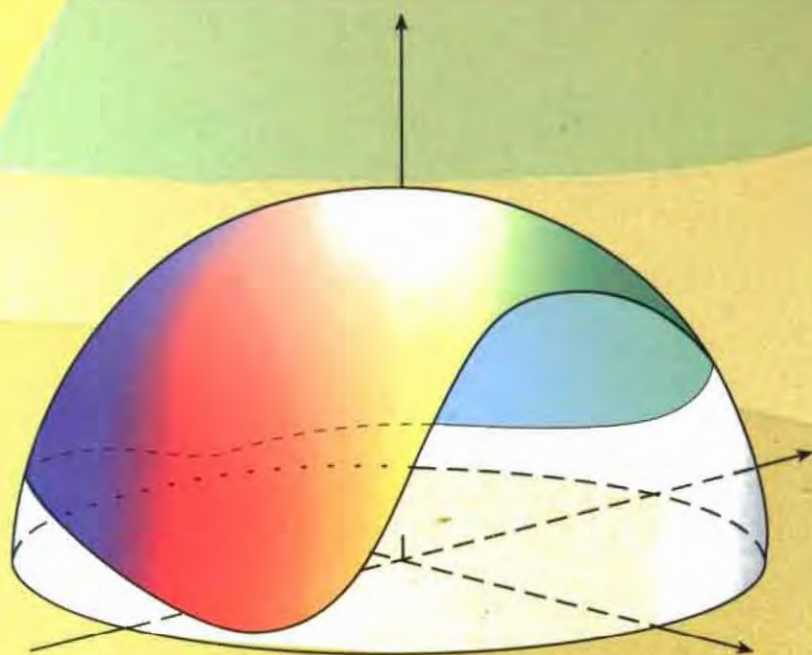


Э.Р. РОЗЕНДОРН

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ



Э.Р. РОЗЕНДОРН

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2006

УДК 514.14

ББК 22.151

Р 64

Розендорн Э. Р. **Теория поверхностей.** — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 304 с. — ISBN 5-9221-0685-6.

Книга предназначена для первоначального знакомства с геометрией поверхностей. Изложение доведено до разделов, имеющих важные приложения в механике, технике, оптике. Особенно наглядно применение полученных результатов в механике: на них опираются методы расчета упругих тонкостенных конструкций. Также в книге обсуждаются некоторые нетрадиционные приложения геометрии и связанные с ними нерешенные вопросы.

Для студентов вузов, аспирантов, преподавателей, научных сотрудников и инженеров.

Ил. 245. Библиогр. 130 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Из предисловия к первому изданию	7

Часть I

Глава 1. Поверхности вида $z = f(x, y)$	8
§ 1. Касательная плоскость	8
§ 2. Нормаль. Гауссово сферическое отображение	15
§ 3. Площадь поверхности	18
§ 4. Кривизна нормальных сечений и классификация точек поверхности	24

Часть II

Глава 2. Поверхности, заданные параметрически. Локальное строение поверхностей	31
§ 5. Вектор-функции двух аргументов	31
§ 6. Параметрическое задание поверхностей	34
§ 7. Преобразование координат на поверхности	43
§ 8. Первая квадратичная форма	50
§ 9. Вычисление углов и площадей. Понятие о внутренней геометрии поверхности	54
§ 10. Кривизна линий на поверхности. Теорема Менье	63
§ 11. Вторая квадратичная форма	71
§ 12. Главные кривизны и главные направления. Теорема Родрига. Линии кривизны	78
§ 13*. Развертывающиеся и минимальные поверхности	92
§ 14. Ортонормированный сопровождающий трехгранник	96
Глава 3. Поверхность в целом. Задание поверхности двумя квадратичными формами	103
§ 15. Общее понятие поверхности	103
§ 16. Теорема единственности.	116

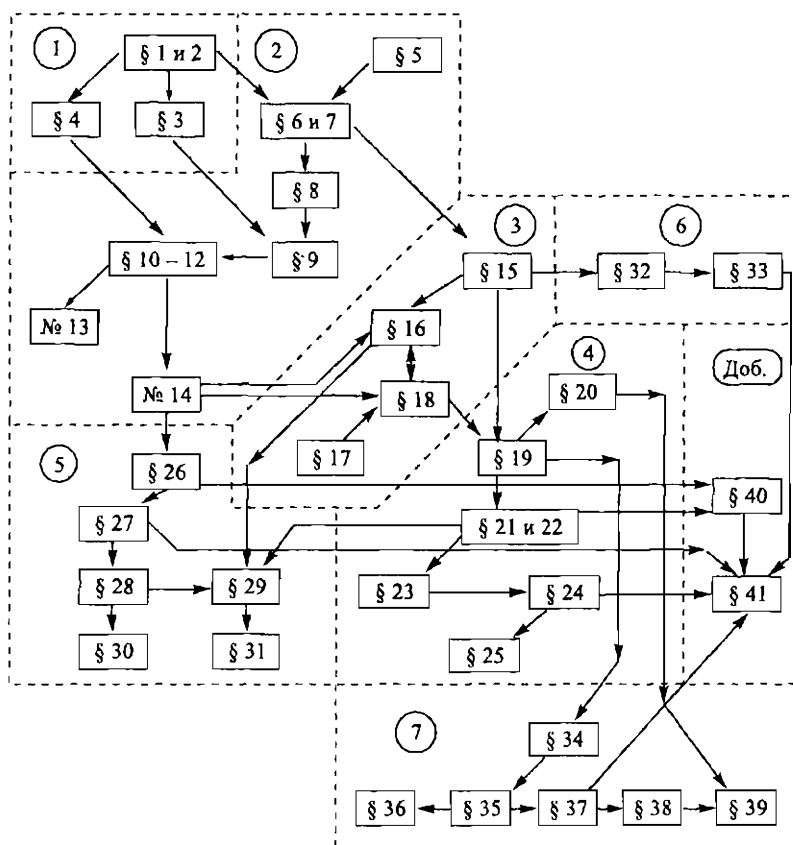
§ 17 Внешнее произведение линейных дифференциальных форм и внешний дифференциал	123
§ 18 Уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци	126
Глава 4 Внутренняя геометрия и изгибание поверхностей	129
§ 19 Изометрия и изгибание Теорема Гаусса	129
§ 20* Неизгибаемость сферы	140
§ 21 Геодезическая кривизна	146
§ 22 Геодезические линии и полугеодезические координаты	150
§ 23 Поворот кривой на поверхности Формула Гаусса–Бонне и ее следствия	157
§ 24 Двумерная риманова метрика	161
§ 25* Доказательство формулы Гаусса–Бонне	165

Часть III

Глава 5 Ортогональные криволинейные координаты в пространстве	172
§ 26 Геометрическое истолкование пространственных криволинейных координат	172
§ 27 Ортогональные координаты Коэффициенты Ламе	176
§ 28 Теорема Дюпена	184
§ 29 О построении пространственных ортогональных и приближенно ортогональных координат	186
§ 30 Девационные формулы	194
§ 31* Дифференциальные параметры Бельтрами	202
Глава 6 Огибающая и дискриминанта семейства поверхностей	205
§ 32 Огибающая	205
§ 33 Дискриминанта	217
Глава 7 Бесконечно-малые изгибания и жесткость поверхностей	230
§ 34 Постановка задачи Уравнения бесконечно малых изгибаний	230
§ 35 Диаграмма вращений	234
§ 36 Начальное поле скоростей деформации Связь бесконечно малых изгибаний с изгибаниями поверхности	242
§ 37 Понятие о жесткости поверхностей	247
§ 38* Бесконечно малые изгибания поверхностей вращения	256
§ 39* Жесткость оваловидов	260

Добавления	269
§ 40*. Деривационные формулы Гаусса. Символы Кристоффеля. Вычисление геодезической кривизны в произвольных криволинейных координатах. Теорема Бура	269
§ 41*. Геометрические подходы в математическом описании цветового зрения	278
Заключение	292
Предметный указатель	293
Список литературы	297

Схема зависимости параграфов



Предисловие

Математика весьма абстрактна, и многие ее разделы находят применения внутри нее самой. А среди тех, что непосредственно «выходят на приложения», есть такие, которые эти «выходы» нашли лишь после сотен лет развития. Например, теория чисел недавно получила важные применения в шифровании, в так называемой защите информации.

Другой пример связан с применением геометрии в технике. Оболочками называют конструкции, толщина которых много меньше их протяженности по двум другим направлениям. Это — корпуса ракет и самолетов, морских и речных судов, емкости для горючего, купола, перекрывающие пространство в десятки метров при толщине в несколько сантиметров, и т. п. Все чаще встречаются ситуации, когда технические требования вынуждают придавать оболочкам сложную геометрическую форму. Примером могут служить самолеты, у которых полые крылья и фюзеляж образуют единую оболочку.

Оказалось, что не только материал оболочки, но и геометрическая форма влияют на ее прочность, устойчивость и другие механические свойства. То же самое относится и к ребрам жесткости и другим конструктивным элементам, предназначенным для повышения прочности оболочки: важно, по каким линиям они расположены. Вот почему для грамотного расчета конструкций, содержащих оболочки, необходимо знание теории поверхностей. Разумеется, это ее приложение — не единственное, однако оно не только актуально и быстро развивается, но и ставит новые задачи перед геометрией.

Тем разделам теории поверхностей, которые наиболее тесно связаны с теорией оболочек, посвящены § 19, 20*, 29, глава 7 и п. 12° в § 40*. Для второго издания написаны § 26–41, частично переработан § 15 и связанные с ним пункты. Исправлены замеченные опечатки, добавлены некоторые примеры и пояснения. Обновлен и расширен список литературы, включены более новые задачки [29, 78]; нумерация библиографических ссылок приведена в соответствии с расширенным списком литературы.

Апрель 2005 г.

Э. Р. Розендорн

Из предисловия к первому изданию

Пособие предназначено для первоначального знакомства с теорией поверхностей. Параграфы 1–13 образуют законченный раздел, которым может ограничиться читатель, интересующийся только локальными вопросами. Законченный раздел образуют также вместе параграфы 1–12, 14 и 15, 17–19 и 21, 22 (см. схему, приведенную после оглавления). Возможны и другие варианты сокращенного изучения пособия. Так, например, можно пропустить параграфы, пункты и задачи, помеченные звездочками. Параграфы 1 и 2, а также 4 и 5, можно использовать при изучении дифференциального исчисления для функций двух переменных. Более подробные сведения о поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве читатель может найти в учебниках [20, 31, 82, 91] и [99], а с многомерным случаем познакомиться по книгам [106] и [123]. Для упражнений на закрепление теоретического материала можно использовать задачки [79] или [104], задачи из учебников [91] и [99].

Март, 1972 г.

Э. Р. Розендорн

Часть I

Первая часть книги служит развернутым введением. Она состоит из одной главы и на простом наглядном материале знакомит с важными для дальнейшего понятиями.

Глава I

ПОВЕРХНОСТИ ВИДА $Z = F(X, Y)$

§ 1. Касательная плоскость

1°. Изучение поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ мы начнем с частного случая, указанного в названии главы.

Общее определение поверхности будет сформулировано ниже, в начале главы 3 (см. § 15).

2°. Пусть в $\mathbb{R}^3$ выбрана декартова прямоугольная система координат (x, y, z) и пусть в некоторой области D на плоскости (x, y) задана функция $f(x, y)$, непрерывная вместе с ее частными производными первого порядка.

Геометрическое место точек пространства $\mathbb{R}^3$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$z = f(x, y), \quad (1)$$

называют *гладкой поверхностью*; обозначим ее буквой S . Обратим еще раз внимание на то, что мы имеем здесь дело лишь с частным случаем поверхности.

3°. Выберем на S какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ и наряду с функцией f рассмотрим ее дифференциал, взятый при $x = x_0$, $y = y_0$:

$$dz = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy.$$

Здесь и всюду в дальнейшем производные по какому-либо аргументу обозначены с помощью нижнего буквенного индекса, в частности:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Построим плоскость Π с уравнением

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \quad (2)$$

Считая, что $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, уравнение (2) можно переписать так:

$$z = z_0 + dz \quad (2a)$$

(здесь и выше dz берется при $x = x_0$, $y = y_0$).

Определение 1. Плоскость (2) называется *касательной плоскостью к поверхности (1) в точке M_0* .

Посмотрим, чем характеризуется расположение касательной плоскости по отношению к поверхности.

Положим $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Вследствие дифференцируемости функции $f(x, y)$ имеем при $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$

$$f(x, y) = z_0 + dz + o(\rho). \quad (3)$$

Величина $o(\rho)$ в формуле (3) представляет собой расстояние от поверхности до касательной плоскости, измеренное в направлении оси z (рис. 1). Пользуясь обозначениями рис. 1, мы можем написать, что

$$MN = o(\rho), \text{ то есть } \lim_{M' \rightarrow M_0} \frac{MN}{M'_0 M'} = 0. \quad (4)$$

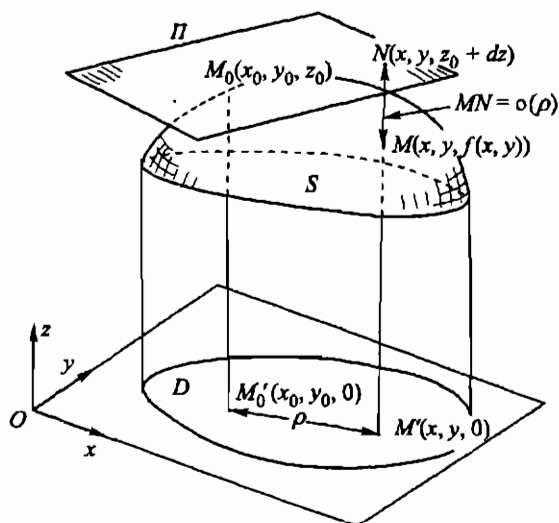


Рис. 1

Таким образом, уклонение MN точки поверхности от касательной плоскости имеет *более высокий порядок малости*, чем смещение ρ . С наглядной точки зрения это означает, что вблизи точки M_0 поверхность S почти совпадает с плоскостью Π . Поэтому во многих

локальных вопросах можно заменить поверхность S ее касательной плоскостью.

4°. Сформулированное выше определение касательной плоскости связано с выбранной в $\mathbb{R}^3$ координатной системой. Однако сама плоскость Π от выбора координат не зависит. Прежде, чем убедиться в этом, сделаем некоторые вспомогательные построения и рассмотрим их.

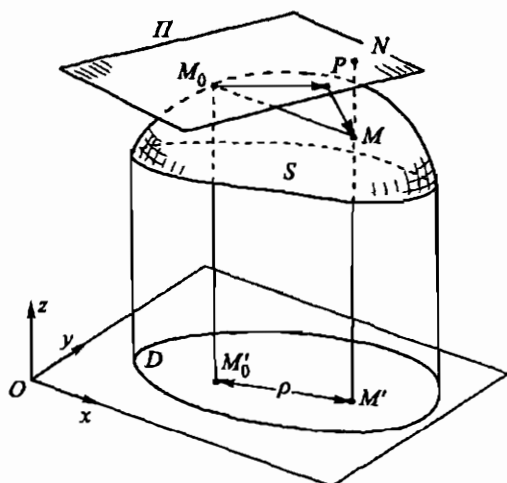


Рис. 2

5°. Из точки M опустим перпендикуляр MP на плоскость Π (рис. 2). Его длина тоже характеризует уклонение поверхности от касательной плоскости, но в отличие от длин MN и M'_0M' она не зависит от направлений координатных осей в $\mathbb{R}^3$.

Из (4) сразу следует, что

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{MP}{M_0M} = 0. \quad (5)$$

В самом деле, $MP \leq MN$, $M_0M \geq M'_0M'$, и мы имеем

$$0 \leq \frac{MP}{M_0M} \leq \frac{MN}{M'_0M'} \quad \text{при } M \rightarrow M_0.$$

Замечание. Запись $M \rightarrow M_0$ означает, что пространственное расстояние M_0M стремится к нулю. Подробнее, пусть $r > 0$ — некоторое число; построим шар с центром M_0 и радиусом r ; точку M будем брать в той части поверхности S , которая содержится внутри этого шара; равенство (5) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\left| \frac{MP}{M_0M} \right| < \varepsilon$, если только $r < \delta(\varepsilon)$.

Аналогичный смысл имеют пределы других величин при $M \rightarrow M_0$, встречающиеся ниже.

Заметим, что $M_0P \leq M_0M \leq M_0P + MP$. Поэтому наряду с равенством (5) справедливы соотношения

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{M_0P}{M_0M} = 1, \quad \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{MP}{M_0P} = 0. \quad (6)$$

Из точки M_0 в точку M проведем вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и представим его в виде следующей суммы:

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0P} + \overrightarrow{PM}. \quad (7)$$

Вектор $\overrightarrow{M_0P}$, входящий в (7), расположен в касательной плоскости Π . При $M \rightarrow M_0$ он представляет собой главную часть вектора $\overrightarrow{M_0M}$. Вектор $\overrightarrow{PM}$ ортогонален плоскости Π ; вследствие (5) и (6) его длина является *бесконечно малой более высокого порядка*, чем длины векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{M_0P}$.

6°. Покажем теперь, что никакая другая плоскость не может так тесно, как касательная, прилегать к поверхности S в окрестности точки M_0 . Пусть $\tilde{\Pi}$ — какая-нибудь плоскость, $\tilde{P}$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость $\tilde{\Pi}$. Если $\tilde{\Pi}$ не проходит через M_0 , то длина $M\tilde{P}$ вообще не является бесконечно малой при $M \rightarrow M_0$. Предположим, что плоскость $\tilde{\Pi}$ проходит через точку M_0 . Двугранный угол между плоскостями Π и $\tilde{\Pi}$ обозначим через α . Проведем через M_0 вспомогательную плоскость Π_1 , ортогональную Π и $\tilde{\Pi}$ (рис. 3).

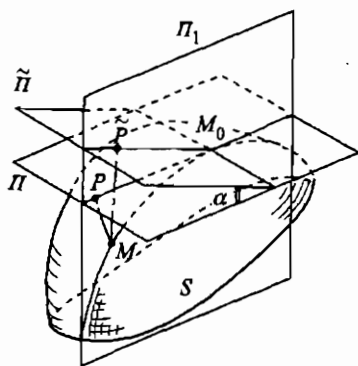


Рис. 3

Выберем точку M на линии пересечения плоскости Π_1 и поверхности S . Тогда точки M , M_0 , P и $\tilde{P}$ расположены в одной плоскости Π_1 (см. рис. 3–5).

Сравним порядки малости длин $M\tilde{P}$ и M_0M . Имеем

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{M\tilde{P}}{M_0M} = \lim_{M \rightarrow M_0} \sin \angle M M_0 \tilde{P} = \sin \alpha, \quad (8)$$

поскольку

$$\angle M_0 M \tilde{P} = \alpha \pm \angle M M_0 P, \quad (9)$$

а $\angle M_0MP \rightarrow 0$ вследствие (5). Знак « $\pm$ » в (9) зависит от взаимного расположения плоскостей Π и $\tilde{\Pi}$ и поверхности S : плюс имеет место в случае, показанном на рис. 4, минус — в случае, показанном на рис. 5.

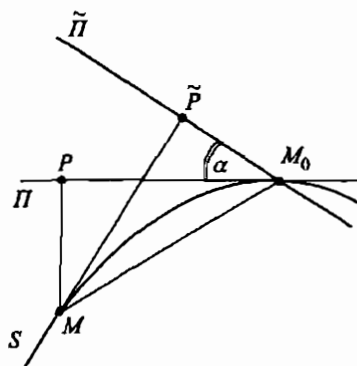


Рис. 4

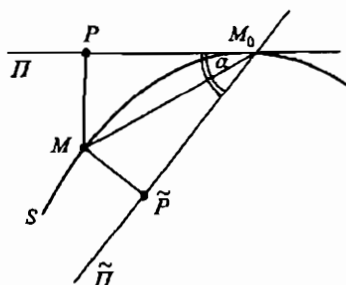


Рис. 5

Замечание. В равенствах (8) нужно считать, что точка M приближается к M_0 , оставаясь на линии пересечения поверхности S и плоскости Π_1 .

Если $\tilde{\Pi} \neq \Pi$, то $\sin \alpha \neq 0$, и тогда (8) показывает, что существует по крайней мере одна линия, на которой расстояние $M\tilde{P}$ имеет такой же порядок малости, как M_0M (но не более высокий!).

Если же $M\tilde{P} = o(M_0M)$, то $\sin \alpha = 0$, а это значит, что плоскость $\tilde{\Pi}$ совпадает с плоскостью Π .

Поэтому можно дать другое определение касательной плоскости, эквивалентное первоначальному.

Определение 2. Плоскость Π называется *касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0* , если для текущей точки M поверхности S длина перпендикуляра MP , опущенного на плоскость Π , является бесконечно малой более высокого порядка, чем расстояние M_0M (при $M \rightarrow M_0$).

Второе определение никак не связано с выбором системы координат в $\mathbb{R}^3$. Отсюда видно, что если мы от координат (x, y, z) перейдем к новым декартовым координатам (x', y', z') и будем искать касательную плоскость в точке M_0 согласно определению 1, то мы получим ту же самую плоскость Π .

7*. При определении касательной плоскости можно было бы не требовать непрерывности частных производных f_x и f_y в области $\mathcal{D}$. Достаточно предположить, что функция $f(x, y)$ дифференцируема при $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда по формуле (2а) определится плоскость Π , для которой справедливы проведенные выше рассуждения и удовлетворяется определение 2.

Верно и обратное: из существования касательной плоскости в смысле определения 2 вытекает дифференцируемость функции $f(x, y)$. Точнее, справедлива

Теорема. Пусть поверхность S задана уравнением (1), где $f(x, y)$ — непрерывная функция. Пусть в точке M_0 поверхность S имеет касательную плоскость Π в смысле определения 2, не параллельную оси z . Тогда функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) .

Замечание. Непрерывность функции $f(x, y)$ естественно потребовать, исходя из геометрической постановки задачи. Если функция f разрывна, то геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению (1), поверхностью обычно не называют.

Доказательство теоремы. Воспользуемся обозначениями, показанными на рис. 1 и рис. 2. Кроме того, положим $\theta = \angle PMN$, а через θ_1 обозначим острый угол между отрезками M_0N и M'_0M' (рис. 6). Угол θ равен углу между плоскостью Π и плоскостью (x, y) , а угол θ_1 не превышает этого угла:

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

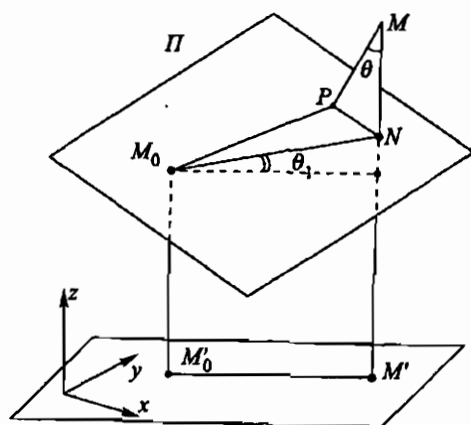


Рис. 6

Неравенство (10) вытекает из следующего свойства: если даны две плоскости и прямая в одной из них, то угол θ_1 между этой прямой и второй плоскостью не превышает угла θ между плоскостями (рис. 7).

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что из равенства (5) вытекает (4). Тем самым будет установлено, что для функции f справедливо разложение (3), причем уравнение (2а) будет задавать именно плоскость Π .

Заметим, что условия $M \rightarrow M_0$ и $M' \rightarrow M'_0$ эквивалентны вследствие непрерывности функции $f(x, y)$.

Пусть $M \rightarrow M_0$. Мы уже знаем, что из (5) следует (6), поэтому имеем

$$MP = o(M_0M) = o(M_0P). \quad (11)$$

Далее, учитывая (10) и (11), находим

$$MN = \frac{MP}{\cos \theta} = o(M_0P). \quad (12)$$

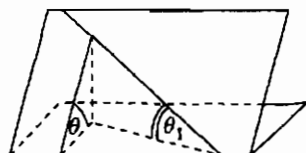


Рис. 7

Теперь, пользуясь геометрически очевидными неравенствами

$$M_0P - (MP + MN) \leq M_0N \leq M_0P + (MP + MN)$$

и соотношениями (11)–(12), получаем:

$$M'M'_0 = M_0N \cdot \cos \theta_1 = M_0P \cdot \cos \theta_1 + o(M_0P). \quad (13)$$

Наконец, используя (10), (12) и (13), вычисляем искомый предел:

$$\lim_{M' \rightarrow M'_0} \frac{MN}{M'M'_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{o(M_0P)}{M_0P \cdot \cos \theta_1 + o(M_0P)} = 0.$$

Тем самым теорема доказана.

8°. К определению касательной плоскости можно подойти *еще одним способом*. Снова предположим, что f , f_x и f_y непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Рассмотрим какую-нибудь гладкую кривую, расположенную на S и проходящую через M_0 :

$$\begin{aligned} x &= x(t), & y &= y(t), & z &= f[x(t), y(t)]; \\ x_t^2 + y_t^2 &\neq 0, & x(t_0) &= x_0, & y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Вектор с компонентами

$$\begin{aligned} ds &= x_t dt, & dy &= y_t dt, \\ dz &= (f_x \cdot x_t + f_y \cdot y_t) dt = f_x dx + f_y dy \end{aligned} \quad (15)$$

(где $dt \neq 0$) направлен по касательной к линии (14). Очевидно, что при $t = t_0$ вектор (15) компланарен плоскости (2). Это значит, что касательная прямая, проведенная в точке M_0 к линии (14), содержится в касательной плоскости Π , проведенной в этой точке к поверхности S (рис. 8).

Ясно вместе с тем, что любая прямая в плоскости Π , проходящая через M_0 , является касательной к некоторой линии вида (14). Именно, в качестве (14) можно взять линию пересечения поверхности S с плоскостью, которая проходит через выбранную прямую параллельно оси z (рис. 9).

Теперь мы можем сформулировать

Определение 3. Касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0 называется плоскость, состоящая из касательных прямых, проведенных в этой точке ко всевозможным гладким кривым на S .

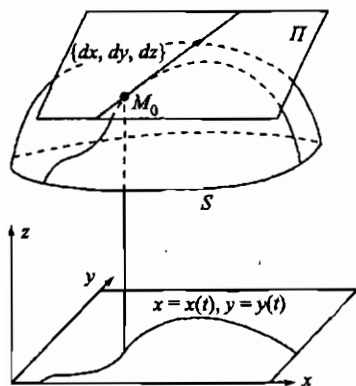


Рис. 8

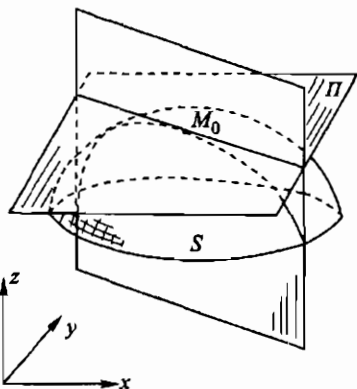


Рис. 9

Непосредственно из определения 3 вытекает следующий способ построения касательной плоскости: на поверхности S через точку M_0 нужно провести какие-нибудь две гладкие кривые с различными касательными и взять плоскость, проходящую через эти касательные.

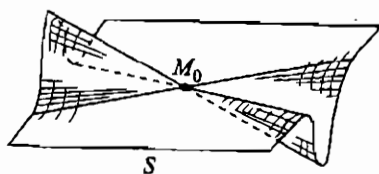


Рис. 10

9°. Замечание. В определении 3 существенна дифференцируемость функции $f(x, y)$. Если функция $z = f(x, y)$ не дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то может случиться, что множество касательных прямых к линиям, проведенным на S через M_0 , не пусто, но объединение этих прямых вовсе не является плоскостью. Так, например, на рис. 10 показана коническая поверхность S с вершиной M_0 , обладающая следующим свойством: совокупность касательных к гладким кривым, проходящим на S через M_0 , совпадает с самой поверхностью S .

Для читателя, незнакомого с общим понятием конической поверхности, отметим, что понятие это изложено ниже в виде примера 8 в п. 3° § 6.

§ 2. Нормаль. Гауссово сферическое отображение

1°. Определение. Нормалью к поверхности S в точке M называется прямая, проходящая через точку M перпендикулярно касательной плоскости.

Единичный вектор нормали будем в дальнейшем обозначать через $\vec{n}$. Из уравнения (2) § 1 находим

$$\vec{n} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \cdot \{-z_x, -z_y, 1\}. \quad (1)$$

Если перед радикалом в формуле (1) взять плюс, то получится орт нормали, направленный в сторону возрастающих значений z (рис. 11).

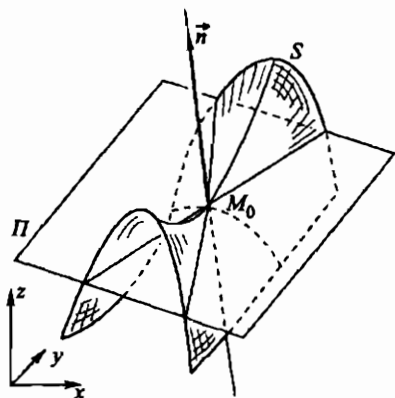


Рис. 11

2*. Для каждой точки M поверхности S построим орт нормали $\vec{n}$. Зафиксируем в пространстве какую-нибудь точку O и построим вектор $\vec{OM}^* = \vec{n}$. Его конец M^* окажется на поверхности сферы $\mathcal{G}$ с центром O и единичным радиусом (рис. 12).

Таким образом получается отображение, которое каждой точке M поверхности S ставит в соответствие точку M^* на единичной сфере $\mathcal{G}$. Оно называется *гауссовым сферическим отображением* данной поверхности.

При этом сферу $\mathcal{G}$ часто называют *гауссовой сферой*, а множество S^* , состоящее из образов всех точек поверхности S , называют *сферическим образом* рассматриваемой поверхности.

Нужно иметь в виду, что разным точкам поверхности S может соответствовать одна и та же точка на $\mathcal{G}$. В такой ситуации иногда считают, что сферический образ S^* в несколько слоев покрывает некоторые части гауссовой сферы.

3*. Хорошо видно, что чем больше искривленность поверхности (или какой-либо ее части), тем сильнее при смещении по поверхности

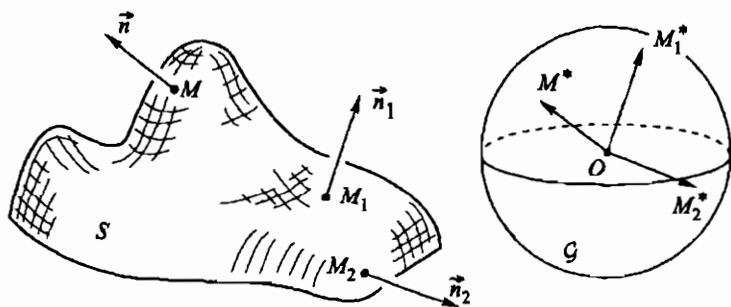


Рис. 12

меняется направление ее нормали. Поэтому сферическое отображение помогает изучать искривленность поверхности.

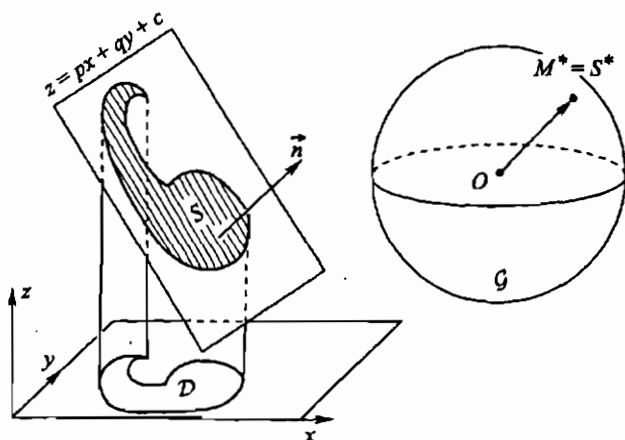


Рис. 13

В качестве примера рассмотрим частный случай. Будем называть поверхность S *плоской*, если она целиком расположена на какой-либо плоскости (рис. 13). Докажем, что справедлива

Теорема. Для того чтобы поверхность была плоской, необходимо и достаточно, чтобы ее сферический образ состоял из одной точки.

Замечание. Здесь, как и выше, мы считаем, что поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, причем функции f , f_x и f_y определены и непрерывны в некоторой области D плоскости (x, y) .

Доказательство теоремы. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Сначала предположим, что D — выпуклая область. Пусть $S^* = M^*$. Это значит, что

$$f_x = p = \text{const}, \quad f_y = q = \text{const}. \quad (2)$$

Интегрируя (2), находим

$$f(x, y) = px + \varphi_1(y) = qy + \varphi_2(x), \quad (3)$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$ — некоторые функции одного аргумента. Из (3) следует, что всюду в D

$$\varphi_1(y) - qy = \varphi_2(x) - px. \quad (4)$$

По лемме Фурье (см., напр., [113]) это возможно лишь тогда, когда правая и левая части равенства (4) являются постоянными, т. е.

$$\varphi_1(y) - qy = \varphi_2(x) - px = c = \text{const.}$$

Следовательно,

$$f(x, y) = px + qy + c. \quad (5)$$

Пусть теперь $\mathcal{D}$ — произвольная область. Тогда у каждой точки из $\mathcal{D}$ найдется круговая окрестность, в которой соблюдается равенство вида (5). При этом коэффициенты p и q однозначно определяются из (1) и (2), а свободный член c не может быть различным для разных точек области $\mathcal{D}$ вследствие непрерывности $f(x, y)$. Поверхность (5) представляет собой кусок некоторой плоскости, проекция которого совпадает с областью $\mathcal{D}$ (см. рис. 13). Геометрически очевидно, что эта плоскость перпендикулярна вектору $\overline{OM}^*$. Теорема доказана.

§ 3. Площадь поверхности

1°. Напомним, что на плоскости в основу измерения площадей кладется понятие площади прямоугольника, исходя из которого при помощи предельного перехода определяется площадь любой квадратуемой фигуры.

Понятие площади поверхности также определяется при помощи предельного перехода. Мы будем считать известным понятие площади для плоских фигур и будем на него опираться, определяя площадь поверхности.

Сначала мы обсудим способ приближенного нахождения площади поверхности, не определяя точно это понятие, а руководствуясь лишь наглядными соображениями. Затем сформулируем определение и выведем формулу для вычисления.

Площадь будем обозначать буквой σ (например, $\sigma(A)$ — площадь некоторой геометрической фигуры A).

2°. Пусть дана область $\mathcal{D}$ на плоскости (x, y) , имеющая кусочно-гладкую границу Γ , и пусть задана функция $f(x, y)$, непрерывная вместе с частными производными f_x и f_y в замкнутой области $\mathcal{D} \cup \Gamma$.

Замечание. Здесь и в дальнейшем гладкие линии считаются частным случаем кусочно-гладких.

Рассмотрим поверхность S , заданную уравнением

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}. \quad (1)$$

Определим, что такое ее площадь, и вычислим $\sigma(S)$.

3°. **Предварительные соображения.** Пусть U — кусок поверхности S , содержащий некоторую зафиксированную точку M и ограниченный кусочно-гладкой кривой. Символом $\text{diam } U$ обозначим диаметр U (как множества точек в $\mathbb{R}^3$), т. е. верхнюю грань ($\sup$) расстояний между

точками множества U . Пусть далее U' — проекция в направлении оси z области U на касательную плоскость Π , проведенную в точке M (рис. 14).

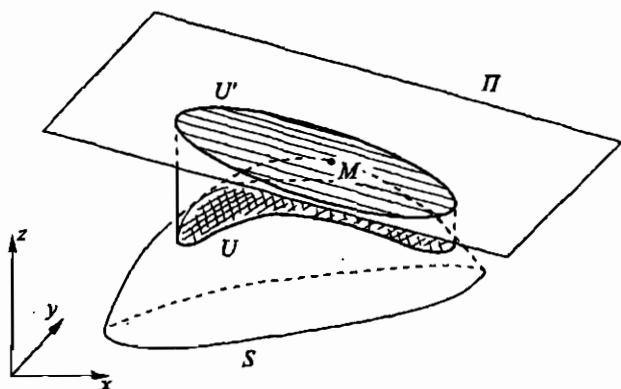


Рис. 14

Будем считать, что область U — переменная и что она стягивается к точке M ($\text{diam } U \rightarrow 0$). Тогда уклонение точек области U от плоскости Π является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\text{diam } U$; кроме того, касательные плоскости к S в точках области U стремятся к плоскости Π . Таким образом, стягиваясь к точке M , область U «уплощается», различие между ней и ее проекцией U' становится все меньше и меньше (как в смысле расположения в пространстве, так и с точки зрения направлений касательных плоскостей).

Естественно считать поэтому, что

$$\sigma(U) \approx \sigma(U'), \quad (2)$$

причем точность равенства (2) возрастает, когда $U \rightarrow M$. Иначе говоря,

$$\sigma(U) = \sigma(U') \cdot (1 + \xi), \quad (3)$$

где ξ — относительная погрешность приближенного равенства (2),

$$\xi \rightarrow 0, \quad \text{если } \text{diam } U \rightarrow 0. \quad (4)$$

Любое конкретное измерение площади является приближенным. Если область U достаточно мала, то погрешностью ξ можно пренебречь и считать, что $\sigma(U) = \sigma(U')$.

На практике так и поступают. Например, измеряя площади небольших земельных участков на равнинной местности, считают, что поверхность Земли — плоская, а шарообразность Земли пренебрегают. По существу это означает, что измерения ведутся в касательной плоскости к поверхности земного шара и что малая часть этой поверхности совпадает (в пределах точности измерений) с куском касательной плоскости.

Далее естественно предположить, что площадь поверхности аддитивна, и для приближенного измерения площадей больших областей на искривленных поверхностях можно разбить их на мелкие части, в каждой из которых поверхность можно заменить касательной плоскостью, а затем суммировать площади кусков. Для получения точной математической формулировки нужно использовать операцию предельного перехода.

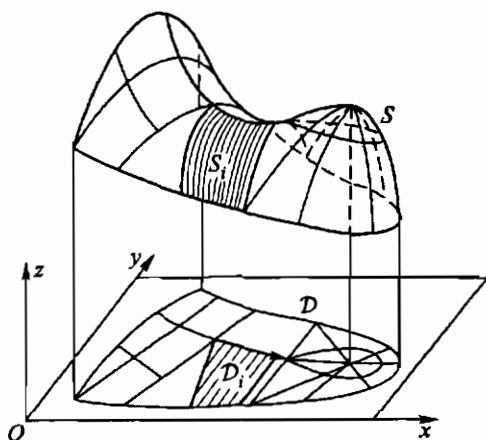


Рис. 15

Пусть область $\mathcal{D}$ на плоскости (x, y) разбита кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m$. Тогда поверхность S тоже разобьется на части, которые мы обозначим $S_1, \dots, S_m$, считая, что S_i проектируется на $\mathcal{D}_i$ (рис. 15). Аддитивность площади, о которой речь шла выше, выражается равенством

$$\sigma(S) = \sum_{i=1}^m \sigma(S_i). \quad (5)$$

Подчеркнем еще раз, что обе части равенства (5) написаны нами условно, поскольку еще не определено, что такое площадь поверхности или ее части.

В каждом из участков S_i выберем какую-нибудь точку M_i , проведем в ней касательную плоскость Π_i и построим проекцию S'_i области S_i на плоскость Π_i в направлении оси z (рис. 16).

Аналогично (3) напомним:

$$\sigma(S_i) = \sigma(S'_i) \cdot (1 + \xi_i). \quad (6)$$

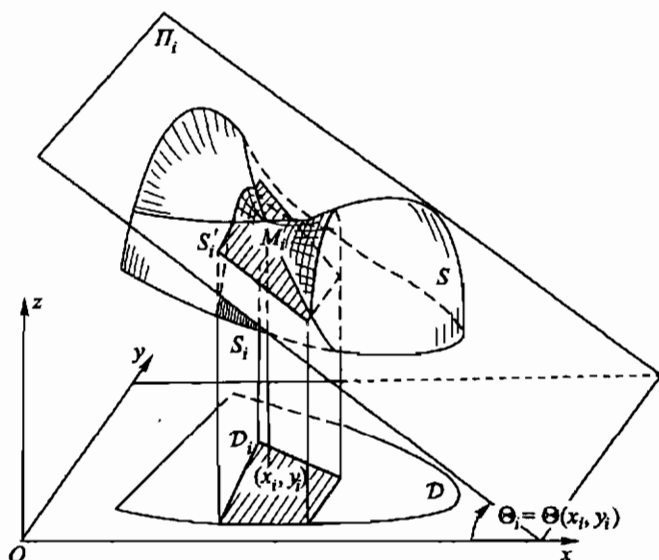


Рис. 16

Подставив выражение (6) в правую часть равенства (5), получим

$$\sigma(S) = \sum_{i=1}^m \sigma(S'_i) \cdot (1 + \xi_i) = \sum_{i=1}^m \sigma(S'_i) + \sum_{i=1}^m \xi_i \cdot \sigma(S'_i). \quad (7)$$

Пусть теперь

$$\delta = \max(\text{diam } D_i) \rightarrow 0$$

(разбиение измельчается, число частей неограниченно растет, $m \rightarrow \infty$). Тогда $\max(\text{diam } S_i) \rightarrow 0$. Предположим, что величины ξ_i в равенствах вида (6) стремятся к нулю равномерно, т. е.

$$\max |\xi_i| \rightarrow 0, \quad \text{если } \delta \rightarrow 0. \quad (8)$$

Обратим внимание на то, что требование (8) сильнее, чем требование (4). Из (7) и (8) следует, что

$$\sum_{i=1}^m \xi_i \cdot \sigma(S'_i) \rightarrow 0 \quad (9)$$

и что

$$\sum_{i=1}^m \sigma(S'_i) \rightarrow \sigma(S). \quad (10)$$

Поясним подробнее, как получаются соотношения (9) и (10). Обозначим через $\theta(x, y)$ двугранный угол между плоскостью (x, y) и

касательной плоскостью к поверхности S в точке $(x, y, z(x, y))$. Из формулы (1) §2 находим

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}. \quad (11)$$

В замкнутой области $\mathcal{D} \cup \Gamma$ производные z_x и z_y непрерывны, поэтому существует число $c \geq 1$ такое, что

$$1 \leq \frac{1}{\cos \theta(x, y)} \leq c \quad (12)$$

в $\mathcal{D} \cup \Gamma$. Заметим, что

$$\sigma(S'_i) = \frac{\sigma(\mathcal{D}_i)}{\cos \theta(x_i, y_i)} = \frac{\sigma(\mathcal{D}_i)}{\cos \theta_i}, \quad (13)$$

где x_i и y_i — абсцисса и ордината точки M_i , $\theta_i = \theta(x_i, y_i)$ (см. рис. 16). Используя (12), (13) и (8), проводим оценку:

$$\left| \sum_{i=1}^m \xi_i \cdot \sigma(S'_i) \right| \leq c \cdot \max |\xi_i| \cdot \sum_{i=1}^m \sigma(\mathcal{D}_i) = c \cdot \max |\xi_i| \cdot \sigma(\mathcal{D}) \rightarrow 0.$$

Итак, (9) установлено. Если заранее предполагается, что $\sigma(S)$ — некоторое число, то из (7) и (9) следует (10).

Подведем итог. Мы предполагали, что:

- 1) площадь поверхности существует и аддитивна (см. (5));
- 2) локально можно заменить поверхность ее касательной плоскостью (см. (2)–(4));
- 3) погрешность такой замены мала, если мал измеряемый участок, причем зависит она от диаметра измеряемого участка поверхности, но не зависит от его расположения на поверхности (см. (8)).

Из этих гипотез *вытекает* соотношение (10), которое выражает искомую площадь $\sigma(S)$ через площади вспомогательных плоских фигур.

4°. Учитывая изложенные выше соображения и используя обозначения предыдущего пункта, сформулируем

Определение. *Площадь поверхности S называется предел*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sigma(S'_i) = \sigma(S). \quad (14)$$

5°. Теперь нужно доказать, что предел (14) действительно существует. Попутно мы получим формулу для вычисления площади поверхности, заданной уравнением вида (1).

Используя (11) и (13) и учитывая непрерывность функций z_x и z_y , находим

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sigma(S'_i) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \frac{\sigma(\mathcal{D}_i)}{\cos \theta_i} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sqrt{1 + z_x^2(x_i, y_i) + z_y^2(x_i, y_i)} \cdot \sigma(\mathcal{D}_i) = \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy. \quad (15) \end{aligned}$$

Итак, площадь поверхности S существует и выражается формулой

$$\sigma(S) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy. \quad (16)$$

Выкладки (15) показывают, что предел (14) не зависит от выбора последовательности измельчающихся разбиений области $\mathcal{D}$ и от выбора точек M_i ($M_i \in S_i$).

6°. Замечания. 1). Нужно доказать еще, что $\sigma(S)$ не зависит от выбора координат (x, y, z) в $\mathbb{R}^3$. Это будет сделано ниже, в § 9

2). Иногда формулу (16) принимают за определение площади поверхности, заданной уравнением вида (1).

3). Можно дать другие эквивалентные определения площади поверхности. Прежде всего, в выражении (14) вместо S'_i можно брать *ортогональные* проекции областей S_i на плоскости Π_i . Кроме того, можно определить $\sigma(S)$ как предел последовательности площадей *многогранников*, равномерно сходящихся к S при условии, что направления граней этих многогранников равномерно стремятся к направлениям касательных плоскостей поверхности S (см. [119], гл. 17). Наконец, имеется способ определения площади, основанный на измерении *длин линий* на поверхности. Он опирается на аналогию с геодезическими измерениями и основан на построении *триангуляций*, т. е. разбиений на треугольники. Их стороны (вообще говоря, криволинейные) должны быть кратчайшими — как бы туго натянутыми по поверхности «ниточками». Для каждого из треугольников триангуляции по длинам трех его сторон строится «обычный» треугольник на евклидовой плоскости. Их площади складываются. Затем берется предел суммы при неограниченном измельчении триангуляции. В геодезии так и поступают, с той лишь разницей, что вместо предела берут сумму площадей конечного числа «достаточно мелких» треугольников. Несмотря на наглядную простоту этого подхода, на пути его обоснования пришлось преодолеть серьезные математические трудности. Это было сделано начиная с середины XX столетия в работах академика А. Д. Александрова [2, 4] и математиков его научной школы [5, 101, 102, 122]).

4). Обсуждением эквивалентности упомянутых здесь определений мы заниматься не будем.

§ 4. Кривизна нормальных сечений и классификация точек поверхности

1°. Займемся теперь локальным строением поверхности. Один из путей изучения формы поверхности состоит в исследовании линий ее пересечения с различными плоскостями.

Определение. *Нормальным сечением поверхности S в некоторой точке M называется линия пересечения поверхности с произвольной плоскостью, проходящей через нормаль в точке M .*

Для того чтобы составить себе наглядное представление о форме поверхности вблизи выбранной точки, рассмотрим в этой точке всевозможные нормальные сечения. При этом на поверхность S будут наложены дополнительные ограничения. Прежде всего, потребуем более высокой регулярности функции $z(x, y)$. Кроме того, мы будем предполагать, что поверхность специальным образом расположена относительно системы координат в $\mathbb{R}^3$.

2°. Пусть поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, причем функция $z(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядков в некоторой окрестности точки $x = 0$, $y = 0$ и удовлетворяет условиям:

$$z(0, 0) = z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = z_{xy}(0, 0) = 0. \quad (1)$$

Таким образом, мы предполагаем, что точка $O(0, 0, 0)$ принадлежит поверхности, плоскость $z = 0$ является касательной плоскостью в точке O . Равенство $z_{xy}(0, 0) = 0$ обеспечивается поворотом системы координат (x, y, z) вокруг оси z (в связи с этим см. ниже § 10, пп. 9°, 10*).

Введем обозначения:

$$z_{xx}(0, 0) = k_1, \quad z_{yy}(0, 0) = k_2. \quad (2)$$

Через ось z проведем плоскость

$$x = t \cos \varphi, \quad y = t \sin \varphi, \quad (3)$$

где t — параметр, $-\infty < t < +\infty$, φ — угол между плоскостью (3) и осью x (рис. 17). В результате получим нормальное сечение поверхности S , которое в плоскости (t, z) имеет уравнение

$$z = z(t \cos \varphi, t \sin \varphi), \quad (4)$$

причем $t = 0$ в точке O .

Пусть k — кривизна нормального сечения (4) в точке O , взятая со знаком «плюс», если линия (4) обращена выпуклостью в сторону

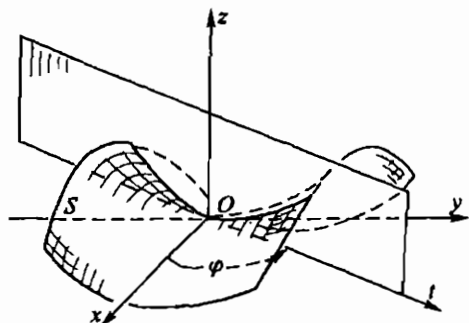


Рис. 17

отрицательных значений z (как на рис. 17), и со знаком «минус», если выпуклость обращена в сторону положительных значений z . Тогда

$$k = \frac{z_{tt}}{(1 + z_t^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

Используя (1)–(4), находим для точки O

$$\begin{aligned} z_t &= z_x \cos \varphi + z_y \sin \varphi = 0, \\ z_{tt} &= z_{xx} \cos^2 \varphi + 2z_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + z_{yy} \sin^2 \varphi = \\ &= k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi. \quad (6)$$

Равенство (6) называется *формулой Эйлера*.

3°. Будем теперь считать угол φ переменным, $k = k(\varphi)$. Рассмотрим следствия из формулы Эйлера.

1). $k(\varphi + \pi) = k(\varphi)$ (это ясно и из геометрических соображений, поскольку углам φ и $\varphi + \pi$ соответствует одно и то же нормальное сечение).

2). $k_1 = k(0)$, $k_2 = k(\frac{\pi}{2})$.

3). Если $k_1 = k_2$, то $k(\varphi) = \text{const} = k_1$.

4). Если $k_1 \neq k_2$, то k_1 и k_2 представляют собой экстремальные значения $k(\varphi)$; их называют *главными кривизнами поверхности* (1) в точке O . Так, например,

$$\text{если } k_1 < k_2, \text{ то } k_1 < k(\varphi) < k_2 \text{ при } \varphi \neq \frac{m\pi}{2}, \quad (7)$$

где m — любое целое число. В самом деле,

$$k(\varphi) = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \varphi,$$

откуда следует (7).

5). При $k_1 \neq k_2$ направления, дающие минимум и максимум $k(\varphi)$, взаимно ортогональны.

4°. Те направления, в которых кривизна нормального сечения $k(\varphi)$ имеет экстремальные значения, называют *главными направлениями* в точке O .

При соблюдении условий (1) главными являются направления координатных осей Ox и Oy . Если при этом $k_1 = k_2$, то любое направление в точке O считается главным.

5°. Поверхность

$$z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) \quad (8)$$

называется *соприкасающимся параболоидом* поверхности S в точке O . Поверхность (8) фактически может быть параболоидом (эллиптическим или гиперболическим), параболическим цилиндром или плоскостью.

Нетрудно проверить, что для каждого фиксированного φ кривизна нормального сечения соприкасающегося параболоида в точке O равна $k(\varphi)$.

Далее, разложив функцию $z(x, y)$ по формуле Тейлора и учитывая (1) и (2), получим

$$z(x, y) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) + o(x^2 + y^2). \quad (9)$$

Сравнивая (8) и (9), мы видим, что уклонение произвольной точки $M \in S$ от соприкасающегося параболоида (измеренное в направлении оси z) является при $M \rightarrow O$ бесконечно малой более высокого порядка, чем *квадрат* расстояния OM (рис. 18).

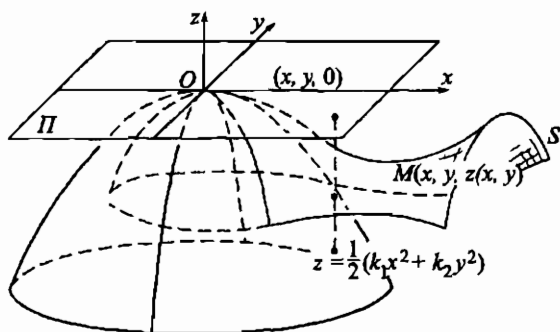


Рис. 18

6°. Проведем плоскости $z = \pm \frac{1}{2}$. Рассмотрим проекцию на плоскость $z = 0$ линий пересечения плоскостей $z = \pm \frac{1}{2}$ с соприкасающимся параболоидом. Получим линию (точнее, некоторую совокупность линий)

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = \pm 1. \quad (10)$$

Совокупность линий, задаваемых уравнениями (10), называется *индикатрисой Дюпена* поверхности S в точке O .

Если на плоскости $z = 0$ ввести полярные координаты (ρ, φ) по обычным формулам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (10a)$$

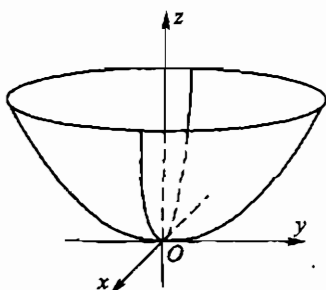
то уравнение индикатрисы Дюпена примет вид

$$\rho^2 k(\varphi) = \pm 1, \quad (11)$$

так что на ней $\rho = \frac{1}{\sqrt{|k(\varphi)|}}$ (см. ниже рис. 21, 24 и 26).

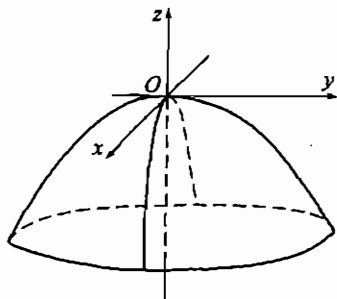
7°. **Типы точек поверхности.** В зависимости от знаков k_1 и k_2 могут появиться следующие случаи.

1). $k_1 k_2 > 0$. Точка O называется *эллиптической*. Соприкасающийся параболоид является эллиптическим параболоидом (рисунки 19, 20), а индикатриса Дюпена — эллипсом (рис. 21).



$$k_1 > 0, k_2 > 0$$

Рис. 19



$$k_1 < 0, k_2 < 0$$

Рис. 20

1 а). $k_1 k_2 > 0, k_1 = k_2 = k$. Точка O называется *шаровой*. Соприкасающийся параболоид является параболоидом вращения, индикатриса Дюпена — окружностью. В шаровой точке кривизна всех нормальных сечений одинакова и совпадает с кривизной нормальных сечений сферы

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{k}\right)^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2 \quad (12)$$

(см. рис. 22). Нетрудно проверить, что в этом частном случае уклонение текущей точки M поверхности S от сферы (12) (измеренное в направлении оси z или в направлении радиуса этой сферы) имеет порядок $o(OM^2)$, когда $OM \rightarrow 0$. Сферу (12) называют *соприкасающейся сферой* поверхности S в шаровой точке O .

2). $k_1 k_2 < 0$. Точка O называется *гиперболической*. Соприкасающийся параболоид является гиперболическим (рис. 23), индикатриса Дюпена состоит из двух сопряженных гипербол (рис. 24).

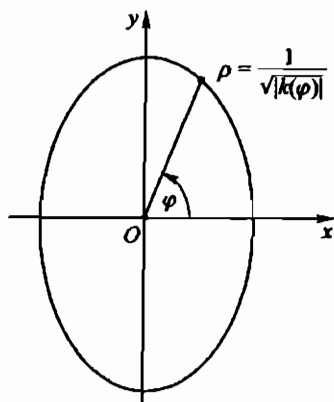


Рис. 21

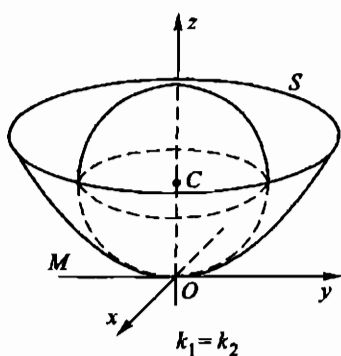


Рис. 22

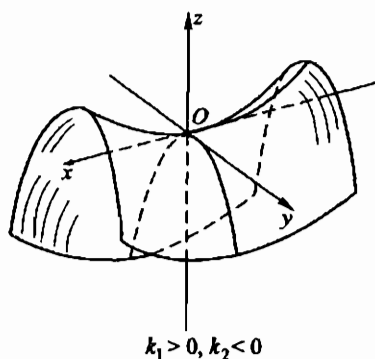


Рис. 23

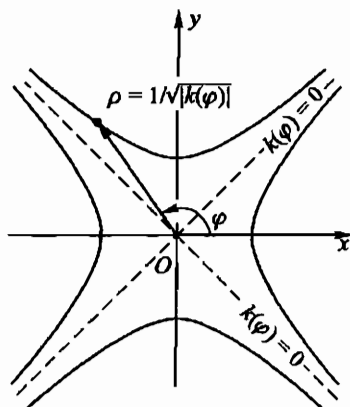


Рис. 24

3). $k_1 k_2 = 0$, но $k_1 \neq 0$ или $k_2 \neq 0$. Точка O называется *параболической*. Соприкасающийся параболоид является параболическим цилиндром (см. рис. 25, на котором $k_1 = 0$, $k_2 < 0$). Индикатриса Дюпена состоит из двух параллельных прямых (рис. 26).

4). $k_1 = k_2 = 0$. Точка O называется *точкой уплощения*. Индикатриса Дюпена не определена, соприкасающийся параболоид совпадает с касательной плоскостью $z = 0$. В случае точки уплощения разложение (9) принимает вид $z = o(x^2 + y^2)$.

Замечание. Точки уплощения часто относят к параболическим точкам, считая параболическими все те точки, где $K = 0$. Расположение поверхности относительно касательной плоскости в окрестности точки уплощения может быть весьма разнообразным. Два частных случая изображены на рисунках 27–28.

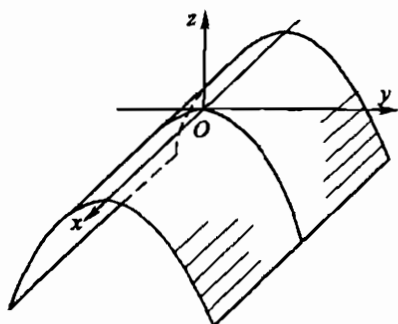


Рис. 25

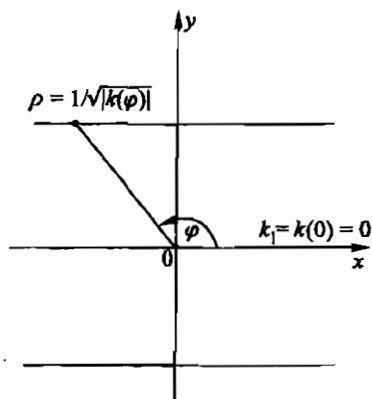


Рис. 26

8°. Величина $K = k_1 k_2$ называется *гауссовой кривизной*, а величина $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ называется *средней кривизной* поверхности S в точке O .

Название «средняя кривизна» связано с тем, что H представляет собой среднее значение кривизны нормальных сечений:

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\varphi) d\varphi. \quad (13)$$

Равенство (13) следует из формулы Эйлера.

9°. Эллиптическая точка характеризуется тем, что $K > 0$, гиперболическая — тем, что $K < 0$. Параболическая точка характеризуется условиями $K = 0$, $H \neq 0$; точка уплощения — условиями $K = 0$, $H = 0$; шаровая точка — условиями $K > 0$, $H^2 = K$.

Шаровые точки и точки уплощения иногда объединяются под названием *омбилических точек* ($K = H^2$, $k(\varphi) = \text{const}$).

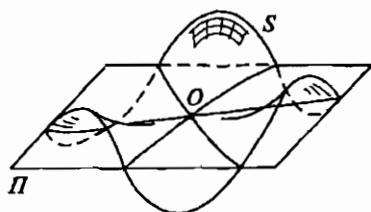


Рис. 27

10°. Направления, по которым $k(\varphi) = 0$, называют *асимптотическими направлениями*. Прямая, проходящая на плоскости (x, y) в асимптотическом направлении, не пересекает индикатрису Дюпена. В эллиптической точке нет асимптотических направлений; в параболической точке имеется одно асимптотическое направление (см. рис. 26); в гиперболической точке их два (рис. 24) и они совпадают с направлениями асимптот индикатрисы Дюпена. В точке уплощения любое направление является асимптотическим.

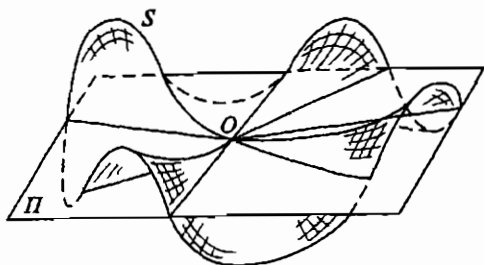


Рис. 28

11*. По знаку гауссовой кривизны K естественно выделяются три класса поверхностей, каждый из которых был предметом специальных исследований геометров:

1) $K > 0$. Теория поверхностей положительной кривизны активно разрабатывалась в XX в. [2, 61, 92] и нашла важные приложения в механике — в теории тонких оболочек [26, 36, 93, 94], а также в теории уравнений с частными производными [14, 80] и [92, гл. VIII].

2) $K = 0$. О поверхностях нулевой кривизны подробнее см. ниже, § 13*, а также [31, 56, 99] и [64].

3) $K < 0$. Локальное строение поверхностей отрицательной кривизны и отдельные классы таких поверхностей давно начали изучаться геометрами, см. например, [56, 118, 126]. Принципиально важный шаг в исследовании поверхностей постоянной отрицательной кривизны в целом в самом начале XX в. был сделан Д. Гильбертом [34]: он доказал, что если $K = -a^2$ с постоянным $a \neq 0$ на всей C^n -гладкой поверхности (см. ниже, § 6, п. 1° и § 15) при достаточно большом n (в его рассуждениях фактически использовалось $n \geq 5$), то у поверхности обязательно есть край (определение края см. п. 11* в § 15).

Н. В. Ефимов обобщил результаты Д. Гильберта на поверхности переменной кривизны $K < 0$ [48, 49]. Для этого потребовалась разработка новых подходов, так как поверхность отрицательной кривизны, рассматриваемая в целом, может быть устроена гораздо сложнее, чем поверхности нулевой или положительной кривизны. С дальнейшим развитием этой проблематики можно познакомиться в обзорах [25] и [105] и в указанной там литературе. Результаты, полученные при изучении поверхностей отрицательной кривизны, и развитые при этом методы тоже нашли приложения в теории нелинейных уравнений с частными производными (подробнее см. [95]), однако в этом направлении, по-видимому, сделаны лишь первые шаги.

Часть II

Вторая часть содержит основной теоретический материал книги. Вместе с первой частью она образует законченный фрагмент. Педагогам при подготовке лекций по этому материалу полезно обратить внимание на статью [3].

Глава 2

ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ. ЛОКАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 5. Вектор-функции двух аргументов

1°. Сформулируем несколько определений, важных для дальнейшего. Будем считать известными понятия предела, непрерывности и дифференцируемости для вектор-функций одного аргумента. Нулевой вектор будем обозначать символом $\vec{0}$.

1). Пусть на плоскости переменных (u, v) дана область $\mathcal{D}$ и каждой точке этой области поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{X} \in R^3$. Тогда говорят, что в $\mathcal{D}$ задана вектор-функция $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$.

2). Вектор $\vec{A}$ называется *пределом вектор-функции* $\vec{X}(u, v)$ при $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$, если $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} |\vec{X}(u, v) - \vec{A}| = 0$. Подробнее это означает,

что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|\vec{X}(u, v) - \vec{A}| < \varepsilon$, если только $\rho = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \delta$. При этом точка (u_0, v_0) может принадлежать области $\mathcal{D}$ или ее границе, а точка (u, v) берется в пересечении области $\mathcal{D}$ и δ -окрестности точки (u_0, v_0) (рис. 29). Употребляется запись

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} \vec{X}(u, v) = \lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \vec{X}(u, v) = \vec{A}.$$

3). Вектор-функция $\vec{X}(u, v)$ называется *бесконечно малой* при $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$, если

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} \vec{X}(u, v) = \vec{0}.$$

4). Вектор-функция $\vec{X}(u, v)$ называется *непрерывной в точке* $(u_0, v_0) \in \mathcal{D}$, если $\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} \vec{X}(u, v) = \vec{X}(u_0, v_0)$. Вектор-функция на-

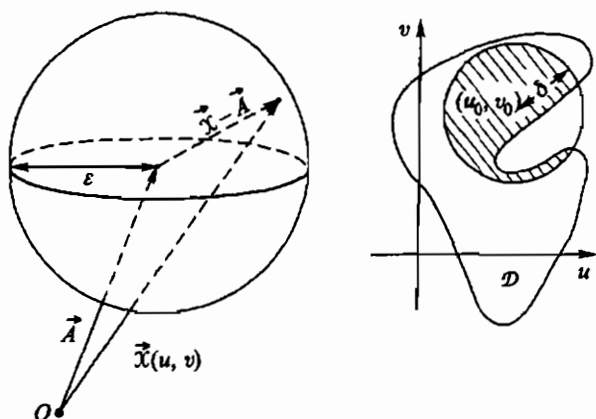


Рис. 29

зывается непрерывной в области $\mathcal{D}$, если она непрерывна в каждой точке этой области.

5). Частной производной вектор-функции $\vec{X}(u, v)$ по аргументу u называется предел

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta u} [\vec{X}(u + \Delta u, v) - \vec{X}(u, v)] = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} = \vec{X}_u.$$

Аналогично определяется $\vec{X}_v$.

6). Пусть

$$du = u - u_0, \quad dv = v - v_0, \quad \rho = \sqrt{du^2 + dv^2}.$$

Предположим, что для данной вектор-функции $\vec{X}(u, v)$ и для данной точки $(u_0, v_0) \in \mathcal{D}$ существуют векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ такие, что

$$\vec{X}(u, v) - \vec{X}(u_0, v_0) = \vec{A} du + \vec{B} dv + \vec{Y}(u, v) \rho,$$

где $\vec{Y}(u, v)$ — некоторая вектор-функция, бесконечно малая при $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$. Тогда выражение $\vec{A} du + \vec{B} dv$ называется дифференциалом вектор-функции $\vec{X}$ в точке (u_0, v_0) . Употребляется запись

$$\vec{A} du + \vec{B} dv = d\vec{X}.$$

При фиксированных u_0, v_0 дифференциал $d\vec{X}$ является вектор-функцией аргументов du, dv . Вектор-функция $\vec{X}$ называется дифференцируемой, если у нее существует дифференциал.

Из определений 5) и 6) сразу следует, что дифференцируемая вектор-функция имеет частные производные

$$\vec{X}_u(u_0, v_0) = \vec{A}, \quad \vec{X}_v(u_0, v_0) = \vec{B}.$$

2°. Пусть дана вектор-функция $\vec{X}(u, v)$ и пусть в $\mathbb{R}^3$ введены декартовы прямоугольные координаты. Запишем вектор $\vec{X}$ в координатах:

$$\vec{X} = \{x, y, z\}.$$

Тогда x, y, z будут функциями аргументов u, v .

Предположим, что $\vec{X}(u, v)$ бесконечно мала при $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$. Тогда каждая из координат вектора тоже является бесконечно малой, например,

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} x(u, v) = 0.$$

Для доказательства достаточно заметить, что $|x| \leq |\vec{X}|$.

Из указанного свойства вытекает

Следствие. Если $\vec{X}(u, v)$ непрерывна, то функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ и $z(u, v)$ тоже непрерывны при любом выборе в $\mathbb{R}^3$ декартовых координат.

3°. Классы регулярности вектор-функций. Говорят, что вектор-функция $\vec{X}(u, v)$ в области D принадлежит

- классу C^0 , если она непрерывна в этой области;
- классу C^n , $n \geq 1$, если в области D она имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно;
- классу C^∞ , если в области D существуют и непрерывны ее частные производные всех порядков.

Аналогичная терминология употребляется для числовых функций, а также в случае функций одного аргумента.

Важное замечание. Если $\vec{X}(u, v) \in C^n$, $0 \leq n \leq \infty$, то координаты $x(u, v)$, $y(u, v)$ и $z(u, v)$ вектор-функции $\vec{X}$ сами являются функциями класса C^n при любом выборе в $\mathbb{R}^3$ декартовых координат. Это следует из независимости от выбора координат определений предела, непрерывности и производных для вектор-функций.

4°. Отметим еще четыре свойства вектор-функций, которыми нередко приходится пользоваться в теории поверхностей.

1). Если $\vec{X}_u$ и $\vec{X}_v$ непрерывны в некоторой области, то $\vec{X}(u, v)$ дифференцируема в этой области.

2). Если функции $u(t_1, t_2)$, $v(t_1, t_2)$ и вектор-функция $\vec{X}(u, v)$ дифференцируемы, то вектор-функция $\vec{X}(u(t_1, t_2), v(t_1, t_2))$ аргументов t_1 и t_2 тоже дифференцируема, причем

$$\vec{X}_{t_i} = \vec{X}_u \cdot u_{t_i} + \vec{X}_v \cdot v_{t_i}, \quad i = 1, 2.$$

3). Если смешанные производные $\frac{\partial}{\partial u}(\vec{X}_v)$ и $\frac{\partial}{\partial v}(\vec{X}_u)$ существуют и непрерывны, то они равны: $(\vec{X}_v)_u = (\vec{X}_u)_v$.

4). Пусть $\vec{X}(u, v) \in C^n$. Тогда

$$\begin{aligned}\vec{X}(u + \Delta u, v + \Delta v) &= \\ &= \vec{X}(u, v) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{\partial^k \vec{X}(u, v)}{\partial u^{k-j} \partial v^j} (\Delta u)^{k-j} (\Delta v)^j + o(\rho^n),\end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$ (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).

Для доказательства этих свойств достаточно перейти от векторов к их координатам и воспользоваться известными теоремами математического анализа.

5*. Замечание. Разумеется, можно рассматривать вектор-функции, заданные не в открытой области, а на каком-либо другом множестве плоскости (u, v) . Кроме того, перечисленные выше определения и свойства легко распространяются на случай, когда переменный вектор $\vec{X}$ принадлежит n -мерному евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ и зависит от k аргументов $u_1, \dots, u_k$. Большинство фактов, изложенных ниже, также можно распространить на многомерный случай. Мы не будем на этом останавливаться, отсылая интересующегося читателя, например, к книге [123].

6°. Скалярное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ будем обозначать символом $(\vec{A}, \vec{B})$, их векторное произведение — символом $\vec{A} \times \vec{B}$ или $[\vec{A} \times \vec{B}]$ или $[\vec{A}, \vec{B}]$, смешанное произведение трех векторов $\vec{A}, \vec{B}$ и $\vec{C}$ — символом $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$. Скалярные и смешанные произведения вектор-функций, заданных в одной и той же области $\mathcal{D}$, являются функциями, а векторные произведения — вектор-функциями с той же областью определения $\mathcal{D}$. Переходя к координатам, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} (\vec{X}(u, v), \vec{Y}(u, v)) &= (\vec{X}_u, \vec{Y}) + (\vec{X}, \vec{Y}_u); \\ \frac{\partial}{\partial u} [\vec{X}(u, v) \times \vec{Y}(u, v)] &= [\vec{X}_u \times \vec{Y}] + [\vec{X} \times \vec{Y}_u].\end{aligned}$$

Разумеется, такие же формулы справедливы для производных по v .

§ 6. Параметрическое задание поверхностей

1°. Определение. Множество S точек в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ называется *элементарной поверхностью класса C^n* , $1 \leq n \leq \infty$, если существует вектор-функция $\vec{X}(u, v) \in C^n$, заданная в некоторой односвязной области $\mathcal{M}$ на плоскости (u, v) , такая что:

а) S представляет собой геометрическое место концов векторов $\vec{X}(u, v)$, отложенных из некоторой точки $O \in \mathbb{R}^3$;

- б) $[\vec{X} \times \vec{X}_v] \neq \vec{\theta}$ во всей области $\mathcal{M}$;
 в) $\vec{X}(u_1, v_1) \neq \vec{X}(u_2, v_2)$, если $u_1 \neq u_2$ или $v_1 \neq v_2$.

Иногда элементарную поверхность иначе называют простым куском поверхности. Укажем сразу же, что условия, входящие в определение элементарной поверхности, слишком обременительны; их приходится ослаблять, расширяя класс объектов, рассматриваемых в качестве поверхностей. Прежде всего, можно не требовать односвязности области $\mathcal{M}$, можно присоединять к $\mathcal{M}$ границу или часть границы. Далее, можно допускать нарушение условия б), тем самым включив в рассмотрение поверхности с особыми точками (см. ниже п. 3°, пример 5) или даже совсем отказаться от дифференцируемости вектор-функции $\vec{X}$. Наконец, можно допустить самопересечения поверхностей, сняв условие в). Однако в последнем случае оказывается нецелесообразным рассматривать поверхность как множество точек пространства, понятие «точка поверхности» требует уточнения и т. д. Обсуждение этих вопросов мы отложим до § 15.

Поверхности класса C^1 называют *гладкими*. Ясно, что поверхность класса C^n при $n > 1$ тоже является гладкой; такие поверхности называются *C^n -гладкими*; при этом допускается $n = \infty$.

В дальнейшем мы часто будем употреблять термин «поверхность S , заданная параметрически», имея в виду, что S задана уравнением вида $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, и не требуя односвязности области $\mathcal{M}$. Точку O , из которой откладываются векторы $\vec{X}(u, v)$, будем считать зафиксированной. Текущую точку поверхности S чаще всего будем обозначать буквой X , считая, что $\vec{OX} = \vec{X}$.

2°. Аргументы u и v вектор-функции $\vec{X}$ называют *параметрами* или *криволинейными координатами на S* ; иногда их называют *гауссовыми координатами*.

При фиксированном u конец вектора $\vec{X}$ описывает на поверхности линию (гладкую пространственную кривую), вдоль которой меняется одна координата v . Каждую такую линию называют *координатной v -линией*. Вектор $\vec{X}_v$ направлен по ее касательной (рис. 30).

При фиксированном v конец вектора $\vec{X}$ описывает кривую, называемую *координатной u -линией*. Вектор $\vec{X}_u$ направлен по касательной к u -линии.

u -линии и v -линии образуют *координатную сеть* на поверхности S . Условие $\vec{X}_u \times \vec{X}_v \neq \vec{\theta}$ означает, что в каждой точке поверхности векторы $\vec{X}_u$ и $\vec{X}_v$ не являются нулевыми и друг другу не коллинеарны.

3°. **Примеры.** 1). Пусть даны векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$, причем $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{\theta}$, и пусть

$$\vec{X}(u, v) = \vec{A}u + \vec{B}v + \vec{C}, \quad -\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty. \quad (1)$$

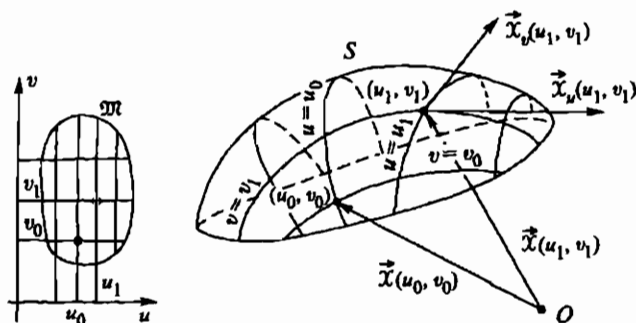


Рис. 30

Уравнение (1) задает поверхность класса C^∞ , а именно — плоскость, компланарную векторам $\vec{A}$ и $\vec{B}$ (рис. 31). Параметры u, v представляют собой аффинные координаты на этой плоскости.

2). Если $\vec{A} \neq \vec{0}$, но $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$, то уравнение (1) задает не поверхность, а линию: прямую, коллинеарную вектору $\vec{A}$. В этом случае нарушено условие $\vec{X}_u \times \vec{X}_v \neq \vec{0}$, поскольку $\vec{X}_u = \vec{A}$, $\vec{X}_v = \vec{B}$.

3). Пусть M — область на плоскости (x, y) , в ней задана функция $f(x, y)$ класса C^n ($1 \leq n \leq \infty$). Поверхность

$$z = f(x, y) \quad (2)$$

удовлетворяет определению пункта 1° и принадлежит классу C^n . В самом деле, здесь

$$u = x, \quad v = y, \quad \vec{X}(u, v) = \{x, y, f(x, y)\},$$

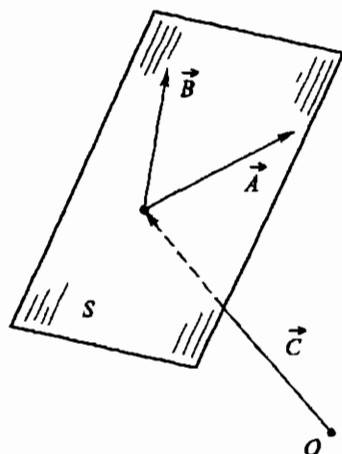


Рис. 31

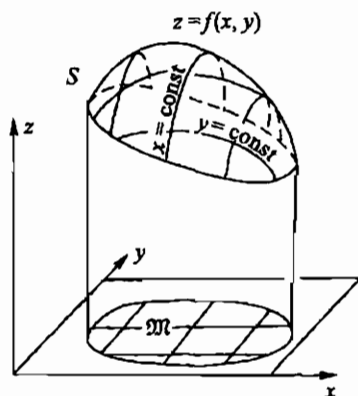


Рис. 32

причем

$$\vec{X}_u = \{1, 0, f_x\}, \quad \vec{X}_v = \{0, 1, f_v\},$$

так что

$$\vec{X}_u \times \vec{X}_v = \{-f_x, -f_v, 1\} \neq \vec{0}. \quad (3)$$

Обратим внимание на то, что вектор (3) направлен по нормали к поверхности (2). Линии $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ образуют на поверхности (3) криволинейную координатную сеть (см. рис. 32).

4). На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ введем координаты (φ, ψ) по формулам

$$x = r \cos \psi \cos \varphi, \quad y = r \cos \psi \sin \varphi, \quad z = r \sin \psi.$$

Координаты (φ, ψ) часто называют *географическими*; φ — долгота, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$; ψ — широта, $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ (рис. 33).

Обратим внимание на то, что в этом примере условия п. 1° не соблюдаются вследствие двух обстоятельств, указанных ниже:

а) множество значений географических координат не является открытой областью;

б) при $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ имеем $|\vec{X}_\varphi \times \vec{X}_\psi| = 0$, поскольку

$$\vec{X}_\varphi \left(\varphi, \pm \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \{x, y, z\} \Big|_{\psi = \pm \frac{\pi}{2}} = \{0, 0, 0\}. \quad (4)$$

Равенство (4) геометрически означает, что координатная линия $\psi = \frac{\pi}{2}$ вырождена в одну точку, в которой пересекаются между собой разные линии $\varphi = \text{const}$ (см. рис. 33). Аналогичная картина наблюдается при $\psi = -\frac{\pi}{2}$. Точки $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ называют *полюсами географической системы координат*.

Элементарной поверхностью является, например, та часть сферы, на которой $-\pi < \varphi < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$.

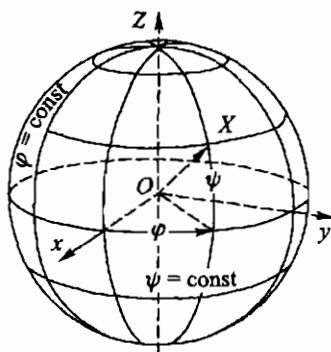


Рис. 33

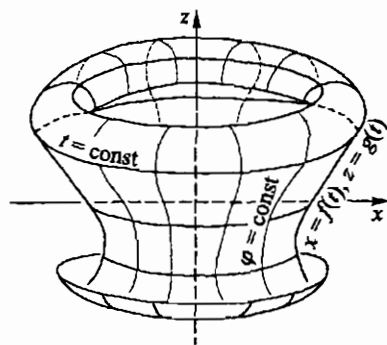


Рис. 34

5). Пусть на плоскости (x, z) дана кривая

$$x = f(t), \quad z = g(t), \quad t_1 < t < t_2. \quad (5)$$

Пусть S — поверхность вращения линии (5) вокруг оси z (рис. 34). Угол поворота вокруг оси z , отсчитываемый от плоскости (x, z) , обозначим через φ . Поверхность S задается уравнением

$$\vec{X} = \{x, y, z\} = \vec{X}(t, \varphi), \quad (6)$$

где

$$x = f(t) \cos \varphi, \quad y = f(t) \sin \varphi, \quad z = g(t), \quad (6a)$$

$t_1 < t < t_2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Можно считать, что угол φ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; тогда для каждого t значениям угла φ , $\varphi \pm 2\pi, \dots, \varphi \pm 2m\pi$ будет соответствовать одна и та же точка поверхности. Можно поступить иначе и, предположив, что $t_1 > 0$, рассматривать область определения $\mathcal{M}$ вектор-функции $\vec{X}$ как круговое кольцо $t_1 < t < t_2$ в полярных координатах (t, φ) . Тогда отображение $\mathcal{M} \rightarrow S$, задаваемое формулами (6)–(6a), взаимно однозначно. Если $f(t) \in C^n$ и $g(t) \in C^n$, то $\vec{X}(t, \varphi) \in C^n$. Нетрудно подсчитать, что

$$\vec{X}_t \times \vec{X}_\varphi = f \cdot \{-g_t \cos \varphi, -g_t \sin \varphi, f_t\}. \quad (7)$$

Вектор (7) является ненулевым, если $f \neq 0$ и $f_t^2 + g_t^2 \neq 0$, т.е. если кривая (5) не пересекает оси вращения и не имеет особых точек.

Линии $\varphi = \text{const}$ на поверхности вращения называются *меридианами*, линии $t = \text{const}$ — *параллелями*.

В частном случае, когда $f(t) = t$, $g(t) = at$ и $a \neq 0$ имеем круглый конус:

$$x = t \cos \varphi, \quad y = t \sin \varphi, \quad z = at.$$

В этом случае вектор (7) является нулевым при $t = 0$; в отличие от рассмотренного выше примера сферы здесь не только у координатной сети, но и у самой поверхности есть особенность — *вершина конуса* (рис. 35).

6) *Прямой геликоидом* называется поверхность, которая (при надлежащем выборе декартовых координат x, y, z) задается уравнениями

$$x = au \cos v, \quad y = au \sin v, \quad z = bv,$$

где $a > 0$, $b \neq 0$, $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$. Нетрудно проверить, что прямой геликоид является элементарной поверхностью класса C^∞ ; линии $v = \text{const}$ — прямые; линия $u = 0$ — тоже прямая (ось z), а остальные $u = \text{const}$ — винтовые (см. рис. 36, на котором показана часть прямого геликоида).

Если прямая, пересекающая ось z под углом $\alpha = \pi/2$, равномерно вращается вокруг оси z и в то же время равномерно перемещается в направлении оси z , то она описывает в пространстве прямой геликоид.

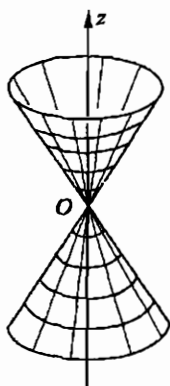


Рис. 35

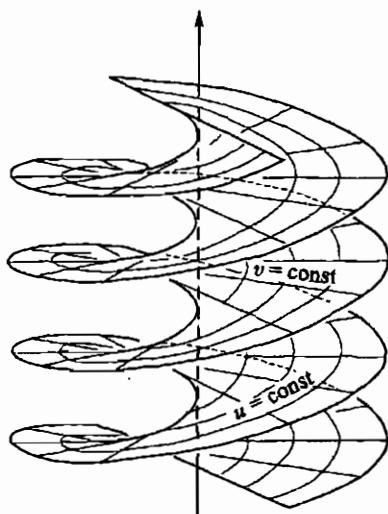


Рис. 36

В случае острого угла α аналогичное кинематическое построение дает поверхность, называемую *косым геликоидом*. Читатель может исследовать косой геликоид в качестве самостоятельного упражнения.

Прямой геликоид часто называют *винтовой поверхностью*; однако это — использование данного термина в узком смысле. Винтовая поверхность (в широком смысле) строится так: в плоскости P , проходящей через данную ось, задается линия L , которая не должна быть прямой, параллельной оси; плоскость P равномерно вращается вокруг оси и одновременно с этим скользит вдоль этой же оси, тоже равномерно. Тогда линия L «зачерчивает» в пространстве винтовую поверхность.

Если L — прямая, пересекающая ось, то получаются рассмотренные выше частные случаи: когда эта прямая перпендикулярна оси — прямой геликоид, а когда не перпендикулярна — косой геликоид.

7). *Цилиндрические поверхности*. Будем считать, что нам даны: постоянный вектор $\vec{e}$, некомпланарный плоскости Π , а в плоскости Π — линия L , которую называют *направляющей*. Через каждую точку линии L проведем прямую, параллельную вектору $\vec{e}$. Эти прямые называют *образующими*. Все вместе они заполняют в пространстве исковую цилиндрическую поверхность S . Составим ее уравнение. Будем считать, что вектор-функция $\vec{r}(u)$ задает направляющую L , причем параметр u пробегает некоторый промежуток U на числовой оси $\mathbb{R}$. При фиксированном $u_0 \in U$ вектор $\vec{r}(u_0)$ является радиус-вектором какой-то конкретной точки M на L . Прибавив к $\vec{r}(u_0)$ вектор $v\vec{e}$, мы попадем в точку N на прямолинейной образующей, проходящей через M . Когда параметр v пробегает всю числовую ось $\mathbb{R}$, текущая точка N

пробегают всю прямолинейную образующую. Поэтому уравнение

$$\vec{X}(u, v) = \vec{r}(u) + v \vec{e}, \quad u \in U, \quad v \in \mathbb{R},$$

задает рассматриваемую цилиндрическую поверхность S . В аналитической геометрии читатель встречался с цилиндрическими поверхностями второго порядка (круговой, эллиптический, параболический цилиндры и т. д.). Различные цилиндрические поверхности изображены на рисунках 25, 76, 85, 86, 91, 105, 171 и 186

8). *Коническая поверхность* определяется заданием направляющей линии $\mathcal{L}$ и вершины P — точки, не принадлежащей линии $\mathcal{L}$. Пусть снова $\mathcal{L}$ задана вектор-функцией $\vec{r}(u)$, но в отличие от предыдущего примера мы не будем требовать, чтобы $\mathcal{L}$ располагалась в плоскости. Коническая поверхность S с направляющей $\mathcal{L}$ и вершиной P «составлена» из всевозможных прямых (образующих), проходящих через точки направляющей $\mathcal{L}$ и вершину P . Если обозначить $\vec{r}_0$ радиус-вектор точки P , то по аналогии с предыдущим примером нетрудно сообразить, что рассматриваемая коническая поверхность S будет задана уравнением

$$\vec{X}(u, v) = \vec{r}_0 + (\vec{r}(u) - \vec{r}_0)v.$$

Конические поверхности показаны на рисунках 10, 35, 77 и 104.

9). Возвращаясь к примеру 7, будем теперь считать, что направляющая $\mathcal{L}$ (как и в примере 8) не обязательно является плоской, а может быть и пространственной кривой. Кроме того, вектор $\vec{e}$ единичной длины будем считать зависящим от точки на $\mathcal{L}$, полагая $\vec{e} = \vec{e}(u)$. Прямая, называемая *образующей*, проводится через текущую точку на $\mathcal{L}$ в направлении вектора $\vec{e}(u)$. Тогда при движении точки по $\mathcal{L}$ образующие «зачерчивают» в пространстве поверхность, которую называют *линейчатой* (за то, что она сформирована из прямых линий). Рассуждая аналогично примеру 7, составим ее уравнение:

$$\vec{X}(u, v) = \vec{r}(u) + v \vec{e}(u).$$

Плоскость, прямой и косой геликонды, все конические и цилиндрические поверхности, а также гиперболический параболоид и однополостный гиперболоид являются частными случаями линейчатых поверхностей (однако эти частные случаи далеко не исчерпывают всё их множество; подробнее о линейчатых поверхностях см. [56, т. 1]).

4°. Пусть S — поверхность, заданная уравнением вида

$$\vec{X} = \vec{X}(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{M}, \quad (8)$$

где $\mathcal{M}$ — некоторая область на плоскости параметров (u, v) . Рассмотрим на S произвольную точку X . Пусть (u_0, v_0) — ее криволинейные координаты ($\vec{OX} = \vec{X}(u_0, v_0)$). Точку плоскости (u, v) , имеющую координаты $u = u_0$, $v = v_0$, обозначим через $\tilde{X}$ (таким образом, $\tilde{X}$ — прообраз точки X при отображении (8) области $\mathcal{M}$ в пространство $\mathbb{R}^3$).

Пусть $\tilde{U}$ — произвольная односвязная область на плоскости (u, v) , содержащая точку $\tilde{X}$ и содержащаяся в $\mathfrak{M}$:

$$\tilde{X} \in \tilde{U} \subset \mathfrak{M}.$$

Обозначим через U ту часть поверхности S , для которой $(u, v) \in \tilde{U}$ (рис. 37). Таким образом, U представляет собой образ области $\tilde{U}$ при отображении (8).

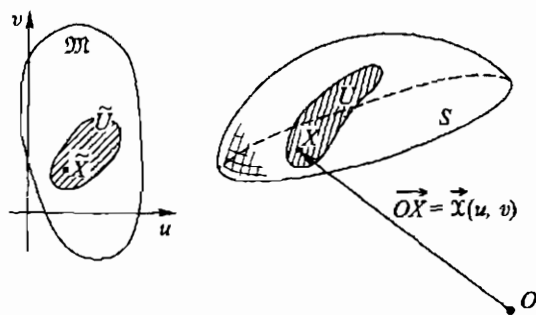


Рис. 37

Множество U точек поверхности S называют *окрестностью* точки X на S .

Выбирая по-разному $\tilde{U}$, мы будем получать разные окрестности точки X на поверхности S . Обратим внимание на то, что $\tilde{U}$ вовсе не обязана быть круговой окрестностью точки $\tilde{X}$ на плоскости (u, v) .

5°. Для гладкой поверхности вида (8) имеем

$$\vec{X}_u \times \vec{X}_v = \left\{ \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right\}. \quad (9)$$

Мы считаем, что $\vec{X}_u \times \vec{X}_v \neq \vec{0}$. Это значит, что в каждой точке поверхности отлична от нуля хотя бы одна из координат вектора (9). Пусть, например, в точке $X \in S$

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0. \quad (10)$$

(Этого можно добиться, переименовав, если нужно, оси координат x, y, z) Вследствие непрерывности $\vec{X}_u$ и $\vec{X}_v$, якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ непрерывен и потому неравенство (10) справедливо не только в точке X , но и в некоторой ее окрестности. А тогда по теореме о неявных функциях существует окрестность точки X , в которой u, v являются (дифференцируемыми) функциями аргументов x, y :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

и, следовательно,

$$z = z[u(x, y), v(x, y)].$$

Таким образом, поверхность, удовлетворяющую определению п. 1°, можно в достаточно малой окрестности каждой своей точки представить уравнением вида $z = f(x, y)$ (выбрав координатные оси x, y, z надлежащим образом в зависимости от того, окрестность какой из точек поверхности рассматривается).

З а м е ч а н и е. Пусть $\vec{X}(u, v) \in C^n$ ($1 \leq n \leq \infty$) и пусть соблюдается условие (10). Тогда, пользуясь теоремами анализа о дифференцируемости неявных и сложных функций, можно доказать, что z как функция аргументов x, y тоже принадлежит классу C^n . Мы не будем на этом останавливаться, отсылая интересующегося читателя к учебнику [119]. Частный случай $n = 2$ рассмотрен ниже в п. 10* § 10.

6°. Предыдущий пункт позволяет к поверхностям вида (8) применить результаты первой главы. В частности, можно утверждать, что поверхность класса C^1 , заданная параметрически, в каждой своей точке имеет касательную плоскость. При этом очевидно, что касательной является плоскость, проходящая через векторы $\vec{X}_u$ и $\vec{X}_v$ (см. выше п. 8° из § 1 и 2° из § 6). Мы можем поэтому сразу записать параметрическое уравнение касательной плоскости к поверхности (8) в точке $X(u_0, v_0)$:

$$\vec{y}(\xi, \eta) = \vec{X}(u_0, v_0) + \vec{X}_u(u_0, v_0) \cdot \xi + \vec{X}_v(u_0, v_0) \cdot \eta, \quad (11)$$
$$-\infty < \xi < +\infty, \quad -\infty < \eta < +\infty.$$

Введя обозначения $\vec{X}_0 = \vec{X}(u_0, v_0)$, $du = \xi$, $dv = \eta$, можно уравнение (11) переписать в виде

$$\vec{y} = \vec{X}_0 + \vec{X}_u du + \vec{X}_v dv$$

или

$$\vec{y} = \vec{X}_0 + d\vec{X}.$$

Итак, дифференциал $d\vec{X}$ представляет собой вектор, расположенный в касательной плоскости к поверхности $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ (рис. 38).

