А. И. Ромашкевич

ФИЗИКА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
ТЕРМОДИНАМИКА

10
класс

УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

дрофа

А. И. Ромашкевич

ФИЗИКА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
ТЕРМОДИНАМИКА

10 класс

УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

дрофа

Москва • 2007

УДК 373.167.1:53(076.2)
ББК 22.2я72
Р69

Ромашкевич, А. И.

Р69 Физика. Молекулярная физика. Термодинамика. 10 класс : Учимся решать задачи / А. И. Ромашкевич. — М. : Дрофа, 2007. — 94, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-358-03301-6

Пособие содержит задачи по всем разделам молекулярной физики. Перед упражнениями приводятся необходимые теоретические сведения и рассматриваются примеры решения задач. Задачи, которые могут вызвать затруднения у школьников, снабжены указаниями.

Данное пособие может использоваться при работе с учебником для углубленного изучения физики под редакцией Г. Я. Мякишева «Физика. Молекулярная физика. Термодинамика. 10 класс».

Содержание и принцип расположения материала позволяет использовать пособие не только учителям на уроках и факультативных занятиях, но и учащимся, проявляющим интерес к точным наукам, для самостоятельных занятий.

УДК 373.167.1:53(076.2)
ББК 22.2я72

ISBN 978-5-358-03301-6

Предисловие

Это пособие продолжает серию, начатую книгами «Механика. 10 кл. Учимся решать задачи» и «Электродинамика. 10—11 классы. Учимся решать задачи». В предисловии к ним достаточно подробно излагались цели комплекса упражнений и рекомендации для работы с ним. Сказанное далее обращено к тем, кому не довелось использовать упомянутые пособия при освоении курса физики.

Объем и содержание задач, изложение теоретических фрагментов в предлагаемом пособии преследуют одну цель — способствовать формированию у учащегося системного (или, если хотите, логического, физического) мышления.

Ученику надо научиться выделять существенное в рассматриваемом явлении или процессе, отбрасывать второстепенное, строить модель, а по модели и алгоритм решения, анализировать результат и прогнозировать следствия.

Успех человека, независимо от рода трудовой деятельности, в значительной степени определяется тем, насколько у него развито системное мышление. Поэтому занятия физикой никогда нельзя считать бесполезной тратой времени. (А это в жизни мне не пригодится!)

Выбранный в пособии способ изложения опорных вопросов теории призван содействовать более глубокому пониманию материала. Пособие совместимо с любым школьным учебником физики и будет полезно при самостоятельной подготовке к вступительному экзамену в вуз.

Упражнения включают в себя как оригинальные задачи, так и задачи других авторов, полное перечисление которых представляется затруднительным, тем более что наиболее полезные в методическом отношении задачи переходят из задачника в задачник в той или иной редакции.

Подборка задач и объем упражнений в пособии обеспечивают надежное усвоение материала. Первая и главная рекомендация: с помощью или без, но надо выполнять каждое упражнение полностью, а сами задания — по порядку.

Работая с пособием, не забывайте:

— понял — еще не значит умею; без решения достаточного количества целенаправленно подобранных задач информация быстро выветривается, оставляя в голове только информационный шум;

— нельзя отбрасывать задачу, которая не получилась сразу: логическое мышление формируется в процессе поиска решения;

— если вам помогли решить задачу, восстановите решение самостоятельно на чистом листе — это включит процесс активного восприятия;

— относиться внимательно к условию задачи: проверьте, хорошо ли вы помните определения и физический смысл всех величин, упомянутых в условии;

— анализировать ответ задачи: проверьте размерность, пригодность результата в предельных случаях и разумность числового значения.

Удачи!

Автор

Тема № 1

Идеальный газ. Графическое представление газовых процессов

Под идеальным газом будем понимать газ, для которого в любой момент времени выполняется уравнение *Менделеева—Клапейрона*:

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где p — давление газа на стенки сосуда, V — объем сосуда, содержащего газ, T — температура газа, m — масса газа, M — масса одного моля газа (молярная масса), R — газовая постоянная. В системе СИ она равна

$$R = 8{,}31 \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

Это соотношение описывает состояние системы из огромного количества частиц (молекул). Поведение каждой отдельной молекулы должно подчиняться известным законам механики. Но проследить за каждой из них не представляется возможным из-за их количества. Да это и неинтересно. Важнее узнать результат их коллективного взаимодействия с внешними объектами. В этом состоит метод *статистического описания* системы большого количества частиц.

Уравнение Менделеева—Клапейрона связывает статистические параметры p, V, T, m, имеющие отношение ко всей системе в целом, с величиной M, характеризующей свойства отдельной молекулы.

Отметим, что уравнение Менделеева—Клапейрона было получено экспериментально до создания кинетической теории идеального газа, при этом фи-

зическая в
стической интерпретации и трактовалась весьма неопределенно, как степень нагретости тела. Физический смысл температуры прояснится в дальнейшем на основе механической модели идеального газа.

Для облегчения решения задач часто бывает полезным изобразить переход газа из одного состояния в другое графически. Графики газовых процессов изображают в координатах p, V; p, T или V, T. Первое упражнение преследует цель выработки навыков построения таких графиков и их элементарного анализа.

Перед построением графика следует получить аналитическое выражение функции процесса из уравнения Менделеева—Клапейрона.

В качестве примера работы с графиками газовых процессов рассмотрим решение двух задач.

ЗАДАЧА

На рисунке 1 в координатах p, T представлен график цикла газа некоторой массы (газ последовательно переводится из состояния *1* в состояние *2*, из состояния *2* в состояние *3*, далее из *3* в *4* и из *4* в *1*). Изобразите этот же цикл в координатах V, T и p, V.

Решение

Построим график цикла в координатах V, T.

На участке *1*—*2* (см. рис. 1) последовательность состояний газа укладывается на прямой, проходящей через начало координат, что аналитически можно записать так:

$$p = \text{const} \cdot T.$$

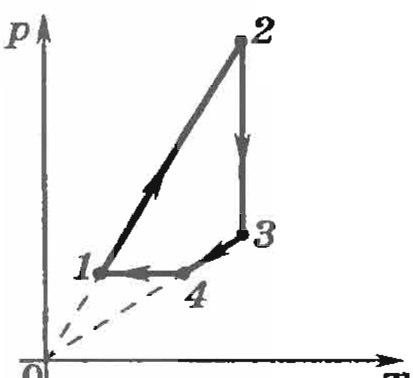


Рис. 1

Сравнивая это выражение с законом Менделеева—Клапейрона

$$p = \frac{mR}{MV}\,T,$$

убеждаемся, что переход газа из состояния *1* в состояние *2* происходит при постоянном объеме (V = const). Такой процесс называют изохорным.

В координатах V, T участок *1—2* — прямая, параллельная оси T (рис. 2).

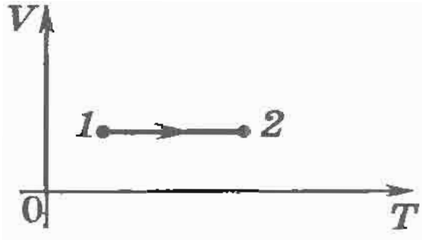


Рис. 2

Перевод газа из состояния *2* в состояние *3* совершается при постоянной температуре, следовательно, в координатах V, T этому процессу тоже соответствует прямая, перпендикулярная оси T. Обратите внимание, что при переходе *2—3* (см. рис. 1) давление газа падает при постоянной температуре, значит, газ расширяется. Поэтому в координатах V, T график от точки *2* к точке *3* должен идти вверх (рис. 3).

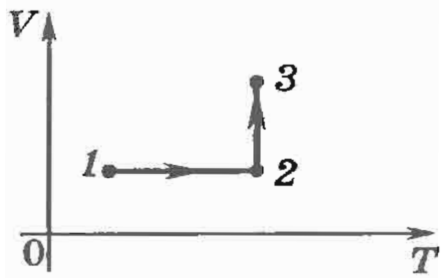


Рис. 3

Участок графика *3—4* (см. рис. 1) отображает изохорное охлаждение газа, поэтому дальше в координатах V, T график идет влево, параллельно оси T (рис. 4).

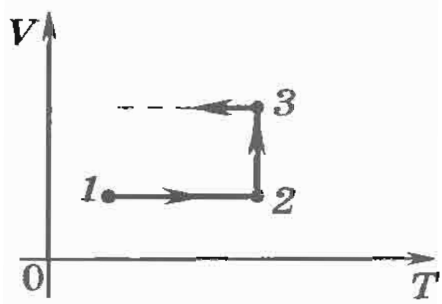


Рис. 4

Положение точки *4* (см. рис. 1) на графике определится пересечением участков *3—4* и последнего *4—1*. Из рисунка 1 видно, что переход газа из состояния *4* в состояние *1* происходит при постоянном давлении (p = const). Такой процесс называют изобарным. Из уравнения Менделеева—Клапейрона следу-

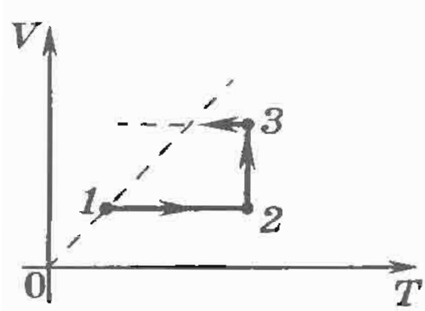


Рис. 5

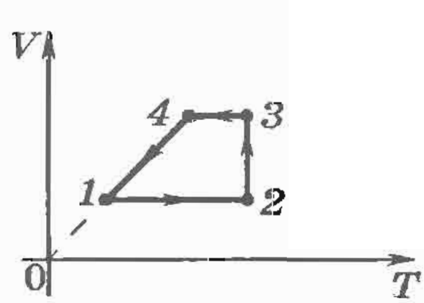


Рис. 6

ет, что графиком зависимости V от T на участке $4-1$ является прямая, проходящая через начало координат (рис. 5):

$$V = \frac{mR}{Mp}T;$$

$$V = \mathrm{const} \cdot T.$$

Из рисунка 5 становится понятным положение точки 4 на графике цикла в координатах V, T.

Окончательный график цикла в координатах V, T приведен на рисунке 6.

Построим тот же цикл в координатах p, V.

Изохора $1-2$ в координатах p, V изобразится поднимающимся вверх отрезком (давление растет) (рис. 7).

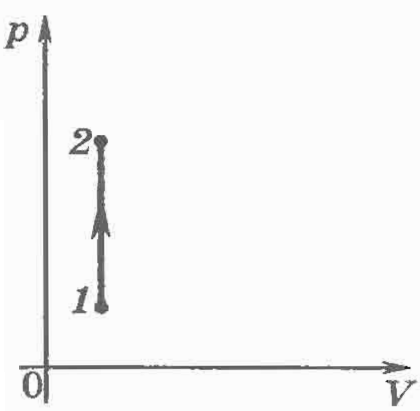


Рис. 7

Перевод газа из состояния 2 в состояние 3 происходит при постоянной температуре (см. рис. 1). Если в уравнении Менделеева—Клапейрона положить $T = \mathrm{const}$, то зависимость p от V становится гиперболической:

$$p = \frac{mRT}{M} \cdot \frac{1}{V};$$

$$p = \frac{\mathrm{const}}{V},$$

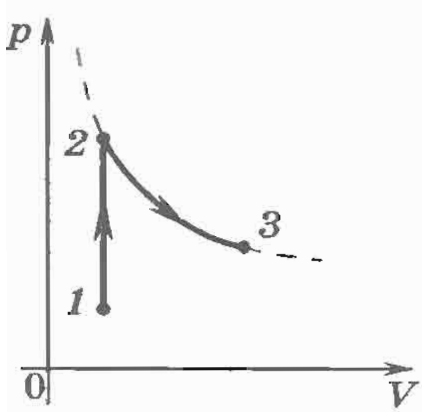


Рис. 8

и отрезок $2-3$ (см. рис. 1) в координатах p, V изобразится спадающим участком гиперболы (давление падает) (рис. 8).

Дальше уже все просто. Участок $3-4$ представляет собой изохорное ($V = \mathrm{const}$) сжатие до начального давле-

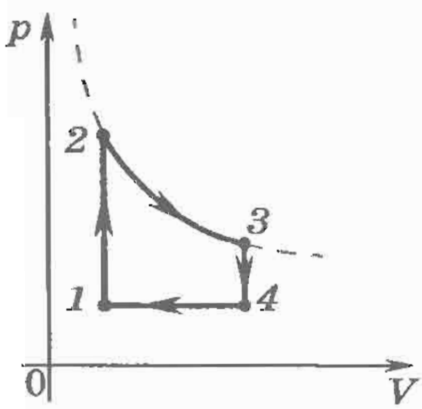


Рис. 9

ния, участок *4—1* отражает изобарное (p = const) возвращение в начальное состояние.

Окончательный результат приведен на рисунке 9.

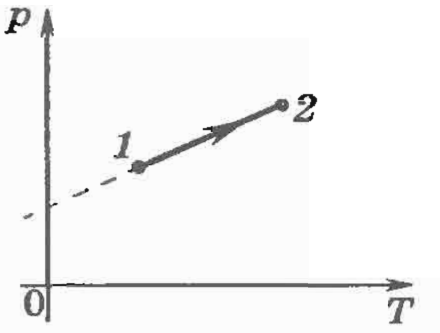


Рис. 10

ЗАДАЧА

На рисунке 10 приведен график перехода идеального газа некоторой массы из состояния *1* в состояние *2* (продолжение графика пересекает ось p выше нуля).

Определите, сжимается или расширяется газ в этом процессе.

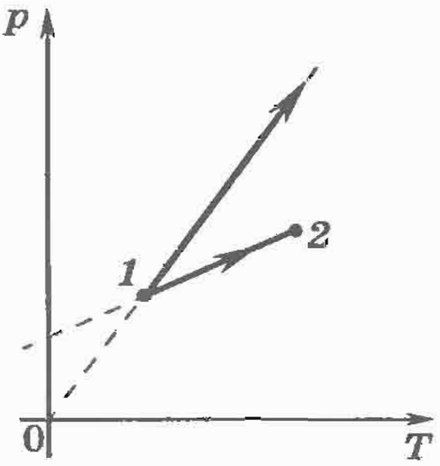


Рис. 11

Решение

Сравним процесс *1—2* с изохорным нагреванием этого газа из состояния *1* (рис. 11). Видно, что при переходе газа из состояния *1* в состояние *2* давление растет медленнее, чем при изохорном процессе (V = const), значит, газ расширяется.

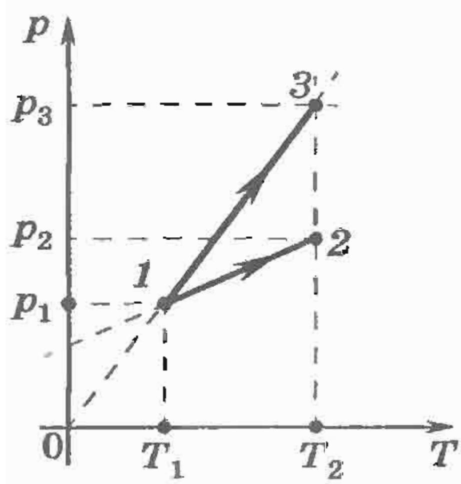


Рис. 12

Если вас это рассуждение не убедило, поступим следующим образом. Обозначим параметры газа в состоянии *1* через p_1, V_1, T_1, в состоянии *2* — p_2, V_2, T_2. Нагреем газ изохорно из состояния *1* до температуры T_2 (рис. 12). Газ перешел в состояние *3* с параметрами

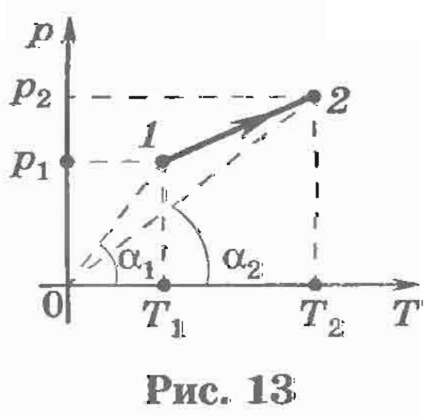


Рис. 13

p_3, V_1, T_2.
пейрона д.

$$p_3V_1 = \frac{m}{M}RT_2;$$

$$p_2V_2 = \frac{m}{M}RT_2,$$

откуда $p_3V_1 = p_2V_2$ (закон Бойля—Мариотта)

$$\text{или } \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_3}{p_2}.$$

Поскольку $p_3 > p_2$, $V_2 > V_1$ (газ расширился).

Полезно познакомиться и с таким рассуждением: сравнивая уравнение Менделеева—Клапейрона для состояний *1* и *2*, легко находим:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2};$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_1}{T_1}\right) : \left(\frac{p_2}{T_2}\right).$$

Но $p_1/T_1 = \text{tg}\,\alpha_1$ (тангенс угла наклона изохоры, проходящей через точку *1*) (рис. 13), соответственно $p_2/T_2 = \text{tg}\,\alpha_2$ (тангенс угла наклона изохоры, проходящей через точку *2*).

Следовательно,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{tg}\,\alpha_1}{\text{tg}\,\alpha_2}.$$

Учитывая, что $\alpha_1 > \alpha_2$, получаем $\text{tg}\,\alpha_1 > \text{tg}\,\alpha_2$ и $V_2 > V_1$.

Ответ: газ расширяется.

Упражнения

1.1. Изобразите графики процессов: изобарного (p = const), изохорного (V = const) и изотермического (T = const) в координатах p, V; p, T и V, T.

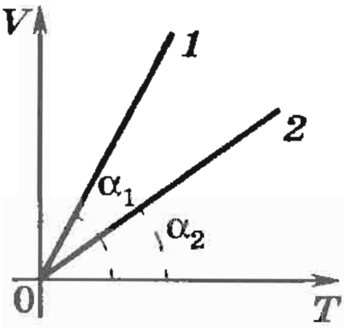


Рис. 14

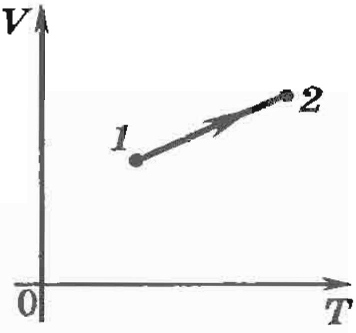


Рис. 15

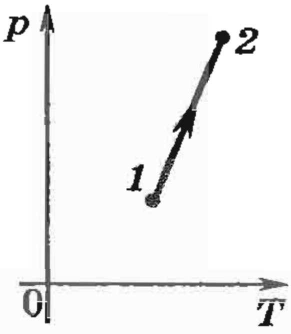


Рис. 16

1.2. На рисунке 14 изображены две изобары для некоторого идеального газа одной и той же массы. Найдите отношение давлений p_1/p_2, если известны углы наклона изобар α_1 и α_2.

1.3. По графику, приведенному на рисунке 15, определите, как изменялось давление идеального газа при переходе из состояния *1* в состояние *2*. Продолжение прямой *1—2* пересекает ось *V* выше нуля.

1.4. По графику, приведенному на рисунке 16, определите, как менялся объем идеального газа некоторой массы при переходе из состояния *1* в состояние *2*. Продолжение прямой *1—2* пересекает ось *p* ниже нуля.

1.5. Состояние газа менялось в соответствии с графиком, приведенным на рисунке 17. На каких участках графика температура газа росла и на каких падала?

1.6. На рисунке 18 изображены изотермы для двух газов одной и той же массы. Чем отличаются состояния газов, если газы одинаковы? Чем отличаются газы, если их температуры одинаковы?

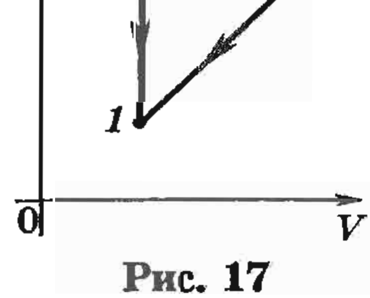


Рис. 17

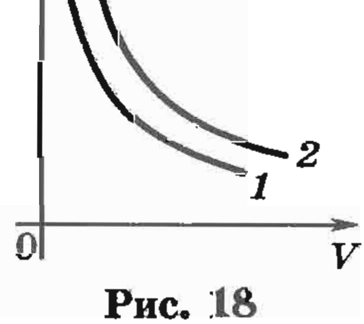


Рис. 18

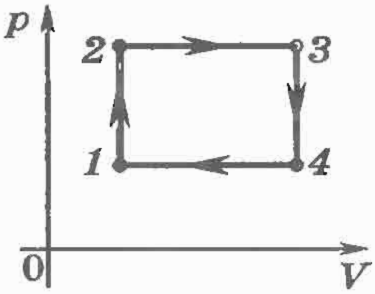


Рис. 19

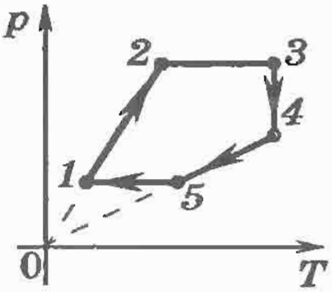


Рис. 20

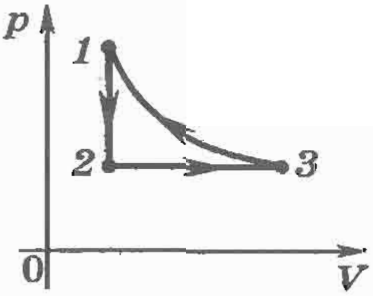


Рис. 21

1.7. На рисунке 19 представлен замкнутый цикл, осуществленный с идеальным газом некоторой массы. Изобразите этот же цикл в координатах p, T и V, T.

1.8. Изобразите в координатах p, V цикл, представленный на рисунке 20.

1.9. На рисунке 21 изображен график замкнутого цикла, состоящий из изохоры, изобары и изотермы. Изобразите график этого же цикла в координатах p, T и V, T.

