

А. И. Ромашкевич

ФИЗИКА

ОПТИКА
КВАНТОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА

11

класс

УЧИМСЯ
РЕШАТЬ
ЗАДАЧИ



ДРОФА



■ А. И. Ромашкевич ■

ФИЗИКА

■ ОПТИКА ■
КВАНТОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА

111

к л а с с

УЧИМСЯ
РЕШАТЬ
ЗАДАЧИ

Москва

 д р о ф а

2009

УДК 373.167.1:53

ББК 22.3я72

Р69

Ромашкевич, А. И.

P69 Физика. Оптика. Квантовая природа света. 11 класс. Учимся решать задачи : учебное пособие / А. И. Ромашкевич. — М. : Дрофа, 2009. — 110, [2] с.

ISBN 978-5-358-05707-4

Пособие содержит упражнения, включающие в себя задачи по геометрической оптике, основам квантовой физики и строению атомного ядра. Перед упражнениями приводятся необходимые теоретические сведения и рассматриваются примеры решения задач.

Содержание и принцип расположения материала позволяют использовать пособие не только учителям на уроках и факультативных занятиях, но и учащимся, проявляющим интерес к точным наукам, для самостоятельных занятий.

УДК 373.167.1:53

ББК 22.3я72

ISBN 978-5-358-05707-4

© ООО «Дрофа», 2009

Тема № 1

Плоское зеркало

Одной из основных моделей геометрической оптики является *световой луч*. Представление о световом луче дает луч солнечного света, проникающий в темную комнату через маленькую дырочку в шторе, или луч лазера. В геометрической оптике световой луч не имеет толщины и изображается линией со стрелкой, указывающей направление распространения света.

Другая модель, принятая в геометрической оптике, — *точечный источник света*. Это любой видимый объект пренебрежимо малых размеров в условиях данной задачи. Понятно, что протяженный источник света (протяженный предмет) представляется, как совокупность точечных источников света.

Свет, попадающий в глаз, на линзу или любую другую оптическую систему, в геометрической оптике изображается в виде пучка световых лучей (рис. 1). Мы обвели глаз кружочком, чтобы

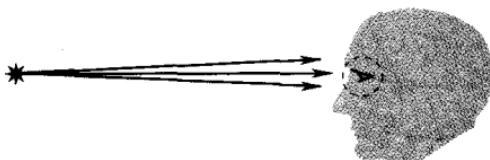


Рис. 1

показать, как будет изображаться глаз человека (без профиля) на рисунках.

Световой луч подчиняется четырем, как их принято называть, законам геометрической оптики, которые на самом деле являются следствиями принципа Ферма.

Принцип Ферма заключается в следующем:

из одной точки пространства в другую свет из всех возможных распространяется по пути, требующему наименьшего времени.

Из принципа Ферма следует:

1. В однородной среде световой луч распространяется прямолинейно.

Это первый закон геометрической оптики. Поскольку в однородной среде скорость света не меняется, то наименьшее время требуется именно при распространении света по прямой.

2. Если световой луч, вышедший из точки A, попал в точку B по некоторому пути, то испущенный из точки B в обратном направлении луч попадает в точку A по тому же самому пути (рис. 2).

Этот закон называют **законом обратимости световых лучей**. Действительно, если путь из точки A в точку B занял наименьшее время, то быстрее всего из точки B в точку A можно попасть по тому же самому пути.

3. Закон отражения света: световой луч, падающий на абсолютно гладкую отражающую

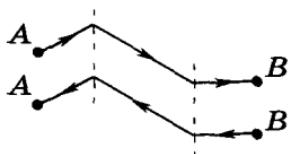


Рис. 2

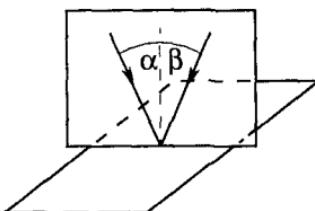


Рис. 3

(зеркальную) поверхность под некоторым углом к нормали (угол падения), отражается от нее так, что отраженный луч составляет с нормалью такой же угол (угол отражения). Причем падающий луч, нормаль к поверхности в точке падения луча и отраженный луч лежат в одной плоскости (рис. 3).

Этот закон также следует из принципа Ферма, хотя это и не столь очевидно. Убедиться в этом поможет простая задача.

ЗАДАЧА

Докажите, что путь светового луча, испущенного из точки S , претерпевшего отражение от зеркала и попавшего в точку A , является самым коротким из всех возможных путей, если $\alpha = \beta$: точка S — зеркало — точка A (рис. 4).

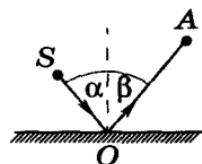


Рис. 4

Решение

Небольшое дополнительное построение: опустим из точки S перпендикуляр на плоскость зеркала, продолжив его за зеркало. Продолжим отраженный луч OA за плоскость зеркала до пересечения с перпендикуляром (точка S' на рис. 5). $\angle OSB$ равен углу падения α (углы накрест лежащие), $\angle OS'B$ равен углу отражения α (углы соответственные). Таким образом, два образовавшихся прямоугольных треугольника OBS и OBS' равны (по общему катету и острому углу),

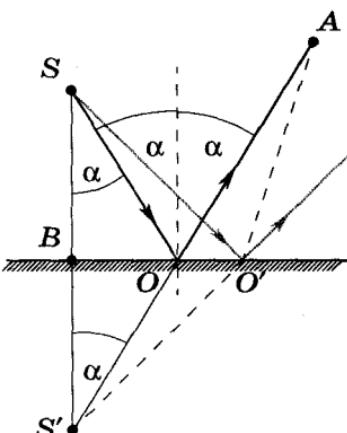


Рис. 5

откуда $SO = S'O$. Полный путь L луча из т. S в т. A равен:

$$L = SO + OA = S'O + OA = S'A.$$

Сравним путь луча L с другим, произвольно выбранным путем т. S — зеркало — т. A , например $SO'A$ (L'). Теперь уже несложно самостоятельно убедиться, что

$$L' = OS' + O'A = S'O' + O'A.$$

Прямая L короче ломаной L' , значит, путь луча, при котором равны углы падения и отражения, самый короткий, что и требовалось доказать.

Осталось добавить, что поскольку в однородной среде скорость света не меняется, то короткий путь всегда требует наименьшего времени. Таким образом, исходя из принципа Ферма, мы неизбежно придем к равенству углов падения и отражения.

Другое следствие этой задачи — все лучи, исходящие из точки S , после отражения от зеркала своими «хвостами» (продолжение луча в сторону, противоположную распространению света) «упираются» в точку S' , расположенную на перпендикуляре к зеркалу, проведенному из точки S по другую сторону зеркала на таком же расстоянии от зеркала, что и S . Чтобы в дальнейшем не писать такой длинной фразы, будем называть точку S' *зеркальным отражением* точки S (рис. 5).

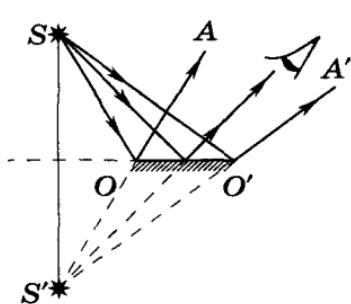


Рис. 6

Если глаз расположена в области прохождения отраженных лучей, то человеку кажется, что лучи вышли из точки S' . Говорят, что человек видит *изображение* источника S . Из рисунка 6 видно, что крайние лучи после отражения от зеркала ограни-

чивают область, из которой можно увидеть изображение источника.

Знание первопричины закона отражения расширяет наши возможности при решении даже не связанных со светом задач.

ЗАДАЧА

В точке A (рис. 7, вид сверху) находится молодой человек. В точке B его ждет девушка. Вдоль тротуара OO' стоят цветочницы. Молодому человеку необходимо как можно быстрее добраться до девушки, предварительно купив цветы. К какой цветочнице ему надо спешить?

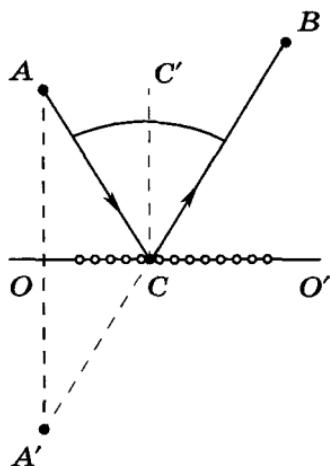


Рис. 7

Решение

Построим зеркальное отражение A' точки A относительно прямой OO' и соединим точку A' с точкой B . На пересечении прямых $A'B$ и OO' (точка C) и находится место той цветочницы, к которой должен спешить юноша. Из ранее решенной задачи следует, что при таком построении $\angle ACC' = \angle BCC'$ — условие самого быстрого пути.

Аналогичный прием позволяет решить задачу с бильярдными шарами.

ЗАДАЧА

Даны положения двух бильярдных шаров на столе (рис. 8). Геометрическим построением найти точку C борта, которой должен коснуться шар A , чтобы после отскока столкнуться «в лоб» с шаром B . Удар о борт считать абсолютно упругим влиянием силы трения, а значит, и возможными закручиваниями пренебречь.

Самостоятельно восстановите ход решения задачи, воспользовавшись рисунком 8.

Рассмотрим еще одну задачу. Сама она проста и разобрана во многих пособиях. Мы приводим ее ради технически интересного следствия.

ЗАДАЧА

В двугранный зеркальный угол попадает луч света, лежащий в плоскости, перпендикулярной ребру угла. На какой угол γ повернется падающий луч после разового отражения от обоих зеркал? Угол между зеркалами A .

Дано:

$$\angle A$$

$$\angle \gamma - ?$$

(углы с взаимно перпендикулярными сторонами).

Угол между перпендикулярами (A) является внешним углом к треугольнику OBC . Он равен сумме внутренних с ним не смежных углов: $A = \alpha + \beta$. По той же теореме угол γ , являясь внешним углом к треугольнику DBC , равен $\gamma = 2\alpha + 2\beta$. Отсюда ясно, что $\gamma = 2A$.

Ответ: $\gamma = 2A$.

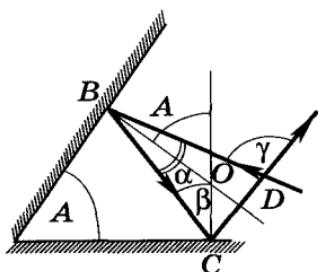


Рис. 9

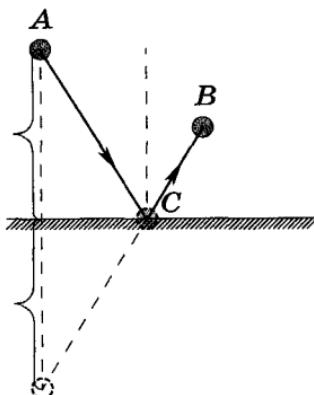


Рис. 8

Решение

Рассмотрим рисунок 9. Угол между перпендикулярами к граням равен углу A

(углы с взаимно перпендикулярными сторонами).

Угол между перпендикулярами (A) является внешним углом к треугольнику OBC . Он равен сумме внутренних с ним не смежных углов: $A = \alpha + \beta$. По той же теореме угол γ , являясь внешним углом к треугольнику DBC , равен $\gamma = 2\alpha + 2\beta$. Отсюда ясно, что $\gamma = 2A$.

Ответ: $\gamma = 2A$.

А теперь самое интересное. Если $\angle A = 90^\circ$, то $\gamma = 180^\circ$, т. е. прямой зеркальный угол отражает любой световой луч в обратном направлении. Правда, пока он лежит в плоскости, перпендикулярной ребру угла.

Но если к прямому двугрannому углу добавить третью грань, перпендикулярную ребру угла, то получится прямой трехгранный зеркальный угол, который будет отражать любой попадающий в него луч в обратном направлении. Механическим аналогом такого отражения может служить бросок мячика в угол комнаты, а лучше в прямой угол кабины космического корабля (чтобы исключить влияние гравитационного поля планеты). Разумеется, удар мячика о любую из трех плоскостей считается абсолютно упругим. Пусть мячик летит в угол кабины с некоторой скоростью \vec{v} и последовательно ударяется о каждую из трех плоскостей. Выберем начало координат в вершине угла и направим оси координат X , Y , Z по граням угла (рис. 10). Введем обозначение составляющих скорости по осям \vec{v}_x , \vec{v}_y , \vec{v}_z . Упругий удар (первый) о плоскость XY сменит составляющую скорости \vec{v}_z на $-\vec{v}_z$ (см. рис. 10), не изменяя \vec{v}_x и \vec{v}_y , удар (второй) о плоскость YZ поменяет составляющую скорости \vec{v}_x на $-\vec{v}_x$, наконец, удар о плоскость ZX превратит \vec{v}_y в $-\vec{v}_y$. Таким образом, мяч, имевший скорость $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$, после взаимодействия с углом летит со скоростью $\vec{v}' = -\vec{v}_x - \vec{v}_y - \vec{v}_z = -(\vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z) = -\vec{v}$. Это означает, что скорость \vec{v} сменилась на $-\vec{v}$. Мяч полетит в обратном направлении.

Разумеется, сказанное выше справедливо, если мяч ударится о каждую из плоскостей. Для этого проекции скорости падающего в угол мяча не должны быть положительными, т. е. нужно,

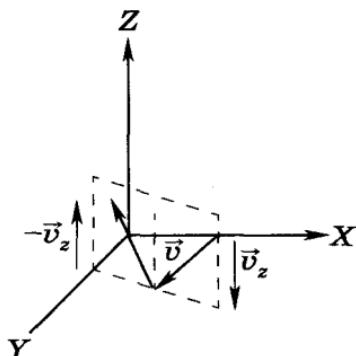


Рис. 10

чтобы он приближался к каждой из плоскостей XY , YZ , ZX : $v_x \leq 0$, $v_y \leq 0$, $v_z \leq 0$.

Осторожно! Не путайте проекции скорости v_x , v_y , v_z с составляющими скорости \vec{v}_x , \vec{v}_y , \vec{v}_z .

Все сказанное выше легко переносится на световой луч заменой скорости мяча на скорость распространения света. Свойство прямоугольного трехгранного отражателя посыпать отраженный световой луч (в общем случае электромагнитную волну) в обратном направлении широко используется в технике. Например, при изготовлении катафотов, в которых поверхность выполнена в виде трехгранных ямок с прямыми углами между гранями. Такая поверхность отражает падающий на нее пучок света (например, от фар автомобиля) обратно, и поэтому кажется светящейся.

Упражнения

1.1. Стержень AB (рис. 11) находится перед плоским зеркалом. Постройте его изображение.

1.2. Между двумя параллельными плоскими зеркалами находится предмет. Сколько его изображений можно увидеть в зеркалах?

1.3. Каков должен быть минимальный размер h вертикального плоского зеркала, чтобы человек ростом $H = 180$ см мог видеть себя в полный рост? (Не упрощайте задачу, считая, что глаза расположены «на макушке».)

1.4. Глаза человека ростом $H = 180$ см находятся на расстоянии $a = 100$ см от плоского зеркала, висящего с наклоном $\alpha = 30^\circ$ на вертикальной стене (рис. 12). Каким должен быть минимальный размер h этого зеркала, чтобы человек мог видеть себя в полный рост? Считать, что глаза являются верхней точкой туловища.

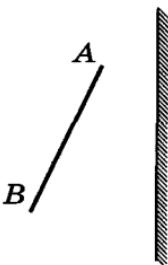


Рис. 11

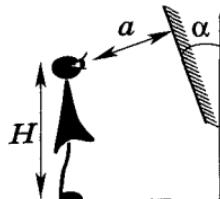


Рис. 12

1.5. Доказать, что все изображения точечного источника света, помещенного внутри двугранного зеркала, располагаются на окружности. Найдите радиус R этой окружности, если расстояние от источника до каждого из зеркал $a = 20$ см, а угол между зеркалами $\alpha = 60^\circ$.

1.6. Горизонтальный луч света от точечного источника попадает на маленькое плоское зеркальце, подвешенное на вертикальной нити, и, отразившись от него, падает перпендикулярно на вертикальную стену. На какое расстояние D сместится «зайчик» на стене, если плоскость зеркальца повернуть вокруг вертикальной оси на угол $\alpha = 30^\circ$? Расстояние от зеркальца до стены $d = 1$ м.

1.7. Горизонтальный луч света от точечного источника попадает на маленькое плоское зеркальце, подвешенное на вертикальной нити, и, отразившись от него, падает перпендикулярно на вертикальную стену. Зеркальце начинают поворачивать вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с. С какой скоростью v будет двигаться «зайчик» по стене в момент, когда зеркальце повернется на угол $\alpha = 15^\circ$? Расстояние от зеркальца до стены $d = 0,5$ м.

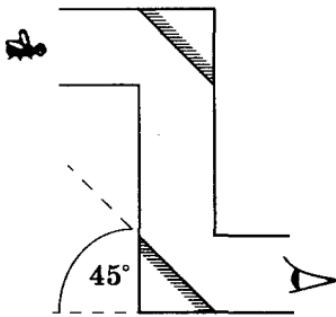


Рис. 13

1.8. На рисунке 13 изображен перископ, снабженный двумя параллельными плоскими зеркалами и позволяющий производить наблюдение из-за преграды. Постройте наблюдаемое глазом изображение мухи, появившейся перед входным отверстием аппарата.

1.9. Жук подлетает к зеркалу под углом $\alpha = 45^\circ$ к его поверхности со скоростью $v = 0,8 \text{ м/с}$. Чему равно значение скорости жука относительно его изображения?

1.10. Перед плоским зеркалом, висящим на закрытой двери, помещен небольшой предмет. Дверь начинают открывать с угловой скоростью ω . С какой скоростью v будет двигаться изображение предмета, если расстояние от него до дверной оси d ?

Ответы

1.1. См. рис. 14.

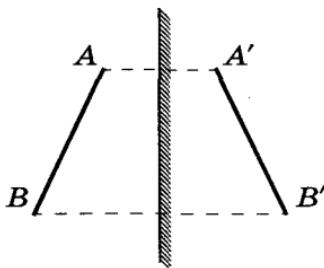


Рис. 14

1.2. $N \rightarrow \infty$.

1.3. $h = H/2 = 90 \text{ см.}$

1.4. $h = \frac{aH\cos\alpha}{2a + H\sin\alpha} \approx 54 \text{ см.}$

1.5. $R = 40$ см.

1.6. $D = 2$ м.

1.7. $v = \frac{d\omega}{\cos^2 2\alpha} = \frac{2}{3}$ м/с.

1.8. См. рис. 15.

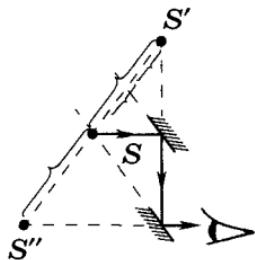


Рис. 15

1.9. $v_{\text{отн}} \approx 1,13$ м/с.

1.10. $v = 2d\omega$.

Тема № 2

Сферические зеркала

Отражающая поверхность может быть не только плоской.

Отсечем от зеркальной сферы вертикальной плоскостью некоторый сегмент (рис. 16). Боковая поверхность сегмента и есть выпуклое сферическое зеркало. Если сделать отражающей внутреннюю часть полученной «чаши», то получится

вогнутое зеркало. Вершина сегмента C называется *полюсом* зеркала, прямая OC — *главной оптической осью* зеркала. Центр сферы, из которой вырезан сегмент, называется *оптическим центром* зеркала — т. O на рисунке.

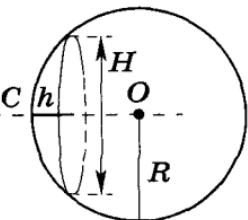


Рис. 16

Сферические зеркала, габаритные размеры (H) которых значительно меньше радиуса сферы R , будем называть *тонкими*. Более удобно это условие записывается так: $h \ll R$. Высота сегмента (толщина зеркала) много меньше радиуса сферы. Отсюда и термин: тонкое зеркало. В геометрической оптике мы будем иметь дело именно с такими зеркалами.

ЗАДАЧА

На расстоянии d от тонкого вогнутого сферического зеркала на главной оптической оси находится точечный источник света S . Докажите, что зеркало сформирует его изображение S' , и

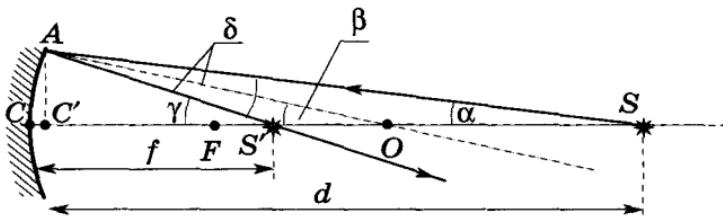


Рис. 17

найдите его положение (расстояние f от зеркала). Радиус сферы, фрагментом которой является поверхность зеркала, R .

Дано:

d

R

$f - ?$

Решение

Построим произвольный луч SA от источника к зеркалу. Радиус OA является нормалью к зеркалу

в точке A , а угол SAO будет углом падения (рис. 17). Построим $\angle OAS'$ (угол отражения), где S' — точка пересечения отраженного луча с оптической осью, равный $\angle SAO$.

$$\angle SAO = \angle OAS' = \delta.$$

Условие «тонкое зеркало» позволяет считать все лучи приосевыми, а углы (α , β , γ , δ) малыми, основание C' перпендикуляра из точки A на главную оптическую ось практически совпадающим с полюсом зеркала C .