7°. Орт нормали $\vec{n}$ к поверхности (8) выражается формулой

$$\vec{n} = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{|\vec{X}_u \times \vec{X}_v|}. \quad (12)$$

Перед дробью в формуле (12) можно было бы поставить знак « $\pm$ ». Для определенности будем считать, что правая часть формулы (12) берется со знаком «плюс»; тогда тройка векторов $\vec{X}_u, \vec{X}_v, \vec{n}$ ориентирована так же, как тройка ортов координатных осей x, y, z .

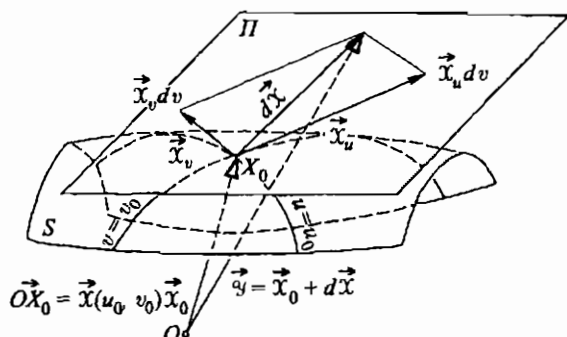


Рис. 38

8°. Класс поверхностей, заданных параметрически, шире, чем класс поверхностей, заданных уравнениями вида $z = f(x, y)$. Так, например, геликоид ни в каких декартовых координатах нельзя задать одним уравнением вида $z = f(x, y)$. Параметрическое задание удобно еще и потому, что на поверхностях существуют сети линий со специальными геометрическими свойствами, выбор которых в качестве координатных сетей облегчает решение многих задач.

§ 7. Преобразование координат на поверхности

1°. Одну и ту же поверхность S можно задавать разными параметрическими уравнениями и вводить тем самым на S разные системы криволинейных координат. Покажем, как это сделать.

Пусть поверхность S дана. Предположим, что на ней можно построить два семейства линий, удовлетворяющих следующим условиям:

- а) через каждую точку поверхности проходит одна линия первого семейства и одна линия второго семейства;
- б) каждая из линий первого семейства пересекается с каждой из линий второго семейства;
- в) любые линии из разных семейств имеют только одну точку пересечения.

Далее, выберем на S какую-нибудь точку X_0 и обозначим через $\mathcal{L}_i$ проходящую через нее линию i -го семейства ($i = 1, 2$). Пусть u — параметр на $\mathcal{L}_1$, причем $u = u_0$ в точке X_0 ; v — параметр на $\mathcal{L}_2$, $v = v_0$ в точке X_0 .

Будем теперь считать, что $v = \text{const}$ на каждой из линий первого семейства, $u = \text{const}$ на каждой из линий второго семейства. Тогда каждая точка поверхности S получит вполне определенные значения координат u и v , которые «приходят» в рассматриваемую точку с линий $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ по линиям $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ (рис. 39). Вместе с тем будет определена вектор-функция, задающая поверхность S :

$$\overrightarrow{OX} = \vec{X} = \vec{X}(u, v), \quad (1)$$

где O — произвольно зафиксированная точка в $\mathbb{R}^3$.

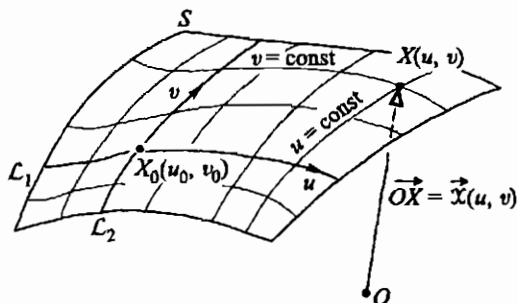


Рис. 39

Если мы хотим, чтобы соблюдалось неравенство

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}, \quad (2)$$

то кроме условий а)–в) необходимо обеспечить еще одно условие:

г) в каждой точке поверхности S линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ образуют между собой ненулевой угол (т. е. имеют различные касательные).

Выбирая по-разному семейства координатных линий и шкалы параметров на $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, мы будем получать разные координатные системы на S (или, как иногда говорят, разные параметризации этой поверхности).

Нередко бывает удобно вводить те или иные криволинейные координаты не на всей поверхности S , а лишь в некоторой окрестности U выбранной точки X_0 .

2°. Замечания. 1). Вопрос о том, как зависит регулярность вектор-функции (1) от свойств координатной сети, довольно сложен, и мы не будем его обсуждать.

2). Для того чтобы каждую точку поверхности S снабдить координатами (u, v) , нет необходимости обеспечивать условие (2), а вместе с тем — и требование г).

3). Соблюдение условий, перечисленных в предыдущем пункте, можно обеспечить далеко не на всякой поверхности. Так, например, на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ нельзя ввести единую систему криволинейных координат, удовлетворяющую условиям а)–в). (Это свойство сферы является следствием более общих фактов, изложение которых читатель может найти, например, в книге [61, с. 52–58].)

Разумеется, если поверхность S задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ с соблюдением условий а)–в) из п. 1° § 6, то у каждой ее точки найдется такая окрестность, в которой координатная сеть удовлетворяет всем требованиям, перечисленным в п. 1° этого параграфа (рис. 40).

3°. Аналитически переход от данных координат (u, v) к новым криволинейным координатам выражается заменой переменных

$$\begin{aligned} u &= u(\tilde{u}, \tilde{v}), \\ v &= v(\tilde{u}, \tilde{v}). \end{aligned} \quad (3)$$

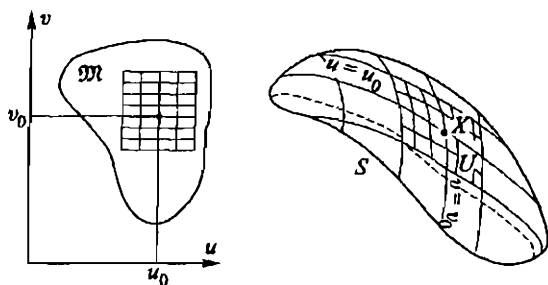


Рис. 40

Тогда для поверхности S получается новое уравнение

$$\vec{X} = \vec{X}[u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})]. \quad (4)$$

При этом обычно накладывается условие

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} = \begin{vmatrix} u_{\tilde{u}} & u_{\tilde{v}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{v}} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (5)$$

гарантирующее хотя бы локальную обратимость формул (3).

Если в исходных координатах (u, v) соблюдалось неравенство (2), то вследствие (5) неравенство вида (2) соблюдается и в новых координатах, поскольку

$$[\vec{X}_{\tilde{u}} \times \vec{X}_{\tilde{v}}] = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \cdot [\vec{X}_u \times \vec{X}_v]. \quad (6)$$

Для доказательства формулы (6) достаточно заметить, что

$$[\vec{X}_u \times \vec{X}_v] = \left\{ \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\},$$

и воспользоваться известной из анализа формулой перемножения якобианов (см., например, [119]), согласно которой

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})},$$

и т. п.

4*. Утверждение, что поверхность S принадлежит классу C^n , означает, что существует вектор-функция (1) класса $\vec{X}^n$, удовлетворяющая условию (2) и задающая эту поверхность. Если $\vec{X}(u, v) \in C^n$ и функции (3) имеют регулярность C^n , то вектор-функция (4) имеет ту же регулярность C^n (вследствие известных теорем анализа о дифференцируемости сложных функций); если же функции (3) принадлежат классу C^m , $m < n$, то для вектор-функции (4) можно гарантировать лишь регулярность C^m .

Таким образом, есть поверхность S задана уравнением вида (1) (с соблюдением условия (2)) и если $\vec{X}(u, v) \in C^n$, то можно сказать, что $S \in C^N$, где $N \geq n$, но как велико N , еще неизвестно.

Возникает вопрос, как найти ту параметризацию данной поверхности, в которой вектор-функция $\vec{X}$ имеет максимально высокую регулярность C^N . Не останавливаясь на доказательстве, укажем, что локально для этого достаточно принять за параметры две из трех декартовых координат пространства $\mathbb{R}^3$ (например, x и y , если выполнено неравенство (10) из § 6); тогда $\vec{X} = \vec{X}(x, y) = \{x, y, f(x, y)\} \in C^N$ (см. в связи с этим замечание в п. 5° § 6).

Укажем еще, что существуют поверхности класса C^1 (но не C^2), которые можно задать уравнением вида (1) с вектор-функцией $\vec{X}(u, v) \in C^\infty$, причем условие (2) нарушается лишь в отдельных точках.

5°. Условимся в дальнейшем считать, что если рассматривается поверхность S класса C^n , $1 \leq n \leq \infty$, и при этом не делается никаких дополнительных оговорок, то S задается (по крайней мере, локально) уравнением вида (1), где $\vec{X}(u, v) \in C^n$, а неравенство (2) соблюдено.

6°. Пусть Π — касательная плоскость к поверхности S в точке X_0 . Если в окрестности точки X_0 делается замена криволинейных координат по формулам вида (3) с соблюдением условия (5), то в касательной плоскости происходит невырожденное линейное преобразование координат. Остановимся на этом подробнее.

Пусть Y — произвольная точка плоскости Π . Мы знаем, что вектор $\overrightarrow{X_0 Y}$ можно представить в виде

$$\overrightarrow{X_0 Y} = \vec{X}_u du + \vec{X}_v dv. \quad (7)$$

Здесь du, dv — координаты вектора $\overrightarrow{X_0 Y}$ в базисе $\vec{X}_u, \vec{X}_v$ на плоскости Π . (В формуле (7) и дальнейших формулах этого пункта значения всех функций и вектор-функций берутся в точке X_0 .)

Вследствие (2), (5) и (6) векторы $\vec{X}_{\bar{u}}$ и $\vec{X}_{\bar{v}}$ тоже образуют базис в плоскости Π . Этот новый базис связан с первоначальными формулами

$$\begin{aligned} \vec{X}_{\bar{u}} &= \vec{X}_u \cdot u_{\bar{u}} + \vec{X}_v \cdot v_{\bar{u}}, \\ \vec{X}_{\bar{v}} &= \vec{X}_u \cdot u_{\bar{v}} + \vec{X}_v \cdot v_{\bar{v}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Вместе с тем, если du, dv рассматривать как дифференциалы функций (3), то по известным формулам анализа

$$\begin{aligned} du &= u_{\bar{u}} d\bar{u} + u_{\bar{v}} d\bar{v}, \\ dv &= v_{\bar{u}} d\bar{u} + v_{\bar{v}} d\bar{v}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\vec{X}_{\bar{u}} d\bar{u} + \vec{X}_{\bar{v}} d\bar{v} = \vec{X}_u du + \vec{X}_v dv. \quad (10)$$

Равенство (10) показывает, что величины $d\tilde{u}$, $d\tilde{v}$, связанные с величинами du , dv формулами (9), представляют собой координаты того же самого вектора $\vec{X_0Y}$ в новом базисе $\vec{X}_{\tilde{u}}$, $\vec{X}_{\tilde{v}}$ (рис. 41). Свойство, выраженное формулой (10), известно под названием *инвариантности дифференциала $d\vec{X}$* .

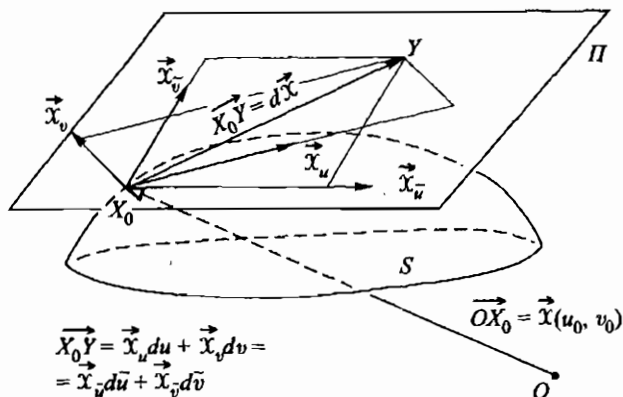


Рис. 41

Замечание. Уравнение $\vec{y}(\xi, \eta) = \vec{X_0} + \vec{X_u} \cdot \xi + \vec{X_v} \cdot \eta$ можно принять за определение касательной плоскости к поверхности класса C^1 , заданной параметрически, и доказать эквивалентность такого способа тем определениям, которые сформулированы в § 1.

7*. Пример использования параметрического задания поверхности.

Напомним, что обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной,

$$y' = f(x, y), \quad (11)$$

в каждой точке той области, где задана функция f , определяет направление с угловым коэффициентом $k = f(x, y)$. Графики решений — их называют интегральными кривыми — должны касаться этих направлений в каждой своей точке. Изложенные факты используются в различных приближенных численных методах решения дифференциальных уравнений; в частности, в самом древнем из них — методе ломаных Эйлера, и в одном из наиболее употребительных в настоящее время — методе Рунге-Кутты [16].

Если направление координатных осей на плоскости xu не играет существенной роли, то применяется запись в дифференциалах:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (12)$$

Она особенно удобна, когда в левой части (12) стоит полный дифференциал или если «виден» интегрирующий множитель.

Между тем, приходится иметь дело с уравнениями, неразрешенными относительно производной:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (13)$$

В теории дифференциальных уравнений известен прием, позволяющий от (13) перейти к уравнению, записанному в форме (11) либо (12). Изложим его, обращая внимание на геометрические аспекты.

Рассуждения ведутся локально, для «малой» окрестности точки (x_0, y_0) , взятой так, что для некоторого p_0 тройка чисел (x_0, y_0, p_0) удовлетворяет уравнению

$$F(x, y, p) = 0. \quad (14)$$

Не исключено, что для тех же (x_0, y_0) есть другие $p_1, p_2, \dots$, для которых тройки чисел (x_0, y_0, p_j) тоже удовлетворяют уравнению (14). Геометрически это означает, что вертикальная прямая $x = x_0, y = y_0$ несколько раз пересекает поверхность (14). В такой ситуации окрестности разных точек (x_0, y_0, p_j) в пространстве переменных x, y, p нужно рассматривать по отдельности. Возвращаясь к (14), предположим, что в окрестности точки (x_0, y_0, p_0) это уравнение определяет C^1 -гладкую поверхность S , касательная плоскость которой непараллельна вертикальной оси. Вектор нормали $\vec{N}$ к поверхности S имеет тогда ненулевую третью компоненту, см. ниже, (16).

На поверхности S в рассматриваемой окрестности Ω введем координаты (u, v) ; получим

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad p = \zeta(u, v). \quad (15)$$

При этом необходимо, чтобы ξ, η, ζ в Ω тоже были C^1 -гладкими функциями новых аргументов (u, v) . Тогда

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \eta_u & \zeta_u \\ \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} \xi_u & \zeta_u \\ \xi_v & \zeta_v \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3,$$

где $\vec{e}_j$ — орты координатных осей в пространстве x, y, p , и согласно сказанному выше

$$\begin{vmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{vmatrix} \neq 0. \quad (16)$$

Поле направлений $y = ax$, задаваемое уравнением (13), получится, когда положим $a = p$, считая, что p найдено из (14). Применительно к рассматриваемой окрестности Ω это означает согласно (15), что

$$dy = \zeta(u, v) dx. \quad (17)$$

От переменных x, y мы переходим к u, v , поэтому дифференциалы dx и dy в (17) тоже нужно выразить через u и v и сделать это, воспользовавшись двумя первыми из равенств (15):

$$\eta_u du + \eta_v dv = \zeta \cdot (\xi_u du + \xi_v dv). \quad (18)$$

После перегруппировки слагаемых (18) можно записать так:

$$(\zeta(u, v) \xi_u(u, v) - \eta_u(u, v)) du + (\zeta(u, v) \xi_v(u, v) - \eta_v(u, v)) dv = 0. \quad (19)$$

Таким образом, используя параметрическое задание (15) для поверхности (14), мы от уравнения (13) перешли к его записи в форме (12) (однако лишь локально).

При сделанных предположениях множители в (19) при du и dv не могут обратиться в нуль одновременно. Докажем это. В противном случае мы бы имели

$$\left. \begin{aligned} \zeta \cdot \xi_u + (-1)\eta_u &= 0, \\ \zeta \cdot \xi_v + (-1)\eta_v &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

т. е. однородную систему линейных алгебраических уравнений с заведомо ненулевым решением $\{\zeta, -1\}$. Тогда определитель системы (20) должен был бы равняться нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{vmatrix} = 0, \quad (21)$$

но это невозможно, так как (21) противоречит (16).

Пусть, например, отлична от нуля в (19) скобка при dv . Тогда $v'_u = f(u, v)$, где $f(u, v) = \frac{\zeta \cdot \xi_u - \eta_u}{\eta_v - \zeta \cdot \xi_v}$, так что мы пришли к записи вида (11).

Иногда, действуя по изложенному плану, можно получить решение в целом. Рассмотрим, например, уравнение

$$(y')^2 + 8xy' + 12x^2 = 2y. \quad (22)$$

Выпишем для него функцию (13):

$$F = (p + 4x)^2 - 4x^2 - 2y. \quad (23)$$

Из уравнения (22) и формулы (23) видно, что если ограничиться действительными значениями переменных, то надо наложить условие

$$y \geq -2x^2. \quad (24)$$

Конкретный вид функции (23) подсказывает удобную параметризацию поверхности $F(x, y, p) = 0$, именно:

$$x = \frac{1}{2}u, \quad y = \frac{1}{2}(v^2 - u^2) \quad (25)$$

и

$$p = v - 2u. \quad (26)$$

Взяв функции (25) в качестве $\xi(u, v)$ и $\eta(u, v)$, а (26) в качестве $\zeta(u, v)$, воспользуемся формулой (18). Тогда после приведения подобных членов уравнение примет вид

$$v(du - 2dv) = 0. \quad (27)$$

Из (27) следует, что либо

$$v = 0, \quad (28)$$

либо

$$u - 2v = C. \quad (29)$$

В замкнутой области (24) сделаем теперь замену переменных, обратную по отношению к (25), записав, что

$$u = 2x, \quad v^2 = 4x^2 + 2y. \quad (30)$$

Равенство (28) дает одно решение

$$y = -2x^2, \quad (31)$$

а из (29), учитывая (30), получаем семейство решений

$$x \pm \sqrt{4x^2 + 2y} = C. \quad (32)$$

Избавившись в (32) от радикала, найдем

$$y = \frac{1}{2}((C - x)^2 - 4x^2), \quad (33)$$

где C — произвольная постоянная. Можно проверить (мы на этом не будем задерживаться), что найдены все решения уравнения (22): формула (33) дает (как говорят в теории дифференциальных уравнений [110]) общее решение, а (31) — особое решение.

§ 8. Первая квадратичная форма

1°. Пусть поверхность S класса C^1 задана уравнением $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ и пусть $\mathcal{L}$ — линия на S , заданная в координатах u, v уравнениями вида

$$u = u(t), \quad v = v(t). \quad (1)$$

Эти же уравнения (1) задают на вспомогательной плоскости в декартовых координатах u, v некоторую линию $\mathcal{L}_0$ (прообраз $\mathcal{L}$), содержащуюся в области определения $\mathfrak{M}$ вектор-функции $\vec{X}(u, v)$ (рис. 42).

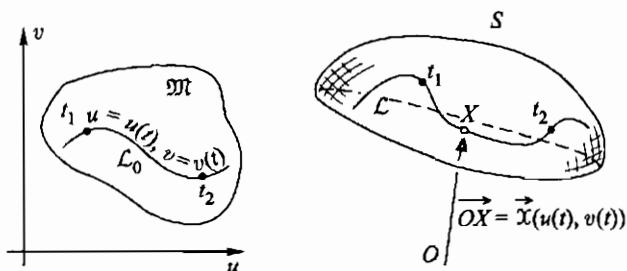


Рис. 42

Радиус-вектор текущей точки линии $\mathcal{L}$ выражается формулой

$$\vec{X} = \vec{X}(u(t), v(t)). \quad (2)$$

Мы считаем (как и в § 7), что $\vec{X}_u$ и $\vec{X}_v$ непрерывны в области $\mathcal{M}$. Предположим, что u_t , v_t тоже непрерывны. Тогда функция (2) дифференцируема, и длина s произвольной дуги $t_1 \leq t \leq t_2$ линии $\mathcal{L}$ выражается формулой

$$s = s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{X}_t| dt, \quad (3)$$

известной из теории кривых [31, 91, 99, 119]. Преобразуем выражение (3), пользуясь тем, что $\mathcal{L} \subset S$. Учитывая (2), находим, что $\vec{X}_t = \vec{X}_u \cdot u_t + \vec{X}_v \cdot v_t$, откуда

$$|\vec{X}_t| = \sqrt{(\vec{X}_t, \vec{X}_t)} = \sqrt{(\vec{X}_u, \vec{X}_u) \cdot u_t^2 + 2(\vec{X}_u, \vec{X}_v) \cdot u_t \cdot v_t + (\vec{X}_v, \vec{X}_v) \cdot v_t^2}. \quad (4)$$

В теории поверхностей употребляются стандартные обозначения:

$$\begin{aligned} E &= E(u, v) = (\vec{X}_u, \vec{X}_u), \\ F &= F(u, v) = (\vec{X}_u, \vec{X}_v), \\ G &= G(u, v) = (\vec{X}_v, \vec{X}_v). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив (4) и (5) в (3), получим выражение

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(u, v) \cdot u_t^2(t) + 2F(u, v) \cdot u_t(t) \cdot v_t(t) + G(u, v) \cdot v_t^2(t)} dt. \quad (6)$$

На первый взгляд кажется, что формула (6) сложнее, чем первоначальное выражение (3). Однако формула (6) имеет следующее важное преимущество: в ней выделены величины E , F и G , которые не зависят от выбора кривой, а зависят лишь от поверхности и ее параметризации. Если ищутся длины нескольких разных линий на S , то удобно сначала найти E , F и G , а затем в формулу (6) подставлять функции $u(t)$, $v(t)$ и пределы интегрирования, соответствующие той или иной кривой. Кроме того, формула (6) позволяет найти длину линии в том случае, когда известны уравнения (2) и функции (5), хотя сама вектор-функция $\vec{X}(u, v)$ неизвестна; такая ситуация встречается в теории изгибания поверхностей.

2°. Рассмотрим на $\mathcal{L}$ дугу, соответствующую отрезку $[t_1, t]$ изменения параметра. Длину этой дуги обозначим $s(t)$, считая t_1 зафиксированным, а t — переменным. Тогда

$$s(t) = \int_{t_1}^t |\vec{X}_t| dt = \int_{t_1}^t \sqrt{E \cdot u_t^2 + 2F \cdot u_t \cdot v_t + G \cdot v_t^2} dt.$$

Найдем дифференциал функции $s(t)$:

$$ds = |\vec{X}_t| dt = \sqrt{E \cdot u_t^2 + 2F \cdot u_t \cdot v_t + G \cdot v_t^2} dt. \quad (7)$$

Заметив, что $u_t dt = du$, $v_t dt = dv$ и $\vec{X}_t dt = d\vec{X}$, мы можем переписать (7) несколько иначе, исключив параметр t :

$$ds = |d\vec{X}| = \sqrt{E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2}. \quad (7a)$$

Выражение, стоящее в формуле (7 а) под радикалом, играет в дальнейшем весьма важную роль.

3°. Определение. Выражение

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2 \quad (8)$$

называется *первой квадратичной формой* поверхности.

ds^2 является квадратичной формой относительно дифференциалов du и dv ; функции E , F и G называют *коэффициентами* первой квадратичной формы.

Первая квадратичная форма является положительно определенной. В самом деле,

$$E = |\vec{X}_u|^2 > 0; \quad (9)$$

далее, применяя к векторам $\vec{X}_u$ и $\vec{X}_v$ известное из векторной алгебры тождество Лагранжа, находим, что

$$EG - F^2 = \begin{vmatrix} (\vec{X}_u, \vec{X}_u) & (\vec{X}_v, \vec{X}_u) \\ (\vec{X}_u, \vec{X}_v) & (\vec{X}_v, \vec{X}_v) \end{vmatrix} = |\vec{X}_u \times \vec{X}_v|^2 > 0. \quad (10)$$

Неравенства (9) и (10) необходимы и достаточны для положительной определенности формы (8). Они соблюдаются по всей поверхности S , поскольку $[\vec{X}_u \times \vec{X}_v] \neq \vec{0}$.

4°. Пример. Для поверхности вида $z = z(x, y)$ имеем

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \vec{X}(x, y) = \{x, y, z(x, y)\}, \\ \vec{X}_x &= \{1, 0, z_x\}, \quad \vec{X}_y = \{0, 1, z_y\}, \end{aligned}$$

откуда находим, что

$$ds^2 = [1 + z_x^2(x, y)] dx^2 + 2z_x(x, y)z_y(x, y) dx dy + [1 + z_y^2(x, y)] dy^2.$$

5°. Первая квадратичная форма возникла в наших рассуждениях как вспомогательное выражение при вычислении длин линий на поверхности. Однако она имеет самостоятельный геометрический смысл. Рассмотрим его. Считая u и v зафиксированными, проведем в точке $X(u, v)$ касательную плоскость Π . Тогда du и dv можно рассматривать как координаты произвольного вектора $d\vec{X} = \vec{X}\vec{Y} \in \Pi$, разложенного по базису $\vec{X}_u, \vec{X}_v$. Из (7а) ясно, что

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = |d\vec{X}|^2 = (d\vec{X}, d\vec{X}).$$

Таким образом, ds^2 представляет собой квадрат расстояния на касательной плоскости Π от точки X до точки Y . Иначе говоря, ds^2 есть метрическая форма плоскости Π , записанная в базисе $\vec{X}_u, \vec{X}_v$. Ее линии уровня, т.е. линии на плоскости Π , на которых $E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = \text{const}$, представляют собой окружности с центром в точке касания (рис. 43). Пусть Y_1, Y_2 — какие-нибудь две точки плоскости Π ; (du_1, dv_1) и (du_2, dv_2) — координаты этих точек в аффинной координатной системе с базисом $\vec{X}_u, \vec{X}_v$ и началом X (рис. 44). Тогда расстояние между точками Y_1 и Y_2 можно найти по формуле

$$|\vec{Y_1 Y_2}|^2 = E(u, v) (du_2 - du_1)^2 + 2F(u, v) (du_2 - du_1) (dv_2 - dv_1) + G(u, v) (dv_2 - dv_1)^2.$$

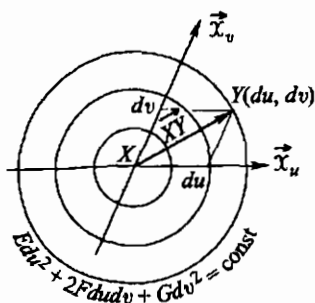


Рис. 43

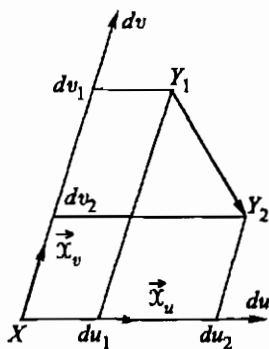


Рис. 44

6°. Если на поверхности S делается преобразование криволинейных координат по формулам

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad v = v(\tilde{u}, \tilde{v}),$$

то в касательной плоскости Π происходит преобразование базиса по формулам (8) § 7. Матрицу коэффициентов формул (8) в § 7 обозна-

чим $\mathbb{P}$, т. е. положим

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ u_{\tilde{v}} & v_{\tilde{v}} \end{pmatrix}.$$

Тогда преобразование координат на плоскости Π , соответствующее указанному преобразованию базиса, можно записать в виде следующего матричного равенства:

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \mathbb{P}^* \begin{pmatrix} d\tilde{u} \\ d\tilde{v} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где звездочкой обозначено транспонирование матрицы.

Вместе с тем, для каждой точки $Y \in \Pi$ квадратичная форма $ds^2 = |\overrightarrow{XY}|^2$ сохраняет свое числовое значение. Поэтому ее коэффициенты изменяются; закон их преобразования выражается матричной формулой, известной из линейной алгебры:

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{P} \mathbb{A} \mathbb{P}^*. \quad (12)$$

Здесь

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}.$$

$\tilde{E}$, $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ — коэффициенты ds^2 в новых параметрах $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$. Формула (12) является следствием равенства (11) и инвариантности ds^2 .

Разумеется, формулу (12) можно получить и из других соображений, записав в новых координатах выражения вида (5) и воспользовавшись правилами вычисления производных сложных функций. Читателю полезно проделать это в виде упражнения.

7*. Формула (12) позволяет рассматривать ds^2 при фиксированных u, v как двухвалентный ковариантный тензор [50], заданный в двумерном линейном пространстве Π : $\mathbb{A}$ и $\tilde{\mathbb{A}}$ — матрицы определяющих чисел этого тензора в старом и новом базисах.

Пусть каждой точке поверхности S соответствует двухвалентный тензор, заданный в касательной плоскости Π и рассматриваемый в базисе $\vec{X}_u, \vec{X}_v$ (зависящем от параметризации поверхности). Пусть, далее, тензоры, соответствующие разным точкам поверхности, имеют валентности одинакового типа. Тогда говорят, что на S задано *тензорное поле*.

Можно сказать поэтому, что первая квадратичная форма образует на поверхности ковариантное тензорное поле.

§ 9. Вычисление углов и площадей.

Понятие о внутренней геометрии поверхности

1°. Пусть на поверхности S , заданной параметрически, имеются две гладкие кривые L_1 и L_2 , заданные уравнениями

$$u = u_1(t), \quad v = v_1(t) \quad (1)$$

и

$$u = u_2(\tau), \quad v = v_2(\tau) \quad (2)$$

соответственно. Будет предполагать, что $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ пересекаются в некоторой точке $X(u_0, v_0)$:

$$u_1(t_0) = u_2(\tau_0) = u_0, \quad v_1(t_0) = v_2(\tau_0) = v_0.$$

Определение 4. *Определение Углом между линиями $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, пересекающимися в точке X_0 , называется угол между их касательными в этой точке (рис. 45).*

По касательной к $\mathcal{L}_1$ направлен вектор

$$d\vec{X}_1 = \vec{X}_u du_1 + \vec{X}_v dv_1. \quad (3)$$

Вектор

$$d\vec{X}_2 = \vec{X}_u du_2 + \vec{X}_v dv_2 \quad (4)$$

направлен по касательной к $\mathcal{L}_2$. В формулах (3) и (4) нужно считать, что $\vec{X}_u$, $\vec{X}_v$ берутся при $u = u_0$, $v = v_0$ и что

$$\begin{aligned} du_1 &= u'_1(t_0) dt, & dv_1 &= v'_1(t_0) dt, \\ du_2 &= u'_2(\tau_0) d\tau, & dv_2 &= v'_2(\tau_0) d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Штрихом здесь обозначены производные функций (1) и (2) по их аргументам. Кроме того, нужно предполагать, что $\vec{X}_u \times \vec{X}_v \neq \vec{0}$, $u'_1(t)^2 + v'_1(t)^2 \neq 0$, $u'_2(\tau)^2 + v'_2(\tau)^2 \neq 0$. Тогда векторы (3) и (4) — ненулевые, а кривые, заданные на S уравнениями (1) и (2), являются гладкими. Вычисление угла α между $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ сводится к подсчету угла между векторами (3) и (4). По формуле, известной из аналитической геометрии, имеем

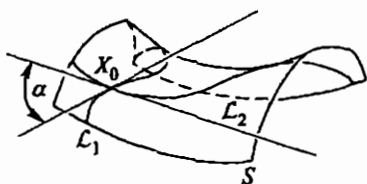


Рис. 45

$$\cos \alpha = \pm \frac{(d\vec{X}_1, d\vec{X}_2)}{|d\vec{X}_1| \cdot |d\vec{X}_2|}.$$

Перемножая скалярно правые части равенств (3) и (4), находим

$$(d\vec{X}_1, d\vec{X}_2) = E du_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + G dv_1 dv_2.$$

Далее, согласно п. 2° § 8 имеем

$$|d\vec{X}_i| = ds_i = \sqrt{E du_i^2 + 2F du_i dv_i + G dv_i^2}, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Итак,

$$\cos \alpha = \pm \frac{E du_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + G dv_1 dv_2}{ds_1 \cdot ds_2}. \quad (7)$$

Формула (7) дает косинусы двух смежных углов между касательными к $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ в точке X_0 . Соответственно этому перед дробью стоит знак « $\pm$ ». При практических вычислениях удобно в (6) и (7) вместо дифференциалов подставлять их выражения (5).

2°. **Примеры.** 1). Линии $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ ортогональны ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) тогда и только тогда, когда

$$E du_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + G dv_1 dv_2 = 0.$$

2). Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — линии координатной сети $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$ соответственно. В этом случае $du_1 \neq 0$, $dv_1 = 0$, $du_2 = 0$, $dv_2 \neq 0$, поэтому

$$\cos \alpha = \pm \frac{F(u, v)}{\sqrt{E(u, v) G(u, v)}}.$$

3). Сопоставляя предыдущие примеры, мы видим, что координатная сеть ортогональна тогда и только тогда, когда

$$F(u, v) = 0. \quad (8)$$

Надлежащий подсчет показывает, что в примерах 4)–6) из п. 3° § 6 равенство (8) выполняется тождественно. Это значит, что

- 1) сеть географических координат (рис. 33) ортогональна на всей сфере (разумеется, исключая полюсы этой сети);
- 2) сеть меридианов и параллелей ортогональна не только на сфере, но и на любой другой поверхности вращения (см., например, рис. 34);
- 3) на прямом геликоне (рис. 36) ортогональна сеть, состоящая из его прямолинейных образующих и из винтовых линий.

3°. Углу между линиями $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ на S можно приписать знак.

Для этого нужно предварительно предположить, что

1) в касательной плоскости Π , проведенной в точке X_0 , выбрано положительное направление отсчета углов;

2) выбраны положительные направления на линиях $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

После этого нужно в выражениях (3) и (4) так выбрать знаки дифференциалов dt и $d\tau$, чтобы каждый из векторов $d\vec{X}_i$ имел положительное направление относительно линии $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, 2$), а в качестве угла α от $\mathcal{L}_1$ до $\mathcal{L}_2$ взять угол в плоскости Π от вектора $d\vec{X}_1$ до вектора $d\vec{X}_2$.

Ниже, в тех случаях, когда нужно приписать знаки углам, мы будем считать, что на каждой из рассматриваемых кривых положительным является направление возрастания параметра этой кривой, а в касательной плоскости Π положительными считаются те углы, у которых поворот от первой стороны ко второй виден против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\vec{X}_u \times \vec{X}_v$ (рис. 46).

Пример. Пусть кривая $\mathcal{L}$ задана уравнением $v = v(u)$. Найдем угол α между координатной u -линией и кривой $\mathcal{L}$ в некоторой точке

$X(u, v(u))$ (рис. 47), предположив дополнительно, что в точке X линии координатной сети ортогональны друг другу.

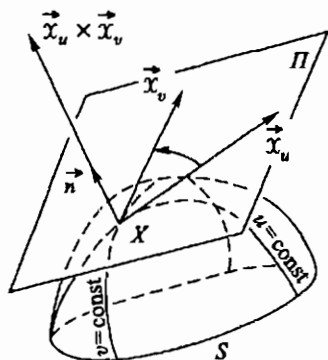


Рис. 46

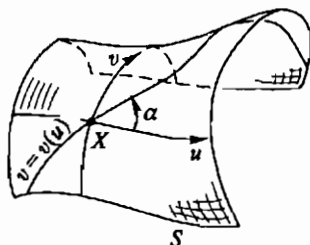


Рис. 47

В рассматриваемом случае первая кривая $v = \text{const}$, на ней

$$du_1 = du, \quad dv_1 = 0. \quad (9)$$

Второй является кривая $v = v(u)$, на ней

$$du_2 = du, \quad dv_2 = v'(u) du. \quad (10)$$

Обе кривые отнесены к параметру u , направление возрастания u мы считаем положительным, так что и в (9), и в (10) нужно брать $du > 0$. При этом конкретные числовые значения дифференциала du безразличны, поэтому можно считать, что в (9) и в (10) берется одно и то же du .

Наша задача сводится к подсчету угла между векторами

$$d\vec{x}_1 = \vec{x}_u du \quad \text{и} \quad d\vec{x}_2 = \vec{x}_u du + \vec{x}_v v'(u) du$$

в плоскости Π , причем $\vec{x}_u \perp \vec{x}_v$, так что в рассматриваемой точке соблюдается (8). Пользуясь этим, находим

$$ds_1 = \sqrt{E(u, v)} du, \quad ds_2 = \sqrt{E(u, v) + G(u, v) \cdot (v'(u))^2} du,$$

откуда с помощью элементарных тригонометрических соображений получаем

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{G} \cdot v'}{\sqrt{E + G \cdot (v')^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E + G \cdot (v')^2}}$$

(см. рис. 48, на котором отдельно показаны случаи $v' > 0$ и $v' < 0$).

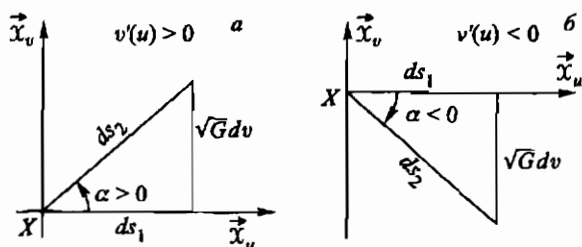


Рис. 48

4°. Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ имеют в точке X_0 общую касательную. Тогда векторы $d\vec{X}_1$ и $d\vec{X}_2$ коллинеарны, поэтому в плоскости Π они имеют пропорциональные аффинные координаты

$$dv_1 : du_1 = dv_2 : du_2. \quad (11)$$

В этом случае говорят, что $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ имеют в точке X_0 одинаковое направление.

Рассматривая линии на поверхности, часто употребляют выражение: «В точке $X(u, v)$ задано направление $\{du, dv\}$ » (или, что то же самое, направление $dv : du$).

Эта терминология означает, что указана точка X , через которую проходит кривая, и в этой точке задана касательная к кривой; сама кривая при этом может быть не дана. Отношение дифференциалов $dv : du$ (или $du : dv$) однозначно определяет касательную и тем самым выделяет множество всех кривых, имеющих в точке X данное направление.

5°. Пункт 3° позволяет ввести более тонкую классификацию линий, проходящих через данную точку. Именно, иногда считают, что $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ имеют одинаковое направление лишь тогда, когда угол между ними равен нулю. Если же угол равен π , то говорят, что $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ имеют противоположные направления. В обоих случаях $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ имеют общую касательную, так что по терминологии предыдущего пункта их направления одинаковы.

Пусть на $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ введены натуральные параметры s_1 и s_2 соответственно. Мы знаем, что $|d\vec{X}_i| = ds_i$; отсюда и из (11) ясно, что если угол между $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ равен нулю, то

$$du_1 : dv_1 : ds_1 = du_2 : dv_2 : ds_2. \quad (12)$$

Если же угол равен π , то

$$du_1 : dv_1 : ds_1 = (-du_2) : (-dv_2) : ds_2. \quad (13)$$

Свойствами (12) и (13) мы воспользуемся в следующем параграфе.

6°. Переходим к вопросу о площади поверхности. Пусть поверхность S задана двумя способами: уравнением вида

$$z = z(x, y) \quad (14)$$

и параметрическим уравнением

$$\vec{X} = \{x, y, z\} = \vec{X}(u, v). \quad (15)$$

Пусть $\mathcal{D}$ — некоторая область на S . Ее площадь $\sigma(\mathcal{D})$ определяется согласно § 3 и может быть вычислена по известной нам формуле:

$$\sigma(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}'} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy, \quad (16)$$

где $\mathcal{D}'$ — проекция области $\mathcal{D}$ на плоскость (x, y) . Перейдем в формуле (16) к аргументам u, v . Прообраз области $\mathcal{D}$ на плоскости параметров u, v обозначим $\tilde{\mathcal{D}}$. По известному из анализа правилу замены переменных в двойном интеграле имеем

$$\sigma(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}'} \sqrt{1 + z_x^2[x(u, v), y(u, v)] + z_y^2[x(u, v), y(u, v)]} \times \\ \times \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv. \quad (17)$$

Подынтегральную функцию в (17) преобразуем так, чтобы исключить производные по переменным x и y . Для этого заметим, что $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = |\vec{X}_x \times \vec{X}_y|$, и воспользуемся тождеством (6) из § 7. В результате найдем, что

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = |\vec{X}_x \times \vec{X}_y| \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = |\vec{X}_u \times \vec{X}_v|.$$

Теперь, учитывая формулу (10) из § 8, получим для площади искомое выражение

$$\sigma(\mathcal{D}) = \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} |\vec{X}_u \times \vec{X}_v| \, du \, dv = \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \quad (18)$$

Пример. Пусть на плоскости P наряду с декартовыми координатами x, y введены полярные координаты ρ, φ и точка O взята за начало координат. Тогда плоскость с выколотой точкой, $P \setminus O$, можно представить как поверхность, заданную параметрически:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = 0 \quad (\rho > 0)$$

или, в векторной форме записи,

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подсчет по формулам (5) дает $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$. Отсюда получаем формулу для площади $\sigma(\mathcal{D})$ области $\mathcal{D}$ в полярных координатах: $\sigma(\mathcal{D}) = \int \int_{\mathcal{D}} \rho d\rho d\varphi$.

7°. Замечания. 1). Рассуждения предыдущего пункта попутно устанавливают независимость определения площади поверхности от выбора координатной системы x, y, z в пространстве. В самом деле, если в $\mathbb{R}^3$ взять другую декартову прямоугольную систему координат (x', y', z') и с ее помощью определить согласно §3 площадь $\sigma(\mathcal{D})$, то получится выражение вида (16) (с переменными x', y', z' вместо x, y, z и с другой областью интегрирования). Если затем перейти к аргументам u, v , то получится в точности величина (18), независимая от выбора координат в $\mathbb{R}^3$.

2). В общем случае поверхности вида (15) можно рассуждать так. Произвольную область $\mathcal{D} \subset S$, ограниченную кусочно-гладкой кривой, разобьем (кусочно-гладкими кривыми) на части $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$ столь малые, что в каждой из них поверхность можно задать некоторым уравнением вида (14) (надлежащим образом выбрав координатные оси). Площадь $\sigma(\mathcal{D}_i)$ определится согласно §3 и выразится формулой вида (18). Площадь всей области $\mathcal{D}$ определим как сумму площадей ее частей:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{D}) &= \sum_i \sigma(\mathcal{D}_i) = \sum_i \int \int_{\tilde{\mathcal{D}}_i} \sqrt{EG - F^2} du dv = \\ &= \int \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \sqrt{EG - F^2} du dv. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $\tilde{\mathcal{D}}$, как и выше, — прообраз области $\mathcal{D}$ на плоскости (u, v) , $\tilde{\mathcal{D}}_i$ — прообразы частей $\mathcal{D}_i$. Таким образом, для $\sigma(\mathcal{D})$ мы получим выражение вида (18). Не исключено, что суммы (19) представляют собой расходящиеся ряды; в таком случае $\sigma(\mathcal{D}) = +\infty$. Из свойств двойного интеграла вытекает независимость величины (19) от способа разбиения области $\mathcal{D}$ на части $\mathcal{D}_i$.

3) Формулу (18) можно принять за определение площади области на поверхности, заданной параметрически; затем, пользуясь тождеством (6) из §7, можно доказать независимость этого определения от выбора параметризации на поверхности, а также его эквивалентность определению §3.

4). Формула (18) допускает простое геометрическое истолкование. Дело в том, что подынтегральное выражение

$$|\vec{X}_u \times \vec{X}_v| du dv = |\vec{X}_u du \times \vec{X}_v dv|$$

есть не что иное, как площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{X}_u du$ и $\vec{X}_v dv$. Интегральная сумма

$$\sum |\vec{X}_u(u_i, v_i) \times \vec{X}_v(u_i, v_i)| du dv, \quad (20)$$

соответствующая интегралу (18), представляет собой сумму площадей таких параллелограммов. Легко понять, что каждый из этих параллелограммов служит аппроксимацией криволинейного четырехугольника, образованного линиями координатной сети (рис. 49). Вся сумма (20) выражает площадь «чешуи», «наклеенной» на поверхность и изображенной схематически на рис. 50. Каждая из «чешуек» расположена в одной из касательных плоскостей и заменяет «свою» ячейку координатной сети при замене точного выражения площади (18) его приближенным значением (20).

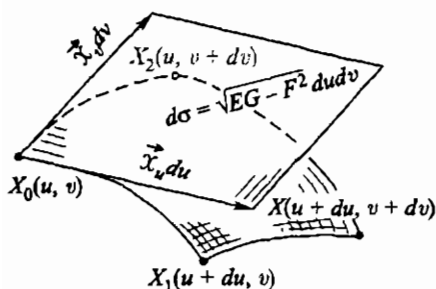


Рис. 49

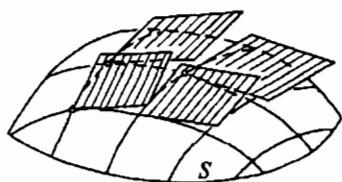


Рис. 50

8°. В этом параграфе мы увидели, что первая квадратичная форма поверхности позволяет находить не только длины линий, но и углы и площади на ней. В дальнейшем нам встретятся другие характеристики фигур на поверхности, выражающиеся через функции E , F , G (и их производные).

Совокупность всех тех свойств поверхности, которые могут быть выражены, если известны только коэффициенты ее первой квадратичной формы, объединяют под названием *внутренней геометрии* поверхности.

Можно показать, что если поверхность представляет собой нерастяжимую, но гибкую пленку, то при ее изгибаниях сохраняется вся ее внутренняя геометрия, хотя пространственная форма изменяется. В связи с этим внутренняя геометрия поверхностей имеет важное прикладное значение; ей специально посвящена четвертая глава.

9*. Задача об изогональных траекториях.

Пусть на поверхности S в координатах u, v семейство линий задано дифференциальным уравнением

$$P(u, v) du + Q(u, v) dv = 0. \quad (21)$$

Будем искать на поверхности S такие линии, которые с линиями семейства (21) пересекаются под углом $\alpha = \text{const}$; их называют *изогональными траекториями* для семейства (21), а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — *ортогональными траекториями*.

Пусть du_1, dv_1, ds_1 — дифференциалы координат и длины дуги на линиях исходного семейства, du_2, dv_2 и ds_2 — на искомах линиях. Тогда по формуле (7)

$$E du_1 du_2 + F (du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + G dv_1 dv_2 = (ds_1, ds_2) \cos \alpha. \quad (22)$$

Пусть t — параметр на линии из семейства (21). Тогда

$$\frac{du_1}{dt} = \lambda Q, \quad \frac{dv_1}{dt} = -\lambda P, \quad (23)$$

где λ — вспомогательный множитель, причем за счет выбора направления возрастания t можно обеспечить, чтобы было $\lambda > 0$. Тогда

$$ds_1 = \lambda \sqrt{EQ^2 - 2FPQ + GP^2} dt. \quad (24)$$

Подставляя (23) и (24) в (22), сократим на λ и «уберем» нижний индекс 2. Получим дифференциальное уравнение изогональных траекторий:

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} E & F \\ P & Q \end{matrix} \right| du + \left| \begin{matrix} F & G \\ P & Q \end{matrix} \right| dv = \\ = \sqrt{EQ^2 - 2FPQ + GP^2} \cdot \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \cdot \cos \alpha, \end{aligned} \quad (25)$$

или, после избавления от радикалов и перегруппировки,

$$\begin{aligned} ((EQ - FP)^2 \sin^2 \alpha - (EG - F^2)P^2 \cos^2 \alpha) du^2 + \\ + 2((EQ^2 - 2FPQ + GP^2)F \sin^2 \alpha - (EG - F^2)PQ) du dv + \\ + ((FQ - GP)^2 \sin^2 \alpha - (EG - F^2)Q^2 \cos^2 \alpha) dv^2 = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

З а м е ч а н и я. 1). Уравнение (26), квадратное относительно дифференциалов, определяет два семейства изогональных траекторий: одно для заданного угла α , другое — для угла $(\pi - \alpha)$.

2). Выкладки этого пункта и уравнения (25) и (26) остаются в силе, если $\alpha = \alpha(u, v)$.

10*. Ортогональные траектории. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ правая часть (25) обратится в нуль и останется

$$(EQ - FP) du + (FQ - GP) dv = 0. \quad (27)$$

Пример. Составим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий для координатных линий $v = \text{const}$ в общем случае и для метрики

$$ds^2 = du^2 + 2w(u, v) du dv + dv^2. \quad (28)$$

На u -линиях $du \neq 0$, $dv = 0$, а тогда в (23) $P = 0$, $Q \neq 0$, и от (27) останется

$$E du + F dv = 0. \quad (29)$$

Применительно к первой квадратичной форме (28) имеем

$$du + \cos w(u, v) dv = 0. \quad (30)$$

Уравнение (30) интегрируется в квадратурах:

$$u = u_0 - \int_{v_0}^v \cos w(u, \xi) d\xi.$$

11*. Сеть линий на поверхности (или на плоскости) называется *чебышевской*, если в каждом сетевом четырехугольнике длины противоположных сторон попарно равны (как в параллелограмме на плоскости; см. ниже рисунки 84–87).

Пример. Для первой квадратичной формы (28) у сетевого четырехугольника $u_1 \leq u \leq u_2$, $v_1 \leq v \leq v_2$ длины его сторон, расположенных на u -линиях, равны $u_2 - u_1$, а на v -линиях равны $v_2 - v_1$. Поэтому в метрике (28) координатная сеть является чебышевской.

§ 10. Кривизна линий на поверхности. Теорема Менье

1°. Пусть на поверхности $S \in C^2$ дана кривая $\mathcal{L} \in C^2$. Пусть $\vec{\tau}$ — орт касательной, s — натуральный параметр¹⁾ линии $\mathcal{L}$. Для произвольной точки $X \in \mathcal{L}$ построим ортонормированный базис

$$\vec{n}, \quad \vec{\tau}, \quad [\vec{n} \times \vec{\tau}]; \quad (1)$$

здесь $\vec{n}$ — орт нормали к поверхности S (выбранный в точке X каким-либо одним из двух возможных способов).

Вектор $\vec{\tau}_s$ называется *вектором кривизны* линии $\mathcal{L}$. Рассмотрим его в точке X и разложим по базису (1) (рис. 51). Поскольку $\vec{\tau}_s \perp \vec{\tau}$, то это разложение имеет вид

$$\vec{\tau}_s = k_n \cdot \vec{n} + k_g \cdot [\vec{n} \times \vec{\tau}], \quad (2)$$

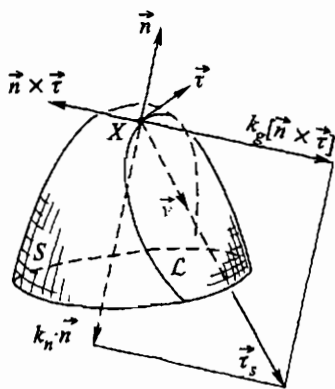


Рис. 51

¹⁾ Натуральным параметром на линии называется координата на ней, с точностью до постоянного слагаемого совпадающая с длиной ее дуги, отсчитываемой от какой-либо ее точки.

где k_n, k_g — некоторые коэффициенты. Они получили специальные названия: величина

$$k_n = (\vec{\tau}_s, \vec{n}) \quad (3)$$

называется *нормальной кривизной* линии $\mathcal{L}$; величина

$$k_g = (\vec{\tau}_s, [\vec{n} \times \vec{\tau}]) = (\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{\tau}_s) \quad (4)$$

называется *геодезической кривизной* этой линии. (Нижние индексы n и g в символах k_n и k_g с дифференцированием никак не связаны.)

Если кривизна $k = |\vec{\tau}_s|$ линии $\mathcal{L}$ отлична от нуля, то для $\mathcal{L}$ определен орт главной нормали [31, 91, 99], который мы обозначим через $\vec{\nu}$ (в отличие от орта нормали к поверхности, обозначенного через $\vec{n}$, см. рис. 51). При этом $\vec{\tau}_s = k\vec{\nu}$, так что

$$k_n = k \cdot (\vec{\nu}, \vec{n}), \quad (3a)$$

$$k_g = k \cdot (\vec{\nu}, \vec{n}, \vec{\tau}), \quad (4a)$$

а вместо (2) имеем

$$k\vec{\nu} = k_n \cdot \vec{n} + k_g \cdot [\vec{n} \times \vec{\tau}]. \quad (2a)$$

Из (2a) ясно, что

$$k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}, \quad |k_n| \leq k, \quad |k_g| \leq k. \quad (5)$$

В том случае, когда $k = |\vec{\tau}_s| = 0$, формулы (5) тоже соблюдаются, поскольку $k_n = k_g = 0$. Формулами (2a)–(4a) при $k = 0$ можно пользоваться условно, считая, что произведения, содержащие k , равны нулю, хотя участвующий в них вектор $\vec{\nu}$ не определен.

Обратим внимание на то, что если $\mathcal{L}$ рассматривается как кривая в $\mathbb{R}^3$ безотносительно к поверхности S , то нормальная и геодезическая кривизны не определены.

Если вектор $\vec{n}$ заменить на $(-\vec{n})$, то k_n и k_g одновременно сменяют знаки; если на $\mathcal{L}$ изменить положительное направление, то k_n не изменится, а k_g сменит знак.

2°. Теорема. *Все линии на поверхности, имеющие в некоторой точке общую касательную, имеют в этой точке одинаковую нормальную кривизну.*

Следствие. *Кривизна нормального сечения поверхности S в точке X , проведенного в направлении вектора $\vec{\tau}$, совпадает с нормальной кривизной линии $\mathcal{L}$ в точке X .*

Замечание. В сформулированной теореме нужно предполагать, что поверхность принадлежит классу C^2 и на ней рассматриваются линии класса C^2 . Кривизне нормального сечения приписывается знак согласно п. 2° § 4. Рисунок 52 иллюстрирует теорему и ее следствие. На нем $\mathcal{L}_0$ — нормальное сечение, $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — некоторые кривые; $\vec{\nu}_0$, $\vec{\nu}_1$ и $\vec{\nu}_2$ — орты главных нормалей линий $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно;

k_0, k_1, k_2 — их кривизны. Концы векторов кривизны $\overrightarrow{XA_0} = k_0 \vec{v}_0$, $\overrightarrow{XA_1} = k_1 \vec{v}_1$, $\overrightarrow{XA_2} = k_2 \vec{v}_2$ расположены на одном перпендикуляре к плоскости нормального сечения.

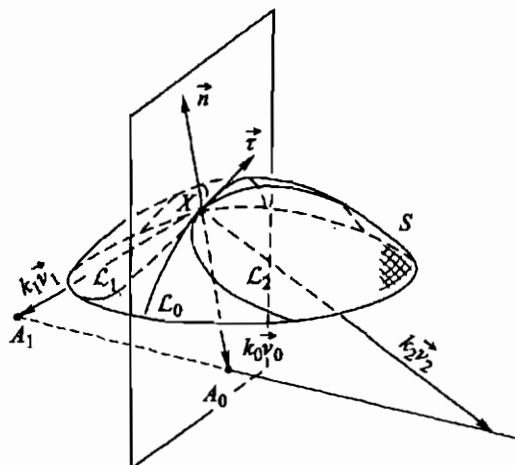


Рис. 52

Доказательство теоремы. Будем считать, что рассматривается кривая L , заданная на поверхности S уравнениями $u = u(s)$, $v = v(s)$, где s — натуральный параметр.

Вычислим k_n . Сначала найдем вектор кривизны линии L :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \vec{X}(u(s), v(s)) &= (\vec{X}_u \cdot u_s + \vec{X}_v \cdot v_s)_s = \\ &= \vec{X}_u \cdot u_{ss} + \vec{X}_v \cdot v_{ss} + \vec{X}_{uu} \cdot u_s^2 + 2\vec{X}_{uv} \cdot u_s \cdot v_s + \vec{X}_{vv} \cdot v_s^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая, что $\vec{X}_u \perp \vec{n}$, $\vec{X}_v \perp \vec{n}$ и $\vec{X}_s = \vec{\tau}$, подставим (6) в (3) и получим

$$k_n = (\vec{X}_{uu}, \vec{n}) \cdot u_s^2 + 2(\vec{X}_{uv}, \vec{n}) \cdot u_s \cdot v_s + (\vec{X}_{vv}, \vec{n}) \cdot v_s^2. \quad (7)$$

Для всех кривых, имеющих данное направление, производные по их натуральным параметрам $u_s = \frac{du}{ds}$, $v_s = \frac{dv}{ds}$ по абсолютной величине одинаковы (в данной точке) вследствие формул (12) и (13) § 9. Скалярные произведения $(\vec{X}_{uu}, \vec{n})$, $(\vec{X}_{uv}, \vec{n})$ и $(\vec{X}_{vv}, \vec{n})$ вообще не зависят от линии L . Поэтому утверждение теоремы непосредственно следует из формулы (7).

3°. Итак, нормальная кривизна линии на поверхности зависит только от направления линии и выбора рассматриваемой точки.

Те направления, по которым $k_n = 0$, называются *асимптотическими*. Те направления, по которым k_n имеет экстремальные для данной точки значения, называются *главными*.

Следствие из теоремы пункта 2° показывает, что эти определения эквивалентны определениям пунктов 4° и 10° из § 4.

4°. Линия на поверхности называется *асимптотической*, если в каждой своей точке она имеет асимптотическое направление. На асимптотической линии $k_n = 0$, $|k_g| = k$. Асимптотическая линия характеризуется тем, что ее вектор кривизны расположен в касательной плоскости к поверхности. Иначе говоря, соприкасающаяся плоскость асимптотической линии всюду, где она определена, совпадает с касательной плоскостью к поверхности.

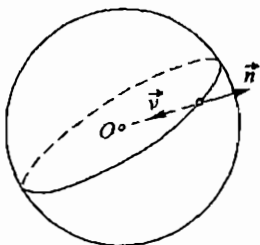


Рис. 53

Из сказанного в пп. 7°–10° § 4 следует, что если на C^2 -гладкой поверхности S через точку X проходит асимптотическая линия, то гауссова кривизна K поверхности S в точке X неположительна, т. е. $K(X) \leq 0$.

5°. Линия на поверхности называется *геодезической*, если в каждой ее точке $k_g = 0$. Для геодезической линии $|k_n| = k$.

Из формулы (2а) ясно, что если $\vec{v} = \vec{n}$ или $\vec{v} = -\vec{n}$ во всех точках линии, то эта линия — геодезическая.

Пример. Большие окружности сферы являются ее геодезическими линиями (рис. 53).

Замечание. В этом примере геодезические линии плоские, и для каждой своей точки они представляют собой нормальные сечения поверхности. В общем случае это не так: геодезические линии могут быть и не плоскими, а нормальные сечения могут иметь $k_g = 0$ только в одной точке. Зато в другом отношении приведенный пример является весьма показательным. Именно, через каждую точку сферы в каждом направлении проходит большая окружность и притом только одна. Это свойство сферы является частным случаем общего факта: через каждую точку поверхности S класса C^2 в каждом направлении проходит единственная геодезическая линия (доказательство см. ниже, § 22).

Более подробно геодезические линии мы будем изучать в четвертой главе.

6°. Если некоторая прямая целиком расположена на поверхности, то она является одновременно асимптотической и геодезической линией этой поверхности, поскольку $k = k_g = k_n = 0$ во всех точках прямой. Отсюда и из 4° имеем

Следствие. На любой C^2 -гладкой линейчатой поверхности $K \leq 0$.

7°. Из теории кривых напомним [31, 91, 99], что для каждой точки X на кривой, где кривизна $k \neq 0$, определена *соприкасающаяся плоскость*. Она проходит через точку X и векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$. В этой плоскости находится *соприкасающаяся окружность*, ее радиус $R = \frac{1}{k}$ называется *радиусом кривизны*, а ее центр O — *центром кривизны* (рассматриваемой кривой в данной точке X), причем $\overrightarrow{XO} = R\vec{\nu}$.

Вернемся к рассмотрению заданной на S линии L . Предположим, что в точке X направление L не является асимптотическим. Тогда в этой точке $k_n \neq 0$, значит, и $k \neq 0$ вследствие (5), а потому линия L имеет центр кривизны, который мы обозначим буквой O . Через точку X в направлении линии L проведем нормальное сечение L_0 и обозначим через C его центр кривизны. При сделанных предположениях справедлива

Теорема Менье. *Проекция центра кривизны нормального сечения L_0 на соприкасающуюся плоскость линии L совпадает с центром кривизны этой линии (рис. 54).*

Доказательство. Векторы $\overrightarrow{XC}$, $\overrightarrow{XO}$, $\vec{\nu}$ и $\vec{n}$ расположены в одной плоскости, ортогональной $\vec{\tau}$. В этой плоскости построим векторы $\overrightarrow{XA} = k_n \vec{n}$ и $\overrightarrow{XB} = k \vec{\nu}$ (рис. 55). Тогда $AB \perp XC$ вследствие теоремы п. 2°. Из теории кривых известно, что длины векторов кривизны обратно пропорциональны радиусам кривизны:

$$|k_n| = XA = \frac{1}{XC}, \quad k = XB = \frac{1}{XO}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что треугольники $\triangle XAB$ и $\triangle XOC$ подобны, и $XO \perp CO$, что и требовалось доказать.

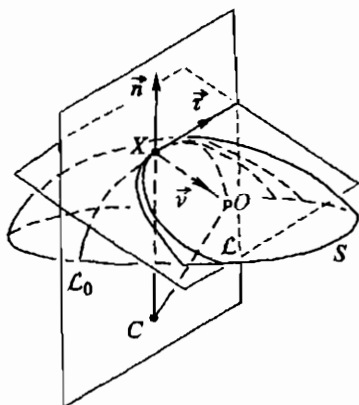


Рис. 54

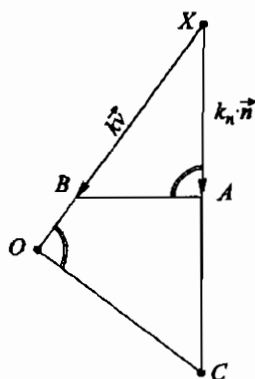


Рис. 55

Замечание. В случае асимптотического направления теорема Менье не соблюдается, поскольку не определена точка C . Центр кривиз-

ны O может существовать и в этом случае (см., например, рис. 56, на котором через $\tilde{L}$ обозначена соприкасающаяся окружность линии L , а нормальное сечение L_0 представляет собой прямую, расположенную на поверхности S . Касательная плоскость Π к поверхности S в точке X совпала с соприкасающейся плоскостью линии L).

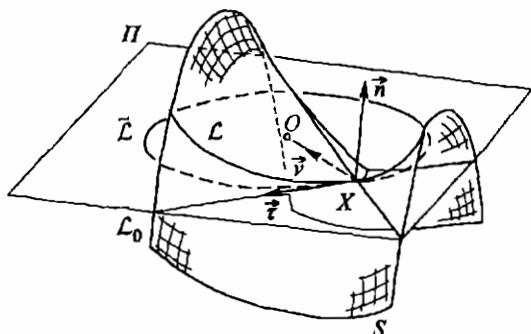


Рис. 56

8°. Если направление линии L не является асимптотическим, то для нахождения ее кривизны k достаточно знать:

1) главные кривизны k_1 и k_2 поверхности S в рассматриваемой точке X ;

2) угол φ между линией L и тем из главных направлений, которое считается первым;

3) двугранный (острый) угол ψ , образованный соприкасающейся плоскостью линии и касательной плоскостью поверхности в точке X .

В самом деле, по формуле Эйлера

$$k_n = k_1 \cdot \cos^2 \varphi + k_2 \cdot \sin^2 \varphi; \quad (9)$$

но

$$|k_n| = k \cdot \sin \psi$$

вследствие теоремы п. 2° (или теоремы Менье). Таким образом,

$$k = \frac{|k_1 \cdot \cos^2 \varphi + k_2 \cdot \sin^2 \varphi|}{\sin \psi}. \quad (10)$$

На рис. 57 отмечен угол между соприкасающейся плоскостью линии L и плоскостью нормального сечения, проведенного в направлении L ; этот угол дополняет ψ до $\frac{\pi}{2}$.

9°. При выводе равенства (10) формула Эйлера (9) применена к произвольной поверхности S (класса C^2), хотя в § 4 формула Эйлера была выведена в предположении, что поверхность имеет уравнение вида

$$z = z(x, y), \quad \text{где } z(x, y) \in C^2, \quad (11)$$

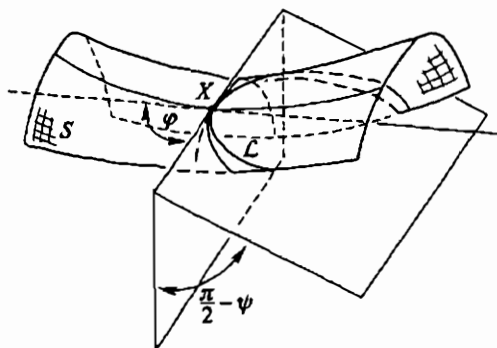


Рис. 57

и что

$$z = z_x = z_y = z_{xy} = 0 \quad (12)$$

в рассматриваемой точке. Дело в том, что условия (12) не накладывают дополнительных ограничений на поверхность, а связаны лишь с выбором координат в $\mathbb{R}^3$. Действительно, если начало координат поместить в точке X , а ось z направить по нормали к S , то в некоторой окрестности точки X поверхность будет иметь уравнение вида (11), а в самой точке X будем иметь $z = z_x = z_y = 0$. После этого оставшееся условие $z_{xy} = 0$ обеспечивается поворотом координатной системы вокруг оси z , приводящим в точке X квадратичную форму d^2z к каноническому виду.

10°. Рассуждения, кратко изложенные в предыдущем пункте, проведем подробно. Пусть поверхность S задана уравнением $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, где $\vec{X}(u, v) \in C^2$, $\vec{X}_u \times \vec{X}_v \neq \vec{0}$. Рассмотрим на S произвольную точку $X_0(u_0, v_0)$ и построим в $\mathbb{R}^3$ декартову систему координат ξ, η, ζ с началом X_0 ; ось ζ направим по нормали к S ; тогда оси ξ и η расположатся в касательной плоскости Π к поверхности S (проведенной в точке X_0). В новых координатах $\vec{X} = \{\xi, \eta, \zeta\}$, причем

$$\xi(u, v) \in C^2, \quad \eta(u, v) \in C^2, \quad \zeta(u, v) \in C^2, \quad (13)$$

поскольку регулярность координат вектор-функции $\vec{X}$ такая же, как и регулярность самой вектор-функции, независимо от выбора координатной системы в $\mathbb{R}^3$ (см. § 5, п. 4°).

Мы знаем, что векторы $\vec{X}_u = \{\xi_u, \eta_u, \zeta_u\}$ и $\vec{X}_v = \{\xi_v, \eta_v, \zeta_v\}$ расположены в касательной плоскости к поверхности. Но в точке X_0 касательная плоскость имеет уравнение $\zeta = 0$ в силу выбора оси ζ . Поэтому

$$\zeta_u(u_0, v_0) = \zeta_v(u_0, v_0) = 0. \quad (14)$$

Учитывая (14), находим, что при $u = u_0$

$$\left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \left\{ 0, 0, \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} \right\} \right| = \left| \vec{x}_u \times \vec{x}_v \right| \neq 0. \quad (15)$$

Это позволяет применить теорему о неявных функциях, согласно которой

$$u = u(\xi, \eta) \in C^1, \quad v = v(\xi, \eta) \in C^1, \quad (16)$$

в некоторой окрестности точки X_0 . (Теорема о неявных функциях заведомо гарантирует гладкость функций (16). Ниже мы увидим, что фактически функции (16) имеют регулярность C^2 .) Из (13) и (16) имеем:

$$\zeta = \zeta[u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)] = f(\xi, \eta). \quad (17)$$

Точка $X_0(u_0, v_0)$ имеет новые координаты $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$, так что

$$f(0, 0) = 0. \quad (18)$$

Дифференцируя (17) и учитывая (14), получаем

$$f_\xi(0, 0) = \left[\zeta_u(u, v) \cdot u_\xi(\xi, \eta) + \zeta_v(u, v) \cdot v_\xi(\xi, \eta) \right] \Big|_{\substack{(\xi, \eta) = (0, 0) \\ (u, v) = (u_0, v_0)}} = 0, \quad (19)$$

и, аналогично,

$$f_\eta(0, 0) = 0. \quad (20)$$

Покажем теперь, что вторые производные функции (17) существуют и непрерывны. Из тождеств

$$\begin{aligned} \xi_u du + \xi_v dv &= d\xi, \\ \eta_u du + \eta_v dv &= d\eta, \end{aligned}$$

рассматриваемых как система линейных уравнений с неизвестными du, dv , находим, что

$$du = \begin{vmatrix} d\xi & \xi_v \\ d\eta & \eta_v \end{vmatrix} : \Delta, \quad dv = \begin{vmatrix} \xi_u & d\xi \\ \eta_u & d\eta \end{vmatrix} : \Delta, \quad (21)$$

где $\Delta = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)}$. Из (21) следует, что

$$u_\xi = \frac{\eta_v}{\Delta}, \quad u_\eta = \frac{-\xi_v}{\Delta}, \quad v_\xi = \frac{-\eta_u}{\Delta}, \quad v_\eta = \frac{\xi_u}{\Delta}. \quad (22)$$

Вследствие (15) знаменатели формул (22) в точке X_0 отличны от нуля; отсюда и из (13) следует, что правые части формул (22) являются гладкими функциями аргументов u, v . Вместе с тем, в силу (16) величины (22) являются гладкими функциями аргументов ξ, η . Например, производная

$$u_{\xi\xi} = \left(\frac{\eta_v}{\Delta} \right)_\xi = \left(\frac{\eta_v}{\Delta} \right)_u \cdot u_\xi + \left(\frac{\eta_v}{\Delta} \right)_v \cdot v_\xi$$

является непрерывной функцией аргументов ξ, η . Итак, функции (16) имеют регулярность C^2 ; такую же регулярность имеет и функция (17).

Остается обеспечить одно условие:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (23)$$

Пусть (23) в точке X_0 не соблюдено. Повернем координатную систему вокруг оси ζ на угол α . Такой поворот выражается формулами вида

$$\begin{aligned} \xi &= \tilde{\xi} \cos \alpha - \tilde{\eta} \sin \alpha, \\ \eta &= \tilde{\xi} \sin \alpha + \tilde{\eta} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

При этом условия (18)–(20) будут соблюдаться и для новых аргументов $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, а

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{\xi} \partial \tilde{\eta}} &= (f_{\xi} \cos \alpha + f_{\eta} \sin \alpha)_{\tilde{\eta}} = \\ &= -f_{\xi\xi} \sin \alpha \cos \alpha + f_{\xi\eta}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + f_{\eta\eta} \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Выбрав α так, чтобы

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{f_{\xi\xi}(0,0) - f_{\eta\eta}(0,0)}{2f_{\xi\eta}(0,0)}, \quad (25)$$

получим $f_{\tilde{\xi}\tilde{\eta}}|_{X_0} = 0$.

Не ограничивая общности, можно считать, что координаты (ξ, η, ζ) сразу выбраны с соблюдением всех условий (18)–(20) и (23). Тогда направления осей ξ и η являются главными направлениями поверхности S в точке X_0 .

Отметим, что преобразование координат по формулам (24)–(25) как раз означает, что мы приводим к главным осям поверхность второго порядка

$$\zeta = f_{\xi\xi}(0,0) \cdot \xi^2 + 2f_{\xi\eta}(0,0) \cdot \xi \cdot \eta + f_{\eta\eta}(0,0) \cdot \eta^2,$$

правая часть уравнения которой с точностью до обозначений и числового множителя есть второй дифференциал $d^2\zeta(\xi, \eta)$ в точке X_0 .

§ 11. Вторая квадратичная форма

1°. Вернемся к формуле (7) § 10, выражающей k_n . В теории поверхностей употребляются стандартные обозначения для скалярных произведений, входящих в эту формулу:

$$\begin{aligned} L &= L(u, v) = (\vec{X}_{uu}, \vec{n}), \\ M &= M(u, v) = (\vec{X}_{uv}, \vec{n}), \\ N &= N(u, v) = (\vec{X}_{vv}, \vec{n}). \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть рассматривается кривая $\mathcal{L}$ на поверхности $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, заданная уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$. Производные координат u , v по натуральному параметру можно записать как отношения дифференциалов:

$$u_s = \frac{du}{ds}, \quad v_s = \frac{dv}{ds},$$

где $du = u_t dt$, $dv = v_t dt$, а ds выражается согласно § 8. Тогда формула для k_n примет вид:

$$k_n = L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \quad (2)$$

2°. Определение. Выражение $L du^2 + 2M du dv + N dv^2$ называется *второй квадратичной формой* поверхности.

Функции (1) называют ее коэффициентами. Отметим, что

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = (\vec{n}, d^2 \vec{X}). \quad (3)$$

В самом деле, если $u = u(t)$, $v = v(t)$, то

$$d^2 \vec{X} = \vec{X}_u d^2 u + \vec{X}_v d^2 v + \vec{X}_{uu} du^2 + 2\vec{X}_{uv} du dv + \vec{X}_{vv} dv^2. \quad (4)$$

откуда и следует (3), так как $\vec{X}_u \perp \vec{n}$ и $\vec{X}_v \perp \vec{n}$. Таким образом,

$$k_n = \frac{(\vec{n}, d^2 \vec{X})}{ds^2}. \quad (2a)$$

Если на рассматриваемой поверхности S зафиксирована система криволинейных координат и выбрана точка $X(u, v)$, то скалярное произведение $(\vec{n}, d^2 \vec{X})$ является квадратичной формой относительно аргументов du, dv , т. е. квадратичной формой в двумерном линейном пространстве Π с базисом $\vec{X}_u, \vec{X}_v$ (здесь, как и выше, Π — касательная плоскость к поверхности S в точке X). Пусть $\vec{XY} = \vec{X}_u du + \vec{X}_v dv$ — произвольный вектор в плоскости Π , через φ обозначен угол, который этот вектор образует с каким-либо направлением, зафиксированным в плоскости Π . Будем считать, что в качестве такого направления взято одно из главных направлений поверхности в точке X ; тогда нормальная кривизна k_n в этой точке в направлении вектора $\vec{XY}$ будет функцией угла φ , причем эта функция совпадает с $k(\varphi)$, участвующей в формуле Эйлера (см. (9) § 10 или (6) § 4), так что $k_n = k_n(\varphi) = k(\varphi)$. Формула (2a) позволяет написать, что

$$(\vec{n}, d^2 \vec{X}) = k_n(\varphi) ds^2 = k(\varphi) |\vec{XY}|^2. \quad (5)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Ни длина вектора $\vec{XY}$, ни абсолютная величина функции $k_n(\varphi)$ не зависят от параметризации на S . Однако знак кривизны нормальных сечений зависит от

выбора направления вектора $\vec{n}$: если $\vec{n}$ заменить на $-\vec{n}$, то $k_n(\varphi)$ изменится на $-k_n(\varphi)$.

Условимся, что для каждой параметризации (u, v) на S орт нормали $\vec{n}$ выбирается согласно формуле (12) § 6, т. е. его направление совпадает с направлением вектора $[\vec{X}_u \times \vec{X}_v]$ (см. рис. 46). Перейдем на S к новым координатам $\tilde{u}, \tilde{v}$ по формулам вида

$$\begin{cases} u = u(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ v = v(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{cases}, \quad \Delta = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \neq 0. \quad (6)$$

Если $\Delta < 0$, то базисы $\vec{X}_u, \vec{X}_v$, и $\vec{X}_{\tilde{u}}, \vec{X}_{\tilde{v}}$, на плоскости Π имеют противоположные ориентации. Вместе с тем, противоположны направления векторных произведений $[\vec{X}_u \times \vec{X}_v]$ и $[\vec{X}_{\tilde{u}} \times \vec{X}_{\tilde{v}}]$. Значит, при $\Delta < 0$ преобразование координат (6) влечет за собой изменение направления вектора $\vec{n}$. При $\Delta > 0$ вектор $\vec{n}$ сохраняется без изменения.

Согласно изложенному, вторая квадратичная форма, как функция вектора $X\vec{Y} \in \Pi$, является аксиальным инвариантом, т. е. она сохраняется при преобразованиях координат с положительным якобианом ($\Delta > 0$), но меняет знак, если $\Delta < 0$. Закон преобразования ее коэффициентов отличается от закона преобразования коэффициентов инвариантной квадратичной формы только множителем (-1) при $\Delta < 0$. Поэтому аналогично п. 8° § 6 можно написать:

$$\begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ u_{\tilde{v}} & v_{\tilde{v}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{\tilde{u}} & u_{\tilde{v}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{v}} \end{pmatrix}; \quad (7)$$

здесь $\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N}$ — коэффициенты формы $(\vec{n}, d^2\vec{X})$ в параметрах $\tilde{u}, \tilde{v}$; знак «+» берется при $\Delta > 0$, знак «-» — при $\Delta < 0$.

3°. Формула (7) показывает, что вторая квадратичная форма образует на поверхности ковариантное аксиальное тензорное поле [50].

В качестве упражнения читателю полезно вывести формулу (7) иначе, записав в параметрах $\tilde{u}, \tilde{v}$ выражения вида (1) и воспользовавшись правилами дифференцирования сложных функций.

4°. Для практического вычисления L, M, N полезно заметить, что

$$\vec{n} = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{|\vec{X}_u \times \vec{X}_v|} = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (8)$$

Подставив (8) в (1), получим формулы:

$$\begin{aligned} L &= (\vec{X}_u, \vec{X}_u, \vec{X}_{uu}) / \sqrt{EG - F^2}, \\ M &= (\vec{X}_u, \vec{X}_v, \vec{X}_{uv}) / \sqrt{EG - F^2}, \\ N &= (\vec{X}_v, \vec{X}_v, \vec{X}_{vv}) / \sqrt{EG - F^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

Пример. Найдем вторую квадратичную форму поверхности вида $z = z(x, y)$. Имеем $\vec{X} = \vec{X}(x, y) = \{x, y, z(x, y)\}$, поэтому

$$(\vec{X}_x, \vec{X}_y, \vec{X}_{xx}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \\ 0 & 0 & z_{xx} \end{vmatrix} = z_{xx}$$

и, аналогично,

$$(\vec{X}_x, \vec{X}_y, \vec{X}_{xy}) = z_{xy}, \quad (\vec{X}_x, \vec{X}_y, \vec{X}_{yy}) = z_{yy}.$$

Кроме того, в рассматриваемом случае $EG - F^2 = 1 + z_x^2 + z_y^2$, так что

$$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}. \quad (10)$$

5°. Укажем еще один способ вычисления L, M, N . Дифференцируя по u и по v тождества

$$(\vec{n}, \vec{X}_u) = 0, \quad (\vec{n}, \vec{X}_v) = 0$$

и учитывая (1), находим

$$L = -(\vec{n}_u, \vec{X}_u), \quad M = -(\vec{n}_u, \vec{X}_v), \quad N = -(\vec{n}_v, \vec{X}_v). \quad (11)$$

Используя (11), нетрудно проверить, что

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = -(d\vec{n}, d\vec{X}). \quad (12)$$

Равенство (12) дает еще одно доказательство инвариантности второй квадратичной формы, поскольку выражает ее через дифференциалы первого порядка. Кстати говоря, (12) можно получить непосредственно, взяв дифференциалы от обеих частей тождества

$$(\vec{n}, \vec{X}) = 0.$$

6°. Вспомним теперь, что индикатриса Дюпена (см. выше, §4, п. 6°) имеет уравнение

$$\rho^2 |k(\varphi)| = 1, \quad (13)$$

где ρ, φ — полярные координаты в касательной плоскости Π .

Но в обозначениях п. 2° $\rho = |\vec{XY}|$, поэтому, сравнивая (13), (5) и (3), мы видим, что равенство

$$|L du^2 + 2M du dv + N dv^2| = 1 \quad (14)$$

есть не что иное, как уравнение индикатрисы Дюпена в косоугольных координатах du, dv на плоскости Π .

Отсюда видно, между прочим, что линии уровня функции $|L du^2 + 2M du dv + N dv^2|$ на плоскости Π подобны индикатрисе Дюпена (здесь подобие понимается в элементарно-геометрическом смысле).

7°. Вторая квадратичная форма является знакоопределенной, если $LN - M^2 > 0$; знакопеременной, если $LN - M^2 < 0$; вырожденной,

если $LN - M^2 = 0$. Поэтому, сопоставляя уравнение (14) и п. 2° § 4, получаем следующие признаки типов точек поверхности:

- а) точка эллиптическая, если $LN - M^2 > 0$;
- б) точка гиперболическая, если $LN - M^2 < 0$;
- в) точка параболическая, если $LN - M^2 = 0$, но хотя бы один из коэффициентов L, M, N отличен от нуля;
- г) точка уплощения, если $L = M = N = 0$.

8*. Построим пространственную косоугольную систему координат с началом X и базисом $\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{n}$. Координаты точек пространства в этой аффинной системе обозначим du, dv, ζ (см. рис. 58; при $\zeta = 0$ имеем плоскость Π).

Выше, в п. 6° § 4, было введено понятие соприкасающегося параболоида поверхности при специальном ее расположении относительно пространственной координатной системы. Рассуждения пунктов 9°–10° § 10 позволяют применить это понятие к случаю произвольной поверхности S класса C^2 . Уравнение соприкасающегося параболоида имеет вид

$$\zeta = \frac{1}{2} \rho^2 k(\varphi)$$

Рис. 58

(см. в связи с этим формулы (8)–(11) из § 4) или, что то же самое,

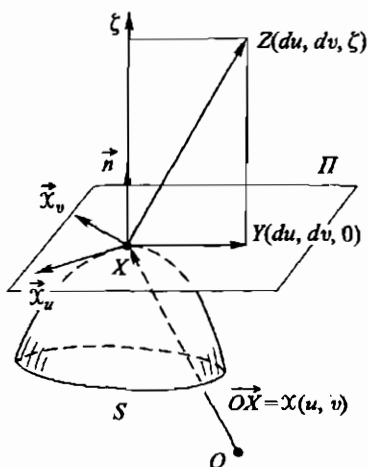
$$2\zeta = L du^2 + 2M du dv + N dv^2. \quad (15)$$

Используя п. 2°, нетрудно проверить, что поверхность (15) не зависит от выбора параметризации на S .

Замечание. Мы знаем, что касательная плоскость выделяется из всех плоскостей тем свойством, что ее уклонение от поверхности имеет порядок $o(\rho)$. Для соприкасающегося параболоида аналогичное уклонение имеет порядок $o(\rho^2)$, однако соприкасающийся параболоид — это далеко не единственная поверхность второго порядка, столь тесно прилегающая к данной поверхности S . Это будет видно из примера, приведенного ниже, в конце п. 3° § 12.

9*. В заключение параграфа остановимся на асимптотических линиях. Они характеризуются условием $k_n = 0$, которое вследствие (2) принимает вид

$$L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2 = 0. \quad (16)$$



При фиксированных u, v равенство (16) представляет собой квадратное уравнение для отыскания асимптотических направлений. Вместе с тем, (16) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно переменных u, v , определяющее на поверхности S асимптотические линии.

В частном случае поверхности $z = z(x, y)$ уравнение (16) сводится к следующему:

$$d^2 z = 0. \quad (17)$$

Это ясно, если учесть формулы (10).

Пример. Найдем асимптотические линии поверхности

$$z = e^x \sin 2y. \quad (18)$$

Имеем:

$$d^2 z = e^x \sin 2y dx^2 + 4e^x \cos 2y dx dy - 4e^x \sin 2y dy^2.$$

Поэтому в данном случае уравнение (17) после сокращения на e^x запишется так:

$$\sin 2y dx^2 + 4 \cos 2y dx dy - 4 \sin 2y dy^2 = 0. \quad (19)$$

Отсюда при $dy = 0$ находим

$$y = \frac{m\pi}{2}, \quad m = 0, +1, +2, \dots \quad (20)$$

Далее, делим (19) на $\sin 2y dy$ и получаем относительно x'_y квадратное уравнение

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 4 \operatorname{ctg} 2y \frac{dx}{dy} - 4 = 0,$$

которое распадается на два уравнения первой степени:

$$\frac{dx}{dy} = 2 \operatorname{tg} y \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = -2 \operatorname{ctg} y.$$

Первое из них имеет решение

$$x = c - \ln \cos^2 y, \quad (21)$$

а второе —

$$x = c - \ln \sin^2 y. \quad (22)$$

Постоянная интегрирования в (21) и (22) может принимать любые числовые значения ($-\infty < c < +\infty$).

Формулы (20)–(22) дают проекции асимптотических линий поверхности (18) на плоскость S (рис. 59). Эти проекции (а вместе с ними и асимптотические линии поверхности (18)) естественным образом распадаются на два семейства, одно из которых на рис. 59 показано сплошными линиями, а другое — пунктирными.

З а м е ч а н и е. В достаточно малой окрестности произвольной точки поверхности (18) можно (аналогично п. 1° § 7) построить систему

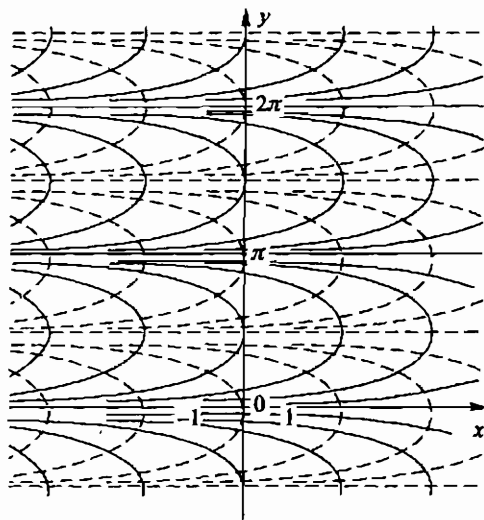


Рис. 59

координат u, v так, чтобы u -линии и v -линии были асимптотическими. На всей поверхности (18) единую систему координат с таким свойством ввести невозможно, поскольку две асимптотические линии, произвольно взятые из разных семейств, вообще говоря, не пересекаются (см. рис. 59).

Задачи.

1*. Докажите, что u -линия (v -линия) имеет в точке (u_0, v_0) асимптотическое направление тогда и только тогда, когда $L(u_0, v_0) = 0$ (соответственно $N(u_0, v_0) = 0$).

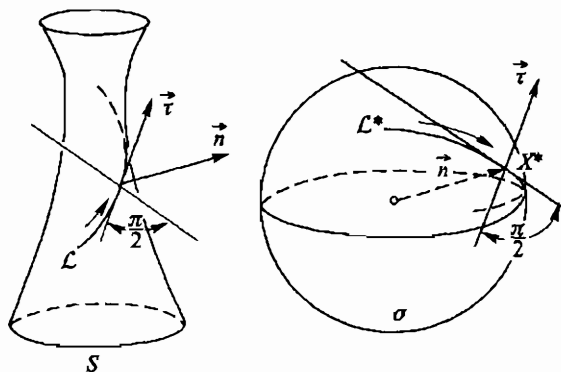


Рис. 60

2*. Пусть $\mathcal{L}$ — асимптотическая линия на поверхности S ; X — произвольная точка на $\mathcal{L}$; $\mathcal{L}^*$ и X^* — образы $\mathcal{L}$ и X на гауссовой сфере σ (рис. 60). Докажите, что если касательная к линии $\mathcal{L}^*$ в точке X^* существует, то она ортогональна касательной к $\mathcal{L}$ в точке X . (Короче говоря, что асимптотическая линия ортогональна своему сферическому образу.)

3*. Докажите, что ортогональность сферическому образу во всех точках гладкой линии $\mathcal{L} \subset S$ достаточна для того, чтобы $\mathcal{L}$ была асимптотической на S ($S \subset C^2$).

4*. Найти на гауссовой сфере образы асимптотических линий однополостного гиперболоида вращения.

§ 12. Главные кривизны и главные направления. Теорема Родрига. Линии кривизны

1°. Выражения для главных кривизн k_1 и k_2 выше были даны лишь при специальном расположении поверхности относительно пространственной системы координат (см. (2) в § 4).

Покажем теперь, как вычислить k_1 и k_2 в произвольной точке X поверхности S класса C^2 , заданной параметрически:

$$\vec{X} = \vec{X}(u, v). \quad (1)$$

Предварительно нужно будет провести некоторые вспомогательные рассуждения. Мы знаем, что в касательной плоскости к поверхности определены две квадратичные формы:

$$ds^2 = (d\vec{X}, d\vec{X}) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (2)$$

(положительно определенная) и

$$(\vec{n}, d^2\vec{X}) = -(d\vec{n}, d\vec{X}) = L du^2 + 2M du dv + N dv^2. \quad (3)$$

На касательной плоскости Π , проведенной в точке X , введем декартовы прямоугольные координаты ξ, η с началом X и базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, векторы которого идут по главным направлениям поверхности. (Это заведомо можно сделать. В самом деле, если точка X не омбилическая, то главные направления ортогональны. В случае омбилической точки все направления являются главными, и в качестве $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ можно взять любую пару ортогональных единичных векторов.) В координатах ξ, η имеем

$$\begin{aligned} ds^2 &= \rho^2 = \xi^2 + \eta^2, \\ (\vec{n}, d^2\vec{X}) &= \rho^2(k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi) = k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где ρ, φ — полярные координаты в касательной плоскости, $\xi = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$.

Итак, в координатах ξ, η квадратичная форма (2) принимает нормальный вид, а квадратичная форма (3) — канонический вид с ко-

коэффициентами k_1 и k_2 . Из алгебры известно, что в такой ситуации коэффициенты k_j равны корням характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Развернув определитель в левой части уравнения (5) и воспользовавшись теоремой Виета, находим

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (6)$$

и

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \quad (7)$$

При практических подсчетах удобно сначала найти коэффициенты первой и второй квадратичных форм, затем выразить K и H по формулам (6) и (7), а потом найти k_1 и k_2 как корни уравнения

$$k^2 - 2Hk + K = 0.$$

Формулы (6) и (7) имеют и самостоятельное значение, поскольку K и H нередко приходится вычислять независимо от главных кривизн.

2°. Изучим некоторые свойства главных направлений.

Лемма 1. Если при $u = u_0$, $v = v_0$

$$F = M = 0, \quad (8)$$

то u -линия и v -линия имеют в точке (u_0, v_0) главные направления.

Доказательство. Пусть $\{du, dv\}$ — произвольное направление в точке X ; φ — угол, который оно образует с u -линией. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{E} du}{\sqrt{E du^2 + G dv^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{G} dv}{\sqrt{E du^2 + G dv^2}} \quad (9)$$

(поскольку $F = 0$). Нормальная кривизна k_n в направлении $\{du, dv\}$ вследствие (8) и (9) выражается так:

$$k_n = \frac{L du^2 + N dv^2}{E du^2 + G dv^2} = \frac{L}{E} \cos^2 \varphi + \frac{N}{G} \sin^2 \varphi = \frac{L}{E} + \left(\frac{N}{G} - \frac{L}{E} \right) \sin^2 \varphi. \quad (10)$$

Из (10) ясно, что направления $du \neq 0$, $dv = 0$ и $du = 0$, $dv \neq 0$ дают экстремальные значения k_n .

Лемма 2. Пусть в точке $X(u_0, v_0)$ координатные линии ортогональны и одна из них имеет главное направление. Тогда в этой точке соблюдается равенство (8).

Доказательство. Мы знаем, что направление, ортогональное главному, тоже является главным. Поэтому в условиях леммы 2

$$\vec{X}_u(u_0, v_0) = a \vec{e}_1, \quad \vec{X}_v(u_0, v_0) = b \vec{e}_2, \quad (11)$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — векторы, определенные в п. 1°, a, b — некоторые числовые множители.

В координатах ξ, η с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ вторая квадратичная форма имеет вид (4). Пусть du, dv — координаты на плоскости Π с базисом (11). Тогда

$$\xi = a du, \quad \eta = b dv$$

(см. рис. 61). Поэтому в базисе (11)

$$(\vec{n}, d^2\vec{X}) = a^2 k_1 du^2 + b^2 k_2 dv^2,$$

так что $M(u_0, v_0) = 0$. Равенство $F(u_0, v_0) = 0$ соблюдается вследствие ортогональности координатных линий в точке X .

Теорема Рóдрига. Для того, чтобы направление было главным, необходимо и достаточно, чтобы при смещении в этом направлении

$$d\vec{n} = \lambda d\vec{X}. \quad (12)$$

При этом $\lambda = -k$, где k — главная кривизна, соответствующая рассматриваемому направлению.

Доказательство. Прежде всего заметим, что равенство (12) инвариантно относительно выбора параметризации на поверхности. В самом деле, вектор $d\vec{X}$ инвариантен (см. § 7, п. 6°.) При преобразованиях координат с положительным якобианом вектор $d\vec{n}$ тоже инвариантен (это проверяется аналогично п. 6° § 7), а кривизна k сохраняет свое числовое значение. При преобразованиях координат с отрицательным якобианом кривизна k и вектор $d\vec{n}$ одновременно умножаются на (-1) . Поэтому доказательство можно проводить в координатах, выбранных специальным образом.

