Однако истинная нужда в таких средствах возникает теперь в другом месте — при построении нестандартной модели анализа.

9.7. Задачи

9.7.1. Пусть

$$X = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y_1 \ldots \exists y_k Q(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$$

— высказывание, сформулированное в терминах E, S и P (равенства, сложения и умножения) без индивидов, где ппф Q уже не содержит кванторов. Допустим, что X истинно в поле комплексных чисел F. Доказать, что существует такое разбиение декартова пространства F^n на конечное число подмножеств $D_1, \ldots, D_m$ и такие алгебраические функции $f_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, k$, что $Q(a_1, \ldots, a_n, f_{i_1}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_{ik}(a_1, \ldots, a_n))$ истинно в F для всех $(a_1, \ldots, a_n)$ из F^n (и для надлежаще подобранных значений $f_{ij}(a_1, \ldots, a_n)$). (Это утверждение есть частный случай теоремы, доказанной в работе Лайтстоуна и Робинсона [2].)

9.7.2. Доказать, что если структура M_1 элементарно эквивалентна структуре M_2 (относительно данного словаря), то M_1 может быть вложена в ультрастепень структуры M_2 (Фрейн).

9.7.3. Показать, что нестандартная модель анализа не может быть компактной. Почему, тем не менее, нам удалось доказать теорему Больцано—Вейерштрасса 9.4.15 с помощью нестандартного анализа?

9.7.4. Пусть Σ — множество всех ограниченных последовательностей комплексных чисел, рассматриваемое как линейное пространство. Доказать известную теорему о существовании комплексного линейного функционала, определенного во всех точках Σ и совпадающего с пределом последовательности $\{s_n\}$ для всех сходящихся последовательностей. (Указание. Искомый функционал задается стандартной частью числа s_ω, где ω — фиксированное бесконечное натуральное число.) (Указанный пример принадлежит Д. Скотту.)

9.7.5. Доказать теорему Асколи—Арцела.

Библиографическая справка. Теорема 9.15 приведена у Гильберта и Бернайса [1] в качестве дополнения к одной из ε-теорем. Теория п. 9.2 изложена в работе А. Робинсона [12]. Процедуру (принадлежащую Тарскому) удаления квантора в случае вещественно замкнутого поля читатель сможет найти в книге Тарского и Мак-Кинси [1] (см. также статью Зейденберга [1]). Работа Зейденберга о результантах изложена в его статье (Зейденберг [2]), а конструкция Сколема — в работе Сколема [2] (ср. Сколем [3]). Формулировка понятия ультрапроизведения была дана Лосем [1]. Более поздние работы в этой области принадлежат Фрейну, Скотту и Тарскому [1], Чжану и Морелю [1] и, в частности, Кочену [1] и Кейслеру [12]. Использованный здесь подход взят из статьи А. Робинсона [16]. Относительно колец непрерывных функций см. Эрдёш [1], Гилман и Хенриксен [1], Гилман и Джерисон [1]. Об исследованиях по нестандартным моделям арифметики, помимо работ Сколема [2], [3], см. Хенкин [1], Гилмор и Робинсон [1], Кемени [1], Мендельсон [3], Макдоуэл и Шпекер [1], Скотт [1], А. Робинсон [15], Ригер [1], Рабин [2]. Возможности и результаты нестандартного анализа описаны в статье А. Робинсона [17], содержащей ссылки на дополнительные работы в исчислении бесконечно малых. В связи с этим пристального внимания заслуживают работы Шмидена и Лаугвица [1] и Лаугвица [1], [2] *).

---

*) Приведенные и ультрапроизведения играют очень важную роль в теории моделей. Они оказались очень удобными в решении конкретных проблем в работах Акса и Кочена [1].

Относительно общих свойств ультрапроизведений см. работы Алмагамбетова [1], Ершова [4], Кона [1], Кейслера [3], [5], [7]—[9], [13], [15], Когаловского [10], Тайманова [6], Фефермана и Воота [1], Чжана и Кейслера [1].

Нестандартные модели арифметики изучались в работах Аллинга [1], Мюллера [1], А. Робинсона [15], Рабина [4]. Нестандартному анализу посвящены работы А. Робинсона [17], [22]. (*Прим. ред.*)

БИБЛИОГРАФИЯ[1])

Аддисон (Addison J. W.)

[1]*. The undefinability of the definable (Abstract), Amer. Math. Soc. Notices 12 (1965), 347—348

Акс (Ax I.) и Кочен (Kochen S.)

[1]*. Diophantine problems over local fields: I, Amer. J. Math. 87 (1965), 605—630; II, там же, 631—648; III, Ann. Math. 83 (1966), 435—455. [Русский перевод: Математика 9, № 5 (1965), 3—26.]

Аллинг (Alling N. L.)

[1]*. Rings of continuous integral values functions and nonstandard arithmetic, Trans. Amer. Math. Soc. 118, N 6 (1965), 498—525.

Алмагамбетов Ж. А.

[1]*. О классах аксиом, замкнутых относительно заданных приведенных произведений и степеней, Алгебра и логика (семинар) 4, № 3 (1965), 71—78.

[2] Разрешимость элементарной теории некоторых классов свободных нильпотентных алгебр, там же 4, № 6 (1965), 5—15.

Артин (Artin E.)

[1] Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, Abh. d. math. Sem. d. hamb. Univ. 5 (1927), 100—115.

Артин (Artin E.) и Шрейер (Schreier O.)

[1] Algebraische Konstruktion reeller Körper, Abh. d. math. Sem. d. hamb. Univ. 5 (1927), 85—99.

Ассер (Asser G.)

[1] Das Repräsentantenproblem im Prädikatenkalkul der ersten Stufe mit Identität, Z. math. Logik u. Grundlagenf. 1 (1955), 252—263.

[2] Über die Ausdruckfähigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit Funktionalen, Z. math. Logik u. Grundl. d. Math. 2 (1956), 250—264.

Бернайс (Bernays P.)

