Г.А.Сарданашвили

ГЕОМЕТРИЯ И КЛАССИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

Современные методы теории поля. Т. 1

М.: УРСС, 1996. — 224 с.

Содержание

Введение 3

Глава 1. Дифференциальная геометрия 5

§1. Топологические пространства 5

§2. Многообразия 15

§3. Расслоенные многообразия 23

§4. Дифференциальные формы 35

§5. Многообразия струй 45

§6. Связности на расслоениях 52

§7. Расслоения со структурными группами 58

Глава 2. Геометрическая теория поля 68

§1. Лагранжев формализм 68

§2. Калибровочная теория 74

§3. Гамильтонов формализм 74

§4. Системы со связями 86

Калибровочные потенциалы (94). Электромагнитное поле (95). Поле Прока (96).

Глава 3. Топологические характеристики в теории поля 99

§1. Гомотопические группы 99

§2. Топологические солитоны 106

Модель кинков (107). Модель синус-Гордона (107). Модель Нильсена — Олесена (108). Модель т 'Хуфта— Полякова (109).

§3. Гомологии и когомологии 110

Гомологии комплексов (110). Сингулярные гомологии (113). Когомологии (118).

§4. Эффект Ааронова — Бома 121

Вакуумные калибровочные поля (121). Относительные гомологии и когомологии (129).

§5. Характеристические классы расслоений 132

Классификационная теорема (132). Классы Чженя (134). Классы Понтрягина (138).

§6. Инстантоны 142

§7. Магнитные монополи 154

Электромагнитное поле в модели т 'Хуфта — Полякова (158). Магнитный заряд (159). Модель т'Хуфта — Полякова (161). Уравнение Богомольного (163).

Глава 4. Геометрии пространства-времени 166

§1. Гравитация 166

§2. Многомерная гравитация 175

§3. Супергравитация 183

Приложение А. Вариационное исчисление и законы сохранения 193
Пространство струй бесконечного порядка (194). Вариационное исчисление (196). Законы сохранения (199). Нетеровские законы сохранения (200) Законы сохранения энергии-импульса (202). Энергия-импульс калибровочных полей (203). Условие общей ковариантности (204). Энергия-импульс гравитационного поля (206).
Приложение В. Когомологии со значениями в пучках 209
Библиография 214
Предметный указатель 216

Предметный указатель

А
Аронова-Бома эффект 122
алгебра банахова 187
— Грассмана 185
— Клиффорда 167
— Ли левая 60
— — правая 64
алгебраическая структура 9
антисолитон 107
атлас ассоциированный 61
— главного расслоения 59
— голономный 25
— многообразия 15
— окружности стандартный 18
— расслоения 24
атласы эквивалентные многообразия 15
— — расслоения 24
аффинно-метрическая теория гравитации 206
аффинное пространство (см. пространство аффинное)
— расслоение (см. расслоение аффинное)
Б
база расслоения 14
— топологии (см. топологии база)
базис голономный 19, 30
Бетти число 118
бордизм 112
В
вакуум янг-миллсовский 155
— хигтсовский 155
вакуумное поле 106
— — калибровочное 121
вариационная производная 198
— формула 198
вариация с фиксированной границей 196
векторное поле 27
— — вариационное 196
— — вертикальное 42
— — неособое 27
— — полное 35
— — проектируемое 42, 194
— — фундаментальное 37, 78
вертикальное касательное расслоение 32
— кокасательное расслоение 34
— расщепление (см. расщепление вертикальное)
вложение 14, 20
вторая аксиома счетности 7
Г
Гамильтона оператор (см. оператор Гамильтона)
— уравнение (см. уравнение Гамильтона)
— функция 86
гамильтониан 82
— ассоциированный с лагранжианом 87
гамильтонова связность 82
гамильтоново векторное поле 86
гессиан 69
голономии группа 124

— — ограниченная 124
гомеоморфизм 9
гомологии относительные 130
— сингулярные 114, 116
— — проективных пространств 116
— — сфер 116
гомологии группа 111
гомоморфизм Гуревича 117
— предпучка 210
гомотопическая группа 101
— — высшая 101
— — относительная 103
— — n-мерная 101
— эквивалентность 100
— — слабая 102
гомотопически обратное отображение 100
— эквивалентные пространства 100
гомотопический класс 100
гомотопные отображения 99
горизонтальная плотность 44
— проекция 195
— форма (см. форма горизонтальная)
горизонтальное расслоение 33
— расщепление (см. расщепление горизонтальное)
горизонтальный лифт векторного поля 73
— — — — канонический 204
гравитационное поле 169
градуированная суперкоммутативная алгебра 183
градуированное векторное пространство 184
градуированный Λ-модуль 185
граница 111
— множества 8
— ориентированная 111
— относительная 129
— симплекса 114
— — сингулярного 114
грассманова оболочка 185
группа голономии связности (см. голономии группа)
— гомологии (см. гомологии группа)
— гомотопическая (см. гомотопическая группа)
— калибровочная (см. калибровочная группа)
— Клиффорда 168
— когомологии (см. когомологии группа)
— Ли 16
— — $SO(3)$ 17
— — $SU(2)$ 17
— — $U(1)$ 16
— Лоренца 168
— симметрии внутренних 75
— — точных 155, 157
— спинорная (см. спинорная группа)
— структурная (см. структурная группа расслоения)
— фундаментальная 101

Д

двойственность Пуанкаре 120
— де Рама 120
действие группы свободное 29
— — транзитивное 11
— — эффективное 11
диффеоморфизм 18
— локальный 20
дифференциал внешний (см. дифференцирование внешнее)
— ковариантный (см. ковариантный дифференциал)
— отображения (см. касательный морфизм)
— (F-N) 41
дифференциальное уравнение 52
дифференциальный оператор 52
дифференцирование вертикальное 195
— внешнее 39
— горизонтальное 195
— Ли (см. производная Ли)

З

закон сохранения 73
— — ковариантный 203

— — сильный 193
— — слабый 193
замыкание множества 8
заряд магнитный 160
— топологический 146
И
изоморфизм расслоений 27
— — главных (см. калибровочный изоморфизм)
иммерсия 20
инстантон 142
— БПШТ 150
интегральное сечение связности 57
инъекция 14
К
калибровка сингулярная 151
калибровочная группа 79
калибровочные преобразования 79
— условия 93
калибровочный изоморфизм 62
— потенциал 75
— принцип 74
Калуца-Клейна модель 175
— — многомерная 176
карта 15
касательное пространство 19
— расслоение 19, 25
касательный морфизм 19, 27
— — вертикальный 32
квантование магнитного заряда 161
— — потока 124
кватернионы 143
— вещественные 143
— мнимые 143
кинк 107
класс гомотопический (см. гомотопический класс)
— Понтрягина (см. Понтрягина класс)
— Тодда 138
— характеристический (см. характеристический класс)
— Чженя (см. Чженя класс)
— Чженя-Саймонса 147
— Штифеля—Уитни 142
— Эйлера (см. Эйлера класс)
— эквивалентности 10
классификационная теорема 133
классическое поле 68
— — вакуумное (см. вакуумное поле)
Клейна бутылка 112
клетка 103
клеточная аппроксимация 103
клеточное пространство 103
— разбиение 103
ковариантная производная 53
ковариантный дифференциал 57
ковекторное поле 30
когомологии де Рама 119
— относительные 129
— с коэффициентами в пучке 212
когомологии группа 118
кограница 118
— относительная 130
кокасательное расслоение 30
коммутант группы 117
компактификация локально компактного пространства 12
— прямой 13
комплекс де Рама 119
— коцепной 118
— цепной 111 компонента связности 10
конторсии тензор 171
конфигурационное пространство 69
— — гравитации 206
— — калибровочных потенциалов 75
— — материальных полей 77
— — поля Прока 96
координат система 16
координаты голономные 19
— канонические 81
— подчиненные вертикальному расщеплению 33
— производных (см. скоростей)
— расслоенные 23
— — аффинные 29

— скоростей 46
коцепь 118
— относительная 130
— с коэффициентами в пучке 211
коцикл 118
— относительный 130
кривизна связности 56
— припаивающей формы 57
кручение 117
— связности 57, 172
Л
лагранжева плотность (см. лагранжиан)
— связность 71
лагранжиан 68
— материальных полей 77
— невырожденный (см. регулярный)
— полурегулярный 89
— поля Прока 96
— регулярный 69
— Янга-Миллса 75
Лагранжа функция 69
лассо 126
Лежандра многообразие 80
— отображение 80
— расслоение 80
лепажев эквивалент лагранжиана 197
лепажева форма 197
лист Мебиуса 25
М
материальное поле 77
метрика (см. расстояния функция)
— Минковского 168
— на многообразии 31
— послойная 30
— псевдориманова 169
— риманова 166 многообразие 15
— Грассмана 17
— Лежандра (см. Лежандра многообразие)
— мировое 166
— ориентированное 22
— ориентируемое 22
— полисимплектическое (см. полисимплектическое многообразие)
— пространственно-временное 173
— струй (см. струй многообразие)
— топологическое 16
— Штифеля 18
множество замкнутое 7
— ограниченное 11
— открыто-замкнутое 8
— открытое 6
— плотное 8
мономорфизм расслоений 27
монополь магнитный 162
морфизм главных расслоений 62
— импульсный 83
— касательный (см. касательный морфизм)
— многообразий 18
— послойный 15, 27
— расслоений (см. послойный)
— топологических пространств (см. непрерывное отображение)
— тривиализации (см. тривиализации морфизм)
мультинстантон 152
Н
накрытие 105
напряженность калибровочного поля 66
неметричности тензор 171
непрерывное отображение 8
Нетер тождества 79, 201
нетеровский ток (см. ток симметрии)
нормализатор подгруппы 176
нормальный делитель (см. инвариантная подгруппа)
носитель 13
О
область 8
— тривиализации (см. тривиализации область) ограниченное множество (см. множество ограниченное)

окрестностей фундаментальная система 5
окрестность 5
оператор Гамильтона 84
— Дирака 171
— Эйлера—Лагранжа 70
— — второго порядка 70
— — первого порядка 70
орбита группы 11
ориентация многообразия 22
отделимость Фреше 12
отношение 10
— эквивалентности 10
отображение Лежандра (см. Лежандра отображение)
— непрерывное (см. непрерывное отображение)
— открытое 23
— пары топологических пространств 103
— пространства с отмеченной точкой 101
отображения гомотопные (см. гомотопные отображения)
П
параллельный перенос 52, 53
погружение 20
подгруппа инвариантная 176
— циклическая 116
подмногообразие 20
— вложенное 20
подпространство топологического пространства 9
подрасслоение 27
полисимплектическая структура 81
— форма 81
полисимплектическое многообразие 81
полиэдр 113
полное семейство гамильтонианов 91
Понтрягина индекс 147
— класс 138
— — многообразия 140
— — полный 139
последовательность гомотопических групп пары 104
— — — расслоения 105
— групп гомологии пары 129
— — когомологий пары 130
— касательных расслоений 34
— кокасательных расслоений 34
— точная 34
почти комплексная структура 140
предел Прасада-Зоммерфельда 164
предпучок 209
— канонический 210
преобразование атласов расслоения 24
— нечетное 183
— общее ковариантное 205
— четное 183
принцип калибровочный (см. калибровочный принцип)
— расщепления 136
— эквивалентности 169
присоединенное представление 61
—проективное пространство 17
проекция 14, 21
— стереографическая (см. стереографическая проекция) произведение внешнее расслоений 29
— — форм 38
— прямое расслоений 28
— расслоений 29
— связностей (см. связностей произведение)
— тензорное абелевых групп 117
— топологических пространств 7
производная ковариантная (см. ковариантная производная)
— Ли 36
— — внешней формы 42
— — тангенциально-значной формы 42
— полная 72
Прока поле 96
пространство аффинное 29

— касательное (см. касательное пространство)
— классифицирующее 133
— клеточное (см. клеточное пространство)
— конфигурационное (см. конфигурационное пространство)
— метрическое 6
— Минковского 167
— проективное (см. проективное пространство)
— расслоенное (см. расслоенное пространство)
— с отмеченной точкой 101
— связей 87
— спинорное (см. спинорное пространство)
— топологическое (см. топологическое пространство)
— фазовое (см. фазовое пространство)
Пуанкаре лемма 119
путь накрывающий 53 пучок 209
— алгебр Ли 37
— внешних форм 38
— постоянный 210
— сечений 31
— тангенциально-значных форм 41
— тонкий 212
Р
разбиение гамильтониана каноническое 84
— единицы 13
— клеточное (см. клеточное пространство)
— множества 10
расслоение 24
— ассоциированное 58, 61
— аффинное 29
— векторное 29
— вертикальное касательное (см. вертикальное касательное расслоение)
— — кокасательное (см. вертикальное кокасательное расслоение)
— геометрическое 204
— главное 59
— — реперное 63, 167
— горизонтальное (см. горизонтальное расслоение)
— групповое 28, 61
— дифференцируемое 24
— дуальное 29
— индуцированное 28
— касательное (см. касательное расслоение)
— кокасательное (см. кокасательное расслоение)
— Лежандра (см. Лежандра расслоение)
— на алгебры Клиффорда 168
— на пространства Минковского 168
— обобщенное аффинное 29
— редуцированное 62
— связностей 65
— со структурной группой (см. структурная группа расслоения)
— сопряженное 64
— спинорное (см. спинорное расслоение)
— струй (см. струй расслоение)
— тензорное 30
— универсальное 133
расслоений изоморфизм (см. изоморфизм расслоений)
— мономорфизм (см. мономорфизм расслоений)
— морфизм (см. морфизм послойный)
— произведение (см. произведение прямое расслоений)
— — внешнее (см. произведение внешнее расслоений)
— — тензорное (см. произведение тензорное расслоений)
— свертка (см. свертка расслоений)

— сумма Уитни (см. сумма Уитни векторных расслоений)
расслоения эквивалентные 25
расслоенное многообразие 21
— — локально тривиальное 23
— — тривиальное 23
— пространство 14
расстояния функция 6 расщепление вертикальное 33
— — для аффинного расслоения 33
— — для векторного расслоения 33
— горизонтальное 54
— — каноническое 49
— — проектируемого векторного поля 50
— конфиругационного пространства 92
— локальное расслоенного многообразия 21, 23
— фазового пространства 93
редукция структурной группы (см. расслоение редуцированное)
резольвента пучка 212
росток функции 209
— элемента предпучка 209
С
свертка внешних форм и векторных полей 39
— расслоений 30 связностей произведение 55
— — тензорное 56 связность 53-55
— аффинная 55
— гамильтонова (см. гамильтонова связность)
— дуальная 56
— лагранжева (см. лагранжева связность)
— линейная 55
— — общая 171
— лоренцевская 171
— на ассоциированном расслоении 67
— — главном расслоении 64
— — расслоении связностей 67
— плоская 126
сечение 14, 21
— глобальное 14, 26
— голономное 48
— индуцированное 28
— интегральное (см. интегральное сечение связности)
— критическое 196
— локальное 26
сигнатура многообразия 120
симплекс сингулярный 114
— стандартный 113
система отсчета 170
скобки Ли 37
— (F-N) 41
слабое равенство 73
слой 14, 23
— типичный 23
солитон 106
— нетопологический 107
— топологический 106
спинорная группа 168
спинорное пространство 167
— расслоение 168
спиноры дираковские 167
— майорановские 191
стабилизатор элемента 110
стебель пучка 209
степень отображения 22
стереографическая проекция 9
струй многообразие 46
— — второго порядка 51
— — голономное 51
— — повторное 50
— — полуголономное 50
— — k -порядка 51
— — — повторное 52
— — — полуголономное 52
— пространство бесконечного порядка 194
— расслоение 46
струйное продолжение морфизма 47
— — сечения 48
структурная группа расслоения 58

струя сечений расслоения 45
субмерсия 21
сужение расслоения 28
сумму Уитни векторных расслоений 29
супералгебра Ли 184
— Пуанкаре 186
супергравитация 190
супергруппа Ли 190
— $L(4, 4)$ 190
— $OSp(4, 2; 1)$ 190
суперметрика 191
супермногообразие 189
суперпотенциал 193
— Комара 206
— — обобщенный 208
суперпространство 188
суперрасслоение главное 190
— касательное 189
суперфункция 188
— супердифференцируемая 188
сфера 8
сюръекция 14
Т
тензор конторсии (см. конторсии тензор)
— неметричности (см. неметричности тензор)
— энергии-импульса (см. энергии-импульса тензор) тензорное поле 30
— расслоение (см. расслоение тензорное) тензоры т'Хуфта 143
— антисамодуальные 143
— самодуальные 143
тетрадная форма 172
— функция 170
тетрадное поле 169
ток симметрии 73, 200
топологии база 7
— сравнимые 8
топологическая структура 5
топологическое пространство 5
— — векторное 9
— — вполне несвязное 10
— — дискретное 6
— — евклидово 7
— — компактное 12
— — локально евклидово 9
— — локально компактное 12
— — — — счетное в бесконечности 13
— — отделимое 11
— — паракомпактное 13
— — связное 8
— — стягиваемое 100
— — хаусдорфово (см. отделимое)
— — k -связное 102
топология индуцированная 9
— метрическая 6
— образа 9
— подчиненная структуре многообразия 15
— сильнее 8
— сильнейшая 8
— слабее 8
— слабейшая 8
точка бесконечно удаленная 12
— прикосновения 8
— предельная 12
точная последовательность (см. последовательность точная)
тривиализации морфизм 24, 25
— область 24
У
уравнение Богомольного 164
— Гамильтона 85
— — алгебраическое 85
— самодуальности 151
— Эйлера-Лагранжа алгебраическое 70, 71
— — второго порядка 70, 71
— — первого порядка 70, 71
Ф
фазовое пространство 80
— — калибровочных потенциалов 94
— — поля Прока 96

— — электромагнитных потенциалов 95
фактор по отношению (см. фактор-множество)
фактор-группа 11
фактор-множество 11
фактор-пространство 11
— левое 11
— правое 11
— топологическое 11
фермионное поле 169, 170
флаксон 122
форма векторнозначная 35
— вертикально-значная горизонтальная 43
— внешняя 35, 37
— — горизонтальная 43
— — замкнутая 39
— — точная 39
— — индуцированная 40
— горизонтальная 42
— Картана 197
— Киллинга 76
— контактная 195
— лепажева (см. лепажева форма)
— Лиувилля 43, 85
— — обобщенная 81
— полисимплектическая (см. полисимплектическая форма)
— припаивающая 43
— — каноническая 44
— производящая оператора Эйлера-Лагранжа 70
— Пуанкаре-Картана 69
— пфаффова (см. ковекторное поле)
— связности 65
— — локальная 65
— симплектическая 43, 85
— тангенциально-значная 35, 40
— — вертикальная 42
— — горизонтальная 43
— — каноническая 41
— — проектируемая 43
— характеристическая (см. характеристическая форма)
— Чженя (см. Чженя форма)
— Эйлера (см. Эйлера форма)
функция Гамильтона (см. Гамильтона функция)
— Лагранжа (см. Лагранжа функция)
— перехода 15, 24, 25
— эквивариантная 62
Х
характеристическая форма 135
характеристический класс 134
— полином 134
хигтсовское поле 63, 154
Ц
цепь 111
— относительная 129
— сингулярная 114
цикл 111
— относительный 129
Ч
четность элемента 184
Чженя класс 136
—: — вещественного многообразия 140
— форма 135
— — полная 135
— характер 138
— число 137
число Бетти (см. Бетти число)
— Чженя (см. Чженя число)
Ш
шар замкнутый 8
— открытый 7
Э
Эйлера класс 141
— форма 142
эйлерова характеристика 118
— — многообразия 120
эквивалентности класс (см. класс эквивалентности)
— отношение (см. отношение эквивалентности)

эквивалентность гомотопическая (см. гомотопическая эквивалентность)
эквивалентные атласы (см. атласы эквивалентные)
— расслоения (см. расслоения эквивалентные)
электромагнитное поле 76
энергии-импульса тензор 73, 202
— — метрический 203
Я
ядро послойного морфизма 34
Якоби матрица 20
якобиан 22

Посвящается
Дмитрию Дмитриевичу Иваненко

Введение

Имеется обширная литература по дифференциальной геометрии и ее применению к теории поля. Главная трудность при освещении этой темы состоит в том, чтобы отобрать только тот математический материал, который строго необходим для физических приложений, и в то же время сохранить какую-то последовательность изложения, чтобы не превратить книгу в подобие математического глоссария. Кроме того приходится начинать изложение математического аппарата с самых основ, чтобы сделать его доступным неподготовленному читателю, и доводить его до весьма абстрактных конструкций, используемых в современной теории поля.

Геометрические методы сейчас широко применяются как в классических, так и в квантовых полевых моделях. В этой книге мы ограничимся только классической теорией поля, математический аппарат которой, в отличие от квантовой теории поля, можно считать вполне разработанным. При этом основной акцент будет сделан не на самих полевых моделях, быстро сменяющих одна другую, а на тех математических методах, на которых большинство этих моделей базируется.

Применение геометрических методов в теории поля основывается на следующем положении.

Все классические поля представляются как сечения некоторых дифференцируемых расслоений

$$\pi : Y \to X,$$

где база X играет роль пространственно-временного многообразия или некоторого пространства параметров, а прообразу $\pi^{-1}(x)$ всякой точки $x \in X$ придается смысл пространства скоростей, импульсов или некоторого внутреннего пространства. При этом, даже если рассматриваются локальные конструкции (на некоторой области пространства X), все объекты строятся глобально хорошо определенными. В первую очередь это вызывает замену операторов частных производных ∂_μ на операторы ковариантных производных

$$D_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu,$$

где Γ — это некоторая связность на расслоении $Y \to X$. **Связности — это тот новый важнейший физический объект, к которому приводит геометрическая формулировка теории поля.** Например, в калибровочных моделях фундаментальных взаимодействий это — связности на главных расслоениях, интерпретируемые как калибровочные поля — переносчики взаимодействий, характеризуемых той или иной группой симметрий.

Понятие связности является ключевым в геометрическом подходе к теории поля. В большинстве учебников по дифференциальной геометрии ограничиваются рассмотрением связностей на главных расслоениях. Этого однако недостаточно для описания

динамики полей, построения лагранжева и гамильтонова формализмов. В книге мы исходим из общего понятия связностей на дифференцируемых расслоениях, описывая их в терминах тангенциально-значных дифференциальных форм и многообразий струй.

Многообразия струй — еще один математический объект, которому в данной книге, в отличие от большинства стандартных учебников по дифференциальной геометрии, уделяется много внимания. Многообразия струй — это пространства, элементами которых являются классы эквивалентности полей, отождествляемых по первым двум или более членам их разложения в ряд Тейлора. Теория дифференциальных операторов, как известно, формулируется именно на языке многообразий струй. Соответственно лагранжев и гамильтонов формализмы в теории поля адекватно описываются в тех же самых терминах.

Важно, что и связности, и многие объекты на многообразиях струй выражаются через тангенциально-значные дифференциальные формы, которыми легко оперировать. Эти формы составляют основу применяемой в книге математической техники.

Помимо связностей, геометрический подход к теории поля вводит в рассмотрение еще один совершенно новый класс физических величин — так называемые *топологические числа и заряды*, описывающие глобальные свойства полевых конфигураций. Они представляют собой различные гомотопические и тополого-алгебраические характеристики многообразий и расслоений. Примерами таких характеристик являются элементы гомотопических групп, числа Чженя, Понтрягина, эйлерова характеристика и др. Они широко применяются в солитонных, монопольных, инстантонных и других нелинейных моделях с различными топологиями. Причем, такие модели не обязательно предполагают топологическую нетривиальность самого пространства-времени. Например, если поля на пространственной бесконечности имеют по всем направлениям одну и ту же асимптотику, их можно рассматривать и классифицировать как поля на сфере.

Настоящая книга далека от того, чтобы пытаться охватить все геометрические конструкции, которые ныне используются в теории поля. Само их перечисление потребовало бы многостраничных пояснений. Мы оставляем на будущее и геометрические методы в квантовой теории поля, аппарат которой нуждается в отдельном тщательном с математической точки зрения изложении.

Дифференциальная геометрия

Мы предполагаем, что читатель знаком с основами теории множеств, теории векторных пространств и теории групп Ли.

В книге используются стандартные обозначения $\oplus$, $\otimes$, $\vee$ and $\wedge$ для прямой суммы, тензорного произведения, симметризованного тензорного произведения и антисимметризованного тензорного (внешнего) произведения соответственно. Значком $\lrcorner$ обозначается операция свертки дуальных величин — векторов и форм.

Символы ∂^A_B применяются для упрощенной записи операторов частных производных по координатам с индексами $\overset{B}{A}$.

Композиция отображений обозначается значком $\circ$.

§ 1. Топологические пространства

Топологическая структура, задаваемая на множестве, определяет отношение близости между элементами множества. Она позволяет придать выражению "такое-то свойство имеет место для всех точек, достаточно близких к элементу x" точный смысл. Это означает, что множество точек, обладающих этим свойством, образует некоторую окрестность элемента x в данной топологии.

Говорят, что множество X наделено *топологической структурой* (т. е. является *топологическим пространством*), если каждому его элементу x тем или иным способом отнесено семейство подмножеств из X, называемых *окрестностями* этого элемента. Обозначим это семейство $B(x)$. Оно должно удовлетворять следующим весьма естественным условиям.

(i) Элемент x принадлежит каждой своей окрестности.

(ii) Всякое подмножество X, содержащее какую-либо окрестность элемента x, также является окрестностью x.

(iii) Пересечение конечного числа окрестностей тоже является окрестностью.

(iv) Для каждой окрестности V из $B(x)$ всегда существует "меньшая" окрестность $W \subset V$, такая что $V \in B(y)$ для каждого элемента $y \in W$, т. е. V является окрестностью всякого элемента из множества W.

Из условия (ii) следует, что множество окрестностей $B(x)$ можно определить, задавая *фундаментальную систему окрестностей* элемента x, т. е. такое подмножество $\widetilde{B}(x) \subset B(x)$, что всякая окрестность элемента x содержит некоторую окрестность из $\widetilde{B}(x)$.

Пример 1.1.1. Топологическое пространство называется *дискретным топологическим пространством*, если фундаментальная система окрестностей всякого его элемента сводится к самому этому элементу. Это означает, что всякое множество, содержащее данный элемент, является его окрестностью в дискретной топологии. □

Пример 1.1.2. Рассмотрим случай, когда отношение близости между элементами множества можно выразить числом — расстоянием между элементами. Множество X называется *метрическим пространством*, если для каждой пары его элементов x и x' задана *функция расстояния* (метрика) $\rho(x, x')$. Она определяется как неотрицательная вещественная функция на декартовом (прямом) произведении $X \times X$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\rho(x, x) = 0,$$
$$\rho(x, x') = \rho(x', x),$$
$$\rho(x, x') + \rho(x', x'') \geqslant \rho(x', x'').$$

Примером метрического пространства служит поле действительных чисел $\mathbb{R}$ с функцией расстояния

$$\rho(x, x') = |x - x'|. \tag{1.1}$$

Определим на метрическом пространстве топологию, выбрав в качестве фундаментальной системы окрестностей каждого его элемента x множества

$$D_\varepsilon = \{y : \rho(x, y) < \varepsilon\} \tag{1:2}$$

для всех $\varepsilon > 0$. Такая топология называется *метрической топологией*. Например, фундаментальная система окрестностей всякого элемента x поля действительных чисел $\mathbb{R}$ в метрической топологии образована интервалами

$$D_\varepsilon = \{y : |y - x| < \varepsilon\} =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\tag{1.3}$$

для всех $\varepsilon > 0$. Это топология 1-мерного евклидова топологического пространства $\mathbb{R}^1$. В дальнейшем мы предполагаем, что $\mathbb{R}$, если оно рассматривается как топологическое пространство, наделено именно этой топологией. □

Топологию на множестве можно вводить несколькими эквивалентными способами, например, задавая семейство его открытых подмножеств.

Подмножество топологического пространства называется *открытым*, если оно является окрестностью любого своего элемента. Так, в дискретной топологии сам элемент уже оказывается открытым подмножеством. В пространстве $\mathbb{R}$ открытыми являются всевозможные интервалы (1.3), тогда как отрезок, например, не открытое множество, поскольку не является окрестностью своей граничной точки.

Множество открытых подмножеств топологического пространства обладает следующими свойствами.

(i) Всякое объединение открытых подмножеств есть открытое подмножество.

(ii) Пересечение конечного числа открытых подмножеств есть открытое подмножество.

(iii) Пустое множество $\varnothing$ и само множество X являются открытыми.

Подчеркнем, что свойство (ii) открытых множеств не распространяется на бесконечное пересечение открытых множеств. Например, пересечение всех интервалов $D_\varepsilon(x)$ (1.3) из Примера 1.1.2 сводится к самому элементу x, который не является открытым подмножеством в метрической топологии на $\mathbb{R}$.

Задание множества открытых подмножеств, удовлетворяющее приведенным выше условиям, вводит топологию на множестве X. В этом случае окрестность элемента $x \in X$ характеризуется как множество, которое содержит какое-либо открытое подмножество, содержащее x.

Пример 1.1.3. Пусть X и X' — топологические пространства. Их *произведение* $X \times X'$ определяется как декартово произведение множеств X и X', наделенное топологией, открытыми подмножествами в которой являются множества вида $U \times U'$, где U и U' — всевозможные открытые подмножества X и X'. □

Свойство (i) открытых множеств позволяет определить все множество открытых подмножеств, задав *базу топологии*, т. е. такое семейство открытых подмножеств, что всякое открытое подмножество пространства X является объединением множеств из этого семейства.

Например, базу дискретной топологии из Примера 1.1.1 составляют все элементы пространства X. Базу метрической топологии — множества вида $D_\varepsilon(x)$ (1.2) для всех $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Они именуются *открытыми шарами* радиуса ε.

Пример 1.1.4. *Евклидовым топологическим пространством* размерности n называется n-кратное произведение

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}.$$

Базу топологии в нем образуют n-мерные открытые шары

$$D^n_\varepsilon(x) = \left\{ y : \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon \right\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Это метрическая топология, отвечающая функции расстояния $\|x - y\|$. □

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *второй аксиоме счетности*, если оно обладает счетной базой. Например, евклидово топологическое пространство обладает счетной базой. Ее можно составить из открытых шаров радиусами $1/n$ ($n = 1, 2, \ldots$) с центрами в точках с рациональными координатами.

Другой эквивалентный способ введения топологии на множестве X — это задание семейства его *замкнутых подмножеств*, которое удовлетворяет следующим условиям:

(i) всякое пересечение замкнутых подмножеств — замкнутое подмножество;

(ii) объединение конечного числа замкнутых подмножеств — замкнутое подмножество;

(iii) пустое множество и само множество X являются замкнутыми.

В топологическом пространстве X замкнутые подмножества являются дополнениями $X \setminus U$ открытых подмножеств.

Примером замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}$ служат отрезки $[a, b]$, как дополнения открытых множеств

$$]-\infty, a[\cup]b, +\infty[.$$

В общем случае метрической топологии — это *замкнутые шары*

$$D_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\}.$$

В дальнейшем под *шарами*, если специально не оговорено, будут подразумеваться именно замкнутые шары.

Пусть A — подмножество топологического пространства X. Минимальное замкнутое множество, содержащее A, называется его *замыканием* $\overline{A}$. Оно состоит из всех *точек прикосновения множества* A, т. е. точек, все окрестности которых пересекают A. *Границей множества* A именуют множество ∂A, состоящее из точек, которые являются точками прикосновения как A, так и его дополнения $X \setminus A$.

Например, замыканием интервала $]a, b[$ в $\mathbb{R}$ является отрезок $[a, b]$, а его границей — множество из двух точек $\{a\} \cup \{b\}$. В метрическом пространстве границей открытого шара́ $D_\varepsilon(x)$ является *сфера*

$$S_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x, y) = \varepsilon\}.$$

Говорят, что подмножество топологического пространство *плотно*, если его замыкание совпадает со всем пространством. Например, подмножество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Подмножество топологического пространства может быть одновременно и открытым, и замкнутым. Топологическое пространство (или его подмножество), которое не содержит таких *открыто-замкнутых подмножеств*, называется *связным*, т. е. оно не является объединением двух и более непустых непересекающихся открытых или замкнутых множеств.

Примером несвязного пространства может служить дискретное пространство, если оно состоит более чем из одного элемента. Всякое его подмножество является открыто-замкнутым. Связно евклидово топологическое пространство. Связное открытое подмножество называется *областью*.

Одно и то же множество может быть наделено различными топологическими структурами, и это будут разные топологические пространства. Например, на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ могут быть введены дискретная топология, топология евклидова пространства, или топология, в которой единственным непустым открытым множеством является само множество $\mathbb{R}$.

Пусть на множестве заданы две топологические структуры такие, что всякое подмножество, открытое в первой топологии, является открытым и во второй. Тогда эти топологии называются *сравнимыми топологиями* и говорят, что первая топология *слабее* второй. Грубо говоря, чем больше число открытых подмножеств, тем топология *сильнее*. Не всякие две топологические структуры на множестве сравнимы, но среди всех топологий на множестве всегда есть *слабейшая топология* и *сильнейшая топология*. Первая — это топология, в которой единственным непустым открытым множеством является само это множество, а вторая — дискретная топология.

Определим теперь морфизмы топологических пространств. Это отображения множеств, которые согласуются с их топологическими структурами. Таковыми являются *непрерывные отображения*.

Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство X' называется непрерывным, если для любой окрестности V' элемента $x' \in X'$ и всякого его прообраза $x \in f^{-1}(x')$ существует окрестность V элемента x такая, что $f(V) \subset V'$. Легко убедиться, что композиция $f \circ f'$ непрерывных отображений f и f' тоже является непрерывным отображением.

Пример 1.1.5. Всякое отображение дискретного пространства в любое топологическое пространство является непрерывным, поскольку в дискретной топологии всякий прообраз элемента $f(x)$ сам уже является окрестностью. □

Отметим, что при непрерывном отображении $X \to X'$ прообраз открытого подмножества из X' является открытым в X, но образ открытого подмножества из X может не быть открытым в X'.

Пример 1.1.6. Пусть A — подмножество топологического пространства X. *Индуцированной топологией* на A называется топология, открытыми подмножествами в которой являются всевозможные пересечения A с открытыми подмножествами из X. Подмножество A, наделенное такой топологией, называется *подпространством* пространства X. Топология подпространства является наиболее слабой топологией на A, при которой естественное вложение $A \hookrightarrow X$ непрерывно. Например, пусть A — прямая линия в плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда топология, индуцируемая на A из $\mathbb{R}^2$, совпадает с евклидовой топологией на прямой $\mathbb{R}$. Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство X'. Его образ $f(X)$ в X' может быть наделен так называемой *топологией образа*, когда открытыми подмножествами U в $f(X)$ выбираются такие и только такие подмножества, прообразы которых $f^{-1}(U)$ открыты в X. В общем случае топология образа сильнее индуцированной топологии на $f(X) \subset X'$ и $f(X)$ не является подпространством X'. □

Гомеоморфизмом топологического пространства X на топологическое пространство X' называется непрерывное взаимно однозначное отображение f пространства X на пространство X' такое, что обратное отображение f^{-1} тоже непрерывно. Гомеоморфизм обеспечивает эквивалентность топологических структур на X и X'.

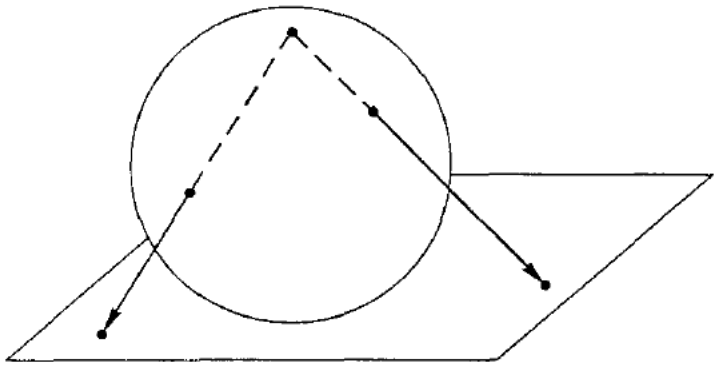


Рис. 1

Пример 1.1.7. *Стереографическая проекция* (рис. 1) устанавливает гомеоморфизм n-мерной сферы S^n без точки и n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Открытый шар в евклидовом пространстве гомеоморфен самому этому пространству. □

Пример 1.1.8. Топологическое пространство называется *локально евклидовым пространством* размерности n, если всякая его точка обладает окрестностью, гомеоморфной евклидовому пространству $\mathbb{R}^n$. Например, окружность S^1 является локально евклидовым пространством размерности 1. Пространство-время Минковского как топологическое пространство представляет собой 4-мерное евклидово топологическое пространство, что и дает основание ограничиваться в физических моделях евклидовыми и локально евклидовыми пространствами. □

Пусть множество X снабжено некоторой *алгебраической структурой*, характеризуемой теми или иными морфизмами $X \times X \to X$, $X \to X$ или $\mathbb{R} \times X \to X$. Говорят, что топология на множестве X согласуется с его алгебраической структурой, если все эти морфизмы непрерывны в этой топологии.

Пример 1.1.9. Пусть X — векторное пространство. Будучи наделенным некоторой топологической структурой, оно называется *топологическим векторным пространством*, если операции сложения и умножения на число в этой топологии непрерывны. Например, n-мерное векторное пространство в топологии n-мерного евклидова пространства является топологическим векторным пространством. Отметим, что в топологическом векторном пространстве операции сложения с фиксированным вектором и умножения на фиксированное число являются его гомеоморфизмами. Отсюда, в частности, следует, что топологическая структура в окрестности любого элемента определяется топологией окрестности 0 векторного топологического пространства. □

Пример 1.1.10. В калибровочной теории фундаментальных взаимодействий в качестве групп симметрий фигурируют, как правило, группы Ли, которые являются частным случаем топологических групп. Группа G называется *топологической группой*, если ее групповое пространство наделено топологией, в которой операции произведения $(g, g') \mapsto gg'$ и перехода к обратному элементу $g \mapsto g^{-1}$ являются непрерывными. Более того, умножение на фиксированный элемент группы и переход к обратному являются гомеоморфизмами топологической группы. Тем самым топологическая структура в окрестности любого элемента топологической группы определяется топологией окрестности ее единицы. □

Введем теперь важные понятия отношения эквивалентности и фактор-пространства.

Отношением E на множестве X называется некоторое подмножество $E \subset X \times X$. Говорят, что элемент $a \in X$ находится в отношении E к элементу $b \in X$ (обычно пишут aEb), если $(a, b) \in E$.

Отношение E именуется *отношением эквивалентности*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- всякий элемент эквивалентен сам себе;
- если элемент a эквивалентен b, то b эквивалентен a;
- если элемент a эквивалентен b и b эквивалентен c, то элемент a эквивалентен c.

Например, отношение параллельности прямых на плоскости есть отношение эквивалентности.

Классом эквивалентности отношения эквивалентности E на множестве X называется такое подмножество $X_E \subset X$, что aEb для всех $a, b \in X_E$ и отношение E не имеет место ни для каких $a \in X_E$ и $b \in X \setminus X_E$. В силу этого определения классы эквивалентности $\{X_E\}$ образуют разбиение множества X, т. е.

$$X = \bigcup X_E, \qquad X_E \cap X_{E'} = \varnothing .$$

Пример 1.1.11. Принадлежность двух элементов топологического пространства какому-либо одному связному подмножеству есть отношение эквивалентности. Классы эквивалентности, на которые это отношение разбивает пространство, являются его максимальными связными подмножествами, именуемыми *компонентами связности* топологического пространства. Например, топологическое пространство называется *вполне несвязным*, если его компонентами связности являются лишь его элементы. Дискретное топологическое пространство очевидно вполне несвязно. Но вполне несвязное пространство не обязательно дискретно. Например, множество рациональных чисел, наделенное метрической топологией, задаваемой функцией расстояния (1.1), вполне несвязно. □

Пример 1.1.12. Пусть топологическая группа G из Примера 1.1.10 действует слева непрерывно и *эффективно* в топологическом пространстве представления V. Это означает, что отображение

$$G \times V \ni (g, v) \mapsto gv \in V$$

непрерывно и, если $gv = v$ для всех $v \in V$, то $g = \widehat{1}$ — единица группы. Зададим на V отношение E такое, что vEv', если $v' = gv$ для некоторого элемента $g \in G$. Это отношение эквивалентности. Его классы эквивалентности называются *орбитами группы* G в V. Например, орбитами группы $SO(2)$ вращений плоскости являются окружности с центром в точке вращения. На каждой орбите группа G действует *транзитивно*, т. е. по определению для любых двух элементов v и v' орбиты имеется элемент группы $g \in G$ такой, что $v' = gv$. □

Множество всех классов отношения эквивалентности E на множестве X называется *фактором множества* X *по отношению* E, или *фактор-множеством* X/E.

Например, фактор множества прямых на плоскости по отношению параллельности — это окружность с отождествленными противоположными точками, т. е. проективное пространство $\mathbb{R}P^1$.

Пример 1.1.13. Пусть H — подгруппа группы G. Рассмотрим на G отношение эквивалентности E такое, что gEg', если $g' = hg$ (соотв. $g' = gh$) для некоторого элемента $h \in H$. Фактор группы G по этому отношению эквивалентности называется *левым* (соотв. *правым*) *фактор-пространством* G/H. Если H — инвариантная подгруппа G, т. е. $g^{-1}hg \in H$ для всех $g \in G$, $h \in H$, то *левое и правое фактор-пространства* совпадают и G/H снабжено структурой группы, называемой *фактор-группой*. □

Пусть теперь X — топологическое пространство, наделенное некоторым отношением эквивалентности E, и

$$\pi : X \to X/E$$

— каноническое отображение, сопоставляющее каждому элементу из X его класс эквивалентности. Фактор-множество X/E становится *топологическим фактор-пространством*, если его снабдить топологией образа из Примера 1.1.6. Это наиболее сильная топология на X/E, при которой каноническая проекция $X \to X/E$ непрерывна.

В теории поля имеют дело главным образом с отделимыми локально компактными паракомпактными топологическими пространствами.

Топологическое пространство, в котором для любых двух различных элементов x и x' существуют не пересекающиеся между собой окрестность элемента x и окрестность элемента x', называется *отделимым* (*хаусдорфовым*) *пространством*.

Например, в дискретном пространстве такими непересекающимися окрестностями являются сами эти элементы, и дискретное пространство отделимо. В частности, можно показать, что дискретная топология на конечном множестве является единственной отделимой топологией.

Евклидово пространство, как и всякое метрическое пространство, отделимо, поскольку любые его две точки можно окружить открытыми шарами, достаточно малого радиуса, чтобы они не пересекались. Более того, евклидова топология является единственной отделимой топологией, согласующейся со структурой конечномерного векторного пространства.

Всякое подпространство отделимого пространства отделимо, а всякий его элемент является замкнутым множеством.

Примером неотделимой топологии может служить слабейшая топология на множестве. Локально евклидово пространство не обязательно отделимо.

Пример 1.1.14. Рассмотрим топологическое пространство X, получаемое склеиванием двух вещественных прямых $\mathbb{R}_1$ и $\mathbb{R}_2$ по точкам со строго положительными координатами $r_1 = r_2 > 0$. Базу его топологии составляют открытые подмножества прямых $\mathbb{R}_1$ и $\mathbb{R}_2$ при их естественном вложении в X. Легко видеть, что это локально евклидово пространство, но его элементы с координатами $r_1 = 0$ и $r_2 = 0$ не являются отделимыми, так как они не имеют окрестностей, которые бы между собой не пересекались. Построенная склейка удовлетворяет однако так называемому условию *отделимости Фреше*: для любых двух различных элементов пространства x и x' существует окрестность элемента x, не содержащая x'. □

Отделимое топологическое пространство, всякое покрытие которого открытыми подмножествами

$$X = \bigcup U_\xi$$

содержит конечное покрытие, называется *компактным пространством*.

Рассмотрим, например, покрытие дискретного пространства открытыми множествами, каждое из которых состоит из одной точки. Если число точек пространства более чем конечно, то это покрытие не содержит конечного подпокрытия и дискретное пространство некомпактно.

Подчеркнем, что и некомпактное пространство допускает покрытие конечным числом открытых множеств, но не всякое его покрытие содержит конечное подпокрытие.

Приведенное определение компактного пространства возможно недостаточно наглядно. Некоторое представление о компактных пространствах могут дать следующие факты.

- В компактном пространстве любая бесконечная последовательность имеет *предельную точку*, т. е. точку прикосновения, всякая окрестность которой содержит элементы последовательности. В компактном пространстве всякое замкнутое подпространство компактно, а в отделимом пространстве всякое компактное подпространство замкнуто.

- Подпространство метрического (в частности, евклидова) пространства компактно в том и только том случае, когда оно *ограничено* (т. е. принадлежит некоторому шару конечного радиуса) и замкнуто.

Само евклидово топологическое пространство не является компактным. Оно локально компактно.

Отделимое топологическое пространство называется *локально компактным*, если всякий его элемент имеет компактную окрестность.

Например, для элементов метрического пространства такими окрестностями являются шары и оно локально компактно. Дискретное пространство локально компактно, поскольку компактной окрестностью всякого его элемента служит он сам.

Локально компактное пространство всегда можно компактифицировать добавлением так называемой бесконечно удаленной точки.

Для любого локально компактного пространства X существует компактное пространство X' и гомеоморфизм X на дополнение к некоторой точке a в X'. Такое пространство X' называется *компактификацией* локально компактного пространства X. Оно строится как объединение пространства X и множества из одного элемента $\{a\}$. Топология на X' определяется выбором в качестве открытых множеств в X' всех открытых множеств из X и всевозможных множеств вида $(X \setminus K) \cup \{a\}$, где K — компактные подмножества X. Говорят, что X' получается из X присоединением *бесконечно удаленной точки* a.

Пример 1.1.15. *Компактификация прямой* $\mathbb{R}$ гомеоморфна окружности S^1. Действительно, введем на $\mathbb{R}$ декартову координату x, а на S^1 циклическую координату $-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$ так, что координаты π и $-\pi$ принадлежат одной и той же точке a. Отображение

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} x,$$

обратное стереографической проекции из точки a, осуществляет гомеоморфизм $\mathbb{R}$ на $S^1 \setminus \{a\}$. При этом всякое открытое множество $]a+\varepsilon,\ a-\varepsilon[$ в S^1, содержащее a, представляет собой объединение образа множества

$$\mathbb{R} \setminus \left[\operatorname{tg}\left(\frac{-\pi+\varepsilon}{2}\right),\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)\right]$$

при таком отображении и точки a, приобретающей декартову координату $x = \pm\infty$. □

Локально компактное пространство называется *счетным в бесконечности*, если оно является счетным объединением компактных подпространств.

Например, евклидово топологическое пространство счетно в бесконечности. Действительно, числовую прямую легко представить как объединение счетного числа отрезков.

Локально компактные пространства, счетные в бесконечности, паракомпактны.

Отделимое топологическое пространство называется *паракомпактным*, если любое его открытое покрытие содержит локально конечное подпокрытие, т. е. всякий элемент обладает открытой окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств из этого подпокрытия.

Условие паракомпактности существенно входит в ряд теорем, которые будут в дальнейшем использоваться. Это связано с тем, что паракомпактные пространства допускают так называемое разбиение единицы.

Пусть $\{U_\xi\}$ — открытое покрытие отделимого топологического пространства X. Семейство f_ξ неотрицательных вещественных непрерывных функций на X называется *разбиением единицы*, подчиненным этому покрытию, если:

- *носитель* $\operatorname{supp} f_\xi$ (т. е. наименьшее замкнутое множество, вне которого $f_\xi = 0$) принадлежит U_ξ;
- каждый элемент X обладает открытой окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств $\operatorname{supp} f_\xi$;
- $\sum\limits_\xi f_\xi(x) = 1$ для любого $x \in X$.

Важно, что всякое замкнутое подпространство паракомпактного пространства тоже паракомпактно.

Отметим, что свойства отделимости, компактности, локальной компактности, паракомпактности и связности топологических пространств сохраняются при непрерывных отображениях, т. е. образ топологического пространства, обладающего каким-либо из этих свойств, при непрерывном отображении тоже обладает тем же свойством в топологии образа.

В дальнейшем все отображения считаются непрерывными.

Договоримся о терминологии, касающейся разных типов отображений. Она различается в разных изданиях.

Будем для наглядности именовать элементы топологического пространства точками. Вложение топологического пространства в топологическое пространство называется *инъекцией* (injection), а сам термин *вложение* (imbedding) будем применять только в случае, когда инъекция является гомеоморфизмом на топологическое подпространство.

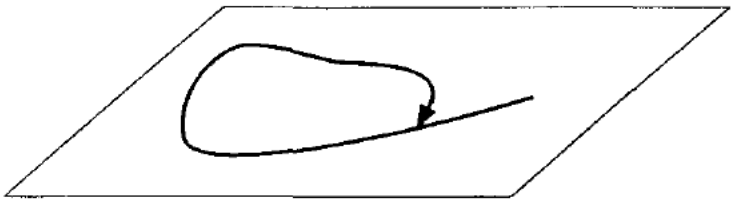


Рис. 2

ПРИМЕР 1.1.16. Рисунок 2 демонстрирует инъекцию прямой $\mathbb{R}$ в плоскость $\mathbb{R}^2$, которая не является вложением. Индуцированная топология на образе этой прямой слабее евклидовой топологии на $\mathbb{R}$. □

Отображение топологического пространства на топологическое пространство называется *сюръекцией* (surjection). Сюръекции вида

$$\mathrm{pr}_1 : A \times B \to A,$$
$$\mathrm{pr}_2 : A \times B \to B$$

именуют также *проекциями*.

Всякая сюръекция

$$\pi : Y \to X \tag{1.4}$$

задает разбиение

$$Y = \bigcup_{x \in X} \pi^{-1}(x)$$

пространства Y на *слои* (fiber) $Y_x = \pi^{-1}(x)$ над точками пространства X. Поэтому будем именовать топологическое пространство Y *расслоенным пространством* над *базой* (base) X, если задана сюръекция (1.4).

ПРИМЕР 1.1.17. Евклидово топологическое пространство $\mathbb{R}^3$ представляет собой расслоенное пространство над базой $\mathbb{R}^2$ относительно ортогональной проекции на $\mathbb{R}^2$. Слоями являются прямые, ортогональные плоскости $\mathbb{R}^2$. Тор $T^2 = S^1 \times S^1$ представляет собой расслоенное пространство над окружностью S^1 со слоями — окружностями S^1. □

Подчеркнем что база X расслоенного пространства (1.4) не является его подпространством, но может существовать, хотя и не всегда, послойное вложение

$$s : X \hookrightarrow Y,$$

когда всякой точке $x \in X$ сопоставляется некоторая точка $s(x)$ обязательно из слоя Y_x над x, т. е. $\pi \circ s = \mathrm{Id}_X$. Такое вложение s называется *глобальным сечением* расслоенного пространства Y. Соответственно, послойное вложение s некоторого подпространства $U \subset X$ в Y называется локальным сечением над U или просто *сечением* (section), если U — это открытое подмножество X.

Одно и то же топологическое пространство может быть наделено разными структурами расслоенного пространства. Например, $V \times X \to X$ и $V \times X \to V$ — это два разных расслоенных пространства. Даже гомеоморфизм топологического пространства на себя может нарушить его структуру как расслоенного пространства.

Чтобы не терять структуру расслоенного пространства при отображениях, в качестве морфизмов расслоенных пространств рассматривают только так называемые послойные

отображения, когда всякий слой одного расслоенного пространства $Y \to X$ полностью отображается в один из слоев другого расслоенного пространства $Y' \to X'$. Такой *послойный морфизм* (fibered morphism) задается парой отображений

$$\Phi : Y \to Y', \qquad f : X \to X',$$

образующих коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Phi} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

При этом говорят, что отображение Φ является послойным морфизмом над f. Если $f = \mathrm{Id}_X$ — тождественное отображение, Φ для краткости называют послойным морфизмом над X и обозначают

$$Y \underset{X}{\longrightarrow} Y'.$$

Мы не будем далее углубляться в общую теорию топологических расслоенных пространств, поскольку главным объектом нашего внимания будут расслоенные многообразия.

§ 2. Многообразия

Хотя в ряде полевых моделях привлекаются топологические пространства подчас весьма специального вида, стандартная классическая теория поля ограничивается рассмотрением многообразий — топологических пространств, которые как бы склеены из областей евклидова пространства. Это позволяет на каждой такой области вводить систему координат, а если переходы между этими областями достаточно гладкие, задавать на таком пространстве дифференцируемую структуру.

Пусть M — топологическое пространство и $\{U_\zeta\}$ — его открытое покрытие такое, что для каждого U_ζ задан его гомеоморфизм ϕ_ζ на открытое подмножество из $\mathbb{R}^m$. Пара (U_ζ, ϕ_ζ) называется *картой* (chart) на M. Говорят, что две карты (U_ζ, ϕ_ζ) и (U_ξ, ϕ_ξ) на M гладко согласованы, если отображение $\phi_\zeta \circ \phi_\xi^{-1}$ множества $\phi_\xi(U_\zeta \cap U_\xi) \subset \mathbb{R}^m$ в множество $\phi_\zeta(U_\zeta \cap U_\xi) \subset \mathbb{R}^m$ (оно именуется *функцией перехода* (transition function)) принадлежит классу C^∞, т. е. является бесконечно дифференцируемым.

Все семейство попарно гладко согласованных карт $\Psi_M = \{U_\zeta, \phi_\zeta\}$ называется гладким *атласом* (atlas) пространства M. На M могут существовать различные атласы. Два атласа считаются *эквивалентными*, если их объединение — тоже атлас, т. е. если карты, принадлежащие этим разным атласам, тоже попарно гладко согласованы.

Топологическое пространство, наделенное семейством таких эквивалентных гладких атласов называется m-мерным вещественным дифференцируемым многообразием или просто *многообразием* (manifold). Причем, если одно и то же топологическое пространство допускает неэквивалентные атласы, то это будут разные многообразия.

Следует подчеркнуть, что структуру многообразия на множестве можно ввести без относительно какой-либо первоначальной топологии на нем. Уже потом это многообразие может быть наделено *подчиненной* локально евклидовой топологической структурой.

Мы не станем здесь вдаваться в такие детали и будем в дальнейшем предполагать, что всякое многообразие является и соответствующим топологическим пространством.

Казалось бы, что пространства, гладко склеенные из областей евклидова пространства, с гарантией обладают хорошими топологическими свойствами. Однако это не так. Склейка двух прямых из Примера 1.1.14 является гладким многообразием, однако оно даже не отделимо. Поэтому, если специально не оговорено, в дальнейшем потребуем, чтобы многообразия были отделимыми локально компактными счетными в бесконечности (т. е. паракомпактными) связными топологическими пространствами. В частности, такое многообразие всегда можно покрыть счетным числом карт. Многообразия, используемые в физических приложениях, допускают, как правило, атласы с конечным числом карт.

Заметим, что можно рассматривать многообразия над другими числовыми полями и других классов гладкости, в том числе аналитические многообразия, а также *топологические многообразия*, когда требуется не дифференцируемость, а только непрерывность функций перехода между картами.

Задание атласа многообразия позволяет ввести на нем *систему координат*.

Пусть M — m-мерное многообразие. На каждой карте (U, ϕ) многообразия M всякой точке $z \in U$ можно сопоставить набор чисел $(z^1, \ldots, z^m)$ — коэффициентов разложения вектора $\phi(z)$ относительно некоторого фиксированного базиса пространства $\mathbb{R}^m$, т. е.

$$z^\mu(z) = (v^\mu \circ \phi)(z),$$

где (v^μ) — координаты на $\mathbb{R}^m$. Этот набор называется *локальными координатами* (или просто координатами) точки z в карте (U, ϕ). Если точка z накрывается еще другой картой (U', ϕ'), то в этой карте ей будет сопоставлен другой набор локальных координат (z'^μ). Функция перехода $\phi' \circ \phi^{-1}$ между картами тогда записывается как преобразование координат

$$(z^\mu) \to (z'^\mu(z^\nu))$$

на пересечении $U \cap U'$.

Часто технически удобно задавать атлас многообразия именно как систему координат.

Пример 1.2.1. Сфера S^2 является дифференцируемым многообразием, атлас которого может быть построен из двух карт — (U_1, ϕ_1) и (U_2, ϕ_2), где U_1 (соотв. U_2) — сфера без северного (соотв. южного) полюса и ϕ_1 (соотв. ϕ_2) стереографическая проекция из северного (соотв. южного) полюса на плоскость $\mathbb{R}^2$. Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — соответствующие координаты в этих картах. Функция перехода между картами имеет вид

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \qquad y_2 = \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2}. \tag{1.5}$$

□

Пример 1.2.2. Групповое пространство *группы Ли* — это аналитическое многообразие, образованное множеством ее параметров. Приведем некоторые полезные примеры групп Ли.

- *Группа* $U(1)$ умножений на комплексные числа вида $\exp(i\alpha)$ (она же группа поворотов $SO(2)$). Ее групповое пространство — окружность S^1. Эта группа лежит в основе калибровочной теории электромагнетизма.

- *Группа* $SU(2)$ комплексных унитарных (2×2)-матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & a_3 + ia_4 \\ -a_3 + ia_4 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix}, \qquad A^+A = \widehat{1}, \qquad \det A = 1.$$

Поскольку

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1,$$

групповое пространство $SU(2)$ представляет собой 3-мерную сферу S^3. В калибровочных моделях фундаментальных взаимодействий группа $SU(2)$ играет роль простейшей группы внутренних симметрий — изоспина, лептоспина.

- *Группа* $SO(3)$ вращений в 3-мерном евклидовом пространстве. Она изоморфна фактор-группе группы $SU(2)$ по подгруппе $\mathbb{Z}_2$ умножений на матрицу $-\widehat{1}$. Ее групповое пространство получается отождествлением противоположных точек сферы S^3. Это проективное пространство $\mathbb{R}P^3$.

□

Пример 1.2.3. Проективные пространства фигурируют в целом ряде полевых моделей. Вещественное n-мерное *проективное пространство* $\mathbb{R}P^n$ определяется как сфера S^n с отождествленными противоположными точками. Стандартный атлас $\{U_i, \phi_i\}$ на $\mathbb{R}P^n$ состоит из $n+1$ карты, определяемых следующим образом. Поместим S^n в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ с координатами (x^i). Тогда проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфно пространству центральных (проходящих через 0) прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$. Область U_i включает прямые, которые пересекаются с гиперплоскостью $x^i = 1$. Каждой такой прямой сопоставим координаты точки ее пересечения с этой гиперплоскостью:

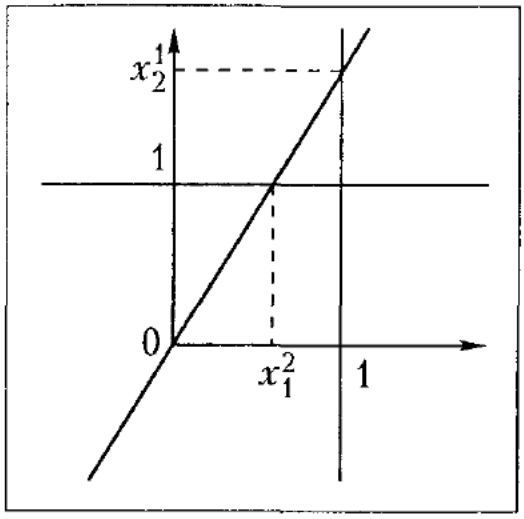


Рис. 3

$$(x_i^1, \ldots, x_i^{n+1}) = (x^1, \ldots, x^i = 1, \ldots, x^{n+1}).$$

Это и есть отображение ϕ_i. Функции перехода между картами имеют вид

$$x_j^k = \frac{x_i^k}{x_i^j}.$$

Мы проиллюстрируем эту конструкцию рисунком для случая $\mathbb{R}P^1$ (рис. 3). Отметим, что $\mathbb{R}P^1 = S^1$. □

Упомянем еще два типа многообразий, с которыми придется встречаться в дальнейшем.