1.10. На рисунке 22 точками *1* и *2* представлены два состояния идеального газа. Требуется перевести газ из состояния *1* в состояние *2* с помощью процессов: изобарного и изотермического; изотермического и изохорного; изохорного и изотермического; изобарного и изохорного.

Представьте графически каждый из указанных переходов в координатах p, T.

1.11. На рисунке 23 представлен графически процесс перехода двух молей идеального газа из

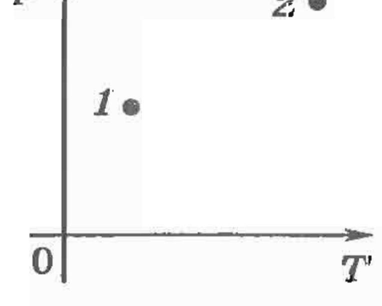


Рис. 22

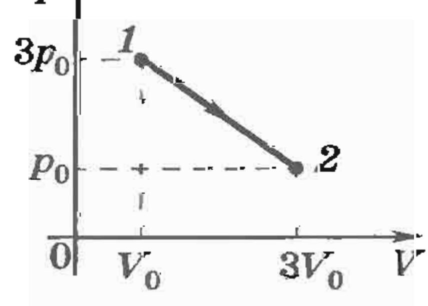


Рис. 23

состояния *1* в состояние *2*. Определите максимальную температуру T_{max} газа при таком переходе, если p_0 и V_0 известны.

Ответы

1.1.

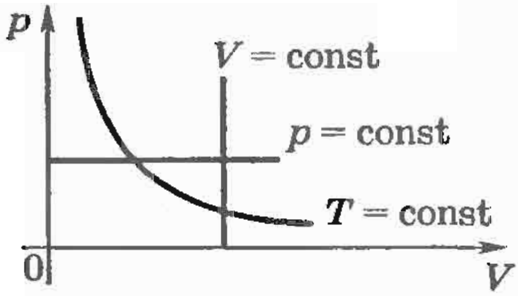


Рис. 24

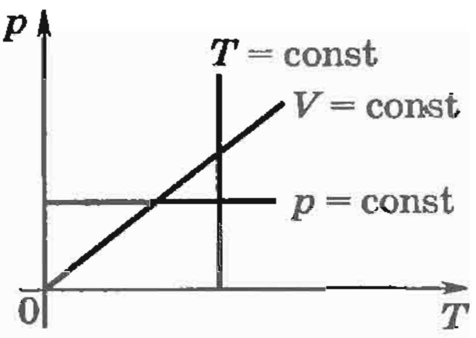


Рис. 25

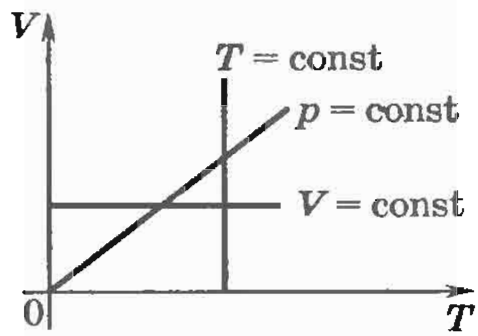


Рис. 26

1.2. $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_2}{\mathrm{tg}\,\alpha_1}$.

1.3. Давление возрастало.

1.4. Объем уменьшался.

1.5. На участках *1—2* и *2—3* температура увеличивалась, на участке *3—1* уменьшалась.

1.6. Для одинаковых газов $T_2 > T_1$, при одинаковых температурах $M_1 > M_2$.

1.7.

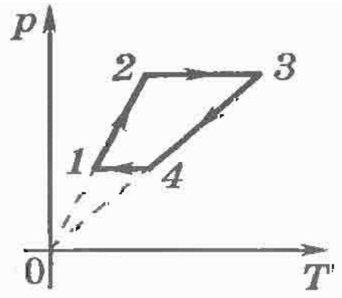


Рис. 27

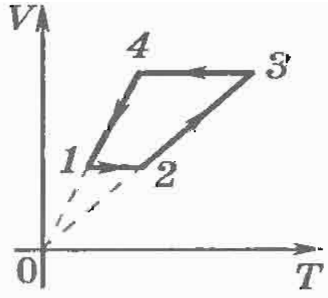


Рис. 28

1.8.

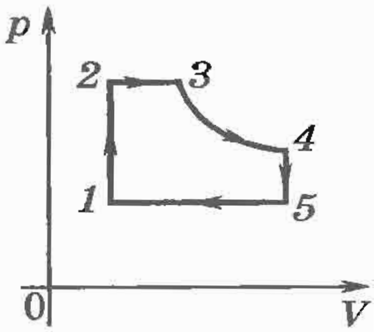


Рис. 29

1.9.

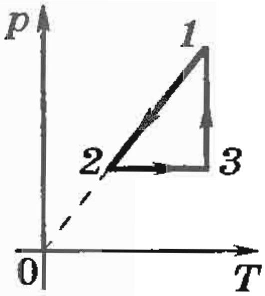


Рис. 30

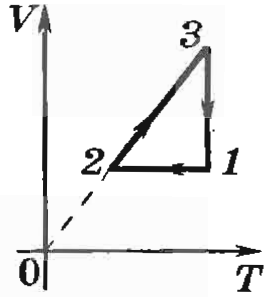


Рис. 31

1.10.

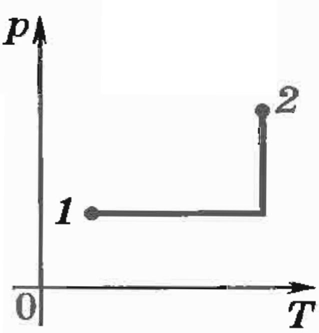


Рис. 32

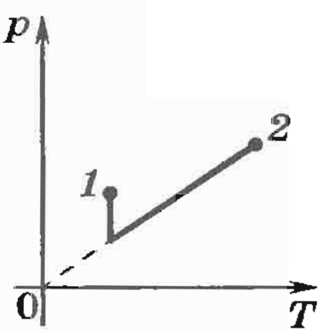


Рис. 33

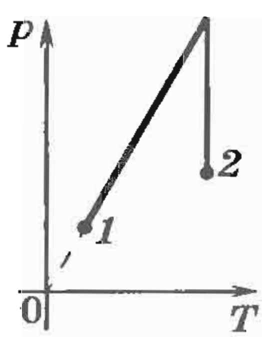


Рис. 34

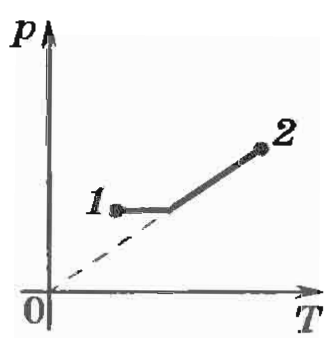


Рис. 35

1.11. $T_{\max} = \dfrac{2p_0V_0}{R}$.

Тема № 2

Газовые законы

Из уравнения Менделеева—Клапейрона следует, что для двух произвольных состояний одного и того же количества идеального газа справедливо равенство:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

Постоянство одного из параметров приводит к частным газовым законам.

Закон Бойля—Мариотта (при $T = \mathrm{const}$):

$p_1V_1 = p_2V_2$ (изотерма);

закон Шарля (при $V = \mathrm{const}$):

$\dfrac{p_1}{T_1} = \dfrac{p_2}{T_2}$ (изохора);

закон Гей-Люссака (при $p = \mathrm{const}$):

$\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_2}{T_2}$ (изобара).

В этих уравнениях, ра́вно как и в уравнении Менделеева—Клапейрона, температура T измеряется по абсолютной шкале (шкале Кельвина).

При решении задач полезно помнить, что физический смысл отношения $\dfrac{m}{M}$ — число молей (количество вещества), поэтому уравнение Менделеева—Клапейрона можно записывать в одном из трех видов (удобном для решения):

$pV = \dfrac{m}{M}RT$;

$pV = \nu RT$, где ν — число молей газа;

$pV = \frac{N}{N_A}RT$, где N — число молекул газа, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\text{моль}}$ — число молекул в одном моле (число Авогадро).

Кроме того, если учесть, что отношение $\frac{m}{V}$ — это плотность вещества ρ, то уравнение Менделеева—Клапейрона можно представить в виде

$$p = \frac{\rho}{M}RT.$$

Если в одном сосуде находится смесь газов (например, двух), то надо понимать, что каждый из них заполняет весь объем и сосуществуют они «в общей квартире», нисколько не мешая друг другу. Уравнения состояния газов:

$$p_1V = \nu_1RT \text{ и } p_2V = \nu_2RT,$$

где p_1 — давление, создаваемое молекулами первого газа, p_2 — давление, создаваемое молекулами второго газа, ν_1 — число молей первого газа, ν_2 — число молей второго газа.

При сложении этих уравнений получаем:

$$(p_1 + p_2)V = (\nu_1 + \nu_2)RT;$$

$$p_0V = \nu_0RT,$$

где $p_0 = (p_1 + p_2)$ — давление в сосуде, $\nu_0 = (\nu_1 + \nu_2)$ — число молей газообразного вещества в сосуде.

Решение задач, основанных на применении газовых законов, начинаем с записи уравнения Менделеева—Клапейрона для каждого состояния газа. В некоторых задачах необходимо записать в виде уравнений механические условия или связи параметров и затем решить систему уравнений. Покажем, как работает этот алгоритм, на примере классической учебной задачи.

ЗАДАЧА

Стеклянную трубку длиной $L = 1$ м, открытую с обоих концов, наполовину погружают в ванну с ртутью. Затем верхний конец закрывают пальцем и вынимают трубку из ванны. Какой длины x столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление $p_а = 750$ мм рт. ст., температуру считать постоянной.

Дано:
$L = 1$ м
$p_а = 750$ мм рт. ст.

x — ?

Решение

В состоянии *1* (рис. 36, *а*) верхняя половина трубки заполнена воздухом при атмосферном давлении.

В состоянии *2* (рис. 36, *б*) верхняя часть трубки заполнена той же массой воздуха, но уже при другом давлении p. Температура по условию постоянна.

Решение задачи основано на трех утверждениях:

1. В состоянии *1* воздух можно считать идеальным газом.

2. В состоянии *2* воздух можно считать идеальным газом.

3. Столбик ртути длиной x (см. рис. 36, *б*) находится в равновесии.

В переводе на язык математики это означает:

1. $p_а\left(\frac{L}{2}S\right) = \frac{m}{M}RT$,

где S — площадь поперечного сечения трубки, $\left(\frac{L}{2}S\right)$ — объем воздуха в состоянии *1*.

2. $p(L - x)S = \frac{m}{M}RT$,

где $(L - x)S$ — объем воздуха в трубке в состоянии *2*.

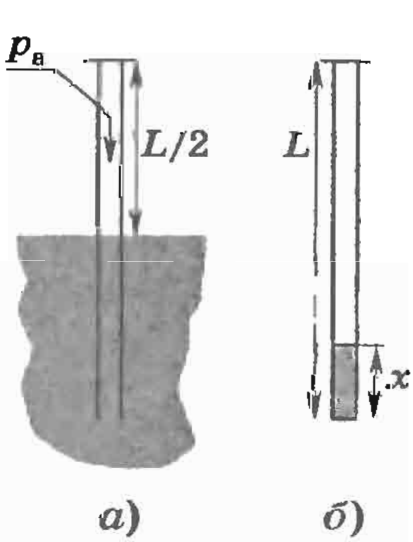


Рис. 36

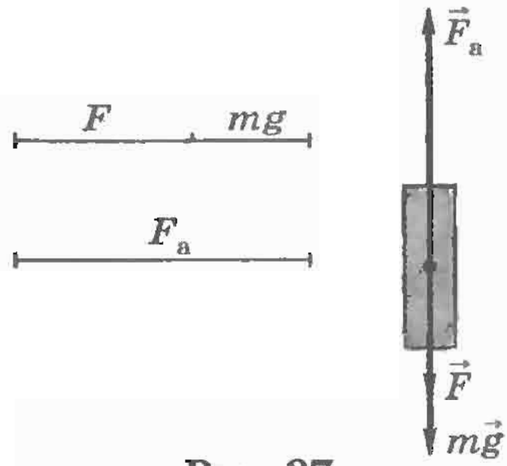


Рис. 37

3. Условие равновесия столбика ртути (см. рис. 36, *б*) означает, что сумма сил, действующих на столбик по вертикали, равна нулю (рис. 37).

Это сила давления воздуха в верхней части трубки

$$F = pS,$$

сила давления атмосферного воздуха снизу

$$F_а = p_а S,$$

где $p_а$ — атмосферное давление, и сила тяжести

$$F_т = mg.$$

Запишем условие равновесия:

$$F_а = F + mg;$$

$$p_а S = pS + (xS)\rho g;$$

$$p_а = p + \rho g x.$$

Итак, мы выразили все утверждения математически, получив три уравнения:

1) $p_а\left(\frac{L}{2}S\right) = \frac{m}{M}RT;$

2) $p(L - x)S = \frac{m}{M}RT;$

3) $p_а = p + \rho g x.$

Этого достаточно для решения задачи. Но сначала обсудим, к чему мы пришли. Из первых двух уравнений следует:

$$p_а\left(\frac{L}{2}S\right) = p(L - x)S.$$

Внимательный ученик должен был бы сразу написать это уравнение вместо первых двух, потому что это просто закон Бойля—Мариотта.

Третье уравнение тоже надо научиться писать сразу. Его смысл прост. Давление на самый нижний слой ртути со стороны атмосферы (снизу) уравновешивается (сверху) давлением газа внутри трубки плюс давлением столба жидкости высотой x.

После сокращения S остается решить систему двух уравнений с двумя неизвестными p и x (плотность ртути придется взять из таблицы):

$$\begin{cases} p_а \dfrac{L}{2} = p(L - x); \\ p_а = p + \rho g x. \end{cases}$$

Исключив p, получаем:

$$p_а L = 2(p_а - \rho g x)(L - x); \tag{1}$$

$$2\rho g x^2 - (2L\rho g + 2p_а)x + p_а L = 0:$$

$$x_{1,2} = \frac{2(L\rho g + p_а) \pm \sqrt{(L\rho g + p_а)^2 - 8\rho g p_а L}}{4\rho g}.$$

Проведя расчет, необходимо отбросить значение x, не имеющее физического смысла, и записать ответ.

Процесс достаточно трудоемкий, но задача предоставляет нам возможность показать, как иногда, руководствуясь физическим смыслом, можно сократить путь к результату.

Если учесть, что $\rho g x$ — давление столба ртути $p_{рт}$, то

$$p_а L = 2(p_а - p_{рт})(L - x).$$

Обратите внимание, что теперь в уравнение входят всего две физические величины: длина и давление. Причем давление можно измерять тоже в единицах длины (мм рт. ст.). Это наводит на мысль, что специально для этой задачи можно придумать новую систему единиц, в которой за единицу длины принимается 1 см, а за единицу давления — тоже 1 см, только ртутного столба. Тогда, согласно условию: $p_а$ = 75 см (рт. ст.), L = 100 см, $p_{рт}$ = x см (рт. ст.).

Подставим в уравнение числовые значения:

$$75 \cdot 50 = (75 - x)(100 - x).$$

Числа настолько просты, что корни уравнения легко угадываются. Это $x_1 = 25$ см и $x_2 = 150$ см. Отбрасываем второй корень уравнения (столбик ртути не может быть длиннее трубки).

Ответ: $x = 25$ см.

ЗАДАЧА

Из сосуда объемом $V = 5$ л откачивают воздух поршневым насосом. Начальное давление в камере $p_0 = 10^5$ Па. Какое давление p_n останется в камере после $n = 8$ ходов поршня, если объем камеры насоса $V_н = 0{,}5$ л? Температуру в сосуде во время откачки считать постоянной.

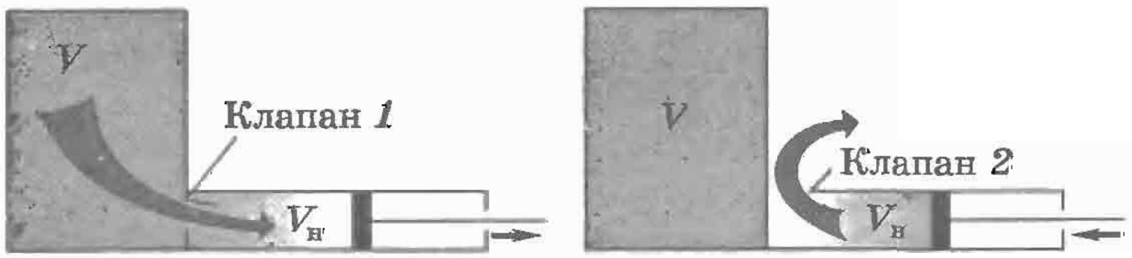
Дано:
$V = 5$ л
$p_0 = 10^5$ Па
$V_н = 0{,}5$ л
$n = 8$

p_n — ?

Решение

Сначала вспомним принцип работы поршневого насоса в режиме откачки.

На рисунке 38, *а* показано, что при движении поршня насоса вправо открывается клапан *1* и часть воздуха из сосуда заполняет камеру насоса. При движении поршня влево (рис. 38, *б*) клапан *1* закрывается и открывается клапан *2*, через который воздух из камеры насоса вытесняется в атмосферу. На этом заканчивается



а) *б)*

Рис. 38

повторяется и т. д.

Перед началом движения поршня вправо воздух заполнял только сосуд объемом V, при смещении поршня в крайнее правое положение то же количество газа занимает объем $V + V_н$ (рис. 39).

Воспользуемся законом Бойля—Мариотта:

$$p_0V = p_1(V + V_н).$$

Перед началом движения поршня влево клапан *1* закрывается, и давление

$$p_1 = p_0 \frac{V}{V + V_н}$$

сохраняется в сосуде до начала второго хода поршня.

При втором ходе поршня процесс повторяется, только исходным давлением в сосуде становится p_1, а не p_0. Значит, после второго хода поршня в сосуде остается давление

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V + V_н} = p_0 \left(\frac{V}{V + V_н}\right)^2.$$

Повторяя операцию, легко устанавливаем, что после третьего хода поршня в сосуде остается давление

$$p_3 = p_0 \left(\frac{V}{V + V_н}\right)^3,$$

а после n ходов

$$p_n = p_0 \left(\frac{V}{V + V_н}\right)^n.$$

Подставляя числовые значения, находим ответ:

$$p_8 = 10^5 \cdot \left(\frac{5}{5 + 0,5}\right)^8 \approx 4,7 \cdot 10^4 \text{ (Па)}.$$

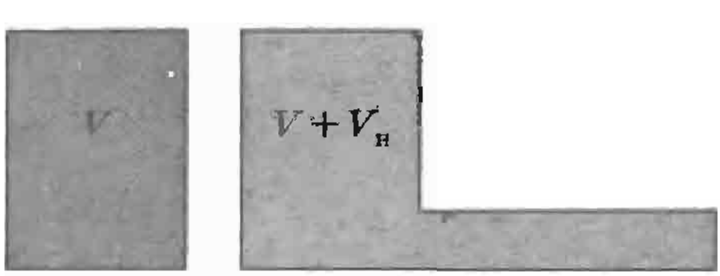


Рис. 39

Обратите вним
вых значений объемов мы не стали переводить литры в м^3, так как в скобках стоит отношение объемов, а оно не зависит от выбора единиц.

Ответ: $p_8 = 4{,}7 \cdot 10^4$ Па.

Замечание 1. В расчетной формуле получилась степенная зависимость давления в сосуде от числа ходов поршня. Такая зависимость обусловлена тем, что из-за постепенного снижения давления в сосуде с каждым ходом поршня из сосуда удалялось все меньше и меньше газа.

Замечание 2. Если поменять порядок открытия и закрытия клапанов, то получится нагнетательный насос (например, велосипедный). Сначала воздух будет забираться в камеру насоса из атмосферы, а затем вытесняться в велосипедную камеру. В этом случае получится линейная зависимость роста давления в сосуде от числа ходов поршня, так как теперь в сосуд будет с каждым ходом поршня поступать газ одинаковой массы.

ЗАДАЧА

В сосуде содержится смесь атомарного азота и молекулярного водорода. При повышении температуры смеси в $k = 2$ раза молекулы водорода полностью распадаются на атомы, а давление возрастает в $\eta = 3$ раза. Найдите массу водорода m_H в сосуде, если масса азота $m_N = 7$ г.

Дано:
$T_2 = 2T_1$
$\eta = 3$
$m_N = 7$ г

m_H — ?

Решение

Молярную массу азота и водорода определяем с помощью таблицы Менделеева.

$$M_N = 14\ \frac{\text{г}}{\text{моль}};$$

$$M_H = 2\ \frac{\text{г}}{\text{моль}}.$$

Запишем уравнение Менделеева—Клапейрона для начального состояния смеси газов:

$$pV = (\nu_N + \nu_H)RT.$$

В этом уравнении число молей водорода, как и положено, определяется отношением числа молекул водорода к числу Авогадро:

$$\nu_H = \frac{N}{N_A}.$$

При распаде молекул водорода ($H_2 \longrightarrow H + H$) число микрообъектов удваивается, поэтому новое количество вещества водорода

$$\nu'_H = \frac{2N}{N_A} = 2\nu_H.$$

Запишем уравнение Менделеева—Клапейрона для конечного состояния смеси газов с учетом изменения давления и температуры:

$$\eta pV = (\nu_N + \nu'_H)RkT.$$

Вот, собственно, и все. Заметим, что, как и в предыдущих примерах, мы записали закон Менделеева—Клапейрона для выделенных состояний газа и внесли в них данные условия задачи.