Угол γ , являясь внешним углом к треугольнику $S'AS$, равен сумме внутренних с ним не смежных:

$$\gamma = 2\delta + \alpha. \quad (1)$$

Угол β , являясь внешним углом к треугольнику OAS , по той же причине равен $\delta + \alpha$.

$$\beta = \delta + \alpha. \quad (2)$$

Углы α , β и γ легко выражаются через линейные параметры рисунка. Вспомним, что для малого угла справедливо:

$$\sin \phi \approx \operatorname{tg} \phi \approx \phi,$$

$\alpha \approx \frac{AC'}{d}$, $\beta \approx \frac{AC'}{R}$, $\gamma \approx \frac{AC'}{f}$, а от δ мы можем избавиться, благо в нашем распоряжении уравнения (1) и (2).

$$\gamma = 2(\beta - \alpha) + \alpha, \text{ или}$$

$$\gamma + \alpha = 2\beta.$$

Производим замены¹

$$\frac{AC'}{d} + \frac{AC'}{f} = \frac{2(AC')}{R}$$

и приходим к формуле тонкого сферического зеркала:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}.$$

Таким образом, для любого луча от источника S

$$f = \frac{Rd}{2d - R},$$

т. е. через точку S' проходят все отраженные лучи, формируя изображение источника S .

Ответ. Тонкое сферическое зеркало формирует изображение источника на расстоянии $f = \frac{Rd}{2d - R}$ от зеркала на главной оптической оси.

Заметим, что полученный результат справедлив с достаточной точностью для лучей, составляющих малые углы с главной оптической осью. Так что в дальнейшем под термином «тонкое сферическое зеркало» будем понимать выполнение двух условий: $h \ll R$ и параксиальность световых лучей.

¹ Знаки «≈» мы заменяем на «=», считая, что при малых углах падения лучей равенство выполняется с достаточной точностью.

Если поместить точечный источник на очень большом от зеркала расстоянии ($d \rightarrow \infty$), то лучи, попадающие на зеркало, можно считать параллельными, и, используя формулу сферического зеркала, можно получить выражение для f в этом случае

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R} \Rightarrow 0 + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}, f = \frac{R}{2}.$$

Точка пересечения лучей, падающих на зеркало параллельно оптической оси, называется *фокусом зеркала*, а расстояние от полюса зеркала до фокуса называется *фокусным расстоянием F*. Таким образом, для сферического зеркала

$$F = \frac{R}{2}.$$

Формулу тонкого сферического зеркала можно переписать в виде:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Забегая вперед, скажем, что эта формула применима к любой тонкой оптической системе (тонкое выпуклое зеркало, тонкая линза, две тонкие линзы, сложенные вплотную, тонкая линза с одной посеребренной поверхностью и т. д.), если считать величины d , f и F алгебраическими. Это значит, что каждая из них может быть либо положительной, либо отрицательной. Рисунки 18, 19, 20 проясняют ситуацию.

Если на оптическую систему падает расходящийся из некоторой точки пучок лучей, то эта точка называется действительным предметом S , а расстояние d (от предмета до оптической системы) считается положительным. Если на систему падает сходящийся в некоторой точке S за тонкой оптической системой пучок лучей, то расстояние d считается отрицательным, а предмет мнимым (рис. 18).

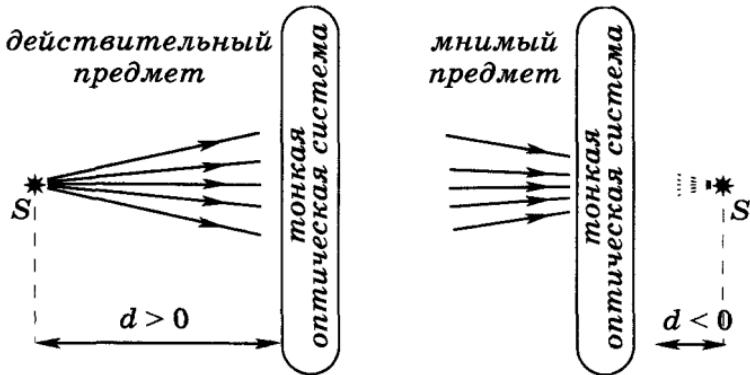


Рис. 18

Если после прохождения света через оптическую систему формируется сходящийся в некоторой точке S' пучок лучей, то изображение называется действительным, а расстояние от изображения до центра оптической системы f берется со знаком «+». Расходящийся после прохождения системы пучок лучей формирует мнимое изображение на пересечении не самих лучей, а их продолжений (рис. 19). В этом случае f — отрицательно. Знак фокусного расстояния определяется аналогично.

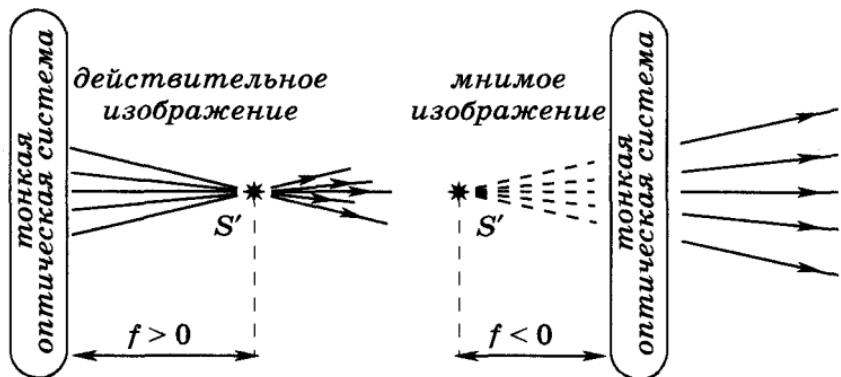


Рис. 19

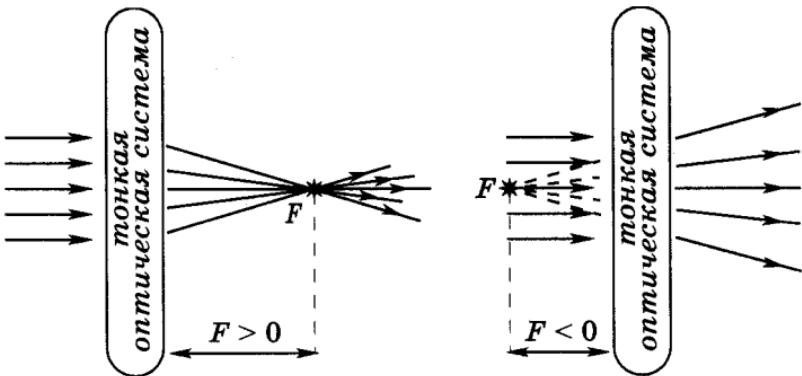


Рис. 20

Напомним, что в фокусе формируется изображение бесконечно удаленного, лежащего на оптической оси источника света (рис. 20).

Но вернемся к сферическому зеркалу. Если световые лучи идут таким образом, что предмет, изображение или фокус оказывается в «зазеркалье» (с тыльной стороны отражающей поверхности), то они всегда мнимые. Это понятно, если учесть, что лучи туда не попадают, и пересекаться в этой области могут только их продолжения.

Для построения изображения S' источника S из всего множества лучей, попадающих (или условно попадающих (рис. 21) на сферическое зер-

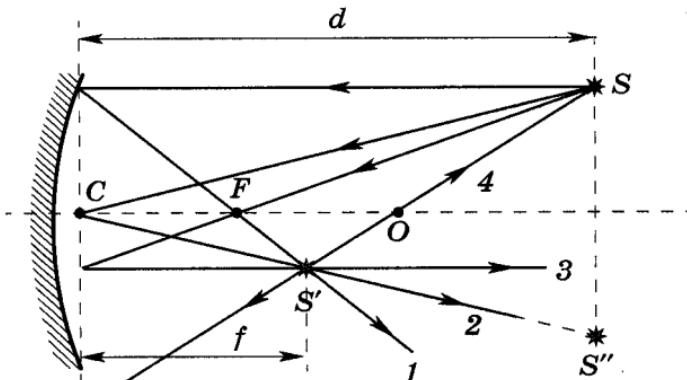


Рис. 21

кало от источника S , достаточно построить ход двух лучей и отметить точку их пересечения S' . На рисунке 21 показан ход четырех удобных для построения лучей.

• Луч, параллельный оптической оси, после отражения проходит через фокус зеркала (1).

• Луч, падающий в полюс зеркала, отражается под таким же углом к главной оптической оси (2). Для построения отраженного луча достаточно соединить полюс зеркала с зеркальным (относительно главной оптической оси) отражением источника S'' .

• Луч, проходящий через фокус зеркала, отразится параллельно главной оптической оси (3). (Вспомните закон обратимости светового луча.)

• Луч, проходящий через центр сферы, отразится обратно, так как падает нормально к поверхности зеркала (4).

Любая прямая, проходящая через оптический центр сферического зеркала, называется *побочной оптической осью*.

• Пучок лучей, параллельных побочной оптической оси, после отражения сходится в фокальной плоскости (плоскость, перпендикулярная главной оптической оси и проходящая через фокус зеркала).

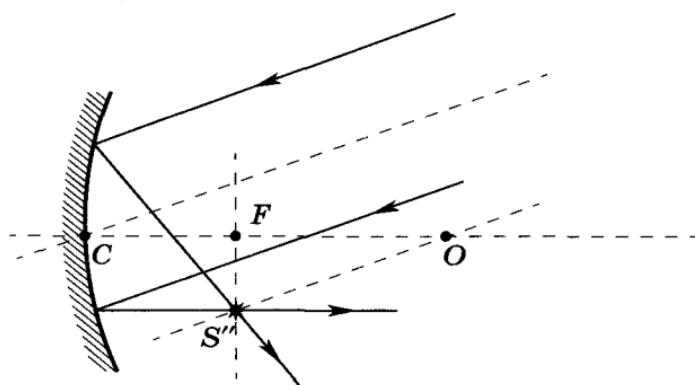


Рис. 22

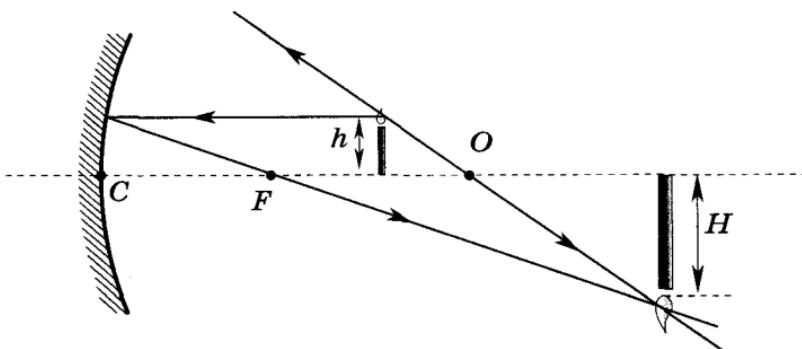


Рис. 23

Точку пересечения отраженных лучей можно получить, проведя побочную оптическую ось OS'' параллельно падающим лучам (рис. 22). Отраженные от зеркала лучи проходят через точку пересечения фокальной плоскости и побочной оптической оси (S'').

Для построения протяженного предмета, перпендикулярного главной оптической оси и опирающегося на нее, достаточно построить изображение его верхней точки. Сказанное поясняет рисунок 23.

Отношение поперечного размера изображения H к поперечному размеру предмета h называется коэффициентом поперечного или линейного увеличения Γ .

$$\Gamma = \frac{H}{h}.$$

Луч от верхней точки предмета к полюсу зеркала, отраженный луч, главная оптическая ось, предмет и изображение образуют два подобных треугольника (затененных на рис. 24), из которых очевидно

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}.$$

Коэффициент увеличения по своему смыслу не может быть отрицательным, а f и d величи-

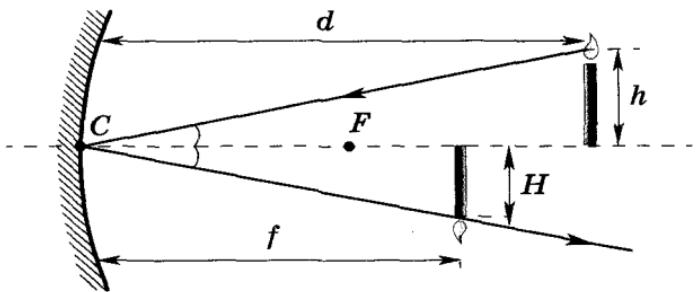


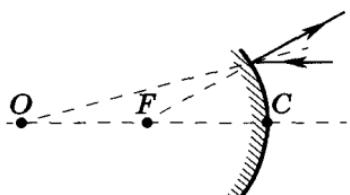
Рис. 24

ны алгебраические, поэтому правильно писать так:

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{|f|}{|d|}.$$

Упражнения

2.1. На тонкое выпуклое сферическое зеркало (рис. 25) радиуса R падает луч света, параллельный главной оптической оси.



Доказать, что продолжение отраженного луча пересекает главную оптическую ось на расстоянии $CF = R/2$ от полюса зеркала. Чему равно фокусное расстояние F этого зеркала?

Рис. 25

2.2. На тонкое выпуклое сферическое зеркало от точечного предмета S падают четыре луча:

- параллельный оптической оси;
- направленный в центр сферы;
- направленный в фокус зеркала;
- направленный в полюс зеркала.

Постройте ход каждого луча после отражения от зеркала.

2.3. На тонкое вогнутое зеркало падает произвольный луч (рис. 26). Постройте ход этого луча после отражения от зеркала.

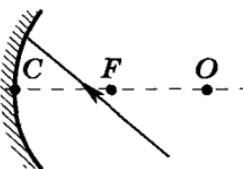


Рис. 26

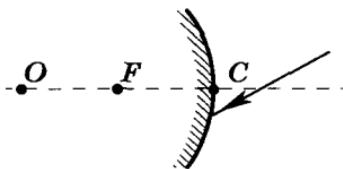


Рис. 27

2.4. На тонкое выпуклое зеркало падает произвольный луч (рис. 27). Постройте ход этого луча после отражения от зеркала.

2.5. Вдоль оптической оси перемещается предмет с очень далекого расстояния (из бесконечности) к тонкому вогнутому сферическому зеркалу, проходя последовательно участки:

- от бесконечности до центра сферы ($\infty \rightarrow 0$);
- от центра сферы до фокуса ($0 \rightarrow F$);
- от фокуса до полюса зеркала ($F \rightarrow C$).

С помощью геометрического построения проследите за перемещениями изображения и укажите его характеристики (прямое или перевернутое, увеличенное или уменьшенное, действительное или мнимое).

2.6. Вдоль оптической оси перемещается предмет с очень далекого расстояния (из бесконечности) к тонкому выпуклому сферическому зеркалу. С помощью геометрического построения проследите за перемещениями изображения и укажите его характеристики (действительное или мнимое, прямое или перевернутое, увеличенное или уменьшенное).

2.7. Коэффициент поперечного увеличения небольшого предмета, опирающегося на главную оптическую ось тонкого сферического зеркала, $\Gamma = 2$. Расстояние от предмета до полюса зеркала $d = 36$ см. Найдите фокусное расстояние F этого зеркала.

2.8. Расстояние от небольшого предмета, расположенного на главной оптической оси тонкого

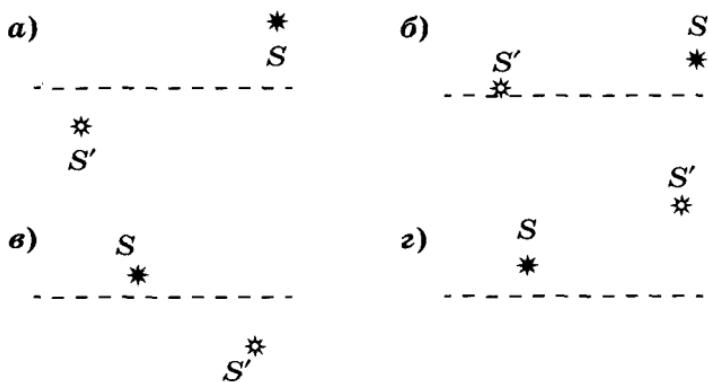


Рис. 28

вогнутого сферического зеркала, до его мнимого изображения равно L . Коэффициент поперечного увеличения равен Γ . Найдите фокусное расстояние зеркала F .

2.9. На рисунке 28 даны положения точечного источника света S и его изображения S' относительно главной оптической оси тонкого сферического зеркала. Найдите геометрическим построением положение полюса зеркала C и положение оптического центра зеркала O . Укажите, в каких случаях зеркало вогнутое, а в каких выпуклое.

2.10. Чему равен диаметр d изображения Солнца в тонком выпуклом зеркале с радиусом кривизны $R = 20$ см? Главная оптическая ось зеркала направлена на Солнце. Диаметр Солнца $D = 1,4 \cdot 10^6$ км, расстояние от Земли до Солнца $L = 150 \cdot 10^6$ км.

2.11. Точечный источник света находится в оптическом центре тонкого вогнутого сферического зеркала. Радиус кривизны зеркала $R = 20$ см. На расстоянии диаметра зеркальной сферы перпендикулярно главной оптической оси находится плоское зеркало. На каком расстоянии a от пло-

ского зеркала будет находиться изображение источника после однократного отражения лучей сначала от плоского, а затем от сферического зеркала?

Указание. Изображение предмета в плоском зеркале служит предметом для сферического зеркала.

2.12. Два одинаковых вогнутых сферических зеркала имеют общую главную оптическую ось и расположены так, что их фокусы совпадают. Точечный предмет S находится на оси на расстоянии a от одного из зеркал. Где будет находиться изображение предмета после однократного отражения лучей от обоих зеркал? Проведите графическое построение и подтвердите результат расчетом.

Ответы

2.1. $F = -\frac{R}{2}$.

2.2. См. рис. 29.

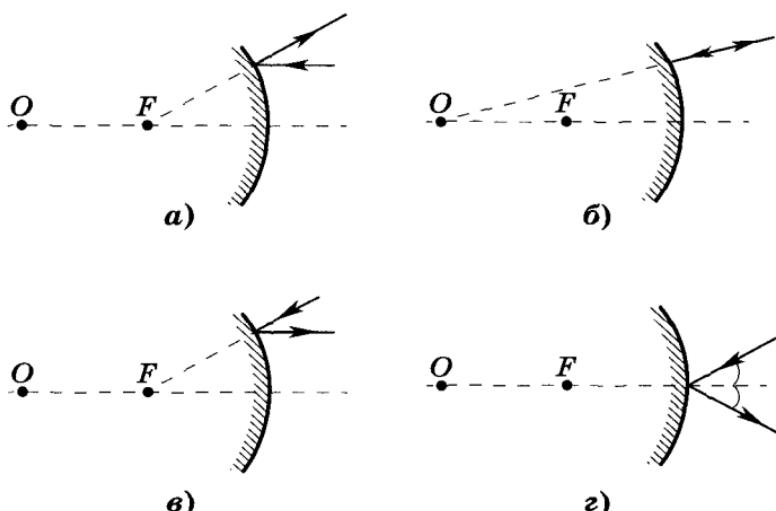


Рис. 29

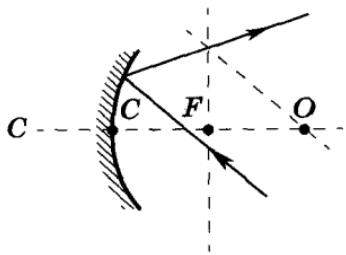


Рис. 30

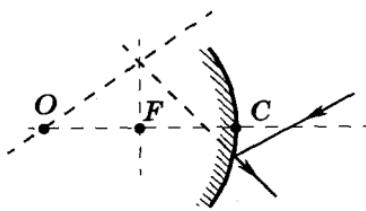


Рис. 31

2.3. См. рис. 30.

2.4. См. рис. 31.

2.5. а) $F \rightarrow 0$, изображение действительное, перевернутое, уменьшенное;

б) $0 \rightarrow \infty$, изображение действительное, перевернутое, увеличенное;

в) $-\infty \rightarrow C$, изображение мнимое, прямое, увеличенное.

2.6. $F \rightarrow C$, изображение мнимое, прямое, уменьшенное.

2.7. $F = 24$ см, если изображение действительное;

$F = 72$ см, если изображение мнимое.

$$2.8. F = \frac{\Gamma L}{\Gamma^2 - 1}.$$

2.9. См. рис. 32.

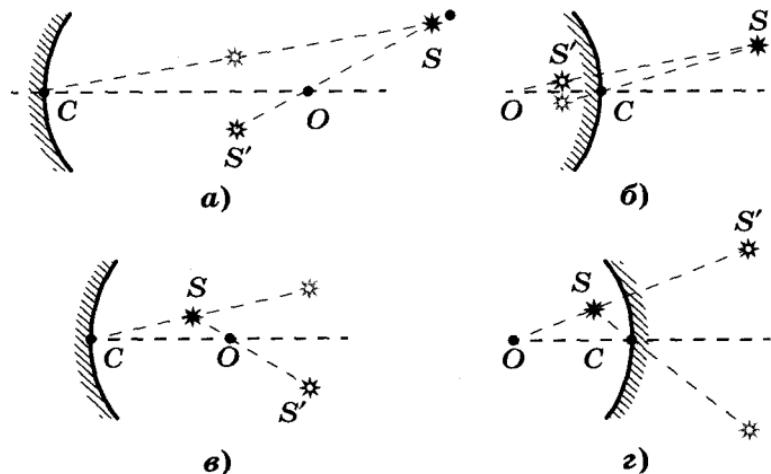


Рис. 32

2.10. $d \approx 0,93$ мм.

2.11. $a = 28$ см.

2.12. Изображение совпадает с источником (совпадают основания «стрелок») (рис. 33).

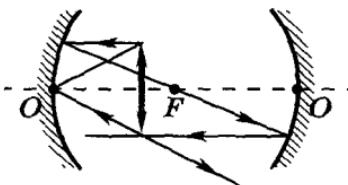


Рис. 33

Тема № 3

Закон преломления

При переходе из одной среды в другую на границе раздела луч света меняет направление. Это происходит потому, что скорости света в разных средах различны.

На рисунке 34 показан переход светового луча из одной оптически прозрачной среды (например, воздух) в другую (например, стекло). Скорость света в воздухе v_1 больше скорости света в стекле v_2 .

Направим вдоль границы раздела ось X . Пусть световой луч, выходя из точки S , пересекает границу раздела в точке x_0 и приходит в точку A (рис. 34). Другие возможные пути света показаны пунктиром. Понятно, что при фиксированном по-

ложении точек S и A время движения t света от S до A зависит от выбора координаты x . Иными словами, t является функцией от x : $t = t(x)$.