Пример 1.2.4. *Многообразием Грассмана* $\mathbb{R}G(n, k)$ называется многообразие k-мерных векторных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$. Приведем полезные соотношения

$$\mathbb{R}G(n, 1) = \mathbb{R}P^n,$$
$$\mathbb{R}G(n, n-1) = \mathbb{R}P^{n-1}.$$

□

Пример 1.2.5. *Многообразием Штифеля* $\mathbb{R}V(n, k)$ называется многообразие линейных изометрических отображений $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Оно гомеоморфно фактор-пространству $SO(n)/SO(n-k)$ и

$$\mathbb{R}V(n, k)/O(k) = \mathbb{R}G(n, k).$$

Для частных случаев многообразий Штифеля имеем следующие соотношения

$$\mathbb{R}V(n, n-1) = SO(n),$$
$$\mathbb{R}V(n, 1) = S^{n-1}.$$

□

Пусть M и M' — многообразия и f — отображение M в M'. Говорят, что отображение f является *морфизмом многообразий* (дифференцируемым отображением), если оно непрерывно и для любых карт (U, ϕ) на M и (U', ϕ') на M' таких, что $f(U) \subset U'$, отображение

$$\phi' \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \phi'(U')$$

бесконечно дифференцируемо. Если при этом f взаимно однозначное отображение и обратное отображение f^{-1} тоже дифференцируемое, то f осуществляет изоморфизм многообразия M на многообразие M' и называется *диффеоморфизмом.*

Пример 1.2.6. Построим отображение f окружности S^1 на окружность S^1, при котором первая окружность дважды оборачивается вокруг второй. Чтобы удовлетворить условию $f(U) \subset U'$, введем на первой окружности атлас, который в отличие от стандартного, состоит из 4 карт

$$\left(-\tfrac{\pi}{4} < \alpha_1 < \tfrac{3\pi}{4}\right), \quad \left(\tfrac{\pi}{4} < \alpha_2 < \tfrac{5\pi}{4}\right), \quad \left(\tfrac{3\pi}{4} < \alpha_3 < \tfrac{7\pi}{4}\right), \quad \left(\tfrac{5\pi}{4} < \alpha_4 < \tfrac{9\pi}{4}\right),$$
$$\tfrac{5\pi}{4} < \alpha_4 = \alpha_3 < \tfrac{7\pi}{4}, \qquad \tfrac{7\pi}{4} < \alpha_4 = \alpha_1 + 2\pi < \tfrac{9\pi}{4},$$

а на второй окружности — *стандартный атлас*

$$\left(-\tfrac{\pi}{2} < \phi_1 < \tfrac{3\pi}{2}\right), \qquad \left(\tfrac{\pi}{2} < \phi_2 < \tfrac{5\pi}{2}\right),$$
$$\tfrac{\pi}{2} < \phi_1 = \phi_2 < \tfrac{3\pi}{2}, \qquad \tfrac{3\pi}{2} < \phi_2 = \phi_1 + 2\pi < \tfrac{5\pi}{2}.$$

Тогда отображение f имеет вид

$$\alpha_1 \to \phi_1 = 2\alpha_1, \qquad \alpha_3 \to \phi_1 = 2\alpha_3 - 2\pi,$$
$$\alpha_2 \to \phi_2 = 2\alpha_2, \qquad \alpha_4 \to \phi_2 = 2\alpha_4 - 2\pi.$$

□

В дальнейшем предполагается, что все отображения, если специально не оговорено, являются дифференцируемыми класса C^∞.

Заметим, что часто нет необходимости полностью выписывать координатный атлас многообразия, а достаточно ограничиться некоторой одной координатной картой, следя за тем, чтобы все рассматриваемые геометрические объекты соответствующим образом преобразовывались при замене координат и тем самым могли быть глобально определены на всем многообразии.

Обратимся теперь к конструкции, характерной именно для дифференцируемых многообразий. Это касательные пространства.

Строгое математическое определение касательного вектора к многообразию выглядит весьма техническим. Мы не станем здесь вдаваться в его детали, апеллируя к наглядным представлениям о касательной плоскости к искривленной поверхности. Этого вполне достаточно, чтобы оперировать понятиями касательного вектора и касательного пространства к многообразию.

Касательные векторы к m-мерному многообразию M в точке $z \in M$ образуют m-мерное векторное пространство $T_z M$, которое и называется *касательным пространством* к M в точке z. Множество TM всех касательных пространств к многообразию M тоже можно наделить структурой многообразия, задав на нем *голономную систему координат*

$$(z^\lambda, \dot{z}^\lambda), \tag{1.6}$$

$$\dot{z}'^\lambda = \frac{\partial z'^\lambda}{\partial z^\alpha}\, \dot{z}^\alpha, \tag{1.7}$$

где z^λ координаты на многообразии M, а $\dot{z}^\lambda$ координаты на касательных пространствах к M относительно голономных базисов этих пространств.

Хотя базис касательного пространства $T_z M$ можно выбрать произвольно, его обычно задают так, чтобы базисные векторы были касательными векторами к координатным линиям на M через точку z. Он называется *голономным базисом* и обозначается $\{\partial_\lambda\}$. Если требовать, чтобы голономность базиса касательного пространства сохранялась при преобразованиях координат на многообразии, последние должны сопровождаться переходом к новым голономным базисам

$$\partial'_\lambda = \frac{\partial z^\alpha}{\partial z'^\lambda}\, \partial_\alpha.$$

Имеет место естественная сюръекция

$$\pi_M : TM \supset T_z M \to z \in M \tag{1.8}$$

многообразия касательных пространств TM на M. Она наделяет TM структурой расслоенного пространства, которое называется *касательным расслоением*. При этом всякий морфизм многообразий $f : M \to M'$ порождает морфизм соответствующих касательных расслоений

$$Tf : TM \to TM', \tag{1.9}$$

$$\dot{z}'^\lambda \circ Tf = \frac{\partial f^\lambda}{\partial z^\alpha}\, \dot{z}^\alpha.$$

Это послойный морфизм над f, который осуществляет линейные отображения касательных пространств $T_z M$ к M в касательные пространства $T_{f(z)} M'$ к M'. Его называют *дифференциалом отображения* f или *касательным морфизмом* (tangent morphism) к f.

В дальнейшем мы будем иметь дело, как правило, с морфизмами многообразий следующих типов: инъекция, сюръекция, иммерсия, погружение, вложение, субмерсия, проекция, уже упомянутый выше диффеоморфизм и локальный диффеоморфизм. Остановимся на них подробнее, поскольку в разных изданиях терминология различается. Кроме того, в ключевом для нас определении расслоенного многообразия $\pi : Y \to X$ требуется, чтобы морфизм π был не просто сюръекцией, а еще и субмерсией. Поэтому необходимо ясно представлять, что это такое.

Существует два типа морфизмов многообразий $f : M \to M'$, когда *матрицы Якоби*

$$S_f(z) = \left(\frac{\partial f^\lambda}{\partial z^\alpha}\right)$$

касательного морфизма Tf к f в точках $z \in M$ имеют максимальный ранг. Это иммерсия, когда $\dim M \leqslant \dim M'$ и субмерсия, когда $\dim M \geqslant \dim M'$. Если морфизм f является одновременно и иммерсией, и субмерсией, когда $\dim M = \dim M'$, это *локальный диффеоморфизм*.

Морфизм многообразий $f : M \to M'$ называется *иммерсией* (immersion), если для любой точки $z \in M$ касательный морфизм Tf осуществляет инъекцию касательного пространства $T_z M$ в касательное пространство $T_{f(z)}M'$.

Приведем следующий критерий иммерсии. Морфизм $f : M \to M'$ является иммерсией тогда и только тогда, когда для всякой точки $z \in M$ существуют ее открытая окрестность U_z и открытая окрестность $U_{f(z)} \supset f(U)$ точки $f(z)$ с такими координатами (z'^λ), что

$$z'^\lambda \circ f = 0, \qquad \lambda = \dim M + 1, \ldots, \dim M',$$

а $(z'^\lambda \circ f)$, $\lambda = 1, \ldots, \dim M$, являются координатами на U_z.

Морфизм $f : M \to M'$, который является одновременно инъекцией и иммерсией, называется *погружением*. Образ погружения многообразия M в многообразие M' по определению считается *подмногообразием* многообразия M'.

Пример 1.2.7. Рассмотрим многообразие $M = \mathbb{R}$ с координатой (z) и многообразие $M' = \mathbb{R}^2$ с координатами (z'^1, z'^2). Отображение

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,$$
$$z \mapsto (z'^1 = 0,\ z'^2 = (z)^3),$$

дает пример инъекции, которая не является иммерсией, и соответственно ее образ не является подмногообразием. Рисунок 4 демонстрирует случай иммерсии, которая не является инъекцией. □

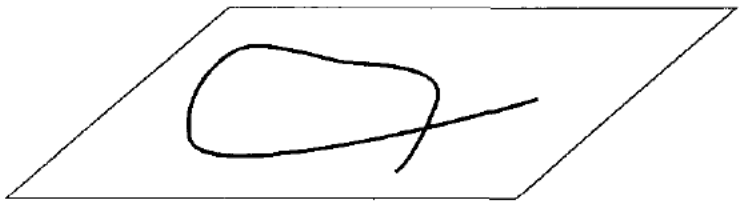


Рис. 4

Подчеркнем, что в отличие от структуры топологического подпространства, далеко не всякое подмножество многообразия может быть наделено структурой подмногообразия. Более того не всякое подмногообразие является топологическим подпространством многообразия. Пример 1.1.16 иллюстрирует этот факт.

Подмногообразие, которое является также и топологическим подпространством многообразия называется *вложенным подмногообразием*, а диффеоморфизм на вложенное подмногообразие называется *вложением многообразия*. Следующее условие может служить критерием вложения.

Морфизм $f : M \to M'$ является вложением тогда и только тогда, когда для всякой точки $z \in M$ существует открытая окрестность $U_{f(z)}$ точки $f(z)$ с такими координатами (z'^λ), что пересечение $f(M) \cap U_{f(z)}$ состоит из тех и только тех точек $z' \in U_{f(z)}$, чьи координаты удовлетворяют условию

$$z'^\lambda = 0, \qquad \lambda = \dim M + 1, \ldots, \dim M'. \tag{1.10}$$

Это означает, что вложенное подмногообразие может быть локально задано координатными условиями (1.10).

Например, всякое открытое подмножество U многообразия M может быть наделено структурой многообразия, такой что естественная инъекция $i_U : U \hookrightarrow M$ является вложением. Поэтому в дальнейшем, говоря об открытом подмножестве многообразия, мы будем подразумевать и его структуру вложенного подмногообразия.

Морфизм $f : M \to M'$ называется *субмерсией* (submersion), если для всякой точки $z \in M$ касательный морфизм Tf является сюръекцией касательного пространства T_zM к M на касательное пространство $T_{f(z)}M'$ к M'.

Следующие условия эквивалентны.

- Морфизм $f : M \to M'$ является субмерсией.
- Для всякой точки $z \in M$ существуют: (i) открытая окрестность U_z, (ii) открытая окрестность $U_{f(z)} \supset f(U)$ точки $f(z)$, (iii) многообразие V_U и (iv) диффеоморфизм

$$\psi : U_z \to U_{f(z)} \times V_U, \qquad (1.11)$$
$$\mathrm{pr}_1 \circ \psi = f|_{U_z}.$$

  Другими словами имеет место *локальное расщепление* многообразия M.
- Пусть U_z и $U_{f(z)}$ — упомянутые в предыдущем пункте окрестности точек z и $f(z)$ соответственно. Пусть (z'^λ) — координаты на $U_{f(z)}$. Можно так выбрать координаты (z^λ) на U_z, что

$$z^\lambda = z'^\lambda \circ f, \qquad \lambda = 1, \ldots, \dim M',$$

  т. е. эти координаты совпадают с координатами на $U_{f(z)}$.
- Для любой точки $f(z) \in M'$ имеется открытая окрестность $U_{f(z)}$ и ее вложение s в M такое, что

$$(s \circ f)(z) = z.$$

  Другими словами существует *сечение* многообразия M над $U_{f(z)}$.

Каждое из приведенных выше условий полностью характеризует субмерсию и может служить в качестве ее эквивалентного определения.

Морфизм многообразий, который одновременно является субмерсией и сюръекцией, называется *проекцией*.

Пример 1.2.8. Отображение

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$z' = z^3 - z,$$

дает пример сюръекции, которая не является субмерсией. □

Многообразие M, наделенное проекцией $f : M \to M'$, называется *расслоенным многообразием* над базой M'. Это основной математический объект, к которому мы будем обращаться на протяжении всей книги.

В полевых моделях обычно рассматривают расслоенные многообразия над ориентируемой базой, которая играет роль пространственно-временного многообразия.

Координатный атлас многообразия M называется *ориентированным*, если якобианы

$$\det\left(\frac{\partial z_\zeta^\mu}{\partial z_\xi^\nu}\right)$$

всех функций перехода между картами положительны. Многообразие считается *ориентируемым*, если всякий его атлас эквивалентен некоторому ориентированному атласу. Говорят, что два ориентированных атласа на многообразии ориентированы одинаково, если их объединение — тоже ориентированный атлас. *Ориентацией многообразия* называется класс эквивалентности одинаково ориентированных атласов. Связное ориентируемое многообразие имеет в точности две ориентации.

Пример 1.2.9. Сфера S^n ориентируема. Для иллюстрации рассмотрим сферу S^2 из Примера 1.2.1. Якобиан функции перехода (1.5) равен

$$(x_1^2 + y_1^2)^{-2} > 0,$$

т. е. координатный атлас $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ является ориентированным. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо только для нечетных n. В частности, рассмотрим проективное пространство $\mathbb{R}P^1$ из Примера 1.2.3. Функция перехода между картами $(1, x_1^2)$ и $(x_2^1, 1)$ имеет вид

$$x_2^1 = \frac{1}{x_1^2}.$$

Легко проверить, что ее якобиан отрицателен: $-(x_1^2)^2 < 0$. Это означает, что указанный атлас не является ориентированным. Но преобразованием координат

$$x'^2_1 = x_1^2, \qquad x'^1_2 = -x_2^1$$

можно перейти к эквивалентному ориентированному атласу на $\mathbb{R}P^1$. □

Задание ориентации на многообразии можно себе представить наглядно в случае 2-мерной поверхности в 3-мерном евклидовом пространстве как построение гладкого поля нормальных к поверхности векторов. Ясно, что, если такое поле построено, то возможно еще только одно такое поле, получаемое изменением направлений всех векторов на противоположные. Примером поверхности, на которой поле нормальных векторов построить нельзя, является лист Мебиуса.

Морфизмы ориентируемых многообразий имеют специфическую характеристику, именуемую степенью отображения.

Рассмотрим сюръекцию ориентируемых m-мерных многообразий $f : M \to M'$ такую, что (i) прообраз $f^{-1}(z')$ всякой точки $z' \in M'$ состоит из конечного числа точек и (ii) якобиан касательного морфизма Tf, записанного относительно ориентированных координат, во всех этих точках отличен от нуля, т. е. это локальный диффеоморфизм. *Степень отображения* f в точке z' определяется как разность

$$\deg f_{z'} = N_+(z') - N_-(z')$$

числа N_+ точек прообраза $z \in f^{-1}(z')$, в которых якобиан Tf положителен (т. е. f не изменяет ориентацию) и числа N_- точек прообраза, где якобиан Tf отрицателен (т. е. f меняет ориентацию). Важно, что, если M и M' связны, степень отображения одна и та же во всех точках многообразия M'.

В частности, степень отображения сферы S^n на сферу S^n показывает сколько раз при этом отображении первая сфера обертывается вокруг второй. Например, легко убедиться, что степень отображения окружности на окружность из Примера 1.2.6 равна двум.

§ 3. Расслоенные многообразия

Рассмотрим расслоенное многообразие

$$\pi : Y \to X, \tag{1.12}$$

где морфизм π по определению является сюръекцией и субмерсией. Договоримся использовать символы y и x для обозначения точек расслоенного многообразия Y и его базы X соответственно. Если специально не оговорено, база X в дальнейшем имеет размерность n. Она наделена системой координат (x^λ).

Отметим, что в случае расслоенного многообразия, проекция π является *открытым отображением*, т. е. переводит открытые множества в открытые. Она определяет отношение эквивалентности $\pi(y) = \pi(y')$ на Y, классами эквивалентности которого являются *слои* $\pi^{-1}(x)$ расслоенного многообразия. При этом база X гомеоморфна фактору Y по этому отношению эквивалентности.

На расслоенном многообразии $Y \to X$ по определению может быть задана *расслоенная система координат*

$$\begin{aligned} &(x^\lambda, y^i), \\ &x^\lambda \to x'^\lambda(x^\mu), \\ &y^i \to y'^i(x^\mu, y^j), \end{aligned} \tag{1.13}$$

подчиненная структуре расслоения (1.12). Иными словами среди координат расслоенного многообразия можно выделить координаты базы x^λ, преобразования перехода которых не зависят от оставшихся координат y^i.

Мы, как правило, будем иметь дело с расслоенными многообразиями следующей, можно сказать, упрощенной конструкции.

Расслоенное многообразие $Y \to X$ называется *тривиальным расслоением*, если существует такое многообразие V, что Y диффеоморфно прямому произведению $X \times V$.

Пример 1.3.1. Тор $T^2 = S^1 \times S^1$ из Примера 1.1.17 является тривиальным расслоением над окружностью S^1. Наглядным примером нетривиального расслоенного многообразия может служить открытый лист Мебиуса. Базой его является окружность S^1, а слоями — интервалы $]-1, 1[$ (см. ниже Пример 1.3.4). Он отличается от открытого кольца $S^1 \times]-1, 1[$ — тривиального расслоения с той же базой и такими же слоями. □

Подобно тому как многообразия склеены из областей евклидовых пространств, будем рассматривать в основном расслоенные многообразия, которые как бы склеены из кусков тривиальных расслоений.

Расслоенное многообразие $Y \to X$ называется *локально тривиальным*, если для каждой точки $x \in X$ существует открытая окрестность U такая, что имеет место *локальное расщепление*

$$\begin{aligned} &\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times V, \\ &\mathrm{pr}_1 \circ \psi = \pi, \end{aligned} \tag{1.14}$$

расслоенного многообразия Y. При этом, в отличие от (1.11), во всех локальных расщеплениях (1.14) фигурирует одно и то же многообразие V, которому диффеоморфны слои Y. Оно называется *типичным слоем* (standard fiber). Расщепление (1.14) представляет собой тривиальное расслоения $U \times V \to U$ над U. Существует открытое покрытие $\{U_\xi\}$ базы X такое, что локально тривиальное расслоенное многообразие Y выглядит как склеенное из тривиальных расслоений $U_\xi \times V$ над U_ξ. Подмножества $U_\xi \subset X$

называются *областями тривиализации*, а соответствующие диффеоморфизмы ψ_ξ — *морфизмами тривиализации* расслоенного многообразия Y. Пары областей и морфизмов тривиализации (U_ξ, ψ_ξ) составляют *атлас расслоения*

$$\Psi = \{U_\xi, \psi_\xi, \rho_{\xi\zeta}\}$$

с *функциями перехода*

$$\rho_{\xi\zeta} : (U_\xi \cap U_\zeta) \times V \underset{U_\xi \cap U_\zeta}{\longrightarrow} (U_\xi \cap U_\zeta) \times V,$$
$$\psi_\xi(y) = (\rho_{\xi\zeta} \circ \psi_\zeta)(y), \qquad y \in \pi^{-1}(U_\xi \cap U_\zeta).$$

Последние удовлетворяют естественным циклическим условиям

$$\rho_{\xi\xi} = \mathrm{Id}_{U_\xi \times V},$$
$$\rho_{\xi\zeta} \circ \rho_{\zeta\varkappa}\big|_{U_\xi \cap U_\zeta \cap U_\varkappa \times V} = \rho_{\xi\varkappa}\big|_{U_\xi \cap U_\zeta \cap U_\varkappa \times V}.$$

Пример 1.3.2. Рассмотрим многообразия $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, параметризуемое координатами (y^1, y^2), и $\mathbb{R}$, параметризуемое (x). Проекция

$$\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},$$
$$x \circ \pi = (y^1)^2 - (y^2)^2,$$

дает пример расслоенного многообразия, которое не является локально тривиальным. □

Дифференцируемым расслоением или просто *расслоением* (fiber bundle) называется локально тривиальное расслоенное многообразие (1.12), наделенное семейством эквивалентных атласов расслоения.

Как и для атласов многообразий, два атласа расслоения считаются *эквивалентными*, если их объединение тоже является атласом расслоения. В частности, два атласа расслоения $\Psi = \{U_\xi, \psi_\xi\}$ и $\Psi' = \{U_\xi, \psi'_\xi\}$ над одним и тем же покрытием $\{U_\xi\}$ базы X эквивалентны тогда и только тогда, когда их морфизмы тривиализации отличаются друг от друга изоморфизмами тривиальных расслоений $U_\xi \times V$:

$$g_\xi : U_\xi \times V \underset{U_\xi}{\longrightarrow} U_\xi \times V,$$
$$\psi'_\xi = g_\xi \circ \psi_\xi.$$

В свою очередь всякое семейство таких изоморфизмов $\{U_\xi, g_\xi\}$ задает *преобразование атласов расслоения*

$$\{U_\xi, \psi_\xi\} \to \{U_\xi, g_\xi \circ \psi_\xi\}. \tag{1.15}$$

Например, расслоение является тривиальным тогда и только тогда, когда всякий его атлас посредством преобразований (1.15) может быть приведен к атласу только с тождественными функциями перехода $\rho_{\xi\zeta}$.

Заметим, что часто, вместо функций перехода $\rho_{\xi\zeta}$, технически бывает более удобно оперировать величинами

$$\varrho_{\xi\zeta} := \mathrm{pr}_2 \circ \rho_{\xi\zeta} : (U_\xi \cap U_\zeta) \times V \to V, \tag{1.16}$$

которые также будем называть *функциями перехода*. Аналогично, вместо морфизмов тривиализации ψ_ξ, иногда целесообразно использовать величины

$$\varphi_\xi := \mathrm{pr}_2 \circ \psi_\xi : \pi^{-1}(U_\xi) \to V,$$

которые также будем называть *морфизмами тривиализации*. При этом атлас расслоения можно эквивалентно характеризовать посредством $\varrho_{\xi\zeta}$ и φ_ξ, поскольку

$$\rho_{\xi\zeta} = \mathrm{Id}_{U_\xi \cap U_\zeta} \times \varrho_{\xi\zeta},$$
$$\psi_\xi = \pi \times \varphi_\xi.$$

Если $Y \to X$ — расслоение, будем в дальнейшем предполагать, что система расслоенных координат (1.13) на Y ассоциирована с некоторым атласом расслоения Ψ, т. е.

$$y^i(y) = (v^i \circ \varphi_\xi)(y), \qquad \pi(y) \in U_\xi,$$

где v^i являются координатами на типичном слое V расслоения Y. Функции перехода (1.16) тогда записываются как преобразования расслоенных координат

$$v^i \circ \varrho_{\xi\zeta} = y^i_\xi(x^\lambda_\zeta, y^j_\zeta).$$

Для этого атлас расслоения и координатный атлас базы расслоения необходимо задавать над одним и тем же открытым покрытием базы, например, взяв объединение открытых покрытий для этих атласов. Поэтому в дальнейшем договоримся просто считать открытое покрытие $\{U_\xi\}$ базы расслоения фиксированным.

Пример 1.3.3. Пусть TM — многообразие касательных пространств к многообразию M. Легко проверить, что морфизм (1.8) является проекцией и $\pi_M : TM \to M$ — это расслоение. Оно называется *касательным расслоением* (tangent bundle). Если задан координатный атлас $\Psi_M = \{U_\xi, \phi_\xi\}$ многообразия M, то в качестве атласа касательного расслоения обычно (но вовсе не обязательно) выбирают соответствующий *голономный атлас* (holonomic atlas)

$$\Psi = \{U_\xi, \psi_\xi = T\phi_\xi\}. \tag{1.17}$$

Ассоциированной системой расслоенных координат на TM являются голономные координаты (1.6). Функции перехода атласа (1.17) в этих координатах имеют вид (1.7). □

Расслоения можно вводить по-разному. Один из распространенных подходов основывается на том факте, что всякое расслоение $Y \to X$ однозначно задается набором (X, V, Ψ), включающим базу X, типичный слой V и атлас расслоения Ψ. При этом расслоения (X, V, Ψ) и (X, V, Ψ') с одной и той же базой, одним и тем же типичным слоем и разными, но эквивалентными атласами — это суть одно и то же расслоение. Они называются *эквивалентными расслоениями*.

Пример 1.3.4. Уже упоминавшийся открытый *лист Мебиуса* является нетривиальным расслоением над окружностью S^1 с типичным слоем — интервалом $V =]-1, 1[$. Его стандартный атлас состоит из двух карт $U_1 \times V$ and $U_2 \times V$ над покрытием

$$U_1 = \{-\varepsilon < \chi < \pi + \varepsilon\}, \qquad U_2 = \{\pi - \varepsilon < \chi < 2\pi + \varepsilon\},$$
$$U_1 \cap U_2 = W_1 \cup W_2 =]-\varepsilon, \varepsilon[\cup]\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon[,$$

с функцией перехода

$$\varrho(\chi) : v \mapsto -v, \qquad \chi \in W_1,$$
$$\varrho(\chi) : v \mapsto v, \qquad \chi \in W_2.$$

У кольца в тех же обозначениях функция перехода имеет вид

$$\varrho(\chi) : v \mapsto v.$$

□

Пример 1.3.5. Касательное расслоение TM над m-мерным многообразием M из Примера 1.3.3 можно определить как расслоение с базой M, типичным слоем $\mathbb{R}^m$ и атласом расслоения Ψ, эквивалентным некоторому голономному атласу (1.17). Например, касательное расслоение над окружностью S^1 тривиально и диффеоморфно цилиндру. Касательное расслоение над сферой S^2, координатный атлас которой описан в Примере 1.2.1, уже не тривиально. Функции перехода соответствующего голономного атласа на TS^2 можно получить подстановкой выражения (1.5) в (1.7):

$$\dot{x}_2 = \frac{y_1^2 - x_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2}\dot{x}_1 - \frac{2x_1y_1}{(x_1^2 + y_1^2)^2}\dot{y}_1,$$
$$\dot{y}_2 = \frac{2x_1y_1}{(x_1^2 + y_1^2)^2}\dot{x}_1 + \frac{y_1^2 - x_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2}\dot{y}_1.$$

Подчеркнем, что над многообразием M существуют и другие расслоения с типичным слоем $\mathbb{R}^m$, не эквивалентные TM. □

Если строить расслоение, задавая его базу, типичный слой и атлас расслоения, то выбрать области тривиализации для атласа расслоения помогает тот факт, что любое расслоение над стягиваемой базой (когда любая замкнутая линия стягиваема в точку) всегда тривиально. Здесь существенным образом используется, что по соглашению все многообразия считаются паракомпактными.

Расслоенное многообразие $\pi : Y \to X$, поскольку π — субмерсия, по определению имеет *локальное сечение* над некоторой открытой окрестностью всякой точки $x \in X$. Если Y — расслоение, то оно с очевидностью допускает сечение $s_\zeta : U_\zeta \hookrightarrow Y$ над всякой своей областью тривиализации U_ζ. Если на расслоенном многообразии Y задана система расслоенных координат (x^λ, y^i), то его сечения s характеризуются семействами локальных координатных функций $s^i = y^i \circ s$ с соответствующими законами координатных преобразований.

Сечение расслоенного многообразия $Y \to X$ представляет собой вложение $s_U : U \hookrightarrow Y$, т. е. его образом является вложенное подмногообразие в Y. Образ *глобального сечения* $s : X \hookrightarrow Y$ — это замкнутое вложенное подмногообразие. Однако не всякое расслоение имеет глобальное сечение. В силу соглашению о паракомпактности базы дифференцируемого расслоения, мы можем использовать следующие две теоремы.

Теорема 1.3.1. Если расслоение $Y \to X$ имеет глобальное сечение, всякое его локальное сечение над замкнутым вложенным подмногообразием базы X может быть продолжено (хотя и не однозначно) до глобального сечения $Y \to X$. □

Теорема 1.3.2.. Всякое расслоение с типичным слоем $\mathbb{R}^m$ допускает глобальное сечение. □

Из Теоремы 1.3.2, в частности, следует, что касательное расслоение TM всегда имеет глобальное сечение, например, $(\dot{z}^\mu \circ s)(z) = 0$. Лист Мебиуса из Примера 1.3.4 тоже имеет глобальное сечение $(v \circ s)(\chi) = 0$.

ПРИМЕР 1.3.6. Глобальное сечение u касательного расслоения TM над многообразием M называется *векторным полем* на M. В голономных координатах на TM оно имеет вид

$$u(z) = u^\mu(z)\partial_\mu.$$

Векторное поле называется *неособым*, если оно нигде не обращается в 0. Неособые векторные поля существуют не на всяком многообразии. Например, такое поле нельзя построить на сфере S^2. □

В полевых моделях, как уже отмечалось, классические поля представляются сечениями расслоенных многообразий. Как правило, это расслоения. Поэтому в дальнейшем, за исключением некоторых случаев, мы ограничимся рассмотрением именно расслоений, тем более, что все изложенное ниже, будет справедливо и для расслоенных многообразий.

Как и в случае топологических расслоенных пространств, в качестве *морфизмов расслоений* рассматриваются их *послойные морфизмы*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Phi} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array} \qquad (1.18)$$

В частности, если морфизм расслоений (1.18) — это послойное погружение над X, то его образ является подмногообразием в Y' и он называется *подрасслоением* расслоения $Y' \to X$. Послойное вложение часто называют *мономорфизмом расслоений* (bundle monomorphism), а послойный диффеоморфизм над X — *изоморфизмом расслоений* (bundle isomorphism).

Послойный морфизм Φ (1.18) над диффеоморфизмом f преобразует всякое сечение s расслоения $Y \to X$ в сечение

$$s' = \Phi \circ s \circ f^{-1} \qquad (1.19)$$

расслоения $Y' \to X'$.

Примером послойного морфизма расслоений может служить *касательный морфизм* Tf (1.9) касательного расслоения TM в касательное расслоение TM', порождаемый морфизмом многообразий $f : M \to M'$. Он представляет собой линейный послойный морфизм над f:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TM' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

Если f — диффеоморфизм, то Tf изоморфизм.

Заметим, что не всякий даже диффеоморфизм $X \to X'$ базы расслоения $Y \to X$ на базу расслоения $Y \to X'$ может быть продолжен до послойного морфизма расслоений $Y \to Y'$. В то же время, если дано расслоение $Y' \to X'$, всякий морфизм $f : X \to X'$

порождает так называемое *индуцированное* (pullback) расслоение f^*Y' над X. Оно образовано всевозможными парами

$$\{(y', x) \in Y' \times X, \quad \pi'(y') = f(x)\}$$

с естественной проекцией $(y', x) \mapsto x$. Другими словами, слоем индуцированного расслоения f^*Y' над точкой $x \in X$ является слой расслоения Y' над точкой $f(x) \in X'$. При этом существует естественный послойный морфизм

$$\begin{aligned} &f_* : f^*Y' \to Y', \\ &f_* : (y', x) \mapsto y', \end{aligned} \tag{1.20}$$

над f. Отметим, что всякое сечение s расслоения Y' задает *индуцированное сечение*

$$(f^*s)(x) = ((s \circ f)(x), x) \tag{1.21}$$

расслоения $f^*Y' \to X$, индуцированного из $Y' \to X'$.

Пример 1.3.7. Пусть дано расслоение $Y' \to X'$. Если образ отображения $f : X \to X'$ является подмногообразием в X', то индуцированное расслоение

$$f^*Y' = Y'|_{f(X)}$$

называется *сужением расслоения* Y' на подмногообразие $f(X) \subset X'$. □

Пример 1.3.8. *Прямое произведение расслоений* $\pi : Y \to X$ и $\pi' : Y' \to X$ над одной и той же базой X определяется как индуцированное расслоение

$$\pi^*Y' = \pi'^*Y = Y \underset{X}{\times} Y'.$$

□

Рассмотрим теперь расслоения, наделенные некоторой алгебраической структурой.

Расслоение $\pi : Y \to X$ называется *групповым расслоением*, если заданы послойные морфизмы

$$\begin{aligned} &\widehat{m} : Y \underset{X}{\times} Y \to Y, \\ &\widehat{i} : Y \to Y \end{aligned} \tag{1.22}$$

над X и глобальное сечение

$$e : X \hookrightarrow Y, \tag{1.23}$$

которые превращают каждый слой Y_x расслоения Y в группу

$$\begin{aligned} \widehat{m}((e \circ \pi)(y), y) = \widehat{m}(y, (e \circ \pi)(y)) = y, \\ \widehat{m}(\widehat{i}(y), y) = \widehat{m}(y, \widehat{i}(y)) = (e \circ \pi)(y). \end{aligned}$$

Более точно было бы назвать такое расслоение расслоением на группы, когда само многообразие Y не является группой, но "расслаивается" на группы. Подчеркнем, что, хотя слои группового расслоения наделены групповой структурой, его типичный слой в общем случае не является группой.

Пусть даны расслоение $Y \to X$ и групповое расслоение $\overline{Y} \to X$ вместе с послойным морфизмом

$$r : Y \underset{X}{\times} \overline{Y} \to Y$$

над X, который определяет в каждом слое Y_x расслоения Y левое (или правое) свободное транзитивное действие группы $\overline{Y}_x$. Тогда расслоение Y называется *обобщенным аффинным расслоением*, моделируемым слева (соотв. справа) над групповым расслоением $\overline{Y}$.

Напомним, что действие группы G в пространстве V называется *свободным*, если $gv = v$ для некоторого $v \in V$ влечет $g = \widehat{1}$.

Пример 1.3.9. *Векторное расслоение* $Y \to X$ можно характеризовать как групповое расслоение, слои которого являются векторными пространствами, т. е. имеют структуру аддитивной группы векторного пространства $\mathbb{R}^k$. Однако этого недостаточно. Предполагается, что векторное расслоение должен быть наделено атласом расслоения, морфизмы тривиализации которого линейны на его слоях. Более того, только такие атласы рассматриваются в качестве атласов векторного расслоения. В этом случае типичный слой векторного расслоения является векторным пространством и не только диффеоморфен, но и изоморфен $\mathbb{R}^k$. Примером векторного расслоения может служить касательное расслоение $TM \to M$. □

Пример 1.3.10. *Аффинным расслоением* называется обобщенное аффинное расслоение $Y \to X$, моделируемое над некоторым векторным расслоением $\overline{Y} \to X$. Оно наделено атласом *аффинных расслоенных координат* (x^λ, y^i) таких, что

$$r : (y^i, \overline{y}^i) \mapsto y^i + \overline{y}^i,$$

где $(x^\lambda, \overline{y}^i)$ — линейные расслоенные координаты на векторном расслоении $\overline{Y}$. Типичный слой аффинного расслоения Y является *аффинным пространством*, моделируемым над векторным пространством типичного слоя векторного расслоения $\overline{Y}$. Он диффеоморфен некоторому $\mathbb{R}^k$. В частности, всякое векторное расслоение Y имеет каноническую структуру аффинного расслоения, моделируемого над самим собой посредством морфизма

$$r : (y, y') \mapsto y + y'.$$

Из Теоремы 1.3.2 следует, что аффинное расслоение, как и векторное, всегда обладает глобальным сечением. □

Приведем основные операции, производимые с векторными расслоениями над одной и той же базой:

- *дуальное* к Y векторное расслоение Y^* с типичным слоем V^*, дуальным типичному слою V векторного расслоения Y;
- *сумма Уитни* $Y \oplus Y'$ векторных расслоений Y и Y' с типичным слоем $V \oplus V'$ — прямой суммой типичных слоев расслоений Y и Y';
- *тензорное произведение* $Y \otimes Y'$ векторных расслоений Y и Y' с типичным слоем $V \otimes V'$ — тензорным произведением типичных слоев расслоений Y и Y';
- r-кратное *внешнее произведение* (exterior product)

$$\bigwedge^r Y = Y \wedge \cdots \wedge Y.$$

расслоения Y с типичным слоем — r-кратным антисимметризованным тензорным произведением $\bigwedge^r V$ типичного слоя V расслоения Y,

- *свертка*

$$\lrcorner : Y \otimes Y^* \to X \times \mathbb{R}$$

или

$$\langle\ \rangle : Y \times Y^* \to X \times \mathbb{R}.$$

Пример 1.3.11. Дуальным к касательному расслоению $TM \to M$ является *кокасательное расслоение* (cotangent bundle) $T^*M \to M$. Оно обычно наделяется атласом расслоенных голономных координат

$$(z^\lambda, \dot{z}_\lambda),$$
$$\dot{z}'_\lambda = \frac{\partial z^\mu}{\partial z'^\lambda}\dot{z}_\mu,$$

которые представляют собой коэффициенты разложения кокасательных векторов

$$T^*M \ni t^* = \dot{z}_\lambda dz^\lambda$$

относительно *голономных базисов* $\{dz^\lambda\}$ кокасательных пространств к M, дуальных к $\{\partial_\lambda\}$:

$$\partial_\lambda \lrcorner\, dz^\alpha = \delta^\alpha_\lambda.$$

Сечение ϕ кокасательного расслоения T^*M именуется *ковекторным полем* или *пфаффовой формой* на M. В голономных координатах на T^*M оно имеет вид

$$\phi(z) = \phi_\mu(z)dz^\mu.$$

Диффеоморфизм многообразий $f : M \to M'$ порождает соответствующий изоморфизм кокасательных расслоений

$$T^*f : T^*M \to T^*M',$$

задаваемый соотношением

$$Tf(t) \lrcorner\, T^*f(t_*) = t \lrcorner\, t_*$$

для всех пар векторов $t \in T_zM$ и ковекторов $t_* \in T^*_zM$. Могут быть образованы всевозможные тензорные произведения

$$\left(\bigotimes^n T^*M\right) \otimes \left(\bigotimes^m TM\right)$$

кокасательных и касательных расслоений. Они называются *тензорными расслоениями*, а их сечения — n раз ковариантными и m раз контравариантными *тензорными полями*

$$\phi = \phi^{\mu_1 \cdots \mu_m}_{\nu_1 \cdots \nu_n}(z)dz^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dz^{\nu_n} \otimes \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_m}.$$

□

Послойной метрикой или просто метрикой в слоях векторного расслоения $Y \to X$ называется глобальное сечение a расслоения $Y^* \otimes Y^* \to X$. Она задает билинейную форму

$$a(x) : Y_x \times Y_x \ni (y, y') \mapsto a_{ij}(x)y^i y'^j \in \mathbb{R}$$

на каждом слое расслоения Y. Метрика a называется невырожденной, если все билинейные формы $a(x)$ невырождены. Невырожденная метрика в векторном расслоении Y однозначно определяет дуальную метрику в дуальном векторном расслоении Y^*. В целях упрощения обе такие метрики мы будем обозначать одним и тем же символом. Метрика в касательном расслоении TX называется *метрикой на многообразии* X.

Заметим, что сечения s_U группового расслоения $Y \to X$ над одним и тем же открытым подмножеством U базы X образуют некоторую группу G_U относительно операций поточечного умножения

$$(s_U \circ s'_U)(x) = s_U(x)s'_U(x), \qquad x \in U,$$

и перехода к обратному

$$s_U^{-1} = \widehat{i} \circ s_U.$$

При этом единичным элементом группы G_U служит сечение $e_U = e|_U$. Ясно однако, что, для сечений s_U и $s_{U'}$, заданных над разными подмножествами базы X, операцию умножения нельзя определить. Поэтому все множество сечений группового расслоения группой не является, но представляет собой так называемый *пучок сечений* (sheaf of sections) (см. Приложение В). В частности, мы будем иметь дело с пучком сечений $\mathscr{T}(M)$ касательного расслоения TM и пучком сечений $\mathscr{T}^*(M)$ кокасательного расслоения T^*M над многообразием M, а также пучками

$$\Big(\bigotimes^n \mathscr{T}^*(M)\Big) \otimes \Big(\bigotimes^m \mathscr{T}(M)\Big)$$

тензорных полей на M.

Рассмотрим теперь касательные и кокасательные расслоения над многообразиями, которые сами являются расслоениями. Естественно, что такие касательные и кокасательные расслоения обладают некоторой дополнительной структурой.

Пусть $\pi_Y : TY \to Y$ — касательное расслоение над многообразием Y, которое в свою очередь является расслоением $\pi : Y \to X$ над многообразием X. При заданных расслоенных координатах (x^λ, y^i) на Y, голономными координатами на TY служат

$$(x^\lambda, y^i, \dot{x}^\lambda, \dot{y}^i),$$

где $(\dot{x}^\lambda, \dot{y}^i)$ — координаты на касательных пространствах к Y, заданные относительно голономных базисов $\{\partial_\lambda, \partial_i\}$:

$$\dot{y}'^i = \frac{\partial y'^i}{\partial y^j}\dot{y}^j + \frac{\partial y'^i}{\partial x^\lambda}\dot{x}^\lambda,$$
$$\dot{x}'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\dot{x}^\lambda.$$

Расслоение TY естественным образом является также расслоением над X:

$$\pi \circ \pi_Y : TY \to X,$$

а касательный морфизм $T\pi$ к π задает на нем еще и структуру расслоения над TX:

$$T\pi : TY \to TX,$$
$$T\pi : (x^\lambda, y^i, \dot{x}^\lambda, \dot{y}^i) \mapsto (x^\lambda, \dot{x}^\lambda). \tag{1.24}$$

В результате имеет место следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} TY & \xrightarrow{T\pi} & TX \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_X}\,. \\ Y & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Пусть Φ — послойный морфизм (1.18) расслоения $Y \to X$ в расслоение $Y' \to X'$ над $f : X \to X'$. Касательный морфизм к Φ имеет вид

$$T\Phi : TY \to TY'$$
$$(\dot{x}'^{\lambda}, \dot{y}'^{i}) \circ T\Phi = (\partial_\mu f^\lambda \dot{x}^\mu,\ \partial_\mu \Phi^i \dot{x}^\mu + \partial_j \Phi^i \dot{y}^j).$$

Он представляет собой как линейный послойный морфизм над Φ, так и послойный морфизм над Tf:

$$\begin{array}{ccc} TY & \xrightarrow{T\Phi} & TY' \\ \downarrow & & \downarrow \\ TX & \xrightarrow{Tf} & TX' \end{array}\,.$$

В частности, если $Y \to X$ — расслоение с алгебраической структурой, то расслоение $TY \to TX$ (1.24) наследует эту алгебраическую структуру, задаваемую касательными морфизмами к морфизмам структуры (1.22) и (1.23).

Пример 1.3.12. Если $Y \to X$ векторное расслоение, то $TY \to TX$ тоже векторное расслоение. Если $Y \to X$ — аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $\overline{Y} \to X$, то $TY \to TX$ — тоже аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $T\overline{Y} \to TX$. □

Касательное расслоение $TY \to Y$ над расслоением $Y \to X$ обладает вложенным векторным подрасслоением

$$VY = \operatorname{Ker} T\pi,$$

задаваемым координатными условиями

$$\dot{x}^\lambda = 0.$$

Это подрасслоение состоит только из векторов, касательных к слоям расслоения Y, и называется *вертикальным касательным расслоением* (vertical tangent bundle) над Y, т. е. его слоями являются вертикальные подпространства касательных пространств к Y, натянутые на базисные векторы $\{\partial_i\}$. Координатами на VY служат голономные координаты $(x^\lambda, y^i, \dot{y}^i)$.

Выделение вертикального подрасслоения VY тем более имеет смысл, что, если дан послойный морфизм $\Phi : Y \to Y'$, то касательный морфизм $T\Phi$ отображает $VY \subset TY$ в $VY' \subset TY'$. Ограничение $T\Phi$ на вертикальное подрасслоение VY называется *вертикальным касательным морфизмом* к Φ и обозначается $V\Phi$. Это линейный послойный

морфизм над Φ:

$$\begin{array}{ccc} VY & \xrightarrow{V\Phi} & VY' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Phi} & Y' \end{array},$$

$$\dot{y}'^i \circ V\Phi = \partial_j \Phi^i \dot{y}^j.$$

Во многих важных случаях вертикальные касательные расслоения устроены следующим простым способом.

Говорят, что расслоение $Y \to X$ допускает *вертикальное расщепление* (vertical splitting), если вертикальное касательное расслоение $VY \to Y$ тривиально и имеет место изоморфизм

$$\alpha : VY \underset{Y}{\longrightarrow} Y \underset{X}{\times} \overline{Y}, \tag{1.25}$$

где $\overline{Y} \to X$ некоторое векторное расслоение.

Пример 1.3.13. Для всякого векторного расслоения $Y \to X$ существует *каноническое вертикальное расщепление*

$$VY = Y \underset{X}{\times} Y. \tag{1.26}$$

Аффинное расслоение $Y \to X$, моделируемое над векторным расслоением $\overline{Y} \to X$, допускает *каноническое вертикальное расщепление*

$$VY = Y \underset{X}{\times} \overline{Y}. \tag{1.27}$$

□

Расслоенные координаты y^i на расслоении Y называются *подчиненными вертикальному расщеплению* (1.25), если соответствующие голономные координаты на вертикальном касательном расслоении VY имеют вид

$$\dot{y}^i = \overline{y}^i \circ \alpha,$$

где $(x^\mu, \overline{y}^i)$ — расслоенные координаты на $\overline{Y}$. В этом случае координатные преобразования $\dot{y}^i \to \dot{y}'^i$ не зависят от координат y^i. Например, системы координат на векторных и аффинных расслоениях подчинены соответствующим каноническим вертикальным расщеплениям (1.26), когда $\dot{y}^i = y^i$, и (1.27), когда $\dot{y}^i = \overline{y}^i$.

По примеру вертикального касательного расслоения, индуцированное расслоение

$$Y \underset{X}{\times} TX$$

можно назвать *горизонтальным расслоением* над Y. Слоями этого расслоения в $y \in Y$ служат касательные пространства $T_{\pi(y)}X$ к X, но, в отличие от VY, его элементы не являются касательными векторами к Y. Другими словами, не существует канонического вложения $Y \underset{X}{\times} TX$ в TY. В то же время имеет место каноническая сюръекция

$$\pi_T : TY \underset{Y}{\longrightarrow} Y \underset{X}{\times} TX,$$

$$(x^\lambda, y^i, \dot{x}^\lambda, \dot{y}^i) \mapsto (x^\lambda, y^i, \dot{x}^\lambda).$$

Рассмотрим теперь кокасательное расслоение $T^*Y \to Y$ над расслоением $Y \to X$. При заданных расслоенных координатах (x^λ, y^i) на Y, голономными координатами на T^*Y являются

$$(x^\lambda, y^i, \dot{x}_\lambda, \dot{y}_i),$$

где $(\dot{x}_\lambda, \dot{y}_i)$ — координаты на кокасательных пространствах к Y, заданные относительно голономных базисов $\{dx^\lambda, dy^i\}$, дуальных $\{\partial_\lambda, \partial_i\}$. Подобно касательному расслоению TY, кокасательное расслоение T^*Y является также расслоением над X, но T^*Y не образует расслоения над T^*X, как это видно из закона преобразований координат

$$\dot{x}'_\mu = \frac{\partial y^i}{\partial x'^\mu}\dot{y}_i + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\dot{x}_\lambda.$$

Вертикальное кокасательное расслоение $V^*Y \to Y$ над Y определяется как векторное расслоение, дуальное вертикальному касательному расслоению $VY \to Y$. Однако, в отличие от вертикального подрасслоения VY касательного расслоения TY, какого-либо канонического вложения V^*Y в кокасательное расслоение T^*Y над Y не существует. Действительно, обозначим $\{\overline{dy}^i\}$ базисы слоев расслоения V^*Y, дульные базисам $\{\partial_i\}$ слоев расслоения VY. Их преобразования

$$\overline{dy}'^i = \frac{\partial y'^i}{\partial y^j}\overline{dy}^j$$

отличаются от преобразований

$$dy'^i = \frac{\partial y'^i}{\partial y^j}dy^j + \frac{\partial y'^i}{\partial x^\lambda}dx^\lambda$$

базисных элементов dy^i слоев кокасательного расслоения T^*Y. В то же время имеет место каноническая сюръекция

$$T^*Y \underset{Y}{\longrightarrow} V^*Y,$$
$$\dot{x}_\lambda dx^\lambda + \dot{y}_i dy^i \mapsto \dot{y}_i \overline{dy}^i.$$

Полностью соотношения между расслоениями TY и VY, а также между T^*Y и V^*Y можно представить в виде двух *точных последовательностей*:

$$0 \to VY \hookrightarrow TY \to Y \underset{X}{\times} TX \to 0, \tag{1.28a}$$
$$0 \to Y \underset{X}{\times} T^*X \hookrightarrow T^*Y \to V^*Y \to 0, \tag{1.28b}$$

где все отображения — это послойные морфизмы над Y. Точность последовательностей означает, что образ предыдущего отображения содержится в ядре последующего.

Сделаем два технических замечания.

- *Ядром послойного морфизма* Φ над X расслоения $Y \to X$ в некоторое векторное расслоение $Y' \to X$ называется прообраз

$$\mathrm{Ker}\,\Phi = \Phi^{-1}(\widehat{0}(X))$$

в Y образа $\widehat{0}(X) \subset Y'$ глобального нулевого сечения $\widehat{0}(x) = 0$ векторного расслоения Y'.

- В дальнейшем для упрощения выражений мы будем использовать символы TX и T^*X для обозначения любых индуцированных расслоений вида

$$Y \underset{X}{\times} TX, \qquad Y \underset{X}{\times} T^*X.$$

Точные последовательности (1.28a) и (1.28b) играют фундаментальную роль в дифференциальной геометрии. Хотя TX над Y не является каноническим подрасслоением TY, а V^*Y не является каноническим подрасслоением T^*Y, могут существовать различные вложения

$$\begin{aligned} &Y \underset{X}{\times} TX \underset{Y}{\hookrightarrow} TY, \\ &\partial_\lambda \mapsto \partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda(y)\partial_i, \end{aligned} \tag{1.29}$$

и

$$\begin{aligned} &V^*Y \underset{Y}{\hookrightarrow} T^*Y, \\ &\overline{dy}^i \mapsto dy^i - \Gamma^i_\lambda(y)dx^\lambda, \end{aligned} \tag{1.30}$$

которые, как говорится, расщепляют точные последовательности (1.28a) и (1.28b). Каждое такое расщепление по определению соответствует заданию некоторой связности Γ на расслоении $Y \to X$ (см. §1.6).

§ 4. Дифференциальные формы

Этот параграф посвящен векторным полям и различным типам дифференциальных форм на многообразиях и расслоениях. Все они — это частные случаи тензорных полей — глобальных сечений тензорных расслоений (см. Пример 1.3.11).

- Векторное поле на многообразии M — это сечение касательного расслоения TM.
- *Внешние дифференциальные формы* на M — сечения внешних произведений кокасательных расслоений

$$\bigwedge^r T^*M.$$

- *Тангенциально-значные дифференциальные формы* на M — сечения тензорных произведений

$$\bigwedge^r T^*M \otimes TM.$$

- Тангенциально-значные формы, а точнее, дифференциальные формы со значениями в касательных расслоениях, — это частный случай *векторнозначных форм* — сечений тензорных произведений

$$\bigwedge^r T^*M \underset{M}{\otimes} E,$$

где $E \to M$ — некоторое векторное расслоение над M.

Пусть M — это m-мерное многообразие с координатами (z^μ) и $u = u^\mu \partial_\mu$ — неособое векторное поле на M. Из известных теорем о существовании и единственности решения такой системы уравнений следует, что через каждую точку $z_0 \in M$ проходит одно и только одно решение $z(t, z_0)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz^\mu}{dt} = u^\mu(z(t)), \qquad z(0, z_0) = z_0,$$

определенное на интервале $|t| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Векторное поле называется *полным*, если его интегральные кривые определены при всех $z_0 \in M$, $t \in \mathbb{R}$. Для этого достаточно, чтобы они были определены при всех $z_0 \in M$ и некотором $\varepsilon > 0$.

Полное векторное поле u на многообразии M индуцирует семейство диффеоморфизмов

$$G_u(t) : M \ni z_0 \mapsto z(t, z_0) \in M \tag{1.31}$$

многообразия M на себя. Они удовлетворяют естественным условиям

$$\begin{aligned} G_u(0) &= \mathrm{Id}_M, \\ G_u(t+t') &= G_u(t') \circ G_u(t), \\ G_u(-t) &= G_u^{-1}(t) \end{aligned}$$

и образуют однопараметрическую группу Ли, действующую на M:

$$\mathbb{R} \times M \to M.$$

Мы обозначим ее G_u.

Диффеоморфизмы (1.31) многообразия M порождают соответствующие преобразования (1.19) векторных полей

$$\tau'(z) = (TG_u(t) \circ \tau)(G_u(t)^{-1}(z)),$$

пфаффовых форм

$$\phi'(z) = (T^*G_u(t) \circ \phi)(G_u(t)^{-1}(z))$$

и вообще пучков тензорных полей на многообразии M. Действие однопараметрической группы G_u на тензорных полях удобно представить, задав ее генератор

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_u \phi^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_n}(z) = (\partial_{\nu_1} u^\alpha)\phi^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\alpha \nu_2 \dots \nu_n}(z) + \dots + (\partial_{\nu_n} u^\alpha)\phi^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \alpha}(z) - \\ - (\partial_\alpha u^{\mu_1})\phi^{\alpha \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_n}(z) - \dots - (\partial_\alpha u^{\mu_k})\phi^{\mu_1 \dots \alpha}_{\nu_1 \dots \nu_n}(z) + u^\lambda \partial_\lambda \phi^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_n}(z). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Он называется *производной Ли* или *дифференцированием Ли* вдоль векторного поля u и удовлетворяет привычным для генераторов и дифференцирований условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_u(\phi + \phi') &= \mathbf{L}_u \phi + \mathbf{L}_u \phi', \\ \mathbf{L}_u(\phi \otimes \phi') &= \mathbf{L}_u \phi \otimes \phi' + \phi \otimes \mathbf{L}_u \phi'. \end{aligned}$$

В частности, если ϕ — вещественная функция на многообразии M, ее производная Ли сводится к обычному оператору дифференцирования по направлению u:

$$\mathbf{L}_u \phi = u^\lambda \partial_\lambda \phi.$$

В случае векторного поля $\phi = u'$, его производную Ли (1.32) можно представить в виде коммутатора или *скобок Ли* векторных полей u и u':

$$\mathbf{L}_u u' = (u^\alpha \partial_\alpha u'^\mu - u'^\alpha \partial_\alpha u^\mu)\partial_\mu = [u, u'], \tag{1.33}$$

где базисные векторы ∂_μ представляются соответствующими операторами частных производных $\partial/\partial z^\mu$.

Конструкции дифференцирования Ли (1.32) и скобок Ли (1.33) могут быть распространены на произвольное (будь то особое или локальное) векторное поле u на многообразии M. При этом скобки Ли (1.33) наделяют пучок $\mathscr{T}(M)$ векторных полей на M структурой *пучка алгебр Ли*. Другими словами всякое векторное поле на многообразии может быть представлено как элемент некоторой алгебры Ли.

Обратно, пусть G — некоторая группа Ли диффеоморфизмов многообразия M, которая действует на M эффективно. Имеет место вложение алгебры Ли $\mathscr{G}$ группы G в пучок векторных полей на M, при котором всякому элементу $I \in \mathscr{G}$ ставится в соответствие векторное поле u_I такое, что действие генератора I на тензорные поля совпадает с их дифференцированием Ли $\mathbf{L}_{u_I}$ вдоль векторного поля u_I. Оно называется *фундаментальным векторным полем*, отвечающим генератору I алгебры Ли $\mathscr{G}$. Можно сказать, что фундаментальное векторное поле $u_I(z)$ указывает направление, в котором переносится точка z под действием генератора I группы диффеоморфизмов G. На практике это означает, что, если мы хотим исследовать инвариантность той или иной величины, заданной на многообразии, относительно действия некоторой группы Ли диффеоморфизмов этого многообразия, часто бывает достаточно рассмотреть соответствующие производные Ли.

Перейдем теперь к дифференциальным формам на многообразии. Как уже отмечалось, это внешние и векторнозначные дифференциальные формы.

Изложение, краткое или во всех деталях, аппарата внешних дифференциальных форм можно найти в любой книге по дифференциальной геометрии и в обширной литературе по калибровочной теории. Поэтому напомним здесь только основные выражения.

Пусть M — это m-мерное многообразие с координатами (z^λ). *Внешними дифференциальными формами* степени r на M (или просто внешними r-формами) именуются сечения расслоения

$$\bigwedge^r T^*M \to M. \tag{1.34}$$

Например, сечения кокасательного расслоения T^*M в такой терминологии называются внешними 1-формами или, как уже говорилось, пфаффовыми формами. Вещественные функции на M принято считать внешними 0-формами.

Голономные базисы слоев расслоения (1.34) составляют элементы $dz^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\lambda_r}$ с фиксированным порядком $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. По определению это полностью антисимметризованные тензорные произведения

$$dz^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\lambda_r} = \sum_{[\mu_1 \ldots \mu_r]} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_r \\ \mu_1 \ldots \mu_r \end{pmatrix} dz^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dz^{\mu_r},$$

где суммирование производится по всем перестановкам $[\mu_1 \ldots \mu_r]$ индексов $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ и $\operatorname{sgn}() = \pm 1$ — знак такой перестановки. В голономных координатах, внешняя r-форма принимает вид

$$\phi = \phi_{\mu_1 \ldots \mu_r}(z) dz^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dz^{\mu_r} = \phi_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(z) dz^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\lambda_r}, \tag{1.35}$$

где в последнем выражении сумма берется по всем упорядоченным некоторым образом наборам индексов $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. При выборе другого упорядочивания одного и того же

набора индексов надо принимать во внимание, что коэффициентные функции $\phi_{\lambda_1\dots\lambda_r}(z)$ в разложении (1.35) антисимметричны по всем индексам.

Пример 1.4.1. Внешняя 3-форма на 4-мерном многообразии имеет вид

$$\phi = \phi_{123}(z)dz^1\wedge dz^2\wedge dz^3 + \phi_{234}(z)dz^2\wedge dz^3\wedge dz^4 + \phi_{124}(z)dz^1\wedge dz^2\wedge dz^4 + \phi_{134}(z)dz^1\wedge dz^3\wedge dz^4.$$

Разложение (1.35) внешней m-формы на m-мерном многообразии содержит только одно слагаемое

$$\phi = \phi(z)dz^{\lambda_1}\wedge\dots\wedge dz^{\lambda_m}.$$

Подчеркнем, что $\phi(z)$ в этом выражении не является вещественной функцией. При координатном преобразовании она делится на якобиан. Строго говоря, надо было бы написать $\phi_{\lambda_1\dots\lambda_m}(z)$. □

Внешние r-формы на многообразии M образуют пучок

$$\overset{r}{\bigwedge}\mathscr{T}^*(M),$$

а все внешние формы на M — *пучок*

$$\wedge\mathscr{T}^*(M) = R(M)\bigoplus\left(\bigoplus_1^m\left(\overset{r}{\bigwedge}\mathscr{T}^*(M)\right)\right),$$

где $R(M)$ обозначает пучок вещественных функций на M.

Перечислим основные операции над внешними формами.

(i) Прежде всего это — операция *внешнего произведения* (exterior product) $\wedge$ внешних форм, которая наделяет пучок внешних форм на многообразии M структурой пучка градуированных алгебр. Она обладает следующими свойствами.

- Пусть ϕ — внешняя r-форма и ϕ' — внешняя k-форма, тогда $\phi\wedge\phi'$ — это внешняя $(r+k)$-форма.

- Наряду с линейностью относительно сложения

  $$\sigma\wedge(\phi+\phi') = \sigma\wedge\phi + \sigma\wedge\phi',$$

  имеем следующее правило перестановки

  $$\phi\wedge\phi' = (-1)^{|\phi||\phi'|}\phi'\wedge\phi,$$

  где символ $|\phi|$ обозначает степень внешней формы ϕ.

- Используя предыдущие свойства и то что

  $$(dz^{\lambda_1}\wedge\dots\wedge dz^{\lambda_r})\wedge(dz^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dz^{\mu_k}) = dz^{\lambda_1}\wedge\dots\wedge dz^{\lambda_r}\wedge dz^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dz^{\mu_k},$$

  можно легко получить внешнее произведение любых внешних форм, заданных в координатном виде (1.35).