Поделим последнее уравнение на уравнение начального состояния смеси и заменим ν'_H на $2\nu_H$:

$$\eta = k\,\frac{(\nu_N + 2\nu_H)}{(\nu_N + \nu_H)}, \text{ или } \eta\nu_N + \eta\nu_H = k\nu_N + 2k\nu_H,$$

$$\nu_H = \nu_N\,\frac{\eta - k}{2k - \eta}.$$

Выразив число молей атомарного азота через отношение

$$\nu_N = \frac{m_N}{M_N},$$

а молекулярного водорода через

$$\nu_H = \frac{m_H}{M_H},$$

окончательно получаем:

$$m_H = m_N \frac{M_H}{M_N} \cdot \frac{\eta - k}{2k - \eta};$$

$$m_H = 7 \cdot \frac{2}{14} \cdot \frac{3-2}{4-3} = 1 \text{ (г)}.$$

Ответ: $m_H = 1$ г.

Упражнения

2.1. В помещении с температурой $t = 27$ °C находится баллон с газом. Манометр на баллоне показывает давление $p_1 = 400$ кПа. Баллон выносят на улицу. Установившееся показание манометра на улице $p_2 = 300$ кПа. Какова температура $t_н$ наружного воздуха, если атмосферное давление $p_а = 10^5$ Па?

Указание. Будьте осторожны: манометр показывает, на сколько давление внутри баллона больше наружного.

2.2. Давление воздуха в автомобильной шине (по манометру) $p = 4 \cdot 10^5$ Па при температуре $t_1 = 7$ °C. При быстрой езде шина нагревается до $t_2 = 42$ °C. Во сколько раз ($\eta = S_1/S_2$) уменьшится площадь соприкосновения шины с дорогой при езде, если объем шины считать постоянным? Атмосферное давление $p_а = 10^5$ Па, упругими свойствами шины пренебречь.

2.3. Объем некоторой массы газа при нагревании на ΔT при постоянном давлении увеличился так, что $\Delta V/V_{нач} = \alpha$. Какова начальная температура газа $T_{нач}$?

2.4. Из баллона вместимостью $V = 20$ л со сжатым водородом из-за неисправности вентиля произошла утечка газа. При температуре $t_1 = 7$ °C манометр баллона показывал давление $p_1 = 20$ атм, при температуре $t_2 = 27$ °C он показал такое же давление. Какое количество Δm газа утекло? 1 атм ≈ 10^5 Па.

2.5. На сколько уменьшится масса воздуха в комнате объемом $V = 50$ м^3, если в ней протопить печь? Начальная температура $t_1 = 15$ °C, конечная — $t_2 = 25$ °C. Атмосферное давление $p_а = 10^5$ Па.

2.6. Определите плотность смеси водорода массой $m_1 = 8$ г и кислорода массой $m_2 = 32$ г при температуре $t = 17$ °C, если давление в сосуде равно 750 мм рт. ст.

2.7. Считая, что весовое содержание азота в воздухе $f_N = 76\%$, кислорода — $f_0 = 24\%$, и пренебрегая другими составляющими, вычислите среднюю молярную массу воздуха.

2.8. В камере объемом $V = 0{,}1$ м^3 при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 6$ атм находится смесь углекислого газа (CO_2) и азота (N_2). Масса смеси $m = 1$ кг. Найдите массу m_1 азота и массу m_2 углекислого газа в камере.

2.9. Сколько ходов n должен сделать поршень нагнетательного насоса, чтобы повысить давление в камере объемом V в 3 раза? Начальное давление в камере p_0, объем камеры насоса $V_н$, атмосферное давление $p_а$. Температура внутри камеры и снаружи одинаковая.

2.10. Нагнетательный насос втягивает с каждым ходом поршня объем воздуха $V_н = 2$ л из атмосферы и подает этот воздух в резервуар объемом $V = 0{,}15$ м^3 с начальным давлением, равным атмосферному. Сколько ходов n должен сделать поршень, чтобы давление в резервуаре увеличилось в $k = 4$ раза? Температура в резервуаре постоянна и равна $t_1 = 27$ °C, температура наружного воздуха $t_2 = -6$ °C.

2.11. Три баллона, соединенные трубками с разделительными кранами, заполнены различными газами при одной и той же температуре. В первом баллоне объемом $V_1 = 3$ л давление $p_1 = 2$ атм, во втором ($V_2 = 7$ л) — давление $p_2 = 3$ атм, в третьем ($V_3 = 5$ л) — давление $p_3 = 0{,}6$ атм. Какое давление p_0 установится в системе, если открыть краны?

2.12. В середине горизонтально лежащей, запаянной с обоих концов стеклянной трубки длиной $L = 1$ м находится столбик ртути длиной $l = 20$ см. Когда трубку поставили вертикально, столбик ртути опустился на $d = 10$ см. Какое давление p_0 было в трубке в горизонтальном положении?

2.13. Закрытый с обоих концов цилиндр разделен на две равные половины теплонепроницаемым поршнем толщиной $d = 4$ см, способным без трения перемещаться внутри цилиндра. В одной половине цилиндра находится газ при температуре $t_1 = -23$ °C, а во второй половине — другой газ при температуре $t_2 = +27$ °C. На какое расстояние x сместится поршень, если первый газ нагреть до $t_1' = 77$ °C, а второй — охладить до $t_2' = +7$ °C? Длина цилиндра $L = 100$ см.

2.14. На сколько градусов надо нагреть воздух внутри сообщающегося с атмосферой воздушного шара, чтобы шар начал подниматься? Оболочка шара имеет форму сферы диаметром $D = 10$ м и массу $m = 10$ кг. Атмосферное давление $p = 735$ мм рт. ст., температура наружного воздуха $t = 27$ °C.

2.15. В открытую с обоих концов U-образную трубку наливают ртуть (рис. 40). При этом высота столба воздуха в левом колене трубки l = 50 см. Температура окружающей среды T_1 = 300 К, давление $p_а$ = 750 мм рт. ст. Затем левое колено плотно закрывают. На сколько поднимется уровень ртути в правом колене, если при неизменном внешнем давлении температура среды повысится до T_2 = 310 К?

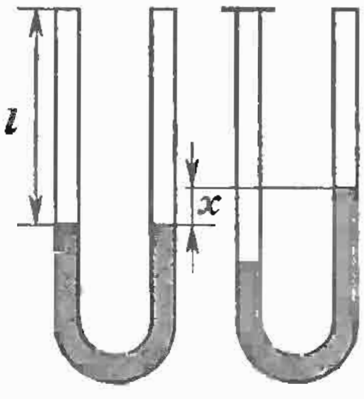


Рис. 40

2.16. Баллон, содержащий m_1 = 0,5 кг азота, взорвался при температуре T_1 = 700 К. Какое количество m_2 гелия можно хранить в таком же баллоне при температуре T_2 = 300 К, соблюдая пятикратный запас прочности?

2.17. В сосуде объемом V = 1 л находится углекислый газ массой m = 2 г. Сосуд нагревают до температуры T = 2600 К, при которой η = 20% всех молекул газа распадаются по схеме

$$2CO_2 \longleftrightarrow 2CO + O_2.$$

Какое давление установится в сосуде?

Ответы

2.1. $t_н = -33\ ^\circ C$.

2.2. $\eta = 1,1$.

2.3. $T_{нач} = \dfrac{\Delta T}{\alpha}$.

2.4. $\Delta m \approx 2,3$ г.

2.5. $\Delta m \approx 2$ кг.

2.6. $\rho = 0,331\ \dfrac{кг}{м^3}$.

2.7. $M_в = \dfrac{M_N \cdot M_0}{f_N M_0 + f_0 M_N} \approx 29\ \dfrac{г}{моль}$.

2.8. $m_1 \approx 103$ г, $m_2 \approx 897$ г.

2.9. $n = \dfrac{2p_0V}{p_аV_н}$.

2.10. $n = \dfrac{(k-1)T_2V}{T_1V_н} \approx 200.$

2.11. $p_0 = 2$ атм.

2.12. $p_0 = 375$ мм рт. ст.

2.13. $x = 9{,}6$ см.

2.14. $$\Delta T = \dfrac{\dfrac{\pi D^3}{6}TpM_в}{\dfrac{\pi D^3}{6}pM_в - TmR} - T \approx 5{,}1 \text{ К}.$$

2.15. $x \approx 7$ мм.

2.16. $m_2 \approx 33$ г.

2.17. $p = \dfrac{m}{MV}\left(\dfrac{100 + 0{,}5\eta}{100}\right)RT \approx 10{,}8 \cdot 10^5$ Па.

Тема № 3

Кинетическая теория идеального газа

Механическая модель идеального газа предполагает, что в сосуде содержится огромное количество микрочастиц, которые двигаются хаотически и не взаимодействуют друг с другом. Отсутствие взаимодействия означает, что между частицами нет дистанционных сил (отталкивания или притяжения). Столкновения частиц между собой и со стенками сосуда считаются упругими. Средние расстояния между частицами в десятки и более раз превышают размеры частиц, так что их суммарный собственный объем (если их собрать и сложить в кучку) пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда.

При столкновениях частиц (молекул или атомов) меняются их скорости и энергии, но в стационарном состоянии (p, V, T — константы) при очень большом количестве частиц это несущественно, так как устанавливается устойчивое распределение молекул по скоростям и энергиям. Это надо понимать так: пусть в определенном направлении движется некоторое количество частиц N с примерно равными скоростями v. Число N велико. В результате столкновений за время Δt количество ΔN молекул выбывает из этого потока. Но зато другие столкновения за то же время Δt поставляют практически такое же количество молекул и с теми же скоростями в наш поток. В этом смысл стационарности распределения молекул по скоростям. И это позволяет нам не замечать столкновения, считая, что каждая молекула движется в сосуде без столкновений с постоянной, присущей только ей скоростью. Напомним, что число молекул должно быть достаточно большим, чтобы случайные флуктуации были незаметны на фоне распределения молекул по скоростям.

Вывод основного кинематического уравнения идеального газа можно посмотреть в любом учебнике. Мы приведем здесь еще один способ получения этого уравнения, потому что он, на наш взгляд, дает более глубокое понимание поведения идеального газа.

Для вывода нам понадобится закон Ньютона в импульсной форме*:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t},$$

где $\vec{F}$ — сила давления, действующая на участок ΔS стенки (рис. 41); $\Delta \vec{P}$ — импульс, передаваемый стенке молекулами за время Δt.

Каждая молекула при абсолютно упругом ударе передает стенке импульс $\vec{P}_{стенки}$, который находится из закона сохранения импульса (рис. 42):

$$\underset{\text{до удара}}{\vec{P}_1 + 0 = \vec{P}_2 + \vec{P}_{стенки}}; \qquad \underset{\text{после удара}}{\vec{P}_{стенки} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2}.$$

Значение скорости частицы при абсолютно упругом ударе не меняется, следовательно,

$$|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = mv.$$

Поэтому значение импульса, передаваемого стенке, легко находится из рисунка 43, т. е.

$$P_{стенки} = 2mv\cos\alpha.$$

---

* В физике принято для обозначения импульса тела и давления использовать одну и ту же букву. Чтобы различать эти величины, обозначим импульс прописной буквой P, а давление — строчной.

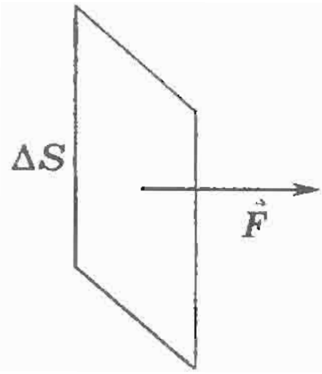


Рис. 41

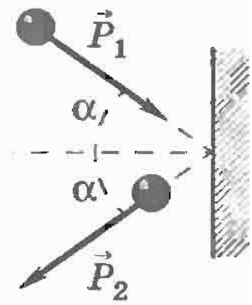


Рис. 42

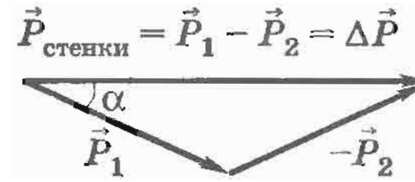


Рис. 43

После этих предварительных напоминаний можно приступить к выводу уравнения состояния идеального газа.

Возьмем абсолютно пустой сосуд в форме сферы и запустим в него одну-единственную молекулу, имеющую массу m_1 и скорость v_1 (рис. 44).

Молекула падает на стенку сосуда в точке A под углом α, отскакивает, не теряя скорости, под тем же углом. Треугольник AOB равнобедренный, значит, следующее соударение со стенкой сосуда (в точке B) происходит под тем же углом α и т. д. Между двумя последовательными соударениями со стенкой

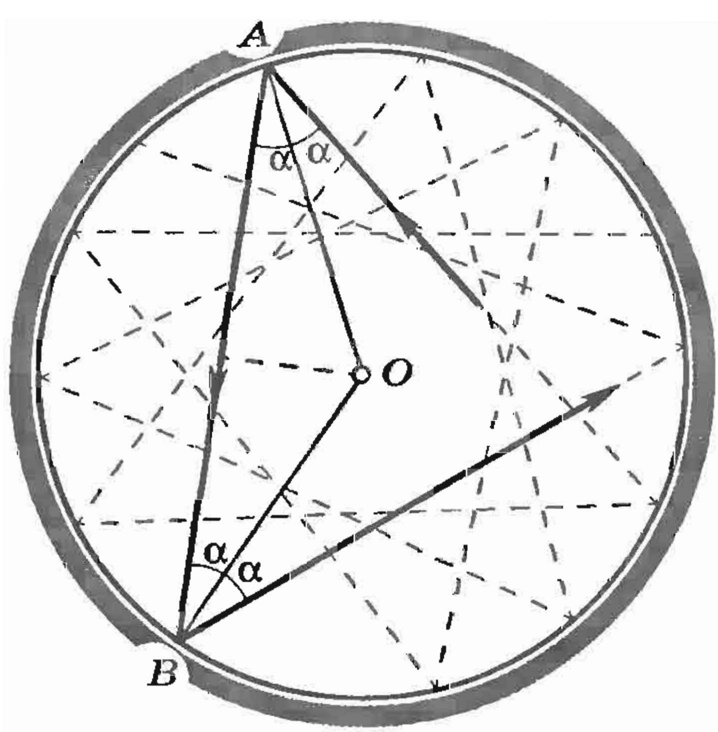


Рис. 44

молекул
стояние

$$l = AB = 2R\cos\alpha, \text{ где } R \text{ — радиус сферы.}$$

За время Δt молекула проходит путь $S = v\Delta t$, совершая при этом число соударений

$$N = \frac{S}{l} = \frac{v\Delta t}{2R\cos\alpha}.$$

Не нарушая никаких физических принципов, можем считать, что при большом количестве молекул удары распределятся равномерно по поверхности сферы. Это позволяет продолжить расчет для одной молекулы. Выделим на сфере малую площадку ΔS. За время Δt на нее придется N' ударов из общего числа N, причем

$$N' = N\frac{\Delta S}{S_{\text{сферы}}} = N\frac{\Delta S}{4\pi R^2} =$$

$$= \frac{v\Delta t}{2R\cos\alpha} \cdot \frac{\Delta S}{4\pi R^2} = \frac{v\Delta t\Delta S}{8\pi R^3\cos\alpha}.$$

Мы уже выяснили, что при каждом ударе молекула передает стенке импульс

$$P_1 = 2m_1v_1\cos\alpha,$$

значит, за время Δt площадка ΔS получает от одной молекулы импульс

$$P_{N'} = N'P_1 = \frac{v_1\Delta t\Delta S 2m_1v_1\cos\alpha}{8\pi R^3\cos\alpha} = \frac{\Delta t\Delta S m_1 v_1^2}{4\pi R^3}.$$

Теперь можно подсчитать силу давления на площадку ΔS:

$$F = \frac{P_{N'}}{\Delta t} = \frac{\Delta S m_1 v_1^2}{4\pi R^3},$$

и давление p в сосуде, создаваемое одной молекулой:

$$p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{m_1 v_1^2}{4\pi R^3}.$$

Проведем в последней формуле некоторые замены. Из формулы для объема сосуда

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ выразим $4\pi R^3 = 3V$ и $m_1 v_1^2 = 2E_1$ (удвоенная кинетическая энергия),

$$p_1 = \frac{2}{3V} E_1.$$

Здесь индекс 1 означает, что речь идет о первой частице.

Обратим внимание на то, что давление, создаваемое частицей, не зависит от угла падения частицы α и определяется только ее энергией и объемом сосуда.

Очевидно, что, если запустить вторую частицу с другой массой m_2, другой скоростью v и падающую на поверхность под другим углом β, она создаст в сосуде давление

$$p_2 = \frac{2}{3V} E_2.$$

Теперь можно запустить в сосуд N частиц с различными массами и различными, произвольно направленными скоростями. Для каждой из них справедливо полученное соотношение:

$$p_1 = \frac{2}{3V} E_1;$$

$$p_2 = \frac{2}{3V} E_2;$$

$$p_3 = \frac{2}{3V} E_3;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_N = \frac{2}{3V} E_N.$$

Полное давление p всего ансамбля частиц в сосуде получаем, складывая все p_i:

$$p = \frac{2}{3V} (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_N). \qquad (1)$$

Кстати, отсюда следует, что полная кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа

$$E = \Sigma E_i = \frac{3}{2}pV.$$

Смысл выделения «поступательного движения» станет ясен в дальнейшем.

Умножим и разделим правую часть уравнения (1) на полное число частиц N:

$$p = \frac{2N}{3V} \cdot \frac{(E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_N)}{N}. \qquad (2)$$

Здесь отношение $\frac{N}{V}$ — концентрация n (число частиц в единице объема), второй сомножитель в правой части уравнения (2) — средняя кинетическая энергия частиц $\langle E \rangle$. Таким образом,

$$p = \frac{2}{3} n \langle E \rangle. \qquad (3)$$

Это и есть основное уравнение кинетической теории идеального газа. Мы привели этот вывод потому, что он дает возможность понять, что полученное соотношение не зависит ни от распределения частиц по скоростям, ни от распределения частиц по массам. В сосуде может быть смесь отдельных атомов, молекул и даже частиц, образованных несколькими слипшимися молекулами. Уравнение остается справедливым.

Вернемся к уравнению Менделеева—Клапейрона

$$pV = \frac{N}{N_A} RT,$$

которое немного преобразуем:

$$p = \frac{N}{V}\left(\frac{R}{N_A}\right)T;$$

$$p = nkT. \qquad (4)$$

Здесь n — концентрация частиц в сосуде.

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8{,}31}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \left(\frac{\text{Дж}}{\text{К}}\right),$$

k — постоянная Больцмана.

Из уравнений (3) и (4) получаем соотношение, позволяющее дать механическую трактовку температуры идеального газа как меры средней кинетической энергии молекул:

$$\frac{2}{3}\langle E\rangle = kT;$$

$$\langle E\rangle = \frac{3}{2}kT. \qquad (5)$$

Пусть газ в сосуде состоит из одинаковых молекул массой m.

При нахождении средней кинетической энергии молекулы

$$\langle E\rangle = \frac{m}{2}\,\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N}$$

усредняются квадраты скоростей, поэтому при записи формулы средней кинетической энергии молекулы в виде

$$\langle E\rangle = \frac{mv^2}{2} \qquad (6)$$

под скоростью $v_{\text{ср. кв}}$ надо понимать величину

$$v \equiv v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N}}.$$

Эту скорость называют средней квадратичной.

Те, кто пойдет дальше по пути изучения физики и математики, еще не раз столкнутся с понятиями среднего значения некоторой величины и средним квадратичным значением этой же величины. Это разные числа.

Например, пусть некоторая величина A принимает значения $A_1 = 3$, $A_2 = 5$, $A_3 = 7$.

Найдем $A_{\text{ср}}$ и $A_{\text{ср. кв}}$:

$$A_{\text{ср}} = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3};\ \ A_{\text{ср}} = \frac{3+5+7}{3} = 5;$$

$$A_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}{3}};\ A_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\frac{3^2 + 5^2 + 7^3}{3}} \approx 5{,}26.$$

Поэтому не надо путать среднюю скорость молекул (правильнее говорить — средний модуль скорости) со средней квадратичной.

Для одинаковых молекул при постоянном распределении по скоростям эти величины пропорциональны, т. е.

$$v_{ср} = \alpha v_{ср.\,кв}.$$

Поскольку значения этих величин ($v_{ср}$ и $v_{ср.\,кв}$) одного порядка, то при качественных оценках можно использовать вместо средней скорости среднюю квадратичную.

Уточним сказанное на примере.

ЗАДАЧА

При 0 °C молекулы азота имеют среднюю скорость $v_{ср} = 454$ м/с. Какова средняя скорость молекул водорода при 100 °C?

Дано:

$t_1 = 0$ °C

$v_{ср}(N_2) = 454\ \frac{м}{с}$

$t_2 = 100$ °C

$v_{ср}(H_2)$ — ?

Решение

С учетом формул (5) и (6) среднюю квадратичную скорость молекулы находим из соотношения

$$\frac{mv^2_{ср.\,кв}}{2} = \frac{3}{2}kT;$$

$$v_{ср.\,кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3kN_AT}{mN_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Средняя скорость (средний модуль скорости) молекулы азота при 0 °C

$$v_{ср}(N_2) = \alpha v_{ср.\,кв} = \alpha\sqrt{\frac{3RT_1}{M_N}}.$$

Средняя скорость молекулы водорода при 100 °C

$$v_{ср}(H_2) = \alpha v_{ср.\,кв} = \alpha\sqrt{\frac{3RT_2}{M_H}}.$$

Поделив второе равенство на первое, получаем:

$$v_{ср}(H_2) = v_{ср}(N_2) \cdot \sqrt{\frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{M_N}{M_H}};$$

$$v_{ср}(H_2) = 454\sqrt{\frac{373}{273} \cdot \frac{28}{2}} \approx 1990 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: при 100 °С $v_{ср}(H_2) = 1990$ м/с.