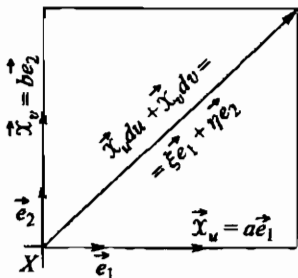


Рис. 61

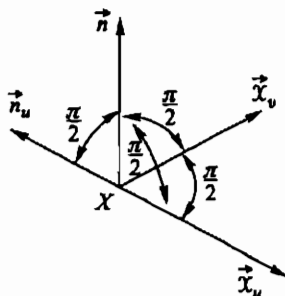


Рис. 62

Пусть ℓ — заданное направление в точке $X \in S$. Параметризацию (u, v) на S выберем так, чтобы u -линия имела в точке X направление ℓ , а v -линия была ей ортогональна. Тогда

$$(\vec{X}_u, \vec{X}_v) = F = 0. \quad (13)$$

(Равенство (13) и дальнейшие равенства в доказательстве теоремы Родрига записаны для точки X .) Заметим еще, что

$$(\vec{n}, d\vec{n}) = \frac{1}{2}d(\vec{n}, \vec{n}) = 0, \quad (14)$$

поэтому

$$d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv \in \Pi \quad (15)$$

(при любых du и dv и любом выборе параметризации на S).

Пусть дано, что ℓ — главное направление. Тогда

$$M = -(\vec{X}_v, \vec{n}_u) = 0 \quad (16)$$

вследствие леммы 2. Учитывая (13)–(16), мы видим, что

$$\vec{X}_u \perp \vec{n}, \quad \vec{X}_v \perp \vec{n}, \quad \vec{X}_u \perp \vec{X}_v, \quad \vec{n}_u \perp \vec{n}, \quad \vec{n}_v \perp \vec{X}_v$$

(см. рис. 62). Ясно поэтому, что $\vec{n}_u$ коллинеарен $\vec{X}_u$, т. е.

$$\vec{n}_u = \lambda \vec{X}_u \quad (17)$$

и для направления ℓ соблюдается (12).

Подсчитаем нормальную кривизну в направлении ℓ :

$$k_1 = \frac{L}{E} = \frac{-(\vec{n}_u, \vec{X}_u)}{(\vec{X}_u, \vec{X}_u)} = -\lambda.$$

Пусть теперь дано, что для направления ℓ соблюдается равенство (12). Тогда вследствие специального выбора параметризации имеем (17) и (13), поэтому

$$M = -(\vec{n}_u, \vec{X}_v) = -\lambda(\vec{X}_u, \vec{X}_v) = 0,$$

и направление ℓ является главным вследствие леммы 1.

Теорема доказана.

Замечание. Формула (15) задает линейное преобразование плоскости Π , которое каждому вектору $d\vec{X} = \vec{X}_u du + \vec{X}_v dv \in \Pi$ сопоставляет вектор $d\vec{n} \in \Pi$. Из теоремы Родрига следует, что главные направления поверхности — это направления собственных векторов указанного преобразования, а главные кривизны с точностью до знака равны их собственным значениям.

3°. Определение. Гладкая линия на поверхности S называется *линией кривизны*, если в каждой своей точке она имеет главное направление.

Следствие из леммы 1. Если $F(u, v) = M(u, v) = 0$ во всех точках некоторой области $D \subset S$, то в этой области координатная сеть образована линиями кривизны.

Примеры.

1). На плоскости и на сфере любая гладкая линия является линией кривизны, поскольку на этих двух поверхностях все точки — омбические.

2). Пусть поверхность S и плоскость P пересекаются по линии L , причем для каждой точки линии L нормаль к поверхности S расположена в плоскости P . Тогда L является линией кривизны на S . Это свойство следует из теоремы Родрига, поскольку в точках линии L нормаль к поверхности S является нормалью к L , а для любой плоской кривой дифференциал орта нормали коллинеарен касательной (рис. 63).

В частности, плоскость симметрии эллипсоида пересекает его по линии кривизны, являющейся эллипсом (рис. 64).

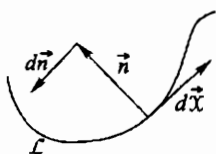


Рис. 63

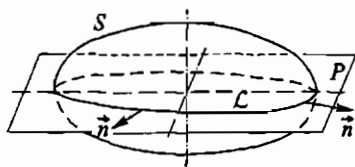


Рис. 64

3). Меридианы и параллели поверхности вращения являются ее линиями кривизны. В самом деле, нормаль к поверхности вращения ортогональна касательным к меридиану и параллели, поэтому она расположена в плоскости меридиана (рис. 65), так что каждый из меридианов удовлетворяет условиям предыдущего примера и является линией кривизны. Параллели ортогональны меридианам, поэтому тоже являются линиями кривизны. Указанное свойство меридианов и параллелей можно установить иначе, воспользовавшись уравнением поверхности вращения в форме (6) § 6 и следствием из леммы 1.

4). Пусть S — поверхность вращения, β — угол между касательной к ее меридиану и осью вращения, r — расстояние точки поверхности от оси вращения (рис. 66). Вычислим гауссову кривизну K поверхности S . Будем считать для простоты, что $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$, $r \neq 0$. Учитывая предыдущий пример, можем сразу написать, что $|k_1| = |\beta_{s_1}|$, где s_1 — натуральный параметр меридиана (одна из главных кривизн поверхности S равна по модулю кривизне ее меридиана). Заметим далее, что нормаль к поверхности S расположена в плоскости меридиана, является нормалью к меридиану и образует с радиусом параллели угол, равный β (рис. 66). Такой же по величине (двугранный) угол β образует плоскость параллели с плоскостью нормального сечения поверхности S ,

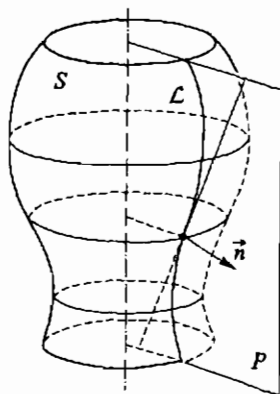


Рис. 65

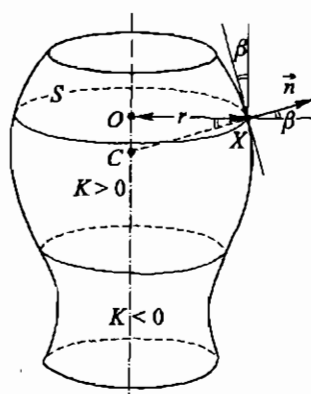


Рис. 66

проведенного в направлении параллели. Кривизна параллели $\frac{1}{r}$ и ее нормальная кривизна k_2 связаны теоремой Менье: $|k_2| = \frac{1}{r} \cos \beta$. Таким образом, $K = \pm \left| \frac{\cos \beta}{r} \right| \cdot \left| \frac{d\beta}{ds_1} \right|$. Нетрудно сообразить, что $K < 0$, если выпуклость меридиана направлена в сторону оси вращения; $K > 0$, если выпуклость меридиана обращена от оси вращения (рис. 66).

5). Найдем соприкасающийся параболоид поверхности

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (18)$$

в точке $X_0 \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$. Орты координатных осей x, y, z обозначим соответственно $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$. Соприкасающийся параболоид был определен нами в специальной пространственной системе координат с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{n}$ формулой (8) из § 4. Здесь, как и выше, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — единичные векторы главных направлений, $\vec{n}$ — орт нормали к поверхности. Учитывая два предыдущих примера и пользуясь тем, что (18) — поверхность вращения, находим базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{n}_0 = \vec{n}(X_0)$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{k}, \\ \vec{e}_2 &= \vec{j}, \\ \vec{n}_0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{k} \end{aligned} \quad (19)$$

($\vec{e}_1$ — орт касательной к меридиану в точке X_0 , $\vec{e}_2$ — орт касательной к параллели в этой точке, $\vec{n}_0 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, см. рис. 67), а также главные

кривизны

$$k_1|_{X_0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad k_2|_{X_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (20)$$

Пусть ξ, η, ζ — координаты в $\mathbb{R}^3$ с началом X_0 и базисом (19). Используя (20) и формулу (8) § 4, составляем уравнение соприкасающегося параболоида:

$$\zeta = \frac{1}{4\sqrt{2}} \xi^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \eta^2, \quad (21)$$

которое в координатах x, y, z можно записать в векторной форме:

$$\vec{X}(\xi, \eta) = (\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}) + \xi \cdot \vec{e}_1 + \eta \cdot \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{8}(\xi^2 + 2\eta^2) \vec{n}_0.$$

Обратим внимание на то, что соприкасающийся параболоид (21) не совпадает с исходным параболоидом (18) (рис. 68).

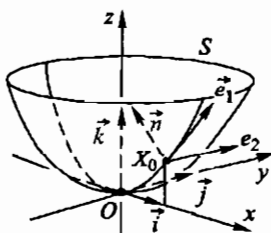


Рис. 67

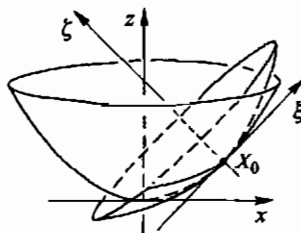


Рис. 68

4°. Выше мы видели, что лемма 1 и теорема Родрига позволяют в некоторых случаях находить главные направления и линии кривизны.

Теперь займемся отысканием главных направлений в произвольной точке X поверхности S класса C^2 , заданной уравнением (1). Введем важное для дальнейшего

Определение. Два направления в точке X на S называются *сопряженными*, если они являются направлениями сопряженных диаметров индикатрисы Дюпена.

Из аналитической геометрии известно, что если кривая второго порядка задана уравнением вида

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$$

в аффинных координатах x, y , то направления $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$, сопряженные относительно этой кривой, характеризуются условием:

$$ax_1x_2 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cy_1y_2 = 0.$$

Поэтому, пользуясь уравнением индикатрисы Дюпена в форме (14) § 11, мы сможем записать условие сопряженности направлений $\{du_1, dv_1\}$ и $\{du_2, dv_2\}$ на поверхности S :

$$L du_1 du_2 + M(du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + N dv_1 dv_2 = 0. \quad (22)$$

Сначала предположим, что точка X не является омбилической. Тогда главные направления в ней совпадают с направлениями главных осей индикатрисы Дюпена (см. выше п. 4°–6° § 4) и потому являются одновременно сопряженными и ортогональными. Поэтому два главных направления $\{du_1, dv_1\}$ и $\{du_2, dv_2\}$ удовлетворяют условиям (22) и (23):

$$E du_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + G dv_1 dv_2 = 0. \quad (23)$$

Следовательно, система уравнений

$$\left. \begin{aligned} (E du_1 + F dv_1) du_2 + (F du_1 + G dv_1) dv_2 &= 0, \\ (L du_1 + M dv_1) du_2 + (M du_1 + N dv_1) dv_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

имеет нетривиальное решение $\{du_2, dv_2\}$, а ее определитель равен нулю. Но пары дифференциалов $\{du_1, dv_1\}$ и $\{du_2, dv_2\}$ входят в (22) и (23) симметрично, поэтому в (24) их можно поменять ролями, так что каждое из двух главных направлений должно удовлетворять условию

$$\begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G dv \\ L du + M dv & M du + N dv \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$\begin{vmatrix} E & F \\ L & M \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} E & G \\ L & N \end{vmatrix} du dv + \begin{vmatrix} F & G \\ M & N \end{vmatrix} dv^2 = 0 \quad (25)$$

или, что то же самое,

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \quad (25a)$$

Проведенные рассуждения применимы и в том случае, когда точка X — омбилическая. Нужно только заранее предположить, что направления $\{du_1, dv_1\}$ и $\{du_2, dv_2\}$, рассматриваемые в качестве главных, ортогональны.

Итак, если направление $\{du, dv\}$ — главное, то (25) соблюдается.

Покажем, что никакие другие направления, кроме главных, уравнению (25) не удовлетворяют. Напомним, что нормальная кривизна в направлении $\{du, dv\}$ выражается формулой

$$k_n = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \quad (26)$$

Из (26) видно, что точка является омбилической ($k_n = \text{const}$) тогда и только тогда, когда

$$L : E = M : F = N : G. \quad (27)$$

Поэтому в омбилических точках и только в них уравнение (25) обращается в тождество. Но именно в омбилических точках любое направление является главным. Во всех остальных случаях уравнение (25) является квадратным относительно $\frac{dv}{du}$ или $\frac{du}{dv}$ и поэтому имеет не более двух решений, а два главных направления существуют заведомо.

Попутно мы установили, что корни уравнения (25) действительны и различны.

5°. Равенство (25) представляет собой дифференциальное уравнение линий кривизны поверхности S . Его запись (25а) удобна для запоминания. Разрешая (25) относительно $\frac{dv}{du}$ (или $\frac{du}{dv}$), мы получим два уравнения первого порядка

$$\frac{dv}{du} = \Phi_i(u, v), \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

(соответственно, $\frac{du}{dv} = 1/\Phi_i(u, v)$), где Φ_i — некоторые выражения, составленные из коэффициентов первой и второй квадратичных форм.

При $i = 1$ уравнение (28) определяет одно семейство линий кривизны, при $i = 2$ — другое. Вместе эти два семейства образуют *сеть линий кривизны*, которую часто бывает удобно принять за координатную, поскольку в таких координатах соблюдаются равенства (8), приводящие к упрощению многих формул теории поверхностей.

6°. Нужно, однако, иметь в виду следующие обстоятельства.

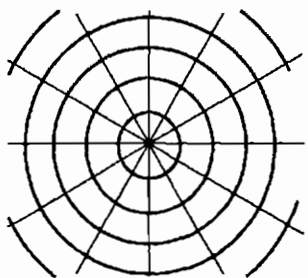


Рис. 69

1). Омбилические точки поверхности являются особыми точками для уравнений (28) (Φ_i не определены, если имеют место пропорции (27)). Множество омбилических точек может иметь весьма разнообразное строение, а в окрестности даже изолированной омбилической точки сеть линий кривизны может быть устроена довольно сложно. На рисунках 69–71 схематически показано строение сети линий кривизны в окрестности шаровой точки (вершины) параболоида вращения, в окрестности точки уплощения ($x = y = 0$) поверхности $z = x^3 - 3xy^2$ и в окрестности шаровой точки ($x = 0, y = \sqrt{q(p-q)}$) на эллиптическом параболоиде

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}, \quad p > q > 0.$$

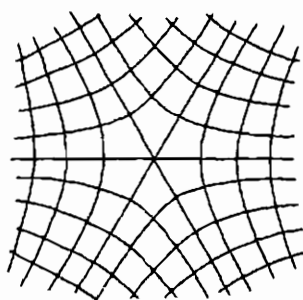


Рис. 70

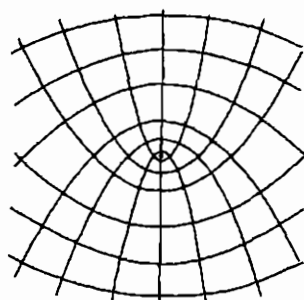


Рис. 71

Примечание. Для получения рис. 69 удобно воспользоваться тем, что на поверхности вращения сеть линий кривизны образована меридианами и параллелями. В случае эллиптического параболоида (рис. 71) уравнение (25) интегрируется в квадратурах, и его решение выражается через элементарные функции. Рисунок 70 строится с помощью искусственного приема. Сначала интегрируется уравнение асимптотических линий поверхности $z = x^3 - 3xy^2$. Затем выясняется качественная картина строения сети линий кривизны. При этом используется следующее свойство, которое легко вывести из формулы Эйлера: если $K < 0$, то линии кривизны делят пополам углы между асимптотическими линиями в каждой точке поверхности.

2). Для того чтобы через каждую (не омбилическую) точку поверхности проходило одно решение уравнения (28), его левая часть должна удовлетворять условию Липшица; для этого достаточно потребовать, чтобы $S \in C^3$. Если $S \in C^2$, то можно гарантировать только непрерывность функций Φ_i (разумеется, не в омбилических точках).

3). Если поверхность принадлежит классу C^3 и не имеет омбилических точек, то сеть линий кривизны можно принять за координатную, вообще говоря, лишь локально, поскольку на поверхности в целом может возникнуть ситуация, аналогичная примеру из пункта 9* § 11.

4). Пусть $S \in C^n$ и пусть (α, β) — такие координаты на S , в которых координатная сеть образована линиями кривизны. Тогда радиус-вектор $\vec{X}$ текущей точки поверхности S как функция аргументов (α, β) имеет, вообще говоря, меньшую регулярность, чем C^n . Дело в том, что переход к координатам (α, β) от тех координат (u, v) , в которых $\vec{X}(u, v) \in C^n$, связан с решением уравнений (28), правые части которых имеют регулярность C^{n-2} . Опираясь на теоремы о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных [96], можно установить, что при подходящем выборе параметров α и β на линиях кривизны удастся для вектор-функции $\vec{X}(\alpha, \beta)$ обеспечить регулярность C^{n-2} ; случай $n = \infty$ здесь не исключается: при $n = \infty$ нужно считать, что и $n - 2 = \infty$. Останавливаться на этом более подробно мы не будем.

7°. В качестве приложения изложенного выше материала укажем теорему о площади сферического образа.

Теорема Гаусса. Пусть $\mathcal{D}$ — произвольная область на поверхности S класса C^2 , $\mathcal{D}^*$ — образ $\mathcal{D}$ на гауссовой сфере $\mathcal{G}$. Тогда площадь $\sigma(\mathcal{D}^*)$, подсчитанная с учетом кратности покрытия¹⁾ сферы, выражается формулой

$$\sigma(\mathcal{D}^*) = \int_{\mathcal{D}} |K| d\sigma, \quad (29)$$

где K — гауссова кривизна, $d\sigma$ — элемент площади на S .

Доказательство этой теоремы в общем виде мы приводить не будем; ограничимся лишь обсуждением двух частных случаев, позволяющих усвоить существо дела. Заметим прежде всего, что формулу (29) достаточно доказать для сколь угодно малой произвольной области (ввиду аддитивности площади и двойного интеграла).

А). Предположим, что поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$. Тогда (6) приводится к виду

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2} = \frac{\partial(z_x, z_y)}{\partial(x, y)} \cos^4 \theta, \quad (30)$$

где θ — угол между ортом нормали $\vec{n}$ и осью z (рис. 72). Предположим, что $K \neq 0$ в некоторой точке $X \in S$ и рассмотрим сферическое отображение в окрестности точки X .

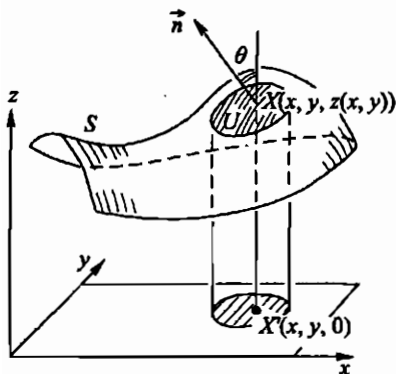


Рис. 72

Будем считать, что центр O гауссовой сферы $\mathcal{G}$ находится в начале координат. В «северном полюсе» $C(0, 0, 1)$ сферы $\mathcal{G}$ проведем к ней касательную плоскость ($z = 1$) и на этой плоскости введем декартовы прямоугольные координаты p, q , положительные полуоси которых направлены так же, как положительные полуоси x и y (см. рис. 73, которым мы будем пользоваться одновременно с рисунками 72 и 74). Кроме того, на плоскости

(p, q) будем использовать полярные координаты ρ, φ . Для дальнейшего полезно заметить, что угол φ представляет собой долготу на гауссовой

¹⁾ То есть, с учетом того, сколько точек поверхности отображается в точку сферы. На разных участках сферы эта кратность может быть различной.

сфере $\mathcal{G}$, а угол θ — широту на $\mathcal{G}$, отсчитываемую от северного полюса C .

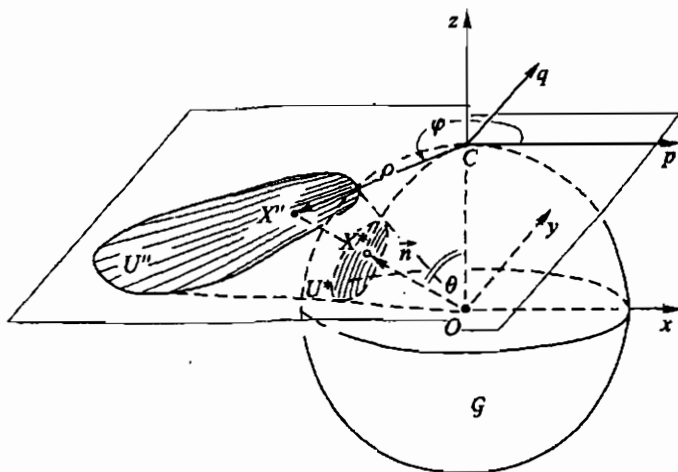


Рис. 73

Рассмотрим вспомогательное отображение

$$p = -z_x(x, y), \quad q = -z_y(x, y), \quad (31)$$

которое точке $X'(x, y, 0)$ ставит в соответствие точку $X''(p, q, 1)$; его называют *нормальным отображением* из плоскости (x, y) в плоскость (p, q) (определяемым заданной поверхностью S , рис. 72). Как мы знаем,

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \cdot \{-z_x, -z_y, 1\} = \frac{\{p, q, 1\}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \quad (32)$$

Из (32) следует, что сферический образ X^* точки $X(x, y, z(x, y))$ есть не что иное, как центральная проекция точки X'' на сферу $\mathcal{G}$ из ее центра O (рис. 73).

Итак, сферическое отображение представляется в виде суперпозиции трех отображений:

$$X \rightarrow X' \rightarrow X'' \rightarrow X^*. \quad (33)$$

Поскольку $K \neq 0$, то $\frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} \neq 0$ (см. (30)); значит, у точки X' найдется окрестность, которая отображается на плоскость (p, q) взаимно однозначно. Вместе с тем, у точки X найдется окрестность $U \subset S$, которая взаимно однозначно отображается на $\mathcal{G}$ (см. рис. 72 и рис. 73). Сферический образ U обозначим U^* . Найдем площадь U^* . Элемент площади $d\sigma^*$ сферы $\mathcal{G}$ запишем в координатах (φ, θ) :

$$d\sigma^* = \sin \theta \, d\varphi \, d\theta.$$

Заметим, что

$$\rho = CX'' = \operatorname{tg} \theta$$

(см. рис. 73 и рис. 74). Поэтому $d\rho = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$, откуда

$$d\sigma^* = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (\cos \theta d\varphi) (\cos^2 \theta d\rho) = \cos^3 \theta d\sigma_{pq}, \quad (34)$$

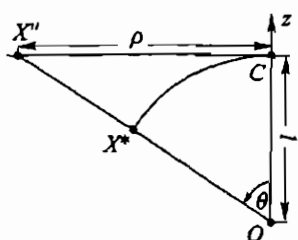


Рис. 74

где $d\sigma_{pq} = \rho d\rho d\varphi$ — элемент площади на плоскости (p, q) . С другой стороны, элемент площади поверхности S связан с элементом площади $d\sigma_{xy}$ ее проекции на плоскость $z = 0$ известной формулой:

$$d\sigma_{xy} = \cos \theta d\sigma. \quad (35)$$

При отображении $X' \rightarrow X''$, задаваемом формулами (31), имеем

$$d\sigma_{pq} = \left| \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} \right| \cdot d\sigma_{xy} = \left| \frac{\partial(z_x, z_y)}{\partial(x, y)} \right| \cdot d\sigma_{xy}. \quad (36)$$

Из (33)–(36) с учетом формулы (30) находим

$$d\sigma^* = \left| \frac{\partial(z_x, z_y)}{\partial(x, y)} \right| \cdot \cos^4 \theta d\sigma = |K| d\sigma,$$

откуда ясно, что

$$\sigma(U^*) = \int_{U^*} d\sigma^* = \int_U \int |K| d\sigma. \quad (37)$$

Замечание. Пользуясь теоремами анализа об отображениях, можно доказать, что если U — множество тех точек поверхности, где $K = 0$, то не только правая, но и левая часть равенства (37) равны нулю.

Б). Теперь предположим, что $S \in C^3$, $K \neq 0$ и что в области $\mathcal{D} \subset S$ можно ввести координаты (α, β) , в которых координатные линии являются линиями кривизны. Пусть $\bar{\mathcal{D}}$ — прообраз области $\mathcal{D}$ на плоскости параметров (α, β) .

Вектор-функция $\vec{n} = \vec{n}(\alpha, \beta)$, определенная в $\bar{\mathcal{D}}$, задает сферический образ $\mathcal{D}^*$ области $\mathcal{D}$ (рис. 75), причем

$$\sigma(\mathcal{D}^*) = \int_{\bar{\mathcal{D}}} |\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta| d\alpha d\beta. \quad (38)$$

Вследствие теоремы Родрига имеем:

$$\vec{n}_\alpha = -k_1 \vec{\mathcal{X}}_\alpha, \quad \vec{n}_\beta = -k_2 \vec{\mathcal{X}}_\beta. \quad (39)$$

Напомним, что

$$K = k_1 k_2, \quad d\sigma = |\vec{x}_\alpha \times \vec{x}_\beta| d\alpha d\beta. \quad (40)$$

Подставив (39) и (40) в (38), получаем (29).

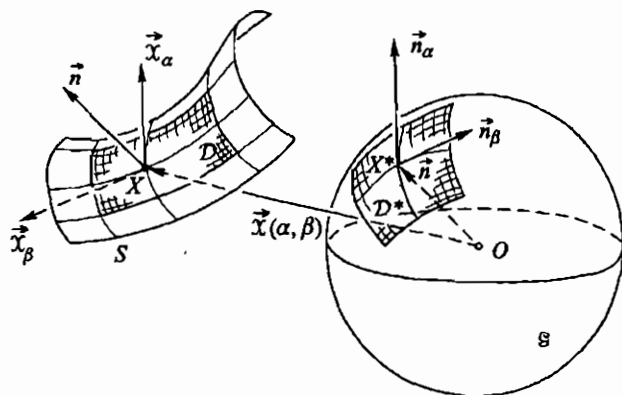


Рис. 75

Замечание. Главные кривизны k_i непрерывны на S , $k_i \neq 0$, поскольку $K \neq 0$; далее, согласно замечанию 4) предыдущего пункта $\vec{x}(\alpha, \beta) \in C^1$; таким образом, $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$ непрерывны, а $|\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta| \neq 0$. Поэтому применение формулы (38) для вычисления площади $\sigma(D^*)$ законно. В случае $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$ применение формулы (38) потребовало бы дополнительного обоснования.

8*. Пусть U — переменная окрестность точки X на S , а U^* — ее сферический образ. Формула (29) позволяет определить модуль гауссовой кривизны как предел отношения площадей $\sigma(U^*)$ и $\sigma(U)$, когда область U стягивается к точке X :

$$|K(X)| = \lim_{U \rightarrow X} \frac{\sigma(U^*)}{\sigma(U)}. \quad (41)$$

Для поверхности класса C^2 равенство (41) следует из (29) и теоремы о среднем для двойного интеграла. С обобщением понятия гауссовой кривизны и теоремы Гаусса на случай поверхности меньшей регулярности, чем C^2 , читатель может ознакомиться по книгам [2] и [92].

9*. Потребности промышленного производства и развитие вычислительной техники привели к созданию новой ветви науки — вычислительной геометрии. В ней есть разделы, связанные с теорией поверхностей, но в данной книге эта проблематика совсем не затронута. Интересующемуся читателю можно порекомендовать [17] и [120]. В этой связи см. также [40] и [57].

§ 13*. Развертывающиеся и минимальные поверхности

1°. Цель этого параграфа — краткое знакомство с классами поверхностей, которые выделяются условиями $K = 0$ и $H = 0$. Чтобы не отвлекать сейчас внимание на вопросы, связанные с общим определением поверхности (см. ниже § 15), будем считать, что речь идет об элементарных поверхностях.

2°. Определение. Поверхность класса C^2 , во всех точках которой $K = 0$, называется *развертывающейся*.

Название «развертывающаяся» связано с тем, что каждый достаточно малый кусок такой поверхности можно деформировать посредством изгибания (т.е. с сохранением длин всех линий) в кусок плоскости («развернуть» на плоскость). Благодаря такому свойству развертывающиеся поверхности находят важные применения в технике, поскольку их удобно изготавливать из листового материала (путем надлежащего изгибания плоских листов). Возможность изгибания развертывающейся поверхности на плоскость мы доказывать не будем; вместо этого в § 22 доказано аналогичное, но более слабое утверждение.

Примерами развертывающихся поверхностей могут служить цилиндрические и конические поверхности (рис. 76 и рис. 77); подсчет их гауссовой кривизны читатель может провести в качестве самостоятельного упражнения.



Рис. 76

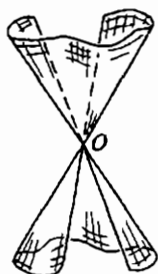


Рис. 77

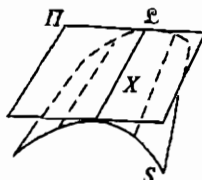


Рис. 78

Теорема 1. Через произвольную точку X на развертывающейся поверхности S проходит прямолинейная образующая L . Касательная плоскость, проведенная в точке X , касается поверхности S вдоль всей образующей L (рис. 78).

Замечание. Для того чтобы упростить доказательство, будем предполагать, что $S \in C^5$, $H \neq 0$ на S . В действительности теорема 1 справедлива при весьма слабых условиях регулярности. Можно даже не требовать существования гауссовой кривизны. Достаточно предпо-

ложить, что $S \in C^1$, а ее сферический образ S^* (см., например, рис. 79) имеет меру нуль [92, гл. IX].

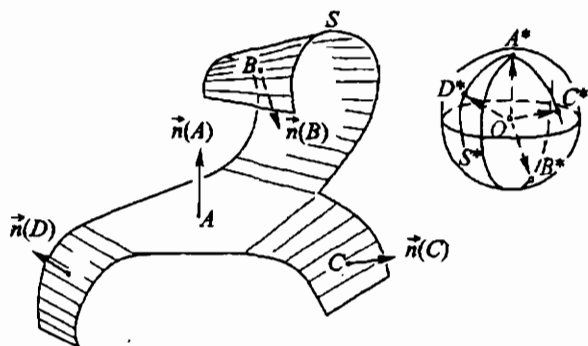


Рис. 79

Доказательство теоремы 1. Пусть $S \in C^5$, $K = k_1 k_2 = 0$, $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \neq 0$. Тогда в произвольной точке $X \in S$ одна из главных кривых k_i отлична от нуля, а другая — равна нулю; пусть, например,

$$k_1 \neq 0, \quad k_2 = 0 \quad (1)$$

в точке X (а значит, и в ее окрестности). Сделанные предположения позволяют в некоторой окрестности точки X принять сеть линий кривизны за сеть криволинейных координат (α, β) ; в этих координатах $\vec{X} = \vec{X}(\alpha, \beta) \in C^3$ (см. выше § 12, п. 6*). Для дальнейшего важно, что $\vec{n} = \frac{\vec{X}_\alpha \times \vec{X}_\beta}{|\vec{X}_\alpha \times \vec{X}_\beta|} \in C^2$, и потому

$$(\vec{n}_\alpha)_\beta = (\vec{n}_\beta)_\alpha. \quad (2)$$

Докажем, что линия $\alpha = \text{const}$ — прямая. Поскольку ее нормальная кривизна $k_n = k_2$ заведомо равна нулю, достаточно проверить, что равна нулю ее геодезическая кривизна k_g . Напомним (см. формулу (4) из § 10), что

$$k_g = (\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{\tau}_s), \quad (3)$$

где $\vec{\tau}$ — орт касательной, s — натуральный параметр рассматриваемой линии. В данном случае

$$\vec{\tau} = \frac{1}{|\vec{X}_\beta|} \vec{X}_\beta = \frac{1}{\sqrt{G}} \vec{X}_\beta, \quad (4)$$

$ds = \sqrt{G} d\beta$, так что

$$\vec{\tau}_s = \frac{d\vec{\tau}}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \vec{X}_\beta \right)_\beta = \frac{1}{G} \vec{X}_{\beta\beta} - \frac{G_\beta}{2G^2} \vec{X}_\beta. \quad (5)$$

Подставив (4) и (5) в (3), получим выражение

$$k_g = G^{-\frac{1}{2}}(\vec{n}, \vec{X}_\beta, \vec{X}_{\beta\beta}). \quad (6)$$

Векторы $\vec{n}$, $\vec{X}_\alpha$ и $\vec{X}_\beta$ попарно ортогональны, поэтому достаточно показать, что

$$(\vec{X}_\alpha, \vec{X}_{\beta\beta}) = 0. \quad (7)$$

Тем самым будет установлено, что вектор $\vec{X}_{\beta\beta}$ лежит в плоскости векторов $\vec{n}$ и $\vec{X}_\beta$, а правая часть равенства (6) равна нулю.

Докажем (7). Вследствие (1) и теоремы Родрига

$$\vec{n}_\alpha = -k_1 \vec{X}_\alpha, \quad \vec{n}_\beta = \vec{\theta}, \quad (8)$$

где $\vec{\theta}$ — нулевой вектор. Из (2) и (8) имеем:

$$(\vec{n}_\alpha)_\beta = (-k_1 \vec{X}_\alpha)_\beta = k_{1\beta} \vec{X}_\alpha - k_1 \vec{X}_{\alpha\beta} = (\vec{n}_\beta)_\alpha = \vec{\theta}. \quad (9)$$

Умножив (9) скалярно на $\vec{X}_\beta$ и учитывая, что $\vec{X}_\alpha \perp \vec{X}_\beta$ и $k_1 \neq 0$, находим

$$(\vec{X}_\beta, \vec{X}_{\alpha\beta}) = 0. \quad (10)$$

Далее, дифференцируя по β тождество $(\vec{X}_\alpha, \vec{X}_\beta) = 0$, получаем

$$(\vec{X}_\alpha, \vec{X}_\beta)_\beta = (\vec{X}_{\alpha\beta}, \vec{X}_\beta) + (\vec{X}_\alpha, \vec{X}_{\beta\beta}) = 0. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует (7). Таким образом, β -линия является прямой, образующей. Вдоль нее вектор $\vec{n}$ постоянен вследствие (8), значит, постоянна и касательная плоскость.

Итак, при сделанных допущениях теорема доказана. Она показывает, что развертывающиеся поверхности локально являются линейчатыми (см. § 6, п. 3°, пример 9).

С развертывающимися поверхностями мы еще встретимся в § 19 (пп. 12° и 14*), а также в гл. 6 (§ 32, п. 14°, и § 33, пп. 4°–7°).

3°. **Определение.** Поверхность класса C^2 , во всех точках которой $H = 0$, называется *минимальной*.

Как увидим в дальнейшем, поверхности нулевой средней кривизны связаны с задачей о минимуме площади; поэтому их называют «минимальными».

Теорема 2. Пусть дана поверхность S класса C^2 конечной площади $\sigma(S)$, ограниченная пространственной кривой L . Пусть известно, что S имеет наименьшую площадь среди всех поверхностей с данной границей L . Тогда $H = 0$ во всех точках поверхности S .

Замечание. Нужно считать, что S задана уравнением $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ и что $|\vec{X}_u \times \vec{X}_v| \neq 0$ в ограниченной области $\mathfrak{M}$, а вектор-функция $\vec{X}$ непрерывна в замыкании этой области. Когда точка (u, v)

пробегают границу области $\mathfrak{M}$, конец вектора $\vec{X}$ описывает в пространстве линию $\mathcal{L}$. Никаких дополнительных условий регулярности на $\mathcal{L}$ не накладывается.

Доказательство теоремы 2. Предположим противное: пусть $H \neq 0$ в точке $X_0(u_0, v_0)$. Направление нормали $\vec{n}$ в точке X_0 выберем так, что $H(u_0, v_0) > 0$. Тогда вследствие непрерывности H найдется окрестность U точки X_0 , в которой $H > 0$. Прообраз этой окрестности на плоскости параметров $\{u, v\}$ обозначим через U' . Пусть U столь мала, что замыкание области U' находится внутри $\mathfrak{M}$. Коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности S будем, как обычно, обозначать E, F, G, L, M, N .

Выберем вспомогательную функцию $f(u, v) \in C^1$ так, чтобы было $f(u, v) > 0$ внутри U' , $f(u, v) = 0$ на границе U' и вне U' (рис. 80).

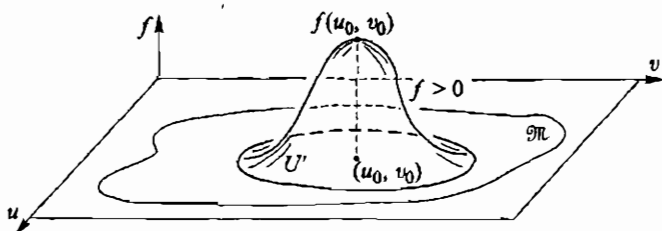


Рис. 80

Рассмотрим семейство поверхностей S_ε , зависящих от параметра ε и задаваемых уравнением

$$\vec{Y} = \vec{Y}(u, v; \varepsilon) = \vec{X}(u, v) + \varepsilon f(u, v) \vec{n}(u, v), \quad (12)$$

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$; имеем $|\vec{Y}_u \times \vec{Y}_v| \neq 0$, если ε_0 достаточно мало. Поверхность S совпадает с S_ε вне U , поэтому S и S_ε имеют общую границу $\mathcal{L}$ (рис. 81). Найдем $\sigma(S_\varepsilon)$. Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_ε обозначим $E_\varepsilon, F_\varepsilon, G_\varepsilon$. Дифференцируя (12), получаем

$$\begin{aligned} \vec{Y}_u &= \vec{X}_u + \varepsilon f_u \vec{n} + \varepsilon f \vec{n}_u, \\ \vec{Y}_v &= \vec{X}_v + \varepsilon f_v \vec{n} + \varepsilon f \vec{n}_v. \end{aligned} \quad (13)$$

Вследствие (13) имеем:

$$\begin{aligned} E_\varepsilon &= E - 2\varepsilon f L + \varepsilon^2 f_u^2 + \varepsilon^2 f^2 (\vec{n}_u, \vec{n}_u), \\ F_\varepsilon &= F - 2\varepsilon f M + \varepsilon^2 f_u f_v + \varepsilon^2 f^2 (\vec{n}_u, \vec{n}_v), \\ G_\varepsilon &= G - 2\varepsilon f N + \varepsilon^2 f_v^2 + \varepsilon^2 f^2 (\vec{n}_v, \vec{n}_v). \end{aligned}$$

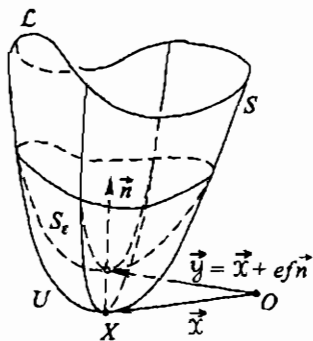


Рис. 81

Отсюда

$$\begin{aligned}\sigma(S_\varepsilon) &= \iint_M \sqrt{E_\varepsilon G_\varepsilon - F_\varepsilon^2} \, du \, dv = \\ &= \iint_M \sqrt{(EG - F^2) - 2f\varepsilon(EN - 2MF + GL) + \varepsilon^2 f^2 \Phi} \, du \, dv, \quad (14)\end{aligned}$$

где $\Phi = \Phi(u, v)$ — некоторая функция, ограниченная в U' . Разложив подынтегральное выражение в (14) по степеням ε и воспользовавшись формулой (7) § 12 и тем, что $f = 0$ вне U' , находим

$$\sigma(S_\varepsilon) = \sigma(S) - 2\varepsilon \iint_U f H \, d\sigma + O(\varepsilon^2). \quad (15)$$

Вспомним теперь, что $f > 0$, $H > 0$ для точек области U . Поэтому из (15) ясно, что $\sigma(S_\varepsilon) < \sigma(S)$ при достаточно малом ε . Итак, неравенство $H \neq 0$ невозможно. Теорема 2 доказана.

Примером минимальной поверхности может служить прямой геликоид (см. выше § 6, п. 3°, пример 6; подсчет его средней кривизны читатель может проделать самостоятельно в качестве несложного упражнения).

Теория минимальных поверхностей является одним из тех разделов геометрии, которые интенсивно разрабатываются в настоящее время. С основами теории минимальных поверхностей читатель может ознакомиться по книгам [7, 56, 82], а с историей вопроса, его современным состоянием и проблематикой — по обзорной статье [85] и книгам [58, 68].

4°. Теорема 3. Если поверхность S — развертывающаяся и минимальная, то она плоская.

Доказательство. Если $H = K = 0$, то $k_1 = k_2 = 0$, значит, все точки поверхности — омбилические, и $d\vec{n} = \vec{\theta}$ тождественно на S вследствие теоремы Родрига. Следовательно, вектор $\vec{n}$ — постоянный, и теорема 3 вытекает из теоремы пункта 3* § 2.

§ 14. Ортонормированный сопровождающий трехгранник

1°. В этом параграфе введены некоторые обозначения, установлены вспомогательные предложения и формулы, которые позволяют упростить выкладки в дальнейших главах.

2°. Пусть на поверхности S сеть (u, v) ортогональна ($F(u, v) = 0$ тождественно). Положим

$$A(u, v) = \sqrt{E}, \quad B(u, v) = \sqrt{G}.$$

Тогда

$$ds^2 = A^2(u, v) du^2 + B^2(u, v) dv^2.$$

Пусть далее $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ — орты касательных к u -линии и v -линии соответственно. Легко видеть, что

$$\vec{\tau}_1 = \frac{1}{A} \vec{x}_u, \quad \vec{\tau}_2 = \frac{1}{B} \vec{x}_v, \quad (1)$$

поскольку $A = \sqrt{(\vec{x}_u, \vec{x}_u)} = |\vec{x}_u|$, $B = |\vec{x}_v|$.

Для каждой точки поверхности тройка векторов $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$, $\vec{n}$ образует ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$ (рис. 82). Посмотрим, как поворачивается трехгранник $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$, $\vec{n}$ при смещении по S в различных направлениях. Сначала изменяем u , сохраняя v постоянным. Аналогично известным из теории кривых формулам Френе [31, 99] получим соотношения вида

$$\begin{aligned} (\vec{\tau}_1)_u &= a_0 \vec{\tau}_2 + a_1 \vec{n}, \\ (\vec{\tau}_2)_u &= -a_0 \vec{\tau}_1 + a_2 \vec{n}, \\ \vec{n}_u &= -a_1 \vec{\tau}_1 - a_2 \vec{\tau}_2. \end{aligned} \quad (2)$$

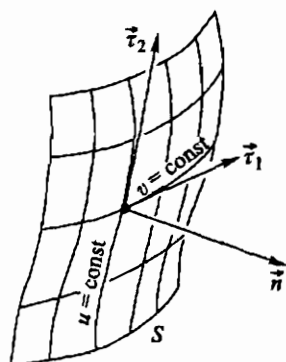


Рис. 82

Здесь $a_i = a_i(u, v)$ — некоторые коэффициенты (они будут вычислены ниже). Косая симметрия коэффициентов формул (2) следует из ортонормированности трехгранника $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$, $\vec{n}$. Так, например, коэффициент при $\vec{\tau}_1$ в первой из формул (2) равен скалярному произведению $\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial u}, \vec{\tau}_1 \right) = \frac{1}{2} (\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_1)_u = 0$. Далее,

$$\left(\frac{\partial \tau_2}{\partial u}, \vec{\tau}_1 \right) = - \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial u}, \vec{\tau}_2 \right), \text{ поскольку } (\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) = 0 \text{ и т. п.}$$

Если менять v (при $u = \text{const}$), то получим аналогичные формулы, но с другими коэффициентами $b_i = b_i(u, v)$:

$$\begin{aligned} (\vec{\tau}_1)_v &= b_0 \vec{\tau}_2 + b_1 \vec{n}, \\ (\vec{\tau}_2)_v &= -b_0 \vec{\tau}_1 + b_2 \vec{n}, \\ \vec{n}_v &= -b_1 \vec{\tau}_1 - b_2 \vec{\tau}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что формулы, выражающие производные векторов трехгранника через сами эти векторы, часто называют *дериационными формулами*.

Пусть теперь происходит смещение по некоторому направлению $\{du, dv\}$. Используя (2), (3) и вводя обозначения

$$\Omega_j = a_j du + b_j dv, \quad j = 0, 1, 2,$$

мы можем написать следующие разложения дифференциалов $d\vec{\tau}_i$ и $d\vec{n}$ по базису $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{n}$:

$$\begin{aligned} d\vec{\tau}_1 &= \vec{\tau}_2 \Omega_0 + \vec{n} \Omega_1, \\ d\vec{\tau}_2 &= -\vec{\tau}_1 \Omega_0 + \vec{n} \Omega_2, \\ d\vec{n} &= -\vec{\tau}_1 \Omega_1 - \vec{\tau}_2 \Omega_2 \end{aligned} \quad (4)$$

(см. рис. 83, а). Выражения вида $\Omega = a(u, v)du + b(u, v)dv$ называют *линейными дифференциальными формами*. Рассмотрим геометрический смысл дифференциальных форм Ω_j , входящих в (4).

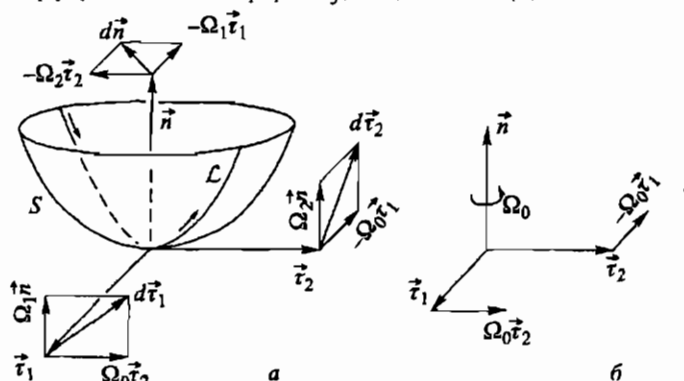


Рис. 83

Если $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, то триэдр $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{n}$ вращается вокруг вектора $\vec{n}$ с мгновенной угловой скоростью, пропорциональной Ω_0 (рис. 83, б). В общем случае (рис. 83, а) Ω_0 характеризует компоненту вращения триэдра вокруг нормали, Ω_1 и Ω_2 характеризуют компоненты вращения вокруг векторов $\vec{\tau}_2$ и $\vec{\tau}_1$ соответственно.

3°. Выразим коэффициенты форм Ω_j через $A = \sqrt{E}$, $B = \sqrt{G}$, L , M , N . (Вместе с тем, будут найдены коэффициенты дериационных формул (2) и (3)). Из (4), учитывая (1), имеем

$$\Omega_1 = \left(d \frac{\vec{x}_u}{A}, \vec{n} \right) = \frac{1}{A} (\vec{x}_{uu} du + \vec{x}_{uv} dv, \vec{n}),$$

так что

$$\Omega_1 = (d\vec{\tau}_1, \vec{n}) = \frac{L}{A} du + \frac{M}{A} dv. \quad (5)$$

Аналогично

$$\Omega_2 = (d\vec{\tau}_2, \vec{n}) = \frac{M}{B} du + \frac{N}{B} dv. \quad (6)$$

Займемся теперь подсчетом Ω_0 . Из (1) и (4) имеем

$$\Omega_0 = \left(\frac{\vec{x}_v}{B}, d \frac{\vec{x}_u}{A} \right) = \frac{1}{B} \left(\vec{x}_v, \left(d \frac{1}{A} \right) \vec{x}_u + \frac{1}{A} (\vec{x}_{uu} du + \vec{x}_{uv} dv) \right) =$$

$$= \frac{1}{AB} \{ (\vec{x}_v, \vec{x}_{uu}) du + (\vec{x}_v, \vec{x}_{uv}) dv \}. \quad (7)$$

Заметим, что

$$(\vec{x}_v, \vec{x}_{uv}) = \frac{1}{2} G_u = BB_u, \quad (8)$$

далее

$$(\vec{x}_v, \vec{x}_{uu}) = -(\vec{x}_u, \vec{x}_{uv}), \quad (9)$$

поскольку $F = 0$ и

$$F_u = (\vec{x}_u, \vec{x}_v)_u = (\vec{x}_{uu}, \vec{x}_v) + (\vec{x}_u, \vec{x}_{uv}) = 0;$$

наконец,

$$(\vec{x}_u, \vec{x}_{uv}) = \frac{1}{2} E_v = AA_v. \quad (10)$$

Подставив (8)–(10) в (7), находим

$$\Omega_0 = (d\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) = -\frac{A_v}{B} du + \frac{B_u}{A} dv. \quad (11)$$

Обратим внимание на то, что Ω_0 выражается через коэффициенты одной лишь первой квадратичной формы и их частные производные первого порядка.

4*. Проиллюстрируем примерами формулы предыдущего пункта.

1). Для декартовых координат на евклидовой плоскости $\Omega_0 = \Omega_1 = \Omega_2 = 0$ (см. рис. 84; в этом случае $L = M = N = 0$, $A = B = \text{const}$).

2). Пусть S — цилиндрическая поверхность, $u = \text{const}$ — ее прямолинейные образующие, u -линии им ортогональны (рис. 85) и пусть в качестве u и v взяты натуральные параметры двух каких-либо линий $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$, соответственно. Тогда координатные линии одного семейства высекают дуги равной длины на координатных линиях другого семейства (рис. 86); отсюда легко вывести, что $A(u, v) = B(u, v) = 1$, и потому (см. (11)) $\Omega_0 = 0$. Ясно, далее, что $N = 0$, поскольку v -линии — прямые. Используя теорему Родрига или пример 2) из п. 3° § 12, нетрудно проверить, что сеть (u, v) состоит из линий кривизны, поэтому $M = 0$. Следовательно, $\Omega_2 = 0$ (см. (6)). Итак, лишь форма Ω_1 может быть отлична от нуля. При смещении вдоль прямолинейной образующей она тоже обращается в нуль

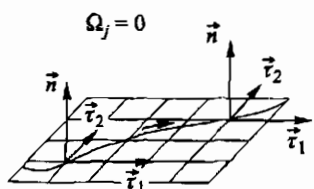


Рис. 84

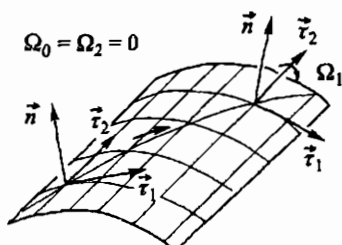


Рис. 85

($du = 0$), а при смещении по другим направлениям $\Omega_1 \neq 0$, если только нормальная кривизна u -линии отлична от нуля (см. рис. 85, из которого сразу видно, что триэдр вращается именно вокруг $\vec{\tau}_2$).

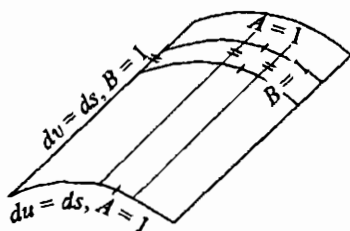


Рис. 86

3). Если в предыдущем примере поменять ролями u и v , то получим $\Omega_0 = \Omega_1 = 0$, $\Omega_2 \neq 0$ (рис. 87).

4). Пусть (u, v) — криволинейные ортогональные координаты на евклидовой плоскости. Тогда $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, поскольку $L = M = N = 0$ (равны нулю кривизны всех нормальных сечений). Форма Ω_0 , вообще говоря, отлична от нуля. Из рис. 88 видно, что она

характеризует искривленность линий координатной сети.

Забегая вперед, отметим, что хотя L , M и N в формулу (11) не входят, но Ω_0 связана с искривленностью самой поверхности; так, например, если $\Omega_0 = 0$ во всех точках по всем направлениям, то $K = 0$ на всей поверхности (см. ниже, § 25, п. 6°).

5°. В предыдущих пунктах предполагалось, что сеть (u, v) ортогональна. Покажем, как этого добиться.

Для того чтобы не отвлекать внимание на вопросы, связанные с регулярностью, предположим, что поверхность и линия, о которых идет речь ниже, принадлежат классу C^∞ . Тогда и остальные величины, встречающиеся в этом пункте, имеют регулярность C^∞ .

Лемма. Пусть через точку $X_0(u_0, v_0)$ на поверхности S проходит кривая ℓ . Тогда в некоторой окрестности U точки X_0 можно ввести ортогональные криволинейные координаты $\tilde{u}, \tilde{v}$ так, чтобы линия ℓ (точнее, $\ell \cap U$) имела в них уравнение $\tilde{v} = 0$.

Доказательство. Пусть u, v — какие-нибудь координаты на S и пусть вблизи точки X_0 линия ℓ имеет уравнение вида $v = \varphi(u)$ (случай $u = u(v)$ рассматривается аналогично). Рассмотрим семейство линий

$$v = \varphi(u) + c. \quad (12)$$

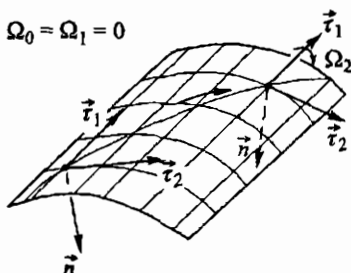


Рис. 87

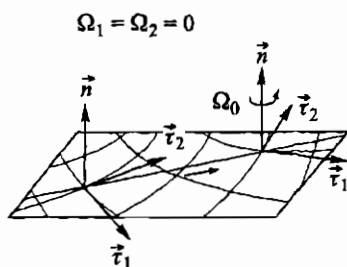


Рис. 88

Найдем на S ортогональные траектории семейства (12). Воспользуемся для этого формулами § 9. Пусть $\{du_1, dv_1\}$ — смещение вдоль линии (12), $\{du, dv\}$ — смещение в направлении искомой ортогональной траектории. Запишем условие ортогональности этих направлений:

$$E du du_1 + F (du dv_1 + dv du_1) + G dv dv_1 = 0. \quad (13)$$

Учитывая, что $dv_1 = \varphi_u du_1$, $du_1 \neq 0$, из (13) получаем дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства (12):

$$(E + \varphi_u F) du + (F + \varphi_u G) dv = 0. \quad (14)$$

Суммы, стоящие в (14) в скобках, не обращаются в нуль одновременно, так как в противном случае было бы $E : F = -\varphi_u = F : G$, что противоречит неравенству $\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} > 0$. Поэтому (и в силу регулярности S и ℓ) к (14) применима теорема существования решений обыкновенного дифференциального уравнения [96, 110], согласно которой через каждую точку (u, v) (в которой определены E, F, G и φ_u) проходит решение уравнения (14). Итак, некоторая окрестность точки

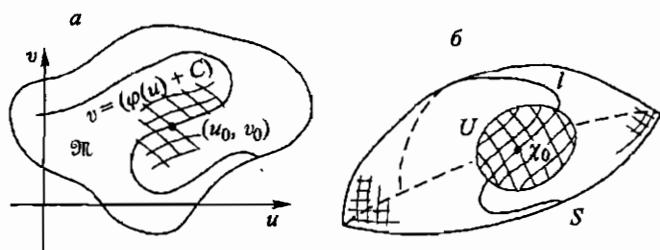


Рис. 89

X_0 покрыта сетью, образованной линиями (12) и их ортогональными траекториями (рис. 89, б). Заметим, что линии (12) и (14) ортогональны на поверхности S , а на плоскости параметров (u, v) они не обязаны быть ортогональными (см. рис. 89, а, на котором буквой $\mathcal{M}$ обозначена область задания поверхности S).

Теперь нужно ввести параметры на линиях построенной сети. Можно считать, например, что $\tilde{u}$ — натуральный параметр на ℓ , $\tilde{v}$ — натуральный параметр на ортогональной траектории, проходящей через X_0 . Тогда для каждой точки $X \in U$ определятся значения новых координат $\tilde{u}, \tilde{v}$ (см. рис. 90, а также п. 1° § 7).

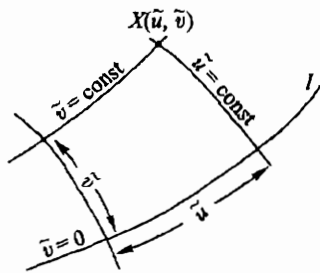


Рис. 90

Вследствие специального выбора параметров $|\vec{X}_{\tilde{u}}| = |\vec{X}_{\tilde{v}}| \approx 1$ в точке X_0 ; в силу построения сети $\vec{X}_{\tilde{u}} \perp \vec{X}_{\tilde{v}}$; поэтому

$$|\vec{X}_{\tilde{u}} \times \vec{X}_{\tilde{v}}| \neq 0 \quad (15)$$

в точке X_0 , а по непрерывности — и в некоторой ее окрестности. Из (15) и условия

$$|\vec{X}_u \times \vec{X}_v| \neq 0$$

(которое мы, как всегда, предполагаем выполненным), следует, что

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \neq 0$$

(см. в связи с этим формулу (6) из § 7). Используя теоремы о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных и параметров [96], можно установить регулярность функций $u = u(\tilde{u}, \tilde{v})$, $v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$. Приняв точку X_0 за начало отсчета натурального параметра $\tilde{v}$, добьемся соблюдения равенства $\tilde{v} = 0$ на линии ℓ , чем и завершится доказательство.

6*. З а м е ч а н и я. 1). Иногда бывает важно обеспечить, помимо требований леммы, еще положительность якобиана $\Delta = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}$. Для этого достаточно (если $\Delta < 0$) изменить направление возрастания одного из параметров $\tilde{u}$ или $\tilde{v}$.

2). В п. 5° в доказательстве леммы выведено и использовано уравнение ортогональных траекторий (14) для семейства линий (12). Другая постановка задачи об ортогональных траекториях была рассмотрена в п. 10* § 9. Там получено уравнение (27); оно определяет ортогональные траектории для такого семейства линий на поверхности, которое задано дифференциальным уравнением (21) из § 9.

7°. Обратим внимание на то, что в доказательстве леммы участвуют коэффициенты только первой квадратичной формы поверхности. Это обстоятельство будет существенно использовано в четвертой главе.

Глава 3

ПОВЕРХНОСТЬ В ЦЕЛОМ. ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ДВУМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

§ 15. Общее понятие поверхности

1°. В предыдущих главах мы изучали поверхности без самопересечений. Такое ограничение вызвано вовсе не существом дела; оно было введено лишь для наглядности изложения и упрощения определений. Покажем, как распространить изложенные выше факты на случай поверхностей с самопересечением. Начнем с примера.

Пример. Рассмотрим круглый цилиндр

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$

и наряду с ним поверхность

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = t, \quad (2)$$

где

$$-\varepsilon < \varphi < 2\pi + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (3)$$

Геометрическое место точек пространства, координаты которых определяются формулами (2)–(3), очевидно, совпадает с цилиндром (1). Вместе с тем, можно условиться, что разным значениям координат (φ, t) из полосы (3) соответствуют разные точки поверхности (2). Тогда каждую из точек пространства $\mathbb{R}^3$, расположенных на цилиндре (1) в области $|\varphi| < \varepsilon$, нужно считать за две разных точки поверхности (2). При этом формулы (2)–(3) можно истолковать следующим образом: из плоской полосы свернут круглый цилиндр, так что края полосы наложились друг на друга; однако изготовление цилиндра (1) еще не закончено, края свернутой полосы друг с другом не склеены (рис. 91).

На поверхности (2) окрестность произвольной точки определяется согласно п. 4° § 6; достаточно малая окрестность представляет собой элементарную поверхность — часть цилиндра (1). Поэтому локальные свойства (касательные плоскости, кривизны нормальных сечений и т. д.) у поверхностей (1) и (2) одинаковы. Однако в целом поверхности (1) и (2) не тождественны и обладают разными свойствами. Так, например, кратчайший путь по поверхности (2) из точки $X \left\{ \varphi = \frac{\varepsilon}{2}, t = 0 \right\}$

в точку $Y \left\{ \varphi = 2\pi - \frac{\varepsilon}{2}, t = 0 \right\}$ ведет в обход цилиндра и имеет длину $(2\pi - \varepsilon)r$ (рис. 91); между тем на поверхности (1) те же точки (точнее, точки, занимающие такие же положения в пространстве $\mathbb{R}^3$) соединяет дуга

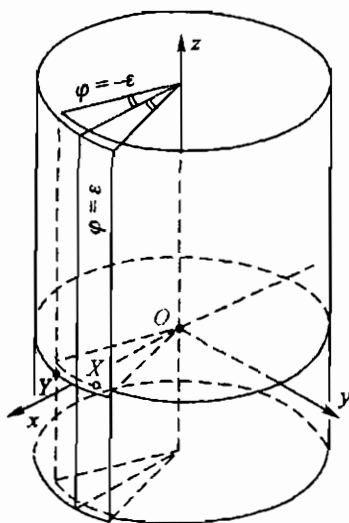


Рис. 91

$$z = 0, \quad |\varphi| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

длины εr .

2°. Пусть даны евклидовы пространства: k -мерное $\mathbb{R}^k$ и s -мерное $\mathbb{R}^s$. В них множества $V \subset \mathbb{R}^k$ и $W \subset \mathbb{R}^s$, и отображение $f: V \rightarrow W$. Образ Y точки X при отображении f обозначим, как обычно, $f(X)$. Если f рассматривается не на всем V , а на его подмножестве V_1 , то говорят: *имеется сужение отображения f на множество V_1* , — и пишут $f|_{V_1}$.

Применительно к f напомним определение непрерывности. Для этого нам понадобятся шаровы окрестности точек в евклидовых пространствах. Введем для них обозначения:

открытый шар в $\mathbb{R}^k$ с центром X и радиусом $\rho > 0$ обозначим $\mathcal{U}_\rho^k(X)$ (в $\mathbb{R}^s$ — аналогично).

Отображение f называется *непрерывным в точке $X_0 \in V$* , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ (зависящее от точки X_0 и от числа ε) такое, что для любой точки $X \in V \cap \mathcal{U}_\delta^k(X_0)$ ее образ $Y = f(X) \in W \cap \mathcal{U}_\varepsilon^s(Y_0)$, где $Y_0 = f(X_0)$.

Отображение f непрерывно на V , если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

Отображение $f: V \rightarrow W$ называется *биективным* или *взаимно однозначным* (или *биекцией*), если каждая точка $Y \in W$ является образом некоторой точки $X \in V$ и при этом $f(X_2) \neq f(X_1)$, если $X_2 \neq X_1$.

Для биективного отображения f определено обратное ему отображение $f^{-1}: W \rightarrow V$; каждой точке $Y \in W$ оно ставит в соответствие ее прообраз $X \in V$.

Определение. Биективное отображение $f: V \rightarrow W$ называется *гомеоморфным отображением* или *гомеоморфизмом*, если f непрерывно на V , а f^{-1} непрерывно на W .

Два множества V и W называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм одного из них на другое (какого именно на

какое — неважно, так как отображение, обратное гомеоморфизму, тоже является гомеоморфизмом).

Пример. Шар и куб в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфны. Для $n = 3$ это особенно хорошо видно, если совместить их центры.

Отображение $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ называется *локально гомеоморфным* (или *локальным гомеоморфизмом*), если у каждой точки $X \in \mathcal{V}$ есть окрестность $\mathcal{U}_\rho(X)$ (радиус которой ρ может зависеть от X) такая, что сужение отображения f на пересечение $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}_\rho(X)$ является гомеоморфизмом.

Иллюстрацией этого понятия может служить рис. 91: формула (2) задает локальный гомеоморфизм полосы (3) в $\mathbb{R}^2$ на множество (1) в $\mathbb{R}^3$.

3°. Пусть даны:

- трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с отмеченной в нем точкой O ;
- область $\mathcal{M}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$;
- непрерывная вектор-функция $\vec{X}$ с областью определения $\mathcal{M}$ и значениями в $\mathbb{R}^3$.

Тогда произвольной точке $Q \in \mathcal{M}$ ставится в соответствие точка $X \in \mathbb{R}^3$ согласно формуле

$$O\vec{X} = \vec{X}(Q). \quad (5)$$

Иначе говоря, дано непрерывное отображение области $\mathcal{M}$ в пространство $\mathbb{R}^3$. Символически

$$f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (6)$$

Если отображение (6) является локальным гомеоморфизмом, то говорят, что оно задает в $\mathbb{R}^3$ поверхность; обозначим ее буквой S . Точкой поверхности S называют всякую пару точек вида $\{Q, X\}$, где $Q \in \mathcal{M}$, $x \in \mathbb{R}^3$, X определяется согласно (5). Точку поверхности удобно обозначать одной буквой, например, $\{Q, X\} = Z$. Пусть Q_0 — точка области $\mathcal{M}$, V — какая-нибудь окрестность точки Q_0 в плоскости $\mathbb{R}^2$, $V \in \mathcal{M}$. Окрестностью точки $Z_0 = \{Q_0, X_0\}$ на поверхности S называется множество вида

$$\mathcal{E}\{Z = \{Q, X\}; Q \in V\},$$

т. е. множество тех точек поверхности, для которых $Q \in V$. Выбирая V по-разному, будем получать разные окрестности точки $Z \in S$.

Если вектор-функция $\vec{X}$ такова, что $\vec{X}(Q_1) \neq \vec{X}(Q_2)$ при $Q_1 \neq Q_2$, то отображение (6) называют *вложением* области $\mathcal{M}$ в пространство $\mathbb{R}^3$. В этом случае каждая точка $\{Q, X\} \in S$ однозначно определяется точкой $X = f(Q) \in \mathbb{R}^3$, и потому можно считать, что $S = f(\mathcal{M})$. Если сверх того область $\mathcal{M}$ односвязна, а вектор-функция $\vec{X}$ имеет регулярность C^n , $n \geq 1$, и удовлетворяет условию $|\vec{X}_u \times \vec{X}_v| \neq 0$, где u, v —

декартовы координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$, то мы получаем элементарную поверхность S класса C^n с параметрами u, v на ней (см. § 6, пп. 1°–2°).

Вспомним теперь, (см. выше, § 7) что на одной и той же элементарной поверхности можно по-разному вводить криволинейные координаты. Это значит, что разные вложения вида (6) могут задавать одну и ту же элементарную поверхность. Это обстоятельство должно быть отражено и в общем определении поверхности.

Пусть даны: область $\mathcal{M}_1 \subset \mathbb{R}^2$ и локально гомеоморфное отображение

$$f_1 : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (7)$$

Говорят, что отображения (6) и (7) задают одну и ту же поверхность S , если существует гомеоморфизм

$$g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1 \quad (8)$$

такой, что $f = f_1 \circ g$; иначе говоря

$$X = f(Q) = f_1[g(Q)] \quad (9)$$

для любой точки $Q \in \mathcal{M}$. Ясно, что в этом случае $f_1 = f \circ g^{-1}$, т. е.

$$X = f_1(\tilde{Q}) = f[g^{-1}(\tilde{Q})], \quad (10)$$

где $\tilde{Q} = g(Q) \in \mathcal{M}_1$. При этом считают, что пара $\{Q, X\}$ при отображении (6) и пара $\{\tilde{Q}, X\}$ при отображении (7) представляют собой одну и ту же точку поверхности S (рис. 92).

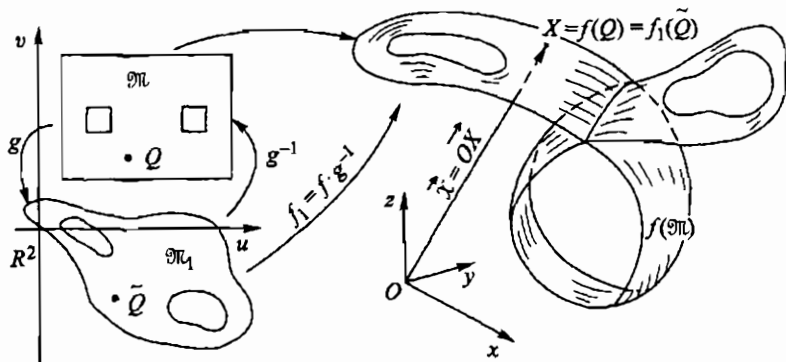


Рис. 92

Определение. Два отображения (6) и (7) условимся называть эквивалентными (символически $f \sim f_1$), если существует гомеоморфизм g вида (8), для которого соблюдается (9).

Из определения следует, что

а) если $f \sim f_1$, то $f_1 \sim f$ (вследствие (10));

б) $f \sim f$; в качестве g здесь нужно взять тождественное преобразование множества $\mathcal{M}$ ($g(Q) = Q$);

в) если $f \sim f_1$, $f_1 \sim f_2$, то $f \sim f_2$, поскольку суперпозиция гомеоморфизмов есть гомеоморфизм.

Свойства а)–в) показывают, что множество всевозможных локально гомеоморфных отображений различных областей $\mathcal{M}$ в пространство $\mathbb{R}^3$ распадается на попарно непересекающиеся подмножества (классы) эквивалентных отображений.

Определение. Поверхностью в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется класс эквивалентных локально гомеоморфных отображений вида (6).

Множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, являющихся образами точек области $\mathcal{M}$ при отображении (6), будем называть «носителем поверхности S ».

В примере в п. 1° носителем поверхности (2–3) служит цилиндр (1).

Множество $\mathcal{D}$ точек поверхности S называют областью, если областью является его прообраз в $\mathcal{M}$. Говорят, что область $\mathcal{D} \subset S$ односвязна, если односвязна соответствующая ей область в $\mathcal{M}$. Иногда бывает удобно область $\mathcal{D}$ рассматривать не как часть S , а как самостоятельную поверхность.

4°. Говорят, что отображение (6) задает поверхность класса C^n , $n \geq 1$, если вектор-функция $\vec{X}$ (см. (5)) принадлежит классу C^n в области $\mathcal{M}$ и удовлетворяет в этой области условию $|\vec{X}_u \times \vec{X}_v| \neq 0$. Здесь u, v — декартовы координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$; можно считать также, что u, v — криволинейные координаты в области $\mathcal{M}$, выражающиеся через декартовы как функции класса C^n с отличным от нуля якобианом. Рассматривая поверхности класса C^n , обычно считают, что отображения g , участвующие в определении эквивалентности, сами принадлежат классу C^n и имеют отличный от нуля якобиан; иногда дополнительно требуют положительности этого якобиана.

Поверхности класса C^1 называются гладкими. Впрочем, многие авторы называют гладкими поверхности класса C^∞ .

Замечание. Иногда заранее неизвестно, является ли непрерывное отображение (6) локально гомеоморфным. Тогда говорят, что оно определяет обобщенную поверхность. С такой ситуацией мы столкнемся в гл. 7 (§ 35 и § 39).

5°. Отображение $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется погружением, если оно локально гомеоморфно, т.е. если для каждой точки $Q \in \mathcal{M}$ найдется такая окрестность $V \in \mathcal{M}$, которая отображается на $f(V)$ гомеоморфно.

Используя условие $|\vec{X}_u \times \vec{X}_v| \neq 0$ и известную в математическом анализе теорему о неявных функциях [119], можно доказать, что в случае поверхности класса C^n , $n \geq 1$, отображение (6) является погружением. Отсюда следует, что на гладкой поверхности S достаточно малая окрестность U произвольной точки X является элементарной по-

верхностью. Это позволяет автоматически перенести на общий случай все локальные результаты, установленные в предыдущих параграфах. Определить понятие площади для произвольной области $D \subset S$ представляется читателю.

6°. Подход к определению поверхности, изложенный в пп. 3°–5°, по существу представляет собой параметрическое задание поверхности.

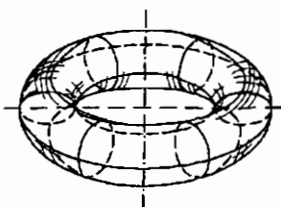


Рис. 93

Формулы (5) и (6) отличаются лишь символикой, а в (5) вместо $\vec{X}(Q)$ можно было бы писать $\vec{X}(u, v)$, считая, что u, v — координаты текущей точки $Q \in \mathcal{M}$. Отличие от § 6–7 состоит лишь в том, что здесь допускаются поверхности с самопересечениями и самоналожениями, а также нерегулярные поверхности. Однако можно доказать, что в схему, изложенную в пп. 3°–5°, не укла-

дываются, например, такие объекты, как сфера, эллипсоид, тор, хотя их принято считать поверхностями. (Напомним, что тором называется поверхность вращения окружности вокруг не пересекающей ее прямой, см. рис. 93). Указанное обстоятельство заставляет расширить определение, сформулированное в п. 3°. Это можно сделать разными способами.

Прежде всего, можно допустить, чтобы разные пары $\{Q_1, X\}$ и $\{Q_2, X\}$, где $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}$, $X = f(Q_1) = f(Q_2)$, в некоторых специально оговоренных случаях задавали одну точку поверхности (в связи с этим см. примеры 4) и 5) в п. 3° § 6). Кроме того, можно пойти по пути конструирования новых объектов путем «склеивания» элементарных поверхностей. Наконец, можно расширить класс множеств $\mathcal{M}$, допускаемых в качестве области определения функции f , считая, что в качестве $\mathcal{M}$ можно брать не только область на евклидовой плоскости, но и другие знакомые объекты, например, проективную плоскость, сферу, тор и т. д. По существу, именно сочетание таких приемов приводит к общему определению поверхности, сформулированному в следующем пункте.

Предупреждение. Следующий пункт требует от читателя знакомства с понятием дифференцируемого многообразия. Необходимый минимум сведений можно найти в первой главе книги [115] и в параграфах 1.1–1.2 книги [19].

7*. Пусть даны: n -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$; многообразие¹⁾ $\mathcal{M}$ размерности k ($2 \leq k < n$); группа $\mathcal{G}$ гомеоморфизмов вида $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

¹⁾ Здесь и ниже термин **многообразие** обозначает связное сепарабельное топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^k$.

Два непрерывных отображения $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $f_1: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ будем называть *эквивалентными относительно группы $\mathcal{G}$* , если существует гомеоморфизм $g \in \mathcal{G}$ такой, что $f_1 = f \circ g$.

Основное определение. *k -мерной поверхностью S в n -мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ называется класс локально гомеоморфных отображений вида $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, эквивалентных относительно группы $\mathcal{G}$ всех гомеоморфизмов k -мерного многообразия $\mathcal{M}$ ($2 \leq k \leq n-1$).*

В этом определении можно положить $k=1$. Тогда $\mathcal{M}$ представляет собой открытый интервал или окружность, а класс эквивалентных отображений $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *линией* или *кривой* в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Если $k=2$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$, то имеем поверхность в трехмерном евклидовом пространстве.

При $n \geq 4$, $k = n-1$ поверхность называют *гиперповерхностью*. Подробнее о k -мерных поверхностях в $\mathbb{R}^n$ при $n > 3$ см. [6, 25, 123].

Точка поверхности, окрестность точки, область на поверхности определяются точно так же, как в пп. 3°–4°.

Аналогично пункту 3° — как множество точек пространства — в общем случае определяется носитель поверхности.

Поверхность называется *плоской*, если ее носитель содержится в какой-либо плоскости. Теорема из п. 3* § 2 остается в силе.

Поверхность называется *сферической*, если ее носитель принадлежит какой-либо сфере.

Примером сферической поверхности может служить сферический образ S^* (см. § 2, п. 2*) произвольной C^2 -гладкой поверхности S с ненулевой гауссовой кривизной K , причем S здесь выступает в роли многообразия $\mathcal{M}$.

Так же, как в п. 3°, отказавшись в «Основном определении» от локальной гомеоморфности и предполагая только непрерывность, будем иметь обобщенные поверхности. Пример: сферический образ S^* поверхности S , у которой на знак K не накладывается ограничений.

Если поверхность S задана отображением $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, то отображение $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow S$, действующее по формуле $\mathcal{F}(Q) = \{Q, f(Q)\} \in S$, есть гомеоморфизм. Поэтому поверхность S гомеоморфна многообразию $\mathcal{M}$ и, значит, обладает такими же топологическими свойствами, как $\mathcal{M}$. Например, она ориентируема (односвязна), если ориентируемо (односвязно) $\mathcal{M}$.

Поверхность S называется *замкнутой*, если $\mathcal{M}$ компактно, т. е. если из каждого покрытия многообразия $\mathcal{M}$ окрестностями его точек можно выделить конечное покрытие. К обсуждению понятия замкнутой поверхности мы еще вернемся ниже, в пунктах 8* и 12*.

В случае, когда $k=1$ ($\mathcal{M}$ одномерно), а вместо пространства $\mathbb{R}^n$ взята поверхность S , мы имеем *кривую на поверхности*. Кривая $\mathcal{L}$ на S чаще всего задается отображением одномерного многообразия $\mathcal{M}'$

в то многообразие $\mathcal{M}$, которое участвует в определении поверхности. В частном случае, когда $\mathcal{M}'$ — интервал, $\mathcal{M}$ — область на плоскости $\mathbb{R}^2$, мы приходим к формулам вида (1) §9, а группа $\mathcal{G}$ (для $\mathcal{L}$) состоит из монотонных преобразований параметра.

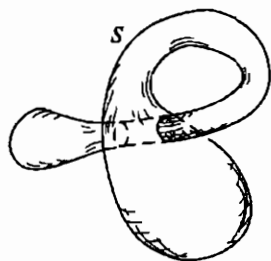


Рис. 94

Часто ограничивают класс рассматриваемых объектов, накладывая на f условия регулярности (например, $f \in C^n$, $1 \leq n \leq \infty$). В последнем случае нужно считать, что на $\mathcal{M}$ введена структура класса ¹⁾ C^n и что регулярность C^n требуется от гомеоморфизмов группы $\mathcal{G}$, с помощью которой определяется эквивалентность отображений.

8*. Укажем несколько примеров, иллюстрирующих определение поверхности, а также понятие двумерного многообразия.

1). Взяв в качестве $\mathcal{M}$ сферу, мы можем получить различные гомеоморфные ей (замкнутые) поверхности. К их числу относятся, например, эллипсоид, поверхность куба, а также поверхность с самопересечениями, показанная на рис. 94.

Замечания. А). Говорят, что поверхность, заданная отображением $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, имеет *самопересечения*, если $f(Q') = f(Q'')$ для некоторых $Q', Q'' \in \mathcal{M}$.

Б). Сфера не гомеоморфна никакой области на плоскости. Поэтому поверхность, гомеоморфную сфере (в частности, поверхность, показанную на рис. 94), нельзя было бы задать отображением $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$, если в качестве $\mathcal{M}$ допускать лишь плоскость $\mathbb{R}^2$ или какие-либо области в $\mathbb{R}^2$. То же самое относится к поверхностям, показанным на рис. 96, 97, б, 99 и 100.

2). Пусть Z — боковая поверхность круглого цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, $|z| \leq 1$ и пусть на ее граничных окружностях ℓ_1 и ℓ_2 выбраны одинаковые направления обхода (рис. 95, а). Цилиндр Z не является многообразием из-за того, что в Z включены окружности ℓ_1 и ℓ_2 . Их точки не имеют в Z окрестностей, гомеоморфных $\mathbb{R}^2$. Если эти окружности исключить, то получилось бы многообразие, гомеоморфное открытому круговому кольцу на плоскости $\mathbb{R}^2$. Сам цилиндр Z гомеоморфен замкнутому кольцу (т. е. кольцу вида $a \leq x^2 + y^2 \leq b$, $0 \leq a < b < +\infty$).

Из евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ выбросим два открытых круга, границы которых не пересекаются. На окружностях, ограничивающих по-

¹⁾ То есть совокупность локальных координатных систем, вместе покрывающих все $\mathcal{M}$, удовлетворяющая условию, что переход от одних координат к другим в пересечении координатных систем взаимно однозначен и выражается функциями класса C^n .

лучившиеся отверстия, возьмем противоположные направления обхода (рис. 95, б). Одну из этих окружностей отождествим с ℓ_1 , другую — с ℓ_2 . В результате получится новое многообразие, не гомеоморфное ни $\mathbb{R}^2$, ни какой-либо области в $\mathbb{R}^2$. Оно называется «плоскость с приклеенной ручкой» или короче «плоскость с ручкой» (рис. 95, в).

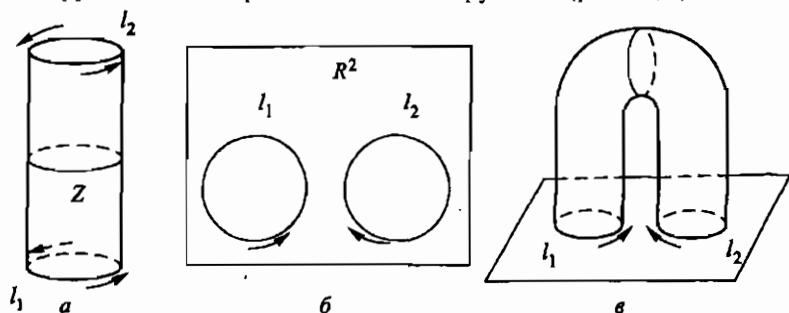


Рис. 95

Повторяя аналогичное построение несколько раз, получим (для любого целого $m \geq 1$) многообразие, называемое *плоскостью с m ручками*. Можно условиться, что $\mathbb{R}^2$ включается в совокупность плоскостей с ручками при $m = 0$. Плоскости с m ручками при различных m между собой не гомеоморфны. На рис. 96 показана поверхность S , представляющая собой гладкое вложение в $\mathbb{R}^3$ плоскости с двумя ручками.

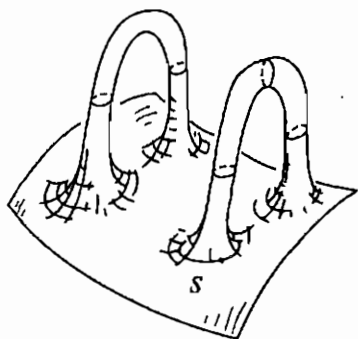


Рис. 96

3). На цилиндре Z отождествим окружности ℓ_1 и ℓ_2 , считая, что на них задан одинаковый обход (рис. 95, а).

Полученное многообразие гомеоморфно тору. Его так и называют «тор». Обычный тор (рис. 93) является одним из гладких вложений этого многообразия в $\mathbb{R}^3$.

4). У окружностей ℓ_1 и ℓ_2 на цилиндре Z возьмем противоположные направления обхода и затем отождествим эти окружности (см. рис. 97, а, на котором одинаковыми буквами помечены отождествляемые точки). Полученное многообразие называется *бутылкой Клейна*. На рис. 97, б показана поверхность S , представляющая собой гладкое погружение бутылки Клейна в $\mathbb{R}^3$. Обратим внимание на то, что хотя эта поверхность является замкнутой, она не разделяет на части пространство $\mathbb{R}^3$.

5). Операцию приклеивания ручек можно применить к сфере, к бутылке Клейна и к *проективной плоскости*. На рис. 98, а проективная

плоскость P^2 изображена в виде полусферы, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки граничной окружности; рис. 98, б и рис. 98, в иллюстрируют приклеивание к P^2 одной ручки.

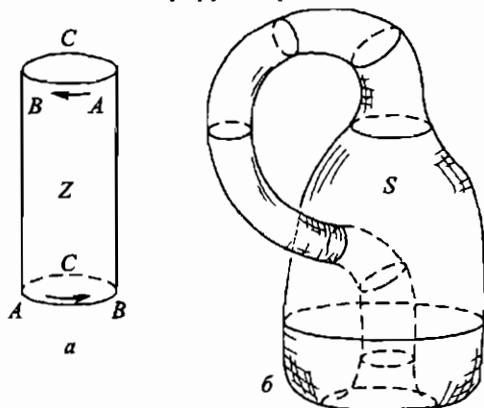


Рис. 97

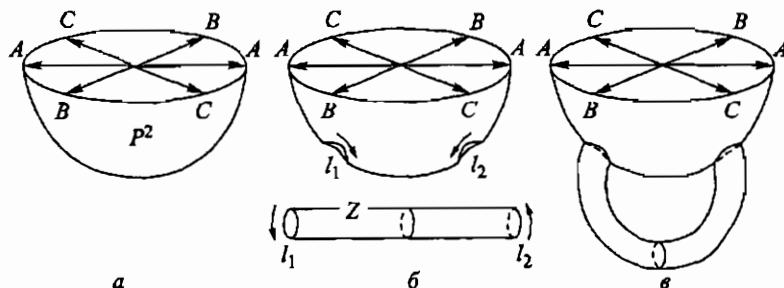


Рис. 98

Нетрудно сообразить, что сфера с одной ручкой гомеоморфна тору. На рисунках 99–100 показаны поверхности, представляющие собой гладкие вложения в $\mathbb{R}^3$ сферы с двумя и с тремя ручками.

В топологии доказывается (см., например, [52]), что сферы с t ручками, проективные плоскости с t ручками и бутылка Клейна с t ручками при $t = 0, 1, 2, \dots$ друг другу не гомеоморфны и исчерпывают собой все возможные замкнутые двумерные многообразия. Вместе с тем, получается топологическая классификация замкнутых двумерных поверхностей.

Можно доказать, что проективная плоскость с любым числом ручек и бутылка Клейна с любым числом ручек допускают гладкие погружения, но не допускают вложений в $\mathbb{R}^3$.

9°. Ориентируемость гладкой поверхности в $\mathbb{R}^3$ можно определить независимо от пункта 7*, не обращаясь к многообразию $\mathcal{M}$.



Рис. 99

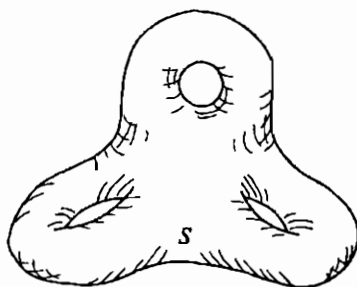


Рис. 100

Определение. Гладкая поверхность S называется *ориентируемой*, если направление орта нормали $\vec{n}$ в каждой ее точке можно выбрать так, чтобы вектор-функция $\vec{n}$ была непрерывной и однозначной на всей поверхности S .

Если такой выбор орта нормали сделан, то говорят, что выбрана *ориентация поверхности*. Тогда можно ввести на поверхности положительное направление отсчета углов и положительное направление обхода замкнутых кривых, считая, что положительный поворот виден из конца вектора $\vec{n}$ против часовой стрелки (рис. 101).

Достаточно малая окрестность каждой точки на любой гладкой поверхности сама является ориентируемой поверхностью, поскольку ее можно локально представить в виде $z = z(x, y)$ и считать, что вектор $\vec{n}$ направлен в сторону возрастания z .

Примером неориентируемой поверхности может служить так называемый *лист Мёбиуса*, который можно склеить из полоски бумаги, как показано на рис. 102. На листе Мёбиуса имеются замкнутые кривые, при обходе которых непрерывно изменяющийся вектор $\vec{n}$ меняет свое направление на противоположное. Можно проверить, что в случае листа Мёбиуса многообразие $\mathbb{M}$ представляет собой внешнюю область овальной кривой на проективной плоскости P^2 (рис. 103). Другой пример неориентируемой поверхности дает бутылка Клейна (см. рис. 97, б).

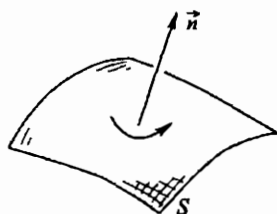


Рис. 101

10°. Поверхность S называется *ограниченной* (в $\mathbb{R}^3$), если ограничен ее носитель $f(\mathbb{M})$ (т. е. если $f(\mathbb{M})$ содержится внутри некоторого шара).

11°. В этом пункте мы ограничимся поверхностями *без самопересечений*, т. е. будем считать, что отображение (6) является вложением.

В таком случае *множеством граничных значений* или *краем поверхности* S называют множество тех точек пространства $\mathbb{R}^3$, которые

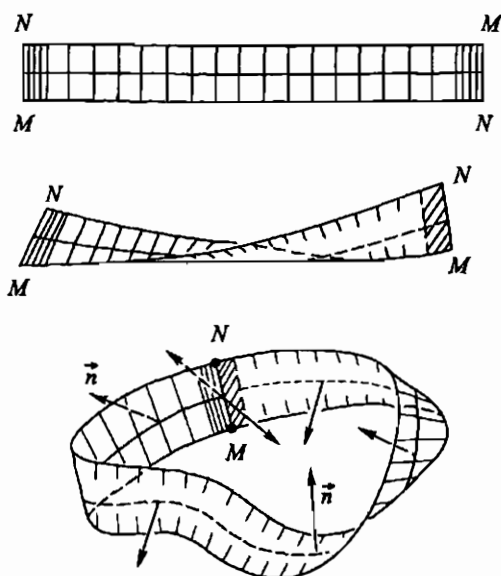


Рис. 102

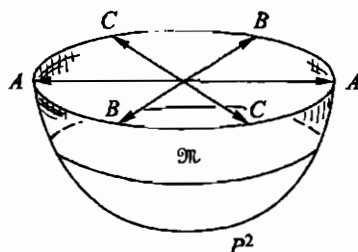


Рис. 103

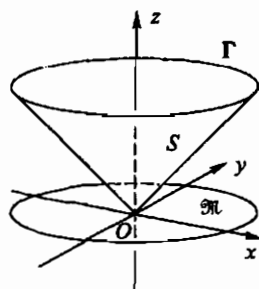


Рис. 104

являются предельными для $f(\mathcal{M})$, но не принадлежат $f(\mathcal{M})$. (Определение множества граничных значений для общего случая см. в [85]).

Примеры. 1). Часть конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, определяемая неравенством $x^2 + y^2 < 1$, представляет собой гомеоморфное вложение в $\mathbb{R}^3$ открытого круга $x^2 + y^2 < 1$. Край Γ этой поверхности состоит из окружности $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 104).

2) Часть того же конуса, определяемая неравенствами

$$0 < x^2 + y^2 < 1$$

представляет собой поверхность класса C^∞ , являющуюся вложением в $\mathbb{R}^3$ круга с выколотым центром. Ее край состоит из той же окружности Γ и вершины конуса O (рис. 104).

3). Поверхность $z = \sin \frac{1}{x}$, $0 < x < \frac{1}{\pi}$, $-\infty < y < +\infty$ имеет край Γ , состоящий из прямой $x = \frac{1}{\pi}$, $z = 0$ и из полосы $x = 0$, $-1 \leq z \leq 1$ (см. рис. 105, на котором показана часть этой поверхности и часть ее края; для большей наглядности на осях x и z взяты разные масштабы).

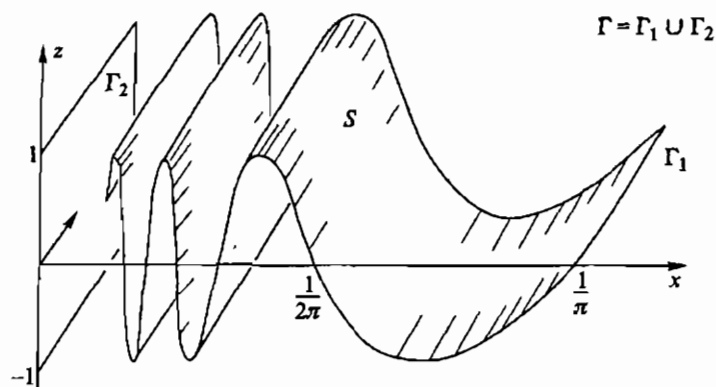


Рис. 105

Замечание. Край, определенный в этом пункте, часто называют *внешне-геометрическим краем* поверхности. Вводится еще понятие *внутренне-геометрического края* поверхности. Не останавливаясь на точном определении последнего, укажем, что с наглядной точки зрения внутренне-геометрический край представляет собой ту часть внешне-геометрического края, которой можно достичь, исходя из какой-нибудь точки поверхности и пройдя по поверхности путь конечной длины. В первых двух примерах этого пункта внутренне-геометрический край совпадает с внешне-геометрическим. В третьем примере внутренне-геометрический край состоит из одной прямой $x = \frac{1}{\pi}$, $z = 0$, обозначенной на рис. 105 через Γ_1 .

12*. Не останавливаясь на доказательстве, отметим следующее предложение.

Теорема. Поверхность в $\mathbb{R}^n$ замкнута тогда и только тогда, когда она ограничена и не имеет края.

Замечания. 1). Мы определили край лишь в случае поверхности без самопересечений. Поэтому будем считать, что в данном пункте речь идет о поверхностях без самопересечений.

2). Свойство, указанное в теореме, можно принять за определение замкнутой поверхности в $\mathbb{R}^3$ (а также в $\mathbb{R}^n$, $n > 3$).

13°. Условимся считать, что все поверхности, линии и функции, рассматриваемые в последующих параграфах, принадлежат классу C^∞ (если нет специальных оговорок). Отметим, что теоремы, изложенные ниже, справедливы и при более слабых условиях регулярности, однако в каждом конкретном случае мы не будем на это отвлекать внимание.

§ 16. Теорема единственности

1°. Теорема, о которой сейчас пойдет речь, показывает фундаментальную роль первой и второй квадратичных форм в теории поверхностей. Она утверждает, что поверхность определена однозначно с точностью до движения в пространстве, если ее первая и вторая квадратичная формы заданы. Точная формулировка и доказательство приведены ниже. Сначала (в пункте 2°) рассмотрен специальный частный случай, помогающий уяснить существо дела.