(ii) Операция *свертки* внешней r-формы (1.35) и векторного поля

$$u = u^\mu \partial_\mu$$

на многообразии M дается выражением

$$u \lrcorner \phi = \sum_{p=1}^{r} (-1)^{p-1} u^\mu \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1} \mu \lambda_{p+1} \dots \lambda_r} dz^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dz^{\lambda_p}} \wedge \dots \wedge dz^{\lambda_r},$$

где $\widehat{dz^{\lambda_p}}$ указывает на то, что элемент dz^{λ_p} удален. Эта операция естественным образом линейна по сложению внешних форм и удовлетворяет условию

$$u \lrcorner (\phi \wedge \phi') = (u \lrcorner \phi) \wedge \phi' + (-1)^{|\phi|} \phi \wedge (u \lrcorner \phi').$$

Удобно ввести обозначения

$$\begin{aligned} \omega &= dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \\ \omega_\lambda &= \partial_\lambda \lrcorner \omega, \qquad \partial_\mu \lrcorner \omega_\lambda = \omega_{\mu\lambda}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

(iii) На пучке внешних форм определена операция *внешнего дифференцирования* или просто *внешний дифференциал* (exterior differential) d. Оператор d переводит внешнюю r-форму во внешнюю $(r+1)$-форму и обладает свойствами

$$\begin{aligned} dd &= 0, \\ d(\phi \wedge \phi') &= (d\phi) \wedge \phi' + (-1)^{|\phi|} \phi \wedge (d\phi'). \end{aligned}$$

В голономных координатах операция внешнего дифференцирования имеет вид

$$d\phi = \partial_\mu \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}(z) dz^\mu \wedge dz^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dz^{\lambda_r}.$$

Пример 1.4.2. Если, ϕ — вещественная функция, то

$$d\phi = \partial_\mu \phi dz^\mu.$$

Если ϕ — 1-форма, тогда

$$d\phi = \partial_\mu \phi_\nu dz^\mu \wedge dz^\nu.$$

Например, выражение для тензора напряженности электромагнитного поля через его вектор-потенциал $A = A_\nu dx^\nu$ имеет вид

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = dA.$$

□

Внешняя форма ϕ называется *замкнутой*, если $d\phi = 0$. Внешняя форма ϕ называется *точной*, если $\phi = d\sigma$. Из свойств операции внешнего дифференцирования следует, что всякая точная форма является замкнутой, но не наоборот. Существуют топологические препятствия тому, чтобы замкнутая форма была точной. Это всегда имеет место на стягиваемом многообразии, все глобальные топологические характеристики которого тривиальны. Мы вернемся к этому вопросу в следующей главе.

(iv) Пусть $f : M \to M'$ — морфизм многоообразий. Всякая внешняя форма φ на M' порождает внешнюю форму $f^*\varphi$ на M, задаваемую соотношением

$$t \lrcorner f^*\varphi(z) = Tf(t) \lrcorner \varphi(f(z))$$

для всех элементов $t \in TM$ над одной и той же точкой $z \in M$. Она называется *индуцированной формой* (pullback form) на M. Например, всякая пфаффова форма

$$\phi(z') = \phi_\mu(z')dz'^\mu$$

на многообразии M' порождает пфаффову форму

$$f^*\phi(z) = \phi_\mu(f(z))\frac{\partial f^\mu}{\partial z^\lambda}dz^\lambda$$

на многообразии M. Процедуру построения индуцированной формы легко распространить на внешние формы произвольной степени, используя соотношения

$$f^*(\phi \wedge \phi') = f^*\phi \wedge f^*\phi',$$
$$f^*(d\phi) = d(f^*\phi).$$

В отличие от внешних форм, аппарат векторнозначных дифференциальных форм, хотя он давно разработан, не столь широко освещается в стандартных учебниках по дифференциальной геометрии и тем более мало известен физикам. В то же время векторнозначные формы на многообразиях и расслоениях составляют основу математической техники, которую мы будем использовать.

Тангенциально-значной формой (tangent-valued form) степени r на многообразии M называется сечение расслоения

$$\bigwedge^r T^*M \otimes TM \to M,$$

которое в голономных координатах имеет вид

$$\phi = \phi^\mu_{\lambda_1\ldots\lambda_r}(z)dz^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dz^{\lambda_r} \otimes \partial_\mu.$$

Пример 1.4.3. Легко видеть, что тангенциально-значными 0-формами являются векторные поля на многообразии M. Существует взаимно однозначное соответствие между тангенциально-значными 1-формами

$$\theta : M \to T^*M \otimes TM$$

на многообразии M и линейными послойными морфизмами в себя касательного и кокасательного расслоений над M:

$$\theta : TM \to TM,$$
$$\theta : T_zM \ni t \mapsto t \lrcorner \theta(z) \in T_zM, \tag{1.37}$$

и

$$\theta : T^*M \to T^*M,$$
$$\theta : T^*_zM \ni t^* \mapsto \theta(z) \lrcorner t^* \in T^*_zM.$$

Чтобы не усложнять обозначения, будем использовать для этих морфизмов тот же самый символ θ, что и для соответствующей формы. В частности, тождественным морфизмам Id_{TM} и Id_{T^*M} соответствует *каноническая тангенциально-значная 1-форма*

$$\theta_M = dz^\lambda \otimes \partial_\lambda \tag{1.38}$$

на многообразии M, которая задается условием

$$\partial_\lambda \lrcorner \theta_M = \partial_\lambda.$$

Канонической эта форма называется потому, что имеет один и тот же вид во всех голономных системах координат. □

Тангенциально-значные формы на многообразии M образуют пучок, который является тензорным произведением

$$\bigwedge \mathscr{T}^*(M) \bigotimes \mathscr{T}(M)$$

пучка внешних форм и пучка векторных полей на M. Иными словами тангенциально-значную форму можно представить как своего рода тензорное произведение внешней формы и векторного поля. На тангенциально-значных формах определена операция *скобок Frölicher—Nijenhuis* (или просто *(F-N)-скобок*), которая обобщает скобки Ли на пучке векторных полей:

$$\begin{aligned}
[\phi, \sigma]_{FN} &= [\alpha \otimes u, \beta \otimes v]_{FN} = \\
&= \alpha \wedge \beta \otimes [u, v] + \alpha \wedge \mathbf{L}_u \beta \otimes v - (-1)^{rs} \beta \wedge \mathbf{L}_v \alpha \otimes u + \\
&\qquad + (-1)^r (v \lrcorner \alpha) \wedge d\beta \otimes u - (-1)^{rs+s} (u \lrcorner \beta) \wedge d\alpha \otimes v, \\
&\alpha \in \overset{r}{\bigwedge} \mathscr{T}^*(M), \quad \beta \in \overset{s}{\bigwedge} \mathscr{T}^*(M), \quad u, v \in \mathscr{T}(M),
\end{aligned}$$

где $\mathbf{L}_u$ и $\mathbf{L}_v$ — производные Ли внешних форм. В голономных координатах (F-N)-скобки имеют вид

$$\begin{aligned}
[\phi, \sigma]_{FN} = \Big\{ & \phi^\nu_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \partial_\nu \sigma^\mu_{\lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+s}} - (-1)^{rs} \sigma^\nu_{\lambda_1 \ldots \lambda_s} \partial_\nu \phi^\mu_{\lambda_{s+1} \ldots \lambda_{r+s}} - \\
& - (-1)^{r+p} \sum_{p=1}^{r} \phi^\mu_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1} \nu \lambda_{p+1} \ldots \lambda_r} \partial_{\lambda_p} \sigma^\nu_{\lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+s}} + \\
& + (-1)^{rs+s+p} \sum_{p=1}^{s} \sigma^\mu_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1} \nu \lambda_{p+1} \ldots \lambda_s} \partial_{\lambda_p} \phi^\nu_{\lambda_{s+1} \ldots \lambda_{r+s}} \Big\} dz^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\lambda_{r+s}} \otimes \partial_\mu.
\end{aligned}$$

Они подчиняются правилу перестановки

$$[\phi, \sigma]_{FN} = -(-1)^{|\phi||\sigma|} [\sigma, \phi]_{FN}$$

и наделяют *пучок тангенциально-значных форм* структурой пучка градуированных алгебр Ли.

Если фиксировать форму θ, то (F-N)-скобки задают на тангенциально-значных формах операцию (F-N)-дифференцирования или другими словами *(F-N)-дифференциал*

$$d_\theta : \sigma \mapsto d_\theta \phi = [\theta, \sigma]_{FN}. \tag{1.39}$$

Он обладает следующими свойствами

$$d_\theta[\phi, \sigma]_{FN} = [d_\theta\phi, \sigma]_{FN} + (-1)^{|\theta||\phi|}[\phi, d_\theta\sigma]_{FN},$$
$$d_\theta d_\eta - (-1)^{|\eta||\theta|} d_\eta d_\theta = d_{[\theta, \eta]_{FN}}.$$

ПРИМЕР 1.4.4. Если $\theta = u$ — векторное поле, дифференциал d_u (1.39) сводится к *производной Ли тангенциально-значной формы*

$$\mathbf{L}_u\sigma = [u, \sigma]_{FN}.$$

□

ПРИМЕР 1.4.5. Приведем полезное выражение для *производной Ли внешних дифференциальных форм*

$$\mathbf{L}_u\sigma = u \rfloor d\sigma + d(u \rfloor \sigma). \tag{1.40}$$

□

Рассмотрим теперь дифференциальные формы на многообразиях, которые являются расслоениями.

Пусть $Y \to X$ — расслоение, наделенное атласом расслоенных координат (1.13). Напомним (отсылая к точным последовательностям (1.28a) и (1.28b)), что касательное расслоение TY содержит подрасслоение VY, а кокасательное расслоение T^*Y — подрасслоение $Y \underset{X}{\times} T^*X$, которое по соглашению обозначается просто T^*X. В этой связи договоримся о терминологии.

Все формы на Y, ограниченные на подрасслоение $T^*X \subset T^*Y$, будем называть *горизонтальными формами* (horizontal forms), а тангенциально-значные формы, принимающие значения в подрасслоении $VY \subset TY$ — *вертикальными формами*. К последним можно отнести и *вертикальные векторные поля*

$$u = u^i\partial_i : Y \to VY$$

на расслоении Y.

Среди векторных полей на расслоении выделяют также *проектируемые векторные поля* (projective vector fields). Векторное поле u на расслоении $Y \to X$ называется проектируемым, если оно накрывает некоторое векторное поле τ_u на базе расслоения X, т. е. имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u} & TY \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T\pi}. \\ X & \xrightarrow{\tau_u} & TX \end{array}$$

В голономных координатах проектируемое векторное поле имеет вид

$$u = u^\mu(x)\partial_\mu + u^i(y)\partial_i,$$

т. е. его коэффициенты разложения $u^\mu(x)$ зависят только от координат на X. Такое векторное поле на Y проектируется на векторное поле

$$\tau_u = u^\mu(x)\partial_\mu$$

на X. Например, всякое вертикальное векторное поле u на расслоении $Y \to X$ является проектируемым и проектируется на всюду нулевое векторное поле $\tau_u = 0$ на X.

Тангенциально-значные формы на расслоении которые представляют собой тензорные произведения внешних форм и проектируемых векторных полей, именуют *проектируемыми формами.*

В основном мы будем иметь дело со следующими типами внешних и тангенциально-значных форм на расслоениях:

- *внешние горизонтальные формы*

$$\phi : Y \to \bigwedge^r T^*X,$$
$$\phi = \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}(y) dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r};$$

- *тангенциально-значные горизонтальные формы*

$$\phi : Y \to \bigwedge^r T^*X \underset{Y}{\otimes} TY,$$
$$\phi = dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r} \otimes \left[\phi^{\mu}_{\lambda_1 \dots \lambda_r}(y)\partial_\mu + \phi^{i}_{\lambda_1 \dots \lambda_r}(y)\partial_i\right];$$

- *тангенциально-значные проектируемые горизонтальные формы*

$$\phi = dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r} \otimes [\phi^{\mu}_{\lambda_1 \dots \lambda_r}(x)\partial_\mu + \phi^{i}_{\lambda_1 \dots \lambda_r}(y)\partial_i];$$

- *вертикально-значные горизонтальные формы*

$$\phi : Y \to \bigwedge^r T^*X \underset{Y}{\otimes} VY,$$
$$\phi = \phi^{i}_{\lambda_1 \dots \lambda_r}(y) dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r} \otimes \partial_i.$$

Пример 1.4.6. На всяком кокасательном расслоении T^*M определена каноническая внешняя горизонтальная 1-форма

$$\theta = -\dot{z}_\lambda dz^\lambda, \tag{1.41}$$

которая называется *формой Лиувилля.* Ее внешним дифференциалом со знаком минус является каноническая *симплектическая форма*

$$\Omega = -d\theta = d\dot{z}_\lambda \wedge dz^\lambda$$

на T^*M. □

Пример 1.4.7. Вертикально-значные горизонтальные 1-формы

$$\sigma : Y \to T^*X \underset{Y}{\otimes} VY,$$
$$\sigma = \sigma^{i}_{\lambda}(y) dx^\lambda \otimes \partial_i,$$

на Y именуются часто *припаивающими формами* (soldering forms). Например, рассмотрим касательное расслоение TX. Имеет место вертикальное расщепление

$$VTX = TX \underset{X}{\times} TX.$$

На TX определена *каноническая припаивающая форма*

$$\sigma = dx^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu}.$$

При этом $\mathrm{pr}_2 \circ \sigma = \theta_X$ — это каноническая тангенциально-значная 1-форма на X из Примера 1.4.3, которую поэтому тоже часто называют припаивающей формой. □

Помимо тангенциально-значных форм, мы будем рассматривать на расслоениях еще некоторые типы векторнозначных форм. Это дифференциальные формы на Y, которые представляют собой морфизмы

$$Y \to \bigwedge^r T^*Y \underset{Y}{\otimes} TX, \tag{1.42}$$
$$\phi = \phi^\mu_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(y)\, dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_r} \otimes \partial_\mu,$$

и

$$Y \to \bigwedge^r T^*Y \underset{Y}{\otimes} V^*Y, \tag{1.43}$$
$$\phi = \phi_{\lambda_1 \ldots \lambda_r i}(y)\, dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_r} \otimes \overline{dy}^i.$$

Подчеркнем, что формы (1.42) не являются тангенциально-значными формами, поскольку индуцированное на Y расслоение $Y \times_X TX$ не есть подрасслоение касательного расслоения TY (см. точную последовательность (1.28a)). В частности, к ним не применима операция (F-N)-дифференцирования. В свою очередь, формы (1.43) не являются внешними формами, поскольку вертикальное кокасательное расслоение V^*Y не есть подрасслоение кокасательного расслоения T^*Y (см. точную последовательность (1.28b)), и к ним не применима операция внешнего дифференцирования.

Пример 1.4.8. Формой типа (1.42) на расслоении $\pi : Y \to X$ является форма

$$\pi^*\phi = \phi^\mu_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(x)\, dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_r} \otimes \partial_\mu,$$

индуцированная из тангенциально-значной формы ϕ на X. Формы ϕ и $\pi^*\phi$ имеют одно и то же выражение в голономных координатах, и мы их будем обозначать одним и тем же символом ϕ. В частности, мы будем иметь дело с формой

$$\theta_X : Y \to T^*X \underset{Y}{\otimes} TX,$$
$$\theta_X = dx^\lambda \otimes \partial_\lambda,$$

которая индуцирована на Y из канонической тангенциально-значной формы θ_X (1.38) на базе X. □

В дальнейшем дифференциальные формы на расслоении $Y \to X$ всех приведенных выше типов будут часто называться просто формами, а все горизонтальные n-формы — *горизонтальными плотностями.*

§ 5. Многообразия струй

Динамика классических полей, описываемых как сечения s тех или иных расслоений $Y \to X$, математически строго формулируется на языке струй $j^k_x s$ этих сечений, когда сечения в точке $x \in X$ отождествляются по их значениям и значениям их частных производных до некоторого k-го порядка включительно. Действительно, если полевые уравнения, например, содержат производные полей не более второго порядка, нет особой необходимости различать эти поля по значениям их высших производных. Однако только одного этого наблюдения было бы недостаточно, чтобы развивать аппарат струй, не обладай пространства струй рядом весьма привлекательных свойств.

Место, которое занимают пространства струй в дифференциальной геометрии, и их применение в теории поля обусловлены следующим.

- Пространства струй сечений расслоений являются конечномерными многообразиями, **что позволяет описывать динамику полевых моделей на конечномерных конфигурационных и фазовых пространствах.**
- Многие объекты в теории струй выражаются через привычные тангенциальнозначные формы, которыми легко оперировать.
- Над многообразием струй первого порядка существует каноническое расщепление точных последовательностей (1.28a) и (1.28b), что лежит в основе применения струй в теории связностей и в дифференциальной геометрии в целом. **Это приводит к появлению связностей и в описании динамики полевых систем.**

Имея в виду последующие приложения к теории поля, мы здесь ограничимся формализмом струй в основном первого и второго порядков.

Пусть дано расслоение $Y \to X$. Рассмотрим классы эквивалентности $j^1_x s$, $x \in X$, сечений s расслоения Y такие, что сечения s и s' принадлежат одному и тому же классу эквивалентности $j^1_x s$ тогда и только тогда, когда

$$Ts\,|_{T_x X} = Ts'\,|_{T_x X}\ .$$

Другими словами, сечения из $j^1_x s$ отождествляются по своим значениям

$$s^i(x) = s'^i(x)$$

и значениям своих частных производных первого порядка

$$\partial_\mu s^i(x) = \partial_\mu s'^i(x)$$

в точке x. Класс эквивалентности $j^1_x s$ называют *струей сечений* (jet) s в точке $x \in X$. Обозначим J^1Y множество всех струй сечений расслоения Y во всех точках X.

Существует несколько эквивалентных способов, чтобы наделить множество струй J^1Y структурой многообразия. Не будем здесь вдаваться в детали. Результат получается следующий.

Предложение 1.5.1. Пусть $Y \to X$ — расслоение с атласом расслоенных координат (x^λ, y^i) (1.13). Множество струй J^1Y, будучи наделенным координатным атласом

$$(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda), \tag{1.44}$$

$$(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda)(j^1_x s) = (x^\lambda, s^i(x), \partial_\lambda s^i(x)),$$

$$y'^i_\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}(\partial_\mu + y^j_\mu \partial_j) y'^i, \tag{1.45}$$

удовлетворяет всем требованиям, которые мы договорились выше предъявлять к многообразиям. Оно называется *многообразием струй* первого порядка или просто многообразием струй (jet manifold) расслоения Y. □

В физической литературе координаты y^i_λ на J^1Y часто называют *координатами скоростей* или *координатами производных*, поскольку их преобразования полностью идентичны координатным преобразованиям производных полевых функций $\partial_\lambda s^i(x)$. То, что значения производных полевых функций выбираются в качестве независимых координат, напоминает известный прием при решении дифференциальных уравнений, когда производные переменных сами рассматриваются как независимые переменные, что позволяет, например, понизить порядок дифференциальных уравнений.

Многообразие струй имеет естественные расслоения

$$\pi^1 : J^1Y \ni j^1_x s \mapsto x \in X \tag{1.46}$$

и

$$\pi^1_0 : J^1Y \ni j^1_x s \mapsto s(x) \in Y. \tag{1.47}$$

Легко убедиться, что координаты (1.44) на многообразии струй подчинены этим расслоениям. Более того, преобразования перехода (1.45) указывают на то, что расслоение (1.47) является аффинным расслоением, моделируемым (как это следует из вида линейной части этих преобразований) над векторным расслоением

$$T^*X \underset{Y}{\otimes} VY \to Y. \tag{1.48}$$

Мы будем называть $J^1Y \to Y$ *расслоением струй*.

Заметим, что $J^1Y \to Y$ остается расслоением, даже если $Y \to X$ не расслоение, а расслоенное многообразие, и в общем случае оно не тривиально, даже если $Y \to X$ тривиально.

Пример 1.5.1. Многообразие струй тривиального расслоения

$$\mathrm{pr}_1 : X \times \mathbb{R} \to X$$

является аффинным расслоением, моделируемым над индуцированным расслоением

$$T^*X \underset{X}{\times} \mathbb{R},$$

которое в общем случае не является тривиальным расслоением над $X \times \mathbb{R}$. Если однако базой тривиального расслоения является евклидово пространство $\mathbb{R}^m$, расслоение струй всегда тривиально. □

Пример 1.5.2. Пусть Y и Y' — расслоения над одной и той же базой X. Имеет место естественный диффеоморфизм

$$J^1(Y \underset{X}{\times} Y') = J^1Y \underset{X}{\times} J^1Y'. \tag{1.49}$$

□

Следующая теорема играет ключевую роль в формализме струй. Она показывает, что расслоение струй является аффинным подрасслоением некоторых тензорных расслоений, что позволяет оперировать струями как обычными тангенциально-значными формами.

ТЕОРЕМА 1.5.2. Пусть J^1Y — многообразие струй расслоения $Y \to X$. Существуют два канонических мономорфизма над Y:

$$\lambda : J^1Y \hookrightarrow T^*X \underset{Y}{\otimes} TY, \tag{1.50}$$
$$\lambda = dx^\lambda \otimes \widehat{\partial}_\lambda = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i),$$

и

$$\theta_1 : J^1Y \hookrightarrow T^*Y \underset{Y}{\otimes} VY, \tag{1.51}$$
$$\theta_1 = \widehat{dy}^i \otimes \partial_i = (dy^i - y^i_\lambda dx^\lambda) \otimes \partial_i.$$

□

Прагматическим следствием этой теоремы является то, что всякий элемент многообразия струй с координатами скоростей y^i_λ может быть представлен тангенциально-значными формами

$$dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i)$$

или

$$(dy^i - y^i_\lambda dx^\lambda) \otimes \partial_i.$$

Рассмотрим теперь, как те или иные операции с расслоениями могут быть продолжены на многообразия струй этих расслоений.

Пусть Φ — послойный морфизм расслоения $Y \to X$ в расслоение $Y' \to X$ над диффеоморфизмом f их общей базы X. Существует продолжение морфизма Φ до морфизма многообразий струй

$$J^1\Phi : J^1Y \to J^1Y',$$
$$J^1\Phi : j^1_x s \mapsto j^1_{f(x)}(\Phi \circ s \circ f^{-1}).$$

Это послойный аффинный морфизм расслоения струй $J^1Y \to Y$ в расслоение струй $J^1Y' \to Y'$ над Φ:

$$\begin{array}{ccc} J^1Y & \xrightarrow{J^1\Phi} & J^1Y' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{01}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'_{01}} \\ Y & \xrightarrow{\Phi} & Y' \end{array}.$$

Будем называть его *струйным продолжением* (jet prolongation) морфизма Φ. В координатах (1.44) он имеет вид

$$y'^i_\mu \circ J^1\Phi = \left(\partial_\lambda \Phi^i + \partial_j \Phi^i y^j_\lambda\right) \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}.$$

ПРИМЕР 1.5.3. Струйные продолжения морфизмов удовлетворяют естественным условиям

$$J^1(\Phi \circ \Phi') = J^1\Phi \circ J^1\Phi',$$
$$J^1(\mathrm{Id}_Y) = \mathrm{Id}_{J^1Y}.$$

Если морфизм Φ — сюръекция или инъекция, таковым же является и его струйное продолжение $J^1\Phi$. □

Всякое сечение s расслоения $Y \to X$ может быть продолжено до сечения

$$(J^1 s)(x) = j^1_x s,$$
$$(y^i, y^i_\lambda) \circ J^1 s = (s^i(x), \partial_\lambda s^i(x)),$$

расслоения $J^1Y \to X$. Оно именуется *струйным продолжением сечения* s. Ясно, что не каждое сечение $\overline{s}$ расслоения $J^1Y \to X$ представляет собой струйное продолжение некоторого сечения расслоения $Y \to X$. Если же оно является таковым, т. е. $\overline{s} = J^1 s$, то мы будем называть его *голономным сечением*.

Всякое векторное поле

$$u = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i$$

на расслоении $Y \to X$ может быть поднято до векторного поля

$$\overline{u} = r_1 \circ J^1 u : J^1Y \to J^1TY \to TJ^1Y,$$
$$\overline{u} = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (\partial_\lambda u^i + y^j_\lambda \partial_j u^i - y^i_\mu \partial_\lambda u^\mu)\partial^\lambda_i, \tag{1.52}$$

на многообразии струй J^1Y расслоения Y. Мы здесь использовали канонический послойный морфизм

$$r_1 : J^1TY \to TJ^1Y,$$
$$\dot{y}^i_\lambda \circ r_1 = (\dot{y}^i)_\lambda - y^i_\mu \dot{x}^\mu_\lambda,$$

где под J^1TY понимается многообразие струй расслоения $TY \to X$. В частности, имеет место канонический изоморфизм

$$VJ^1Y = J^1VY,$$
$$\dot{y}^i_\lambda = (\dot{y}^i)_\lambda,$$

где VJ^1Y — вертикальное касательное расслоение над расслоением $J^1Y \to X$.

Если расслоение $Y \to X$ наделено той или иной алгебраической структурой, эта структура наследуется и расслоением $J^1Y \to X$ благодаря струйным продолжениям соответствующих морфизмов.

Пример 1.5.4. Если Y — векторное расслоение, то $J^1Y \to X$ тоже векторное расслоение. В частности, пусть Y — векторное расслоение и $\langle\ \rangle$ — свертка

$$\langle\ \rangle : Y \underset{X}{\times} Y^* \longrightarrow_X X \times \mathbb{R},$$
$$r \circ \langle\ \rangle = y^i y_i,$$

где (y^i) и $(\overline{y}^i)$ дуальные координаты на Y и Y^* соответственно. Струйным продолжением свертки $\langle\ \rangle$ является линейный послойный морфизм

$$J^1\langle\ \rangle : J^1Y \underset{X}{\times} J^1Y^* \longrightarrow_X T^*X \times \mathbb{R},$$
$$\dot{x}_\mu \circ J^1 = y^i_\mu y_i + y^i y_{i\mu}.$$

□

Пример 1.5.5. Если Y — аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $\overline{Y}$, то $J^1Y \to X$ тоже аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $J^1\overline{Y} \to X$. □

Основание для применения многообразий струй в дифференциальной геометрии дает тот факт, что существует каноническое расщепление точных последовательностей (1.28a) и (1.28b). если касательное и кокасательное расслоения над Y индуцировать на J^1Y. Другими словами, определены канонические вложения

$$\widehat{\lambda} : J^1Y \underset{X}{\times} TX \underset{J^1Y}{\hookrightarrow} J^1Y \underset{Y}{\times} TY$$

и

$$\widehat{\theta}_1 : J^1Y \underset{Y}{\times} V^*Y \underset{J^1Y}{\hookrightarrow} J^1Y \underset{Y}{\times} T^*Y.$$

Они индуцированы каноническими морфизмами (1.50) и (1.51) и имеют координатный вид

$$\widehat{\lambda} : J^1Y \underset{X}{\times} TX \ni \partial_\lambda \mapsto \widehat{\partial}_\lambda = \partial_\lambda \rfloor \lambda \in J^1Y \underset{Y}{\times} TY, \tag{1.53}$$

$$\widehat{\partial}_\lambda = \partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i,$$

и

$$\widehat{\theta}_1 : J^1Y \underset{Y}{\times} V^*Y \ni dy^i \mapsto \widehat{dy}^i = \theta_1 \rfloor dy^i \in J^1Y \underset{Y}{\times} T^*Y, \tag{1.54}$$

$$\widehat{dy}^i = dy^i - y^i_\lambda dx^\lambda.$$

Вложения (1.53) и (1.54) задают *каноническое горизонтальное расщепление* (canonical horizontal splitting) индуцированных расслоений

$$J^1Y \underset{Y}{\times} TY = \widehat{\lambda}(TX) \underset{J^1Y}{\oplus} VY, \tag{1.55}$$

$$\dot{x}^\lambda \partial_\lambda + \dot{y}^i \partial_i = \dot{x}^\lambda (\partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i) + (\dot{y}^i - \dot{x}^\lambda y^i_\lambda)\partial_i,$$

и

$$J^1Y \underset{Y}{\times} T^*Y = T^*X \underset{J^1Y}{\oplus} \widehat{\theta}_1(V^*Y), \tag{1.56}$$

$$\dot{x}_\lambda dx^\lambda + \dot{y}_i dy^i = (\dot{x}_\lambda + \dot{y}_i y^i_\lambda) dx^\lambda + \dot{y}_i (dy^i - y^i_\lambda dx^\lambda).$$

Иначе говоря, мы получаем канонические горизонтальные расщепления над J^1Y касательного и кокасательного расслоений TY и T^*Y.

Связь вышеизложенного с теорией связностей состоит в том, что при подстановке в формулы (1.53) и (1.54) некоторого глобального сечение Γ расслоения струй $J^1Y \to Y$:

$$y^i_\lambda \circ \Gamma = \Gamma^i_\lambda(y),$$

воспроизводятся выражения (1.29) и (1.30).для расщепление точных последовательностей (1.28a) and (1.28b) посредством связности на расслоении Y. Таким образом, связности на расслоении $Y \to X$ можно задавать, как это будет подробно рассмотрено в следующем параграфе, посредством глобальных сечений соответствующего расслоения струй $J^1Y \to Y$.

Пример 1.5.6. Канонические горизонтальные расщепления (1.55) и (1.56) приводят, в частности, к каноническому *горизонтальному расщеплению* проектируемого векторного поля

$$u = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i = u_H + u_V = u^\lambda(\partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i) + (u^i - u^\lambda y^i_\lambda)\partial_i \tag{1.57}$$

и канонической тангенциально-значной 1-формы

$$\begin{aligned} \theta_Y &= dx^\lambda \otimes \partial_\lambda + dy^i \otimes \partial_i = \lambda + \theta_1 = dx^\lambda \otimes \widehat{\partial}_\lambda + \widehat{dy}^i \otimes \partial_i = \\ &= dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i) + (dy^i - y^i_\lambda dx^\lambda) \otimes \partial_i \end{aligned} \tag{1.58}$$

на расслоении Y. □

Рассмотрим теперь многообразия струй второго порядка.

Пусть J^1Y — многообразие струй первого порядка расслоения $Y \to X$. Можно в свою очередь построить многообразие струй J^1J^1Y расслоения $J^1Y \to X$. Оно называется *повторным многообразием струй* (repeated jet manifold). Его подмногообразиями, к которым мы будем часто обращаться, являются полуголономное многообразие струй $\widehat{J}^2Y$ и собственно многообразие струй второго порядка J^2Y расслоения Y.

При заданных координатах (1.45) на многообразии струй J^1Y, повторное многообразие струй J^1J^1Y наделяется соответствующими координатами

$$\begin{aligned} &(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, y^i_{(\mu)}, y^i_{\lambda\mu}), \\ &y'^i_{(\lambda)} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}(\partial_\mu + y^j_{(\mu)}\partial_j)y'^i, \\ &y'^i_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}(\partial_\alpha + y^j_{(\alpha)}\partial_j + y^j_{\nu\alpha}\partial^\nu_j)y'^i_\lambda. \end{aligned}$$

Имеют место два разных расслоения J^1J^1Y над J^1Y:

- обычное расслоение струй (1.47) над J^1Y:

$$\begin{aligned} &\pi_{11} : J^1J^1Y \to J^1Y, \\ &y^i_\lambda \circ \pi_{11} = y^i_\lambda, \end{aligned} \tag{1.59}$$

- и расслоение

$$\begin{aligned} &J^1\pi^1_0 : J^1J^1Y \to J^1Y, \\ &y^i_\lambda \circ J^1\pi^1_0 = y^i_{(\lambda)}. \end{aligned} \tag{1.60}$$

Точки, в которых проекции π_{11} и $J^1\pi_{01}$ совпадают, образуют аффинное подрасслоение

$$\widehat{J}^2Y \to J^1Y \tag{1.61}$$

расслоений (1.59) и (1.60), задаваемое координатным условием

$$y^i_{(\lambda)} = y^i_\lambda.$$

Оно называется *полуголономным многообразием струй* (sesquiholonomic jet manifold) и параметризуется координатами

$$(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, y^i_{\lambda\mu}).$$

Многообразие струй второго порядка (second order jet manifold) J^2Y расслоения $Y \to X$, которое также именуют *голономным многообразием струй*, определяется как подрасслоение

$$\pi_1^2 : J^2Y \to J^1Y$$

аффинного расслоения (1.61), задаваемое координатным условием

$$y^i_{\lambda\mu} = y^i_{\mu\lambda}$$

и параметризуемое координатами

$$(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, y^i_{\lambda\mu} = y^i_{\mu\lambda}).$$

Можно дать другое эквивалентное и самодостаточное определение многообразия 2-струй J^2Y как объединения всех классов эквивалентности $j^2_x s$ сечений s расслоения $Y \to X$ таких, что

$$y^i_\lambda(j^2_x s) = \partial_\lambda s^i(x), \qquad y^i_{\lambda\mu}(j^2_x s) = \partial_\mu \partial_\lambda s^i(x).$$

Иначе говоря, сечения $s \in j^2_x s$ отождествляются по их значениям и значениям их частных производных первого и второго порядков в точке $x \in X$.

Пусть s — сечение расслоения $Y \to X$ и $J^1 s$ — его струйное продолжение до сечения расслоения $J^1Y \to X$. В свою очередь рассмотрим струйное продолжение последнего до сечения J^1J^1s расслоения $J^1J^1Y \to X$. Легко убедиться, что оно принимает значения в голономном многообразии струй J^2Y и поэтому, как принято, будем его обозначать J^2s:

$$(J^1J^1s)(x) = (J^2s)(x) = j^2_x s.$$

Имеют место условия интегрируемости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5.3. Пусть $\overline{s}$ — сечение расслоения $J^1Y \to X$ и $J^1\overline{s}$ — его струйное продолжение до сечения расслоения $J^1J^1Y \to X$. Следующие условия эквивалентны:

- сечение $\overline{s}$ является голономным, т. е. $\overline{s} = J^1 s$ где s — некоторое сечение $Y \to X$,
- сечение $J^1\overline{s}$ принимает значения в $\widehat{J}^2Y$,
- сечение $J^1\overline{s}$ принимает значения в J^2Y.

□

Они будут использованы в §2.1 для редукции дифференциальных операторов и дифференциальных уравнений второго порядка к дифференциальным операторам и дифференциальным уравнениям первого порядка. Это прежде всего операторы и уравнения Эйлера—Лагранжа первого и второго порядков.

Приведенные выше определения многообразий струй 2-го порядка почти дословно распространяются на многообразия струй произвольного k-го порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.4. *Многообразие струй k-го порядка* J^kY расслоения $Y \to X$ состоит из классов эквивалентности $j^k_x s$, $x \in X$, сечений s расслоения Y таких, что сечения s и s' принадлежат одному и тому же классу $j^k_x s$ тогда и только тогда, когда их значения и значения их частных производных до k-го порядка включительно совпадают в точке x. Это многообразие является конечномерным и удовлетворяет всем условиям, которые мы предъявляем к многообразиям. □

Аналогично случаю $k = 2$ определяются *повторное многообразие k-струй* $J^1J^{k-1}Y$, *полуголономное многообразие k-струй* $\widehat{J}^kY$ и *k-струйное продолжение* J^ks сечения s расслоения $Y \to X$ до сечения расслоения $J^kY \to X$.

Ключевым для развития аппарата струй стало его применение в теории дифференциальных операторов. Оно основывается на следующем определении.

Определение 1.5.5. Пусть J^kY — многообразие k-струй расслоения $Y \to X$ и $E \to Y$ — векторное расслоение над Y. Всякий послойный морфизм

$$\mathscr{E} : J^kY \underset{Y}{\longrightarrow} E \tag{1.62}$$

над Y называется *дифференциальным оператором* k-го порядка на сечениях расслоения Y или просто на расслоении Y. Он отображает всякое сечение $s(x)$ расслоения $Y \to X$ в сечение $(\mathscr{E} \circ J^ks)(x)$ расслоения $E \to X$. □

Дифференциальные уравнения в таком подходе возникают как условия на ядро дифференциального оператора. Пусть $\mathscr{E}$ — дифференциальный оператор k-порядка. Говорят, что сечение s расслоения $Y \to X$ удовлетворяет соответствующей системе дифференциальных уравнений, если

$$J^ks(X) \subset \operatorname{Ker}\mathscr{E}.$$

Коротко это можно записать как

$$\mathscr{E} \circ J^ks = 0.$$

В теории поля мы имеем дело с дифференциальными операторами и дифференциальными уравнениями, как правило, не выше второго порядка.

§ 6. Связности на расслоениях

Конструкция связности обобщает операцию параллельного переноса в евклидовой геометрии на многообразия и расслоения. Поясним необходимость и характер такого обобщения следующими простыми рассуждениями.

В евклидовой геометрии параллельным называется перенос вектора, при котором направление вектора сохраняется. На плоскости, например, его можно определить как перенос вдоль прямых так, что угол между вектором и прямой постоянен. На искривленной поверхности роль прямых играют наикратчайшие линии, например, дуги большого круга на сфере. Тогда параллельный перенос касательного вектора к поверхности можно описать как его перенос вдоль наикратчайших так, что угол между вектором и наикратчайшей остается неизменным. Однако сам вектор при этом поворачивается. Изменение касательного вектора при *параллельном переносе* и описывается введением связности. В дифференциальной форме это можно сделать заданием оператора поворота Γ векторов τ при переходе из точки с координатами x^μ в точку с координатами $x^\mu + dx^\mu$, а именно:

$$\Gamma(\tau^\mu) = \tau^\mu - \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}\tau^\alpha dx^\nu. \tag{1.63}$$

Изменение вектора может быть оценено только путем его сравнения с некоторыми базисными векторами. Однако, если в качестве таких базисных векторов взять, например, касательные векторы к наикратчайшим, переносимый вектор относительно них поворачиваться не будет, т. е. связность в такой системе отсчета как бы становится тривиальной. Этого можно избежать, если переносимый вектор сравнивать с самим собой до и после переноса по замкнутому контуру. В отличие от плоскости, на искривленной

поверхности эти два вектора не совпадают, и их отклонение друг от друга характеризуется кривизной поверхности.

Изменение вектора при параллельном переносе сказывается и на операции дифференцирования. Действительно, дифференцирование определяется как предел

$$\lim_{|dx|\to 0} \frac{\tau(x+dx)-\tau(x)}{|dx|}.$$

Но векторы $\tau(x+dx)$ и $\tau(x)$ заданы в разных точках, и чтобы их вычесть друг из друга, вектор $\tau(x)$ надо сначала перенести в точку $x+dx$ посредством связности (1.63). В результате операция дифференцирование при наличии связности принимает вид

$$D_\nu \tau^\mu = \partial_\nu \tau^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}\tau^\alpha.$$

Производная D_ν называется *ковариантной производной* и может рассматриваться как генератор параллельного переноса вдоль координатной линии x^ν.

Все эти наглядные соображения применимы и для связности на расслоении. На расслоении $\pi : Y \to X$ *параллельный перенос* можно представить как сопоставление всякому пути $\gamma([a, b])$ в базе X семейства отображений

$$\varrho_{\gamma(t_1,t_2)} : V_{\gamma(t_1)} \to V_{\gamma(t_2)}, \qquad t_1, t_2 \in [a, b],$$

слоев $V_{\gamma(t)}$ расслоения Y над точками этого пути. При этом имеют место естественные соотношения

$$\varrho_{\gamma(t_1,t_2)} \circ \varrho_{\gamma(t_2,t_3)} = \varrho_{\gamma(t_1,t_3)},$$
$$\varrho_{\gamma(t_1,t_2)} = \varrho^{-1}_{\gamma(t_2,t_1)}.$$

Пусть v — некоторая точка слоя $V_{\gamma(a)}$. Тогда множество образов $v(t)$ точки v при отображениях $\varrho_{\gamma(a,t)}$, $t \in [a, b]$, образуют некоторый путь

$$\varrho_{\gamma(a,t)}(v) : [a, b] \to Y$$

в расслоении Y. Поскольку

$$\pi(\varrho_\gamma(v)) = \gamma,$$

такой путь называется *накрывающим* путь γ в базе X. Подобные пути, накрывающие γ, выходят из каждой точки слоя $Y_{\gamma(a)}$. Поэтому в инфинитезимальной форме задание *связности* на расслоении Y можно наглядно представить как задание в каждой точке $y \in Y$ направления, в котором она будет переноситься в многообразии Y, если ее проекция $\pi(y)$ переносится в некотором направлении в базе X. Другими словами для каждой точки $y \in Y$ осуществляется поднятие касательного пространства $T_{\pi(y)}X$ к базе X в касательное пространство T_yY к Y, как это условно изображено на рисунке 5.

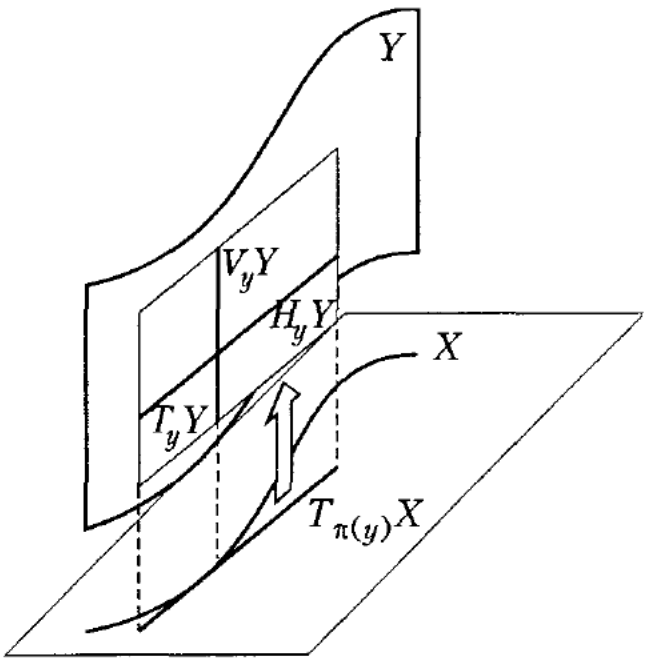


Рис. 5

Перейдем теперь от наглядных соображений к строгой математической конструкции связностей на расслоении.

Существует несколько эквивалентных способов введения связностей. Мы начнем с вышеупомянутого наиболее традиционного, когда для всякой точки y расслоения $Y \to X$ касательный вектор $\dot{x}^\lambda \partial_\lambda$ к базе X в точке $x = \pi(y)$ поднимается до касательного вектора

$$\dot{x}^\lambda(\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda(y)\partial_i)$$

к Y в точке y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.1. *Связность на расслоении* (connection) $Y \to X$ определяется как расщепление точной последовательности (1.28a) (и соответственно (1.28b)). □

Это означает, что задано некоторое вложение

$$\Gamma_T : TX \underset{Y}{\hookrightarrow} TY, \tag{1.64}$$

которое определяет *горизонтальное расщепление касательного расслоения* TY:

$$TY = HY \underset{Y}{\oplus} VY = \Gamma_T(TX) \underset{Y}{\oplus} VY. \tag{1.65}$$

Вложение (1.64) порождает линейный послойный морфизм

$$\Gamma = \Gamma_T \circ T\pi : TY \to TY,$$
$$\dot{x}^\lambda \partial_\lambda + \dot{y}^i \partial_i \mapsto \dot{x}^\lambda(\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda(y)\partial_i),$$

который удовлетворяет условию

$$TV = \operatorname{Ker}\Gamma.$$

Он задается соответствующей тангенциально-значной 1-формой (1.37). Это позволяет дать эквивалентное определение связностей на расслоении в терминах тангенциально-значных форм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.2. *Связность на расслоении* $Y \to X$ определяется как проектируемая горизонтальная тангенциально-значная 1-форма Γ на Y такая, что

$$\Gamma \lrcorner \phi = \phi$$

для всех внешних горизонтальных форм ϕ на Y. В расслоенных координатах (1.13) на Y она дается выражением

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda(y)\partial_i), \tag{1.66}$$

$$\Gamma'^i_\lambda = \left(\frac{\partial y'^i}{\partial y^j}\Gamma^j_\mu + \frac{\partial y'^i}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}.$$

□

Связностями, вводимыми таким способом, удобно оперировать в различных выражениях. Однако, чтобы исследовать их свойства, более предпочтительно другое определение связностей.

Нетрудно убедиться в том, как мы на это уже указывали, что горизонтальное расщепление (1.65) касательного расслоения TY можно получить из канонического горизонтального расщепления (1.55) касательного расслоения $T'Y$, индуцированного на J^1Y, подстановкой глобального сечения Γ расслоения струй $J^1Y \to Y$. Поэтому можно дать еще следующее определение связностей на расслоении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.3. *Связность на расслоении* $Y \to X$ определяется как глобальное сечение Γ аффинного расслоения струй $J^1Y \to Y$:

$$\Gamma : Y \to J^1Y,$$
$$y^i_\lambda \circ \Gamma = \Gamma^i_\lambda(y). \tag{1.67}$$

□

Следует однако отметить, что в математической литературе Определение 1.6.3 — это не определение, а теорема, которая утверждает, что существует взаимно однозначное соответствие между связностями на расслоении $Y \to X$ и глобальными сечениями расслоения струй $J^1Y \to Y$. В композиции с каноническим морфизмом λ (1.50) всякое такое глобальное сечение Γ (1.67) представляется тангенциально-значной формой $\lambda \circ \Gamma$ (1.66) на Y, которая для удобства обозначается тем же символом Γ. Подставляя выражение (1.66) в канонические горизонтальные расщепления (1.55) и соответственно (1.56), мы получаем горизонтальные расщепления

$$\begin{aligned} \dot{x}^\lambda \partial_\lambda + \dot{y}^i \partial_i &= \dot{x}^\lambda(\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda \partial_i) + (\dot{y}^i - \dot{x}^\lambda \Gamma^i_\lambda)\partial_i, \\ \dot{x}_\lambda dx^\lambda + \dot{y}_i dy^i &= (\dot{x}_\lambda + \Gamma^i_\lambda \dot{y}_i)dx^\lambda + \dot{y}_i(dy^i - \Gamma^i_\lambda dx^\lambda) \end{aligned} \tag{1.68}$$

касательного и кокасательного расслоений TY и T^*Y относительно связности Γ на Y. Обратно всякое горизонтальное расщепление (1.68) определяет некоторую тангенциально-значную форму (1.66) и соответственно глобальное сечение расслоения струй $J^1Y \to Y$.

ПРИМЕР 1.6.1. Пусть $Y \to X$ — векторное расслоение. *Линейная связность* на Y имеет вид

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda - \Gamma^i{}_{j\lambda}(x) y^j \partial_i]. \tag{1.69}$$

□

ПРИМЕР 1.6.2. Пусть $Y \to X$ — аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $\overline{Y} \to X$. *Аффинная связность* на Y имеет вид

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + (-\Gamma^i{}_{j\lambda}(x) y^j + \Gamma^i{}_\lambda(x))\partial_i],$$

где

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda - \Gamma^i{}_{j\lambda}(x) \overline{y}^j \partial_i]$$

— линейная связность на $\overline{Y}$. □

Естественно, что при изоморфизме Φ расслоения связность Γ переходит в новую связность

$$\Gamma' = J^1\Phi \circ \Gamma \circ \Phi^{-1}.$$

Приведем ее координатный вид, когда Φ — изоморфизм над X:

$$y'^i_\lambda \circ \Gamma' = (\partial_\lambda \Phi^i + \Gamma^j_\lambda \partial_j \Phi^i) \circ \Phi^{-1}.$$

В частности, пусть Γ — связность на расслоении $Y \to X$ и Γ' — связность на расслоении $Y' \to X$. Вследствие изоморфизма (1.49), они порождают связность

$$\Gamma \times \Gamma' = dx^\mu \otimes \left(\partial_\mu + \Gamma^i_\mu \frac{\partial}{\partial y^i} + \Gamma'^i_\mu \frac{\partial}{\partial y'^i} \right)$$

на произведении $Y \underset{X}{\times} Y$, которая называется *произведением связностей*.

Приведем также две специфические операции с линейными связностями на векторных расслоениях.

Пусть $Y \to X$ — векторное расслоение и Γ — линейная связность (1.69) на Y. Она определяет линейную связность

$$\Gamma^*_{i\lambda} = -\Gamma^j{}_{i\lambda}(x)y_j$$

на дуальном векторном расслоении $Y^* \to X$, которая называется *дуальной связностью.*

Пример 1.6.3. Линейная связность K на касательном расслоении TX над многообразием X и дуальная связность K^* на кокасательном расслоении T^*X имеют вид

$$\begin{aligned} K^\alpha_\lambda &= -K^\alpha{}_{\nu\lambda}(x)\dot{x}^\nu, \\ K^*_{\alpha\lambda} &= K^\nu{}_{\alpha\lambda}(x)\dot{x}_\nu. \end{aligned} \tag{1.70}$$

□

Пусть Y, Y' — векторные расслоения над X и Γ, Γ' — линейные связности на этих расслоениях. Они задают линейную связность

$$(\Gamma \otimes \Gamma')^{ik}_\lambda = \Gamma^i{}_{j\lambda}y^{jk} + \Gamma'^k{}_{j\lambda}y^{ij}$$

на тензорном произведении

$$Y \underset{X}{\otimes} Y' \to X,$$

которая называется *тензорным произведением линейных связностей.*

Представление связностей как глобальных сечений расслоения струй позволяет следующим образом характеризовать все множество связностей на расслоении. Так как расслоение струй $J^1Y \to Y$ расслоения $Y \to X$ является аффинным расслоением, моделируемым над векторным расслоением (1.48), связности на расслоении Y образуют аффинное пространство, моделируемое над линейным пространством припаивающих форм на Y из Примера 1.4.7. Отсюда следует, что, если Γ — связность и

$$\sigma = \sigma^i_\lambda dx^\lambda \otimes \partial_i$$

— припаивающая форма на Y, их сумма

$$\Gamma + \sigma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + (\Gamma^i_\lambda + \sigma^i_\lambda)\partial_i]$$

тоже связность на Y. Обратно, если Γ и Γ' — связности на расслоении Y, тогда их разность

$$\Gamma - \Gamma' = (\Gamma^i_\lambda - \Gamma'^i_\lambda)dx^\lambda \otimes \partial_i$$

— это припаивающая форма на Y.

Поскольку связности представляются тангенциально-значными формами, к ним можно применить операцию (F-N)-дифференцирования (1.39). Таким путем, в частности, получаем:

- *кривизну связности* (curvature)

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\, d_\Gamma\Gamma = \frac{1}{2}\, R^i_{\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i = \\ &= \frac{1}{2}\,(\partial_\lambda\Gamma^i_\mu - \partial_\mu\Gamma^i_\lambda + \Gamma^j_\lambda\partial_j\Gamma^i_\mu - \Gamma^j_\mu\partial_j\Gamma^i_\lambda)\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i; \end{aligned} \tag{1.71}$$

- *кручение* (torsion) связности относительно припаивающей формы σ:

$$\Omega = d_\sigma \Gamma = d_\Gamma \sigma = \frac{1}{2}\,\Omega^i_{\lambda\mu}\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i = (\partial_\lambda \sigma^i_\mu + \Gamma^j_\lambda \partial_j \sigma^i_\mu - \partial_j \Gamma^i_\lambda \sigma^j_\mu)\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i;$$

- *кривизну припаивающей формы* σ:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\, d_\sigma \sigma = \frac{1}{2}\,\varepsilon^i_{\lambda\mu}\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i = \frac{1}{2}\,(\sigma^j_\lambda \partial_j \sigma^i_\mu - \sigma^j_\mu \partial_j \sigma^i_l)\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i.$$

Например, если $\Gamma' = \Gamma + \sigma$, то

$$R' = R + \varepsilon + \Omega.$$

Пример 1.6.4. Кривизна (1.71) линейной связности (1.69) имеет вид

$$\begin{aligned} R^i_{\lambda\mu}(y) &= -R^i{}_{j\lambda\mu}(x) y^j, \\ R^i{}_{j\lambda\mu} &= \partial_\lambda \Gamma^i{}_{j\mu} - \partial_\mu \Gamma^i{}_{j\lambda} + \Gamma^k{}_{j\mu} \Gamma^i{}_{k\lambda} - \Gamma^k{}_{j\lambda} \Gamma^i{}_{k\mu}. \end{aligned} \tag{1.72}$$

□

Всякая связность Γ на расслоении $Y \to X$ определяет дифференциальный оператор первого порядка

$$D_\Gamma : J^1 Y \ni z \mapsto [z - \Gamma(\pi^1_0(z))] \in T^*X \bigotimes_Y VY, \tag{1.73}$$

$$D_\Gamma = (y^i_\lambda - \Gamma^i_\lambda) dx^\lambda \otimes \partial_i,$$

на Y. Он называется *ковариантным дифференциалом* относительно связности Γ. Его действие на сечения s расслоения Y имеет вид

$$\nabla_\Gamma s = D_\Gamma \circ J^1 s = [\partial_\lambda s^i - (\Gamma \circ s)^i_\lambda] dx^\lambda \otimes \partial_i \tag{1.74}$$

и называется ковариантным дифференцированием. В частности, сечение s называется *интегральным сечением связности* (integer section) Γ, если $\nabla_\Gamma s = 0$, т. е.

$$\Gamma \circ s = J^1 s.$$

Общий способ задания связностей как сечений расслоения струй применим и для описания хорошо известных по физическим приложениям связностей на главных расслоениях. Связности этого типа моделируют калибровочные потенциалы в калибровочных моделях фундаментальных взаимодействий. Однако даже калибровочная теория не может ограничиться только главными расслоениями и связностями на них. Например, расслоения, сечениями которых являются сами калибровочные потенциалы, не являются главными и связности на них не есть связности на главных расслоениях.

§ 7. Расслоения со структурными группами

Расслоениям со структурной группой, главным расслоениям и связностям на них посвящена обширная математическая литература. Поэтому мы здесь затронем только те факты и понятия, которые строго необходимы для рассматриваемых в книге физических приложений.

Пусть Y — расслоение, задаваемое своей базой X, типичным слоем V и атласом расслоения

$$\Psi = \{U_\xi, \psi_\xi, \varrho_{\xi\zeta}\},$$

где

$$\varrho_{\xi\zeta} : (U_\xi \cap U_\zeta) \times V \to V$$

— функции перехода (1.16). Пусть G — группа, которая действует гладко и эффективно в пространстве типичного слоя V расслоения Y. Предположим, что можно выбрать такой атлас расслоения Ψ, функции перехода которого

$$\varrho_{\xi\zeta}(x) : x \times V \to V$$

в каждой точке $x \in U_\xi \cap U_\zeta$ представляются элементами $g_{\xi\zeta}(x)$ группы G, действующими на V, т. е.

$$\begin{aligned} &\varrho_{\xi\zeta}(x)(V) = g_{\xi\zeta}(x)V, \\ &g_{\xi\zeta} : U_\xi \cap U_\zeta \times V \to G \times V \to V, \end{aligned} \tag{1.75}$$

где $g_{\xi\zeta}$ — гладкие G-значные функции на $U_\xi \cap U_\zeta$. Тогда группа G именуется *структурной группой расслоения* (structure group). Само расслоение Y, наделенное классом эквивалентных атласов с функциями перехода вида (1.75) называется *расслоением со структурной группой*.

Пример 1.7.1. Открытый лист Мебиуса из Примера 1.3.4 может быть представлен как топологическое расслоение со структурной группой $\mathbb{Z}_2$, наделенной дискретной топологией и действующей на интервале $]-1, 1[$ как группа умножений на -1. □

В теории калибровочных полей, как правило, используются расслоения со структурными группами Ли. **В дальнейшем, если специально не оговорено, мы будем предполагать, что структурной группой расслоения является вещественная конечномерная группа Ли.**

Расслоение Y со структурной группой однозначно характеризуется базой X, структурной группой G, типичным слоем V и атласом расслоения

$$\Psi = \{U_\xi, \psi_\xi, g_{\xi\zeta}\}.$$

Семейство функций перехода $\{g_{\xi\zeta}\}$ этого атласа определяет, как расслоение Y сконструировано из тривиальных расслоений $U_\xi \times V$. Пусть Y' — расслоение, как и Y, над базой X, со структурной группой G, но другим типичным слоем V'; и пусть его атлас характеризуется тем же семейством функций перехода $\{g_{\xi\zeta}\}$, что и атлас расслоения Y. Это означает, что расслоение Y' организовано из тривиальных расслоений $U_\xi \times V'$ в точности как Y. Расслоения со структурной группой, которые отличаются только типичным слоем, называются *ассоциированными расслоениями* (associated bundles). Ассоциированные расслоения имеют целый ряд общих свойств: одно и то же множество классов эквивалентности расслоений, одинакового типа связности и др.

Среди ассоциированных расслоений с данной структурной группой G важным случаем является расслоение, типичным слоем которого служит групповое пространство самой структурной группы, на которое она действует умножениями слева

$$g : G \to gG, \qquad g \in G.$$

Такое расслоение называется *главным расслоением* (principal bundle).

Пример 1.7.2. Для описания дираковского монополя используются главные расслоения λ_n, $n = 0, 1, \ldots$, со структурной группой $U(1)$ над сферой S^2. Параметризуем сферу S^2 циклическими координатами

$$(0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \alpha < 2\pi),$$

а групповое пространство $U(1) = S^1$ — координатой $\exp(i\chi)$. Атлас расслоения λ_n устроен следующим образом. Покроем сферу S^2 двумя открытыми полусферами U_+ и U_- с координатами соответственно $\theta > -\varepsilon$ и $\theta < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Они являются областями тривиализация расслоения λ_n, которое получается склеиванием двух тривиальных расслоений $U_+ \times U(1)$ и $U_- \times U(1)$ с координатами $(\theta, \alpha, \exp(i\chi_+))$ и $(\theta, \alpha, \exp(i\chi_-))$ соответственно. Функцией перехода является $U(1)$-значная функция на пересечении $U_+ \cap U_-$, удовлетворяющая условию периодичности по координате α. Оно имеет вид

$$\exp(i\chi_-) = \exp(in\alpha)\exp(i\chi_+).$$

Для разных n и m расслоения λ_n и λ_m неизоморфны. Например, λ_0 — тривиальное расслоение $S^2 \times S^1$, тогда как $\lambda_1 = S^3$. □

Главные расслоения обладают целым рядом специфических свойств. Однако приведенное выше определение не позволяет их выявить. Поэтому обратимся к более конструктивному и общепринятому определению главного расслоения.

Определение 1.7.1. Расслоение

$$\pi_P : P \to X \tag{1.76}$$

называется *главным расслоением* со структурной группой Ли G (или просто главным G-расслоением), если задано послойное свободное и транзитивное действие группы G на P справа:

$$r_g : p \mapsto pg, \qquad p \in P,\ g \in G. \tag{1.77}$$

База главного расслоения X диффеоморфна фактор-пространству P/G, а проекция π_P совпадает с каноническим морфизмом $P \to P/G$. □

Другими словами главное расслоение (1.76) представляет собой обобщенное аффинное пространство

$$P \underset{X}{\times} (X \times G) \to P,$$

моделируемое справа над тривиальным групповым расслоением $X \times G$.

Будем использовать p для обозначения элементов главного расслоения.

Эквивалентность двух приведенных определений главного расслоения устанавливает следующая теорема.

Теорема 1.7.2. Всякое главное расслоение P из Определения 1.7.1 однозначно задается выбором базы X, структурной группы G и *атласа главного расслоения*

$$\Psi^P = \{U_\xi, \varphi^P_\xi, g_{\xi\zeta}\}, \tag{1.78}$$

где функции перехода $g_{\xi\zeta}$ — G-значные гладкие функции на $U_\xi \cap U_\zeta$. □

Морфизмы тривиализации главного расслоения удовлетворяют условию

$$\varphi_\xi^P(pg) = \varphi_\xi^P(p)g.$$

Поэтому всякому атласу Ψ^P (1.78) главного расслоения P можно однозначно сопоставить набор его локальных сечений $\{z_\xi\}$ таких, что

$$(\varphi_\xi^P \circ z_\xi)(x) = 1_G, \qquad x \in U_\xi,$$
$$z_\zeta(x) = z_\xi(x) g_{\xi\zeta}(x).$$

Более того, часто удобно задавать атлас Ψ^P главного расслоения именно набором таких сечений $\{z_\xi\}$.

Отсюда, в частности, следует, что глобальное сечение главного расслоения существует тогда и только тогда, когда оно тривиально. Действительно, если глобальное сечение s главного расслоения существует, можно выбрать $z_\xi = s|_{U_\xi}$, и преобразования перехода такого атласа будут тождественными.