ЗАДАЧА

Среднее расстояние между ближайшими молекулами идеального газа $\langle d \rangle = 3 \cdot 10^{-9}$ м. Оцените, какое давление оказывает газ на стенки сосуда, если его температура $T = 300$ К.

Дано:
$\langle d \rangle = 3 \cdot 10^{-9}$ м
$T = 300$ К

p — ?

Решение

Зная среднее расстояние между молекулами, можно определить концентрацию газа. Для этого расположим молекулы равномерно по всему объему сосуда, как показано на рисунке 45.

Из рисунка понятно, что каждая молекула в среднем занимает «квартиру» объемом

$$V_{\text{на одну молекулу}} = d^3.$$

Поэтому количество молекул в единице объема, т. е. концентрацию n, определим по формуле

$$n = \frac{1}{V_{\text{на одну молекулу}}} = \frac{1}{d^3}.$$

Остается подставить n в формулу

$$p = nkT;$$

$$p = \frac{1}{d^3}kT;$$

$$p = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{(3 \cdot 10^{-9})^3} \approx$$

$$\approx 1{,}5 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

Ответ: $p \approx 1{,}5 \cdot 10^5$ Па.

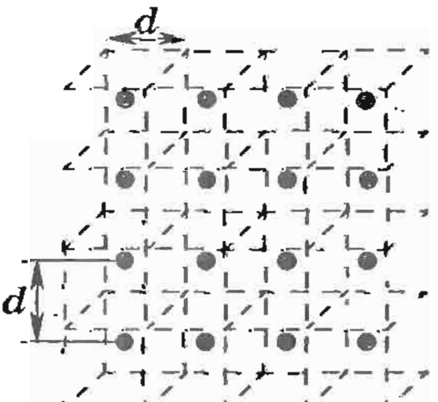


Рис. 45

Упражнения

3.1. Оцените число N молекул воды в стакане, содержащем $m = 200$ г жидкости.

3.2. Оцените массу m и размер d молекулы воды. Для упрощения расчетов считайте, что молекула воды имеет сферическую форму, а способ упаковки молекул воды соответствует рисунку 46.

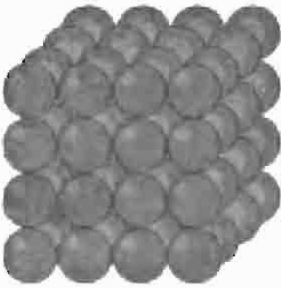


Рис. 46

3.3. Оцените среднее расстояние L между центрами молекул идеального газа при атмосферном давлении и комнатной температуре.

3.4. Найдите среднюю квадратичную скорость атомов гелия при комнатной температуре. Какие молекулы воздуха движутся в среднем быстрее — азота или кислорода?

3.5. Определите число молекул N идеального газа в 2 м^3 при нормальных условиях ($T = 273$ К, $p = 10^5$ Па). Какой объем занимает 1 кмоль идеального газа при нормальных условиях?

3.6. В двух теплоизолированных сосудах содержится азот. В первом сосуде средняя квадратичная скорость молекул $v_1 = 300$ м/с. Во втором сосуде количество молекул вдвое больше, чем в первом, а средняя квадратичная скорость молекул $v_2 = 500$ м/с. Сосуды соединены краном. Какая температура T установится в сосудах, если открыть кран?

3.7. Выведите формулу

$$v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}},$$

где p — давление газа, ρ — плотность газа.

3.8. При каком давлении p газ объемом $V = 3$ м^3 содержит $N = 7{,}2 \cdot 10^{26}$ молекул, если температура газа $t = 60$ °C?

3.9. Чему равна средняя квадратичная скорость молекул азота и их средняя энергия поступательного движения, если азот массой $m = 2{,}5$ кг, находясь в сосуде объемом $V = 3{,}2$ м^3, создает давление $p = 15$ Н/см^2?

3.10. Три одноатомных газа находятся в трех сосудах, соединенных тонкими трубками с кранами. Параметры состояния газов p_1, V_1, T_1; p_2, V_2, T_2; p_3, V_3, T_3. Краны открывают, и во всех сосудах получается однородная смесь. Определите температуру и давление смеси, если теплообмена с окружающей средой нет.

3.11. Изменится ли энергия воздуха в комнате, если в ней протопить печь?

3.12. Какой воздух легче, влажный или сухой, при одинаковом давлении и одинаковой температуре?

Ответы

3.1. $N = \frac{m}{M} N_A \approx 6{,}7 \cdot 10^{24}$.

3.2. $m \approx 3 \cdot 10^{-23}$ г, $d \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м.

3.3. $L \approx \sqrt[3]{\frac{kT}{p}} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-9}$ м.

3.4. $v_{\text{ср. кв}} \approx 1370$ м/с. В среднем содержащиеся в воздухе молекулы азота движутся быстрее молекул кислорода.

3.5. $N \approx 5{,}3 \cdot 10^{25}$, $V \approx 22{,}4$ м^3.

3.6. $T = \frac{M(v_1^2 + 2v_2^2)}{9R} \approx 221$ К.

3.8. $p \approx 1{,}1 \cdot 10^6$ Па.

3.9. $\langle E \rangle = \frac{3pVM}{2mN_A} \approx 1{,}34 \cdot 10^{-20}$ Дж, $v_{\text{ср. кв}} \approx 760$ м/с.

3.10. $T_0 = \frac{T_1T_2T_3(p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3)}{p_1V_1T_2T_3 + p_2V_2T_1T_3 + p_3V_3T_1T_2}$,

$p_0 = \frac{p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3}{V_1 + V_2 + V_3}$.

3.11. Не изменится.

3.12. Влажный воздух легче.

Тема № 4

Элементы термодинамики

Количество энергии, переданное одним телом другому в процессе теплообмена, называется количеством теплоты. Традиционное обозначение Q.

Если термодинамическая система получает извне некоторое количество теплоты Q, то часть полученной энергии ΔU добавляется к внутренней энергии системы U, а часть возвращается наружу в процессе совершения этой системой работы A.

$$Q = \Delta U + A.$$

Это обычный закон сохранения энергии, который принято называть *первым началом термодинамики*.

Для ясности представьте себе, что Q — это количество денег, полученных в зарплату, из которых ΔU рублей вы добавили на сберкнижку (ваш личный запас «энергии»), а количество A рублей истратили на покупки (деньги вернулись в «окружающее пространство»).

Все величины, входящие в первое начало термодинамики, алгебраические, т. е. могут быть либо положительными, либо отрицательными.

Можно получить зарплату ($Q > 0$), а можно отдать долги ($Q < 0$); можно добавить деньги на сберкнижку ($\Delta U > 0$), а можно снять ($\Delta U < 0$); можно купить галоши ($A > 0$), а можно продать валенки ($A < 0$).

Первое начало термодинамики, как и положено закону сохранения энергии, применимо к любой термодинамической системе, будь то твердое тело, жидкость или газ. Но поскольку нас интересует идеальный газ, найдем внутреннюю энергию идеального газа.

Ввиду отсутствия межмолекулярных взаимодействий полная внутренняя энергия идеального газа складывается из кинетических энергий всех молекул:

$$\begin{pmatrix}\text{внутренняя}\\ \text{энергия}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{средняя}\\ \text{энергия}\\ \text{одной}\\ \text{молекулы}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{число}\\ \text{молекул}\\ \text{в одном}\\ \text{моле}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{количество}\\ \text{молей}\end{pmatrix};$$

$$U = \frac{3}{2}kT \cdot N_A \cdot \frac{m}{M}$$

или

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT.$$

Соответственно

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R\Delta T.$$

В некоторых задачах удобно выражать внутреннюю энергию идеального газа через давление и объем. Воспользовавшись уравнением Менделеева—Клапейрона, запишем:

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT = \frac{3}{2}pV.$$

Вспомним, что тот же результат для суммарной кинетической энергии молекул газа мы уже получали в процессе вывода основного уравнения кинетической теории.

В реальных газах, даже когда их поведение хорошо описывается уравнением Менделеева—Клапейрона, коэффициент, равный 3/2 в формуле средней энергии молекулы, может иметь другое значение, например 5/2, 6/2, 7/2 и т. д. Это связано с устройством молекулы.

Чтобы разобраться, в чем тут дело, надо познакомиться с понятием количества степеней свободы тела.

Количеством степеней свободы тела называют количество чисел, которое нужно задать, чтобы полностью определить положение тела в пространстве. Так, для материальной точки достаточно трех чисел (координаты x_1, y_1, z_1), чтобы сказать, где она находится. Пример — молекула одноатомного газа. Основываясь на понятии о степенях свободы, мы говорим, что эта молекула обладает тремя степенями свободы, участвуя в трех независимых движениях (вдоль осей X, Y и Z).

Молекула, состоящая из двух жестко связанных атомов, имеет пять степеней свободы. Это легко объяснить. Для задания положения системы, состоящей из двух свободных атомов, надо знать шесть чисел (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2). Но в двухатомной молекуле на координаты атомов накладывается кинематическая связь, фиксирующая постоянство расстояния между атомами:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \text{const}.$$

Таким образом, зная пять координат, можно вычислить шестую.

Трехатомная молекула с жесткой связью имеет шесть степеней свободы. На девять координат трех свободных атомов накладываются три уравнения кинематических связей, фиксирующих попарно неизменность расстояний между ними.

Физический смысл этих шести степеней свободы тоже легко понять. Такая молекула участвует в трех независимых поступательных движениях (вдоль осей координат) и в трех независимых вращениях (вокруг каждой из осей координат). Часто говорят, что такая молекула имеет три поступательных степени свободы и три вращательных. Положение молекулы в пространстве можно определить, задавая три координаты одного из атомов молекулы и три угла поворота вокруг осей координат.

Заметим, что трехатомная молекула представляет собой абсолютно твердое тело минимальных размеров. Если с помощью шести координат зафиксировать («закрепить») три произвольные точки (не лежащие на одной прямой) твердого тела, то оно потеряет свободу движения. Это значит, что абсолютно твердое тело имеет тоже шесть степеней свободы.

Кстати, заодно мы объяснили, как передвигается альпинист. Три закрепленные конечности фиксируют положение тела альпиниста, с помощью четвертой, свободной конечности можно выбрать дополнительную точку крепления, освобождая при этом одну из первых трех для дальнейшего перемещения.

Но вернемся в термодинамику.

Все степени свободы одной молекулы энергетически равноправны. Это означает, что на каждую из них в среднем приходится $\frac{1}{2}kT$. Таким образом, средняя энергия молекулы одноатомного газа равна $3\left(\frac{1}{2}kT\right)$, полная энергия жесткой молекулы двухатомного газа — $5\left(\frac{1}{2}kT\right)$ и трехатомного газа — $6\left(\frac{1}{2}kT\right)$.

Все сказанное надо бы учитывать при подсчете внутренней энергии газа. Однако полная энергия даже сложной молекулы при низких температурах равна $\frac{3}{2}kT$, затем с ростом температуры она скачком становится равной $\frac{5}{2}kT$, затем $\frac{6}{2}kT$ и т. д.

Такое аномальное поведение не поддается объяснению в рамках классических представлений, поэтому отложим его до квантовой физики, а пока при решении задач будем использовать приведенные выше значения энергии молекулы. Так что, встречая в условии задачи слова «одноатомный газ», вы должны воспринимать их как указание

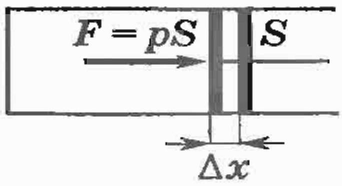


Рис. 47

на то, что средняя энергия одной молекулы газа рассчитывается по формуле

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Второе слагаемое в первом законе термодинамики — работа газа.

Рассчитаем работу газа.

В цилиндре под поршнем (рис. 47) находится газ при давлении p.

Переместим поршень вправо на малое расстояние Δx. «Малое» означает, что давление газа под поршнем практически не изменилось. Газ действует на поршень площадью S с силой $F = pS$, которая совершает элементарную работу

$$\Delta A = F\Delta x = pS\Delta x = p\Delta V,$$

где ΔV — элементарное приращение объема газа.

Полная работа газа при изменении объема от V_1 до V_2 складывается из элементарных работ:

$$A = \Sigma A_i = \sum_{V_1}^{V_2} p_i \Delta V_i.$$

В механике мы уже не раз сталкивались с похожими выражениями и знаем, что произведение $p_i \Delta V_i$ на графике p, V равно площади полоски (рис. 48), а сумма $\sum_{V_1}^{V_2} p_i \Delta V_i$ равна площади под графиком от V_1 до V_2.

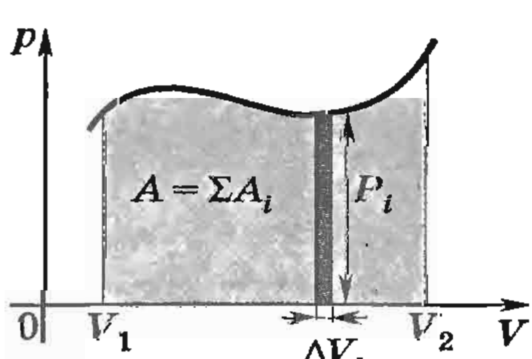


Рис. 48

Ясно, что при постоянном объеме газ работу не совершает.

Переход газа из одного состояния в другое может осуществляться так, что один из членов в уравнении первого начала термодинамики оказывается равным нулю.

1. При $Q = 0$ газ не получает и не отдает энергии. Изменение состояния газа происходит без теплообмена с внешней средой. Такой процесс называют адиабатным.

2. При $\Delta U = 0$ остается постоянной внутренняя энергия газа, а значит, и его температура. Это уже знакомый нам изотермический процесс.

3. При $A = 0$ газ не совершает работу, т. е. не меняет объема. Процесс изохорный.

В заключение краткого теоретического обзора напомним определения теплоемкости.

Теплоемкостью тела C называют количество теплоты, необходимое для его нагревания на 1 К. Если физическому телу сообщили количество теплоты Q, в результате чего температура тела поднялась на ΔT, то

$$C = \frac{Q}{\Delta T}.$$

При решении задач чаще пользуются молярной теплоемкостью C_ν. Если газ содержит ν молей, то теплоемкость всего газа

$$C = \nu C_\nu.$$

Для твердых и жидких тел удобнее пользоваться удельной теплоемкостью c.

Удельной теплоемкостью вещества называют количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг (единицы массы) вещества на 1 К. Очевидно, что

$$C = mc,$$

$$mc = \frac{Q}{\Delta T} \text{ и}$$

$$Q = mc\Delta T.$$

Теплоемкость (любая — удельная, молярная или полная) твердых тел и жидкостей можно считать постоянной в широком диапазоне температур и давлений.

С газами сложнее: теплоемкость газа зависит от процесса, точнее от работы, совершаемой газом при его нагревании.

Так, при изохорном процессе все переданное газу количество теплоты идет на увеличение внутренней энергии.

При изобарном процессе только часть количества теплоты переходит во внутреннюю энергию (остальное передается наружу в процессе совершения газом работы), поэтому для нагревания газа на то же количество градусов требуется большее количество теплоты. Теплоемкость газа при изобарном процессе больше, чем при изохорном. А при изотермическом расширении газа температура вообще не изменяется ($\Delta T = 0$), и все количество теплоты тратится на совершение работы. Теплоемкость газа при изотермическом процессе оказывается бесконечно большой.

Рассмотрим пример расчета теплоемкости газа.

ЗАДАЧА

Один моль одноатомного идеального газа нагревают так, что процесс перехода из состояния *1* в состояние *2* происходит по приведенному графику (рис. 49). Найдите молярную теплоемкость газа в этом процессе.

Дано:

$p = \alpha V$

$\nu = 1$ моль

C_ν — ?

Решение

Согласно определению теплоемкости и первому началу термодинамики,

$$C_\nu = C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + A}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{A}{\Delta T}.$$

Первое слагаемое находится легко. Для одного моля одноатомного идеального газа

$$U = \frac{3}{2}RT, \ \Delta U = \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Подставляя ΔU в формулу для теплоемкости, получаем

$$C_\nu = \frac{3}{2}R + \frac{A}{\Delta T}.$$

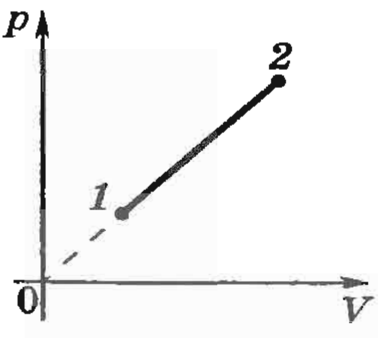


Рис. 49

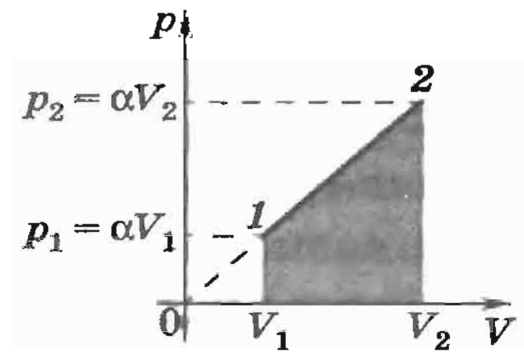


Рис. 50

Теперь займемся расчетом работы. При переходе из состояния *1* в состояние *2* газ совершает работу, значение которой определяется площадью под графиком на рисунке 50. По формуле площади трапеции

$$A = \frac{p_2 + p_1}{2}(V_2 - V_1) = \frac{\alpha(V_2 + V_1)(V_2 - V_1)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha V_2^2 - \alpha V_1^2).$$

Нам нужно выразить эту работу через приращение температуры ΔT. Для этого воспользуемся уравнением Менделеева—Клапейрона для одного моля газа:

$$pV = RT,$$

в котором заменим p ($p = \alpha V$ по условию задачи):

$$\alpha V^2 = RT.$$

Соответственно в состоянии *1* — $\alpha V_1^2 = RT_1$, в состоянии *2* — $\alpha V_2^2 = RT_2$. Подставляя эти выражения в формулу работы, получаем

$$A = \frac{1}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}R\Delta T.$$

Наконец, заменяя работу в формуле молярной теплоемкости, получаем окончательный ответ:

$$C_\nu = \frac{3}{2}R + \frac{A}{\Delta T} = \frac{3}{2}R + \frac{1}{2}\frac{R\Delta T}{\Delta T} = 2R.$$

Ответ: $C_\nu = 2R$.

ЗАДАЧА

Состояние одного моля идеального газа меняется по циклу, приведенному на рисунке 51. Известны минимальная и максимальная температура T_1 и T_2, минимальное и максимальное давление p_1 и p_2. Найдите работу A, совершаемую газом за один цикл.

Дано:
T_1, T_2, p_1, p_2

A — ?

Решение

Цикл состоит из двух изохор (*1—2* и *3—4*) и двух изобар (*2—3* и *4—1*).

Запишем уравнение Менделеева—Клапейрона для четырех выделенных состояний газа, соответствующих указанным на рисунке точкам:

1) $p_1V_1 = RT_1$;
2) $p_2V_1 = RT'$;
3) $p_2V_2 = RT_2$;
4) $p_1V_2 = RT''$.

Из этой системы четырех уравнений можно найти четыре неизвестные величины — V_1, V_2, T', T''.

Работа газа за полный цикл:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = 0 + A_{23} + 0 + A_{41}.$$

На изохорных участках $\Delta V = 0$, и, следовательно, работа тоже равна нулю.

$$A_{23} = p\Delta V = R\Delta T = R(T_2 - T'),$$

где $T' = T_1\dfrac{p_2}{p_1}$ — из первого и второго уравнений системы.

$$A_{41} = R(T_1 - T''),$$

где $T'' = T_2\dfrac{p_1}{p_2}$ — из третьего и четвертого уравнений системы.

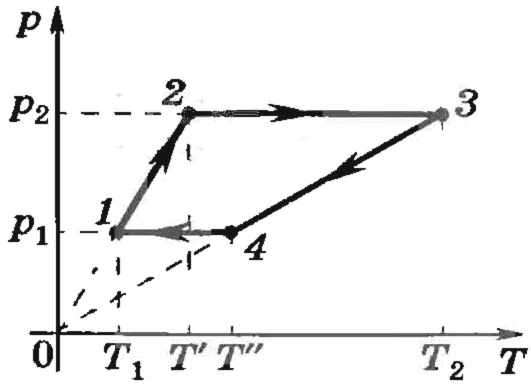


Рис. 51

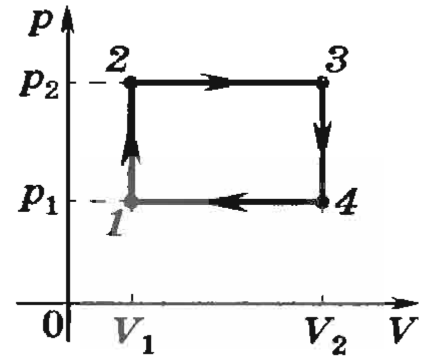


Рис. 52

Остальное просто:

$$A = R\left(T_2 - T_1\frac{p_2}{p_1}\right) + R\left(T_1 - T_2\frac{p_1}{p_2}\right) =$$

$$= R(p_2 - p_1)\left(\frac{T_2}{p_2} - \frac{T_1}{p_1}\right).$$

Ответ: $A = R(p_2 - p_1)\left(\frac{T_2}{p_2} - \frac{T_1}{p_1}\right).$

Можно было подойти к решению этой задачи и по-другому.

Изобразим тот же цикл в координатах p, V (рис. 52). В этих координатах работа газа за полный цикл равна площади, охватываемой контуром цикла:

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$

Объемы V_1 и V_2 легко находятся из уравнений состояния идеального газа в точках *1* и *3*:

$$V_1 = \frac{RT_1}{p_1} \text{ и } V_2 = \frac{RT_2}{p_2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу работы, снова получаем

$$A = R(p_2 - p_1)\left(\frac{T_2}{p_2} - \frac{T_1}{p_1}\right).$$

Упражнения

4.1. Сколько степеней свободы η_1 у двери, закрепленной на двух петлях? Сколько степеней свободы η_2 для чертежных линеек оставляет пантограф кульмана? (Если слово «пантограф» вам неизвестно, постарайтесь самостоятельно разузнать, что это за устройство.) Сколько степеней свободы η_3 у хоккейной шайбы, скользящей по горизонтальной поверхности льда? Шайбу не считать материальной точкой. Разумеется, речь идет о системе координат, связанной с помещением.