Эта функция имеет минимум в некоторой точке x_0 . Согласно принципу Ферма, луч света, попавший из S в A , пройдет через точку x_0 .

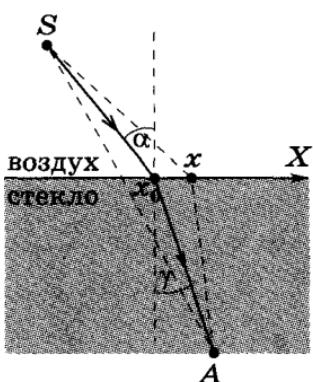


Рис. 34

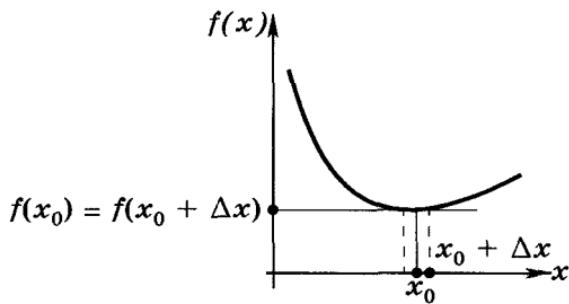


Рис. 35

Вспомним, как ведет себя функция в области минимума.

Из рисунка 35 понятно, что любое, но очень малое отклонение аргумента от x_0 , практически не меняет значение функции

$$f(x_0) = f(x_0 + \Delta x).$$

Это означает, что если время движения света $t(x_0)$ по траектории Sx_0A минимально, то время движения света по «соседней» траектории SxA (x очень близко к x_0) будет практически таким же.

Чтобы оформить этот факт математически, нарисуем область перехода лучей из одной среды в другую в увеличенном масштабе (рис. 36).

Опустим перпендикуляры: из точки x_0 на луч Sx и из точки x на луч x_0A . Отрезок Cx равен увеличению светового пути в среде 1 при замене луча Sx_0A на луч SxA . А это приводит к увеличению времени движения света в первой среде на величину

$$\Delta t_1 = \frac{Cx}{v_1} = \frac{\Delta x \sin \alpha}{v_1}.$$

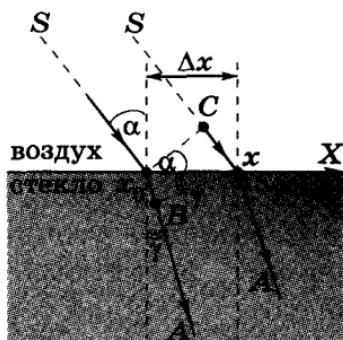


Рис. 36

Это равенство выполняется тем точнее, чем меньше Δx . Аналогично отрезок x_0B равен уменьшению светового пути в среде 2, и время движения света во второй среде сокращается на величину

$$\Delta t_2 = \frac{x_0 B}{v_2} = \frac{\Delta x \sin \gamma}{v_2}.$$

Чтобы время движения света по траектории SxA практически не отличалось от времени движения по траектории, требующей наименьшего времени Sx_0A , нужно, чтобы $\Delta t_1 = \Delta t_2$.

$$\frac{\Delta x \sin \alpha}{v_1} = \frac{\Delta x \sin \gamma}{v_2}.$$

Отсюда получаем закон преломления света:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}.$$

Таким образом, закон преломления также следует из принципа Ферма.

Для каждой пары оптически прозрачных сред отношение скоростей света постоянно и называется *относительным показателем преломления* n_{21} . При переходе света из вакуума в некоторую среду

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{c}{v} = n,$$

здесь c — скорость света в вакууме, а n — абсолютный показатель преломления среды.

Небольшое уточнение: свет, как правило, содержит электромагнитные волны различных частот, и каждая составляющая имеет свой абсолютный показатель преломления в данной среде. Зависимость показателя преломления от частоты называется *дисперсией*. В геометрической опти-

ке будем считать дисперсию света пренебрежимо малым эффектом. Можно считать световой луч монохроматическим, а табличный показатель преломления применимым к этому лучу.

Очевидна связь относительного показателя преломления n_{21} сред 1 и 2 с абсолютными показателями этих сред n_1 и n_2 :

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1 c}{v_2 c} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Из закона преломления следует, что угол преломления (он же угол падения при обратном ходе луча) всегда меньше в среде более плотной. Это объясняет эффект полного (внутреннего) отражения.

Изобразим падение луча на границе раздела из среды оптически более плотной (рис. 37).

Луч AO на границе разделяется на отраженный (OC) и преломленный (OB). Верхняя среда оптически менее плотная, поэтому угол преломления γ больше угла падения α .

Будем постепенно увеличивать угол падения. В результате увеличиваются угол отражения и угол преломления. При увеличении угла падения интенсивность, а значит, и энергия отраженного луча возрастает, в то время как интенсивность преломленного убывает, т. е. луч OB , образно говоря, «худеет», а луч OC — «жиреет». Особенно быстро убывает интенсивность преломленного пучка, когда угол преломления γ приближается к 90° . Когда угол падения становится таким, что преломленный пучок идет вдоль границы раздела двух сред, доля отраженной энергии близка к 100%.

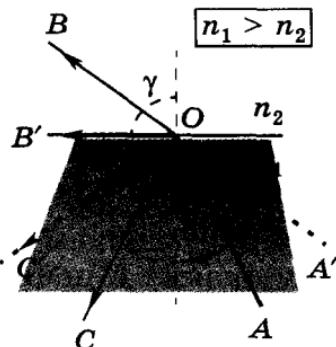


Рис. 37

Наибольшему возможному углу преломления $\gamma = 90^\circ$ соответствует угол падения α_0 . Если угол падения $\alpha > \alpha_0$, то преломленный пучок исчезает и свет отражается от границы раздела в первую среду. Происходит полное отражение света.

Предельный угол полного отражения легко определяется из закона преломления:

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

$$\sin \alpha_0 = n_{21}.$$

Если свет переходит из какой-либо среды с показателем преломления n в воздух, показатель преломления которого можно принять за единицу, то $\sin \alpha_0 = \frac{1}{n}$.

В предыдущем параграфе мы уже показывали, как знание и понимание общих принципов расширяют наши возможности и позволяют решать задачи, казалось бы, далекие от оптики. Вот еще один пример.

ЗАДАЧА

На рисунке 38 (вид сверху) изображен берег озера.

В точке A находится группа людей. В точке B тонет человек. Из точки A одновременно несколько человек бросаются на помощь. Причем все бегут по берегу с одинаковой скоростью $v_1 = 2 \text{ м/с}$ и плывут тоже с одинаковой скоростью $v_2 = 1 \text{ м/с}$. Первым к тонущему подоспел тот, кто бежал под углом $\varphi = 30^\circ$ к линии берега. На каком расстоянии от берега находился тонущий, ес-

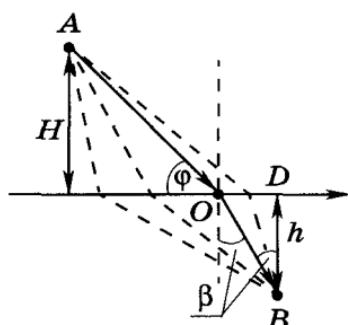


Рис. 38

ли самый быстрый спасатель плыл до тонущего $t = 2$ мин? На каком расстоянии от берега находилась исходная точка A , если тот же спасатель на весь путь затратил время $T = 3$ мин?

Дано:

$$T = 3 \text{ мин}$$

$$t = 2 \text{ мин}$$

$$\phi = 30^\circ$$

$$v_1 = 2 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 1 \text{ м/с}$$

$$h, H - ?$$

минимальности времени движения спасателя:

$$\frac{\sin(90^\circ - \phi)}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

и найдет h из треугольника ODB :

$$h = (OB) \cos \beta = v_2 t \cos \beta.$$

Из условия минимальности времени:

$$\sin \beta = \frac{v_2}{v_1} \sin(90^\circ - \phi) = \frac{v_2}{v_1} \cos \phi,$$

a

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{v_2^2 \cos^2 \phi}{v_1^2}} = \frac{1}{v_1} \sqrt{v_1^2 - v_2^2 \cos^2 \phi}. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$h = \frac{v_2 t}{v_1} \sqrt{v_1^2 - v_2^2 \cos^2 \phi} = \frac{1 \cdot 120}{2} \sqrt{4 - \frac{3}{4}} \approx 108 \text{ (м)}.$$

'Так же легко находится расстояние от точки A до берега:

$$H = v_1 (T - t) \sin \phi = 60 \text{ (м)}.$$

Ответ: $h = 108 \text{ м}$, $H = 60 \text{ м}$.

Решение

Для человека, не знакомого с принципом Ферма, задача будет достаточно сложной. А тот, кто разобрался в изложенном выше, сделает рисунок (см. рис. 38), запишет условие

минимальности времени движения спасателя:

$$\frac{\sin(90^\circ - \phi)}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

и найдет h из треугольника ODB :

$$h = (OB) \cos \beta = v_2 t \cos \beta.$$

Из условия минимальности времени:

$$\sin \beta = \frac{v_2}{v_1} \sin(90^\circ - \phi) = \frac{v_2}{v_1} \cos \phi,$$

a

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{v_2^2 \cos^2 \phi}{v_1^2}} = \frac{1}{v_1} \sqrt{v_1^2 - v_2^2 \cos^2 \phi}. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$h = \frac{v_2 t}{v_1} \sqrt{v_1^2 - v_2^2 \cos^2 \phi} = \frac{1 \cdot 120}{2} \sqrt{4 - \frac{3}{4}} \approx 108 \text{ (м)}.$$

'Так же легко находится расстояние от точки A до берега:

$$H = v_1 (T - t) \sin \phi = 60 \text{ (м)}.$$

Ответ: $h = 108 \text{ м}$, $H = 60 \text{ м}$.

Рассмотрим две задачи на преломление света на границе воздух — вода.

ЗАДАЧА

Какова истинная глубина водоема H , если при наблюдении по вертикали кажущаяся глубина $h = 1,5$ м, а показатель преломления воды $n = 4/3$?

Дано:

$$h = 1,5 \text{ м}$$

$$n = 4/3$$

$$H - ?$$

Решение

Световые лучи от предмета S , лежащего на дне водоема, после преломления образуют пучок, «опи-рающийся» на изображение S' . Но это справедливо только для узкой части выходящего из воды пучка. Именно эта часть и попадает в глаз ввиду малости площади зрачка. Поэтому для определения положения изображения мы выбираем два луча: один вертикальный — SO , другой — SA , отклоненный от вертикали на малый угол β .

Этот луч выходит из воды под углом α к нормали (рис. 39). Малость углов позволяет записать закон преломления в виде:

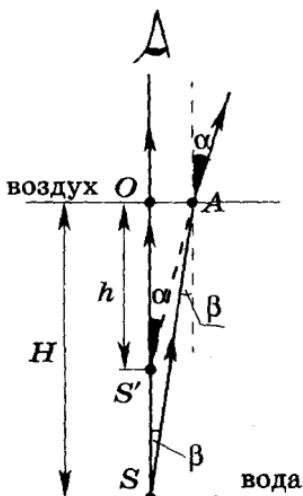


Рис. 39

$$\frac{\alpha}{\beta} = n.$$

Кстати, напоминаем, что мы пользуемся на границе раздела воздух — вода абсолютным показателем преломления воды, так как абсолютный показатель преломления воздуха близок к единице.

Выразим малые углы α и β из треугольников OAS' и OAS :

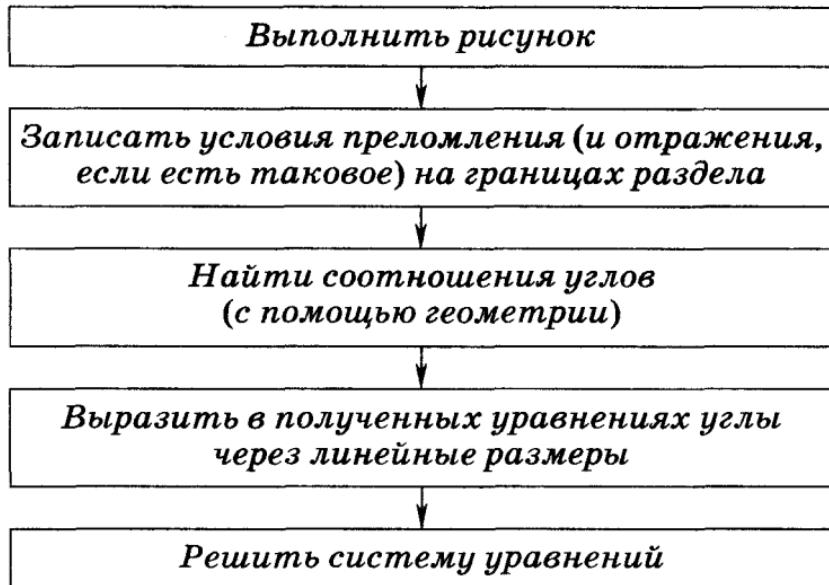
$$\alpha = \frac{OA}{OS'} = \frac{OA}{h}, \beta = \frac{OA}{OS} = \frac{OA}{H}.$$

Подставляя эти выражения в закон преломления, заканчиваем решение:

$$\frac{H}{h} = n, \quad H = nh = \frac{4}{3} \cdot 1,5 = 2 \text{ (м)}.$$

Ответ: $H = 2$ м.

Эта задача проста, но она подсказывает алгоритм решения подобных и более сложных задач.



ЗАДАЧА

Наблюдатель под углом $\alpha = 45^\circ$ к вертикали рассматривает предмет, лежащий на дне водоема, расстояние от поверхности кажется ему равным $h = 1$ м. Найдите глубину водоема. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

Дано:

$$\alpha = 45^\circ$$

$$h = 1 \text{ м}$$

$$n = 4/3$$

$$H - ?$$

Решение

На рисунке 40 показаны два очень близких луча SO и SA от предмета S , расходящихся на угол $\Delta\beta$. Этот угол должен быть на-

столько малым, чтобы расстояние OA между точками выхода из воды выбранных лучей удовлетворяло следующим условиям:

$$OA \ll SO \text{ и } OA \ll S'O.$$

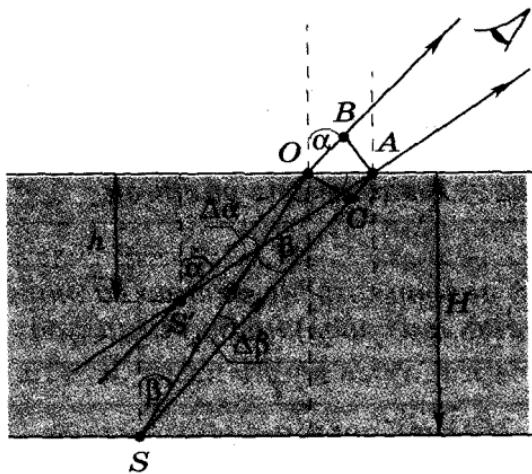


Рис. 40

В предыдущей задаче мы находили соотношение между углами расхождения двух лучей до и после преломления. Но поскольку один луч шел перпендикулярно границе раздела, углами расхождения были сами углы β и α .

В этой задаче углы расхождения лучей — $\Delta\beta$ (до) и $\Delta\alpha$ (после преломления). Соотношение между этими углами можно получить из закона преломления

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

приравняв дифференциалы от обеих частей равенства:

$$\cos \alpha \Delta\alpha = n \cos \beta \Delta\beta.$$

Для тех, кто не силен в дифференциальном исчислении, получим то же соотношение иначе.

Запишем закон преломления

для луча SO : $\sin \alpha = n \sin \beta$;

для луча SO' : $\sin(\alpha + \Delta\alpha) = n \sin(\beta + \Delta\beta)$.

Распишем второе равенство по формуле для синуса суммы двух углов:

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cdot \cos \Delta\alpha + \cos \alpha \cdot \sin \Delta\alpha &= \\ = n(\sin \beta \cdot \cos \Delta\beta + \cos \beta \cdot \sin \Delta\beta).\end{aligned}$$

Учитывая малость углов $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$, можем провести следующие замены:

$$\cos \Delta\alpha \approx \cos \Delta\beta \approx 1, \sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha \text{ и } \sin \Delta\beta \approx \Delta\beta.$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \Delta\alpha \approx n(\sin \beta + \cos \beta \cdot \Delta\beta).$$

Наконец, сократив $\sin \alpha$ и $n \sin \beta$, получаем:

$$\cos \alpha \Delta\alpha \approx n \cos \beta \Delta\beta.$$

Углы $\Delta\beta$ и $\Delta\alpha$ расхождения лучей очень малы (оба луча должны попасть в зрачок), поэтому знак « \approx » можно заменить на знак « $=$ ».

$$\cos \alpha \Delta\alpha = n \cos \beta \Delta\beta.$$

Теперь, как и в предыдущей задаче, надо выразить $\Delta\beta$ и $\Delta\alpha$ через данные задачи. Опустим из точек O и A перпендикуляры OC и AB на лучи, идущие от S и S' . Из рисунка 40 видно, что

$$\Delta\alpha \approx \frac{AB}{S'A}, \text{ а } \Delta\beta \approx \frac{OC}{SO}.$$

Далее, $AB = OA \cdot \cos \alpha$,

$$S'A \approx \frac{h}{\cos \alpha},$$

$$OC = OA \cdot \cos \beta,$$

$$SO = \frac{H}{\cos \beta}.$$

Производим замены:

$$\Delta\alpha \approx \frac{OA \cdot \cos^2 \alpha}{h} \text{ и } \Delta\beta \approx \frac{OA \cdot \cos^2 \beta}{H}.$$

Подставляя полученные выражения для $\Delta\beta$ и $\Delta\alpha$ в уравнение $\cos \alpha \Delta\alpha = n \cos \beta \Delta\beta$ и оставляя по

указанным выше причинам знак равенства, приходим к соотношению:

$$\frac{\cos^3 \alpha}{h} = \frac{n \cos^3 \beta}{H}, \text{ или}$$

$$H = \frac{nh \cdot \cos^3 \beta}{\cos^3 \alpha}.$$

Чтобы получить окончательный ответ в общем виде, произведем замену:

$$\cos \beta = (1 - \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{nh \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\cos^3 \alpha} = \\ &= \frac{h(n^2 - \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}{n^2 \cos^3 \alpha} = \frac{1 \left(\frac{16}{9} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{16}{9} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}} \approx 2,3 \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Ответ: $H \approx 2,3$ м.

Упражнения

3.1. При переходе из воздуха в стекло угол падения монохроматического светового луча $\alpha = 45^\circ$, а угол преломления $\beta = 30^\circ$. Какова скорость распространения света в стекле?

3.2. Световой луч падает из воздуха на поверхность оптически прозрачной среды 1 под углом $\alpha = 60^\circ$ к нормали. Угол преломления при этом получился $\beta_1 = 45^\circ$. При падении того же луча под тем же углом из воздуха на поверхность оптически прозрачной среды 2 угол преломления получился $\beta_2 = 30^\circ$. Чему будет равен угол преломления γ в среде 2 при переходе того же луча из среды 1 в среду 2 с тем же углом падения $\alpha = 60^\circ$?

3.3. При переходе светового луча из воздуха в стекло ($n = 1,5$) угол падения оказался на $\phi = 30^\circ$ больше угла преломления. Найдите угол преломления β .

3.4. Несколько плоскопараллельных оптически прозрачных пластин сложены в стопу. Абсолютные показатели преломления пластин различны. Доказать, что луч света, падающий на первую пластину, выходит из последней параллельно самому себе.

3.5. Вода в бассейне глубиной $H = 1,5$ м накрыта непрозрачной пленкой, в которой проделано небольшое отверстие. Определите радиус R светлого пятна на дне бассейна. Свет снаружи считать рассеянным. Показатель преломления воды $n = 1,33$.

3.6. Ныряльщик видит из воды заходящее Солнце под углом $\phi = 41,4^\circ$ к горизонту. Каков абсолютный показатель преломления воды?

3.7. Детский квадратный бассейн (2×2 м) освещается солнечным светом, падающим перпендикулярно одной паре сторон бассейна. Высота Солнца над горизонтом составляет угол $\phi = 45^\circ$. Глубина наполнения бассейна $H = 1$ м, высота бортика бассейна над водой $h = 0,5$ м. Какая часть k площади дна бассейна находится в тени? Абсолютный показатель преломления воды $n = 4/3$.

3.8. Найдите смещение луча света после прохождения оптически прозрачной плоскопараллельной пластины толщиной d с абсолютным показателем преломления n (рис. 41). Угол падения луча на пластину α , пластина находится в воздухе.

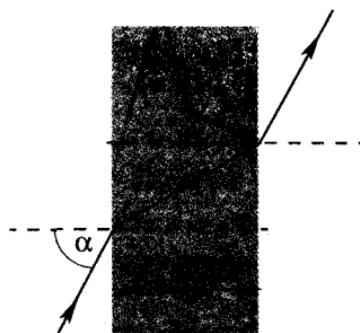


Рис. 41

3.9. В сосуд налиты две несмешивающиеся жидкости с абсолютными показателями преломления n_1 и n_2 ($n_1 > n_2$). Оптически более плотная среда находится снизу. Толщины слоев жидкостей одинаковы и равны d . На дне сосуда находится точечный источник света. Глаз наблюдателя находится на высоте H над поверхностью верхней жидкости на одной вертикали с источником. На каком расстоянии x от глаза наблюдатель видит изображение источника?

3.10. Источник света и глаз наблюдателя находятся на одном перпендикуляре к плоскогармонической стеклянной пластине толщиной $d = 15$ см по разные стороны от нее (рис. 42).

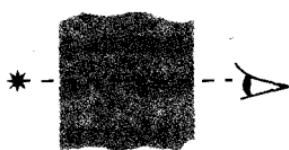


Рис. 42

Абсолютный показатель преломления стекла $n = 1,5$. Найдите расстояние x от источника до его видимого изображения.