Пример 1.7.3. Пусть G — группа Ли и K — ее замкнутая подгруппа. Напомним, что замкнутая подгруппа группы Ли тоже группа Ли. Пусть G/K — правое факторпространство группы G по K. Тогда каноническая проекция

$$G \to G/K$$

является главным расслоением со структурной группой K. □

Пример 1.7.4. Пусть $P \to X$ — главное расслоение со структурной группой G и K — замкнутая подгруппа группы G. Обозначим P/K фактор многообразия P по действию K на P справа. Тогда канонический морфизм

$$\pi_{P\Sigma} : P \to P/K \tag{1.79}$$

является главным расслоением со структурной группой K. □

Пример 1.7.5. Если $P \to X$ — главное расслоение со структурной группой G, то расслоение $TP \to TX$ также является главным расслоением

$$TP \underset{TX}{\times} T(X \times G) \to TP$$

со структурной группой

$$TG = G \times \mathscr{G}_l,$$

где $\mathscr{G}_l$ — *левая алгебра Ли* левоинвариантных векторных полей на группе G. □

Заметим, что главное G-расслоение $P \to X$ допускает каноническое вертикальное расщепление

$$\alpha : VP \to P \times \mathscr{G}_l,$$
$$\mathrm{pr}_2 \circ \alpha \circ e_m = J_m, \tag{1.80}$$

где $\{J_m\}$ — базис левой алгебры Ли $\mathscr{G}_l$ и $\{e_m\}$ — соответствующие фундаментальные векторные поля на P, отвечающие каноническому действию G на P справа.

Всякому главному расслоению $P \to X$ со структурной группой G можно сопоставить, как уже отмечалось, *ассоциированное расслоение* $Y \to X$ с данным типичным слоем V, реализующим эффективное действие группы G слева. Следуя Определению 1.7.1 главного расслоения, ассоциированное расслоение Y можно определить как фактор

$$Y = (P \times V)/G \tag{1.81}$$

прямого произведения $P \times V$ относительно действия группы G, т. е. когда всякие две точки $(p \times v)$ и $(pg \times g^{-1}v)$, $g \in G$, отождествляются.

Пример 1.7.6. Для всякого главного G-расслоения $P \to X$ всегда существует *ассоциированное групповое расслоение* $\widetilde{P} \to X$ типичным слоем которого служит сама группа G, на котором структурная группа G действует по *присоединенному представлению*

$$\operatorname{ad} g : G \to gGg^{-1}, \qquad g \in G.$$

Главное расслоение P является обобщенным аффинным расслоением, моделируемым слева над групповым расслоением $\widetilde{P}$:

$$\widetilde{P} \times P \ni (\widetilde{p}, p) \mapsto \widetilde{p}p \in P.$$

Более того, для каждого ассоциированного с P расслоения Y существует послойный морфизм

$$\widetilde{P} \times Y \underset{X}{\longrightarrow} Y, \tag{1.82}$$

который задает представление группы $\widetilde{P}_x$ в слое Y_x для всех $x \in X$. □

Пусть Y — ассоциированное с P расслоение с типичным слоем V. Для $p \in P$ обозначим $[p]_V$ сужение канонического отображения

$$P \times V \to (P \times V)/G$$

на подмногообразие $p \times V$. Тогда

$$v \to [p]_V v, \qquad v \in V,$$

есть отображение типичного слоя V в слой $Y_{\pi_P(p)}$ расслоения Y такое, что

$$[pg]_V(v) = [p]_V(gv)$$

для всех $g \in G$.

В частности, если

$$\Psi^P = \{U_\xi, z_\xi\}$$

— атлас главного расслоения P, то отображение

$$[z_\xi(x)]_V : V \to Y_x, \qquad x \in U_\xi$$

задает атлас

$$\Psi = \{U_\xi, \varphi_\xi\}$$

ассоциированного расслоения Y такой, что

$$\varphi_\xi(x) \circ [z_\xi(x)]_V = \mathrm{Id}_V, \qquad x \in U_\xi.$$

Будем называть его *ассоциированным атласом.*

Существует также взаимно однозначное соответствие между глобальными сечениями s ассоциированного с P расслоения Y и *эквивариантными* (equivariant) V-значными функциями f_s на Y, т. е. такими, что

$$f_s(pg) = g^{-1} f_s(p).$$

Оно задается соотношением

$$s(\pi_P(p)) = [p]_V(f_s(p))$$

и в ассоциированных атласах расслоений P и Y принимает вид

$$s_\xi(x) = (\varphi_\xi \circ s)(x) = f_s(z_\xi(x)).$$

Рассмотрим теперь *морфизмы главных расслоений*. Это должны быть послойные морфизмы, сохраняющие структуру главного расслоения.

Морфизм главного G-расслоения $P \to X$ в главное G'-расслоение $P' \to X'$ по определению представляет собой пару (Φ, F), состоящую из послойного морфизма расслоений $\Phi : P \to P'$ и гомоморфизма групп $F : G \to G'$ таких, что

$$\Phi(pg) = \Phi(p)F(g), \qquad p \in P,\ g \in G.$$

В частности, изоморфизм главного G-расслоения P на себя — это эквивариантный изоморфизм Φ_P над X расслоения P, когда для всех $g \in G$ выполняется соотношение

$$r_g \circ \Phi_P = \Phi_P \circ r_g.$$

Мы будем называть его *калибровочным изоморфизмом* (gauge isomorphism). Всякий такой изоморфизм Φ_P представим в виде

$$\Phi_P(p) = p f_\Phi(p), \qquad p \in P, \tag{1.83}$$

где f_Φ — некоторая G-значная эквивариантная функция на P:

$$f_\Phi(pg) = g^{-1} f_\Phi(p) g, \qquad g \in G.$$

Имеет место взаимно однозначное соответствие между такими функциями (а следовательно калибровочными морфизмами Φ_P) и глобальными сечениями s_Φ группового расслоения $\widetilde{P}$ из Примера 1.7.6. Оно дается соотношением

$$s_\Phi(\pi_P(p))p = p f_\Phi(p).$$

Это позволяет, используя морфизм (1.82), всякий калибровочный изоморфизм Φ_P главного расслоения P перенести на любое ассоциированное с P расслоение Y:

$$\Phi_Y : Y \ni y \mapsto (s_\Phi \circ \pi_P)(y)y \in Y,$$

где s_Φ — соответствующее глобальное сечение группового расслоения $\widetilde{P}$.

Еще одним важным случаем морфизмов главных расслоений, на котором мы остановимся, является то, что называют редукцией структурной группы главного расслоения.

Рассмотрим погружение над X главного расслоения $P' \to X$ со структурной группой K в главное расслоение $P \to X$ со структурной группой G такое, что $K \to G$ —

мономорфизм групп. Другими словами P' является главным подрасслоением со структурной группой K главного расслоения P'. Оно называется *редуцированным расслоением* (reduced bundle), а выделение такого подрасслоения — *редукцией структурной группы* G к подгруппе K. Говорят, что структурная группа G главного расслоения P редуцируема к подгруппе Ли $K \subset G$, если существует редуцированное подрасслоение P со структурной группой K.

Приведем известные теоремы о редукции структурной группы.

ТЕОРЕМА 1.7.3. Структурная группа G главного расслоения P редуцируема к подгруппе Ли K тогда и только тогда, когда существует атлас расслоения P, все функции перехода которого принимают значения в подгруппе K. □

Эта теорема позволяет распространить понятие редукции структурной группы на любое расслоение со структурной группой. Мы будем говорить, что структурная группа G расслоения Y редуцируема к подгруппе K, если существует атлас расслоения Y, все функции перехода (1.75) которого принимают значения в подгруппе K. В этом смысле структурная группа, например, тривиального расслоения всегда редуцирована к тривиальной подгруппе, состоящей из единицы группы.

Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия редуцируемости структурной группы. Она играет исключительную роль в моделях теории поля со спонтанным нарушением симметрий и, в частности, в теории гравитации.

ТЕОРЕМА 1.7.4. Структурная группа главного расслоения $P \to X$ редуцируема к своей замкнутой подгруппе K тогда и только тогда, когда ассоциированное с P расслоение

$$\pi_\Sigma : P/K \to X \tag{1.84}$$

с типичным слоем G/K, на который структурная группа G действует слева, допускает глобальное сечение. □

Более того, имеет место взаимно однозначное соответствие между глобальными сечениями h расслоения (1.84) и редуцированными подрасслоениями P_h расслоения P, имеющими структурную группу K. Оно задается соотношением

$$\pi_{P\Sigma}(P_h) = (h \circ \pi_P)(P_h),$$

и можно показать, что всякое редуцированное расслоение P_h представляет собой сужение главного K-расслоения $P \to P/K$ (1.79) на замкнутое подмногообразие $h(X) \subset P/K$.

В полевых моделях глобальные сечения h расслоения (1.84) играют роль *хиггсовских полей*, отвечающих ситуации спонтанного нарушения симметрий, образующих группу G, когда подгруппой точных симметрий является K.

В общем случае существуют топологические препятствия для редукции структурной группы расслоения. Опираясь на Теорему 1.3.2 и Теорему 1.7.4, можно показать, что структурная группа расслоения (над паракомпактной базой) всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе.

ПРИМЕР 1.7.7. Структурной группой касательного расслоения TX над многообразием X является группа $GL(n, \mathbb{R})$. Ассоциированное с TX главное $GL(n, \mathbb{R})$-расслоение можно представить как расслоение, всякий слой которого над $x \in X$ состоит из всевозможных базисных n-реперов в касательном пространстве T_xX к X. Оно называется *главным реперным расслоением* (principal linear frame bundle). Обозначим его LX. Структурная группа $GL(n, \mathbb{R})$ расслоения LX и касательного расслоения TX всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе $O(n)$. Это означает, что всегда

существует атлас касательного расслоения с функциями перехода, принимающими значения в группе $O(n)$. Однако такой атлас в общем случае не является голономным. □

Рассмотрим теперь связности на главных и ассоциированных расслоениях.

В случае главного расслоения $P \to X$ со структурной группой G, точная последовательность (1.28a) сводится к точной последовательности

$$0 \to V^G P \underset{X}{\hookrightarrow} T^G P \to TX \to 0, \tag{1.85}$$

где

$$T^G P = TP/G,$$
$$V^G P = VP/G$$

— факторы касательного пространства TP и вертикального касательного пространства VP над P относительно касательных Tr_g и вертикальных касательных Vr_g морфизмов к каноническому действию r_g (1.77) элементов $g \in G$ на P справа. С расслоением $V^G P$ мы часто будем иметь дело. Оно называется *сопряженным расслоением*. Его типичным слоем является *правая алгебра Ли* $\mathscr{G}_r$ право-инвариантных векторных полей на группе G с базисом $\{I_m\}$. Группа G действует на этот типичный слой по присоединенному представлению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.5. *Связностью на главном расслоении* (principal connection) $P \to X$ называется глобальное сечение A расслоения струй $J^1 P \to P$, эквивариантное относительно канонического правого действия (1.77) группы G на P, т. е. это связность на P такая, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{A} & J^1 P \\ {\scriptstyle r_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J^1 r_g} \\ P & \xrightarrow{A} & J^1 P \end{array}$$

коммутативна для всех $g \in G$. □

Связность A на главном расслоении представляется тангенциально-значной формой

$$A = dx^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda + A^m_\lambda(p) e_m\right), \tag{1.86}$$

коэффициенты которой вследствие условия эквивариантности

$$A \circ r_g = J^1 r_g \circ A, \qquad g \in G,$$

удовлетворяют соотношению

$$A^m_\lambda(pg) = A^m_\lambda(p) \operatorname{ad} g^{-1}(e_m).$$

Связность на главном расслоении задает расщепление

$$TX \hookrightarrow T^G P$$

точной последовательности (1.85).

Приведенное определение связности на главном расслоении отличается от того, которое обычно дается в стандартных учебниках по дифференциальной геометрии. Однако оно позволяет получить расслоение, сечениями которого являются связности на главном расслоении, т. е. в физической интерпретации потенциалы калибровочных полей. В то же время, используя канонический морфизм (1.51) и каноническое горизонтальное расщепление (1.80), из формы (1.86) можно воспроизвести известную *форму связности* (connection form)

$$\overline{A} = \alpha \circ \theta_1 \circ A$$

на главном расслоении P. Пусть $\Psi^P = \{z_\xi\}$ — некоторый атлас главного расслоения P. Относительно атласа Ψ^P, связность на главном расслоении (1.86) характеризуется, как обычно, семейством *локальных 1-форм связности*

$$A_\xi = z_\xi^* \overline{A} = -A_\lambda^m(x) dx^\lambda \otimes J_m \tag{1.87}$$

на базе X.

Пример 1.7.8. Рассмотрим связность на главном $U(1)$-расслоении λ_n из Примера 1.7.2. Она задается локальными 1-формами связности A_+ на U_+ и A_- на U_- с функцией перехода

$$A_+ = A_- - in\, d\phi$$

на $U_+ \cap U_-$. В частности, можно выбрать связность

$$A_\pm = -\frac{in}{2}(\cos\theta \pm 1)\, d\phi. \tag{1.88}$$

□

Связности на главном расслоении, как всякие классические поля, можно представить сечениями некоторого расслоения. В силу условия эквивариантности существует взаимно однозначное соответствие между связностями на главном расслоении $P \to X$ со структурной группой G и глобальными сечениями расслоения

$$C := J^1 P/G \to X, \tag{1.89}$$

получаемого из расслоения струй $J^1 P \to P$ переходом к фактору относительно струйных продолжений канонических морфизмов (1.77). Мы будем называть расслоение (1.89) *расслоением связностей*. Это аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением

$$\overline{C} = T^* X \otimes V^G P. \tag{1.90}$$

В частности, оно допускает каноническое вертикальное расщепление

$$VC = C \times \overline{C}.$$

Подчеркнем однако, что расслоение связностей C (1.89) не является расслоением со структурной группой.

Если задан атлас Ψ^P главного расслоения P, расслоение связностей C наделяется ассоциированной системой расслоенных координат (x^μ, k_μ^m) таких, что для любого его сечения A координатные функции

$$(k_\mu^m \circ A)(x) = A_\mu^m(x)$$

являются коэффициентами локальной 1-формы связности (1.87) связности A. Многообразие струй J^1C расслоения связностей C параметризуется соответствующими координатами (1.44):

$$(x^\mu, k^m_\mu, k^m_{\mu\lambda}). \tag{1.91}$$

В калибровочной теории многообразие струй J^1C расслоения связностей C играет роль конечномерного конфигурационного пространства калибровочных потенциалов. Исследуем поэтому его структуру.

Лемма 1.7.6. Аффинное расслоение струй $J^1C \to C$ моделируется над векторным расслоением

$$T^*X \underset{C}{\otimes}(C \times T^*X \otimes V^G P).$$

Имеет место его каноническое расщепление

$$J^1C = C_+ \underset{C}{\oplus} C_- = (J^2P/G) \underset{C}{\oplus} \left(\overset{2}{\bigwedge} T^*X \underset{C}{\otimes} V^G P\right) \tag{1.92}$$

над C, где

$$C_- = C \times \overset{2}{\bigwedge} T^*X \underset{X}{\otimes} V^G P,$$

а $C_+ \to C$ — это аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением

$$\overline{C}_+ = \overset{2}{\bigvee} T^*X \underset{C}{\otimes} V^G P.$$

□

В координатах (1.91), расщепление (1.92) имеет вид

$$k^m_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\left(k^m_{\mu\lambda} + k^m_{\lambda\mu} + c^m_{nl}k^n_\lambda k^l_\mu\right) + \frac{1}{2}\left(k^m_{\mu\lambda} - k^m_{\lambda\mu} - c^m_{nl}k^n_\lambda k^l_\mu\right),$$

где c^k_{mn} структурные константы правой алгебры Ли $\mathscr{G}_r$ группы G. Выпишем соответствующие канонические проекции

$$\mathscr{S} := \mathrm{pr}_1 : J^1C \to C_+,$$
$$\mathscr{S}^m_{\lambda\mu} = k^m_{\mu\lambda} + k^m_{\lambda\mu} + c^m_{nl}k^n_\lambda k^l_\mu,$$

и

$$\mathscr{F} := \mathrm{pr}_2 : J^1C \to C_-,$$
$$\mathscr{F} = \frac{1}{2}\mathscr{F}^m_{\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes I_m,$$
$$\mathscr{F}^m_{\lambda\mu} = k^m_{\mu\lambda} - k^m_{\lambda\mu} - c^m_{nl}k^n_\lambda k^l_\mu.$$

Легко убедиться, что для всякой связности A величина

$$\mathscr{F} \circ J^1A = F,$$
$$F = \frac{1}{2}F^m_{\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes I_m, \tag{1.93}$$
$$F^m_{\lambda\mu} = \partial_\lambda A^m_\mu - \partial_\mu A^m_\lambda - c^m_{nk}A^n_\lambda A^k_\mu,$$

— это *напряженность* (strength) калибровочного потенциала A.

ПРИМЕР 1.7.9. Напряженность связности (1.88) из Примера 1.7.8 имеет вид

$$F_\pm = dA_\pm = \frac{in}{2}\sin\theta d\theta \wedge d\phi.$$

□

Связность A на главном расслоении P индуцирует *связность* Γ *на ассоциированном с* P *расслоении* Y (1.81) в соответствии с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} J^1P\times V & \longrightarrow & J^1Y \\ {\scriptstyle A\times \mathrm{Id}_V}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma} \\ P\times V & \longrightarrow & Y \end{array}.$$

Относительно ассоциированных атласов Ψ на Y и Ψ^P на P, эта связность дается выражением

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + A^m_\mu(x) I_m{}^i{}_j y^j \partial_i] \tag{1.94}$$

где $A^m_\mu(x)$ — коэффициенты локальной 1-формы связности (1.87) и I_m — генераторы структурной группы G, действующей на типичном слое V расслоения Y. Кривизна связности (1.94) принимает вид

$$R^i_{\lambda\mu} = F^m_{\lambda\mu} I_m{}^i{}_j y^i,$$

где $F^m_{\lambda\mu}$ — коэффициенты напряженности (1.93) связности A.

ПРИМЕР 1.7.10. Всякая линейная связность (1.70) из Примера 1.6.3 на касательном расслоении TX ассоциирована с некоторой связностью на главном реперном расслоении LX со структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$, действующей в типичных слое $\mathbb{R}^n$ этого расслоения с генераторами

$$(I^b_a)^c{}_d = \delta^b_d \delta^c_a.$$

□

Проблема возникает со связностью на расслоении связностей $C \to X$, поскольку оно не является расслоением со структурной группой. Она решается следующим образом.

Если задана симметричная линейная связность K^* (1.70) (т. е. $K^\nu{}_{\alpha\lambda} = K^\nu{}_{\lambda\alpha}$) на кокасательном расслоении T^*X над X, всякая связность B на главном расслоении $P \to X$ индуцирует *связность*

$$S_B : C \to C_+,$$
$$S_B \circ B = \mathscr{S} \circ J^1 B,$$

на расслоении связностей C. В координатах (1.91) на C, эта связность дается выражением

$$S_B{}^m_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\left[c^m_{nl} k^n_\lambda k^l_\mu + \partial_\mu B^m_\lambda + \partial_\lambda B^m_\mu - c^m_{nl}(k^n_\mu B^l_\lambda + k^n_\lambda B^l_\mu)\right] - K^\beta{}_{\mu\lambda}\left(B^m_\beta - k^m_\beta\right). \tag{1.95}$$

Глава 2

Геометрическая теория поля

Геометрическая формулировка классической теории поля основывается, как уже отмечалось, на представлении классических полей глобальными сечениями дифференцируемых расслоений

$$\pi : Y \to X,$$

где база X играет роль пространственно-временного многообразия или обобщенного пространства параметров.

Общепринятый способ описания динамики полей дает лагранжев формализм, в котором роль уравнений поля выполняют уравнения Эйлера—Лагранжа. В теории поля, как правило, можно ограничиться лагранжевым формализмом первого порядка, когда лагранжиан зависит от производных полей не более первого порядка. Из фундаментальных полей только в теории гравитации продолжают по традиции использовать лагранжиан Гильберта—Эйнштейна второго порядка по метрическому полю, однако и он вычитанием дивергентного члена может быть сведен к первому порядку. Более того, современная калибровочная теория гравитационного взаимодействия является аффинно-метрической, когда пространственно-временные метрика и связность рассматриваются как независимые динамические переменные, и все лагранжианы классической и квантовой гравитации в этих переменных — это лагранжианы первого порядка.

Лагранжев формализм в теории поля однако не является всеобъемлющим. Он оказывается не вполне удовлетворителен при описании систем со связями, когда лагранжиан полей вырожден. В то же время большинство современных полевых моделей, включая калибровочную теорию и теорию гравитации, имеют именно вырожденные лагранжианы. Динамика таких моделей адекватно описывается в рамках гамильтонова формализма. Однако это не есть стандартный гамильтонов формализм, как в механике, а его так называемое многоимпульсное обобщение, когда канонические импульсы полей соответствуют производным полевых функций по всем пространственно-временным координатам, а не только по времени.

§ 1. Лагранжев формализм

Пусть $Y \to X$ — некоторое расслоение с атласом расслоенных координатам (x^λ, y^i). Будем интерпретировать его глобальные сечения как *классические поля* на n-мерном многообразии X. В конкретных полевых моделях X будет рассматриваться как 4-мерное пространственно-временное многообразие.

В формализме струй всякая *лагранжева плотность* (Lagrangian density) или просто *лагранжиан* первого порядка сечений расслоения $Y \to X$ определяется как внешняя

горизонтальная плотность

$$L = \mathscr{L}(x^\mu, y^i, y^i_\mu)\omega, \tag{2.1}$$
$$L : J^1Y \to \bigwedge^n T^*X,$$

на расслоении $J^1Y \to X$. Это означает, что многообразие струй J^1Y расслоения Y играет роль своего рода *конфигурационного пространства* полей, представляемых сечениями расслоения $Y \to X$. Очень важно, что это конфигурационное пространство конечномерно и с ним можно манипулировать, как с обычным многообразием.

Коэффициентная функция $\mathscr{L}$ формы (2.1) называется *функцией Лагранжа*, хотя она на самом деле не является функцией и при преобразованиях координат делится на якобиан преобразования координат (x^μ). В дальнейшем будет удобно использовать обозначения

$$\pi^\lambda_i = \partial^\lambda_i \mathscr{L}.$$

Лагранжиан L называется *регулярным* или *невырожденным*, если его *гессиан*

$$\det(\partial^\mu_j \partial^\lambda_i \mathscr{L})$$

отличен от нуля во всех точках многообразия струй J^1Y.

Пример 2.1.1. Рассмотрим тривиальное линейное расслоение

$$Y := X \times \mathbb{R} \to X$$

из Примера 1.5.1 с координатами (x^λ, y). Глобальное сечение этого расслоения может быть интерпретировано как вещественное скалярное поле на многообразии X. Конфигурационным пространством этих полей является многообразие струй

$$J^1Y = T^*X \times \mathbb{R}$$

с координатами $(x^\lambda, y, y_\lambda)$. Стандартный лагранжиан вещественного безмассового скалярного поля на этом конфигурационном пространстве принимает вид

$$L = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}(x) y_\lambda y_\mu \sqrt{|g|}\omega, \tag{2.2}$$

где g — некоторая невырожденная метрика в кокасательном расслоении T^*X и $g = \det(g)$. Этот лагранжиан является регулярным. □

Мы не будем здесь углубляться в проблематику вариационной задачи (см. Приложение А). Отметим только, что в лагранжевом формализме высших порядков при ее решении обычно рассматривают не сам лагранжиан, а его так называемый Lepagean эквивалент. В лагранжевом формализме первого порядка в качестве такого эквивалента обычно выбирают *форму Пуанкаре—Картана*. Это внешняя горизонтальная n-форма на расслоении струй $J^1Y \to Y$, которая имеет координатный вид

$$\Xi_L = \pi^\lambda_i dy^i \wedge \omega_\lambda + (\mathscr{L} - \pi^\lambda_i y^i_\lambda)\omega. \tag{2.3}$$

С ней связаны уравнения Картана и уравнения Де Дондера—Гамильтона, которые в определенной мере, хотя и не полностью, эквивалентны (например, для регулярных лагранжианов) уравнениям Эйлера—Лагранжа. Рассмотрением последних мы и ограничимся.

В лагранжевом формализме первого порядка имеются три типа уравнений *Эйлера—Лагранжа*:

- *алгебраические* уравнения Эйлера—Лагранжа для сечений повторного расслоения струй $J^1J^1Y \to J^1Y$,
- уравнения Эйлера—Лагранжа *первого порядка* для сечений расслоения $J^1Y \to X$,
- уравнения Эйлера—Лагранжа *второго порядка* для сечений собственно расслоения $Y \to X$.

Мы не станем обращаться к вариационному способу построения уравнений Эйлера—Лагранжа, а получим эти уравнения, исходя из условия на ядро оператора Эйлера—Лагранжа.

Оператор Эйлера—Лагранжа, отвечающий лагранжиану L, может быть введен как дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathscr{E}_L : J^2Y \underset{Y}{\longrightarrow} \bigwedge^{n+1} T^*Y$$

так называемого вариационного типа. Однако мы его построим как ограничение на многообразие струй второго порядка J^2Y некоторой внешней формы Λ_L, заданной на повторном многообразии струй J^1J^1Y. Именно эта форма является лагранжевым партнером оператора Гамильтона в многоимпульсном гамильтоново формализме.

Всякий лагранжиан L (2.1) наделяет многообразие струй J^1Y векторнозначной полисимплектической формой

$$\Omega_L = d\pi_i^\lambda \wedge dy^i \wedge \omega \otimes \partial_\lambda. \tag{2.4}$$

Индуцируя форму (2.4) и форму Пуанкаре—Картана (2.3) на повторное многообразие струй J^1J^1Y посредством проекции π_{11} (1.59), построим упомянутую выше внешнюю форму на J^1J^1Y:

$$\Lambda_L = d\Xi_L - \lambda \rfloor \Omega_L = (y^i_{(\lambda)} - y^i_\lambda)\, d\pi_i^\lambda \wedge \omega + (\partial_i - \widehat{\partial}_\lambda \partial_i^\lambda)\mathscr{L}\, dy^i \wedge \omega, \tag{2.5}$$

где

$$\lambda = dx^\lambda \otimes \widehat{\partial}_\lambda, \qquad \widehat{\partial}_\lambda = \partial_\lambda + y^i_{(\lambda)}\partial_i + y^i_{\mu\lambda}\partial^\mu_i.$$

Назовем ее *производящей формой*. Ее сужение на полуголономное многообразие струй $\widehat{J}^2Y$ определяет дифференциальный оператор первого порядка

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}'_L : \widehat{J}^2Y \underset{J^1Y}{\longrightarrow} \bigwedge^{n+1} T^*Y, \\ &\mathscr{E}'_L = \left[\partial_i - (\partial_\lambda + y^j_\lambda \partial_j + y^j_{\mu\lambda}\partial^\mu_j)\partial^\lambda_i\right] \mathscr{L}\, dy^i \wedge \omega, \end{aligned} \tag{2.6}$$

на расслоении $J^1Y \to X$. Он называется *оператором Эйлера—Лагранжа первого порядка*.

Ограничение производящей формы (2.5) на многообразие струй второго порядка J^2Y определяет дифференциальный оператор второго порядка $\mathscr{E}_L$ на самом расслоении $Y \to X$. Он именуется *оператором Эйлера—Лагранжа второго порядка* и задается тем же самым выражением, что и (2.6), но с симметричными координатами ускорений $y^i_{\mu\lambda} = y^i_{\lambda\mu}$.

Пусть задан лагранжиан L (2.1). Связность

$$\overline{\Gamma} = dx^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + \overline{\Gamma}^i_{\mu\lambda}\partial^\mu_i\right)$$

на расслоении $J^1Y \to X$ со значениями в $\widehat{J}^2Y$ называется *лагранжевой связностью* для L, если она принимает значения в ядре $\operatorname{Ker}\mathscr{E}'_L$ оператора Эйлера—Лагранжа (2.6):

$$\mathscr{E}'_L \circ \overline{\Gamma} = 0,$$

$$\partial_i\mathscr{L} - (\partial_\lambda + y^j_\lambda\partial_j + \overline{\Gamma}^j_{\mu\lambda}\partial^\mu_j)\partial^\lambda_i\mathscr{L} = 0. \tag{2.7}$$

Уравнения (2.7) можно интерпретировать как систему линейных *алгебраических уравнений Эйлера—Лагранжа* для компонент $\overline{\Gamma}^i_{\mu\lambda}(x^\nu, y^j, y^j_\nu)$ лагранжевой связности.

Заметим, что существование решений алгебраических уравнений (2.7) является необходимым условием существования решений дифференциальных уравнений Эйлера—Лагранжа. Это условие можно исследовать стандартными методами теории линейных алгебраических уравнений. В частности, если лагранжиан регулярен, локальная лагранжева связность для него всегда существует.

Пусть локальная лагранжева связность $\overline{\Gamma}$ для лагранжиана L существует и имеет интегральное сечение $\overline{s}$ расслоения $J^1Y \to X$, т. е. струйное продолжение $J^1\overline{s}$ сечения $\overline{s}$ принимает значения в $\operatorname{Ker}\mathscr{E}'_L$:

$$\mathscr{E}'_L \circ J^1\overline{s} = 0.$$

Тогда сечение $\overline{s}(x^\nu, y^j)$ удовлетворяет системе *дифференциальных уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка*, отвечающих лагранжиану L:

$$\partial_\lambda\overline{s}^i = \overline{s}^i_\lambda, \tag{2.8a}$$

$$\partial_i\mathscr{L} - (\partial_\lambda + \overline{s}^j_\lambda\partial_j + \partial_\lambda\overline{s}^j_\mu\partial^\mu_j)\partial^\lambda_i\mathscr{L} = 0. \tag{2.8b}$$

Эта система дифференциальные уравнения первого порядка в свою очередь эквивалентна системе *дифференциальных уравнений Эйлера—Лагранжа второго порядка*

$$\partial_i\mathscr{L} - (\partial_\lambda + \partial_\lambda s^j\partial_j + \partial_\lambda\partial_\mu s^j\partial^\mu_j)\partial^\lambda_i\mathscr{L} = 0 \tag{2.9}$$

для сечения $s(x^\nu)$ расслоения $Y \to X$, второе струйное продолжение J^2s которого принимает значения в ядре оператора Эйлера—Лагранжа второго порядка $\mathscr{E}_L$:

$$\mathscr{E}_L \circ J^2s = 0.$$

Действительно, пусть $\overline{s}$ — сечение расслоения $J^1Y \to X$, струйное продолжение $J^1\overline{s}$ которого лежит в полуголономном многообразии струй $\widehat{J}^2Y$. Согласно Предложению 1.5.3 существует сечение s расслоения $Y \to X$ такое, что

$$\overline{s} = J^1s \tag{2.10}$$

и, как это следует из определения операторов Эйлера—Лагранжа первого и второго порядков, выполняется соотношение

$$\mathscr{E}' \circ J^1\overline{s} = \mathscr{E} \circ J^2s.$$

В силу этого соотношения каждое решение s уравнений (2.9) задает решение J^1s уравнений (2.8a) и (2.8b). Обратно, всякое решение $\overline{s}$ уравнений (2.8a) и (2.8b) принимает вид (2.10), где s — решение уравнений (2.9).

Пример 2.1.2. Рассмотрим лагранжиан (2.2) из Примера 2.1.1. Имеем соответствующие алгебраические уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\partial_\lambda \left(g^{\lambda\mu}\sqrt{|g|}\right) y_\mu + \overline{\Gamma}_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu}\sqrt{|g|} = 0,$$

дифференциальные уравнения Эйлера—Лагранжа первого порядка

$$\begin{aligned} &\partial_\lambda \overline{s} = \overline{s}_\lambda, \\ &\partial_\lambda \left(g^{\lambda\mu}\sqrt{|g|}\right) \overline{s}_\mu + \partial_\lambda \overline{s}_\mu g^{\lambda\mu}\sqrt{|g|} = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

и дифференциальные уравнения Эйлера—Лагранжа второго порядка

$$\partial_\lambda \left(g^{\lambda\mu}\sqrt{|g|}\right) \partial_\mu s + \partial_\lambda \partial_\mu s g^{\lambda\mu}\sqrt{|g|} = 0. \tag{2.12}$$

Легко убедиться, что системы дифференциальных уравнений (2.11) и (2.12) эквивалентны. □

Исследуем теперь законы сохранения, т. е. своего рода интегралы движения, которые можно получить в лагранжевом формализме на решениях уравнений Эйлера—Лагранжа. Существуют разные типы законов сохранения. Мы ограничимся дифференциальными лагранжевыми законами сохранения, которые следует из свойства инвариантности лагранжиана относительно тех или иных преобразований и выражаются как условие на дивергенцию некоторой величины. Такие законы сохранения получаются вычислением производной Ли лагранжиана вдоль соответствующего векторного поля. Причем, поскольку лагранжиан определен на многообразии струй, векторное поле должно быть тоже поднято на многообразие струй.

Пусть u — проектируемое векторное поле на расслоении $Y \to X$ и $\overline{u}$ — его поднятие (1.52) на многообразие струй $J^1Y \to X$. Нам потребуется его каноническое горизонтальное расщепление. Поэтому рассмотрим индуцированное из $\overline{u}$ векторное поле на повторном многообразии струй J^1J^1Y посредством проекции π_{11}. Будем обозначать его, как это практикуется для индуцированных конструкций, тем же символом $\overline{u}$. Тогда его каноническое горизонтальное расщепление (1.57) (где роль расслоения Y играет расслоение $J^1Y \to X$) дается выражением

$$\overline{u} = \overline{u}_H + \overline{u}_V = u^\lambda \left(\partial_\lambda + y^i_{(\lambda)}\partial_i + y^i_{\mu\lambda}\partial^\mu_i\right) + \left[(u^i - y^i_{(\lambda)}u^\lambda)\partial_i + (u^i_\mu - y^i_{\mu\lambda}u^\lambda)\partial^\mu_i\right].$$

Пусть L — лагранжиан (2.1) на многообразии струй J^1Y расслоения $Y \to X$. Рассмотрим его индукцию на полуголономное многообразие струй $\widehat{J}^2Y$, обозначив ее тем же символом L. Вычислив производную Ли $\mathbf{L}_{\overline{u}}L$ внешней горизонтальной плотности L в явном виде по формуле (1.40), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\overline{u}}L &= \partial_\lambda u^\lambda \mathscr{L} + [u^\lambda\partial_\lambda + u^i\partial_i + (\partial_\lambda u^i + y^j_\lambda \partial_j u^i - y^i_\mu \partial_\lambda u^\mu)\partial^\lambda_i]\mathscr{L} = \\ &= \widehat{\partial}_\lambda[\pi^\lambda_i(u^i - u^\mu y^i_\mu) + u^\lambda \mathscr{L}]\omega + \overline{u}_V \rfloor \mathscr{E}'_L, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где

$$\widehat{\partial}_\lambda = \partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + y^i_{\mu\lambda}\partial^\mu_i$$

означает *оператор полной производной* по координате x^λ.

При ограничении на ядро оператора Эйлера—Лагранжа первого порядка (2.6), выражение (2.13) приводится к тождеству

$$\partial_\lambda u^\lambda \mathscr{L} + \left[u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (\partial_\lambda u^i + y^j_\lambda \partial_j u^i - y^i_\mu \partial_\lambda u^\mu)\partial^\lambda_i\right]\mathscr{L} \approx \widehat{\partial}_\lambda\left[\pi^\lambda_i (u^i - u^\mu y^i_\mu) + u^\lambda \mathscr{L}\right], \quad (2.14)$$

где значком "$\approx$" обозначается так называемое *слабое равенство* по модулю уравнений Эйлера—Лагранжа. На решениях $\overline{s}$ уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка (2.8a) и (2.8b) слабое тождество (2.14) превращается в *дифференциальный закон сохранения*

$$\overline{s}^* \mathbf{L}_{\overline{u}} L \approx -\frac{d}{dx^\lambda}\left[\pi^\lambda_i (u^\mu \overline{s}^i_\mu - u^i) - u^\lambda \mathscr{L}\right]\omega. \quad (2.15)$$

В теории поля обычно рассматриваются два типа дифференциальных законов сохранения (2.15) — законы сохранения токов симметрий и тензора энергии-импульса.

Пусть $u = u^i \partial_i$ — вертикальное векторное поле на расслоении $Y \to X$. Тогда тождество (2.14) принимает вид

$$\left[u^i \partial_i + (\partial_\lambda u^i + y^j_\lambda \partial_j u^i)\partial^\lambda_i\right]\mathscr{L} \approx \widehat{\partial}_\lambda (u^i \pi^\lambda_i).$$

Если

$$\mathbf{L}_{\overline{u}} L = 0,$$

то левая сторона этого тождества обращается в 0 и закон сохранения (2.15) на решениях уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка сводится к слабому закону сохранения

$$\frac{d}{dx^\lambda}[u^i \pi^\lambda_i] \approx 0 \quad (2.16)$$

так называемого *тока симметрий*

$$\mathscr{J}_u{}^\mu = u^i \pi^\mu_i,$$

отвечающего вертикальному векторному полю u. В калибровочной теории, например, это — известные тождества Нетер (см. следующий параграф).

Пусть теперь $\tau = \tau^\lambda \partial_\lambda$ — произвольное векторное поле на базе X и

$$\tau_\Gamma = \tau^\mu (\partial_\mu + \Gamma^i_\mu \partial_i)$$

его *горизонтальное* поднятие на расслоение $Y \to X$ посредством связности Γ на Y. В этом случае слабое равенство (2.14) приобретает форму

$$\left[\partial_\mu + \Gamma^i_\mu \partial_i + (\partial_\lambda \Gamma^i_\mu + y^j_\lambda \partial_j \Gamma^i_\mu)\partial^\lambda_i\right]\mathscr{L} + \widehat{\partial}_\lambda\left[\pi^\lambda_i (y^i_\mu - \Gamma^i_\mu) - \delta^\lambda_\mu \mathscr{L}\right] \approx 0. \quad (2.17)$$

На решениях $\overline{s}$ уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка тождество (2.17) превращается в дифференциальный закон сохранения

$$\left[\partial_\mu + \Gamma^i_\mu \partial_i + (\partial_\lambda \Gamma^i_\mu + \overline{s}^j_\lambda \partial_j \Gamma^i_\mu)\partial^\lambda_i\right]\mathscr{L} + \frac{d}{dx^\lambda}\left[\mathscr{T}_\Gamma{}^\lambda{}_\mu(\overline{s})\right] \approx 0, \quad (2.18)$$

где

$$\mathscr{T}_\Gamma{}^\lambda{}_\mu(\overline{s}) = \left[\pi^\lambda_i (\overline{s}^i_\mu - \Gamma^i_\mu) - \delta^\lambda_\mu \mathscr{L}\right]$$

— это *канонический тензор энергии-импульса* относительно связности Γ.

Пример 2.1.3. Если выбрать локальную тривиальную связность $\Gamma^i_\mu = 0$, закон сохранения (2.18) сведется к известному закону сохранения

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\lambda} + \frac{d}{dx^\lambda} \mathscr{T}^\lambda{}_\mu(\overline{s}) \approx 0$$

обычного канонического тензора энергии-импульса

$$\mathscr{T}^\lambda{}_\mu(\overline{s}) = \pi^\lambda_i \overline{s}^i_\mu - \delta^\lambda_\mu \mathscr{L}, \tag{2.19}$$

который однако является глобально плохо определенным объектом. На пространстве Минковского компонента $\mathscr{T}^0{}_0$ тензора (2.19) интерпретируется как выражение для энергии поля $\overline{s}$. □

§ 2. Калибровочная теория

С математической точки зрения объектами калибровочной теории являются связности на главных расслоениях и сечения ассоциированных расслоений.

Исторически калибровочная теория основывалась на так называемом *калибровочном принципе*, который требовал инвариантность лагранжиана полей относительно преобразований симметрий с параметрами, зависящими от пространственно-временных координат. Главным следствием этого условия является замена в лагранжиане полей операторов частных производных ∂_μ на операторы ковариантных производных

$$\partial_\mu - A^m_\mu(x) I_m,$$

где I_m — генераторы данной группы симметрий, а A^m_μ — калибровочные потенциалы.

Истории калибровочной теории посвящена обширная литература и мы не будем касаться этих вопросов. Калибровочный принцип во многом утратил свое былое значение после того, как была предложена математическая модель калибровочных потенциалов как связностей на главных расслоениях. Более того, калибровочный принцип в большинстве случаев недостаточен для построения калибровочных моделей. Говоря математическим языком, он фиксирует только структурную группу расслоения. Но, например, касательное расслоение TX (с которым ассоциированы все другие расслоения в теории гравитации) нельзя охарактеризовать лишь как векторное расслоение над X со структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$. Его ключевое отличие от других таких расслоений над многообразием X состоит в том, что оно обладает голономным атласом. Кроме того его структурная группа редуцируема к своей подгруппе, что в физической интерпретации является признаком так называемого спонтанного нарушения симметрий. Традиционный калибровочный принцип этого не учитывает.

В то же время все современные модели фундаментальных взаимодействия являются моделями с нарушенными симметриями, что позволяет, например, используя механизм Хиггса, генерировать массы частиц. Поэтому сейчас требование инвариантности относительно калибровочных, да и обычных преобразований симметрий не представляется уже столь абсолютным, как два десятилетия назад.

В геометрическом подходе, чтобы адекватно задать полевую модель, требуется фиксировать расслоение $Y \to X$, сечениями которого являются описываемые поля, и ввести на нем связности. На многообразии струй J^1Y этого расслоения строится лагранжиан (2.1). В теории поля все лагранжианы являются полиномиальными (как правило, квадратичными или аффинными) формами по координатам скоростей y^i_λ. Так как расслоение струй $J^1Y \to Y$ является аффинным расслоением, моделируемым над векторным

расслоением (1.48), всякий лагранжиан теории поля представляет собой композицию сначала отображения аффинного расслоения $J^1Y \to Y$ в векторное расслоение (1.48), а потом дифференциальной формы на этом векторном расслоении, т. е.

$$L : J^1Y \xrightarrow{D} T^*X \underset{Y}{\otimes} VY \to \bigwedge^n T^*X, \tag{2.20}$$

где D — ковариантный дифференциал (1.73) относительно некоторой связности на расслоении $Y \to X$.

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением калибровочной теории ненарушенных внутренних симметрий.

Пусть $\pi_P : P \to X$ — главное расслоение со структурной группой G *внутренних симметрий*. Последнее означает, что эта группа не является какой-либо структурной группой касательного расслоения TX над базой X. Под X мы будем понимать 4-мерное ориентируемое многообразие, наделенное невырожденной метрикой $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ в касательном и кокасательном расслоениях над X. Как и в Примере 2.1.1, обозначим $g = \det(g_{\mu\nu})$. В калибровочной теории только внутренних симметрий, метрика g не является динамической переменной и рассматривается как внешнее (своего рода параметрическое) поле.

Калибровочные потенциалы, отвечающие группе симметрий G, отождествляются со связностями на главном расслоении P и представляются глобальными сечениями A расслоения связностей $C = J^1P/G$ (1.89) с координатами (x^μ, k^m_μ) такими, что

$$(k^m_\mu \circ A)(x) = A^m_\mu(x)$$

— коэффициенты локальной 1-формы связности. Расслоение C можно наделить связностями (1.95):

$$S_{B\,\mu\lambda}{}^m = \frac{1}{2}\left[c^m_{nl}k^n_\lambda k^l_\mu + \partial_\mu B^m_\lambda + \partial_\lambda B^m_\mu - c^m_{nl}(k^n_\mu B^l_\lambda + k^n_\lambda B^l_\mu)\right] - K^\beta{}_{\mu\lambda}(B^m_\beta - k^m_\beta).$$

Конфигурационным пространством калибровочных потенциалов является многообразие струй J^1C расслоения C с координатами $(x^\mu, k^m_\mu, k^m_{\mu\lambda})$. Имеет место его каноническое расщепление (1.92):

$$J^1C = C_+ \underset{C}{\oplus} C_-,$$

$$k^m_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\left(\mathscr{S}^m_{\lambda\mu} + \mathscr{F}^m_{\lambda\mu}\right) = \frac{1}{2}\left(k^m_{\mu\lambda} + k^m_{\lambda\mu} + c^m_{nl}k^n_\lambda k^l_\mu\right) + \frac{1}{2}\left(k^m_{\mu\lambda} - k^m_{\lambda\mu} - c^m_{nl}k^n_\lambda k^l_\mu\right).$$

На этом конфигурационном пространстве общепринятый *лагранжиан Янга—Миллса* L_{YM} калибровочных потенциалов дается выражением

$$L_{YM} = \frac{1}{4\epsilon^2}\, a^G_{mn} g^{\lambda\mu} g^{\beta\nu} \mathscr{F}^m_{\lambda\beta} \mathscr{F}^n_{\mu\nu} \sqrt{|g|}\,\omega, \tag{2.21}$$

где a^G — некоторая невырожденная G-инвариантная билинейная форма на алгебре Ли $\mathscr{G}_\tau$ — типичном слое сопряженного расслоения V^GP, и ε — константа взаимодействия.

Заметим, что невырожденная инвариантная билинейная форма на алгебре Ли существует не всегда, и поэтому не для всех групп Ли может быть построена янг-миллсовская

калибровочная модель. Например, если G — полупростая группа, такой формой является *форма Киллинга*

$$a^G_{mn} = c^l_{mk} c^k_{nl}.$$

Если G — компактная группа, форма Киллинга является отрицательно определенной и существует базис алгебры Ли, в котором она принимает вид $a^G_{mn} = -2\delta_{mn}$. В калибровочной теории внутренних симметрий обычно ограничиваются моделями с компактными группами симметрий, поскольку отрицательная определенность формы Киллинга гарантирует положительную определенность энергии калибровочных потенциалов в таких моделях.

Лагранжиан Янга—Миллса (2.21) факторизуется согласно общему выражению (2.20) в виде

$$L_{YM} : J^1 C \xrightarrow{D} C_- \to \bigwedge^4 T^* X,$$

где D — ковариантный дифференциал относительно какой-либо связности (1.95).

Пример 2.2.1. Простейшим примером калибровочного поля является *электромагнитное поле*. Электромагнитные потенциалы отождествляются со связностями на главных расслоениях со структурной группой $U(1)$. Такие расслоения над сферой S^2 и связности на них были рассмотрены в Примерах 1.7.2 и 1.7.8. Пусть $P \to X$ — главное $U(1)$-расслоение. В этом случае соответствующее сопряженное расслоение $V^G P$ сводится к тривиальному линейному расслоению

$$V^G P = X \times \mathbb{R},$$

а расслоение связностей C (1.89) изоморфно аффинному кокасательному расслоению T^*X над X с координатами (x^λ, k_μ). Связности (1.95) на нем принимают форму

$$\Gamma_{B\mu\lambda} = \frac{1}{2}(\partial_\mu B_\lambda + \partial_\lambda B_\mu) - K^\beta{}_{\mu\lambda}(B_\beta - k_\beta).$$

Конфигурационным пространством электромагнитных потенциалов является многообразие струй

$$J^1 C = J^1 T^* X = \bigotimes^2 T^* X \underset{X}{\times} T^* X.$$

Его каноническое расщепление (1.92) имеет вид

$$J^1 T^* X = \bigvee^2 T^* X \underset{T^*X}{\oplus} \bigwedge^2 T^* X, \tag{2.22}$$

$$k_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}(\mathscr{S}_{\mu\lambda} + \mathscr{F}_{\mu\lambda}) = k_{(\mu\lambda)} + k_{[\mu\lambda]}.$$

Для всякого сечения A аффинного кокасательного расслоения T^*X, величина

$$F_{\mu\lambda} = \mathscr{F}_{\mu\lambda} \circ J^1 A = \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda$$

является напряженностью электромагнитного поля. На конфигурационном пространстве (2.22) общепринятый лагранжиан электромагнитного поля дается выражением

$$L_E = -\frac{1}{16\pi} g^{\lambda\mu} g^{\beta\nu} \mathscr{F}_{\lambda\beta} \mathscr{F}_{\mu\nu} \omega \tag{2.23}$$

в системе единиц, в которой скорость света принята равной 1. □

Легко проверить, что лагранжиан Янга—Миллса (2.21) вырожден. Если построить соответствующие алгебраические уравнения Эйлера—Лагранжа (2.7), нетрудно убедиться, что они оставляют произвольными компоненты $\overline{\Gamma}^m_{\lambda\lambda}$ лагранжевой связности, и дифференциальные уравнения Эйлера—Лагранжа для калибровочных потенциалов оказываются недоопределенными.

Еще одним объектом калибровочной теории являются так называемые материальные поля. В калибровочной теории внутренних симметрий *материальные поля* со значениями во внутреннем пространстве V описываются глобальными сечениями векторного расслоения

$$Y = (P \times V)/G, \tag{2.24}$$

ассоциированного с главным расслоением P. Это скалярные поля. Связности Γ на расслоении Y ассоциированы со связностями на главном расслоении P и имеют вид (1.94).

$$\Gamma_A = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + A^m_\mu(x) I_m{}^i{}_j y^j \partial_i].$$

Чтобы можно было построить лагранжиан материальных полей, предполагается, что расслоение Y (2.24) наделено G-инвариантной послойной метрикой a^Y. Благодаря каноническому вертикальному расщеплению

$$VY = Y \underset{X}{\otimes} Y,$$

метрика a^Y служит также послойной метрикой в вертикальном касательном расслоении $VY \to X$.

Конфигурационным пространством материальных полей является многообразие струй J^1Y расслоения (2.24) с координатами $(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda)$. На этом конфигурационном пространстве стандартный *лагранжиан скалярных материальных полей* в присутствии внешнего калибровочного потенциала A имеет вид

$$L_{(m)} = \frac{1}{2} a^Y_{ij} \left[g^{\mu\nu}(y^i_\mu - \Gamma_A{}^i_\mu)(y^j_\nu - \Gamma_A{}^j_\nu) - m^2 y^i y^j \right] \sqrt{|g|}\omega, \tag{2.25}$$

$$\Gamma_A{}^i_\lambda = A^m_\lambda(x) I_m{}^i{}_j y^j. \tag{2.26}$$

Он является непосредственным обобщением лагранжиана скалярного поля из Примера 2.1.1 и описывает взаимодействие материальных полей с внешним калибровочным потенциалом A. Лагранжиан (2.25) регулярен. Он не является калибровочно инвариантным из-за внешнего поля A.

В случае ненарушенных симметрий полная система динамических материальных полей и динамических калибровочных потенциалов представляется сечениями прямого произведения

$$C \underset{X}{\times} Y \tag{2.27}$$

расслоения связностей C и расслоения материальных полей Y с координатами $(x^\lambda, k^m_\mu, y^i)$.

В качестве связности на расслоении (2.27) можно было бы взять произведение связностей S_B на C и Γ_A на Y, но при таком варианте мы получили бы, как и в предыдущем случае, взаимодействие материальные полей с внешним, а не с динамическим калибровочным потенциалом. Поэтому выберем связность на расслоении (2.27) в виде

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes \left[\partial_\lambda + S_{B\mu\lambda}{}^m \partial^\mu_m + k^m_\lambda I_m{}^i{}_j y^j \partial_i \right].$$

Общее конфигурационное пространство материальных и калибровочных полей является произведением их конфигурационных пространств

$$J^1(C \underset{X}{\times} Y) = J^1C \underset{X}{\times} J^1Y. \tag{2.28}$$

Соответственно полный лагранжиан L на этом конфигурационном пространстве представляет собой сумму лагранжиана Янга—Миллса (2.21) и лагранжиана материальных полей (2.25), в котором однако связность (2.26) заменена на связность

$$\Gamma^i_\lambda = k^m_\lambda I_m{}^i{}_j y^j.$$

Такой лагранжиан является инвариантным относительно калибровочных преобразований.

Заметим, что в калибровочной теории рассматривается несколько разновидностей *калибровочных преобразований*. Это преобразования атласов главных и ассоциированных расслоений, калибровочные изоморфизмы (1.83) главного расслоения $P \to X$ над тождественным преобразованием базы X и общие изоморфизмы главного расслоения над диффеоморфизмами базы. В калибровочной теории внутренних симметрий достаточно ограничиться первыми двумя типами калибровочных преобразований. Они связаны между собой следующим образом.

Пусть дан атлас $\{z_\xi(x)\}$ главного расслоения P. Всякий калибровочный изоморфизм Φ_P (1.83) главного расслоения P определяет новый атлас расслоения, задаваемый семейством локальных сечений

$$z'_\xi(x) = z_\xi(x) f^{-1}_\Phi(z_\xi(x)), \qquad x \in U_\xi. \tag{2.29}$$

Нетрудно проверить, что оба атласа имеют одни и те же функции перехода. Обратно, для любых двух карт (U_ξ, z_ξ)и (U_ξ, z'_ξ) на одной и той же области тривиализации U_ξ существует локальный калибровочный изоморфизм над U_ξ такой, что выполняется соотношение (2.29). Это означает, что по крайней мере локально на областях тривиализации главного расслоения имеет место взаимно однозначное соответствие между двумя рассматриваемыми типами калибровочных преобразований. Более того, в расслоенных координатах они задаются одними и теми же координатными преобразованиями. Все это справедливо и для ассоциированных расслоений. Поэтому условия инвариантности лагранжиана относительно как преобразований атласов расслоений, так и калибровочных изоморфизмов эквивалентны.

Калибровочные изоморфизмы (1.83) главного расслоения P образуют группу, которая изоморфна группе глобальных сечений группового расслоения $\widetilde{P}$ из Примера 1.7.6. Она называется *калибровочной группой*. Не вдаваясь в детали, отметим, что эта группа может быть пополнена до банаховой (бесконечномерной) группы Ли. Элементам ее алгебры Ли $\mathscr{G}$ соответствуют *фундаментальные вертикальные векторные поля* $u_\mathscr{G}$ на главном и ассоциированных расслоениях. Отсюда условие калибровочной инвариантности лагранжиана L на конфигурационном пространстве (2.28) состоит в том, что

$$\mathbf{L}_{u_\mathscr{G}} L = 0 \tag{2.30}$$

для любого локального фундаментального векторного поля $u_\mathscr{G}$ на $C \times Y$.

Явное выражение для локальных фундаментальных векторных полей $u_\mathscr{G}$ можно получить, трактуя их как своего рода *генераторы инфинитезимальных калибровочных изоморфизмов*. Так, на ассоциированном с P векторном расслоении $Y \to X$ всякое такое поле имеет вид

$$u_\mathscr{G} = \alpha^m(x) I_m{}^i{}_j y^j \partial_i,$$

где I_m — генераторы структурной группы G, действующей на типичном слое V, и $\alpha^m(x)$ — произвольный локальные функции на X. Оно отвечает инфинитезимальному калибровочному изоморфизму

$$y^i \to y^i + t\alpha^m(x) I_m{}^i{}_j y^j,$$

где t — малый групповой параметр.

На расслоении связностей C фундаментальные векторные поля даются выражением

$$u_{\mathscr{G}} = \left[\partial_\mu \alpha^m(x) + c^m_{nl} k^l_\mu \alpha^n(x)\right] \partial^\mu_m.$$

Соответственно на произведении $C \underset{X}{\times} Y$ они принимают форму

$$u_{\mathscr{G}} = \left(u^{A\lambda}_m \partial_\lambda \alpha^m + u^A_m \alpha^m\right) \partial_A = \left(\partial_\mu \alpha^m + c^m_{nl} k^l_\mu \alpha^n\right) \partial^\mu_m + \alpha^m I_m{}^i{}_j y^j \partial_i,$$

где мы использовали коллективный индекс A. Подставляя это выражение в условие калибровочной инвариантности (2.30), получаем тождество, которое должно выполняться при произвольных функциях $\alpha^m(x)$. Отсюда, приравнивая нулю соответствующие выражения, приходим к системе равенств

$$\begin{aligned} u^A_m \left(\partial_A - \widehat{\partial}_\lambda \partial^\lambda_A\right) \mathscr{L} + \widehat{\partial}_\lambda \left(u^A_m \partial^\lambda_A \mathscr{L}\right) &= 0, \\ u^{A\mu}_m \left(\partial_A - \widehat{\partial}_\lambda \partial^\lambda_A\right) \mathscr{L} + \widehat{\partial}_\lambda \left(u^{A\mu}_m \partial^\lambda_A \mathscr{L}\right) + u^A_m \partial^\mu_A \mathscr{L} &= 0, \\ u^{A\lambda}_m \partial^\mu_A \mathscr{L} + u^{A\mu}_m \partial^\lambda_A \mathscr{L} &= 0, \end{aligned}$$

которые на решениях уравнений Эйлера—Лагранжа воспроизводят известные *тождества Нетер*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^\lambda}(u^A_m \partial^\lambda_A \mathscr{L}) &\approx 0, \\ \frac{d}{dx^\lambda}(u^{A\mu}_m \partial^\lambda_A \mathscr{L}) + u^A_m \partial^\mu_A \mathscr{L} &\approx 0, \\ u^{A\lambda}_m \partial^\mu_A \mathscr{L} + u^{A\mu}_m \partial^\lambda_A \mathscr{L} &= 0 \end{aligned}$$

для калибровочно инвариантного лагранжиана L.

В частности, доказано, что лагранжиан Янга—Миллса (2.21) является единственным квадратичным калибровочно инвариантным лагранжианом калибровочных потенциалов.

§ 3. Гамильтонов формализм

Лагранжианы большинства фундаментальных полевых моделей, включая калибровочные поля, фермионные поля, гравитацию и др., не являются регулярными. В случае вырожденного лагранжиана соответствующие уравнения Эйлера—Лагранжа оказываются недоопределенными, поскольку старшие производные полевых функций, как это видно из алгебраических уравнений (2.7), не выражаются однозначно через их младшие производные. Возникает необходимость в дополнительных уравнениях. В калибровочной теории такими уравнениями оказываются хорошо известные калибровочные условия. Однако в общем случае (например, для поля Прока) неясно, как задавать подобные добавочные условия.

В механике вполне адекватное описание вырожденных систем дает, как известно, гамильтонов формализм. Этот гамильтонов формализм широко используется и в квантовой теории поля для канонического квантования полей. Главным его достижением стала процедура построения одновременных коммутационных соотношений полей для систем со связями.

Не столь успешным однако оказалось применение стандартной гамильтоновой техники в классической теории поля, когда каноническими переменными являются полевые функции в данный момент времени. В результате соответствующее фазовое пространство оказывается бесконечномерным, а уравнения Гамильтона не являются дифференциальными уравнениями на полевые функции, в отличие от уравнений Эйлера—Лагранжа. Поэтому в классической теории поля, в сравнении с механикой, традиционный симплектический гамильтонов формализм перестает быть партнером лагранжева формализма.

Таким партнером оказывается так называемый *многоимпульсный гамильтонов формализм*, где каноническими переменными являются полевые функции и импульсы, соответствующие производным этих функций по всем пространственно-временным координатам, а не только по времени. В математической литературе это направление особенно активно стало развиваться с 70-х годов. В физической литературе, аналогичная идея была положена в основу так называемой алгебры токов. Трудность возникает с установлением коммутационных соотношений между многоимпульсными каноническими переменными при переходе к квантовой теории. Однако ее можно обойти, если ограничиться хронологическими произведениями и квантовать поля в технике функционального интегрирования. Мы не будем касаться здесь этих вопросов.

Для данного расслоения $Y \to X$ рассмотрим расслоение

$$\Pi = \bigwedge^n T^*X \underset{Y}{\otimes} TX \underset{Y}{\otimes} V^*Y \tag{2.31}$$

над Y, наделенное атласом расслоенных координат

$$(x^\lambda, y^i, p_i^\lambda),$$
$$p'^\lambda_i = \frac{\partial y^j}{\partial y'^i}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\det\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\right)p^\mu_j. \tag{2.32}$$

Всякий лагранжиан L (2.1) на многообразии струй J^1Y расслоения Y задает послойный морфизм

$$\widehat{L}: J^1Y \underset{Y}{\longrightarrow} \Pi,$$
$$p^\mu_i \circ \widehat{L} = \pi^\mu_i, \tag{2.33}$$

над Y конфигурационного пространства в расслоение Π. Этот морфизм выглядит как естественное n-мерное обобщение известного преобразования в механике от скоростей к импульсам. Поэтому многообразие Π (2.31) является естественным претендентом на роль конечномерного *фазового пространства* в теории поля. Оно называется *многообразием Лежандра*, расслоение

$$\pi_{\Pi Y}: \Pi \to Y$$

именуется соответственно *расслоением Лежандра* над Y, а послойный морфизм (2.33) — *отображением Лежандра* из конфигурационного в фазовое пространство.

Будем использовать символ q для обозначения элементов многообразия Лежандра Π и станем называть координаты (2.32) на нем *каноническими координатами*.