4.2. Сколько степеней свободы η_1 у камня, если считать его абсолютно твердым телом? Сколько степеней свободы η_2 у ножниц?

4.3. Может ли теплоемкость газа быть отрицательной?

4.4. Сравните количество теплоты, необходимое для нагревания газа на одинаковое число градусов, для следующих случаев:

— газ находится в вертикальном цилиндре под неподвижным поршнем (Q_1);

— тот же газ находится в том же цилиндре, но поршень поднимают вверх (Q_2);

— тот же газ находится в том же цилиндре, но поршень опускают вниз (Q_3).

4.5. Чему равна молярная теплоемкость $C_{\nu V}$ одноатомного идеального газа в изохорном процессе?

4.6. Чему равна молярная теплоемкость $C_{\nu p}$ одноатомного идеального газа в изобарном процессе?

4.7. Докажите, что для любого идеального газа

$$C_{\nu p} = C_{\nu V} + R.$$

4.8. В горизонтальном сосуде, закрытом поршнем, способным перемещаться без трения, находится воздух. Масса воздуха $m = 3$ кг, температура $t_1 = 20$ °C. Какую работу совершит этот воздух при изобарном нагревании до 100 °C?

4.9. В вертикально расположенном цилиндре сечением $S = 20$ см^2 под поршнем массой $m = 10$ кг заключен газ при температуре $t = 27$ °C. Поршень находится на расстоянии $h = 20$ см от дна цилиндра. Трение отсутствует. Цилиндр нагревают на $\Delta T = 100$ К. Какую работу совершает газ, если атмосферное давление $p_а = 10^5$ Па? Принять $g = 10$ м/с^2.

4.10. Идеальный газ, имеющий массу m (молярная масса M), охлаждается изохорно от температуры T так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна начальной. Определите совершенную газом работу.

4.11. В одинаковых цилиндрах *1* и *2* под одинаковыми легкоподвижными поршнями находится одинаковое количество углекислого газа. К поршням прикреплены одинаковые грузы, как показано на рисунке 53. На сколько сантиметров ниже (Δh) расположен поршень в первом цилиндре, если масса каждого из поршней $m_1 = 10$ кг, масса каждого груза $m_2 = 5$ кг, во втором цилиндре поршень находится на высоте $H = 90$ см от дна, внешнее давление $p_а = 10^5$ Па, площадь поперечного сечения каждого цилиндра $S = 40$ см^2? Масса блока пренебрежимо мала.

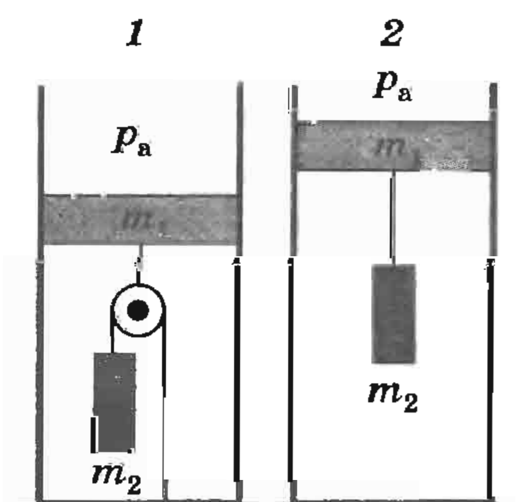


Рис. 53

На сколько градусов (ΔT) нужно нагреть газ в первом цилиндре, чтобы поршень в нем поднялся до уровня поршня второго цилиндра? Масса углекислого газа в каждом цилиндре $m_г = 9$ г.

Какое количество теплоты Q нужно передать газу для этого? Молярная теплоемкость углекислого газа при постоянном объеме $C_{vV} = 27 \frac{Дж}{(моль \cdot К)}$.

4.12. При изобарном расширении двухатомного идеального газа его внутренняя энергия увеличилась на $\Delta U = 1500$ Дж. Какое количество теплоты Q было подведено к газу?

4.13. В некотором процессе давление идеального газа меняется в зависимости от объема по закону $p = \beta V$. Какую работу A совершит этот газ при увеличении его температуры на ΔT К, если масса газа m, а молярная масса M?

4.14. Какое количество теплоты Q надо сообщить одноатомному идеальному газу, находящемуся в вертикальном цилиндре под невесомым легкоподвижным поршнем, чтобы последний переместился на высоту $\Delta h = 5$ см? Площадь поверхности поршня $S = 50$ см^2, атмосферное давление равно $p_а = 10^5$ Па.

4.15. В некотором процессе температура идеального газа меняется по закону $T = \gamma V^2$. Какую работу совершает один моль этого газа при увеличении объема от V_1 до V_2?

4.16. Состояние одного моля идеального газа меняется по циклу (рис. 54). Известны минимальная и максимальная температура T_1 и T_2, минимальный и максимальный объем V_1 и V_2. Найдите работу A, совершаемую газом за один цикл.

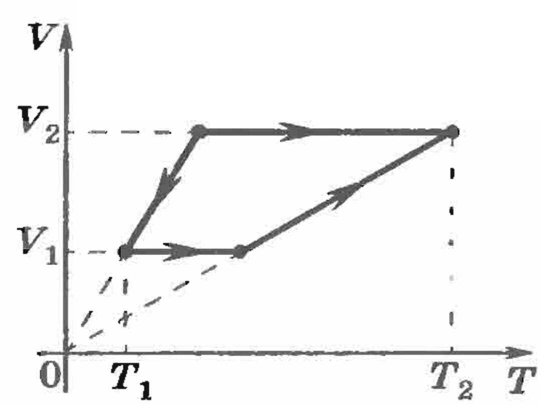


Рис. 54

Ответы

4.1. $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 2$, $\eta_3 = 3$.

4.2. $\eta_1 = 6$, $\eta_2 = 7$.

4.3. Да. Когда газ совершает бóльшую работу, чем получаемое тепло, или когда над газом совершается бóльшая работа, чем отнимаемое тепло.

4.4. $Q_2 > Q_1 > Q_3$.

4.5. $C_{vV} = \frac{3}{2}R$.

4.6. $C_{vp} = \frac{5}{2}R$.

4.8. $A = \frac{m}{M}R\Delta T \approx 68{,}8$ кДж.

4.9. $A = \frac{Sh\Delta T}{T}\left(p_а + \frac{mg}{S}\right) = 200$ Дж.

4.10. $A = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{m}{M}RT$.

4.11. $\Delta h = 7{,}5$ см, $\Delta T \approx 26{,}5$ К, $Q \approx 191{,}4$ Дж.

4.12. $Q \approx 2100$ Дж.

4.13. $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{M}R\Delta T$.

4.14. $Q = 62{,}5$ Дж.

4.15. $A = \frac{\gamma R}{2}(V_2^2 - V_1^2)$.

4.16. $A = R(V_2 - V_1)\left(\frac{T_2}{V_2} - \frac{T_1}{V_1}\right)$.

Тема № 5

Тепловые машины

Тепловая машина предназначена для преобразования тепловой энергии в механическую. Простейший пример такого преобразования — изотермическое расширение газа, при котором, согласно первому началу термодинамики, все количество теплоты, сообщаемое газу, может быть преобразовано в механическую энергию внешних тел в процессе работы, совершаемой газом.

Проблема заключается в том, что рабочее тело (в нашем случае газ) нужно вернуть в исходное состояние, чтобы процесс преобразования тепла в работу мог снова повториться, т. е. чтобы машина могла работать постоянно. При этом энергетические затраты на возвращение рабочего тела в исходное состояние должны быть меньше совершаемой газом работы, иначе толку от такой машины не будет. Для этого газ перед сжатием придется охладить.

Таким образом, в любой тепловой машине, кроме рабочего тела, должны быть нагреватель (от которого рабочее тело получает количество теплоты $Q_н$) и холодильник (которому рабочее тело отдает количество теплоты $Q_х$).

По завершении цикла в системе (нагреватель — рабочее тело — холодильник) происходят следующие изменения:

— нагреватель теряет энергию $Q_н$,

— рабочее тело совершает работу A,

— холодильник получает энергию $Q_х$.

Согласно закону сохранения энергии:

$$Q_н = A + Q_х,$$

где (иными словами) $Q_н$ — полная затраченная энергия, A — полезная механическая энергия, полученная от тепловой машины, $Q_х$ — бесполезно потерянная энергия.

Откуда коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} = 1 - \frac{Q_х}{Q_н}.$$

Если тепловая машина работает по обратимому циклу (т. е. можно заставить рабочее тело повторить все его состояния в обратном порядке), то такая тепловая машина может работать как холодильная машина (рис. 55). При этом:

— холодильник отдаст рабочему телу количество теплоты $Q_х$;

— рабочее тело совершит за полный цикл отрицательную работу A' (внешние устройства совершают над рабочим телом работу $A = -A'$);

— нагреватель получит количество теплоты $Q_н$.

Сказанное означает, что передача тепла от «холодного» тела к «горячему» возможна только «насильственным» путем (надо совершить некоторую работу). Холодильная машина может быть использована в двух целях:

— охлаждение некоторой среды (бытовой холодильник);

— нагревание некоторой среды (тепловой насос).

В первом случае важно знать, как хорошо отбира-

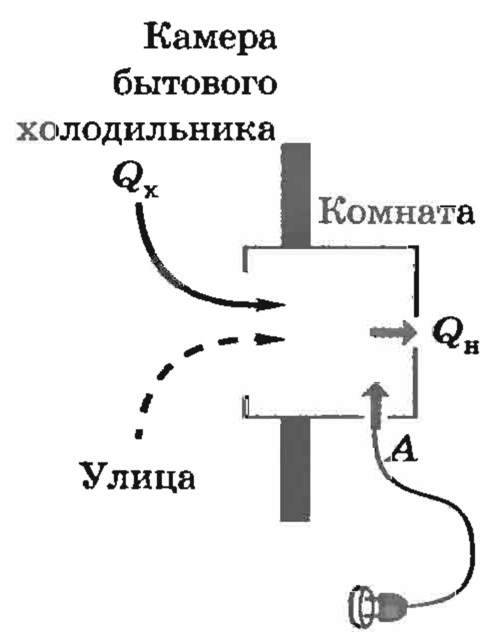


Рис. 55

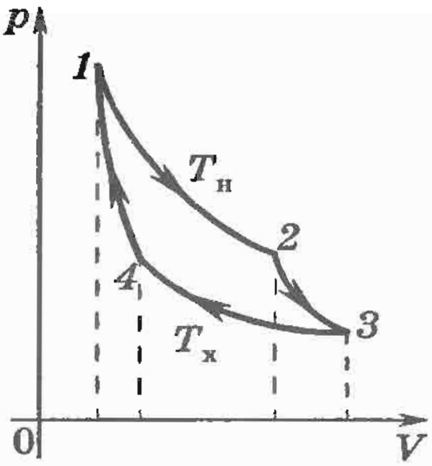


Рис. 56

ется тепло, т. е. какое количество энергии отбирается у холодной среды на единицу затраченной энергии. Для этих целей вводится так называемый холодильный коэффициент $\varepsilon_х$, определяемый по формуле

$$\varepsilon_х = \frac{Q_х}{A} = \frac{Q_х}{Q_н - Q_х} = \frac{1-\eta}{\eta}.$$

Здесь η — КПД того же устройства, работающего как тепловая машина.

В случае теплового насоса нужно знать количество получаемого тепла на единицу затраченной энергии. Для этого вводится отопительный коэффициент $\varepsilon_н$:

$$\varepsilon_н = \frac{Q_н}{A} = \frac{Q_н}{Q_н - Q_х} = \frac{1}{\eta}.$$

В свое время было доказано, что из всех обратимых циклов в смысле получения механической энергии из тепловой самым эффективным является цикл Карно, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (рис. 56).

Не вдаваясь в подробности, напомним, что если тепловая машина, работающая по циклу Карно, идеальна, т. е. работает без трения, то ее КПД

$$\eta = \frac{T_н - T_х}{T_н}.$$

Это выражение надо воспринимать как верхний предел КПД, не достигаемый ни одной реальной тепловой машиной.

Чтобы закрепить понятие КПД тепловой машины, решим задачу.

ЗАДАЧА

Рабочим телом тепловой машины является одноатомный идеальный газ, состояние которого меняется по циклу, представленному на рисунке 57. Максимальная температура газа в $n = 4$ раза больше минимальной ($T_3 = 4T_1$). Пренебрегая потерями на трение, найдите КПД машины. Сравните полученный коэффициент полезного действия с КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, в которой температура нагревателя и холодильника соответствует максимальной и минимальной температуре заданной машины.

Решение

Коэффициент полезного действия определяется как отношение работы, совершенной газом за весь цикл, к количеству теплоты Q, полученному газом:

$$\eta = \frac{A}{Q}. \tag{1}$$

В координатах p, V работа газа за весь цикл равна площади треугольника *1—2—3* (рис. 58):

$$A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1). \tag{2}$$

Нам нужно выразить работу газа через максимальную и минимальную температуру цикла. Нетрудно понять, что температура минимальна в состоянии *1*, а максимальна в состоянии *3*.

Запишем, что в состояниях *1*, *2*, *3* газ остается идеальным:

$$p_1V_1 = \nu RT_1, \tag{3}$$

$$p_2V_1 = \nu RT_2, \tag{4}$$

$$p_2V_2 = \nu RT_3. \tag{5}$$

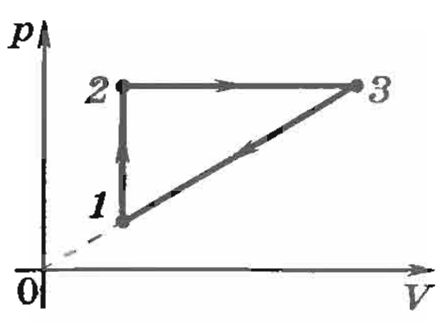


Рис. 57

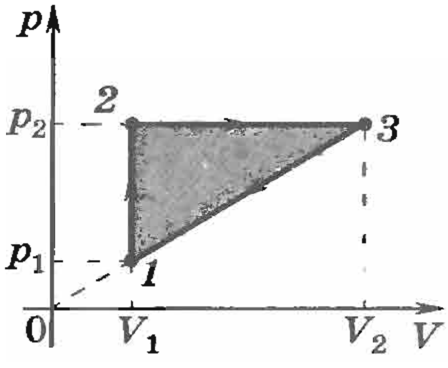


Рис. 58

Состояния *1* и *3* изображаются точками, лежащими на прямой, проходящей через начало координат, поэтому

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (6)$$

Этих уравнений достаточно, чтобы выразить температуру T_2 через T_1 и T_3. Для этого поделим уравнение (3) на уравнение (4), уравнение (4) на (5) и результаты подставим в (6):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}, \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_2}{T_3} \text{ и } \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3}.$$

Откуда $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$.

Раскроем скобки в выражении (2) для работы:

$$A = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_2 - p_2V_1 + p_1V_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(p_2V_2 - 2p_2V_1 + p_1V_1).$$

Мы учли, что отрицательные члены в скобке одинаковы (см. (6)).

Уравнения Менделеева—Клапейрона позволяют произвести нужные нам замены:

$$A = \frac{1}{2}(\nu RT_3 - 2\nu RT_2 + \nu RT_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\nu R(T_3 - 2\sqrt{T_1T_3} + T_1). \qquad (7)$$

Теперь вычислим количество теплоты, полученное газом. Газ получал тепло при изохорном переходе из состояния *1* в состояние *2* и при изобарном переходе из состояния *2* в состояние *3*.

$$Q_{12} = \nu C_{\nu V}(T_2 - T_1) = \nu\frac{3}{2}R(\sqrt{T_3T_1} - T_1);$$

$$Q_{23} = \nu C_{\nu p}(T_3 - T_2) = \nu\frac{5}{2}R(T_3 - \sqrt{T_3T_1}).$$

Мы учли, что молярная теплоемкость идеального одноатомного газа при изохорном процессе

$$C_{\nu V} = \frac{3}{2}R,$$

а молярная теплоемкость одноатомного идеального газа при изобарном процессе

$$C_{\nu p} = C_{\nu V} + R.$$

Полное количество теплоты, полученное газом за цикл:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} =$$

$$= \frac{\nu R}{2}(3\sqrt{T_3T_1} - 3T_1 + 5T_3 - 5\sqrt{T_3T_1}) =$$

$$= \frac{\nu R}{2}(5T_3 - 2\sqrt{T_3T_1} - 3T_1). \qquad (8)$$

Подставим полученные для A и Q выражения (7) и (8) в формулу КПД (1):

$$\eta = \frac{T_3 - 2\sqrt{T_3T_1} + T_1}{5T_3 - 2\sqrt{T_3T_1} - 3T_1}.$$

Наконец, учитывая, что по условию $T_3 = 4T_1$, вычисляем КПД:

$$\eta = \frac{4T_1 - 4T_1 + T_1}{20T_1 - 4T_1 - 3T_1} = \frac{1}{13}.$$

В принципе мы могли бы обойтись без расчета работы газа за цикл. Для этого надо воспользоваться формулой

$$\eta = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н}$$

и выражением $C_\nu = 2R$ для молярной теплоемкости при изменении давления пропорционально объему (см. с. 47).

В данной задаче именно при таком процессе газ отдает количество теплоты $Q_х$:

$$Q_х = 2\nu R(T_3 - T_1).$$

Подставляя $Q_х$ в формулу для КПД, получаем

$$\eta = \frac{\frac{\nu R}{2}(5T_3 - 2\sqrt{T_3T_1} - 3T_1) - 2\nu R(T_3 - T_1)}{\frac{\nu R}{2}(5T_3 - 2\sqrt{T_3T_1} - 3T_1)},$$

что после упрощений дает тот же результат:

$$\eta = \frac{1}{13}.$$

Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно с температурой нагревателя T_3 и температурой холодильника T_1, должна иметь КПД, определяемый по формуле

$$\eta_{\text{предельный}} = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = \frac{4T_1 - T_1}{4T_1} = \frac{3}{4}.$$

Как и следовало ожидать, цикл Карно дает более высокий КПД.

Ответ: $\eta = \frac{1}{13}$.

Упражнения

5.1. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 6 \cdot 10^4$ Дж. Температура нагревателя $t_1 = 127$ °C, температура холодильника $t_2 = 27$ °C. Найдите количество теплоты Q_1, получаемое рабочим телом от нагревателя за один цикл. Найдите количество теплоты Q_2, отдаваемое холодильнику за один цикл.

5.2. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80% тепла, получаемого от нагревателя, передается холодильнику. Количество тепла, полученное от нагревателя за некоторое время, $Q = 5$ кДж. Сколько полных циклов n совершила машина, если за один цикл она совершает работу $A = 100$ Дж?

5.3. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Найдите КПД η машины, если известно, что за один цикл совершается работа $A = 3000$ Дж, а холодильнику передается количество теплоты $Q = 15$ ккал за $n = 3$ цикла. Выясните самостоятельно связь внесистемной единицы калории и джоуля.

5.4. Полезная мощность на валу электромотора, обеспечивающего работу холодильной машины, $N = 0{,}25$ кВт. Сколько времени t потребуется для понижения температуры в камере холодильника на $\Delta t = 10$ °C, если полная теплоемкость камеры $C = 6 \cdot 10^4$ Дж/К, а холодильный коэффициент $\varepsilon_х = 4$? Естественным теплообменом камеры с внешней средой пренебречь. Какое количество теплоты $Q_н$ получит внешняя среда при этом?

5.5. Обратимая тепловая машина, КПД которой составляет 60% от предельного, работает в режиме теплового насоса, как отопитель, от мотора с полезной мощностью $N = 0{,}25$ кВт. Температура воздуха в помещении $t_1 = 27$ °C, температура снаружи $t_2 = -13$ °C. Найдите отопительный коэффициент машины $\varepsilon_н$. Какое количество $Q_н$ подается в помещение за время $\tau = 30$ с?

5.6. Рабочим телом тепловой машины служит одноатомный идеальный газ, совершающий цикл по графику, приведенному на рисунке 59. $V_2 = 3V_1$, $p_2 = 2p_1$. Найдите КПД η этой машины. Тепловыми потерями и трением пренебречь. Каким был бы коэффициент η_{max} полезного действия, если бы она работала по циклу Карно, с температурой нагревателя и холодильника, соответственно равной максимальной и минимальной температуре цикла?

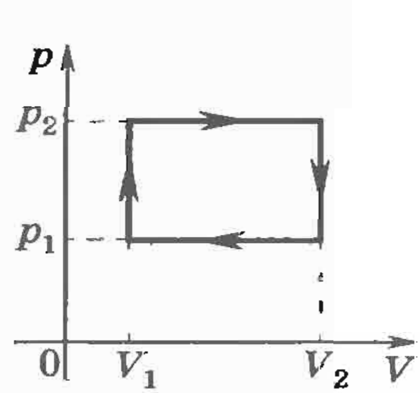


Рис. 59

Ответы

5.1. $Q_1 = 24 \cdot 10^4$ Дж, $Q_2 = 18 \cdot 10^4$ Дж.

5.2. $n = 10$.

5.3. $\eta \approx 12{,}5\%$.

5.4. $t = 10$ мин, $Q_н = 750$ кДж.

5.5. $\varepsilon_н = 12{,}5$, $Q_н = 93{,}75$ кДж.

5.6. $\eta = \frac{4}{23}$, $\eta_{max} = \frac{5}{6}$.