3.11. На грань стеклянного клина падает луч света под некоторым углом (в плоскости, перпендикулярной ребру клина) и выходит из другой грани под таким же углом (рис. 43). Найдите угол ϕ между исходным и прошедшим клин лучами.

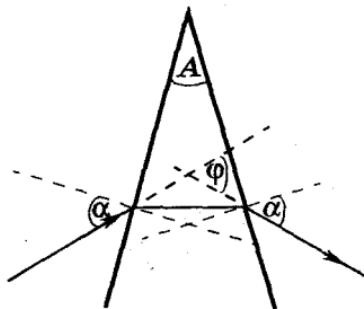


Рис. 43

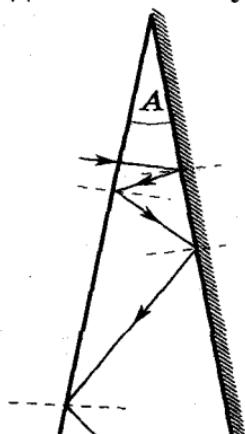


Рис. 44

ми. Абсолютный показатель преломления стекла n , угол между гранями A .

3.12. Одна грань стеклянного ($n = 1,5$) клина посеребрена. На другую грань падает перпендикулярно ей луч света (рис. 44). При каком минимальном угле клина A луч больше не выходит из клина через боковую грань?

3.13. Граница раздела воздух — стекло представляет собой участок выпуклой сферы радиусом R (рис. 45). На линии, проходящей через этот участок и центр его кривизны, расположен точечный источник света S , от которого на поверхность стекла падает узкий пучок световых лучей. Найдите положение изображения источника (расстояние CS'). Расстояние от источника до поверхности стекла SC равно d .



Рис. 45

3.14. Граница раздела воздух — стекло представляет собой участок вогнутой сферы радиусом R (рис. 46). На линии, проходящей через этот участок и центр его кривизны, расположен точечный источник света S , от которого на поверхность стекла падает узкий пучок световых лучей. Найдите положение изображения источника (расстояние CS'). Расстояние от источника до поверхности стекла SC равно d .

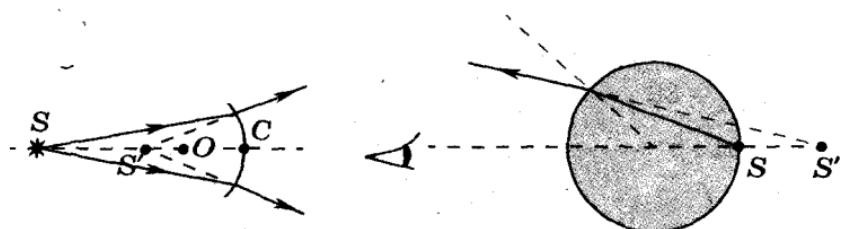


Рис. 46

Рис. 47

3.15. В сферическом аквариуме диаметром $D = 60$ см плавает рыбка. В момент наблюдения глаз человека, центр сферы аквариума и рыбка находятся на одной прямой, причем рыбка находится у противоположной от глаза стенки аквариума (рис. 47). Где находится видимое глазом изображение рыбки? Аквариум тонкостенный, показатель преломления воды $n = 4/3$.

3.16. На дне сосуда с водой лежит плоское зеркало. Толщина слоя воды $h = 10$ см. Расположив глаз на расстоянии $d = 10$ см от поверхности воды, человек видит его изображение. Найдите расстояние H от глаза до его изображения, если показатель преломления воды $n = 4/3$.

3.17. На тонкостенную сферическую колбу, наполненную жидкостью, падает узкий пучок параллельных лучей света так, что ось пучка проходит через центр сферы. На противоположной стенке колбы площадь поперечного сечения пучка в $k = 4$ раза меньше исходного. Найдите показатель преломления жидкости в колбе.

3.18. На поверхность стеклянного шара падает узкий пучок параллельных лучей света так, что ось пучка проходит через центр шара. Радиус шара $R = 10$ см, показатель преломления стекла $n = 1,5$. На каком расстоянии d от центра шара лучи сойдутся в точку?

Ответы

3.1. $v \approx 2 \cdot 10^8$ м/с.

3.2. $\gamma \approx 38^\circ$.

3.3. $\sin \beta = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{n^2 - 2n \cos \varphi + 1}} \approx 0,625, \beta \approx 39^\circ$.

3.5. $R = \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 1,7$ м.

3.6. $n \approx 1,3$.

$$3.7. k = \frac{1}{l} \left(\frac{H \cos \varphi}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi}} + h \right) \approx 0,56.$$

$$3.8. x = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right).$$

$$3.9. x = H + d \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

3.10. $x = 5$ см.

$$3.11. \varphi = 2 \arcsin \left(n \sin \frac{A}{2} \right) - A.$$

3.12. $A \approx 21^\circ$.

$$3.13. CS' = \frac{nRd}{d(n-1) - R}.$$

$$3.14. CS' = \frac{nRd}{d(n-1) + R}.$$

3.15. На расстоянии $x = \frac{2R}{2-n} = 90$ (см) от передней стенки аквариума.

$$3.16. H = 2 \left(d + \frac{h}{n} \right) = 35 \text{ (см)}.$$

3.17. $n = 4/3$.

$$3.18. d = \frac{nR}{2(n-1)} = 15 \text{ (см)}.$$

Тема № 4

Тонкие линзы

Линза — это оптическое прозрачное тело с преломляющимися поверхностями, имеющими форму участков сфер. На рисунке 48 показаны все возможные формы линз.

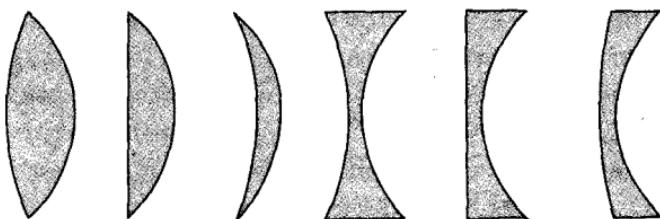


Рис. 48

Линия, соединяющая центры сфер, образующих линзу, называется главной оптической осью. По характеру поверхностей различают линзы: двояковыпуклые, плосковыпуклые, выпукловогнутые, плосковогнутые, двояковогнутые.

По воздействию на световые лучи различают линзы:

собирающие — «пригибающие» к оптической оси световой луч и рассеивающие — «отбрасывающие» от оптической оси световой луч.

Линза называется тонкой, если максимальная толщина a линзы много меньше радиусов обра- зующих ее сфер.

$$a \ll R_1, a \ll R_2.$$



Рис. 49

Схематическое изображение тонких линз показано на рисунке 49.

Свойства тонкой линзы получим, решая типичную задачу по стандартному алгоритму.

ЗАДАЧА

Точечный источник света S расположен на главной оптической оси тонкой двояковыпуклой линзы на расстоянии d от линзы. Доказать, что линза формирует изображение источника, и найти расстояние f от линзы до изображения. Радиусы кривизны преломляющих поверхностей R_1 и R_2 , абсолютный показатель преломления вещества линзы n .

Дано:

d
 R_1
 R_2
 n

$f - ?$

Решение

Опыт, накопленный при решении задач предыдущего раздела, позволяет справиться и с этой.

Но сначала проанализируем данные задачи, чтобы понять, что предполагалось в условии «по умолчанию»:

- по обе стороны от линзы находится воздух, что позволяет пользоваться абсолютным показателем преломления n вместо относительного;
- расстояние d много больше толщины линзы a , что снимает вопрос, от какой точки внутри линзы отсчитывать расстояния;

• угол расхождения лучей, падающих на линзу от источника, достаточно мал, чтобы можно было пользоваться соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha.$$

Как мы уже говорили, лучи, удовлетворяющие этому условию, обычно называют параксиальными.

Теперь обратимся к рисунку 50, на котором представлен ход произвольного луча от источника S .

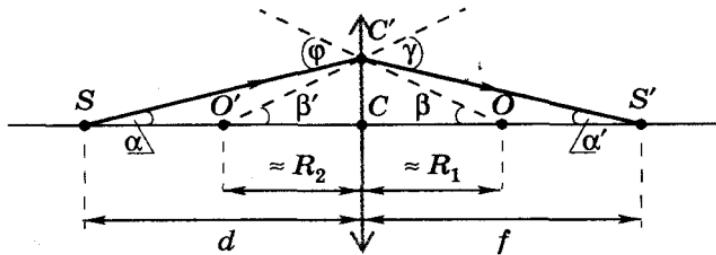


Рис. 50

Луч преломляется на передней поверхности линзы, центр кривизны которой расположен в точке O , а радиус кривизны обозначен через R_1 . Радиус OC' перпендикулярен поверхности, поэтому ϕ — угол падения луча на переднюю поверхность линзы. Луч выходит из линзы под углом γ к нормали, т. е. к радиусу кривизны $O'C'$ задней поверхности линзы. Понятно, что термины «передняя» и «задняя» поверхности определяются не свойствами линзы, а ходом луча.

Для решения задачи необходимо выразить углы α , α' , β , β' .

Рассмотрим $\triangle SC'O$ (см. рис. 50).

$$\phi = \alpha + \beta \quad (1)$$

(внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, с ним не смежных), аналогично

$$\gamma = \alpha' + \beta'. \quad (2)$$

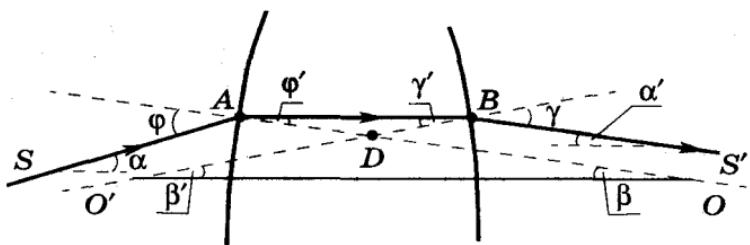


Рис. 51

Остальные соотношения углов получаем из рассмотрения хода луча внутри линзы. На рисунке 51 представлена область точки C' (см. рис. 50) в увеличенном масштабе.

Закон преломления и условие малости углов дают нам еще два уравнения:

$$\varphi = n\varphi' \quad (3)$$

и

$$\gamma = n\gamma'. \quad (4)$$

Наконец, последнее — пятое уравнение получаем из рассмотрения треугольников ABD и $OO'D$ (см. рис. 50). В этих треугольниках углы при общей вершине D равны (как вертикальные), значит:

$$\varphi' + \gamma' = \beta' + \beta. \quad (5)$$

Из уравнений (3) и (4) следует, что

$$\varphi' = \frac{\varphi}{n}; \gamma' = \frac{\gamma}{n},$$

а с помощью уравнений (1) и (2) получим, что

$$\varphi' = \frac{\alpha + \beta}{n}; \gamma' = \frac{\alpha' + \beta'}{n}.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (5):

$$\frac{\alpha + \beta}{n} + \frac{\alpha' + \beta'}{n} = \beta' + \beta.$$

Преобразуем это выражение:

$$\alpha + \beta + \alpha' + \beta' = n\beta' + n\beta,$$

$$\alpha + \alpha' = \beta(n - 1) + \beta'(n - 1),$$

$$\alpha + \alpha' = (\beta + \beta')(n - 1).$$

Так как мы рассматривали параксиальные лучи, углы α , α' , β и β' — малые, заменим синусы малых углов самими углами и, пренебрегая толщиной линзы, запишем:

$$\alpha = \frac{CC'}{d}, \alpha' = \frac{CC'}{f}; \beta = \frac{CC'}{R_1}; \beta' = \frac{CC'}{R_2}.$$

Подставляя выражения в последнее уравнение и сокращая на CC' , получим формулу:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Мы рассматривали ход произвольного луча, значит, полученная формула справедлива для любого луча из узкого пучка от источника. Иными словами, на расстоянии f от тонкой линзы формируется изображение S' точечного источника S , что и требовалось доказать.

Из последней формулы

$$f = \frac{dR_1R_2}{(n - 1)(R_1 + R_2)d - R_1R_2}.$$

Ответ: тонкая линза формирует изображение точечного источника света на расстоянии

$$f = \frac{dR_1R_2}{(n - 1)(R_1 + R_2)d - R_1R_2} \text{ от центра } C \text{ линзы.}$$

Имеет смысл обсудить полученный результат. В правой части уравнения

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

стоит постоянная для каждой конкретной линзы величина, называемая оптической силой линзы. Ее обозначают буквой D . Таким образом,

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D.$$

Величина, обратная оптической силе, называется фокусным расстоянием линзы F . Чаще формулу тонкой линзы записывают в уже знакомом нам виде:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Физический смысл фокусного расстояния тоже прежний — расстояние, на котором сходятся (после прохождения линзы) лучи, падающие на линзу параллельно главной оптической оси (или просто от далекого источника, расположенного на главной оптической оси).

Формулу оптической силы двояковыпуклой линзы

$$D = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

часто называют по понятным причинам «формулой изготовителя».

Аналогичным путем можно получить формулы оптической силы для других типов тонких линз. Но можно пользоваться и уже приведенной формулой, если считать радиусы R_1 и R_2 алгебраическими величинами и добавить правило выбора знаков.

Мы приводим один из возможных способов. Сначала дадим два определения.

Собирающая сферическая поверхность — сферическая граница раздела двух сред, центр кривизны которой лежит со стороны оптически более плотной среды (рис. 52). Поверхность получила название собирающей, так как пригибает

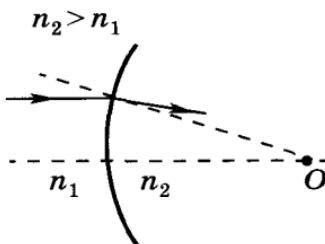


Рис. 52

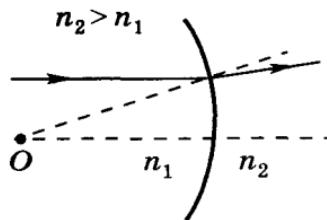


Рис. 53

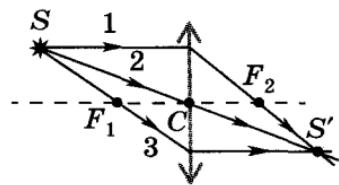
световые лучи к оптической оси, и в результате световой пучок становится сходящимся (собирается).

Рассеивающая сферическая поверхность — сферическая граница раздела двух сред, центр кривизны которой лежит со стороны оптически менее плотной среды (рис. 53). Поверхность получила название рассеивающей, так как отбрасывает лучи от оптической оси, и в результате преломления световой пучок становится расходящимся (рассеивается).

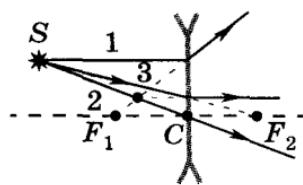
Если в «формуле изготовителя» брать радиус собирающей поверхности линзы со знаком «+», а радиус рассеивающей поверхности линзы со знаком «-», то формула применима для тонкой линзы любого типа.

Строить изображение предмета в линзе помогают три «стандартных» луча (рис. 54):

1) луч, параллельный главной оптической оси, после преломления в линзе проходит сам или своим продолжением через фокус линзы;

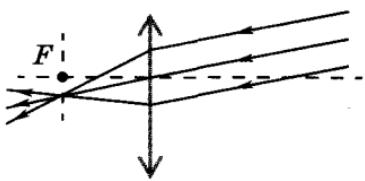


а)

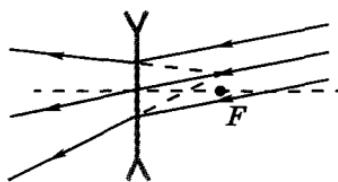


б)

Рис. 54



a)



б)

Рис. 55

2) луч, проходящий через центр линзы, не преломляется;

3) луч, проходящий через передний фокус собирающей линзы или прицеленный в задний фокус рассеивающей линзы, после преломления линзой идет параллельно главной оптической оси.

Кроме того, полезно помнить, что параллельный пучок лучей, направленный под некоторым углом к главной оптической оси, сходится в фокальной плоскости, а точку схождения указывает луч, параллельный пучку и проходящий через центр линзы (*побочная оптическая ось*) (рис. 55). Это утверждение относится и к собирающей, и к рассеивающей линзам, с той лишь разницей, что в случае собирающей линзы речь идет о задней фокальной плоскости, а в случае рассеивающей — о передней (по ходу лучей) фокальной плоскости.

Рассмотрим несколько примеров решения задач.

ЗАДАЧА

Дано положение главной оптической оси OO' , источника света S и его изображения S' в некоторой линзе. Построить изображение отрезка AB (рис. 56) в этой же линзе.

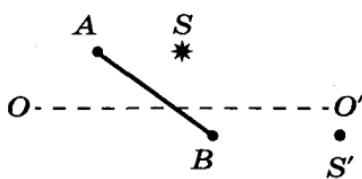
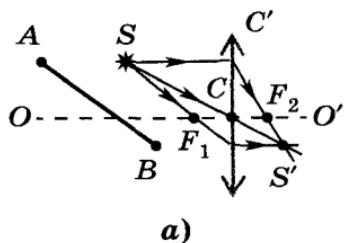


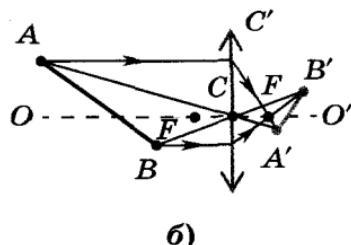
Рис. 56

Решение

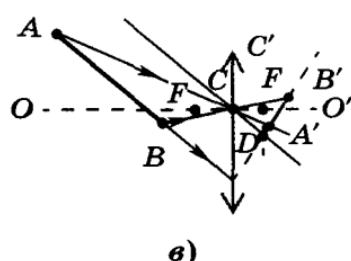
Решение задачи делится на две части: сначала надо найти построением положения центра линзы C и ее фокусов, а затем строить изображение отрезка AB .



a)



b)



c)

Рис. 57

изображения A' и B' точек A и B и соединяя их прямой. Это построение показано на рисунке 57, *б*. Правда, при таком построении мы без каких-либо оснований считаем, что изображение будет отрезком прямой.

Но мы можем выполнить построение и по-другому: направим световой луч вдоль отрезка AB .

Источник S , центр линзы C и изображение S' лежат на одной прямой, значит, пересечение прямой SS' с оптической осью дает положение центра линзы C (рис. 57, *а*).

Далее строим луч, параллельный оси OO' до плоскости CC' , схематически изображающей линзу. После преломления линзой этот луч «направляется» к изображению S' , пересекая оптическую ось в фокусе F_2 . Аналогично устанавливается положение переднего фокуса линзы, только луч строится от изображения к источнику, что позволяет законы обратимости светового луча.

Для построения изображения отрезка AB строим последовательно

С помощью вспомогательного луча, параллельного отрезку AB и проходящего через центр линзы, находим точку D на задней фокальной плоскости, через которую должен пройти преломленный луч. На линии преломленного луча должно лежать изображение отрезка. Положение концов A' и B' изображения получаем с помощью лучей, проходящих через центр линзы (рис. 57, в).

ЗАДАЧА

Найдите минимальное расстояние L от точечного источника света, расположенного на главной оптической оси собирающей линзы, до его действительного изображения.

Решение

Величина L складывается из расстояния d (от предмета до линзы) и f (от линзы до изображения):

$$L = d + f.$$

Заменим f , выразив его из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

$$f = \frac{dF}{d - F},$$

$$L = d + \frac{dF}{d - F}.$$

Мы получили L как функцию параметра d . Минимум этой функции находится по стандартному математическому алгоритму. Находим производную функции L по аргументу d , приравниваем ее к нулю, и из получившегося уравнения

находим значение d , при котором функция минимальна.

$$L' = 1 + \frac{F(d - F) - dF}{(d - F)^2} = 0,$$

$$d^2 - 2dF + F^2 + dF - F^2 - dF = 0.$$

После элементарных упрощений получаем:

$$d = 2F.$$

Подстановкой в формулу для L находим:

$$L_{\min} = 4F.$$

Ответ: $L_{\min} = 4F$.

ЗАДАЧА

Горящая свеча высотой h , опирающаяся своим основанием на главную оптическую ось собирающей линзы с фокусным расстоянием F , приближается к линзе со скоростью v_0 . Чему равна скорость изображения пламени свечи v_1 в момент, когда расстояние свечи от линзы равно d_1 ?

Дано:

h

v_0

F

d_1

$v_1 — ?$

Решение

При движении предмета (свечи) величина d является функцией времени: $d = d(t)$, а ее производная по времени d' — это скорость перемещения свечи v_0 . Соответственно,

производная от $f(t)$ по времени — это скорость v перемещения изображения свечи вдоль оптической оси.

Продифференцируем формулу линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D$ по времени:

$$-\frac{1}{d^2} d' - \frac{1}{f^2} f' = 0,$$

$$-\frac{1}{d^2} v_0 - \frac{1}{f^2} v = 0,$$

$$v = -\frac{f^2}{d^2} v_0.$$

Разные знаки у v_0 и v (разные знаки у d' и f') означают, что когда d уменьшается, f — растет, и наоборот. В нашем случае свеча приближается к линзе со скоростью v_0 , а ее изображение удаляется от линзы со скоростью

$$v = \frac{f^2}{d^2} v_0.$$

Но нас интересует скорость пламени свечи v , а оно перемещается, согласно построению, вдоль луча LM (рис. 58).

Из рисунка понятно, что скорость перемещения свечи v является проекцией скорости пламени v_1 на главную оптическую ось, поэтому

$$v_1 = \frac{v}{\cos \alpha}.$$

Функцию угла α находим из прямоугольного треугольника с основанием F и катетом h .