В качестве фазового пространства многообразие Лежандра Π (2.31) наделяется так называемой *полисимплектической структурой*, и многоимпульсный гамильтонов формализм на этом многообразии строится подобно гамильтонову формализму на симплектических многообразиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.1. *Обобщенной формой Лиувилля* на расслоении Лежандра $\Pi \to Y$ называется векторнозначная горизонтальная форма

$$\theta = -p_i^\lambda dy^i \wedge \omega \otimes \partial_\lambda, \tag{2.34}$$

отвечающая каноническому послойному мономорфизму

$$\theta : \Pi \underset{Y}{\hookrightarrow} \bigwedge^{n+1} T^*Y \underset{Y}{\otimes} TX.$$

□

Подчеркнем, что форма θ (2.34) не является тангенциально-значной и к ней нельзя прямо применить операцию (F-N)-дифференцирования, чтобы получить соответствующую полисимплектическую форму. Поэтому мы дадим независимое определение полисимплектической формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.2. *Полисимплектической формой* на многообразии Лежандра Π называется векторнозначная форма, которая во всяком атласе канонических координат (2.32) на Π дается выражением

$$\Omega = dp_i^\lambda \wedge dy^i \wedge \omega \otimes \partial_\lambda. \tag{2.35}$$

□

Хотя можно установить и прямую связь полисимплектической формы (2.35) с обобщенной формой Лиувилля (2.34), мы здесь ограничимся следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.3. Для всякой внешней 1-формы ϕ на X и индуцированной из нее внешней горизонтальной 1-формы ϕ на расслоении $\Pi \to X$, полисимплектическая форма (2.35) и обобщенная форма Лиувилля (2.34) удовлетворяют соотношениям

$$d(\Omega \lrcorner \phi) = 0,$$
$$\Omega \lrcorner \phi = -d(\theta \lrcorner \phi).$$

□

Многообразие Лежандра, наделенное обобщенной формой Лиувилля (2.34) и полисимплектической формой (2.35), называется *полисимплектическим многообразием*. Легко видеть, что при $\dim X = 1$ формы (2.34) и (2.35) сводятся соответственно к канонической форме Лиувилля (1.41) и к канонической симплектической форме из Примера 1.4.6. Случай $n = 1$ механики является однако весьма специфичным. Поэтому в дальнейшем в теории поля мы будем полагать $n > 1$.

Одним из ключевых объектов при построении гамильтонова формализма на симплектических многообразиях являются, как известно, гамильтоновы векторные поля на симплектическом многообразии. В гамильтоновом формализме на полисимплектическом многообразии Π аналогичную роль играют так называемые гамильтоновы связности.

Рассмотрим многообразие струй $J^1\Pi$ расслоения $\Pi \to X$ с координатами

$$(x^\lambda, y^i, p_i^\lambda, y^i_{(\mu)}, p^\lambda_{i\mu}).$$

Струйным продолжением проекции $\pi_{\Pi Y} : \Pi \to Y$ является сюръекция

$$J^1\pi_{\Pi Y} : J^1\Pi \to J^1Y,$$
$$y^i_\mu \circ J^1\pi_{\Pi Y} = y^i_{(\mu)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.4. Говорят, что связность

$$\gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \gamma^i_{(\lambda)}\partial_i + \gamma^\mu_{i\lambda}\partial^i_\mu)$$

на расслоении $\Pi \to X$ является *гамильтоновой связностью*, если внешняя форма

$$\gamma \rfloor \Omega = dp_i^\lambda \wedge dy^i \wedge \omega_\lambda + \gamma^\lambda_{i\lambda} dy^i \wedge \omega - \gamma^i_{(\lambda)} dp_i^\lambda \wedge \omega$$

на Π точная. □

Приведем следующий важный случай гамильтоновых связностей.

ПРИМЕР 2.3.1. Можно показать, что всякая связность Γ на расслоении $Y \to X$ поднимается до связности

$$\widetilde{\Gamma} = dx^\lambda \otimes \left[\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda(y)\partial_i + \left(-\partial_j\Gamma^i_\lambda(y)p^\mu_i - K^\mu{}_{\nu\lambda}(x)p^\nu_j + K^\alpha{}_{\alpha\lambda}(x)p^\mu_j\right)\partial^j_\mu\right]$$

на расслоении $\Pi \to X$, где K — некоторая симметричная линейная связность (1.70) на расслоениях TX и T^*X. Рассмотрим векторнозначную форму

$$\widehat{\Gamma} := \Gamma \circ \pi_{\Pi Y} : \Pi \to Y \to J^1Y,$$
$$\widehat{\Gamma} = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda \partial_i), \tag{2.36}$$

на расслоении Лежандра $\Pi \to Y$, индуцированную из формы Γ (1.66). Имеет место соотношение

$$\widetilde{\Gamma} \rfloor \Omega = d(\widehat{\Gamma} \rfloor \theta), \tag{2.37}$$

из которого следует, что $\widetilde{\Gamma}$ — гамильтонова связность. □

Этот пример показывает, что гамильтоновы связности всегда существуют. Более того, всякой связности на расслоении $Y \to X$ соответствует некоторая гамильтонова связность на расслоении $\Pi \to X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.5. Внешняя n-форма H на полисимплектическом многообразии Π называется *гамильтонианом*, если существует гамильтонова связность, удовлетворяющая уравнению

$$\gamma \rfloor \Omega = dH. \tag{2.38}$$

□

ПРИМЕР 2.3.2. Продолжая Пример 2.3.1 и сравнивая уравнение (2.37) с уравнением (2.38), получаем, что всякой связности Γ на расслоении $Y \to X$ соответствует гамильтониан

$$H_\Gamma = \widehat{\Gamma} \rfloor \theta = p_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - p_i^\lambda \Gamma^i_\lambda(y)\omega \tag{2.39}$$

на многообразии Лежандра Π. □

Имея гамильтонианы (2.39), можно охарактеризовать все множество гамильтонианов на многообразии Лежандра, если опираться на следующий факт.

ТЕОРЕМА 2.3.6. Пусть H — гамильтониан. Для всякой внешней горизонтальной плотности

$$\widetilde{H} = \widetilde{\mathscr{H}}\omega \tag{2.40}$$

на расслоении $\Pi \to X$ форма $H - \widetilde{H}$ тоже является гамильтонианом. Обратно, если H и H' — гамильтонианы, их разность $H - H'$ является внешней горизонтальной плотностью типа (2.40). □

Из Теоремы 2.3.6 следует, что гамильтонианы на многообразии Лежандра образуют аффинное пространство, моделируемое над линейным пространством горизонтальных плотностей (2.40). Отсюда всякий гамильтониан можно представить в виде

$$H = H_\Gamma - \widetilde{H}_\Gamma = p_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - p_i^\lambda \Gamma_\lambda^i \omega - \widetilde{\mathscr{H}}_\Gamma \omega = p_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - \mathscr{H}\omega, \tag{2.41}$$

где Γ — некоторая связность на расслоении $Y \to X$. Если выбрать другую связность $\Gamma' = \Gamma + \sigma$, где σ — некоторая припаивающая форма на Y, то получим простое соотношение

$$\widetilde{H}_{\Gamma'} = \widetilde{H}_\Gamma - p_i^\lambda \sigma_\lambda^i \omega.$$

Выражение (2.41) сохраняет свой вид при всех преобразованиях канонических координат. Поэтому в приложениях его можно использовать как определение гамильтониана на многообразии Лежандра. К тому же, как будет показано ниже, всякий гамильтониан сам определяет некоторую связность на расслоении $Y \to X$, подставляя которую в выражение (2.41), мы получим его каноническое разбиение.

Будем называть *импульсным морфизмом* любое послойное отображение над Y фазового пространства в конфигурационное пространство:

$$\Phi : \Pi \underset{Y}{\longrightarrow} J^1 Y,$$
$$y_\lambda^i \circ \Phi = \Phi_\lambda^i(q), \qquad q \in \Pi. \tag{2.42}$$

В композиции с мономорфизмом (1.50) импульсный морфизм (2.42) можно представить векторнозначной 1-формой

$$\Phi = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Phi_\lambda^i(q)\partial_i) \tag{2.43}$$

на расслоении Лежандра $\Pi \to Y$.

ПРИМЕР 2.3.3. Связность Γ на расслоении Y индуцирует импульсный морфизм $\widehat{\Gamma}$ (2.36). Обратно, всякий импульсный морфизм Φ (2.42) задает связность

$$\Gamma_\Phi = \Phi \circ \widehat{0}$$

на расслоении $Y \to X$, где $\widehat{0}$ — всюду нулевое глобальное сечение расслоения Лежандра $\Pi \to Y$. В частности, легко убедиться, что

$$\Gamma_{\widehat{\Gamma}} = \Gamma.$$

□

Подобно тому, как всякий лагранжиан индуцирует отображение Лежандра $J^1Y \to \Pi$, каждый гамильтониан H (2.41) определяет импульсный морфизм

$$\widehat{H} : \Pi \to J^1Y,$$
$$y^i_\lambda \circ \widehat{H} = \partial^i_\lambda \mathscr{H}, \tag{2.44}$$

а также связность

$$\Gamma_H = \widehat{H} \circ \widehat{0}$$

на расслоении $Y \to X$. Например, для гамильтониана H_Γ (2.39) находим

$$\Gamma_{H_\Gamma} = \Gamma.$$

Справедливо и обратное утверждение. Всякий импульсный морфизм (2.42), представленный векторнозначной формой (2.43) на многообразии Лежандра Π, порождает соответствующий гамильтониан

$$H_\Phi = \Phi \rfloor \theta = H_{\Gamma_\Phi} - \widetilde{H}_\Phi = p^\lambda_i dy^i \wedge \omega_\lambda - p^\lambda_i \Phi^i_\lambda(q)\omega. \tag{2.45}$$

В частности, гамильтониан H_Γ (2.39) является гамильтонианом типа (2.45), порождаемым импульсным морфизмом $\widehat{\Gamma}$ (2.36). Обратно, если гамильтониан H удовлетворяет соотношению

$$H_{\widehat{H}} = H,$$

то это — гамильтониан типа H_Γ для некоторой связности Γ на Y.

Пусть H — произвольный гамильтониан и Γ_H — индуцируемая им связность на расслоении $Y \to X$. Подставляя ее в выражение (2.41), мы получаем упоминавшееся выше *каноническое разбиение*

$$H = H_{\Gamma_H} - \widetilde{H}.$$

гамильтониана H.

Заметим, что в механике гамильтонианы не имеют какого-либо канонического вида. Это вызвано тем, что семейство *канонических преобразований* при $n = 1$ гораздо богаче, чем при $n > 1$, когда они ограничиваются в основном преобразованиями (2.32) и, что самое главное, новые канонические координаты y'^i не могут выражаться через старые импульсы p^μ_i.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений Гамильтона. Ими по сути дела являются уравнения (2.38). Они представляют собой условия на ядро *оператора Гамильтона* для данного гамильтониана H. Это дифференциальный оператор первого порядка

$$\mathscr{E}_H : J^1\Pi \to \bigwedge^{n+1} T^*\Pi,$$
$$\mathscr{E}_H = \left[\left(y^i_{(\lambda)} - \partial^i_\lambda \mathscr{H}\right) dp^\lambda_i - \left(p^\lambda_{i\lambda} + \partial_i \mathscr{H}\right) dy^i\right] \wedge \omega, \tag{2.46}$$

на расслоении $\Pi \to X$. Для всякой связности

$$\gamma = dx^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda + \gamma^i_{(\lambda)}\partial_i + \gamma^\mu_{i\lambda}\partial^i_\mu\right)$$

на расслоении $\Pi \to X$ справедливо равенство

$$\mathscr{E}_H \circ \gamma = dH - \gamma \rfloor \Omega.$$

Из него следует, что связность γ является гамильтоновой связностью для гамильтониана H как раз тогда и только тогда, когда она принимает значения в ядре $\operatorname{Ker}\mathscr{E}_H$ оператора Гамильтона (2.46), т. е. удовлетворяет системе *алгебраических уравнений Гамильтона*

$$\gamma^i_{(\lambda)} = \partial^i_\lambda \mathscr{H}, \tag{2.47a}$$

$$\gamma^\lambda_{i\lambda} = -\partial_i \mathscr{H}. \tag{2.47b}$$

Легко видеть, что эти уравнения в силу своей структуры всегда имеют решение, но, поскольку число неизвестных в этих уравнениях больше числа самих уравнений, их решение не единственно. Это означает, что, в отличие от механики, существуют разные гамильтоновы связности для одного и того же гамильтониана H и можно даже установить их общую форму. В силу уравнения (2.47a) все они удовлетворяют соотношению

$$J^1\pi_{\Pi Y} \circ \gamma = \widehat{H}$$

и имеют вид

$$\gamma = dx^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda + \partial^i_\lambda \mathscr{H}\, \partial_i + \gamma^\mu_{i\lambda}\partial^i_\mu\right).$$

Как и в случае уравнений Эйлера—Лагранжа, перейдем теперь от алгебраических к дифференциальным уравнениям Гамильтона. Пусть r — сечение расслоения $\Pi \to X$ такое, что его струйное продолжение $J^1 r$ принимает значения в ядре оператора Гамильтона (2.46). Тогда это сечение удовлетворяет системе *дифференциальных уравнений Гамильтона* первого порядка

$$\partial_\lambda r^i = \partial^i_\lambda \mathscr{H}, \tag{2.48a}$$

$$\partial_\lambda r^\lambda_i = -\partial_i \mathscr{H}, \tag{2.48b}$$

получаемых из алгебраических уравнений Гамильтона (2.47a) и (2.47b).

Уравнения Гамильтона (2.48a) и (2.48b) выглядят как естественное n-мерное обобщение обычных уравнений Гамильтона. Действительно, если $X = \mathbb{R}$, многоимпульсный гамильтонов формализм сводится к обычному гамильтонову формализму в механике. В этом случае расслоение Y тривиально и имеют место изоморфизмы

$$Y = \mathbb{R} \times F, \tag{2.49}$$

$$\Pi = \mathbb{R} \times T^*F, \tag{2.50}$$

где F — некоторое многообразие. Координатами на Y и Π являются (t, y^i) и $(t, y^i, p_i = \dot{y}_i)$.

Обобщенная форма Лиувилля (2.34) и полисимплектическая форма (2.35) на многообразии Лежандра Π (2.50) сводятся к формам

$$\theta = -\dot{y}_i dy^i,$$

$$\Omega = d\dot{y}_i \wedge dy^i,$$

индуцированными на Π соответственно из *канонической формы Лиувилля* и *канонической симплектической формы* на кокасательном расслоении T^*F. Пусть Γ_0 — тривиальная связность на расслоении Y, отвечающая расщеплению (2.49). Тогда всякий гамильтониан на многообразии Лежандра Π (2.50) дается выражением

$$H = H_{\Gamma_0} - \widetilde{H} = \dot{y}_i dy^i - \widetilde{\mathscr{H}_0} dt. \tag{2.51}$$

Соответствующие алгебраические уравнения Гамильтона (2.47a) и (2.47b) сводятся к известным уравнениям Гамильтона

$$u^i = \partial^i \widetilde{\mathscr{H}_0},$$
$$u_i = -\partial_i \widetilde{\mathscr{H}_0}$$

для *гамильтонова векторного поля*

$$u = u^i \partial_i + u_i \partial^i,$$

задаваемого *функцией Гамильтона* $\widetilde{\mathscr{H}_0}$ на $\mathbb{R} \times T^*F$. В частности, имеет место взаимно однозначное соответствие между гамильтоновыми векторными полями u и гамильтоновыми связностями γ на $\mathbb{R} \times T^*F$. Оно дается соотношением

$$\gamma = dt \otimes (\partial_t + u).$$

Заметим, что, в отличие от уравнений Гамильтона в механике, уравнения Гамильтона (2.48a) и (2.48b) в теории поля описывают так называемую обобщенную гамильтонову динамику, когда динамика системы не сводится к эволюции во времени, задаваемой скобками Пуассона.

§ 4. Системы со связями

Рассмотрим связь между лагранжевым и многоимпульсным гамильтоновым формализмами в наиболее интересной для приложений ситуации вырожденных лагранжианов. К этому случаю относятся почти все сколько-нибудь интересные полевые модели.

Пусть дано расслоение $Y \to X$. Пусть H — гамильтониан (2.41) на многообразии Лежандра Π (2.31) и L — лагранжиан (2.1) на многообразии струй J^1Y. Пусть $\widehat{H}$ — соответствующий импульсный морфизм (2.44), а $\widehat{L}$ — отображение Лежандра (2.33). Приведем полезные координатные выражения для их струйных продолжений $J^1\widehat{L}$ и $J^1\widehat{H}$:

$$(y^i_\mu,\, y^i_{(\mu)}, y^i_{\mu\lambda}) \circ J^1\widehat{H} = (\partial^i_\mu \mathscr{H},\, y^i_{(\mu)}, \widehat{\partial}_\lambda \partial^i_\mu \mathscr{H}),$$
$$\widehat{\partial}_\lambda = \partial_\lambda + y^j_{(\lambda)}\partial_j + p^\nu_{j\lambda}\partial^j_\nu,$$
$$(p^\lambda_i,\, y^i_{(\mu)}, p^\lambda_{i\mu}) \circ J^1\widehat{L} = (\pi^\lambda_i,\, y^i_{(\mu)}, \widehat{\partial}_\mu \pi^\lambda_i),$$
$$\widehat{\partial}_\lambda = \partial_\lambda + y^j_{(\lambda)}\partial_j + y^j_{\mu\lambda}\partial^\mu_j.$$

Существенно также, что, если γ — гамильтонова связность для гамильтониана H, то композиция $J^1\widehat{H} \circ \gamma$ принимает значения в полуголономном подмногообразии струй $\widehat{J}^2Y$:

$$(y^i_\mu,\, y^i_{(\mu)}) \circ J^1\widehat{H} \circ \gamma = (\partial^i_\mu \mathscr{H},\, \partial^i_\mu \mathscr{H}).$$

Чтобы прийти к понятию ассоциированных лагранжевых и гамильтоновых систем, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\widehat{H}} & J^1Y \\ {\scriptstyle \widehat{L}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{L}} \\ J^1Y & \xleftarrow{\widehat{H}} & \Pi \end{array}$$

Как мы увидим ниже, когда отображение Лежандра $\widehat{L}$ — диффеоморфизм, для лагранжевой системы существует единственная эквивалентная гамильтонова система такая, что соответствующий импульсный морфизм является обратным диффеоморфизмом $\widehat{H} = \widehat{L}^{-1}$. Отсюда следует, что, если отображение Лежандра регулярно (т. е. является локальным диффеоморфизмом) в некоторой точке конфигурационного пространства J^1Y, соответствующая лагранжева система, ограниченная на некоторую открытую окрестность этой точки, допускает эквивалентную гамильтонову систему. Для сохранения этой локальной эквивалентности в общем случае вырожденных лагранжевых систем, следует потребовать, чтобы для ассоциированных лагранжевых и гамильтоновых систем образ конфигурационного пространства J^1Y при отображении Лежандра $\widehat{L}$ содержал все точки фазового пространства, в которых импульсный морфизм $\widehat{H}$ регулярен.

Определение 2.4.1. Пусть задан лагранжиан L на многообразии струй J^1Y расслоения $Y \to X$. Будем говорить, что гамильтониан H на расслоении Лежандра Π над Y является *ассоциированным* с L, если H удовлетворяет условиям

$$\widehat{L} \circ \widehat{H} \,|_Q = \mathrm{Id}_Q, \tag{2.52a}$$

$$H = H_{\widehat{H}} + L \circ \widehat{H}, \tag{2.52b}$$

где

$$Q = \widehat{L}(J^1Y) \tag{2.53}$$

— образ конфигурационного пространства J^1Y в фазовом пространстве Π при отображении Лежандра. □

В координатах условия (2.52a) и (2.52b) принимают вид

$$p_i^\mu = \partial_i^\mu \mathscr{L}(x^\mu, y^i, \partial_\lambda^j \mathscr{H}),$$
$$\mathscr{H} = p_i^\mu \partial_\mu^i \mathscr{H} - \mathscr{L}(x^\mu, y^i, \partial_\lambda^j \mathscr{H}).$$

Причем последнее из них выглядит как естественное n-мерное обобщение известного выражения для функции Гамильтона через функцию Лагранжа в механике.

По аналогии с механикой назовем Q (2.53) *пространством связей*. Можно убедиться, что в силу условия (2.52b) импульсный морфизм $\widehat{H}$ не является регулярным вне пространства связей Q, что и требовалось от ассоциированных лагранжевых и гамильтоновых систем. Кроме того, как это будет показано ниже, все решения уравнений Гамильтона, имеющие своими аналогами решения уравнений Эйлера—Лагранжа, принадлежат пространству лагранжевых связей.

Подчеркнем, что с одним и тем же лагранжианом могут быть ассоциированы разные гамильтонианы. Однако возможны случаи, когда ассоциированные гамильтонианы, определенные на всем фазовом пространстве Φ, вообще не существуют.

Пример 2.4.1. Все гамильтонианы H_Γ (2.39) ассоциированы с нулевым лагранжианом $L = 0$. В этом случае пространство связей совпадает с образом $Q = \widehat{0}(Y)$ канонического нулевого сечения $\widehat{0}$ расслоения Лежандра $\Pi \to Y$. Условие (2.52a) сводится к тривиальному тождеству $0 = 0$, и гамильтонианы H_Γ удовлетворяют условию (2.52b), которое принимает вид

$$\mathscr{H} = p_i^\mu \partial_\mu^i \mathscr{H}.$$

□

Пример 2.4.2. Пусть Y — расслоение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, параметризуемое координатами (x^1, x^2, y). Многообразие струй J^1Y и расслоение Лежандра Π над Y имеют соответственно координаты (x^1, x^2, y, y_1, y_2) и (x^1, x^2, y, p^1, p^2). Выберем лагранжиан

$$L = \left[\exp y_1 + \frac{1}{2}(y_2)^2\right]\omega.$$

Соответствующее отображение Лежандра

$$p^1 \circ \widehat{L} = \exp y_1,$$
$$p^2 \circ \widehat{L} = y_2,$$

является локальным диффеоморфизмом, но не диффеоморфизмом. Пространство связей Q задается координатным соотношением $p^1 > 0$ и является открытым подмногообразием многообразия Лежандра. На Q существует единственный ассоциированный с L гамильтониан

$$H = p^\lambda dy \wedge \omega_\lambda - \mathscr{H}\omega,$$
$$\mathscr{H} = p^1(\ln p^1 - 1) + \frac{1}{2}(p^2)^2$$

который однако нельзя продолжить на все многообразие Лежандра Π. □

Посмотрим, что есть общего у гамильтонианов, ассоциированных с одним и тем же лагранжианом L. Всякий такой гамильтониан удовлетворяет соотношениям

$$H|_Q = \Xi_L \circ \widehat{H}|_Q, \tag{2.54}$$
$$\partial_i \mathscr{H} = -\partial_i \mathscr{L} \circ \widehat{H}, \tag{2.55}$$

где Ξ_L — форма Пуанкаре—Картана (2.3). В частности, равенство (2.54) означает, что каждый ассоциированный с L гамильтониан H совпадает на пространстве связей Q с формой, индуцированной из формы Пуанкаре—Картана посредством импульсного морфизма $\widehat{H}$, хотя разные такие гамильтонианы в общем случае отличаются друг от друга даже на Q.

Можно предложить следующий способ построения гамильтонианов, ассоциированных с данным лагранжианом L. Пусть Φ — импульсный морфизм. Построим гамильтониан

$$H_{L\Phi} = H_\Phi + L \circ \Phi, \tag{2.56}$$

где H_Φ — гамильтониан (2.45). Если импульсный морфизм Φ удовлетворяет соотношениям

$$\widehat{L} \circ \Phi|_Q = \mathrm{Id}_Q, \tag{2.57}$$
$$\widehat{H}_{L\Phi} = \Phi, \tag{2.58}$$

то легко убедиться, что гамильтониан (2.56) ассоциирован с L.

Покажем теперь, что многоимпульсный гамильтонов формализм действительно является естественным партнером лагранжева формализма в теории поля и что введенное выше понятие ассоциированных гамильтоновых систем имеет реальный смысл. Рассмотрим для этого случай, когда лагранжиан L регулярен во всех точках конфигурационного пространства J^1Y. Более того, говоря о регулярном лагранжиане, будем в дальнейшем

считать, что соответствующее отображение Лежандра $\widehat{L}$ — это диффеоморфизм, а не только локальный диффеоморфизм, поскольку с последним могут быть связаны трудности, проиллюстрированные в Примере 2.4.2.

Если лагранжиан L регулярен, всегда существует единственный ассоциированный с ним гамильтониан

$$H = H_{\widehat{L}^{-1}} + L \circ \widehat{L}^{-1}.$$

При этом выполняются соотношения

$$\Xi_L = H \circ \widehat{L}. \tag{2.59}$$

$$\Lambda_L = \mathscr{E}_H \circ J^1\widehat{L}, \tag{2.60}$$

$$\mathscr{E}_H = \Lambda_L \circ J^1\widehat{H}, \tag{2.61}$$

где $\mathscr{E}_H$ — оператор Гамильтона (2.46) и Λ_L — производящая форма (2.5).

Глядя на выражения (2.54) и (2.59), можно сделать заключение, что именно форма Пуанкаре—Картана Ξ_L является лагранжевым аналогом ассоциированных с L гамильтонианов, тогда как лагранжевым партнером оператора Гамильтона оказывается производящая форма Λ_L (2.5). Ограничение этой формы на полуголономное многообразие струй $\widehat{J}^2Y$ представляет собой по определению оператор Эйлера—Лагранжа первого порядка $\mathscr{E}'_L$. А поскольку в случае, когда γ — гамильтонова связность для H, композиция $J^1\widehat{H} \circ \gamma$ принимает значения в $\widehat{J}^2Y$, то из соотношения (2.61) следует, что она принимает значения в ядре оператора $\mathscr{E}'_L$ и $J^1\widehat{H} \circ \gamma \circ \widehat{L}$ — лагранжева связность для L.

Это важный результат, из которого вытекает, что **для регулярного лагранжиана L и ассоциированного с ним гамильтониана H соответствующие уравнения Эйлера—Лагранжа первого порядка (2.8a)—(2.8b) и уравнения Гамильтона (2.48a)—(2.48b) эквивалентны.**

Перейдем теперь к рассмотрению вырожденных лагранжевых систем, ограничившись классом *полурегулярных* (semiregular) лагранжианов L, когда прообраз $\widehat{L}^{-1}(q)$ всякой точки q пространства связей $\widehat{L}(J^1Y)$ является связным подмногообразием конфигурационного пространства J^1Y. Основанием для нашего выбора является то, что такие лагранжианы с одной стороны исчерпывают все сколько-нибудь разумные лагранжианы полевых моделей, а с другой стороны, позволяют установить достаточно полные соотношения между решениями уравнений Эйлера—Лагранжа и решениями уравнений Гамильтона для ассоциированных лагранжевых и гамильтоновых систем.

Пусть L — полурегулярный лагранжиан. Ключевым является следующее утверждение.

Предложение 2.4.2. Все гамильтонианы, ассоциированные с полурегулярным лагранжианом L совпадают на пространстве связей Q. Более того, форма Пуанкаре—Картана Ξ_L (2.3) для L совпадает с формой, индуцированной из каждого такого гамильтониана H посредством отображения Лежандра $\widehat{L}$, т. е. имеет место соотношение

$$\Xi_L = H \circ \widehat{L},$$

$$\pi_i^\lambda y_\lambda^i - \mathscr{L} = \mathscr{H}(x^\mu, y^i, \pi_i^\lambda). \tag{2.62}$$

□

Пример 2.4.3. Пусть Y — расслоение из Примера 2.4.2. Выберем полурегулярный лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}(y_1)^2\omega. \tag{2.63}$$

Соответствующее отображение Лежандра имеет вид

$$p^1 \circ \widehat{L} = y_1,$$
$$p^2 \circ \widehat{L} = 0,$$

и пространство связей Q состоит из точек с координатами $p^2 = 0$. Для гамильтонианов, ассоциированных с лагранжианом (2.63), имеет место общее выражение

$$H = p^\lambda dy \wedge \omega_\lambda - \left[\frac{1}{2}(p^1)^2 + c(x^1, x^2, y)p^2\right]\omega,$$

где c — произвольные функции координат x^1, x^2 и y. □

Соотношение (2.62) из Предложения 2.4.2 в некотором смысле дополняет условие (2.52b) из Определения 2.4.1. Оно приводит к тождеству

$$\left(y^i_\lambda - \partial^i_\lambda \mathscr{H} \circ \widehat{L}\right) d\pi^\lambda_i \wedge \omega - \left(\partial_i \mathscr{L} + \partial_i \mathscr{H} \circ \widehat{L}\right) dy^i \wedge \omega = 0,$$

опираясь на которое можно воспроизвести в случае полурегулярных лагранжианов соотношение (2.60):

$$\Lambda_L = \mathscr{E}_H \circ J^1\widehat{L},$$

но не соотношение (2.61). Поэтому для полурегулярных лагранжианов нет полной эквивалентности между решениями уравнений Эйлера—Лагранжа и решениями уравнений Гамильтона, и связь между ними устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2.4.3. Пусть дан полурегулярный лагранжиан L на многообразии струй J^1Y расслоения $Y \to X$ и Π — расслоение Лежандра над Y.

(i) Если сечение r расслоения $\Pi \to X$ является решением уравнений Гамильтона (2.48a) и (2.48b) для некоторого гамильтониана H, ассоциированного с L, и принадлежит пространству связей Q (2.53), то сечение

$$\overline{s} = \widehat{H} \circ r = J^1(\pi_{\Pi Y} \circ r)$$

расслоения $J^1Y \to X$ удовлетворяет уравнениям Эйлера—Лагранжа первого порядка (2.8a) и (2.8b), а $s = \pi_{\Pi Y} \circ r$ — уравнениям Эйлера—Лагранжа второго порядка.

(ii) Обратно, пусть сечение $\overline{s}$ расслоения $J^1Y \to X$ является решением уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка (2.8a) и (2.8b) для L. Пусть H — ассоциированный с L гамильтониан такой, что соответствующий импульсный морфизм $\widehat{H}$ удовлетворяет условию

$$\widehat{H} \circ \widehat{L} \circ \overline{s} = \overline{s}. \tag{2.64}$$

Тогда сечение

$$r = \widehat{L} \circ \overline{s}$$

расслоения $\Pi \to X$ является решением уравнений Гамильтона (2.48a) и (2.48b) для H. Очевидно, что оно принадлежит пространству связей Q. □

Теорема 2.4.3 показывает, что, если гамильтониан H ассоциирован с полурегулярным лагранжианом L, всякое решение уравнений Гамильтона, лежащее в пространстве связей, порождает решение уравнений Эйлера—Лагранжа. В то же время, чтобы исчерпать все решения уравнений Эйлера—Лагранжа необходимо рассмотреть некоторое

семейство ассоциированных с L гамильтонианов. Назовем такое семейство гамильтонианов *полным*, если для любого решения $\bar{s}$ уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка (2.8a) и (2.8b), существует решение r уравнений Гамильтона (2.48a) и (2.48b) для некоторого гамильтониана H из этого семейства такое, что

$$r = \widehat{L} \circ \bar{s},$$
$$\bar{s} = \widehat{H} \circ r = J^1(\pi_{\Pi Y} \circ r). \tag{2.65}$$

Согласно Теореме 2.4.3, семейство гамильтонианов, ассоциированных с данным полурегулярным лагранжианом, является полным тогда и только тогда, когда для всякого решения $\bar{s}$ уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка существует гамильтониан из этого семейства такой, что выполняется равенство (2.64).

В полевых моделях с лагранжианами, квадратичными или аффинными по координатам скоростей, полные семейства ассоциированных гамильтонианов всегда существуют. Следующий пример показывает, что подобное семейство может существовать, когда лагранжиан даже не является полурегулярным.

Пример 2.4.4. Пусть Y — расслоение из Примера 2.4.2. Зададим лагранжиан

$$L = \left[\frac{1}{3}(y_1)^3 + \frac{1}{2}(y_2)^2\right]\omega.$$

Соответствующее отображение Лежандра имеет вид

$$p^1 \circ \widehat{L} = (y_1)^2, \tag{2.66}$$
$$p^2 \circ \widehat{L} = y_2,$$

и пространство связей Q задается координатным условием $p^1 \geqslant 0$. Оно не является даже подмногообразием Π. Рассмотрим два ассоциированных с L гамильтониана

$$H_+ = p^\lambda dy \wedge \omega_\lambda - \left[\frac{2}{3}(p^1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(p^2)^2\right]\omega,$$
$$H_- = p^\lambda dy \wedge \omega_\lambda - \left[-\frac{2}{3}(p^1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(p^2)^2\right]\omega$$

на Q, которые отвечают двум разным решениям

$$y_1 = \sqrt{p^1}, \qquad y_1 = -\sqrt{p^1}$$

уравнения (2.66). Легко видеть, что они образуют полное семейство. □

Исследуем теперь общий случай вырожденных квадратичных лагранжианов. Удается провести полный гамильтонов анализ таких динамических систем, что особенно важно для физических приложений.

Пусть дано расслоение $Y \to X$ и соответствующие конфигурационное и фазовое пространства. Рассмотрим квадратичный лагранжиан

$$L = \left[\frac{1}{2}a_{ij}^{\lambda\mu}(y)y_\lambda^i y_\mu^j + b_i^\lambda(y)y_\lambda^i + c(y)\right]\omega, \tag{2.67}$$

где a, b и c — локальные вещественные функции на Y. Соответствующее преобразование Лежандра имеет вид

$$p_i^\lambda \circ \widehat{L} = a_{ij}^{\lambda\mu} y_\mu^j + b_i^\lambda, \tag{2.68}$$

и нетрудно показать, что лагранжиан (2.67) является полурегулярным. Предположим, что пространство связей Q содержит образ $\widehat{0}(Y)$ глобального нулевого сечения расслоения $\Pi \to Y$.

Отображение Лежандра (2.68) является аффинным морфизмом над Y. Оно индуцирует соответствующий линейный морфизм

$$\overline{L} : T^*X \underset{Y}{\otimes} VY \to \Pi,$$
$$p_i^\lambda \circ \overline{L} = a_{ij}^{\lambda\mu} \overline{y}_\mu^j,$$

где $\overline{y}_\mu^j$ — координаты векторного расслоения (1.48).

Рассмотрим ядро

$$\operatorname{Ker} \widehat{L} = \widehat{L}^{-1}(\widehat{0}(Y))$$

отображения Лежандра (2.68). Это аффинное подрасслоение расслоения струй $J^1Y \to Y$. Поэтому всегда существует его глобальное сечение, т. е. связность Γ на расслоении $Y \to X$, принимающая значения в $\operatorname{Ker} \widehat{L}$:

$$\Gamma : Y \to \operatorname{Ker} \widehat{L}, \tag{2.69}$$
$$a_{ij}^{\lambda\mu} \Gamma_\mu^j + b_i^\lambda = 0. \tag{2.70}$$

Используя эту связность, лагранжиан (2.67) можно привести к виду

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} a_{ij}^{\lambda\mu} (y_\lambda^i - \Gamma_\lambda^i)(y_\mu^j - \Gamma_\mu^j) + c,$$

соответствующему факторизации (2.20).

Лемма 2.4.4. Найдется линейная векторнозначная горизонтальная 1-форма

$$\sigma : \Pi \to T^*X \underset{Y}{\otimes} VY, \tag{2.71}$$
$$\overline{y}_\lambda^i \circ \sigma = \sigma_{\lambda\mu}^{ij} p_j^\mu,$$

на расслоении Лежандра $\Pi \to Y$ такая, что

$$\overline{L} \circ \sigma|_Q = \mathrm{Id}_Q,$$
$$a_{ij}^{\lambda\mu} \sigma_{\mu\alpha}^{jk} a_{kb}^{\alpha\nu} = a_{jb}^{\lambda\nu}. \tag{2.72}$$

□

Заметим, что, если лагранжиан (2.67) регулярен, существует единственная связность (2.69), удовлетворяющая алгебраическим уравнениям (2.70), и единственная форма (2.71), удовлетворяющая алгебраическим уравнениям (2.72).

Связность (2.69) и форма (2.71) играют ключевую роль при гамильтоновом анализе квадратичных лагранжевых систем.

Во-первых, имеет место *расщепление конфигурационного пространства*

$$J^1Y = \operatorname{Ker} \widehat{L} \underset{Y}{\oplus} \operatorname{Im} \dot{\sigma}, \tag{2.73}$$

$$y^i_\lambda = \left[y^i_\lambda - \sigma^{ik}_{\lambda\alpha}\left(a^{\alpha\mu}_{kj}y^j_\mu + b^\alpha_k\right)\right] + \left[\sigma^{ik}_{\lambda\alpha}\left(a^{\alpha\mu}_{kj}y^j_\mu + b^\alpha_k\right)\right].$$

Кроме того существует форма σ (2.71) такая, что *расщепляется* также фазовое пространство

$$\Pi = \operatorname{Ker}\sigma \bigoplus_Y Q. \tag{2.74}$$

Во-вторых, при заданных σ (2.71) и Γ (2.69), рассмотрим импульсный морфизм

$$\begin{aligned}\Phi &= \widehat{\Gamma} + \sigma,\\ \Phi^i_\lambda &= \Gamma^i_\lambda(y) + \sigma^{ij}_{\lambda\mu}p^\mu_j.\end{aligned} \tag{2.75}$$

Он удовлетворяет уравнению (2.57) для отображения Лежандра $\widehat{L}$ (2.68). Обратно, всякий импульсный морфизм, подчиняющийся уравнению (2.57), дается выражением (2.75). Отсюда можно показать, что всякий гамильтониан

$$H = H_{L\Phi} = p^\lambda_i dy^i \wedge \omega_\lambda - \left[\Gamma^i_\lambda\left(p^\lambda_i - \frac{1}{2}b^\lambda_i\right) + \frac{1}{2}\sigma^{ij}_{\lambda\mu}p^\lambda_i p^\mu_j - c\right]\omega, \tag{2.76}$$

соответствующий согласно (2.56) импульсному морфизму Φ (2.75), является ассоциированным с лагранжианом (2.67). Более того, все такие гамильтонианы образуют полное семейство.

Действительно, рассмотрим в случае гамильтониана (2.76) уравнения Гамильтона (2.48а) для сечений r расслоения $\Pi \to X$. Они записываются в виде

$$J^1 s = (\widehat{\Gamma} + \sigma)\circ r, \qquad s = \pi_{\Pi Y}\circ r, \tag{2.77}$$

$$\partial_\lambda r^i = \Gamma^i_\lambda + \sigma^{ij}_{\lambda\mu}r^\mu_j.$$

С расщеплением (2.73) связаны сюръекции

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &:= \mathrm{pr}_1 : J^1Y \to \operatorname{Ker}\widehat{L},\\ \mathscr{S} &: y^i_\lambda \to y^i_\lambda - \sigma^{ik}_{\lambda\alpha}(a^{\alpha\mu}_{kj}y^j_\mu + b^\alpha_k),\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\mathscr{T} &:= \mathrm{pr}_2 : J^1Y \to \operatorname{Im}\sigma,\\ \mathscr{T} &= \sigma\circ\widehat{L} : y^i_\lambda \to \sigma^{ik}_{\lambda\alpha}(a^{\alpha\mu}_{kj}y^j_\mu + b^\alpha_k).\end{aligned}$$

Используя их, уравнения Гамильтона (2.77) можно разделить на две части

$$\begin{aligned}\mathscr{S}\circ J^1 s &= \Gamma\circ s,\\ \partial_\lambda r^i - \sigma^{ik}_{\lambda\alpha}(a^{\alpha\mu}_{kj}\partial_\mu r^j + b^\alpha_k) &= \Gamma^i_\lambda.\end{aligned} \tag{2.78}$$

и

$$\begin{aligned}\mathscr{T}\circ J^1 s &= \sigma\circ r,\\ \sigma^{ik}_{\lambda\alpha}(a^{\alpha\mu}_{kj}\partial_\mu r^j + b^\alpha_k) &= \sigma^{ik}_{\lambda\alpha}r^\alpha_k.\end{aligned} \tag{2.79}$$

При этом оказывается, что уравнения Гамильтона (2.78) не зависят от канонических импульсов r^α_k и имеют смысл своего рода *калибровочных условий*. Более того, для всякого сечения s расслоения $Y \to X$ существует связность Γ (2.69) такая, что выполняются

калибровочные условия (2.78). В этом случае импульсный морфизм (2.75) удовлетворяет уравнению (2.64):

$$\Phi \circ \widehat{L} \circ J^1 s = J^1 s.$$

Откуда следует, что гамильтонианы (2.76) действительно составляют полное семейство.

Интересно отметить, что гамильтонианы из этого семейства отличаются друг от друга только связностью Г (2.69), а уравнения Гамильтона — только калибровочными условиями (2.78).

Проиллюстрируем приведенную общую процедуру на примере ряда полевых моделей.

Калибровочные потенциалы

Фазовым пространством калибровочных потенциалов, лагранжевой теории которых был посвящен §2.2, является расслоение Лежандра

$$\Pi = \bigwedge^n T^*X \underset{C}{\otimes} TX \underset{C}{\otimes} [C \times \overline{C}]^*$$

над расслоением связностей C (1.89). Оно параметризуется каноническими координатами

$$(x^\lambda, k^m_\mu, p^{\mu\lambda}_m).$$

Расслоение Лежандра Π над C, подобно расслоению струй $J^1C \to C$, допускает каноническое расщепление

$$\Pi = \Pi_+ \underset{C}{\oplus} \Pi_-, \tag{2.80}$$

$$p^{\mu\lambda}_m = p^{(\mu\lambda)}_m + p^{[\mu\lambda]}_m = \frac{1}{2}(p^{\mu\lambda}_m + p^{\lambda\mu}_m) + \frac{1}{2}(p^{\mu\lambda}_m - p^{\lambda\mu}_m).$$

Отображение Лежандра, отвечающее лагранжиану Янга—Миллса (2.21), имеет вид

$$p^{(\mu\lambda)}_m \circ \widehat{L}_{YM} = 0, \tag{2.81a}$$

$$p^{[\mu\lambda]}_m \circ \widehat{L}_{YM} = \varepsilon^{-2} a^G_{mn} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} \mathcal{F}^n_{\alpha\beta} \sqrt{|g|}. \tag{2.81b}$$

Нетрудно заметить, что $\operatorname{Ker} \widehat{L}_{YM} = C_+$ и $Q = \Pi_-$. Отсюда следует, что расщепления (1.92) и (2.80) являются ни чем иным как расщеплениями (2.73) и (2.74). Поэтому для построения полного семейства гамильтонианов, ассоциированных с лагранжианом Янга—Миллса L_{YM} (2.21), можно следовать приведенной выше общей процедуре описания полевых систем с вырожденными квадратичными лагранжианами.

Рассмотрим в согласии с ней связности на расслоении C, которые принимают значения в $\operatorname{Ker} \widehat{L}$. Ими, например, являются связности S_B (1.95). Для всякой такой связности построим гамильтониан (2.76):

$$\begin{aligned} H_B &= p^{\mu\lambda}_m dk^m_\mu \wedge \omega_\lambda - p^{\mu\lambda}_m S_{B\,\mu\lambda}{}^m \omega - \widetilde{\mathcal{H}}_{YM}\omega, \\ \widetilde{\mathcal{H}}_{YM} &= \frac{\varepsilon^2}{4} a^{mn}_G g_{\mu\nu} g_{\lambda\beta} p^{[\mu\lambda]}_m p^{[\nu\beta]}_n |g|^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Он ассоциирован с лагранжианом L_{YM}. Соответствующими уравнениями Гамильтона являются

$$\partial_\lambda r^{\mu\lambda}_m = -c^n_{lm} r^l_\nu r^{[\mu\nu]}_n + c^n_{ml} B^l_\nu r^{(\mu\nu)}_n - K^\mu{}_{\lambda\nu} r^{(\lambda\nu)}_m, \tag{2.83}$$

$$\partial_\lambda r^m_\mu + \partial_\mu r^m_\lambda = 2 S_{B(\mu\lambda)}{}^m \tag{2.84}$$

и плюс уравнение (2.81b).

Уравнения Гамильтона (2.84) и (2.81b) аналогичны соответственно уравнениям (2.78) и (2.79). Уравнения Гамильтона (2.81b) и (2.83), ограниченные на пространство связей (2.81a), в точности совпадают с уравнениями Янга—Миллса для калибровочных потенциалов

$$A = \pi_{\Pi C} \circ r.$$

Разные гамильтонианы H_B и $H_{B'}$ приводят к разным уравнениям (2.84). Эти уравнения не зависят от канонических импульсов и представляют собой дополнительные калибровочные условия

$$S_B \circ A = \mathscr{S} \circ J^1 A$$

типа (2.78). Причем, для всякого решения A уравнений Янга—Миллса существует гамильтониан, например, $H_{B=A}$ такой, что выполняется соотношение (2.64):

$$\widehat{H}_B \circ \widehat{L}_{YM} \circ J^1 A = J^1 A.$$

Следовательно гамильтонианы H_B составляют полное семейство.

Электромагнитное поле

Рассмотрим особо электромагнитное поле из Примера 2.2.1 как простейший случай калибровочной теории, чтобы потом сравнить с ним модель полей Прока, лагранжиан которой вырожден, но не калибровочно инвариантен. Ограничимся для простоты случаем, когда X^4 — пространство Минковского с метрикой Минковского η.

Фазовым пространством электромагнитных потенциалов является расслоение Лежандра

$$\Pi = \left(\bigwedge^4 T^*X \otimes TX \otimes TX \right) \underset{X}{\times} T^*X$$

с координатами $(x^\lambda, k_\mu, p^{\mu\lambda})$. В этих координатах отображение Лежандра, отвечающее лагранжиану L_E (2.23), записывается в виде

$$p^{(\mu\lambda)} \circ \widehat{L}_E = 0, \tag{2.85a}$$

$$p^{[\mu\lambda]} \circ \widehat{L}_E = -\frac{1}{4\pi} \eta^{\lambda\alpha} \eta^{\mu\beta} \mathscr{F}_{\alpha\beta}. \tag{2.85b}$$

Как и в общем случае калибровочных полей, гамильтонианы

$$\begin{aligned} H_B &= p^{\mu\lambda} dk_\mu \wedge \omega_\lambda - p^{\mu\lambda} S_{B\mu\lambda} \omega - \widetilde{\mathscr{H}}_E \omega, \\ S_{B\mu\lambda} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu B_\lambda + \partial_\lambda B_\mu), \\ \widetilde{\mathscr{H}}_E &= -\pi \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\beta} p^{[\mu\lambda]} p^{[\nu\beta]}, \end{aligned} \tag{2.86}$$

параметризуемые электромагнитными потенциалами B, ассоциированы с лагранжианом электромагнитного поля (2.23) и составляют полное семейство.

Для данного гамильтониана H_B (2.86) соответствующими уравнениями Гамильтона являются

$$\partial_\lambda r^{\mu\lambda} = 0, \tag{2.87}$$

$$\partial_\lambda r_\mu + \partial_\mu r_\lambda = \partial_\lambda B_\mu + \partial_\mu B_\lambda \tag{2.88}$$

и плюс уравнение (2.85b). На пространстве связей (2.85a) уравнения (2.85b) и (2.87) сводятся к обычным уравнениям Максвелла без материальных источников. В то же время уравнение (2.88) не зависит от канонических импульсов и играет роль дополнительного калибровочного условия. Это калибровочное условие однако разнится от тех, что обычно используются в теории электромагнитного поля. Но, поскольку электромагнитные потенциалы, отличающиеся калибровочными преобразованиями, трактуются как физически эквивалентные, уравнение (2.88) можно заменить каким-либо условием, накладываемым на величину $\partial_\lambda r_\mu + \partial_\mu r_\lambda$. Например, таким путем можно воспроизвести условие лоренцевской калибровки

$$\eta^{\mu\lambda}\partial_\mu r_\lambda = 0.$$

Поле Прока

Модель полей Прока — это модель массивного электромагнитного поля, лагранжиан которого отличается от лагранжиана электромагнитного поля только массовым членом. Он вырожден, но не калибровочно инвариантен. Поэтому в этом случае заранее неясно, как получить калибровочные условия, дополняющие уравнения Эйлера—Лагранжа для поля Прока.

Пусть, как и в предыдущей модели, X — пространство Минковского.

Векторные *поля Прока* описываются сечением кокасательного расслоения $T^*X \to X$, тогда как электромагнитные потенциалы — сечениями аффинного расслоения, моделируемого над T^*X. *Конфигурационным пространством полей Прока* является аффинное расслоение струй

$$J^1T^*X \to T^*X,$$

моделируемое над векторным расслоением

$$\bigotimes^2 T^*X \times T^*X \to T^*X. \tag{2.89}$$

Координатами на нем являются

$$(x^\lambda, k_\mu, k_{\mu\lambda}),$$

где по аналогии с электромагнитным полем мы обозначили $k_\mu = \dot{x}_\mu$ обычные голономные координаты на T^*X.

Лагранжиан полей Прока на таком конфигурационном пространстве имеет вид

$$L_P = L_E - \frac{1}{8\pi} m^2 \eta^{\mu\lambda} k_\mu k_\lambda \omega. \tag{2.90}$$

Фазовым пространством полей Прока является многообразие Лежандра

$$\Pi = \bigwedge^4 T^*X \otimes TX \otimes TX \times T^*X$$

с каноническими координатами $(x^\lambda, k_\mu, p^{\mu\lambda})$. В этих координатах отображение Лежандра, определяемое лагранжианом (2.90), выглядит в точности как отображение Лежандра $\widehat{L}_E$:

$$p^{(\mu\lambda)} \circ \widehat{L}_P = 0, \tag{2.91a}$$

$$p^{[\mu\lambda]} \circ \widehat{L}_P = -\frac{1}{4\pi} \eta^{\lambda\alpha}\eta^{\mu\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}. \tag{2.91b}$$

Отсюда находим, что

$$\operatorname{Ker}\widehat{L}_P = \overset{2}{\bigvee} T^*X \times T^*X,$$
$$Q = \overset{4}{\bigwedge} T^*X \underset{T^*X}{\otimes} \left(\overset{2}{\bigwedge} TX\right).$$

Следуя общей процедуре описания полевых систем с вырожденными квадратичными лагранжианами, рассмотрим форму σ (2.71):

$$\overline{k}_{\mu\lambda} \circ \sigma = -2\pi\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\beta}p^{[\nu\beta]},$$

где $\overline{k}_{\mu\lambda}$ — координаты на расслоении (2.89). Поскольку

$$\operatorname{Im}\sigma = \overset{2}{\bigwedge} T^*X \times T^*X,$$
$$\operatorname{Ker}\sigma = \overset{4}{\bigwedge} T^*X \otimes \left(\overset{2}{\bigvee} TX\right) \times T^*X,$$

можно осуществить расщепление (2.73) конфигурационного пространства

$$J^1T^*X = \overset{2}{\bigvee} T^*X \underset{T^*X}{\oplus} \overset{2}{\bigwedge} T^*X,$$
$$k_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}(\mathscr{S}_{\mu\lambda} + \mathscr{F}_{\mu\lambda}) = k_{(\mu\lambda)} + k_{[\mu\lambda]}$$

и расщепление (2.74) фазового пространства

$$\Pi = \left[\overset{4}{\bigwedge} T^*X \underset{T^*X}{\otimes} \left(\overset{2}{\bigvee} TX\right)\right] \underset{T^*X}{\oplus} Q,$$
$$p^{\mu\lambda} = p^{(\mu\lambda)} + p^{[\mu\lambda]}.$$

Опять же согласно общей процедуре рассмотрим связности на кокасательном расслоении T^*X, принимающие значения в $\operatorname{Ker}\widehat{L}_P$. Как и в случае электромагнитного поля, достаточно ограничиться связностями вида

$$S_B = dx^\lambda \otimes \left[\partial_\lambda + \frac{1}{2}(\partial_\mu B_\lambda + \partial_\lambda B_\mu)\partial_\mu\right],$$

где B — некоторое сечение T^*X. Можно убедиться, что соответствующие гамильтонианы

$$H_B = p^{\mu\lambda}dk_\mu \wedge \omega_\lambda - p^{\mu\lambda}S_{B\mu\lambda}\omega - \widetilde{\mathscr{H}_P}\omega,$$
$$\widetilde{\mathscr{H}_P} = \widetilde{\mathscr{H}_E} + \frac{1}{8\pi}m^2\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu,$$

являются ассоциированными с лагранжианом L_P (2.23) и образуют полное семейство.

Уравнениями Гамильтона для данного гамильтониана H_B являются

$$\partial_\lambda r^{\mu\lambda} = -\frac{1}{4\pi}m^2\eta^{\mu\nu}r_\nu, \tag{2.92}$$
$$\partial_\lambda r_\mu + \partial_\mu r_\lambda = \partial_\lambda B_\mu + \partial_\mu B_\lambda \tag{2.93}$$

и плюс уравнение (2.91b). На пространстве связей (2.91a) уравнения (2.91b) и (2.92) сводятся к уравнениям Эйлера—Лагранжа, которые дополняются калибровочным условием (2.93). Последнее можно заменить тем или иным условием на величину $\partial_\lambda r_\mu + \partial_\mu r_\lambda$, например, условием лоренцевской калибровки

$$\eta^{\mu\lambda}\partial_\mu r_\lambda = 0.$$

Но, в отличие от случая электромагнитного поля, не все физически неэквивалентные решения уравнений Эйлера—Лагранжа для поля Прока будут ему удовлетворять. Оно применимо, например, к волновым решениям.

Глава 3

Топологические характеристики в теории поля

Формализация систем классических полей расслоениями делает возможным описание глобальных свойств полевых конфигураций с использованием методов алгебраической топологии.

Эти методы позволяют оперировать с категориями объектов — топологических пространств, многообразий, расслоений и др., которые, если пытаться выделить каждый объект, являются необозримыми. Суть их состоит в установлении определенного отношения эквивалентности объектов в такой категории и в рассмотрении их классов эквивалентности путем сопоставления им некоторых алгебраических (групповых) и даже числовых характеристик. В физических приложениях такие характеристики выступают в качестве всевозможных "топологических" чисел и зарядов.

Настоящая глава посвящена применению этих характеристик в полевых моделях: солитонов, монополей, инстантонов и других полевых образований, обязанных своим существованием нелинейному взаимодействию полей и не описываемых по теории возмущений.

В этой главе, если специально не оговорено, под расслоениями понимаются топологические расслоения, а к многообразиям относятся и многообразия с границей.

§ 1. Гомотопические группы

В алгебраической топологии основной рассматриваемой категорией является категория топологических пространств, а отношением эквивалентности в ней — гомотопическая эквивалентность.

Пусть Y и X — топологические пространства и f и f' — непрерывные отображения Y в X. Эти отображения называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение $g : [0, 1] \times Y \to X$, что

$$g \downarrow \{0\} \times Y = f, \quad g \downarrow \{1\} \times Y = f'.$$

Наглядно гомотопные отображения f и f' можно представить себе как такие, образы которых $f(Y)$ и $f'(Y)$ в X могут быть совмещены друг с другом непрерывной деформацией через промежуточные образы $g(\{r\} \times Y)$, $r \in]0, 1[$.

Пример 3.1.1. Пусть Y — окружность S^1, а X — плоскость $\mathbb{R}^2$. Все непрерывные отображения S^1 в $\mathbb{R}^2$ являются гомотопными. □

Пример 3.1.2. Пусть теперь $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ — плоскость без точки. Тогда отображения f, f', $f'' : S^1 \to X$, образы которых $f(S^1)$, $f'(S^1)$, $f''(S^1)$ изображены на рис. 6, представляют собой пример негомотопных отображений. □

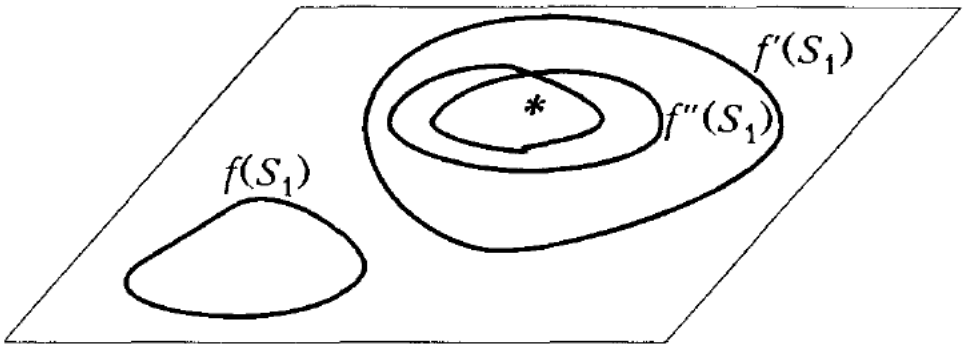


Рис. 6

Топологическое пространство X называется *стягиваемым*, если его тождественное отображение на себя Id_X гомотопно отображению X в некоторую свою точку $X \to x_0 \in X$, т. е. наглядно, если X может быть непрерывно стянуто в точку. Примером стягиваемых пространств могут служить евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$, а нестягиваемых — сферы S^n.

Можно показать, что, **если пространства X стягиваемо, то всякие два непрерывных отображения f и f' любого топологического пространства Y в X гомотопны.** Действительно, поскольку X стягиваемо, образ $f(Y)$ первого отображения f как подмножество X может быть непрерывно деформирован в точку, а из нее в образ $f'(Y)$ второго отображения в X.

Легко проверить, что понятие гомотопности отображений определяет отношение эквивалентности на множестве непрерывных отображений топологического пространства Y в пространство X. Классы эквивалентности, на которые оно разбивает это множество, называются *гомотопическими классами*, и множество этих классов обозначается $\pi(Y, X)$.

В частности, если X стягиваемо, то множество $\pi(Y, X)$ для любого Y состоит из одного элемента.

Пример 3.1.3. Множество $\pi(Y, X)$ для Y и X из Примера 3.1.2 счетно. Гомотопический класс отображения

$$f : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

определяется тем, сколько раз линия $f(S^1)$ "обернута" вокруг точки $\{0\}$. □

Пусть f — непрерывное отображение $Y \to X$. Непрерывное отображение $g : X \to Y$ называется *гомотопически обратным*, если композиция $g \circ f$ гомотопна тождественному отображению Id_Y, а $f \circ g$ гомотопна Id_X. Непрерывное отображение, обладающее гомотопически обратным, именуется *гомотопической эквивалентностью*. Если существует гомотопическая эквивалентность $Y \to X$, то пространства Y и X называются *гомотопически эквивалентными*.

Очевидно, **гомеоморфизм топологических пространств есть гомотопическая эквивалентность.** Примером негомеоморфных, но гомотопически эквивалентных пространств служат стягиваемое пространство и его точка.

Гомотопическая эквивалентность разбивает топологические пространства на гомотопические типы и множество таких типов уже оказывается обозримым. Для этого достаточно фиксировать некоторый набор стандартных пространств $Y_1, Y_2, \ldots$ и характеризовать гомотопический тип всякого топологического пространства X гомотопическими классами непрерывных отображений Y_i в X. В качестве таких стандартных пространств выбраны сферы S^n.

Пусть X — топологическое пространство и $x_0 \in X$. Пару (X, x_0) называют *пространством с отмеченной точкой*. Часто, когда конкретный выбор точки несущественен, пространство с отмеченной точкой обозначают $(X, .)$.

Отображением пространства с отмеченной точкой (Y, y_0) *в пространство с отмеченной точкой* (X, x_0) называется непрерывное отображение $f : Y \to X$, такое, что $f(y_0) = x_0$. Ясно, что множество таких отображений составляет подмножество всех непрерывных отображений и на нем определено отношение гомотопности отображений.

Рассмотрим всевозможные отображения окружности с отмеченной точкой $(S^1, .)$. Образами этих отображений являются замкнутые пути в X, выходящие и входящие в точку x_0, и на этом множестве можно ввести операцию *произведения отображений*

$$(ff')(y) = \begin{cases} f(y^2), & \operatorname{Im} y \geqslant 0, \\ f'(y^2), & \operatorname{Im} y \leqslant 0, \end{cases}$$

где $y = \exp(i\alpha)$ — комплексная координата, параметризующая окружность S^1. Эта операция наследуется при переходе к гомотопическим классам отображений $(S^1, .)$ в (X, x_0) и индуцирует на множестве этих классов структуру группы. Она называется *фундаментальной группой пространства X в точке x_0* и обозначается $\pi_1(X, x_0)$. В частности, фундаментальная группа стягиваемого пространства тривиальна.