Тема № 6

Уравнение теплового баланса

Второе начало термодинамики устанавливает направление естественных тепловых потоков: тепло переходит от горячего тела к холодному. Или, отходя от бытовых понятий «горячий» и «холодный», сформулируем второе начало термодинамики: тепловая энергия переходит от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой.

Рассмотрим систему тел, изолированную от окружающей среды. Пусть внутри системы происходят только процессы теплообмена. Второе начало термодинамики утверждает, что с течением времени температура тел, входящих в систему, станут одинаковыми и движение тепловых потоков прекратится.

Полная внутренняя энергия тел, входящих в систему, одна и та же для любых двух моментов времени t и t' (система теплоизолирована).

$$U_1' + U_2' + \ldots + U_n' = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$$

$$\text{или } (U_1' - U_1) + (U_2' - U_2) + \ldots + (U_n' - U_n) = 0.$$

Учитывая, что изменение внутренней энергии i-го тела есть количество теплоты, полученное им, можем записать:

$$U_i' - U_i = Q_i;$$

$$\Sigma Q_i = 0; \qquad (1)$$

Это другая форма записи утверждения, что система в целом не обменивается теплом с внешней средой. Разумеется, некоторые члены этого равенства будут отрицательными, что вполне естественно, так как в процессе теплообмена внутри системы какие-то тела не получают, а отдают энергию.

В общем виде задача на уравнение теплового баланса сводится к определению равновесной температуры теплоизолированной системы из нескольких тел, имеющих различную температуру. Задача решается с помощью равенства (1).

Но в явном виде не всегда можно записать это равенство. Дело в том, что в процессе теплообмена возможны фазовые переходы отдельных тел (плавление, отвердевание, испарение, конденсация), и заранее трудно, а часто и невозможно предугадать, будут ли они происходить и в какую сторону.

Для решения задачи придется проводить последовательные ориентировочные расчеты, постепенно выясняя возможность и направление фазовых превращений. Прежде чем пояснить сказанное примером, вспомним основные формулы для количества теплоты, полученного (отданного) при нагревании и фазовых переходах.

На рисунке 60 представлен качественный график зависимости температуры простого кристаллического тела от времени при равномерном нагреве.

Участок *AB* графика — нагревание твердого тела до температуры плавления. Количество теплоты Q, получаемое твердым телом при нагревании, определяется знакомой формулой $Q_н = mc\Delta T$,

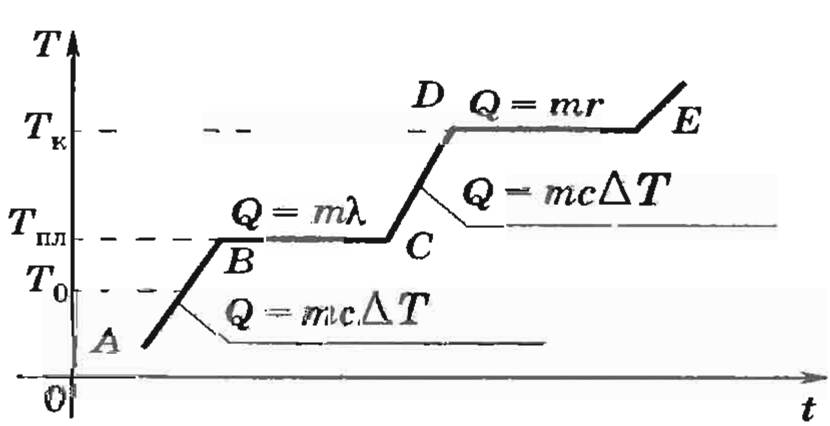


Рис. 60

где m — масса тела, c — удельная теплоемкость вещества, $\Delta T = (T_{\text{конечная}} - T_{\text{начальная}})$ — изменение температуры.

На участке BC температура остается постоянной (температура плавления $T_{\text{пл}}$), несмотря на то что тело продолжает получать тепло. Дело в том, что температура определяется только кинетической энергией молекул, а внутренняя энергия твердого тела включает в себя еще и потенциальную энергию. Сообщаемая энергия тратится на увеличение потенциальной энергии молекул. Разрушается кристаллическая решетка, т. е. конфигурация, соответствующая минимуму потенциальной энергии.

При температуре плавления количество теплоты, поглощаемое телом, определяется формулой

$$Q_{\text{пл}} = m\lambda.$$

Здесь λ — удельная теплота плавления, т. е. количество теплоты, необходимое для плавления единицы массы вещества (одного килограмма в системе СИ) при температуре плавления.

Участок CD соответствует нагреву жидкости, образовавшейся после плавления. Формула для количества теплоты, получаемого веществом в жидком состоянии, аналогична формуле нагрева твердого тела:

$$Q_{\text{н}} = mc\Delta T,$$

с той лишь разницей, что удельные теплоемкости вещества в жидком и твердом состоянии различны.

На участке DE температура снова перестает расти. Жидкость закипает, идет интенсивное испарение, в процессе которого все поступающее количество теплоты снова тратится на увеличение потенциальной энергии молекул (расстояния между молекулами резко возрастают). Если для испарения единицы массы жидкости (1 кг) при температуре кипения требуется r джоулей (удельная теплота парообразования), то для испарения массы m потребуется количество теплоты

$$Q_{\text{исп}} = mr.$$

Далее, образовавшийся пар представляет собой газ, и в силу вступают газовые законы.

Если процесс происходит в обратном порядке (температура падает), то тело будет отдавать тепло. Согласно закону сохранения энергии — точно такое же количество, т. е. приведенные формулы годятся и для подсчета отдаваемой энергии.

ЗАДАЧА

В калориметр, теплоемкостью которого можно пренебречь, поместили $M = 2$ кг льда при температуре $t_1 = -10$ °С. Затем в калориметр влили воду $m = 3$ кг при температуре $t_2 = 40$ °С. Найдите конечную температуру в калориметре. (Удельные теплоемкости воды и льда: $c_в = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг • К), $c_л = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг • К); удельная теплота плавления льда $\lambda = 333 \cdot 10^3$ Дж/кг.)

Дано:

$t_1 = -10$ °С

$t_2 = 40$ °С

$M = 2$ кг

$m = 3$ кг

$t_к$ — ?

Решение

Что может получиться в калориметре в результате теплообмена?

1. Сплошной лед. Лед охладит воду, а затем всю ее заморозит.

2. Лед + вода. Конечное количество льда больше начального. Не вся вода успела замерзнуть к моменту выравнивания температуры. Равновесная температура 0 °С.

3. Лед + вода. Конечное количество льда меньше начального. Не весь лед успел растаять к моменту выравнивания температуры. Равновесная температура 0 °С.

4. Сплошная вода. Вода нагрела лед до нуля градусов, затем растопила его и подогрела образовавшуюся из льда воду до конечной температуры $t_к$.

В каждом случае уравнение теплового баланса свое, и заранее его не напишешь. Приходится производить предварительный расчет.

Если вода охладится до 0 °С, она отдаст

$$Q_1 = mc_{в}\Delta T_1 = 3 \cdot 4{,}19 \cdot 10^3 \cdot 40 = 502{,}8 \cdot 10^3 \text{ (Дж)}.$$

Лед будет получать отдаваемую водой энергию. Чтобы нагреться до температуры плавления (0 °С), ему потребуется

$$Q_2 = Mc_{л}\Delta T_2 = 2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 10 = 42 \cdot 10^3 \text{ (Дж)}.$$

Сравнивая Q_1 и Q_2, убеждаемся, что «запаса» энергии воды с лихвой хватает, чтобы нагреть лед до температуры плавления.

Пока можно сказать, что лед будет таять. Для превращения всей массы льда в воду потребуется еще

$$Q_3 = M\lambda = 2 \cdot 333 \cdot 10^3 = 666 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Видим, что для нагрева льда до температуры 0 °С и его последующего расплавления требуется

$$Q_2 + Q_3 = 42 \cdot 10^3 + 666 \cdot 10^3 = 708 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

А вода при остывании до 0 °С может отдать только $502{,}8 \cdot 10^3$ Дж.

Теперь ясно, что лед растает только частично и в равновесном состоянии в калориметре будет смесь льда и воды. Конечная температура $t_к = 0$ °С.

В принципе задача решена, но теперь мы можем записать уравнение теплового баланса, чтобы узнать, сколько льда растаяло:

$$Mc_{л}(t_к - t_1) + M_x\lambda + mc_{в}(t_к - t_2) = 0.$$

Здесь M_x — масса растаявшего льда.

(Изменение температур выражается одним и тем же числом и в шкале Цельсия, и в абсолютной шкале температур.)

Последнее равенство позволяет вычислить M_x:

$$M_x = \frac{mc_{в}(t_2 - t_к) - Mc_{л}(t_к - t_2)}{\lambda} = \frac{Q_1 - Q_2}{\lambda};$$

$$M_x = \frac{502{,}8 \cdot 10^3 - 42 \cdot 10^3}{333 \cdot 10^3} \approx 1{,}38 \text{ (кг)}.$$

Ответ: $t_к = 0$ °С, $M_x \approx 1{,}38$ кг.

Несколько изменим условие задачи. Пусть в калориметр налили не три килограмма воды, а $m = 6$ кг при той же температуре. Теперь Q_1 стало в два раза больше:

$$Q_1 = 6 \cdot 4{,}19 \cdot 10^3 \cdot 40 = 1005{,}6 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Это число превышает $Q_2 + Q_3$, т. е. «запаса» энергии воды вполне хватает, чтобы подогреть лед до 0 °С и расплавить его. Мало того, образующаяся изо льда вода (а она имеет температуру 0 °С) будет нагреваться до выравнивания температур. Теперь можно написать уравнение теплового баланса:

$$\underbrace{Mc_л(t_{пл} - t_1)}_{\text{Нагревание льда до } t_{пл}} + \underbrace{M\lambda}_{\text{Плавление льда}} + \underbrace{Mc_в(t_к - t_{пл})}_{\text{Нагревание воды, образовавшейся изо льда}} + \underbrace{mc_в(t_к - t_2)}_{\text{Остывание налитой в калориметр воды}} = 0.$$

$$Mc_л(t_{пл} - t_1) + M\lambda - Mc_в t_{пл} - mc_в t_2 = -mc_в t_к - Mc_в t_к;$$

$$t_к c_в(M + m) = Mc_в t_{пл} + mc_в t_2 - Mc_л(t_{пл} - t_1) - M\lambda;$$

$$t_к = \frac{Mc_в t_{пл} + mc_в t_2 - Mc_л(t_{пл} - t_1) - M\lambda}{(M + m)c_в};$$

$$t_к = \frac{6 \cdot 4{,}19 \cdot 10^3 \cdot 40 + 2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^3 \cdot (-10) - 2 \cdot 333 \cdot 10^3}{8 \cdot 4{,}19 \cdot 10^3} = 8{,}9\ (°С).$$

Еще раз вернемся к условию. Пусть масса налитой воды составляет 50 г. Теперь вода, остывая до 0 °С, сможет отдать только $Q_1 = 0{,}05 \cdot 4{,}19 \times 10^3 \cdot 40 = 8{,}38 \cdot 10^3$ (Дж).

Это меньше, чем $Q_2 = 42 \cdot 10^3$ Дж — количество теплоты, необходимое для нагревания льда до температуры плавления. Поскольку температура льда остается меньше температуры плавления, вода будет еще отдавать тепло (превращаясь в лед). При полном затвердевании вода отдаст дополнительно

$$Q_4 = m\lambda = 0{,}05 \cdot 333 \cdot 10^3 = 16{,}65 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

$Q_1 + Q_4$ все еще меньше Q_2. Получающийся из воды лед (его температура 0 °С) будет продолжать отдавать тепло до выравнивания температур. В конечном счете в калориметре образуется сплошной лед, а уравнение теплового баланса приобретает вид:

$$\underset{\text{Нагревание льда}}{Mc_л(t_к - t_1)} + \underset{\text{Остывание воды до } t_{пл}}{mc_в(t_{пл} - t_2)} + \underset{\text{Отвердевание воды}}{m(-\lambda)} + \underset{\text{Остывание льда, полученного из воды, до } t_к}{mc_л(t_к - t_{пл})} = 0;$$

$$Mc_л t_к - Mc_л t_1 + mc_в(t_{пл} - t_2) -$$
$$- m\lambda + mc_л t_к - mc_л t_{пл} = 0;$$

$$t_к = \frac{m\lambda + Mc_л t_1 + mc_л t_{пл} + mc_в(t_2 - t_{пл})}{c_л(M + m)};$$

$$t_к = \frac{0{,}05 \cdot 333 \cdot 10^3 - 2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 10 + 0{,}05 \cdot 4{,}19 \cdot 10^3 \cdot 40}{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 2{,}05} \approx$$
$$\approx -4\ (°C).$$

В калориметре образовался сплошной лед при температуре $t_к = -4$ °C.

Вывод прост: пока не станет ясно, какие фазовые превращения будут происходить в процессе теплообмена, невозможно предугадать заранее вид уравнения теплового баланса.

Упражнения

6.1. В воду массой $M = 500$ г при температуре $t_1 = 15$ °C поместили $m = 120$ г льда при температуре $t_2 = -6$ °C. Какая температура θ установится при достижении теплового равновесия?

6.2. Какое количество теплоты Q надо сообщить куску льда массой $m = 1{,}5$ кг, взятого при температуре $t = -20$ °C, чтобы лед расплавить, а полученную воду нагреть до температуры кипения (при нормальном атмосферном давлении) и испарить? Почему здесь говорится о нормальном давлении?

6.3. В калориметр со льдом массой $m = 100$ г при температуре $T = 263$ К подается насыщенный водяной пар, давление которого равно атмосферному. Какое минимальное количество пара $m_п$ нужно ввести в калориметр, чтобы весь лед растаял? Теплоемкостью калориметра пренебречь.

6.4. В латунном калориметре массой $m_1 = 100$ г находится лед массой $m_2 = 5$ г при температуре $T = 263$ К. В калориметр вливают расплавленный свинец $m_3 = 30$ г при температуре плавления. Что и при какой температуре будет в калориметре после достижения теплового равновесия?

6.5. В колбе при температуре $T = 273$ К находится вода. При выкачивании воздуха из колбы вода в ней замерзла посредством собственного испарения. Какая часть η воды испарилась, если притока тепла извне не было?

6.6. Температура холодной воды, вытекающей из первого крана, $t_х = 10$ °С. Температура горячей воды, вытекающей из второго крана, $t_г = 70$ °С. Сколько воды должно поступить из каждого крана, чтобы температура воды в ванне объемом $V = 150$ л получилась $t_к = 30$ °С? Теплоемкость ванны $C = 90 \cdot 10^3$ Дж/К. Начальная температура ванны $t_в = 20$ °С. Рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь.

6.7. В электрическом чайнике литр воды с начальной температурой $t_1 = 15$ °С закипает (при нормальном атмосферном давлении) за время $\tau = 5$ мин. Какова мощность N нагревательного элемента чайника, если КПД чайника $\eta = 79\%$?

Ответы

6.1. $\theta = 0$ °С.

6.2. $Q \approx 4{,}64 \cdot 10^6$ Дж.

6.3. $m_п \approx 13$ г.

6.4. Вода $m' \approx 4{,}3$ г, лед $m'' \approx 0{,}7$ г, свинец $m''' = 30$ г, $\theta = 0$ °С.

6.5. $\eta \approx 11{,}6\%$.

6.6. $V_х \approx 96{,}4$ л, $V_г \approx 53{,}6$ л.

6.7. $N \approx 1{,}5$ кВт.

Тема № 7

Насыщенный пар. Влажность

Концентрация молекул воды, находящейся в газообразном состоянии, при заданной температуре (ниже критической) имеет верхний предел. Попытка превысить этот предел в обычных условиях приводит к конденсации лишних молекул. Пар в состоянии предельной концентрации называют *насыщенным*. Иными словами, при насыщении в закрытом сосуде, частично заполненном водой, устанавливается равновесие: количество быстрых молекул, покидающих жидкость, равно количеству молекул, возвращающихся в жидкость. Предельное парциальное давление паров воды зависит только от температуры и приведено в соответствующих таблицах. Полное давление воздуха над жидкостью создается всеми компонентами воздуха (азот, кислород и т. д.).

Если в цилиндре с водой медленно поднимать поршень, лежащий непосредственно на воде (температуру T системы при этом сохраняем постоянной), то пространство между поршнем и водой заполнится чистым насыщенным водяным паром. При этом давление под поршнем будет постоянным, равным давлению насыщенного водяного пара при температуре T независимо от положения поршня. Поршень можно поднимать или опускать, но концентрация молекул под ним, а значит, и давление будет оставаться постоянными, просто при поднятии поршня из воды поступают «недостающие» молекулы, а при опускании «лишние» молекулы

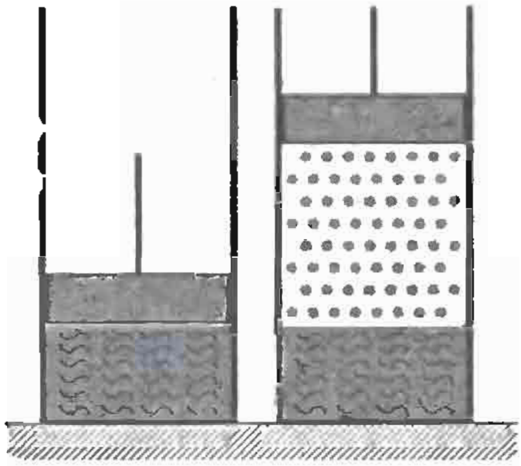


Рис. 61

будут возвращаться в воду. Если шток поршня отпустить, он опустится до самой воды благодаря наружному атмосферному давлению и весу поршня.

Все видели, как бурлит при кипении вода. В жидкости образуются пузырьки, которые поднимаются на поверхность. Внутри пузырька находится насыщенный водяной пар. И если такой пузырек не пропадает, «не схлопывается», поднимаясь наверх, это означает, что давление внутри пузырька равно наружному плюс давление столба жидкости ρgh, где h — глубина, на которой находится пузырек. А в непосредственной близости к поверхности давление внутри пузырька равно наружному.

Итак, можно считать, что, как только давление насыщенного пара становится равным наружному, вода закипает. Так, если в обычных условиях вода закипает при 100 °C, это означает, что давление насыщенного водяного пара при температуре кипения равно $p_н = p_а = 760$ мм рт. ст.

В воздухе всегда есть какое-то количество молекул воды. Эти молекулы создают свое парциальное давление (давление паров воды $p_{п.\,в}$). При каждой температуре T существует свое предельное давление паров (насыщение) $p_н$. Отношение $p_{п.\,в}/p_н$ называется относительной влажностью воздуха f при температуре T. Обычно это отношение выражают в процентах:

$$f = \frac{p_{п.в}}{p_н} \cdot 100\%.$$

Иногда бывает удобно пользоваться понятием *абсолютной влажности*. Это просто плотность водяного пара, т. е. масса водяных паров в одном кубическом метре.

ЗАДАЧА

Дневная температура равна $t_1 = 25$ °С. Ночью при температуре $t_2 = 10$ °С выпала роса (точка росы). Какой была относительная влажность f днем?

Дано:
$t_1 = 25$ °С
$t_2 = 10$ °С
$p_{н_1} = 1{,}23 \cdot 10^3$ Па
$p_{н_2} = 3{,}17 \cdot 10^3$ Па

f — ?

Решение

Явление выпадения росы — это конденсация избытка паров воды (разумеется, когда пар становится насыщенным).

Если считать воздух вблизи поверхности земли идеальным газом, то его «водяная» составляющая тоже будет описываться основным уравнением кинетической теории. Запишем уравнения «дневного» (1) и «ночного» (2) состояний водяного пара:

$$p_1 = n_1 k T_1, \qquad (1)$$

$$p_2 = n_2 k T_2. \qquad (2)$$

Корректное решение задачи зависит от правильного выбора одного из двух утверждений:

1) до момента появления росы концентрация молекул воды не меняется;

2) до момента появления росы давление паров воды не меняется.

Если справедливо первое утверждение, то

$$f_1 p_{н_2} = nkT_1,$$

$$p_{н_1} = nkT_2.$$

Здесь $p_{н_2}$ и $p_{н_1}$ — давление насыщенных паров воды при температурах 25 и 10 °С. Поделив одно уравнение на другое, находим

$$f_1 = \frac{p_{н_1} T_1}{p_{н_2} T_2}, \text{ или в процентах } f_1 = \frac{p_{н_1} T_1}{p_{н_2} T_2} \cdot 100\%.$$

А если справедлив второй тезис, то

$$f_2 \cdot p_{н_2} = p_{н_1},$$

$$\text{и } f_2 = \frac{p_{н_1}}{p_{н_2}}, \text{ или в процентах } f_2 = \frac{p_{н_1}}{p_{н_2}} \cdot 100\%.$$

Хотя числовые значения $f_1 = 39{,}6\%$ и $f_2 = 38{,}8\%$ не слишком отличаются друг от друга, имеет смысл разобраться, какое из решений следует считать правильным. На первый взгляд утверждение, что число молекул в единице объема (концентрация) не меняется до начала конденсации, кажется естественным. Но это означает, что с понижением температуры падает скорость молекул (и не только воды), что неизбежно приводит к понижению атмосферного давления ночью. В устойчивых погодных условиях барометр не отмечает ночных колебаний атмосферного давления. Это становится понятным, если вспомнить, что вес атмосферного столба не зависит от времени суток. Просто при понижении температуры уменьшается его высота — «атмосфера оседает». При неизменном числе молекул это означает, что растет число молекул (в том числе и воды) в единице объема. Таким образом, первое утверждение неверно. Правильным является второй ответ.

Ответ: $f_2 = 38{,}8\%$.