2°. Пусть две поверхности $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ заданы уравнениями вида

$$\vec{X} = \vec{X}^{(i)}(u, v), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

причем обе вектор-функции определены в одном и том же прямоугольнике $\mathcal{D}$:

$$u_1 < u < u_2, \quad v_1 < v < v_2 \quad (2)$$

на плоскости (u, v) и удовлетворяют в $\mathcal{D}$ обычному требованию

$$|\vec{X}_u^{(i)} \times \vec{X}_v^{(i)}| \neq 0, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Индексом $\langle i \rangle$ здесь и ниже помечены объекты, относящиеся к поверхности $S^{(i)}$. Пусть $\vec{n}^{(i)}$ — орт нормали, $\vec{\tau}_1^{(i)}$ — орт касательной к u -линии, $\vec{\tau}_2^{(i)}$ — орт касательной к v -линии на $S^{(i)}$. Будем считать в дальнейшем, что тройки векторов $\vec{\tau}_1^{(i)}$, $\vec{\tau}_2^{(i)}$, $\vec{n}^{(i)}$ являются правыми.

Предположим, что $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} E^{(1)}(u, v) &= E^{(2)}(u, v), & L^{(1)}(u, v) &= L^{(2)}(u, v), \\ F^{(1)}(u, v) &= F^{(2)}(u, v), & M^{(1)}(u, v) &= M^{(2)}(u, v), \\ G^{(1)}(u, v) &= G^{(2)}(u, v), & N^{(1)}(u, v) &= N^{(2)}(u, v) \end{aligned} \quad (*)$$

для всех $(u, v) \in \mathcal{D}$;

$$F^{(1)}(u, v) = 0, \quad (4)$$

а значит, и $F^{(2)}(u, v) = 0$ для всех $(u, v) \in \mathcal{D}$;

$$\vec{X}^{(1)} = \vec{X}^{(2)}, \quad \vec{\tau}_1^{(1)} = \vec{\tau}_1^{(2)}, \quad \vec{\tau}_2^{(1)} = \vec{\tau}_2^{(2)}, \quad \vec{n}^{(1)} = \vec{n}^{(2)} \quad (5)$$

в какой-нибудь одной точке $(u_0, v_0) \in \mathcal{D}$. Тогда имеет место

Лемма. В условиях этого пункта поверхность $S^{(2)}$ совпадает с $S^{(1)}$.

Замечание. Для одной точки равенства (5) всегда можно обеспечить движением одной из поверхностей в пространстве. При движении поверхности в пространстве на ней сохраняются длины и кривизны линий, поэтому сохраняются ее первая и вторая квадратичные формы. Таким образом, лемма устанавливает однозначную определенность поверхности S при заданных E, F, G, L, M, N в том частном случае, когда S является погружением в $\mathbb{R}^3$ прямоугольника (2), а сеть (u, v) ортогональна на S .

Доказательство леммы. Учитывая (*), будем опускать индекс $\langle i \rangle$ у коэффициентов первой и второй квадратичных форм. Положим $A = \sqrt{E}$, $B = \sqrt{G}$. Вследствие (4) тройки векторов $\vec{\tau}_1^{(i)}$, $\vec{\tau}_2^{(i)}$, $\vec{n}^{(i)}$ ортогональны, поэтому можно воспользоваться формулами из § 14 и выписать две системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \vec{X}_u &= A \vec{\tau}_1, \\ (\vec{\tau}_1)_u &= -\frac{A_v}{B} \vec{\tau}_2 + \frac{L}{A} \vec{n}, \\ (\vec{\tau}_2)_u &= \frac{A_v}{B} \vec{\tau}_1 + \frac{M}{B} \vec{n}, \\ \vec{n}_u &= -\frac{L}{A} \vec{\tau}_1 - \frac{M}{B} \vec{\tau}_2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \vec{X}_v &= B \vec{\tau}_2, \\ (\vec{\tau}_1)_v &= \frac{B_u}{A} \vec{\tau}_2 + \frac{M}{A} \vec{n}, \\ (\vec{\tau}_2)_v &= -\frac{B_u}{A} \vec{\tau}_1 + \frac{N}{B} \vec{n}, \\ \vec{n}_v &= -\frac{M}{A} \vec{\tau}_1 - \frac{N}{B} \vec{\tau}_2, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

каждой из которых удовлетворяют и векторы $\vec{X}^{(1)}$, $\vec{\tau}_1^{(1)}$, $\vec{\tau}_2^{(1)}$, $\vec{n}^{(1)}$ и векторы $\vec{X}^{(2)}$, $\vec{\tau}_1^{(2)}$, $\vec{\tau}_2^{(2)}$, $\vec{n}^{(2)}$.

Теорема единственности решения системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (см., например, [96]), примененная к (6), обеспечивает выполнение равенств (5) вдоль всей u -линии, проходящей через точку (u_0, v_0) . Тем самым обеспечивается совпадение начальных данных для системы (7) при $u = u_0$ и любом v . Далее, двигаясь по v -линии (рис. 106) и применяя теорему единственности к системе (7), мы установим равенство $\vec{X}^{(1)}(u, v) = \vec{X}^{(2)}(u, v)$ для всех $(u, v) \in D$. Лемма доказана.

3*. Переходим к общему случаю. Пусть $S^{(1)}$ задана погружением

$$f^{(1)}: \mathcal{M}^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (8)$$

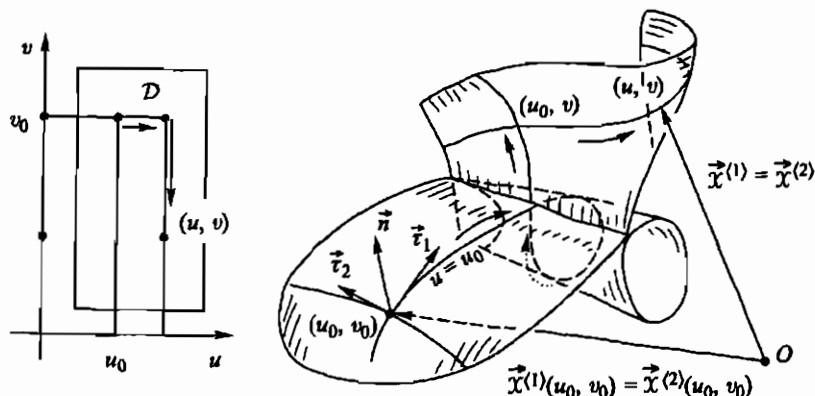


Рис. 106

$S^{(2)}$ задана погружением

$$f^{(2)} : \mathcal{M}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (9)$$

Пусть φ — некоторое преобразование пространства $\mathbb{R}^3$ ($\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$). Говорят, что преобразование φ переводит поверхность $S^{(2)}$ в $S^{(1)}$, если отображение $\varphi \circ f^{(2)}$ многообразия $\mathcal{M}^{(2)}$ в $\mathbb{R}^3$ эквивалентно $f^{(1)}$.

Предположим, что $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ удовлетворяют условиям, перечисленным ниже:

- А). $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ *ориентируемы*. На каждой из них выбраны и *зафиксированы* некоторые *ориентации*.
- Б). $\mathcal{M}^{(1)}$ и $\mathcal{M}^{(2)}$ *гомеоморфны*. Существует гомеоморфизм $g : \mathcal{M}^{(1)} \rightarrow \mathcal{M}^{(2)}$, для которого соблюдаются все требования п. В) (см. ниже).
- В). Для каждой точки $Q^{(1)} \in \mathcal{M}^{(1)}$ и соответствующей ей точки $Q^{(2)} = g(Q^{(1)}) \in \mathcal{M}^{(2)}$ найдутся такие окрестности $U^{(i)}$ и такие параметризации (u, v) в них, что:

1). Если какая-либо точка $P^{(1)} \in U^{(1)} \subset \mathcal{M}^{(1)}$ имеет координаты (u, v) , то соответствующая ей точка $P^{(2)} = g(P^{(1)})$ имеет в окрестности $U^{(2)} \subset S^{(2)}$ *те же самые* координаты (u, v) . Область изменения параметров u, v (общая для $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$) обозначена ниже через V (см. рис. 107, на котором в качестве $\mathcal{M}^{(1)}$ и $\mathcal{M}^{(2)}$ взяты области на плоскости, каждая из которых ограничена тремя замкнутыми кривыми).

2). Часть поверхности $S^{(i)}$, соответствующая $U^{(i)}$, задается уравнением вида (1) с соблюдением условия (3). При этом (u, v) пробегает область V , векторы $\vec{x}_u^{(i)}, \vec{x}_v^{(i)}, \vec{n}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) образуют *правую* тройку, а направление вектора $\vec{n}^{(i)}$ *согласуется* с заданной на $S^{(i)}$ ориентацией.

3). Для всех $(u, v) \in V$ имеют место равенства (*).

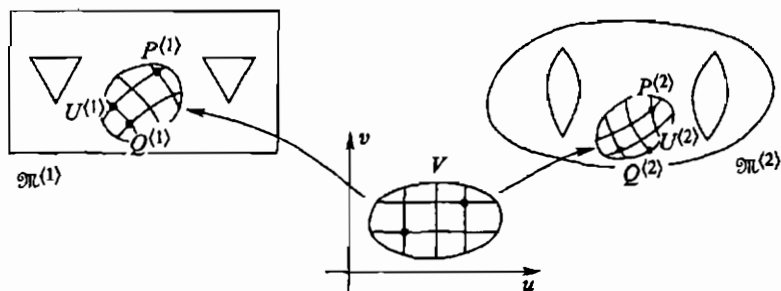


Рис. 107

При соблюдении всех условий А) — В) будем говорить, что поверхности $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ имеют одинаковые первые и вторые квадратичные формы.

Нетрудно проверить, что если $S^{(1)}$ ориентируема, $S^{(2)} = S^{(1)}$, то все условия А)–В) соблюдаются и что движение поверхности в пространстве их не нарушает. Наша цель — доказать достаточность условий А)–В) для того, чтобы одна из поверхностей $S^{(i)}$ переводилась в другую движением.

4*. Важное замечание. Если в области V сделать преобразование координат по формулам вида

$$\left. \begin{aligned} u &= u(\tilde{u}, \tilde{v}), \\ v &= v(\tilde{u}, \tilde{v}), \end{aligned} \right\} \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} > 0,$$

то равенства (*) не нарушатся, поскольку первые и вторые квадратичные формы двух разных поверхностей преобразуются по одному и тому же (тензорному) закону (см. выше § 8, пп. 6°–7*, и § 11, пп. 2°–3*).

5*. Теорема единственности. Если поверхности $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ имеют одинаковые первые и вторые квадратичные формы, то $S^{(2)}$ можно совместить с $S^{(1)}$ движением в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Нужно найти в $\mathbb{R}^3$ такое движение φ , чтобы погружения $f^{(1)}: \mathcal{M}^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi \circ f^{(2)}: \mathcal{M}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ оказались эквивалентными. По условию нам дан гомеоморфизм $g: \mathcal{M}^{(1)} \rightarrow \mathcal{M}^{(2)}$, который естественно было бы использовать при проверке эквивалентности $f^{(1)}$ и $\varphi \circ f^{(2)}$. Учитывая это соображение, попытаемся подобрать движение φ так, чтобы обеспечить равенство

$$f^{(1)} = \varphi \circ f^{(2)} \circ g \quad (10)$$

(см. рис. 108). Возьмем в $\mathcal{M}^{(1)}$ произвольную точку $Q^{(1)}$. Согласно условиям В) построим для нее $U^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $U^{(2)}$ и координаты (u, v) в $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$. Обозначим через $\vec{n}_0^{(i)}$ орт нормали к $S^{(i)}$ через $\vec{\tau}_0^{(i)}$ — орт касательной к u -линии, взятые в точке $\{Q^{(i)}, f^{(i)}(Q^{(i)})\}$. В качестве φ

выберем движение, которое точку $f^{(2)}(Q^{(2)})$ пространства $\mathbb{R}^3$ переводит в точку $f^{(1)}(Q^{(1)})$, а правую ортонормированную тройку векторов $\vec{\tau}_0^{(2)}, \vec{n}_0^{(2)} \times \vec{\tau}_0^{(2)}, \vec{n}_0^{(2)}$ переводит в правую ортонормированную тройку векторов $\vec{\tau}_0^{(1)}, \vec{n}_0^{(1)} \times \vec{\tau}_0^{(1)}, \vec{n}_0^{(1)}$ (рис. 109). Такое движение существует (и единственно). Докажем, что (10) соблюдено. Положим $\varphi \circ f^{(2)} \circ g = \Phi$. Надо проверить, что $\Phi(X) = f^{(1)}(X)$ для произвольной точки $X \in \mathcal{M}^{(1)}$. С этой целью сделаем вспомогательное построение.

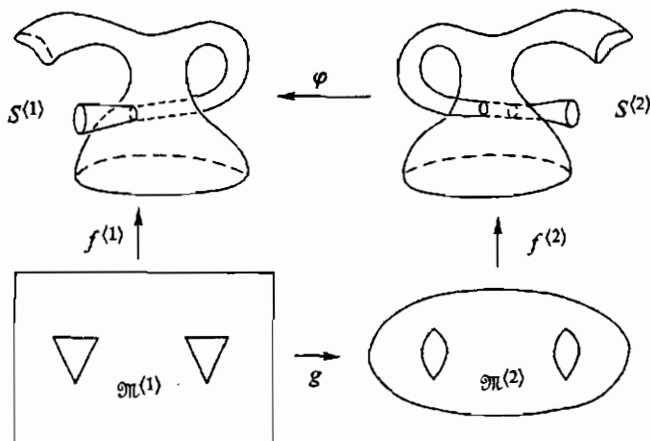


Рис. 108

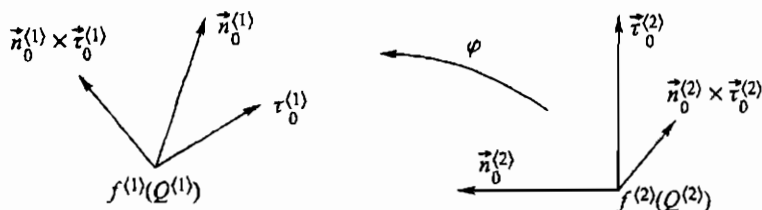


Рис. 109

Построим в $\mathcal{M}^{(1)}$ линию ℓ , которая проходит через точки $Q^{(1)}$ и X , причем в точке $Q^{(1)}$ имеем направление, в локальных координатах (u, v) задаваемое условиями $du > 0, dv = 0$. Тогда линия $\mathcal{L}$ на S , соответствующая ℓ , проходит через точку $\{Q^{(1)}, f^{(1)}(Q^{(1)})\}$ в направлении вектора $\vec{\tau}_0^{(1)}$ (рис. 110). В случае, когда $\mathcal{M}^{(1)}$ — область на плоскости, возможность построения линии ℓ очевидна. В общем случае эта возможность вытекает из связности многообразия $\mathcal{M}^{(1)}$. Для произвольной точки $Y \in \ell$ построим окрестность V с системой локальных координат в ней, удовлетворяющую условиям В).

Уменьшив, если нужно, V , перейдем в ней к новым координатам $\tilde{u}, \tilde{v}$, ортогональным в метрике поверхности $S^{(1)}$. Это можно сделать со-

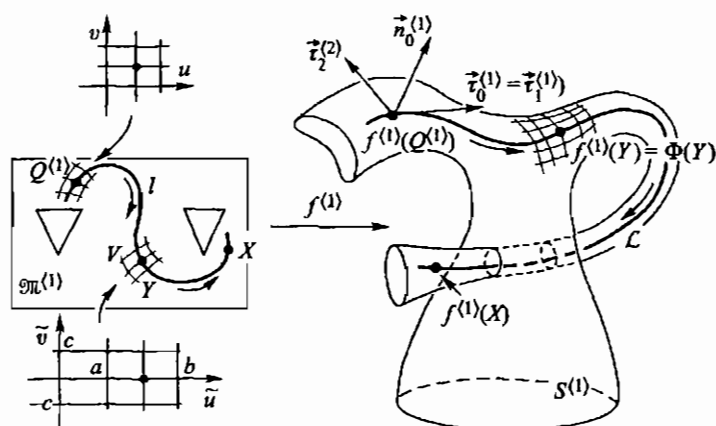


Рис 110

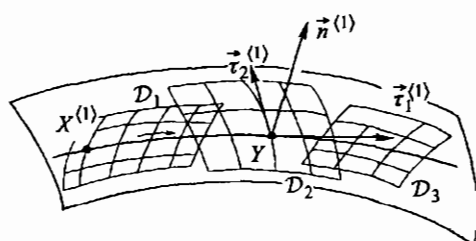


Рис 111

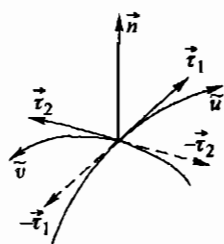


Рис 112

гласно лемме п. 5° § 14. При этом мы можем добиться положительности якобиана старых координат по новым координатам $\tilde{u}, \tilde{v}$ (см. § 14, п. 6*). Тогда согласно п. 4* равенства (*) не нарушатся, но будет соблюдаться (4). Попутно можно обеспечить, чтобы линия ℓ в окрестности точки Y имела уравнение $\tilde{v} = 0$ (см. в связи с этим § 14, п. 5°).¹⁾ Кроме того, мы можем добиться, чтобы направление возрастания $\tilde{u}$ на ℓ совпало с направлением движения от $Q^{(1)}$ к X (рис. 111). Если бы $\tilde{u}$ возрастало в противоположном направлении, то нужно было бы одновременно сменить направления возрастания $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$. При этом тройка ортов $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{n}$ сохранит свою ориентацию, а вектор $\vec{n} = \vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2$ сохранит свое направление (рис. 112). Уменьшив еще рассматриваемую окрестность точки Y , мы можем добиться того, чтобы она задавалась неравенствами вида

$$a < \tilde{u} < b, \quad -c < \tilde{v} < c, \quad (11)$$

¹⁾ Строго говоря, рассуждения п. 5° § 14 должны применяться к окрестности дуги $\mathcal{L}$ на $S^{(1)}$, а не к линии ℓ . Но мы можем не различать ℓ и $\mathcal{L}$ вследствие гомеоморфности многообразия $\mathcal{M}^{(1)}$ и поверхности $S^{(1)}$.

где a, b, c — некоторые числа (см. рис. 110). Описанное выше построение специальной окрестности проведем для каждой точки линии ℓ и выберем из этих окрестностей конечное покрытие замкнутой дуги $Q^{(1)}X$ линии ℓ . Это возможно; в самом деле, по определению линии (см. выше, § 15, п. 7*) любая ее дуга вместе с концевыми точками гомеоморфна замкнутому отрезку числовой оси, для которого фактически и применяется лемма о конечном покрытии. Окрестности, образующие указанное конечное покрытие, обозначим $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m$, занумеровав их в порядке следования по ℓ от $Q^{(1)}$ к X . В каждой из областей $\mathcal{D}_j$ построим ортонормированный сопровождающий трехгранник $\vec{\tau}_1^{(1)}, \vec{\tau}_2^{(1)}, \vec{n}^{(1)}$ поверхности $S^{(1)}$. Вдоль всей линии $\mathcal{L}$ этот трехгранник меняется непрерывно вследствие сделанного выше выбора направлений возрастания параметров. Кроме того, в начальной точке $\{Q^{(1)}, f^{(1)}(Q^{(1)})\}$ имеем

$$\vec{\tau}_1^{(1)} = \vec{\tau}_0^{(1)}, \quad \vec{n}^{(1)} = \vec{n}_0^{(1)}, \quad \vec{\tau}_2^{(1)} = \vec{n}_0^{(1)} \times \vec{\tau}_0^{(1)} \quad (12)$$

(см. рис. 110).

Вспомним теперь, что $S^{(2)}$ в ее исходном положении можно задать погружением $f^{(2)} \circ g : \mathcal{M}^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}^3$, а после движения φ — погружением $\Phi : \mathcal{M}^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Передвинутую поверхность $S^{(2)}$ обозначим $\varphi S^{(2)}$. Проведя для $\varphi S^{(2)}$ те же рассуждения, что и для $S^{(1)}$, получим сопровождающий трехгранник $\vec{\tau}_1^{(2)}, \vec{\tau}_2^{(2)}, \vec{n}^{(2)}$, определенный в каждой из координатных окрестностей $\mathcal{D}_j$ и непрерывный вдоль ℓ . В начальной точке $\{Q^{(1)}, \Phi(Q^{(1)})\}$ он совпадает с трехгранником (12) вследствие специального выбора движения φ . Поэтому мы можем применить лемму пункта 2° сначала в $\mathcal{D}_1$, затем в $\mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m$ и для каждой из этих окрестностей установить равенство $f^{(1)} = \Phi$. В частности, получаем $f^{(1)}(X) = \Phi(X)$, что и требовалось; теорема доказана.

6*. Если соблюдаются условия А), Б) и первые два из условий В), а вместо равенств (*) имеем

$$E^{(1)} = E^{(2)}, \quad F^{(1)} = F^{(2)}, \quad G^{(1)} = G^{(2)},$$

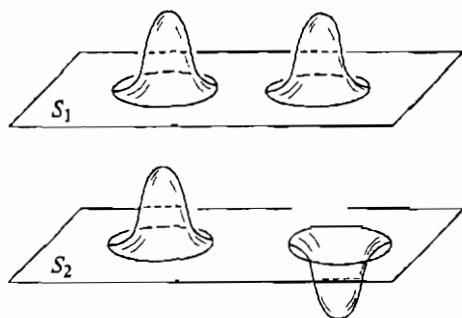


Рис 113

$$L^{(1)} = -L^{(2)}, \quad M^{(1)} = -M^{(2)}, \quad N^{(1)} = -N^{(2)},$$

то $S^{(2)}$ можно совместить с $S^{(1)}$ суперпозицией движения и зеркального отражения. Дело в том, что зеркальное отражение сохраняет ds^2 , но меняет знак кривизны всех нормальных сечений, а вместе с тем и знак второй квадратичной формы. Поэтому после зеркального отражения дело сводится к теореме п. 5*.

7*. Обратим внимание на важность условия А). На рис. 113 показаны две поверхности S_1 и S_2 , для которых условия Б) и В) локально можно обеспечить, если не потребовать заранее согласования ориентаций. Совместить же эти поверхности нельзя ни движением, ни зеркальным отражением.

§ 17. Внешнее произведение линейных дифференциальных форм и внешний дифференциал

1°. Внешним произведением дифференциала du на дифференциал dv называют символ $du \wedge dv$; при этом считают, что

$$du \wedge dv = -du \wedge dv, \quad du \wedge du = du \wedge dv = 0. \quad (1)$$

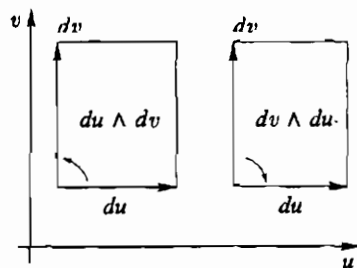


Рис. 114

Иногда бывает удобно дать символу $du \wedge dv$ геометрическое истолкование, рассматривая его как ориентированную площадь прямоугольника со сторонами du и dv (рис. 114). О дальнейших правилах действий с символом $du \wedge dv$ см. пп. 2°–3°.

2°. Внешнее произведение двух линейных дифференциальных форм: $\omega_1 = p_1 du + q_1 dv$ и $\omega_2 = p_2 du + q_2 dv$, определяют, полагая

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (p_1 du + q_1 dv) \wedge (p_2 du + q_2 dv) = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} du \wedge dv. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, что

- 1) $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$; в частности, $\omega \wedge \omega = 0$;
- 2) $(\omega_1 \pm \omega_2) \wedge \omega = \omega_1 \wedge \omega \pm \omega_2 \wedge \omega$;
- 3) $(f\omega_1) \wedge \omega_2 = f(\omega_1 \wedge \omega_2) = \omega_1 \wedge (f\omega_2)$.

Здесь ω , ω_1 , ω_2 — произвольные линейные дифференциальные формы (т. е. выражения вида $a(u, v) du + b(u, v) dv$), $f = f(u, v)$ — произвольная функция.

3°. Выражения вида $f(u, v) du \wedge dv$ называют *внешними дифференциальными формами второй степени*.

Определение. Двойным интегралом по области G на плоскости (u, v) от дифференциальной формы $\omega = f(u, v) du \wedge dv$ называется величина

$$\int_G \omega = \int_G \int f du \wedge dv = \int_G \int f(u, v) du dv. \quad (3)$$

4*. Пусть производится замена переменных:

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad v = v(\tilde{u}, \tilde{v}). \quad (4)$$

Тогда

$$du = u_{\tilde{u}} d\tilde{u} + u_{\tilde{v}} d\tilde{v}, \quad dv = v_{\tilde{u}} d\tilde{u} + v_{\tilde{v}} d\tilde{v}. \quad (4a)$$

Из (2), (4a) и известного правила замены переменных в двойном интеграле вытекает инвариантность интеграла $\int_G \omega$ относительно замен переменных. Подробнее, справедливо равенство:

$$\int_G \int f du \wedge dv = \int_{\tilde{G}} \int f du \wedge dv,$$

в правой части которого f рассматривается как сложная функция аргументов $\tilde{u}, \tilde{v}$, а du, dv выражаются согласно (4a). Через $\tilde{G}$ обозначен образ области G на плоскости переменных $\tilde{u}, \tilde{v}$.

5*. **Пример.** Пусть дано отображение

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

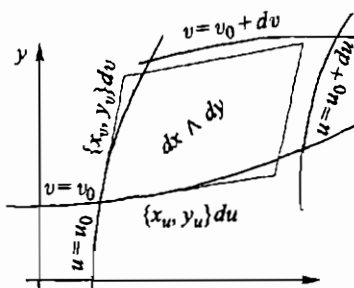


Рис. 115

плоскости (u, v) на плоскость (x, y) . Будем считать, что u, v и x, y — декартовы прямоугольные координаты на рассматриваемых плоскостях. Образ некоторой области G обозначим через G^* . Ориентированную площадь области G^* обозначим $\sigma(G^*)$. Тогда, как известно из курса анализа,

$$\sigma(G^*) = \iint_G \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = \iint_G dx \wedge dy.$$

Заметим попутно (см. рис. 115), что прямоугольнику $du \wedge dv$ соответствует на плоскости (x, y) криволинейный четырехугольник, который с точностью до малых высшего порядка представляет собой параллелограмм с ориентированной площадью, равной

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} du \wedge dv = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv = dx \wedge dy.$$

6°. Определение. Внешним дифференциалом $[d\omega]$ линейной дифференциальной формы

$$\omega = p(u, v) du + q(u, v) dv$$

называется следующая внешняя дифференциальная форма второй степени:

$$[d\omega] = dp \wedge du + dq \wedge dv. \quad (5)$$

Из (2) и (5) находим, что

$$[d\omega] = (p_u du + p_v dv) \wedge du + (q_u du + q_v dv) \wedge dv = (q_u - p_v) du \wedge dv. \quad (6)$$

Из формулы (6) вытекает

ВАЖНОЕ СВОЙСТВО. $[d\omega] = 0$ тогда и только тогда, когда ω — полный дифференциал некоторой функции $f(u, v)$:

$$[d(df)] = 0. \quad (7)$$

7°. Пример. Используя определения внешнего дифференциала и интеграла от внешней дифференциальной формы, можно известную формулу Грина

$$\oint_{\mathcal{L}} p du + q dv = \int_G \int (q_u - p_v) du dv$$

переписать в такой форме:

$$\oint_{\mathcal{L}} \omega = \int_G \int [d\omega] \quad (8)$$

(здесь $\mathcal{L}$ — кривая, ограничивающая область G).

8°. ПРАВИЛА ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

$$1) [d(\omega \pm \tilde{\omega})] = [d\omega] \pm [d\tilde{\omega}].$$

Действительно, если $\omega = p du + q dv$, $\tilde{\omega} = \tilde{p} du + \tilde{q} dv$, то $\omega \pm \tilde{\omega} = (p \pm \tilde{p}) du + (q \pm \tilde{q}) dv$, и свойство 1) следует из формулы (6).

$$2) [d(f\omega)] = f[d\omega] + df \wedge \omega.$$

Доказательство. Пусть $f = f(u, v)$, $\omega = p(u, v) du + q(u, v) dv$. Учитывая (2) и (6), находим:

$$\begin{aligned} [d(f\omega)] &= ((f q)_u - (f p)_v) du \wedge dv = \\ &= f(q_u - p_v) du \wedge dv + (f_u q - f_v p) du \wedge dv = \\ &= f[d\omega] + (f_u du + f_v dv) \wedge (p du + q dv), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Важное замечание. В произведениях вида $f\omega$ принято впереди писать функциональный множитель, а затем дифференциальную форму (аналогично тому, как пишут $f du$). При выкладках с внешним

умножением нужно тщательно следить за порядком сомножителей ввиду антикоммутативности внешнего умножения.

9°. Ниже мы будем применять внешнее дифференцирование к векторным величинам. В частности, если $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, $\vec{Y} = \vec{Y}(u, v)$ — вектор-функции, ω , ω_1 , ω_2 — линейные дифференциальные формы, то

$$[d(d\vec{X})] = \vec{0}; \quad (9)$$

$$[d(\vec{X}\omega)] = \vec{X}[d\omega] + (d\vec{X}) \wedge \omega; \quad (10)$$

$$[d(\vec{X}\omega_1 \pm \vec{Y}\omega_2)] = [d(\vec{X}\omega_1)] \pm [d(\vec{Y}\omega_2)]. \quad (11)$$

Здесь $\vec{0} = \vec{\theta} du \wedge dv$ ($\vec{\theta}$ — нулевой вектор). Выражения вида $[d(\vec{X}\omega)]$ и $(d\vec{X}) \wedge \omega$ определяются формулами:

$$[d(\vec{X}\omega)] = \{[d(x\omega)], [d(y\omega)], [d(z\omega)]\}, \quad (12)$$

$$(d\vec{X}) \wedge \omega = \{(dx) \wedge \omega, (dy) \wedge \omega, (dz) \wedge \omega\}, \quad (13)$$

где $\vec{X} = \{x, y, z\}$, $\omega = p du + q dv$.

Для проверки равенств (9)–(11) достаточно расписать их в координатах, учитывая (12), (13), (7) и свойства 1)–2) п. 8°.

10*. Изложение теории поверхностей, основанное на систематическом использовании линейных дифференциальных форм, их внешнего умножения и внешнего дифференцирования, дано в книге [21].

§ 18. Уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци

1°. Пусть u, v — ортогональные координаты на поверхности S и пусть $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{n}$ — ее сопровождающий трехгранник.

Возьмем внешние дифференциалы от правых и левых частей формул (4) § 14. Полученные равенства преобразуем с помощью тех же формул (4) § 14 и формул (9)–(11) § 17. В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} [d(d\vec{\tau}_1)] &= (d\vec{\tau}_2) \wedge \Omega_0 + \vec{\tau}_2[d\Omega_0] + (d\vec{n}) \wedge \Omega_1 + \vec{n}[d\Omega_1] = \\ &= (-\vec{\tau}_1\Omega_0 + \vec{n}\Omega_2) \wedge \Omega_0 + \\ &\quad + \vec{\tau}_2[d\Omega_0] + (-\vec{\tau}_1\Omega_1 - \vec{\tau}_2\Omega_2) \wedge \Omega_1 + \vec{n}[d\Omega_1] = \\ &= \vec{\tau}_2[(d\Omega_0) - \Omega_2 \wedge \Omega_1] + \vec{n}(\Omega_2 \wedge \Omega_0 + [d\Omega_1]) = \\ &= \vec{\theta} du \wedge dv = \vec{0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда следует, что

$$[d\Omega_0] = -\Omega_1 \wedge \Omega_2, \quad (2)$$

$$[d\Omega_1] = \Omega_0 \wedge \Omega_2. \quad (3)$$

Аналогично находим, что

$$[d(d\vec{\tau}_2)] = \vec{\tau}_1(-[d\Omega_0] - \Omega_1 \wedge \Omega_2) + \vec{\tau}_2(-\Omega_1 \wedge \Omega_0 + [d\Omega_2]) = \vec{0} \quad (4)$$

и

$$[d(d\vec{\tau})] = \vec{\tau}_1(\Omega_0 \wedge \Omega_2 - [d\Omega_1]) + \vec{\tau}_2(-\Omega_0 \wedge \Omega_1 - [d\Omega_2]) = \vec{0}. \quad (5)$$

Из (4) и (5), кроме равенств (2) и (3), получаем еще одно соотношение

$$[d\Omega_2] = -\Omega_0 \wedge \Omega_1. \quad (6)$$

Формулу (2) называют уравнением Гаусса, а формулы (3) и (6) -- уравнениями Петерсона-Кодацци; отметим, что их можно получить из (2) круговой перестановкой индексов, предварительно записав (2) в виде $[d\Omega_0] + \Omega_1 \wedge \Omega_2 = 0$.

Напомним, что равенство нулю внешнего дифференциала от полного дифференциала эквивалентно равенству смешанных производных. Поэтому уравнения Гаусса и Петерсона-Кодацци означают, что

$$(\vec{\tau}_{iu})_v = (\vec{\tau}_{iv})_u, \quad i = 1, 2; \quad (\vec{n}_u)_v = (\vec{n}_v)_u. \quad (7)$$

Последним из равенств (7) мы уже пользовались в § 13* при изучении развертывающихся поверхностей.

2°. Воспользовавшись формулами (5), (6) и (11) из § 14, уравнение Гаусса после несложных выкладок можно привести к виду

$$\left(\frac{A_v}{B}\right)_v + \left(\frac{B_u}{A}\right)_u = \frac{M^2 - LN}{AB}, \quad (8)$$

а уравнения Петерсона-Кодацци -- к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{A}\right)_v - \left(\frac{M}{A}\right)_u &= \frac{1}{B} \left| \begin{array}{cc} M & N \\ -\frac{A_v}{B} & \frac{B_u}{A} \end{array} \right|, \\ \left(\frac{M}{B}\right)_v - \left(\frac{N}{B}\right)_u &= -\frac{1}{A} \left| \begin{array}{cc} L & M \\ -\frac{A_v}{B} & \frac{B_u}{A} \end{array} \right|, \end{aligned} \quad (9)$$

где, как обычно, $A = \sqrt{E}$, $B = \sqrt{G}$. Напомним, что сеть ортогональна, т. е. $F(u, v) \equiv 0$.

Уравнения Гаусса-Петерсона-Кодацци в произвольных координатах запишем (без вывода) в форме, указанной в учебнике [91]:

$$\begin{aligned} \frac{LN - M^2}{EG - F^2} &= -\frac{1}{4(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left(\left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v - \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$2(EG - F^2)(L_v - M_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} - \\ - (E_v - F_u)(EN - 2FM + GL) = 0, \quad (11)$$

$$2(EG - F^2)(M_v - N_u) + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} - \\ - (F_v - G_u)(EN - 2FM + GL) = 0. \quad (12)$$

Вывод в произвольных координатах и тензорную запись уравнений (10)–(12) можно найти в [99].

3°. Теорема существования. Пусть в односвязной области $\mathfrak{M}$ на плоскости (u, v) заданы функции $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, $L(u, v)$, $M(u, v)$, $N(u, v)$, удовлетворяющие уравнениям (10)–(12) и неравенствам $E > 0$, $EG - F^2 > 0$. Тогда существует поверхность S , которая является погружением в $\mathbb{R}^3$ области $\mathfrak{M}$, причем первая и вторая квадратичные формы поверхности S равны соответственно

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2$$

и

$$(\vec{n}, d^2\vec{x}) = L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2.$$

Доказательство теоремы существования здесь мы не приводим, поскольку оно опирается на теорию уравнений в частных производных (его можно найти в учебнике [118]).

4*. Замечание. Теорему существования вместе с теоремой единственности из 5* §16 часто объединяют под названием «теорема Бонне».

Глава 4

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ И ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 19. Изометрия и изгибание. Теорема Гаусса

1°. Пусть S — поверхность в $\mathbb{R}^3$; X, Y — какие-нибудь точки на S . Соединим эти точки произвольной линией L , проходящей по поверхности. Символом $s(\sim XY; L)$ обозначим длину дуги XY линии L . Напомним [119], что длина дуги кривой определяется как верхняя грань длин вписанных ломаных и что длина гладкой кривой на гладкой поверхности, заданной параметрически, выражается формулой (6) § 8.

Определение. *Расстоянием* между точками X и Y на поверхности S называется величина

$$\rho(X, Y) = \inf_L s(\sim XY; L), \quad (1)$$

где нижняя грань берется по всевозможным линиям $L \subset S$, проходящим через X и Y .

Обратим внимание на то, что даже в случае элементарной поверхности, когда X, Y можно рассматривать как точки пространства $\mathbb{R}^3$, расстояние $\rho(X, Y)$, измеренное на поверхности, не равно пространственному расстоянию $|\overrightarrow{XY}|$ между точками X и Y ; ($|\overrightarrow{XY}| \leq \rho(X, Y)$; см. рис. 116). Не исключено (в случае негладкой поверхности), что $\rho(X, Y) = +\infty$.

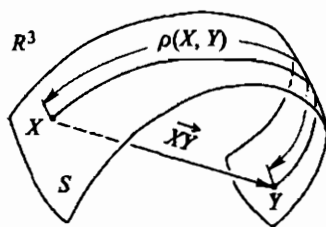


Рис. 116

Используя определение длины кривой и формулу (1), нетрудно проверить, что:

1) $\rho(X, Y) \geq 0$, причем $\rho(X, Y) = 0$ тогда и только тогда, когда $X = Y$;

2) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$;

3) $\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) \geq \rho(X, Z)$ для любых трех точек X, Y, Z на S .

Иначе говоря, соблюдаются так называемые аксиомы метрического пространства.

Таким образом, поверхность S представляет собой метрическое пространство, в котором расстояние выражается формулой (1).

Совокупность тех свойств поверхности, которые зависят лишь от длин линий на ней, называют *внутренней геометрией поверхности*. Нетрудно понять, что элементарная планиметрия представляет собой внутреннюю геометрию евклидовой плоскости. Внутренняя геометрия произвольной поверхности S может весьма сильно отличаться от евклидовой планиметрии. Так, например, на плоскости для любых двух точек X, Y существует единственная линия, длина которой равна $\rho(X, Y)$ (отрезок XY). Линия, на которой достигается нижняя грань (1), называется *кратчайшей*. Для точек X, Y произвольной поверхности S кратчайшая может быть не единственна: их может быть конечное число (например, две, см. рис. 117), а также бесконечное множество (см. рис. 118, на котором X и Y — диаметрально противоположные точки сферы, а кратчайшие — полуокружности больших кругов). Возможно также, что кратчайшая отсутствует вовсе (см., например, рис. 119, на котором в качестве S взято открытое кольцо на плоскости; нижняя грань (1) в этом примере достигается на линии, не принадлежащей S и показанной пунктиром). Подробнее о затронутых здесь вопросах см. гл. 1 книги [2].

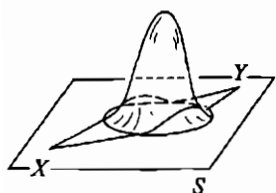


Рис. 117

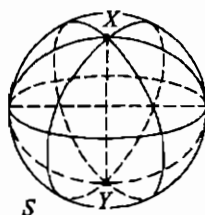


Рис. 118

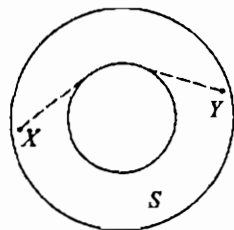


Рис. 119

Замечание. О кратчайших фактически уже шла речь выше, в п. 6° § 3, когда обсуждалось построение триангуляции на поверхности с целью определения ее площади.

2°. Выше, в § 8–9, мы видели, что через длины линий определяется первая квадратичная форма ds^2 , а через коэффициенты ds^2 выражаются углы между линиями и площади областей на поверхности. Таким образом, углы и площади на поверхности относятся к ее внутренней геометрии. Наша дальнейшая цель — выяснить, какие еще свойства поверхности относятся к ее внутренней геометрии и познакомиться с тем, как влияет внутренняя геометрия на пространственную форму поверхности. Отметим, что вопрос о влиянии внутренней геометрии на другие свойства поверхности относится к числу тех разделов геометрии, разработка которых продолжается в настоящее время.

3°. Определение. Две гомеоморфные поверхности называются *изометричными*, если между ними можно установить такой

гомеоморфизм, при котором соответствующие линии имеют равные длины.¹⁾

Такое соответствие между поверхностями называется *изометрией*. Из определения следует, что изометричные поверхности имеют одинаковую внутреннюю геометрию.

4°. Достаточное условие изометрии. Пусть поверхности S_1 и S_2 заданы вектор-функциями $\vec{X}_1(u, v)$ и $\vec{X}_2(u, v)$ класса C^1 с одной и той же областью определения $\mathcal{M}$ на плоскости (u, v) . Если коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей S_i в координатах u, v одинаковы, т. е.

$$E_1(u, v) = E_2(u, v), \quad F_1(u, v) = F_2(u, v), \quad G_1(u, v) = G_2(u, v) \quad (2)$$

для всех $(u, v) \in \mathcal{M}$, то поверхности S_1 и S_2 изометричны.

Доказательство. Будем считать, что точке $X_1 \in S_1$ с координатами (u, v) соответствует на S_2 точка X_2 с теми же координатами (u, v) . Пусть кривая $\mathcal{L}$ на S_1 задается уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t_1 < t < t_2, \quad (3)$$

причем u_t, v_t непрерывны. Соответствующая ей кривая $\mathcal{L}_2$ на S_2 задается теми же уравнениями (3) и вследствие равенств (2) имеет такую же длину, как $\mathcal{L}_1$:

$$\begin{aligned} s(\mathcal{L}_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E_1(u, v) u_t^2 + 2F_1(u, v) u_t v_t + G_1(u, v) v_t^2} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E_2(u, v) u_t^2 + 2F_2(u, v) u_t v_t + G_2(u, v) v_t^2} dt = s(\mathcal{L}_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Изометрия установлена.

Замечание. Строго говоря, равенство (4) нужно еще распространить на нерегулярные кривые (например, путем аппроксимации их регулярными), но мы не будем углубляться в рассмотрение этого вопроса.

5°. Пусть поверхности S_1 и S_2 изометричны. Предположим, что на них можно ввести координатные системы с соблюдением следующих условий:

1) вектор-функции $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$, задающие S_1 и S_2 , имеют одну и ту же область определения $\mathcal{M}$ на плоскости аргументов u, v ;

¹⁾ Здесь допускаются и непрямоугольные кривые [119]; длина непрямоугольной кривой считается равной бесконечности.

2) точки, соответствующие по изометрии, имеют одинаковые координаты;

3) $\vec{X}_i(u, v) \in C^1$ в $\mathcal{M}$, $|\vec{X}_{iu} \times \vec{X}_{iv}| \neq 0$, $i = 1, 2$.

Тогда в координатах u, v соблюдаются равенства (2).

Докажем это. Возьмем на S какую-нибудь дугу u -линии:

$$a < u < b, \quad v = v_0 \quad (5)$$

и соответствующую ей дугу на S_2 . Эти дуги имеют равные длины, поэтому

$$\int_a^b E_1(u, v_0) du = \int_a^b E_2(u, v_0) dv. \quad (6)$$

При сделанных предположениях функции E_1 и E_2 непрерывны в $\mathcal{M}$, а равенство (6) должно соблюдаться при любом выборе чисел a, b, v_0 (таком, чтобы отрезок (5) на плоскости (u, v) находился в $\mathcal{M}$). Отсюда следует, что

$$E_1(u, v) = E_2(u, v) \quad (7)$$

всюду в $\mathcal{M}$. Аналогично, рассматривая дуги v -линий, устанавливаем равенство

$$G_1(u, v) = G_2(u, v) \quad (8)$$

для всех $(u, v) \in \mathcal{M}$. Теперь рассмотрим дуги вида

$$a < u < b, \quad v = u + c \quad (9)$$

на S_1 и S_2 . Равенство их длин запишется так:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{E_1(u, u+c) + 2F_1(u, u+c) + G_1(u, u+c)} du = \\ = \int_a^b \sqrt{E_2(u, u+c) + 2F_2(u, u+c) + G_2(u, u+c)} du. \end{aligned} \quad (10)$$

Вследствие произвольности чисел a, b, c и непрерывности подынтегральных функций в (10) всюду в $\mathcal{M}$ имеем:

$$\sqrt{E_1 + 2F_1 + G_1} = \sqrt{E_2 + 2F_2 + G_2}. \quad (11)$$

Из (7), (8) и (11) получаем: $F_1(u, v) = F_2(u, v)$. Утверждение доказано.

Однако если изометричные поверхности даны, то заранее не ясно, будут ли соблюдаться условия, перечисленные в начале этого пункта. Можно доказать, что локально их можно обеспечить для изометричных поверхностей класса C^2 . Доказательство этого довольно сложно, и излагать его мы не будем. Тем не менее, имея дело с изометричными поверхностями, мы будем считать, что условия 1)–3) соблюдены.

6°. Важное замечание. При изучении локальных свойств, общих для изометрических поверхностей, можно ограничиться их рассмотрением в ортогональных координатах. В самом деле, если дана совокупность изометрических поверхностей, для которых соблюдаются условия пункта 4°, то можно воспользоваться построением п. 5° § 14 и на всех поверхностях одновременно перейти к новой параметризации с ортогональной координатной сетью. При этом точки, соответствующие по изометрии, будут иметь равные новые координаты, а равенства вида (2) сохранятся, поскольку коэффициенты ds^2 преобразуются на всех поверхностях по одному и тому же закону. В ортогональных координатах u, v можно ds^2 записать так:

$$ds^2 = A^2(u, v) du^2 + B^2(u, v) dv^2. \quad (12)$$

7°. Теорема Гаусса. *На изометрических поверхностях в точках, соответствующих по изометрии, равны гауссовы кривизны.*

Доказательство. Учитывая сказанное в предыдущих пунктах, нам достаточно проверить, что гауссова кривизна K может быть выражена через коэффициенты первой квадратичной формы (12). Но это сразу следует из уравнения Гаусса (см. (8) § 18), которое можно переписать в виде

$$K = -\frac{1}{AB} \left[\left(\frac{A_v}{B} \right)_v + \left(\frac{B_u}{A} \right)_u \right]. \quad (13)$$

Следствие. *Для изометрии двух поверхностей необходимо, чтобы между ними существовал гомеоморфизм, при котором гауссовы кривизны в соответствующих друг другу точках были бы равны.*

Замечания. 1). Сформулированную в этом пункте теорему Гаусс доказал в связи со своими работами по съемке и составлению географических карт. Тем самым он установил, что поверхность Земли нельзя изобразить на плоскости без искажений.

2). Используя производные по длине дуги координатных линий

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial v}$$

можно формуле (13) придать другой вид, более удобный для запоминания:

$$K = -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial s_2^2} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial s_1^2}. \quad (13a)$$

3). Обратим еще внимание на то, что при переходе на поверхности S от одних ортогональных координат (u, v) к другим координатам $(\tilde{u}, \tilde{v})$, тоже ортогональным, первая квадратичная форма ds^2 сохранит свой канонический вид (12), хотя функции A и B изменятся. Вместе с тем,

формулы (13) и (13а) для K останутся в силе; в этом смысле обе эти формулы инвариантны относительно замен переменных в классе ортогональных координатных систем на S . То же самое относится и к уравнениям (9) из § 18 — эта форма их записи инвариантна относительно преобразований ортогональных координат на поверхности.

8°. Важным частным случаем изометрии является так называемое *изгибание* поверхности. Говорят, что поверхность S изгибается, если она включена в семейство изометричных между собой поверхностей $\{S(t)\}$, непрерывно зависящих от параметра t .

Если все поверхности $S(t)$ получаются из S движением ее в пространстве как твердого тела, то изгибание называется *тривиальным*. В противном случае изгибание называется *нетривиальным*. Поверхность называется *неизгибаемой*, если она не допускает нетривиальных изгибаний. Дело в том, что движения заведомо возможны, если не поставлены какие-либо условия закрепления. Поэтому поверхность называют *изгибаемой* именно тогда, когда она допускает нетривиальные изгибания.

Наглядно можно представлять себе изгибание как непрерывную деформацию в пространстве гибкой нерастяжимой пленки с течением времени t .

Изучение изгибаний поверхности и деформаций, близких к изгибаниям, имеет важное значение для расчета тонкостенных конструкций (оболочек). В связи с этим см. [26, 36, 93, 94], а также гл. 7 и указанные в ней библиографические ссылки.

Примеры изгибаний рассмотрены ниже в пп. 12° и 14°.

Сейчас мы займемся более точной формулировкой понятий «семейство поверхностей» и «изгибание поверхности».

9°. СЕМЕЙСТВО ПОВЕРХНОСТЕЙ. Пусть дано (двумерное) многообразие $\mathcal{M}$ и промежуток J числовой оси. В качестве J может служить замкнутый отрезок, интервал, полуинтервал, открытый или замкнутый луч или вся числовая прямая. Рассмотрим произведение $\mathcal{M} \times J$. Его точками являются всевозможные пары вида $\{Q, t\}$, где $Q \in \mathcal{M}$, $t \in J$. Предположим, что задано непрерывное отображение f произведения $\mathcal{M} \times J$ в пространство $\mathbb{R}^3$. Символически запишем его так:

$$f(Q, t) = Z \quad (14)$$

($Q \in \mathcal{M}$, $t \in J$, $Z \in \mathbb{R}^3$). При каждом фиксированном $t \in J$ формула (14) задает отображение многообразия $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^3$, которое мы обозначим $f_{<t>}$. Оно действует согласно формуле

$$f_{<t>}(Q) = f(Q, t). \quad (15)$$

Пусть каждое из отображений (15) локально гомеоморфно; тогда оно задает некоторую поверхность $S = S(t)$. Совокупность таких по-

верхностей называют *семейством поверхностей*. Обозначим его символом $\{S(t)\}$.

Пример. Пусть $\mathcal{M}$ — открытый круг $u^2 + v^2 < a^2$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ (рис. 120, а), J — отрезок вида $b \leq t \leq c$, где $b > 0$ (рис. 120, б). Произведение $\mathcal{M} \times J$ представляет собой цилиндрическое тело $x^2 + y^2 < a^2$, $b \leq t \leq c$ в пространстве переменных u, v, t (рис. 120, в). На рис. 120, г показаны три поверхности семейства

$$x = \frac{u}{t}, \quad y = \frac{v}{t}, \quad z = t(u^2 + v^2 + 1), \quad (u, v, t) \in \mathcal{M} \times J.$$

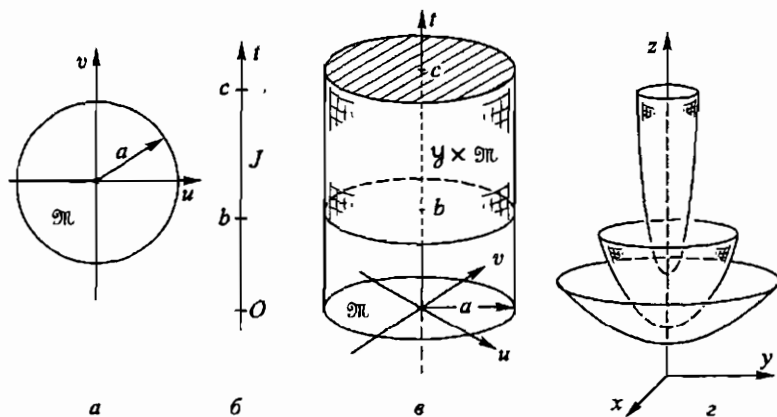


Рис. 120

10*. Определение. Семейство поверхностей $\{S(t)\}$ называется *изгибанием*, если

- 1) для каждого $t \in J$ отображение $f_{<t>} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ является погружением;
- 2) поверхности $S(t_1)$ и $S(t_2)$ при любых $t_1, t_2 \in J$ *изометричны*;
- 3) каждой точке $Q \in \mathcal{M}$ на разных $S(t)$ отвечают точки, соответствующие друг другу по изометрии.

Зафиксируем какое-нибудь $t \in J$ и введем обозначение $S(t_0) = S_0$. Если изгибание $\{S(t)\}$ задано, то говорят также, что имеет место изгибание поверхности S_0 в любую из поверхностей $S(t)$.

Теорема (достаточное условие изгибания). Пусть $\mathcal{M}$ — область на плоскости (u, v) , J — промежуток на оси t . Пусть на произведении $\mathcal{M} \times J$ задана непрерывная вектор-функция

$$\vec{X} = \vec{X}(u, v, t) \quad (16)$$

такая, что:

а) $\vec{X} \in C^1$ как функция аргументов (u, v) при каждом фиксированном t ;

б) $|\vec{X}_u \times \vec{X}_v| \neq 0$ всюду на $\mathcal{M} \times J$;

в) первая квадратичная форма поверхности $S(t)$, задаваемой уравнением (16) при фиксированном t , от выбора t не зависит; иначе говоря,

$$E(u, v, t) = E(u, v), \quad F(u, v, t) = F(u, v), \quad G(u, v, t) = G(u, v). \quad (17)$$

Тогда вектор-функция (16) задает изгибание $\{S(t)\}$.

Доказательство теоремы следует из определения изгибания и из п. 4°.

Замечания. 1). Аналогично п. 6° можно считать (при локальных рассматриваниях), что $F(u, v) = 0$, а ds^2 для всех поверхностей $S(t)$ дается формулой (12).

2). В зависимости от регулярности вектор-функции $\vec{X}$ (определенной на $\mathcal{M} \times J$ и задающей изгибание) по параметру t , по локальным координатам u, v на многообразии $\mathcal{M}$ и по совокупности переменных (u, v, t) выделяются разные классы изгибаний. Чтобы не усложнять изложения, будем предполагать, что $\vec{X} \in C^\infty$ (по совокупности всех аргументов) и говорить при этом, что изгибание задано в классе регулярных поверхностей.

11°. Укажем еще два следствия из теоремы Гаусса.

Следствие 1. При изгибании поверхности для каждой ее точки сохраняется произведение главных кривизн, а для каждой области сохраняется площадь сферического образа.

Следствие 2. Если поверхность S неразвертывающаяся (т. е. K на S не равно нулю тождественно), то поверхность S нельзя изгибанием наложить на плоскость.

12°. ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ КАСАТЕЛЬНЫХ. Пусть $\mathcal{L}$ — пространственная кривая с кривизной $k > 0$, заданная натуральными уравнениями

$$k = k(u), \quad \kappa = \kappa(u), \quad u_1 < u < u_2, \quad (18)$$

где κ — кручение, ¹⁾ u — натуральный параметр. Радиус-вектор текущей точки Y на $\mathcal{L}$ обозначим через $\vec{Y}(u)$, орт касательной в этой

¹⁾ Кручение можно определить равенством $\kappa = (\vec{\nu}_u, \vec{\beta})$, где $\vec{\beta} = [\vec{\tau} \times \vec{\nu}]$ — так называемый орт бинормали, u — как и выше, натуральный параметр на $\mathcal{L}$. Из теории кривых известно [31, 91, 99], что при $k(u) \neq 0$ натуральные уравнения (18) задают кривую $\mathcal{L}$ однозначно с точностью до движения в пространстве, а если $\kappa(u) = 0$ на всем интервале (u_1, u_2) , то кривая $\mathcal{L}$ расположена в некоторой плоскости.

точке — через $\vec{\tau}(u)$. Из точки Y проведем луч касательной в направлении вектора $\vec{\tau}$. Точку Y к лучу причислять не будем, т. е. будем рассматривать открытый луч. Геометрическое место точек всех таких лучей обозначим через S (см. рис. 121, на котором изображена часть поверхности S). Пусть точка $Z \in S$ расположена на луче, исходящем из точки Y , соответствующей значению u параметра на $\mathcal{L}$. Обозначим через v длину отрезка YZ и примем u и v за координаты точки Z на S . Тогда уравнение поверхности S запишется в виде

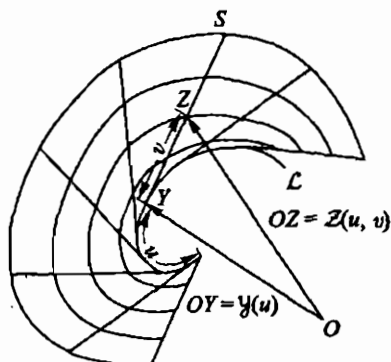


Рис. 121

$$\vec{Z}(u, v) = \vec{\gamma}(u) + v\vec{\tau}(u),$$

$$u_1 < u < u_2, \quad 0 < v < +\infty.$$

(19)

Поверхность, образованную касательными к пространственной кривой, называют «торсом».

Найдем гауссову кривизну и первую квадратичную форму поверхности S . Учитывая, что $\vec{\gamma}_u = \vec{\tau}$, $\vec{\tau}_u = k\vec{\nu}$, где $\vec{\nu}$ — орт главной нормали линии $\mathcal{L}$, из (19) находим

$$\vec{Z}_u = \vec{\tau}(u) + vk(u)\vec{\nu}(u), \quad \vec{Z}_v = \vec{\tau}(u) \quad (20)$$

и, далее,

$$\vec{Z}_{uv} = k(u)\vec{\nu}(u), \quad \vec{Z}_{vv} = \vec{\theta}. \quad (21)$$

Из (20) и (21) следует, что $(\vec{Z}_{uv}, \vec{Z}_u, \vec{Z}_v) = 0$ и $(\vec{Z}_{vv}, \vec{Z}_u, \vec{Z}_v) = 0$, поэтому $M = N = 0$, так что $K = 0$. Из (20) находим

$$ds^2 = (1 + k^2(u)v^2)du^2 + 2dudv + dv^2. \quad (22)$$

Обратим внимание на то, что ds^2 не зависит от кручения $\kappa(u)$ и линии $\mathcal{L}$.

Рассмотрим теперь семейство кривых $\mathcal{L}(t)$, зависящих от параметра t и задаваемых натуральными уравнениями

$$k = k(u), \quad \kappa = t \cdot \kappa(u),$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad u_1 < u < u_2, \quad (23)$$

где $k(u)$, $\kappa(u)$ — функции, входящие в (18). При $t = 1$ уравнения (23) превращаются в (18). При $t = 0$ уравнения (23) задают некоторую плоскую кривую. Для каждого значения t построим аналогично предыдущему поверхность $S(t)$, образованную лучами касательных. Все поверхности $S(t)$ имеют одну и ту же первую квадратичную форму (22). Наложим дополнительное условие на их расположение в

пространстве $\mathbb{R}^3$, обеспечивающее непрерывность по t вектор-функции, задающей $S(t)$. Тогда $\{S(t)\}$ будет изгибанием. Для этого зафиксируем какую-нибудь точку $u = u_0$ на $\mathcal{L}(t)$ и триэдр Френе $\{\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\}$ в этой точке.

Поверхность $S(0)$ является плоской, поскольку все касательные плоской кривой $\mathcal{L}(0)$ лежат в плоскости этой кривой. Таким образом, поверхность $S = S(1)$, задаваемая формулой (19), допускает изгибание на плоскость (точнее, на некоторую плоскую область, возможно, имеющую самоналожения); говорят поэтому, что она *развертывающаяся*.

13*. Как было отмечено выше (§ 13*, п. 2°) цилиндрические и конические поверхности тоже имеют $\mathcal{K} = 0$. Предлагаем читателю доказать, что у любой цилиндрической поверхности достаточно малая окрестность произвольной точки допускает изгибание на плоскость. Таким же свойством обладают и конические поверхности (если исключить из рассмотрения точку пересечения образующих — вершину конуса).

Можно показать, что цилиндрические поверхности, конические и торсы в некотором смысле являются типичными представителями развертывающихся поверхностей; с таким исследованием читатель может ознакомиться по книге [99].

Благодаря свойству развертываемости на плоскость поверхности нулевой гауссовой кривизны находят важные применения в технике [64].

14*. СВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ. Пусть на вспомогательной плоскости в декартовых координатах (ρ, z) дана кривая $\rho = r(u)$, $z = f(u)$, где u — натуральный параметр, так что $r_u^2 + f_u^2 = 1$. Эта кривая включается при $t = 1$ в семейство кривых $\{\mathcal{L}(t)\}$, полученное на плоскости (ρ, z) следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho(u, t) &= t r(u), \\ z(u, t) &= f(u_0) + \int_{u_0}^u \sqrt{1 - t^2 r_u^2(\xi)} d\xi.\end{aligned}\quad (24)$$

Тогда

$$z_u^2 + \rho_u^2 = 1 - t^2 r_u^2 + t^2 r_u^2 = 1, \quad (25)$$

т.е. u остается в качестве натурального параметра для всех кривых семейства. Построим семейство поверхностей вращения $S(t)$ кривых $\mathcal{L}(t)$ вокруг оси z . Каждую из поверхностей $S(t)$ зададим уравнением

$$\vec{X} = \{x, y, z\} = \{\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z\}, \quad (26)$$

где ρ и z определяются формулами (24),

$$\varphi = \frac{v}{t}, \quad u_1 < u < u_2, \quad v_1 < v < v_2, \quad 0 < t \leq 1. \quad (27)$$

Замечание. При $t \rightarrow 0$ кривые $\mathcal{L}(t)$ на плоскости (ρ, z) приближаются к отрезку оси z (рис. 122) и вместе с тем все ближе к оси z

в пространстве (x, y, z) располагаются поверхности $S(t)$. В то же время область изменения угла φ :

$$\frac{v_1}{t} < \varphi < \frac{v_2}{t}$$

увеличивается. Геометрически это означает, что при $t \rightarrow 0$ поверхность $S(t)$ свертывается в рулон, все более и более туго закрученный вокруг оси z (рис. 123). При $t = 0$ рулон превращается в прямолинейный отрезок.

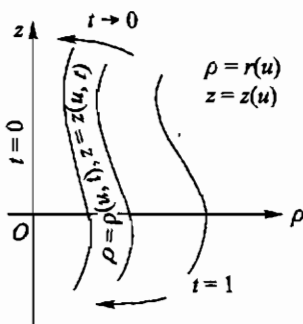


Рис. 122

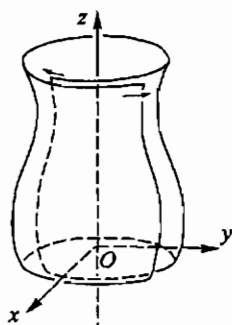


Рис. 123

Вычислим ds^2 . Из (26) и (27), учитывая (25), находим

$$\vec{X}_u = \{\rho_u \cos \varphi, \rho_u \sin \varphi, z_u\}, \quad (28)$$

$$\vec{X}_v = \left\{-\frac{1}{t} \rho \sin \varphi, \frac{1}{t} \rho \cos \varphi, 0\right\} = \{-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0\}. \quad (29)$$

Скалярное произведение векторов (28) и (29) дает

$$E(u, v, t) = \rho_u^2 + z_u^2 = 1, \quad F = 0, \quad G = r^2(u).$$

Итак,

$$ds^2 = du^2 + r^2(u) dv^2 \quad (30)$$

на всех поверхностях вращения (26). Таким образом, рассматриваемое семейство $\{S(t)\}$ представляет собой нетривиальное изгибание.

15*. Обсуждая изгибания поверхностей, естественно поставить вопрос: что произойдет с поверхностью, если на ней будут изменяться длины линий?

Однозначного ответа дать нельзя: поверхность может не измениться вовсе. Простым примером служит гомотетия на плоскости — длины изменяются, а плоскость переходит в себя. Аналогичные примеры с другими поверхностями читатель легко построит самостоятельно.

Однако можно указать достаточные условия, при которых изменение длин линий на поверхности неизбежно повлечет изменение ее пространственной формы.

В частности, пусть дано преобразование $f: S \rightarrow \tilde{S}$, в результате которого произвольная точка $X \in S$ переходит в точку $\tilde{X} = f(X) \in \tilde{S}$, и пусть известно, что в результате преобразования f первая квадратичная форма изменяется так, что $\inf_{\tilde{S}} K > \sup_S K$ (либо наоборот, $\sup_{\tilde{S}} K < \inf_S K$). Тогда поверхности S и $\tilde{S}$ заведомо не конгруэнтны, так как они не изометричны вследствие теоремы Гаусса.

Примеры мы видим во время осеннего листопада: опавшие листья растений, засыхая, скрючиваются из-за того, что изменяется их внутренняя геометрия (длины линий на них).

Еще пример из мира растений. У кочанной капусты в процессе роста тоже изменяется внутренняя геометрия листьев, причем так, что гауссова кривизна (13) становится положительной, а потом продолжает увеличиваться. Соответственно этому меняется их пространственная форма: ее листья делаются выпуклыми. «Правильное» прикрепление к стеблю обеспечивает «нужное» расположение листьев — они обращены выпуклостью кнаружи от стебля. В итоге листья заворачиваются в кочан.

16*. Современные технологии позволяют во многих случаях целенаправленно изменять внутреннюю геометрию гибкого тонкого листового материала.

В этой связи встает задача: научиться осуществлять это так, чтобы изменение пространственной формы протекало по заданной программе.

Отметим, что здесь понадобится исследовать и решать краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными и как итог таких исследований давать технологам инструкции по поводу условий (возможно, зависящих от времени), которые потребуются обеспечивать на краю деформируемой поверхности. При этом встретятся уравнения, на тип которых влияет знак гауссовой кривизны K [56, 113]. Для поверхностей со знакопеременной кривизной придется иметь дело с уравнениями смешанного типа, что обычно математически труднее. Таким образом, для начинающих геометров здесь имеется широкое поле деятельности.

§ 20*. Неизгибаемость сферы

1°. Покажем теперь, что не всякая поверхность изгибаема. Например, справедлива

Теорема Либмана. В классе регулярных поверхностей сфера неизгибаема.

Сначала (в пп. 2°–3°) установим две леммы, затем перейдем к доказательству теоремы.

2°. Пусть k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности. Тогда имеет место

Лемма 1. На поверхности положительной гауссовой кривизны не может быть такой точки, где k_1 имеет локальный максимум, k_2 имеет локальный минимум и $k_1 > k_2$.

Доказательство. Пусть на поверхности S гауссовой кривизны $K > 0$ имеется точка X , где $k_1 > k_2$. Такая точка не является омбилической, поэтому в некоторой ее окрестности можно ввести координаты (u, v) , приняв за координатную сеть линии кривизны. Пусть $u = u_0$, $v = v_0$ в точке X .

Предположим теперь, что в рассматриваемой точке главная кривизна k_1 имеет максимум, k_2 имеет минимум. Тогда при $u = u_0$, $v = v_0$ соблюдаются соотношения

$$\begin{aligned} (k_1)_u &= (k_1)_v = 0, & (k_1)_{vv} &\leq 0, \\ (k_2)_u &= (k_2)_v = 0, & (k_2)_{uu} &\geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Для этого используем уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци. Прежде всего, пользуясь специальным выбором координатной сети, преобразуем уравнения Петерсона–Кодацци. Мы имеем

$$M(u, v) = 0, \quad (2)$$

поскольку u -линии и v -линии являются линиями кривизны. Не ограничивая общности, можем считать, что k_1 — нормальная кривизна u -линии, k_2 — нормальная кривизна v -линии, так что $k_1 = \frac{L}{A^2}$, $k_2 = \frac{N}{B^2}$, и потому

$$\frac{L}{A} = A k_1, \quad \frac{N}{B} = B k_2 \quad (3)$$

(здесь, как и ранее, $A = \sqrt{E}$, $B = \sqrt{G}$). Подставив (2) и (3) в уравнения (9) § 18, после надлежащей перегруппировки членов получим

$$\begin{aligned} (k_1)_v &= -\frac{A_v}{A}(k_1 - k_2), \\ (k_2)_u &= \frac{B_u}{B}(k_1 - k_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Из (1) и (4) следует, что

$$A_v(u_0, v_0) = B_u(u_0, v_0) = 0. \quad (5)$$

Первое из уравнений (4) продифференцируем по v , второе — по u . Учитывая (1), (5) и неравенства $k_1 > k_2$, $A > 0$, $B > 0$, установим, что

$$A_{vv}(u_0, v_0) \geq 0, \quad B_{uu}(u_0, v_0) \geq 0. \quad (6)$$

Теперь воспользуемся уравнением Гаусса. Подставив (5) и (6) в формулу (13) § 19, обнаружим, что

$$K(u_0, v_0) = -\frac{1}{AB} \left(\frac{A_{vv}}{B} + \frac{B_{uu}}{A} \right) \bigg|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \leq 0. \quad (7)$$

Неравенство (7) противоречит положительности K на S . Лемма 1 доказана.

Замечание. Рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 1, применимы в предположении, что $S \in C^6$. Такая регулярность поверхности гарантирует, что в рассматриваемых координатах (u, v) радиус-вектор ее текущей точки $\vec{X} = \vec{X}(u, v) \in C^4$ (см. выше § 12, п. 5°). Это позволяет не только выписать уравнения Петерсона–Кодацци, но и продифференцировать их один раз по аргументам u, v .

3°. Лемма 2. Пусть на поверхности S , имеющей гауссову кривизну $K = 1$, каждая точка является шаровой. Тогда поверхность S является сферической и ее носитель находится на сфере единичного радиуса.

Доказательство. В условиях леммы 2 нормальная кривизна в любой точке по любому направлению равна по абсолютной величине единице, а каждая гладкая линия на S является линией кривизны.

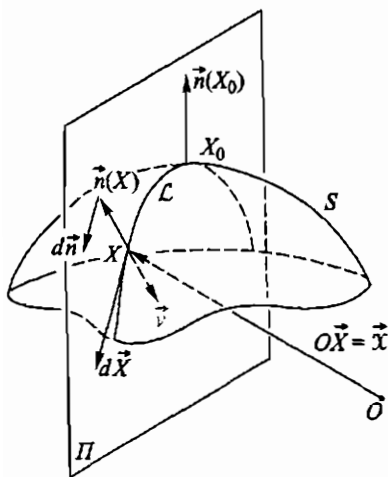


Рис. 124

Через произвольную точку $X_0 \in S$ проведем какое-нибудь нормальное сечение $\mathcal{L}$, плоскость которого обозначим через Π . Кривизна k линии $\mathcal{L}$ заведомо отлична от нуля ($k \geq |k_n| = 1$), поэтому во всех ее точках определен орт главной нормали $\vec{v}$ (рис. 124). Обратим внимание на то, что вектор $d\vec{X}$, направленный по касательной к $\mathcal{L}$, и вектор $\vec{v}$ расположены в плоскости Π .

Применяя к $\mathcal{L}$ теорему Родрига, мы видим, что при смещении по $\mathcal{L}$ вектор $d\vec{n}$ коллинеарен $d\vec{X}$ и потому расположен в плоскости Π . Кроме того, в плоскости Π по построению расположен вектор $\vec{n}(X_0)$.

Следовательно, для любой точки $X \in \mathcal{L}$ вектор

$$\vec{n}(X) = \vec{n}(X_0) + \int_{X_0 X} d\vec{n}$$

тоже содержится в плоскости Π (здесь $\smile X_0X$ — дуга линии $\mathcal{L}$, см. рис. 124).

Итак, $\vec{n} \parallel \vec{\nu}$ всюду на $\mathcal{L}$ (оба вектора $\vec{n}$ и $\vec{\nu}$ ортогональны $d\vec{X}$ и содержатся в плоскости Π). Поэтому кривизна линии $\mathcal{L}$ равна по модулю ее нормальной кривизне:

$$k = |k_n| = 1.$$

Таким образом, $\mathcal{L}$ — плоская кривая с кривизной, равной единице, т.е. дуга окружности единичного радиуса.

Сечение $\mathcal{L}$ можно провести через точку X_0 в любом направлении. Поэтому из проведенных выше рассуждений следует, что некоторая окрестность точки X_0 на S представляет собой сферический сегмент единичного радиуса (рис. 125).

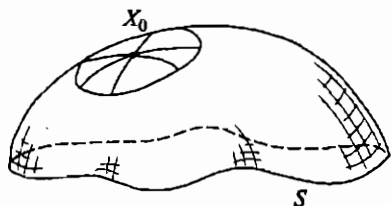


Рис. 125

Пусть теперь Y — любая точка на S , отличная от X_0 . Построим на S кривую ℓ , проходящую через X_0 и Y . Для каждой точки линии ℓ найдется окрестность, представляющая собой сферический сегмент единичного радиуса. Выберем из таких окрестностей конечное покрытие $U_1, U_2, \dots, U_m$ дуги X_0Y линии ℓ (рис. 126). Из элементарно-геометрических соображений ясно, что две пересекающиеся окрестности такого покрытия имеют не только одинаковый радиус, но и общий центр C (рис. 127). Переходя от U_1 к U_2 , затем к U_3 и т.д., мы видим, что дуга X_0Y целиком расположена на одной сфере. Ввиду произвольности точки Y отсюда следует, что носитель поверхности S расположен на этой сфере.

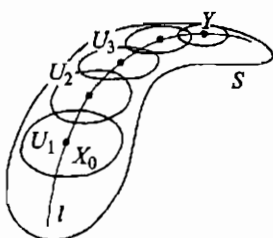


Рис. 126

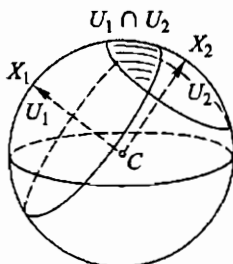


Рис. 127

Замечание. В условиях леммы 2 поверхность S может иметь самопересечения (точнее — «самоналожения», рис. 128).

4°. Доказательство теоремы. Пусть дана сфера $\mathcal{G}$. Не ограничивая общности, можно считать, что ее радиус равен единице, так что $k = 1$ на ней (этого можно добиться выбором масштаба в простран-

стве $\mathbb{R}^3$) Предположим, что S — поверхность, полученная в результате изгибания сферы $\mathcal{G}$. Для упрощения дальнейших рассуждений будем считать, что S не имеет самопересечений.

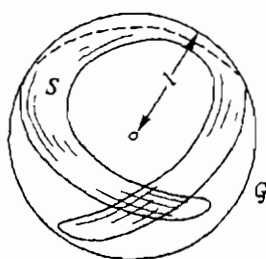


Рис. 128

Введем обозначения: $\vec{X} = \overrightarrow{OX}$ — радиус-вектор текущей точки X поверхности S ; k_1, k_2 — главные кривизны поверхности S в точке X , $k_1 \geq k_2$; P — та точка сферы $\mathcal{G}$, которая переходит в точку X в результате изгибания.

Можно считать, что

$$\vec{X} = \vec{X}(P), \quad k_1 = k_1(P), \quad k_2 = k_2(P); \quad (8)$$

при этом функции (8) определены и непрерывны на всей сфере $\mathcal{G}$.

По известной теореме Вейерштрасса непрерывная функция (в данном случае $k_1(P)$), заданная на замкнутом ограниченном множестве (в данном случае на $\mathcal{G}$), достигает максимума на этом множестве (в некоторой точке $P_0 \in \mathcal{G}$):

$$k_1(P_0) = \max_{P \in \mathcal{G}} k_1(P).$$

Вследствие теоремы Гаусса об инвариантности K при изгибании поверхности имеем $k_1 k_2 = 1$. поэтому

$$k_1(P) \geq 1 \geq k_2(P) = \frac{1}{k_1(P)}. \quad (9)$$

Из соотношений (9) и леммы 1 следует, что $k_1(P_0) = 1$, а вместе с тем

$$k_1(P) = k_2(P) = 1 \quad (10)$$

тождественно. Из (10) и леммы 2 следует, что носитель поверхности S расположен на некоторой сфере $\mathcal{G}'$ единичного радиуса. Поскольку S не имеет самопересечений, она либо совпадает со сферой $\mathcal{G}'$, либо один раз покрывает некоторую часть этой сферы. Однако последнее невозможно из-за того, что S замкнута и потому не имеет края. Итак, $S = \mathcal{G}'$, значит, изгибание тривиально.

5*. В предыдущем пункте фактически доказано следующее предположение.

Если поверхность S (класса C^n при достаточно большом n) не имеет самопересечений и изометрична сфере некоторого радиуса r , то она сама является сферой того же радиуса r .

Пользуясь тем, что мы имеем дело с изгибанием, можно избавиться от предположения об отсутствии самопересечений. Наглядно это ясно: для того, чтобы в процессе изгибания сферы могло возникнуть самопересечение поверхности, сфера должна была бы сначала подвергнуться некоторому нетривиальному изгибанию, а это невозможно по доказан-

ному в предыдущем пункте. Тем самым доказательство теоремы будет завершено.

Для обоснования приведенных здесь наглядных соображений нужно воспользоваться регулярностью вектор-функции $\vec{X} = \vec{X}(P, t)$, задающей изгибание (здесь P — произвольная точка сферы $\mathcal{G}$, t — числовой аргумент). Однако на таком обосновании мы не будем останавливаться.

6*. Используя рассуждения п. 4° и дополнительные сведения из топологии, можно доказать, что регулярная поверхность, изометричная сфере, является сферой того же радиуса (не предполагая ни отсутствия самопересечений, ни наличия изгибания $\mathcal{G}$ в S). Этот факт показывает, что в некоторых случаях поверхность однозначно определяется одной лишь первой квадратичной формой.

7*. Теорема о неизгибаемости сферы допускает широкие обобщения, с которыми читатель может познакомиться по книгам [25, 61, 92].

8°. Сфера изгибаема, если допускать изгибания с нарушением гладкости. В самом деле, в произвольной точке P сферы $\mathcal{G}$ можно провести касательную плоскость Π , а затем рассматривать такой процесс деформации: плоскость Π перемещается поступательно в направлении центра сферы, а отсекаемый ею (переменный) сегмент зеркально отражается относительно этой плоскости (рис. 129). Именно так продавливается тонкая металлическая оболочка сферической формы, если в какой-либо точке на нее действует достаточно большая внешняя нагрузка (см. [93]).

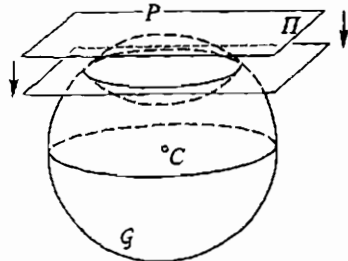


Рис. 129

9*. Существуют поверхности с особыми точками, изометричные сфере, но не допускающие изгибания на сферу. Чтобы получить такую поверхность, нужно разрезать сферу по меридиану от полюса до

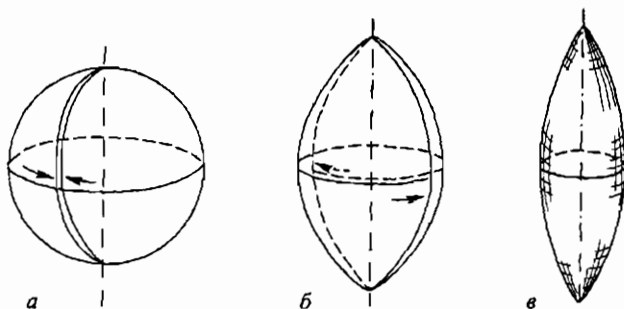


Рис. 130

полюса (рис. 130, а) и скручивать разрезанную сферу согласно п. 14* § 19 (рис. 130, б) до тех пор, пока края разреза не встретятся вновь. После этого разрез нужно склеить. Получится дважды покрытая поверхность сигарообразного тела (рис. 130, в). Прежде чем склеивать разрез, можно перекрутить разрезанную сферу не два, а n раз. Полагая $n = 2, 3, 4, \dots$, получим последовательность негладких замкнутых поверхностей, изометричных сфере.

§ 21. Геодезическая кривизна

1°. Пусть S_1 и S_2 — изометричные поверхности, $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — линии на них, соответствующие по изометрии ($\mathcal{L}_i \in S_i$). Тогда справедлива

Теорема. В точках, соответствующих по изометрии, геодезические кривизны линий $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ одинаковы.

Доказательство см. ниже, п. 2°.

Следствие. Геодезическая кривизна линий на поверхности инвариантна относительно изгибаний поверхности.

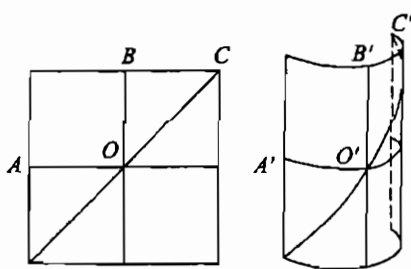


Рис. 131

ний (рис. 131). Сформулированное следствие показывает, что изменение кривизны линий на изгибающейся поверхности происходит только за счет изменения их нормальной кривизны.

Важное замечание. Подчеркнем еще раз, что здесь речь идет о кривизне линий, соответствующих друг другу по изометрии. Мы могли бы следить, например, за геодезической кривизной асимптотической линии или линии кривизны, проходящей через выбранную точку поверхности. При изгибаниях поверхности такая геодезическая кривизна, вообще говоря, не инвариантна. Дело в том, что линии кривизны и асимптотические линии, как правило, меняют свое расположение на поверхности при ее изгибаниях.

2°. Доказательство теоремы. Утверждение теоремы является локальным, поэтому можно ограничиться сколь угодно малой окрестностью рассматриваемой точки. Кроме того, можно считать (см. пп. 5° и 7° из § 14 и п. 6° из § 19), что

$$ds^2 = A^2(u, v) du^2 + B^2(u, v) dv^2 \quad (1)$$

Пояснение. При нетривиальном изгибании поверхности кривизны линий на ней, вообще говоря, изменяются. Это видно на простом примере: если кусок плоскости, изгибаясь, накладывается на круглый цилиндр, то прямолинейные отрезки (кроме тех, которые пойдут по образующим) превращаются в дуги окружностей или винтовых ли-

на S_1 и на S_2 , что линии $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ имеют уравнения $v = 0$, а точки, соответствующие по изометрии, имеют одинаковые координаты (u, v) . Поэтому для доказательства достаточно проверить, что геодезическая кривизна произвольной u -линии выражается через $A(u, v)$, $B(u, v)$ и их производные.

Геодезическую кривизну u -линии обозначим k_{g_1} . Воспользуемся тем, что

$$[\vec{n} \times \vec{\tau}_1] = \vec{\tau}_2 \quad (2)$$

(рис. 132) и что

$$(d\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) = \Omega_0, \quad (3)$$

см. (11) в § 14. Учитывая (2) и (3), находим по формуле (4) из § 10, что

$$k_{g_1} = \left(\frac{d\vec{\tau}_1}{ds}, [\vec{n} \times \vec{\tau}_1] \right) = \frac{\Omega_0}{ds}.$$

Но в данном случае

$$\begin{aligned} v = \text{const}, \quad dv = 0, \quad ds = A du; \\ \Omega_0 = -\frac{A_v du}{B} + \frac{B_u dv}{A} \Big|_{dv=0} = -\frac{A_v}{B} du, \end{aligned}$$

поэтому

$$k_{g_1} = -\frac{A_v}{AB}. \quad (4)$$

Тем самым теорема доказана.

3°. Аналогично (4) находим геодезическую кривизну k_{g_2} произвольной v -линии

$$k_{g_2} = \frac{B_u}{AB}. \quad (5)$$

Полагая

$$A du = ds_1, \quad B dv = ds_2$$

и используя (4) и (5), можно так записать дифференциальную форму Ω_0 :

$$\Omega_0 = k_{g_1} ds_1 + k_{g_2} ds_2. \quad (6)$$

Механическая интерпретация. Пусть точка движется по поверхности. Триэдр $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{n}$, перемещаясь вместе с точкой, вращается, и в его вращении можно в каждый момент времени выделить отдельные составляющие, в том числе — вращение вокруг нормали к поверхности. Формула (6) показывает, что скорость вращения триэдра $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{n}$ вокруг нормали определяется не только скоростью движения точки по поверхности, но и геодезическими кривизнами координатных линий, однако она не зависит от нормальных кривизн, т. е. от искривленности поверхности в пространстве (иначе говоря, относится к свойствам, принадлежащим внутренней геометрии поверхности).

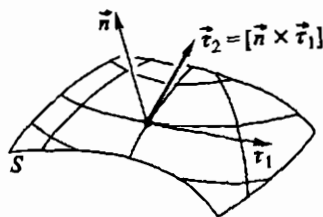


Рис. 132

4°. Выведем формулу, выражающую геодезическую кривизну k_g произвольной линии $\mathcal{L} \subset S$, считая известным угол α между u -линией и линией $\mathcal{L}$. Для этого используем тождества

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 \cos \alpha + \vec{\tau}_2 \sin \alpha \quad (7)$$

и

$$[\vec{n} \times \vec{\tau}] = \vec{\tau}_1 \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \vec{\tau}_2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\vec{\tau}_1 \sin \alpha + \vec{\tau}_2 \cos \alpha \quad (8)$$

(вектор $[\vec{n} \times \vec{\tau}]$ получается из вектора $\vec{\tau}$ поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$, см. рис. 133). Используя (8), вычислим k_g :

$$k_g = ([\vec{n} \times \vec{\tau}], \frac{d\vec{\tau}}{ds}) = \frac{-(\vec{\tau}_1, d\vec{\tau}) \sin \alpha + (\vec{\tau}_2, d\vec{\tau}) \cos \alpha}{ds}. \quad (9)$$

Дифференцируем (7):

$$d\vec{\tau} = \cos \alpha d\vec{\tau}_1 + \sin \alpha d\vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1 \sin \alpha d\alpha + \vec{\tau}_2 \cos \alpha d\alpha$$

и, учитывая, что

$$\begin{aligned} (\vec{\tau}_i, d\vec{\tau}_i) &= 0, \quad i = 1, 2, \quad (\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) = 0, \\ (\vec{\tau}_2, d\vec{\tau}_1) &= -(\vec{\tau}_1, d\vec{\tau}_2) = \Omega_0, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} (\vec{\tau}_1, d\vec{\tau}) &= -(\Omega_0 + d\alpha) \sin \alpha, \\ (\vec{\tau}_2, d\vec{\tau}) &= (\Omega_0 + d\alpha) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив величины (10) в формулу (9), находим

$$k_g = \frac{\Omega_0 + d\alpha}{ds}. \quad (11)$$

5°. Для практического использования удобно формулу (11) представить в нескольких эквивалентных видах (см. ниже формулы (11а), (11б) и (11в)).

Прежде всего, подставив в (11) известное выражение для формы Ω_0 , получим

$$k_g = \alpha_s - \frac{A_v}{B} u_s + \frac{B_u}{A} v_s. \quad (11а)$$

Здесь $u = u(s)$, $v = v(s)$ — координаты текущей точки линии $\mathcal{L}$, отнесенной к натуральному параметру s .

Из (11а) исключим угол α . По известной формуле для угла между линиями на поверхности вычисляем

$$\cos \alpha = A u_s, \quad \sin \alpha = \cos \angle \{ \vec{\tau}, \vec{\tau}_2 \} = B v_s.$$

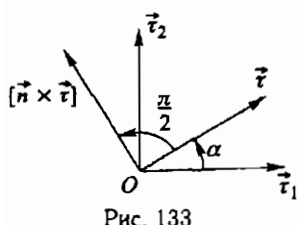


Рис. 133

Подставив (12) в (11а), получим для k_g формулу, удобную для вычисления в том случае, когда рассматриваемая линия отнесена не к натуральному параметру, а к произвольному ($u = u(\xi)$, $v = v(\xi)$):

$$k_g = \frac{1}{\sqrt{A^2 du^2 + B^2 dv^2}} \left\{ d \left(\arctg \frac{B dv}{A du} \right) - \frac{A_v}{B} du + \frac{B_u}{A} dv \right\}. \quad (11б)$$

С другой стороны, можно из (11а) исключить u_s и v_s . Именно, из (12) находим

$$u_s = \frac{\cos \alpha}{A}, \quad v_s = \frac{\sin \alpha}{B} \quad (13)$$

(геометрический смысл формул (13) виден из рис. 134, на котором изображены отрезки в касательной плоскости). Подставляем в (11а) величины (4), (5) и (13). В результате геодезическая кривизна k_g рассматриваемой линии выразится через функцию $\alpha = \alpha(s)$ и геодезические кривизны k_{g_1} и k_{g_2} координатных линий:

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} + k_{g_1} \cos \alpha + k_{g_2} \sin \alpha. \quad (11в)$$

Примеры. 1). На плоскости в декартовых прямоугольных координатах имеем $k_{g_1} = k_{g_2} = 0$, и формула (11в) превращается в известное выражение для кривизны плоской кривой:

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} = k.$$

2). В полярных координатах ρ , φ координатные ρ -линии — лучи, поэтому $k_{g_1} = 0$. Другое семейство — φ -линии — окружности, их радиус ρ , кривизна $k = \frac{1}{\rho} = k_{g_2}$. Отсюда и из (11в) получаем выражение для кривизны линии, заданной в полярных координатах:

$$k = k_g = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\sin \alpha}{\rho},$$

где α — угол между полярным радиусом и рассматриваемой кривой (рис. 135).

В этой связи см. также (4)–(5) и пример в п. 6° § 9.

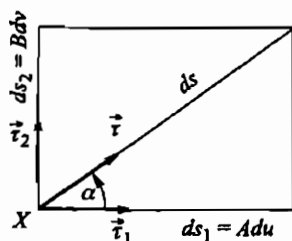


Рис. 134

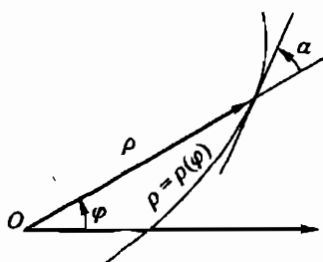


Рис. 135

6*. Если сеть (u, v) не ортогональна, то k_g также выражается через коэффициенты первой квадратичной формы, их частные производные первого порядка и производные первого и второго порядков от функций $u = u(\xi)$, $v = v(\xi)$, см. формулы (12)–(15) в § 40.

7*. Используя понятие геодезической кривизны, формулу для ее вычисления, деривационные формулы и уравнения Петерсона–Кодацци, мы можем дать теперь другое доказательство теоремы 1 из § 13*.

Так же, как там, примем за координатную сеть линии кривизны.

Рассмотрим нормальные кривизны координатных линий (они же — главные кривизны, в силу выбора системы координат). Снова будем предполагать, что $H \neq 0$. Пусть на u -линиях $k_{n_1} = k_1 \neq 0$; тогда на v -линиях $k_{n_2} = k_2 = 0$, так как $K = k_1 k_2 = 0$. Докажем, что v -линии являются прямыми. Для этого достаточно проверить, что их геодезическая кривизна равна нулю. По лемме 1 из п. 2° § 12 $F = M = 0$, поэтому имеем:

$$k_{n_2} = \frac{L du^2 + N dv^2}{A^2 du^2 + B^2 dv^2} \Big|_{du=0} = \frac{N}{B^2} = k_2 = 0, \quad (14)$$

откуда $N = 0$. Вместе с тем,

$$k_1 = k_{n_1} = \frac{L}{A^2} \neq 0, \quad \text{поэтому } L \neq 0. \quad (15)$$

Используем одно из уравнений Петерсона–Кодацци, именно — второе из уравнений (9) из § 18; в данной ситуации оно примет вид

$$\frac{LB_u}{A^2} = 0, \quad \text{откуда } B_u = 0, \quad (16)$$

поскольку $L \neq 0$ согласно (15). По формуле (5), учитывая (16), находим

$$k_{g_2} = 0. \quad (17)$$

Из равенств (14), (17) и формулы (5) из § 10 следует, что v -линии — прямые. Прделанные вычисления и третья из формул (4) § 14 (вместе с формулами (5) и (6) из § 14 и с учетом найденных M и N) показывают, что $d\vec{n} = \vec{\theta}$ при $du = 0$; после этого доказательство завершается так же, как в конце п. 2° § 13.

§ 22. Геодезические линии и полугеодезические координаты

1°. Напомним, что линия называется геодезической, если во всех ее точках геодезическая кривизна равна нулю (примеры см. выше, пп. 5°–6°).

Механическая интерпретация. Пусть имеются два одинаковых экземпляра поверхности, расположенные так, что между ними имеется маленький зазор, в котором по инерции без трения скользит шарик

(материальная точка). Сила $\vec{f}$, действующая на шарик со стороны поверхностей, ввиду отсутствия трения направлена по нормали к поверхности (рис. 136). Она не может изменить величину скорости $\vec{V}$, так как создает ускорение, перпендикулярное касательной плоскости. Вместе с тем, по нормали к поверхности направлена и главная нормаль к траектории, которая определена, если $\vec{f} \neq \vec{\theta}$. Поэтому геодезическая кривизна $k_g = 0$. Таким образом, траектория материальной точки, которая по инерции и без трения скользит по поверхности, является геодезической линией.

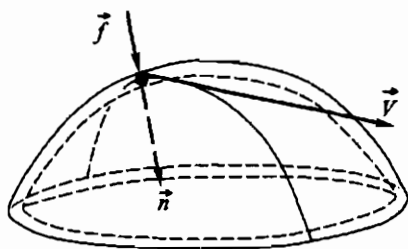


Рис. 136

2°. Из тождества $|k| = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$ видно, что геодезическая линия имеет минимальную возможную кривизну по сравнению с другими линиями, проходящими через ту же точку поверхности в том же направлении. Иногда это свойство выражают так: геодезические линии являются прямыми линиями на поверхности.

3°. Теорема. *Через каждую точку регулярной поверхности в каждом направлении проходит геодезическая линия и притом только одна.*

Доказательство. Из формул (11а) и (13) предыдущего параграфа следует, что в каждой точке геодезической линии соблюдаются условия:

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\cos \alpha}{A(u, v)}, & \frac{dv}{ds} &= \frac{\sin \alpha}{B(u, v)}, \\ \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{A_v(u, v) \cos \alpha - B_u(u, v) \sin \alpha}{A(u, v) B(u, v)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Равенства (1) будем рассматривать как автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными функциями

$$u = u(s), \quad v = v(s), \quad \alpha = \alpha(s). \quad (2)$$

Задание точки и направления, т. е. начальных данных

$$u(s_0) = u_0, \quad v(s_0) = v_0, \quad \alpha(s_0) = \alpha_0, \quad (3)$$

однозначно определяет траекторию (2) системы (1). Особых точек система (1) не имеет, так как ее правые части не обращаются в нуль одновременно.