[1] Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre, Essays on the Foundations of Mathematics (Fraenkel anniversary volume), Jerusalem, 1961, 3—49.

Бернштейн (Bernstein A. R.) и Робинсон А. (Robinson A.)

[1]* Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos, Pacif. J. Math. 16, N 3 (1966), 421—433.

---

[1]) Звездочкой отмечена литература, добавленная при переводе.

Бет (Beth E. W.)
[1] A topological proof of the theorem of Löwenhein—Skolem—Gödel, Proc. Roy. Acad. Sci., Amsterdam, ser. A **54** (1951), 436—444.
[2] On Padoa's method in the theory of definition, Proc. Roy. Acad. Sci., Amsterdam, ser. A **56** (1953), 330—339.
[3] The Foundations of Mathematics, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam, 1959.
Бинг (Bing K.)
[1] On arithmetical classes not closed under direct union, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 836—846.
Биркгоф (Birkhoff G.)
[1] On the structure of abstract algebras. Proc. Camb. Phil. Soc. **31** (1935), 433—454.
Брейн (Bruin N. G. de) и Эрдёш (Erdös P.)
[1] A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, Proc. Roy. Acad Sci., Amsterdam. ser. A **54** (1951), 371—373.
Бюхи (Büchi J. R.)
[1]* Weak second-order arithmetic and finite automata, Z. Math. Logik und Grundl. d. Math. **6**, N 1 (1960), 66—92. [Русский перевод: Бюхи Дж. Р., Слабая арифметика второго порядка и конечные автоматы, Кибернетический сб. **8**, «Мир», 1964, стр. 42—77.]
[2]* Decision methods in the theory of ordinals, Bull. Amer. Math. Soc. **71**, N 5 (1963), 757—769. [Русский перевод: Бюхи Дж. Р., О разрешающем методе для ограниченной арифметики второго порядка, Кибернетический сб., 8, «Мир», 1964, стр. 78—90.]
Воот (Vaught R. L.)
[1] Application of the Löwenheim—Skolem—Tarski theorem to problems of completeness and decidability, Proc. Roy. Acad. Sci., Amsterdam, ser. A **57** (1954), 467—472.
[2] On a theorem of Cobham concerning undecidable theories, Logic, Methodology and Philosophy of Science, 1960. [Русский перевод: Воот Р. Л., О теореме Кобхама, касающейся неразрешимых теорий, сб. «Математическая логика и ее применения», «Мир», 1965, стр. 9—22.]
[3] Denumerable models of complete theories, Infinitistic Methods (Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw, 1959).
[4] The elementary character of two notions from general algebra, Essays on the Foundations of Mathematics (Fraenkel anniversary volume), Jerusalem, 1961, 226—233.
[5]* Models of complete theories, Bull. Amer. Math. Soc **69** (1963).
[6]* Elementary classes closed under descending intersection, Proc. Amer. Math. Soc. **17**, № 2 (1966).
Галперн (Halpern J. D.)
[1]* The independence of the axiomc of choice from the Boolean prime ideal theorem, Fund. Math. **55** (1964), 57—66.
Гёдель (Gödel K.)
[1] Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatsch. f. Math. u. Phys. **37** (1930), 349—360.

[2] The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuumhypothesis with the axioms of set theory, Ann. Math. Stud. Princeton, 1940.

Гжегорчик (Grzegorchyk A.)

[1]* On the concept of categoricity, Studia Logika **13** (1962), 39—66.

[2]* A kind of categoricity, Colloq. math. 2 (1962), 183—187.

Гилман (Gillman L.) и Джерисон (Jerison M.)

[1] Rings of continuous functions, New York, 1960.

Гилмор (Gilmore P. C.) и Робинсон А. (Robinson A.)

[1] Metamathematical considerations on the relative irreducibility of polynomials, Canad. J. Math. 7 (1955), 483—489.

Гильберт (Hilbert D.) и Аккерман (Ackermann W.)

[1] Grundzüge der theoretischen Logik, 2nd ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Berlin, 1938.

Гильберт (Hilbert D.) и Бернайс (Bernayse P.)

[1] Grundlagen der Mathematik, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Berlin, vol. 1, 1934; vol. 2, 1939.

Гуревич Ю. Ш.

[1]* Элементарные свойства упорядоченных абелевых групп, Алгебра и логика (семинар) **3**, № 1 (1964), 5—40.

[2]* Экзистенциальная интерпретация, там же **4**, № 4 (1965), 71—87.

[3]* Об эффективном распознавании выполнимости формул УИП, там же **5**, № 2 (1966), 25—56.

Гуревич Ю. Ш. и Кокорин А. И.

[1]* Универсальная эквивалентность упорядоченных абелевых групп, Алгебра и логика (семинар) **2**, № 1 (1963), 37—39.

Девис (Davis M.)

[1] Compatibility and Unsolvability, New York—Toronto—London, 1958.

Ершов Ю. Л.

[1]* Об аксиоматизируемых классах с бесконечной сигнатурой, Алгебра и логика (семинар) **1**, № 4 (1962), 32—44.

[2]* Разрешимость элементарных теорий некоторых классов абелевых групп, там же **1**, № 6 (1963), 37—41.

[3]* Неразрешимость некоторых неэлементарных теорий, там же **3**, № 2 (1964), 45—47.

[4]* Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров, там же **3**, № 3 (1964), 17—38.

[5]* Неразрешимость теории симметрических и простых конечных групп, ДАН СССР **158**, № 4 (1964), 777—779.

[6]* Об элементарных теориях локальных полей, Алгебра и логика (семинар) **4**, № 2 (1965), 5—30.

[7]* Об элементарной теории максимальных нормированных полей, там же **4**, № 3 (1965), 31—70.

[8]* Об элементарной теории максимальных нормированных полей II, там же **4**, № 6 (1965), 47—48.

[9]* Об элементарной теории максимальных нормированных полей II, там же **5**, № 1 (1965), 5—41.

[10]* Об элементарной теории максимальных нормированных полей, ДАН СССР **165**, № 1 (1965), 24—26.