При решении задач на влажность важно помнить, что давление паров воды — это только парциальное давление. Представим себе, что молекулы воды выкрашены в синий цвет, а остальные молекулы воздуха — в красный. Полное давление воздуха $p_{воздуха}$ складывается из:

$$p_{воздуха} = p_{синих} + p_{красных}.$$

«Красные» молекулы в широких пределах температур и давлений ведут себя как идеальный газ. «Синие» молекулы тоже можно считать идеальным газом, но только до полного насыщения. Будем сжимать воздух изотермически. Тогда давление «синих» молекул можно представить качественным графиком, представленным на рисунке 62.

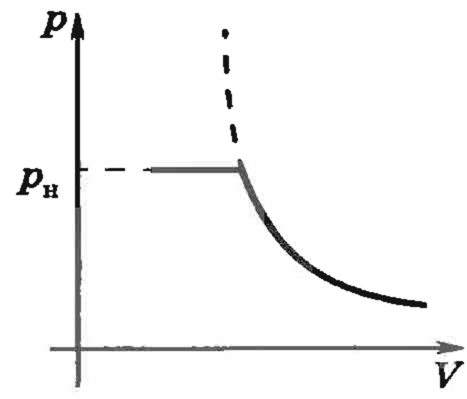


Рис. 62

Поначалу давление паров воды подчиняется уравнению Менделеева—Клапейрона, а при достижении насыщения остается постоянным.

ЗАДАЧА

В закрытый сосуд объемом 10 л с сухим воздухом при давлении $p_1 = 10^5$ Па и температуре $t_1 = 0$ °C наливают воду массой $m = 30$ г, затем содержимое нагревают до 100 °C. Определите конечное давление в сосуде.

Дано:	*Решение*
$V = 10$ л $p_1 = 10^5$ Па $t_1 = 0$ °C $t_2 = 100$ °C $m = 30$ г ——— $p_к$ — ?	Давление сухого воздуха при нагревании увеличивается по закону Шарля $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ ($V = \text{const}$); $p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1}$.

Мы не знаем, вся ли вода испарится или для насыщения требуется меньшее количество воды при 100 °C. Но нам никто не мешает это проверить. Если вся вода перейдет в газообразное состояние, то водяной пар создаст давление:

$$p' = \frac{m}{MV} \cdot RT;$$

$$p' = \frac{30}{18 \cdot 0{,}01} \cdot 8{,}31 \cdot 373 \approx 5{,}17 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

Давление насыщенного водяного пара при температуре $T = 373$ К $p_{н_1} = 10^5$ Па.

Неравенство $p' > p_{н_1}$ (чего быть не может) означает, что испарится не вся вода и давление водяного пара в сосуде достигнет только $p_н = 10^5$ Па.

Полное давление в сосуде после нагревания равно

$$p_к = p_2 + p_н = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} + p_н;$$

$$p \approx 2{,}4 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

Ответ: $p_к \approx 2{,}4 \cdot 10^5$ Па.

Если бы воды было меньше (недостаточно для насыщения), скажем $m = 5$ г, то $p' = \frac{m}{MV} \cdot RT$;

$$p' = \frac{5}{18 \cdot 0{,}01} \cdot 8{,}31 \cdot 373 \approx 0{,}86 \cdot 10^5 \text{ (Па)}$$

и полное давление в сосуде после нагревания было бы равным

$$p_к = p_2 + p' \approx 1{,}86 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Упражнения

7.1. Цилиндр с водой закрыт поршнем, прилегающим к поверхности жидкости. Площадь поршня $S = 10$ см^2. Хватит ли у человека сил, чтобы оторвать поршень от воды?

7.2. Насыщенный водяной пар при 100 °C занимает некоторый объем. Каким будет давление водяного пара, если, не меняя температуры, уменьшить объем в три раза?

7.3. Когда и во сколько раз абсолютная влажность ρ воздуха больше: в ноябре при $t_1 = 0$ °C и относительной влажности $f_1 = 95\%$ или в июле при $t_2 = 35$ °C и относительной влажности $f_2 = 40\%$?

Указание. Давление насыщенных паров воды при соответствующих температурах найдите, используя зависимость, приведенную на с. 94.

7.4. Определите абсолютную ρ и относительную f влажность воздуха при температуре $t = 20$ °C, если его точка росы $t_р = 6$ °C.

7.5. В комнате объемом $V = 130$ м^3 при температуре $t = 20$ °C относительная влажность воздуха составляет $f = 50\%$. Определите массу m водяных паров в комнате.

7.6. Две комнаты разделены закрытой дверью. Температура в комнатах одинаковая. В первой комнате объемом $V_1 = 80$ м^3 относительная влажность $f_1 = 30\%$, во второй комнате объемом $V_2 = 120$ м^3 относительная влажность $f_2 = 60\%$. Какая относительная влажность f установится в помещениях, если дверь открыть?

7.7. Две комнаты разделены закрытой дверью. В первой комнате объемом $V_1 = 80$ м^3 температура $t_1 = 15$ °C, относительная влажность $f_1 = 30\%$, во второй комнате объемом $V_2 = 120$ м^3 температура $t_2 = 30$ °C, относительная влажность $f_2 = 60\%$. Атмосферное давление в обеих комнатах одинаковое. Какая относительная влажность f установится в помещениях, если дверь открыть?

Указание. Сначала найдите конечную температуру воздуха в комнатах, затем по таблице — соответствующее ей давление насыщенного пара.

7.8. В закрытом помещении объемом $V = 100$ м^3 при температуре $t = 20$ °C относительная влажность воздуха $f_1 = 30\%$. Сколько килограммов воды надо испарить, чтобы при той же температуре поднять влажность до $f_2 = 60\%$?

7.9. В закрытом помещении объемом $V = 100$ м^3 при температуре $t_1 = 20$ °C относительная влажность воздуха $f_1 = 30\%$. Сколько килограммов воды надо испарить, чтобы поднять влажность до $f_2 = 60\%$ при температуре $t_2 = 30$ °C?

7.10. Трубку длиной $l = 60$ см, запаянную с одного конца, открытым концом вертикально погружают в ртуть. На какую глубину x нужно погрузить нижний конец трубки, чтобы в ней выпала роса? Температура трубки не меняется, атмосферное давление нормальное, влажность атмосферного воздуха $f = 80\%$. Принять $g = 10$ м/с^2.

7.11. В комнате при температуре $t_1 = 25$ °C относительная влажность $f_1 = 12\%$. Какой станет относительная влажность f_2, если температуру в комнате постепенно понизить до $t_2 = 14$ °C? Считать, что наружный воздух, поступающий при этом в помещение, абсолютно сухой.

7.12. Чему равна относительная влажность воздуха, заполняющего баллон емкостью $V = 700$ л, при температуре $t = 24$ °C, если до полного насыщения пара понадобилось испарить в этот объем воду массой $m = 6{,}2$ г?

Ответы

7.1. Хватит. $F \approx 100$ Н.
7.2. Давление насыщенного пара не изменится.
7.3. $\rho_2 = 3{,}5\,\rho_1$.
7.4. $\rho \approx 6{,}9 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, $f \approx 40\%$.
7.5. $m = 1{,}12$ кг.
7.6. $f = \dfrac{f_1V_1 + f_2V_2}{V_1 + V_2} = 48\%$.
7.7. $f = 57\%$.
7.8. $\Delta m \approx 0{,}52$ кг.
7.9. $\Delta m \approx 1{,}3$ кг.
7.10. $x \approx 30$ см.
7.11. $f_2 \approx 23\%$.
7.12. $f \approx 60\%$.

Тема № 8

Поверхностное натяжение

Можно считать, что молекула жидкости, находящаяся на поверхности (на границе раздела жидкость — газ), испытывает силовое воздействие только со стороны жидкости. Расстояния от такой молекулы до молекул газа (в среднем) достаточно велики, так что силами взаимодействия с ними можно пренебречь. Эта асимметрия определяет особое поведение молекул на поверхности жидкости.

Прежде всего, напомним, что наугад выбранная молекула жидкости отталкивается ближайшими соседями и притягивается всеми остальными. На рисунке 63 изображены силы, действующие на пограничную молекулу (серый кружок).

Результирующая сил притяжения направлена в глубь жидкости (светлая стрелка). Она мало меняется, несмотря на хаотическое движение молекул, так как обусловлена воздействием достаточно большого числа молекул (белые кружки). Со стороны ближайших молекул (черные кружки) действуют силы отталкивания (стрелки в сторону газа). Результирующая этих сил (серая стрелка вверх) уравновешивает силу притяжения со стороны жидкости. Поэтому пограничная молекула находится в равновесии. Но это равновесие неустойчиво. Это легко понять, если учесть, что число

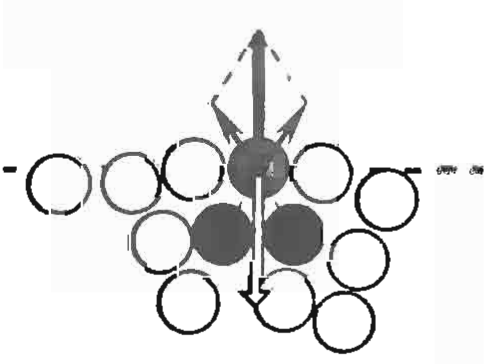


Рис. 63

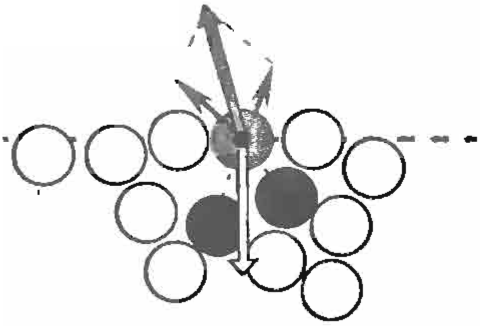


Рис. 64

отталкивающих молекул невелико (2—3). Хаотическое смещение этих молекул меняет величины и направления сил отталкивания. Это объясняет, почему результирующая сил отталкивания часто становится меньше силы притяжения (рис. 64).

Таким образом, молекула на поверхности поддерживается непродолжительное время, а затем уходит в глубь жидкости. Другими словами, поверхность жидкости имеет тенденцию к сокращению. Разумеется, если площадь поверхности жидкости поддерживается постоянной, то и число молекул поверхности будет неизменным за счет спонтанного выталкивания молекул из глубины в случайные разрежения на поверхности. Но если устранить сторонние воздействия на некоторый объем жидкости, то она принимает форму с наименьшей площадью поверхности. Так, капля воды в условиях невесомости принимает форму шара (при фиксированном объеме у шара наименьшая площадь поверхности). Создается впечатление, что поверхностный слой молекул «стягивает» жидкость.

Правда, это «стягивание» не похоже на действие упругой пленки, растяжение которой пропорционально приложенной силе. Следующий опыт поясняет сказанное.

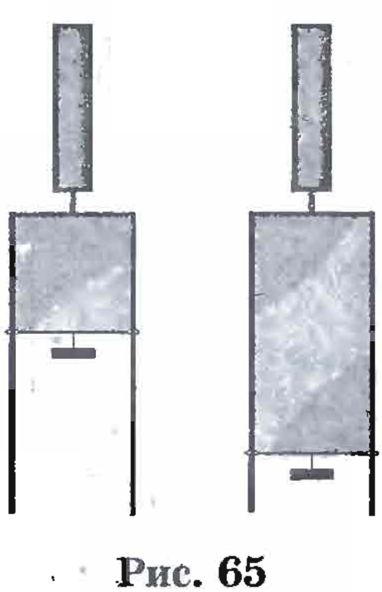


Рис. 65

П-образную рамку со скользящей перемычкой опускают в мыльную воду, чтобы на ней (после вытаскивания) осталась мыльная пленка. Если перемычка достаточно легкая, мыльная пленка будет подтягивать ее вверх. Подвешивая разные грузы к перемычке, можно добиться равновесия (рис. 65). Если перемычку с таким грузом оттянуть вниз, увеличив площадь пленки в два раза, а затем отпустить, равновесие сохранится. В то время как для аналогичного удержания в равновесии резиновой пленки потребовался бы двойной груз. Это можно объяснить следующим образом. Число поверхностных молекул пополняется из внутренних слоев жидкости, и среднее расстояние между молекулами поверхности остается постоянным. Но стоит увеличить ширину рамки (рис. 66), скажем, в три раза, и для равновесия перемычки потребуется уже тройной груз.

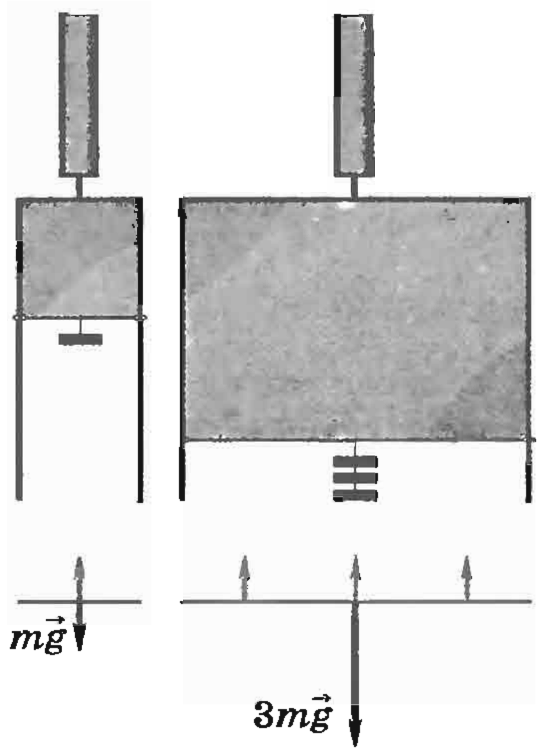


Рис. 66

В местах контакта с перемычкой поверхностные молекулы действуют на нее с силой F, пропорциональной длине перемычки l (см. рис. 66):

$$F = \sigma l.$$

Коэффициент пропорциональности σ называют *поверхностным натяжением* или *коэффициентом поверхностного натяжения*.

Физический смысл поверхностного натяжения можно трактовать как силу, действующую на единицу возможной длины разрыва жидкости. Эта сила действует по касательной к поверхности жидкости и перпендикулярна выделенной линии.

Медленно (чтобы не учитывать кинетическую энергию) оттянем перемычку вниз на расстояние x (рис. 67). Рука совершит работу

$$A = Fx.$$

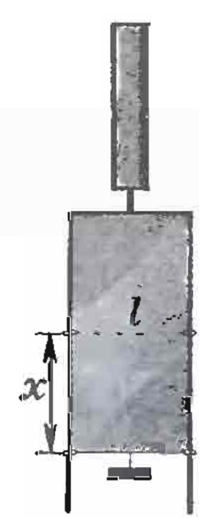


Рис. 67

Приложенная сила при таком движении равна удвоенной силе поверхностного натяжения. Это связано с тем, что пленка имеет две поверхности, каждая из которых прилегает к перемычке:

$$A = 2\sigma lx = \sigma \Delta S,$$

где ΔS — суммарное увеличение площади пленки (с обеих сторон). Растраченная рукой энергия перешла, очевидно, в потенциальную энергию мыльной пленки, а точнее, в дополнительную потенциальную энергию ΔU молекул, составляющих ее поверхность (поверхностная энергия):

$$\Delta U = \sigma \Delta S.$$

Из этой формулы следует еще одна трактовка поверхностного натяжения как потенциальной энергии единицы площади свободной поверхности жидкости.

Маленькая капелька жидкости на горизонтальной поверхности может вести себя двояко: либо собираться в форме приплюснутой сферы, урезанной снизу, либо растекаться (рис. 68).

В первом случае жидкость не смачивает поверхность, во втором — смачивает. В первом случае молекулы жидкости притягиваются друг к другу сильнее, чем к молекулам поверхности, во втором — притяжение молекул «жидкость—поверхность» сильнее притяжения молекул «жидкость—жидкость».

Явление смачивания вкупе с поверхностным натяжением объясняет поведение жидкости в капиллярах и между поверхностями с малым зазором. Чтобы не заучивать формулы, получаемые при рассмотрении поведения жидкости в капилля-

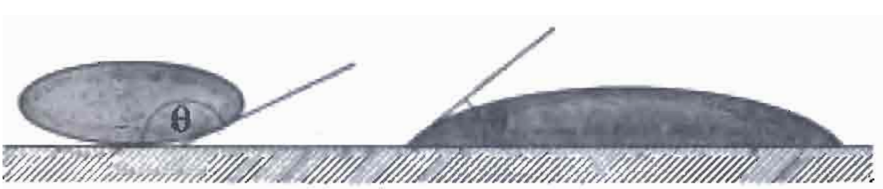


Рис. 68

рах, будем получать их в процессе решения задач. Гораздо полезней усвоить алгоритм действий.

ЗАДАЧА

Открытую с обоих концов обезжиренную стеклянную трубочку с внутренним диаметром d = 1 мм опускают вертикально в воду (рис. 69). При этом наблюдается поднятие воды в капилляре над свободной поверхностью воды в сосуде. Определите высоту h столба воды в капилляре. Принять g = 10 м/с^2.

Дано:

$d = 1$ мм

$\sigma = 0{,}073$ Н/м

---

h — ?

Решение

Обратите внимание на то, что в справочных таблицах приводятся значения поверхностного натяжения чистой воды. Это надо понимать так, что разного рода примеси могут заметно менять поверхностное натяжение. Указание на температуру говорит о зависимости σ от температуры. Это в условии не оговаривалось. Но в подобных задачах часто «по умолчанию» подразумевается комнатная температура и чистая жидкость, что позволяет пользоваться табличными значениями. Как понимать слова «обезжиренная поверхность»? Дело в том, что смачивание бывает полным (или абсолютным) и неполным. Степень смачивания характеризуется краевым углом θ (рис. 70), образованным стенкой сосуда и поверхностью жидкости в крайней точке контакта (угол всегда отсчитывается так, чтобы жидкость была внутри угла): θ > 90° — несмачиваемая поверхность, θ < 90° — смачиваемая поверхность, $\theta = 0$ — абсолютно смачиваемая поверхность.

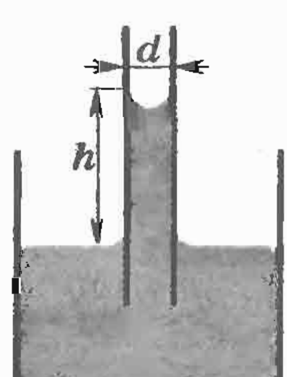


Рис. 69

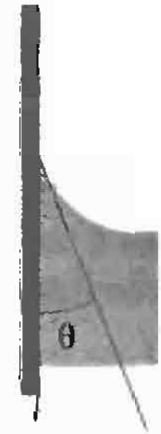


Рис. 70

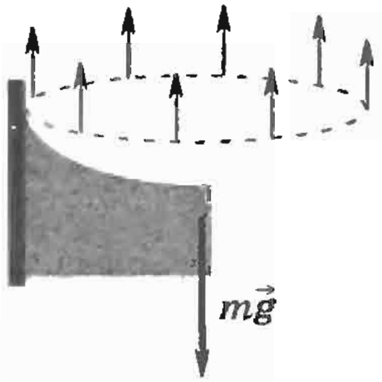


Рис. 71

Слова «обезжиренная поверхность» означают смачивание, а отсутствие указания на краевой угол подразумевает полное смачивание.

Между молекулами воды и стекла сила притяжения больше, чем взаимопритяжение молекул воды. Это приводит к тому, что молекула воды, приблизившись к стеклу, «прилипает» к нему и подтягивает за собой соседние. Таким образом, вода, «карабкаясь» по стенке капилляра, поднимает за собой весь столб жидкости. Процесс продолжается, пока сила поверхностного натяжения, действующая вверх по линии крайнего контакта со стенками, не уравновесится весом столба жидкости внутри капилляра (рис. 71).

$$\pi d \cdot \sigma = mg;$$

$$\pi d \cdot \sigma = \rho \frac{\pi d^2}{4} hg;$$

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g d};$$

$$h \approx \frac{4 \cdot 0{,}073}{1000 \cdot 10 \cdot 0{,}001} \approx 0{,}029 \text{ (м)}.$$

Ответ: $h \approx 2{,}9$ см.

В случае абсолютно несмачиваемой поверхности уровень жидкости в капилляре устанавливается ниже уровня свободной поверхности, а поверхность жидкости в капилляре становится выпуклым мениском. Сила поверхностного натяжения по границе контакта жидкость—стенка направлена вниз и препятствует проникновению воды в капилляр (рис. 72). Теперь она уравновешивает силу давления внешнего столба жидкости, но арифметика остается прежней:

$$\pi d \cdot \sigma = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \rho h g;$$

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g d}.$$

Или, отсчитывая уровень жидкости в капилляре от уровня свободной поверхности жидкости:

$$h = \pm\frac{4\sigma}{\rho g d}.$$

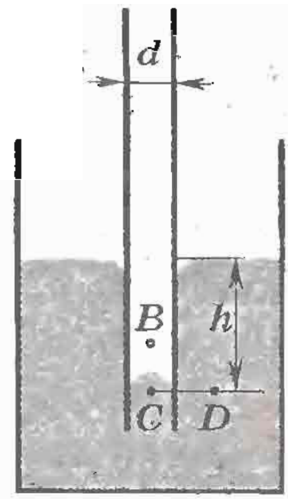


Рис. 72

Знак «+» соответствует смачиванию и подъему жидкости, знак «−» — несмачиванию и опусканию жидкости в капилляре.

Опускание (или поднятие) жидкости в капилляре означает, что поверхностное натяжение искривленной поверхности жидкости создает перепад давлений. Действительно, давление под мениском внутри жидкости в точке C (см. рис. 72) равно давлению $p_н$ (наружное) в точке B плюс перепад Δp_{BC}:

$$p_C = p_н + \Delta p_{BC}.$$

Давление в точке D, как обычно,

$$p_D = p_н + \rho g h.$$

Точки C и D находятся на одном уровне, поэтому

$$p_C = p_D;$$

$$p_н + \Delta p_{BC} = p_н + \rho g h;$$

$$\Delta p_{BC} = \rho g h.$$

Подставляя вместо h полученное в задаче выражение, находим формулу для перепада давлений, создаваемого искривленной поверхностью жидкости:

$$\Delta p_{BC} = \rho g\left(\frac{4\sigma}{\rho g d}\right) = \frac{2\sigma}{r}.$$

Здесь r — внутренний радиус капилляра (он же радиус сферической поверхности мениска жидкости). Полезно повторить ход рассуждений в случае поднятия жидкости и убедиться, что вогнутый мениск создает отрицательный перепад давлений.