Пример 3.1.4. Группа $\pi_1(X, .)$ для пространства $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ из Примера 3.1.2 изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел по сложению. Элементу $n \in \mathbb{Z}$ отвечает кривая, обернутая n раз вокруг точки $\{0\}$ в определенном направлении, а элементу $(-n)$ — кривая, обернутая столько же раз, но в противоположном направлении. □

Обобщая определение группы $\pi_1(X, .)$, рассмотрим n-мерную сферу с отмеченной точкой $(S^n, .)$ и множество $\pi_n(X, x_0)$ гомотопических классов отображений $(S^n, .)$ в пространство с отмеченной точкой (X, x_0). На $\pi_n(X, .)$ тоже может быть определена структура группы, которая называется *n-мерной гомотопической группой пространства X в точке x_0*. По аналогии группа $\pi_1(X, .)$ часто именуется одномерной гомотопической группой, и формально определяется множество $\pi_0(X)$, совпадающее с множеством компонент связности пространства X. Группы $\pi_n(X, .)$, $n > 1$, называются *высшими гомотопическими группами*. Они коммутативны.

Пример 3.1.5. Группы $\pi_r(S^n)$, $r < n$, тривиальны, а $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$. □

В случае связного пространства X все гомотопические группы $\pi_n(X, .)$ в разных точках изоморфны между собой при любом n, и можно говорить о гомотопической группе $\pi_n(X)$ (как абстрактной группе) пространства X без отмеченной точки.

Пример 3.1.6. Выполняется правило

$$\pi_n(X \times X') = \pi_n(X) \times \pi_n(X').$$

В частности, для тора $T^2 = S^1 \times S^1$ находим

$$\pi_1(T^2) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

□

Некоторые гомотопические группы, часто встречающиеся в физических приложениях, приведены в таблице

X	π_1	π_2	π_3
$S^1 = \mathbb{R}P^1$	$\mathbb{Z}$	0	0
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{R}P^n$, $n > 1$	$\mathbb{Z}_2$	$\pi_2(S^n)$	$\pi_3(S^n)$
$SO(4)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$SO(3)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
$U(n)$, $n > 1$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$

Топологическое пространство X называется *k-связным* ($0 \leqslant k < \infty$), если все гомотопические группы $\pi_n(X)$ с $n \leqslant k$ тривиальны. Это эквивалентно тому, что образ всякого непрерывного отображения n-мерной сферы S^n в X при $n \leqslant k$ стягивается в точку. Например, из таблицы видно, что сфера S^2 односвязна, т. е. любая замкнутая кривая на сфере стягиваема в точку.

Пусть Y — топологическое пространство с гомотопическими группами $\{\pi_n(Y)\}$, а X — топологическое пространство с гомотопическими группами $\{\pi_n(X)\}$. Всякое непрерывное отображение $f : Y \to X$ индуцирует гомоморфизмы

$$f_n^* : \pi_n(Y) \to \pi_n(X)$$

гомотопических групп. Если отображения

$$f, f' : Y \to X$$

гомотопны, то $f_n^* = f'^*_n$ при любом n. Если f — гомотопическая эквивалентность, то f_n^* — изоморфизмы.

Таким образом, **топологические пространства, принадлежащие одному и тому же гомотопическому типу, имеют одинаковый набор гомотопических групп**.

Непрерывное отображение f топологического пространства Y в топологическое пространство X называется *слабой гомотопической эквивалентностью*, если гомоморфизмы

$$f_n^* : \pi_n(Y) \to \pi_n(X)$$

являются изоморфизмами при любом n. Однако сам по себе **изоморфизм всех гомотопических групп пространств X и Y не гарантирует даже слабую гомотопическую эквивалентность этих пространств**, поскольку может не существовать непрерывного отображения Y в X, реализующего этот изоморфизм.

Гомотопические группы являются примером тополого-алгебраических характеристик, которые постоянны на слабо гомотопически эквивалентных пространствах.

Естественно возникает вопрос о существовании пространства с наперед заданными гомотопическими группами. Ответ положителен в подкатегории клеточных пространств.

Клеточным пространством X называется отделимое топологическое пространство, наделенное *клеточным разбиением*, т. е. разбиением

$$X = \bigcup_i e_i, \quad e_i \cap e_j = \varnothing, \quad i \neq j,$$

на множестве элементов которого $\{e\}$ определена функция $d(e)$ с натуральными значениями такая, что для каждого элемента e этого разбиения существует непрерывное отображение $d(e)$-мерного шара $D^{d(e)}$ в X с двумя свойствами:

- оно изоморфно отображает внутренность шара $\operatorname{Int} D^{d(e)}$ на e;
- оно отображает границу $S^{d(e)-1}$ шара $D^{d(e)}$ в объединение элементов разбиения, на которых d принимает значения, меньшие $d(e)$.

Элементы клеточного разбиения называются *клетками*.

Пример 3.1.7. Каноническое клеточное разбиение сферы S^n состоит из 0-мерной клетки — некоторой точки $x \in S^n$ и n-мерной клетки $S^n \setminus \{x\}$. □

Теорема 3.1.1. Каковы бы ни были группа G_1 и абелевы группы $G_2, G_3, \ldots$, существует связное клеточное пространство X с $\pi_n(X) = G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. □

Приведем утверждения, которые позволяют в теории гомотопий вместо всей категории топологических пространств ограничиваться часто подкатегорией клеточных пространств, а именно:

- всякое компактное многообразие гомотопически эквивалентно конечному (по числу элементов разбиения) клеточному пространству;
- для всякого топологического пространства X существует его *клеточная аппроксимация*, т. е. клеточное пространство, слабо гомотопически эквивалентное X.

При определении гомотопических групп мы рассматривали гомотопические классы отображений пространства с выделенной точкой в пространство с выделенной точкой. Обобщая, можно определить гомотопические классы непрерывных *отображений пары* (Y, U) *пространства* Y *и его подмножества* U в пару (X, A) топологического пространства X и его подмножества A, при которых U отображается в A. Если в качестве Y взять шар D^i, а в качестве U — его граничную сферу S^{i-1} с выделенной точкой $s_0 \in S^{i-1}$, то гомотопические классы отображений пары (D^i, S^{i-1}, s_0) с выделенной точкой s_0 в пару (X, A, x_0) с выделенной точкой $x_0 \in A \subset X$ образуют при $i > 1$ группу, которая называется *относительной гомотопической группой* $\pi_i(X, A, x_0)$. Она коммутативна при $i > 2$.

Если $A = x_0$, то относительная гомотопическая группа $\pi_i(X, x_0, x_0)$ совпадает с обычной гомотопической группой $\pi_i(X, x_0)$. Действительно, в этом случае отображение D^i в X, при котором сфера S^{i-1} переводится в точку x_0, можно представить как композицию канонического отображения $D^i \to S^i$ (при котором S^{i-1} стягивается в точку) и $S^i \to X$. Гомотопические классы последнего и образуют группу $\pi_i(X, .)$.

Существует связь между гомотопическими группами $\pi_i(X, A, x_0)$, $\pi_i(X, x_0)$ и $\pi_{i-1}(A, x_0)$. Она задается следующими тремя гомоморфизмами.

Непрерывное отображение f пары с выделенной точкой (X, A, x_0) в (X', A', x'_0) индуцирует гомоморфизм

$$f_i^* : \pi_i(X, A, x_0) \to \pi_i(X', A', x'_0)$$

относительных гомотопических групп. Поэтому отображение

$$X \to X, \quad x_0 \to A, \quad x_0 \to x_0$$

индуцирует гомоморфизм

$$j : \pi_i(X, x_0) \to \pi_i(X, A, x_0). \tag{3.1}$$

Включение $A \to X$ порождает гомоморфизм

$$i : \pi_i(A, x_0) \to \pi_i(X, x_0). \tag{3.2}$$

Наконец, всякое отображение

$$f : D^i \to X, \quad S^{i-1} \to A, \quad s_0 \to x_0,$$

представляющее собой элемент из $\pi_i(X, A, x_0)$, включает отображение границы

$$\partial f = f|_{\partial D^i} : S^{i-1} \to A, \quad s_0 \to x_0.$$

Поскольку гомотопным отображениям f соответствуют гомотопные отображения границы, всякому элементу a группы $\pi_i(X, A, x_0)$ соответствует некоторый элемент ∂a группы $\pi_{i-1}(A, x_0)$. При этом произведение в группе $\pi_i(X, A, x_0)$ содержит в себе произведение гомотопических классов отображений границы, так что отображение

$$\partial : \pi_i(X, A, x_0) \to \pi_{i-1}(A, x_0) \tag{3.3}$$

является гомоморфизмом групп.

С помощью гомоморфизмов (3.1), (3.2), (3.3) можно записать *последовательность гомотопических групп* для пары (X, A)

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_i(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_i(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_i(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(A, x_0) \longrightarrow \ldots, \tag{3.4}$$

Причем эта последовательность *точна*, поскольку ядро последующего гомоморфизма совпадает с образом предыдущего гомоморфизма, а именно:

$$\operatorname{Ker}\partial = \operatorname{Im} j, \quad \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i, \quad \operatorname{Ker} i = \operatorname{Im}\partial.$$

Пример 3.1.8. Если X стягиваемо, то $\pi_i(X, x_0) = 0$, $i > 0$, и $\operatorname{Im} j = 0$, а значит, $\operatorname{Ker}\partial = 0$ и

$$\pi_i(X, A, x_0) = \pi_{i-1}(A, x_0).$$

□

Пример 3.1.9. Рассмотрим в качестве пары (X, A) расслоенное пространство $X = \operatorname{tl}\lambda$ некоторого локально тривиального расслоения $\pi : \operatorname{tl}\lambda \to \operatorname{bs}\lambda$ и его слой $A = V$ через точку $p \in V \subset \operatorname{tl}\lambda$. Имеет место изоморфизм

$$\pi_n(\operatorname{tl}\lambda, V, p) = \pi_n(\operatorname{bs}\lambda, \pi(p)), \quad n > 0,$$

с учетом которого последовательность (3.4) принимает вид

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_i(V, p) \xrightarrow{i} \pi_i(\mathrm{tl}\,\lambda, p) \xrightarrow{j} (\mathrm{bs}\,\lambda, \pi(p)) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(V, p) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{j} \pi_1(\mathrm{bs}\,\lambda, \pi(p)) \xrightarrow{\partial} \pi_0(V, p) \xrightarrow{i} \pi_0(\mathrm{tl}\,\lambda, p) \xrightarrow{j} \pi_0(\mathrm{bs}\,\lambda, \pi(p)) \longrightarrow 0. \qquad (3.5)$$

Последовательность (3.5) называется *гомотопической последовательностью расслоения* λ и будет использована в ряде моделей. □

Пример 3.1.10. *Накрытием* называется локально тривиальное расслоение над связной базой, слои которого являются дискретными пространствами. Структурная группа накрытия дискретна. Расслоенное пространство накрытия называется *накрывающим пространством* и предполагается связным. Все слои накрытия, как локально тривиального расслоения, имеют одну и ту же мощность. Она называется числом листов накрытия. Накрытие с числом листов больше 1 нетривиально. Действительно, тривиальное расслоение гомеоморфно произведению базы на слой. Поэтому оно не может быть связным, если слой дискретен и состоит более чем из одной точки.

Пусть λ — накрытие с дискретной группой G. Рассмотрим для такого расслоения точную последовательность гомотопических групп (3.5). Поскольку всякий его слой V — дискретное пространство, а база X и расслоенное пространство $\mathrm{tl}\,\lambda$ связны, имеем

$$\pi_n(V, p) = 0, \quad n > 0; \quad \pi_0(V, p) = V,$$
$$\pi_0(\mathrm{tl}\,\lambda, p) = 0, \quad \pi_0(X, \pi(p)) = 0, \quad p \in V \subset \mathrm{tl}\,\lambda.$$

В результате точная последовательность (3.5) распадается на короткие последовательности

$$0 \longrightarrow \pi_{n+1}(\mathrm{tl}\,\lambda, p) \longrightarrow \pi_{n+1}(X, \pi(p)) \longrightarrow 0, \quad n > 0, \qquad (3.6)$$
$$0 \longrightarrow \pi_1(\mathrm{tl}\,\lambda, p) \longrightarrow \pi_1(X, \pi(p)) \longrightarrow V \longrightarrow 0. \qquad (3.7)$$

Последовательность (3.6) устанавливает, что все высшие гомотопические группы $\mathrm{tl}\,\lambda$ и X изоморфны. Из последовательности (3.7) вытекает, что отображение

$$\pi_1(\mathrm{tl}\,\lambda, p) \to \pi_1(X, \pi(p)) \qquad (3.8)$$

— вложение, а морфизм

$$\pi_1(X, \pi(p)) \to \pi_0(V, p) = V \qquad (3.9)$$

— проекция. Из последовательности (3.7) следует также, что нетривиальное накрытие не допускает глобального сечения. Действительно, если s — глобальное сечение, то композиция отображений $\pi \circ s = \mathrm{Id}_X$ порождает изоморфизм групп

$$\pi_1(X, \pi(p)) \xrightarrow{s^*} \pi_1(\mathrm{tl}\,\lambda, p) \xrightarrow{\pi^*} \pi_1(X, \pi(p)).$$

Но если $\pi_1(\mathrm{tl}\,\lambda, p)$ и $\pi_1(X, \pi(p))$ изоморфны, то в силу точности последовательности (3.7) слой V состоит из одного элемента, т. е. накрытие λ — тривиально. □

§ 2. Топологические солитоны

Физический солитон можно наглядно представить себе как локализованный самоподдерживающийся волновой пакет, образованный в результате баланса двух конкурирующих явлений — расплывания волнового пакета вследствие дисперсии (зависимости скорости распространения волн от их длины) и сжатия пакета вследствие нелинейности. Общепринятое математическое определение *солитонов* до сих пор отсутствует. Разные авторы предлагают свои не совсем совпадающие варианты. Например, различают солитоны и уединенные волны, локализованность определяют в терминах самих волновых полей и в терминах плотности энергии, требуют или не требуют пространственно-временную зависимость плотности энергии вида $E(x-ut)$ и т. д.

В теории поля, исходя из того, что элементарные частицы в природе также представляют собой как бы локализованные пакеты энергии, усматривают определенное соответствие между классическими солитонными решениями и состояниями, описывающими протяженные частицы в квантовой теории поля. Оно устанавливается процедурой "квантования солитонов" на основе квазиклассического разложения.

Разработано несколько эффективных и сложных методов исследования решений нелинейных волновых уравнений. Однако наша цель другая — продемонстрировать применение тополого-алгебраических методов для анализа нелинейных полевых конфигураций. Для этого достаточно использовать один из признаков локализованных полевых конфигураций, а именно, что их пространственной асимптотикой служат *вакуумные классические поля*. Последние ищутся как решения уравнений поля, минимизирующие функционал энергии модели. Причем перенормировкой на константу функционал энергии всегда может быть сделан таким, что минимальное значение энергии будет равно нулю.

Пусть V — пространство, в котором могут принимать значения волновые функции φ, описывающие локализованную полевую конфигурацию на $(d+1)$-мерном пространстве-времени $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Пусть W — подпространство V значений вакуумных полевых функций. Ограничимся случаем статических полей. Тогда поле φ представляет собой отображение $\mathbb{R}^d$ в V такое, что при присоединении к $\mathbb{R}^d$ бесконечноудаленной сферы S^{d-1}_∞ и непрерывном продолжении φ на S^{d-1}_∞ последняя будет отображаться в W. В ходе эволюции полевой конфигурации отображение φ может меняться, но при этом будет оставаться гомотопным исходному. Это побуждает характеризовать полевую конфигурацию гомотопическим классом отображения φ, который не зависит от ее непрерывной деформации.

С другой стороны, рассмотрим всевозможные непрерывные отображения φ пары (D^d, S^{d-1}) из d-мерного шара D^d (гомотопически эквивалентного пространству $\mathbb{R}^d$ с присоединенной сферой S^{d-1}_∞) и его границы S^{d-1} в пару (V, W). Назовем гомотопические классы этих отображений *топологическими солитонами*. При $d > 1$ они представляются элементами относительной гомотопической группы $\pi_d(V, W)$, а если пространство V стягиваемо, то элементами гомотопической группы $\pi_{d-1}(W)$. Случай $d = 1$ требует специального рассмотрения (см. ниже) из-за особого определения групп π_0.

Таким образом, спектр топологических солитонов определяется только размерностью пространства-времени и гомотопическим типом пространств V и W. Поэтому ясно, что **не всякому топологическому солитону может отвечать какое-либо солитонное решение самой модели**. Однако знание спектра топологических солитонов позволяет определить множество гомотопически неэквивалентных классов всевозможных солитонных решений в модели.

Приведем примеры некоторых солитонных моделей, начав с размерности $d = 1$. В этом случае пара $(D^1, \partial D^1)$ — отрезок с выделенными концами.

Модель кинков

Это двумерная вещественная скалярная модель. В этой модели $V = \mathbb{R}$, W — точки ± 1 в $\mathbb{R}$, и топологические солитоны — это гомотопические классы отображений отрезка D^1 в $\mathbb{R}$ таких, что концы отрезка переходят в ± 1. Поскольку пространство $\mathbb{R}$ стягиваемо, ясно, что гомотопические классы рассматриваемых отображений определяются отображениями границы D^1 в точки ± 1. Нетрудно проверить, что таких классов всего четыре. Два из них ($\varphi(\infty) = \varphi(-\infty)$) соответствуют вакуумному состоянию, а два других ($\varphi(\infty) = -\varphi(-\infty)$) — солитонным решениям — *кинкам*.

Пусть теперь в этой модели φ — комплексное поле или пусть оно снабжено внутренним индексом a, так чтобы пространства V и W были связными. Например, если φ — комплексное поле, то $V = W = S^1$. Тогда множество $\pi(D^1, S^1)$ содержит только один элемент. Однако это не означает, что в такой модели нет солитонных решений. Например, когда поле φ вещественно, это те же кинки. Но непрерывной деформацией они могут быть переведены (эволюционировать) в вакуумное состояние, что можно рассматривать как предпосылку неустойчивости солитонных решений в этой модели. Такие солитоны называются *нетопологическими*.

Модель синус-Гордона

Рассмотрим скалярную 2-мерную полевую модель с потенциалом

$$U(\varphi) = g(1 - \cos\varphi).$$

Множество вакуумных состояний, когда $U(\varphi_n^{(0)}) = 0$, в данном случае счетно:

$$\varphi_n^{(0)} = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

В этой модели $V = \mathbb{R}$ и $W = \mathbb{Z}$. Множество топологических солитонов этой модели счетно и параметризуется парой чисел

$$m = \frac{1}{2\pi}\varphi(\infty), \quad n = \frac{1}{2\pi}\varphi(-\infty),$$

в которые отображаются концы отрезка D^1. В частности, для $m = \pm 1$, $n = 0$ солитонные решения имеют вид

$$\varphi(x) = 4\operatorname{arctg}\left[\exp\{\pm(x - x_0)\}\right]. \tag{3.10}$$

Эти решения топологически неэквивалентны. Можно считать, что они относятся друг к другу как солитон и *антисолитон*.

Рассмотрим теперь солитоны в пространствах с размерностью $d > 1$. Используя теорему вириала, нетрудно показать, что в этих размерностях в скалярных моделях с потенциалами $U(\varphi)$ отсутствуют статические локализованные решения (хотя топологические солитоны существуют).

Хорошими кандидатами на наличие солитонных решений оказались калибровочные модели. простейшим примером которых является модель Нильсена—Олесена.

Модель Нильсена—Олесена

Это модель скалярной электродинамики в $(2+1)$-мерном пространстве-времени с функцией Лагранжа

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} g^2 (\varphi^2 - a^2)^2, \tag{3.11}$$

где $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Вакуумные поля модели удовлетворяют следующим уравнениям:

$$F_{\mu\nu} = 0, \quad D_\mu \varphi = 0, \quad \varphi^2 = a^2. \tag{3.12}$$

Их решения имеют вид

$$\varphi = a \exp(i\alpha(x)), \quad A_\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \tag{3.13}$$

Они являются также решениями уравнений поля

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu \varphi &= g^2 (\varphi^2 - a^2)\varphi, \\ \partial^\nu F_{\mu\nu} &= \frac{i}{2} e(\varphi^* D_\mu \varphi - \varphi (D_\mu \varphi)^*). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Калибровочными преобразованиями вакуумные решения (3.13) могут приведены к виду $\varphi = a$, $A_\mu = 0$. Однако, когда поля (3.13) используются в качестве граничных условий для поиска локализованных решений уравнений (3.14), **они не должны подвергаться калибровочным преобразованиям**. Причем, поскольку определяющим в паре (φ, A) вакуумных полей (3.13) является поле φ, топологические солитоны можно классифицировать по гомотопическим классам именно полей φ.

Пространством значений V этих полей является комплексная плоскость $\mathbb{R}^2$, а пространством значений W вакуумных полей — окружность S^1 в V. Поэтому топологические солитоны модели представляются элементами гомотопической группы

$$\pi_2(\mathbb{R}^2, S^1, .) = \pi_1(S^1, .) = \mathbb{Z}.$$

Класс $n \in \mathbb{Z}$ включает отображение $S^1 \to S^1$, при котором первая окружность n раз "обертывается" вокруг второй окружности. Для гладких отображений n совпадает со степенью отображения $S^1 \to S^1$, например,

$$\theta_2 = \exp(in\theta_1).$$

Для нахождения солитонного решения уравнений (3.14) выберем калибровку, в которой $A_0 = 0$, а в качестве граничных условий — вакуумную асимптотику на пространственной бесконечности. Введем полярные координаты (r, θ). Выберем в качестве граничных условий при $r \to \infty$ вакуумные решения вида

$$\varphi = a \exp(in\theta), \quad A_r = 0, \quad A_\theta = \frac{n}{er}.$$

Солитонные решения ищутся в форме

$$\varphi(r, \theta) = F(r) \exp(in\theta), \quad A_0 = A_r = 0, \quad A_0 = A(r).$$

При произвольном a дифференциальные уравнения для $F(r)$ и $A(r)$ аналитического решения не имеют, но численные расчеты подтверждают существование несингулярного решения с асимптотическим поведением:

$$A_0 = A(r) \to \frac{n}{er} + \frac{A}{\sqrt{r}} \exp(-ear),$$
$$F(r) \to a + F \exp\left(-\sqrt{2}gar\right), \tag{3.15}$$

где A, F — константы. Заметим, что решения имеют "конечный размер", поскольку при возрастании r они экспоненциально быстро приближаются к вакуумной асимптотике.

Модель Нильсена—Олесена является 2-мерным (по пространственной размерности) релятивистским аналогом модели Гинзбурга—Ландау поля куперовских пар в сверхпроводниках, когда температура ниже критической, сверхпроводящая система симметрична вдоль оси z, и солитонные решения (3.15) отвечают возникающим в такой системе трубкам тока.

Можно рассмотреть модель (3.11) при $d = 3$, т. е. в реальном пространстве-времени. Однако, поскольку

$$\pi(S^2, S^1) = \pi_2(S^1) = 0,$$

топологические солитоны в такой модели отсутствуют. В поисках солитонных решений в $(3+1)$-мерном пространстве-времени следует обратиться к неабелевым калибровочным моделям.

Модель Полякова—т'Хуфта

Это $SU(2)$ калибровочная модель изотриплета скалярных полей φ^a, $a = 1, 2, 3$, с функцией Лагранжа

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \varphi^a)(D^\mu \varphi^a) - \frac{\lambda}{4} (\varphi^a \varphi^a - a^2)^2, \tag{3.16}$$
$$D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + g\varepsilon^{abc} A^b_\mu \varphi^c.$$

Вакуумные поля модели удовлетворяют тем же условиям (3.12), что и в модели Нильсена—Олесена. В частности, $\varphi^a \varphi^a = a^2$, откуда следует, что пространство значений вакуумных полей W представляет собой сферу S^2 в изопространстве $V = \mathbb{R}^3$. В результате топологические солитоны модели образуют группу $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$.

Модель обладает статическим солитонным решением при $n = 1$, которое в калибровке $A^a_0 = 0$ ищется в виде

$$\varphi^a = \frac{x^a}{r}\varphi(r), \quad A^a_i = \varepsilon^{aij} x^j A(r) \tag{3.17}$$

с асимптотикой

$$\varphi(r) \to a, \quad A(r) \to \frac{1}{gr}. \tag{3.18}$$

В пределе $\lambda \to 0$ решение можно получить в аналитической форме

$$\varphi(r) = \frac{a}{\operatorname{th}(gar)} - \frac{1}{ar}, \quad A(r) = \frac{1}{gr} - \frac{a}{\operatorname{sh}(gar)}. \tag{3.19}$$

Используя гомотопическую классификацию, можно сделать и некоторые общие выводы о возможном спектре солитонов в 4-мерных моделях в зависимости от их свойств симметрии.

Пусть G — группа всех глобальных преобразований симметрий модели. Пусть $\varphi(x)$ — некоторое вакуумное поле. Тогда для любого $g \in G$ поле $g\varphi(x)$ — тоже вакуумное. Это означает, что если $w_0 \in W$, то для любого $g \in G$ элемент $w = gw_0$ тоже принадлежит W, и $W = G/H$, где H — подгруппа G, оставляющая инвариантным элемент w_0. Она называется *стабилизатором* w_0. Например, стабилизатором элемента $w = gw_0$ является подгруппа gHg^{-1}. Если $H \neq G$, группа G не оставляет инвариантным ни один элемент из W и, следовательно, ни одно вакуумное состояние.

Если пространство V стягиваемо, то спектр топологических солитонов модели определяется элементами гомотопической группы $\pi_2(G/H, .)$. Если H — связная подгруппа топологической группы G, то $G \to G/H$ — расслоение Серра со слоем H. Для такого расслоения имеет место точная последовательность гомотопических групп

$$\ldots \longrightarrow \pi_2(G) \longrightarrow \pi_2(G/H) \longrightarrow \pi_1(H) \longrightarrow \pi_1(G) \longrightarrow \ldots .$$

Если G — группа Ли, то $\pi_2(G) = 0$ и гомоморфизм

$$\pi_2(G/H) \to \pi_1(H)$$

— вложение. Поэтому для существования топологических солитонов, в частности, необходимо, чтобы $\pi_1(H) \neq 0$, т. е. чтобы группа H не сводилась к единичному элементу, не была дискретна или односвязна. Группа H не должна быть инвариантной подгруппой Ли в G, поскольку в этом случае G/H — группа Ли и $\pi_2(G/H) = 0$. Например, если G — абелева, то всякая ее подгруппа является инвариантной и топологические солитоны в абелевой калибровочной модели при $d = 3$, как мы отмечали на примере модели Нильсена—Олесена, отсутствуют.

Для определения спектра топологических солитонов полезно также отметить, что если группа Ли G односвязна (т. е. $\pi_1(G) = 0$), то вложение

$$\pi_2(G/H) \to \pi_1(H)$$

является также проекцией и, следовательно, $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$.

§ 3. Гомологии и когомологии

Гомологии комплексов

Основные тополого-алгебраические характеристики, применяемые в физических моделях, определяются теориями гомологий и когомологий.

Существуют различные теории гомологий, но для них всех характерна следующая алгебраическая конструкция. Пусть

$$B = \{B_p, \partial_p, p = 0, \pm 1, \ldots\}$$

— семейство абелевых групп B_p и гомоморфизмов

$$\partial_p : B_p \to B_{p-1}$$

таких, что $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Последнее условие эквивалентно утверждению, что образ $\operatorname{Im} \partial_{p+1}$ гомоморфизма ∂_{p+1}, т. е. $\partial_{p+1} B_{p+1}$, содержится в ядре $\operatorname{Ker} \partial_p$ отображения ∂_p, т. е. в $\partial_p^{-1}(0 \in B_{p-1})$. Проиллюстрируем это рисунком 7.

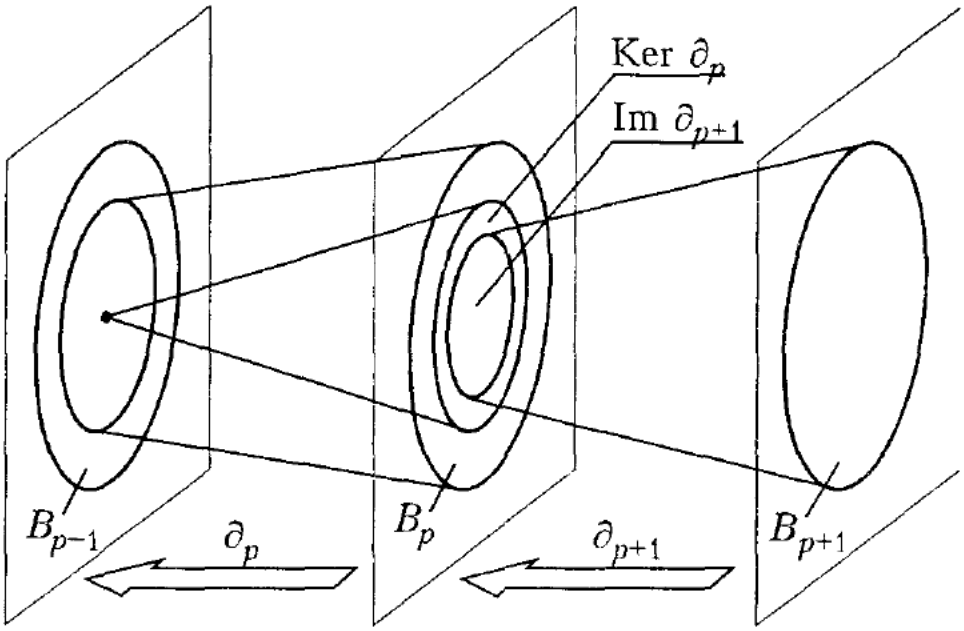


Рис. 7

Семейство B можно представить в виде последовательности

$$\ldots \xleftarrow{\partial_{p-1}} B_{p-1} \xleftarrow{\partial_p} B_p \xleftarrow{\partial_{p+1}} B_{p+1} \longleftarrow \ldots, \tag{3.20}$$

в которой композиция любых двух последовательных морфизмов равна нулю. Такая последовательность называется *цепным комплексом*. Элементы группы B_p комплекса называются *p-мерными цепями*, из них элементы из $\operatorname{Ker} \partial_p$ называются *p-мерными циклами*, а элементы из $\operatorname{Im} \partial_{p+1}$ — *p-мерными границами*. Поскольку ∂_p — гомоморфизм, $\operatorname{Im} \partial_{p+1}$ — подгруппа группы $\operatorname{Ker} \partial_p$ и определена фактор-группа

$$H_p(B) = \operatorname{Ker} \partial_p / \operatorname{Im} \partial_{p+1},$$

которая называется *p-мерной группой гомологии комплекса B*. Два цикла из B_p принадлежат одному и тому же смежному классу из $H_p(B)$ тогда и только тогда, когда их разность есть некоторая p-граница.

Из теорий гомологий в физических приложениях нам понадобятся только так называемые *сингулярные гомологии*.

Пусть X — n-мерное дифференцируемое ориентируемое многообразие. Определим следующий цепной комплекс $B(X)$. Рассмотрим ориентируемые компактные p-мерные подмногообразия M многообразия X^n. Выберем p-цепями комплекса $B(X)$ всевозможные формальные конечные суммы $M = \sum k_i M_i$ с числовыми коэффициентами k_i. Они образуют бесконечную свободную группу $B_p(X)$ относительно сложения. Причем считается, что $(-M)$ — это многообразие M с обратной ориентацией. Введем оператор ∂ взятия *ориентированной границы* компактного многообразия, считая по определению

$$\partial \left(\sum_i k_i M_i \right) = \sum_i k_i \partial M_i.$$

Он отображает $B_p(X)$ в $B_{p-1}(X)$.

Пример 3.3.1. Пусть M — полый ограниченный цилиндр в $\mathbb{R}^3$, изображенный на рис. 8.

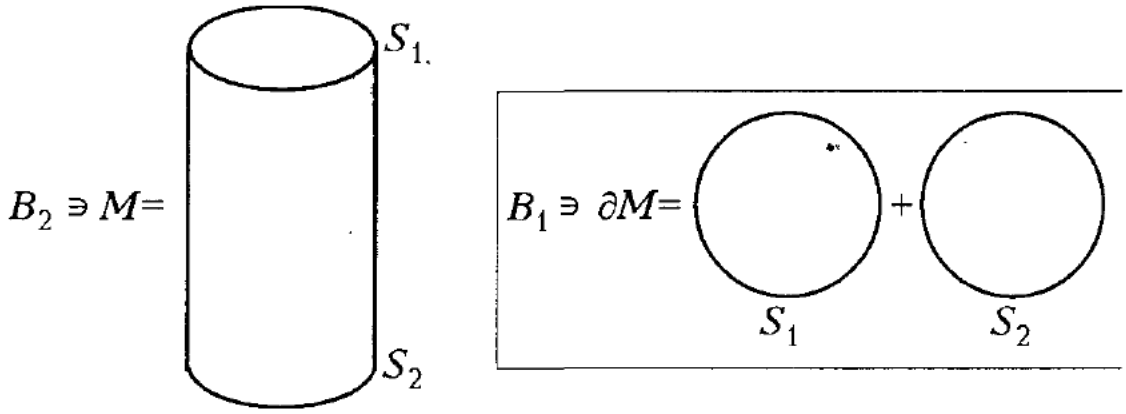


Рис. 8

Его границей является несвязное объединение двух окружностей $S_1 \cup S_2$, образующих края цилиндра, а ориентированной границей ∂M — формальная сумма этих окружностей, наделенных определенной ориентацией. □

Пример 3.3.2.. Рассмотрим теперь отображение ρ этого цилиндра в тор T^2, получаемое отождествлением его краев (рис. 9).

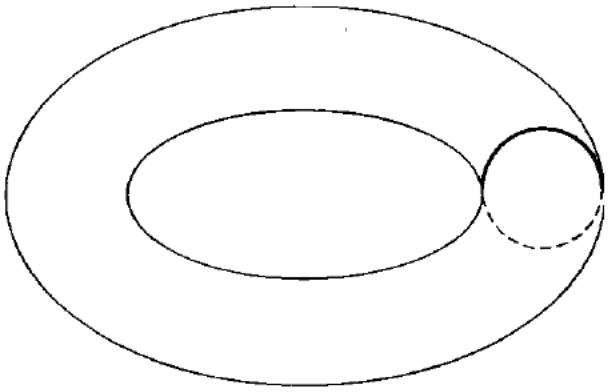


Рис. 9

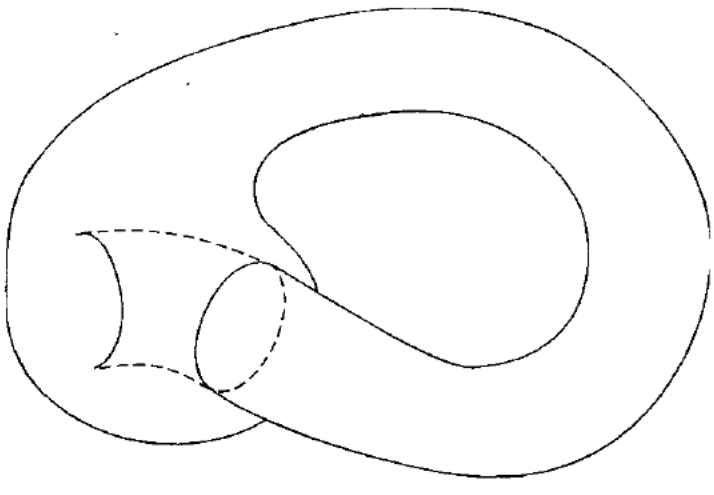


Рис. 10

Подчеркнем, что $\rho(M)$ как образ многообразия с границей — это не тор, а тор с границей S. Однако его ориентированная граница

$$\partial\rho(M) = S_1 + S_2 = S - S = 0.$$

□

Пример 3.3.3.. Пусть ρ' — отображение цилиндра M в *бутылку Клейна* K^2 в $\mathbb{R}^4$, получаемое тоже отождествлением его краев (рис. 10). Хотя сама бутылка Клейна — неориентируемое многообразие, $\rho'(M)$ является ориентируемым многообразием с границей S и ориентируемой границей

$$\partial\rho'(M) = S_1 + S_2 = 2S.$$

□

Группы гомологий комплекса $B(X) = \{M^p, \partial\}$ называются *группами ориентируемых бордизмов* $\Omega_p(X, K)$. Подчеркнем, что они зависят от числового кольца K, из которого берутся коэффициенты k_i. Так, в Примере 3.3.3 окружность S на бутылке Клейна, будучи циклом $\partial S = 0$, является границей

$$S = \partial(1/2\rho'(M)),$$

если коэффициенты k_i принимают значения в поле рациональных чисел, и S не есть граница, если $K = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел.

Группы $\Omega_p(X, K)$ являются гомотопическими инвариантами, т. е. они одни и те же для гомотопически эквивалентных пространств X и X'. Однако группы бордизмов оказываются не совсем удобными характеристиками, поскольку могут быть нетривиальными даже для стягиваемого пространства (точки). Дело в том, что эти группы определяются по всем возможным замкнутым подмногообразиям, например, вложенным в $\mathbb{R}^n$, и среди них могут найтись такие, которые сами не являются границами.

Чтобы более точно характеризовать структуру самого пространства X, можно, подобно тому как это делается при определении гомотопических групп, выбрать какой-либо "эталонный" класс подмногообразий. В теории сингулярных гомологий это — образы всевозможных непрерывных отображений в топологическое пространство X стандартных p-мерных полиэдров (симплексов).

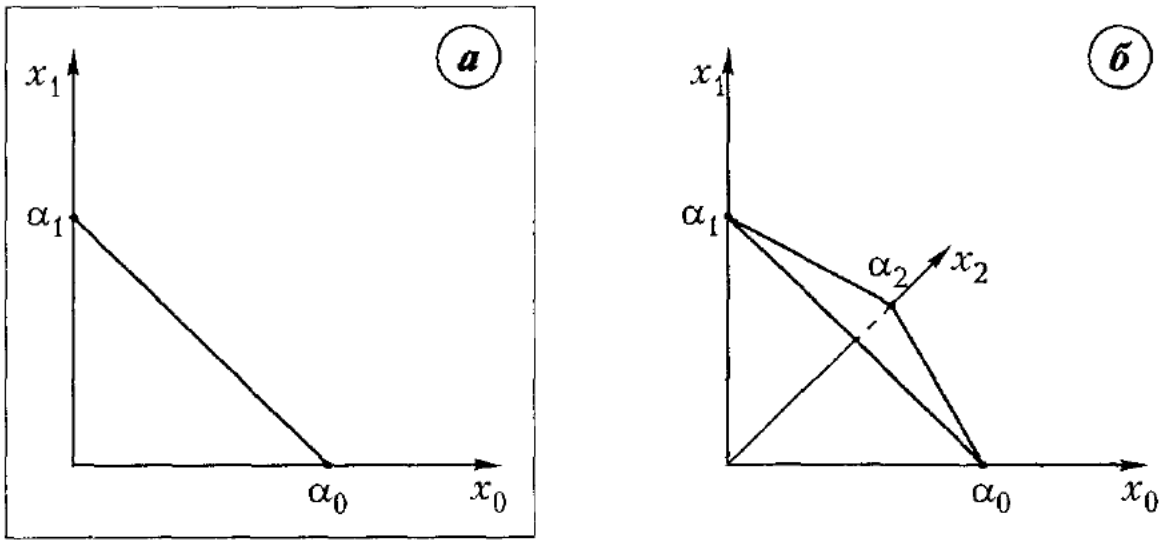


Рис. 11

Сингулярные гомологии

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^{p+1}$, наделенное декартовой системой координат. Отметим на каждой координатной оси x_i точку α_i с координатой 1. Проведем через все эти точки гиперплоскость

$$x^0 + \ldots + x^p = 1$$

в $\mathbb{R}^{p+1}$. *Стандартным p-мерным симплексом* σ^p называется пересечение этой гиперплоскости с положительным ортантом $\{x^i \geqslant 0\}$. Такой симплекс представляет собой выпуклый *p-мерный полиэдр* с вершинами $[\alpha_0 \ldots \alpha_p]$. В частности,

$\sigma^0 = [\alpha_0]$ — это точка;
$\sigma^1 = [\alpha_0\alpha_1]$ — это отрезок (рис. 11, *а*);
$\sigma^2 = [\alpha_0\alpha_1\alpha_2]$ — правильный треугольник (рис. 11, *б*);
$\sigma^3 = [\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3]$ — тетраэдр.

Граница p-мерного симплекса $\sigma^p = [\alpha_0 \dots \alpha_p]$ образована $(p-1)$-мерными гранями — симплексами

$$\sigma_i^{p-1} = [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p],$$

где $\hat{\alpha}_i$ означает, что вершина α_i удалена. Ориентированная граница симплекса

$$\sigma^p = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p]$$

есть формальная линейная комбинация его граней вида

$$\partial\sigma^p = \sum_i (-1)^i [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p] = \sum_i (-1)^i \sigma_i^{p-1}.$$

Например,

$$\partial[\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = [\alpha_1\alpha_2] - [\alpha_0\alpha_2] + [\alpha_0\alpha_1].$$

Прямым вычислением можно убедиться, что $\partial\partial\sigma^p = 0$.

Пусть X — любое топологическое пространство. *Сингулярными p-мерными симплексами* называются пары (σ^p, f), где

$$f : \sigma^p \to X$$

— непрерывное отображение стандартного p-мерного симплекса σ^p в пространство X, т. е. наглядно образы всевозможных непрерывных отображений p-мерных полиэдров в X. *Сингулярной p-мерной цепью* называется формальная конечная сумма

$$c_p = \sum_i k_i(\sigma_i^p, f_i)$$

сингулярных симплексов с коэффициентами k_i из числового кольца K. В дальнейшем, допуская некоторую вольность, **мы будем отождествлять сингулярный симплекс (σ, f) с образом $f(\sigma)$ в X**.

Граница сингулярного симплекса задается как формальная сумма

$$\partial f(\sigma^p) = \partial(\sigma^p, f) = \sum (-1)^i (\sigma_i^{p-1}, f\downarrow\sigma_i^{p-1}) = \sum (-1)^i f(\sigma_i^{p-1}) \qquad (3.21)$$

образов граней σ_i^{p-1} стандартного симплекса σ^p при отображении f. *Граница сингулярной цепи*, как и выше, имеет по определению вид

$$\partial c_p = \sum k_i \partial f_i(\sigma_i^p)$$

и удовлетворяет условию $\partial\partial c_p = 0$. В частности, если образ полиэдра $f(\sigma^p)$ — многообразие, то оператор границы (3.21) совпадает с оператором взятия ориентированной границы многообразия.

Сингулярные p-мерные цепи образуют группу C_p относительно операции формальной суммы, и оператор ∂ — гомоморфизм. Группы сингулярных цепей C_p и гомоморфизм ∂ составляют цепной комплекс (3.20), группы гомологий которого называются *сингулярными гомологиями* $H_p(X, K)$ пространства X с коэффициентами в кольце K. Группы сингулярных гомологий обычно определяются с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Часто под группами сингулярных гомологий понимают именно группы с целочисленными коэффициентами из $\mathbb{Z}$. Мы будем их обозначать просто $H_p(X)$, а весь набор $\{H_p(X)\}$ как $H_*(X)$.

Элементами группы гомологий $H_p(X)$ являются классы эквивалентности p-мерных сингулярных циклов (это цепи такие, что $\partial c_p = 0$) с точностью до границы ($c_p = \partial c_{p+1}$). Примером сингулярного p-цикла в топологическом пространстве X служит p-мерная сфера S^p, которая является образом в X p-мерного полиэдра, все грани которого обращаются при отображении в X в точку.

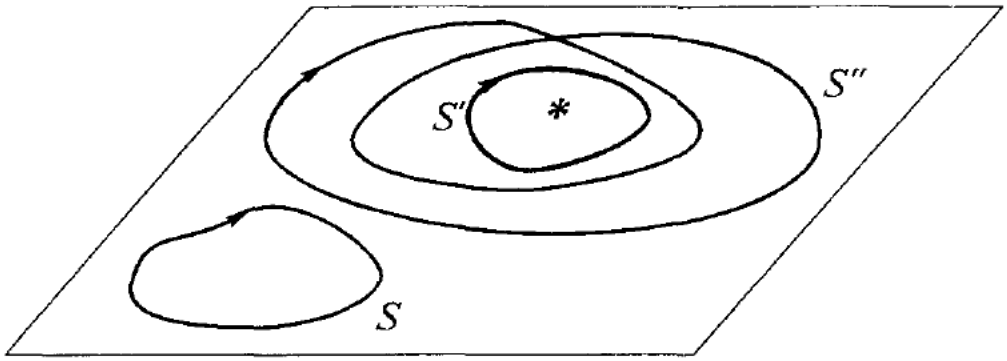


Рис. 12

Пример 3.3.4. Пусть $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ — плоскость без точки. На рис. 12 кривыми S, S', S'' изображены представители трех классов эквивалентности 1-мерных сингулярных циклов в X. Цикл S является границей и его класс эквивалентности соответствует нулю группы $H_1(X)$. Цикл S'' эквивалентен циклу $2S'$, и можно проверить, что любой цикл в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ эквивалентен некоторому циклу nS', $n \in \mathbb{Z}$, так что $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. □

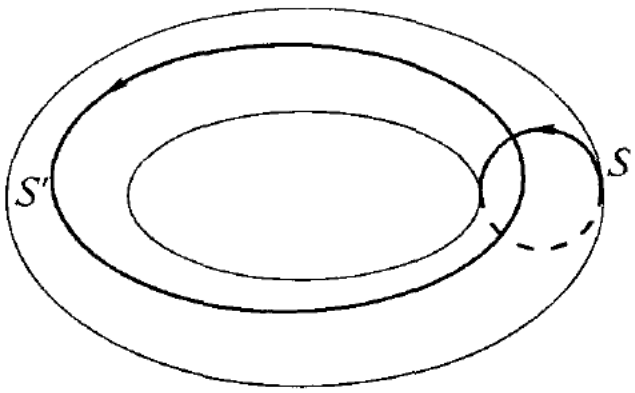


Рис. 13

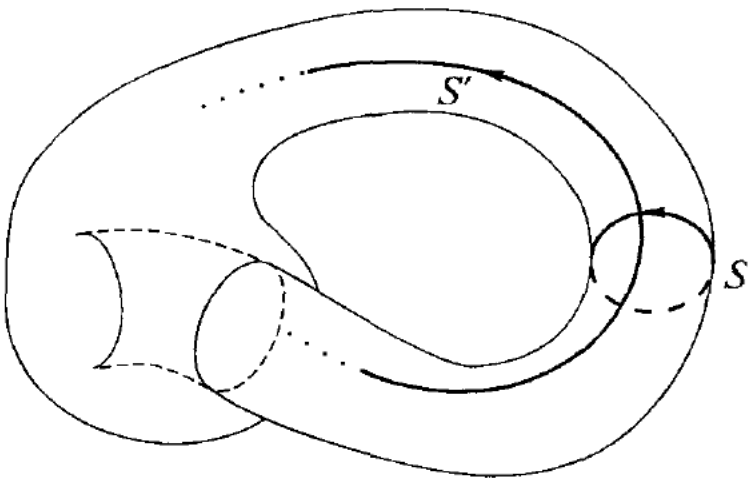


Рис. 14

Пример 3.3.5. На торе T^2 всякий 1-мерный цикл эквивалентен циклу

$$nS + mS', \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

(рис. 13) и $H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. □

Пример 3.3.6. На бутылке Клейна K^2 всякий 1-мерный цикл эквивалентен циклу

$$nS + mS', \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

но (рис. 14) цикл $2S$ является границей, т. е. эквивалентен $0S$. Поэтому $H_1(K^2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$. □

Пример 3.3.7. Пусть $X = S^2$ — сфера. Очевидно, что $H_1(S^2) = 0$. Рассмотрим $H_2(S^2)$. Примером ненулевого 2-мерного цикла на S^2 является сама сфера S^2. Примеры других неэквивалентных 2-мерных циклов на S^2 могут быть получены отображениями f сферы S^2 на $X = S^2$, различающимися степенью отображения f, и $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$. □

Отметим важное преимущество сингулярных гомологий в сравнении, например, с бордизмами. Поскольку граница (3.21) сингулярного симплекса $f(X)$ в топологическом пространстве X определяется, грубо говоря, как образ

$$\partial f(\sigma) = f(\partial\sigma)$$

границы стандартного симплекса в $\mathbb{R}^n$, построение такой границы в X и тем самым задание цепного комплекса не требует какой-либо добавочной структуры на X, например структуры многообразия, как в случае бордизмов. Поэтому **сингулярные гомологии могут быть определены для любого топологического пространства**. В частности, если X ориентируемое многообразие, имеется эпиморфизм групп бордизмов $\Omega_p(X, \mathbb{Q})$ на группы гомологий $H_p(X, \mathbb{Q})$ с рациональными коэффициентами. Это означает, что всякий сингулярный цикл в ориентируемом многообразии X, будучи умноженным на некоторое рациональное число, представим подмногообразием в X.

Приведем некоторые свойства *групп сингулярных гомологий* $H_*(X, K)$.

Они абелевы.

Образующими элементами группы $H_0(X, K)$ являются компоненты линейной связности пространства X и для 1-связного пространства $H_0(X, K) = K$.

Если X — стягиваемое пространство, $H_p(X, K) = 0$, $p > 0$.

Если X^n — замкнутое связное n-мерное многообразие, тогда:

$H_p(X^n, K) = 0$ при $p > n$;

$H_n(X^n, K) = K$, если X^n ориентируемо;

$H_n(X^n) = 0$, если X^n неориентируемо.

Пример 3.3.8. Гомологии *сфер*:

$$H_0(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z};$$
$$H_p(S^n) = 0, \quad p \neq 0, n.$$

□

Пример 3.3.9. Гомологии *проективных пространств*:

$$H_0(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$$
$$H_n(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0, & n = 2l, \\ \mathbb{Z}, & n = 2l+1; \end{cases}$$
$$H_p(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0, & p = 2l \\ \mathbb{Z}_2, & p = 2l+1,\ 0 < p < n. \end{cases}$$

□

Группы гомологий, с которыми приходится иметь дело в приложениях, обладают конечным числом образующих элементов и поэтому изоморфны прямой сумме циклических и свободных групп. Если группа гомологий содержит *циклическую подгруппу* (т. е.

такой элемент h, что $h^k = 1$ для некоторого натурального k), то говорят, что она содержит *кручение*, например, группа

$$H_1(K^2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$$

из Примера 3.3.6 и группы

$$H_{2l+1}(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$$

из Примера 3.3.9.

Как уже отмечалось (см. Примеры 3.3.3, 3.3.6), **класс эквивалентности цикла может зависеть от выбора кольца коэффициентов** K. Например, если группа

$$H_1(K^2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$$

имеет два образующих элемента, то группа

$$H_2(K^2, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

имеет один образующий элемент. В случае $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$$H_p(X, \mathbb{Q}) = H_p(X) \otimes \mathbb{Q},$$

$$H_p(X, \mathbb{R}) = H_p(X) \otimes \mathbb{R}.$$

Напомним, что *тензорным произведением двух абелевых групп* $A \otimes B$ называются всевозможные конечные суммы вида

$$\sum_i a_i \otimes b_i, \quad a_i \in A,\ b_i \in B,$$

при условии, что

$$(a_1 + a_2) \otimes (b_1 + b_2) = a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_1 + a_1 \otimes b_2 + a_2 \otimes b_2.$$

Можно показать, что тензорное произведение любой конечной группы на группу $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$ равно нулю. Отсюда, в частности, следует, что группы гомологий $H_p(X, \mathbb{Q})$ и $H_p(X, \mathbb{R})$ не содержат кручения.

Сравнивая гомотопические группы и группы сингулярных гомологий для плоскости без точки (см. Примеры 3.1.4 и 3.3.4) и для сфер (см. Примеры 3.1.5 и 3.3.8), можно предположить наличие некоторой связи между ними. Существует *гомоморфизм Гуревича*

$$h_n : \pi_n(X) \to H_n(X).$$

При $n = 1$ его ядром является *коммутант группы* $\pi_1(X)$ (т. е. подгруппа, порождаемая элементами вида $a^{-1}b^{-1}ab$ из $\pi_1(X)$), и, если $\pi_1(X)$ коммутативна, она изоморфна $H_1(X)$. Если $\pi_i(X) = 0$ для всех $i < n$ $(n > 1)$, гомоморфизм h_n является изоморфизмом, а h_{n+1} — эпиморфизмом.

Непрерывное отображение топологических пространств $f : X \to Y$ порождает гомоморфизм групп сингулярных гомологий

$$f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$$

и они, как и гомотопические группы, являются гомотопическими инвариантами, т. е. изоморфны для гомотопически эквивалентных пространств.

Если группы гомологий $H_p(X, \mathbb{R})$ конечнопорожденные и нетривиальны для не более чем конечного числа значений p, можно ввести числовые гомотопически инвариантные характеристики пространства X — *числа Бетти*

$$b_p = \dim H_p(X, \mathbb{R})$$

и *эйлерову характеристику*

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p b_p.$$

Для пространств, гомотопически эквивалентных конечным клеточным разбиениям определенного класса (конечным CW-пространствам), эйлерова характеристика приобретает наглядный смысл

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p \gamma_p,$$

где γ_p — число p-мерных клеток разбиения. Например, эйлерова характеристика сфер

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n.$$

Когомологии

Двойственной к гомологиям конструкцией являются когомологии. Пусть B — цепной комплекс (3.20) и K — числовое кольцо. Обозначим B^p абелеву группу всех гомоморфизмов $f^p : B_p \to K$ и введем гомоморфизм

$$\mathrm{d}^p : B^p \to B^{p+1},$$

определяемый следующим образом:

$$\mathrm{d}^p f^p = (-1)^{p+1} f^p \partial_{p+1} : B_{p+1} \to K.$$

Легко убедиться, что

$$\mathrm{d}^{p+1}\mathrm{d}^p f^p = -f^p \partial_{p+1}\partial_{p+2} = 0$$

для всех $f^p \in B^p$. Таким образом, последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\mathrm{d}^{p-1}} B^p \xrightarrow{\mathrm{d}^p} B^{p+1} \xrightarrow{\mathrm{d}^{p+1}} \ldots \tag{3.22}$$

определяет комплекс абелевых групп, который называется *коцепным комплексом*. Элементы c^p группы B^p называются *p-мерными коцепями*, элементы из $\operatorname{Ker}\mathrm{d}^p \subset B^p$ (т. е. такие, что $\mathrm{d}^p c^p = 0$) называются *p-мерными коциклами*, а элементы из $\operatorname{Im}\mathrm{d}^{p-1} \subset B^p$ (т. е. такие, что $c^p = \mathrm{d}^{p-1}c^{p-1}$) — *$p$-мерными кограницами*. Фактор-группы

$$\operatorname{Ker}\mathrm{d}^p / \operatorname{Im}\mathrm{d}^{p-1},$$

элементами которых являются классы эквивалентности p-мерных коциклов с точностью до кограниц, называются *группами когомологий* H^p комплекса (3.22).

Когомологиями, двойственными сингулярным гомологиям, являются *когомологии де Рама внешних дифференциальных форм* на многообразиях. Пусть

$$\Omega(X) = \bigoplus_p \Omega^p(X)$$

— градуированная алгебра внешних дифференциальных форм на n-мерном многообразии X. Оператор внешнего дифференцирования определяет гомоморфизм

$$d : \Omega^p \to \Omega^{p+1},$$

такой, что $dd = 0$. Это наделяет алгебру Ω структурой коцепного комплекса

$$0 \xrightarrow{\text{in}} \mathbb{R} \xrightarrow{\text{in}} \Omega^0 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^p \xrightarrow{d} \Omega^{p+1} \longrightarrow \dots . \tag{3.23}$$

Он называется *комплексом де Рама*. Его p-мерными коцепями являются p-формы σ, коциклами — замкнутые формы, а кограницами — точные формы. Группы когомологий этого комплекса именуются *группами когомологий де Рама* $H^p(X^n)$ дифференциальных форм на многообразии X^n. Они образованы классами эквивалентности замкнутых форм, разность которых является точной формой, т. е. σ и σ' считаются эквивалентными, если $\sigma' = \sigma + d\sigma''$. В частности, группа $H^0(X^n)$ есть линейное пространство, размерность которого равна числу компонент связности многообразия X^n. Очевидно также, что $H^p(X^n) = 0$, $p > n$.

Пример 3.3.10. Если многообразие X^n стягиваемое, $H^p(X^n) = 0$, $p > 0$. Это является выражением известной *леммы Пуанкаре*, гласящей, что **в евклидовом пространстве всякая замкнутая форма является точной**. В частности, если $X = \mathbb{R}^3$ и σ — 1-форма (ковекторное поле), условие замкнутости означает, что $\operatorname{rot}\sigma = 0$, откуда получается известное следствие, что $\sigma = \operatorname{grad}\varphi$, где φ — некоторая вещественная функция на X. Напротив, на нестягиваемом многообразии могут существовать неградиентные векторные поля, ротор которых равен 0. Примером такого поля на плоскости без точки $X^2 = \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ является

$$\sigma = \left(\sigma_\rho = 0,\ \sigma_\alpha = \frac{\Phi}{\rho}\right) = \left(\sigma_x = \frac{\Phi y}{x^2+y^2},\ \sigma_y = \frac{-\Phi x}{x^2+y^2}\right), \tag{3.24}$$

где Φ — константа, записанное соответственно в полярных (ρ, α) и декартовых координатах с началом в точке $\{0\}$. □

Двойственность групп когомологий де Рама $H^*(X)$ многообразия X и групп сингулярных гомологий $H_*(X, \mathbb{R})$ устанавливается билинейной формой — интегрированием замкнутых p-форм σ^p по p-мерным циклам c_p, реализуемым подмногообразиями X:

$$\langle \sigma^p | c_p \rangle = \int_{c_p} \sigma^p. \tag{3.25}$$

При этом в силу теоремы Стокса

$$\langle \sigma^p + d\sigma^{p-1} | c_p \rangle = \int_{c_p} (\sigma^p + d\sigma^{p-1}) = \int_{c_p} \sigma^p + \int_{\partial c_p} \sigma^{p-1} = \int_{c_p} \sigma^p = \langle \sigma^p | c_p \rangle,$$

$$\langle \sigma^p | c_p + \partial c_{p+1} \rangle = \int_{c_p + \partial c_{p+1}} \sigma^p = \int_{c_p} \sigma^p + \int_{c_{p+1}} d\sigma^p = \int_{c_p} \sigma^p = \langle \sigma^p | c_p \rangle,$$

т. е. билинейная форма (3.25) зависит только от когомологического класса σ^p и гомологического класса c_p, а тем самым определяет билинейную форму

$$\langle\,|\,\rangle : H^p(X) \otimes H_p(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

где $\otimes$ означает тензорное произведение векторных пространств. Таким образом, имеет место *теорема двойственности де Рама.*

Теорема 3.3.1. Группа когомологий де Рама $H^p(X)$ отождествляется при помощи билинейной формы (3.25) с пространством линейных форм на $H_p(X, \mathbb{R})$, и следовательно, $H^p(X)$ и $H_p(X, \mathbb{R})$ изоморфны как вещественные векторные пространства. □

Отсюда, в частности, следует, что, как и сингулярные гомологии, когомологии де Рама являются гомотопическими инвариантами. Например, через них выражается *эйлерова характеристика многообразия*

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p \dim H^p(X).$$

Заметим, что группы сингулярных гомологий $H_p(X, \mathbb{R})$ можно было бы, не прибегая к громоздким геометрическим конструкциям, определить просто как пространства, дуальные к $H^p(X)$. Однако таким способом нельзя однозначно восстановить целочисленные группы гомологий $H_p(X)$, а только с точностью до кручения.

В случае, когда X — замкнутое (т. е. компактное без границы) ориентируемое многообразие, для групп когомологий $H^*(X)$ (они конечнопорожденные) и гомологий $H_*(X, \mathbb{R})$ имеет место также *двойственность Пуанкаре.* Ее можно реализовать следующей билинейной формой:

$$Q(\sigma^p, \sigma^{n-p}) = \int_X \sigma^p \wedge \sigma^{n-p},$$

которая, как легко проверить, зависит только от когомологических классов форм σ^p и σ^{n-p} и является, тем самым, билинейной формой на группах когомологий

$$Q(\,,\,) : H^p(X) \otimes H^{n-p}(X) \to \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

Это определяет изоморфизм $H^p(X)$ и $H^{n-p}(X)$ и в силу двойственности де Рама изоморфизм $H_p(X, \mathbb{R})$ и $H_{n-p}(X, \mathbb{R})$.

В частности, отсюда следует соотношение $b_p = b_{n-p}$ для чисел Бетти замкнутого ориентируемого многообразия X, и, если размерность X нечетна, эйлерова характеристика X равна 0.

Двойственность Пуанкаре

$$H_p(X, \mathbb{R}) = H_{n-p}(X, \mathbb{R})$$

имеет место и для компактных многообразий с краем. Следствием является то, что, если X^n такое многообразие, тогда

$$\chi(\partial X^n) = \big(1 + (-1)^n\big)\chi(X^n).$$

В частности, эйлерова характеристика границы всегда четна.