Ершов Ю. Л., Тайцлин М. А.

[1]* Неразрешимость некоторых теорий, Алгебра и логика (семинар) **2**, № 5 (1963), 37—41.

[2]* Об элементарных теориях классов конечных моделей, УМН **19**, № 2 (1964), 194—195.

Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д. и Тайцлин М. А.

[1]* Элементарные теории, УМН **20**, № 4 (1965), 37—108.

Захаров Д. А.

[1]* К теореме Лося—Сушко, УМН **16**, № 2 (1961), 200—201.

[2]* О конвексных классах моделей, Уч. зап. Ивановского пединститута **31** (1963), 54—55.

Зейденберг (Seidenberg A.)

[1] Some basic theorems in differential algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **73** (1952), 174—190.

[2] A new decision method for elementary algebra, Ann. Math. ser. 2 **60** (1954), 365—374.

[3] An elimination theory for differential algebra, University of California publications in Mathematics, new series **3** (1956), 31—66.

Йонсон (Jonson B.)

[1]* Homogeneous universal relational systems, Math. Scand. **8** (1960), 137—142.

[2] Algebraic extension of relation systems, там же **11**, N 2 (1962), 179—205.

Йонсон (Jonsson B.), Чжан (Chang C. C.) и Тарский (Tarsky A.)

[1]* Refinement properties for relational structures, Fund. Math. **55** (1964), 249—281.

Калиш (Kalisch P.), Монтегю (Montague R.)

[1]* On Tarski's formalization of predicate Logic with identity, Arch. f. Math. Logik u. Grundlagenforsch. 7 (1965), 81—101.

Капланский (Kaplansky I.)

[1] An introduction to differential algebra, Actualités scientifiques et industrielles, No 1251, Paris, 1957.

Каргаполов М. И.

[1]* Об элементарной теории структур полугрупп. Алгебра и логика (семинар) **1**, № 3 (1962), 46—53.

[2]* Об элементарной теории абелевых групп, там же **1**, № 6 (1963), 26—36.

[3]* Классификация упорядочиваемых абелевых групп по элементарным свойствам, там же **2**, № 2 (1963), 31—47.

[4]* Доупорядочиваемые группы, там же **2**, № 6 (1963), 5—14.

Карнап (Carnap R.)

[1] Introduction to Semantics, Cambridge, Mass., 1942.

[2] Formalization of Logic, Cambridge, Mass., 1943.

Карп (Karp P.).

[1] Languages with expressions of infinite length, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964.

Карри (Curry H. B.)
[1] Leçons de logique algebrique, Collection de logique mathématique, Paris—Louvain, 1952.
Кейслер (Keisler H. J.)
[1] Theory of models with generalized atomic formulas, J. Symb. Logic **25** (1960), 1—26.
[2] Isomorphism of ultraproducts, II (abstract), Notices Amer. Math. Soc. **8** (1961), 63—64.
[3]* Ultraproducts and elementary classes, Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wett., Ser. A **64**, № 5 (1961), 477—495.
[4]* On some results of Jonsson and Tarski concerning free algebras, Math. Scand. **9**, N 1 (1961), 102—106.
[5]* Limit ultrapowers, Proc. Amer. Math. Soc **13** (1962), 103—131.
[6]* Applications of ultraproducts of pairs of cardinals to the theory of models, Pacif. J. Math. **12** N 3 (1962), 835—845.
[7]* A complete first-order logic with infinitary predicates, Fundamenta Math. **52**, N 2 (1963), 177—203.
[8]* Cood ideals in fields of sets, Ann. of Math. **79**, N 2 (1964), 338—359.
[9]* Ultraproducts and saturated models, Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet. A **67**, N 2 (1964), 178—186.
[10]* Complete theories of algebraically closed fields with distinguished subfields, Michigan Math. J. **1** (1964), 71—82.
[11]* Unions of related systems, Proc. Amer. Math. Soc. **15**, N 4 (1964), 540—545.
[12]* On cardinalities of ultraproducts, Bull. Amer. Math. Soc. **70**, N 4 (1964), 644—647.
[13]* Limit ultraproducts, J. Symb. Logic **30**, N 2 (1965), 212—233.
[14]* Ideals with preserved degree of goodness, Ann. Math. **81**, N 1 (1965), 112—116.
[15]* Reduced products and Horn classes, Trans. Amer. Math. Soc. **117**, N 5 (1965), 307—328.
Кемени (Kemeny J. G.)
[1] Undecidable problems of elementary number theory, Math Ann. **135** (1958), 160—169.
Клини (Kleene S. C.)
[1] Introduction to Metamathematics, Princeton—Toronto—New York, 1952. [Русский перевод: Клини С. К., Введение в метаматематику, ИЛ, 1957.]
Кобхем (Cobham A.)
[1]* Some remarks concerning theories with recursively enumerable complements, J. Symb. Logic **28** (1963), 72—74.
Когаловский С. Р.
[1]* Об универсальных классах алгебр, замкнутых относительно прямых произведений, Изв. высш. уч. завед. (математика), № 3 (1959), 88—96.
[2]* Универсальные классы моделей, ДАН СССР **124**, № 2 (1959), 260—263
[3]* О мультипликативных полугруппах колец, ДАН СССР **140**, № 5 (1961), 1005—1007.

[4]* Об одном общем методе получения характеристик аксиоматизируемых классов, ДАН СССР **136**, № 6 (1961), 1291—1294.

[5]* Структурная характеристика универсальных классов, Сиб. матем. ж. **4**, № 1 (1963), 87—119.

[6]* Письмо в редакцию, ДАН СССР **154** (1964), 494.

[7]* О соотношении между финитно-проективными и финитно-редукционными классами моделей, ДАН СССР **155**, № 6 (1964).

[8]* О финитно-редукционных классах моделей, Сиб. матем. ж. **6**, № 5 (1965), 1021—1025.

[9]* Два вопроса относительно финитно-проективных классов, Сиб. матем. ж. **6**, № 6 (1965), 1429—1431.