ЗАДАЧА

На международной космической станции в воздухе свободно парит капелька воды радиусом $R = 10^{-2}$ мм. Найдите давление p внутри капельки, если давление воздуха на станции равно $p_а$ = = 750 мм рт. ст.

Дано:

$R = 10^{-2}$ мм

$p_а = 750$ мм рт. ст.

$\sigma = 0{,}073$ Н/м

---

p — ?

Решение

В принципе предыдущие рассуждения позволяют сразу написать ответ:

$$p = p_а + \frac{2\sigma}{R}.$$

Но мы проведем другое решение, чтобы познакомиться еще с одним алгоритмом.

Сначала небольшой, но полезный мысленный эксперимент. Представим себе некоторое тело в форме полушара на подвижной подставке (рис. 73). Еще никто никогда не видел, чтобы такая установка поехала бы самостоятельно вправо или влево. Это означает, что «ершик» сил давления, действующих на сферическую поверхность полушара справа, уравновешивается силой давления на плоскую поверхность слева.

$$F_{\text{давл. справа}} = p_а \cdot \pi R^2.$$

А теперь перейдем к капельке. Поверхностное натяжение, «стягивая» капельку, придает ей форму сферы и создает внутри нее избыточное давление.

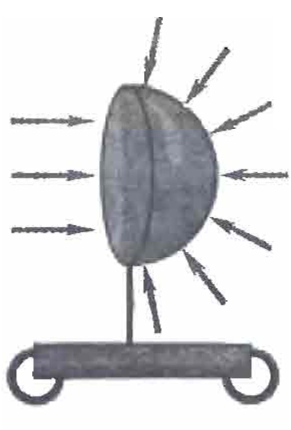


Рис. 73

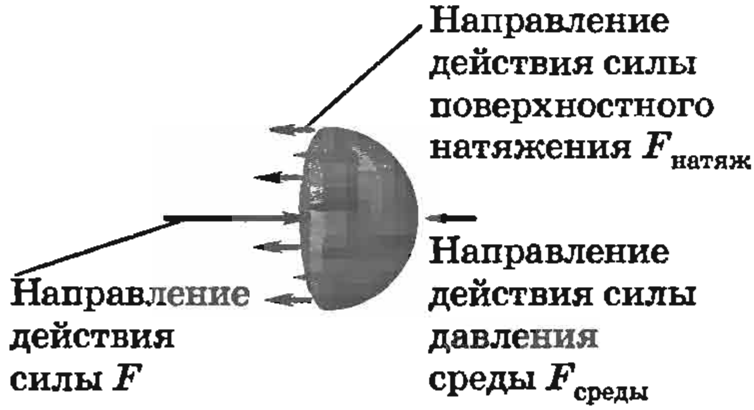


Рис. 74

Мысленно разрежем капельку пополам (рис. 74). Равновесие половинки обеспечивается тремя силами: $F_{среды}$, силой поверхностного натяжения по границе разреза $F_{натяж}$ и силой давления F внутри капли, действующей на сечение.

$$F = F_{среды} + F_{натяж}.$$

Заменяя силы известными выражениями:

$$p \cdot \pi R^2 = p_а \cdot \pi R^2 + \sigma \cdot 2\pi R,$$

находим, как и ожидалось:

$$p = p_а + \frac{2\sigma}{R}.$$

Производим вычисления:

$$p = 750 \cdot 133 + \frac{2 \cdot 0{,}073}{10^{-5}} \approx 1{,}14 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

Ответ: $p \approx 1{,}14 \cdot 10^5$ Па.

Разрезать каплю пополам было вовсе необязательно. Можно было бы (мысленно) отсечь плоскостью произвольный сегмент и сравнить давления в точках A и B, снаружи и внутри капли (рис. 75).

Равновесие этого сегмента обеспечивается теми же силами, что и в задаче, только силы поверхностного натяжения, приложенные к разным участкам пограничной окружности, направлены по об-

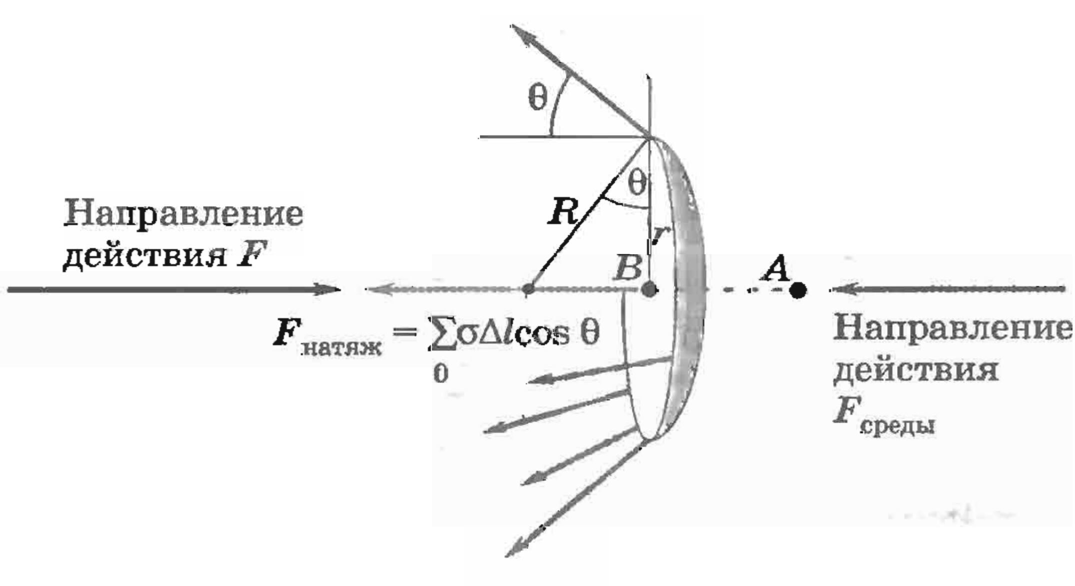


Рис. 75

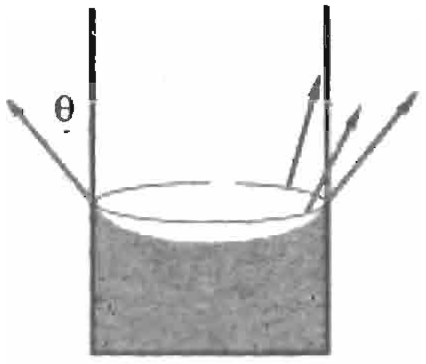


Рис. 76

разующим конуса, как показано на рисунке 75, и результирующую подсчитать чуть сложнее. Она направлена по оси конуса и равна сумме проекций сил поверхностного натяжения от отдельных участков на эту ось.

$$F_{натяж} = \sum_0 \sigma \Delta l \cos\theta.$$

Далее по уже пройденному пути:

$$p \cdot \pi r^2 = p_а \cdot \pi r^2 + \sum_0 \sigma \Delta l \cos\theta;$$

$$p \cdot \pi r^2 = p_а \cdot \pi r^2 + \sigma \cos\alpha \sum_0 \Delta l;$$

$$p \cdot \pi r^2 = p_а \cdot \pi r^2 + \sigma \cos\theta \cdot 2\pi r.$$

Учитывая, что $\cos\alpha = \frac{r}{R}$, получаем

$$p = p_а + \frac{2\sigma}{R},$$

что и было получено ранее.

Этот расчет подсказывает, как найти высоту поднятия (или опускания) жидкости в капилляре (рис. 76), когда краевой угол θ отличен от нуля. Суммируя векторы сил поверхностного натяжения от отдельных участков граничной линии, как это делалось в предыдущем примере, получаем

$$\pi d \sigma \cos\theta = mg;$$

$$h = \frac{4\sigma\cos\theta}{\rho g d}.$$

Поверхностное натяжение σ некоторых жидкостей (20 °С)

Вещество	$\sigma, \frac{Н}{м}$
Вода	0,072
Ртуть	0,470
Бензин	0,029
Мыльный раствор	0,045
Спирт	0,022

Упражнения

8.1. Два сосуда — первый с водой, второй с ртутью — помещены рядом, причем свободные поверхности обеих жидкостей находятся на одном уровне. Две стеклянные, достаточно длинные капиллярные трубочки с одинаковыми внутренними диаметрами $d = 0{,}5$ мм погружают вертикально одну в воду (полное смачивание), другую в ртуть (абсолютное несмачивание). Какова разность уровней жидкостей Δh внутри капилляров? Принять $g = 10$ м/с^2.

8.2. Колена U-образной капиллярной стеклянной трубки имеют разные внутренние диаметры: $d_1 = 0{,}1$ мм и $d_2 = 0{,}2$ мм. В трубку вводят некоторое количество бензина (полное смачивание). Какова будет разность уровней жидкости в коленах трубки? Принять $g = 10$ м/с^2.

8.3. Найдите избыточное давление Δp внутри мыльного пузырька диаметром $d = 4$ мм.

8.4. Найдите давление p внутри пузырька воздуха диаметром d, находящегося в воде на глубине h. Атмосферное давление $p_а$.

8.5. Стеклянную капиллярную вертикальную трубку длиной $l = 100$ см, запаянную сверху, открытым концом приводят в соприкосновение с поверхностью воды (полное смачивание), в результате чего жидкость поднимается по капилляру на высоту $h = 2{,}5$ см. Каков внутренний диаметр трубки, если атмосферное давление $p_а = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, $g = 10$ м/с^2?

8.6. С помощью пипетки надо накапать 25 капель спиртового раствора лекарства. Какова доза лекарства D, если диаметр отверстия пипетки $d = 0{,}5$ мм, а диаметр шейки капли в момент отрыва $d' = 0{,}8d$? Принять $g = 10$ м/с^2.

8.7. В воду погружают частично две вертикальные, параллельные друг другу пластины. Зазор между пластинами $d = 0{,}1$ мм. На какую высоту h поднимется вода в зазоре при полном смачивании? Принять $g = 10$ м/с^2.

8.8. С какой силой F будут притягиваться две вертикальные, параллельные стеклянные пластины, если их частично погрузить в воду? Ширина пластин l, зазор между пластинами d, поверхностное натяжение воды σ. (Вода между пластинами не поднимается до верхних краев пластин.)

8.9. На горизонтально закрепленную стеклянную пластину капнули капельку воды. На пластину сверху положили другую стеклянную пластину. Между пластинами установился зазор $d = 0{,}01$ мм. Дальнейшего уменьшения зазора не происходит из-за микросоринок, попавших между стеклами. Площадь водяного пятна между пластинами $S = 10$ см^2. Какую перпендикулярную пластинам силу F следует приложить к верхней пластине, чтобы оторвать ее от нижней? Масса верхней пластины $m = 200$ г, $g = 10$ м/с^2.

8.10. Найдите поверхностную энергию U:

а) капли ртути диаметром $d = 1$ мм;

б) мыльного пузыря диаметром $D = 1$ см.

8.11. Найдите приращение поверхностной энергии ΔU при слиянии трех капелек ртути с диаметрами $d_1 = 1{,}5$ мм, $d_2 = 1{,}0$ мм и $d_3 = 0{,}5$ мм.

Ответы

8.1. $\Delta h \approx 8{,}5$ см.

8.2. $\Delta h = \frac{4\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) \approx 8{,}3$ см.

8.3. $\Delta p = 90$ Па.

8.4. $p = p_а + \rho g h + \dfrac{4\sigma}{d}$.

8.5. $d = \dfrac{4\sigma}{p_а \dfrac{h}{l - h} + \rho g h} \approx 0{,}1$ мм.

8.6. $D \approx 17{,}3$ мг.

8.7. $h = 14{,}4$ мм.

8.8. $F = \dfrac{2l\sigma^2}{\rho g d^2}$.

8.9. $F = 16{,}4$ Н.

8.10. $U_{рт} \approx 1{,}48 \cdot 10^{-6}$ Дж, $U_{м.\,п} \approx 28{,}3 \cdot 10^{-6}$ Дж.

8.11. $\Delta U \approx -1{,}26 \cdot 10^{-6}$ Дж.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Период	Ряд	ГРУППЫ I	II	III	IV
I	1	(H)			
II	2	Li 3 6,939 Литий	Be 4 9,0122 Бериллий	B 5 10,811 Бор	C 6 12,01115 Углерод
III	3	Na 11 22,9898 Натрий	Mg 12 24,305 Магний	Al 13 26,9815 Алюминий	Si 14 28,086 Кремний
IV	4	K 19 39,102 Калий	Ca 20 40,08 Кальций	21 44,956 Sc Скандий	22 47,90 Ti Титан
	5	29 63,546 Cu Медь	30 65,37 Zn Цинк	Ga 31 69,72 Галлий	Ge 32 72,59 Германий
V	6	Rb 37 85,47 Рубидий	Sr 38 87,62 Стронций	39 88,905 Y Иттрий	40 91,22 Zr Цирконий
	7	47 107,868 Ag Серебро	48 112,40 Cd Кадмий	In 49 114,82 Индий	Sn 50 118,69 Олово
VI	8	Cs 55 132,905 Цезий	Ba 56 137,34 Барий	57 138,91 La* Лантан	72 178,49 Hf Гафний
	9	79 196,967 Au Золото	80 200,59 Hg Ртуть	Tl 81 204,37 Таллий	Pb 82 207,19 Свинец
VII	10	Fr 87 [223] Франций	Ra 88 [226] Радий	89 [227] Ac** Актиний	104 [261] Rf Резерфордий

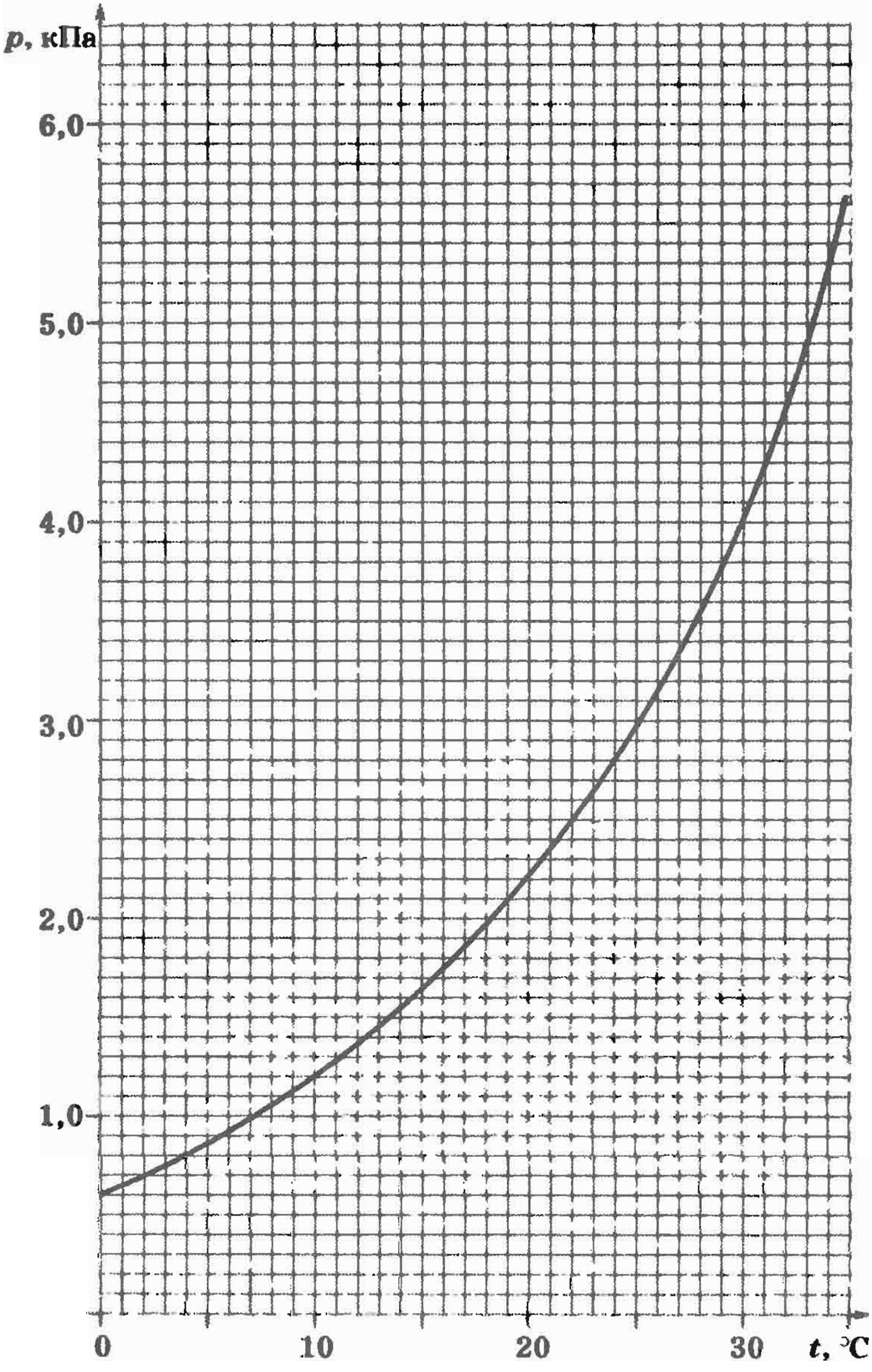
Ланта-ноиды*	58 140,12 Ce Церий	59 140,907 Pr Празеодим	60 144,24 Nd Неодим	61 [147]* Pm Прометий	62 150,35 Sm Самарий	63 151,96 Eu Европий	64 157,25 Gd Гадолиний
Акти-ноиды**	90 232,038 Th Торий	91 [231] Pa Протактиний	92 238,03 U Уран	93 [237] Np Нептуний	94 [244] Pu Плутоний	95 [243] Am Америций	96 [247] Cm Кюрий

ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

Э Л Е М Е Н Т О В					
V	VI	VII	VIII		
		H 1 1,00797 Водород	He 2 4,0026 Гелий	Обозначение элемента	Атомный номер
N 7 14,0067 Азот	O 8 15,9994 Кислород	F 9 18,9984 Фтор	Ne 10 20,179 Неон		Li 3 6,939 Литий
P 15 30,9738 Фосфор	S 16 32,064 Сера	Cl 17 35,453 Хлор	Ar 18 39,948 Аргон		Относительная атомная масса
23 V 50,942 Ванадий	24 Cr 51,996 Хром	25 Mn 54,9380 Марганец	26 Fe 55,847 Железо	27 Co 58,9330 Кобальт	28 Ni 58,71 Никель
As 33 74,9216 Мышьяк	Se 34 78,96 Селен	Br 35 79,904 Бром	Kr 36 83,80 Криптон		
41 Nb 92,906 Ниобий	42 Mo 95,94 Молибден	43 Tc [99] Технеций	44 Ru 101,07 Рутений	45 Rh 102,905 Родий	46 Pd 106,4 Палладий
Sb 51 121,75 Сурьма	Te 52 127,60 Теллур	I 53 126,9044 Иод	Xe 54 131,30 Ксенон		
73 Ta 180,948 Тантал	74 W 183,85 Вольфрам	75 Re 186,2 Рений	76 Os 190,2 Осмий	77 Ir 192,2 Иридий	78 Pt 195,09 Платина
Bi 83 208,980 Висмут	Po 84 [210]* Полоний	At 85 [210] Астат	Rn 86 [222] Радон		
105 Db [262] Дубний	106 Sg [263] Сиборгий	107 Bh [262] Борий	108 Hs [265] Хассий	109 Mt [266] Мейтнерий	110

65 Tb 158,924 Тербий	66 Dy 162,50 Диспрозий	67 Ho 164,930 Гольмий	68 Er 167,26 Эрбий	69 Tm 168,934 Тулий	70 Yb 173,04 Иттербий	71 Lu 174,97 Лютеций
97 Bk [247] Берклий	98 Cf [252]* Калифорний	99 Es [254] Эйнштейний	100 Fm [257] Фермий	101 Md [257] Менделевий	102 No [255] Нобелий	103 Lr [256] Лоуренсий

...ь давления насыщенных паров воды от температуры



Содержание

Учебное издание

Ромашкевич Александр Иосифович

ФИЗИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

10 класс

Учимся решать задачи

Зав. редакцией *Е. Н. Тихонова*
Ответственный редактор *Л. Н. Коршунова*
Оформление *М. В. Мандрыкина*
Художественный редактор *М. В. Мандрыкина*
Технический редактор *Н. И. Герасимова*
Компьютерная верстка *А. В. Маркин*
Компьютерная графика *А. А. Нифонтов*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.24.953.Д.006499.07.06 от 26.07.2006.

Подписано к печати 25.05.07. Формат $84 \times 108^1/_{32}$.
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,0. Тираж 3000 экз. Заказ № 7729.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»: 127018, Москва, а/я 79.
Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу:
127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».
109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Сеть магазинов «Переплетные птицы».
Тел.: (495) 912-45-76.

Интернет-магазин: http://www.drofa.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО ордена «Знак Почета»
«Смоленская областная типография им. В. И. Смирнова».
214000, г. Смоленск, проспект им. Ю. Гагарина, 2.

Предлагаем вашему вниманию учебное пособие по физике

«МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА».

Эта книга — полезное и необходимое дополнение к учебно-методическому комплекту под редакцией Г. Я. Мякишева.

Предлагаемое пособие включает:

- алгоритмы решения задач;
- примеры решения задач;
- упражнения;
- справочные материалы.

Все это поможет учащимся правильно и быстро решать задачи.

ISBN 978-5-358-03301-6

9 785358 033016

дрофа