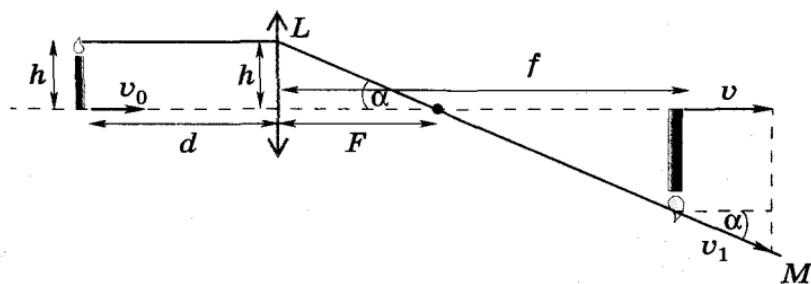


Рис. 58

$$\cos \alpha = \frac{F}{\sqrt{F^2 + h^2}}.$$

Итак,

$$v_1 = v_0 \frac{f^2 \sqrt{F^2 + h^2}}{d^2 F}.$$

Осталось выразить f через d из формулы линзы

$$f = \frac{Fd}{d - F}$$

и подставить вместо d заданное в условии d_1 .

$$v_1 = v_0 \frac{F^2 d^2 \sqrt{F^2 + h^2}}{(d - F)^2 d^2 F} = v_0 \frac{F \sqrt{F^2 + h^2}}{(d_1 - F)^2}.$$

Ответ: $v_1 = v_0 \frac{F \sqrt{F^2 + h^2}}{(d_1 - F)^2}.$

Упражнения

4.1. На тонкую собирающую линзу (рис. 59) падает луч. Постройте ход этого луча после преломления в линзе.

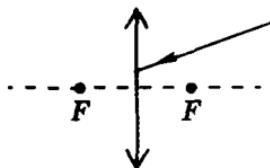


Рис. 59

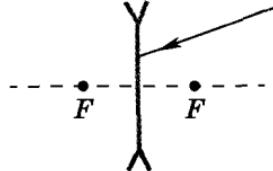


Рис. 60

4.2. На тонкую рассеивающую линзу (рис. 60) падает луч. Постройте ход этого луча после преломления в линзе.

4.3. Вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы перемещается предмет с очень далекого расстояния (из бесконечности) к линзе, проходя последовательно участки:

а) от бесконечности до двойного фокусного расстояния ($\alpha > 2F$);

- б) от двойного фокусного расстояния до фокуса линзы ($F < d < 2F$);
 в) от фокуса до линзы ($d < F$).

С помощью геометрического построения проследите за перемещениями изображения и укажите его характеристики (прямое или перевернутое, увеличенное или уменьшенное, действительное или мнимое).

4.4. Вдоль оптической оси перемещается предмет с очень далекого расстояния (из бесконечности) к тонкой рассеивающей линзе. С помощью геометрического построения проследите за перемещением изображения и укажите его характеристики (действительное или мнимое, прямое или перевернутое, увеличенное или уменьшенное).

4.5. Даны положения оптической оси, линзы и ход луча (рис. 61). Найдите построением положения фокусов линзы.

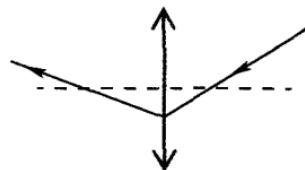
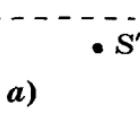


Рис. 61

4.6. Даны положения предмета S и его изображения S' по отношению к главной оптической оси тонкой линзы (рис. 62). Найдите построением положения центра линзы и ее фокусов для каждого случая. Определите также, в каких случаях линза собирающая, а в каких рассеивающая.

$S *$

$S *$



а)



б)



в)



г)

Рис. 62

4.7. Предмет находится на главной оптической оси на расстоянии $a = 10$ см от переднего фокуса собирающей линзы, а перпендикулярный оси экран, на котором получается четкое изображение предмета, расположен на расстоянии $b = 40$ см от заднего фокуса линзы. Найдите фокусное расстояние линзы F .

4.8. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна плоскости экрана. От лампы, помещенной на главной оптической оси, на экране возникло четкое, увеличенное в $\Gamma = 2$ раза изображение. Когда линзу передвинули ближе к экрану на $l = 24$ см, на нем снова возникло ее четкое изображение. Найдите фокусное расстояние линзы.

4.9. Расстояние между лампочкой и экраном L . Собирающая линза, главная оптическая ось которой совпадает с линией, соединяющей лампочку и экран, дает на экране четкое изображение лампочки при двух различных положениях, расстояние между которыми l . Найдите фокусное расстояние F линзы.

4.10. Расстояние между двумя точечными источниками света $L = 24$ см. Где надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 9$ см, чтобы изображения источников совпали?

4.11. В сосуд с жидкостью (показатель преломления n) помещена линза с фокусным расстоянием F (в жидкости). Линза расположена горизонтально на расстоянии F от дна сосуда, как и экран, лежащий на дне. Найдите радиус R светлого пятна на экране, если на поверхность воды падает рассеянный свет.

4.12. Угловой диаметр лунного диска (наблюдение проводится в полнолуние) $\alpha = 0,52^\circ$. Определите диаметр d изображения, формируемого собирающей линзой с фокусным расстоянием $F = 1$ м.

Указание: изображение лежит в фокальной плоскости, а его размеры определяют лучи от

противоположных концов диаметра Луны, проходящие через центр линзы.

4.13. Диаметр солнечного диска в $n = 100$ раз меньше расстояния до Земли. Собирающая линза дала изображение Солнца площадью $S = 4 \text{ мм}^2$. Найдите фокусное расстояние F линзы.

4.14. Угол расхождения пучка лучей, падающих на тонкую линзу от точечного источника света, расположенного на главной оптической оси, после прохождения линзы увеличивается в $n = 4$ раза. Найдите оптическую силу линзы D , если источник находится на расстоянии $d = 1,2 \text{ м}$ от линзы.

4.15. Угол расхождения пучка лучей, падающих на тонкую линзу от точечного источника света, расположенного на главной оптической оси, после прохождения линзы уменьшился $n = 3$ раза. Найдите фокусное расстояние F линзы, если источник находится на расстоянии $d = 0,2 \text{ м}$ от линзы.

4.16. Светонепроницаемая перегородка с круглым отверстием расположена параллельно экрану. На перпендикуляре к экрану, проходящем через центр отверстия с противоположной от экрана стороны, помещен точечный источник света. Источник образует на экране светлый круг, диаметр которого в $n = 2$ раза больше диаметра отверстия. После того как в отверстие вставили рассеивающую линзу, диаметр светлого пятна увеличился в $\Gamma = 1,5$ раза. Определите оптическую силу линзы при условии, что расстояние между перегородкой и экраном $a = 20 \text{ см}$.

4.17. Светонепроницаемая перегородка с круглым отверстием расположена параллельно экрану. На перпендикуляре к экрану, проходящем через центр отверстия с противоположной от эк-

рана стороны, помещен точечный источник света. На экране образуется светлый круг, диаметр которого в $n = 2$ раза больше диаметра отверстия. После того как в отверстие вставили собирающую линзу, диаметр светлого пятна уменьшился в $k = 1,5$ раза. Определите фокусное расстояние линзы F при условии, что расстояние между перегородкой и экраном $a = 10$ см.

4.18. Находящийся на расстоянии $d = 20$ м от железной дороги фотограф делает снимок дрезины, проезжающей мимо со скоростью $v = 18$ км/ч, в момент наименьшего расстояния между ними. Найдите величину размытия Δh изображения на пленке. Фокусное расстояние линзы объектива $F = 10$ см, время экспозиции $\tau = 0,01$ с.

4.19. Точечный источник света движется со скоростью $v = 10$ см/с по главной оптической оси собирающей линзы. Определите скорость изображения v_i в момент, когда источник находится на расстоянии $d = 1,5 F$.

4.20. Мастер должен изготовить плосковыпуклую линзу с оптической силой $D = 2$ Дптр из стекла с показателем преломления $n = 1,5$. Какого радиуса R сферическую поверхность он должен выточить?

Ответы

4.1. См. рис. 63.

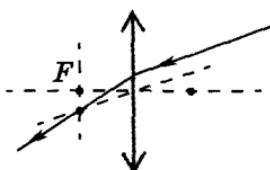


Рис. 63

4.2. См. рис. 64.

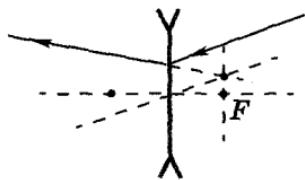


Рис. 64

4.3. а) $d > 2F$, изображение действительное, перевернутое, уменьшенное;

б) $F < d < 2F$, изображение действительное, перевернутое, увеличенное;

в) $d < F$, изображение мнимое, прямое, увеличенное.

4.4. От переднего фокуса к линзе. Изображение мнимое, прямое, уменьшенное.

4.5. См. рис. 65.

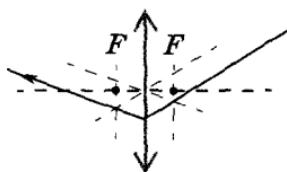


Рис. 65

4.6. См. рис. 66.

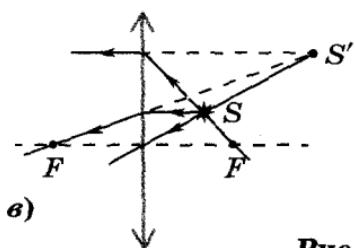
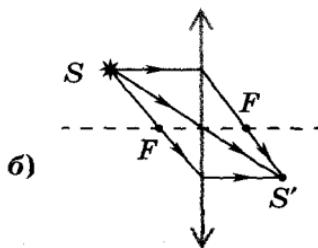
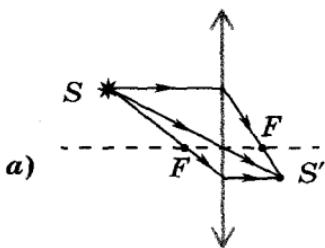


Рис. 66

4.7. $F = 20$ см.

4.8. $F = 16$ см.

4.9. $F = \frac{L^2 - l^2}{4L}$.

4.10. Линзу надо поместить между источниками на расстоянии $d_1 = 6$ см, или $d_2 = 18$ см от любого из них.

4.11. $R = \frac{F}{\sqrt{n^2 - 1}}$.

4.12. $d \approx 9,1$ мм.

4.13. $F = n \sqrt{\frac{4S}{\pi}} \approx 23$ см.

4.14. $D = -2,5$ Дптр.

4.15. $F = 30$ см.

4.16. $D = -\frac{n(k-1)}{d} = -5$ Дптр.

4.17. $F = 15$ см.

4.18. $\Delta h \approx \frac{Fv\tau}{d} = 0,2$ мм.

4.19. $|v_u| = 40$ см/с.

4.20. $R = 25$ см.

Тема № 5

Оптические системы

Если сложить вплотную две-три тонких линзы, тонкую линзу с тонким зеркалом или собрать любую другую (имеющую разумный смысл) комбинацию линз и зеркал с общей главной оптической осью, то получится тонкая оптическая система, для которой справедлива уже знакомая формула

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_c,$$

в которой D_c — оптическая сила тонкой системы. D_c складывается из оптических сил отдельных элементов системы, напомним, сложенных вплотную, чтобы суммарная толщина системы была много меньше радиусов кривизны оптических поверхностей элементов.

Докажем справедливость этого для двух линз.

ЗАДАЧА

Две тонкие линзы с оптическими силами D_1 и D_2 сложили вплотную так, что их главные оптические оси совпадают (рис. 67). Чему равна оптическая сила системы?

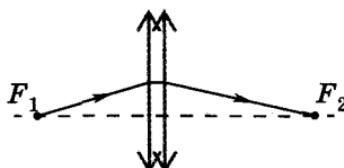


Рис. 67

Дано:

$$D_1$$

$$D_2$$

$$D_c - ?$$

Решение

На рисунке 67 показаны две сложенные вплотную тонкие линзы с общей главной оптической осью. F_1 — передний фокус первой линзы, F_2 — задний фокус второй линзы. Если поместить точечный источник света в фокус F_1 , то любой луч, падающий на первую линзу,

между линзами пойдет параллельно оптической оси и после прохождения второй линзы попадет в фокус F_2 . Таким образом, применяя формулу тонкой линзы к системе

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_c,$$

мы должны заменить d на F_1 , а f на F_2 :

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = D_c,$$

т. е. $D_1 + D_2 = D_c$.

Ответ: $D_1 + D_2 = D_c$.

Основную задачу геометрической оптики можно сформулировать так: на главной оптической оси некоторой оптической системы помещен точечный источник света. Найдите положение его изображения.

На примере следующей задачи попробуем разработать алгоритм решения.

ЗАДАЧА

В тонкое сферическое зеркало с радиусом кривизны $R = 32$ см, расположенное горизонтально, налили немного воды (показатель преломления $n = 4/3$). На вертикали, проходящей через полюс зеркала (на главной оптической оси), на расстоя-

нии $d = 60$ см от зеркала помещен точечный источник света S . Найдите положение его изображения, формируемого предложенной оптической системой.

Дано:

$$R = 32 \text{ см}$$

$$n = 4/3$$

$$d = 60 \text{ см}$$

$$f = ?$$

Решение

Положение изображения определяет точка пересечения двух произвольных лучей от источника, прошедших оптическую систему. Первым

взьмем луч, идущий по оптической оси. После прохождения оптической системы этот луч все равно будет идти по оптической оси. Следовательно, нужно найти точку пересечения произвольно выбранного луча с главной оптической осью после взаимодействия с оптической системой. Это возвращает нас к алгоритму, который выручал нас ранее (см. с. 34).

На рисунке 68: S — точечный источник света, S' — его изображение, O — центр кривизны сложного вогнутого зеркала.

Углы α , β и γ достаточно малы, чтобы для каждого из них было справедливо:

$$\operatorname{tg} i \approx \sin i \approx i.$$

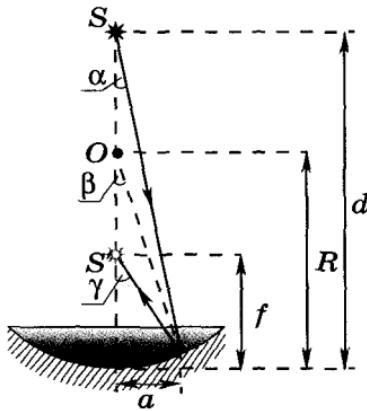


Рис. 68

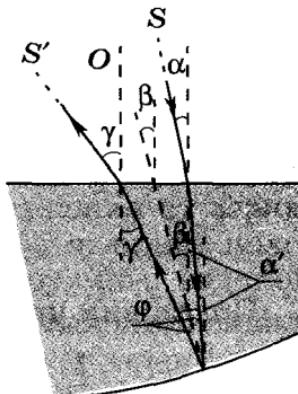


Рис. 69

Оптическая система тонкая, что снимает вопрос: от какой точки системы отсчитывать расстояния f , R и d .

Чтобы найти соотношения между углами, как уже было при выводе формулы тонкой линзы, надо подробнее рассмотреть ход луча в воде (рис. 69).

Внимательно рассматривая рисунок, видим:

$$\alpha = n\alpha' \text{ (условия преломления),}$$

$$\gamma = n\gamma' \text{ (условия преломления),}$$

$$\gamma' = \phi + \phi + \alpha' \text{ (углы накрест лежащие),}$$

$\beta = \alpha' + \phi$ (внешний угол треугольника равен сумме внутренних и с ним не смежных).

В этих уравнениях нам надо избавиться от α' , γ' и ϕ , чтобы остались малые углы α , β и γ , которые легко выражаются через геометрические параметры a , f , d и R .

Выражаем ϕ из последнего уравнения и подставляем в предпоследнее: $\phi = \beta - \alpha'$,

$$\gamma' = 2(\beta - \alpha') + \alpha' = 2\beta - \alpha'.$$

Первые два уравнения позволяют избавиться от α' и γ' : $\alpha' = \frac{\alpha}{n}$, $\gamma' = \frac{\gamma}{n}$,

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{\gamma}{n} = 2\beta, \text{ или}$$

$$a + \gamma = 2n\beta.$$

Заменяя оставшиеся углы через линейные параметры (см. рис. 68) — $\alpha \approx \frac{a}{d}$, $\gamma \approx \frac{a}{f}$, $\beta \approx \frac{a}{R}$ и отбрасывая знак приближения, с достаточной точностью получаем:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2n}{R}.$$

Подставим числовые значения:

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 32}; f = 15 \text{ см.}$$

Ответ: $f = 15$ см.

Другой алгоритм решения этой задачи можно условно изобразить схемой:

$$S \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \dots \rightarrow S'.$$

Вычисляем положение изображения S_1 , формируемого первым элементом системы



Считая S_1 источником для второго элемента оптической системы, вычисляем положение изображения S_2 , формируемого вторым элементом системы



Продолжаем операцию, пока расчет для последнего элемента системы не даст положение искомого изображения S'

Покажем алгоритм в действии. Но сначала с помощью «формулы изготовителя» вычислим фокусное расстояние плосковыпуклой водяной линзы, сформированной сферической поверхностью вогнутого зеркала.

$$\frac{1}{F_{\text{л}}} = (n - 1) \frac{1}{R_3} \quad (\text{второй радиус } R_2 \rightarrow \infty),$$

$$\frac{1}{F_{\text{л}}} = \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \frac{1}{32}, F_{\text{л}} = 96 \text{ см.}$$

По ходу лучей система состоит из линзы, зеркала и снова линзы (после отражения от зеркала). С помощью формулы линзы находим положение изображения S_1 , формируемого водяной линзой. Для упрощения все вычисления выполняем сразу в числах:

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{96}; f_1 = -160 \text{ см.}$$

Изображение S_1 получилось мнимым, что и следовало ожидать, так как источник S располагается между фокусом и линзой.

Для зеркала изображение S_1 является действительным источником. Применяя ту же формулу для зеркала, находим положение изображения S_2 .

$$\frac{1}{160} + \frac{1}{f_2} = \frac{2}{32}, f_2 = \frac{160}{9} \text{ см.}$$

Изображение S_2 действительное, т. е. лежит с лицевой стороны зеркала. Но для линзы это изображение является мнимым, так как отраженные от зеркала лучи сходятся за линзой. И поэтому

$$-\frac{9}{160} + \frac{1}{f} = \frac{1}{96}, \text{ откуда } f = 15 \text{ см.}$$

Изображение S' лежит в 15 см над зеркалом.

Ответ: $f = 15$ см.

Этот алгоритм хорош тем, что может быть применен к любой оптической системе, независимо от того, сложены элементы системы вплотную или разнесены на некоторые расстояния.

Третий подход к решению задачи самый простой.

Вычисляем оптическую силу системы, складывая оптические силы ее элементов:

$$D_c = D_1 + D_2 + \dots + D_n$$



По формуле тонкой оптической системы находим положение изображения

Наша система состоит из водяной линзы (оптическая сила $D_{л}$) и вогнутого зеркала (оптическая

сила D_3). Но поскольку световой луч дважды взаимодействует с линзой (до отражения от зеркала и после), то оптическая сила системы

$$D_c = 2D_{\text{л}} + D_3.$$

$$D_c = 2\frac{(n-1)}{R} + \frac{2}{R} = \frac{2n}{R}.$$

И по формуле

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2n}{R},$$

которая у нас уже получалась в первом варианте решения, находим $f = 15$ см.

Упражнения

5.1. Плоская сторона плосковыпуклой линзы посеребрена. Радиус кривизны поверхности стекла R , показатель преломления n . Где нужно поместить точечный источник света, чтобы его изображение совпало с предметом?

5.2. Светонепроницаемая перегородка с круглым отверстием диаметром $a = 10$ см параллельна экрану. В отверстие вставлена линза с оптической силой $D_1 = 10$ Дптр. Диаметр оправы линзы совпадает с диаметром отверстия. Перед линзой, по другую сторону от экрана на главной оптической оси помещен точечный источник света на расстоянии $b = 15$ см от линзы. При этом на экране образуется яркая точка. Каким будет диаметр d светлого пятна на экране, если к линзе вплотную приставить еще одну линзу с оптической силой $D_2 = -5$ Дптр? Главные оптические оси линз совмещены.

5.3. Светонепроницаемая перегородка с круглым отверстием диаметром $a = 10$ см параллельна экрану. В отверстие вставлена линза с оптической силой $D_1 = 10$ Дптр. Перед линзой, по дру-

гую сторону от экрана на главной оптической оси помещен точечный источник света на расстоянии $b = 15$ см от линзы. При этом на экране образуется яркая точка. Каким будет диаметр d светлого пятна на экране, если к линзе вплотную приставить еще одну линзу с оптической силой $D_2 = -2$ Дптр? Главные оптические оси линз совмещены, диаметры линз и отверстия одинаковы.

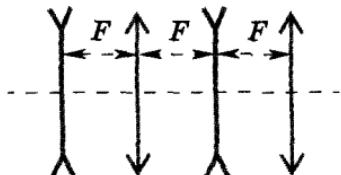


Рис. 70

5.4. Система из двух рассеивающих и двух собирающих линз с общей главной оптической осью и одинаковыми фокусными расстояниями F расположены, как показано на рисунке 70. Найдите положения правого F_p и левого F_l фокусов системы.

Указание: лучи падают на систему слева параллельно главной оптической оси.

5.5. В фокусе собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см помещен точечный источник света. По другую сторону линзы помещают вогнутое зеркало с радиусом кривизны $R = 24$ см. Главные оптические оси линзы и зеркала совпадают. На каком расстоянии a от линзы надо поместить зеркало, чтобы система дала изображение источника в двойном фокусе линзы?

Указание: проведите расчет по цепочке $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$, где S_1 — изображение Солнца в линзе, S_2 — изображение S_1 в зеркале, S_3 — изображение S_2 в линзе.

5.6. Оптическая система состоит из тонкой линзы с фокусным расстоянием $F = 16$ см и плоского зеркала, перпендикулярного главной оптической оси линзы. Оптическая ось системы направлена на Солнце. На каком расстоянии a от

линзы надо поместить плоское зеркало, чтобы система дала изображение Солнца на расстоянии $b = 24$ см от линзы?

5.7. Оптическая система состоит из тонкой линзы с фокусным расстоянием $F = 30$ см и плоского зеркала, помещенного на расстоянии $L = 15$ см от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси. Предмет находится на расстоянии $d = 15$ см от линзы (рис. 71). Найдите геометрическим построением положение изображения, формируемого системой. Проверьте результат расчетом.