[10]* Некоторые замечания об ультрапроизведениях, Изв. АН СССР **29**, № 5 (1965), 997—1004.

[11]* О квазипримитивных классах моделей, ДАН СССР **148**, № 3 (1963).

Кокорин А. И. и Химамиев Н. Г.

[1]* Элементарная классификация структурно упорядоченных абелевых групп с конечным числом нитей, Алгебра и логика (семинар) **5**, № 1 (1965), 41—51.

Колчин (Kolchin E. R.)

[1] Algebraic matric groups and the Uicard—Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations, Ann. Math. ser 2, **49** (1948), 1—42.

Кон (Cohn R. M.)

[1] Universal Algebras, Tokyo, 1965.

Кочен (Kochen S.)

[1] Ultraproducts in the theory of models, Ann. Math., ser. 2, **74** (1961), 221—261.

Крейг (Craig W.)

[1] Linear reasoning. A new form of the Herbrand—Gentzen theorem, J. Symb. Logic **22** (1957), 250—268.

[2] Three uses of the Herbrand—Gentzen theorem in relating model theory and proof theory, там же **22** (1957), 269—285.

[3] Bases for first order theories and subtheories, там же **25**, N 2 (1960), 97—142.

Крейсел Г. (Kreisel G.)

[1] On the interpretation of non-finitist proofs, J. Symb. Logic **16** (1951), 241—267; **17** (1952), 43—58.

[2] The mathematical significance of consistency proofs, там же **23** (1958), 155—182.

Курош А. Г.

[1]* Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.

Лавров И. А.

[1]* Неразрешимость элементарных теорий некоторых колец, Алгебра и логика (семинар) **1**, № 3 (1962), 39—45.

[2]* Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий, там же **2**, № 1 (1963), 5—18.

Лайтстоун (Lightstone A. H.) и Робинсон А. (Robinson A.)

[1] Syntactical transforms, Trans. Amer. Math. Soc. **86** (1957), 220—245.

[2] On the representation of Herbrand functions in algebraically closed fields, J. Symb. Logic **22** (1957), 187—204.

Лаугвиц (Laugwitz D.)

[1] Anwendungen unendlich kleiner Zahlen, I. Zur Theorie der Distributionen, J. f. d. reine und angew. Math. **207** (1961), 53—60.

[2] Anwendungen unendlich kleiner Zahlen, II. Ein Zugang zur Operatorenrechnung von Mikusinski, там же **208** (1961), 22—34.

Леви (Levy A.)

[1] Axiom schemata of strong infinity, Pacif. J. Math. **10** (1960), 223—238.

[2] A generalization of Gödel's notion of constructibility, J. Symb. Logic **25** (1960), 147—155.

Ленг (Lang S.)

[1] The theory of real places, Ann. Math. ser. 2 **57** (1953), 378—391.

Ленгфорд (Langford C. H.)

[1] Some theorems on deducibility, Ann. Math ser. 2 **28** (1927), 16—40.

Лёвенгейм (Löwenheim L.)

[1] Ueber Möglichkeiten im Relativkalkül, Math. Ann. **76** (1915), 447—470.

Линдон (Lyndon R. C.)

[1] Existential Horn sentences, Proc. Amer. Math. Soc. **10**, N 6 (1959), 994—998.

[2] Properties preserved under algebraic constructions, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 287—299.

[3] An interpolation theorem in the predicate calculus, Pacif. J. Math. **9** (1959), 129—142.

[4] Properties preserved in subdirect products, там же **9** (1959), 155—164.

Лоренцен (Lorenzen P.)

[1] Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin — Göttingen—Heidelberg, 1955.

Лось (Los J.)

[1] Sur le théorème de Gődel pour les théories indénombralles, Bull. Acad. Polon. de Sci. III 2 (1954), 319—320.

Лось (Los J.) и Рылль-Нардзевский (Ryll-Nardzewski C.)

[1] Effectiveness of the representation theory for Boolean algebras, Fund. Math. **41** (1954), 49—56.

[2] Quelques remarques théorèmes, et problèmes sur les classes définissables d'algebres, Mathematical Interpretation of Formal Systems (Symposium, Amsterdam, 1954), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 1955, 98—113.

[3] On the extending of models, I, Fund. Math. **42** (1955), 38—54.

Лось (Los J.) и Сушко (Suszko R.)

[1] On the extending of models, IV, Fund. Math. **44** (1957), 52—60.

Макдоуэл (Macdowell R.) и Шпекер (Specker E.)
[1] Modelle der Arithmetik, Infinitistic Methods (Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw, 1959), 1961, 257—263.
Маккай (Makkai Mihály)
[1]* On PC_Δ-classes in the theory of models, Magyar tud. akad. Math. **9**, N 1—2 (1964), 159—194.
[2]* Remarks on my paper «On PC_Δ-classes in the theory of models», Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 1964, 601—602.
[3]* On a generalization of a theorem of E. W. Beth, Acta math. Acad. Sci. Hung. **15**, N 1—2 (1964), 227—235.
[4]* A compactness result concerning direct products of models, Fund. Math. **57**, N 3 (1965), 313—326.
Мак-Кинси (McKinsey J. C. C.)
[1] The decision problem for some classes of sentences without quantifiers, J. Symb. Logic **8** (1943), 61—76.
Мальцев А. И.
[1] Untersuchungen aus den Gebiete der Mathematischen Logik, Матем. сб. **5**, N 1 (1936), 323—336.
[2]* Über die Einbettung von associativen Systemen in Gruppen I, II, Матем. сб. **6** (1936), 331—336; **8** (1940), 251—264.
[3] Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп, Уч. зап Ивановского пединститута **1**, № 1 (1941), 3—9.
[4] К общей теории алгебраических систем, Матем. сб. **35(77)** (1954), 3—20.
[5] О представлениях моделей, ДАН СССР **108** (1956), 27—29.
[6] Квазипримитивные классы абстрактных алгебр, там же **108** (1956), 187—189.
[7] Подпрямые произведения моделей, там же **109** (1956), 264—266.
[8]* О классах моделей с операцией порождения, там же **116**, № 5 (1957), 738—741.
[9]* Определяющие соотношения в категориях, там же **119**, № 6 (1958), 1095—1098.
[10]* Структурная характеристика некоторых классов алгебр, там же **120**, № 1 (1958), 29—32.
[11]* О некоторых классах моделей, там же **120**, № 2 (1958), 245—248.
[12]* Модельные соответствия, Изв. АН СССР, сер. матем. **23** № 3 (1959), 313—336.
[13]* Регулярные произведения, там же **23**, № 4 (1959), 489—502.
[14]* О малых моделях, ДАН СССР **127**, № 2 (1959), 258—261.
[15]* О неразрешимости элементарной теории некоторых полей, Сиб. матем. ж. **1** (1960), 71—77.
[16]* Об одном соответствии между кольцами и группами, Матем. сб. **50**, № 3 (1960), 257—266.
[17]* О свободных разрешимых группах, ДАН СССР **130**, № 3 (1960), 495—498.
[18]* Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий, там же **138**, № 4 (1961), 802—805.