Покажем, что система (1) не имеет «лишних» решений, т. е. каждая ее траектория является геодезической линией поверхности. Пусть (2) —

произвольная траектория системы (1) в пространстве переменных u, v, α . Построим на поверхности линию $\mathcal{L}$ по формулам:

$$u = u(s), \quad v = v(s), \quad (4)$$

считая, что функции (4) — те же самые, что и в формулах (2). Обозначим через $\hat{s}$ натуральный параметр на $\mathcal{L}$. Используя обычное выражение для дифференциала дуги и первые два уравнения системы (1), вычислим

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2 = A^2 \left(\frac{1}{A} \cos \alpha \cdot ds \right)^2 + B^2 \left(\frac{1}{B} \sin \alpha \cdot ds \right)^2 = ds^2,$$

откуда $ds = \pm d\hat{s}$. Значит, аргумент s тоже является натуральным параметром на $\mathcal{L}$. Теперь из первых двух уравнений системы (1) и формул (2) § 21 следует, что $\alpha(s)$ совпадает с углом между вектором $\vec{\tau}_1$ и линией $\mathcal{L}$ в данной точке поверхности. Наконец, из последнего уравнения системы (1) и формул (12) и (11а) § 21 следует, что $k_g = 0$ во всех точках линии $\mathcal{L}$. Теорема доказана.

Попутно получена система дифференциальных уравнений (1) для нахождения геодезических линий поверхности.

4°. При изгибании поверхности каждая из геодезических линий остается геодезической. Это следует из инвариантности k_g относительно изгибания.

5*. ПОЛУГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ.

Определение. Ортогональные координаты u, v на поверхности называются *полугеодезическими*, если одно из семейств координатных линий (например, $v = \text{const}$) состоит из геодезических линий, причем u — натуральный параметр на одной из них (например, на линии $v = 0$).

Пример. На поверхности вращения меридианы и параллели образуют сеть полугеодезических координат. В самом деле, в этих координатах $ds^2 = du^2 + r^2(u) dv^2$ (см. выше формулу (30) в § 19), так что $k_{g_1} = 0$ по формуле (4) из § 21.

6*. Предполагая, что u, v — полугеодезические координаты, исследуем геометрические свойства координатной сети.

Имеем:

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2;$$

но $ds_1 = du$ при $v = 0$, значит, $A(u, 0) = 1$;

$$k_{g_1} = -\frac{A_v}{AB} = 0, \quad \text{поэтому } A_v(u, v) = 0,$$

откуда $A(u, v) = A(u, 0) = 1$ (см. (4) § 21).

Итак, в полугеодезических координатах

$$ds^2 = du^2 + B^2(u, v) dv^2. \quad (5)$$

Отсюда следует, что линии $u = u_1$ и $u = u_2$ при любых u_1 и u_2 высекают на всех геодезических $v = \text{const}$ дуги равной длины $|u_2 - u_1|$ и что координата u является натуральным параметром на каждой из линий $v = \text{const}$.

С другой стороны, если $E = 1$, $F = 0$, то $ds_1 = du$ и $k_{g_1} = 0$, так что координаты являются полугеодезическими.

Можно показать, что если $\mathcal{L} \in C^2$ — произвольная кривая на поверхности S класса C^2 , X — произвольная точка на $\mathcal{L}$, то в достаточно малой окрестности точки X можно ввести полугеодезические координаты, приняв $\mathcal{L}$ за линию $u = 0$, натуральный параметр на $\mathcal{L}$ — за координату v . Доказательство проводить не будем.

7*. ПОЛЯРНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ. Выберем на поверхности S произвольную точку O . В качестве первого семейства координатных линий возьмем геодезические линии, исходящие из точки O во всевозможных направлениях. Одну из них обозначим OP , натуральный параметр на ней обозначим через ρ , считая, что он отсчитывается от точки O , $\rho > 0$.

В качестве второй координаты возьмем угол φ , который образует в точке O произвольная геодезическая линия семейства с линией OP (рис. 137).

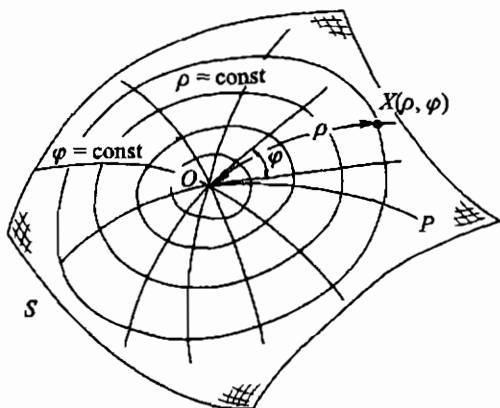


Рис. 137

Хотя координатная линия $\rho = 0$ вырождается в точку, но рассуждения предыдущего пункта остаются в силе, и каждая из ортогональных траекторий $\rho = \text{const}$ отсекает на всех геодезических $\varphi = \text{const}$ дуги одинаковой длины ρ с общим началом O . Поэтому каждая из линий $\rho = \text{const}$, выйдя из некоторой точки дуги OP , обходит вокруг O и возвращается на OP в исходную точку.

Таким образом, линии $\rho = \text{const}$ — замкнутые; их называют *геодезическими окружностями* с центром O и радиусом ρ . Области

$\rho \leq \text{const}$ (или $\rho < \text{const}$) называют *геодезическими кругами*, а линии $\varphi = \text{const}$, $0 < \rho < \text{const}$ — их *геодезическими радиусами*.

В полярно-геодезических координатах

$$ds^2 = d\rho^2 + B^2(\rho, \varphi) d\varphi^2. \quad (6)$$

Вследствие (6) длина геодезической окружности $s(\rho)$ и площадь геодезического круга $\sigma(\rho)$ радиуса ρ выражаются формулами:

$$s(\rho) = \int_0^{2\pi} B(\rho, \varphi) d\varphi, \quad \sigma(\rho) = \int_0^\rho d\rho \int_0^{2\pi} B(\rho, \varphi) d\varphi.$$

Частным случаем являются полярные координаты на плоскости; для них $B(\rho, \varphi) = \rho$.

8*. Замечание. Опираясь на теоремы о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных, можно показать, что в достаточно малой окрестности U точки O разные линии $\varphi = \text{const}$ не имеют других точек пересечения, кроме O , и покрывают всю окрестность U , а линии $\rho = \text{const}$ не имеют самопересечений. При этом, если $S \in C^\infty$, то $\vec{X}(\rho, \varphi) \in C^\infty$, $|\vec{X}_\rho \times \vec{X}_\varphi| = B > 0$ при $0 < \rho < \varepsilon$. Далее можно показать, что $B(\rho, \varphi) = \rho + o(\rho^2)$ при $\rho \rightarrow 0$ [2]. Мы не будем останавливаться на доказательстве всех этих утверждений, так как нужны были бы довольно громоздкие выкладки. Простейшие примеры (сфера, эллипсоиды, поверхности вращения и т.п.) показывают, что геодезические $\varphi = \text{const}$ могут пересечься при достаточно большом ρ , что с увеличением ρ разные части геодезического круга могут друг на друга наложиться, а геодезическая окружность положительного радиуса может иметь самопересечения или состоять из единственной точки. Рекомендуем читателю самостоятельно построить и разобрать такие примеры.

9*. Пусть X_0 — произвольная точка на поверхности S , U — окрестность точки X_0 и $\mathcal{L}$ — геодезическая линия, проходящая через X_0 . Пусть X_1 — произвольная точка на $\mathcal{L}$, содержащаяся в окрестности U .

Теорема (экстремальное свойство геодезических линий). Если окрестность U достаточно мала, то дуга X_0X_1 геодезической $\mathcal{L}$, проходящая внутри U , короче любой другой кривой на S , соединяющей X_0 и X_1 .

Примеры сферы и кругового цилиндра показывают (рис. 138), что в общем случае дуга геодезической X_0X_1 не является кратчайшей линией между точками X_0 и X_1 . На цилиндре две точки X_0 и X_1 , не лежащие в плоскости, перпендикулярной образующей, можно соединить различными винтовыми линиями. Все они являются геодезическими, так как при разворачивании кругового цилиндра на плоскость дуга винтовой линии переходит в отрезок прямой. Ясно, что винтовая

линия, которая по пути от X_0 к X_1 много раз обходит вокруг цилиндра, не может быть кратчайшей. На сфере большая из двух дуг X_0X_1 большого круга тоже не является кратчайшей.

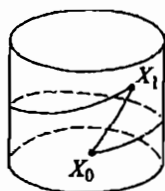


Рис. 138

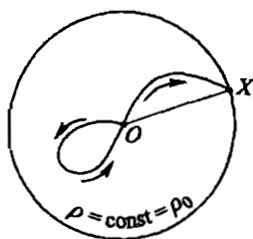
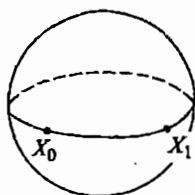


Рис. 139

Лемма. Пусть X — произвольная точка на геодезической окружности с центром O и радиусом ρ_0 . Если $\rho_0 > 0$ достаточно мало, то длина

$$s(\sim OX) \geq \rho_0$$

для любой дуги OX , расположенной в геодезическом круге $\rho \leq \rho_0$, причем $s(\sim OX) = \rho_0$ только тогда, когда OX — геодезический радиус.

Доказательство. Если ρ_0 достаточно мало, то в геодезическом круге $\rho \leq \rho_0$ определены полярно-геодезические координаты ρ, φ (см. выше, пп. 7*–8*). Пусть в этих координатах OX задается уравнениями:

$$\rho = \rho(\xi), \quad \varphi = \varphi(\xi), \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (7)$$

значению $\xi = \xi_1$ соответствует O , значению $\xi = \xi_2$ соответствует X . Не ограничивая общности, можно считать, что $\rho(\xi) > 0$ при $\xi > \xi_1$. В противном случае вместо ξ_1 можно было бы взять верхнюю грань тех ξ из интервала (ξ_1, ξ_2) , для которых $\rho(\xi) = 0$. Тем самым мы отбросим лишние петли линии OX (рис. 139), сократив ее длину. Проводим оценку:

$$\begin{aligned} s(\sim OX) &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{(\rho'(\xi))^2 + B^2(\rho(\xi), \varphi(\xi)) (\varphi'(\xi))^2} d\xi \geq \\ &\geq \int_{\xi_1}^{\xi_2} |\rho'(\xi)| d\xi \geq \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho'(\xi) d\xi \right| = \rho_0. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом первое из неравенств (8) является строгим, и $s(\sim OX) > \rho_0$, если $\varphi'(\xi) \neq 0$ в сколь угодно малом интервале между ξ_1 и ξ_2 . Но если $\varphi'(\xi) = 0$ при $\xi_1 < \xi < \xi_2$, то дуга (7) является геодезическим радиусом $\varphi = \text{const}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Выбираем окрестность U точки X_0 столь малой, чтобы она была покрыта полярно-геодезической системой координат (ρ, φ) с началом в точке X_0 . Возьмем произвольную точку $X_1 \in \mathcal{L} \cap U$. Дуга X_0X_1 геодезической $\mathcal{L}$, лежащая внутри U , представляет собой геодезический радиус $\varphi = \text{const}$, длину которого обозначим через ρ_0 . Возьмем произвольную кривую ℓ на S , соединяющую X_0 и X_1 , но не совпадающую с геодезическим радиусом X_0X_1 .

Если ℓ содержится в геодезическом круге $\rho \leq \rho_0$ (центр которого — в точке X_0), то ее длина $s(\ell) > \rho_0$ по лемме. Если же ℓ выходит за пределы этого круга, то часть ℓ , расположенная вне круга $\rho \leq \rho_0$, имеет некоторую положительную длину, а кроме того, по лемме, длина части ℓ , находящейся внутри круга $\rho \leq \rho_0$, не меньше, чем ρ_0 . Следовательно, и в этом случае $s(\ell) > \rho_0$. Теорема доказана.

10*. Из изложенного выше видно, что при переходе от плоскости к искривленным поверхностям геодезические линии естественно рассматривать как обобщение прямых, хотя их поведение на поверхности в целом может существенно отличаться от поведения прямых на евклидовой плоскости.

11*. В качестве приложения изложенного выше материала докажем, что справедлива следующая

Теорема. Если поверхность S — разветвляющаяся, то у каждой ее точки X существует окрестность U , изометричная некоторой области на плоскости.

Доказательство. Проведем через точку X на поверхности S две ортогональные геодезические $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ и в окрестности точки X построим полугеодезическую систему координат (u, v) , считая, что

1) u — натуральный параметр линии $\mathcal{L}_1$, отсчитываемый от точки X ; $v = 0$ на $\mathcal{L}_1$;

2) v — натуральный параметр линии $\mathcal{L}_2$, отсчитываемый от точки X ; $u = 0$ на $\mathcal{L}_2$;

3) линии $v = \text{const}$ — геодезические, $u = \text{const}$ — траектории, ортогональные семейству линий $v = \text{const}$.

Если окрестность U точки X достаточно мала, то в ней существуют указанные координаты (u, v) , в них ds^2 выражается формулой (5), причем

$$B(0, v) = 1 \quad (9)$$

вследствие условия 2);

$$B_u(0, v) = 0 \quad (10)$$

из-за того, что $\mathcal{L}_2$ — геодезическая, $k_{g_2}(0, v) = \frac{B_u}{AB} \Big|_{u=0} = 0$ (см. выше § 21, формула (5)).

В полугеодезических координатах формула (13) из § 19 упрощается и принимает вид $K = -\frac{B_{uu}}{B}$, откуда

$$B_{uu} + K(u, v) B = 0. \quad (11)$$

В рассматриваемом случае $K = 0$, и для функции B получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} = 0. \quad (12)$$

Из уравнения (12) и начальных условий (9) и (10) ясно, что $B(u, v) = 1$, поэтому

$$ds^2 = du^2 + dv^2. \quad (13)$$

Выражение (13) совпадает с первой квадратичной формой плоскости в декартовых прямоугольных координатах, а этого достаточно для изометрии области U на S и некоторой области на плоскости.

§ 23. Поворот кривой на поверхности. Формула Гаусса-Бонне и ее следствия

1°. Определение. Поворотом кривой $\mathcal{L}$ на поверхности S называется величина

$$П(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} k_g ds. \quad (1)$$

Участвующий в этом определении интеграл может быть и несобственным. Если направление кривой $\mathcal{L}$ изменить на противоположное, то k_g и поворот изменят знаки.

Примеры. 1). Поворот геодезической линии равен нулю.

2). Пусть XU — кривая на плоскости, α — угол, который образует орт касательной $\vec{\tau}$ к дуге XU с каким-нибудь зафиксированным направлением. Тогда $k_g = \frac{d\alpha}{ds} = k$ (кривизна со знаком), и если угол α имеет на концах дуги XU предельные значения $\alpha(X)$ и $\alpha(Y)$, то

$$П(\sim XU) = \int_{\sim XU} d\alpha = \alpha(Y) - \alpha(X) + 2\pi m,$$

где m — целое число, показывающее количество полных оборотов вектора $\vec{\tau}$ на дуге XU с учетом направления. На рис. 140 показаны случаи $m = -1, 0, 1, 2$. Число m может быть сколь угодно велико по модулю.

2°. Для дальнейшего важно распространить понятие поворота на кривые с особыми точками.

Здесь и ниже будем рассматривать лишь такие кривые, регулярность которых может нарушаться только в конечном числе точек.

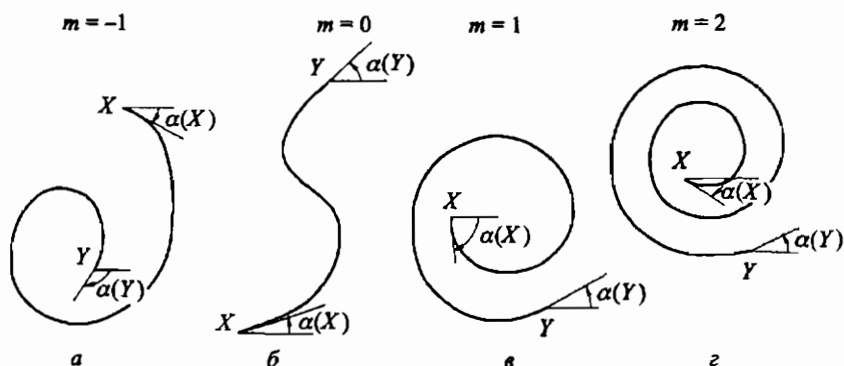


Рис. 140

Считая, что кривая $\mathcal{L}$ задана на поверхности S класса C^∞ уравнениями вида $u = u(\xi)$, $v = v(\xi)$, $\underline{\xi} \leq \xi \leq \bar{\xi}$ и что особым точкам X_i соответствует $\xi = \xi_i$, $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$, будем предполагать, что функции $u(\xi)$, $v(\xi)$ принадлежат классу C^∞ на каждом из замкнутых отрезков $[\xi, \xi_1]$, $\dots$, $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $\dots$, $[\xi_n, \bar{\xi}]$, где $i = 1, \dots, n-1$, и что $u_\xi^2 + v_\xi^2 \neq 0$ на каждом из этих замкнутых отрезков. Иначе говоря, кроме регулярности каждой из открытых дуг $X_i X_{i+1}$ требуется существование односторонних пределов при $\xi \rightarrow \xi_i + 0$ и при $\xi \rightarrow \xi_i - 0$ производных всех порядков функций u , v по аргументу ξ , а также существование пределов

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_i - 0} \vec{\tau}(\xi) = \vec{\tau}^-(X_i), \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_i + 0} \vec{\tau}(\xi) = \vec{\tau}^+(X_i), \quad (2)$$

где $\vec{\tau}$ — орт касательной к рассматриваемой кривой.

Кривую, удовлетворяющую перечисленным в этом пункте условиям, будем называть *кусочно-регулярной*.

В дальнейшем изложении регулярность C^∞ и для поверхности S и для «кусков» линии $\mathcal{L}$ можно было бы не требовать, а заменить регулярностью C^2 . Условие C^∞ принято только для того, чтобы упростить некоторые этапы доказательств и не отвлекать внимание на несущественные обстоятельства.

3°. *Поворот кривой в точке X_i* определяется как угол $\Delta\alpha$ между вектором $\vec{\tau}^-(X_i)$ и вектором $\vec{\tau}^+(X_i)$:

$$\Delta\alpha(X_i) = \angle\{\vec{\tau}^-(X_i), \vec{\tau}^+(X_i)\}, \quad |\Delta\alpha| \leq \pi, \quad (3)$$

где $\vec{\tau}^-(X_i)$ и $\vec{\tau}^+(X_i)$ даются формулой (2).

Если $\Delta\alpha(X_i) \neq 0$, то точка X_i называется *угловой точкой* (при $\Delta\alpha = \pm\pi$ — *точкой возврата*). При изменении направления на кривой угол $\Delta\alpha$ меняет знак (рис. 141).

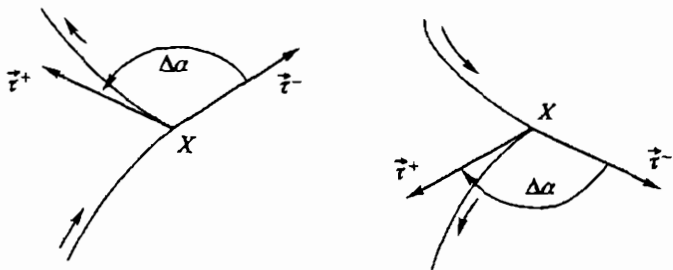


Рис. 141

Определение. Поворотом кусочно-регулярной кривой с угловыми точками X_i ($i = 1, \dots, n$) называется величина

$$\Pi(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} k_g ds + \sum_{i=1}^n \Delta\alpha(X_i). \quad (4)$$

Углы $\Delta\alpha(X_i)$, входящие в выражение (4), определяются согласно (3). Если $\Delta\alpha(X_i) = 0$ при $i = 1, \dots, n$, то (4) превращается в (1).

4°. Пусть на ориентируемой поверхности S дана односвязная область G , ограниченная замкнутой кусочно-регулярной кривой $\mathcal{L}$. Будем считать, что поворот $\Pi(\mathcal{L})$ вычисляется при однократном положительном обходе линии $\mathcal{L}$. При таком обходе вектор $[\vec{n} \times \vec{\tau}]$ направлен в сторону области G (рис. 142). Тогда справедлива так называемая *формула Гаусса-Бонне*:

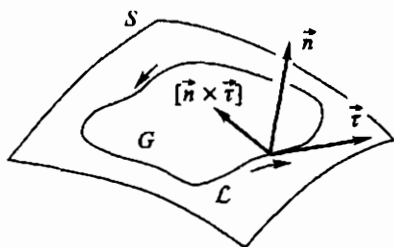


Рис. 142

$$\Pi(\mathcal{L}) = 2\pi - \iint_G K d\sigma. \quad (5)$$

Здесь K — гауссова кривизна, $d\sigma$ — элемент площади на S .

Доказательство формулы (5) изложено ниже, в § 25. Сейчас мы обсудим некоторые ее следствия.

6°. Определение. Пусть замкнутая кривая $\mathcal{L}$ на поверхности S не имеет самопересечений, состоит из трех дуг геодезических линий и ограничивает односвязную область T . Тогда область T с присоединенной к ней границей $\mathcal{L}$ называется *геодезическим треугольником*. Будем обозначать его той же буквой T .

Пусть α, β, γ — внутренние углы геодезического треугольника T (рис. 143). Вычислим поворот его границы, пользуясь формулой (4) и учитывая, что $k_g = 0$ на геодезических линиях:

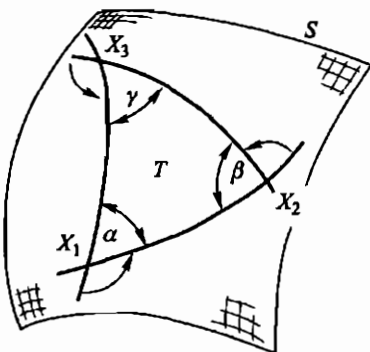


Рис. 143

$$\Pi(L) = (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) = 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma). \quad (6)$$

Преобразуя (6) с помощью формулы Гаусса-Бонне, получаем соотношение:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_G K \, d\sigma, \quad (7)$$

левая часть которого называется *избытком треугольника T* .

Задача. На сфере радиуса r дан треугольник, образованный дугами больших кругов. Найти сумму внутренних углов этого треугольника, зная его площадь σ .

6°. Если треугольник T стягивается к точке X , то из (7) и теоремы о среднем для интеграла по поверхности следует, что

$$\lim_{T \rightarrow X} \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{\sigma(T)} = K(X), \quad (8)$$

где $\sigma(T)$ — площадь треугольника T . Формула (8) дает внутренне-геометрическое истолкование гауссовой кривизны: *гауссова кривизна в точке X равна пределу отношения избытка геодезического треугольника к его площади, когда этот треугольник стягивается к точке X* .

Сформулированное свойство можно принять за определение гауссовой кривизны (в связи с этим см. [2]).

7*. Формула Гаусса-Бонне и ее следствие (7) показывает, что гауссова кривизна характеризует величину отклонения внутренней геометрии поверхности от геометрии евклидовой плоскости.

В то же время гауссова кривизна равна произведению главных кривизн и связана с площадью сферического образа (см. выше § 12), поэтому она характеризует искривленность поверхности в пространстве.

Теоремы Гаусса (§ 12, п. 7* и § 12, п. 7°) устанавливают, что искривленность поверхности в пространстве зависит от ее внутренней геометрии; эта искривленность тем больше, чем сильнее отличается внутренняя геометрия поверхности от геометрии евклидовой плоскости.

8*. Определение. Величина $\iint_G K \, d\sigma$ называется *интегральной кривизной области G на поверхности S* .

Формула Гаусса–Бонне позволяет вычислять интегральную кривизну замкнутых поверхностей, не вычисляя значений K в конкретных точках поверхности.

Пример. Пусть замкнутая поверхность S гомеоморфна сфере $\mathcal{G}$. Тогда произвольной окружности $\mathcal{L}_0$ на сфере $\mathcal{G}$ соответствует замкнутая кривая $\mathcal{L}$, разбивающая S на две односвязные области G_1 и G_2 (рис. 144). Применим к каждой из этих областей формулу Гаусса–Бонне, учитывая, что им соответствуют разные направления обхода контура $\mathcal{L}$:

$$P(\mathcal{L}) = 2\pi - \iint_{G_1} K d\sigma, \quad -P(\mathcal{L}) = 2\pi - \iint_{G_2} K d\sigma. \quad (9)$$

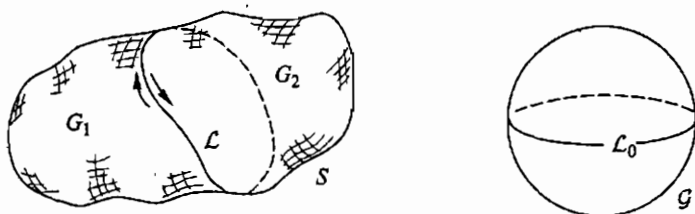


Рис. 144

Сложив равенства (9), получим интегральную кривизну поверхности S :

$$\iint_S K d\sigma = 4\pi.$$

Задачи. 1). Доказать, что интегральная кривизна поверхности, гомеоморфной тору, равна нулю.

2*). Вычислить интегральную кривизну поверхности, гомеоморфной сфере с m ручками.

§ 24. Двумерная риманова метрика

1°. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана поверхность S уравнением вида $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, причем вектор-функция $\vec{X}$ определена в некоторой области $\mathcal{M}$ на вспомогательной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми прямоугольными координатами u, v . Мы знаем, что на поверхности S действует своя внутренняя геометрия, которая характеризуется первой квадратичной формой

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2. \quad (1)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Вычисляя на S длины линий, углы, площади и т.п. с помощью ds^2 , мы самой по-

верхностью фактически не пользуемся. Мы имеем дело с функциями, заданными в $\mathcal{M}$, и геометрическими фигурами в этой области. Поэтому поверхность можно совсем исключить из рассмотрения и считать, что дифференциальная квадратичная форма (1) определяет в области $\mathcal{M}$ такую геометрию, в которой длины линий выражаются формулой (6) § 8, углы между линиями — формулой (7) § 9, площади — формулой (18) § 9.

Можно пойти дальше и считать, что E , F , G никак не связаны с вектор-функцией $\vec{X}(u, v)$, а заданы произвольно, лишь бы в $\mathcal{M}$ соблюдались неравенства $E > 0$, $EG - F^2 > 0$, гарантирующие положительную определенность квадратичной формы ds^2 . В таком случае говорят, что в области $\mathcal{M}$ с заданной в ней метрикой введена *риманова геометрия с метрической формой* (1) или что в $\mathcal{M}$ задана *риманова метрика* (1). Говорят также, что область $\mathcal{M}$ с заданной в ней метрикой ds^2 является *двумерным римановым пространством*.

2°. Пусть на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ в области $\mathcal{M}$ введены какие-нибудь криволинейные координаты $\tilde{u}$, $\tilde{v}$. Тогда с точки зрения римановой геометрии, о которой шла речь в предыдущем пункте, исходные координаты u , v не имеют никакого преимущественного положения по сравнению с другими координатами $\tilde{u}$, $\tilde{v}$. При переходе к новым координатам коэффициенты ds^2 преобразуются по формуле (12) § 8. Можно доказать (мы не будем на этом останавливаться), что такой закон преобразования коэффициентов ds^2 гарантирует инвариантность длин линий, углов и площадей (а также геодезической кривизны линий и гауссовой кривизны метрики, о которых речь будет идти ниже).

Новые координаты $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ могут вводиться не во всей области $\mathcal{M}$, а лишь локально, в окрестности какой-нибудь точки $X \in \mathcal{M}$. При этом можно добиться (например, повторив построение пункта 5° из § 14), чтобы новая координатная сеть была ортогональной с точки зрения (1).

3°. Будем теперь считать, что координаты u , v в области $\mathcal{M}$ ортогональны с точки зрения римановой метрики ds^2 , заданной в $\mathcal{M}$. Тогда

$$ds^2 = A^2(u, v) du^2 + B^2(u, v) dv^2 \quad (2)$$

($A = \sqrt{E}$, $B = \sqrt{G}$, $F = 0$). С точки зрения евклидовой геометрии плоскости $\mathbb{R}^2$, на которой была взята область $\mathcal{M}$, координаты u , v , вообще говоря, криволинейны.

По формуле (11 б) из § 21 определяется геодезическая кривизна k_g линий в метрике (2). Вместо формулы (11 б) из § 21 можно взять эквивалентные ей формулы (11 а) или (11 в) из того же § 21. Далее, согласно пп. 1°–3° § 23 определяется поворот кривой.

Линия, во всех точках которой $k_g = 0$, называется *геодезической*. Геодезические линии в метрике (2) задаются уравнениями (1) из § 22.

Наконец, по формуле (13) из § 19 определяется гауссова кривизна K метрики (2). При этом оказывается справедливой (см. ниже, § 25)

формула Гаусса–Бонне, а вместе с тем и геометрическое истолкование K через избытки и площади треугольников.

Если $A(u, v) = B(u, v) = 1$ во всей области $\mathcal{M}$, то метрика (2) есть не что иное, как метрика евклидовой плоскости, причем u, v — декартовы прямоугольные координаты. В этом случае $K \equiv 0$, k_g — обычная кривизна линий (взятая со знаком «+» или «-» в зависимости от направления выпуклости), геодезические линии — прямые.

Если $K = 0$ во всей области $\mathcal{M}$, то метрика (2) локально задает евклидову геометрию. Доказательство этого утверждения дословно повторяет п. 11* из § 22. Если $K \neq 0$ в некоторой точке области $\mathcal{M}$, то геометрия неевклидова, поскольку в этом случае имеются (геодезические) треугольники с избытком, отличным от нуля.

4°. **Пример 1.** Обратную пропорциональную зависимость $w = \frac{1}{z}$ будем рассматривать как комплексную функцию $w = \xi + i\eta$ комплексного аргумента $z = x + iy$. Записав z в тригонометрической форме (иначе говоря, введя на z -плоскости полярные координаты ρ, φ), мы увидим, что в четырехмерном действительном пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами x, y, ξ, η график функции $w = \frac{1}{z}$ представляет собой поверхность с параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, \\ \xi &= \frac{1}{\rho} \cos \varphi, & \eta &= -\frac{1}{\rho} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Продифференцировав (3), найдем

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + d\xi^2 + d\eta^2 = (1 + \rho^{-4})(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2). \quad (4)$$

Таким образом, евклидова метрика пространства $\mathbb{R}^4$ индуцирует на поверхности (3) риманову метрику (4) вида (2), у которой

$$A = \sqrt{1 + \rho^{-4}}, \quad B = \sqrt{\rho^2 + \rho^{-2}}. \quad (5)$$

Упражнение. Используя (5) и формулу (13) из § 19 (с заменой в ней u, v на ρ, φ), вычислить гауссову кривизну K для метрики ds^2 , выраженной формулой (4), и показать, что здесь $K < 0$.

Пример 2 (из оптики). Пусть c — скорость света в пустоте, v — его скорость в какой-либо прозрачной среде. Величина $n = \frac{c}{v}$ называется показателем преломления данной среды ($n \geq 1$, поскольку $v \leq c$).

Рассмотрим распространение света в плоскости, заполненной прозрачным веществом с показателем преломления $n = n(x, y)$. Здесь x, y — декартовы прямоугольные координаты. Пусть $n(x, y) \in C^1$. Оказывается, в таком случае пути световых лучей (если пренебрегать рассеянием) представляют собой геодезические линии в римановой метрике

$$ds^2 = n^2(x, y) dx^2 + n^2(x, y) dy^2. \quad (6)$$

Метрика (6) допускает простое физическое истолкование. Именно, нетрудно сообразить, что длина дуги произвольной кривой в метрике (6) с точностью до множителя c равна времени, которое должен был бы затратить свет для того, чтобы пройти эту дугу.

5*. Если в некоторой области $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$ задана метрика вида (1), то естественно возникает вопрос, существует ли в $\mathbb{R}^3$ поверхность S с первой квадратичной формой (1)? Оказывается, что в классе C^1 такая поверхность заведомо найдется (см. [59]), а в классе C^2 существует далеко не всегда [34, 48, 49]). Вопрос о том, при каких условиях существует в $\mathbb{R}^3$ поверхность данного класса C^n , имеющая заданную метрику (1), и с каким произволом такая поверхность может быть построена, в настоящее время исследован далеко не полностью [25, 105].

6*. Понятие римановой метрики, изложенное в пп. 1°–3° этого параграфа, допускает различные обобщения. Укажем некоторые из них.

А). Можно считать, что ds^2 задается не в области на плоскости, а на произвольном двумерном многообразии $\mathcal{M}$. В этом случае ds^2 выражается различными формулами вида (1) в разных локальных координатах; при переходе от одних локальных координат к другим коэффициенты ds^2 преобразуются по тензорному закону, выраженному формулой (12) § 8.

Сразу же обратим внимание на следующее обстоятельство. Риманова метрика, которую можно ввести на данном многообразии $\mathcal{M}$, вообще говоря, не произвольна. Так, например, на сфере можно ввести лишь такие римановы метрики, у которых интегральная кривизна равна 4π (при этом значение K в конкретной точке может быть любым). Указанный факт является следствием формулы Гаусса–Бонне и устанавливается аналогично п. 8* § 23.

Б). Можно перейти к римановым пространствам большей размерности, задавая ds^2 на многообразии $\mathcal{M}$ размерности $n \geq 3$. В этом случае ds^2 в локальных координатах выражается квадратичной формой от дифференциалов всех координат с коэффициентами, зависящими от рассматриваемой точки и от выбранной системы координат (подробности см. [100, 115, 127]).

Риманова геометрия является далеко идущим обобщением геометрий Евклида и Лобачевского. А. Эйнштейн подчеркивал [128, 129], что создание теории относительности невозможно было бы без предварительной разработки неевклидовых геометрий. Среди математиков бытует устная легенда: когда Б. Риман прочел свою лекцию о геометрии (получившей впоследствии название римановой), никто из присутствовавших математиков тогда его не понял, кроме К. Гаусса, который все прослушал молча и ушел, глубоко задумавшись.

В). Можно отказаться от положительной определенности квадратичной формы ds^2 . Тогда получаются так называемые

псевдоримановы пространства. При $n = 4$ они играют важную роль в космологии и физике (в общей теории относительности [129]). Более подробные сведения о геометрии псевдоримановых пространств можно найти в книгах [100, 127].

7*. Задача. На торе задать риманову метрику нулевой гауссовой кривизны. Доказать, что в $\mathbb{R}^3$ не существует регулярной поверхности, изометричной полученному риманову пространству. Доказать, что в $\mathbb{R}^4$ такая поверхность существует.

8*. Одно из выдающихся геометрических открытий середины XX в. — результат Дж. Нэша [84]: каждая k -мерная риманова метрика (при любом $k \geq 2$) допускает погружение в N -мерное евклидово пространство в виде k -мерной поверхности, если N достаточно велико по сравнению с k . В этом смысле вся риманова геометрия вошла в многомерную евклидову как ее составная часть: внутренняя геометрия k -мерных поверхностей в N -мерных евклидовых пространствах при различных k и N .

§ 25*. Доказательство формулы Гаусса–Бонне

1°. Сначала сформулируем и докажем три леммы. Затем, опираясь на них, выведем формулу Гаусса–Бонне.

2°. Лемма 1. Если односвязная область G на поверхности S , ограниченная линией $\mathcal{L}$, разбита на части $G_1, \dots, G_m$, ограниченные линиями $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$, то

$$P(\mathcal{L}) - 2\pi = \sum_{i=1}^m (P(\mathcal{L}_i) - 2\pi).$$

Доказательство. В обозначениях, показанных на рис. 145, имеем:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{L}) &= \alpha + P(AbB) + \beta + P(BaA); \\ P(\mathcal{L}_1) &= \alpha_1 + P(AscB) + \beta_1 + P(BaA); \\ P(\mathcal{L}_2) &= \alpha_2 + P(AbB) + \beta_2 + P(BcA). \end{aligned} \quad (1)$$

При изменении направления на кривой ее поворот меняет знак, поэтому

$$P(BcA) = -P(AscB).$$

Кроме того,

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha = \pi, \quad \beta_1 + \beta_2 - \beta = \pi$$

(см. рис. 145). Поэтому

$$P(\mathcal{L}_1) + P(\mathcal{L}_2) = P(\mathcal{L}) + 2\pi,$$

откуда следует формула (1) при $m = 2$. Переход к произвольному $m > 2$ осуществляется по индукции, чем и завершается доказательство леммы 1.

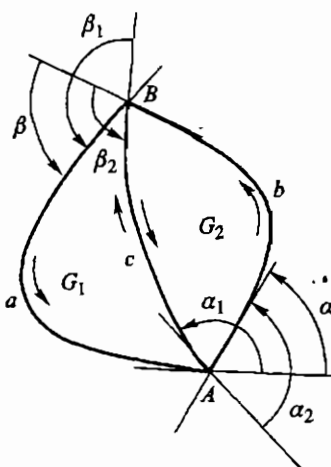


Рис. 145

3°. Лемма 2. Если L_0 — кусочно-регулярная замкнутая кривая на плоскости, не имеющая самопересечений, то ее поворот равен 2π :

$$\Pi(L_0) = \oint_{L_0} \alpha'(\xi) d\xi + \sum \Delta\alpha_i = 2\pi. \quad (2)$$

Здесь ξ — параметр на L_0 , возрастание которого соответствует положительному обходу L_0 ; α — угол, образуемый линией L_0 с каким-либо выбранным направлением, например, с осью x ; $\Delta\alpha_i$ — поворот в угловых точках; производная $\alpha'(\xi)$ в угловых точках не определена и имеет разрывы первого рода.

Формула (2) представляет собой частный случай формулы Гаусса–Бонне, поскольку на плоскости $K = 0$.

Доказательство леммы 2. Разобьем кривую L_0 на части точками $X_1, X_2, \dots, X_{N-1}, X_N = X_1$, включив в их число все угловые точки. В каждой из точек X_i проведем касательную к L_0 . Если X_i — угловая точка, то вместо касательной проведем две прямые в направлении векторов $\vec{\tau}^+(X_i)$ и $\vec{\tau}^-(X_i)$ (так называемые *полукасательные*). Если точки X_i выбраны так густо, что на каждой из дуг $X_i X_{i+1}$ для любой пары точек орты касательных к L_0 образуют между собой углы меньше, чем 2π , то

$$\int_{X_i X_{i+1}} d\alpha = \alpha(X_{i+1}) - \alpha(X_i)$$

(если использовать обозначения второго примера из п. 1° § 23, то $m = 0$). Касательные, проведенные в точках X_i и X_{i+1} , можно в качестве звеньев включить в ломаную, поворот которой на участке $X_i X_{i+1}$ совпадает с поворотом дуги $X_i X_{i+1}$ (рис. 146).

Проведя такое построение для каждой из дуг $X_i X_{i+1}$, мы получим некоторую замкнутую ломаную $\hat{L}$. Пользуясь тем, что L_0 не имеет самопересечений, можно добиться того, чтобы и $\hat{L}$ не имела самопересечений. Для этого каждый из участков $X_i X_{i+1}$ ломаной $\hat{L}$ нужно строить достаточно близко к соответствующей дуге $X_i X_{i+1}$ кривой L_0 (рис. 147).

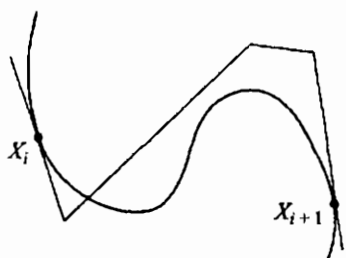


Рис. 146

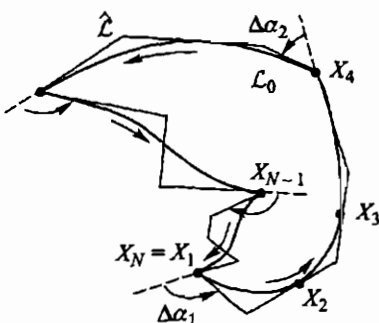


Рис. 147

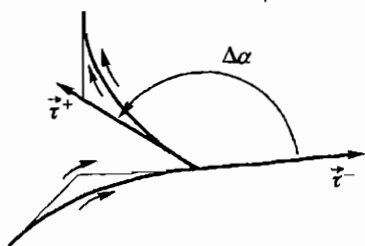


Рис. 148

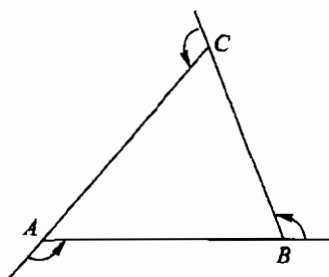


Рис. 149

Повороты $\hat{L}$ и L_0 в угловых точках совпадают, так как звенья ломаной $\hat{L}$, исходящие из угловой точки линии L_0 , направлены по полукасательным к L_0 (см. рис. 148).

Таким образом, $\Pi(\hat{L}) = \Pi(L_0)$.

Многоугольник, ограниченный ломаной $\hat{L}$, можно разбить на конечное число треугольников. Для каждого из треугольников поворот его границы совпадает с суммой внешних углов (рис. 149) и поэтому равен 2π . Поэтому из леммы 1 имеем:

$$\Pi(\hat{L}) - 2\pi = \sum (2\pi - 2\pi) = 0,$$

поэтому $\Pi(\hat{L}) = 2\pi = \Pi(L_0)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Проведенное выше построение ломаной нужно несколько видоизменить в окрестностях точек возврата ($\Delta\alpha = \pm\pi$), если такие имеются. Предоставляем читателю самостоятельно разобрать этот случай.

4°. Пусть на поверхности S в области D введены ортогональные криволинейные координаты u, v . Тогда

$$ds^2 = A^2(u, v) du^2 + B^2(u, v) dv^2. \quad (3)$$

Пусть, далее, в области $\mathcal{D}$ дана замкнутая кусочно-регулярная кривая $\mathcal{L}$ без самопересечений. Прообразы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{L}$ на плоскости (u, v) обозначим $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{L}_0$. Линии $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$ задаются одними и теми же уравнениями:

$$u = u(s), \quad v = v(s), \quad (4)$$

Будем считать, что s — натуральный параметр на $\mathcal{L}$, причем его возрастанию соответствуют положительные обходы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$.

Функции (4) имеют период ℓ , равный длине $\mathcal{L}$. Пусть значению $s = s_0$ соответствует на $\mathcal{L}$ точка, в которой регулярность кривой не нарушена. Значения параметра s в интервале $(s_0, s_0 + \ell)$, соответствующие особым точкам, обозначим $s_1, \dots, s_n$. На регулярных дугах кривой $\mathcal{L}$ производные u_s, v_s определены и удовлетворяют условию

$$A^2(u, v) u_s^2 + B^2(u, v) v_s^2 = 1. \quad (5)$$

В угловых точках равенство (5) соблюдается для односторонних производных

$$\begin{aligned} u_s^+(s_i) &= \lim_{s \rightarrow s_i + 0} u_s, & v_s^+(s_i) &= \lim_{s \rightarrow s_i + 0} v_s, \\ u_s^-(s_i) &= \lim_{s \rightarrow s_i - 0} u_s, & v_s^-(s_i) &= \lim_{s \rightarrow s_i - 0} v_s. \end{aligned}$$

Учитывая это обстоятельство, по обычной формуле для угла на поверхности найдем повороты кривой $\mathcal{L}$ в угловых точках:

$$\Delta\alpha_i = \pm \arccos[A^2 u_s^+(s_i) u_s^-(s_i) + B^2 v_s^+(s_i) v_s^-(s_i)] \quad (6)$$

(A, B вычислены при $u = u(s_i), v = v(s_i)$, а знак «+» или «-» берется в зависимости от направления поворота касательной при переходе через угловую точку с учетом ориентации, выбранной на поверхности).

Заметим попутно, что для каждого s_i повороты кривых $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$ в соответствующих угловых точках имеют одинаковые знаки, но по величине, вообще говоря, различны.

Введем функцию $\alpha(s)$, которая характеризует закон изменения угла между вектором $\vec{\tau}_1$ (касательным к линии $v = \text{const}$) и ортом $\vec{\tau}$ касательной к линии $\mathcal{L}$ при движении вдоль линии $\mathcal{L}$. Функция $\alpha(s)$ определена при $s \neq s_i$ ($i = 1, \dots, n$) и равна указанному углу с точностью до слагаемого, кратного π :

$$\alpha(s) = \text{Arctg} \frac{B(u(s), v(s)) \cdot v'_s(s)}{A(u(s), v(s)) \cdot u'_s(s)}.$$

Для того чтобы устранить неопределенность в задании функции $\alpha(s)$, будем считать, что

- 1) $\alpha(s_0) \in (-\pi, \pi]$;
- 2) на каждой дуге, не содержащей угловых точек, функция $\alpha(s)$ непрерывна;
- 3) в каждой из угловых точек функция $\alpha(s)$ имеет разрыв первого рода и получает приращение $\Delta\alpha(s_i) = \Delta\alpha_i$, выражаемое формулой (6).

Геометрический смысл функции $\alpha(s)$ состоит в следующем: ее значение $\alpha(s_0)$ равно углу между $\mathcal{L}$ и u -линией в точке $s = s_0$; при изменении s функция $\alpha = \alpha(s)$ показывает, как изменяется этот угол при движении по $\mathcal{L}$.

5°. Лемма 3. Если кусочно-регулярная кривая $\mathcal{L}$ ограничивает на S односвязную область, то при однократном положительном обходе кривой $\mathcal{L}$ функция $\alpha(s)$ возрастает на 2π :

$$\alpha(s_0 + \ell) - \alpha(s_0) = \oint_{\mathcal{L}} \alpha'(s) ds + \sum_{i=1}^n \Delta\alpha(s_i) = 2\pi. \quad (7)$$

Доказательство. Непосредственный подсчет приращения угла $\alpha(s)$ на $\mathcal{L}$ сложен из-за искривленности поверхности. С помощью специального вспомогательного построения мы сведем дело к случаю плоскости, именно, к доказанной выше лемме 2.

Будем считать, что функция $\alpha(s)$ задана на линии $\mathcal{L}_0$ в области $\mathcal{D}_0$, и произведем деформацию метрики (3), выражающей длины и углы на поверхности S , в метрику евклидовой плоскости, следя за изменением углов в этом процессе. С этой целью рассмотрим в области $\mathcal{D}_0$ семейство римановых метрик

$$ds^2 = A^2(u, v, t) du^2 + B^2(u, v, t) dv^2, \quad (8)$$

зависящих от параметра t . Функции $A(u, v, t)$, $B(u, v, t)$ определим по формулам

$$\begin{aligned} A(u, v, t) &= (1-t) \cdot A(u, v) + t, \\ B(u, v, t) &= (1-t) \cdot B(u, v) + t, \\ 0 &\leq t \leq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

При $t = 0$ (9) превращается в (3); при $t = 1$ получаем

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Замечание. Формулы (9) задают прямолинейный отрезок в функциональном пространстве пар функций, определенных в области $\mathcal{D}_0$, который соединяет точку $\{A(u, v), B(u, v)\}$ с точкой $\{A \equiv 1, B \equiv 1\}$.

Для каждого $t \in [0, 1]$ построим на $\mathcal{L}_0$ кусочно-гладкую функцию $\alpha(s, t)$:

$$\alpha(s, t) = \text{Arctg} \frac{B(u, v, t) \cdot v'_s}{A(u, v, t) \cdot u'_s}$$

со скачками $\Delta\alpha(s_i, t)$ в угловых точках кривой $\mathcal{L}_0$:

$$\Delta\alpha(s_i, t) = \pm \arccos \frac{A^2 u_s^+ u_s^- + B^2 v_s^+ v_s^-}{\sqrt{(A u_s^+)^2 + (B v_s^+)^2} \sqrt{(A u_s^-)^2 + (B v_s^-)^2}},$$

где через u_s^+ , u_s^- , v_s^+ , v_s^- обозначены односторонние производные функций u , v при $s = s_i$, величины A , B выражаются формулами (9), знак $\pm$ для каждого s_i такой же, как в формуле (6).

Приращение функции $\alpha(s, t)$ при однократном положительном обходе кривой $\mathcal{L}$ обозначим $\pi m(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha(s_0 + \ell, t) - \alpha(s_0, t) &= \oint_{\mathcal{L}_0} \alpha_s(s, t) ds + \sum_{i=1}^n \Delta \alpha(s_i, t) = \\ &= \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{(A u_s)(B v_s)_s - (B v_s)(A u_s)_s}{A^2 u_s^2 + B^2 v_s^2} ds + \sum_{i=1}^n \Delta \alpha(s_i, t) = \pi m(t). \end{aligned} \quad (10)$$

При $t = 0$ (10) совпадает с (7), а при $t = 1$ (10) выражает поворот $\mathcal{L}_0$ в метрике евклидовой плоскости, так что $m(1) = 2$ по лемме 2.

Из положительности и регулярности $A(u, v)$ и $B(u, v)$ в области $\mathcal{D}_0$, регулярности функций $u(s)$, $v(s)$ на каждом из отрезков $[s_i, s_{i+1}]$ и из условия (5) вытекает соблюдение условий, гарантирующих непрерывность по t интеграла в формуле (10) и каждого из слагаемых $\Delta \alpha(s_i, t)$. Поэтому $m(t)$ — непрерывная функция.

В то же время функция $\alpha(s, t)$ геометрически выражает угол между направлением $\{du > 0, dv = 0\}$ и направлением $\{du, dv\}$ линии $\mathcal{L}$, вычисленный в метрике (8). Но при обходе линии $\mathcal{L}$ отношение дифференциалов $dv : du$ на ней возвращается к исходному значению. Поэтому приращение $\alpha(s_0 + \ell, t) - \alpha(s_0, t)$ при каждом t кратно π , так что $m(t)$ — целое число. Целочисленная непрерывная функция может быть только постоянной, значит,

$$m(0) = m(t) = m(1) = 2,$$

и лемма 3 доказана.

6°. Доказательство формулы Гаусса–Бонне. Сначала рассмотрим случай, когда область G вместе с ее границей располагается в пределах одной криволинейной координатной системы (u, v) с метрикой вида (3). Используя лемму 3 и формулу (11) из § 21, находим поворот $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{L}) &= \oint_{\mathcal{L}} k_g ds + \sum_{i=1}^n \Delta \alpha_i = \\ &= \oint_{\mathcal{L}} \Omega_0 + \oint_{\mathcal{L}} d\alpha + \sum_{i=1}^n \Delta \alpha_i = \oint_{\mathcal{L}} \Omega_0 + 2\pi. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь преобразуем интеграл от гауссовой кривизны. Площадь на поверхности будем считать ориентированной и запишем элемент площади в виде

$$d\sigma = AB du \wedge dv \quad (12)$$

(см. в связи с этим п. 1° § 17 и рис. 150). Используя (12) и формулу (13) из § 19, можем написать, что

$$K d\sigma = -\left\{\left(\frac{A_v}{B}\right)_v + \left(\frac{B_u}{A}\right)_u\right\} du \wedge dv. \quad (13)$$

Вспомним теперь (см. (11) § 14), что

$$\Omega_0 = -\frac{A_v}{B} du + \frac{B_u}{A} dv.$$

Поэтому

$$[d\Omega_0] = \left\{\left(\frac{A_v}{B}\right)_v + \left(\frac{B_u}{A}\right)_u\right\} du \wedge dv. \quad (14)$$

Сопоставляя (13) и (14), мы видим, что

$$K d\sigma = -[d\Omega_0]. \quad (15)$$

Проинтегрируем по области G обе части равенства (15) и, применив формулу Грина (см. (8), § 17), находим

$$\iint_G K d\sigma = - \iint_G [d\Omega_0] = - \oint_{\mathcal{L}} \Omega_0. \quad (16)$$

Из (11) и (16) получаем формулу Гаусса-Бонне.

В общем случае нужно разбить область G на конечное число столь мелких частей G_i , чтобы каждая из них помещалась в пределах одной ортогональной координатной системы. Для каждой из частей формула Гаусса-Бонне справедлива по доказанному. При объединении частей интегралы $\iint_{G_i} K d\sigma$ сложатся по известному свойству двойных интегралов, а величины $\Pi(\mathcal{L}_i) - 2\pi$ сложатся по лемме 1. В результате получим

$$\Pi(\mathcal{L}) - 2\pi = \sum_i (\Pi(\mathcal{L}_i) - 2\pi) = - \sum_i \iint_{G_i} K d\sigma = - \iint_G K d\sigma,$$

и тем самым установим формулу Гаусса-Бонне для произвольной односвязной области G , ограниченной кусочно-регулярной кривой $\mathcal{L}$.

7°. Замечание. Рассуждения этого параграфа доказывают справедливость формулы Гаусса-Бонне не только для случая поверхности в $\mathbb{R}^3$, но и для более общего случая двумерной римановой метрики.

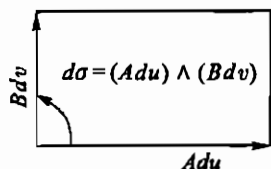


Рис. 150

Часть III

В первой и второй частях изучались с разных точек зрения отдельно взятые поверхности и лишь при обсуждении вопроса об изгибаниях (§ 19) и в доказательстве теоремы 2 в § 13* нам понадобились семейства поверхностей. В третьей части, напротив, семейства поверхностей являются главным предметом рассмотрения.

Каждая из глав 5, 6 и 7 написаны так, что они не зависят друг от друга. Однако читателю, который собирается изучить весь этот материал, лучше читать их по порядку.

Выше (в § 15, п. 13°) мы условились все рассматриваемые далее функции и поверхности считать C^∞ -гладкими. В третьей части тоже будем придерживаться этого соглашения за исключением тех случаев, когда C^n -гладкость при конкретных n будет специально оговариваться.

Глава 5

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 26. Геометрическое истолкование пространственных криволинейных координат

1°. Пользоваться криволинейными координатами приходится не только на поверхностях, но и в пространстве. В курсах математического анализа переход от декартовых координат (x, y, z) к криволинейным (u, v, w) трактуется как замена переменных и описывается двумя наборами формул вида

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, v, w), \\ y &= y(u, v, w), \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z), \\ v &= v(x, y, z), \\ w &= w(x, y, z); \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

при этом обычно рассуждения ведутся локально, а все функции (1) и (2) считаются C^n -гладкими для $n \geq 1$ или для $n \geq 2$ и предполагается отличие от нуля якобиана

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

2°. В ближайших пунктах мы обсудим геометрический смысл замены переменных, посредством которой вводятся криволинейные координаты.

Формулы (1) можно рассматривать как координатную запись вектор-функции

$$\overrightarrow{OX} = \vec{X}(u, v, w), \quad (4)$$

считая (как обычно) X текущей точкой пространства, а начало отсчета O — зафиксированным. Якобиан (3) представляет собой не что иное, как смешанное произведение частных производных:

$$\vec{X}_u, \quad \vec{X}_v, \quad \vec{X}_w \quad (5)$$

вектор-функции (4), именно:

$$J = (\vec{X}_u, \vec{X}_v, \vec{X}_w). \quad (6)$$

C^1 -гладкость функции (1) гарантирует существование всех производных (5), а неравенство (3) обеспечивает, что

$$\vec{X}_u \neq \vec{0}, \quad \vec{X}_v \neq \vec{0}, \quad \vec{X}_w \neq \vec{0}. \quad (7)$$

Воспользуемся тем, что смешанное произведение (6) допускает другую запись:

$$(\vec{X}_u, \vec{X}_v, \vec{X}_w) = ([\vec{X}_u \times \vec{X}_v], \vec{X}_w). \quad (8)$$

Из соотношений (3) и (8) следует, что

$$\vec{X}_u \times \vec{X}_v \neq \vec{0}. \quad (9)$$

Неравенства, аналогичные (9), имеют место и для векторных произведений двух других пар производных (5).

3°. Из трех аргументов вектор-функции (4) зафиксируем сразу два, положив $v = v_0$ и $w = w_0$ (предполагая, разумеется, что значения v_0 и w_0 допустимы для функций (1), а кроме того, считая, что при этих фиксированных значениях, изменяя u в некотором открытом интервале, мы будем оставаться в области определения всех трех функций (1)). Тогда вектор-функция (4) примет вид

$$\overrightarrow{OX} = \vec{X}(u; v_0, w_0). \quad (10)$$

С учетом оговоренной выше C^1 -гладкости функций (1), первое из неравенств (7) показывает, что вектор-функция (10) задает C^1 -гладкую линию в пространстве; ее называют *координатной u -линией*.

В соотношении (10) величины v_0 и w_0 служат параметрами, поэтому равенство (10) задает фактически не одну линию, а двухпараметрическое семейство координатных u -линий.

Аналогично строятся семейства координатных v -линий и w -линий. Для каждого из этих трех двухпараметрических семейств входящие в них линии должны, не пересекаясь внутри одного семейства друг с другом, полностью покрыть всю ту область Ω пространства $\mathbb{R}^3$, в ко-

торой формулами (1) и (2) вводятся координаты u, v, w . Через каждую точку этой области проходят три координатных линии, по одной из каждого семейства. Таким образом, точка $A \in \Omega$ с координатами $u = u_0, v = v_0, w = w_0$ находится на пересечении трех координатных линий из разных семейств: u -линии (при $v = v_0, w = w_0$), v -линии и w -линии (рис. 151).

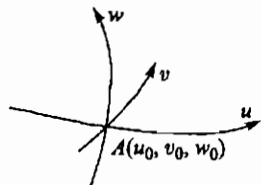


Рис. 151

4°. Предположим теперь, что, рассуждая аналогично, мы зафиксируем лишь один из трех аргументов вектор-функции (4), например, $w = w_0$. Тогда вместо соотношения (10) будем иметь

$$\overrightarrow{OX} = \vec{X}(u, v; w_0). \quad (11)$$

Непрерывность производных (5) (здесь нужны первые две из них) и неравенство (9) дают возможность рассматривать равенство (11) как уравнение поверхности; ее называют *координатной поверхностью* $w = \text{const} = w_0$ (рис. 152). Меняя параметр w_0 , получим семейство координатных w -поверхностей; u и v служат координатами на каждой из них. Аналогично строятся еще два семейства координатных поверхностей: $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$. При локальных рассмотрениях, когда речь идет о «достаточно малой окрестности» произвольно выбранной точки $X \in \Omega$, координатные поверхности можно считать простыми кусками (§6, 1°). Однако в целом ситуация может быть более сложной.

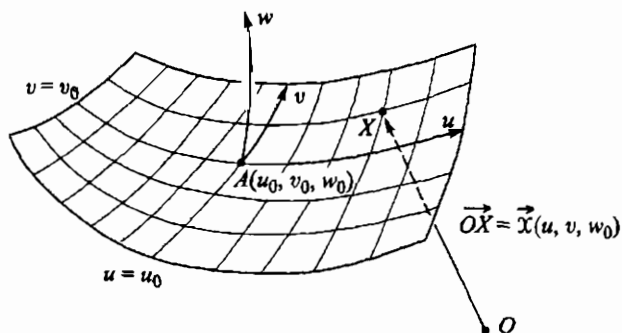


Рис. 152

Пример. Формулы

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & 0 < \rho < +\infty, \\ y &= \rho \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ z &= z, & -\infty < z < +\infty, \end{aligned} \quad (12)$$

задают *цилиндрические координаты* (ρ, φ, z) ; в качестве Ω здесь выступает все пространство $\mathbb{R}^3$, из которого «выброшена» ось z ; при этом

нужно помнить, что наборы чисел $(\rho, 0, z)$ и $(\rho, 2\pi, z)$ задают одну и ту же точку. Можно ввести соглашение, что одну и ту же точку задают наборы чисел (ρ, φ, z) и $(\rho, \varphi + 2\pi, z)$ и не накладывать тогда ограничений на изменение φ ; это бывает удобно при рассмотрении кривых, например, траекторий движущихся точек. Можно еще включить в рассмотрение первоначально выброшенную из рассмотрения ось z , приписав ее точкам $\rho = 0$ и не приписывая им никакого φ . Название «цилиндрическая» связано с тем, что координатные поверхности $\rho = \text{const}$ являются круглыми цилиндрами.

5°. Для того чтобы криволинейными координатами можно было воспользоваться в заранее заданной области Ω , отображения (1) и (2) должны быть в целом взаимно однозначными. Из математического анализа известно [119], что неравенство (3) обеспечивает эту взаимную однозначность лишь локально. В целом она может нарушиться при соблюдении условия (3), что видно уже на примере цилиндрических координат. Для обеспечения взаимной однозначности в целом отображений вида (1)–(2) в конкретных случаях требуются добавочные исследования.

6°. Пусть отображения (1)–(2) в целом взаимно однозначны. Образ области Ω , в которой построены координаты u, v, w при отображении (2) обозначим Ω^* . Его можно рассматривать как геометрическую фигуру в другом экземпляре $\mathbb{R}_+^3$ пространства $\mathbb{R}^3$. Если договориться, что u, v, w — декартовы координаты в $\mathbb{R}_+^3$, то криволинейные координаты u_0, v_0, w_0 точки A будут представлять собой не что иное, как декартовы координаты ее прообраза $A^* \in \Omega^*$ при отображении (1) (см. рис. 153).

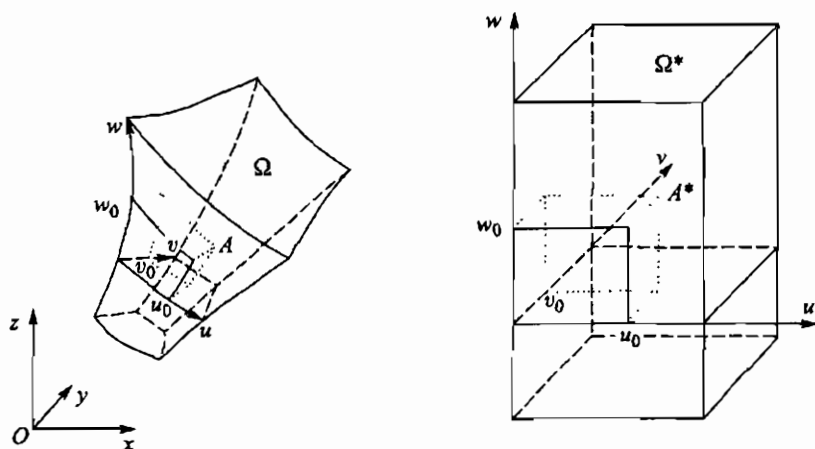


Рис. 153

7°. Напомним, что длина $s(t_1, t_2)$ дуги $t_1 \leq t \leq t_2$ на C^1 -гладкой линии $\vec{X} = \vec{X}(t)$ выражается интегралом

$$s = s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{X}'(t)| dt. \quad (13)$$

Поэтому дифференциал ds длины переменной дуги $s(t_1, t)$ выразится так:

$$ds = |\vec{X}'(t)| dt. \quad (14)$$

Так же, как мы делали в § 8, удобнее будет работать с квадратом дифференциала (14); в пространстве, как и на поверхностях, его называют *метрической формой*; в силу (14) она равна скалярному квадрату дифференциала $d\vec{X}$ вектор-функции $\vec{X}(t)$,

$$ds^2 = (\vec{X}'(t) dt, \vec{X}'(t) dt) = (d\vec{X}, d\vec{X}). \quad (15)$$

Подставив в (15) выражение

$$d\vec{X} = \vec{X}_u du + \vec{X}_v dv + \vec{X}_w dw, \quad (16)$$

получим квадратичную форму относительно дифференциалов du , dv и dw , которые сейчас будет удобно обозначить иначе:

$$du = du_1, \quad dv = du_2, \quad dw = du_3, \quad (17)$$

считая, что $u = u_1$, $v = u_2$, $w = u_3$; тогда можно написать, что

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} du_i du_j. \quad (18)$$

Из (15)–(17) видно, что коэффициенты квадратичной формы (18) являются функциями координат u_i и что

$$g_{ij} = (\vec{X}_{u_i}, \vec{X}_{u_j}). \quad (19)$$

Формулу (13) для длины дуги можно представить так:

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} ds, \quad (13')$$

где ds выражается согласно (18)–(19).

§ 27. Ортогональные координаты. Коэффициенты Ламе

1°. Если в некоторой точке пространства пересекаются две гладких линии, или две гладких поверхности, или линия и поверхность, то угол между этими пересекающимися объектами определяется как

угол между их касательными (касательными прямыми для линий, плоскостями — для поверхностей). Перечисленные объекты называют ортогональными друг другу, когда угол между ними прямой.

Отметим, что аналогично § 9 в криволинейных координатах углы выражаются через метрическую форму, но мы не будем на этом подробно останавливаться.

2°. Система координат (u, v, w) называется *ортогональной* в области Ω , если ее координатные линии друг другу ортогональны во всех точках этой области. Тогда

$$(\vec{x}_u, \vec{x}_v) = (\vec{x}_v, \vec{x}_w) = (\vec{x}_w, \vec{x}_u) = 0. \quad (1)$$

Из (1) следует, что в ортогональных координатах метрическая форма пространства $\mathbb{R}^3$ имеет канонический вид

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2, \quad (2)$$

где

$$H_1 = \sqrt{(\vec{x}_u, \vec{x}_u)}, \quad H_2 = \sqrt{(\vec{x}_v, \vec{x}_v)}, \quad H_3 = \sqrt{(\vec{x}_w, \vec{x}_w)}, \quad (3)$$

(см. (18)–(19) в § 26). Функции $H_i = H_i(u, v, w)$ называются *коэффициентами Ламе*. Из неравенств (7) предыдущего параграфа следует, что все $H_i > 0$.

3°. Орты касательных к координатным u -линиям, v -линиям и w -линиям будем обозначать $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$ и $\vec{\tau}_3$ соответственно.

Из определения коэффициентов Ламе следует, что

$$\vec{x}_u = H_1 \vec{\tau}_1, \quad \vec{x}_v = H_2 \vec{\tau}_2, \quad \vec{x}_w = H_3 \vec{\tau}_3. \quad (4)$$

4°. Ниже нам понадобятся дифференциалы длины дуги координатных линий

$$ds_1 = H_1 du, \quad ds_2 = H_2 dv, \quad ds_3 = H_3 dw. \quad (5)$$

5°. Полагая в (2) какой-нибудь из дифференциалов координат тождественно равным нулю, мы будем получать первые квадратичные формы координатных поверхностей. Обозначим их так:

для поверхностей $w = \text{const}$

$$ds_{\textcircled{1}}^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 = A_{\textcircled{1}}^2 du^2 + B_{\textcircled{1}}^2 dv^2, \quad (6)$$

для $u = \text{const}$

$$ds_{\textcircled{2}}^2 = H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2 = A_{\textcircled{2}}^2 dv^2 + B_{\textcircled{2}}^2 dw^2, \quad (7)$$

и для $v = \text{const}$

$$ds_{\textcircled{3}}^2 = H_3^2 dw^2 + H_1^2 du^2 = A_{\textcircled{3}}^2 dw^2 + B_{\textcircled{3}}^2 du^2. \quad (8)$$

Второй из вариантов обозначений, указанных в (6)–(8), согласован с § 14 и будет нам полезен в § 30.

6°. Из (6)–(8) с учетом § 9 следует, что

$$d\sigma_{\textcircled{1}} = H_1 H_2 du dv, \quad d\sigma_{\textcircled{2}} = H_2 H_3 dv dw, \quad d\sigma_{\textcircled{3}} = H_3 H_1 dw du \quad (9)$$

суть элементы площади на координатных поверхностях.

7°. Положим $H = H_1 H_2 H_3$. Тогда

$$H du dv dw = dV \quad (10)$$

представляет собой элемент объема, записанный в координатах u, v, w (см. [119]).

Ниже мы обсудим еще некоторые применения коэффициентов Ламе.

8°. Пусть в области Ω пространства $\mathbb{R}^3$ задана дифференцируемая функция f . В ортогональных координатах u, v, w выразим ее *градиент* ∇f . Напомним, что в декартовых координатах x, y, z

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}, \quad (11)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты координатных осей.

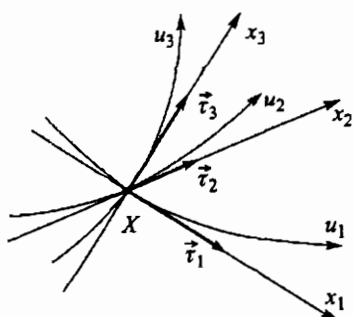


Рис. 154

Перейдя к криволинейным координатам, сохраним символ f (считая, что функция зависит от точки пространства), но писать будем $f = f(u_1, u_2, u_3)$.

В окрестности произвольной точки $X \in \Omega$ возьмем вспомогательные координаты x_1, x_2, x_3 , приняв $\vec{\tau}_j$ за орты осей x_j (рис. 154). Вследствие известной из математического анализа [119] инвариантности градиента, в координатах x_1, x_2, x_3 действует та же формула (11). Поэтому

$$\nabla f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{\tau}_i. \quad (12)$$

Вместе с тем, известно [62], что для дифференцируемой функции ее производная по длине дуги гладкой кривой равна производной этой функции по направлению орта касательной к кривой. Поэтому, учитывая (5), имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial s_i} = \frac{df}{ds_i} \Big|_{u_j=\text{const.}, j \neq i} = \frac{df}{H_i du_i} \Big|_{u_j=\text{const.}, j \neq i} = h_i \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad (13)$$

где

$$h_i = \frac{1}{H_i} > 0. \quad (14)$$

Подставив (13) в (12), получим

$$\nabla f = \sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \vec{\tau}_i. \quad (15)$$

9°. Пусть в области Ω задано векторное поле $\vec{F}$. В математическом анализе и его приложениях важную роль играет *дивергенция*. Выразим ее в ортогональных координатах.

Напомним, что если поле $\vec{F}$ записано в декартовых координатах, то есть $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, то его дивергенция

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (16)$$

Однако дивергенция может быть выражена иначе, инвариантно, как предел отношения потока векторного поля $\vec{F}$ через поверхность S , гомеоморфную сфере, к объему V , ограниченному этой поверхностью, когда поверхность S стягивается к выбранной точке X .

$$\operatorname{div} \vec{F} |_{X} = \lim_{S \rightarrow X} \frac{1}{V} \oiint_S (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma, \quad (17)$$

где $\vec{n}$ — орт внешней нормали к поверхности S , а $d\sigma$ — элемент площади на S . Поверхность S в (17) может быть кусочно-гладкой. Поэтому формулой (17) удобно воспользоваться при выводе выражения для дивергенции в ортогональных координатах u_1, u_2, u_3 . Именно, в качестве S возьмем поверхность координатной ячейки D с гранями, обозначенными здесь $S_{\oplus}^{\pm}$ (рис. 155); знак «минус» соответствует значениям $\dot{u}_i$ в точке X_0 , а знак «плюс» — измененным значениям $\dot{u}_i + \delta u_i$. Будем считать, что в текущей точке X

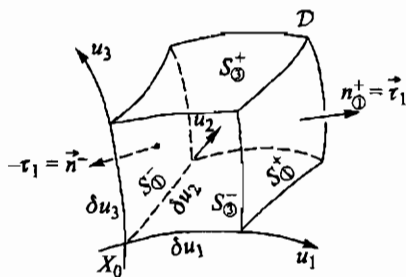


Рис. 155

вектор $\vec{F}$ разложен по ортам $\vec{\tau}_i$, так что $\vec{F} = \sum F_i \vec{\tau}_i$, и что F_i являются известными функциями координат (u_j) , т. е. $F_i = F_i(u_1, u_2, u_3)$ (иногда их называют проекциями вектора $\vec{F}$ в криволинейных координатах).

На правой грани $S_{\oplus}^+$ ячейки D имеем $\vec{n} = \vec{n}_{\oplus}^+ = \vec{\tau}_1$, а на левой грани $S_{\oplus}^-$ у нормали другое направление: $\vec{n} = \vec{n}_{\oplus}^- = -\vec{\tau}_1$. Поэтому, используя (8)–(9) и известную в математическом анализе формулу Гаусса–Остроградского, находим

$$\begin{aligned}
& \int \int_{S_{\vec{\sigma}}^+} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma + \int \int_{S_{\vec{\sigma}}^-} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \\
& = \int \int_{S_{\vec{\sigma}}^+} (\vec{F}, \vec{\tau}_1) H_2 H_3 du_2 du_3 - \int \int_{S_{\vec{\sigma}}^-} (\vec{F}, \vec{\tau}_1) H_2 H_3 du_2 du_3 = \\
& = \int \int_{\substack{\bar{u}_2 \leq u_2 \leq \bar{u}_2 + \delta u_2 \\ \bar{u}_3 \leq u_3 \leq \bar{u}_3 + \delta u_3}} \left(\left(H_2 H_3 F_1 \right) \Big|_{\bar{u}_1}^{\bar{u}_1 + \delta u_1} \right) du_2 du_3 = \\
& = \int \int \int_D \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{H F_1}{H_1} \right) du_1 du_2 du_3. \quad (18)
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляются суммы интегралов по двум другим парам противоположных граней ячейки; в сумме с (18) они дают участвующий в (17) поток (с заменой обозначения X_0 на X), после чего с использованием теоремы о среднем для тройных интегралов и пункта 7° вычисляется предел (17):

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{H F_i}{H_i} \right) = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} (H h_i F_i); \quad (19)$$

где h_i определено в (14).

10*. Замечание. В книге [62] читатель может также найти выражение в криволинейных ортогональных координатах для ротора векторного поля.

11°. В математической физике часто используется *оператор Лапласа*; обычно его обозначают символом Δ . Напомним, что в декартовых координатах он равен сумме вторых несмешанных производных:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \operatorname{div} (\nabla f). \quad (20)$$

Формулы (14), (15) и (19), (20) позволяют сразу, без каких-либо дополнительных вычислений, записать его в ортогональных криволинейных координатах:

$$\Delta f = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(H h_i^2 \frac{\partial f}{\partial u_i} \right). \quad (21)$$

Пример. Оператор Лапласа в сферических координатах. Сферические координаты задаются формулами

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \psi \cos \varphi, & 0 \leq \rho < +\infty, \\ y &= \rho \cos \psi \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ z &= \rho \sin \psi, & -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

с отождествлением точек, у которых значения φ отличаются на 2π (так же, как в полярных и в цилиндрических координатах). ρ — расстояние от начала отсчета O до текущей точки X , а (φ, ψ) — географические координаты на сферах $\rho = \text{const}$ (см. § 6, п. 3°, пример 4 и рис. 33). Иногда в качестве третьей координаты вместо широты ψ берут «дополнение до широты» — угол, отсчитываемый от «северного полюса». Если этот угол обозначить прежней буквой ψ , то синус и косинус от ψ в формулах (22) поменяются ролями.

Условимся, что для сферических координат

$$\rho = u_1, \quad \varphi = u_2, \quad \psi = u_3, \quad (23)$$

и, используя (22)–(23) и (3), найдем

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho \cos \psi, \quad H_3 = \rho; \quad H = \rho^2 \cos \psi. \quad (24)$$

Замечание. Для сферических координат коэффициенты Ламе (24) можно найти почти без вычислений — из наглядных геометрических соображений. Для этого вспомним, что в полярных координатах на плоскости

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \quad (25)$$

(это очевидно, см. рис. 156). Зная, что сферические координаты являются ортогональными, и тем же символом ds^2 обозначая теперь метрическую форму пространства, можем написать

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2, \quad (26)$$

где ds_i — дифференциалы длины дуги координатных u_i -линий. ρ -линии — лучи, и ρ — на них длина, поэтому

$$ds_1 = d\rho. \quad (27)$$

Далее, применим формулу (25) в плоскости меридиана, взяв в ней $d\rho = 0$; тогда видим, что

$$ds_3 = \rho d\psi, \quad (28)$$

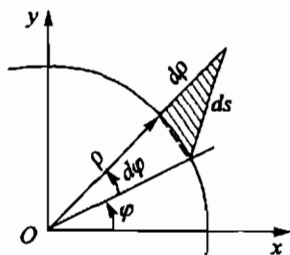


Рис. 156

а затем ту же формулу (25) используем в плоскости параллели. Радиус параллели зависит от широты ψ и равен $\rho \cos \psi$ (рис. 157). Поэтому

$$ds_2 = (\rho \cos \psi) d\varphi. \quad (29)$$

Собрав вместе (26)–(29), получим

$$ds^2 = d\rho^2 + (\rho \cos \psi)^2 d\varphi^2 + \rho^2 d\psi^2, \quad (30)$$

а из (30) следует (24).

Учитывая (14), подставим (23)–(24) в (21):

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\cos^2 \psi} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\cos \psi} \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \cos \psi \right) \right) \right). \quad (31)$$

Разумеется, формулу (31) можно было бы получить иначе, выполнив в исходном выражении (20) замену переменных по формулам (22), но это потребовало бы значительно более громоздких выкладок.

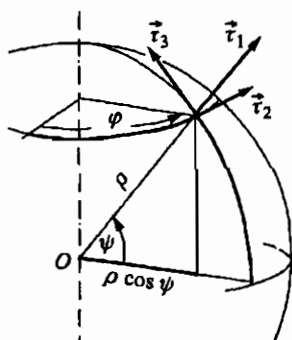


Рис. 157

12°. Рассмотрим более сложный пример, в котором тоже используются сферические координаты.

В математической физике известно уравнение теплопроводности [113]:

$$c\mu \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \nabla T); \quad (32)$$

здесь T — температура рассматриваемого физического тела, κ — его теплопроводность, μ — плотность, c — удельная теплоемкость.

Соотношение (32) представляет собой уравнение с частными производными второго порядка параболического типа. При его выводе используется закон Фурье, описывающий распространение тепла внутри физических тел. От утверждает, что поток теплоты δQ за «малое» время δt через «малую» площадку, мысленно выделенную внутри тела, прямо пропорционален ее площади $\delta \sigma$, времени δt и скалярному произведению единичного вектора $\vec{n}$ нормали к площадке на градиент температуры, т. е.

$$\delta Q = -\kappa(\vec{n}, \nabla T)(\delta \sigma)(\delta t). \quad (33)$$

Теплопроводность служит коэффициентом пропорциональности. Знак «минус» в (33) показывает, что поток тепла направлен навстречу градиенту температуры — от теплых участков тела к более холодным.

Отметим попутно, что если μ , c и κ — постоянные, то (32) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T; \quad (34)$$

величина $\chi = \frac{\kappa}{c\mu}$ называется температуропроводностью.

Рассмотрим тело в форме шарового слоя, ограниченного двумя концентрическими сферами S_r и S_R с радиусами r и R ($0 < r < R$). Их общий центр обозначим O . Пусть ρ , как и выше, есть расстояние от центра O . Предположим, что теплопроводность κ является переменной, но зависит только от ρ и известна, $\kappa = \kappa(\rho) > 0$. Кроме того, предположим, что на наружной сфере S_R поддерживается постоянная температура T_0 , а во внутренней области, ограниченной сферой S_r , находится источник тепла, создающий постоянный поток теплоты Q (рис. 158). Пусть в слое $r \leq \rho \leq R$ установилась стационарная (т. е. не зависящая от времени t) температура $T = T(\rho)$, и надо ее найти. Задача в такой постановке встречается в геофизике, в астрофизике и в технике.

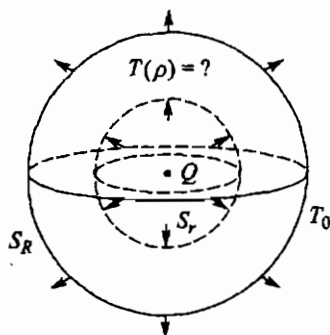


Рис. 158

При сделанных допущениях $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, а $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial \rho} \vec{\tau}_1$, где $\vec{\tau}_1$ — единичный вектор, направленный по лучу, которым является ρ -линия. Поэтому (32) принимает вид

$$\operatorname{div} \left(\kappa(\rho) \frac{\partial T}{\partial \rho} \vec{\tau}_1 \right) = 0 \quad (35)$$

и превращается (см. (19) и (24)) в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Обозначая штрихом производную по ρ , его можно записать так:

$$(\rho^2 \kappa(\rho) T')' = 0, \quad (36)$$

причем одно граничное условие для этого уравнения есть у нас сразу:

$$T(R) = T_0. \quad (37)$$

Второе граничное условие получается из следующих соображений. В шаровом слое при сферически симметричном стационарном распределении температуры один и тот же поток теплоты Q проходит через каждую из сфер $\rho = a$ для всех $a \in [r, R]$ и по площади каждой из этих сфер он распределен равномерно. Поэтому, взяв $a = R$ и учитывая знак «минус» в (33), имеем

$$\kappa(R) T'(R) = -\lambda, \quad \text{где } \lambda = \frac{Q}{4\pi R^2}. \quad (38)$$

Итак, для уравнения (36) получили задачу Коши (37)–(38).

Первое интегрирование равенства (36) вместе с условием (38) дает

$$\rho^2 \kappa(\rho) T'(\rho) = -\frac{Q}{4\pi}. \quad (39)$$

Затем, из (39) и (37) находим при $r \leq \rho \leq R$

$$T(\rho) = T_0 + \frac{Q}{4\pi} \int_{\rho}^R \frac{d\rho}{\rho^2 \kappa(\rho)}. \quad (40)$$

З а м е ч а н и е. Почти очевидно, что чем меньше теплопроводность κ , тем выше температура на внутренней стенке S_r , но чему именно она равна, без вычислений не ясно, а формула (40) дает конкретный ответ.

В третьем томе пятитомника [74] можно ознакомиться с гораздо более сложными (встречающимися в технике) задачами о распределении температуры в тонкостенных конструкциях.

§ 28. Теорема Дюпена

1°. Выше мы видели, что ортогональные координаты во многих ситуациях бывают удобны.

Обсудим вопрос, можно ли ортогональные координаты, построенные на поверхности, продолжить с нее в пространство с сохранением свойства ортогональности?

Постановку вопроса сформулируем подробнее.

Будем считать, что поверхность S , представляющая собой простой кусок, задана уравнением

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{Y}(u, v) \quad (1)$$

и пересекает пространственную область Ω , так что $S \cap \Omega = \omega \neq \emptyset$. Пусть известно, что в ω на S

$$(\overrightarrow{Y}_u, \overrightarrow{Y}_v) = 0. \quad (2)$$

В этих предположениях ищется вектор-функция $\overrightarrow{X}(u, v, w)$ с областью значений Ω , для которой соблюдаются равенства (1) из § 27 и выполнено условие

$$\overrightarrow{X}(u, v, w_0) = \overrightarrow{Y}(u, v). \quad (3)$$

Равенства (1) из § 27 в координатной записи представляют собой систему из трех нелинейных уравнений с частными производными

$$\left. \begin{aligned} x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v &= 0, \\ x_v x_w + y_v y_w + z_v z_w &= 0, \\ x_w x_u + y_w y_u + z_w z_u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

для трех искоемых функций $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ и $z(u, v, w)$. Их область определения Ω^* заранее неизвестна: она ищется вместе с вектор-функцией $\overrightarrow{X} = \{x, y, z\} = \overrightarrow{X}(u, v, w)$. Однако для того, чтобы переменными u, v, w можно было воспользоваться как координатами в Ω , необходи-

мо, чтобы отображение $\Omega^* \rightarrow \Omega$ было гомеоморфным (в этой связи см. выше, пп. 5°–6° в § 26).

Здесь мы сформулировали глобальную постановку задачи, считая, что Ω и ω даны заранее. При локальном подходе считается, что на S берется точка X_0 и рассматриваются «достаточно малая» ее пространственная окрестность Ω и окрестность $\omega = \Omega \cap S$ точки X_0 на S .

Ниже мы увидим, что система (4) с начальным условием (3) даже в локальной постановке разрешима далеко не всегда.

2°. В связи с задачей, поставленной в 1°, обсудим следующую геометрическую конструкцию.

Пусть даны три однопараметрических семейства поверхностей, обладающих такими свойствами:

- каждое из трех семейств покрывает область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$;
- через каждую точку $X \in \Omega$ проходит по одной поверхности каждого из этих трех семейств;
- поверхности каждых двух семейств (из трех) ортогональны в каждой точке их пересечения.

При соблюдении всех этих условий говорят, что в области Ω задана *триортогональная система поверхностей*.

3°. Из пп. 1°–2° и § 26 видно, что построение в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ триортогональной системы поверхностей достаточно для построения в ней ортогональных координат и что в ортогональных координатах их координатные поверхности образуют триортогональную систему.

4°. Теорема Дюпена. *Поверхности триортогональной системы пересекаются друг с другом по линиям кривизны.*

Следствие. *Для разрешимости задачи (2)–(4) необходимо, чтобы на «начальной» поверхности (2) координатные u -линии и v -линии были линиями кривизны.*

Доказательство теоремы Дюпена см. ниже, п. 6°.

5°. Лемма. Если $\vec{X}(u, v, w) \in C^2$ и соблюдено (1) из § 27, то

$$(\vec{X}_u, \vec{X}_{vw}) = (\vec{X}_v, \vec{X}_{wu}) = (\vec{X}_w, \vec{X}_{uv}) = 0. \quad (5)$$

Доказательство. Первое из скалярных произведений, участвующих в (1) в § 27, продифференцируем по w , второе — по u , третье — по v :

$$\begin{aligned} (\vec{X}_{uw}, \vec{X}_v) + (\vec{X}_u, \vec{X}_{vw}) &= 0, \\ (\vec{X}_{vu}, \vec{X}_w) + (\vec{X}_v, \vec{X}_{wu}) &= 0, \\ (\vec{X}_{wv}, \vec{X}_u) + (\vec{X}_w, \vec{X}_{uv}) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая равенство смешанных производных, положим

$$\begin{aligned}(\vec{x}_{uv}, \vec{x}_w) &= (\vec{x}_{vu}, \vec{x}_w) = \xi_1, \\(\vec{x}_{vw}, \vec{x}_u) &= (\vec{x}_{wv}, \vec{x}_u) = \xi_2, \\(\vec{x}_{wu}, \vec{x}_v) &= (\vec{x}_{uw}, \vec{x}_v) = \xi_3.\end{aligned}\tag{7}$$

Тогда равенства (6) запишутся в виде системы линейных алгебраических уравнений для величин (7):

$$\left. \begin{aligned}\xi_2 + \xi_3 &= 0 \\ \xi_1 + \xi_3 &= 0 \\ \xi_1 + \xi_2 &= 0\end{aligned} \right\}.\tag{8}$$

Система (8) однородная, ее определитель отличен от нуля, поэтому все $\xi_i = 0$, и (5) соблюдено.

6°. Доказательство теоремы Дюпена. В триортогональной системе все три семейства равноправны, поэтому рассмотрим какое-нибудь одно из них, например, $w = \text{const}$. У поверхностей этого семейства орт нормали

$$\vec{n} = \vec{\tau}_3 = h_3 \vec{x}_w\tag{9}$$

(см. § 27, (4) и (14)). Используя (9) и формулу (11) из § 11, найдем для этой координатной поверхности коэффициент M второй квадратичной формы:

$$M = -(\vec{n}_u, \vec{x}_v) = -((h_3 \vec{x}_w)_u, \vec{x}_v) = -(h_3)_u (\vec{x}_w, \vec{x}_v) - h_3 (\vec{x}_{uw}, \vec{x}_v).\tag{10}$$

В последнем из выражений (10) первое слагаемое равно нулю в силу ортогональности векторов $\vec{x}_v$ и $\vec{x}_w$, а второе — по лемме из предыдущего пункта; поэтому $M = 0$. Кроме того, $F = 0$ из-за ортогональности векторов $\vec{x}_u$ и $\vec{x}_v$. Таким образом, применима лемма 1 из п. 2° § 12, из которой следует, что u -линии и v -линии на поверхности $w = \text{const}$ являются линиями кривизны. Два других семейства рассматриваются аналогично.

Дополнительные сведения о триортогональных системах читатель может найти в книгах [56, 82].

§ 29. О построении пространственных ортогональных и приближенно ортогональных координат

1°. Теорема Дюпена дает не только необходимое, но и достаточное условие разрешимости задачи о продолжении с поверхности в пространство ортогональных координат, поставленной в п. 1° § 28. Именно, справедлива

Теорема. Пусть на ориентируемой поверхности S координатная сеть (u, v) образована линиями кривизны. Тогда в некоторой области пространства, содержащей поверхность S , можно ввести ортогональные координаты (u, v, ξ) , в которых S является координатной поверхностью $\xi = \text{const}$.

Доказательство см. ниже, п. 5°.

2°. Далее нам понадобится

Определение. Система координат (u, v, ξ) называется нормально связанной с ориентируемой поверхностью S , если

- 1) S является координатной поверхностью $\xi = 0$ с координатами u, v на ней;
- 2) ξ -линии являются отрезками нормалей к S ;
- 3) $|\xi|$ представляет собой расстояние до S .

Координаты, нормально связанные с поверхностью, используются в механике — в теории оболочек [27, 36].

3°. **Лемма.** В системе координат, нормально связанной с поверхностью, ξ -линии ортогональны всем поверхностям $\xi = \text{const}$.

Доказательство. Из определения следует, что координаты, нормально связанные с поверхностью, можно задать вектор-функцией

$$\vec{X}(u, v, \xi) = \vec{Y}(u, v) + \xi \vec{n}(u, v), \quad (1)$$

где

$$\vec{OX} = \vec{Y}(u, v) \quad (2)$$

— уравнение поверхности S , а $\vec{n} = \vec{n}(u, v)$ — поле ортов ее нормалей. Из (1) находим производные

$$\vec{X}_u = \vec{Y}_u + \xi \vec{n}_u, \quad \vec{X}_v = \vec{Y}_v + \xi \vec{n}_v, \quad \vec{X}_\xi = \vec{n}. \quad (3)$$

Аналогично формулам (14)–(15) из § 12 имеем

$$\vec{Y}_u \perp \vec{n}, \quad \vec{Y}_v \perp \vec{n}, \quad \vec{n}_u \perp \vec{n}, \quad \vec{n}_v \perp \vec{n}. \quad (4)$$

Поэтому утверждение леммы следует из (3)–(4).

Обратим внимание на то, что в системе координат, заданной формулой (1), ξ -линии на координатных поверхностях $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ являются геодезическими линиями (так как все они согласно определению — прямолинейные отрезки).

4*. Из сказанного в п. 3° и доказанной там леммы имеем

Следствие. В координатах, нормально связанных с поверхностью S , координатные системы (u, ξ) на всех поверхностях $v = \text{const}$, а также координатные системы (v, ξ) на всех поверхностях $u = \text{const}$ являются полугеодезическими (§ 22, пп. 5*–6*).

5°. **Доказательство теоремы из п. 1°.** Покажем, что достаточно в качестве искомой взять систему координат, нормально связан-

ную с поверхностью S . В силу леммы из п. 3° ξ -линии ортогональны u -линиям и v -линиям. Поэтому нам остается проверить, что в условиях теоремы u -линии и v -линии ортогональны друг другу на всех поверхностях $\xi = \text{const}$. По теореме Родрига (§ 12, п. 2°), примененной к поверхности S ,

$$\vec{n}_u = -k_1 \vec{Y}_u, \quad \vec{n}_v = -k_2 \vec{Y}_v, \quad (5)$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны на S . Из (5) и (3) находим

$$\vec{X}_u = (1 - k_1 \xi) \vec{Y}_u, \quad \vec{X}_v = (1 - k_2 \xi) \vec{Y}_v. \quad (6)$$

И так как $\vec{Y}_u(u, v) \perp \vec{Y}_v(u, v)$, то из (6) имеем $\vec{X}_u(u, v, \xi) \perp \vec{X}_v(u, v, \xi)$, что и требовалось доказать.

Упражнение. Пусть u -линии и v -линии на S являются линиями кривизны и в координатах (u, v) записана первая квадратичная форма поверхности S :

$$ds^2 = A^2(u, v) du^2 + B^2(u, v) dv^2. \quad (7)$$

Найти коэффициенты Ламе в системе координат (u, v, ξ) , заданной формулой (1).

6°. Обсудим некоторые частные случаи.

Сначала вспомним, что на плоскости и на сфере все C^1 -гладкие линии являются линиями кривизны (§ 12, п. 3°). Поэтому с плоскости и со сферы любая ортогональная система координат допускает продолжение в пространство с сохранением ортогональности.

Если $S = \mathbb{R}^2$ — плоскость и координаты u, v на ней (или в некоторой ее области) связаны с декартовыми координатами x, y формулами вида

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad (8)$$

а ось z в $\mathbb{R}^3$ ортогональна $\mathbb{R}^2$, то построение, о котором шла речь выше, в пп. 2°–4°, даст координаты u, v, z такие, что

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = z. \quad (9)$$

Переход от (8) к (9) означает, что плоскость $\mathbb{R}^2$ переносится параллельно в направлении оси z вместе с «нарисованными» на ней координатными линиями, а линии эти «зачерчивают» в $\mathbb{R}^3$ цилиндрические поверхности. В частности, так получаются известные цилиндрические координаты в пространстве (см. (12) в § 26) из полярных координат на плоскости.