Билинейная форма (3.26) приводит к еще одной числовой гомотопически инвариантной характеристике — *сигна́туре многообразия.* Пусть $n = 4l$ и $p = 2l$, тогда форма $Q(\,,\,)$

является симметричной на вещественном векторном пространстве $H^{2l}(X^n)$ и может быть приведена к диагональному виду. Сигнатура замкнутого ориентированного многообразия определяется как сигнатура этой формы (разность между числом положительных и отрицательных диагональных элементов). Заметим, что она **зависит от ориентации**.

Важным примером теории когомологий являются также когомологии со значениями в пучках. Их описание приведено в Приложении В. Для гладкого (паракомпактного) многообразия X имеет место изоморфизм

$$H^p(X) = H^p(X, \mathbb{R}) \tag{3.27}$$

групп когомологий де Рама и групп когомологий $H^p(X, \mathbb{R})$ пространства X с коэффициентами в постоянном пучке $\mathbb{R}$. **Этот изоморфизм** является ключом к применению методов алгебраической топологии в теории поля, поскольку **позволяет выразить тополого-алгебраические характеристики расслоений, представляемые элементами групп когомологий**

$$H^p(X, \mathbb{Z}) \subset H^p(X, \mathbb{R})$$

с коэффициентами в постоянном пучке $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, через когомологические классы де Рама дифференциальных форм, построенных из форм кривизны связностей на расслоениях.

§ 4. Эффект Ааронова—Бома

Вакуумные калибровочные поля

Следуя критериям вакуумного поля классической полевой модели, *вакуумными* называются калибровочные поля, имеющие всюду нулевую напряженность.

Если форма напряженности F калибровочного поля A равна нулю в некоторой стягиваемой области U пространства X, то поле A в этой области представимо в виде

$$A = g(x)\, dg^{-1}(x), \tag{3.28}$$

где $g(x)$ — некоторый элемент группы $G(U)$ функций на U со значениями в G. Отсюда следует, что **на стягиваемой области вакуумное калибровочное поле всегда может быть устранено калибровкой**, т. е. приведено к виду $A = 0$.

Это перестает быть справедливым для всего пространства X, если оно не стягиваемо. Например, группа когомологий де Рама $H^1(X)$ такого пространства необязательно тривиальна, и на них могут существовать калибровочные поля, напряженность которых всюду равна нулю, но сами они не устранимы калибровкой. Они вызывают эффекты типа Ааронова—Бома и квантования магнитного потока — образование флаксонов. Рассмотрим абелев случай электромагнитного поля.

В классической механике заряженных тел в уравнения движения зарядов входят только компоненты тензора напряженности электромагнитного поля, а его потенциал рассматривается как нефизическая величина, которая не проявляется в ненаблюдаемых эффектах. В квантовой механике и теории поля электромагнитный потенциал A_μ непосредственно содержится в уравнениях движения в составе оператора обобщенного импульса

$$i(\partial_\mu - ieA_\mu),$$

однако и здесь вопрос о наблюдаемости потенциала A остается до конца не ясным.

Чтобы выделить эффекты, обусловленные не напряженностью, а потенциалом электромагнитного поля, казалось бы, можно рассмотреть процессы, например, рассеяния в

электромагнитном поле, напряженность которого равна нулю. Такие эффекты — *эффекты Аароно́ва—Бо́ма* — были предсказаны и экспериментально исследовались. Однако, как уже отмечалось, поле A, не устраняемое калибровкой, может иметь нулевую напряженность (не будем касаться проблемы практического создания такого поля) только в некоторой нестягиваемой области, на границе которой напряженность поля обязательно отлична от нуля. В какой мере оба эти обстоятельства — топологическая нетривиальность области U, где $F = 0$, и граничные условия $F \neq 0$ на ∂U — сказываются на эффектах Аароно́ва—Бо́ма? Существует мнение, что физически значимыми являются не локальные (в точке) значения потенциала A, а только калибровочно-инвариантные величины — интегралы от потенциала A по всевозможным замкнутым контурам, которые в случае стягивания контуров в точку выражаются через локальные значения напряженности поля.

Поскольку вакуумные калибровочные поля могут существовать только на топологически нетривиальных многообразиях, в их описании и классификации должны участвовать глобальные топологические характеристики этих многообразий.

Пример 3.4.1. Пусть $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\}$ — 3-мерное пространство $\mathbb{R}^3$ без оси z (в цилиндрических (ρ, α, z) или декартовых координатах). Рассмотрим на нем электромагнитный потенциал A, аналогичный (3.24) из Примера 3.3.10:

$$A = \frac{\Phi}{2\pi}\, d\alpha = \frac{\Phi y}{x^2 + y^2}\, dx - \frac{\Phi x}{x^2 + y^2}\, dy. \tag{3.29}$$

Напряженность этого поля $F = dA$ во всех точках X равна нулю, и поле A является градиентным

$$A = df, \quad f = \frac{\Phi\alpha}{2\pi}, \tag{3.30}$$

на всякой стягиваемой области пространства X, например, при $0 < \varepsilon < \alpha < 2\pi - \varepsilon$, но не на всем X. Форма (3.29) является представителем некоторого ненулевого элемента группы когомологий де Рама $H^1(X) = \mathbb{R}$ пространства X. Элементы этой группы, будучи представленными формами (3.29), отличаются друг от друга коэффициентами Φ и могут быть параметризованы ими $[\Phi] \subset H^1(X)$, так что будет выполняться групповая операция

$$[\Phi] + [\Phi'] = [\Phi + \Phi'].$$

В классе обобщенных функций поле (3.29) может быть продолжено на все пространство $\mathbb{R}^3$. В этом случае при вычислении напряженности поля (3.29) в точках $\rho = 0$ $(x = y = 0)$ следует придерживаться особых правил дифференцирования функций, имеющих полюс. Они таковы, что выполняется формула Стокса

$$\int\limits_{\partial S} A = \int\limits_0^{2\pi} A_\alpha \rho\, d\alpha = \int\limits_S F \rho\, d\rho\, d\alpha = \Phi, \tag{3.31}$$

где S — круг в плоскости $z = 0$ с центром в точке $\rho = 0$. Откуда находим

$$F = \Phi\delta(x)\delta(y)\, dx \wedge dy = \frac{\Phi}{2}\, \delta(\rho^2)\, d\rho \wedge d\alpha, \tag{3.32}$$

т. е. вдоль оси z имеется ненулевое магнитное поле H_z, поток которого (3.31) равен Φ. Подобные сосредоточенные магнитные потоки называются *флаксонами*. □

Поле (3.29) из Примера 3.4.1 может быть создано бесконечно длинным и бесконечно тонким соленоидом, магнитный поток внутри которого равен Φ. Эффекты Ааронова—Бома в большинстве работ рассчитываются именно для этого поля, хотя оно — недостижимая идеализация. Идеализацией является как раз бесконечная длина соленоида. Поле A бесконечно длинного соленоида конечного радиуса b в области $\rho > b$ совпадает с вакуумным полем (3.29), а будучи продолженным на все пространство $\mathbb{R}^3$, имеет вид

$$A_\alpha(\rho) = \frac{1-\theta(\rho-b)}{\rho}\int\limits_0^\rho H(\rho')\rho'\,d\rho'\,d\alpha + \frac{\Phi}{2\pi\rho}\,\theta(\rho-b), \tag{3.33}$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

— ступенчатая функция,

$$H_\rho = 0, \quad H_z = H(\rho)\theta(b-\rho), \quad H_\alpha = 0 \tag{3.34}$$

— поле внутри соленоида, а

$$\Phi = 2\pi\int\limits_0^b H(\rho)\,d\rho$$

— его поток. Поле (3.33) порождается током

$$j_\rho = j_z = 0, \quad j_\alpha(\rho) = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{dH}{d\rho}\,(1-\theta(\rho-b)) + H(b)\delta(\rho-b)\right].$$

Можно показать, что любой ток вида

$$\vec{j} = (0,\, j_\alpha(\rho),\, 0),$$

сосредоточенный в некоторой цилиндрической области $\mathbb{R}\times U$, вне этой области порождает вакуумное электромагнитное поле.

Другим примером возникновения вакуумного электромагнитного поля является ситуация, когда в нестягиваемой области реализуется вакуумное решение какой-либо квантовой или полевой модели, например, Гинзбурга—Ландау или Нильсена—Олесена.

Пример 3.4.2. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ в области $\rho > b$ реализуется решение

$$\varphi(\alpha) = a\exp\left(-\frac{i\alpha\Phi}{2\pi e}\right), \quad A_\alpha = \frac{\Phi}{2\pi\rho}, \quad A_\rho = A_z = 0 \tag{3.35}$$

вакуумных уравнений (3.12). Поскольку волновая функция $\varphi(\alpha)$ должна быть однозначной (т. е. $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha+2\pi)$), амплитуда Φ поля A в самосогласованном решении (3.35), в отличие от поля в примере 3.4.1, не произвольна, а принимает дискретные значения

$$\Phi = 2\pi n e, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

□

Решения вида (3.35) реализуются в кольцевом сверхпроводнике и приводят к тому, что магнитный поток

$$\int_0^{2\pi} A_\alpha(\rho)\rho d\alpha = 2\pi n e$$

через отверстие кольца принимает только дискретный набор значений. Это известный в физике сверхпроводников эффект *квантования магнитного потока.*

Рассмотрим теперь общее математическое условие существования вакуумных калибровочных полей. Оно сводится к утверждению, что множество классов калибровочно эквивалентных вакуумных калибровочных полей группы G на связном паракомпактном многообразии X находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов сопряженных в G гомоморфизмов фундаментальной группы $\pi_1(X)$ многообразия X в группу G (напомним, что элементы a и a' группы называются сопряженными в G, если существует такой элемент $g \in G$, что $ga = a'g$). Поясним, как возникает это соответствие.

Пусть λ — расслоение над связной паракомпактной базой X со структурной группой G, наделенное связностью A. Выберем некоторую точку $x \in X$ и рассмотрим параллельные переносы слоя $\pi^{-1}(x)$ вдоль всевозможных замкнутых путей γ, начинающихся и заканчивающихся в точке x (пути должны быть кусочно гладкими, и это вносит немало сложностей, на которых мы не будем останавливаться). Каждому такому переносу будет соответствовать некоторый изоморфизм g_γ слоя $\pi^{-1}(x)$ на себя. Множество Γ_x замкнутых путей γ наделено структурой группы, и, как это следует из свойств параллельного переноса, соответствие $\gamma \to g_\gamma$ является гомоморфизмом группы Γ_x в группу изоморфизмов слоя $\pi^{-1}(x)$. Образ этого гомоморфизма K_x называется *группой голономии связности* в точке $x \in X$. Группы голономии K_x в разных точках изоморфны, поэтому можно говорить об абстрактной группе голономии K.

Группа Γ_x содержит инвариантную подгруппу Γ_x^0, состоящую из путей γ, стягиваемых в точку x. При гомоморфизме $\Gamma_x \to K_x$ подгруппа Γ_x^0 отображается в подгруппу $K_x^0 \subset K_x$, именуемую *ограниченной группой голономии в точке* $x \in X$, и соответственно определен гомоморфизм фактор-группы

$$\Gamma_x/\Gamma_x^0 = \pi_1(X, x)$$

на фактор-группу K_x/K_x^0. Далее, **имеется изоморфизм группы голономии K_x на подгруппу структурной группы** G. Действительно, пусть λ_G — главное расслоение. Фиксируем элемент $p \in \pi_P^{-1}(x)$ и всякому $g_\gamma(p)$ сопоставим элемент $g \in G$, такой , что $g_\gamma(p) = pg$. Обозначим K_p образ K_x в G при таком сопоставлении. Если выбрать другой элемент $p' \in \pi_P^{-1}(x)$, такой, что $p' = pg_0$, $g_0 \in G$, то подгруппы K_p и $K_{p'}$ сопряжены в G, т. е.

$$K_{p'} = g_0^{-1} K_p g_0.$$

Таким образом, связность A определяет гомоморфизмы группы замкнутых путей Γ_x на подгруппы группы G, сопряженные в G.

Пример 3.4.3. Рассмотрим $U(1)$-расслоение, в слоях которого группа $U(1)$ действует как группа умножений на фазовый множитель $\exp(i\alpha)$. Пусть iA — локальная 1-форма связности на этом расслоении ($I = i$ — генератор группы $U(1)$ в данном представлении). Дифференциальное условие параллельного переноса $U(1)$-связностью iA имеет вид

$$Dv = (d + iA(x))v = 0, \tag{3.36}$$

где v — элемент слоя $\pi^{-1}(x)$. Проинтегрируем это уравнение вдоль некоторого пути γ. Пусть $v(\sigma)$ — сечение $U(1)$-расслоения вдоль пути $\gamma([0, 1])$, получаемое параллельным переносом элемента $v(\gamma(0))$. Тогда условие (3.36) принимает вид дифференциального уравнения

$$\frac{dv(\sigma)}{d\sigma} + iA_\mu(\gamma(\sigma))\frac{dx^\mu(\sigma)}{d\sigma}\, v(\sigma) = 0. \tag{3.37}$$

Подчеркнем, что, поскольку A — локальная 1-форма связности, уравнения (3.36) и (3.37) определены отдельно на каждой карте атласа расслоения. Если путь γ умещается на одной карте, то решением уравнения (3.37) является

$$v(\sigma) = v(0)\exp\left(-i\int_0^\sigma A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma}\, d\sigma\right).$$

Отсюда получаем, что при параллельном переносе вдоль пути γ элемент $v \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ умножается на фазовый множитель:

$$v(\gamma(1)) = g_\gamma v(\gamma(0)) = \exp\left(-i\int_\gamma A\right) v(\gamma(0)). \tag{3.38}$$

Если путь γ пересекает несколько карт, то его можно представить как композицию путей γ_i, умещающихся на каждой карте, для каждого из которых справедливо выражение (3.38). Но при переходе с карты на карту надо учесть функции перехода $\rho_{i,i+1}$. В результате, преобразование параллельного переноса g_γ вдоль такого пути имеет вид

$$g_\gamma = \exp\left(-i\int_{\gamma_k} A\right)\rho_{k-1,k}\ldots\rho_{23}\exp\left(-i\int_{\gamma_2} A\right)\rho_{12}\exp\left(-i\int_{\gamma_1} A\right). \tag{3.39}$$

В дальнейшем мы сохраним для g_γ запись (3.38), подразумевая учет функций перехода $\rho_{i,i+1}$ при взятии интеграла A. Фиксируем точку $x \in X$ и ограничимся замкнутыми путями из группы Γ_x. Тогда множество преобразований g_γ, $\gamma \in \Gamma_x$, образует группу голономии K_x с групповой операцией

$$g_\gamma g_{\gamma'} = \exp\left(-i\int_\gamma A\right)\exp\left(-i\int_{\gamma'} A\right) = \exp\left(-i\int_\gamma A - i\int_{\gamma'} A\right) = \exp\left(-i\int_{\gamma\gamma'} A\right) = g_{\gamma\gamma'}.$$

В слое главного $U(1)$-расслоения отображение параллельного переноса представляет собой сдвиг группового параметра

$$a \to (a + a_\gamma) \bmod 2\pi, \quad a_\gamma = -\int_\gamma A, \tag{3.40}$$

и отображение

$$\gamma \to a_\gamma \bmod 2\pi$$

есть гомоморфизм Γ_x на группу голономии K_a — подгруппу структурной группы $U(1)$. Поскольку $U(1)$ коммутативна, $K_a = K_{a'}$. □

Пусть связность A *плоская*, т. е. ее кривизна F во всех точках равна нулю. Тогда ограниченные группы голономии K_p^0 и K_x^0 тривиальны. Это следует из теорем, что группа голономии K_p^0 является связной подгруппой Ли группы G и что ее алгебра Ли определяется значениями, принимаемыми формой кривизны связности A в точках многообразия X. Мы проиллюстрируем этот факт с помощью следующей конструкции, подобные которой широко применяются для приближенных расчетов в калибровочных моделях на решетках.

Пример 3.4.4. Всякий стягиваемый в точку x путь γ можно представить как образ границы квадрата $[0, 1]\times[0, 1]$ при некотором его отображении f в X. Разобьем квадрат на $m\times m$ клеток и обозначим $\lambda(i, j)$ отмеченный на нем путь. Образ этого пути $\gamma(i, j)$ в пространстве X при отображении f называется *лассо*. Тогда легко проверить, что путь γ может быть представлен как композиция таких лассо

$$\gamma(m, m)\dots\gamma(1, m)\dots\gamma(m, 2)\dots\gamma(1, 2)\dots\gamma(m, 1)\dots\gamma(1, 1). \tag{3.41}$$

Пусть теперь число элементов разбиения неограниченно возрастает. Тогда вклад каждого лассо в оператор параллельного переноса имеет вид

$$g^{-1}\exp\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\Delta S^{\mu\nu}\right)g,$$

где g — оператор параллельного переноса вдоль петли лассо, F — кривизна в некоторой точке внутри петли лассо, а ΔS — элемент площади петли лассо. Если $F = 0$ во всех точках, g_γ — тождественное преобразование. □

Когда связность плоская, ограниченная группа голономии тривиальна и гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(X, x)$ на K_x/K_x^0 превращается в гомоморфизм на K_x, а тем самым определены гомоморфизмы $\pi_1(X, x)$ на сопряженные подгруппы структурной группы G.

Пример 3.4.5. Рассмотрим тривиальное $U(1)$-расслоение над пространством $\mathbb{R}^3\setminus\{\rho = 0\}$ из Примера 3.4.1 и на нем плоскую связность, задаваемую формой (3.29). Интеграл от этой формы по стягиваемому контуру равен нулю. Чтобы это показать, представим, следуя конструкции из Примера 3.4.4, стягиваемый путь как композицию лассо $\gamma(i, j)$, таких, что петля каждого лассо принадлежит стягиваемой области в X. Тогда в каждой такой области форма (3.29) является точной и интеграл от формы A вдоль петли каждого лассо, а тем самым вдоль каждого лассо и, следовательно, вдоль рассматриваемого пути γ равен 0. Таким образом, интеграл от формы (3.29) по замкнутому пути γ зависит только от гомотопического класса этого пути. Выберем в качестве представителя каждого класса $n\in\mathbb{Z} = \pi_1(X)$ путь γ_n — n оборотов по окружности $\rho = \text{const}$ в плоскости $z = \text{const}$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma_n} A = \Phi n,$$

и, согласно (3.40), имеется гомоморфизм группы $\pi_1(X)$ на подгруппу группы $U(1)$, состоящую из элементов $U(1)$ с параметрами

$$a_n = (\Phi n)\bmod 2\pi, \quad n = 0, \quad \pm 1, \dots .$$

Как видим, два вакуумных поля (3.29) задают один и тот же гомоморфизм

$$\pi_1(X)\to U(1),$$

если их коэффициенты Φ и Φ' отличаются на $2\pi k$. Но такие поля связаны калибровочным преобразованием

$$\frac{i\Phi}{2\pi\rho} = \frac{i\Phi'}{2\pi\rho} + e^{-ik'\alpha}\frac{1}{\rho}\partial_\alpha e^{ik\alpha}. \tag{3.42}$$

□

Пример 3.4.6. Расслоениями, связность на которых всегда плоская, являются накрытия. В этом случае всякий путь, выходящий из точки $x \in X$, допускает единственный возможный накрывающий путь, выходящий из каждой точки $p \in \pi^{-1}(x)$. Поэтому группа Γ_x единственным образом порождает группу голономии K_p на накрытии. При этом пути, выходящие из p и накрывающие гомотопные пути из Γ_x, должны оканчиваться в одной и той же точке из $\pi^{-1}(x)$. Действительно, пути, оканчивающиеся в разных точках дискретного слоя $\pi^{-1}(x)$, не могут быть стянуты друг в друга. В частности, пути, выходящие из p и накрывающие стягиваемые пути из Γ_x, оканчиваются в самой точке p. Отсюда следует, что группу голономии K_p на накрытии порождает гомотопическая группа $\pi_1(X, \pi(p))$, и, если накрытие допускает структурную группу G, имеется гомоморфизм $\pi_1(X, \pi(p)) \to G$. □

Пусть теперь, обратно, задан гомоморфизм $\pi_1(X)$ в G с ядром N. Можно показать, что над X существует главное расслоение λ_N, структурной группой которого (она же группа голономии) является $\pi_1(X)/N$. Поэтому над X можно построить расслоение λ со структурной группой G, редуцированной к $\pi_1(X)/N$, которое ассоциировано с λ_N, т. е. имеет атлас Ψ_0, чьими функциями перехода являются постоянные функции со значениями в образе $\pi_1(X)$ в G.

Зададим локальную 1-форму связности A, которая в атласе Ψ_0 имеет вид $A = 0$. Это можно сделать, так как все функции $\rho_{ij} = \text{const}$ и

$$A_i = \rho_{ij} A_j \rho_{ij}^{-1} + \rho_{ij} d\rho_{ij}^{-1} = 0,$$

если $A_j = 0$. Хотя в атласе Ψ_0 форма связности $A = 0$, **это не означает, что группа голономии связности тривиальна**, поскольку при параллельном переносе слои будут преобразовываться под действием функций перехода атласа Ψ_0 (см. выражение (3.39)). При переходе к другому атласу форма A примет вид

$$A_i = g_i dg_i^{-1},$$

а ее форма кривизны остается равной нулю во всех точках.

Атлас Ψ_0 задан не однозначно, а с точностью до калибровочных изоморфизмов g_i, сохраняющих функции перехода атласа Ψ_0. Если в другом таком атласе Ψ_0' определить форму связности $A' = 0$, то при переходе к атласу Ψ_0 получим

$$A_i' = g_i dg_i^{-1},$$

т. е. A и A' связаны калибровочным преобразованием. Таким образом, **гомоморфизм $\pi_1(X)$ в G определяет вакуумное калибровочное поле с точностью до калибровочной эквивалентности.**

Пример 3.4.7. Пусть X — то же пространство, что и в Примере 3.4.5, $G = U(1)$ и задан гомоморфизм

$$\pi_1(X) = \mathbb{Z} \ni n \to a = (\pi n) \bmod 2\pi \in U(1).$$

Построим над X тривиальное $U(1)$-расслоение, как в Примере 3.4.5, и зададим его атлас

$$\Psi_0 = \{U_1, U_2, \rho_{12}, \rho_{21}\},$$

$$U_1 = \left\{\rho, 0 < \alpha_1 < \frac{3\pi}{2}, z\right\}, \quad U_2 = \left\{\rho, \pi < \alpha_2 < \frac{5\pi}{2}, z\right\},$$

$$U_1 \cap U_2 = V_1 \cup V = \left\{\pi < \alpha_1 = \alpha_2 < \frac{3\pi}{2}\right\} \cup \left\{0 < \alpha_1 = \alpha_2 - 2\pi < \frac{\pi}{2}\right\},$$

$$\rho_{12}(x) = 1, \quad x \in V_1, \quad \rho_{21}(x) = -1, \quad x \in V_2.$$

Определим в атласе Ψ_0 локальную 1-форму связности $A = 0$. Однако ее группа голономии не тривиальна, поскольку при параллельном переносе вдоль пути γ_n (см. Пример 3.4.5) в результате n-кратного действия функций перехода ρ_{12} и ρ_{21}, согласно (3.39), получаем $g_\gamma = (-1)^n$. Перейдем калибровочным преобразованием

$$g_1 = \exp\left(-i\frac{\alpha_1}{2}\right), \quad g_2 = \exp\left(-i\frac{\alpha_2}{2}\right),$$

к атласу

$$\Psi = \{U_1, U_2, \rho'_{12}, \rho'_{21}\}$$

с тождественными функциями перехода

$$\rho'_{12} = g_1\rho_{12}g_2^{-1} = \exp\left(-i\frac{\alpha_1}{2}\right)\exp\left(i\frac{\alpha_1}{2}\right) = 1,$$

$$\rho'_{21} = g_2\rho_{21}g_1^{-1} = \exp\left(-i\frac{(\alpha_1 + 2\pi)}{2}\right)(-1)\exp\left(i\frac{\alpha_1}{2}\right) = 1.$$

В этом атласе поле A принимает вид (3.29):

$$A_1 = g_1 dg_1^{-1} = A_2 = g_2 dg_2^{-1} = \frac{i}{2}\,d\alpha.$$

□

При совершении калибровочных преобразований в моделях на нестягиваемых топологических пространствах надо, однако, проявлять осторожность. Дело в том, что **такие преобразования не всегда оставляют инвариантными интегральные величины**. Проиллюстрируем это опять на примере абелева калибровочного поля. Пусть X — снова пространство $\mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\}$, λ — тривиальное $U(1)$-расслоение над X и

$$\Psi = \{U_1, U_2, \rho_{12} = \rho_{21} = 1\}$$

— его атлас с тождественными функциями перехода, как в Примерах 3.4.5 и 3.4.7. Рассмотрим калибровочное преобразование

$$g = \exp(in\alpha).$$

Оно определено на всем пространстве X, поскольку

$$g(\alpha_1) = g(\alpha_2), \quad \alpha_1 = \alpha_2 \in V_1, \quad \alpha_1 + 2\pi = \alpha_2 \in V_2,$$

и устанавливает калибровочную эквивалентность (3.42), например, между полями $A = 0$ и $A' = in\,d\alpha$. Однако интеграл по нестягиваемому замкнутому контуру γ_1 от формы A

равен нулю, а от формы A' равен $i2\pi n$. Причина в том, что форма $g(\alpha)\,dg^{-1}(\alpha)$, на которую изменяется 1-форма связности A при таком калибровочном преобразовании, не является точной, поскольку

$$g(\alpha_1)\,dg^{-1}(\alpha_1) = in\,d\alpha_1 = in\,d\alpha_2 = g(\alpha_2)\,dg^{-1}(\alpha_2),$$

но $\alpha_1 \neq \alpha_2$. В частности, в Примере 3.4.2 поля $A = 0$ и $A' = ind\alpha$ приводят к различным значениям магнитного потока 0 и $-2\pi ne$.

Для описания таких эффектов, как образование флаксонов и квантование магнитного потока, необходимо рассматривать вакуумные электромагнитные поля с учетом их когомологической эквивалентности. Сделаем это, привлекая понятие относительных гомологий и когомологий.

Относительные гомологии и когомологии

Пусть Y — топологическое пространство, а X — его подпространство. Тогда группы сингулярных цепей $C_k(X)$ лежат в группах $C_k(Y)$. Назовем *группой относительных цепей* фактор-группу

$$C_k(Y, X) = C_k(Y)/C_k(X).$$

Элементами $C_k(Y, X)$ являются классы $\tilde{c}_k$, состоящие из k-цепей c_k в Y, отличающиеся на k-цепи в X. Граничный оператор ∂ переводит $C_k(X)$ в $C_{k-1}(X)$, поэтому он определяет некоторый граничный оператор

$$C_k(Y, X) \to C_{k-1}(Y, X).$$

Как и раньше, определим *относительные циклы*, для которых $\partial\tilde{c}_k = 0$ (это классы k-цепей c_k в Y, имеющие границы ∂c_k в X), и *относительные границы*

$$\tilde{c}_k = \partial\tilde{c}_{k+1}$$

(это классы k-цепей c_k в Y, отличающиеся от границ $c_k = \partial c_{k+1}$ в Y на некоторую k-цепь в X). *Группой относительных гомологий* $H_k(Y, X)$ называется фактор-группа относительных k-циклов по относительным k-границам. Как и для гомотопических групп, для **групп гомологий пары** (Y, X) **имеет место** *точная последовательность*

$$\ldots \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_k(Y) \longrightarrow H_k(Y, X) \longrightarrow H_{k-1}(X) \longrightarrow \ldots . \tag{3.43}$$

Пример 3.4.8. Если Y — стягиваемое пространство, то $H_k(Y) = 0$, $k > 0$. Тогда точная последовательность (3.43) разбивается на короткие последовательности

$$0 \longrightarrow H_{k+1}(Y, X) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow 0, \quad k > 0.$$

Откуда следует, что

$$H_{k+1}(Y, X) = H_k(X), \quad k > 0.$$

□

Аналогично относительным гомологиям можно определить *относительные когомологии*. Пусть X — подмногообразие многообразия Y. Рассмотрим гомоморфизм ограничения k-форм

$$\Omega^k(Y) \to \Omega^k(X).$$

Ядро этого гомоморфизма называется *группой относительных k-мерных коцепей* $\Omega^k(Y, X)$ пары (Y, X). Она состоит из k-форм σ^k на Y, которые на $X \subset Y$ равны нулю. Будем обозначать такие формы $\tilde{\sigma}^k$. На $\Omega^*(Y, X)$ действует тот же оператор внешнего дифференцирования d, что и на $\Omega^*(Y)$, и определены *относительные коциклы* и *кограницы*, представляемые замкнутыми ($d\tilde{\sigma}^k = 0$) и точными ($\tilde{\sigma}^k = d\tilde{\sigma}^{k-1}$) формами. При этом **относительный коцикл является и обычным коциклом, но относительный коцикл, будучи обычной границей** (т. е. $\tilde{\sigma}^k = d\sigma^{k-1}$), **может не быть относительной границей**, т. е. не найдется нулевая на X форма $\tilde{\sigma}^{k-1}$, такая, что $\tilde{\sigma}^k = d\tilde{\sigma}^{k-1}$.

Группами относительных когомологий $H^k(Y, X)$ называются фактор-группы замкнутых k-форм $\tilde{\sigma}^k$ по относительным k-границам. Как и для групп гомологий, **для групп когомологий пары** (Y, X) **имеет место** *точная последовательность*

$$\ldots \longrightarrow H^k(Y, X) \longrightarrow H^k(Y) \longrightarrow H^k(X) \longrightarrow H^{k+1}(Y, X) \longrightarrow \ldots . \tag{3.44}$$

Пример 3.4.9. Если Y — стягиваемое пространство, то $H^k(Y) = 0$, $k > 0$. Тогда точная последовательность (3.44) разбивается на короткие последовательности

$$0 \longrightarrow H^k(X) \longrightarrow H^{k+1}(Y, X) \longrightarrow 0, \quad k > 0.$$

Откуда следует, что

$$H^{k+1}(Y, X) = H^k(X), \quad k > 0.$$

□

Применим эти конструкции к интересующему нас случаю вакуумных электромагнитных полей. Пусть Y — многообразие, некоторое подмногообразие которого X допускает вакуумное электромагнитное поле. Тогда группа относительных когомологий $H^2(Y, X)$ определяет множество типов магнитных полей в $Y \setminus X$, образующих флаксоны.

Поток такого поля $\tilde{\sigma}^2$ (это коцикл в $\Omega^2(Y, X)$) через поверхность $\tilde{c}_2$ в Y, граница которой принадлежит X ($\tilde{c}_2$ — цикл в $C_2(Y, X)$), определяется интегралом

$$\Phi = \int\limits_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2,$$

который зависит только от класса относительных когомологий $H^2(Y, X)$ формы $\tilde{\sigma}^2$ и класса относительных гомологий $H_2(Y, X)$ поверхности $\tilde{c}_2$. Действительно,

$$\int\limits_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^{2\prime} = \int\limits_{\tilde{c}_2} (\tilde{\sigma}^2 + d\tilde{\sigma}^1) = \int\limits_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2 + \int\limits_{\partial \tilde{c}_2 \subset X} \tilde{\sigma}^1 = \int\limits_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2,$$

$$\int\limits_{\tilde{c}_2'} \tilde{\sigma}^2 = \int\limits_{\tilde{c}_2 + \partial \tilde{c}_3 + \Delta} \tilde{\sigma}^2 = \int\limits_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2 + \int\limits_{\partial \tilde{c}_3} \tilde{\sigma}^2 + \int\limits_{\Delta} \tilde{\sigma}^2 = \int\limits_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2 + \int\limits_{\tilde{c}_3} d\tilde{\sigma}^2 = \int\limits_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2.$$

Если Y — стягиваемое пространство (например, $Y = \mathbb{R}^3$, а X — конфигурация, образованная сверхпроводником), то всякая замкнутая форма $\tilde{\sigma}^2$ является точной на Y, т. е. $\tilde{\sigma}^2 = d\sigma^1$, где σ^1 — замкнутая форма при ограничении на X. Тогда значение интеграла

$$\Phi = \int\limits_{\tilde{c}_2} \sigma^2 = \int\limits_{\tilde{c}_2} d\sigma^1 = \int\limits_{\partial \tilde{c}_2 \subset X} \sigma^1 \tag{3.45}$$

определяется классом когомологий $H^1(X)$ формы σ^1 и классом гомологий $H_1(X)$ контура $\partial\tilde{c}_2$. Это является следствием изоморфизмов

$$H^{k+1}(Y, X) = H^k(X), \quad H_{k+1}(Y, X) = H_k(X)$$

для стягиваемого пространства Y. Частным случаем равенства (3.45), когда

$$Y = \mathbb{R}^3, \quad X = \mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\},$$

служит выражение для магнитного потока (3.32) в Примере 3.4.1.

Можно заметить, что, приведя общее математическое описание вакуумных калибровочных полей, рассмотрение конкретных моделей мы ограничили случаем только абелева поля. Дело в том, что вакуумные калибровочные поля на пространствах с абелевой группой $\pi_1(X)$ не могут порождать неабелеву группу голономии K в силу изоморфизма $\pi_1(X) = K$, а пространства с некоммутативными фундаментальными группами устроены довольно сложно. Одним из простейших примеров таких пространств является плоскость с ручкой, или, что эквивалентно, тор без точки (рис. 15), где пути a_1, a_2, b связаны соотношением $a_1 = ba_2b^{-1} \neq a_2$.

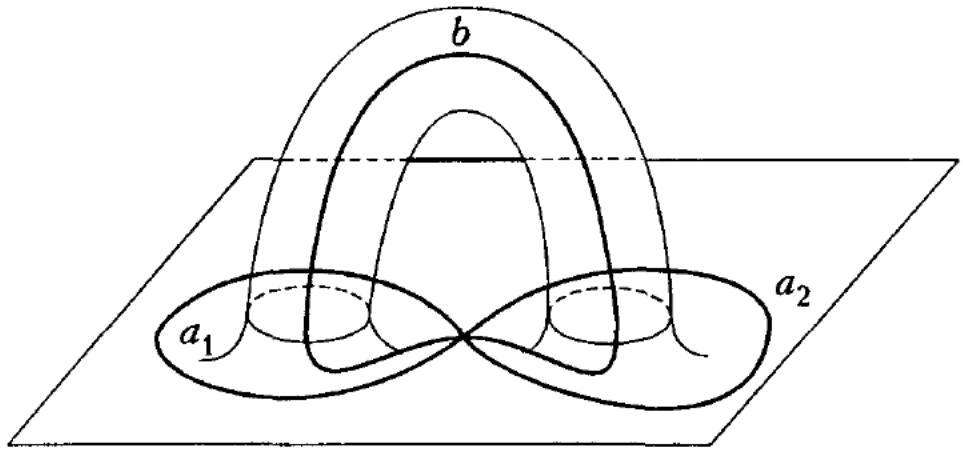


Рис. 15

Можно рассмотреть калибровочную модель неабелевой группы G на пространстве X с коммутативной группой $\pi_1(X)$. Однако вакуумные калибровочные поля группы G на таком пространстве фактически будут калибровочными полями некоторой абелевой подгруппы группы G. Например, в ряде работ исследовался эффект Ааронова—Бома в модели

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\}, \quad G = SU(2)$$

($SU(2)$ — группа преобразований изоспина). Выбором калибровки вакуумное калибровочное поле в этой модели может быть приведено к виду

$$A_\rho = A_z = 0, \quad A_\alpha = \frac{i\Phi}{2\pi\rho}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. представляет собой калибровочное поле абелевой подгруппы $U(1)$ группы $SU(2)$, состоящей из матриц

$$\exp(i\alpha)\tau_3 = \begin{pmatrix} \exp(i\alpha) & 0 \\ 0 & -\exp(i\alpha) \end{pmatrix}.$$

В заключение отметим, что в моделях вакуумных калибровочных полей, как и в солитонных моделях, рассматривались тривиальные расслоения. Более того, само наличие плоской связности предполагает если не тривиальность, то редукцию структурной группы расслоения к дискретной подгруппе. Это следует из того, что **если расслоение со структурной группой G над связной паракомпактной базой допускает связность, абстрактная группа голономии которой изоморфна подгруппе K, то структурная группа расслоения редуцирована к этой подгруппе. Обратное неверно**, например, тривиальность расслоения не накладывает ограничений на группу голономии.

Перейдем теперь к рассмотрению тополого-алгебраических характеристик, которые, в отличие от уже использовавшихся для вакуумных калибровочных полей и солитонов, вызваны именно нетривиальностью расслоений, описывающих ту или иную полевую систему.

§ 5. Характеристические классы расслоений

Классификационная теорема

Большинство топологических чисел и зарядов, фигурирующих в полевых моделях, представляют собой тополого-алгебраические характеристики, описывающие различные классы ассоциированных расслоений. Поэтому обратимся к задаче классификации расслоений с данной структурной группой G над топологическим пространством X.

В общем виде эта задача решается *классификационной теоремой*, которая устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами ассоциированных расслоений над X и гомотопическими классами отображений базы X в некоторое специальное классифицирующее пространство, зависящее только от структурной группы.

Обозначим $S(X, G)$ множество классов ассоциированных расслоений над топологическим пространством X со структурной топологической группой G. Рассмотрим действие на это множество операций сужения структурной группы и индуцирования.

Пусть G' — подгруппа группы G. Тогда вложение $G' \to G$ порождает естественное вложение множества $S(X, G')$ в множество $S(X, G)$, образами которого являются классы расслоений над X, структурная группа G которых редуцирована к подгруппе G'. В частности, если база X паракомпактна, G — группа Ли, а G' — ее максимальная компактная подгруппа, то

$$S(X, G) = S(X, G'),$$

поскольку в этом случае структурная группа расслоений над X всегда редуцирована к G'.

Пример 3.5.1. Укажем важные для физических приложений случаи совпадения

$$S(X, G) = S(X, G' \subset G),$$

когда

$$\begin{aligned} &G = GL(n, \mathbb{C}), && G' = U(n);\\ &G = GL(n, \mathbb{R}), && G' = O(n);\\ &G = GL^{+}(n, \mathbb{R}), && G' = SO(n);\\ &G = SO(3, 1), && G' = SO(3). \end{aligned}$$

□

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Для всякого расслоения λ над Y оно индуцирует расслоение $f^*\lambda$ над X. Оно наследует структурную группу G расслоения λ.

Поэтому отображение f порождает морфизм

$$f^* : S(Y, G) \to S(X, G).$$

Для клеточных пространств и паракомпактных пространств морфизмы f^* зависят только от гомотопического класса отображений f и тем самым определяют морфизм

$$\pi(X, Y) \to S(X, G).$$

Если бы нашлось такое пространство Y, что отображения $f : X \to Y$ индуцируют биекцию $\pi(X, Y)$ на $S(X, G)$, это позволило бы описать множество $S(X, G)$ классов G-расслоений над X. Для клеточных пространств X такое пространство существует.

Расслоение Λ со структурной группой G, типичным слоем V и базой $\operatorname{bs}\Lambda = X_\Lambda$ называется *универсальным*, если:

а) для всякого расслоения λ с клеточной базой X и слоем V существует такое непрерывное отображение $f : X \to X_\Lambda$, что расслоение $f^*\Lambda$ эквивалентно λ;

б) всякие два непрерывные отображения f_1 и f_2 клеточного пространства в X_Λ, индуцирующие эквивалентные расслоения $f_1^*\Lambda$ и $f_2^*\Lambda$, гомотопны.

База универсального расслоения Λ со структурной группой G одновременно является базой универсальных расслоений со структурной группой G и всевозможными другими типичными слоями и в этом смысле не зависит от типичного слоя. Она называется *классифицирующим пространством* группы G.

Теорема, устанавливающая существование классифицирующих пространств, называется *классификационной теоремой*.

Теорема 3.5.1. Для всякой топологической группы G существует топологическое пространство $B(G)$, являющееся классифицирующим для всех расслоений со структурной группой G над клеточными пространствами X, т. е.

$$S(X, G) = \pi(X, B(G)).$$

□

Из классификационной теоремы следует, что **для данной группы G множество $S(X, G)$ зависит только от гомотопического типа пространства X и является тем самым гомотопическим инвариантом.** Это и позволяет решать задачу классификации расслоений методами алгебраической топологии. Для некоторых типов топологических групп G классификационная теорема справедлива для расслоений не только с клеточной базой.

Пример 3.5.2. Чтобы проиллюстрировать действие классификационной теоремы, приведем классификацию расслоений с дискретной структурной группой G. Главное расслоение λ с дискретной структурной группой образует накрытие (см. Пример 3.4.6). Рассмотрим для этого расслоения, как и в Примере 3.1.10, точную последовательность гомотопических групп (3.5), которая распадается на короткие точные последовательности (3.6) и (3.7). При этом в случае главного расслоения проекция (3.9) — это гомоморфизм фундаментальной группы через порождаемую ею группу голономии K_p (см. Пример 3.4.6) на G как на структурную группу. Отсюда следует, что $K_p = G$ и образ $\pi_1(\mathrm{tl}\,\lambda, p)$ в $\pi_1(X, \pi(p))$ при мономорфизме (3.8) — это некоторая подгруппа N группы $\pi_1(X, \pi(p))$. Таким образом, для существования над связным пространством X расслоения со структурной группой G необходимо, чтобы в $\pi_1(X, .)$ существовала такая инвариантная подгруппа N, что фактор-группа $\pi_1(X, .)/N$ изоморфна G. Для широкого класса пространств X, например, связных *локально стягиваемых* (когда всякая окрестность

точки содержит стягиваемую окрестность), это условие является достаточным. Классифицирующим пространством $B(G)$ дискретной группы G является, например, связное локально стягиваемое пространство с гомотопическими группами

$$\pi_1(B(G)) = G, \quad \pi_n(B(G)) = 0,\ n > 1.$$

Действительно, в этом случае гомотопический тип отображения $X \to B(G)$ определяется только ядром гомоморфизма

$$\pi_1(X, .) \to \pi_1(B(G), .) = G.$$

□

Для физических приложений наибольший интерес представляют дифференцируемые векторные расслоения над паракомпактными многообразиями со структурными группами $GL(n, \mathbb{C})$ или $GL(n, \mathbb{R})$, редуцированными соответственно к $U(n)$ и $O(n)$. Классифицирующими пространствами этих групп служат

$$B(U(n)) = \lim_{N\to\infty} G(n, N; \mathbb{C}),$$
$$B(O(n)) = \lim_{N\pm\infty} G(n, N; \mathbb{R}),$$

где $G(n, N; \mathbb{C})$ и $G(n, N; \mathbb{R})$ — многообразия Грассмана n-мерных плоскостей в $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{R}^N$. Знание классифицирующих пространств позволяет классифицировать $U(n)$- и $O(n)$-расслоения над многообразиями (и над более широким классом пространств) с помощью характеристических классов — элементов групп когомологий $H^*(X, \mathbb{Z})$ со значениями в постоянном пучке $\mathbb{Z}$ (см. Приложение В).

Мы в основном будем иметь дело со следующими *характеристическими классами*:
классами Чженя $c_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ для $U(n)$-расслоений;
классами Понтрягина $p_i \in H^{4i}(X, \mathbb{Z})$ для $O(n)$-расслоений;
классом Эйлера $e \in H^n(X, \mathbb{Z})$ для $SO(n)$-расслоений;
классами Штифеля—Уитни $w_i \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$ для касательных расслоений.

Классы Чженя

Начнем с классов Чженя $U(n)$-расслоений. Возможны различные пути описания классов Чженя и определения их свойств. Воспользовавшись вложением

$$H^*(X, \mathbb{Z}) \to H^*(X, \mathbb{R})$$

(по модулю кручения) и изоморфизмом $H^*(X, \mathbb{R})$ и групп когомологий де Рама $H^*(X)$ (см. Приложение В), мы будем строить классы Чженя как классы когомологий некоторых форм на X.

Пусть A — комплексная $(k \times k)$-матрица и $P(A)$ — полином из компонент матрицы A. Полином $P(A)$ называется *характеристическим*, если

$$P(A) = P(gAg^{-1})$$

для всех $g \in GL(k, \mathbb{C})$. Если A имеет собственные значения $\{a_1, \ldots, a_k\}$, то $P(A)$ представляет собой симметричную функцию этих значений. Обозначим $S_j(a)$ следующий симметричный полином от a_i степени j:

$$S_j(a) = \sum_{i_1<\ldots<i_j} a_{i_1} \ldots a_{i_j}. \tag{3.46}$$

Тогда $P(A)$ представим как полином

$$P(A) = b_0 + b_1 S_1(a) + b_2 dS_2(a) + \dots$$

от $S_j(a)$, $j = 1, \dots, k$.

Пример 3.5.3. $\det(\hat{1}+A)$, где $\hat{1}$ — единичная матрица, является характеристическим полиномом и

$$\det(\hat{1} + A) = 1 + S_1(a) + S_2(a) + \dots + S_k(a).$$

□

Пусть $P(A)$ — характеристический полином. Подставим в него вместо A матрично-значную 2-форму кривизны (напряженности) F некоторой связности на дифференцируемом векторном расслоении со структурной группой. Тогда, как можно показать, так называемая *характеритическая форма* $P(F)$ обладает следующими свойствами:

а) $P(F)$ — замкнутая форма, т. е. $dP(F) = 0$;

б) $P(F) - P(F')$, где F и F' — формы кривизны двух любых связностей на расслоении, является точной формой.

Последнее означает, что **характеристический полином, взятый от различных форм кривизны на данном расслоении, имеет один и тот же когомологический класс де Рама**, который тем самым может служить характеристикой этого расслоения. Это действительно так, и характеристические классы расслоений представляются когомологическими классами характеристических полиномов от форм кривизны на расслоении.

Пусть λ — комплексное векторное расслоение над n-мерным многообразием X со структурной группой $GL(k, \mathbb{C})$ и F — форма кривизны на λ. *Полной формой Чженя* называется следующий характеристический полином от F:

$$c(F) = \det\left(\hat{1} + \frac{i}{2\pi}F\right) = 1 + c_1(F) + c_2(F) + \dots . \tag{3.47}$$

Составляющие его $2i$-формы $c_i(F)$ называются *формами Чженя* и являются полиномами степени i от F:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= \frac{i}{2\pi}\operatorname{Tr} F, \\ c_2 &= \frac{1}{8\pi^2}\{\operatorname{Tr}(F \wedge F) - \operatorname{Tr} F \wedge \operatorname{Tr} F\}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Все формы Чженя $c_i(F)$ замкнуты, и их когомологические классы отождествляются с характеристическими классами Чженя расслоения λ, будучи образами $c_i(\lambda) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ при отображении

$$H^*(X, \mathbb{Z}) \to H^*(X, \mathbb{R}) = H^*(X).$$

Пример 3.5.4. Построим полную форму Чженя (3.47) от формы кривизны на $U(1)$-расслоении λ_n над сферой S^2:

$$\begin{aligned} c &= \det\left(\hat{1} + \frac{i}{2\pi}F\right) = 1 + c_1(F), \\ c_1(F) &= \frac{i}{2\pi}\operatorname{Tr} F = -\frac{n}{4\pi}\sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi. \end{aligned} \tag{3.49}$$

□

Пример 3.5.5. Запишем полную форму Чженя для $SU(2)$-расслоения над многообразием X^4. Форма кривизны на таком расслоении имеет вид

$$F = -\frac{i\tau_a}{2}F^a, \quad \operatorname{Tr} F = 0,$$

где τ_a — матрицы Паули. Тогда

$$\begin{aligned} c(F) &= \det\left(\hat{1} + \frac{1}{4\pi}\tau_a F^a\right) = 1 + c_1(F) + c_2(F), \\ c_1(F) &= 0, \\ c_2(F) &= \frac{1}{8\pi^2}\operatorname{Tr}(F \wedge F) = -\frac{1}{(4\pi)^2}F_a \wedge F_a. \end{aligned} \tag{3.50}$$

□

Представление *классов Чженя* формами Чженя позволяет легко получить свойства этих классов:

$$\begin{aligned} &\text{A1)} \quad c_i(\lambda) = 0, \quad 2i > n = \dim X; \\ &\text{A2)} \quad c_i(\lambda) = 0, \quad i > k; \\ &\text{A3)} \quad c(\lambda \oplus \lambda') = c(\lambda)c(\lambda'); \\ &\text{A4)} \quad c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L'), \end{aligned} \tag{3.51}$$

где L, L' — линейные (1-мерные) $U(1)$-расслоения.

Отметим также, что если $f^*\lambda$ — индуцированное отображением $f : X \to Y$ расслоение, то

$$c(f^*\lambda) = f^*c(\lambda),$$

где

$$f^* : H^*(Y, \mathbb{Z}) \to H^*(X, \mathbb{Z})$$

— порождаемый отображением f гомоморфизм групп когомологий.

Эффективно использовать это свойство и свойство (A3) позволяет следующая теорема.

Теорема 3.5.2. Для всякого главного $U(k)$-расслоения λ над многообразием X существует пространство Y и непрерывное отображение $f : Y \to X$, такие, что:

а) $f^*\lambda$ есть сумма Уитни $U(1)$-расслоений;

б) $f^* : H^*(X, \mathbb{Z}) \to H^*(Y, \mathbb{Z})$ — вложение. □

Она дает возможность в целом ряде случаев выражать классы Чженя гладких $U(k)$-расслоений через классы Чженя $U(1)$-расслоений, или на примере этих случаев исследовать общие свойства классов Чженя. Это называется *принципом расщепления*. Согласно этому принципу

$$c(\lambda) = c(L_1 \oplus \ldots \oplus L_k) = c(L_1) \cdots c(L_k) = (1 + a_1) \cdots (1 + a_k), \tag{3.52}$$

где $a_i = c_1(L_i)$ — класс Чженя расслоения L_i. Из (3.52) находим

$$c_1 = \sum_i a_i,$$

$$c_2 = \sum_{i_1<i_2} a_{i_1} a_{i_2},$$
$$c_j = \sum_{i_1<\ldots<i_j} a_{i_1} \ldots a_{i_j}. \tag{3.53}$$

Выражение (3.53) идентично выражению (3.46), и это не случайно, поскольку a_i представляют собой компоненты диагонализованной формы кривизны

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & F_k \end{pmatrix}, \quad a_j = \frac{i}{2\pi} F_j,$$

на расслоении $L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$.

Пример 3.5.6. Пусть λ^* — дуальное к λ расслоение. Тогда, согласно принципу расщепления,

$$c(\lambda^*) = c(L_1^*) \cdots c(L_k^*) = (1 + a_1^*) \cdots (1 + a_k^*).$$

Поскольку переход к операторам и генераторам группы $U(1)$ в дуальном представлении состоит в операции комплексного сопряжения, т. е. $F^* = -F$, имеет место соотношение $a_i^* = -a_i$. Откуда легко получить свойство классов Чженя дуального расслоения

$$c_i(\lambda^*) = (-1)^i c_i(\lambda). \tag{3.54}$$

□

Если база X расслоения λ — замкнутое n-мерное многообразие, из форм Чженя можно составить n-формы и рассмотреть их интегралы по многообразию X. Значения последних будут зависеть только от когомологических классов форм Чженя. Тем самым они оказываются характеристическими для данного расслоения λ. Например, для $n = 4$ имеется два таких *числа Чженя*

$$C_2 = \int_X c_2, \quad C_1^2 = \int_X c_1 \wedge c_1. \tag{3.55}$$

Отметим, что, поскольку классы Чженя являются элементами целочисленных групп когомологий, числа Чженя оказываются целыми.

Пример 3.5.7. В случае $U(1)$-расслоения λ_n над S^2 из Примера 3.5.4 получаем число Чженя

$$C_1 = \int_{S^2} c_1 = -\frac{n}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -n. \tag{3.56}$$

Оно действительно является характеристическим для расслоения λ_n, поскольку расслоения λ_n с различными n не эквивалентны между собой и число n параметризует классы эквивалентности $U(1)$-расслоений над S^2. Показательно, что для тривиального расслоения λ_0 число Чженя (3.56) равно нулю. □

Для $U(k)$-расслоений, помимо классов Чженя, могут быть определены и другие характеристические классы, выражаемые через классы Чженя.

Характер Чженя $\mathrm{ch}(\lambda)$ задается характеристическим полиномом

$$\mathrm{ch}(A) = \mathrm{Tr}\exp\left(\frac{i}{2\pi}A\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\mathrm{Tr}\left(\frac{i}{2\pi}A\right)^m \tag{3.57}$$

и обладает свойствами

$$\mathrm{ch}(\lambda\oplus\lambda') = \mathrm{ch}(\lambda) + \mathrm{ch}(\lambda'),$$
$$\mathrm{ch}(\lambda\otimes\lambda') = \mathrm{ch}(\lambda)\cdot\mathrm{ch}(\lambda').$$

Его выражение через классы Чженя можно установить, используя принцип расщепления:

$$\mathrm{ch}(\lambda) = \mathrm{ch}(L_1\oplus\ldots\oplus L_k) = \mathrm{ch}(L_1)+\ldots+\mathrm{ch}(L_k) = \exp a_1+\ldots+\exp a_k =$$
$$= k + \sum_i a_i + \frac{1}{2}\sum_i a_i^2 + \ldots = k + \sum_i a_i + \frac{1}{2}\left[\left(\sum_i a_i\right)^2 - 2\sum_{i_1<i_2} a_{i_1}a_{a_2}\right] + \ldots =$$
$$= k + c_1(\lambda) + \frac{1}{2}[c_1^2(\lambda) - 2c_2(\lambda)] + \ldots .$$

Класс Тодда $U(k)$-расслоения следующим образом определяется через классы Чженя, используя принцип расщепления:

$$\mathrm{td}(\lambda) = \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{1-\exp(-a_i)} = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \ldots . \tag{3.58}$$

Он обладает свойством

$$\mathrm{td}(\lambda\oplus\lambda') = \mathrm{td}\,\lambda\cdot\mathrm{td}\,\lambda'.$$

Классы Понтрягина

Перейдем теперь к характеристическим классам вещественного k-мерного векторного расслоения λ, имеющего структурную группу $O(k)$.

Опишем *классы Понтрягина* такого расслоения когомологическими классами компонент характеристического полинома

$$p(F) = \det\left(\hat{1} - \frac{1}{2\pi}F\right) = 1 + p_1 + p_2 + \ldots \tag{3.59}$$

от формы кривизны F на λ, принимающей значения в алгебре Ли $O(k)$. Поскольку в представлении на $\mathbb{R}^k$ генераторы $O(k)$ таковы, что

$$(I)^a{}_b = -(I)^b{}_a,$$

в разложении (3.59) отличны от нуля компоненты только четной по F степени, и, таким образом, $p_j \in H^{4j}(X)$. Классы Понтрягина обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}&\text{Б1)}\ p_i(\lambda) = 0, \quad 4i > n = \dim X;\\ &\text{Б2)}\ p_i(\lambda) = 0, \quad 2i > k;\\ &\text{Б3)}\ p(\lambda\oplus\lambda') = p(\lambda) + p(\lambda').\end{aligned} \tag{3.60}$$

Отметим, что, в отличие от комплексного случая, хотя характеристические классы расслоений со структурными группами $O(k)$ и $GL(k,\mathbb{R})$ совпадают ($GL(k,\mathbb{R})$ всегда

редуцирована к $O(k)$), **характеристические формы для них, вообще говоря, различны**. Например, если F — форма кривизны, принимающая значения в алгебре Ли $gl(k, \mathbb{R})$, то в разложении (3.57) могут возникнуть компоненты нечетной степени по F. Поэтому во избежание недоразумений **характеристические формы, отвечающие классам Понтрягина, следует строить только из $O(k)$- или $O(k-q, q)$-значных форм кривизны**.

Пример 3.5.8. Рассмотрим касательное расслоение над многообразием X^4. Для него имеется единственный класс Понтрягина $p_1 \in H^4(X)$, характеристическая форма для которого может быть построена из формы кривизны F некоторой римановой метрики на X:

$$p_1 = -\frac{1}{8\pi^2}\operatorname{Tr} F \wedge F = -\frac{1}{8\pi^2}(F)^a{}_b \wedge (F)^b{}_a.$$

□

Аксиоматически классы Понтрягина $O(k)$-расслоений могут быть введены через классы Чженя $U(k)$-расслоений. Для этого воспользуемся следующими коммутативными диаграммами вложений:

$$\begin{array}{ccc} U(k) & \longrightarrow & O(2k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ GL(k, \mathbb{C}) & \longrightarrow & GL(2k, \mathbb{R}) \end{array}, \tag{3.61}$$

$$\begin{array}{ccc} O(k) & \longrightarrow & U(k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ GL(k, \mathbb{R}) & \longrightarrow & GL(k, \mathbb{C}) \end{array}. \tag{3.62}$$

В диаграмме (3.61) горизонтальные стрелки обозначают вложения, получающиеся, если линейное преобразование пространства $\mathbb{C}^k$ с комплексными координатами $z^1, \ldots, z^k$ представить как линейное преобразование вещественного пространства $\mathbb{R}^{2k}$ с координатами $x^1, \ldots, x^{2k}$, положив

$$z^i = x^i + ix^{k+i}.$$

В диаграмме (3.62) горизонтальные стрелки обозначают вложения, получающиеся, если матрицы с вещественными коэффициентами рассматривать как частный случай матриц с комплексными коэффициентами.

Диаграмма (3.62) определяет вложение

$$\varphi : S(X, O(k)) \to S(X, U(k)),$$

и для $O(k)$-расслоений над X положим

$$p_i(\lambda) = (-1)^i c_{2i}(\varphi(\lambda)), \quad p(\lambda) = \sum_i p_i(\lambda). \tag{3.63}$$

Элементы $p_i(\lambda) \in H^{4i}(X, \mathbb{Z})$ называются i-ми классами Понтрягина, а $p(\lambda)$ — *полным классом Понтрягина* расслоения λ. Их образами в когомологиях де Рама $H^*(X)$ являются

классы Понтрягина, определяемые через характеристический полином (3.59). Заметим, однако, что для классов Понтрягина (3.63) свойство (Б2) верно по модулю элементов порядка 2 в $H^*(X, \mathbb{Z})$.

Диаграмма (3.61) определяет вложение

$$\rho : S(X, U(k)) \to S(X, O(2k)),$$

а композиция $\varphi\rho$ — цепочку вложений

$$S(X, U(k)) \to S(X, O(2k)) \to S(X, U(2k)).$$

Таким образом, если λ есть $U(k)$-расслоение над X, то $\rho(\lambda)$ есть $O(2k)$-расслоение над X, а $\varphi(\rho(\lambda))$ — это $U(2k)$-расслоение над X. При этом элемент $A \in U(k)$ в комплексных координатах z^i пространства $\mathbb{C}^k$ вложениями

$$U(k) \to O(2k) \to U(2k)$$

переводится в элементы

$$A \to \begin{pmatrix} \operatorname{Re} A & -\operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im} A & \operatorname{Re} A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix}$$

в вещественных координатах

$$x^i = \operatorname{Re} z^i, \quad x^{k+i} = \operatorname{Im} z^i$$

пространства $\mathbb{R}^{2k}$ и в комплексных координатах

$$z^i = x^i + ix^{k+i}, \quad z^{k+i} = x^i - ix^{k+i}$$

пространства $\mathbb{C}^{2k}$.

Поскольку элемент A унитарен, матрица A^* совпадает с транспонированной обратной матрицей. Следовательно, расслоение $\varphi\rho(\lambda)$ является суммой Уитни расслоения λ и дуального расслоения λ^*, и согласно свойству (А3) имеем

$$c(\varphi\rho(\lambda)) = c(\lambda)c(\lambda^*).$$

Отсюда, используя (3.63) и (3.54), получаем соотношение

$$\sum_i (-1)^i p_i(\rho(\lambda)) = c(\varphi\rho(\lambda)) = c(\lambda)c(\lambda^*) = \left[\sum_i c_i(\lambda)\right]\left[\sum_j (-1)^j c_j(\lambda)\right] \tag{3.64}$$

между классами Чженя $U(k)$-расслоения λ и классами Понтрягина $O(2k)$-расслоения $\rho(\lambda)$. Используем это соотношение в следующей конструкции.

Классами Понтрягина $p_i(X)$ вещественного многообразия X называются классы Понтрягина касательного расслоения TX.