[19]* Неразрешимость элементарной теории конечных групп, там же **138,** № 4 (1961), 771—774.
[20]* Замечание к статье «О неразрешимости элементарных теорий некоторых полей», Сиб. матем. ж. **2,** № 4 (1961), 639.
[21]* Конструктивные алгебры I, УМН **16,** № **3** (1961), 3—60.
[22]* Об уравнениях $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1}=aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе, Алгебра и логика (семинар) **1,** № 5 (1962), 45—50.
[23]* О частично упорядоченных нильпотентных группах, там же **1,** № 2 (1962), 5—9.
[24]* Строго родственные модели и рекурсивно совершенные алгебры, ДАН СССР **145,** № 2 (1962), 276—279.
[25]* Аксиоматизируемые классы локально свободных алгебр некоторых типов, Сиб. матем. ж. **3,** № 5 (1962), 729—743.
[26]* Некоторые вопросы теории классов моделей, Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда, 1961, т. I, Изд-во АН СССР, 1963, 169—198.
[27]* Полно нумерованные множества, Алгебра и логика (семинар) **2,** № 2 (1963), 4—30.
[28]* К теории вычислимых семейств объектов, там же **3,** № 4 (1964), 5—32.

Мендельсон (Mendelson E.)
[1] Some proofs of independence in axiomatic set theory, J. Symb. Logic **21** (1956), 291—303.
[2] The independence of a weak axiom of choice, там же **21** (1956), 350—366.
[3] On non-standard models for number theory, Essays on the Foundations of Mathematics (Fraenkel anniversary volume), Jerusalem, 1961, 259—268.

Монтегю (Montague R.)
[1] Semantical closure and non-finite axiomatizability I, Infinitistic Methods (Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw 1959), 1961, 45—69.
[2]* Theories incomparable with respect to relative interpretability, J. Symb. Logic **27,** N 2 (1962), 195—211.
[3]* Syntactical Treatments of Modelity with Corollaries on Reflection Principles and Finite Axiomatizability, Acta Philosophica Fennica, Fasc. XVI (1963), 153—169.
[4]* Interpretability in terms of models, Proc. Kon. Ned. Acad. Wetensch. A **68,** N 3 (1965), 467—477.

Монтегю (Montague R.) и Воот (Vaught R. L.)
[1] Natural models of set theory, Fund. Math. **47** (1959), 219—242.

Морлей (Morley M.)
[1]* Categoricity in power, Trans. Amer. Math. Soc. **114,** N 2 (1965), 514—538.

Морлей (Morley M.) и Воот (Vaught R. L.)
[1]* Homogenous Universal Models, Math. Scand. **11** (1962), 37—57.

Мостовский (Mostowski A.)
[1] On absolute properties of relations, J. Symb. Logic **12** (1947), 33—42.
[2] On direct products of theories, там же **17** (1952), 1—31.

[3] On models of axiomatic systems, Fundamenta Math. **39** (1952).
[4]* A generalization of the incompleteness theorem, там же **49** (1961), 205—232.
[5]* Formal system of analysis based on an infinitistic rule of proof, Infinitistic Methods, Warsaw, 1961, 141—166.
[6]* A problem in the theory of models, Bull. Acad. Polon., ser. math. **10**, N 3 (1962), 121—126.
[7]* Representability of sets in formal systems, Recursive Function Theory, 1962, 29—48.
[8]* L'espace de modèles d'une théorie formalisée et quelques-unes de ses applications, Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont, Math. **7** (1962), 107—116.
[9]* The Hilbert Epsilon Function in Many-values Logics, Acta Phil. Fennica, Fasc. XVI (1963), 169—189.

Мычельский (Mycielski J.)
[1]* A characterization of Arithmetical Classes, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl III **5**, N 11 (1957), 1025—1027.
[2]* On unions of denumerable models. Алгебра и логика (семинар) **4**, № 2 (1965), 57—58.

Мюллер (Müller G. H.)
[1] Nicht—Standard Modelle der Zahlentheorie, Math. Z. **77** (1961), 414—438.

Нейман (Neumann B. H.)
[1] An embedding theorem for algebraic systems, Proc. Lond. Math. Soc., ser. 3, **4** (1954), 138—153.

Обершелп (Oberschelp A.)
[1] Ueber die Axiome produkt-abgeschlossener arithmetischer Klassen, Arch. f. math. Logik u. Grundlagenf. **4** (1958), 95—123.

Онишкевич (Onyszkiewicz J. J.)
[1]* On the different topologies in the space of models, Bull. Acad. Polon., ser. Math. **12**, N 5 (1964), 245—248.

Ори (Orey S.)
[1] Model theory for the higher predicate calculus, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959), 72—84.

Островский (Ostrowski A.)
[1] Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Göttinger Nachrichten, 1919, 279—298.