Если S — сфера с центром O , то ситуация аналогичная, с той лишь разницей, что вместо параллельного переноса нужна гомотетия из центра O . Одно семейство координатных поверхностей будет образовано концентрическими сферами, два других будут состоять из конических поверхностей с общей вершиной O . Именно так из географических

координат на сфере (§ 6, п. 3°, пример 4) получаются в пространстве сферические координаты (22) § 27.

7°. Пусть теперь S — поверхность вращения, u -линии — ее меридианы, φ -линии — параллели (φ — угол поворота вокруг ее оси P_1P_2 , рис. 159). Через ось P_1P_2 проведем плоскость, а одну ее полуплоскость, ограниченную прямой P_1P_2 , обозначим T ; эта полуплоскость содержит один из меридианов поверхности S ; назовем его $\mathcal{L}$. В полуплоскости T проведем нормали к $\mathcal{L}$, а затем построим их ортогональные траектории; это будет координатная сеть (u, w) , причем $|w|$ — расстояние, отсчитываемое от $\mathcal{L}$ по нормальям, знак w указывает направление. Обратим внимание на то, что так построенные координаты (u, w) будут «действовать» не на всей полуплоскости T , а лишь в некоторой области $\tilde{\omega}$, содержащей линию $\mathcal{L}$ (рис. 160).

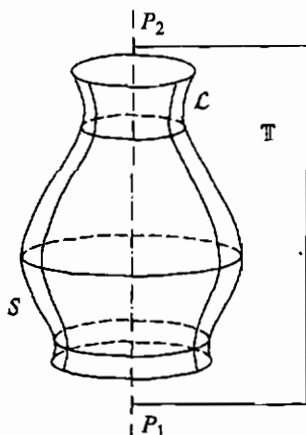


Рис. 159

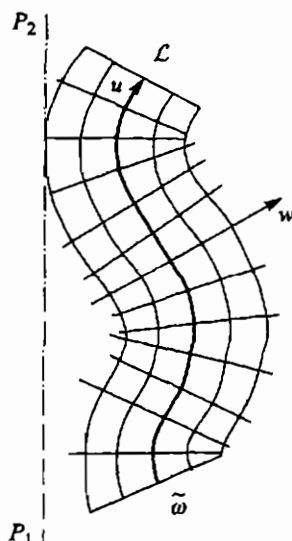


Рис. 160

Полуплоскость T будем вращать вокруг оси P_1P_2 . В пространственной области Ω , содержащей поверхность S (рис. 161) получим систему координат (u, φ, w) , доказательство ортогональности которых предоставляем читателю.

8°. На примере поверхности вращения хорошо видно, что если задача (2)–(3)–(4) из § 28 разрешима, то ее решение, вообще говоря, неединственно. Дело в том, что вместо нормалей к $\mathcal{L}$ мы можем взять на полуплоскости T любое другое семейство линий, под прямым углом пересекающих меридиан $\mathcal{L}$, и с ним повторить построение прошлого пункта: построить на T ортогональные траектории семейства линий, а затем всё вращать вокруг P_1P_2 . На рисунках 160–162 видно, что

таким путем можно увеличить область $\tilde{\omega}$ в полуплоскости T , а вместе с тем и ту пространственную окрестность Ω поверхности S , в которой будут построены ортогональные координаты.

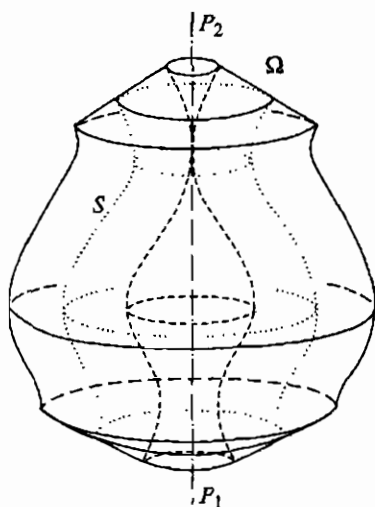


Рис. 161

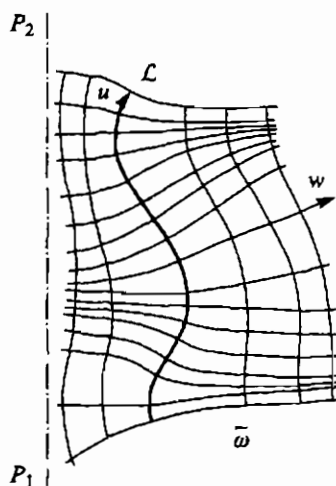


Рис. 162

9*. Если S — трехосный эллипсоид, то кроме нормально с ним связанной системы координат можно построить в пространстве другую ортогональную систему, включающую его в качестве одной из координатных поверхностей. В ней одно из трех семейств состоит из эллипсоидов, два других — из гиперболоидов (см. [56] и [99], а также [78, § 1]).

10*. В связи с изложенным в пп. 2°–7° отметим еще один интересный геометрический факт.

Теорема. *Поверхности, образованные нормальными, построенными вдоль линий кривизны, являются развешивающимися.*

Доказательство. Считая, что u -линии и v -линии на S представляют собой ее линии кривизны, рассмотрим в обозначениях (1)–(2), например, поверхность $v = \text{const} = v_1$:

$$\vec{Z}(u, \xi) = \vec{y}(u, v_1) + \xi \vec{n}(u, v_1) \quad (10)$$

и вычислим ее гауссову кривизну $\tilde{K}$.

Пусть $\tilde{L}$, $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности (10). Выражение (10) продифференцируем по u и по ξ сначала один раз:

$$\vec{Z}_u = \vec{y}_u + \xi \vec{n}_u, \quad \vec{Z}_\xi = \vec{n}, \quad (11)$$

потом второй:

$$\vec{Z}_{uu} = \vec{Y}_{uu} + \xi \vec{n}_{uu}, \quad \vec{Z}_{u\xi} = \vec{n}_u, \quad \vec{Z}_{\xi\xi} = \vec{\theta}. \quad (12)$$

Из (11)–(12) имеем

$$\begin{aligned} (\vec{Z}_{\xi\xi}, \vec{Z}_u, \vec{Z}_\xi) &= 0, \\ (\vec{Z}_{u\xi}, \vec{Z}_u, \vec{Z}_\xi) &= -k_1(\vec{Y}_u, \vec{n}, \vec{Y}_u) + \xi(\vec{n}_u, \vec{n}, \vec{n}_u) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя (13), по формулам (9) из § 11 и (6) из § 12 последовательно находим

$$\tilde{N} = 0, \quad \tilde{M} = 0, \quad \tilde{L}\tilde{N} - \tilde{M}^2 = 0, \quad \tilde{K} = 0. \quad (14)$$

Последнее из равенств (14) как раз и означает, что поверхность $v = v_1$ — развертывающаяся. Поверхности $u = \text{const}$ рассматриваются аналогично.

11*. Третья квадратичная форма поверхности.

Пусть даны: поверхность S и ее сферический образ S^* .

Определение. Первая квадратичная форма, построенная для S^* , называется *третьей квадратичной формой* поверхности S .

Используются обозначения:

$$III = d\vec{n}^2 = (\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv)^2. \quad (15)$$

Аналогично — римскими цифрами — обозначим сейчас первую и вторую квадратичные формы поверхности S :

$$I = ds^2, \quad II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2. \quad (16)$$

Согласно теореме Бонне (§ 16, 18) первые две квадратичные формы полностью определяют геометрию поверхности. Значит, они должны определять и ее третью квадратичную форму, хотя заранее неизвестно, не войдут ли в выражение для III какие-нибудь из производных от коэффициентов форм I и II . Покажем, что производных там не будет. Именно, имеет место тождество

$$III - 2H \cdot II + K \cdot I = 0, \quad (17)$$

где H и K — средняя и гауссова кривизны поверхности S .

Доказательство. Прежде всего отметим следующее. Аналогично пп. 6° и 7* из § 8 можно установить, что при переходе на S к новым координатам III преобразуется по тензорному закону. Мы знаем (§ 11, пп. 2° и 3*), что по тензорному закону преобразуется II , если при переходе к новым координатам сохраняется ориентация. При смене ориентации дополнительно происходит смена знака и у II , и у H . Отсюда следует, что предполагаемое равенство (17) инвариантно относительно преобразований координат на S . Это позволяет вести

рассуждения не в произвольных координатах, а в ортогональных. Тогда для I действует формула (7),

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{A^2} + \frac{N}{B^2} \right), \quad K = \frac{LN - M^2}{(AB)^2}. \quad (18)$$

Кроме того, из формул (6), (7) § 16 имеем

$$\vec{n}_u = -\frac{L}{A} \vec{\tau}_1 - \frac{M}{B} \vec{\tau}_2, \quad \vec{n}_v = -\frac{M}{A} \vec{\tau}_1 - \frac{N}{B} \vec{\tau}_2. \quad (19)$$

Подставим выражения (19) в круглую скобку в (15); затем (7), (16) (18) и выражение, полученное с помощью (15), подставим в левую часть (17); учитывая, что $\vec{\tau}_1 \perp \vec{\tau}_2$ и $|\vec{\tau}_1| = |\vec{\tau}_2| = 1$, выполним скалярные умножения и приведем подобные члены. В итоге получится тождественный нуль.

12*. Вспомним теперь, что сеть линий кривизны «хорошо» строится там, где нет омбилических точек. Омбилические точки для нее особые, в их окрестности сеть может иметь причудливое строение, мешающее взять ее за координатную (см. § 12, п. 6* и рис. 69–71). Поэтому на участках, содержащих омбилические точки, ортогональные координаты часто приходится вводить иначе, не используя для них сеть линий кривизны, а теорема Дюпена «запрещает» тогда продолжить их в пространство (с сохранением ортогональности!). Покажем однако, что и в этой ситуации пространственные координаты, нормально связанные с поверхностью, имеют некоторые преимущества: они «близки к ортогональным». Дело в том, что по лемме из п. 3° в них ξ -линии ортогональны как u -линиям, так и v -линиям; неизбежное (в силу теоремы Дюпена) нарушение ортогональности координат (u, v, ξ) происходит здесь только из-за того, что угол γ между u -линиями и v -линиями отличается от прямого. Насколько велик этот «перекос» сети, можно проследить, оценивая сверху $|\cos \gamma|$. Из соображений непрерывности понятно, что $|\cos \gamma|$ мал вблизи поверхности S . Покажем, как провести его количественную оценку.

Напомним (см. § 9), что если $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$, то

$$\cos \gamma = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (20)$$

Будем считать, что на S в области ω первая квадратичная форма дана в записи (7); для II используем обычное обозначение (16). Напомним еще (см. § 12), что

$$k_{n_1} = \frac{L}{A^2}, \quad k_{n_2} = \frac{N}{B^2}, \quad (21)$$

где k_{n_i} — нормальные кривизны координатных линий.

Пусть для главных кривизн k_1 и k_2 поверхности S известна их оценка

$$|k_1| \leq q, \quad |k_2| \leq q \quad \text{в } \omega. \quad (22)$$

Тогда в ω

$$|H| \leq q, \quad |k_{n_1}| \leq q, \quad |K| \leq q^2. \quad (23)$$

Дополнительно предположим, что

$$A \geq a > 0, \quad B \geq b > 0, \quad |M| \leq \mu \quad \text{в } \omega. \quad (24)$$

Для третьей квадратичной формы поверхности S в координатах (u, v) используем обозначение

$$III = d\vec{n}^2 = E_* du^2 + 2F_* du dv + G_* dv^2. \quad (25)$$

Из (17), (7) и (16) следует, что

$$dn^2 = 2H(L du^2 + 2M du dv + N dv^2) - K(A^2 du^2 + B^2 dv^2). \quad (26)$$

Сравнивая (25) и (26) и учитывая (21), видим, что

$$\begin{aligned} E_* &= (2Hk_{n_1} - K)A^2, \quad F_* = 2HM, \\ G_* &= (2Hk_{n_2} - K)B^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Формулы, выкладки и оценки (21)–(27) относятся к поверхности S ; на ней $\xi = 0$. «Выйдем» теперь с нее в окружающее пространство. Используя (1), (3), (7), (25) и учитывая формулу (12) из § 11, обнаружим, что на координатных поверхностях $\xi = \text{const}$ коэффициенты E , F и G первой квадратичной формы представляют собой квадратные трехчлены относительно ξ :

$$E = A^2 - 2L\xi + E_*\xi^2, \quad (28)$$

$$F = -2M\xi + F_*\xi^2 \quad (29)$$

и

$$G = B^2 - 2N\xi + G_*\xi^2. \quad (30)$$

Подставив величины (27) в (28)–(30), получим такие выражения для E , F , G , которые удобно оцениваются исходя из предпосылок (22)–(24), именно:

$$E = (1 - 2k_{n_1}\xi + (2Hk_{n_1} - K)\xi^2)A^2 \geq a^2(1 - 2q|\xi| - 3(q\xi)^2), \quad (31)$$

$$G = (1 - 2k_{n_2}\xi + (2Hk_{n_2} - K)\xi^2)B^2 \geq b^2(1 - 2q|\xi| - 3(q\xi)^2) \quad (32)$$

и

$$F = -2(1 - H\xi)M\xi, \quad |F| \leq 2(1 + q|\xi|)\mu|\xi|. \quad (33)$$

Используя (31)–(33) и (20), видим, что

$$|\cos \gamma| \leq \frac{2(1 + q|\xi|)\mu|\xi|}{ab(1 - 2q|\xi| - 3(q\xi)^2)}. \quad (34)$$

В частности,

$$|\cos \gamma| \leq \frac{4\mu|\xi|}{ab}, \quad \text{если } q|\xi| \leq \frac{1}{6}, \quad (35)$$

и

$$|\cos \gamma| < \frac{3\mu|\xi|}{ab}, \quad \text{если } q|\xi| \leq \frac{1}{10}. \quad (36)$$

Оценки (35)–(36) получены с учетом конкретного вида трехчлена, квадратного относительно $q|\xi|$, стоящего в (34) в знаменателе; его график показан на рис. 163.

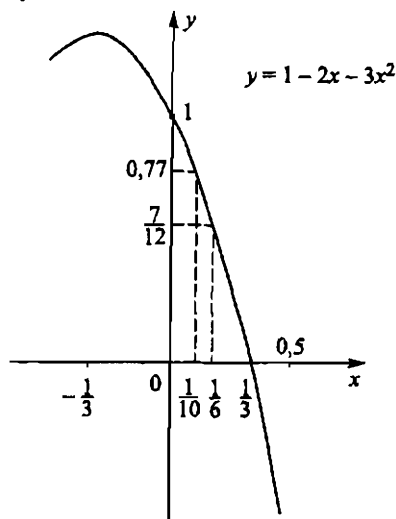


Рис. 163

Замечание. Участвующее в (35)–(36) произведение $q|\xi|$ безразмерно, так как q имеет размерность кривизны $k = \frac{1}{R}$, а радиус кривизны R имеет такую же размерность, как и длина $|\xi|$. Можно доказать, что отношение $\frac{\mu}{ab}$ тоже безразмерно, но мы не будем на этом останавливаться.

§ 30. Деривационные формулы

1°. В области Ω (где введены ортогональные координаты u_i) при смещении точки X могут измениться направления векторов $\vec{\tau}_j$. Эти изменения характеризуются производными $\vec{\tau}_j$ по u_i ($i, j = 1, 2, 3$). Аналогично 2° из § 14 строятся разложения векторов $(\vec{\tau}_j)_{u_i}$ по базису $\{\vec{\tau}_j\}$; их называют *деривационными формулами*.

Теорема. Все коэффициенты η_{ijk} деривационных формул

$$\frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^3 \eta_{ijk} \vec{\tau}_k \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

записанных в ортогональных координатах, выражаются через коэффициенты Ламе и их частные производные первого порядка.

Доказательство проведем подробно, вычислив все коэффициенты η_{ijk} . Они образуют «объемную» $3 \times 3 \times 3$ -матрицу; однако, как мы увидим ниже, многие из них тождественно равны нулю.

По аналогии с формулами (2)–(3) из § 14, распишем участвующие в формулах (1) производные, взятые сначала по u_1 :

$$\begin{aligned}(\vec{\tau}_1)_{u_1} &= \alpha_0 \vec{\tau}_2 + \alpha_1 \vec{\tau}_3, \\(\vec{\tau}_2)_{u_1} &= -\alpha_0 \vec{\tau}_1 + \alpha_2 \vec{\tau}_3, \\(\vec{\tau}_3)_{u_1} &= -\alpha_1 \vec{\tau}_1 - \alpha_2 \vec{\tau}_2,\end{aligned}\tag{2}$$

затем — по аргументу u_2 :

$$\begin{aligned}(\vec{\tau}_1)_{u_2} &= \beta_0 \vec{\tau}_2 + \beta_1 \vec{\tau}_3, \\(\vec{\tau}_2)_{u_2} &= -\beta_0 \vec{\tau}_1 + \beta_2 \vec{\tau}_3, \\(\vec{\tau}_3)_{u_2} &= -\beta_1 \vec{\tau}_1 - \beta_2 \vec{\tau}_2,\end{aligned}\tag{3}$$

и, наконец, по аргументу u_3 :

$$\begin{aligned}(\vec{\tau}_1)_{u_3} &= \gamma_0 \vec{\tau}_2 + \gamma_1 \vec{\tau}_3, \\(\vec{\tau}_2)_{u_3} &= -\gamma_0 \vec{\tau}_1 + \gamma_2 \vec{\tau}_3, \\(\vec{\tau}_3)_{u_3} &= -\gamma_1 \vec{\tau}_1 - \gamma_2 \vec{\tau}_2,\end{aligned}\tag{4}$$

Формулы (2) представляют собой часть разложений (1) в других обозначениях, использованных для η_{ijk} , так что

$$\alpha_0 = \eta_{112}, \quad \alpha_1 = \eta_{113}, \quad \alpha_2 = \eta_{213}.\tag{5}$$

Косая симметрия квадратных матриц, образованных коэффициентами формул (2)–(4), устанавливается рассуждениями, аналогичными изложенным в 2° § 14. Поэтому

$$\eta_{iji} = 0 \quad \text{для всех } i, j = 1, 2, 3\tag{6}$$

и

$$-\alpha_0 = \eta_{211}, \quad -\alpha_1 = \eta_{311}, \quad -\alpha_2 = \eta_{312}.\tag{5a}$$

Аналогично (5) и (5a) выписывается связь между β_i и γ_i с одной стороны и η_{ijk} — с другой:

$$\beta_0 = \eta_{122} = -\eta_{221}, \quad \beta_1 = \eta_{123} = -\eta_{321}, \quad \beta_2 = \eta_{223} = -\eta_{322}\tag{5b}$$

и

$$\gamma_0 = \eta_{132} = -\eta_{231}, \quad \gamma_1 = \eta_{133} = -\eta_{331}, \quad \gamma_2 = \eta_{233} = -\eta_{332}.\tag{5в}$$

Вместе с тем, на формулы (2)–(4) можно взглянуть с другой точки зрения. Именно, рассмотрим три координатных поверхности, проходящих через произвольно выбранную точку X той области Ω , где введены обсуждаемые координаты. Первая из них содержит координатные

u_1 -линии и u_2 -линии, их орты касательных $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$, а орт нормали к этой поверхности есть $\vec{n}_{\textcircled{3}} = \vec{\tau}_3$ (индекс в кружочке здесь и далее указывает номер координатной поверхности, как и в п. 5° § 27). Вторая координатная поверхность содержит u_2 -линии и u_3 -линии, их орты касательных $\vec{\tau}_2$ и $\vec{\tau}_3$, а ее орт нормали есть $\vec{n}_{\textcircled{2}} = \vec{\tau}_1$. Наконец, третья из координатных поверхностей содержит u_3 - и u_1 -линии, их орты касательных $\vec{\tau}_3$ и $\vec{\tau}_1$ и ее орт нормали $\vec{n}_{\textcircled{1}} = \vec{\tau}_2$. Поэтому формулы (2) и (3) из данного параграфа в точности соответствуют формулам (2) и (3) из § 14 с заменой в них a_i на α_i и b_j на β_j , а $\vec{n}$ на $\vec{n}_{\textcircled{3}} = \vec{\tau}_3$.

Заметив это, прежде всего обратим внимание на коэффициенты $\alpha_0 = a_0$ и $\beta_0 = b_0$ дифференциальной формы $\Omega_{0\textcircled{3}}$. Чтобы выписать их, достаточно знать первую квадратичную форму $ds_{\textcircled{3}}^2$ первой координатной поверхности, см. (2)–(4) и (11) в § 14, а также (6), (7) в § 16 и (6) в § 27. При этом надо еще помнить, что на первой координатной поверхности u_1 играет роль координаты u , а u_2 — роль v из формул второй главы. Итак,

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= a_{0\textcircled{3}} = -\frac{(A_{\textcircled{3}})_{u_2}}{B_{\textcircled{3}}} = -\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial u_2}, \\ \beta_0 &= b_{0\textcircled{3}} = \frac{(B_{\textcircled{3}})_{u_1}}{A_{\textcircled{3}}} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial u_1}.\end{aligned}\quad (7)$$

Продолжая это сопоставление с § 14 и § 16, воспользуемся теперь тем, что $M_{\textcircled{3}} = 0$ вследствие теоремы Дюпена и свойств сети линий кривизны, и найдем

$$\alpha_2 = \frac{M_{\textcircled{3}}}{B_{\textcircled{3}}} = 0 \quad \text{и} \quad \beta_1 = \frac{M_{\textcircled{3}}}{A_{\textcircled{3}}} = 0. \quad (8)$$

После этого надо перейти на вторую, а затем и на третью координатные поверхности и рассмотреть для них аналогичные пары формул (3), (4) и (4), (2). Для того чтобы облегчить себе этот переход, составим следующие схемы, по-прежнему указывая в кружочках номера координатных поверхностей:

$$\left| \begin{array}{c|c|c} \textcircled{2} & & \\ \hline u & v & \vec{n} \\ \hline u_2 & u_3 & \\ \hline \vec{\tau}_2 & \vec{\tau}_3 & \\ \hline & & \vec{n}_{\textcircled{2}} = \vec{\tau}_1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c|c|c} \textcircled{3} & & \\ \hline u & v & \vec{n} \\ \hline u_3 & u_1 & \\ \hline \vec{\tau}_3 & \vec{\tau}_1 & \\ \hline & & \vec{n}_{\textcircled{3}} = \vec{\tau}_2 \end{array} \right| \quad (9)$$

Смысл схем (9) понятен из сказанного выше.

Формулы (7) наводят на мысль, что удобно будет ввести обозначения

$$h_{ij} = \frac{\partial H_i}{\partial s_j} = \frac{\partial H_i}{H_j \partial u_j} = h_j \frac{\partial H_i}{\partial u_j}. \quad (10)$$

Рассуждая, как и выше, но используя схему (9), обозначения (10) и дифференциальные формы $\Omega_{1\Phi}$, $\Omega_{0\Phi}$ и $\Omega_{0\Phi}$, найдем

$$\gamma_0 = -b_{1\Phi} = -\frac{M_\Phi}{A_\Phi} = 0, \quad (8a)$$

затем

$$\gamma_1 = -a_{0\Phi} = h_{31}, \quad \gamma_2 = b_{0\Phi} = h_{32}, \quad (11)$$

а также

$$\alpha_1 = -b_{0\Phi} = -h_{13} \quad (11a)$$

и

$$\beta_2 = a_{0\Phi} = h_{23}. \quad (11b)$$

Тем самым, теорема фактически уже доказана.

Для удобства дальнейшего использования соберем вместе результаты (5), (5a)–(5b), (6)–(8), (8a), (11), (11a) и (11b) и выпишем все элементы объемной $3 \times 3 \times 3$ -матрицы. Среди них лишь 12 ненулевых, причем они распадаются на пары элементов, отличающихся друг от друга только знаком:

$$\begin{aligned} \eta_{112} &= -h_{12}, & \eta_{113} &= -h_{13}, & \eta_{122} &= h_{21}, & \eta_{133} &= h_{31}, \\ \eta_{211} &= h_{12}, & \eta_{221} &= -h_{21}, & \eta_{223} &= -h_{23}, & \eta_{233} &= h_{32}, \\ \eta_{311} &= h_{13}, & \eta_{322} &= h_{23}, & \eta_{331} &= -h_{31}, & \eta_{332} &= -h_{32}. \end{aligned} \quad (12)$$

Все остальные η_{ijk} равны нулю тождественно.

Используя (12), можно перейти к развернутой записи формул (1) через величины (10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial u_1} &= -h_{12} \vec{\tau}_2 - h_{13} \vec{\tau}_3, & \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial u_1} &= h_{12} \vec{\tau}_1, & \frac{\partial \vec{\tau}_3}{\partial u_1} &= h_{13} \vec{\tau}_1, \\ \frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial u_2} &= h_{21} \vec{\tau}_2, & \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial u_2} &= -h_{21} \vec{\tau}_1 - h_{23} \vec{\tau}_3, & \frac{\partial \vec{\tau}_3}{\partial u_2} &= h_{23} \vec{\tau}_2, \\ \frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial u_3} &= h_{31} \vec{\tau}_3, & \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial u_3} &= h_{32} \vec{\tau}_3, & \frac{\partial \vec{\tau}_3}{\partial u_3} &= -h_{31} \vec{\tau}_1 - h_{32} \vec{\tau}_2. \end{aligned} \quad (1^*)$$

2°. Частный случай — сферические координаты.

Вспомнив формулы (22), (24) и (27)–(29) из § 27, можем записать для сферических координат

$$h_{21} = \cos \psi, \quad h_{23} = -\sin \psi, \quad h_{31} = 1, \quad (13)$$

причем остальные $h_{ij} = 0$. Из (12) и (13) находим

$$\begin{aligned} \eta_{122} &= \cos \psi, & \eta_{223} &= \sin \psi, & \eta_{133} &= 1, \\ \eta_{221} &= -\cos \psi, & \eta_{322} &= -\sin \psi, & \eta_{331} &= -1, \end{aligned} \quad (14)$$

остальные $\eta_{ijk} = 0$.

Таким образом, в отличие от общего случая (12) в сферических координатах ненулевыми оказываются только 6 коэффициентов (14).

Попутно обратим внимание на то, что в сферических координатах производные всех трех векторов $\vec{\tau}_i$ по ρ равны $\vec{\theta}$, и это видно из рис. 157, так как при смещении по ρ тройка $\{\vec{\tau}_i\}$ переносится параллельно. Формулы (1) для сферических координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial \rho} &= \vec{\theta}, & \frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial \varphi} &= \vec{\tau}_2 \cos \psi, & \frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial \psi} &= \vec{\tau}_3, \\ \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial \rho} &= \vec{\theta}, & \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial \varphi} &= -\vec{\tau}_1 \cos \psi + \vec{\tau}_3 \sin \psi, & \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial \psi} &= \vec{\theta}, \\ \frac{\partial \vec{\tau}_3}{\partial \rho} &= \vec{\theta}, & \frac{\partial \vec{\tau}_3}{\partial \varphi} &= -\vec{\tau}_2 \sin \psi, & \frac{\partial \vec{\tau}_3}{\partial \psi} &= -\vec{\tau}_1. \end{aligned} \quad (1^{**})$$

Дальнейшие пункты этого параграфа посвящены приложениям к механике.

3°. Скорость движения.

Пусть точка движется по траектории, которая в ортогональных криволинейных координатах задана формулами вида

$$u_i = u_i(t), \quad \text{где } t - \text{время.} \quad (15)$$

Будем, как это принято в механике, производную по t обозначать точкой сверху.

Скорость $\vec{v}$ движущейся точки для каждого момента времени может быть разложена по тройке векторов $\{\vec{\tau}_i\}$:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{\tau}_i. \quad (16)$$

В разложении (16) подразумевается, что векторы $\vec{\tau}_i$ берутся в той геометрической точке траектории (15), через которую в данный момент времени t проходит движущаяся точка. По этому поводу говорят, что сделано разложение «в сопутствующем базисе» или «в сопровождающем триадре».

Вместе с тем (см. (4) в § 27),

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \dot{u}_i = \sum_{i=1}^3 H_i \dot{u}_i \vec{\tau}_i,$$

поэтому

$$v_i = H_i \dot{u}_i. \quad (17)$$

Иногда бывают полезны вытекающие из (17) формулы

$$\dot{u}_i = h_i v_i. \quad (18)$$

4°. **Ускорение.** В условиях предыдущего пункта аналогично (16)–(17) найдем разложение для ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{\tau}_k. \quad (19)$$

Сначала выполним вспомогательные преобразования, в которых нам понадобятся деривационные формулы (1):

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_i &= \frac{d\vec{\tau}_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial u_j} \cdot \frac{du_j}{dt} = \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \eta_{ijk} \vec{\tau}_k \right) \dot{u}_j = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \eta_{ijk} \dot{u}_j \right) \vec{\tau}_k. \end{aligned} \quad (20)$$

Кроме того, заметим, что вдоль траектории (15), учитывая (10), имеем

$$\dot{H}_k = \frac{dH_k}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial H_k}{\partial u_j} \dot{u}_j = \sum_{j=1}^3 H_j h_{kj} \dot{u}_j. \quad (21)$$

Продифференцируем (16) по t :

$$\dot{\vec{v}} = \vec{a} = \sum_{k=1}^3 \dot{v}_k \vec{\tau}_k + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{d\vec{\tau}_i}{dt} \quad (22)$$

и в (22) подставим разложения (20), а затем учтем (18):

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^3 \dot{v}_k \vec{\tau}_k + \sum_{i=1}^3 v_i \sum_{j,k=1}^3 \eta_{ijk} \dot{u}_j \vec{\tau}_k = \sum_{k=1}^3 \left(\dot{v}_k + \sum_{i,j=1}^3 \eta_{ijk} h_{kj} v_i v_j \right) \vec{\tau}_k. \quad (23)$$

Сравнивая (23) и (19), найдем

$$a_k = \dot{v}_k + \sum_{i,j=1}^3 \eta_{ijk} h_{kj} v_i v_j. \quad (24)$$

Можно a_k представить иначе, через производные первого и второго порядков координат u_i . Для этого продифференцируем (17) по t и используем заготовку (21):

$$\dot{v}_k = H_k \dot{u}_k + \dot{H}_k \dot{u}_k = H_k \ddot{u}_k + \sum_{j=1}^3 H_j h_{kj} \dot{u}_j \dot{u}_k. \quad (25)$$

Затем подставим выражения (25) в (24), еще раз воспользовавшись соотношениями (10) и (17). В результате получим

$$a_k = H_k \ddot{u}_k + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial H_k}{\partial u_i} \dot{u}_i \dot{u}_k + \sum_{i,j=1}^3 H_i \eta_{ijk} \dot{u}_i \dot{u}_j. \quad (26)$$

Обратим внимание на то, что квадратичные формы с аргументами u_i , а также с аргументами $\dot{u}_j$, участвующие в (23)–(26), не симметризованы.

5°. Примеры и комментарии.

Пример 1. Точка движется по траектории, заданной в сферических координатах

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t) \quad (27)$$

(t — время). Требуется вычислить ее скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$.

Пусть $X = X(t)$ — движущаяся по траектории (27) точка. По-прежнему обозначим через O начало отсчета. Согласно изложенному в 3° $\vec{v} = v_1 \vec{\tau}_1 + v_2 \vec{\tau}_2 + v_3 \vec{\tau}_3$, где $\vec{\tau}_1$ — орт луча OX ; $\vec{\tau}_2$ — перпендикулярный к нему орт, направленный по «параллели», $\vec{\tau}_3$ — по «меридиану» (см. выше, рис. 157).

Используя (17), а также (24) из § 27, находим

$$v_1 = \dot{\rho}, \quad v_2 = (\rho \cos \psi) \dot{\varphi}, \quad v_3 = \rho \dot{\psi}. \quad (28)$$

Далее, согласно 4° для ускорения имеем разложение $\vec{a} = a_1 \vec{\tau}_1 + a_2 \vec{\tau}_2 + a_3 \vec{\tau}_3$, где

$$a_1 = \ddot{\rho} - \rho((\dot{\varphi} \cos \psi)^2 + \dot{\psi}^2) = \dot{v}_1 - \frac{1}{\rho}(v_2^2 + v_3^2); \quad (29)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= (\rho \cos \psi) \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \cos \psi - 2\rho \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi = \\ &= \dot{v}_2 + \frac{1}{\rho} v_2(v_1 - v_3 \operatorname{tg} \psi); \end{aligned} \quad (30)$$

$$a_3 = \rho \ddot{\psi} + (\rho \sin \psi \cos \psi) \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\rho} \dot{\psi} = \dot{v}_3 + \frac{1}{\rho}(v_2^2 \operatorname{tg} \psi + v_1 v_3). \quad (31)$$

Пример 2. Космический аппарат с массой m совершает маневр вблизи планеты; его траектория задана в сферических координатах формулами вида (27). Требуется найти силу тяги $\vec{p} = \vec{p}(t)$ его двигателей, которая обеспечила бы выполнение заданного маневра.

Будем считать известной напряженность гравитационного поля $\vec{g}$ во всех точках траектории (27). Всеми другими силами, кроме искомой тяги и силы тяготения, пренебрежем (воздействием межпланетного магнитного поля, световым давлением и т. д.). Тогда сумма сил, действующих на космический аппарат, представится как

$$\vec{F} = m \vec{g}(t) + \vec{p}(t). \quad (32)$$

Вместе с тем, по второму закону Ньютона

$$\vec{F} = m \vec{a}, \quad (33)$$

рис. 164, поэтому задача сводится к вычислению ускорения $\vec{a}$, а оно выражается формулой (19) с коэффициентами a_k , найденными в предыдущем примере, см. (29)–(31).

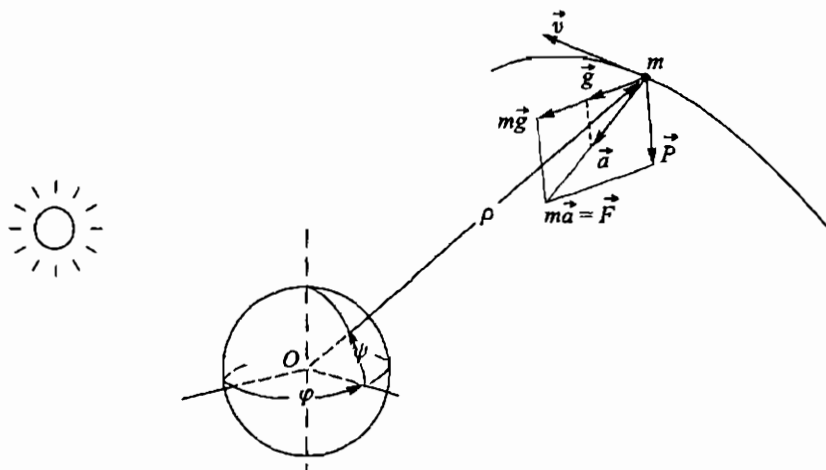


Рис 164

Комментарии и замечания. 1). В примере 2 слова «траектория задана в сферических координатах» требуют уточнения. Дело в том, что мы воспользовались 2-м законом Ньютона, а он применим в записи (33) только в инерциальных системах отсчета.¹⁾ С математической точки зрения существование одной инерциальной системы нужно принять за аксиому Системы отсчета, которые относительно нее движутся равномерно и прямолинейно или неподвижны, образуют класс всех инерциальных систем. С точки зрения физической, в пределах точности современных методов измерения инерциальной является система координат, за начало которой взят центр масс Солнца, а направления декартовых координатных осей фиксируются относительно «неподвижных» (т.е. очень далеких от Солнца) звезд. Такую систему координат назовем «солнечной инерциальной».

Учитывая сказанное, систему координат в примере 2 нужно строить так. В том интервале времени, в котором предстоит выполнить маневр (27), берем значение $t = t_0$. Пусть (рис 165) в момент t_0 центр масс планеты Q находится в точке Q_0 и имеет скорость $\vec{V}_0$. Начало

¹⁾ См. Инерциальная система отсчета. Физическая энциклопедия. Т.2 — М.: Сов. энцикл., 1990. — С. 145.

О сферической системы координат ρ, φ, ψ для $t = t_0$ совместим с точкой Q_0 и потребуем, чтобы точка O двигалась со скоростью $\vec{V}_0$.

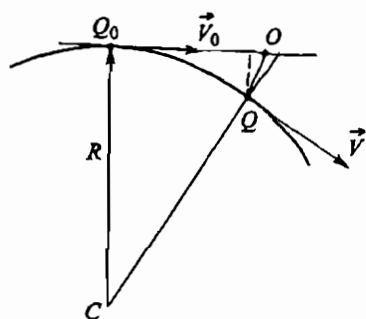


Рис. 165

Те направления, от которых отсчитываются углы φ и ψ , должны быть зафиксированы относительно «неподвижных звезд» (как в солнечной инерциальной системе координат).

2). Вторые варианты выражений, указанных в (29)–(31), могут быть полезны тогда, когда по данным станций слежения проводится коррекция траектории, а станции слежения измеряют v_i и $\dot{v}_i$.

3). Если нужно следить за положением космического аппарата относительно центра масс Q той планеты, около которой совершается маневр, то нужна поправка, учитывающая движение планеты по орбите, из-за которого точки O и Q со временем будут расходиться друг от друга (рис. 165). В случае Земли точки O и Q за время $t - t_0 = \Delta t = 1$ (час) разойдутся на расстояние Δs , немного меньшее 40 км. В последующие часы Δs будет увеличиваться приблизительно пропорционально $(\Delta t)^2$. Для точного определения $\overline{OQ}$ нужны параметры орбиты планеты.

4). Принципиальная трудность в задачах конструирования космических траекторий состоит в том, что масса m является переменной, $m = m(t)$, а функция $m(t)$ заранее неизвестна: она зависит от расхода топлива, который, в свою очередь, зависит от $|\vec{p}|$. Поэтому приходится рассматривать много вариантов, для каждого из них вести расчеты шагами по времени, а затем сравнивать их друг с другом и по заранее назначенному критерию выбрать оптимальный вариант.

§ 31*. Дифференциальные параметры Бельтрами

1°. Дифференциальные параметры Бельтрами — первый и второй — сопоставляют функции f , заданной на поверхности S , две другие функции, тоже на S (см. ниже, пп. 3°–4°). Их построение проводится локально, поэтому будем считать, что S — простой кусок (§ 6, п. 3°), заданный вектор-функцией

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

$\mathcal{M}$ — область на $\mathbb{R}^2$, гомеоморфная открытому кругу. Будем предполагать, что координаты u, v на S являются ортогональными, так что ds^2 на S дается формулой вида (7) из § 29.

Используем далее вспомогательную конструкцию, которая бывает полезна и в других ситуациях. Именно, введем третий аргумент —

«координату» $w \in U = (-h, h) \subset \mathbb{R}^1$, считая, что $w = 0$ на S , а затем в области $\Omega^* = \mathfrak{M} \times U \subset \mathbb{R}_*^3$ (рис. 166) зададим метрику

$$ds_*^2 = A^2(u, v) du^2 + B^2(u, v) dv^2 + dw^2. \quad (2)$$

Метрика (2) допускает наглядное истолкование, состоящее в следующем. В каждой точке X поверхности S построим орт ее нормали $\vec{n} = \vec{n}(X)$. Затем на прямой, проходящей через точку X в направлении $\vec{n}(X)$ будем откладывать w как расстояние со знаком от поверхности S — как мы делали это при построении координат, нормально связанных с поверхностью (§ 29, пп. 2°–3°). При этом могут появляться точки пересечения нормалей, проведенных к S в различных ее точках, но на это мы не будем обращать внимание. В результате получается отображение $\Omega^* \rightarrow \Omega$ (рис. 166, б). В области Ω (возможно имеющей,

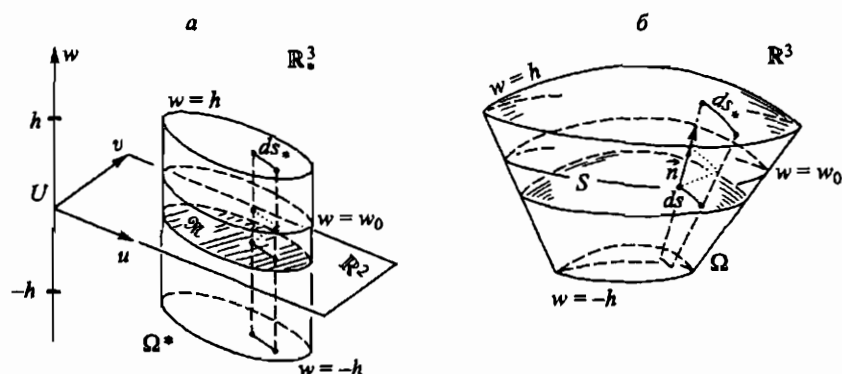


Рис. 166

как указано выше, самоналожения) введем риманову метрику (2). Измеренные с ее помощью длины линий будут отличаться (как правило) от евклидовых длин, получаемых по формуле (13') из § 26. Наглядно: поверхности $w = \text{const}$ в $\mathbb{R}^3$ «получены» из S , но растянуты по сравнению с S или сжаты в зависимости от искривленности участков поверхности S и расстояния до нее (рис. 166, б), а условная метрика (2) перенесена на них с S по нормальям.

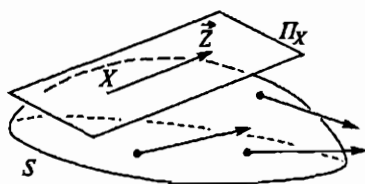


Рис. 167

2°. О векторном поле $\vec{Z}$ говорят, что оно задано на S , если векторы $\vec{Z} = \vec{Z}(X)$ определены для всех точек $X \in S$ и для каждой точки X вектор $\vec{Z}(X)$ расположен в плоскости Π_X , касательной к S в точке X (рис. 167).

3°. Предположим теперь, что на S задана функция $f(X)$. В символе $f(\cdot)$ вместо X запишем координаты u, v этой точки, однако будем считать, что значение f зависит именно от X . Иначе говоря, в данном рассуждении координатная система на S будет считаться зафиксированной.

Функцию f продолжим с S на Ω , полагая

$$f(u, v, w) = f(u, v). \quad (3)$$

После этого, руководствуясь выражением (2), сконструируем аналог коэффициентов Ламе, полагая

$$H_1 = A(u, v), \quad H_2 = B(u, v), \quad H_3 = 1 \quad (4)$$

и подставим (3) и (4) в формулы (14)–(15) из § 27. Получим векторное поле

$$\nabla f = \frac{1}{A(u, v)} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \vec{\tau}_1 + \frac{1}{B(u, v)} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \vec{\tau}_2. \quad (5)$$

Координата w не входит в (5) в силу (3), а потому (5) можно рассматривать как векторное поле на S ; это — градиент функции $f(X)$ на поверхности S . *Первым дифференциальным параметром Бельтрами* называется скалярный квадрат градиента функции $f(X)$:

$$\Delta_1 f = (\nabla f, \nabla f) = \left(\frac{1}{A} f_u \right)^2 + \left(\frac{1}{B} f_v \right)^2. \quad (6)$$

4°. Теперь равенствами (4) воспользуемся совместно с формулой (21) из § 27 и запишем

$$\Delta_2 f = \Delta f = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{B}{A} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{A}{B} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right). \quad (7)$$

Выражение (7) называется *вторым дифференциальным параметром Бельтрами* (построенным для функции f на поверхности S) и представляет собой аналог и обобщение оператора Лапласа.

Первый и второй дифференциальные параметры Бельтрами широко применяются в теории поверхностей [56, 82, 126]; в этих же книгах можно найти их выражение в произвольных координатах.

Отметим еще, что при рассмотрении на поверхностях классических задач математической физики [113] второй дифференциальный параметр Бельтрами выполняет такую же роль, как *оператор Лапласа* на плоскости.

Глава 6

ОГИБАЮЩАЯ И ДИСКРИМИНАНТА СЕМЕЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 32. Огибающая

1°. Начнем с примеров для кривых на плоскости. Напомним (см., например, [99]), что *оггибающая* семейства линий в каждой своей точке касается какой-либо из линий этого семейства.

Пример 1. Вдоль оси x будем сдвигать параболу $y = x^2$. Получим семейство парабол

$$y = (x - x_0)^2, \quad (1)$$

каждая из них в своей вершине $x = x_0$ касается оси x (рис. 168); поэтому ось x служит оггибающей семейства (1).

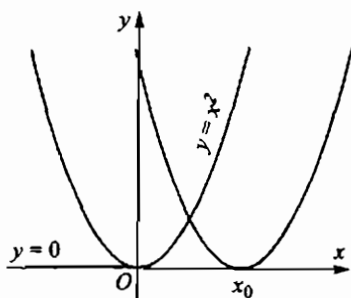


Рис. 168

Пример 2. Семейство синусоид

$$y = \sin(x - t) \quad (2)$$

с параметром t имеет оггибающую, состоящую из двух прямых $y = 1$ и $y = -1$ (см. рис. 169, на котором для наглядности на осях взят разный масштаб).

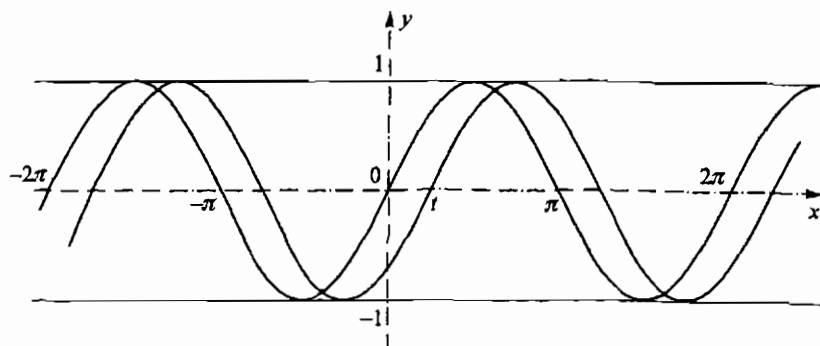


Рис. 169

Пример 3. На плоскости построим две окружности: одну — с центром O и радиусом R_1 , а другую — с радиусом R_2 , внешним образом касающуюся первой, и фигуру, образованную этими двумя окружностями, будем в той же плоскости вращать вокруг точки O . Образуется семейство окружностей радиуса R_2 и его огибающая состоит из двух окружностей. Одна из них — первоначальная (с центром O и радиусом R_1), а другая — с ней концентрическая с радиусом $R_3 = R_1 + 2R_2$ (рис. 170).

Пример 4. Семейство концентрических окружностей $x^2 + y^2 = r^2$, $0 < r < +\infty$, не имеет огибающей. Этот наглядный факт будет доказан в § 33, п. 3°, пример 2.

Во всех перечисленных примерах нетрудно перейти от кривых на плоскости к поверхностям в пространстве. Для этого достаточно принять линии за направляющие цилиндрических поверхностей, направив их образующие параллельно оси z , т.е. ортогонально плоскости xu . Так, из примера 1 получим

Пример 1'. Уравнение (1) задает в пространстве семейство параболических цилиндров. Его огибающей служит координатная плоскость $y = 0$ (рис. 171).

Аналогично из примеров 2–4 получаются пространственные примеры 2'–4', которые читатель легко оформит самостоятельно.

Далее нам понадобятся несколько вспомогательных понятий, которые будут введены в ближайших пунктах.

2°. **Закон прикрепления.** Пусть даны C^1 — гладкая поверхность $\mathcal{F}$ с уравнением

$$\vec{OX} = \vec{Z}(\lambda, \mu), \quad \text{где } \vec{Z}_\lambda \times \vec{Z}_\mu \neq \vec{\theta}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathfrak{M}_1, \quad (3)$$

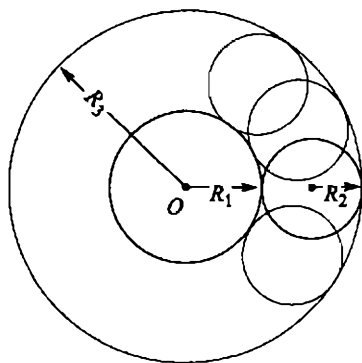


Рис. 170

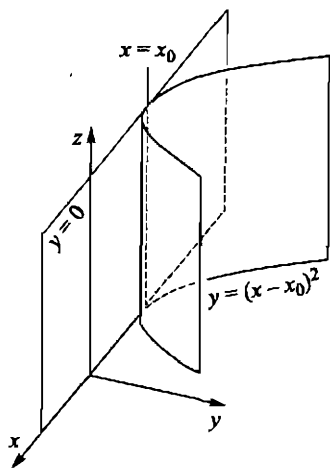


Рис. 171

и семейство C^1 -гладких поверхностей $\{S_t\}$, заданное вектор-функцией

$$\vec{X} = \vec{X}(u, v, t), \quad \vec{X}_u \times \vec{X}_v \neq \vec{\theta}, \quad (4)$$

где

$$(u, v) \in \mathcal{M}_2, \quad -\infty \leq t_1 < t < t_2 \leq +\infty. \quad (5)$$

Здесь $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — гомеоморфные открытому кругу области, каждая — на своей плоскости (соответственно с координатами (λ, μ) и (u, v)).

Цилиндрическую область (5) в пространстве переменных (u, v, t) будем в дальнейшем обозначать символом $\mathcal{W}$.

Определение. Тройка непрерывных функций

$$u = g(\lambda, \mu), \quad v = h(\lambda, \mu), \quad t = \tau(\lambda, \mu), \quad (6)$$

заданная в $\mathcal{M}_1$, называется *законом прикрепления* поверхностей $\{S_t\}$ к поверхности $\mathcal{F}$, если равенство

$$\vec{X}(g(\lambda, \mu), h(\lambda, \mu), \tau(\lambda, \mu)) = \vec{Z}(\lambda, \mu) \quad (7)$$

соблюдается тождественно в области $\mathcal{M}_1$.

Пример. Параболический цилиндр (1) и плоскость $y = 0$ заданы параметрическими уравнениями. Для этого декартовы координаты (x, z) переименуем двумя разными способами.

1). Положим $x = u$, $z = v$; тогда (1) перепишется так:

$$x = u, \quad y = (u - x_0)^2, \quad z = v. \quad (8)$$

2). Назовем теперь $x = \lambda$, $z = \mu$ и в параметрической форме запишем уравнение координатной плоскости $y = 0$:

$$x = \lambda, \quad y = 0, \quad z = \mu. \quad (9)$$

Здесь $\mathcal{M}_1 = \mathbb{R}^2$ и $\mathcal{M}_2 = \mathbb{R}^2$. Закон прикрепления будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} u &= g(\lambda, \mu) = \lambda, \\ v &= h(\lambda, \mu) = \mu, \\ x_0 &= \tau(\lambda, \mu) = \lambda. \end{aligned} \quad (10)$$

Видно, что если выражения (10) подставить в уравнения (8), то получим равенства (9).

3°. Особый случай. Пусть в условиях предыдущего пункта в $\mathcal{M}_1$ есть область Ω , в которой функция $\tau(\lambda, \mu)$ является постоянной:

$$\tau(\lambda, \mu) = t_0 = \text{const} \quad \text{при} \quad (\lambda, \mu) \in \Omega. \quad (11)$$

Тогда равенства (6), (7) и (11) означают, что на участке Ω поверхности S_{t_0} делается замена переменных: вместо первоначальных координат (u, v) вводятся новые координаты (λ, μ) по формулам

$$u = g(\lambda, \mu), \quad v = h(\lambda, \mu) \quad (12)$$

(в этой связи см. выше § 7). Для дальнейшего важно не смешивать два разных понятия: закон прикрепления и замену переменных; поэтому, говоря о законе прикрепления, ситуацию, описываемую равенствами (11)–(12), нужно будет исключить. Для этого используем

Вспомогательное определение [51]. Функция $\tau = \tau(\lambda, \mu)$, заданная на $\mathcal{M}_1$, не является локально постоянной, если в $\mathcal{M}_1$ нет ни одной такой области Ω , в которой соблюдалось бы равенство вида (11).

4°. Касание поверхностей. Уточним это понятие. Пусть носители двух поверхностей S_1 и S_2 имеют общую точку X . Говорят, что поверхности S_1 и S_2 касаются друг друга в точке X , если каждая из них имеет в этой точке касательную плоскость и эти две плоскости совпадают.

5°. Основное определение. Пусть даны семейство поверхностей $\{S_t\}$ и поверхность $\mathcal{F}$ и выполняются

- 1) условие прикрепления, см. п. 2°;
- 2) функция $\tau(\lambda, \mu)$ не является локально постоянной в $\mathcal{M}_1$, см. п. 3°;
- 3) для каждого $(\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_1$ при $t = \tau(\lambda, \mu)$ поверхность S_t касается поверхности $\mathcal{F}$ в точке X , где $\overrightarrow{OX} = \vec{Z}(\lambda, \mu)$. Тогда поверхность $\mathcal{F}$ называется участком огибающей семейства $\{S_t\}$.

Упражнение. Проверить, что «основное определение» соблюдается в примерах 1'–3' п. 1°.

Замечание. Из «основного определения» видно, что если сузить область $\mathcal{M}_1$, взяв в ней какую-нибудь подобласть (тоже гомеоморфную открытому кругу), то снова получим участок огибающей.

Определение. Огибающей семейства поверхностей называется объединение всех участков огибающей.

Пример. В примерах 2' и 3' п. 1° каждая из огибающих состоит из двух поверхностей, непересекающихся друг с другом. В примере 2' это две параллельные плоскости. В примере 3' — боковые поверхности двух концентрических круговых цилиндров.

6°. Определение. Если поверхность S_t и огибающая $\mathcal{F}$ касаются друг друга во всех точках линии ℓ , то линия ℓ называется *характеристикой*.

В примерах 1'-3' все характеристики — прямые, хотя в общем случае это не всегда так.

7°. Наша дальнейшая цель — научиться проверять, если ли у семейства огибающая, и находить ее.

Наводящие соображения. Предположим, что есть огибающая $\mathcal{F}$ и на ней характеристика $\ell = \ell_t$, по которой $\mathcal{F}$ касается поверхности S_t . На этой характеристике возьмем точку X и попробуем понять, что с ней произойдет при изменении параметра t . На рис. 172 схематически показано, как при изменении значения параметра от t до $t + \Delta t$ точка X перейдет в некоторую точку $\tilde{X} \in \ell_{t+\Delta t} \subset S_{t+\Delta t}$. Мгновенная скорость этого ее смещения выражается вектором $\vec{\tilde{X}}_t$ и направлена в плоскости Π , касательной к поверхности $\mathcal{F}$ в точке X . Но эта же плоскость Π касается поверхности S_t и, значит, плоскость Π «натянута» на векторы $\vec{X}_u$ и $\vec{X}_v$. На основании изложенных здесь нестрогих, хотя и наглядных, рассуждений можно ожидать, что имеет место разложение

$$\vec{\tilde{X}}_t = \alpha \vec{X}_u + \beta \vec{X}_v \quad \text{в точке } X \in \ell \subset \mathcal{F} \cap S_t. \quad (13)$$

Коэффициенты α и β зависят от точки X .

Равенство (13) влечет за собой обращение в нуль смешанного произведения

$$\Phi = (\vec{X}_u, \vec{X}_v, \vec{\tilde{X}}_t). \quad (14)$$

Более детальное исследование («внутреннюю кухню» которого нет возможности изложить здесь подробно) показывает, что кроме обращения в нуль смешанного произведения (14) нужно наложить еще некоторые добавочные условия. Точные формулировки см. ниже, пп. 9°–11°.

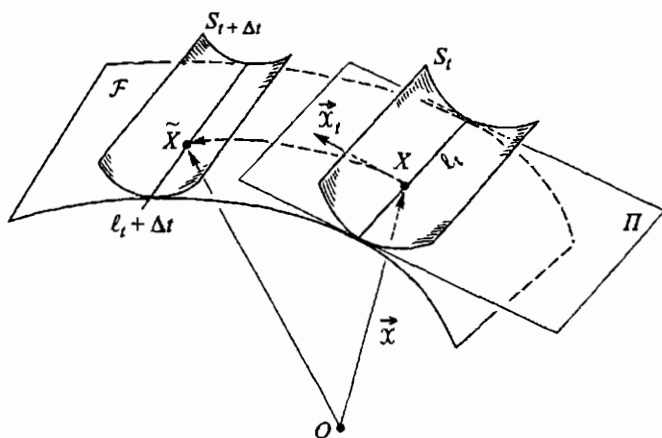


Рис. 172

8°. Если известно, что есть разложение (13), то нетрудно вычислить коэффициенты α и β . В самом деле, умножая скалярно равенство (13) на $\vec{X}_u$ и на $\vec{X}_v$, получим для α и β систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} E\alpha + F\beta &= (\vec{X}_u, \vec{X}_t) \\ F\alpha + G\beta &= (\vec{X}_v, \vec{X}_t) \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_t . Из (15) найдем

$$\alpha = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} (\vec{X}_u, \vec{X}_t) & F \\ (\vec{X}_v, \vec{X}_t) & G \end{vmatrix} \quad (16)$$

и

$$\beta = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} E & (\vec{X}_u, \vec{X}_t) \\ F & (\vec{X}_v, \vec{X}_t) \end{vmatrix}. \quad (17)$$

9°. Нам понадобятся еще вектор

$$\vec{N} = \Phi_u [\vec{X}_v \times \vec{X}_t] + \Phi_v [\vec{X}_t \times \vec{X}_u] + \Phi_t [\vec{X}_u \times \vec{X}_v] \quad (18)$$

и скаляр

$$\gamma = \Phi_t - \alpha\Phi_u - \beta\Phi_v, \quad (19)$$

где α и β определены в (16)–(17).

Теорема (достаточный признак огибающей). Пусть семейство поверхностей $\{S_t\}$ задано C^2 -гладкой вектор-функцией (4) в области W и в этой области есть точка $X_0(u_0, v_0, t_0)$, в которой

$$\Phi = 0, \quad (20)$$

но хотя бы одна из частных производных Φ_u, Φ_v отлична от нуля и

$$\vec{N}(X_0) \neq \vec{\theta}. \quad (21)$$

Тогда у семейства $\{S_t\}$ есть огибающая. Участок огибающей проходит через точку X с координатами $u = u_0, v = v_0$ на S_{t_0} . Он весь покрыт однопараметрическим семейством характеристик.

10°. Лемма. Если $\vec{X}(u, v, t) \in C^2$ и $\vec{X}_u \times \vec{X}_v \neq \vec{\theta}$, то на том множестве точек, где выполнено (20), условия $\vec{N} = \vec{\theta}$ и $\gamma = 0$ равносильны.

Доказательство леммы. Из (20) следует (13). Подставим (13) в (18). После надлежащей группировки получим

$$\vec{N} = (-\alpha\Phi_u - \beta\Phi_v + \Phi_t)[\vec{X}_u \times \vec{X}_v] = \gamma[\vec{X}_u \times \vec{X}_v], \quad (22)$$

откуда следует утверждение леммы.

11°. Доказательство теоремы. Предположим для определенности, что в точке X_0

$$\Phi_v \neq 0. \quad (23)$$

Тогда у точки X_0 есть окрестность, в которой выполнены оба неравенства (21) и (23). Это следует из непрерывности функции (19) и вектор-функции (18), что, в свою очередь, вытекает из C^2 -гладкости $\vec{X}(u, v, t)$. По теореме о неявной функции [119] найдутся $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что при

$$u \in (u_0 - \delta_1, u_0 + \delta_1), \quad t \in (t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2) \quad (24)$$

уравнение (20) определяет C^1 -гладкую функцию

$$v = V(u, t); \quad V(u_0, t_0) = v_0. \quad (25)$$

Ниже мы покажем, что поверхность $\mathcal{F}$, заданная здесь соотношениями (4) и (24)–(25), представляет собой участок огибающей.

Сначала снова разберемся с наглядной стороной дела. Вектор-функция (4) задает отображение цилиндрической области $\mathcal{W}$ в пространство (x, y, z) , причем образами сечений $t = \text{const}$ служат поверхности S_t . В частности, сечение $t = t_0$ проходит через точку X_0 (рис. 173); оно является образом поверхности S_{t_0} из рассматриваемого семейства. При этом точка X , упомянутая в условии теоремы, является образом точки X_0 . Касательную плоскость и орт нормали к S_{t_0} в точке X обозначим Π и $\vec{n}$. Вместе с тем, в цилиндрической области $\mathcal{W}$ через точку X_0 проходит поверхность $\Phi = 0$, которую обозначим $\mathcal{F}_0$. Из сказанного видно, что ее образ $\mathcal{F}$ задается вектор-функцией

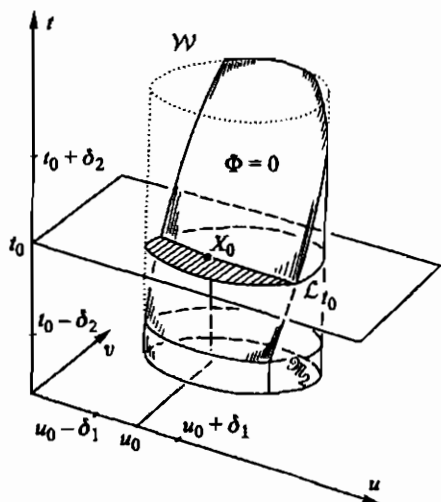


Рис. 173

$$\vec{Z}(u, t) = \vec{X}(u, V(u, t), t). \quad (26)$$

Дальнейшие выкладки связаны с теоремой о неявной функции, и мы запишем их подробно. Из (20) имеем

$$d\Phi = \Phi_u du + \Phi_v dv + \Phi_t dt = 0, \quad (27)$$

а из (27) и (23)

$$dv = -\frac{\Phi_u}{\Phi_v} du - \frac{\Phi_t}{\Phi_v} dt, \quad (28)$$

причем (28) представляет собой полный дифференциал функции (25), так что

$$V_u = -\frac{\Phi_u}{\Phi_v}, \quad V_t = -\frac{\Phi_t}{\Phi_v}. \quad (29)$$

Используя (26) и (29), находим

$$\vec{Z}_u = \vec{X}_u + \vec{X}_v V_u = \frac{1}{\Phi_v} (\Phi_v \vec{X}_u - \Phi_u \vec{X}_v) \quad (30)$$

и

$$\vec{Z}_t = \vec{X}_v V_t + \vec{X}_t = \frac{1}{\Phi_v} (-\Phi_t \vec{X}_v + \Phi_v \vec{X}_t). \quad (31)$$

Из (4), (14) и (20) следует, что в точке X_0 справедливо разложение (13); подставив его в (31), получим

$$\vec{Z}_t = \frac{1}{\Phi_v} (\alpha \Phi_v \vec{X}_u + \beta \Phi_v \vec{X}_v - \Phi_t \vec{X}_v). \quad (32)$$

Из (30) и (32), используя (19) найдем

$$\vec{Z}_u \times \vec{Z}_t = -\frac{\gamma}{\Phi_v} [\vec{X}_u \times \vec{X}_v]. \quad (33)$$

Из (33) и леммы п. 10° следует, что в условиях теоремы $\vec{Z}_u \times \vec{Z}_t \neq \vec{0}$ в точке X , а также в некоторой ее окрестности. Поэтому (возможно, сузив окрестность (24)) мы можем гарантировать, что $\mathcal{F}$ является C^1 -гладкой поверхностью, а касательная плоскость к ней в точке X совпадает с плоскостью Π .

Попутно выясняется смысл вектора (18): в точках поверхности $\mathcal{F}$ он направлен по нормали к Π . Поэтому векторы $\vec{n}$ и $\vec{N}$, построенные в произвольной точке поверхности $\mathcal{F}$, друг другу коллинеарны. Из (22) и (33) видно, что совпадение или несовпадение их направлений зависит от сочетания знаков γ и Φ_v .

Линии пересечения поверхности $\mathcal{F}_0$ с плоскостями $t = \text{const}$ обозначим $\mathcal{L}_t$, и пусть ℓ_t — их образы при отображении (4).

Рассуждения, аналогичные изложенным, применимы к другим точкам на $\mathcal{L}_{t_0}$, а также на $\mathcal{L}_t$ при $t \neq t_0$, откуда следует, что все ℓ_t являются характеристиками.

Обратим внимание на то, что характеристики ℓ_t на $\mathcal{F}$ при разных t друг с другом не пересекаются, так как их прообразы в W расположены в разных плоскостях.

Для завершения доказательства теоремы остается выяснить закон прикрепления. С этой целью в (25)–(26) переименуем (u, t) в (λ, μ) и тогда будет ясно, что закон прикрепления выглядит так:

$$u = \lambda, \quad v = V(\lambda, \mu), \quad t = \mu. \quad (34)$$

Согласно (34) функция $\tau(\lambda, \mu) = \mu$ не является локально постоянной. Таким образом, выполнены все требования, перечисленные в определении «участка огибающей».

Пример. Семейство цилиндрических поверхностей (2), построенных на синусоидах, запишем в параметрической форме:

$$x = u, \quad y = \sin(u - t), \quad z = v.$$

Несложный подсчет показывает, что здесь $\Phi = \cos(u - t)$. Приравняв Φ к нулю, получим

$$u - t = \pm \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad y = \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1.$$

В этом примере $\Phi_v = 0$ тождественно, а $\Phi_u = -\sin(u - t) \neq 0$, когда $\Phi = 0$. Найдем вектор $\vec{N}$. Согласно (18) имеем

$$\vec{N} = (\vec{i} \cos(u - t) - \vec{j} + \vec{k} \cos(u - t)) \sin(u - t),$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты координатных осей. Поэтому $\vec{N} = -\vec{j} \sin(u - t) = \mp \vec{j} \neq 0$, когда $\Phi = 0$. Таким образом, две плоскости $y = \pm 1$ удовлетворяют всем требованиям достаточного условия огибающей и потому являются участками огибающей (что в этом простом примере можно было бы проверить иначе, но здесь наша цель — проиллюстрировать доказанную теорему).

Из результатов следующего параграфа будет следовать, что в рассмотренном здесь примере у огибающей нет других участков.

12°. Наряду с представлением вида (25) для огибающей иногда бывает удобно использовать задание посредством системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \vec{X}(u, v, t), \\ \Phi(u, v, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Первая (векторная) строчка системы (35) в координатной записи будет содержать три уравнения, поэтому фактически (35) представляет собой систему четырех уравнений. Если из нее одно из переменных исключить, а два других переименовать, то придем к векторной записи огибающей, аналогичной (3) и (7).

13°. Система уравнений (35) удобна еще и тем, что при фиксированных значениях t она задает характеристики.

14°. Рассмотрим теперь более сложный пример.

Пример. Пусть $\mathcal{L}$ — пространственная кривая с радиус-вектором текущей точки $\vec{r} = \vec{r}(t)$, натуральным параметром t и с отличными от нуля кривизной $k(t)$ и кручением $\chi(t)$. Рассмотрим семейство ее соприкасающихся плоскостей и найдем его огибающую.

Прежде всего, нам понадобятся орты касательной и *главной нормали*: $\vec{\tau} = \vec{\tau}(t)$ и $\vec{\nu} = \vec{\nu}(t)$. При фиксированном t соприкасающаяся плоскость «натянута» на них. Ее уравнение

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \vec{\tau} + u\vec{\tau} + v\vec{\nu}, \\ -\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty.\end{aligned}\quad (36)$$

Учтя в (36) зависимость от t , получим векторное задание семейства соприкасающихся плоскостей

$$\vec{X}(u, v, t) = \vec{\tau}(t) + u\vec{\tau}(t) + v\vec{\nu}(t). \quad (37)$$

Введем в рассмотрение орт *бинормали*

$$\vec{\beta} = [\vec{\tau} \times \vec{\nu}], \quad (38)$$

и, предполагая, что линия $\mathcal{L}$ является C^m -гладкой при $m \geq 3$, выпишем для нее *формулы Френе* [99] вместе с равенством, выражающим $\vec{\tau}$:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\tau}} &= \quad \vec{\tau}, \\ \dot{\vec{\tau}} &= \quad k\vec{\nu}, \\ \dot{\vec{\nu}} &= -k\vec{\tau} \quad + \kappa\vec{\beta}, \\ \dot{\vec{\beta}} &= \quad -\kappa\vec{\nu};\end{aligned}\quad (39)$$

точкой сверху здесь, как и выше, обозначена производная по t .

Отметим следствие из формул (39), которое понадобится нам в п. 3^о § 33:

$$\ddot{\vec{\tau}} = -k^2\vec{\tau} + \dot{k}\vec{\nu} + k\kappa\vec{\beta} = \vec{\tau}^{(3)}. \quad (40)$$

Из (37) имеем

$$\vec{X}_u = \vec{\tau}(t), \quad \vec{X}_v = \vec{\nu}(t), \quad (41)$$

а используя (39) вычисляем

$$\begin{aligned}\vec{X}_t &= \vec{\tau} + uk\vec{\nu} + v(-k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}) = \\ &= (1 - vk(t))\vec{\tau}(t) + uk(t)\vec{\nu}(t) + v\kappa(t)\vec{\beta}(t).\end{aligned}\quad (42)$$

Затем, учитывая (14), (38) и (41)–(42), находим

$$\begin{aligned}\Phi &= v\kappa(t), & \Phi_u &= 0, \\ \Phi_v &= \kappa(t) \neq 0, & \Phi_t &= v\dot{\kappa}(t).\end{aligned}\quad (43)$$

После этого, используя (41)–(43), по формуле (18) вычисляем

$$\vec{N} = v\kappa^2\vec{\nu} - (uk\kappa - v\dot{\kappa})\vec{\beta}. \quad (44)$$

Сопоставляя (44) и (43), видим, что условия теоремы пункта 9° соблюдаются при

$$v = 0, \quad u \neq 0. \quad (45)$$

Руководствуясь схемой (35), объединим (37) и (45) в одну систему уравнений, из которой v исключается сразу же, и получим уравнение огибающей

$$\vec{Z}(u, t) = \vec{r}(t) + u \vec{\tau}(t), \quad u \neq 0. \quad (46)$$

Обратим внимание на то, что огибающая (46) содержит два участка:

а) на одном из них $u > 0$, назовем его $\mathcal{F}_+$;

б) на другом $u < 0$, обозначим его $\mathcal{F}_-$.

Это — развертывающиеся поверхности, образованные касательными к линии $\mathcal{L}$ (торсы). С такими поверхностями выше мы уже встречались, см. § 19, п. 12°.

Воспользовавшись п. 13° и в формуле (46) фиксируя t , видим, что характеристиками на найденной огибающей являются открытые лучи касательных к линии $\mathcal{L}$.

Обсуждение этого примера мы продолжим в п. 4° § 33.

15°. Теорема. Пусть уравнение с частными производными первого порядка

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad (47)$$

имеет семейство решений

$$z = f(x, y; \alpha), \quad (48)$$

а семейство (48) имеет огибающую

$$z = \zeta(x, y). \quad (49)$$

Тогда функция (49) тоже является решением уравнения (47).

Доказательство основано на том, что в той точке (x, y, z) , где поверхность (48) касается огибающей (49), совпадают значения частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (50)$$

что хорошо видно на рис. 172; но при этом, по условию, соблюдается равенство

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \quad (51)$$

Существование производных (50) функции (49) обеспечено определением огибающей.

З а м е ч а н и е. На самом деле, в доказательстве есть место, требующее более осторожного обсуждения. Дело в том, что области определения $\mathcal{M}_\alpha$ функций (48) могут не совпадать друг с другом и с областью определения $\mathcal{M}$ функции (49). Поэтому сначала следовало бы отметить точку $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$; ввести обозначение

$$z_0 = \zeta(x_0, y_0). \quad (52)$$

Затем воспользоваться законом прикрепления $\alpha = \tau(x, y)$ и тем, что согласно определению огибающей

$$f(x_0, y_0; \tau(x_0, y_0)) = z_0. \quad (53)$$

Из (52) и (53) следует, что для $\alpha = \tau(x_0, y_0) = \alpha_0$ область определения $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_{\alpha_0}$ функции $f(x, y; \alpha_0)$ содержит точку (x_0, y_0) и потому имеет непустое пересечение с $\mathcal{M}$. Именно это позволяет для $x = x_0$, $y = y_0$ найти все те частные производные, которые участвуют в равенствах (51), подставить числовые значения

$$\begin{aligned} x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \\ p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0; \alpha_0) = p_0, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0; \alpha_0) = q_0 \end{aligned} \quad (54)$$

в уравнение (47) и проверить, что точка пятимерного пространства, которая образована набором чисел (54), содержится в области определения функции F ; в противном случае для $\alpha = \alpha_0$ функция (48) не была бы решением уравнения (47). После этих разъяснений можно всюду снять индекс «нуль», заменив фиксированную точку (x_0, y_0) текущей точкой (x, y) , и тогда будет ясно, что функция (49) удовлетворяет уравнению (47).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0. \quad (55)$$

Здесь $F = pq - z$ не зависит явно от x и y . Но если все же считать F функцией пяти аргументов, см. (51), то ее областью определения служит все $\mathbb{R}^5$. Непосредственная проверка показывает, что функция

$$z = (x + \alpha)(y + \alpha) = xy + \alpha(x + y) + \alpha^2 \quad (56)$$

при каждом α заданная на всей плоскости аргументов (x, y) , удовлетворяет уравнению (55) ($\mathcal{M}_\alpha = \mathbb{R}^2 \forall \alpha$). По формуле (14) находим

$$\Phi = x + y + 2\alpha, \quad (57)$$

и условие (20) влечет здесь равенство

$$\alpha = -\frac{1}{2}(x + y). \quad (58)$$

Правая часть в (58) тоже определена на всей плоскости (x, y) и не является локально постоянной. Подставив (58) в (56), получим

$$\zeta = -\frac{1}{4}(x-y)^2. \quad (59)$$

Нетрудно вычислить частные производные функции (59) и проверить два факта:

1) параболический цилиндр (59) является огибающей семейства гиперболических параболоидов (56), а равенство (58) выражает для них закон прикрепления;

2) функция (59) (в согласии с теоремой этого пункта) удовлетворяет уравнению (55).

Более подробные сведения о роли огибающей в теории дифференциальных уравнений читатель может найти в книге [110], а о самих огибающих — в книге [51].

Об использовании понятия огибающей в инженерных задачах см. [71, 73].

§ 33. Дискриминанта

1°. Выше мы специально оговаривали гладкость поверхностей, избегая, тем самым, рассмотрения особых точек. Однако в прикладных вопросах, там, где теория поверхностей используется как готовый математический аппарат, полностью от них избавиться не удастся, а во многих случаях их наличие вызвано существом задачи — в этой связи см. [12].

Особые точки весьма разнообразны. Примерами могут служить

- вершины конических поверхностей (§ 6, п. 3°, пример 8);
- вершины многогранников и точки на их ребрах;
- точки ветвления римановых поверхностей в теории функций комплексного переменного [69].

Мы не будем заниматься ими подробно, ограничившись лишь отдельными примерами.

Подчеркнем однако, что ответ на вопрос о том, считать ли конкретную точку особой, может зависеть от того, в каком классе гладкости ведется рассмотрение.

Пример. Пусть на плоскости $z = 0$ введены полярные координаты (ρ, φ) , а в пространстве — цилиндрические координаты (ρ, φ, z) (§ 26, п. 4°). Поверхность S зададим уравнением

$$z = \rho^2 \sin m\varphi, \quad \text{где} \quad m \geq 3. \quad (1)$$

Функция (1) является C^1 -гладкой, однако ее C^2 -гладкость нарушена при $\rho = 0$ (и то, и другое докажете самостоятельно — в порядке упражнения). Таким образом, точка O (где $\rho = 0$) на поверхности

(1) является особой, если рассмотрение идет в классе C^n -гладких поверхностей при $n \geq 2$. Однако если речь будет идти о C^1 -гладких поверхностях, то для поверхности (1) ту же самую точку O уже нельзя будет считать особой.

Замечание. Если в (1) взять $m = 2$, то получим гиперболический параболоид $z = 2xy$, и никакой особенности не будет вовсе.

2°. Пусть семейство поверхностей $\{S_t\}$ задано вектор-функцией трех аргументов, аналогично п. 2° в § 32, там см. формулы (4)–(5), однако с тем отличием, что множеством, на котором задана вектор-функция $\vec{X}$, может служить не только открытая цилиндрическая область W в пространстве переменных u, v, t , но и ее замыкание $\bar{W}$, либо так называемое *ошкуренное замыкание*, т. е. результат удаления из замкнутого множества $\bar{W}$ какой-либо части границы ∂W области W . Во всех этих случаях для упрощения записи будем пользоваться прежним символом W .

Кроме того, нам снова понадобится функция Φ , которая была введена в § 32 формулой (14).

Вместе с семейством $\{S_t\}$ теми же формулами (4)–(5) из § 32 определено отображение f множества W в пространство $\mathbb{R}^3$ переменных x, y, z :

$$W \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3. \quad (2)$$

Определение. Дискриминантой $\mathcal{D}$ семейства поверхностей $\{S_t\}$ называется объединение следующих трех подмножеств из W :

- а) множества точек, граничных для внутренней части W ;
- б) множества тех точек, внутренних для W , в сколь угодно малой окрестности каждой из которых нарушена C^1 -гладкость вектор-функции $\vec{X}(u, v, t)$;
- в) множества точек, в которых $\Phi = 0$.

Дискриминантой называется также образ $\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^3$ множества $\mathcal{D}$ при отображении (2).

Замечание. Формулируя определение дискриминанты, можно принять более общую точку зрения и в соотношениях (5) из § 32 считать M_2 произвольным двумерным многообразием, или двумерным многообразием с краем, или двумерным многообразием с частью его края.

3°. Теорема (необходимый признак огибающей). Если семейство поверхностей $\{S_t\}$ имеет огибающую $\mathcal{F}$, то носитель огибающей принадлежит дискриминанте $\tilde{\mathcal{D}}$.

Доказательство проведем от противного: предположим, что у носителя огибающей есть точка $A(x_1, y_1, z_1)$, которая не принадлежит $\tilde{\mathcal{D}}$. Пусть S_{t_1} — та из поверхностей семейства, которая согласно

закону прикрепления касается огибающей $\mathcal{F}$ в точке A , и (u_1, v_1) — координаты этой точки на S_{t_1} . Тогда точка $P(u_1, v_1, t_1) \in \mathcal{W}$ является прообразом точки A при отображении f . Отображение f запишем в координатной форме:

$$\begin{aligned}x &= x(u, v, t), \\y &= y(u, v, t), \\z &= z(u, v, t).\end{aligned}\quad (3)$$

Согласно сделанным допущениям

$$\begin{aligned}x(u_1, v_1, t_1) &= x_1, \\y(u_1, v_1, t_1) &= y_1, \\z(u_1, v_1, t_1) &= z_1.\end{aligned}\quad (4)$$

Записав в координатах смешанное произведение Φ , увидим, что оно представляет собой якобиан отображения (3):

$$\Phi = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)}.\quad (5)$$

Так как $A \notin \tilde{\mathcal{D}}$, то $P \notin \mathcal{D}$, и потому есть окрестность Ω точки P , целиком содержащаяся внутри $\mathcal{W}$, в которой функция (3) является C^1 -гладкой, а якобиан (5) отличен от нуля.

Уменьшив, если нужно, окрестность Ω , добьемся того, что отображение f будет в ней обратимо. Тогда обратное ему отображение f^{-1} :

$$\begin{aligned}u &= u(x, y, z), \\v &= v(x, y, z), \\t &= t(x, y, z)\end{aligned}\quad (6)$$

тоже будет C^1 -гладким [119]. Согласно сделанным допущениям образ $f(\Omega)$ окрестности Ω содержит точку A и через эту точку проходит участок огибающей $\mathcal{F}$; воспользуемся его векторным заданием

$$\vec{Z} = \vec{Z}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} x(\lambda, \mu) \\ y(\lambda, \mu) \\ z(\lambda, \mu) \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathfrak{M}_1.\quad (7)$$

Положим $\mathcal{F} \cap f(\Omega) = \tilde{\Omega}$ и обозначим через ω прообраз участка $\tilde{\Omega}$ огибающей $\mathcal{F}$ при отображении (7) (рис. 174).

Величины x , y и z , выраженные через λ и μ из (7), подставим в (6); в результате получим функции, задающие закон прикрепления:

$$\begin{aligned}u &= u(x(\lambda, \mu), y(\lambda, \mu), z(\lambda, \mu)) = g(\lambda, \mu), \\v &= v(x(\lambda, \mu), y(\lambda, \mu), z(\lambda, \mu)) = h(\lambda, \mu), \\t &= t(x(\lambda, \mu), y(\lambda, \mu), z(\lambda, \mu)) = \tau(\lambda, \mu).\end{aligned}\quad (8)$$

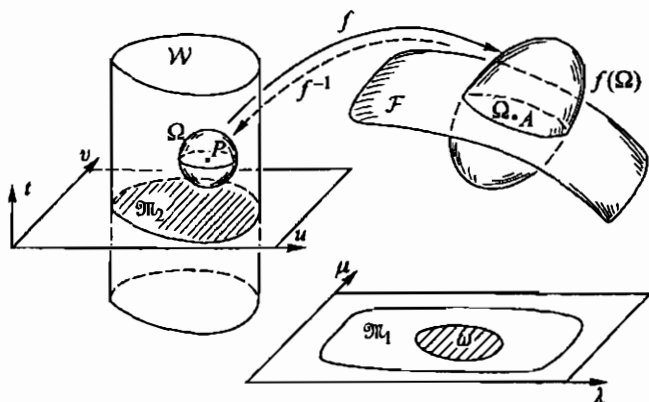


Рис. 174

Проследим за гладкостью функций, используемых в этих рассуждениях. Функции (7) являются C^1 -гладкими согласно определению огибающей. C^1 -гладкость функций (6) установлена выше. Поэтому сложные функции (8) тоже являются C^1 -гладкими. Кроме того, в силу сделанных предположений C^1 -гладкими являются функции (3). Все это вместе позволяет продифференцировать по λ и по μ равенства (7) из § 32 и получить выражения

$$\vec{Z}_\lambda = \vec{x}_u g_\lambda + \vec{x}_v h_\lambda + \vec{x}_t \tau_\lambda \quad (9)$$

и

$$\vec{Z}_\mu = \vec{x}_u g_\mu + \vec{x}_v h_\mu + \vec{x}_t \tau_\mu. \quad (10)$$

Далее, согласно определению огибающей,

$$\vec{Z}_\lambda \times \vec{Z}_\mu \neq \vec{\theta}, \quad (11)$$

а из предположения о том, что $\Phi \neq 0$, следует, что в Ω

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{\theta}. \quad (12)$$

Векторное произведение (11) в точке огибающей $\mathcal{F}$ ортогонально касательной плоскости Π , но эта же самая плоскость Π является касательной к поверхности семейства, что наглядно представлено на рис. 172. Поэтому в той же рассматриваемой точке векторное произведение (12) ортогонально плоскости Π . Отсюда следует, что векторы (11) и (12) коллинеарны. К тому же они оба ненулевые. Значит, существует такая функция $\psi = \psi(\lambda, \mu) \neq 0$, что

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = [\vec{Z}_\lambda \times \vec{Z}_\mu] \psi(\lambda, \mu) \quad (13)$$

при $(\lambda, \mu) \in \omega$.

Каждое из равенств (9) и (10) умножим скалярно на вектор (12) и, учитывая известные свойства смешанного произведения и равенство (13), обнаружим, что

$$\Phi \tau_\lambda = 0, \quad \Phi \tau_\mu = 0 \quad \text{при} \quad (\lambda, \mu) \in \omega. \quad (14)$$

А так как $\Phi \neq 0$, то из (14) следует, что в ω

$$\tau(\lambda, \mu) = \text{const.} \quad (15)$$

Однако результат (15) противоречит определению огибающей, см. § 32, пп. 2°, 3° и 5°. Теорема доказана.

Пример 1. В примере из п. 15° предыдущего параграфа, приравняв к нулю функцию (57), мы нашли огибающую семейства (56). Там дискриминанта совпадает с огибающей, но так бывает не всегда.

Пример 2. Рассмотрим семейство, состоящее из боковых поверхностей круглых цилиндров и их общей оси:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & z &= v, \\ 0 &\leq r < +\infty. \end{aligned} \quad (16)$$

Нетрудно подсчитать, что здесь $\Phi = r$. Поэтому дискриминанта семейства (16) включает в себя только координатную ось z . Но ось z не содержит никакой поверхности. Следовательно, мы доказали, что семейство (16) не имеет огибающей.

4°. Продолжим обсуждение примера из п. 14° предыдущего параграфа. Напомним, что там рассматривалось семейство соприкасающихся плоскостей S_t к пространственной кривой $\mathcal{L}$. Номера формул (37)–(46), на часть из которых нам придется здесь сослаться, относятся к § 32.

Напомним еще, что найденная там огибающая состоит из двух участков: $\mathcal{F}_+$ и $\mathcal{F}_-$, соответствующих значениям $u > 0$ и $u < 0$ в (46).

Возьмем в (46) предел при $u \rightarrow 0$ и тогда обнаружим, что исходная линия $\mathcal{L}$ служит общим краем для $\mathcal{F}_+$ и для $\mathcal{F}_-$. Построим объединение

$$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_- \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{F}_+. \quad (17)$$

Его тоже можно задать уравнением (46), однако считая, что в нем

$$-\infty < u < +\infty. \quad (18)$$

Сопоставляя это с (37) и (43), видим, что $\overline{\mathcal{F}}$ входит в состав дискриминанты семейства плоскостей S_t .

Будем считать, что натуральный параметр t на $\mathcal{L}$ пробегает открытый промежуток (t_1, t_2) :

$$-\infty \leq t_1 < t < t_2 \leq +\infty. \quad (19)$$

Используя кривизну, кручение и формулы Френе, мы фактически предполагаем, что $\mathcal{L}$ является C^n -гладкой при $n \geq 3$. В этих предположениях дискриминанта не содержит ничего, кроме $\bar{\mathcal{F}}$.

Рассмотрим $\bar{\mathcal{F}}$ подробнее. Из (37) и (39) (§ 32) видно, что вектор-функция $\vec{X}(u, v, t)$ имеет гладкость C^{n-2} и потому заведомо является C^1 -гладкой во всей области, описываемой неравенствами (18), (19) и (18a),

$$-\infty < v < +\infty. \quad (18a)$$

Далее, из (46) и первой строки формул (39) видно, что вектор-функция $\vec{Z}(u, t)$ имеет гладкость, на единицу меньшую, чем $\vec{r}(t)$, и потому заведомо непрерывна. На линии $\mathcal{L}$ разным значениям t отвечают разные точки и, следовательно, разные касательные к $\mathcal{L}$. Выясним их взаимное расположение в пространстве. Пусть A и B — точки на $\mathcal{L}$, в которых $t = t_A$ и $t = t_B$ соответственно. Положим

$$\vec{\tau}_A = \vec{\tau}(t_A), \quad \vec{\tau}_0 = \vec{\tau}(t_B); \quad k_0 = k(t_B), \quad x_0 = x(t_B).$$

Длина дуги $\smile AB$ на $\mathcal{L}$ равна $s = |t_B - t_A|$ и $s \rightarrow 0$ при $A \rightarrow B$. Используя (39)–(40) из § 32 и формулу Тейлора, можно подсчитать, что

$$\left| (\vec{AB}, \vec{\tau}_A, \vec{\tau}_0) \right| = \frac{1}{12} k_0^2 |x_0| s^4 + o(s^4). \quad (20)$$

Из (20) видно, что

$$(\vec{AB}, \vec{\tau}_A, \vec{\tau}_0) \neq 0, \quad (20a)$$

если s достаточно мало. Неравенство (20a) показывает, что касательные, проведенные в точках A и B , скрещиваются. Вместе с тем, при каждом фиксированном t разным значениям u отвечают разные точки на касательной. В силу всего перечисленного отображение f полосы (18)–(19) на ее образ в пространстве переменных x, y, z является локальным гомеоморфизмом; следовательно, $\bar{\mathcal{F}}$ является поверхностью (§ 15, пп. 3°–6°). Из (46) § 32 имеем

$$\vec{Z}_u = \vec{\tau}(t), \quad \vec{Z}_t = \vec{\tau}(t) + u k(t) \vec{\nu}(t). \quad (21)$$

Напомним, что

$$k(t) \vec{\beta}(t) \neq \vec{\theta}. \quad (22)$$

Из (21) и (22) следует, что

$$\vec{Z}_u \times \vec{Z}_t = \vec{\theta} \quad \text{при } u = 0, \quad (23)$$

причем только при $u = 0$.

Равенство вида (23) может означать одно из двух: либо особенность координатной сети на поверхности, либо нарушение гладкости самой поверхности. Для того чтобы разобраться, какая из этих двух возмож-

ностей имеет место в данном случае, изучим строение поверхности $\bar{F}$ в окрестности линии $\mathcal{L}$.

Временно зафиксируем текущую точку на линии $\mathcal{L}$, обозначим эту точку B и пометим нижним индексом «0» величины, найденные в точке B .

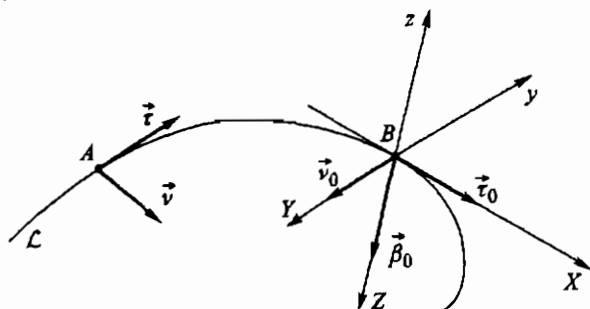


Рис. 175

Примем B за начало вспомогательной декартовой системы координат X, Y, Z , взяв за орты координатных осей векторы $\vec{r}_0, \vec{v}_0$ и $\vec{\beta}_0$ (рис. 175). Представим вектор-функцию $\vec{r}(t)$ в виде

$$\vec{r}(t) = \xi(t)\vec{r}_0 + \eta(t)\vec{v}_0 + \zeta(t)\vec{\beta}_0, \quad (24)$$

и воспользуемся далее тем, что ее гладкость не зависит от выбора координат. Затем используем формулы (38), (39) и (40) из § 32, попутно заметив, что в новых координатах $\vec{r}(t_0) = \vec{\theta}$. Таким путем найдем величины, собранные в (24*):

$$\begin{aligned} \xi(t_0) &= 0, & \eta(t_0) &= 0, & \zeta(t_0) &= 0, \\ \dot{\xi}(t_0) &= 1, & \dot{\eta}(t_0) &= 0, & \dot{\zeta}(t_0) &= 0, \\ \ddot{\xi}(t_0) &= 0, & \ddot{\eta}(t_0) &= k_0, & \ddot{\zeta}(t_0) &= 0, \\ \ddot{\xi}(t_0) &= -k_0^2, & \ddot{\eta}(t_0) &= \dot{k}(t_0), & \ddot{\zeta}(t_0) &= k_0\kappa_0. \end{aligned} \quad (24^*)$$

Если в формуле (46) § 32 мы положим $u = U(t)$, то получим линию на $\bar{F}$; эта линия будет зависеть от выбора функции U ; на ней

$$\begin{aligned} X &= \xi(t) + U(t)\dot{\xi}(t), \\ Y &= \eta(t) + U(t)\dot{\eta}(t), \\ Z &= \zeta(t) + U(t)\dot{\zeta}(t). \end{aligned} \quad (25)$$

Обозначим ℓ_B — линию пересечения поверхности $\bar{F}$ с нормальной плоскостью линии $\mathcal{L}$, проведенной в точке B и содержащей векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{\beta}_0$. Во введенных выше вспомогательных координатах уравнение этой плоскости

$$X = 0. \quad (26)$$

Подставив (26) в первое из равенств (25), получим

$$U(t) = -\frac{\xi(t)}{\dot{\xi}(t)}. \quad (27)$$

Обратим внимание на то, что в (27) деление возможно, по крайней мере, для t , близких к t_0 , так как $\xi(t)$ непрерывна, а $\xi(t_0) \neq 0$ (см. (24*)).

После этого, подставив (27) во вторую и в третью строки равенств (25), получим параметрические уравнения линии ℓ_B (в плоскости (26)):

$$\begin{aligned} Y(t) &= \eta(t) - \xi(t)(\dot{\xi}(t))^{-1}\dot{\eta}(t), \\ Z(t) &= \zeta(t) - \xi(t)(\dot{\xi}(t))^{-1}\dot{\zeta}(t). \end{aligned} \quad (28)$$

По построению ℓ_B проходит через точку B , поэтому

$$Y(t_0) = Z(t_0) = 0. \quad (29)$$

Можно (29) получить иначе — из (28) и первой строки (24*).