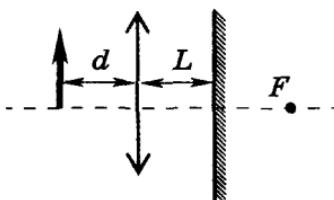


Рис. 71

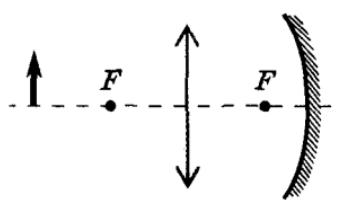


Рис. 72

5.8. Оптическая система состоит из тонкой линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см и вогнутого зеркала с радиусом кривизны $R = 20$ см. Линза и зеркало имеют общую главную оптическую ось (рис. 72). Предмет помещен на расстоянии $d = 40$ см от линзы. Расстояние от линзы до зеркала $L = 30$ см. Найдите графическим построением положение изображения, формируемого системой. Подтвердите результат расчетом.

5.9. Вогнутая сторона выпукловогнутой линзы посеребрена так, что получилось своеобразное выпуклое зеркало. Радиус вогнутой поверхности $R = 48$ см. Показатель преломления стекла линзы $n = 1,5$. Каким должен быть радиус r выпуклой поверхности линзы, чтобы падающий на нее пучок параллельных лучей света после отражения оставался параллельным?

5.10. Наименьшее расстояние, с которого можно делать четкие снимки фотоаппаратом, $a = 1$ м. После того как к объективу добавили еще одну линзу, это расстояние уменьшилось до $a' = 0,5$ м. Найдите оптическую силу D добавленной линзы.

5.11. Четыре линзы с общей главной оптической осью и фокусными расстояниями $F_1 = 52$ см, $F_2 = 30$ см, $F_3 = 21$ см, $F_4 = 10$ см расположены, как показано на рисунке 73. Найдите положение правого фокуса системы.

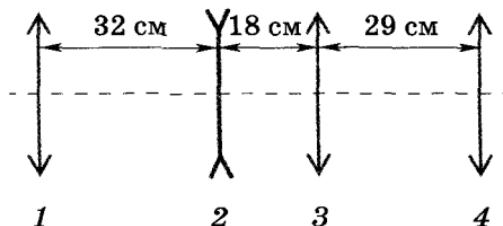


Рис. 73

Ответы

5.1. $f = \frac{R}{n - 1}$.

5.2. $d = 15$ см.

5.3. $d = 6$ см.

5.4. Правый фокус системы $F_{\text{п}}$ совпадает с правым фокусом последней собирающей линзы, левый фокус системы $F_{\text{л}}$ совпадает с центром первой собирающей линзы.

5.5. $a = 42$ см.

5.6. $a = 32$ см.

5.7. Изображение действительное, перевернутое, находится на расстоянии $a = 60$ см слева от линзы.

5.8. Изображение действительное, перевернутое, находится на расстоянии $a = 100$ см слева от линзы.

5.9. $r = 16$ см.

5.10. $D = 1$ Дптр.

5.11. Правый фокус системы находится на расстоянии $f = 30$ см справа от крайней линзы.

Тема № 6

Глаз. Простейшие дефекты зрения

Обязательным элементом оптической системы при наблюдении является человеческий глаз. С точки зрения геометрической оптики глаз представляет собой сферическую камеру с линзой на передней стенке (хрусталик) и экраном на задней (сетчатка). Световые лучи раздражают окончания зрительного нерва, покрывающие сетчатку. Поступающие сигналы мозг преобразует в зрительный образ. Чем большую площадь на сетчатке занимает изображение, тем большее число нервных окончаний участвует в его восприятии и тем детальнее видится предмет.

Площадь изображения на сетчатке зависит от углового размера предмета. Угловой размер предмета — это угол между двумя лучами от крайних габаритных точек предмета к глазу (рис. 74).

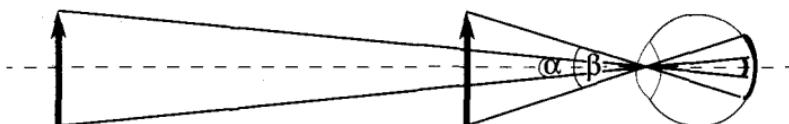


Рис. 74

Угловой размер предмета зависит от расстояния до глаза. Чем ближе предмет к глазу, тем больше его угловой размер ($\beta > \alpha$). Но изменение

расстояния d от предмета до линзы (хрусталика) приводит к изменению расстояния f от линзы до четкого изображения, а расстояние от хрусталика до сетчатки неизменно. Четкое изображение на сетчатке достигается изменением фокусного расстояния хрусталика специальными мышцами. Этот процесс называется *аккомодацией* глаза.

Аккомодация происходит в определенных пределах. При далеком ($d \rightarrow \infty$) расположении предмета глазные мышцы не напряжены. При приближении предмета увеличивается его угловой размер, но зато напрягаются мышцы, сжимая хрусталик. Минимальное расстояние L от предмета до глаза, при котором аккомодация в течение длительного времени не вызывает неприятных ощущений, называется *расстоянием наилучшего зрения*. Для человека с нормальным зрением принято считать $L = 25$ см.

Оптические системы наблюдения нужны для того, чтобы рассмотреть либо очень далекий предмет, либо очень мелкий. В обоих случаях углового размера предмета очень мал.

Отношение углового размера изображения предмета, воспринимаемого глазом, к угловому размеру предмета, рассматриваемого невооруженным глазом, называется *угловым увеличением* Г системы, или просто *увеличением* (рис. 75)

$$\Gamma = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}, \text{ для малых углов } \Gamma = \frac{\beta}{\alpha}.$$

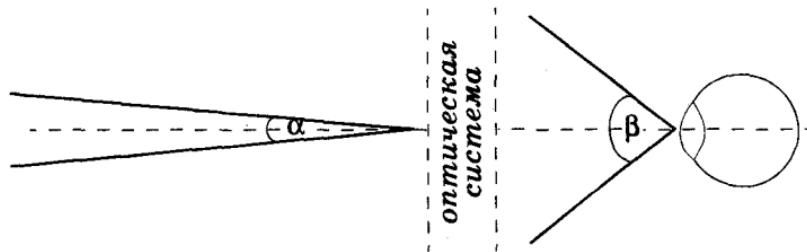


Рис. 75

Простейшим прибором, меняющим угол зрения, является лупа. Лупа — короткофокусная собирающая линза, используемая для увеличения углового размера мелкого предмета, плохо наблюдаемого с расстояния наилучшего зрения. При рассмотрении предмета с помощью лупы предмет помещают между фокусом и линзой так, чтобы получилось мнимое изображение на расстоянии L от линзы. Глаз помещается вплотную к линзе. Ход лучей показан на рисунке 76.

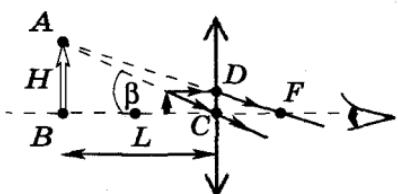


Рис. 76

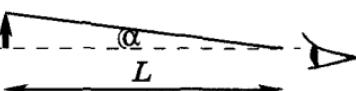


Рис. 77

Малый предмет высотой h на расстоянии L имеет угловой размер $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{L}$ (рис. 77). Угловой размер изображения, видимого через линзу,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{L}.$$

H находим из подобия треугольников CDF и ABF :

$$\frac{H}{h} = \frac{L + F}{F}.$$

Угловое увеличение линзы

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{H}{h} = \frac{L + F}{F} = \frac{L}{F} + 1.$$

Заметим, что при перемещении предмета к фокусу изображение удаляется от линзы, но его угловой размер меняется очень мало. Если предмет поместить точно в фокусе, то в глаз будут попадать параллельные лучи, как от бесконечно удаленной стрелки. Глаз человека с нормальным

зрением легко фокусирует такие лучи на сетчатку. При этом угловой размер изображения становится равным

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{F}, \text{ а увеличение } \Gamma = \frac{L}{F} \text{ (рис. 78).}$$

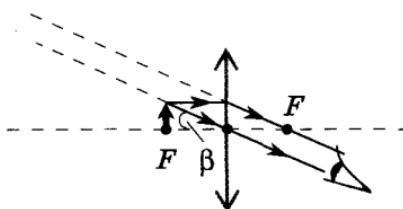


Рис. 78

Эту формулу применяют чаще для расчета увеличения лупы.

Более эффективная оптическая система, предназначенная для наблюдения очень мелких предметов, называется

микроскопом. Идея прибора проста. В непосредственной близости от переднего фокуса короткофокусной собирающей линзы (объектив) помещается объект наблюдения S . Линза формирует действительное изображение S_1 на расстоянии, в несколько раз превышающем фокусное. Это изображение далее рассматривается с помощью лупы (окуляр).

Схема формирования изображения S' , воспринимаемого глазом через микроскоп, показана на рисунке 79.

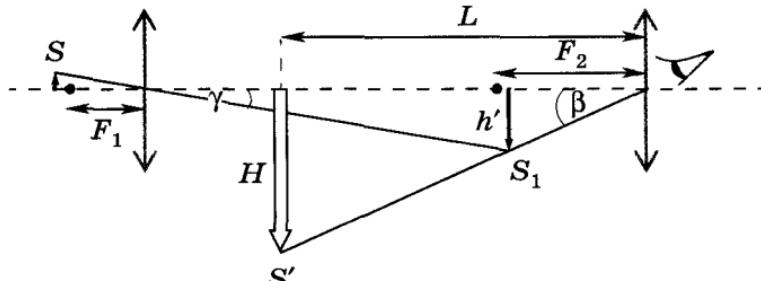


Рис. 79

ЗАДАЧА

Фокусное расстояние объектива микроскопа $F_1 = 14$ мм. Предмет S , поперечный размер которого $h = 0,1$ мм, помещают на расстоянии

$d = 15$ мм от объектива. Фокусное расстояние окуляра $F_2 = 25$ мм. Окуляр используется в качестве лупы. Найдите угловой размер β изображения S' , воспринимаемого глазом. Определите угловое увеличение микроскопа Γ . Найдите также поперечный размер изображения H .

Дано:

$$F_1 = 14 \text{ мм}$$

$$d = 15 \text{ мм}$$

$$h = 0,1 \text{ мм}$$

$$F_2 = 25 \text{ мм}$$

$$\beta, \Gamma, H — ?$$

Решение

Воспользуемся рисунком 79. Сначала с помощью формулы линзы найдем положение промежуточного изображения h' .

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_1}, f = \frac{dF_1}{d - F_1}.$$

По углу $\gamma = \frac{h}{d} = \frac{h'}{f}$ находим размер промежуточного изображения h' :

$$h' = \frac{h}{d} f = \frac{h}{d} \frac{dF_1}{(d - F_1)} = \frac{hF_1}{d - F_1}.$$

Угловой размер φ промежуточного изображения получим, если будем рассматривать отрезок h' с того же расстояния L , что и предмет h .

$$\varphi = \frac{h'}{L} = \frac{hF_1}{(d - F_1)L}.$$

Возвращаясь к угловому увеличению линзы при аккомодации глаза на расстояние наилучшего зрения, находим угловой размер изображения:

$$\begin{aligned} \beta &= \varphi \left(\frac{L}{F_2} + 1 \right) = \frac{hF_1}{(d - F_1)L} \cdot \left(\frac{L}{F_2} + 1 \right) = \\ &= \frac{0,1 \cdot 14}{1 \cdot 250} \cdot \left(\frac{250}{25} + 1 \right) \approx 0,062 \text{ (рад).} \end{aligned}$$

Угловой размер предмета (см. рис. 77), видимого невооруженным глазом,

$$\alpha = \frac{h}{L} = \frac{0,01}{25} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ (рад)},$$

а угловое увеличение

$$\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{F_1}{d - F_1} \left(\frac{L}{F_2} + 1 \right) = \frac{620 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 155.$$

Наконец, линейный размер видимого изображения

$$H = L\beta \approx 25 \cdot 620 \cdot 10^{-4} = 1,55 \text{ (см)}.$$

Ответ: $\beta \approx 620 \cdot 10^{-4}$ (рад) $\approx 3,5^\circ$, $\Gamma = 155$, $H = 1,55$ см.

В реальном микроскопе объектив и окуляр состоят из нескольких линз, компенсирующих оптические дефекты, возникающие из-за того, что линзы должны иметь очень малые фокусные расстояния.

Для более грубой оценки увеличения (углового или линейного — в данном случае безразлично из-за малости углов) можно применять другую формулу. Из подобия треугольников (см. рис. 79) следует:

$$\frac{h'}{h} \approx \frac{f}{F_1} \text{ и } \frac{H}{h'} \approx \frac{L}{F_2}.$$

Перемножив эти равенства, получаем:

$$\Gamma \approx \frac{H}{h} \approx \frac{fL}{F_1 F_2}.$$

Можно считать f приблизительно равным (без F_2) длине D тубуса микроскопа.

Итак, приблизительно увеличение микроскопа рассчитывается по формуле:

$$\Gamma \approx \frac{DL}{F_1 F_2}.$$

Удаленный предмет, имеющий малый угловой размер, удобно наблюдать с помощью другой оптической системы, называемой *телескопом* (зрительной, или подзорной, трубой, а также с некоторыми конструктивными приспособлениями — полевым биноклем). Принципиальная схема телескопа показана на рисунке 80.

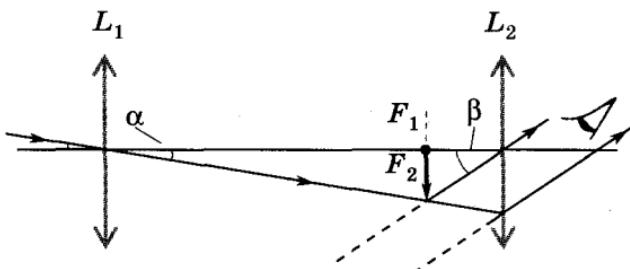


Рис. 80

Объективом служит длиннофокусная собирающая линза L_1 . Угловой размер предмета, наблюдаемого невооруженным глазом, — α . Удаленность наблюдаемого предмета такова, что в формуле линзы первым слагаемым можно пренебречь ($d \rightarrow \infty$),

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_1} \Rightarrow \frac{1}{d} \rightarrow 0 \Rightarrow f = F_1$$

и промежуточное изображение предмета h' попадает в фокальную плоскость объектива. Из рисунка видно, что размер промежуточного изображения

$$h' = F_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Чем больше фокусное расстояние объектива, тем больше размер промежуточного изображения. Фокусное расстояние объектива ограничивается только разумными размерами трубы телескопа.

Далее, расположив окуляр так, чтобы его передний фокус совпал с задним фокусом объектива (а здесь находится промежуточное изображение), мы рассматриваем изображение предмета через лупу L_2 с аккомодацией глаза на бесконечность. При этом угловой размер изображения, воспринимаемого глазом, — β .

$$h' = F_2 \operatorname{tg} \beta.$$

Сравнивая последние два равенства, находим:

$$F_1 \operatorname{tg} \alpha = F_2 \operatorname{tg} \beta,$$

откуда угловое увеличение телескопа

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Интересно, что вместо лупы можно использовать в качестве окуляра короткофокусную рассеивающую линзу. Для этого задний фокус окуляра F_2 совмещают с промежуточным изображением предмета, фактически с задним фокусом объектива (рис. 81).

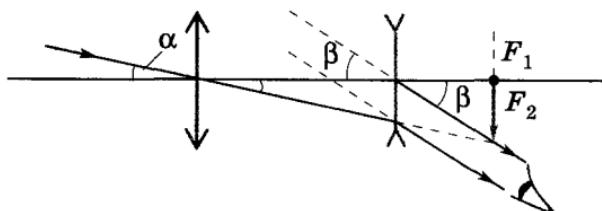


Рис. 81

Лучи, падающие на рассеивающую линзу так, что их продолжения пересекаются в задней фокальной плоскости, после преломления становятся параллельными. Глаз аккомодируется на

бесконечность. Для невооруженного глаза угловой размер предмета равен α . После прохождения системы параллельные лучи (см. рис. 81) попадают в глаз от верхнего края видимого изображения предмета. Другими словами, оптическая система телескопа изменяет угловой размер предмета — он становится равным β . Остальное просто. Как и в телескопе

$$h' = F_1 \cdot \alpha, h' = |F_2| \cdot \beta,$$

и угловое увеличение

$$\Gamma = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{F_1}{|F_2|}.$$

Тот же результат, что и при помощи телескопа, но схема позволяет уменьшить длину зрительной трубы на два фокусных расстояния окуляра. Иногда такой телескоп называют трубой Галилея. Кстати, эта система линз применяется в театральном бинокле.

ЗАДАЧА

Натуралист наблюдает за птичкой с расстояния $d = 30$ м. Затем делает снимок фотоаппаратом с длиннофокусным объективом ($F = 30$ см). Потом с помощью фотоувеличителя, увеличив кадр в $n = 10$ раз, рассматривает фотографию невооруженным глазом. На какое расстояние x фотография «приблизила» птичку к натуралисту?

Дано:

$$d = 30 \text{ м}$$

$$F = 30 \text{ см}$$

$$n = 10$$

$$x = ?$$

Решение

При фотографировании расстояние от объектива до пленки определяется формулой линзы:

$$f = \frac{dF}{d - F}.$$

Пусть габаритный размер птички H , тогда размер изображения h' на пленке

$$h' = H \frac{f}{d} = \frac{H d F}{d(d - F)}.$$

Размер изображения h на фотографии в n раз больше h' :

$$h = nh' = \frac{n H d F}{d(d - F)}.$$

Можно приступать к вычислению углового увеличения системы. Угловой размер птички α при непосредственном наблюдении

$$\alpha = \frac{H}{d},$$

а фотография рассматривается с расстояния наилучшего зрения L , поэтому угловой размер β той же птички с фотографии:

$$\beta = \frac{h}{L} = \frac{n H d F}{d(d - F)}.$$

Угловое увеличение

$$\Gamma \approx \frac{\beta}{\alpha} = \frac{n d F}{L(d - F)},$$

пренебрегая F по сравнению с d , приходим к формуле:

$$\Gamma \approx \frac{n F}{L} = \frac{10 \cdot 30}{25} = 12.$$

При малых угловых размерах расстояния от глаза до объекта обратно пропорциональны угло-

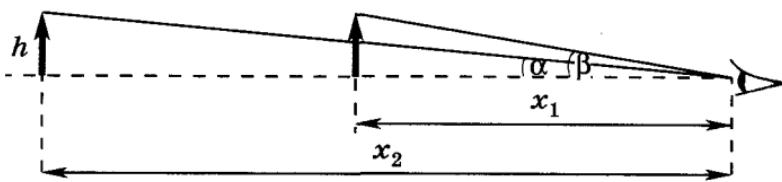


Рис. 82

вым размерам. Действительно, из рисунка 82 видно, что

$$\alpha = \frac{h}{x_2}, \text{ а } \beta = \frac{h}{x_1},$$

$$\text{откуда } \frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\Gamma}.$$

В соответствии с этим система «сократила» расстояние от объекта наблюдения до

$$x = \frac{d}{12} = \frac{30}{12} = 2,5 \text{ м.}$$

Ответ: $x = 2,5 \text{ м.}$

Глаз человека одновременно и совершенный, и несовершенный оптический прибор. Совершенство проявляется в способности самостоятельно аккомодироваться на различные расстояния. Несовершенство — дефекты зрения, которыми страдают в той или иной степени большинство людей. Самыми простыми дефектами являются близорукость и дальнозоркость. Рисунок 83 поясняет, в чем проявляются эти дефекты.

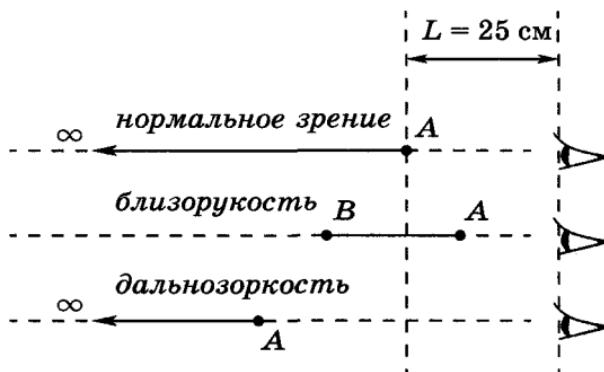


Рис. 83

Нормальный человек видит резко очертания предмета в диапазоне от расстояния наилучшего зрения до бесконечности ($A \rightarrow \infty$).

Область резкого зрения близорукого человека ограничена некоторым небольшим отрезком ($A \rightarrow B$).

Дальнозоркий человек начинает резко видеть предметы с расстояния, превышающего L ($A \rightarrow \infty$).

Этих представлений достаточно, чтобы понять, какие очки нужны для исправления простых дефектов зрения.

Чтобы близорукий человек видел удаленные предметы так же резко, как человек с нормальным зрением, его очки должны «перебросить» далекий предмет на дальнюю границу резкого зрения, т. е. сформировать его изображение в точке B (рис. 84).

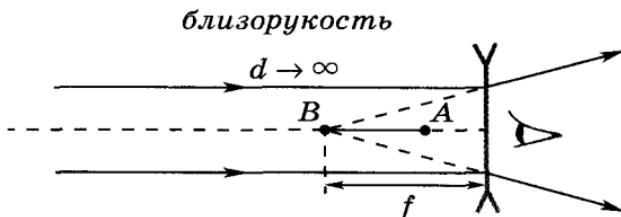


Рис. 84

По формуле линзы

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = D, \text{ при } d \rightarrow \infty \quad \frac{1}{d} \rightarrow 0 \Rightarrow D_{\text{близорукого}} = -\frac{1}{f}.$$

Здесь f — расстояние от глаза до дальней границы резкого зрения B . Знак «-» стоит потому, что изображение должно быть мнимым, т. е. лежать по одну сторону с предметом от линзы.