Патнэм (Putnam Hilary)
[1]* On families of sets represented in theories, Arch. math. Logik und Grudlagenf **6**, N 3—4 (1964), 66—70.

Пеано (Peano G.)
[1] Démonstration de l'intégrabilité des équations differentielles ordinaires, Math. Ann. **37** (1890), 182—228.

Плоткин Б. И.
[1]* Группы автоморфизмов алгебраических систем, «Наука», 1966.

Пресбургер (Presburger M.)
[1] Ueber die Vollstandigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchen die Addition als einzige Operation hervortritt, Comptes rendus du I congrés des mathématiciens des pays slaves (Varsovie 1929), 1930, 92—101.

Р а б и н (R a b i n M. O.)
[1] Arithmetical extensions with prescribed cardinality, Proc. Roy. Acad. Sci. Amst., ser. A **62** (1959), 439—446.
[2] Non-standard models and independence of the induction axiom, Essays on the Foundations of Mathematics (Fraenkel anniversary volume), Jerusalem, 1961, 287—299.
[3] Classes of models and sets of sentences with the intersection property, Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont Math. **7** (1962), 39—53.
[4]* On diophantine equations and non-standard models of arithmetic, Logic, Methodology and Philosophy of Science, 1962, 151—158. [Русский перевод: Р а б и н М., Диофантовы уравнения и нестандартные модели арифметики, сб. «Математическая логика и ее применения», «Мир», 1965, 176—184.]
[5] A simple method for undecidability proofs and some applications, Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1964 International Congress, 1965, 58—68.
Р а д о (R a d o R.)
[1] Axiomatic treatment of rank in infinite sets, Canad. J. Math. **1** (1949), 337—343.
Р а с ё в а (R a s i o w a H.) и С и к о р с к и й (S i k o r s k i R.)
[1] A proof of the completeness theorem of Gödel, Fund. Math. **37** (1950), 193—200.
Р и г е р (R i e g e r L.)
[1] Sur le problème des nombres naturels, Infinitistic methods (Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw, 1959), 1961, 225—233.
Р и т т (R i t t J. F.)
[1] Differential Algebra, American Mathematical Society Colloquium Publications, **33** (1950).
Р о б и н с о н А. (R o b i n s o n A.)
[1] On the Metamathematics of Algebra, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam, 1951.
[2] On the application of symbolic logic to algebra, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, U. S. A., 1950) **1** (1952), 686—694.
[3] Théorie métamathématique des idéaux, Collections de Logique Mathématique, Paris—Louvain, 1955.
[4] Note on an embedding theorem for algebraic systems, J. Lond. Math. Soc. **30** (1955), 249—252.
[5] On ordered fields and definite functions, Math. Ann. **130** (1955), 257—271.
[6] Ordered structures and related concepts, Symposium on the Mathematical Interpretation of Formal systems (Amsterdam, 1954), 1955, 51—56.
[7] Further remarks on ordered fields and definite functions, Math. Ann. **130** (1956), 405—409.
[8] A result on consistency and its applications to the theory of definition, Proc. Roy. Acad. Sci. Amst., ser. A **59** (1956), 47—58.
[9] Complete theories, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam, 1956.

[10] On a problem of L. Henkin, J. Symb. Logic **21** (1956), 33—35.
[11] Some problems of definability in the lower predicate calculus, Fund. Math. **44** (1957), 309—329.
[12] Relative model-completeness and the elimination of quantifiers, Dialectica **12** (1958) (Bernays anniversary volume), 394—406.
[13] On the concept of a differentially closed field, Bull. Research Council of Israel, sec. F **8** (1959), 113—128.
[14] Obstructions to arithmetical extension and the theorem of Los and Suszko, Proc. Roy. Acad. Sci. Amst. ser. A **62** (1959), 489—495.
[15] Model theory and non-standard arithmetic, Infinitistic Methods (Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw, 1959), 1961, 265—302.
[16] On the construction of models, Essays on the Foundations of Mathematics (Fraenkel anniversary volume), Jerusalem, 1961, 207—217.
[17] Non-standard analysis, Proc. Roy. Acad. Sci. Amst., ser. A **64** (1961), 432—440.
[18] Recent developments in model theory, Proceedings of the International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science (Stanford, 1960), 1962, 60—79. [Русский перевод: Робинсон А. «Последние достижения в теории моделей», в сб. «Математическая логика и ее применения», «Мир», 1965, 65—89.]
[19]* A note on embedding problem, Fund. Math. **50**, N 5 (1962).
[20]* On languages which are based on non-standard arithmetic, Nagoya Math. J. **22** (1963), 83—117.
[21]* On generalized limits and linear functionals, Pacif. J. Math. **14** (1964), 269—283.
[22]* Topics in non-archimedean mathematics, Symposium on Model Theory, Berkeley, 1965.
[23]* Non-Standard Analysis, North-Holland Publ. Comp., 1965.

Робинсон А. (Robinson A.) и Зекон (Zakon E.)
[1] Elementary properties of ordered abelian groups, Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 222—236.

Робинсон Р. (Robinson R. M.)
[1] Undecidable rings, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 137—159.
[2]* Неразрешимость элементарной теории поля рациональных функций от одного переменного с рациональными коэффициентами, Алгебра и логика (семинар), **2**, № 4 (1963), 5—12.
[3]* The undecidability of pure transcendental extensions of real fields, Z. f. Math. Logik u. Grundlag. d. Math. **10** (1964), 275—282.

Робинсон Ю. (Robinson J.)
[1] Definability and decision problems in arithmetic, J. Symb. Logic **14** (1949), 98—114.
[2]* On the decision problem for algebraic rings, Studies Math. Analysis and Related Topics, Stanford, Calif. Univ. Press., 1962, 279—304.