От линии $\mathcal{L}$ потребуем теперь C^4 -гладкости. Тогда $Y(t)$ и $Z(t)$ в (28) будут C^3 -гладкими. Последовательно дифференцируя первое из равенств (28), найдем сначала

$$\dot{Y} = (\dot{\xi}^{-2}\ddot{\eta}\xi - \dot{\xi}^{-1}\ddot{\eta})\xi, \quad (30)$$

затем

$$\ddot{Y} = -\ddot{\eta} + \dot{\xi}^{-1}\ddot{\eta}\dot{\xi} + (2\dot{\xi}^{-2}\ddot{\xi}\ddot{\eta} - 2\dot{\xi}^{-3}\dot{\eta}\dot{\xi}^2 + \dot{\xi}^{-2}\ddot{\eta}\xi^{(3)} - \dot{\xi}^{-1}\eta^{(3)})\xi. \quad (31)$$

Выражения для $\dot{Z}$ и $\ddot{Z}$ получаются из (30) и (31) заменой буквы η на ζ .

Далее воспользуемся следующим соображением: если в произведении дифференцируемых функций есть два сомножителя, которые при $t = t_0$ обращаются в нуль, то и производная этого произведения тоже обращается в нуль при $t = t_0$. Поэтому, используя (24*), формулы (29)–(31) и выражения для $\dot{Z}$ и $\ddot{Z}$, аналогичные (30) и (31), получим

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t_0) &= 0, \quad \ddot{Y}(t_0) = -\ddot{\eta}(t_0) = -k_0, \quad Y^{(3)}(t_0) = -2\eta^{(3)}(t_0) = -2\dot{k}(t_0), \\ \dot{Z}(t_0) &= 0, \quad \ddot{Z}(t_0) = -\ddot{\zeta}(t_0) = 0, \quad Z^{(3)}(t_0) = -2\zeta^{(3)}(t_0) = -2k_0\kappa_0. \end{aligned} \quad (28^*)$$

C^3 -гладкость функций $Y(t)$ и $Z(t)$ позволяет применить к ним формулу Тейлора. Положим здесь $y(t) = -Y(t)$, $z(t) = -Z(t)$. Используя (29) и (28*), находим, что

$$\begin{aligned} y(t) &= -Y(t) = \frac{1}{2}k_0(t-t_0)^2 + \frac{1}{3}\dot{k}(t_0)(t-t_0)^3 + o((t-t_0)^3), \\ z(t) &= -Z(t) = \frac{1}{3}k_0\kappa_0(t-t_0)^3 + o((t-t_0)^3). \end{aligned} \quad (32)$$

Это — тоже параметрические уравнения линии ℓ_B , но в более удобной для дальнейшего исследования форме.

Разложения (32) показывают, что в окрестности точки B линия ℓ_B ведет себя аналогично полукубической параболе $z = \pm Cy^{\frac{2}{3}}$ при $C = \frac{2\sqrt{2}\kappa_0}{3\sqrt{k_0}}$ и имеет в B точку возврата (рис. 176).

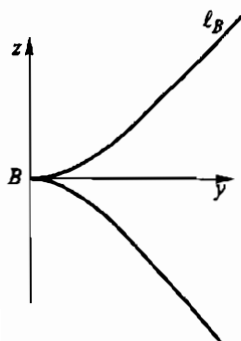


Рис. 176

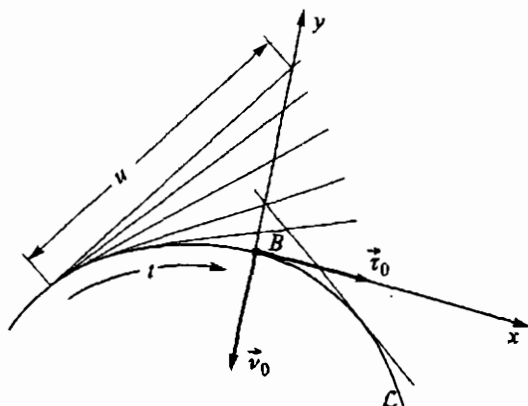


Рис. 177

С геометрической точки зрения появление здесь точки возврата вызвано тем, что касательные, проведенные к линии $\mathcal{L}$, «идут» к плоскости (26) с двух сторон: со стороны значений $t < t_0$ и со стороны значений $t > t_0$. Из-за этого в (32) каждому значению Y отвечают два разных значения t (рис. 177).

5°. Будем теперь двигать точку B по линии $\mathcal{L}$. Вместе с ней будет перемещаться нормальная плоскость. Линия ℓ_B , перемещаясь вместе с нормальной плоскостью, будет в ней деформироваться за счет изменения $k(t)$, $\kappa(t)$ и $\dot{k}(t)$, а также из-за изменения остаточных членов $o((t - t_0)^3)$ в (32). Однако ее строение, схематически показанное на рис. 176, будет сохраняться: произвольно выбранная на $\mathcal{L}$ точка B будет точкой возврата для линии пересечения поверхности $\overline{\mathcal{F}}$ с плоскостью, нормальной к $\mathcal{L}$. Учитывая изложенное, линию $\mathcal{L}$ называют *ребром возврата* поверхности $\overline{\mathcal{F}}$.

На ребре возврата $\mathcal{L}$ гладкость поверхности $\overline{\mathcal{F}}$ нарушена.

6°. Каждая из двух гладких поверхностей с краем $\mathcal{F}_+ \cup \mathcal{L}$ и $\mathcal{F}_- \cup \mathcal{L}$ в точках своего края $\mathcal{L}$ не имеет касательной плоскости в смысле § 1; однако наглядно понятно, что обе они в точках линии $\mathcal{L}$ все же «касаются» плоскостей, соприкасающихся для $\mathcal{L}$. Поэтому весь торс $\overline{\mathcal{F}}$ считается *обобщенной огибающей* семейства соприкасающихся плоскостей линии $\mathcal{L}$.

Формализованного определения обобщенной огибающей давать не будем, отсылая интересующегося читателя к книге [51].

7°. В отличие от п. 14° из § 32 на обобщенной огибающей $\bar{\mathcal{F}}$ характеристиками следует считать касательные к $\mathcal{L}$, рассматриваемые целиком, а не их открытые лучи. При этом ребро возврата $\mathcal{L}$ оказывается само огибающей семейства характеристик, расположенного на $\bar{\mathcal{F}}$.

8*. Иногда приходится иметь дело с семейством поверхностей, заданных неявно уравнениями вида

$$\Psi(x, y, z; \eta) = 0. \quad (33)$$

Говоря подробнее, здесь считается, что в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x, y, z уравнение (33) при каждом фиксированном $\eta \in (a, b)$ задает некоторую поверхность и что, меняя параметр η , мы получаем семейство поверхностей.

Обозначим символом $\nabla\Psi$ трехмерный градиент функции Ψ , т. е. вектор-функцию

$$\nabla\Psi = \{\psi_x, \psi_y, \psi_z\}. \quad (34)$$

Наряду с $\mathbb{R}^3$ рассмотрим пространство $\mathbb{R}^4$ с координатами x, y, z, η и в нем следующие множества:

- 1) множество $\mathcal{A}$, на котором определена функция Ψ ;
- 2) $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{A}$, на котором соблюдается равенство (33);
- 3) открытое в $\mathbb{R}^4$ множество $\mathcal{V}$, на котором функция Ψ является C^1 -гладкой;
- 4) множество $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{V}$, во всех точках которого

$$\Psi_\eta = 0; \quad (35)$$

- 5) $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{V}$, на котором $\nabla\Psi = \vec{\theta}$;

- 6) множество $\mathcal{U}_3$, определяемое тем, что для каждой его точки в сколь угодно малой ее окрестности имеются такие точки из множества $\mathcal{A}$, в которых нарушена C^1 -гладкость функции Ψ .

Таким образом, $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ и $\mathcal{V}$ являются подмножествами в $\mathcal{A}$, а $\mathcal{U}_3$ принадлежит замыканию $\bar{\mathcal{A}}$ множества $\mathcal{A}$ в $\mathbb{R}^4$.

В конкретных ситуациях любое из множеств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}_j$ может оказаться пустым.

Обратим внимание на то, что

$$\mathcal{U}_3 \cap \mathcal{V} = \emptyset \quad (36)$$

в силу выбора множеств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}_3$.

Определение. Дискриминантой семейства поверхностей (33) называется объединение

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3 \subset \bar{\mathcal{A}}, \quad (37)$$

а также проекция множества $\mathcal{U}$ на $\mathbb{R}^3$ (рассматриваемое как подпространство в $\mathbb{R}^4$).

Проекцию $\mathcal{U}$ на $\mathbb{R}^3$ обозначим $\mathcal{U} \downarrow$.

Предположим, что в $\mathbb{R}^3$ даны область G и ее замыкание $\overline{G}$, причем

$$\overline{G} \times [a, b] \subset \mathcal{V}. \quad (38)$$

Теорема. Пусть на $G \times [a, b]$ функция Ψ не только является C^1 -гладкой, но еще и соблюдено неравенство

$$\nabla \Psi \neq \vec{\theta}, \quad (39)$$

и пусть известно, что сужение функции Ψ на $G \times (a, b)$ задает в $\mathbb{R}^3$ семейство поверхностей $\{S_\eta\}$, которое имеет огибающую $\mathcal{F}$. Тогда носитель огибающей $\mathcal{F}$ принадлежит дискриминанте семейства $\{S_\eta\}$.

Наметим схему доказательства. Пусть точка $P(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ принадлежит носителю огибающей $\mathcal{F}$. Тогда имеется

$$\eta_0 \in (a, b) \quad (40)$$

такое, что через точку P проходит поверхность S_{η_0} . Поэтому

$$P \in G. \quad (41)$$

Обозначим буквой Q точку в $\mathbb{R}^4$ с координатами (x_0, y_0, z_0, η_0) . Из (38), (40) и (41) следует, что

$$Q \subset \mathcal{V}, \quad (42)$$

а из (42) и (36) в свою очередь следует, что, в условиях теоремы,

$$Q \notin \mathcal{U}_3, \quad \text{а, кроме того,} \quad Q \notin \mathcal{U}_2, \quad (43)$$

последнее — в силу (39). Поэтому нам предстоит установить, что

$$Q \in \mathcal{U}_1. \quad (44)$$

В точке Q в силу (39) отлична от нуля хотя бы одна из координат вектора (34). Пусть, например,

$$\psi_z \neq 0 \quad (45)$$

в точке Q . Условие C^1 -гладкости функции Ψ включает в себя требование непрерывности ψ_z , поэтому неравенство (45) соблюдается не только в этой точке, но и в некоторой ее окрестности в $\mathbb{R}^4$. В этой окрестности по теореме о неявной функции [119] можно из (33) выразить $z = z(x, y, \eta)$ и, тем самым, представить поверхности $\{S_\eta\}$ вектор-функцией вида

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y, \eta) \end{pmatrix}, \quad (46)$$

причем вектор-функция (46) тоже будет C^1 -гладкой. Последнее обстоятельство позволяет продифференцировать (46) и, учитывая (33) и (45), записать

$$\vec{x}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\psi_x}{\psi_z} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\psi_y}{\psi_z} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\psi_\eta}{\psi_z} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Перемножив векторы (47), найдем

$$\Phi = (\vec{x}_x, \vec{x}_y, \vec{x}_\eta) = -\frac{\psi_\eta}{\psi_z}. \quad (48)$$

Переход от исходного задания (33) к формулам (46)–(48) позволяет применить теорему, доказанную в п. 3°. В результате окажется, что выделенный около точки P участок огибающей $\mathcal{F}$ принадлежит дискриминанте, но понимаемой в смысле определения, сформулированного в п. 2°. Останется только проверить, что с ним согласовано определение, сформулированное в начале п. 8*, чем и завершится доказательство.

В результате окажется, что

$$P \in \mathcal{U}_1, \quad Q \in \mathcal{U}, \quad (49)$$

а из (39) и (49) следует включение (44); из (44), в свою очередь, с учетом определения множества $\mathcal{U}_1$, вытекает равенство (35).

Отметим, что из (35) и (48) следует равенство $\Phi = 0$, которым мы неоднократно уже пользовались в этой главе.

Из изложенных рассуждений получаем

Следствие. В условиях сформулированной выше теоремы носитель огибающей $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^3$ принадлежит множеству точек, координаты которых одновременно удовлетворяют двум уравнениям: (33) и (35).

Отсюда — практическая рекомендация: чтобы найти огибающую неявно заданного семейства (33), надо рассматривать (33) и (35) совместно как систему из двух уравнений.

При этом часто оказывается, что система (33), (35) не имеет «лишних» решений в том смысле, что она задает именно огибающую, однако в конкретных случаях это требует отдельной проверки.

9*. Утверждение, аналогичное теореме, обсуждавшейся в п. 8*, справедливо и для кривых на плоскости.

Пример. В п. 7* § 7 рассматривалось дифференциальное уравнение

$$(y')^2 + 8xy' + 12x^2 = 2y \quad (50)$$

и было найдено его общее решение, которое можно задать равенством

$$4x^2 - (x - C)^2 + 2y = 0 \quad (51)$$

с произвольной постоянной C . С геометрической точки зрения формула (51) задает на плоскости семейство линий с параметром C .

Продифференцировав по C обе части в (51), будем иметь

$$x - C = 0. \quad (52)$$

Пара равенств (51) и (52) в этом примере играет роль системы уравнений (33), (35). Исключив из них C , получим

$$2x^2 + y = 0; \quad (53)$$

это — особое решение уравнения (50), см. (31) в § 7.

Задача. Проверить, что парабола (53) является огибающей семейства парабол (51).

Замечание. В рассмотренном примере можно увидеть аналогию с теоремой, доказанной в п. 15° § 32.

Глава 7

БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ И ЖЕСТКОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ ¹⁾

§ 34. Постановка задачи.

Уравнения бесконечно малых изгибов

1°. Вспомним, что при изгибании поверхности на ней сохраняются длины линий. Наглядно можно себе представить, что тонкая и гибкая, но абсолютно нерастяжимая пленка изменяет свою пространственную форму. Однако у реальных изделий, изготовленных в виде «тонких поверхностей» (их называют «оболочками»), при изменении формы под действием внешних сил длины линий обычно меняются, хотя часто лишь «незначительно». Именно это происходит с металлическими оболочками, если действующие на них силы не выходят за пределы упругих деформаций.

Хотелось бы эти соображения, наглядные, но не строгие, перевести на язык математических формулировок. Отчасти это сделано в том разделе геометрии поверхностей, который посвящен так называемым бесконечно малым изгибаниям; именно о них и пойдет речь ниже.

2°. Рассмотрим семейство поверхностей $\{S(t)\}$, заданное вектор-функцией трех аргументов:

$$\vec{X} = \vec{X}(u, v, t), \quad |\vec{X}_u \times \vec{X}_v| \neq 0; \quad (u, v, t) \in \mathcal{M} \times U, \quad (1)$$

где $\mathcal{M}$ — область на плоскости (возможно, совпадающая со всей плоскостью), U — промежуток числовой оси t , содержащий точку $t = 0$.

Будем говорить тогда, что поверхность $S = S(0)$ подвергается *деформации*, занимая в пространстве положения $S(t)$ для различных $t \in U$.

Отметим на S какую-нибудь линию $\mathcal{L}$, считая, что она задана уравнениями

$$u = u(\xi), \quad v = v(\xi); \quad (u, v) \in \mathcal{M}. \quad (2)$$

Тогда в пространстве появится семейство линий $\{\mathcal{L}(t)\}$, каждая из которых задается уравнениями (2) и (1) при фиксированном t , причем каждая из линий $\mathcal{L}$ расположена на «своей» поверхности $S(t)$.

¹⁾ Перед чтением этой главы рекомендуется повторить параграфы 15 и 19.

Через $\ell(t)$ обозначим длину участка $a \leq \xi \leq b$ линии $\mathcal{L}(t)$:

$$\ell(t) = \int_a^b \sqrt{I} d\xi, \quad (3)$$

где

$$I = E(u(\xi), v(\xi), t) (u'(\xi))^2 + 2F(u(\xi), v(\xi), t) u'(\xi) v'(\xi) + G(u(\xi), v(\xi), t) (v'(\xi))^2; \quad (4)$$

E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $S(t)$. Штрихом, как обычно, здесь и далее обозначены производные функции одного аргумента (по своему аргументу); частные производные будем (как и ранее) обозначать посредством нижних буквенных индексов, а производные по параметру t обозначим точкой сверху.

Гладкость рассматриваемых функций позволяет применить к (3) формулу Тейлора:

$$\ell(t) = \ell_0 + \dot{\ell}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{\ell}(0)t^2 + \dots, \quad (5)$$

где ℓ_0 — длина дуги $a \leq \xi \leq b$ линии (2) на S .

Нам понадобится «краткая форма» записи разложения (5):

$$\ell(t) = \ell_0 + \dot{\ell}(0)t + o(t). \quad (6)$$

Определение. Деформация (1) называется *бесконечно малым изгибанием* поверхности S , если для любой спрямляемой дуги на S разложение (6) имеет вид

$$\ell(t) = \ell_0 + o(t). \quad (7)$$

«Обычное» изгибание (§ 19) удовлетворяет этому определению — для него $o(t)$ в (7) равно нулю тождественно.

3°. В рассуждениях, проводимых в этом и следующем пунктах, предположим дополнительно, что все частные производные вектор-функции (1) до четвертого порядка включительно ограничены на $\mathfrak{M} \times U$.

Применив *правило Лейбница* для вычисления производной от интеграла, зависящего от параметра t , видим, что

$$\dot{\ell}(t) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{I_t d\xi}{\sqrt{I}}, \quad I > 0, \quad (8)$$

$$I_t = E_t u'^2 + 2F_t u'v' + G_t v'^2.$$

Рассуждениями, аналогичными проведенным в пп. 4°–5° § 19, исходя из (7) и (8) устанавливается, что деформация (1) является бесконечно малым изгибанием тогда и только тогда, когда

$$E_t = F_t = G_t = 0 \quad \text{на всей поверхности } S, \quad (9)$$

т. е. при $t = 0$ и всех $(u, v) \in \mathfrak{M}$.

4°. Введем обозначения:

$$\vec{X}(u, v, 0) = \vec{r}(u, v), \quad \vec{X}_t(u, v, 0) = \vec{V}(u, v). \quad (10)$$

Тогда $\vec{X} = \vec{r}(u, v)$ — уравнение поверхности S .

К вектор-функции (1) применим формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$\vec{X}(u, v, t) = \vec{r}(u, v) + t\vec{V}(u, v) + \int_0^t (t - \tau) \vec{X}_{tt}(u, v, \tau) d\tau. \quad (11)$$

Замечание. Для того чтобы получить для вектор-функции формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, достаточно в какой-нибудь декартовой системе координат записать ее для каждого из компонентов вектора и потом все «собрать» в одно векторное равенство.

На числовой оси t в промежутке U выделим окрестность $\mathcal{U}$ точки $t = 0$ и все дальнейшие рассуждения этого параграфа будем проводить, не выходя из окрестности $\mathcal{U}$.

Из (11) в предположении, указанном в начале п. 3°, находим, что

$$\begin{aligned} \vec{X}_u &= \vec{r}_u + t\vec{V}_u + t^2\vec{W}_1, \\ \vec{X}_v &= \vec{r}_v + t\vec{V}_v + t^2\vec{W}_2, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\vec{W}_1$ и $\vec{W}_2$ дифференцируемы на $\mathfrak{M} \times \mathcal{U}$; кроме того, $\vec{W}_j$ ограничены на $\mathfrak{M} \times \mathcal{U}$ вместе с их первыми частными производными.

Используя (12), находим следующие выражения для коэффициентов первых квадратичных форм поверхностей $S(t)$:

$$\begin{aligned} E(u, v, t) &= E(u, v) + 2t\vec{r}_u \vec{V}_u + t^2 w_1, \\ F(u, v, t) &= F(u, v) + t(\vec{r}_u \vec{V}_v + \vec{r}_v \vec{V}_u) + t^2 w_2, \\ G(u, v, t) &= G(u, v) + 2t\vec{r}_v \vec{V}_v + t^2 w_3, \end{aligned} \quad (13)$$

где $E(u, v)$, $F(u, v)$ и $G(u, v)$, как и выше, — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S , а w_j ($j = 1, 2, 3$) тоже дифференцируемы на $\mathfrak{M} \times \mathcal{U}$, причем w_j ограничены вместе с их первыми частными производными.

В (13) сделаем замену обозначений: переименуем $\vec{V}$ в $\vec{\zeta}$. Затем от вектор-функций (13) возьмем частные производные по аргументу t :

$$\begin{aligned} E_t &= 2\vec{r}_u \vec{\zeta}_u + 2tw_1 + t^2(w_1)_t, \\ F_t &= \vec{r}_u \vec{\zeta}_v + \vec{r}_v \vec{\zeta}_u + 2tw_2 + t^2(w_2)_t, \\ G_t &= 2\vec{r}_v \vec{\zeta}_v + 2tw_3 + t^2(w_3)_t \end{aligned} \quad (14)$$

и в (14) положим $t = 0$. Учитывая требования (9), получим для вектор-функций $\vec{\zeta}(u, v)$ систему из трех уравнений с частными производными первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_u \vec{\zeta}_u &= 0, \\ \vec{r}_u \vec{\zeta}_v + \vec{r}_v \vec{\zeta}_u &= 0, \\ \vec{r}_v \vec{\zeta}_v &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

которая называется *системой уравнений бесконечно малых изгибаний*. Она допускает короткую и легко запоминающуюся запись в дифференциалах:

$$d\vec{r} d\vec{\zeta} = 0, \quad (16)$$

очевидно равносильную системе (15).

Каждое векторное поле $\vec{\zeta}$, удовлетворяющее системе (15) (или, что то же самое, уравнению (16)), называется полем бесконечно малого изгиба или *изгибающим полем* для поверхности S .

Система (15) линейна и однородна, поэтому ей удовлетворяет любое постоянное векторное поле, а любая линейная комбинация ее решений снова образует ее решение. Таким образом, изгибающие поля поверхности S образуют линейное пространство [50].

5°. Рассмотрим теперь семейство (1) специального вида:

$$\vec{X}(u, v, t) = \vec{r}(u, v) + t\vec{\zeta}(u, v). \quad (17)$$

Тогда $\vec{X}_t(u, v, 0) = \vec{\zeta}(u, v)$, а $\vec{X}_{tt} = \vec{0}$ тождественно, так что все рассуждения предыдущего пункта применимы, и если $\vec{\zeta}$ — изгибающее поле для S , то для (17) соблюдено (7) и деформация (17) является бесконечно малым изгибанием. Поэтому, имея изгибающее поле $\vec{\zeta}$, часто будем говорить, что нам дано «бесконечно малое изгибание $\vec{\zeta}$ »; при этом фактически будем иметь в виду деформацию (17).

Примеры. 1). Пусть S — евклидова плоскость, $\mathcal{M}$ — ограниченная область на ней и Γ — граница этой области; $u = x$, $v = y$ — декартовы координаты на плоскости; ось z ей ортогональна. Тогда $\vec{r} = \{x, y, 0\}$; $d\vec{r} = \{dx, dy, 0\}$. Пусть $z(x, y)$ — произвольная функция, C^1 -гладкая в $\mathcal{M}$ и непрерывная на $\mathcal{M} \cup \Gamma$. Рассмотрим векторное поле

$$\vec{\zeta} = \{0, 0, z(x, y)\}, \quad (18)$$

(рис. 178). Тогда $d\vec{\zeta} = \{0, 0, \zeta_x dx + \zeta_y dy\}$ и уравнение (16) удовлетворяется. Поэтому любое векторное поле вида (18) с указанной выше гладкостью является изгибающим полем для плоской поверхности $\mathcal{M}$.

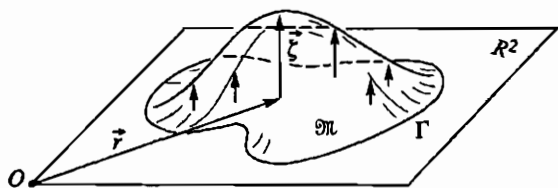


Рис. 178

Это геометрическое свойство используется в акустике применительно к мембранам. Дело в том, что на поле (18) можно наложить граничное условие

$$\vec{\zeta} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (19)$$

аналогичное тому, какое ставится в задаче Дирихле. Для плоской поверхности $\mathcal{M}$ оно означает закрепление ее по краю Γ . Благодаря наличию таких изгибающих полей, закрепленная по краю упругая мембрана может совершать колебания со значительной амплитудой.

2). Пусть поверхности S_1 и S_2 с уравнениями $\vec{X} = \vec{r}_i(u, v)$ ($i = 1, 2$) друг другу изометричны, и точки, соответствующие по изометрии, имеют одинаковые координаты (u, v) . Рассмотрим *среди́нную поверхность*

$$\vec{X} = \vec{r}(u, v), \quad \text{где} \quad \vec{r} = \frac{1}{2}(r_1(u, v) + r_2(u, v)), \quad (20)$$

и построим векторное поле

$$\vec{\zeta} = \vec{r}_2(u, v) - \vec{r}_1(u, v). \quad (21)$$

Тогда

$$d\vec{r} d\vec{\zeta} = \frac{1}{2} ((d\vec{r}_2)^2 - (d\vec{r}_1)^2) = \frac{1}{2}(ds_2^2 - ds_1^2) = 0, \quad (22)$$

так как $ds_1^2 = ds_2^2$ в силу изометрии. Выкладка (20)–(22) показывает, что каждой паре изометричных поверхностей S_1 и S_2 соответствует бесконечно малое изгибание их среди́нной поверхности.

§ 35. Диаграмма вращений

1°. Пусть есть векторные поля $\eta(u, v)$ и $\zeta(u, v)$ такие, что

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}_u &= [\vec{\eta} \times \vec{r}_u], \\ \vec{\zeta}_v &= [\vec{\eta} \times \vec{r}_v], \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{\chi} = \vec{r}(u, v)$ — уравнение некоторой поверхности S . Тогда

$$\begin{aligned} d\vec{r} d\vec{\zeta} &= (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \zeta_u du + \zeta_v dv) = \\ &= (\vec{r}_u, \vec{\eta}, \vec{r}_u) du^2 + (\vec{r}_v, \vec{\eta}, \vec{r}_v) dv^2 + ((\vec{r}_u, \vec{\eta}, \vec{r}_v) + \\ &\quad + (\vec{r}_v, \vec{\eta}, \vec{r}_u)) du dv = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

тождественно в силу свойств смешанного произведения.

Выкладка (2) показывает, что если (1) выполняется, то $\vec{\zeta}(u, v)$ является полем бесконечно малого изгибания поверхности S . В таком случае $\vec{\eta}(u, v)$ называется *полем вращений* этого бесконечно малого изгибания.

2°. Покажем, что у каждого бесконечно малого изгибания есть поле вращений. Для этого рассмотрим систему уравнений (15) предыдущего параграфа. Из первого уравнения этой системы следует, что $\vec{\zeta}_u \perp \vec{r}_u$, поэтому существует вектор-функция $\vec{y}_1(u, v)$ такая, что

$$\vec{\zeta}_u = [\vec{y}_1 \times \vec{r}_u]. \quad (3)$$

Аналогично, из 3-го уравнения системы (15) вытекает существования вектор-функции $\vec{y}_2(u, v)$ такой, что

$$\vec{\zeta}_v = [\vec{y}_2 \times \vec{r}_v]. \quad (4)$$

Выражения (3) и (4) подставим во второе уравнение системы (15) и преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{r}_u \vec{\zeta}_v + \vec{r}_v \vec{\zeta}_u = [\vec{y}_2 \times \vec{r}_v] \vec{r}_u + [\vec{y}_1 \times \vec{r}_u] \vec{r}_v = \\ &= (\vec{y}_2 - \vec{y}_1, \vec{r}_v, \vec{r}_u). \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует, что векторы $\vec{y}_2 - \vec{y}_1$, $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ компланарны. Но $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ линейно независимы, поэтому $\vec{y}_2 - \vec{y}_1$ по ним разлагается, т. е. существуют функции $\alpha_1(u, v)$ и $\alpha_2(u, v)$ такие, что

$$\vec{y}_2 - \vec{y}_1 = \alpha_1 \vec{r}_u + \alpha_2 \vec{r}_v. \quad (6)$$

Сделав в (6) перегруппировку, положим

$$\vec{y}_1 + \alpha_1 \vec{r}_u = \vec{\eta}(u, v) = \vec{y}_2 - \alpha_2 \vec{r}_v. \quad (7)$$

Из (7) и (3) находим, что

$$[\vec{\eta} \times \vec{r}_u] = [\vec{y}_1 \times \vec{r}_u] + \alpha_1 [\vec{r}_u \times \vec{r}_u] = \vec{\zeta}_u,$$

а из (7) и (4) — что

$$[\vec{\eta} \times \vec{r}_v] = [\vec{y}_2 \times \vec{r}_v] - \alpha_2 [\vec{r}_v \times \vec{r}_v] = \vec{\zeta}_v,$$

т. е. оба равенства (1) соблюдены.

Поверхность с уравнением $\vec{X} = \vec{\eta}(u, v)$ называется *диаграммой вращений* бесконечно малого изгибания $\vec{\zeta}$ (при соблюдении обоих равенств (1)).

Однако следует иметь в виду, что условие

$$\vec{\eta}_u \times \vec{\eta}_v \neq \vec{\theta} \quad (8)$$

может не соблюдаться (либо соблюдаться не при всех $(u, v) \in \mathcal{M}$), поэтому диаграмма вращений, вообще говоря, представляет собой поверхность в обобщенном понимании, о котором речь шла в пп. 4° и 7* в § 15.

3°. Если вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ дана и поле вращений $\vec{\eta}$ известно, то изгибающее поле $\vec{\zeta}$ вычисляется из (1) интегрированием полного дифференциала

$$\vec{\zeta} = \int d\vec{\zeta} = \vec{\zeta}_0 + \int [\vec{\eta} \times \vec{r}_u] du + [\vec{\eta} \times \vec{r}_v] dv, \quad (9)$$

где $\vec{\zeta}_0$ — постоянный вектор, имеющий смысл значения поля $\vec{\zeta}$ в произвольно выбираемой точке $(u_0, v_0) \in \mathcal{M}$, а интеграл (9) понимается как криволинейный, который берется по дуге, соединяющей в области $\mathcal{M}$ начальную точку (u_0, v_0) с текущей точкой (u, v) и не зависит от пути интегрирования (рис. 179).

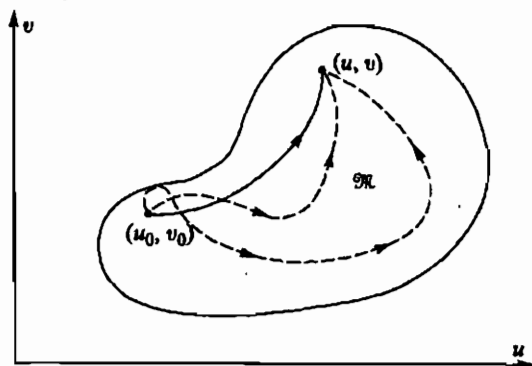


Рис. 179

4°. Введем обозначение для разности $\vec{\zeta} - [\vec{\eta} \times \vec{r}] = \vec{\sigma}$. Тогда

$$\vec{\zeta} = [\vec{\eta} \times \vec{r}] + \vec{\sigma}. \quad (10)$$

Векторное поле $\vec{\sigma}$ в (10) называется *полем смещений* для бесконечно малого изгибания $\vec{\zeta}$.

5°. Определение. Бесконечно малое изгибание называется *тривиальным*, если его поле вращений и поле смещений оба являются постоянными, т. е.

$$\vec{\zeta}(u, v) = [\vec{\eta}_0 \times \vec{r}(u, v)] + \vec{\sigma}_0, \quad (11)$$

где $\vec{\eta}_0$ и $\vec{\sigma}_0$ — постоянные векторы. В противном случае бесконечно малое изгибание называется *нетривиальным*.

Из (11) следует, что поля тривиальных бесконечно малых изгибаний поверхности S тоже образуют линейное пространство. Оно является подпространством в линейном пространстве всех изгибающих полей поверхности S . Из (11) видно также, что это подпространство 6-мерно, координатами в нем могут служить шесть чисел, независимых между собой: три координаты вектора $\vec{\eta}_0$ и три координаты вектора $\vec{\sigma}_0$.

6°. Для выяснения вопроса, является ли бесконечно малое изгибание тривиальным, бывает полезна следующая лемма.

Лемма 1. Если поле вращений постоянно ($\vec{\eta}(u, v) = \vec{\eta}_0$), то бесконечно малое изгибание тривиально.

Доказательство. В условиях леммы 1 равенства (1) принимают вид

$$\vec{\zeta}_u = [\vec{\eta}_0 \times \vec{r}_u], \quad \vec{\zeta}_v = [\vec{\eta}_0 \times \vec{r}_v], \quad (12)$$

а так как $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ является полным дифференциалом, то выражение $[\vec{\eta}_0 \times \vec{r}_u] du + [\vec{\eta}_0 \times \vec{r}_v] dv$ тоже представляет собой полный дифференциал и его можно проинтегрировать:

$$\vec{\zeta}(u, v) = \int [\vec{\eta}_0 \times \vec{r}_u] du + [\vec{\eta}_0 \times \vec{r}_v] dv = [\vec{\eta}_0 \times \vec{r}(u, v)] + \vec{\zeta}_0. \quad (13)$$

Интеграл в (13), так же как и в (9), нужно понимать как криволинейный, взятый по произвольной дуге, соединяющий в $\mathcal{M}$ начальную точку (u_0, v_0) с текущей точкой (u, v) см. рис. 179. В роли поля смещений в (13) выступает $\vec{\sigma}_0 = \vec{\zeta}_0 = \vec{\zeta}(u_0, v_0)$. В итоге (11) будет соблюдено.

7°. Продифференцируем первое из равенств (1) по v , а второе — по u ; тогда, приравняв смешанные производные, получим векторное дифференциальное уравнение для поля вращений

$$[\vec{\eta}_u \times \vec{r}_v] = [\vec{\eta}_v \times \vec{r}_u]. \quad (14)$$

Из того, что равенство (14) получено приравнованием смешанных производных ($\zeta_{uv} = \zeta_{vu}$), следует, что оно является условием интегрируемости для системы (1). Поэтому, если найдено какое-нибудь решение $\vec{\eta}$ системы (14), то согласно (9) по нему строится изгибающее поле $\vec{\zeta}$.

Из изложенного в пп. 5°–6° следует, что поле $\vec{\zeta}$ определяет тривиальное бесконечно малое изгибание тогда и только тогда, когда соответствующее ему решение уравнения (4) представляет собой постоянный вектор; такие решения уравнения (14) тоже естественно считать тривиальными.

Геометрический смысл тривиальности бесконечно малых изгибаний мы обсудим в следующем параграфе.

8°. Нам понадобится далее

Лемма 2. Пусть даны 6 чисел: a, b, c, x, y, z , такие, что

$$D = ac - b^2 > 0 \quad (15)$$

и

$$ax + 2by + cz = 0. \quad (16)$$

Тогда

$$\Delta = xz - y^2 \leq 0 \quad (17)$$

и при этом

$$xz - y^2 = 0 \quad \text{только если} \quad x = y = z = 0. \quad (18)$$

Доказательство. Если $xz < 0$, то $\Delta < 0$. Предположим, что

$$xz > 0. \quad (19)$$

Тогда x и z — одного знака. Воспользуемся тем, что (16) можно переписать в виде

$$-by = \frac{1}{2}(ax + cz). \quad (20)$$

Из (15) следует, что $ac > 0$, поэтому a и c тоже одного знака. При замене a, b, c на $(-a), (-b)$ и $(-c)$ и при замене x, y, z на $(-x), (-y)$ и $(-z)$, а также при одновременной смене знака у всех шести этих чисел равенства (16) и оба неравенства (15) и (17) не нарушаются. Поэтому можно считать, что $x > 0$ и $z > 0$, а также, что $a > 0$ и $c > 0$. Но тогда из (20) видно, что b и y имеют разные знаки.

Среднее арифметическое двух положительных чисел, находящихся в правой части в (20), заметим их средним геометрическим:

$$-by = \frac{1}{2}(ax + cz) \geq \sqrt{(ax)(cz)}, \quad (21)$$

а затем обе части неравенства (21) возведем в квадрат:

$$b^2 y^2 \geq (ac)(xz). \quad (22)$$

Из (15), (16) и (22) находим

$$0 < (xz) \cdot D = (ac)(xz) - b^2(xz) \leq b^2 y^2 - b^2(xz) = b^2(-\Delta). \quad (23)$$

Оценка (23) показывает, что $(-\Delta) > 0$, значит, $\Delta < 0$.

Остается рассмотреть, что будет, когда $xz = 0$. Эта ситуация распадается на два случая:

если $xz = 0$ и $y \neq 0$, то $\Delta < 0$;

и

если $xz = 0$ и $y = 0$, то $\Delta = 0$. (24)

Случай (24), в свою очередь, распадается на два подслучая:

1). $x = y = 0$. Тогда в (16) остается $cz = 0$. А так как $c > 0$ (см. выше), то $z = 0$.

2). $y = z = 0$. Тогда в (16) остается $ax = 0$, но у нас $a > 0$, поэтому $x = 0$.

Таким образом, (18) тоже доказано.

9°. Обсудим некоторые геометрические свойства диаграммы вращений. Введем удобные для этого обозначения. Считая, по-прежнему, что S задана вектор-функцией $\vec{r}(u, v)$ при $(u, v) \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$ и что на S дано изгибающее поле $\vec{\zeta} = \vec{\zeta}(u, v)$, рассмотрим соответствующее ему (согласно пп. 1°–4°) поле вращений $\vec{\eta}(u, v)$ и диаграмму вращений S_η , заданную в $\mathbb{R}^3$ уравнением $\vec{X} = \vec{\eta}(u, v)$. Естественным образом, по равенству координат (u, v) устанавливается отображение S на S_η , которым мы в дальнейшем неоднократно будем пользоваться.

Пусть выделена область $\mathcal{V} \subset \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$. Если на $\mathcal{V}$ соблюдено (8), то участок $\mathcal{V}_\eta$ на S_η , соответствующий $\mathcal{V}$, является поверхностью.

Пусть Q — точка на S , а P — касательная плоскость к S в этой точке; $\vec{n}$ — орт нормали к S в точке Q , образующий с $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ правую тройку; Q_η — соответствующая точка на S_η (т.е. с теми же координатами (u, v)) и P_η — касательная к S_η в точке Q_η (по-прежнему считаем, что (8) выполнено); $\vec{\eta}$ — орт нормали к S_η в точке Q_η , образующий правую тройку с $\vec{\eta}_u$ и $\vec{\eta}_v$, рис. 180.

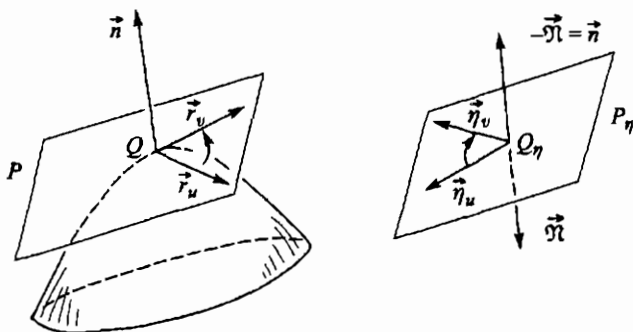


Рис. 180

Теорема 1. В каждой из тех точек (u, v) , где выполнено (8), касательные плоскости P и P_η параллельны.

Доказательство. Правую и левую части уравнения (14) умножим скалярно на $\vec{r}_u$. Затем правую и левую части этого же уравнения (14) скалярно умножим на $\vec{r}_v$. Сопоставив полученные результаты и еще раз используя (14), обнаружим, что

$$(\vec{\eta}_u, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = 0, \quad (\vec{\eta}_v, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = 0. \quad (25)$$

Вспомним, что касательная плоскость P «натянута» на векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, касательные к координатным линиям на S . Из (25) сразу следует, что $\vec{\eta}_u$ и $\vec{\eta}_v$ компланарны P . А так как по предположению выполнено (8), то $\vec{\eta}_u$ и $\vec{\eta}_v$ неколлинеарны, и плоскость P_η на них натянута. Отсюда ясно, что $P_\eta \parallel P$ (рис. 180).

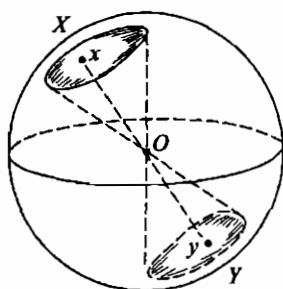


Рис. 181

10°. Пусть на сфере есть два множества точек X и Y таких, что между ними есть взаимно однозначное соответствие, устроенное так: для каждой точки $x \in X$ и соответствующей ей точки $y \in Y$ отрезок $[x, y]$ является диаметром сферы. Будем тогда говорить, что множества X и Y на сфере диаметрально противоположны (рис. 181). Этой же терминологией будем пользоваться и тогда, когда X и Y принадлежат двум поверхностям (либо одной поверхности, возможно имеющей самоналожение), носители которых расположены на одной сфере.

Теорема 2. Пусть Ω — область на S и Ω_η — соответствующая ей часть S_η и пусть в Ω выполнено (8). Тогда, если гауссова кривизна K поверхности S в Ω положительна, то сферические образы $\Phi(\Omega)$ и $\Phi(\Omega_\eta)$ диаметрально противоположны.

Доказательство. Если (8) соблюдено, то из (25) следует, что существуют четыре функции $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ аргументов (u, v) такие, что

$$\begin{aligned} \vec{\eta}_u &= \alpha \vec{r}_u + \beta \vec{r}_v, \\ \vec{\eta}_v &= \gamma \vec{r}_u + \delta \vec{r}_v, \end{aligned} \quad (26)$$

причем

$$\delta = -\alpha \quad (27)$$

вследствие (14).

Из (26), учитывая (27), находим

$$[\vec{\eta}_u \times \vec{\eta}_v] = [\vec{r}_u \times \vec{r}_v] \cdot \Delta, \quad (28)$$

где

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = \begin{vmatrix} -\beta & \alpha \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} \neq 0. \quad (29)$$

В (29) неравенство выполняется вследствие условия (8), которое, в свою очередь соблюдено по предположению. Из (28)–(29) имеем

$$\vec{n} = \frac{[\vec{\eta}_u \times \vec{\eta}_v]}{|\vec{\eta}_u \times \vec{\eta}_v|} = \frac{\Delta}{|\Delta|} \cdot \frac{[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \vec{n} \operatorname{sign} \Delta, \quad (30)$$

и нам важно выяснить знак определителя Δ . Из теоремы 1 следует, что $\vec{\eta}_u \perp \vec{n}$ и $\vec{\eta}_v \perp \vec{n}$, т. е.

$$(\vec{\eta}_u, \vec{n}) = 0 = (\vec{\eta}_v, \vec{n}). \quad (31)$$

Первое из равенств (31) продифференцируем по v , второе — по u ; будем иметь

$$(\vec{\eta}_{uv}, \vec{n}) + (\vec{\eta}_u, \vec{n}_v) = 0 \quad (32)$$

и

$$(\vec{\eta}_{vu}, \vec{n}) + (\vec{\eta}_v, \vec{n}_u) = 0. \quad (33)$$

Составим разность величин (32) и (33). Учитывая равенство смешанных производных, обнаружим, что

$$(\vec{\eta}_u, \vec{n}_v) - (\vec{\eta}_v, \vec{n}_u) = 0. \quad (34)$$

Первое из равенств (26) умножим скалярно на $\vec{n}_v$, второе — на $-\vec{n}_u$ и сложим их. С помощью (27) исключим δ , используем (34) и формулы (11) из § 11. В результате получим:

$$\gamma L + 2(-\alpha)M + (-\beta)N = 0, \quad (35)$$

где L , M , N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S . Так как по условию $K > 0$, то

$$LN - M^2 > 0. \quad (36)$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты α , β , γ и $\delta = -\alpha$ в (26) не могут одновременно обратиться в нуль, так как тогда нарушилось бы условие (8). Поэтому из (35), (36), (29) и леммы 2 имеем $\Delta < 0$, а потому из (30) следует, что $\vec{n}(u, v) = -\vec{n}(u, v)$; но это и означает, что $\Phi(\Omega)$ и $\Phi(\Omega_\eta)$ на гауссовой сфере диаметрально противоположны.

Теорема 3. Если $K > 0$ в области $\Omega \subset S$ и соблюдено условие (8), то на диаграмме вращений S_η в области $\Omega_\eta \subset S_\eta$ гауссова кривизна отрицательна.

Доказательство проводить не будем, а поясним лишь наглядную сторону дела. Если ввести понятие ориентированной площади (знак которой указывает направление обхода), то в формуле (41) из § 12 можно в левой части снять модуль: если гауссова кривизна положительна, то сферическое отображение сохраняет направление обхода, а если отрицательна — то меняет его на противоположное. В условиях теоремы 3 сферическое отображение поверхности S сохраняет направление обхода в силу положительности K . Рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2, показывают, что отображение $S \rightarrow S_\eta$ изменяет направление обхода на противоположное. Из условия (8) следует, что участок Ω_η диаграммы вращений S_η является поверхностью в обычном, а не в обобщенном понимании. При построении гауссова сферического отображения для Ω_η мы можем вместо $\vec{n}$ использовать орт нормали $(-\vec{n})$. От выбора направления нормали на поверхности знак ее гауссовой кривизны не зависит. Но можно увидеть (см. рис. 180), что при сферическом отображении $\Phi(\Omega_\eta)$ направление обхода изменится на противоположное. Эти соображения используются для доказательства отрицательности гауссовой кривизны K_η поверхности $\Omega_\eta \subset S_\eta$.

§ 36. Начальное поле скоростей деформации.

Связь бесконечно малых изгибаний с изгибаниями поверхности

1°. Посмотрим теперь на деформацию поверхности с другой точки зрения: будем следить не за изменением всей поверхности, а за перемещением в пространстве отдельных ее точек.

Произвольная точка исходной поверхности S , имеющая на ней координаты (u_0, v_0) , при деформации описывает в пространстве траекторию

$$\vec{r}(t) = \vec{x}(u_0, v_0, t). \quad (1)$$

Для наглядности будем считать, что параметр t на траектории (1) представляет собой время. Тогда мгновенная скорость $\vec{w}$ перемещающейся точки выразится как производная по t , т. е.

$$\vec{w} = \dot{\vec{x}}(u_0, v_0, t) = \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}. \quad (2)$$

Считая t и точку $(u, v) \in \mathfrak{M}$ переменными, получим векторное поле $\vec{w} = \vec{w}(u, v, t)$ в некоторой части пространства. Взяв в (2) $t = 0$, получим векторное поле $\vec{V}$, заданное в точках поверхности S :

$$\vec{w}(u, v, 0) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(u, v, 0) = \vec{V}(u, v). \quad (3)$$

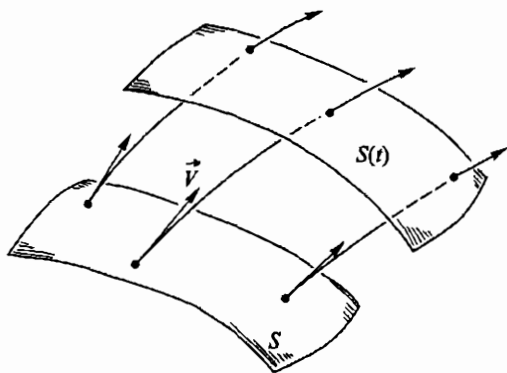


Рис. 182

Его называют *начальным полем скоростей рассматриваемой деформации* (см. рис. 182).

2°. Если $\vec{\zeta}$ — поле бесконечно малого изгибания, то его можно рассматривать как начальное поле скоростей специальной деформации, заданной формулой (17) из § 34.

В ближайших нескольких пунктах мы обсудим связь между изгибаниями (§ 19) и бесконечно малыми изгибаниями.

3°. Напомним факт (см. [45]), известный из кинематики (раздела теоретической механики, тесно связанного с геометрией): каждое перемещение твердого тела в пространстве можно представить как результат некоторого поворота и последующего параллельного переноса. Пусть $\vec{b}$ — вектор этого параллельного переноса. Пространственный поворот можно задать ортогональным преобразованием $\vec{y} = A\vec{x}$, где $\vec{x}$ — радиус-вектор начального положения произвольной точки X рассматриваемого твердого тела, $\vec{y}$ — радиус-вектор той же точки тела после поворота, A — ортогональная 3×3 -матрица. Поэтому, если $\vec{z}$ — радиус-вектор точки X после перемещения, то

$$\vec{z} = A\vec{x} + \vec{b}, \quad \det A = 1. \quad (4)$$

4°. В n^2 -мерном линейном пространстве $M_{(n)}$ квадратных $n \times n$ -матриц подмножество O_n^+ ортогональных $n \times n$ -матриц с определителем (+1) является связным и представляет собой гладкую поверхность размерности $k = C_n^2$ [45]. Пользуясь этим фактом применительно к $M_{(3)}$, в 9-мерном пространстве $M_{(3)}$ соединим единичную 3×3 -матрицу E с ортогональной матрицей A гладкой кривой, расположенной на трехмерной поверхности O_3^+ :

$$B = B(t) \in O_3^+, \quad B(0) = E, \quad B(1) = A. \quad (5)$$

Тогда перемещение (4) можно рассматривать как результат непрерывного движения

$$\vec{z}(t) = B(t) \vec{x} + t \vec{b}, \quad (6)$$

выполняемого за промежуток времени $0 \leq t \leq 1$. Скорость движения (6) выразится как

$$\vec{w}(t) = \dot{B}(t) \vec{x} + \vec{b}. \quad (7)$$

Будем теперь считать, что $\vec{x} = \vec{r}(u, v)$ — радиус-вектор точки на S . Тогда поверхность S будет включена в семейство

$$\vec{X}(u, v, t) = B(t) \vec{r}(u, v) + t \vec{b}. \quad (8)$$

При каждом t преобразование (5)–(6) является изометрией пространства; оно сохраняет все расстояния в пространстве, а вместе с тем и длины всех спрямляемых линий, в том числе расположенных на поверхности. Поэтому семейство (8) $\{S(t)\}$ представляет собой изгибание. Однако в силу проведенного построения поверхность $S(t)$ для каждого $t \in [0; 1)$ получается перемещением исходной поверхности S , поэтому изгибание (8) является тривиальным.

Продифференцируем (8) по t , а затем положим $t = 0$. Это даст нам выражение для начального поля скоростей

$$\vec{V}(u, v) = \dot{B}(0) \vec{r}(u, v) + \vec{b}. \quad (9)$$

5°. Нам понадобятся еще две леммы.

Лемма 1. У семейства матриц (5) производная $\dot{B}(0)$ является кососимметричной матрицей.

Доказательство. Верхним буквенным индексом « $\top$ » обозначим операцию транспонирования матрицы. Ортогональность матрицы $B = B(t)$ означает, что

$$\dot{B}(t) B(t)^\top = E \quad (10)$$

для каждого t . Нетрудно проверить, что производная по t произведения двух матриц вычисляется аналогично «обычной» производной произведения и что $(B(t)^\top)' = \dot{B}(t)^\top$, а производная по t любой постоянной матрицы равна нулевой матрице O . Поэтому из (10) находим

$$\dot{B}(t) B(t)^\top + B(t) \dot{B}(t)^\top = O. \quad (11)$$

Но

$$B(0) = E = B(0)^\top. \quad (12)$$

Поэтому из (11) и (12) следует, что $\dot{B}(0)^\top = -\dot{B}(0)$, а это и означает косую симметрию матрицы $\dot{B}(0)$.

Лемма 2. *Результат умножения произвольной кососимметричной 3×3 -матрицы Q на вектор-столбец $\vec{x}$ можно рассматривать как результат векторного умножения вектора $\vec{x}$ на некоторый вектор $\vec{q}$ (зависящий от матрицы Q).*

Доказательство. Пусть

$$\vec{y} = Q\vec{x}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Кососимметричная матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где a, b, c — некоторые числа. Обозначим $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ орты осей декартовых координат и положим

$$\vec{q} = (-c)\vec{i} + b\vec{j} + (-a)\vec{k}. \quad (15)$$

Тогда

$$\begin{aligned} [\vec{q} \times \vec{x}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -c & b & -a \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \\ &= (bx_3 + ax_2)\vec{i} - (ax_1 - cx_3)\vec{j} + (-cx_2 - bx_1)\vec{k} = \\ &= \begin{bmatrix} ax_2 + bx_3 \\ -ax_1 + cx_3 \\ -bx_1 - cx_2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Итак, (13)–(14) приводится к виду

$$Q\vec{x} = [\vec{q} \times \vec{x}], \quad (16)$$

что и требовалось.

6°. Теорема. *Начальное поле скоростей произвольного изгибания является полем бесконечно малого изгибания. У тривиального изгибания его начальное поле скоростей является полем тривиального бесконечно малого изгибания.*

Доказательство. Начнем с тривиального изгибания. Согласно рассмотрению, проведенному в п. 4°, его можно представить в виде (8), а его начальное поле скоростей $\vec{V}_0$ выражается формулой (9).

По лемме 1 из предыдущего пункта матрица $\dot{B}(0)$ кососимметрична; отсюда и из леммы 2 имеем

$$\vec{V}_0(u, v) = [\vec{q} \times \vec{r}(u, v)] + \vec{b}, \quad (17)$$

где $\vec{q}$ — постоянный вектор, который строится по матрице $\dot{B}(0)$ согласно (14)–(15); таким образом, соблюдено (11) из § 35 при $\vec{\eta}_0 = \vec{q}$, $\vec{\sigma}_0 = \vec{b}$, и бесконечно малое изгибание с полем $\vec{\zeta} = \vec{V}_0(u, v)$ тривиально.

Рассмотрим теперь какое-нибудь изгибание $S(t)$, считая, что оно задано формулами вида (1) из § 34. Те формулы, на которые нам предстоит сослаться далее в этом пункте, — тоже из § 34. Для изучаемого здесь изгибания его начальное поле скоростей запишем согласно (10):

$$\vec{V}(u, v) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}(u, v, 0) = \vec{\zeta}(u, v)$$

и повторим выкладки (11)–(14); с учетом (9) они показывают, что векторное поле $\vec{V}(u, v)$ удовлетворяет системе уравнений (16), а значит, оно является полем бесконечно малого изгибания.

Замечание. Мы не воспользовались тут леммой 1 из § 35 (хотя это можно было бы сделать, незначительно изменив ход рассуждений), так как вектор смещений ($\vec{\sigma} = \vec{b}$) вычислен здесь в явном виде.

7°. Имеет место утверждение, обратное по отношению ко второй части теоремы, сформулированной в предыдущем пункте, именно: для всякого тривиального бесконечно малого изгибания его изгибающее поле является полем скоростей некоторого движения.

Доказательство. Пусть для поверхности S выполнено равенство (11) из § 35. Поскольку это равенство векторное, оно выполняется при любом выборе декартовых координат. Выберем их так, чтобы

$$\vec{\eta}_0 = \omega \vec{e}_3, \quad \text{где } \omega = |\vec{\eta}_0| \quad (18)$$

($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — орты осей вспомогательных декартовых координат). Направляющие косинусы вектора смещений $\vec{\sigma}_0$ обозначим $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, и тогда $\vec{\sigma}_0$ запишется в виде

$$\vec{\sigma}_0 = (v \cos \alpha) \vec{e}_1 + (v \cos \beta) \vec{e}_2 + (v \cos \gamma) \vec{e}_3, \quad \text{где } v = |\vec{\sigma}_0|. \quad (19)$$

Подставив (18) и (19) в формулу (11) из § 35, получим

$$\vec{\zeta} = (v \cos \alpha - \omega y) \vec{e}_1 + (v \cos \beta + \omega x) \vec{e}_2 + (v \cos \gamma) \vec{e}_3. \quad (20)$$

Рассмотрим движение, состоящее из параллельного перемещения со скоростью v в направлении вектора $\vec{\sigma}_0$ и вращения с угловой ско-

ростью ω вокруг вектора $\vec{e}_3$. При таком движении точка, которая в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ первоначально имела координаты (x, y, z) , за время t перейдет в точку с координатами $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x \cos \omega t - y \sin \omega t + (v \cos \alpha) t, \\ \tilde{y}(t) &= x \sin \omega t + y \cos \omega t + (v \cos \beta) t, \\ \tilde{z}(t) &= (v \cos \gamma) t,\end{aligned}\quad (21)$$

(см. рис. 183, где показан поворот на угол ωt в плоскости, натянутой на векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$).

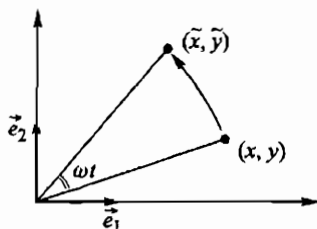


Рис. 183

Выражения (21) справедливы для всех точек пространства, в том числе и для расположенных на поверхности S_0 . Взяв производную по t от выражений (21), а затем положив $t = 0$, получим (20), что и требуется.

§ 37. Понятие о жесткости поверхностей

1°. Определение. Поверхность S (возможно, рассматриваемая при каких-либо условиях закрепления) называется *жесткой*, если она не допускает никаких бесконечно малых изгибаний, кроме тривиальных.

В противном случае поверхность называется *нежесткой*.

Пример. Область на плоскости, закрепленная по краю, является нежесткой (в этой связи см. выше пример 1 из п. 5° в § 34).

Из леммы 1 (§ 35, п. 6°) вытекает

Достаточный признак жесткости: если для любого бесконечно малого изгибания поверхности S его поле вращений на S постоянно, то поверхность S является жесткой.

Этот признак является не только достаточным, но и необходимым, и потому его можно перефразировать так: *поверхность является жесткой тогда и только тогда, когда составленное для нее уравнение для поля вращений имеет только тривиальное решение* (см. (14) в § 35).

2°. Напомним известное большинству читателей

Определение 1. Множество точек (на плоскости, в пространстве или вообще в любом линейном пространстве) называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно целиком содержит прямолинейный отрезок, соединяющий эти точки.

Замечание. Множество, состоящее из одной точки, тоже условно считаться выпуклым.

Определение 2. Поверхность называется *выпуклой*, если она представляет собой границу или часть границы выпуклого тела.

Хорошо известными примерами выпуклых поверхностей служат сфера, полусфера, эллипсоид, поверхность куба.

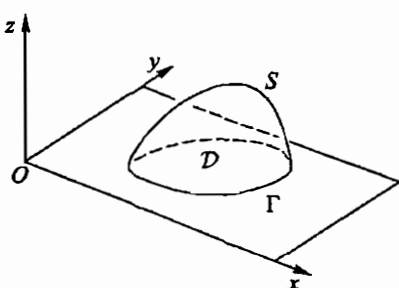


Рис. 184

3°. Часть выпуклой поверхности, отсеченная плоскостью, называется *выпуклой шапочкой*.

Будем считать, что плоскость, ограничивающая шапочку S , является координатной плоскостью $z = 0$. Край Γ этой шапочки представляет собой замкнутую выпуклую кривую (рис. 184)

Мы скажем, что шапочка S опирается своим краем на плоскость Π , если для точек ее края

$\Gamma \subset \Pi$ при деформациях запрещены перемещения в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Математически это выражается в виде условия (19) из § 34.

4°. **Теорема.** Пусть поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$ при $(x, y) \in \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ — ограниченная выпуклая область на плоскости xy , имеющая границу Γ , причём $f|_{\Gamma} = 0$ (так что Γ служит общим краем и для $\mathcal{D}$, и для S). Тогда, если гауссова кривизна поверхности S положительна ($K > 0$), то поверхность S является выпуклой.

Доказательство опускаем. Отметим только, что оно проводится специфическими методами теории выпуклых поверхностей, развитыми А. Д. Александровым и А. В. Погореловым [2, 92].

5°. **Теорема.** Выпуклая шапочка вида $z = f(x, y)$ с краем Γ в плоскости $z = 0$, своим краем опирающаяся на эту плоскость и имеющая положительную гауссову кривизну, является жесткой.

Доказательство, которое проходит в предположении C^3 -гладкости шапочки, изложено ниже, в п. 8°. По поводу шапочек меньшей гладкости см. [92].

6°. Систему уравнений бесконечно малых изгибаний (см. (15) в § 34) запишем для поверхности вида $z = z(x, y)$. Для нее

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} + z(x, y) \vec{k} \quad (1)$$

и

$$\vec{\zeta} = \xi_1(x, y) \vec{i} + \xi_2(x, y) \vec{j} + \lambda(x, y) \vec{k} \quad (2)$$

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты координатных осей). Для производных функции $z(x, y)$ будем использовать обозначения Монжа

$$z_x = p, \quad z_y = q, \quad z_{xx} = r, \quad z_{xy} = s, \quad z_{yy} = t. \quad (3)$$

Попутно отметим, что λ называется *вертикальной компонентой* поля $\vec{\zeta}$ (см. (2)).

В обозначениях (1)–(3) система уравнений бесконечно малых изгибаний запишется так:

$$\left. \begin{aligned} (\xi_1)_x + p\lambda_x &= 0, \\ (\xi_1)_y + (\xi_2)_x + q\lambda_x + p\lambda_y &= 0, \\ (\xi_2)_y + q\lambda_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если и поверхность S , и поле $\vec{\zeta}$ являются C^3 -гладкими, то из системы уравнений (4) можно исключить ξ_1 и ξ_2 . Останется одно линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка для вертикальной компоненты λ . Покажем, как это сделать.

Первое из уравнений системы (4) продифференцируем по y :

$$(\xi_1)_{xy} + s\lambda_x + p\lambda_{xy} = 0, \quad (5)$$

а третье — по x :

$$(\xi_2)_{xy} + s\lambda_y + q\lambda_{xy} = 0. \quad (6)$$

Полученные равенства (5) и (6) будут использованы ниже. Второе из уравнений системы (4) позволяет ввести вспомогательную функцию Ψ , определив ее так:

$$\Psi = (\xi_2)_x + p\lambda_y = -(\xi_1)_y - q\lambda_x. \quad (7)$$

Взяв второе из выражений (7) для Ψ , найдем

$$\Psi_x = -(\xi_1)_{xy} - s\lambda_x - q\lambda_{xx}. \quad (8)$$

Из (5) выразим произведение $s\lambda_x$ и подставим его в (8). Получим

$$\Psi_x = p\lambda_{xy} - q\lambda_{xx}. \quad (9)$$

Аналогично, используя первое из выражений (7) для Ψ и равенство (6), найдем

$$\Psi_y = -q\lambda_{xy} + p\lambda_{yy}. \quad (10)$$

Теперь двумя способами — из (9) и из (10) — найдем смешанные производные и приравняем их ($\Psi_{yx} = \Psi_{xy}$); в результате для λ получится искомое уравнение

$$t\lambda_{xx} - 2s\lambda_{xy} + r\lambda_{yy} = 0. \quad (11)$$

Попутно отметим, что известная теорема математического анализа о равенстве смешанных производных использована в этих выкладках многократно.

7°. Из уравнения (11) и леммы 2 из п. 8° в § 35 вытекает

Следствие. Пусть у поверхности $z = f(x, y)$ ее гауссова кривизна положительна. Тогда для каждого изгибающего поля этой поверхности график его вертикальной компоненты $z = \lambda(x, y)$ имеет неположительную гауссову кривизну.

8°. Переходим к доказательству теоремы, сформулированной в п. 5°. В условиях этой теоремы

$$\lambda(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad (12)$$

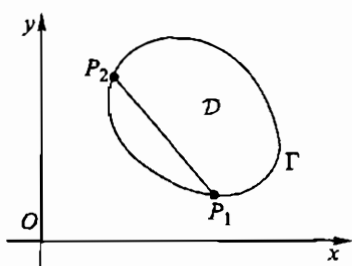


Рис. 185

что совпадает с (19) из § 34; условие (12) не запрещает шапочке S скользить по плоскости $z = 0$ в процессе деформации. Искусственно исключим такие движения (повороты и параллельные переносы), закрепив на Γ две точки P_1 и P_2 , причем выберем их так, чтобы отрезок P_1P_2 был не параллелен координатным осям (рис. 185); это можно сделать благодаря выпуклости области, ограниченной линией Γ . Та-

кое добавочное закрепление исключит из рассмотрения тривиальные бесконечно малые изгибания.

Область на плоскости $z = 0$, ограниченную линией Γ , обозначим $\mathcal{D}$. Так как $K > 0$ на шапочке S , и шапочка компактна, имеем

$$rt - s^2 \geq \text{const} > 0 \quad \text{в } \mathcal{D} \quad (13)$$

(в этой связи см. формулу (30) в § 12).

Неравенство (13) представляет собой хорошо известное в теории уравнений с частными производными [70] условие строгой эллиптичности, записанное для уравнения (11). Оно гарантирует, что задача (11)–(12) имеет только нулевое решение:

$$\lambda(x, y) = 0 \quad \text{при } (x, y) \in \mathcal{D}. \quad (14)$$

Это — ключевое место в доказательстве; остальная часть доказательства — дело несложной техники, но мы доведем его до конца. Отметим попутно следующее: тот факт, что из (11) и (12) вытекает (14), можно вывести из следствия, сформулированного в п. 7°.

После этих замечаний переходим к завершающей части доказательства теоремы. Из (14) и первого из уравнений (4) следует, что $\xi_1 = \xi_1(y)$. Кроме того, из (14) и третьего из уравнений (4) следует, что $\xi_2 = \xi_2(x)$. Отсюда, тоже с учетом (14), видим, что второе из уравнений (4) принимает вид

$$\xi_1'(y) = -\xi_2'(x) \quad \text{при всех } (x, y) \in \mathcal{D}. \quad (15)$$

Из (15) по лемме Фурье следует, что

$$\xi_1'(y) = \lambda = -\xi_2'(x); \quad \lambda = \text{const}. \quad (16)$$

Проинтегрировав равенства (16), получим

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda y + \lambda_1, \\ \xi_2 &= -\lambda x + \lambda_2, \end{aligned} \quad (17)$$

где λ_1 и λ_2 — некоторые постоянные. Используем теперь добавочные условия закрепления точек P_1 и P_2 . Пусть (x_i, y_i) ($i = 1, 2$) — их координаты. Равенство $\vec{\zeta}(P_i) = 0$ применительно к (17) дает

$$\left. \begin{aligned} -\lambda x_1 + \lambda_2 &= 0, \\ \lambda y_1 + \lambda_1 &= 0, \\ -\lambda x_2 + \lambda_2 &= 0, \\ \lambda y_2 + \lambda_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

причем $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ в силу выбора точек P_1 (рис. 185). Однородная система линейных уравнений (18) с тремя неизвестными: λ , λ_1 и λ_2 — имеет ранг три, и потому у нее есть только тривиальное решение

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \quad (19)$$

Собирая вместе (14), (17) и (19), видим, что $\vec{\zeta}(x, y) = 0$ всюду в $\mathcal{D}$. Таким образом, после того, как мы исключили тривиальные бесконечно малые изгибания, оказалось, что никаких других ненулевых изгибающих полей нет, а это и означает жесткость.

9°. В качестве еще одного примера применения уравнения (11) и системы (4) рассмотрим цилиндрическую поверхность

$$z = f(x), \quad x \geq 0, \quad f''(x) \neq 0. \quad (20)$$

Ее образующие параллельны оси y . Последнее из неравенств (20) означает выпуклость ее направляющей.

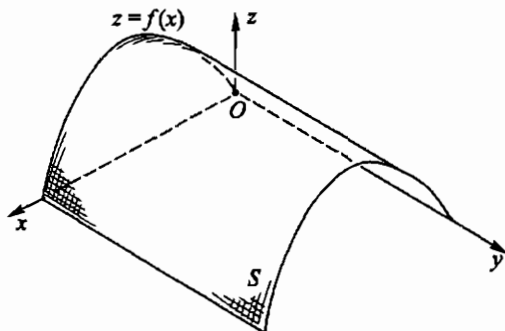


Рис. 186

Начало отсчета по оси z удобно выбрать так, чтобы было $f(0) = 0$ (рис. 186).

Поверхность (20) изгибаема. Ниже мы увидим, что она является нежесткой и остается нежесткой даже, если закрепить одну из ее прямолинейных образующих, например, расположенную на оси y . Покажем, что уравнения (4) и (11) позволяют найти в квадратурах все бесконечно малые изгибания поверхности (20), и выделим из них тривиальные.

В обозначениях (3) для поверхности (20) имеем

$$f'(x) = p, \quad f''(x) = r \neq 0; \quad q = s = t = 0, \quad (21)$$

так что от уравнения (11) остается $\Delta_{yy} = 0$, а последнее из уравнений системы (4) принимает вид $(\xi_2)_y = 0$. Поэтому

$$\xi_2 = H_1(x) + H_2(x)y \quad (22)$$

и

$$\xi_2 = H_3(x), \quad (23)$$

где $H_j(x)$ пока произвольные функции. Введем обозначения для их производных:

$$H'_j(x) = h_j(x) \quad (j = 1, 2, 3). \quad (24)$$

Выражения (21)–(24) подставим в первые два уравнения системы (4). Они примут вид

$$\begin{aligned} (\xi_1)_x &= -p(x)h_1(x) - p(x)h_2(x)y, \\ (\xi_1)_y &= -h_3(x) - p(x)H_2(x). \end{aligned} \quad (25)$$

Приравняв смешанные производные $((\xi_1)_{xy} = (\xi_1)_{yx})$, получим для системы (25) условие интегрируемости

$$h'_3(x) = -r(x)H_2(x). \quad (26)$$

Если (26) соблюдено, то используя (23), (24), (26) и правило интегрирования по частям находим $h_3(x)$, $H_3(x)$ и ξ_2 . После этого ξ_1 вычисляется из (25) интегрированием полного дифференциала ($\xi_1 = \int d\xi_1$). В результате приходим к системе (27):

$$\begin{aligned}\xi_1 &= c_1 - \int_0^x p(\mu) h_1(\mu) d\mu - c_2 y - y \int_0^x p(\mu) h_2(\mu) d\mu, \\ \xi_2 &= c_2 x + c_3 - \int_0^x p(\mu) H_2(\mu) d\mu + \int_0^x d\lambda \int_0^\lambda p(\mu) h_2(\mu) d\mu, \\ z &= H_1(x) + H_2(x)y.\end{aligned}\quad (27)$$

Тем самым найдены все бесконечно малые изгибания поверхности (20).

Формулы (27) содержат три постоянных интегрирования c_j и две произвольных функции одного аргумента $H_1(x)$ и $H_2(x)$. Наложим ограничения на их производные, попутно выделив еще три постоянных. Именно, положим

$$h_1(x) = c_0, \quad h_2(x) = 0, \quad H_1(0) = c_4, \quad H_2(0) = c_5. \quad (28)$$

Тогда

$$H_1(x) = c_0 x + c_4, \quad H_2(x) = c_5, \quad (29)$$

а так как $\int_0^x p(\mu) d\mu = f(x) = z$, то, подставив (28)–(29) в (27), получим

$$\vec{\zeta} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 y - c_0 z \\ c_3 + c_2 x - c_5 z \\ c_4 + c_0 x + c_5 y \end{bmatrix} = \vec{\sigma}_0 + [\vec{\eta}_0 \times \vec{r}], \quad (30)$$

где $\vec{\eta}_0 = \begin{bmatrix} c_5 \\ -c_0 \\ c_2 \end{bmatrix}$, $\vec{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$, $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Каждое из бесконечно малых изгибаний, выражаемых формулами (30), является тривиальным. Шесть постоянных c_j могут выбираться независимо друг от друга, поэтому формулы (30) исчерпывают собой всё 6-мерное линейное пространство тривиальных бесконечно малых изгибаний поверхности (20). Все остальные ее бесконечно малые изгибания являются нетривиальными.

10°. **Пример.** Обозначим $\int_0^x f(\mu) d\mu = F(x)$. Возьмем $H_1(x) = x^2$, а все $c_j = 0$ ($j = 0, \dots, 5$) и $H_2(x) = 0$ тождественно. Тогда по формулам (24) и (27)–(28) получим бесконечно малое изгибание $\vec{\zeta}$ с компонентами

$$\xi_1 = 2F(x) - 2xz, \quad \xi_2 = 0, \quad z = x^2, \quad (31)$$

которое заведомо является нетривиальным, так как не входит в множество (30).

Векторное поле (31) удовлетворяет условию: $\vec{\zeta} = \vec{\theta}$ при $x = 0$; это условие означает, что у поверхности (20) закреплена ее прямолинейная образующая, идущая по оси y . Построенный пример показывает, что при таком закреплении поверхность (20) оказывается нежесткой.

С другой стороны, если поверхность (20) закрепить иначе: так, чтобы стали невозможными вертикальные перемещения ее точек на двух ее параллельных направляющих, расположенных в плоскостях $y = y_1$ и $y = y_2 \neq y_1$, то поверхность окажется жесткой.

В самом деле, тогда из последней строчки равенств (27) следует, что $H_1(x) = H_2(x) = 0$ тождественно, и останутся лишь тривиальные бесконечно малые изгибания — параллельные переносы и повороты в плоскости (x, y) .

11*. Геометрическая жесткость поверхности и физическая жесткость оболочки, изготовленной в виде такой поверхности, между собой не тождественны.

Пример. Представим себе тонкий купол, который изготовлен в виде выпуклой шапочки S положительной гауссовой кривизны K с закрепленным плоским краем Γ . Пренебрегая толщиной купола, мы можем рассматривать Γ как линию на плоскости, ограничивающую выпуклую область $\mathcal{D}$ — проекцию поверхности S на плоскость; будем считать эту плоскость координатной ($z = 0$).

Предположим, что S задана уравнением $z = f(x, y)$ и наряду с ней рассмотрим семейство поверхностей $\{S_\lambda\}$:

$$z = \lambda f(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}.$$

При $\lambda > 0$ все они являются выпуклыми шапочками с плоским краем Γ (считаем по-прежнему, что он закреплен), причем $S_1 = S$, а $S_0 = \mathcal{D}$.

Исходя из интуитивно-наглядных представлений можно было бы ожидать, что если мы представим себе семейство куполов, изготовленных в виде поверхностей S_λ , то с изменением λ их механические свойства должны меняться непрерывно.

Между тем, по теореме п. 5° при $\lambda > 0$ все поверхности S_λ являются жесткими, тогда как $S_0 = \mathcal{D}$ — нежесткая (см. п. 5° в § 34).

Однако, если вдуматься, то станет ясно, что для геометрического свойства (жесткость — не жесткость) нет оснований ожидать непрерывной зависимости его от параметра: речь идет о количестве решений системы уравнений бесконечно малых изгибаний, а при изменении параметра количество решений дифференциального уравнения если меняется, то скачком; различные эффекты, с этим связанные, описаны в [12].

Пример семейства $\{S_\lambda\}$ подчеркивает не тождественность понятий геометрической жесткости поверхности и физической жесткости оболочки. Вопрос о взаимоотношении этих понятий специально обсуждался в литературе (см., например, [30] и [37]), но, по-видимому, его нельзя считать до конца решенным.

12°. В добавление к сказанному в предисловии и в п. 1° из § 34 отметим, что между геометрической теорией бесконечно малых изгибов и жесткости поверхностей с одной стороны и механикой тонких упругих оболочек с другой имеются более глубокие количественные связи. Они проявляются, в частности, в том, что рассмотренная в этом параграфе система уравнений бесконечно малых изгибов при подходящей замене обозначений превращается в систему уравнений безмоментной теории оболочек [26, 36, 107], которая играет важную роль в инженерных расчетах. Специалисты по теории оболочек говорят: «Грамотно сконструированная оболочка должна быть неизгибаемой и жесткой». Это не относится, однако, к так называемым мягким оболочкам и гибким оболочкам, тоже приобретающим все более широкое распространение в современной технике [1, 55, 103].

13°. В заключение параграфа обсудим геометрический смысл функции Ψ , которая была введена формулой (7), а также связанные с этим вопросы. Прежде всего, покажем, что векторное поле

$$\vec{\eta}(x, y) = z_y \vec{i} - z_x \vec{j} + \Psi \vec{k} \quad (32)$$

является полем вращений для бесконечно малого изгиба (2) поверхности $z = f(x, y)$. В самом деле, из (1) в обозначениях (3) имеем

$$\vec{r}_x = \vec{i} + p \vec{k}, \quad \vec{r}_y = \vec{j} + q \vec{k}. \quad (33)$$

В уравнении (14) из § 35 перенесем оба векторных произведения в одну часть равенства, заменим в нем символы u, v на x, y и подставим туда (32) и (33), а затем вычислим левую часть:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ z_{yx} & -z_{xx} & \Psi_x \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ z_{yy} & -z_{xy} & \Psi_y \\ 1 & 0 & p \end{vmatrix} = \\ = (-\Psi_x - qz_{xx} + pz_{xy}) \vec{i} + (-qz_{xy} + pz_{yy} - \Psi_y) \vec{j} + (z_{yx} - z_{xy}) \vec{k} = \vec{\theta}. \quad (34)$$

Скобки при $\vec{i}$ и при $\vec{j}$ в (34) обращаются в нуль в силу равенств (9) и (10) соответственно; равенство нулю скобки при $\vec{k}$ очевидно.

Теорема. *Поле вращений $\vec{\eta}$, построенное для поверхности $z = f(x, y)$, является постоянным тогда и только тогда, когда*

$$z = ax + by + c \quad (35)$$

при постоянных a, b и c .

Доказательство. Сначала предположим, что соблюдено (35). Тогда из (9) и (10) следует, что $\Psi = \text{const} = \Psi_0$, а выражение (32) принимает вид

$$\vec{\eta} = b \vec{i} - a \vec{j} + \Psi_0 \vec{k}. \quad (36)$$

Пусть теперь известно, что η — постоянный вектор. В соответствии с (36) обозначим его координаты $\{b, -a, \Psi_0\}$. Отсюда и из (32) имеем

$$z_x = a, \quad z_y = b. \quad (37)$$

Из (37) следует, что (35) соблюдается при некотором $c = \text{const}$.

Пример. Если выполнено (29), то выражение (22) принимает вид (35) при $a = c_0$, $b = c_5$ и $c = c_4$. Поэтому тривиальность бесконечно малого изгибания (27) при условиях (28) следует из теоремы, доказанной в данном пункте, и леммы 1 из п. 6° в § 35.

14°. Теперь мы можем другим, более простым способом, провести завершающий этап доказательства теоремы о жесткости шапочки.

Именно, после того, как применительно к области D получено равенство (14), обратим внимание на то, что оно является частным случаем для (35) при $a = b = 0$. Поэтому остается только сослаться на теорему, доказанную в предыдущем пункте, и на признак жесткости, сформулированный в начале этого параграфа в п. 1°.

§ 38*. Бесконечно малые изгибания поверхностей вращения

1°. Поверхности вращения и их фрагменты играют важную роль в технике, в различных конструкциях, а потому в механике оболочек они являются отдельным объектом исследований [9, 10, 74, 89]. В геометрии изучение бесконечно малых изгибаний и жесткости поверхностей вращения тоже имеет свою специфику. Посвятим им отдельный параграф.

2°. Пусть вокруг оси u вращается график функции $r(u) > 0$. Обозначим через $\vec{m}$ орт оси вращения, и пусть $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — взаимно перпендикулярные орты в плоскости, ортогональной $\vec{m}$. Положим

$$\vec{a}(\varphi) = \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi, \quad (1)$$

см. рис. 187. Тогда уравнение поверхности вращения запишется так:

$$\vec{r}(u, \varphi) = u \vec{m} + r(u) \vec{a}(\varphi). \quad (2)$$

Нам понадобятся еще

$$\vec{a}^* = \vec{a}'(\varphi) = -\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi \quad (3)$$

и

$$\vec{a}''(\varphi) = -\vec{a}(\varphi) \quad (4)$$

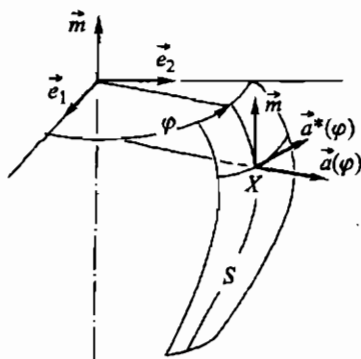


Рис. 187

(штрихом, как обычно, обозначаем производную функции одного аргумента). Нетрудно видеть, что $\vec{m}$, $\vec{a}(\varphi)$ и $\vec{a}^*(\varphi)$ при каждом φ образуют ортонормированную тройку (рис. 187), правую, если правой является тройка $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{m}$.

Изгибающее поле будем искать в виде

$$\vec{\zeta} = \xi(u, \varphi) \vec{m} + \psi(u, \varphi) \vec{a}(\varphi) + \chi(u, \varphi) \vec{a}'(\varphi). \quad (5)$$

Все три функции ξ , ψ , χ являются 2π -периодическими по φ , и их удобно разложить в тригонометрические ряды Фурье, используя показательную форму записи

$$\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{in\varphi}, \quad \psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n e^{in\varphi}, \quad \chi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n e^{in\varphi}. \quad (6)$$

Коэффициенты ξ_n , ψ_n , χ_n рядов (6) являются функциями одного аргумента u , но, вообще говоря, они комплекснозначны. Условие действительности функций ξ , ψ , χ выглядит так:

$$\xi_{-n} = \bar{\xi}_n, \quad \psi_{-n} = \bar{\psi}_n, \quad \chi_{-n} = \bar{\chi}_n \quad (\forall n). \quad (7)$$

Продифференцировав (2) и (5) с учетом (3), (4) и (6) и составив нужные скалярные произведения, увидим, что система (15) из § 34 примет вид

$$\begin{aligned} \xi_u + r'(u)\psi_u &= 0, \\ \xi_\varphi + r'(u)\psi_\varphi + r(u)\chi_u - r'(u)\chi &= 0, \\ \chi_\varphi + \psi &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Действуя так, как это делается в методе Фурье [113], подставим в (8) разложения (6) и получим для каждого номера n систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \xi'_n + r'\psi'_n &= 0, \\ r\chi'_n + in\xi_n + inr'\psi_n - r'\chi_n &= 0, \\ \psi_n + in\chi_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из (9) можно исключить ξ_n и ψ_n . Для этого, прежде всего, подставим выражение ψ_n из третьего уравнения системы (9) во второе:

$$r\chi'_n + in\xi_n + (n^2 - 1)r'\chi_n = 0. \quad (10)$$

Затем продифференцируем третье из уравнений системы (9):

$$\psi'_n = -in\chi'_n \quad (11)$$

и подставим (11) в первое уравнение системы (9):

$$\xi'_n = inr'\chi'_n. \quad (12)$$

После этого продифференцируем (10):

$$r'\chi'_n + r\chi''_n + in\xi'_n + (n^2 - 1)(r''\chi_n + r'\chi'_n) = 0 \quad (13)$$

и в (13) подставим выражение (12). После приведения подобных членов останется

$$r(u)\chi''_n + (n^2 - 1)r''(u)\chi_n = 0. \quad (14)$$

Если решения уравнений (14) найдены, то ψ_n сразу выразятся из третьего уравнения системы (9), а ξ_n получатся из (12) интегрированием, после чего можно выписать

$$\begin{aligned} \vec{\zeta} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{\zeta}_n(u, \varphi) e^{in\varphi} = \vec{\zeta}_0(u, v) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\vec{\zeta}_n e^{in\varphi} + \vec{\zeta}_{-n} e^{-in\varphi}) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\xi_n(u) \vec{m} + \psi_n(u) \vec{a}(\varphi) + \chi_n(u) \vec{a}'(\varphi)) e^{in\varphi}. \end{aligned} \quad (15)$$

Обращаясь еще раз к выкладкам, проведенным в этом пункте, можно заметить, что в бесконечной сумме (15) слагаемое $\vec{\zeta}_0(u, v)$ и каждая из сумм $(\vec{\zeta}_n e^{in\varphi} + \vec{\zeta}_{-n} e^{-in\varphi})$, взятые по отдельности, при соблюдении условия (7) представляют собой изгибающие поля поверхности (2).

3°. При $n = 0$ в системе (9) третье из уравнений сразу дает $\psi_0(u) = 0$, из первого находим $\xi_0(u) = b_1 = \text{const}$, а второе превращается в уравнение с разделяющимися переменными, интегрированием которого получим $\chi_0(u) = b_2 r(u)$. Из (7), использованного при $n = 0$, видим, что постоянные интегрирования b_1 и b_2 должны быть действительными. Таким образом,

$$\vec{\zeta}_0(u, \varphi) = b_1 \vec{m} + b_2 r(u) \vec{a}'(\varphi). \quad (16)$$

Используя (1), (2) и (3), можно выражение (16) преобразовать к виду

$$\vec{\zeta}_0(u, \varphi) = b_1 \vec{m} + b_2 [\vec{m} \times \vec{r}'(u, \varphi)]. \quad (17)$$

Формула (17) показывает, что бесконечно малое изгибание $\vec{\zeta}_0$ является тривиальным: его поле вращений есть $\vec{\eta}_0 = b_2 \vec{m}$, а поле смещений $\vec{\sigma}_0 = b_1 \vec{m}$.

4°. Рассмотрим $n = \pm 1$. Теперь удобно начать с уравнения (14), которое принимает здесь вид $\chi''_1 = 0$ и показывает, что χ_1 линейно:

$$\chi_1 = c_1 u + c_2. \quad (18)$$

После этого (12) дает

$$\xi_1 = ic_1 r(u) + c_3. \quad (19)$$

а из последнего из уравнений (9) получаем

$$\psi_1 = -ic_1 u - ic_2. \quad (20)$$

Однако мы здесь скомбинировали два уравнения из системы (9) с уравнением (14), которое получено из (9) дифференцированием, поэтому среди постоянных интегрирования могут оказаться лишние. Чтобы выяснить это, подставим (18), (19) и (20) во второе из уравнений системы (9) — то, которое еще не было использовано, — и обнаружим, что $c_3 = 0$. Итак,

$$\xi_1 = ic_1 r(u), \quad \psi_1 = -ic_1 u - ic_2, \quad (21)$$

причем постоянные c_j нужно считать комплексными:

$$c_j = \lambda_j + i\mu_j. \quad (22)$$

Переход от $n = +1$ к $n = -1$ согласно (7) осуществляется посредством комплексного сопряжения. Учитывая это, вычислим сумму $\vec{\zeta}_{+1}e^{i\varphi} + \vec{\zeta}_{-1}e^{-i\varphi}$. Предварительно введем вспомогательные векторы

$$\vec{\eta}_1 = 2(\mu_1 \vec{e}_2 - \lambda_1 \vec{e}_1), \quad \text{и} \quad \vec{\sigma}_1 = 2(\mu_2 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2). \quad (23)$$

Воспользовавшись выражениями (18), (21), (22) и (1)–(3), после надлежащей группировки обнаружим, что

$$\vec{\zeta}_{+1}e^{i\varphi} + \vec{\zeta}_{-1}e^{-i\varphi} = [\vec{\eta}_1 \times \vec{r}(u, v)] + \vec{\sigma}_1. \quad (24)$$

Формулы (23)–(24) показывают, что изгибающее поле $\vec{\zeta}_{+1}e^{i\varphi} + \vec{\zeta}_{-1}e^{-i\varphi}$ тоже задает тривиальное бесконечно малое изгибание.

5°. Вычисления, проделанные в предыдущих пунктах, позволяют сделать важный вывод: сумма

$$\vec{\zeta}_{-1}e^{-i\varphi} + \vec{\zeta}_0 + \vec{\zeta}_{+1}e^{i\varphi} \quad (25)$$

содержит 6 действительных постоянных: $b_1, b_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ и μ_2 , которые могут быть выбраны независимо друг от друга. Поэтому изгибающие поля (25) образуют 6-мерное действительное линейное пространство. Согласно п. 5° из § 35 это означает, что изгибающие поля (25) с перечисленными выше параметрами исчерпывают собой все тривиальные бесконечно малые изгибания поверхности (2). Поэтому, сохраняя у ряда (15) те его члены, где $|n| \geq 2$, мы получим нетривиальные бесконечно малые изгибания поверхности вращения (2).

Пример. Возьмем круглый цилиндр $r(u) = r_0 = \text{const} > 0$ и на нем векторное поле $\vec{\zeta}$ с компонентами:

$$\xi = 0 \text{ тождественно,} \quad \psi = 2A \sin 2\varphi, \quad \chi = A \cos 2\varphi, \quad A > 0, \quad (26)$$

записанное в базисе $\vec{m}$, $\vec{a}(\varphi)$, $\vec{a}'(\varphi)$. Тогда $d\vec{\zeta} = 3A(\cos 2\varphi)\vec{a}(\varphi)d\varphi$, и сразу видно, что $d\vec{r}d\zeta = 0$, поскольку $d\vec{r} = r_0\vec{a}'(\varphi)d\varphi$ и $\vec{a}'(\varphi) \perp \vec{a}(\varphi)$. Таким образом, для заданного цилиндра построено изгибающее поле. Важно отметить, что в (26) «задействовано» $n = \pm 2$, поэтому построенное бесконечно малое изгибание является нетривиальным.

В следующем параграфе мы увидим примеры таких поверхностей вращения, которые являются жесткими без каких-либо условий закрепления.

§ 39*. Жесткость овалондов

1°. Овалондом называется замкнутая выпуклая поверхность положительной гауссовой кривизны.

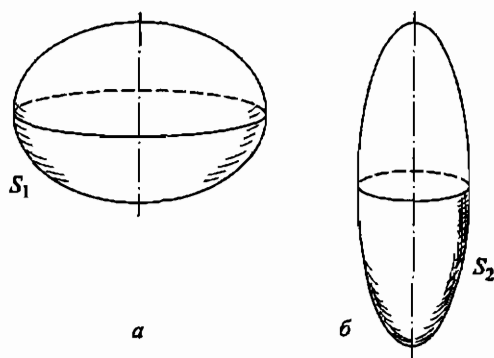


Рис. 188

Теорема. Любой овалонд является жестким.

Доказательство (при тех же условиях гладкости поверхностей и изгибающих полей, которые приняты в этой главе) изложено в п. 4°; по поводу обобщения на случай меньшей гладкости см. [92].

Замечание. Среди овалондов положительной кривизны есть поверхности вращения; например, эллипсоиды вращения (рис. 188, а, б); в силу теоремы, сформулированной в данном пункте, они представляют собой примеры поверхностей вращения, жестких без каких-либо условий закрепления.

2°. **Вспомогательные построения.** Пока ограничимся рассмотрением элементарной поверхности S (§ 6, п. 1°). Будем считать, что поверхность S задана вектор-функцией $\vec{r}(u, v)$, у которой ее пара аргументов (u, v) пробегает область M на плоскости $\mathbb{R}^2$ (рис. 189, а) и что на S задано изгибающее поле $\vec{\zeta}(u, v)$. Соответствующую этому

полю диаграмму вращений $\vec{\mathcal{X}} = \vec{\eta}(u, v)$ обозначим S_η . Пусть $\mathcal{W}$ — гомеоморфная открытому кругу область на $\mathbb{R}^2$ с границей Γ , такая, что $\mathcal{W} \cup \Gamma \subset \mathfrak{M}$; через $\mathcal{W}_S$ и $\mathcal{W}_\eta$ обозначим соответствующие ей (по равенству координат (u, v)) части поверхности S и диаграммы вращений S_η (рис. 189, а, б).

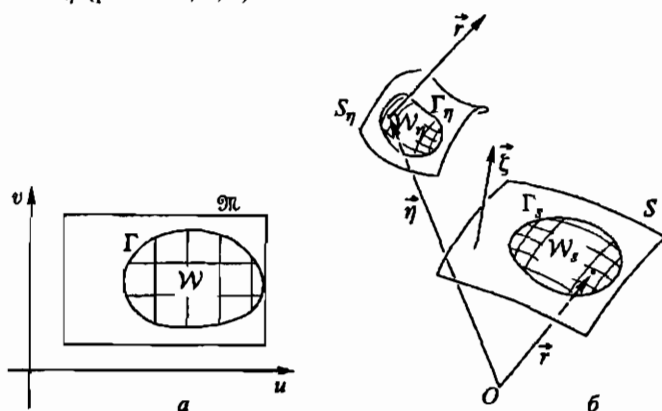


Рис. 189

Предположим, что $[\vec{\eta}_u \times \vec{\eta}_v] \neq \vec{0}$, когда $(u, v) \in \mathcal{W} \cup \Gamma$. Тогда $\mathcal{W}_\eta$ тоже является элементарной поверхностью, и на S_η она ограничена линией Γ_η , причем Γ_η и Γ гомеоморфны окружности.