Установить расстояние f от глаза до точки B несложно, например, постепенно удаляя от невооруженного глаза мелкий текст и фиксируя расстояние, когда очертания букв начинают расплываться.

Задача очков для человека, страдающего дальнозоркостью, — обеспечить резкое зрение с расстояния $L = 25$ см. Для этого линза очков должна «перебрасывать» предмет с расстояния L на

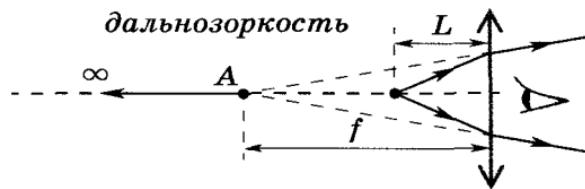


Рис. 85

ближнюю границу резкого зрения A дальнозоркого человека (рис. 85).

По формуле линзы

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{f} = D, D_{\text{дальнозоркого}} = \frac{1}{L} - \frac{1}{f}.$$

Здесь f — расстояние от глаза до ближней границы резкого зрения A . Знак « $-$ » стоит потому, что изображение должно быть мнимым, т. е. лежать по одну сторону с предметом от линзы.

Установить расстояние f от глаза до точки A тоже просто, например, постепенно удаляя от глаза мелкий текст и фиксируя расстояние, когда очертания букв станут резкими.

Упражнения

6.1. Внутренние стенки оптических приборов покрывают черной матовой краской. Зачем?

6.2. Водитель автомобиля заметил дорожный знак. После того как автомобиль проехал расстояние $L = 60$ м, угловой размер знака увеличился в $n = 2$ раза. На каком расстоянии x от знака водитель заметил его?

6.3. В фокусе объектива телескопической трубы, направленной на Луну, помещают фотопленку. Затем с помощью контактной печати (без увеличения) изготавливают фотоснимок, который рассматривают с расстояния наилучшего зрения. Каково угловое увеличение системы, если фокусное расстояние объектива $F = 2$ м?

6.4. Зритель на галерке пользуется театральным биноклем с двукратным увеличением. Расстояние между объективом и окуляром бинокля при наведении на сцену оказалось равным $L = 4$ см. Найдите фокусные расстояния объектива и окуляра.

6.5. Школьник решил самостоятельно изготовить простейший микроскоп. В его распоряжении две одинаковые положительные линзы с фокусным расстоянием $F = 3$ см. Какой длины трубка понадобится ему, если он хочет добиться увеличения $\Gamma \approx 70$?

6.6. Увеличение объектива микроскопа $\Gamma_1 = 60$. Чему равно фокусное расстояние окуляра микроскопа $F_{\text{ок}}$, если микроскоп обеспечивает увеличение $\Gamma = 660$?

6.7. Фокусное расстояние окуляра микроскопа $F_{\text{ок}} = 16,7$ мм. Увеличение микроскопа $\Gamma = 600$. Какое увеличение Γ_1 даст этот микроскоп при замене окуляра на другой, имеющий оптическую силу $D = 20$ Дптр?

6.8. Двухлинзовый телескоп длиной $L = 1,4$ м (расстояние между линзами) дает увеличение $\Gamma = 34$. Определите фокусные расстояния $F_{\text{ок}}$ и $F_{\text{об}}$ окуляра и объектива.

6.9. Художник рассматривает мелкий узор на стене с расстояния $a = 36$ см. Чтобы рассмотреть подробности, он помещает между глазом и стенкой собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 8$ см на расстоянии $b = 6$ см от стенки. Какое угловое увеличение Γ даст эта операция? Расстояние от глаз до стенки не меняется.

6.10. Фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F = 40$ мм, ход объектива $\delta = 1$ мм. С какого минимального расстояния d_{\min} можно вести качественную съемку этим аппаратом?

6.11. Ближайшая точка, на которую может быть сфокусирован фотоаппарат, находится на расстоянии $d_{\min} = 2$ м от объектива. Куда переместится эта точка, если к объективу вплотную приставить линзу с оптической силой $D = +2$ Дптр?

6.12. Невооруженным глазом дальновидный человек видит резко границу, разделяющую черное и белое полуполя с расстояния $L = 100$ см и дальше. Какой оптической силы D очки вы ему порекоменуете?

6.13. Близорукий человек, сняв очки, резко видит себя в зеркале с расстояния $L = 20$ см от зеркала и ближе. Определите оптическую силу его очков.

6.14. Дальнозоркий человек пользуется очками с оптической силой $D = +5$ Дптр. Какие предметы может видеть резко этот человек без очков?

Ответы

6.1. Для поглощения рассеянного излучения.

6.2. $x = 120$ м.

6.3. $\Gamma = \frac{F}{L} = 8$.

6.4. $F_{\text{об}} = 8$ см, $F_{\text{ок}} = -4$ см.

6.5. $D \approx 25$ см.

6.6. $F_{\text{ок}} = 25$ мм.

6.7. $\Gamma_1 \approx 225$.

6.8. $F_{\text{об}} = 136$ см, $F_{\text{ок}} = 4$ см.

6.9. $\Gamma = \frac{8}{3} \approx 2,66$.

6.10. $d_{\min} \approx 1,6$ м.

6.11. Приблизится к объективу. Расстояние от объектива до ближайшей точки резкого фокусирования $d'_{\min} = 40$ см.

6.12. $D = 3$ Дптр.

6.13. $D = -2,5$ Дптр.

6.14. Никакие. Лучи, расходящиеся от любых действительных предметов (даже очень удаленных), фокусируются за сетчаткой глаза.

Тема № 7

Квантовая природа света и строение атома

Состояние атома, получившего дополнительную энергию от внешнего источника, называется *возбужденным*. Возбужденные состояния нестабильны. Атом, возвращаясь в основное состояние, «сбрасывает» лишнюю энергию в виде электромагнитного излучения. Так выглядит механизм рождения световой волны. Но каждый раз атом избавляется от конечного количества энергии. Эта энергия ограничена в пространстве величиной $L = c\Delta t$ (Δt — время перехода атома из возбужденного в основное состояние) и распространяется со скоростью света c

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Такая порция световой энергии называется *квантом света*.

Для объяснения спектра излучения абсолютно черного тела Планк предположил, что свет излучается веществом не непрерывно, а *дискретно*, т. е. отдельными порциями. Причем энергия каждой порции (кванта) ϵ пропорциональна частоте v световой волны:

$$\epsilon = hv,$$

где коэффициент пропорциональности $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ — постоянная Планка

По сути гипотеза Планка подразумевала корpusкулярное «устройство» света, где квант света играет роль элементарной световой частицы.

Корпускулярно-волновой дуализм света проявляется в том, что кроме чисто волновых эффектов (интерференция, дифракция, преломление) ряд явлений значительно легче объясняется, если представлять свет, как поток частиц (фотоэффект, давление света и др.). Формула энергии кванта устанавливает связь между этими представлениями: слева стоит энергия частицы ϵ , справа — частота соответствующей электромагнитной волны v .

Согласно формуле Эйнштейна

$$E = mc^2$$

масса светового кванта

$$m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Кванты видимой части спектра чаще называют *фотонами*. Энергия покоя фотона (кванта) равна нулю, поэтому по теории относительности он от рождения до гибели движется со скоростью c .

Чем больше энергия кванта света, тем ярче проявляются его корпускулярные свойства. Кванты высоких энергий обычно называют гамма-квантами.

Импульс фотона может быть определен по формуле

$$p = \frac{\epsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Наличие у фотона импульса — причина светового давления на поверхность какого-либо тела.

Пусть на зачерненную поверхность (полное поглощение) падает нормально свет. Будем рассматривать свет, как поток частиц — фотонов, скорость которых перпендикулярна площадке ΔS . Спектральный состав света произволен, т. е. поток состоит из частиц с различной энергией и импульсом. Согласно второму закону Ньютона в

импульсной форме сила F , действующая на площадку в течение времени Δt , связана с полученным стенкой импульсом Δp_{ct} соотношением

$$\vec{F}\Delta t = \Delta \vec{p}_{ct}.$$

Изменение импульса поверхности равно изменению импульсов всех фотонов, поглощенных поверхностью за время Δt .

$$\Delta p_{ct} = \sum |\Delta p_{iph}|, |\Delta p_{iph}| = \frac{h v_i}{c} - 0 = \frac{h v_i}{c},$$

$$\Delta p_{ct} = \sum_{i=1}^N \frac{h v_i}{c} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^N h v_i.$$

$$\sum_{i=1}^N h v_i = W,$$

где W — полная энергия всех фотонов, упавших на площадку ΔS на время Δt .

Таким образом,

$$F \Delta t = \frac{W}{c} \text{ и } F = \frac{W}{c \Delta t},$$

а давление

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{1}{c} \frac{W}{\Delta S \Delta t},$$

$\frac{W}{\Delta S \Delta t}$ — плотность потока энергии электромагнитной волны.

Среднее значение этой величины называется интенсивностью электромагнитной волны I и не зависит от того, какие фотоны входят в световой поток. Поэтому получившаяся формула давления света имеет следующий вид:

$$P_r = \frac{I}{c}.$$

Если свет падает на зеркальную поверхность, то каждый фотон, отражаясь, передает поверхности двойной импульс, вследствие чего удваивается и давление света

$$P_3 = \frac{2I}{C}.$$

Корпускулярные представления хорошо объясняют фотоэффект — явление выхода электронов с облучаемой светом поверхности металла.

Свободный электрон может поглотить фотон. Энергия фотона может оказаться достаточно, чтобы электрон преодолел потенциальный барьер (совершил работу выхода) на границе металла и покинул его. Считая энергию свободного электрона пренебрежимо малой по сравнению с энергией кванта, можем записать закон сохранения энергии для фотоэффекта следующим образом:

$$hv + 0 = Q + A + \frac{mv^2}{2}.$$

Энергия поглощенного фотона частично теряется при движении электрона в толще металла (Q), частично тратится на совершение работы выхода (A), остальная энергия остается у электрона в виде кинетической энергии.

Если потеря энергии на «блуждание» электрона внутри металла не было, то последнее слагаемое приобретает смысл максимально возможной кинетической энергии электрона:

$$hv = A + \left(\frac{mv^2}{2} \right)_{\max}.$$

Эта формула носит название формулы Эйнштейна для фотоэффекта.

Минимальная частота света (или максимальная длина волны), вызывающая фотоэффект, называется красной границей фотоэффекта.

$$v_{\min} = \frac{A}{h}, \text{ или } \lambda_{\max} = \frac{ch}{A}.$$

Мы уже говорили, что источником излучения света являются возбужденные атомы. Поглощение атомом энергии (переход в возбужденное состояние) означает некоторые неустойчивые перестроения в электронной оболочке и никоим образом не затрагивает ядро атома.

Одним из видов электромагнитного излучения является γ -излучение. Спонтанное испускание γ -кванта ядром атома во многом напоминает испускание фотонов возбужденными атомами, но γ -излучение представляет собой фотоны высокой энергии. Это свойство присуще только некоторым элементам (или их изотопам) и называется *радиоактивностью*. Радиоактивный атом находится в метастабильном состоянии. Вероятность испускания γ -кванта таким ядром не зависит от предыстории ядра. Иными словами, сколько бы времени отдельно взятое ядро ни находилось во «взведенном» состоянии, вероятность «выстрела» (выброс γ -кванта) в последующий промежуток времени не становится больше.

Ядра различных элементов могут испускать не только γ -кванты. Существуют радиоактивные элементы, испускающие α -частицы (ядра гелия), β -частицы (электроны, или позитроны), нейтроны (n), протоны (p).

Выброс заряженной частицы меняет заряд ядра. Это означает, что происходит превращение одного элемента в другой, в силу чего акт радиоактивного испускания принято называть актом *распада*. Распад, как правило, бывает комбинированным — одновременно испускаются разного рода частицы. Предсказать, когда произойдет распад данного атома, невозможно. Определенный смысл имеют только утверждения о поведении в среднем большой совокупности атомов. Именно в среднем число атомов, распадающихся за данный интервал времени, определяется законом радиоактивного распада.

Статистическая случайность распада означает следующее: возьмем два препарата одного и того же радиоактивного элемента. Пусть в первом препарате в некоторый момент времени t_0 содержится N_1 нераспавшихся атомов, во втором — N_2 . Причем N_1 и N_2 очень большие числа. Через время $\Delta t = T$ распадается половина атомов из препарата N_1 . Очевидно, что в препарате N_2 за то же время T также распадется половина атомов. Промежуток времени T называется *периодом полураспада*.

Получим математическую форму закона радиоактивного распада. Пусть в момент начала отсчета времени препарат содержал N_0 радиоактивных атомов. По прошествии времени T (период полураспада) половина атомов распадется, а половина останется радиоактивными (рис. 86).

$$N(T) = N_0 \cdot \frac{1}{2} = N_0 \cdot 2^{-1}.$$

Спустя время $t = 2T$ только четверть начального числа атомов не потеряет способности к распаду.

$$N(2T) = N_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = N_0 \cdot 2^{-2}.$$

Через время $t = 3T$ останется

$$N(3T) = N_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = N_0 \cdot 2^{-3}$$

радиоактивных атомов и т. д.

Теперь понятно, как записать формулу остаточной радиоактивности через время t после начала отсчета:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-n},$$

где n — число периодов полураспада, прошедших с начала отсчета времени

$$n = \frac{t}{T}.$$

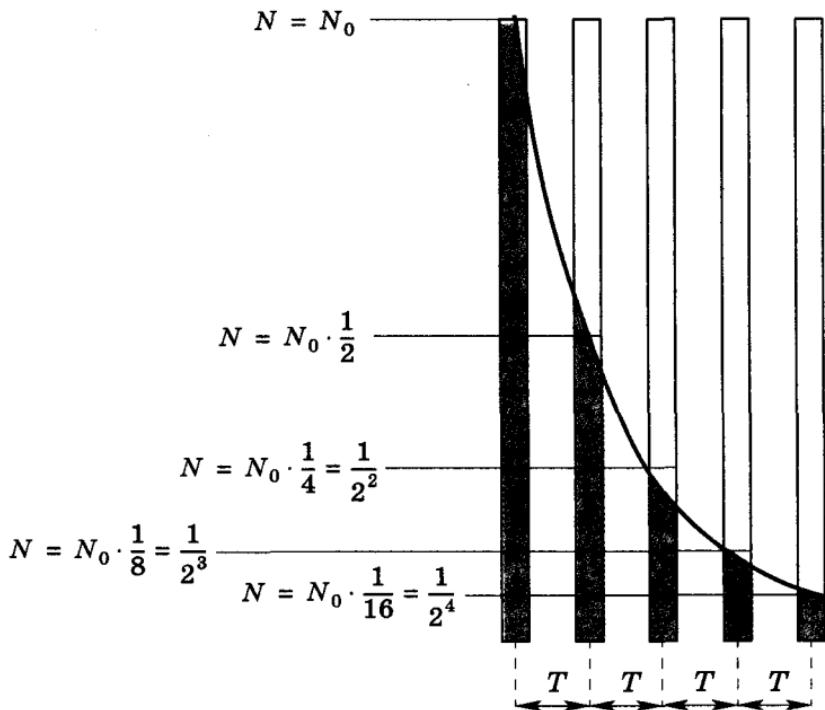


Рис. 86

Окончательно, через время t из начального количества N_0 радиоактивных атомов с возбужденным состоянием ядра останется

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T} \text{ атомов.}$$

Соответственно, за это же время распадется

$$N'(t) = N_0 - N_0 \cdot 2^{-t/T} = N_0(1 - 2^{-t/T}) \text{ ядер.}$$

Период полураспада — основная величина, характеризующая скорость радиоактивного распада.

Периоды полураспада различных атомов имеют сильно различающиеся значения (от долей секунды до тысячелетий).

ЗАДАЧА

Согласно гипотезе де Бройля корпускулярно-волновой дуализм присущ не только фотонам, но

и любым другим частицам, причем связь импульса частицы p и длины волны λ аналогична фотонной: $p = h/\lambda$. Сравните длину волны электрона, движущегося со скоростью $v = 10^6 \text{ м/с}$, с длиной волны фотона в вакууме, если его частота $v = 3,9 \cdot 10^4 \text{ Гц}$ (красный цвет).

Дано:

$$v_{\phi} = 3,9 \cdot 10^4 \text{ Гц}$$

$$v_{\text{эл}} = 10^6 \text{ м/с}$$

$$k = \lambda_{\phi}/\lambda_{\text{эл}} - ?$$

Решение

Скорость волны связана с частотой и длиной волны соотношением

$$v = \lambda v.$$

Для фотона $\lambda_{\phi} = \frac{c}{v_{\phi}}$ (c — скорость света в вакууме).

Длину волны, соответствующую электрону, находим из формулы де Броиля:

$$\lambda_{\text{эл}} = \frac{h}{mv_{\text{эл}}} \quad (m — \text{масса электрона}),$$

$$k = \frac{\lambda_{\phi}}{\lambda_{\text{эл}}} = \frac{cmv_{\text{эл}}}{v_{\phi}h} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6}{3,9 \cdot 10^{14} \cdot 6,6 \cdot 10^{-34}} \approx 10^3.$$

Ответ: $k \approx 10^3$.

ЗАДАЧА

Энергия фотона $E = 3 \text{ эВ}$. Найдите показатель преломления среды λ , в которой длина волны этого фотона $\lambda = 300 \text{ нм}$.

Дано:

$$E = 3 \text{ эВ}$$

$$\lambda = 300 \text{ нм}$$

$$n - ?$$

Решение

1 эВ — энергия, которую приобретает (или теряет) в электрическом поле свободный электрон

при перемещении между двумя точками с разностью потенциалов $\Delta\Phi = 1 \text{ В}$.

$$1 \text{ эВ} = |q \cdot \Delta\phi| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

По энергии фотона находим частоту его электромагнитной волны:

$$\nu = \frac{E}{h}.$$

Скорость v световой волны в интересующей нас среде

$$v = \lambda\nu = \frac{\lambda E}{h},$$

и показатель преломления

$$n = \frac{c}{v} = \frac{ch}{\lambda T} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 6,6 \cdot 10^{-34}}{300 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,375.$$

Ответ: $n = 1,375$.

ЗАДАЧА

Оцените, с какого расстояния L видна в безвоздушном пространстве горящая электрическая лампочка мощностью $p = 15$ Вт. Считайте, что в излучение видимой части спектра электромагнитных волн переходит $k \approx 0,02$ часть потребляемой мощности. Примите в качестве нижней границы чувствительности глаза $\sigma = 50$ фотонов в секунду. Диаметр зрачка глаза $d = 4$ мм.

Дано:

$$p = 15 \text{ Вт}$$

$$k \approx 0,02$$

$$\sigma = 50 \text{ ф/с}$$

$$d = 4 \text{ мм}$$

$$L - ?$$

Решение

Лампочку можно считать точечным источником света. Будем считать свет монохроматическим с длиной волны, соответствующей примерно середине видимой части спектра $\lambda \approx 0,5 \text{ мкм}$.

Так как мощность светового излучения равна $W = kp$, а энергия одного кванта $E = h\nu = hc/\lambda$, количество фотонов N , испускаемое лампочкой ежесекундно,

$$N = \frac{k p \lambda}{h c}.$$

Это же количество частиц каждую секунду пересекает любую замкнутую поверхность, окружающую лампочку. Пусть источник света находится на предельном от глаза расстоянии L . Мысленно окружим лампочку сферой того же радиуса. Поток частиц n , приходящийся на единицу площади этой сферы,

$$n = \frac{N}{S_{\text{сфера}}^{\text{сфера}}} = \frac{N}{4\pi L^2} = \frac{k p \lambda}{h c 4\pi L^2}.$$

Количество частиц, попадающих на площадь зрачка ежесекундно,

$$\sigma = n \cdot S_{\text{зрачка}} = n \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{k p \lambda}{4\pi h c L^2} \cdot \frac{\pi d^2}{4}.$$

Откуда и находим L :

$$L = \frac{d}{4} \sqrt{\frac{k p \lambda}{h c \sigma}} \approx \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4} \sqrt{\frac{0,02 \cdot 15 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 50}} \approx \\ \approx 1,2 \cdot 10^5 \text{ (м)} = 120 \text{ (км)}.$$

Ответ: $L \approx 120$ км.

Результат кажется удивительным, но еще более удивительна чувствительность человеческого глаза, способного фиксировать световой сигнал при мощности $p \approx 10^{-17}$ Вт. Кроме того, оценочный расчет производился для вакуума. В земных условиях придется учитывать поглощение и рассеяние света молекулами и взвешенными частицами воздуха.

ЗАДАЧА

Поверхность металла облучается монохроматическим светом с длиной волны λ_1 . Максимальная энергия фотоэлектронов при этом оказалась равной E_1 . Во сколько раз $k = \lambda_1 / \lambda_2$ надо уменьшить длину волны падающего света, чтобы максимальная скорость фотоэлектронов возросла в δ раз?

Дано:

$$\lambda_1$$

$$E_1$$

$$\delta = v_2/v_1$$

$$k = \lambda_1/\lambda_2 - ?$$

Решение

Запишем формулу Эйнштейна для фотоэффекта для обоих случаев облучения:

$$h \frac{c}{\lambda_1} = A + E_1, \quad h \frac{c}{\lambda_2} = A + E_2.$$

При увеличении скорости электрона в δ раз его кинетическая энергия возрастает в δ^2 раз:

$$E_2 = \frac{m(\delta v)^2}{2} = \delta^2 \frac{mv^2}{2} = \delta^2 E_1.$$

Подставив во второе уравнение $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{k}$ и $E_2 = \delta^2 E_1$, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} h \frac{c}{\lambda_1} = A + E_1, \\ h \frac{ck}{\lambda_1} = A + \delta^2 E_1 \end{cases}$$

с двумя неизвестными: k и A .