Роденбуш (Raudenbush H. W.)
[1] Ideal theory and algebraic differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 361—368.
Роденбуш (Raudenbush H. W.) и Ритт (Ritt J. F.)
[1] Ideal theory and algebraic difference equations, Trans. Amer. Math. Soc. **46** (1939), 445—453.
Россер (Rosser J. B.)
[1] Logic for Mathematicians, New York—Toronto—London, 1953.
Россер (Rosser J. B.) и Ван Хао (Wang Hao)
[1] Non-standard models for formal logics, J. Symb. Logic **15** (1950), 113—128.
Рылль-Нардзевский (Ryll-Nardzewski C.)
[1] The role of the axiom of induction in elementary arithmetic, Fund. Math. **39** (1952), 239—263.
Серпинский (Sierpinsky W.)
[1] Sur une décomposition d'ensembles, Monatsch. f. Math. u. Physik **35** (1928), 239—242.
Сикорский (Sikorski R.).
[1] Algebra of formalized languages, Colloq. Math. **9**, № 1 (1962), 1—31.
Сколем (Skolem T.)
[1] Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze, nebst einem Theoreme über dichte Mengen, Skrifter utgit av Videnskapsselkapet i Kristiania **1**, N 4 (1920).
[2] Ueber die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen, Fund. Math. **23** (1934), 150—161.
[3] Peano's axioms and models of arithmetic, Symposium on the Mathematical Interpretation of Formal Systems (Amsterdam, 1954), 1955, 1—14.
Скотт (Scott D.)
[1] On constructing models for arithmetic, Infinitistic Methods (Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw 1959), 1961, 235—255.
Скотт (Scott D.) и Тарский (Tarski A.)
[1] The sentential calculus with infinitely long expressions, Colloq. Math. **6** (1958), 165—170.
Сломинский (Slominski J.)
[1] On Certain Existence Theorems for Models, Bull. Acad. Polon., ser. Math., XIII, N 11—12 (1965), 769—775.
Тайманов А. Д.
[1]* О классах моделей, замкнутых относительно прямых произведений, УМН **15**, № 5 (1959), 202—203.
[2]* О классах моделей, замкнутых относительно прямых произведений, Изв. АН СССР, сер. матем. **24** (1959), 493—510.
[3]* Характеристика аксиоматизируемых классов моделей I, II, Изв. АН СССР, сер. матем. **25**, № 4 (1961), 601—620; **25**, № 6 (1961), 755—764.
[4]* Характеристика конечно-аксиоматизируемых классов моделей, ДАН СССР **138**, № 1 (1961), 67—69.

[5]* Характеристика конечно-аксиоматизируемых классов моделей, Сиб. матем. ж. **2**, № 5 (1961).
[6]* Характеристика аксиоматизируемых классов моделей, Алгебра и логика (семинар) **1**, № 4 (1962), 5—31.
[7]* О теореме Бета—Кочена, там же **1**, № 6 (1963), 4—16.
[8]* Разрешимость элементарной теории включения сфер, там же **2**, № 3 (1963), 23—28.

Тайцлин М. А.
[1]* Неразрешимость элементарной теории коммутативных полугрупп с сокращением, Сиб. матем. ж. **3**, № 2 (1962), 308—309.
[2]* Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул элементарной теории структур, Алгебра и логика (семинар) **1**, № 3 (1962), 24—38.
[3]* Относительно элементарные подпространства в компактных алгебрах Ли, там же **2**, № 2 (1963), 30—46.
[4]* Неразрешимость элементарных теорий некоторых классов конечных коммутативных ассоциативных колец, там же **2**, № 3 (1963), 29—51.
[5]* Разрешимость некоторых элементарных теорий, там же **3**, № 3 (1964), 5—12.
[6]* Об элементарных теориях свободных нильпотентных алгебр, там же **3**, № 5—6 (1964), 57—63.
[7]* О теории конечных колец с делением, там же **4**, № 4 (1965), 103—114.
[8]* Об элементарных теориях коммутативных полугрупп, там же **5**, № 4 (1966), 55—89.

Тарский (Tarski A.)
[1] Grundzüge des Systemenkalküls, I, II, Fund. Math. **25** (1935), 503—526; **26** (1936), 283—301.
[2] Some notions and methods on the borderline of Algebra and Metamathematics, Proc. Int. Congr. Math. (Cambridge, USA, 1950) **1** (1952), 705—720.
[3] Contributions to the theory of models, Proc. Roy. Acad. Sçi. Amst., ser. A **57** (1954), 572—581, 582—588; **58** (1955), 56—64.
[4] Remarks on predicate logic with infinitely long expressions, Colloq. Math. **6** (1958), 171—176.
[5]* Solution of the decision problem for the elementary theory of commutative semigroups, Notices Amer. Math. Soc. **9**, N 6 (1962), 591—629.
[6]* A simplified formalization of predicate logic with identity, Arch f. Math. Logik u. Grundlagenf. **7** (1965), 61—79.

Тарский (Tarski A.) и Мак-Кинси (McKinsey J. C. C.)
[1] A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry, 2nd edition, Berkley and Los Angeles, 1951.

Тарский (Tarski A.), Мостовский (Mostowski A.) и Робинсон Р. (Robinson R. M.)
[1] Undecidable Theories, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam, 1953.