Рассмотрим поток $J\{\mathcal{W}_\eta\}$ векторного поля $\vec{r}(u, v)$ через поверхность $\mathcal{W}_\eta$ (рис. 189, б):

$$J\{\mathcal{W}_\eta\} = \iint_{\mathcal{W}_\eta} (\vec{r}, \vec{\mathfrak{N}}) d\sigma_\eta = \iint_{\mathcal{W}} (\vec{r}, \vec{\eta}_u, \vec{\eta}_v) du dv, \quad (1)$$

где $\vec{\mathfrak{N}}$ — орт нормали к диаграмме вращений, $d\sigma_\eta$ — ее элемент площади,

$$\vec{\mathfrak{N}} d\sigma_\eta = [\vec{\eta}_u \times \vec{\eta}_v] du dv. \quad (2)$$

Пусть $d\sigma$ — элемент площади на S и $\vec{n}$ — орт нормали к S . Аналогично (2) можно записать, что

$$\vec{n} d\sigma = \vec{n} \sqrt{EG - F^2} du dv = [\vec{r}_u \times \vec{r}_v] du dv, \quad (3)$$

и, воспользовавшись формулами (28)–(29) из § 35, представить $J\{\mathcal{W}_\eta\}$ как поток через $\mathcal{W}_S$ векторного поля $\vec{r}(u, v) \cdot \Delta(u, v)$, именно:

$$J\{\mathcal{W}_\eta\} = \iint_{\mathcal{W}_S} (\vec{r} \cdot \Delta, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\mathcal{W}} (\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) \cdot \Delta du dv. \quad (4)$$

С другой стороны, поток $J\{\mathcal{W}_\eta\}$ допускает еще одно выражение. Чтобы его получить, используем уравнение (14) из § 35. Обе его части умножим скалярно на $\vec{\eta}$:

$$(\vec{\eta}, \vec{\eta}_v, \vec{r}_u) = (\vec{\eta}, \vec{\eta}_u, \vec{r}_v). \quad (5)$$

Затем, используя (5), вычислим разность

$$(\vec{r}, \vec{\eta}, \vec{\eta}_v)_u - (\vec{r}, \vec{\eta}, \vec{\eta}_u)_v = 2(\vec{r}, \vec{\eta}_u, \vec{\eta}_v),$$

откуда видно, что

$$(\vec{r}, \vec{\eta}_u, \vec{\eta}_v) = \frac{1}{2} \left((\vec{r}, \vec{\eta}, \vec{\eta}_v)_u - (\vec{r}, \vec{\eta}, \vec{\eta}_u)_v \right). \quad (6)$$

Из (6) с помощью формулы Грина получаем

$$J\{\mathcal{W}_\eta\} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \left((\vec{r}, \vec{\eta}, \vec{\eta}_u) du + (\vec{r}, \vec{\eta}, \vec{\eta}_v) dv \right) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (\vec{r}, \vec{\eta}, d\vec{\eta}). \quad (7)$$

Формула (7) понадобится нам в дальнейшем.

3°. О координатных системах на сфере.

Привычная нам система географических координат на сфере (долгота-широта) имеет две особые точки — полюсы (где сходятся меридианы). В топологии доказывается [52, 61], что на сфере нельзя ввести единую систему координат без особых точек. Однако двумя системами координат без особых точек, перекрывающимися друг с другом, сферу покрыть можно (здесь речь идет об обычной «школьной» сфере, которую мы видим в трехмерном евклидовом пространстве; в случае большей размерности потребовалось бы больше координатных окрестностей).

Один из способов построить две таких координатных системы — воспользоваться стереографическими координатами. Для их конструирования используется *стереографическая проекция*. Строится она так:

- берется плоскость Π , касающаяся сферы S в фиксированной точке A , и точка N на сфере, диаметрально противоположная точке A ;
- затем строится центральная проекция точек сферы из точки N на плоскость Π (рис. 190).

Подробнее:

- пусть X — произвольная точка сферы S , не совпадающая с точкой N ;
- луч NX пересекает плоскость Π в точке Y , которая и принимается по определению за стереографическую проекцию точки X .

Построенное так отображение $S \setminus N \rightarrow \Pi$ является конформным (т. е. сохраняет углы); оно называется *стереографической проекцией* сферы S на плоскость Π .

На плоскости Π введем декартовы прямоугольные координаты (u, v) с началом в точке A . Точке $X \in S \setminus N$ припишем в качестве ее

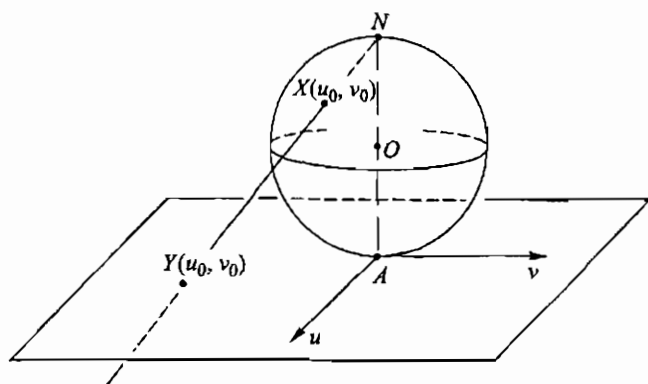


Рис 190

координат (u_0, v_0) те числовые значения, которые в точке Y (рис. 191) имеют декартовы координаты (u, v) . Тогда (u_0, v_0) — *стереографические координаты* точки X на S . Для точки N они не определены.

Стереографическая проекция используется в картографии. Например, для построения географической карты Арктики используется стереографическая проекция из Южного полюса, а для построения карты Антарктики — аналогичная проекция из Северного полюса.¹⁾

Очевидно, что две стереографических координатных системы, полученные проектированием из диаметрально противоположных точек (скажем, из Северного и Южного полюсов) вместе покроют всю сферу, перекрываясь при этом друг с другом.

Вместо плоскости Π можно было бы брать любую другую плоскость, которая ортогонально пересекает прямую NA , но не проходит через точку N , — от этого на «географической карте» изменится только масштаб.

4°. Доказательство теоремы о жесткости овалоида (В. Бляшке, 1921 г., см. [61]). Пусть S — овалويد, $\vec{\zeta}$ — предполагаемое изгибающее поле, $\vec{\eta}$ — его поле вращений. Если S_η состоит из одной точки, то бесконечно малое изгибание тривиально (см. § 35, п. 5°; § 37, п. 1°).

Предположим противное: носитель поверхности S_η состоит более чем из одной точки.

В пространстве возьмем декартову прямоугольную систему координат, поместив ее начало O внутри овалоида S . Пусть X — текущая точка овалоида, $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$. Рассмотрим поток J векторного поля $\vec{r}$

¹⁾ Подробнее о применении теории поверхностей в картографии см. [56, часть 2].

через S_η :

$$J = \iint_{S_\eta} (\vec{r}, \vec{n}) d\sigma_\eta. \quad (8)$$

Для дальнейшего важно, что J определяется независимо от выбора координатных систем на поверхностях S и S_η . Можно доказать, что J не зависит и от выбора точки O , но это нам не понадобится.

Внутри овалоида S возьмем сферу S_0 с центром O . На S_0 произвольно выберем и зафиксируем большую окружность Γ — «экватор». Открытые полусферы, на которые Γ разбивает S_0 , обозначим V_1 и V_2 . Затем выберем на S_0 две системы координат так, чтобы одна из них покрывала $V_1 \cup \Gamma$, а другая покрывала $V_2 \cup \Gamma$. Для этого можно использовать стереографические координаты, обсуждавшиеся в предыдущем пункте.

Для упрощения дальнейшей записи будем обозначать (u, v) координаты в любой из этих двух координатных систем на сфере S_0 , помня однако, что « u » и « v » в двух разных системах — разные.

Значения координат (u, v) с S_0 перенесем на оваллоид S посредством центральной проекции из точки O ; после этого они «автоматически» переносятся с S на S_η , которую приходится в этих рассуждениях понимать как обобщенную поверхность (см. § 15, п. 7*).

Отображение $S \rightarrow S_\eta$, которое возникает при построении диаграммы вращений S_η для данного изгибающего поля ζ поверхности S (и присутствует неявно в определении потока J формулой (8)), а также отображение $S_0 \rightarrow S$ (центральная проекция из точки O), согласно изложенному выше задают соответствие между точками поверхностей по равенству координат (u, v) .

Образы V_1 , V_2 и Γ на S обозначим V_{1S} , V_{2S} и Γ_S (рис. 191), а образы на S_η — через $V_{1\eta}$, $V_{2\eta}$ и Γ_η . На тех участках $V_{j\eta}$ ($j = 1, 2$), где $|\vec{\eta}_u \times \vec{\eta}_v| \neq 0$, действуют формулы, обсуждавшиеся в п. 2°. В силу непрерывности вектор-функций $\vec{\eta}_u$ и $\vec{\eta}_v$ прообразы таких участков являются на S открытыми областями, а их количество не более, чем счетно. Там, где $\vec{\eta}_u \times \vec{\eta}_v = \vec{0}$, обращается в нуль $d\sigma_\eta$ (см. (2)); множество этих точек замкнуто и при вычислении потока (8) вносит

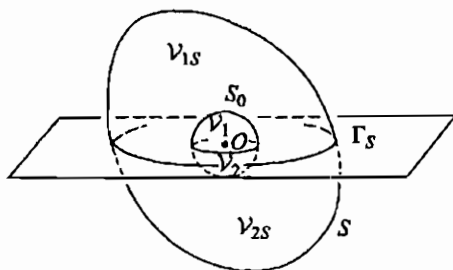


Рис. 191

в него вклад, равный нулю. Исходя из изложенного и пользуясь аддитивностью интеграла, мы можем поток J представить в виде суммы

$$J = \int_{V_{1\eta}} (\vec{r}, \vec{\eta}) d\sigma_{\eta} + \int_{V_{2\eta}} (\vec{r}, \vec{\eta}) d\sigma_{\eta}, \quad (9)$$

а затем каждое из двух слагаемых в правой части выражения (9) преобразовать по формуле (7).

В результате окажется, что поток J равен сумме двух криволинейных интегралов по общей границе участвующих в (9) областей интегрирования, причем с одним и тем же подынтегральным выражением

$$(\vec{r}, \vec{\eta}, d\vec{\eta}), \quad (10)$$

при этом все вектор-функции, участвующие в выражении (10), заданы на S , так что мы можем считать, что интегралы от выражения (10) берутся по Γ_S , а не по Γ_{η} — это избавляет нас от обсуждения непростого вопроса о гладкости (или негладкости) линии Γ_{η} , тогда как Γ_S — заведомо гладкая замкнутая кривая, причем в двух интегралах, возникающих при преобразовании суммы (9), путь интегрирования Γ_S проходит в противоположных направлениях, и криволинейные интегралы взаимно уничтожаются. Итак,

$$J = 0. \quad (11)$$

Вместе с тем, интеграл (8) можно преобразовать иначе, с помощью формулы (4), и записать так:

$$J = \int_S (\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) \Delta du dv. \quad (12)$$

При надлежащем выборе ориентации координатных систем смешанное произведение, участвующее в (12), положительно на всем овалоиде; схематически это показано на рис. 192. Поэтому будем считать, что

$$(\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) > 0 \text{ на } S. \quad (13)$$

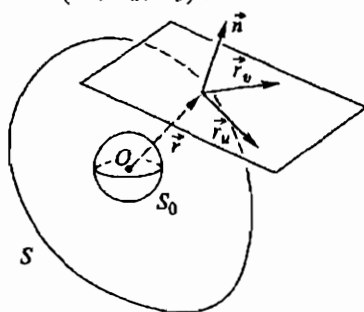


Рис 192

Далее, вследствие леммы 2 из п. 8° в § 35 и положительности гауссовой кривизны K овалоида S оказывается, что определитель Δ тоже сохраняет знак, именно, $\Delta \leq 0$. Отсюда следует, что

$$J \leq 0; \quad (14)$$

но (11)–(14) совместны только лишь при условии, что

$$\Delta = 0 \quad \text{тождественно на } S. \quad (15)$$

Еще раз (в каждой из двух координатных систем на S) применяя лемму 2 из § 35, видим, что вследствие (15)

$$\eta_u = \eta_v = 0 \quad \text{тождественно.} \quad (16)$$

Напомним теперь, что одна из используемых на S координатных систем покрывает $V_{1S} \cup \Gamma_S$, а другая покрывает $V_{2S} \cup \Gamma_S$, и потому они перекрываются друг с другом. Отсюда и из (16) следует, что векторное поле $\vec{\eta} = \vec{\eta}_0$ представляет собой вектор, постоянный на всем овалойде S . Тем самым, мы пришли к противоречию с предположением о том, что носитель диаграммы вращений $S_{\vec{\eta}}$ содержит более одной точки. Поэтому бесконечно малое изгибание ζ может быть только тривиальным, а это и означает жесткость овалоида.

5*. Отметим еще, что имеется другой путь доказательства теоремы о жесткости овалоида (И. Х. Сабитов, 1962 г., см. [107]; в этой связи см. также [61]). Прежде, чем изложить план рассуждений, сформулируем

Определение. Плоскость Π называется *опорной* для множества X , если X целиком содержится в каком-нибудь одном из двух полупространств, общей границей которых служит плоскость Π . Плоскость Π называется *опорной* для поверхности S , если она является опорной для носителя этой поверхности.

Переходим к изложению плана доказательства, не останавливаясь на его деталях, однако обращая внимание на различные геометрические аспекты.

Сначала доказывается, что если $\vec{\eta} \neq \vec{\eta}_0$, то те точки, где $\Delta = 0$, могут быть только изолированными.

Затем устанавливается, что для диаграммы вращений, построенной для поверхности положительной гауссовой кривизны, эти особые точки являются точками ветвления.

Не вдаваясь в подробности, поясним, что поверхность с точкой ветвления имеет саопересечение и не может быть в окрестности такой точки представлена в виде $z = f(x, y)$ (ни при каком расположении координат). Точки ветвления римановых поверхностей играют важную роль в теории функций комплексного переменного [69]. Один из возможных вариантов поверхности с точкой ветвления показан на рис. 193.

Далее доказывается, что на S_η точки ветвления (если они там есть) таковы, что ни в одной из них нельзя провести плоскость, опорную к S_η .

Вместе с тем, из теоремы 3 (§ 35) следует, что в тех точках, где $\Delta \neq 0$, тоже нельзя провести плоскость, опорную к S_η . Однако у поверхности S_η (понимаемой, возможно, в обобщенном смысле), носитель компактен и, следовательно, содержится в некотором шаре.

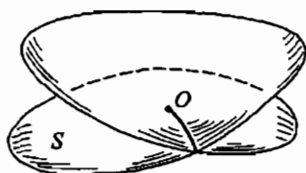


Рис. 193

Уменьшая этот шар, можно «поймать момент», когда ограничивающая его сфера впервые «наткнется» на носитель поверхности S_η . Отметим точку, где это произойдет, и проведем там плоскость, касательную к сфере. Она окажется опорной для S_η , что невозможно. Полученное противоречие показывает, что на самом деле выполнено (16) и оваловид является жестким.

6*. Обобщением теоремы Либмана о неизгибаемости сферы (§ 20*) является

Теорема А. В. Погорелова. Любой оваловид неизгибаем в классе выпуклых поверхностей.

Доказательство приведено в работе [92].

7*. Дополнительные сведения о бесконечно малых изгибах читатель может найти в [46, 61, 126], главе IV книги [92], обзоре [107] и указанной там литературе.

Выше уже отмечалось, что понятия жесткости поверхностей, их изгибаний и бесконечно малых изгибов нашли применение в теории оболочек. Использование этих понятий и связанных с ними геометрических результатов оказалось очень важным в тех ситуациях, когда под действием внешней нагрузки оболочка значительно меняет свою пространственную форму [93, 94, 114].

Однако эти достижения относятся, в основном, к упругим оболочкам постоянной толщины, изготовленным из однородного материала.

Вместе с тем, за последние десятилетия все большее распространение приобретают оболочки из композитных материалов, а также многослойные оболочки и оболочки переменной толщины [27, 28, 42, 57, 74, 90]. Продвижение геометрических методов в такие разделы теории оболочек является, по-видимому, делом недалекого будущего.

8*. Обзору наиболее актуальных нерешенных проблем теории оболочек специально посвящен один из разделов книги [30].

С некоторыми конкретными задачами, актуальными в настоящее время (конец XX — начало XXI столетия), можно ознакомиться в сборнике [75], а также в статьях [39, 116, 124] и книге [86]. При этом нужно иметь в виду, что геометрические формы используемых в тех-

нике оболочек будут продолжать усложняться; этот вопрос подробно рассматривается в [32, 33].

С развитием подходов и концепций в теории оболочек в историческом плане можно ознакомиться по книгам [30, 40, 125].

Читателю, который захочет глубже познакомиться с теорией оболочек, можно в первую очередь порекомендовать книгу [36], затем — [55] и перечисленную выше литературу.

9*. С древних времен в кораблестроении для увеличения прочности используются ребра жесткости — шпангоуты. Природа тоже «применяет» такой метод: достаточно взглянуть на жилки листьев растений и крылья насекомых, чтобы в этом убедиться. Строительная техника, авиационная, ракетостроительная и другие отрасли промышленности тоже требуют развития теории оболочек, подкрепленных ребрами жесткости [8–10, 35, 74, 87]. В этой связи встают проблемы оптимизации таких конструкций. И здесь пригодятся не только геометрические свойства поверхностей, но и свойства линий и семейств линий на поверхностях.

10*. Среди численных методов расчета оболочек одним из наиболее перспективных считается метод конечных элементов ([43, 108], глава 13 в книге [24]). Ведутся исследования по разработке таких его вариантов, которые были бы специально приспособлены для задач геометрии поверхностей и механики оболочек [67, 98].

Добавления

§ 40*. Деривационные формулы Гаусса. Символы Кристоффеля. Вычисление геодезической кривизны в произвольных криволинейных координатах. Теорема Бура

1°. Выше были получены формулы (11) и (11 а, б, в) в § 21, позволяющие вычислять геодезическую кривизну k_g для линии, заданной на поверхности в ортогональных координатах.

Приходится, однако, пользоваться и неортогональными координатами. Тогда, чтобы вычислить k_g , нужно поступить так: выразить k_g из разложения (2) § 10 и то, что получится, преобразовать к виду, удобному для использования.

Покажем подробно, как это сделать.

2°. Соберем некоторые из формул, уже встречавшихся нам выше, чтобы все вместе они были перед глазами.

Будем считать, что линия $\mathcal{L}$ задана вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и рассматривается на поверхности S в координатах u, v . Производную по t будем обозначать штрихом, а по натуральному параметру s на $\mathcal{L}$ — точкой сверху. Тогда

$$\vec{r}' = \vec{X}_u u' + \vec{X}_v v', \quad (1)$$

где $\vec{X}(u, v)$ — радиус-вектор текущей точки на S . Вместе с тем,

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\tau}, \quad \vec{r}' = |\vec{r}'| \vec{\tau} = V \vec{\tau}, \quad V = |\vec{r}'|; \quad (2)$$

$\vec{\tau}$ — орт касательной к $\mathcal{L}$. Если t трактовать как время, то V будет представлять собой скорость движения точки по траектории $\mathcal{L}$. Из (7а) § 8 и (1) следует, что

$$V = \sqrt{E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2}; \quad (3)$$

E, F, G — как обычно, коэффициенты первой квадратичной формы.

Повторим здесь уже упоминавшуюся формулу (2) из § 10:

$$\ddot{\vec{r}} = k \vec{\nu} = k_n \vec{n} + k_g [\vec{n} \times \vec{\tau}]; \quad (4)$$

$\vec{n}$ — орт нормали к S ; $\vec{\nu}$ — орт главной нормали к $\mathcal{L}$.

Нам понадобится еще выражение для смешанного произведения:

$$(\vec{n}, \vec{x}_u, \vec{x}_v) = (\vec{n}, \vec{x}_u \times \vec{x}_v) = |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \sqrt{EG - F^2} = W \quad (5)$$

(величина W определяется последним из равенств (5)).

Для того, чтобы найти k_g , умножим (4) скалярно на $[\vec{n} \times \vec{\tau}]$ и используем (2):

$$k_g = (\vec{n}, \dot{\vec{\tau}}, \ddot{\vec{\tau}}). \quad (6)$$

Из формул Френе (см. (39) в §32) при помощи формулы для производной сложной функции, применяемой к вектор-функциям, можно вывести, что

$$\vec{\tau}'' = V' \vec{\tau} + kV^2 \vec{\nu}. \quad (7)$$

Составим аналогично (6) смешанное произведение, но с производными по t вместо производных по s , а затем преобразуем его, учитывая (1) и (7):

$$(\vec{n}, \vec{\tau}', \vec{\tau}'') = V^3 (\vec{n}, \dot{\vec{\tau}}, \ddot{\vec{\tau}}). \quad (8)$$

Сопоставив (6) и (8), видим, что

$$k_g = V^{-3} (\vec{n}, \vec{\tau}', \vec{\tau}''). \quad (9)$$

3°. Пусть, как и выше, $\vec{x}(u, v)$ — радиус-вектор текущей точки на S . Прежде, чем продолжить преобразование выражения для k_g , вспомним, что векторы $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$ и $\vec{n}$, построенные в произвольной точке поверхности S , образуют базис, и по нему можно разложить вторые производные:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{x}_v + L \vec{n}, \\ \vec{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{x}_v + M \vec{n}, \\ \vec{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{x}_v + N \vec{n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Формулы (10) называются *дериационными формулами Гаусса*, а участвующие в них коэффициенты Γ_{jk}^i — *символами Кристоффеля*. Аналогично п. 3° из §14 можно доказать, что Γ_{jk}^i выражаются через E , F , G и их частные производные первого порядка. Доказательство подробно изложено, например, в [99], и мы не будем его здесь повторять, а ограничимся взятыми из [47] формулами для Γ_{jk}^i .

Метрика:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (10^*)$$

Символы Кристоффеля ($W = \sqrt{EG - F^2}$):

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2W^2}(GE_u - 2FF_u + FE_v), \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2W^2}(-EE_v + 2EF_u - FE_u), \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2W^2}(GE_v - FG_u), \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2W^2}(EG_u - FE_v), \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2W^2}(-GG_u + 2GF_v - FG_v), \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2W^2}(EG_v - 2FF_v + FG_u).\end{aligned}\tag{10**}$$

В формулах (10) множителями при $\vec{n}$ стоят L, M, N — коэффициенты второй квадратичной формы; это следует из ее определения (§ 11, пп. 1°–2°) и формул (1) из § 11.

4°. Продолжим преобразование выражения для k_g и наряду с (1) выпишем разложение

$$\vec{r}'' = \vec{X}_u u'' + \vec{X}_v v'' + \vec{X}_{uu}(u')^2 + 2\vec{X}_{uv}u'v' + \vec{X}_{vv}(v')^2.\tag{11}$$

Подставим (1) и (11) в (9), воспользуемся дериационными формулами Гаусса (10), известными свойствами смешанного произведения и вспомогательным выражением (5). После надлежащей перегруппировки получим для k_g выражение, которое, следуя А. В. Погорелову [91], удобно представить в виде

$$k_g = -\Psi \cdot ((u''v' - v''u') + Av' - Bu') = \Psi \cdot \begin{vmatrix} u' & v' \\ u'' + A & v'' + B \end{vmatrix},\tag{12}$$

где

$$\Psi = V^{-3}W > 0;\tag{13}$$

A и B — квадратичные формы относительно u' и v' с коэффициентами Γ_{jk}^i , именно:

$$A = \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2,\tag{14}$$

$$B = \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2.\tag{15}$$

5°. **Пример.** На поверхности S рассмотрим линии, заданные дифференциальным уравнением

$$P(u, v) du + Q(u, v) dv = 0\tag{16}$$

и покажем, как найти их геодезическую кривизну.

Рассуждая аналогично п. 9* из §9, можем записать

$$u' = \lambda Q, \quad v' = -\lambda P, \quad (17)$$

где λ — вспомогательный множитель, который в дальнейшем исключится.

Прежде всего, преобразуем участвующий в (12) определитель второго порядка:

$$\begin{aligned} u''v' - v''u' &= \\ &= -\lambda P \cdot (\lambda'Q + \lambda Q') + \lambda Q \cdot (\lambda'P + \lambda P') = \lambda^2(P'Q - PQ') = \\ &= \lambda^2((P_u u' + P_v v')Q - (Q_u u' + Q_v v')P) = \\ &= \lambda^3((Q^2 P_u + P^2 Q_v) - PQ \cdot (P_v + Q_u)). \quad (18) \end{aligned}$$

Далее, из (3) и (17) имеем

$$V^{-3} = \lambda^{-3}(EQ^2 - 2FPQ + GP^2)^{-3/2}, \quad (19)$$

а из (17) и (14)–(15)

$$Av' = -\lambda^3(\Gamma_{11}^1 Q^2 - 2\Gamma_{12}^1 PQ + \Gamma_{22}^1 P^2)P, \quad (20)$$

и

$$Bu' = \lambda^3(\Gamma_{11}^2 Q^2 - 2\Gamma_{12}^2 PQ + \Gamma_{22}^2 P^2)Q. \quad (21)$$

Итак, для вычисления k_g на линиях семейства (16) нужно найти величины (5), (18)–(21) и подставить их в (12)–(13); видно, что при этом λ^3 сократится.

6°. В качестве приложения выведенных формул докажем, что справедливы

Теорема Буря. Каждая винтовая поверхность локально изометрична некоторой поверхности вращения.

Для доказательства понадобятся еще некоторые вспомогательные рассуждения. Заключительный этап доказательства будет изложен в п. 11°.

7°. Напомним, что винтовая поверхность (пример 6 из 3° в §6) строится так:

- в плоскости Π находятся прямая AB и линия $\mathcal{L}$;
- линия $\mathcal{L}$ не должна быть прямой, параллельной AB , иначе построение даст не винтовую поверхность, а цилиндр; непараллельная AB прямая в качестве $\mathcal{L}$ допускается;

- плоскость Π вместе с линией $\mathcal{L}$ вращается вокруг AB с постоянной угловой скоростью ω и одновременно с этим скользит вдоль $\mathcal{L}$ с постоянной скоростью $a \neq 0$;
- тогда $\mathcal{L}$ зачерчивает в пространстве винтовую поверхность.

Обратим внимание на то, что каждая точка линии $\mathcal{L}$ при этом описывает в пространстве винтовую линию. При изложенном выше кинематическом построении винтовой поверхности каждая такая винтовая линия скользит сама по себе. При этом и вся винтовая поверхность тоже скользит сама по себе.

На поверхностях вращения аналогичным свойством обладают параллели: при вращении вокруг своей оси вся поверхность вращения скользит сама по себе вдоль своих параллелей, а каждая параллель при этом тоже скользит сама по себе.

Эти наглядные соображения лежат в основе доказательства теоремы Бура: при искомой изометрии винтовые линии отобразятся на параллели. В этом смысле понятно, что теорема Бура «почти очевидна». Но в математике наглядная «очевидность» играет лишь роль наводящих соображений, а для их подтверждения требуется формализованное доказательство. Будем его подготавливать.

В плоскости Π возьмем перпендикулярные орты $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, направив $\vec{e}_2$ по AB . Будем считать, что $\mathcal{L}$ задается уравнением

$$\vec{y} = \vec{y}(u) = \vec{e}_1 \rho(u) + \vec{e}_2 h(u) \quad (22)$$

и u на ней — натуральный параметр, так что

$$(\rho')^2 + (h')^2 = 1. \quad (23)$$

Тогда, в силу изложенного построения, винтовая поверхность S запишется в виде

$$\vec{X}(u, v) = (\rho(u) \cos \omega v) \vec{i} + (\rho(u) \sin \omega v) \vec{j} + (h(u) + av) \vec{k}, \quad (24)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты «неподвижных» декартовых осей в пространстве, причем $\vec{k} = \vec{e}_2$.

Из (23)–(24) находим

$$ds^2 = du^2 + 2F(u) du dv + G(u) dv^2, \quad (25)$$

то есть в (10*) теперь $E = 1$, $F = F(u)$, $G = G(u)$, где

$$F(u) = a h'(u), \quad G = a^2 + \omega^2 \rho^2(u) > 0, \quad (26)$$

так что, учитывая (23) и (26), имеем

$$W^2 = a^2 + \omega^2 \rho^2 - a^2 (h')^2 = \omega^2 \rho^2 + a^2 (\rho')^2 > 0. \quad (27)$$

Конкретный вид выражения (27) для дальнейшего не играет роли: важно, что $W = W(u)$. Из (26)–(27) и формулы (10) из § 18 следует, что на винтовой поверхности (24) гауссова кривизна

$$K = K(u). \quad (28)$$

Используя (26)–(27), можно было бы найти явное выражение для $K(u)$, но оно нам тоже не понадобится.

8°. Найдем на винтовой поверхности S геодезическую кривизну k_{g_2} координатных v -линий (винтовых!). Для этого, используя (25)–(27) и (10**), запишем символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{W^2} F F_u, \quad \Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{2W^2} F G_u, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2W^2} G G_u \quad (29)$$

и

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{W^2} F_u, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2W^2} G_u, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2W^2} F G_u. \quad (30)$$

На v -линиях $du = 0$; за параметр взято v , так что $v' = 1$; кроме того, видим, что $V = \sqrt{G} = V(u)$; отсюда, используя (29)–(30), находим по формулам (12)–(15)

$$k_{g_2} = \frac{1}{2} \frac{G_u}{2W\sqrt{G}} = k_{g_2}(u). \quad (31)$$

9°. Далее понадобится геодезическая кривизна k_g ортогональных траекторий к v -линиям на S . Вычислим ее.

Еще раз воспользуемся тем, что на v -линиях $du = 0$. Это значит, что в уравнении (21) из § 9 $P = 1$, $Q = 0$. Эти значения P и Q подставим в уравнение (27) из § 9. В результате для ортогональных траекторий к v -линиям получим дифференциальное уравнение

$$F du + G dv = 0. \quad (32)$$

Нам сейчас важно, что (32) представляет собой уравнение вида (16), в котором

$$P = F(u), \quad Q = G(u). \quad (32')$$

Действуя по плану, изложенному в п. 5°, и используя (29)–(30), обнаружим после приведения подобных членов, что

$$k_g = 0. \quad (33)$$

10°. Нам понадобятся еще две леммы.

Лемма 1. На винтовой поверхности (24) v -линии пересекают на своих ортогональных траекториях дуги равной длины.

Рассмотрим две u -линии. Пусть на одной из них $u = u_1$, а на другой $u = u_2$. Возьмем какую-нибудь из ортогональных траекторий и на ней найдем длину дуги $u_1 \leq u \leq u_2$. С этой целью из (32), (32') и (26) выразим du через ds и подставим в (25), заменив там затем букву s на ξ ; получим

$$d\xi = \frac{1}{\sqrt{G(u)}} W(u) du. \quad (34)$$

Интегрируя (34), найдем длину s дуги $u_1 \leq u \leq u_2$ на ортогональной траектории

$$s = \xi(u_2) - \xi(u_1) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{W(u)}{\sqrt{G(u)}} du. \quad (35)$$

Формула (35) показывает, что длина эта не зависит от выбора v , что и обосновывает лемму 1 и показано схематически на рис. 194.

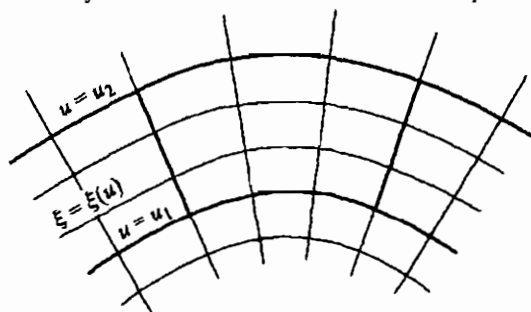


Рис. 194

Лемма 2. Для каждой C^1 -гладкой и положительной на отрезке $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ функции $B(\xi)$ существует в трехмерном евклидовом пространстве поверхность вращения с метрикой

$$ds^2 = d\xi^2 + B^2(\xi) d\eta^2. \quad (36)$$

Доказательство. Искомую поверхность вращения будем строить в цилиндрических координатах (§ 26, п. 4°) в виде

$$\rho = \rho(\xi), \quad \varphi = c\eta, \quad z = z(\xi). \quad (37)$$

По условию $B'(\xi)$ непрерывна, а потому, по теореме Вейерштрасса, она ограничена на $[\xi_1, \xi_2]$; значит, существует число $b > 0$ такое, что

$$|B'(\xi)| \leq b \quad \text{при } \xi \in (\xi_1, \xi_2). \quad (38)$$

Возьмем в (37) $c > b$. Меридиан будущей поверхности вращения в плоскости ρz будем строить так, чтобы ξ на нем было натуральным

параметром. С этой целью возьмем произвольное z_0 и $\xi_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ и положим

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= \frac{1}{c} B(\xi), \\ z(\xi) &= z_0 + \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (B'(\mu))^2} d\mu.\end{aligned}\quad (39)$$

Вычислив первую квадратичную форму поверхности (37), (39), увидим, что она совпадает с заданным ds^2 (36).

З а м е ч а н и я. 1). Метрики вида (36) называют *метриками вращения*.

2). Предложенное доказательство леммы 2 проходит и в том случае, когда $\xi_1 = -\infty$, $\xi_2 = +\infty$, но для какого-либо $b > 0$ выполнено (38). Если же (38) не выполняется, то метрика вращения может оказаться непогружаемой в трехмерное евклидово пространство не только в виде поверхности вращения, но и в виде какой бы то ни было C^2 -гладкой поверхности [48].

3). С повышением размерности объемлющего пространства ситуация меняется: все метрики вращения (36) погружаемы в пятимерное евклидово пространство $\mathbb{R}^5$ [105].

11°. Доказательство теоремы Бура. На винтовой поверхности S , заданной формулой (24), возьмем произвольную точку $X_0(u_0, v_0)$ и в ее окрестности построим новую систему координат ξ, η . За линию $\xi = 0$ возьмем прежнюю координатную линию $u = u_0$, проходящую через X_0 , но вместо v в качестве координаты на ней возьмем ее натуральный параметр η . За координатные линии $\eta = \text{const}$ примем ортогональные траектории v -линий. Их геодезическую кривизну мы уже нашли в п. 9°, и из (33) видно, что эти ортогональные траектории являются геодезическими линиями; через ξ обозначим их натуральный параметр. Система координат ξ, η является полугеодезической (см. § 22, пп. 5*–6*) и в этих координатах метрика поверхности S имеет вид

$$ds^2 = d\xi^2 + B^2 d\eta^2 \quad (40)$$

в соответствии с формулой (5) из § 22. Теперь предстоит выяснить, от чего зависит B в (40).

Из леммы 1 следует, что η -линии совпадают с прежними v -линиями (см. рис. 194). Они служат линиями уровня как для координаты ξ , так и для прежней координаты u , поэтому

$$u = u(\xi). \quad (41)$$

Функция (41) является обратной для $\xi(u)$, выражающейся формулой (35) при $u_1 = u_0$, $u_2 = u$.

Сопоставляя (41) с (31) и (28), видим, что

$$K = K(u(\xi)) = \mathcal{K}(\xi) \quad (42)$$

и

$$k_{g_2} = k_{g_2}(u(\xi)) = k_{g_2}(\xi). \quad (43)$$

Вместе с тем, ортогональность координатной сети ξ, η позволяет вычислить k_{g_2} иначе, воспользовавшись формулой (5) из § 21:

$$k_{g_2} = B_\xi / B. \quad (44)$$

Так как система координат ξ, η является полугеодезической, для B соблюдается уравнение (11) из § 22, которое мы заново перепишем в используемых здесь обозначениях:

$$B_{\xi\xi} + \mathcal{K}(\xi)B = 0. \quad (45)$$

Для уравнения (45) нужно поставить начальные условия. Для этого вспомним, что по построению η является натуральным параметром на линии $\xi = 0$; значит, на этой линии $ds = d\eta$ и потому на ней $B = 1$, так что одно условие имеем сразу:

$$B \Big|_{\xi=0} = 1. \quad (46)$$

Другое получается из (43) и (44) с учетом (46); в обозначениях, использованных в (31), оно запишется так:

$$(B_\xi) \Big|_{\xi=0} = k_{g_2}(u_0). \quad (47)$$

Важно, что ни в (46), ни в (47) не входит η . Поэтому решение B задачи (45)–(47) является функцией одного аргумента ξ , а метрика (40) является метрикой вращения. Теперь для завершения доказательства остается применить лемму 2.

Замечания. 1). Вместе с изложенными в этом параграфе вспомогательными построениями и леммой доказательство получилось довольно длинным. Аппарат тензорного исчисления позволяет дать другое доказательство теоремы Бура [126], более короткое, хотя и менее наглядное.

2). Изложение здесь построено так, что в нем почти не использовано тензорное исчисление. Однако читатель, предполагающий вести научную работу в теории поверхностей, должен его освоить. Начинать надо с тензорной алгебры [50, 62], затем перейти к тензорному анализу [60, 62, 100, 127], попутно отрабатывая на конкретных вопросах его применения к геометрии, см. [56, 82, 99, 118, 126] и [78].

12°. В заключение отметим важность теоремы Бура с точки зрения будущих приложений геометрии в инженерном деле.

В этом параграфе речь шла об изометрии, но можно рассмотреть аналогичную задачу об изгибаниях.

Предположим, что в некотором изделии предстоит изготовить тонкостенный фрагмент, имеющий форму поверхности, допускающей изгибание на поверхность вращения [56, 99]. Тогда, после того, как получат распространение «геометризированные» технологии, о которых шла речь в п. 16* § 19, можно будет поступать так: заготовку для этого фрагмента из гибкого материала изготовить заранее в виде части поверхности вращения; в соответствии со схемой, изложенной в п. 15* § 19, эту заготовку свернуть в узкий рулон и в таком виде доставить к месту сборки, а там изгибанием придать ей нужную пространственную форму и закрепить — уже как часть готового изделия. Так же можно будет поступить и в том случае, когда фрагмент изделия сам должен иметь форму поверхности вращения, но с габаритами, неудобными для транспортировки; например, если это часть радиотелескопа, который нужно поместить в космосе на околоземной орбите [15].

Ночью все кошки серы.

(Пословица)

*Каждый Охотник Желает Знать,
Где Сидит Фазан.* (Детская «считалочка» — по ней можно заучивать расположение цветов в радуге: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый)

§ 41*. Геометрические подходы в математическом описании цветового зрения

1°. В науке о цвете — *колориметрии* — используются математические модели и в них — геометрические конструкции, в которых цвета изображаются точками. Такие точки называют *цветовыми*; им бывает удобно давать эпитеты «красная точка» и т. п. Множество всех цветовых точек, «задействованных» в модели, называют *пространством цветоразличения* или *цветовым пространством*. Нам встретятся ситуации, когда такое множество является поверхностью; будем называть ее *цветовой поверхностью*.

2°. Напомним, что видимый свет представляет собой электромагнитные излучения с длиной волны λ (измеренной в вакууме), заключенной в границах $380 \leq \lambda \leq 780$ (нм) (нм — нанометр — миллиардная доля метра). Выделяя в этом промежутке участки настолько узкие, насколько это технически выполнимо, получают так называемые *монохроматические цвета*.

Человек различает цвета благодаря наличию в сетчатке глаза трех видов цветочувствительных элементов. Их называют *В*-колбочки, *Г*-колбочки и *Р*-колбочки [18, 44, 54, 77]. Они «работают» при дневном освещении (единицы силы света, яркости, освещенности см. в [76, 117]).

Промежутки $380 \leq \lambda \leq 400$ (нм) и $700 \leq \lambda \leq 780$ (нм) называют участками *постоянного тона*: на каждом из них все длины волн воспринимаются как один цветовой тон — фиолетовый (Ф) на первом из них, красный (К) — на втором. Чувствительность глаза к свету на этих участках очень мала. При дневном зрении максимум чувствительности приходится на желто-зеленый цвет (ЖЗ), $\lambda = \lambda_0 = 555$ (нм).

От красного к фиолетовому цвету в спектре идут в хорошо известном порядке: оранжевый (Ор), желтый (Ж), зеленый (З), голубой (Г), синий (С). Между ними — плавные переходы. В промежутке $400 \div 700$ (нм) при благоприятных условиях наблюдения человек с нормальным зрением различает около ста цветовых тонов [77].

3°. И. Ньютон предложил расположить спектральные цвета по кругу, разбив его на секторы, а между красным и фиолетовым поместить пурпурный цвет (получающийся их смешиванием) (см. [83, с. 116–118 и фиг. 40]). Монохроматические цвета и насыщенные пурпурные (П) оттенки удобно изображать точками на граничной окружности, считая, что при смещении точки по ее дуге цветовой тон плавно изменяется. В центр помещают белый цвет (Б). Если его добавлять к монохроматическому (или к пурпурному), то цветовой тон сохраняется, но уменьшается его насыщенность. Считается, что тогда цветовая точка смещается по радиусу к центру. Так получается исторически первая в колориметрии геометрическая модель — цветовой круг Ньютона (рис. 195).



Рис. 195

4°. Более совершенной геометрической моделью является диаграмма МКО-31. Она была принята в качестве международного стандарта в 1931 г. Цветовое пространство в ней представляет собой выпуклую область на плоскости (рис. 196–197), расположенную в треугольнике $\triangle OXY$ с вершинами $O(0,0)$, $X(1,0)$, $Y(0,1)$.

Граница диаграммы МКО-31 состоит из прямолинейного отрезка VR , который называется *линией пурпурных цветов*, и гладкой выпуклой дуги VGR , точки которой изображают монохроматические цвета с длинами волн $400 \leq \lambda \leq 700$ (нм). На рис. 196 для промежутка $450 \leq \lambda \leq 650$ (нм) длины волн помечены с шагом $\Delta\lambda = 10$ (нм). Участки постоянного тона изображаются угловыми точками V и R . В качестве «основных» выделены три цвета. Два из них помечены точками B и G . Их длины волн $\lambda_B = 435,8$ (нм) и $\lambda_G = 546,1$ (нм) близки

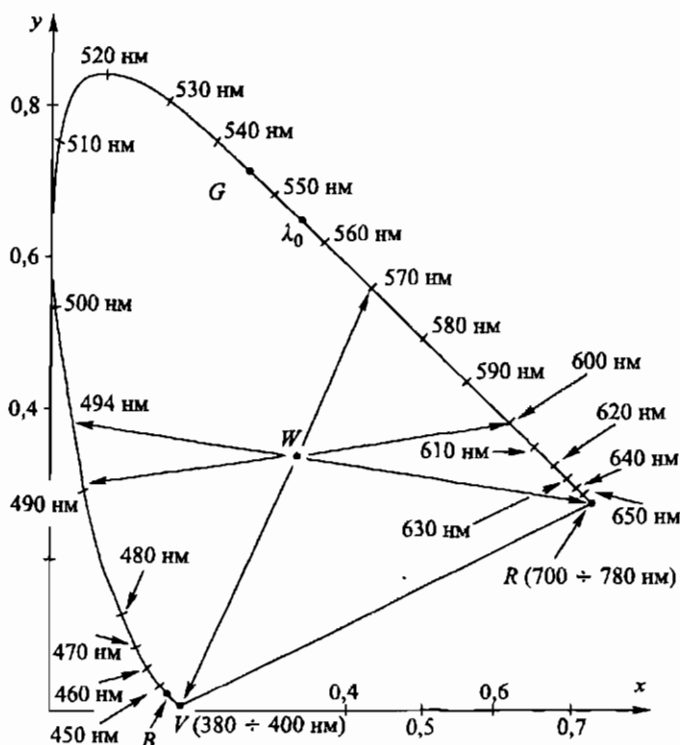


Рис. 196

к максимумам чувствительности *B*- и *G*-колбочек, а, кроме того, они представляют собой яркие спектральные линии паров ртути. Поэтому их легко получать в лабораториях (в частности, при калибровке источников света). Третий цвет, взятый в качестве «основного», обозначают буквой *R*; для него $\lambda_R = 700$ (нм). Белая точка *W* находится в центре $\triangle OXY$, вершины которого *X* и *Y* на рисунках 196–197 не показаны; ее координаты $x_0 = y_0 = 1/3$.

Результаты смешивания любых двух цветов изображаются точками на хорде, их соединяющей. Для каждого монохроматического цвета есть к нему дополнительный: смешивая их, можно получить оттенок, близкий к белому. Говорят, что дополнительные цвета образуют *оппонентные пары*. Они играют очень важную роль в цветной фотографии и полиграфии [44, 77]. Для того чтобы найти цвет, дополнительный к выбранному, через его точку и *W* нужно провести хорду до встречи с противоположной точкой границы диаграммы. Оказывается (рис. 196), что при $380 \leq \lambda \leq 494$ (нм) дополнительными являются цвета, у которых $570 \leq \lambda \leq 780$ (нм) и, наоборот, а при $494 < \lambda < 570$ (нм) дополнительными для монохроматических служат пурпурные цвета.

поле зрения, которое, в свою очередь, должно быть все однотонным и одинаково ярким. Замечательный факт состоит в том, что круг Ньютона (а также диаграмма МКО-31) содержит все множество апертурных цветов. На это фактически обратил внимание еще И. Ньютон [83], хотя понятие апертурных цветов тогда не было сформулировано. Среди них нет коричневых, серых, а также черного — их восприятие зависит не только от длин волн света источника, но и от окружающего фона [18, 44, 54].

7°. Исследователи XIX века обратили внимание на то, что цветовой тон зависит не только от длины волны, но, отчасти, еще и от яркости. Исключение составляют четыре цвета, образующих две оппонентные пары: сине-желтую (синий 470 нм, желтый 575 нм) и красно-зеленую (зеленый 500 нм и дополнительный к нему красно-пурпурный, рис. 197). Эти цвета называют *константными*. Свойство константности тона (при изменении яркости) у них сохраняется, если их λ изменить на $\Delta\lambda$ при $|\Delta\lambda| < 5$ (нм) [54].

8°. Диаграмма МКО-31 построена для фиксированной яркости [44, 77]. При переменной яркости цветовое пространство апертурных цветов трехмерно. В качестве координат в нем можно было бы взять величины (B) , (G) и (R) возбуждения колбочек трех видов, но их трудно измерять. Поэтому чаще используют цветовой тон, насыщенность и яркость [44, 54], а для измерения расстояний используют трехмерные римановы метрики [100].

Математические модели помогают [18, 54, 109, 130] систематизировать экспериментальный материал (который продолжает накапливаться [81]) и нащупывать пути дальнейших исследований [54]. Так, оказалось, что у R -колбочек кроме основного максимума чувствительности ($\lambda \approx 570$ (нм)) есть второй (более «низкий») максимум, расположенный в фиолетовой области ($410 < \lambda < 430$ (нм)) и показанный на рис. 198; его наличием объясняется субъективная близость фиолетового и красного цветов, отмеченная еще И. Ньютоном. Анализ следствий

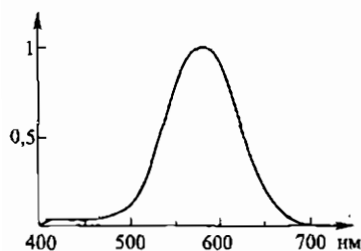


Рис. 198

из математических моделей, их сопоставление друг с другом и с результатами различных экспериментов показали [54], что на пути от сетчатки к мозгу зрительная информация подвергается сложной переработке. Дальнейшие физиологические исследования это подтверждают [18]: считается, что есть нервные каналы, которые передают сумму $(B) + (G) + (R)$ и две разности: $(R) - (G)$ (красно-зеленая система) и $(B) - ((G) + (R))$ (сине-желтая система).

9°. Для диаграммы МКО-31 по экспериментальным данным тоже построена риманова метрика — двумерная вида (1) из § 24. Главную роль в этом сыграли исследования Мак Адама (D. L. MacAdam), проводившиеся им на протяжении нескольких десятилетий, начиная с 30-х годов; о них см. в [44, 54, 77]. Здесь мы остановимся подробнее на геометрической стороне дела. Пусть цветовое пространство в модели представляет собой замыкание $\bar{V}$ области V на плоскости $\mathbb{R}^2$. Из произвольной точки $P \in V$ проведем луч PX , возьмем на нем текущую точку Y и будем издалика придвигать ее к P , пока наблюдатель, следящий за изменением цвета, не перестанет различать Y и P . Тогда фактически Y займет на луче положение $Y_1 \neq P$. Отрезок PY_1 принимают за единицу масштаба в точке P по направлению PX . Важный частный случай, когда концы таких отрезков около P образуют фигуру, близкую к эллипсу с центром в этой точке, схематически показан на рис. 199 (хотя нужно иметь в виду, что возможны более сложные ситуации; см. [13]).

Построение делается для конечного множества точек, с них проводится интерполяция на расположенную между ними часть области V [16], а затем — экстраполяция на $\bar{V}$; при этом приходится применять методы математической статистики — для отсеивания экспериментального «шума» [63, 121]. Пусть все это сделано. Тогда для каждого луча у его начала мы имеем единицу масштаба, называемую в колориметрии *единицей зрительного различения* (ЕЗР), а около каждой точки — *эллипс единиц различения* (ЭлЕР):

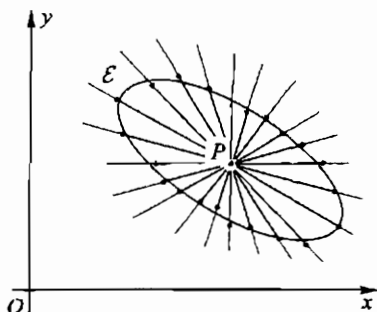


Рис. 199

$$g_{11}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2g_{12}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + g_{22}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 = 1, \quad (2)$$

где (x_0, y_0) — текущая точка области V , а (x, y) — текущая точка на эллипсе, $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$, $g_{11} + g_{22} > 0$. Функции g_{ij} (после экстраполяции) определены на $\bar{V}$. В больших размерностях вместо эллипсов появляются эллипсоиды, см. [77, с. 295–296].

Возьмем гладкую линию $\mathcal{L} \subset V$, на ней дугу $\sim P_1 P$ и впишем в эту дугу ломаную $P_1 P_2 \dots P_r$ ($P_r = P$). Из точки P_1 в направлении отрезка $P_1 P_2$ проведем луч и обозначим Q_1 точку пересечения этого луча с тем ЭлЕР $\mathcal{E}_1$, центром которого служит P_1 (рис. 200). По построению ЭлЕР отрезок $P_1 Q_1$ служит единицей новой неевклидовой длины. Поэтому звену $P_1 P_2$ ломаной $P_1 P_2 \dots P_r$ мы должны приписать длину ℓ_1 согласно пропорции

$$\ell_1 = \frac{\ell_1}{1} = \frac{P_1 P_2}{P_1 Q_1}. \quad (3)$$

Координаты точки Q_1 обозначим $(\hat{x}, \hat{y})$. Возвращаясь в окрестность точки P_1 , найдем пропорцию (рис. 200):

$$\frac{\hat{x} - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\hat{y} - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{1}{\ell_1}. \quad (5)$$

Используя (4) и (5), можем записать

$$\hat{x} - x_1 = \frac{1}{\ell_1} \Delta x_1, \quad \hat{y} - y_1 = \frac{1}{\ell_1} \Delta y_1. \quad (6)$$

Вместе с тем, при $m = 1$ равенство вида (2) дает уравнение эллипса $\mathcal{E}_1$, откуда

$$1 = A(\hat{x} - x_1)^2 + 2B(\hat{x} - x_1)(\hat{y} - y_1) + C(\hat{y} - y_1)^2, \quad (7)$$

где $A = g_{11}(x_1, y_1)$, $B = g_{12}(x_1, y_1)$, $C = g_{22}(x_1, y_1)$. Из (6) и (7) имеем

$$1 = \frac{1}{\ell_1^2} (A(\Delta x_1)^2 + 2B\Delta x_1\Delta y_1 + C(\Delta y_1)^2),$$

поэтому

$$\ell_1 = \sqrt{A(\Delta x_1)^2 + 2B\Delta x_1\Delta y_1 + C(\Delta y_1)^2}. \quad (8)$$

Выкладки (3)–(8) проделаем затем для $m = 2, 3, \dots, r-1$ (рис. 201), и все найденные величины подставим в выражение для ℓ :

$$\ell(\sim P_1 P) = \lim_{m=1}^r \sqrt{(g_{11})_m (\Delta x_m)^2 + 2(g_{12})_m \Delta x_m \Delta y_m + (g_{22})_m (\Delta y_m)^2}, \quad (9)$$

где $(g_{ij})_m = g_{ij}(x_m, y_m)$, а $\max\{|\Delta x_m|, |\Delta y_m|\} \rightarrow 0$. В выражении (9) под знаком предела стоит интегральная сумма. Если функции $g_{ij}(x, y)$ непрерывны, то ее предел даст интеграл

$$\ell(\sim P_1 P) = \int_{\sim P_1 P} ds, \quad (10)$$

в котором

$$ds^2 = g_{11}(x, y) dx^2 + 2g_{12}(x, y) dx dy + g_{22}(x, y) dy^2. \quad (11)$$

Отметим, что обратный переход от (10), (11) к (2), (3) аналогичен переходу от первой квадратичной формы ds^2 , записанной для поверхности, к использованию этой же квадратичной формы (при фиксированных значениях аргументов у g_{ij}) в качестве метрической формы касательной плоскости (§ 8, п. 5°).

Укажем еще, что в литературе для ds^2 часто употребляется термин *линейный элемент*.

10°. Для реализации плана, изложенного в п. 9°, Мак Адаму пришлось создать специальную аппаратуру. Найденная им метрика ds^2 нашла важные приложения: например, фактически с ее учетом разработаны стандарты для цветовых сигналов на транспорте [77]. 12 из 25 эллипсов, построенных Мак Адамом (см. [44, 54, 77]), показаны на рис. 202, где по сравнению с масштабом диаграммы они увеличены в 20 раз. Видно, как сильно они различаются по величине, эксцентриситету и направлениям осей.

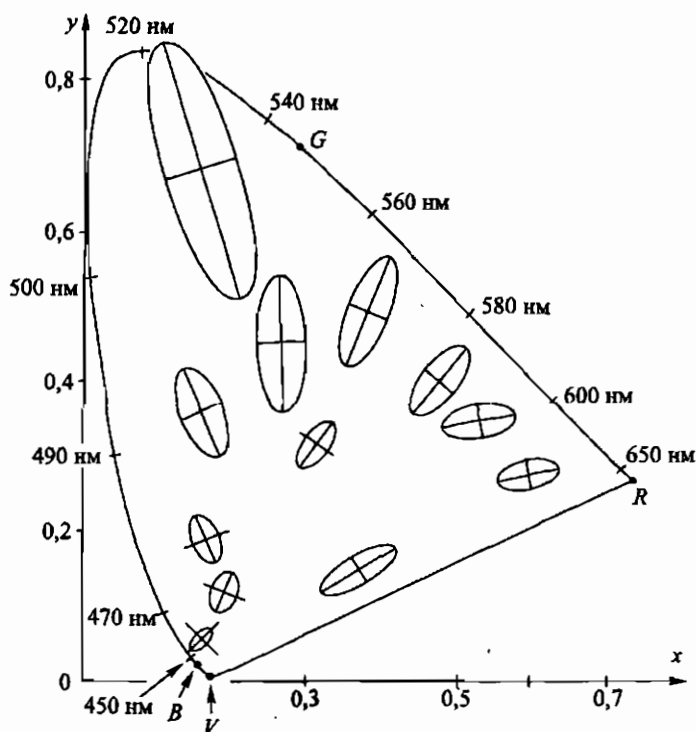


Рис. 202

11°. Подчеркнем, что метрика вида (1) из § 24 позволяет находить сразу (приблизленно) расстояния между «близкими» точками. Для точек, «далеких» друг от друга, надо строить соединяющую их кратчайшую и в метрике ds^2 искать ее длину — она и будет искомым расстоянием. С этой целью надо решать двухточечную краевую задачу для дифференциального уравнения геодезических линий $k_g = 0$; для его подробной записи нужно воспользоваться формулами (3), (5), (10**) и (12)–(15) из § 40°. При этом могут возникнуть ситуации, аналогичные

15°. В середине XX столетия на базе теории вероятностей, математической статистики, алгебры и многомерной геометрии был создан новый метод обработки результатов экспериментов, получивший название *многомерного шкалирования*. Ему посвящена монография [111]. В работе [54] подчеркивается, что он создавался в тесной связи с колориметрическими исследованиями. Используя его, авторы книг [53, 54, 109] построили в колориметрии серию так называемых *сферических моделей*. На одной из них остановимся подробнее. В ней (как и диаграмме МКО-31) речь идет о равноярких апертурных цветах. Цветовое пространство в этой модели представляет собой сферическую поверхность $\mathcal{U}_S$ — часть полусферы S^2 в $\mathbb{R}^3$:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2, \quad x_3 > 0, \quad (13)$$

рис. 203; край поверхности $\mathcal{U}_S$ обозначим $\mathcal{L}_1$. Аналогично кругу Ньютона цветовой тон описывается долготой φ ; насыщенность тона, измеренная в ЕЗР, пропорциональна дополнению $(\frac{\pi}{2} - \psi)$ до широты ψ ; белая точка имеет координаты $(0, 0, r)$. В координатных плоскостях x_1x_3 и x_2x_3 располагаются оппонентные пары константных цветов (п. 7°). Евклидовы длины хорд, соединяющих цветные точки, выражают величину субъективно воспринимаемых различий между цветами.

16°. Модель, о которой шла речь в предыдущем пункте, нашла приложения в медицинской диагностике. Дело в том, что миллионы людей имеют неполноценное цветовое зрение, а выявление его дефектов играет важную роль в определении профпригодности, в частности, для работы на транспорте. Старые диагностические методы либо были неточными, либо требовали сложного оптического оборудования, пригодного лишь для индивидуальных проверок [109]. Новый метод требует лишь цветного телевизора со специальной системой управления и компьютера с надлежащим программным обеспечением. Проверки могут быть массовыми. Испытуемые по указанной им схеме записывают, какие цвета они видят последовательно на телеэкране. Эта информация вводится в компьютер. Для каждого из испытуемых строится в сферической модели его цветовая поверхность. Ее проекция на плоскость $x_3 = 0$ распечатывается: она дает много информации. Ее типичный вид в норме показан на рис. 204, а. При нарушениях проекция сжата: либо к одной из координатных осей (см. рис. 204, б), либо к центру круга (рис. 204, в), и тогда почти все цвета различаются плохо, зрение приближено к черно-белому. В ситуации, показанной на рис. 204, б, подавлена одна из двух оппонентных систем (здесь — красно-зеленая), а другая — сине-желтая — работает (бывает и наоборот). Добавочный признак: в норме линия пурпурных тонов изображается на сфере S^2 дугой большой окружности; подробности см. в [109], где этой проблематике посвящена гл. 6.

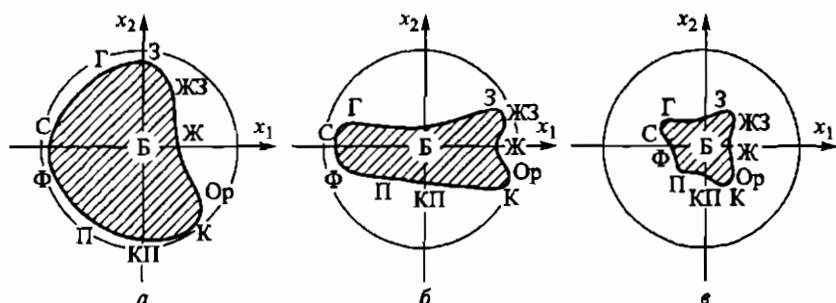


Рис. 204

17°. Сформулируем теперь еще некоторые понятия, нужные для дальнейшего.

Определение 1. ε -окрестностью множества $M \subset \mathbb{R}^3$ называется объединение всех открытых шаров радиуса $\varepsilon > 0$ с центрами в точках этого множества.

Определение 2. Для k -мерной поверхности в $\mathbb{R}^n$ (см. § 15, п. 7*) разность $n - k$ называется ее *коразмерностью*.

Определение 3. Поверхность S называется *звездной относительно точки O* , если каждый из лучей, исходящих из точки O , пересекает S не более, чем в одной точке.

Еще рассмотрим линию $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$ и в ее текущей точке P проведем нормальную плоскость Π_P (т. е. ортогональную касательной). В плоскости Π_P проведем окружность ℓ_P радиуса r с центром P (рис. 205).

Определение 4. Поверхность T , образованная окружностями ℓ_P , называется *трубообразной* радиуса r с направляющей $\mathcal{L}$.

Пример. При $0 < r < R$ для окружности $\mathcal{L}$ радиуса R в качестве такой трубообразной поверхности получим тор (см. выше рис. 93); он служит границей r -окрестности этой окружности.

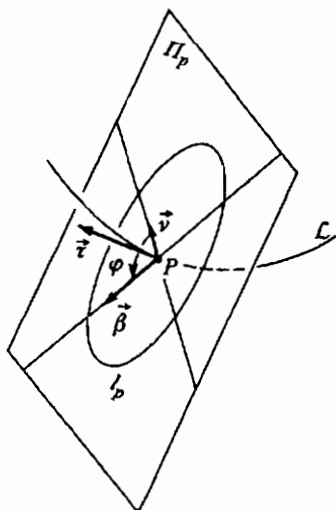


Рис. 205

18°. Пример, приведенный в конце предыдущего пункта, допускает обобщение. Именно, пусть $\mathcal{L}$ — гомеоморфная окружности кривая в $\mathbb{R}^3$, не имеющая самопересечений, с ограниченной кривизной k ,

а число $\varepsilon > 0$ столь мало, что $k\varepsilon < 1$. Далее, пусть T — трубообразная поверхность радиуса ε с направляющей $\mathcal{L}$ (рис. 206). Тогда, используя сведения из теории кривых [31] и результаты главы 6, можно доказать, что T является огибающей семейства сфер $\{S_P\}$ радиуса ε с центрами $P \in \mathcal{L}$ и что окружности ℓ_P на этой огибающей служат характеристиками, а затем, воспользовавшись этим, установить, что часть пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченная замкнутой трубообразной поверхностью T (см. рис. 206, на котором изображена такая ситуация, когда T тоже не имеет самопересечений) представляет собой ε -окрестность линии $\mathcal{L}$.

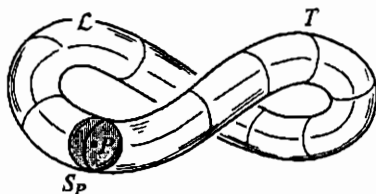


Рис. 206

19°. Линия $\mathcal{L}_\Gamma$ на сфере S^2 радиуса r (см. п. 15°, формулу (13) и рис. 203) допускает в географических координатах (φ, ψ) представление вида $\psi = \psi(\varphi) > 0$. Но точки V и R на $\mathcal{L}_\Gamma$ — угловые. Поэтому, чтобы использовать геометрическую конструкцию предыдущего пункта, предположим, что $\mathcal{L}_\Gamma$ на S^2 аппроксимирована C^2 -гладкой линией $\tilde{\mathcal{L}}$ с уравнением аналогичного вида $\psi = \tilde{\psi}(\varphi)$, причем $0 \leq \tilde{\psi}(\varphi) \leq \psi(\varphi)$. Линия $\tilde{\mathcal{L}}$ на S^2 ограничивает область $\tilde{\mathcal{U}}$, содержащую точку $(0, 0, r)$; далее удобно считать, что к $\tilde{\mathcal{U}}$ присоединена ее граница $\tilde{\mathcal{L}}$. Пусть теперь k — кривизна линии $\tilde{\mathcal{L}}$; предположим дополнительно, что

$$0 < \varepsilon < r, \quad \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \tilde{\psi}(\varphi) < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right) \quad \text{и} \quad k\varepsilon < 1, \quad (14)$$

и обсудим, как в $\mathbb{R}^3$ построить ε -окрестность фигуры $\tilde{\mathcal{U}}$ и замыкание $\overline{\mathcal{W}_\varepsilon\{\tilde{\mathcal{U}}\}}$ этой ε -окрестности. Прежде всего, нужно взять шаровой слой $\mathcal{W}_\varepsilon$, в сферических координатах задаваемый неравенствами $r - \varepsilon \leq \rho \leq r + \varepsilon$, и построить трубообразную поверхность T_ε радиуса ε с направляющей $\tilde{\mathcal{L}}$. Тогда T_ε «вырезает» из $\mathcal{W}_\varepsilon$ часть $\tilde{\mathcal{W}}$, содержащую точку $(0, 0, r)$, аналогично тому, как $\mathcal{L}_\Gamma$ «вырезает» $\mathcal{U}_S$ из S^2 (рис. 203). Объединение $\tilde{\mathcal{W}}$ с той замкнутой частью $\mathbb{R}^3$, которая ограничена поверхностью T_ε , и составляет искомую $\overline{\mathcal{W}_\varepsilon\{\tilde{\mathcal{U}}\}}$.

20°. Возвращаясь к цветовому зрению, отметим, что представляет интерес сопоставление результатов двух разных подходов к построению метрик в цветовых пространствах: локального — через ЕЗР, и глобального — основанного на многомерном шкалировании [54, 111]. В этом плане укажем на другую сферическую модель, построенную

теми же авторами [53, 54, 109]. В ней речь идет о черно-белой составляющей дневного зрения; цветовая поверхность одномерна: она является дугой окружности S^1 на плоскости $\mathbb{R}^2$. Длины хорд, соединяющих цветовые точки, выражают величину субъективно воспринимаемых различий; длина дуги окружности дает расстояние, измеренное в ЕЗР. На этой модели, таким образом, хорошо видна роль объемлющего пространства, в которое вложена цветовая поверхность.

Было бы заманчиво получить аналогичные взаимосвязи в больших размерностях; в частности, между сферической моделью, о которой шла речь в пп. 15°–16°, и диаграммой МКО-31 с метрикой Мак Адама. А для этого надо, прежде всего, выяснить, можно ли метрику Мак Адама изометрически вложить в $\mathbb{R}^3$. Тем самым, абстрактная проблема о погружении римановых метрик в евклидовы пространства (которой много занимались геометры, см. обзоры [25, 105] и указанную в них литературу) приобретает прикладную направленность. Применительно к метрике Мак Адама вопрос этот (в других терминах) обсуждался в книге [44; с. 334–353]. Из изложенного там следует, что для колориметрии будут представлять интерес не только изометрические, но и близкие к изометрическим вложения. Между прочим, некоторыми их классами геометры тоже уже занимались: см. [59], а также выше, гл. 7.

Подчеркнем, что изометрическое отображение диаграммы МКО-31 с метрикой Мак Адама на поверхность U_S , участвующую в сферической модели (пп. 15° и 16°), заведомо невозможно вследствие п. 13° и теоремы Гаусса о сохранении кривизны K при изометрии.

Сопоставляя изложенное, можно поставить конкретную задачу: изучить возможность вложений, близких к изометрическим, для заданной в МКО-31 метрики Мак Адама, в ту часть пространства $\mathbb{R}^3$, которая в п. 19° обозначена как W_ε , и свойства таких вложений, если они возможны.

Решение поставленной задачи потребует совместных усилий колориметристов и геометров, а также специалистов по математической статистике и численным методам (по обработке результатов, математическому моделированию). На начальных этапах этой работы могут быть использованы поверхности, звездные относительно центра O сферы S^2 .

Дальнейшая проработка этой проблематики, по-видимому, будет полезна и в других прикладных задачах [32, 33], как обычно бывает в математике.

21°. С переходом от изучения апертурных цветов к предметным увеличится количество значимых факторов. Это приведет к увеличению размерности цветовой поверхности и объемлющего ее пространства, а, возможно, и к увеличению коразмерности поверхности. Поэтому в приложениях математики к колориметрии будет возрастать роль не только теории поверхностей в трехмерном пространстве, но и многомерной геометрии.

Заключение

Читатель, одолевший эту книгу, видит, что теория поверхностей (как и другие разделы геометрии) не только красива, но и имеет важные приложения; в частности, в вопросах, касающихся создания и эксплуатации разных тонкостенных конструкций. Вместе с тем, даже в наиболее простой и наглядной ситуации — когда речь идет о геометрических фигурах в трехмерном евклидовом пространстве — ее нельзя считать полностью завершенной. В еще большей мере это относится к многомерным обобщениям [25].

Отметим также, что в последние десятилетия активно развиваются и приобретают все большую актуальность связанные с теорией поверхностей новые математические направления, находящиеся на стыке геометрии и теории колебаний, см. [38, 41, 97], а также [8, 10, 65, 66, 88] и главы 6, 7, 11 и 12 в 5-м томе пятитомника [74].

Приведем еще один пример. В разных странах ведутся разработки летательных аппаратов для доставки крупногабаритных грузов в труднодоступные районы. Наиболее перспективными для этих целей считаются [11] комбинированные аппараты с использованием двух видов подъемной силы: аэродинамической (как у самолетов и вертолетов) и аэростатической (как у дирижаблей). В этих аппаратах предстоит использовать тонкие оболочки больших размеров и сложной геометрической формы. При расчетах придется учитывать не только статические и динамические нагрузки и температурные воздействия, но и возможные колебания.

К этому добавим, что новые задачи перед геометрией и теорией колебаний ставит также развитие космической техники [15, 112].

Предметный указатель

Биекция 104

Бутылка Клейна 111, 113

— с m ручками 112

Вектор кривизны 63

— нулевой 31, 94

Вектор-функция 31

— бесконечно малая 31

— дифференцируемая 32

— непрерывная 31

— , дифференциал 32, 42

— , предел 31

— , частная производная 32

Вершина (конуса) 15, 38, 40, 114

Вложение 105, 112, 291

Внутренняя геометрия поверхности
61

Выпуклая область 17, 248

Вычислительная геометрия 91

Гауссова сфера 16, 78, 88

Гауссовой кривизны модуль 91

Геликонд косой 39, 40

— прямой 38, 40, 56, 96

Геодезический треугольник 159, 287

Гиперповерхность 109

Главная нормаль (к кривой) 64

Гомеоморфизм 104

— локальный 105

Двухточечная краевая задача 286

Деривационные формулы 97, 194,
197, 199

Диаметр (множества) 18

Дифференциал второй 71

— длины дуги 52

— полный 47

Дифференциальное уравнение
(обыкновенное) первого поряд-
ка, не разрешенное относительно
производной 48

Дифференциальное уравнение
(обыкновенное) первого поряд-
ка, разрешенное относительно
производной 47, 62, 86

— — — линий кривизны 86

— — — ортогональных траекторий 62,
101

— — — геодезических линий 151, 286

Дифференциальные формы линей-
ные 98

Длина дуги 52, 176

Долгота 37, 88, 288

Единица зрительного различения
(ЕЗР) 283

Жесткость оболочки 254

— поверхности 247, 260

Замена переменных 44, 208

Избыток треугольника 160, 287

Изгибание поверхностей 61

Инвариант аксиальный 73

Инвариантность дифференциала 47

Индикатриса Дюпена 27, 29, 74, 84

Интерполяция 283

Касательная плоскость 9, 12, 15, 42,
46, 47, 66, 68

Квадратичная форма поверхности,
вторая 72

— — — , первая 52, 285

— — — , третья 191, 193

Классы регулярности вектор-функ-
ций 33, 45

— — — поверхностей 34, 45, 46, 107

Колориметрия 278

Координатная линия 35, 44, 173

— сеть 35, 37, 43, 44

— ячейка 61

- Координаты гауссовы 35
 — географические 37, 56, 290
 — криволинейные 35
 — ортогональные 56, 57
 — полярные 27, 38, 59
 — сферические 290
 Коразмерность 289, 291
 Косая симметрия 97
 Коэффициенты второй квадратич-
 ной формы 72, 74
 — первой квадратичной формы 52
 Край (поверхности) 30, 113, 115
 — внешне-геометрический 115
 — внутренне-геометрический 115
 Красно-зеленая система 282, 288
 Кратность покрытия 88
 Кратчайшая 23, 286
 Кривая 109
 — овальная 113
 — ограниченная 113, 115
 Кривизна гауссова 29, 30
 — геодезическая 64, 93
 — нормальная 64
 — нормального сечения 24
 — средняя 29, 94
 Кривизны главные 25, 78, 84, 93
 Лемма Фурье 18
 Линейная комбинация 281
 Линейный элемент 285
 Линия 109
 — асимптотическая 66, 76, 87
 — геодезическая 66
 — координатная 35, 90
 — кривизны 81, 90
 — пурпурных цветов (тонов) 288
 Лист Мёбиуса 113
 Люминофор 281
 Меридиан 38, 56, 82
 Метрика Мак Адама 287, 291
 Метрическая форма 53, 285
 Многомерное шкалирование 288
 Многообразие 108
 Множества гомеоморфные 104
 Множество компактное 109
 Нанометр 278
 Направление линии на поверхности
 58
 Направления асимптотические 29,
 66, 76
 — главные 26, 66, 71, 79, 85
 — сопряженные 84
 Направляющая 39, 40, 289
 Насыщенность 279
 — (цвета) 282, 288
 Натуральный параметр 63, 65, 82,
 93, 101
 Нормаль (к поверхности) 15, 37, 42,
 88
 Нормальное сечение 24, 64, 82
 Носитель поверхности 107, 109
 Область на поверхности 107, 109
 — односвязная 107
 Оболочка 30, 230, 267
 Образующая 39, 40, 92, 94
 Огибающая (семейства поверхно-
 стей) 290
 Окрестность (точки на поверхности)
 41, 105, 109
 — множества 289
 Оппонентные пары цветов 280, 282
 Ориентация 73
 — поверхности 113
 Ориентируемость 112
 Ортогональность линий, поверхно-
 стей 56
 Ортогономизированный трехгранник
 97
 Отображение биективное (взаимно-
 однозначное) 104
 — гомеоморфное 104
 — локально-гомеоморфное 105
 — непрерывное 104
 — нормальное 89
 — обратное 104
 — сферическое 16, 88
 Отображения эквивалентные 106,
 109
 Параболоид соприкасающийся 75,
 83
 Параллель 38, 56, 82
 Плоскость нормальная к кривой
 111, 113, 289
 — проективная 108
 — проективная с m ручками 112

Плоскость с m ручками 111

— с ручкой 111

— соприкасающаяся 66, 67

Площадь поверхности 18, 22, 23, 59, 60

Поверхность 8, 30, 105, 107

— C^n -гладкая 35

— k -мерная 109, 289

— винтовая 39

— вращения 38, 82

— гладкая 8, 35, 107

— замкнутая 109, 115, 290

— звездная 289, 291

— коническая 15, 40, 92

— линейчатая 40, 66, 94

— минимальная 94

— неориентируемая 113

— обобщенная 107, 109

— ориентируемая 109, 113

— плоская 36, 59, 96, 109

— развертывающаяся 92

— сферическая 109, 288

— трубообразная 290, 289

— цилиндрическая 39, 92, 99

— элементарная 34, 37, 38, 92, 103, 106, 108

— заданная параметрически 35, 49

Погружение 107, 112, 291

Приклеивание ручек 111

Простой кусок 35

Радиус кривизны 67

Расстояние (в метрике) 286

Риманова метрика 282

Самопересечения поверхности 110

Семейство линий 43, 61

— поверхностей 95

Сеть линий кривизны 86, 87, 93

— чебышевская 63

Сине-желтая система 282, 288

Соприкасающаяся окрестность 67

— сфера 27

Соприкасающийся параболоид 26

Структура 110

Сужение (отображения, функции)
104

Сфера с m ручками 112

Сферический образ поверхности 16, 78, 88, 91, 109

Тензор 54

Тензорное поле 54

— — аксиальное 73

Теорема Виета 79

— Гаусса (о площади сферического образа) 88

— (об инвариантности кривизны K) 291

— Менье 67, 83

— Родрига 80, 94

— о неявных функциях 41, 107

Тождество Лагранжа 52

Тор 108, 111, 289

Точка гиперболическая 27, 75

— омбическая 29, 85, 86

— особая 86

— параболическая 28, 75

— поверхности 38, 103, 105, 106, 109

— угловая 279, 290

— уплощения 28, 75, 86

— шаровая 27, 86

— эллиптическая 27, 75

Траектории изогональные 62

— ортогональные 62, 101

Триангуляция 23

Угол между линиями 55, 56, 58

Участки постоянного (цветового) тона 279

Формула Тейлора 34, 232

— Френе 97

— Эйлера 25, 26, 68, 72, 87

Характеристика (на огибающей) 290

Цвета апертурные 281

— дополнительные 280

— константные 282, 288

— монохроматические 278

— предметные 281, 291

Цветовая точка 278

— поверхность 278, 288, 291

Цветовое пространство 278, 282, 290

Цветовой круг Ньютона 279, 282

— тон 282, 288

Центр кривизны 67

Широта 37, 89, 288

Экстраполяция 283

Эллипс единиц различения 283

Эллипсоид 82, 108, 110, 283

Эллипсы Мак Адама 286

Якобиан 41, 45, 102, 107

Яркость 279, 282

Список литературы

- 1 Аксельрад Э. Л. Гибкие оболочки. — М.: Наука, 1976. — 376 с.
- 2 Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. — 386 с.
- 3 Александров А. Д. Об основах дифференциальной геометрии и их изложении // УМН, 1949. — Т. 4, вып. 3. — С. 139-170.
- 4 Александров А. Д. Поверхности, представимые разностями выпуклых функций // ДАН СССР. — 1950. — Т. 72, № 4. — С. 613-617.
- 5 Александров А. Д., Залгаллер В. А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны // Труды МИАН СССР. — 1962. — Т. 63. — 262 с.
- 6 Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. — Киев: Наукова думка, 2002. — 467 с.
- 7 Аминов Ю. А. Минимальные поверхности. — Харьков: ХГУ, 1978. — 126 с.
- 8 Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Паламарчук В. Н. Динамика ребристых оболочек — Киев: Наукова думка, 1983. — 204 с.
- 9 Амиро И. Я., Грачев О. А., Заруцкий В. А., Пальчевский А. С., Санников Ю. А. Устойчивость ребристых оболочек вращения. — Киев: Наукова думка, 1987. — 160 с.
- 10 Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Ревуцкий В. Н., Скосаренко Ю. В., Телалов А. И., Фиалко С. Ю. Колебания ребристых оболочек вращения. — Киев: Наукова думка, 1988. — 172 с.
- 11 Арне М. Я. Дирижабли. — Киев: Наукова думка, 1986. — 263 с.
- 12 Арнольд В. И. Теория катастроф. — М.: Наука, 1990; — УРСС, 2004 — 126 с.
- 13 Асанов Г. С. Финслероидная геометрия. — М.: Физич. ф-т МГУ, 2004. — 160 с.
- 14 Бакельман И. Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1965. — 340 с.
- 15 Баничук Н. В., Карпов И. И., Климов Д. М., Маркеев А. П., Соколов Б. Н., Шаранюк А. В. Механика больших космических конструкций. — М.: Факториал, 1997. — 302 с.
- 16 Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука, 1987; — Бином Лаб. знаний, 2004. — 636 с.
- 17 Безье П. Геометрические методы // В кн. «Математика и САПР, книга 2». — М.: Мир, 1989 — С. 96-255.
- 18 Бертудис А. В., Глезер В. Д. Пространственное цветовое зрение. — Л.: Наука, Лен. отд., 1990. — 142 с.
- 19 Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий — М.: Мир, 1967 — 335 с.
- 20 Бляшке В. Дифференциальная геометрия. — М.-Л.: ОНТИ, 1935. — 330 с.

21. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. — М.: Гостехиздат, 1957. — Ижевск: НИЦ РХД, 2000. — 231 с.
22. Брагинский В. Б. Гравитационно-волновая астрономия: новые методы измерений // УФН. — 2000. — Т. 170, № 7. — С. 743–752.
23. Брагинский В. Б. Отрочество экспериментальной физики // УФН. — 2003 — Т. 173, № 1. — С. 89–96.
24. Бреббиа К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов — М.: Мир, 1987. — 524 с.
25. Бураго Ю. Д. Геометрия поверхностей в евклидовых пространствах // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 48 «Геометрия-3». — М.: ВИНТИ, 1989 — С. 5–97
26. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959, — М.: Наука, 1988. — 509 с.
27. Векуа И. Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Труды Тбилисского матем. ин-та. — Тбилиси: Мецниереба, 1965. — 102 с
28. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. — М.: Наука, 1982 — 376 с.
29. Воднев В. Т., Гусак А. А., Нахимовская А. Н., Рябушко А. П., Тутаев Л. К., Феденко А. С. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии. — Минск. Высшая школа, 1970. — 374 с.
30. Воронич И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. — М.: Наука, 1989. — 376 с.
31. Выгодский М. Я. Дифференциальная геометрия. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 512 с
32. Галимов К. З., Паймушин В. Н. Теория оболочек сложной геометрии — Казань. Изд-во КГУ, 1985. — 162 с.
33. Галимов К. З., Паймушин В. Н., Тергулов И. Г. Основания нелинейной теории оболочек. — Казань: ФЭН, 1996 — 216 с.
34. Гильберт Д. Основания геометрии — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.—491 с.
35. Головешкин Ю. В. Методы теории тонких оболочек в строительной механике надводного корабля. — С.-Пб. Судостроение, 1992. — 174 с
36. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1976. — 512 с
37. Гольденвейзер А. Л. Математическая жесткость поверхностей и физическая жесткость оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела — 1979. — № 6. — С. 66–77
38. Гольденвейзер А. Л., Лидский Б. В., Товстик П. Е. Свободные колебания упругих оболочек. — М.: Наука, 1979 — 384 с.
39. Горлов А. П. Прочность обшивки корпусов изделий подводной техники с начальными технологическими отклонениями от правильной формы // Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова (С.-Пб.) — 1997. — Вып 5 (289) — С. 84–90
40. Григолюк Э. И., Мамай В. И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций — М.: Физматлит, 1997 — 272 с
41. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. — Киев: Наукова думка, 1980 — 171 с.

42. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Задачи статики анизотропных оболочек. — М.: Наука, 1992. — 336 с.
43. Деклу Ж. Метод конечных элементов. — М.: Мир, 1976. — 92 с.
44. Джадд Д., Вышецки Г. Цвет в науке и технике. — М.: Мир, 1978. — 592 с.
45. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Т. 1. — М.: УРСС, 2001. — 334 с.
46. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформации поверхностей // УМН. — 1948. — Т. 3, вып. 2. — С. 47–158.
47. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформации поверхностей «в малом» // Труды МИАН СССР. — 1949. — Т. 30. — 128 с.
48. Ефимов Н. В. Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны // Матем. сб. — 1964. — Т. 64, № 2. — С. 286–320.
49. Ефимов Н. В. Поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной // УМН. — 1966. — Т. 21, вып. 5. — С. 3–58.
50. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. — М.: Наука, 1970; М.: Физматлит, 2004. — 464 с.
51. Залгаллер В. А. Теория огибающих. — М.: Наука, 1975. — 104 с.
52. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. — М.-Л.: ОНТИ, 1938. — 400 с.
53. Измайлов Ч. А. Сферическая модель цветоразличения. — М.: Изд-во МГУ, 1980. — 171 с.
54. Измайлов Ч. А., Соколов Е. Н., Черноризов А. М. Психофизиология цветового зрения. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 206 с.
55. Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А. Общая нелинейная теория упругих оболочек. — С.-Пб.: изд-во С.-Пб. ун-та, 2002. — 386 с.
56. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. — М.-Л.: Гостехиздат, ч. 1, 1947. — 512 с.; ч. 2, 1948. — 407 с.
57. Карпов В. В., Игнатьев О. В., Сальников Ю. А. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. — М.-С.-Пб.: Ассоц. строит. вузов, 2002. — 402 с.
58. Кархер Г., Саймон Л., Фудзимото Х., Хильдебрант С., Хоффман Д. Минимальные поверхности // Итоги науки и техники. Современ. матем. Фундамент. направл. «Геометрия V». Под ред. Оссермана Р. — М.: Физматлит, 2003. — 352 с.
59. Кёйпер Н. Х. О C^1 -изометричных вложениях // Математика 1-2 — 1957. — С. 17–28. (Пер.: Kuiper N. On C^1 -isometric imbedding // Proc. Konned. Acad. wetensch. (Indig. math.). — 1955. — A 58, № 4. — P. 545–556.)
60. Корень Г. В. Тензорное исчисление. — М.: изд-во МФТИ, 2000. — 240 с.
61. Кон-Фоссен С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. — М.: Физматгиз, 1959. — 303 с.
62. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.-Л.: Гл. ред. техн. лит., 1937; М.: Наука, 1965. — 426 с.
63. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: ИЛ, 1948; М.: Мир, 1975; М.-Ижевск. НИЦ РХД, 2003. — 648 с.
64. Кривошапко С. Н. Геометрия и прочность торсовых оболочек. Реферативная информация. — М.: Ассоц. строит. вузов, 1995. — 274 с.

65. Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. — Саратов: изд-во СГУ, 1976. — 216 с.
66. Крысько В. А., Куцемако А. Н. Устойчивость и колебания неоднородных оболочек. — Саратов: изд-во СГУ, 1999. — 201 с.
67. Кузнецов В. В. Элементарный анализ геометрии поверхностей и метод конечных элементов в механике упругих оболочек при произвольных перемещениях. — Новосибирск, 1984. Деп. ВИМИ, № Д06203. — 138 с.
68. Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. — М.: ИЛ, 1953. — 310 с.
69. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965, 1987; М.-С.-Пб.: Лань, 2002. — 688 с.
70. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1968, 1973. — 576 с.
71. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. — М.: Наука, 1968. — 576 с.
72. Лобачевский Н. И. О началах геометрии. Соч., т. 1. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1946. — С. 182–261.
73. Люкшин В. С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. — М.: Машиностроение, 1968. — 371 с.
74. Методы расчета оболочек. В 5-ти томах. — Киев: Наукова думка. — Т. 1. — 1980. — 635 с.; — Т. 2. — 1980. — 367 с.; — Т. 3. — 1981. — 295 с.; — Т. 4. — 1981. — 543 с.; — Т. 5. — 1982. — 399 с.
{Том 1. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н., Чехов Вик. Н., Шнеренко К. И. Теория оболочек, ослабленных отверстиями. Том 2. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек. Том 3. Шевченко Ю. Н., Прохоренко И. В. Теория упругопластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. Том 4. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Том 5. Гузь А. Н., Кубенко В. Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек.}
75. Механика оболочек и пластин // Сб. докладов XIX Междунар. конф. по теории оболочек и пластин; 28–30 сентября 1999 г. — Н. Новгород: Изд-во НижГУ, 1999. — 212 с.
76. Мешков В. В. Основы светотехники. Часть 1. — М.: Энергия, 1979. — 368 с.
77. Мешков В. В., Матвеев А. Б. Основы светотехники. Часть 2. Физиологическая оптика и колориметрия. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 431 с.
78. Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Физматлит, 2001. — 351 с.
79. Моденов П. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии. — М.: Учпедгиз, 1949. — 240 с.
80. Николаев И. Г., Шефель С. З. Выпуклые поверхности с положительной ограниченной удельной кривизной и априорные оценки для уравнений Монжа–Ампера // Сиб. матем. ж. — 1985. — Т. 26, № 4. — С. 120–136.
81. Николс Дж., Мартин А. Р., Валлас Дж. Б., Фукс П. А. От нейрона к мозгу. — М.: УРСС, 2003. — 672 с.
82. Норден А. П. Теория поверхностей. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 260 с.
83. Ньютон И. Оптика. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 365 с.

- 84 *Нэш Дж* Проблема вложений для римановых многообразий // УМН — 1971 — Т 26, вып 4 — С 173–216 (*Nash J* The imbedding problem for Riemannian manifolds // Ann of Math — 1956 — V 63, № 1 — P 20–66)
- 85 *Оссерман Р* Минимальные поверхности // УМН — 1967 — Т 22, вып 4 — С 55–136
- 86 *Павлов В А* Механика авиаконструкций Статика, устойчивость, катастрофы — Казань изд-во КГТУ им А Н Туполева, 1999 — 161 с
- 87 *Палий О М, Спиро В Е* Анизотропные оболочки в судостроении — Л Судостроение, 1977 — 392 с
- 88 *Перцев А К, Платонов Э Г* Динамика пластин и оболочек — Л Судостроение, 1987 — 307 с
- 89 *Пикун В В* Теория и расчет оболочек вращения — М Наука, 1982 — 198 с
- 90 *Пикун В В* Теория и расчет слоистых конструкций — М Наука, 1985 — 182 с
- 91 *Погорелов А В* Дифференциальная геометрия — М Наука, 1969, 1974 — 176 с
- 92 *Погорелов А В* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей — М Наука, 1969 — 759 с
- 93 *Погорелов А В* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек — М Наука, 1969 — 280 с
- 94 *Погорелов А В* Изгибание поверхностей и устойчивость оболочек — Киев Наукова думка, 1998 — 200 с
- 95 *Позняк Э Г, Шикин Е В* Дифференциальная геометрия Первое знакомство — М изд-во МГУ, 1990, М УРСС, 2003 — 404 с
- 96 *Понтрягин Л С* Обыкновенные дифференциальные уравнения — М Физматгиз, 1961, Ижевск НИЦ РХД, 2001 — 400 с
- 97 *Попов А Л, Чернышев Г Н* Механика звукоизлучения пластин и оболочек — М Физматлит, 1994 — 206 с
- 98 *Постнов В Л, Хархурим И Я* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций — Л Судостроение, 1974 — 344 с
- 99 *Рашевский П К* Курс дифференциальной геометрии — М ГИТТЛ, 1956, М УРСС, 2003 — 428 с
- 100 *Рашевский П К* Риманова геометрия и тензорный анализ — М Наука, 1967 — 664 с
- 101 *Решетняк Ю Г* Исследование многообразий ограниченной кривизны посредством изотермических координат // Изв Сиб отд АН СССР — 1959 — № 10 — С 15–28
- 102 *Решетняк Ю Г* Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны // Сиб матем ж — 1960 — Т 1, № 1–2 — С 88–116, 248–276
- 103 *Ридель В В, Гулин Б В* Динамика мягких оболочек — М Наука, 1990 — 205 с
- 104 *Розендорн Э Р* Задачи по дифференциальной геометрии — М Наука, 1971 — 64 с
- 105 *Розендорн Э Р* Поверхности отрицательной кривизны // Итоги науки и техники Совр проблемы матем Фундам направл Т 48, «Геометрия-3» — М ВИНТИ, 1989 — С 98–195

- 106 Розенфельд Б А Многомерные пространства — М Наука, 1966 — 647 с
- 107 Сабитов И Х Локальная теория изгибающих поверхностей // Итоги науки и техники Совр проблемы матем Фундам направл Т 48, «Геометрия-3» — М ВИНТИ, 1989 — С 196-270
- 108 Сегерлинд Л Применение метода конечных элементов — М Мир, 1979 — 392 с
- 109 Соколов Е Н, Измайлов Ч А Цветовое зрение — М изд-во МГУ, 1984 — 175 с
- 110 Степанов В В Курс дифференциальных уравнений — М Физматгиз, 1959, М УРСС, 2004 — 468 с
- 111 Терехина А Ю Анализ данных методами многомерного шкалирования — М Наука, 1986 — 167 с
- 112 Титов Б А, Вьюжанин В А, Дмитриев В В Формирование динамических свойств упругих космических аппаратов — М Машиностроение, 1995 — 303 с
- 113 Тихонов А Н, Самарский А А Уравнения математической физики — М Наука, 1966, М изд-во МГУ, 1999 — 798 с
- 114 Товстик П Е Устойчивость тонких оболочек — М Физматлит, 1995 — 320 с
- 115 Фавар Ж Курс локальной дифференциальной геометрии — М ИЛ 1960 — 559 с
- 116 Федоров А П, Рябов В М, Парнов К М, Грибова Т В, Бурнашева Н В, Сараева И А, Либов Ю А Экспериментально-теоретическое исследование закритического поведения ребристых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и задании продольных перемещений // В сб «Вопросы прочности и динамики нагружения корпусных конструкций» Труды ЦНИИ им акад А Н Крылова — С-Пб, 2001 — Вып 11 (295) — С 74-89
- 117 Физические величины Справочник — М Энергоатом издат, 1991 — С 9-16
- 118 Фиников С П Курс дифференциальной геометрии — М ГИТТЛ, 1952 — 343 с
- 119 Фихтенгольц Г М Курс дифференциального и интегрального исчисления — С-Пб Лань, 1997 — Т 1, 607 с, Т 2, 800 с, Т 3, 656 с // М Физматлит, 1958-1960
- 120 Фокс А, Пратт М Вычислительная геометрия Применение в проектировании и на производстве — М Мир, 1982 — 304 с
- 121 Хальд А Математическая статистика с техническими приложениями — М ИЛ, 1956 — 664 с
- 122 Шефель С З Вполне регулярные изометрические погружения в евклидово пространство // Сиб матем ж — 1970 — Т 11, №2 — С 442-460
- 123 Шилов Г Е Математический анализ Функции нескольких вещественных переменных // Части 1-2 — М Наука, 1972 — 622 с
- 124 Шитов А И Учет прогибов обшивки прочных корпусов подводных судов в расчетах прочности и устойчивости // В сб «Вопросы прочности и динамики нагружения корпусных конструкций» Труды ЦНИИ им акад А Н Крылова — С-Пб, 2001 — Вып 11 (295), — С 58-64

125. *Шкутин Л. И.* Механика деформаций гибких тел. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1988. — 127 с.
126. *Шуликовский В. И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. — М.: Физматгиз, 1963. — 540 с.
127. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ГИИЛ, 1948. — 316 с.
128. *Эйнштейн А.* Геометрия и опыт. Собр. научн. тр., т. 2. — М.: Наука, 1966. — С. 83–94.
129. *Эйнштейн А.* Сущность теории относительности. — М.: ИЛ, 1955. — 160 с.
130. *Vos J. J., Walraven P. L.* An analytical description of the line element in the zone-fluctuation model of colour vision // *Vision Res.* — 1972. — V. 12. — P. 1327–1365.

Учебное издание

РОЗЕНДОРН Эмиль Ренольдович

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Редактор *И.Л. Легостаева*
Оригинал-макет: *И.Г. Андреева*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 24.01.06. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 19. Уч.-изд. л. 20,9. Тираж 1500 экз.

Заказ № 3494

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0685-6



9 785922 106856

ISBN 5-9221-0685-6



9 785922 106856 >