Вычитая из второго уравнения первое, получаем равенство для нахождения k :

$$\frac{hc}{\lambda_1} (k - 1) = E_1 (\delta^2 - 1), \quad k = \frac{E_1 \lambda_1 (\delta^2 - 1)}{hc} + 1.$$

$$\text{Ответ: } k = \frac{E_1 \lambda_1 (\delta^2 - 1)}{hc} + 1.$$

ЗАДАЧА

Счетчик Гейгера—Мюллера, помещенный вблизи радиоактивного источника, фиксирует скорость счета $n_1 = 1000 \text{ с}^{-1}$ (частиц в секунду). Через 10 суток тот же счетчик, помещенный в то же место вблизи того же радиоактивного источ-

ника, фиксирует скорость счета $n_2 = 850 \text{ с}^{-1}$. Найдите период полураспада источника.

Дано:

$$n_1 = 1000 \text{ с}^{-1}$$

$$n_2 = 850 \text{ с}^{-1}$$

$$\Delta t = 10 \text{ сут}$$

$$T - ?$$

Решение

Счетчик Гейгера—Мюллера регистрирует частицы, являющиеся продуктами распада. Нетрудно понять, что при неизменном положении счетчика по отношению к источнику скорость счета прямо пропорциональна числу радиоактивных атомов N .

$$n = kN,$$

k — коэффициент пропорциональности.

Пусть в некоторый момент времени t_0 , когда источник содержал N_0 радиоактивных атомов, начался отсчет времени ($t_0 = 0$). К моменту времени t_1 , когда производилось первое измерение, осталось

$$N_1 = N_0 \cdot 2^{-\frac{t_1}{T}},$$

а скорость счета в первом измерении была

$$n_1 = kN_0 \cdot 2^{-\frac{t_1}{T}}.$$

Соответственно, к моменту времени t_2 , когда проводилось второе измерение, осталось

$$N_2 = N_0 \cdot 2^{-\frac{t_2}{T}},$$

а скорость счета была

$$n_2 = kN_0 \cdot 2^{-\frac{t_2}{T}}.$$

Отношение n_1 к n_2 приводит к равенству:

$$\frac{n_1}{n_2} = 2^{-\frac{t_2 - t_1}{T}},$$

из которого можно найти период полураспада T . Для этого достаточно полученное равенство проглажифмировать:

$$\lg\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{t_2 - t_1}{T} \lg 2;$$

$$T = (t_2 - t_1) \frac{\lg 2}{\lg\left(\frac{n_1}{n_2}\right)} = 10 \text{ (сут)} \frac{\lg 2}{\lg\left(\frac{1000}{850}\right)} \approx \\ \approx 10 \text{ (сут)} \frac{0,3}{0,07} \approx 43 \text{ (дня).}$$

В решении предполагалось, что скорость счета практически не меняется за время измерения, т. е. число радиоактивных атомов N достаточно велико и меняется очень мало за время измерения. То же самое можно выразить соотношением:

$$\Delta t \text{(время измерения)} \ll T \text{(период полураспада)}.$$

Ответ: $T = 43$ дня.

Планетарная модель атома противоречит законам классической физики. Электрон, вращаясь по орбите, должен постоянно излучать энергию, но этого не происходит. Необъяснимым остается и дискретный характер атомного спектра. Выход из затруднительного положения был найден Нильсом Бором, сформулировавшим в виде постулатов основные положения новой теории.

Первый и второй постулаты просто обобщают экспериментальные данные.

1. Энергия атома дискретна (может иметь одно из ряда разрешенных значений E_n). Состояния с разрешенными значениями энергии называются *стационарными* или *квантовыми*. В стационарном состоянии атом не излучает.

2. При переходе из состояния с энергией E_m в состояние с энергией E_n ($E_m > E_n$) происходит из-

лучение света. Энергия излученного фотона равна разности энергий стационарных состояний

$$E_m - E_n = h\nu.$$

При обратном переходе поглощается такая же порция энергии.

По первому постулату Бора энергия может принимать только определенные значения E_n . Поэтому радиусы орбит в атоме не могут быть произвольными. Чтобы понять, какие соображения привели Бора к условию квантования орбит электрона, надо отказаться от модели электрона в виде шарика, вращающегося вокруг ядра. Это оказалось возможным после выдвижения в 1923 г. Луи де Б्रойлем гипотезы, согласно которой электрон и другие частицы наряду с корпускулярными обладают и волновыми свойствами.

Если представлять электрон в виде некоторой волны, то стационарным можно считать состояние, когда на орбите укладывается целое число длин волн:

$$2\pi r = n\lambda.$$

Заменяя длину волны λ , согласно гипотезе де Бройля, через h/mv , приходим к предполагаемому условию квантования орбит электрона в атоме водорода.

$$2\pi r = n \frac{h}{mv}, \text{ или}$$

$$mv r = n \frac{h}{2\pi}.$$

Третий постулат Бора¹:

3. Квантование разрешенных состояний электрона в атоме водорода определяется правилом:

$$mv r = n \frac{h}{2\pi},$$

¹ Обычно это утверждение называют правилом квантования, не выделяя его в самостоятельный постулат.

где m — масса электрона, v — скорость электрона, r — радиус орбиты электрона, n — целое число.

Состояние с $n = 1$ называется *основным*, остальные — *возбужденными*. Из возбужденного состояния атом переходит в основное либо сразу (с испусканием одного фотона), либо через промежуточные разрешенные состояния (с испусканием нескольких фотонов).

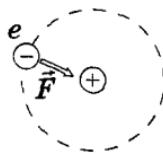


Рис. 87

Постулаты Бора позволяют рассчитать радиусы разрешенных орбит электронов в атоме водорода, если к третьему постулату добавить классический закон Ньютона для электрона (рис. 87):

$$k \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}.$$

Выражаем скорость электрона из третьего постулаты Бора:

$$v = n \frac{h}{2\pi mr}$$

и подставляем в закон Ньютона.

$$k \frac{e^2}{r^2} = m \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2 r^2}, \text{ откуда}$$

$$r = n^2 \frac{h^2}{k \cdot 4\pi^2 m e^2},$$

$$r = n^2 \frac{(6,62 \cdot 10^{-34})^2}{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 3,14^2 \cdot 9,11 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2} (\text{м}),$$

$$r = n^2 \cdot 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Найдем энергию атома водорода E . Она складывается из кинетической энергии электрона E_k и потенциальной $E_{\text{п}}$ энергии системы протон — электрон.

$$E = E_k + E_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} - k \frac{e^2}{r}.$$

Снова воспользуемся вторым законом Ньютона, чтобы выразить mv^2 :

$$E = k \frac{e^2}{2r} - k \frac{e^2}{r} = -k \frac{e^2}{r}.$$

Подставляя сюда полученное ранее выражение для радиуса орбиты электрона, находим

$$E = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{2k^2\pi^2 e^4 m}{h^2} \right) \approx -\frac{21,74 \cdot 10^{-19}}{n^2} \text{ (Дж)} \approx -\frac{13,6}{n^2} \text{ (эВ).}$$

На рисунке 88 приведена схема энергетических уровней атома водорода и возможные пере-

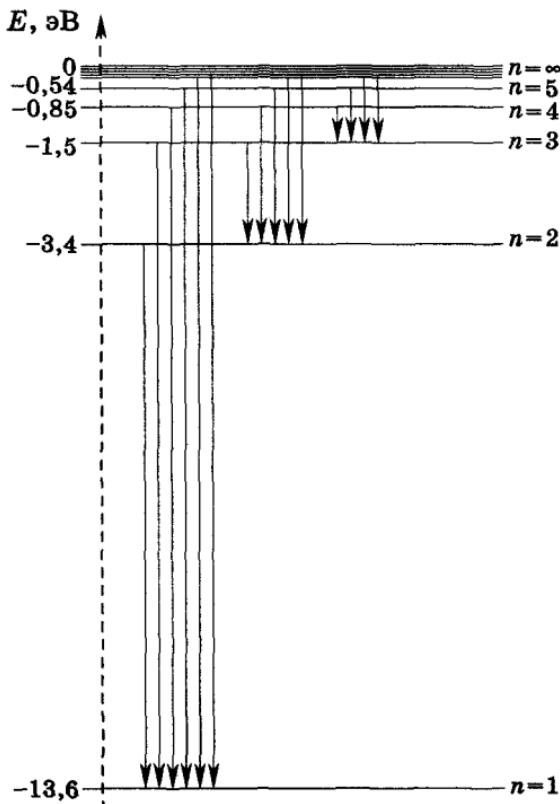


Рис. 88

ходы между уровнями. Стрелки вниз отображают переходы на более низкие энергетические уровни, сопровождающиеся излучениями фотонов. Если поменять направление стрелок на противоположное, то получится схема поглощения, согласно которой атом способен «глотать» энергию только вполне определенными порциями. Энергия $W = 13,6 \text{ эВ}$ называется энергией ионизации, так как при поглощении энергии $E \geq W$ электрон покидает атом водорода.

Полуклассическая, полуквантовая модель хорошо описала спектр простейшего атома (один протон, один электрон), но не годится для других атомов. Правильное описание поведения объектов микромира дает квантовая теория, где понятие траектории теряет смысл, уступая место вероятности нахождения частицы в той или иной области пространства.

ЗАДАЧА

Определите скорости v_1 и v_2 электрона на первой и второй боровских орбитах в атоме водорода. Найдите силу орбитального тока в основном I_1 и первом возбужденном I_2 состояниях атома водорода.

Решение

Согласно закону Ньютона (см. рис. 87)

$$k \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}}.$$

Воспользуемся вышеприведенным расчетом радиуса орбиты электрона:

$$r = n^2 \cdot 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Для первой и второй орбит электрона в атоме водорода

$$r_1 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

$$r_2 = 4r_1.$$

Скорости электронов на первой и второй орбитах:

$$v_1 = \sqrt{\frac{ke^2}{mr_1}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,53 \cdot 10^{-10}}} \approx 2,2 \cdot 10^6 \text{ (м/с)},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{ke^2}{m \cdot 4r_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ke^2}{mr_1}} = \frac{1}{2} v_1 \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}.$$

Сила орбитального тока — это заряд, прошедший через поперечное сечение орбиты в течение одной секунды. При частоте обращения f , электрон f раз в течение секунды переносит свой заряд через поперечное сечение, поэтому орбитальный ток I равен

$$I = ef = e \frac{v}{2\pi r}.$$

$$I_1 = e \frac{v_1}{2\pi r_1} = 1,6 \cdot 10^{-10} \frac{2,2 \cdot 10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,53 \cdot 10^{-10}} \approx 10^{-3} \text{ (А)}.$$

$$I_2 = e \frac{v_1}{2 \cdot 2\pi \cdot 4r_1} = \frac{1}{8} \left(e \frac{v_1}{2\pi r_1} \right) \approx 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ (А)}.$$

Ответ: $v_1 \approx 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$, $v_2 \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ м/с}$,
 $I_1 \approx 10^{-3} \text{ А}$, $I_2 \approx 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ А}$.

Упражнения

7.1. Монохроматический источник света излучает мощность $p = 40 \text{ Вт}$. Найдите длину волны излучения λ , считая, что источник испускает $n = 10^{20}$ фотонов в секунду.

7.2. Монохроматический источник света излучает $n = 2 \cdot 10^{19}$ фотонов в секунду. Длина волны

излучаемого света $\lambda = 0,5$ мкм. Найдите потребляемую источником за время $\tau = 1$ час энергию W , считая, что в световое излучение переходит $\eta = 5\%$ потребляемой мощности.

7.3. Рубиновый лазер излучает свет с длиной волны $\lambda = 0,69$ мкм. Найдите мощность p излучения лазера, если за время $\tau = 10^{-3}$ с лазер покидает $N = 3 \cdot 10^{18}$ фотонов.

7.4. Чувствительность глаза человека к зеленому свету составляет $p = 10^{-17}$ Вт. Сколько фотонов ежесекундно (n) должно попадать на сетчатку, чтобы создалось ощущение восприятия света? Длина волны зеленого света $\lambda = 0,55$ мкм.

7.5. Человек глубокой ночью находится на расстоянии $L = 1000$ м от монохроматического источника света с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм с мощностью излучения $p = 10$ Вт. Диаметр зрачка человека $d = 4$ мм. Увидит ли человек источник света, если считать, что воздух на этом расстоянии поглощает $\eta = 80\%$ света?

Указание: воспользуйтесь данными предыдущей задачи.

7.6. Интенсивность солнечного излучения вблизи поверхности Земли $I = 1,35$ кВт/м². Найдите силу давления F солнечного излучения на лист белой бумаги площадью $S = 0,25$ м², расположенный перпендикулярно солнечным лучам, если коэффициент отражения $k = 0,8$. Для простоты считайте, что фотоны отражаются точно в обратном направлении.

7.7. На расстоянии R от точечного источника, излучающего световую мощность p , помещена перпендикулярно лучам маленькая площадка ΔS , полностью отражающая свет. Найдите силу F давления света на площадку.

7.8. На каждый квадратный сантиметр черной поверхности перпендикулярно ей ежесекундно

падает $n = 2,8 \cdot 10^{17}$ фотонов с длиной волны $\lambda = 400$ нм. Какое давление p создает это излучение на поверхность?

7.9. Почему не возрастает максимальная энергия фотоэлектронов при увеличении интенсивности монохроматического света, падающего на поверхность металла?

7.10. Работа выхода электронов из золота $A = 4,76$ эВ. Найдите красную границу λ_0 фотоэффекта для золота.

7.11. Определите максимальную кинетическую энергию E_{\max} фотоэлектронов калия при его облучении квантами света с длиной волны $\lambda = 0,3$ мкм. Работа выхода электронов из калия $A = 2,26$ эВ.

7.12. В вакууме находится уединенный металлический шарик, имеющий заряд $+Q$. Его поверхность облучается светом с длиной волны λ , меньшей красной границы фотоэффекта. На какое максимальное расстояние x от центра шарика удалится вылетевший в радиальном направлении фотоэлектрон, если работа выхода электронов из этого металла A ? Радиус шарика r .

7.13. Увеличение частоты падающего на поверхность металла света на $\Delta\nu = 0,5 \cdot 10^{15}$ Гц вызывает увеличение максимальной кинетической энергии фотоэлектронов на $\Delta E = 2,07$ эВ. Вычислите по этим данным постоянную Планка.

7.14. При облучении электрода вакуумного фотоэлемента светом с длиной волны $\lambda = 0,3$ мкм ток в цепи прекращается при задерживающей разности потенциалов $U_3 = 3$ В (рис. 89). Найдите работу выхода фотоэлектронов из материала электрода.

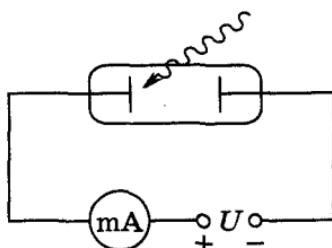


Рис. 89

7.15. Электрод вакуумного фотодиода облучается ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda = 150$ нм, передавая ему мощность $p = 10^{-5}$ Вт. Фотоэффект вызывают $\eta = 0,5\%$ фотонов. Чему равен фототок насыщения I_n ?

7.16. Чему равна тепловая мощность, выделяющаяся в реакторе, если в нем делится $m = 0,5$ г урана $^{235}_{92}\text{U}$ за время $t = 24$ ч. В одном акте распада $^{235}_{92}\text{U}$ высвобождается энергия $W = 190$ МэВ.

7.17. Над центром квадратного (10×10 см) флуоресцирующего экрана на высоте 5 см помещен точечный радиоактивный источник α -частиц. За время $t = 20$ с наблюдатель насчитал 180 вспышек. Какова активность n (число распадов в секунду) источника? Период полураспада T источника достаточно велик ($t \ll T$).

7.18. Число радиоактивных атомов изотопа иода $^{131}_{53}\text{I}$ за $\tau = 40$ суток уменьшилось в $\eta = 32$ раза. Каков период полураспада T изотопа?

7.19. Атом радиоактивного полония $^{210}_{24}\text{Po}$, испуская α -частицу, превращается в атом стабильного свинца $^{206}_{22}\text{Pb}$. Каков период полураспада полония, если из $m_0 = 0,2$ г радиоактивного полония образовалось $m = 0,147$ г свинца за время $t = 176$ дней?

7.20. В микрокалориметр с теплоемкостью C помещают таблетку радиоактивного препарата с периодом полураспада T . Масса препарата m , атомная масса M . На сколько градусов Цельсия Δt повысится температура калориметра за время t , если в одном акте распада высвобождается энергия Q ?

7.21. Сколько линий в спектре образует группа атомов водорода, возбужденных до четвертого квантового уровня?

7.22. Какую энергию W должен получить атом водорода, чтобы электрон мог покинуть ядро?

7.23. Чему равен потенциал ϕ электрического поля, создаваемого ядром атома водорода на второй стационарной орбите электрона?

7.24. Какова длина волны λ фотона, испущенного атомом водорода при переходе электрона с орбиты радиусом $r_1 = 4,77 \cdot 10^{-10}$ м на орбиту радиусом $r_2 = 2,12 \cdot 10^{-10}$ м?

7.25. При переходе атома водорода с энергетического уровня A на энергетический уровень B излучается свет с длиной волны λ_1 , а при переходе с уровня A на уровень C излучается свет с длиной волны λ_2 . Какова частота света v , излучаемого при переходе атома водорода с уровня B на уровень C ? $E_A > E_B > E_C$.

7.26. Протон, имеющий скорость v_0 , сталкивается с первоначально неподвижным атомом гелия и отлетает от него в обратном направлении со скоростью $v_0/3$. Какова длина волны фотона, испущенного атомом гелия в результате возбуждения? Масса протона m , масса гелия $M = 4m$.

Указание: часть энергии, полученной атомом гелия при столкновении, переходит в кинетическую, а часть идет на возбуждение атома. Считать, что вся энергия возбуждения «достается» одному фотону.

7.27. В рентгеновской трубке термоэлектроны, покинувшие катод, разгоняются ускоряющей разностью потенциалов $U = 30$ кВ. Попадая на анод, электроны тормозятся, испуская при этом один или несколько фотонов. Найдите самую короткую длину волны рентгеновского излучения для данного напряжения. Начальную скорость термоэлектронов можно считать равной нулю.

Ответы

7.1. $\lambda \approx 496$ нм.

7.2. $W \approx 570$ кДж.

7.3. $p \approx 890$ Вт.

7.4. $n \approx 30$ с⁻¹.

7.5. Увидит.

7.6. $F \approx 2 \cdot 10^{-6}$ Н.

7.7. $F = \frac{p\Delta S}{4\pi R^2 c}.$

7.8. $p \approx 4,6 \cdot 10^{-6}$ Па.

7.9. Увеличение интенсивности облучения означает увеличение количества падающих на поверхность металла фотонов, а не их энергии, что приводит к увеличению количества фотоэлектронов, а не их энергии.

7.10. $\lambda_0 \approx 0,26$ мкм.

7.11. $E_{\max} \approx 1,9$ эВ.

7.12. $x = \frac{r\lambda Qe}{\lambda Qe - 4\pi\epsilon_0 r(hc - \lambda A)}.$

7.13. $h \approx 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

7.14. $A \approx 1,17$ эВ.

7.15. $I_u \approx 6 \cdot 10^{-9}$ А.

7.16. $p = \frac{mN_A W}{Mt} \approx 280$ кВт.

7.17. $n = 54$ с⁻¹.

7.18. $T = 8$ сут.

7.19. $T \approx 1560$ сут.

7.20. $\Delta t = \frac{QmN_A}{MC} \left(1 - 2^{-\frac{\tau}{T}} \right).$

7.21. 6 линий.

7.22. $W = 13,6$ эВ.

7.23. $\phi \approx 6,8$ В.

7.24. $\lambda \approx 0,66$ мкм.

7.25. $v = c \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right).$

7.26. $\lambda = \frac{9hc}{2mv_0^2}.$

7.27. $\lambda_{\min} \approx 0,42 \cdot 10^{-10}$ м.

Содержание

Тема № 1. Плоское зеркало	3
Упражнения	10
Тема № 2. Сферические зеркала	14
Упражнения	22
Тема № 3. Закон преломления	28
Упражнения	38
Тема № 4. Тонкие линзы	44
Упражнения	56
Тема № 5. Оптические системы	63
Упражнения	69
Тема № 6. Глаз. Простейшие дефекты зрения	73
Упражнения	85
Тема № 7. Квантовая природа света и строение атома	88
Упражнения	105

Учебное издание

Ромашкевич Александр Иосифович

**ФИЗИКА. ОПТИКА.
КВАНТОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА**

11 класс

Учимся решать задачи

Учебное пособие

Зав. редакцией Е. Н. Тихонова

Ответственный редактор Л. Н. Коршунова

Художественный редактор М. В. Мандрыкина

Технический редактор И. В. Грибкова

Компьютерная верстка Е. Ю. Пучкова

Компьютерная графика А. В. Кольцова

Корректор Г. И. Мосякина

*Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.009000.08.08 от 21.08.2008.*

Подписано к печати 30.01.09. Формат 84 × 108 1/32.

Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 5,88. Тираж 4000 экз. Заказ № 10541.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

*Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги
просим направлять в редакцию общего образования издательства
«Дрофа»: 127018, Москва, а/я 79.*

Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

*По вопросам приобретения продукции
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:*

127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».

109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.

Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Сеть магазинов «Переплетные птицы».

Тел.: (495) 912-45-76.

Интернет-магазин: <http://www.drofa.ru>

*Отпечатано с предоставленных диапозитивов
в ОАО «Тульская типография». 300600, г. Тула, пр. Ленина, 109.*



книги МВ6814356 Физика.
Оптика. Квантовая природ
а света. 11 класс. Учимс
я решать задачи
www.bolero.ru

II

Предлагаем вашему вниманию
учебное пособие по физике
«ОПТИКА.
КВАНТОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА»

Эта книга — полезное
и необходимое дополнение
к учебно-методическому
комплекту под редакцией
Г. Я. Мякишева.

Предлагаемое пособие
включает:

- алгоритмы решения задач;
- примеры решения задач;
- упражнения;
- справочные материалы.

Все это поможет учащимся
правильно и быстро решать
задачи.

ISBN 978-5-358-05707-4



9 785358 057074

ДРОФА