Тарский (Tarski A.) и Воот (Vaught R. L.)
[1]* Arithmetical extensions of relational systems, Compositio Math. **13** (1957), 81—102.
Фельшер (Felscher Walter)
[1]* Bemerkungen zu einem Lemma von E. Engler und A. Robinson, Z. f. math. Logik u. Grundlag. d. Math. **10**, № 1 (1964), 15—16.
Феферман (Feferman S.) и Воот (Vaught R. L.)
[1] The first order properties of products of algebraic systems, Fund. Math. **47** (1959), 57—103.
Феферман (Feferman S.), Крейсел (Kreisel G.) и Ори (Orey S.)
[1]* 1-consistency and faithful interpretations, Arch. Math. Logik u. Grundlagenf., № 1—2 (1962), 52—63.
Фрейлих (Fröhlich A.) и Шефердсон (Shepherdson J. C.)
[1] Effective procedures in field theory, Trans. Roy. Soc. of London, ser. A **248** (1956), 407—432.
Фрейн (Frayne T.), Морель (Morel A. C.) и Скотт (Scott D.).
[1] Reduced direct products, Fund. Math. **51** (1962), 196—228.
Фрейн (Frayne T. E.), Скотт (Scott D.) и Тарский (Tarski A.)
[1] Reduced Products. Amer. Math. Soc. Notices **5** (1958), 673—674.
Френкель (Fraenkel A. A.) и Бар-Хиллел (Bar-Hillel Y.)
[1] Foundations of Set Theory, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam, 1958. [Русский перевод: Френкель А. и Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, «Мир», 1966.]
Фрессе (Fraissé R.)
[1] Sur quelques classifications des systèmes de relations, Publ. scient. de l'univ. d'Algers, A **1** (1955), 35—182.
Фуркен (Furken G.)
[1]* On minimal models of complete theories, Amer. Math. Soc. Notiçes **9** (1962), 146.
[2]* First order languages with a generalized quantifier. Minimal models of first order theories, doctoral dissertation, University of California, 1962.
[3]* Bemerkungen zu einer Arbeit E. Englers, Z. f. math. Logik und Grundlag. d. Math. 8 (1962), 277—279.
Фуркен (Furken G.) и Воот (Vaught R. L.)
[1]* Non-characterizability of ordering of the natural numbers, Amer. Math. Soc. Notices **9** (1962), 321.
Халмош (Halmos P. R.)
[1] Invariant subspaces of polynomially compact operators, Pacif, J. Math. **16**, N 3 (1966), 433—439.
Хенкин (Henkin L.)
[1] The completeness of the first-order functional calculus, J. Symb, Logic **14** (1949), 159—166.

[2] Some interconnections between modern algebra and mathematical logic, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 410—427.
[3] The representation theorem for cylindrical algebras, Mathematical Interpretation of formal systems (Symposium, Amsterdam 1954), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 1955, 85—97.
[4] La structure algébrique des théories mathématiques. Collection de logique mathématique, Paris—Louvain, 1956.
[5] Two concepts from the theory of models, J. Symb. Logic **21** (1956), 28—32.
[6] A generalization of the concept of Г-completeness, там же 22 (1957), 1—14.
[7] Sums of squares, Summaries of talks presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University, 1957, 284—291.
[8] Some remarks on infinitely long formulas, Infinitistic Methods (Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw, 1959), 1961, 167—183.
[9]* An extension of the Craig—Lyndon interpolation theorem, J. Symb. Logic **28**, N 3 (1963), 201—216.
[10]* A theory of propositional types. Fund. Math. **52** (1963), 323—344.

Хорн (Horn A.)
[1] On sentences which are true of direct unions of algebras, J. Symb. Logic **16** (1951), 14—21.

Чёрч (Church A.).
[1] Introduction to Mathematical Logic I, Prenceton, 1956, [Русский перевод: Чёрч А., Введение в математическую логику, ИЛ, 1960.]

Чжан (Chang C. C.)
[1] On unions of chains of models, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 120—127.
[2]* Cardinal and ordinal multiplication of relation types, Proc. of Symposium in Pure Math., v. 2 (Lattice Theory), Amer. Math. Soc., 1961, 123—128.
[3]* Some new results in definability, Bull. Amer. Math. Soc. **70**, N 6 (1964), 808—813.
[4]* A simple proof of the Rabin—Keisler theorem, там же **71**, N 4 (1965), 642—643.

Чжан (Chang C. C.) и Кейслер (Keisler J. H.)
[1]* Applications of ultraproducts of pairs of cardinals to the theory of models, Pacif. J. Math. **12**, N 3 (1962), 835—845.
[2]* Model theories with truth values in uniform space, Bull. Amer. Math. Soc. **68**, N 2 (1962), 107—109.

Чжан (Chang C. C.) и Морель (Morel A.)
[1] On closure under direct product, J. Symb. Logic **23** (1958), 149—154.

Чжан (Chang C. C.). и Эренфойхт (Ehrenfeucht A.)
[1]* A characterization of abelian groups of automorphisms of a simply ordering relation, Fund. Math. **51** (1962), 141—147.

Шефердсон (Shepherdson J. C.)
[1] Inner models for set theory, J. Symb. Logic **16** (1951), 161—190; **17** (1952), 225—237; **18** (1953), 145—167.
Шёнфилд (Shoenfield J. R.)
[1] On the independence of the axiom of constructibility, Amer. J. Math. **81** (1959), 537—540.
Шмиден (Schmieden C.) и Лаугвиц (Laugwitz D.)
[1] Eine Erweiterung in der Infinitesimalrechnung, Math. Z. **69** (1958), 1—39.
Шрётер (Schröter K.)
[1] Methoden zur Axiomatizierung beliebiger Aussagen- und Prädikatenkalküle, Z. f. math. Logik und Grundl. d. Math. **1** (1955), 241—251.
Эйхлер (Eichler M.)
[1] Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz, Math. Ann. **116** (1939), 742—748.
Энгелер (Engeler E.)
[1] Unendliche Formeln in der Modeltheorie, Z. f. Math. Logik u. Grundlagenf. **7** (1961), 154—160.
[2]* A reduction principle for infinite formulas, Math. Ann. **151** (1963), 296—303.
Эрдёш (Erdös P.), Гилман (Gillman L.) и Хенриксен (Henriksen M.)
[1] An isomorphism theorem for real closed fields, Ann Math., ser. 2, **61** (1965), 542—554.
Эренфойхт (Ehrenfeucht A.)
[1] On theories categorical in power, Fund. Math. **44** (1956), 241—248.
[2]* An application of games to the completeness problems for formalized theories, Fund. Math. **49** (1961), 129—141.
Эренфойхт (Ehrenfeucht A.) и Мостовский (Mostowski A.)
[1] Models of axiomatic theories admitting automorphisms, Fund. Math. **43** (1956), 50—68.
[2]* A compact space of models of first order theories, Bull. Acad. Polon. Sci., ser. sci. math., astron. et phys. **9**, N 5 (1961), 369—376.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