Пусть многообразие X ориентировано и $\dim X = 2m$. Пусть структурная группа $GL(2m, \mathbb{R})$ касательного расслоения TX допускает редукцию к образу вложения $GL(m, \mathbb{C})$ в $GL(2m, \mathbb{R})$, т. е. расслоение TX имеет структуру некоторого $GL(m, \mathbb{C})$-расслоения (*почти комплексную структуру*), т. е. ассоциировано с некоторым $GL(m, \mathbb{C})$-расслоением. Тогда *классами Чженя такого вещественного многообразия X^{2m}* называются классы Чженя расслоения TX как $GL(m, \mathbb{C})$-расслоения, т. е.

$$c_i(X) = c_i(\rho(T(X))).$$

Отсюда, используя соотношение (3.64), определяем связь между классами Понтрягина и классами Чженя многообразия с почти комплексной структурой

$$\sum_i (-1)^i p_i(X) = \left[\sum_i c_i(X)\right]\left[\sum_j (-1)^j c_j(X)\right].$$

В частности,

$$p_1 = c_1^2 - 2c_2, \quad p_2 = c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_4, \tag{3.65}$$

или, используя принцип расщепления,

$$p_1 = \sum_i a_i^2, \quad p_2 = \sum_{i_1<i_2} a_{i_1}^2 a_{i_2}^2.$$

Пример 3.5.9. Многообразием с почти комплексной структурой является всякое пространственно-временное многообразие X^4. Это 4-мерное ориентируемое многообразие, на котором задана некоторая псевдориманова метрика g. Такая метрика существует тогда и только тогда, когда структурная группа $GL(4, \mathbb{R})$-расслоения TX^4 редуцирована к группе Лоренца. Группа Лоренца $SO(1, 3)$, как известно, принадлежит образу группы $SL(2, \mathbb{C})$ в $GL^+(4, \mathbb{R})$ ($SL(2, \mathbb{C})$ является двулистным накрытием над $SO(1, 3)$). Редукция структурной группы расслоения TX^4 к группе Лоренца означает, что TX^4 ассоциировано с некоторым $SL(2, \mathbb{C})$-расслоением, а следовательно, с $SU(2)$-расслоением. Поэтому наряду с классом Понтрягина $p_1(X^4)$ пространственно-временного многообразия X^4 определены его классы Чженя $c_1(X^4)$ и $c_2(X^4)$, связанные с $p_1(X^4)$ соотношением (3.65). Однако, поскольку класс Чженя c_1 для $SU(2)$-расслоений равен нулю (см. Пример 3.5.5), класс $c_1(X^4)$ тоже равен нулю. □

Если структурная группа $O(k)$-расслоения λ редуцирована к $SO(k)$, для такого расслоения определен *класс Эйлера* $e(\lambda)$. Он может быть построен аксиоматически как элемент группы $H^k(X, \mathbb{Z})$, обладающий следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&\text{B1)} \quad 2e(\lambda) = 0, \quad \text{если } k \text{ нечетно;}\\
&\text{B2)} \quad e(f^*\lambda) = f^* e(\lambda);\\
&\text{B3)} \quad e(\lambda \oplus \lambda') = e(\lambda)e(\lambda');\\
&\text{B4)} \quad e(\lambda) = c_1(\lambda), \ \text{если } k = 2.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Последнее свойство обусловлено изоморфизмом групп $SO(2)$ и $U(1)$.

Установим теперь связь класса Эйлера с классами Понтрягина и Чженя. Пусть λ — $U(k)$-расслоение над X и $\rho(\lambda)$ — $SO(2k)$-расслоение над X. Тогда, применяя принцип расщепления и свойства (B3) и (B4), получаем

$$\begin{aligned}
e(\rho(\lambda)) &= e(\rho(L_1) \oplus \ldots \oplus \rho(L_k)) = e(\rho(L_1)) \cdots e(\rho(L_k)) =\\
&= c_1(L_1) \cdots c_1(L_k) = a_1 \cdots a_k = c_k(\lambda).
\end{aligned} \tag{3.67}$$

В свою очередь, из (3.64) следует, что

$$p_k(\rho(\lambda)) = c_k^2(\rho(\lambda)),$$

и, таким образом, для всякого $SO(2k)$-расслоения

$$e(\lambda) = [p_k(\lambda)]^{1/2}. \tag{3.68}$$

Исходя их этого соотношения, можно построить характеристическую *форму Эйлера* для $SO(2k)$-расслоений. Из свойства (B.1) следует, что форма Эйлера для $SO(2k+1)$-расслоений должна быть когомологична нулю.

Пример 3.5.10. Пусть X^4 — ориентируемое многообразие. Тогда структурная группа касательного расслоения TX^4 редуцирована к $SO(4)$. Определим *форму Эйлера* для TX^4, выбрав в качестве F форму кривизны R некоторой римановой метрики на X^4. Воспользуемся соотношением (3.68), найдя

$$p_2 = \left[\frac{1}{32\pi^2}\,\varepsilon_{abcd}\,R^{ab}\wedge R^{cd}\right]^2$$

из разложения (3.59). В результате

$$e(F) = \frac{1}{32\pi^2}\,\varepsilon_{abcd}\,R^{ab}\wedge R^{cd} \tag{3.69}$$

□

Заметим, что при смене ориентации X^4 форма Эйлера меняет знак.

В заключение укажем еще на *классы Штифеля—Уитни* $w_i \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$ касательного расслоения над многообразием X. Так, многообразие X является ориентируемым тогда и только тогда, когда $w_1 = 0$, а если X допускает почти комплексную структуру,

$$w_{2i+1} = 0, \quad w_{2i} = c_i \bmod 2.$$

В отличие от ранее рассмотренных характеристических классов классы **Штифеля—Уитни не представимы как когомологические классы каких-либо характеристических форм**.

§ 6. Инстантоны

Инстантонами называются регулярные решения классических уравнений Янга—Миллса в евклидовом пространстве-времени, на которых функционал действия принимает конечное значение. Интерес к решениям уравнений различных полей (не только в калибровочной теории) в 4-мерном пространстве M с метрикой евклидовой сигнатуры $\delta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, +1, +1, +1)$ связан с их интерпретацией при квантовании как процессов туннелирования между состояниями, разделенными классическим барьером. Мы ограничимся здесь простейшими инстантонами для группы $SU(2)$.

Пусть

$$A(x) = A_\mu\,dx^\mu = A^a_\mu t_a\,dx^\mu$$

— 1-форма связности на $SU(2)$-расслоении над M. Удобно выбрать базис t_a алгебры Ли группы $SU(2)$ в виде антиэрмитовых 2×2-матриц

$$t_a = -\frac{i}{2}\,\tau_a, \quad a = 1, 2, 3,$$

где τ_a — матрицы Паули; t_a удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &t_a t_b - t_b t_a = \varepsilon_{abc} t_c,\\ &t_a t_b + t_b t_a = -\frac{1}{2}\,\delta_{ab}\hat{1},\\ &\mathrm{Tr}(t_a t_b) = -\frac{1}{2}\,\delta_{ab}. \end{aligned}\right\} \tag{3.70}$$

Отметим, что t_a являются образующими элементами алгебры так называемых *кватернионов* Q, которые можно представить как 2×2-матрицы вида

$$Q = Q_0\sigma^0 + Q_1\sigma^1 + Q_2\sigma^2 + Q_3\sigma^3 = Q_\mu\sigma^\mu, \tag{3.71}$$

где σ^μ — обобщенные матрицы Паули

$$\sigma^0 = 1, \quad \sigma^a = -2t^a, \quad a = 1, 2, 3,$$

а Q_μ — комплексные числа. *Вещественные кватернионы* имеют действительные коэффициенты Q_μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, а подалгебра чисто *мнимых кватернионов*, для которых $Q_0 = 0$, совпадает с алгеброй Ли группы $SU(2)$.

Сопряженным к Q кватернионом считается $\bar{Q} = Q^+$. При этом

$$\bar{\sigma}^0 = \sigma^0 = 1 \quad \bar{\sigma}^a = -\sigma^a = 2t^a, \quad a = 1, 2, 3,$$

и имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu &= \delta_{\mu\nu}\hat{1} + \overset{(-)}{\eta}_{\lambda\mu\nu}\sigma^\lambda, \\ \bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu &= \delta_{\mu\nu}\hat{1} + \overset{(+)}{\eta}_{\lambda\mu\nu}\sigma^\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{3.72}$$

где $\overset{(\pm)}{\eta}$ — так называемые *тензоры т'Хуфта*

$$\left.\begin{aligned} \overset{(-)}{\eta}_{\lambda\mu\nu} &= \delta_{\lambda\mu}\delta_{0\nu} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{0\mu} + \varepsilon_{0\lambda\mu\nu}, \\ \overset{(+)}{\eta}_{\lambda\mu\nu} &= \delta_{\lambda\nu}\delta_{0\mu} - \delta_{\lambda\mu}\delta_{0\nu} + \varepsilon_{0\lambda\mu\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{3.73}$$

а $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ — полностью антисимметричный тензор Леви—Чивита в евклидовом пространстве, т. е. $\varepsilon_{0123} = \varepsilon^{0123} = 1$. Легко установить, что $\overset{(\pm)}{\eta}_{0\mu\nu} = 0$ и существенными компонентами являются только $\overset{(\pm)}{\eta}_{a\mu\nu}$, $a = 1, 2, 3$. Причем

$$\left.\begin{aligned} \overset{(\pm)}{\eta}_{ab0} &= -\overset{(\pm)}{\eta}_{a0b} = \mp\delta_{ab}, \\ \overset{(\pm)}{\eta}_{abc} &= \varepsilon_{abc}, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \end{aligned}\right\} \tag{3.74}$$

а из (3.73) следует *самодуальность* (*антисамодуальность*) тензоров т'Хуфта:

$$\overset{(\pm)}{\eta}_{a\mu\nu} = \pm\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\overset{(\pm)}{\eta}_a^{\alpha\beta} \tag{3.75}$$

Из (3.72) легко получить

$$\bar{Q}Q = Q\bar{Q} = \det Q \cdot \hat{1} = Q_\mu Q^\mu \cdot \hat{1},$$

и следовательно, для всякого ненулевого кватерниона определен обратный элемент

$$Q^{-1} = \bar{Q}(Q_\mu Q^\mu)^{-1}.$$

Множество кватернионов единичной длины $\bar{Q}Q = 1$ образует группу (относительно матричного умножения), которая изоморфна группе $SU(2)$. В дальнейшем мы будем часто

использовать этот факт, представляя матрицы калибровочных преобразований $g \in SU(2)$ кватернионами (3.71). Также $SU(2)$-калибровочное поле A_μ можно рассматривать как чисто мнимое кватернионное поле на M.

Рассмотрим модель евклидова янг-миллсовского поля A_μ без источников. Его функционал действия

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4x\, \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \int d^4x\, \frac{1}{4} F_{a\mu\nu}F_a^{\mu\nu} \tag{3.76}$$

является положительно определенным, и поэтому, для того чтобы он был конечным, калибровочное поле должно достаточно быстро убывать на бесконечности, т. е.

$$F_{\mu\nu}(x) \to 0, \quad |x| \to \infty. \tag{3.77}$$

Поскольку M — евклидово пространство, из (3.77), как и в солитонных моделях, получаем, что калибровочный потенциал для поля с конечным действием есть чистая калибровка (вакуумное калибровочное поле)

$$A_\mu(x) \to g\partial_\mu g^{-1}, \quad g(x) \in SU(2), \tag{3.78}$$

на бесконечности $|x| \to \infty$.

Бесконечность в M будем описывать как сферу S^3_∞ с радиусом $R = x_\mu x^\mu \to \infty$, рассматривая ее как границу евклидова пространства $\partial M = S^3_\infty$. Тогда (3.77)—(3.78) задают граничные условия для конфигураций калибровочного поля на M.

Поля на ∂M определяются отображениями

$$g : S^3_\infty \to SU(2),$$

все множество которых распадается на классы гомотопически эквивалентных калибровочных преобразований. Поскольку $SU(2) \approx S^3$, гомотопическая группа

$$\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z},$$

и классы эквивалентности полей на границе можно характеризовать целым числом $n \in \mathbb{Z}$. Последнее естественно ввести как степень отображения $S^3 \to S^3$.

Для этого перейдем в M к 4-мерным сферическим координатам

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= r\cos\chi, & x^1 &= r\sin\chi\sin\theta\sin\varphi, \\ x^2 &= r\sin\chi\sin\theta\cos\varphi, & x^3 &= r\sin\chi\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{3.79}$$

Тогда координаты на S^3_∞ (при $r = R \to \infty$) задаются углами

$$0 \leqslant \chi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{3.80}$$

Обозначим $y^1 = \chi$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \varphi$.

Аналогично введем параметризацию матриц $g \in SU(2)$, рассматриваемых как вещественные единичные кватернионы

$$g = g_\mu \sigma^\mu, \quad g_\mu g^\mu = 1,$$

посредством трех углов

$$\hat{y}^i = \{\hat{\chi}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

таким образом, что

$$g_0 = \cos\hat{\chi}, \qquad g_1 = \sin\hat{\chi}\sin\hat{\theta}\sin\hat{\varphi},$$
$$g_2 = \sin\hat{\chi}\sin\hat{\theta}\cos\hat{\varphi}, \quad g_3 = \sin\hat{\chi}\cos\hat{\theta}.$$

Тогда произвольное $SU(2)$-калибровочное преобразование можно записать в виде

$$\left(\begin{array}{c|c} \cos\hat{\chi} + i\sin\hat{\chi}\cos\hat{\theta} & \sin\hat{\chi}\sin\hat{\theta}e^{-i\hat{\varphi}} \\ \hline -\sin\hat{\chi}\sin\hat{\theta}e^{-i\hat{\varphi}} & \cos\hat{\chi} - i\sin\hat{\chi}\cos\hat{\theta} \end{array}\right). \tag{3.81}$$

На границе S^3_∞ евклидова пространства M функции $\hat{y}(y)$ определяют отображение $S^3 \to S^3$, степень которого $\deg\hat{y}(y)$ показывает, сколько раз координаты $\hat{y}^i$ пробегают интервалы (3.80), т. е.

$$n = \deg\hat{y}(y) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\Sigma} d^3\hat{y}\sin^2\hat{\chi}\sin\hat{\theta} = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{S^3_\infty} d^3y\sin^2\hat{\chi}\sin\hat{\theta}|J|, \tag{3.82}$$

где $J = \det\left(\frac{\partial\hat{y}^i}{\partial y^j}\right)$ — якобиан отображения $\hat{y}(y)$, а Σ — область интегрирования по переменным $\hat{y}$. Отметим, что степень $n = 1$ имеет тождественное отображение $\hat{\chi} = \chi$, $\hat{\theta} = \theta$, $\hat{\varphi} = \varphi$, тогда как произвольное значение n достигается отображением

$$\hat{\chi} = \chi, \quad \hat{\theta} = \theta, \quad \hat{\varphi} = n\varphi$$

(т. е. сфера S^3_∞ "накручивается" n раз на $S^3 \approx SU(2)$ вокруг оси $x^3 = z$).

Пользуясь (3.81), выпишем в явном виде соответствующие $SU(2)$-матрицы. Для отображения с $n = 1$ имеем

$$\overset{(1)}{g} = \frac{\sigma^\mu x_\mu}{(x_\nu x^\nu)^{\frac{1}{2}}} = \left(\begin{array}{c|c} \cos\chi + i\sin\chi\cos\theta & \sin\chi\sin\theta e^{i\varphi} \\ \hline -\sin\chi\sin\theta e^{-i\varphi} & \cos\chi - i\sin\chi\cos\theta \end{array}\right), \tag{3.83}$$

а в случае произвольного n (когда $\varphi = n\varphi$)

$$\overset{(n)}{g} = (\overset{(1)}{g})^n.$$

Аналогичное n-кратное "накручивание" может иметь место вокруг любой другой оси, например, при отображениях $\hat{\chi} = n\chi$, $\hat{\theta} = \theta$, $\hat{\varphi} = \varphi$ или $\hat{\chi} = \chi$, $\hat{\theta} = n\theta$, $\hat{\varphi} = \varphi$. Степень $n = 0$ получается, когда вся сфера S^3_∞ отображается в одну точку из $SU(2)$, например, при $\hat{\chi} = 0$, $\theta = \hat{\theta}$, $\varphi = \hat{\varphi}$. Тогда соответствующая $SU(2)$-матрица $g = 1$.

Как известно, степень отображения является гомотопическим инвариантом, поэтому произвольное $SU(2)$-преобразование с заданным n можно получить из описанных выше примеров посредством гомотопии.

Формула (3.82) определяет топологический инвариант n для случая, когда матрица $SU(2)$ параметризуется углами $\hat{y}^i$ согласно (3.81), а граничная сфера S^3_∞ описывается координатами (3.79). Перепишем (3.82) в инвариантной форме, которая не зависит ни от выбора параметризации на группе $SU(2)$, ни от координат в M. Для этого заметим, что из (3.81) можно получить

$$g^+ = g^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \cos\hat{\chi} - i\sin\hat{\chi}\cos\hat{\theta} & -\sin\hat{\chi}\sin\hat{\theta}e^{i\hat{\varphi}} \\ \hline \sin\hat{\chi}\sin\hat{\theta}e^{-i\hat{\varphi}} & \cos\hat{\chi} + i\sin\hat{\chi}\cos\hat{\theta} \end{array}\right),$$

откуда после несложных вычислений находим

$$\sin^2\hat{\chi}\sin\hat{\theta}=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[(g\partial_{\hat{1}}g^{-1})(g\partial_{\hat{2}}g^{-1})(g\partial_{\hat{3}})\right], \tag{3.84}$$

где мы обозначили

$$\partial_{\hat{i}}=\frac{\partial}{\partial\hat{y}^i},\quad i=1,2,3.$$

Подставляя (3.84) и выражение для якобиана

$$J=\varepsilon^{ijk}\frac{\partial\hat{y}^1}{\partial y^i}\frac{\partial\hat{y}^2}{\partial y^j}\frac{\partial\hat{y}^3}{\partial y^k}$$

в (3.82), получаем

$$n=\frac{1}{12\pi^2}\int\limits_{S^3_\infty}d^3y\varepsilon^{ijk}\operatorname{Tr}\left[(g\partial_i g^{-1})(g\partial_j g^{-1})(g\partial_k g^{-1})\right], \tag{3.85}$$

где фактор $\frac{1}{6}$ учитывает $3!$ одинаковых членов под интегралом в (3.85). Принимая во внимание $\varepsilon^{ijk}=\varepsilon^{0ijk}$, выводим из (3.85) искомое инвариантное выражение

$$n=\frac{1}{24\pi^2}\int\limits_{S^3_\infty}d\sigma_\mu\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\operatorname{Tr}\left[(g\partial_\nu g^{-1})(g\partial_\alpha g^{-1})(g\partial_\beta g^{-1})\right], \tag{3.86}$$

где $d\sigma_\mu$ — элемент поверхности S^3_∞, $\mu,\nu,\alpha,\beta=0,\ldots,3$. Оно имеет один и тот же вид в любых координатах пространства M.

Полезно доказать следующее свойство аддитивности величины (3.86). Обозначим

$$I^\mu[g]=\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\operatorname{Tr}\left[(g\partial_\nu g^{-1})(g\partial_\alpha g^{-1})(g\partial_\beta g^{-1})\right].$$

Несложно убедиться, что для $g=g_1g_2$ имеет место тождество

$$I^\mu[g_1g_2]=I^\mu[g_1]+I^\mu[g_2]-3\partial_\nu\left\{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\operatorname{Tr}\left[(g_1\partial_\alpha g_1^{-1})(g_2\partial_\beta g_2^{-1})\right]\right\}.$$

Тогда, поскольку из (3.86) следует

$$n[g]=\frac{1}{24\pi^2}\int\limits_{S^3_\infty}d\sigma_\mu I^\mu[g],$$

находим, что **для композиции калибровочных преобразований степени отображений складываются**:

$$n[g_1g_2]=n[g_1]+n[g_2]. \tag{3.87}$$

Вернемся теперь к калибровочным полям на M. Согласно (3.78) поведение поля на бесконечной сфере S^3_∞ описывается калибровочным преобразованием $g(x)$, $x\in S^3_\infty$. Следовательно, конфигурация поля на границе характеризуется целым числом — *топологическим зарядом* (3.85). Это число n классифицирует калибровочные поля и внутри S^3_∞, т. е. на всем пространстве M. Действительно, пусть поля A_μ и A'_μ на M

характеризуются на бесконечности числами n и $n' \neq n$. Тогда они принадлежат разным гомотопическим классам, т. е. их нельзя непрерывным образом деформировать друг в друга, поскольку это приводило бы к гомотопии соответствующих калибровочных преобразований на S^3_∞, а это невозможно в силу $n' \neq n$.

Данный факт можно установить иначе, переписав выражение (3.86) в виде интеграла по M от характеристической формы Чженя c_2. Для этого заметим, что форма

$$c_2 = \frac{1}{8\pi^2}\operatorname{Tr}(F \wedge F)$$

является внешним дифференциалом $c_2 = dC$ от так называемого *вторичного характеристического класса Чженя—Саймонса*

$$C = \frac{1}{8\pi^2}\operatorname{Tr}\left(A \wedge F - \frac{1}{3}A \wedge A \wedge A\right). \tag{3.88}$$

Интеграл от формы $-c_2$ по шару D^3 внутри сферы S^3_∞ называется *индексом Понтрягина* (числом Чженя q многообразия D^3 с границей), и с помощью (3.88) по теореме Стокса находим

$$q = -\int\limits_M c_2 = -\int\limits_{\partial M} C = \frac{1}{24\pi^2}\int\limits_{S^3_\infty}\operatorname{Tr}(g\,dg^{-1}) \wedge (g\,dg^{-1}) \wedge (g\,dg^{-1}); \tag{3.89}$$

где учтено, что $F = 0$ и $A = g\,dg^{-1}$ на S^3_∞. Сравнивая (3.89) с (3.86), получаем $q = n$. Таким образом, топологический заряд инстантонных решений является целочисленным и равен степени отображения

$$g(x) : S^3_\infty \to SU(2).$$

Поскольку классы Чженя являются топологическими инвариантами, для произвольных локальных деформаций поля δA внутри S^3_∞ вариация $\delta c_2 = 0$.

Полезно записать приведенные выше величины в координатах на M:

$$c_2 = \frac{1}{32\pi^2}\operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta})\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,d^4x, \quad \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta})\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu J^\mu,$$

где векторное поле

$$J^\mu = \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\operatorname{Tr}\left(A_\alpha F_{\beta\gamma} - \frac{2}{3}A_\alpha A_\beta A_\gamma\right) \tag{3.90}$$

является дуальным к 3-форме Чженя—Саймонса C (с точностью до постоянного множителя).

Прежде чем приступить к рассмотрению простейших инстантонных решений, необходимо сделать важное замечание. Мы определяли инстантон как регулярное решение уравнений Янга—Миллса. Регулярность в данном случае понимается как существование на M гладкой 2-формы F напряженности калибровочного поля, что гарантирует возможность вычисления действия S и топологического заряда q на таких решениях. При этом 1-форма потенциала A, которая не считается в отличие от F физической наблюдаемой, не обязательно существует всюду внутри S^3_∞. Однако условия конечности действия и регулярности F приводят к тому, что в точках сингулярности A напряженность F должна обращаться в 0, т. е. потенциал имеет вид чистой калибровки $A \sim gdg^{-1}$ с некоторой сингулярной в данной точке x матрицей $g(x)$.

Выше при выводе (3.89) мы предполагали, что A, так же как и F, регулярен всюду на M. Если учесть сделанное замечание, то приходим к выводу, что форма C также может не существовать всюду на M, в отличие от формы c_2, которая не содержит A. Поэтому, применяя в (3.89) теорему Стокса, надо включить в границу ∂M не только бесконечную сферу S^3_∞, но и поверхность Σ, являющуюся объединением сфер малого радиуса, внутри которых содержатся сингулярные точки A, т. е.

$$q = -\int\limits_M c_2 = \frac{1}{24\pi^2}\int\limits_{S^3_\infty} \mathrm{Tr}\left(gdg^{-1}\wedge gdg^{-1}\wedge gdg^{-1}\right) + \frac{1}{24\pi^2}\int\limits_{\Sigma} \mathrm{Tr}\left(\tilde{g}d\tilde{g}^{-1}\wedge \tilde{g}d\tilde{g}^{-1}\wedge \tilde{g}d\tilde{g}^{-1}\right), \tag{3.91}$$

где $A \sim \tilde{g}d\tilde{g}^{-1}$ на сфере Σ (или объединении сфер), имеющей исчезающе малый радиус вокруг сингулярной точки.

Формула (3.91) делает возможным использование всюду в M произвольных калибровочных преобразований, что часто упрощает вычисления.

С одной стороны, с помощью (сингулярного в общем случае) калибровочного преобразования

$$A \to g_1 A g_1^{-1} + g_1 dg_1^{-1}$$

всегда можно сделать поле A регулярным всюду внутри S^3_∞. Тогда последний член в (3.91) равен нулю (т. е. приходим к (3.89)), и тем самым q целиком определяется нетривиальным поведением калибровочного поля на границе S^3_∞.

С другой стороны, калибровочным преобразованием (тоже в общем случае сингулярным) любое A на M можно привести к виду, когда на бесконечности $A \sim g_0 dg_0^{-1}$, где g_0 — некоторая фиксированная матрица, например $g_0 = 1$. Тогда допустимо стянуть S^3_∞ в точку и перейти к компактификации M как 4-мерной сферы S^4. При этом нетривиальное значение q будет полностью определяться вторым слагаемым в (3.91), т. е. поведением калибровочного поля внутри S^3_∞, или, эквивалентно, структурой расслоения над S^4. Последнее (замена плоского M на S^4) удобно тем, что база расслоения становится компактным многообразием. Причем в силу конформной инвариантности действия (3.76) компактифицированное M не только гомеоморфно, но и изометрично S^4, что легко устанавливается посредством стереографической проекции.

Перейдем к построению инстантонных решений. В общем случае задача их получения довольно сложна. Здесь мы ограничимся исследованием некоторых простейших решений.

Условие стационарности действия (3.76) приводит к уравнениям Янга—Миллса

$$\nabla_\mu F_a^{\mu\nu} = \partial_\mu F_a^{\mu\nu} + \varepsilon_{abc} A_\mu^b F^{c\mu\nu} = 0.$$

Для решений этих уравнений с конечным действием имеет место асимптотика (3.78). Предположим, что асимптотическое калибровочное преобразование характеризуется индексом $n = 1$, т. е. задается матрицей (3.83). Обозначим $\hat{x}^\mu = x^\mu (x_\nu x^\nu)^{-\frac{1}{2}}$, так что $\hat{x}_\mu \hat{x}^\mu = 1$; тогда $g(x) = \hat{x}_\mu \sigma^\mu$. Будем искать инстантонное решение в виде

$$A = f(x^\mu)\overset{(1)}{g} d\overset{(1)}{g}{}^{-1}, \tag{3.92}$$

где функция $f(x^\mu)$ обладает на бесконечности $|x| \to \infty$ асимптотикой $f \to 1$. Анзац (3.92) еще не означает, что индекс Понтрягина по данной конфигурации равен 1, так как f может иметь сингулярности внутри S^3_∞. Проиллюстрируем это для сферически симметричного случая.

Пусть $f = f(x^2)$, $x^2 = x_\mu x^\mu$ и $A = A^a_\mu t_a dx^\mu$. С учетом

$$\overset{(1)}{g} d\overset{(1)}{g}{}^{-1} = \frac{x^\mu}{x^2}\,\sigma^a \overset{(-)}{\eta}_{a\mu\nu} dx^\nu$$

(см. (3.72)) найдем коэффициенты $SU(2)$ связности

$$A^a_\mu = h(x^2)\overset{(-)}{\eta}_{a\mu\nu} x^\nu, \tag{3.93}$$

где введено обозначение $h = 2fx^{-2}$. Вычисление тензора напряженности

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \varepsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

для калибровочного поля (3.93) упрощается при использовании тождества

$$\varepsilon^{abc}\eta_{b\mu\alpha}\eta_{c\nu\beta} = \delta_{\mu\nu}\eta^a_{\alpha\beta} - \delta_{\mu\beta}\eta^a_{\alpha\nu} - \delta_{\alpha\nu}\eta^a_{\mu\beta} + \delta_{\alpha\beta}\eta^a_{\mu\nu}, \tag{3.94}$$

где η — любой из тензоров т'Хуфта (3.73). В результате находим

$$F^a_{\mu\nu} = (h^2x^2 - 2h)\overset{(-)}{\eta}{}^a_{\mu\nu} + (h^2 + 2h')x^\alpha\left(x_\mu \overset{(-)}{\eta}{}^a_{\nu\alpha} - x_\nu \overset{(-)}{\eta}{}^a_{\mu\alpha}\right), \tag{3.95}$$

где штрих обозначает производную по x^2.

Подстановка (3.94), (3.95) в уравнения Янга—Миллса приводит к дифференциальному уравнению

$$x^2(2h'' - h^3) + 3(2h' + h^2) = 0. \tag{3.96}$$

Мы не станем искать общее решение данного нелинейного уравнения. Однако легко проверить, что (3.96) удовлетворяют следующие три функции:

$$h_{(S)}(x) = \frac{1}{x^2}, \tag{3.97}$$

$$h^{(+)}_{(R)}(x) = \frac{2}{x^2 + c}, \tag{3.98}$$

$$h^{(-)}_{(R)} = \frac{2c'}{(x^2 + c')x^2}, \tag{3.99}$$

где c и c' — произвольные константы. Исследуем свойства этих решений.

Решение (3.97) не является регулярным. Для него имеем $f(S) = \frac{1}{2}$ и

$$A = \frac{1}{2}\overset{(1)}{g} d\overset{(1)}{g}{}^{-1}.$$

Хотя последнее равенство напоминает чистую калибровку, однако таковой не является, что видно из выражения для напряженности

$$F^a_{\mu\nu} = -\frac{1}{x^2}\left\{\overset{(-)}{\eta}{}^a_{\mu\nu} + \hat{x}^\alpha(\overset{(-)}{\eta}{}^a_{\nu\alpha}\hat{x}_\mu - \overset{(-)}{\eta}a_{\mu\alpha}\hat{x}_\nu)\right\}.$$

Действие S для такого поля расходится как в нуле, так и на бесконечности, и следовательно, $h_{(S)}$ не дает нам искомого инстантонного решения. Примечателен, однако, сам факт существования таких простых (кулоновского типа) точных решений нелинейных уравнений Янга—Миллса.

Анализ решения (3.98) начнем со случая $c = 0$. Тогда

$$h_{(R)} = \frac{2}{x^2}, \quad f_{(R)} = 1,$$

и калибровочный потенциал есть в точности чистая калибровка

$$A_\mu = \overset{(1)}{g}\partial_\mu \overset{(1)}{g}{}^{-1}.$$

Как следствие, $F^a_{\mu\nu} = 0$ всюду на M и действие конечно (равно нулю), т. е. это — инстантон. При этом форма Понтрягина тривиальна $c_2 = 0$, и значит, $q = 0$. Последнее никак не противоречит тому, что A_μ характеризуется на бесконечности калибровочным преобразованием g с индексом $n = 1$, так как поле A^a_μ сингулярно в $x^\mu = 0$. Задав Σ как сферу малого радиуса вокруг начала координат, получаем из (3.91), что $q = 1 + (-1) = 0$ в полном согласии с $c_2 = 0$.

Пусть теперь $c \neq 0$, тогда

$$f_{(R)} = \frac{x^2}{x^2 + c}.$$

При $c < 0$ как потенциал (3.93), так и напряженность поля (3.95) имеют сингулярности на сфере $x^2 = -c$. В результате действие S расходится и это — не инстантон. Однако при $c = \lambda^2 > 0$ поле всюду регулярно в M и описывается следующим потенциалом и тензором напряженности:

$$A = \frac{x^2}{x^2 + \lambda^2}\overset{(1)}{g}d\overset{(1)}{g}{}^{-1}, \quad A^a_\mu = \frac{2}{x^2 + \lambda^2}\overset{(-)}{\eta}{}^a_{\mu\nu}x^\nu, \tag{3.100}$$

$$F^a_{\mu\nu} = -\frac{4\lambda^2}{(x^2 + \lambda^2)^2}\overset{(-)}{\eta}{}^a_{\mu\nu}. \tag{3.101}$$

Таким образом, применима формула (3.89), и находим индекс Понтрягина $q = n = 1$. Полученное решение называется *инстантоном Белавина—Полякова—Шварца—Тюпкина* (БПШТ). Нетрудно убедиться, что для него действие конечно и $S = 8\pi^2$.

Рассмотрим некоторые свойства инстантона БПШТ. Во-первых, из (3.101) становится понятным, почему он называется инстантоном: поле $F^a_{\mu\nu}$ имеет максимум в $x^\mu = 0$ и быстро спадает с ростом $|x|$, т. е. решение локализовано, причем как в пространстве, так и в мнимом времени. Параметр λ задает значение максимума поля. Далее, уравнения Янга–Миллса инвариантны относительно трансляций координат $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$. Поэтому потенциал

$$A = \frac{(x - x_1)^2}{(x - x_1)^2 + \lambda^2}\overset{(1)}{g}_1 d\overset{(1)}{g}{}_1^{-1}, \tag{3.102}$$

где

$$\overset{(1)}{g}_1 = \frac{(x^\mu - x_1^\mu)\sigma_\mu}{|x - x_1|},$$

и $x_1^\mu = \text{const}$, также является решением уравнений Янга—Миллса и описывает инстантон, расположенный в точке с координатами x_1^μ. Можно показать, что **найденное таким образом 5-параметрическое семейство** (3.102) (параметры суть числа λ, x_1^μ) **является наиболее общим инстантонным решением с зарядом** $q = 1$.

Вообще, из физических соображений можно ожидать, что инстантон с произвольным q будет описываться полевой конфигурацией с выраженными максимумами в $|q|$

точках пространства времени $x_1^\mu, \ldots, x_{|q|}^\mu$ и быстрым убыванием при удалении от x_i^μ, $i = 1, \ldots, |q|$. Нетрудно подсчитать полное число параметров, задающих такую конфигурацию: это $4|q|$ координат x_i^μ максимумов, $|q|$ параметров типа λ_i, задающих значения максимумов, и еще $3|q|$ параметров, определяющих "направление" вектора напряженности $F_{\mu\nu}^a$ (по индексу $a = 1, 2, 3$) в изотопическом пространстве в каждом из максимумов. Итого получили $8|q|$ параметров, но из них надо вычесть 3, отвечающих глобальному калибровочному преобразованию, при котором, очевидно, не меняется физика конфигурации. Таким образом, подсчет показывает, что общее q-инстантонное решение уравнений Янга—Миллса зависит от $8|q| - 3$ произвольных параметров.

Другим важным свойством инстантона БПШТ является то, что напряженность поля оказывается антисамодуальным тензором

$$F_{\mu\nu} = \pm F_{\mu\nu}^* = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \tag{3.103}$$

где знак минус отвечает решению (3.100) с $q = +1$, а знак плюс соответствует $q = -1$. Это следует из свойств тензоров т'Хуфта (3.75). Уравнение (3.103) называется *уравнением самодуальности*. Оно играет фундаментальную роль в построении общих инстантонных решений. Действительно, используя тождество

$$(F_{\mu\nu} \pm F_{\mu\nu}^*)^2 = 2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \pm \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta},$$

действие (3.76) при фиксированном q можно оценить снизу $S \geqslant \mp 8\pi^2 q$, и минимумы действия, на которых достигается равенство $S = 8\pi^2|q|$, реализуются на самодуальных и антисамодуальных конфигурациях, удовлетворяющих (3.103). Более того, в силу тождества Бианки

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\nu F_{\alpha\beta} = 0$$

любое решение (3.103) автоматически является решением уравнений Янга—Миллса $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Таким образом, задача получения инстантонов естественно сводится к рассмотрению уравнений самодуальности. Это приводит к значительным техническим упрощениям, поскольку (3.103) суть уравнения первого порядка в отличие от уравнений Янга—Миллса.

Важным следствием свойства самодуальности инстантонных полей является то (см. (3.103)), что тензор энергии-импульса

$$T_\nu^\mu = -\operatorname{Tr}(F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha}) + \frac{1}{4} \operatorname{Tr}(F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})\, \delta_\nu^\mu = 0$$

тождественно равен нулю на инстантонных конфигурациях. Данный факт обусловливает важную роль инстантонов в структуре вакуума калибровочных полей.

Поле 1-инстантона (3.102) регулярно всюду внутри S_∞^3, а нетривиальное значение топологического заряда $q = 1$ объясняется его поведением на бесконечности. Перейдем, однако, к так называемой *сингулярной калибровке*

$$A' = gAg^{-1} + gdg^{-1}$$

с помощью преобразования $g = g_1^{-1}$. Нетрудно видеть, что в этой калибровке

$$A' = \frac{\lambda^2}{(x - x_1)^2 + \lambda^2} \overset{(1)}{g}{}_1^{-1} d\overset{(1)}{g}_1, \tag{3.104}$$

на бесконечности $A' \sim g dg_1 = 0$, тогда как в $x = x_1$, потенциал сингулярен и имеет вид чистой калибровки $A' \approx g_1^{-1} dg_1$. При этом по прежнему $q = +1$, только это значение обеспечивается теперь вторым слагаемым в правой части (3.91) — интегралом по сфере Σ вокруг сингулярности.

Калибровка (3.104) удобна тем, что M можно компактифицировать до S^4, отображая S^3_∞ с помощью стереографической проекции в один из полюсов S^4. Кроме того, в данной калибровке легче строить мультиинстантонные решения. Переходя к компонентной записи $A' = A'^a_\mu t_a \, dx^\mu$, находим для (3.104):

$$A'^a_\mu = -\frac{2\lambda^2 \overset{(+)}{\eta}{}^a_{\mu\nu}(x^\nu - x_1^\nu)}{(x - x_1)^2[(x - x_1)^2 + \lambda^2]} = -\overset{(+)}{\eta}{}^a_{\mu\nu} \partial^\nu \ln\left(1 + \frac{\lambda^2}{(x - x_1)^2}\right). \tag{3.105}$$

Хотя в формуле (3.105) появился самодуальный тензор т'Хуфта η (ср. с (3.100)—(3.101)), данное поле остается антисамодуальным, как и (3.102). В этом можно убедиться, дуализуя соответствующий тензор напряженности:

$$F'^a_{\mu\nu} = -\frac{4\lambda^2}{[(x - x_1)^2 + \lambda^2]} \left\{ \overset{(+)}{\eta}{}^a_{\mu\nu} + \frac{2(x^a - x_1^a)}{(x - x_1)^2} \left[(x_\mu - x_{1\mu}) \overset{(+)}{\eta}{}^a_{\nu a} - (x_\nu - x_{1\nu}) \overset{(+)}{\eta}{}^a_{\mu a} \right] \right\}.$$

Прежде чем выписать мультиинстантонные решения, обратимся к решению (3.99). Сравнивая его с (3.105) (и полагая $\lambda^2 = c'$), обнаруживаем, что (3.99) представляет собой самодуальный инстантон в сингулярной калибровке с $q = -1$. Таким образом, сферически симметричный анзац (3.91)—(3.93) позволил нам одновременно получить все инстантонные решения с низшими значениями топологического заряда $q = 0, +1, -1$ (3.97)—(3.99).

Обозначим

$$\Phi = 1 + \frac{\lambda^2}{(x - x_1)^2}.$$

Тогда инстантон БПШТ в сингулярной калибровке имеет вид

$$A^a_\mu = -\overset{(+)}{\eta}{}^a_{\mu\nu} \partial^\nu \ln \Phi \tag{3.106}$$

(пока мы всего лишь переписали еще раз (3.105), опустив штрих и переобозначив выражение под логарифмом). Подставляя (3.106) в уравнение Янга—Миллса, находим

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu}_a = \overset{(-)}{\eta}{}^{\mu\nu}_a \left[\partial_\mu (\Phi^{-1} \Box \Phi) + 2\partial_\mu (\ln \Phi) \Phi^{-1} \Box \Phi \right],$$

и эта величина обращается в нуль в силу того, что введенная скалярная функция удовлетворяет уравнению

$$\Phi^{-1} \Box \Phi = 0.$$

Однако (3.107) имеет более общее решение, а именно:

$$\Phi = 1 + \sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i^2}{(x + x_i^2)}, \tag{3.108}$$

где λ_i, x_i^μ, $i = 1 \ldots, q$ — это $5q$ постоянных интегрирования. Потенциал (3.106), (3.108) называется *мультиинстантонным решением т'Хуфта*. Оно является естественным обобщением 1-инстантонного БПШТ и описывает конфигурацию с q максимумами поля в точках $x_1^\mu, \ldots, x_q^\mu$. Параметры λ_i задают значения этих максимумов.

Решение т'Хуфта сингулярно в точках $x = x_i$. Однако напряженность поля всюду регулярна, и сингулярности потенциала могут быть ликвидированы калибровочным преобразованием. Чтобы убедиться в этом, перепишем (3.106), (3.108) на языке форм

$$A = \sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i^2}{\Phi(x-x_i)^2} \overset{(1)}{g}_i^{-1} d\overset{(1)}{g}_i, \qquad \overset{(1)}{g}_i = \frac{\sigma_\mu (x^\mu - x_i^\mu)}{\Phi(x-x_i)^2} \overset{(1)}{g}_i^{-1} d\overset{(1)}{g}_i. \tag{3.109}$$

Анализ показывает, что на бесконечности $A \sim 0$, а в сингулярных точках потенциал A есть чистая калибровка

$$A(x_i) \sim \overset{(1)}{g}_i^{-1} d\overset{(1)}{g}_i.$$

Используя это в (3.91), получаем, что нетривиальный топологический заряд возникает из второго интеграла в (3.91) по поверхности Σ, которая в данном случае является объединением сфер малого радиуса вокруг x_i^μ. Тем самым $5q$-параметрическое решение т'Хуфта (3.106), (3.108), (3.109) имеет инстантонный заряд q.

В заключение покажем, что сингулярные решения т'Хуфта действительно могут быть устранены калибровочным преобразованием. Без ограничения общности рассмотрим случай $q = 2$. Обозначим в (3.109)

$$a_i(x) = \frac{\lambda_i^2}{\Phi(x-x_i)^2}, \quad i = 1, 2.$$

При $x \to x_1$, очевидно, имеем $a_1 \to 1$, $a_2 \to 0$ тогда как при $x \to x_2$ аналогично $a_1 \to 0$, $a_2 \to 1$. При $x \to \infty$ получаем $a_i \to 0$. Будем искать калибровочное преобразование в виде $g = g_2 g_* g_1$, где g_* — некоторая постоянная $SU(2)$-матрица. Тогда для преобразованного потенциала $A' = gAg^{-1} + gdg^{-1}$ находим

$$A' = (1-a_1-a_2) g dg^{-1} + a_1 \overset{(1)}{g}_2 d\overset{(1)}{g}_2^{-1} + a_2 \overset{(1)}{g}_2 g_* \overset{(1)}{g}_1 \overset{(1)}{g}_2^{-1} d\left(\overset{(1)}{g}_2 \overset{(1)}{g}_1^{-1} \overset{(1)}{g}_*^{-1} \overset{(1)}{g}_2^{-1} \right). \tag{3.110}$$

Отмеченное выше поведение $a_i(x)$ обусловливает, что при $x \to \infty$ потенциал ведет себя как чистая калибровка $A \sim gdg^{-1}$; при $x \to x_1$ он регулярен

$$A' \big|_{x \to x_1} \sim \overset{(1)}{g}_2 d\overset{(1)}{g}_2^{-1},$$

а при $x \to x_2$ особенности A' описываются последним членом в (3.110). Однако регулярность A' в $x = x_2$ можно обеспечить, выбрав постоянную матрицу

$$g_*^{-1} = \overset{(1)}{g}_1(x_2) = \frac{\sigma_\mu (x_1^\mu - x_2^\mu)}{|x_1 - x_2|}.$$

Таким образом, окончательно получаем, что A' регулярен всюду внутри S^3_∞, а нетривиальное значение топологического заряда $q = 2$ теперь объясняется поведением на бесконечности $A' \sim gdg^{-1}$. В силу свойства (3.87) имеем $n[g] = n[g_2 g_* g_1] = 2$. Аналогично строятся калибровочные преобразования, устраняющие сингулярности потенциала т'Хуфта для произвольного q.

§ 7. Магнитные монополи

Перейдем теперь к рассмотрению классической калибровочной теории в физическом пространстве-времени Минковского. Как и в предыдущем параграфе, мы ограничимся случаем калибровочной группы $G = SU(2)$, однако к полям Янга—Миллса A^a_μ добавим хиггсовский сектор, обеспечивающий спонтанное нарушение калибровочной симметрии.

Скалярное *хиггсовское поле* Φ^a преобразуется по закону

$$\delta\Phi^a = -f^a_{bc}\varepsilon^c\Phi^b$$

относительно $G = SU(2)$ и описывается хиггсовским потенциалом

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4}(\Phi^a\Phi_a - a^2)^2. \tag{3.111}$$

Здесь и далее $a, b, c, \ldots = 1, 2, 3$ и, как обычно, $f_{abc} = \varepsilon_{abc}$ — структурные константы и $\varepsilon^a(x)$ — инфинитезимальные параметры преобразований.

Как уже отмечалось, важную роль играют решения классических уравнений поля, на которых функционал энергии конечен. Последний определяется как интеграл по 3-пространству от компоненты T^0_0 тензора энергии-импульса системы. Для рассматриваемой модели симметричный (метрический) тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^\mu_\nu = -F^{\mu\lambda}_a F^a_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F^a_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}_a + V(\Phi)\delta^\mu_\nu + (D_\nu\Phi)^a(D^\mu\Phi)_a - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu(D_\lambda\Phi^a)(D^\lambda\Phi_a). \tag{3.112}$$

Получаем

$$T^0_0 = V(\Phi) + \frac{1}{2}\left[(F^a_{0i})^2 + (F^a_{ij})^2 + (D_0\Phi)^2 + (D_i\Phi)^2\right],$$

где $i, j, \ldots = 1, 2, 3$, и суммирование по этим индексам проводится без их поднятия (метрика Минковского $\eta_{\mu\nu}$ не участвует). Видно, что $T^0_0 \geqslant 0$ и функционал энергии

$$E = \int d^3x\, T^0_0$$

конечен только в том случае, если на бесконечности $T^0_0 \to 0$. Последнее выполняется тогда и только тогда, когда

$$F^a_{\mu\nu} \to 0, \quad D_\mu\Phi \xrightarrow{a} 0, \quad V(\Phi) \to 0 \tag{3.113}$$

при $|x| \to \infty$.

Классические уравнения поля для системы *Янга—Миллса—Хиггса* имеют вид

$$D_\nu F^{\mu\nu}_a = J^\mu_a, \tag{3.114}$$

$$(D_\mu D^\mu\Phi)^a = -\lambda\Phi^a(\Phi^b\Phi_b - a^2), \tag{3.115}$$

где

$$J^\mu_a = g f_{abc}(D^\mu\Phi)^c\Phi^b. \tag{3.116}$$

Полевые конфигурации, задаваемые равенствами

$$\left.\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} &= 0, \\ (D_\mu \Phi)^a &= 0, \qquad V(\Phi) = \tfrac{\lambda}{4}(\Phi^a \Phi_a - a^2)^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.117}$$

являются решениями уравнений (3.114)—(3.115) и имеют наименьшую энергию $E = 0$. В соответствии с терминологией, введенной в первой главе, будем называть такие конфигурации вакуумными. Более специально, **калибровочные поля, удовлетворяющие (3.117), назовем янг-миллсовским вакуумом, а скалярные полевые конфигурации, являющиеся решениями (3.117), будем именовать хиггсовским вакуумом**.

Тривиальное состояние

$$\Phi^a = 0, \quad A^a_\mu = 0,$$

вакуумным не является, и поэтому для выяснения физического содержания модели поля следует разложить в ряд в окрестности настоящего вакуума, например

$$\Phi^a = a\delta^a_3, \quad A^a_\mu = 0.$$

Переходя к калибровке

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a + \psi \end{pmatrix}, \tag{3.118}$$

получаем лагранжиан модели в виде

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} \overline{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} a^2 g^2 W_\mu \overline{W}^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi)(\partial^\mu \psi) - \lambda a^2 \psi^2 + L_{\text{вз}}, \tag{3.119}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu, \quad W_\mu = A^1_\mu + iA^2_\mu, \quad G_{\mu\nu} = D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu \quad D_\mu = \partial_\mu + igA^3_\mu,$$

и $L_{\text{вз}}$ есть лагранжиан взаимодействия, содержащий кубические и более высокой степени инварианты из ψ и W.

Таким образом, мы видим, что **данная теория описывает массивную хиггсовскую скалярную частицу ψ с массой $m = a\sqrt{\lambda}$, комплексное массивное векторное поле W_μ с массой $M = ag$, а также безмассовое векторное поле A^3_μ**. Легко убедиться, что модель (3.119) инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$A^3_\mu \to A^3_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon, \quad W_\mu \to e^{i\varepsilon} W_\mu, \tag{3.120}$$

и, следовательно, можно отождествить A^3_μ с электромагнитным полем. При этом хиггсовские частицы оказываются нейтральными, тогда как векторные бозоны W_μ несут заряд $\pm g$.

Группа $H(X)$ преобразований (3.120) является подгруппой исходной калибровочной группы $G(X)$. Обычно H называется группой *точной* (или остаточной) симметрии, до которой спонтанно нарушается G.

Обратимся теперь к общему анализу решений классических уравнений поля (3.115)—(3.116). Условие конечности энергии приводит к нетривиальному поведению полей на бесконечности (3.113), они стремятся к своим вакуумным значениям. Особенно важна

асимптотика хиггсовских полей, поскольку она определяет топологический заряд, позволяющий классифицировать решения с конечной энергией.

Границей 3-пространства (т. е. сечения M^4 с фиксированным временем t) является бесконечно удаленная сфера S^2_∞. В сферических координатах r, χ, θ она задается значением $r = \infty$, а углы $y^1 = \chi$, $y^2 = \theta$ определяют положение произвольной точки на границе. Хиггсовское поле Φ^a принимает на S^2_∞ вакуумные значения (3.117) и, следовательно, принадлежит сфере $\Phi^2 = a^2$ в изотопическом пространстве. Введем для описания граничных конфигураций удобные координаты в изотопическом пространстве типа сферических углов:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(\infty, \chi, \theta) &= a \sin Y_1 \sin Y_2, \\ \Phi_2(\infty, \chi, \theta) &= a \cos Y_1 \sin Y_2, \\ \Phi_3(\infty, \chi, \theta) &= a \cos Y_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.121}$$

где $Y_{1,2}$ — функции от χ, θ ($Y = Y(y)$). Произвольное калибровочное преобразование $g \in G(X)$ переводит ($\Phi' = g\Phi$) одну граничную вакуумную конфигурацию в другую. Последняя, однако, гомотопически эквивалентна исходной при g и Φ, гладких всюду в 3-пространстве. Действительно, без ограничения общности можно считать, что $g(x = 0) = 1$, поскольку координаты r, χ θ всегда можно задать так, чтобы начало совпадало с точкой в которой $g = 1$. Тогда функция

$$F(t, \chi, \theta) = g\left(\frac{t}{1-t}, \chi, \theta\right) \Phi(\infty, \varphi, \theta)$$

является искомой гомотопией, так как она равна при $t = 0$ исходной граничной конфигурации $\Phi(\infty, \chi, \theta)$, а при $t = 1$ совпадает с

$$\Phi'(\infty, \chi, \theta) = g(\infty, \chi, \theta)\Phi(\infty, \chi, \theta).$$

Подгруппа $H \subset G$ преобразований, оставляющих вакуум инвариантным, состоит из вращений вокруг оси, задаваемой углами Y_1, Y_2 в изотопическом пространстве. Таким образом, многообразие хиггсовских вакуумов имеет вид

$$G/H = S^2, \quad G = SU(2), \quad H = U(1).$$

Отображения сфер $S^2_\infty \to S^2$, которые задают хиггсовские поля на границе, классифицируются элементами гомотопической группы

$$\pi_2(S^2) = \pi_2(G/H) = \mathbb{Z}.$$

Соответствующий целочисленный заряд N можно определить как степень отображения $Y(y)$:

$$N = \deg Y(y) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2_\infty} d^2y \sin Y_2 \left| \frac{d(Y_1, Y_2)}{d(y_1, y_2)} \right|. \tag{3.122}$$

Используя (3.121), нетрудно привести введенную величину к явно ковариантному виду

$$N = \frac{1}{8\pi a^3} \int\limits_{S^2_\infty} ds_i \, \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} \Phi^a \, \partial_j \Phi^b \, \partial_k \Phi^c, \tag{3.123}$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$ — индексы произвольных 3-координат в пространстве и ds_i — элемент площади границы S^2_∞.

Можно доказать эквивалентность (3.111) и (3.113) и инвариантность топологического заряда относительно произвольных инфинитезимальных преобразований хиггсовских полей $\Phi^a \to \Phi + \delta\Phi^a$.

Конкретное решение классических уравнений (3.114)—(3.116) с фиксированным значением топологического заряда не инвариантно относительно полной калибровочной группы $G(X)$. Этот факт аналогичен квантовому механизму спонтанного нарушения симметрии, при котором основное состояние (вакуум) не инвариантно относительно группы симметрий теории. Исходя из этой аналогии, **определим подгруппу $H \subset G$, точной симметрии как группу преобразований, сохраняющих граничную вакуумную конфигурацию решений.** Выше при исследовании физического содержания модели мы уже отмечали, что $H = U(1)$ связана с существованием безмассового калибровочного поля ("фотона"). Сформулируем теперь этот результат, полученный в частной калибровке (3.118), более строго.

Ввиду того что g обозначает в данном разделе калибровочную константу связи, матрицы $SU(2)$ калибровочных преобразований будем обозначать

$$\omega(x) = \exp(t_a u^a(x)), \tag{3.124}$$

где u^a — произвольные функции на M^4, а t_a — генераторы $SU(2)$. Изовекторное хиггсовское поле удобно рассматривать как элемент алгебры Ли $su(2)$ ($\Phi = \Phi^a t_a$), на который калибровочная группа действует посредством присоединенного представления

$$\Phi \to \Phi' = \mathrm{ad}_\omega \Phi = \omega\Phi\omega^{-1}. \tag{3.125}$$

Как обычно, калибровочное поле $A_\mu = A^a_\mu t_a$ есть элемент алгебры Ли $su(2)$ с законом преобразования

$$A_\mu \to A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \frac{1}{g}\,\omega\,\partial_\mu\omega^{-1}. \tag{3.126}$$

Тогда ковариантная производная поля Φ может быть записана в виде

$$D_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi + g[A_\mu, \Phi] = \partial_\mu\Phi + g\,\mathrm{ad}_{A_\mu}\Phi, \tag{3.127}$$

а различные инварианты, построенные из скалярных полей, можно представить как следы матричных произведений, например,

$$\Phi^2 = \Phi^a\Phi_a = -2\,\mathrm{Tr}(\Phi\Phi).$$

Группа $H(X)$ точной симметрии модели состоит из матриц

$$h(x) = \exp(f\widehat{\Phi}) = \exp(f\widehat{\Phi}_a t^a), \tag{3.128}$$

где $f(x)$ — произвольная функция на M^4 и $\widehat{\Phi}^a = \Phi^a/\Phi^2$. Очевидно, что $h \in H(X) \subset G(X)$ и

$$\Phi' = h\Phi h^{-1} = \Phi,$$

так что хиггсовский вакуум (граничные конфигурации $\Phi^a(\infty, \chi, \theta)$) инвариантен относительно (3.128). Преобразования из $H(X)$ параметризуются одной функцией $f(x)$, а их генераторами являются $\Phi = \Phi^a t_a$. Рассмотрим поле

$$A_\mu = A^a_\mu\widehat{\Phi}_a = -2\,\mathrm{Tr}(A_\mu\widehat{\Phi}). \tag{3.129}$$

Оно является абелевым калибровочным полем, отвечающим группе точной симметрии модели, и может быть отождествлено с электромагнитным полем. Относительно (3.128) поле A_μ преобразуется по закону

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{2}{g}\,\mathrm{Tr}\left[\left(h^{-1}\partial_\mu h\right)\widehat{\Phi}\right] = A_\mu - \frac{1}{g}\,\partial_\mu f. \tag{3.130}$$

Калибровочное поле A_μ с градиентным законом преобразования (3.130) является корректным обобщением поля A^3_μ (с законом преобразования (3.120)) на случай калибровки, отличной от (3.118). Нетрудно также построить обобщение поля W_μ. С этой целью в каждой точке $x \in M^4$ выберем пару изовекторов e^a_1 и e^a_2, которые совместно с Φ^a образуют ортогональный базис во внутреннем пространстве. Определим теперь, аналогично (3.129), поля $A^a_\mu e^1_a$ и $A^a_\mu e^2_a$ и рассмотрим их закон преобразований относительно (3.128). Имеем

$$\mathrm{Tr}(A'_\mu e) = \mathrm{Tr}\left(A_\mu h^{-1} e h\right) + \frac{1}{g}\,\mathrm{Tr}\left[\left(h\partial_\mu h^{-1}\right) e\right],$$

и ввиду ортогональности $e^a_{1,2}\Phi_a = 0$ получим

$$\begin{aligned} e^1_a A'^a_\mu &= e^1_a A^a_\mu \cos f + e^2_a A^a_\mu \sin f, \\ e^2_a A'^a_\mu &= -e^1_a A^a_\mu \sin f + e^2_a A^a_\mu \cos f. \end{aligned}$$

Таким образом, комплексное поле

$$W_\mu = e^1_a A^a_\mu + i e^2_a \tag{3.131}$$

под действием группы H испытывает фазовое преобразование

$$W_\mu \to W'_\mu = e^{if} W_\mu,$$

т. е. описывает заряженные частицы, взаимодействующие посредством A_μ.

Итак, суммируем некоторые выводы. В модели Янга—Миллса—Хиггса со спонтанным нарушением симметрии до $H = U(1)$ существует сектор, связанный с абелевым калибровочным полем A_μ группы точных симметрий. Можно поэтому предположить, что на больших расстояниях эта система будет обнаруживать (в конкретных классических решениях) "электромагнитные"свойства. Что касается нейтрального хиггсовского поля Φ и заряженного векторного поля W_μ, то наличие у них массы (вследствие механизма Хиггса) позволяет ожидать их нетривиального поведения только на масштабах длин порядка m^{-1} и M^{-1}. На больших расстояниях Φ и W_μ быстро стремятся к своим вакуумным значениям. Точные решения уравнений поля (3.114)—(3.116), рассмотренные ниже, полностью подтверждают эти качественные выводы. Однако, прежде чем мы приведем конкретные решения, необходимо уточнить описание электромагнитных свойств модели.

Электромагнитное поле в модели Полякова—т'Хуфта

В теории Максвелла наблюдаемыми физическими величинами являются электрическое и магнитные поля, составляющие тензор напряженности $F_{\mu\nu}$. Определим аналогичный объект в описанной выше модели. Нетрудно видеть, что $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ не подходит

на роль тензора напряженности, так как меняется при калибровочных преобразованиях по закону

$$\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{2}{g}\partial_\mu \operatorname{Tr}\left[\left(\omega^{-1}\partial_\nu\omega\right)\widehat{\Phi}\right] - \frac{2}{g}\partial_\nu \operatorname{Tr}\left[\left(\omega^{-1}\partial_\mu\omega\right)\widehat{\Phi}\right]. \quad (3.132)$$

Последние два слагаемых исчезают при $\omega = h$ в силу (3.130), однако в общем случае $\omega \in G(X)$ они отличны от нуля. Это означает, что $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ не является наблюдаемой величиной. Однако в теории присутствуют также хиггсовские поля, и с их помощью неинвариантные члены в (3.132) можно скомпенсировать.

Действительно, рассмотрим величину

$$\operatorname{Tr}\left(\Phi\,\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi\right) = -\frac{1}{4}\varepsilon_{abc}\widehat{\Phi}^a\,\partial_\mu\widehat{\Phi}^b\,\partial_\nu\widehat{\Phi}^c.$$

Этот тензор антисимметричен по μ, ν и имеет закон преобразования (относительно $\Phi \to \Phi' = \omega\Phi\omega^{-1}$):

$$\operatorname{Tr}\left(\widehat{\Phi}\,\partial_\mu\widehat{\Phi}\,\partial_\nu\Phi\right)' = \operatorname{Tr}\left(\widehat{\Phi}\,\partial_\mu\widehat{\Phi}\,\partial_\nu\widehat{\Phi}\right) + \frac{1}{2}\partial_\nu \operatorname{Tr}\left[\left(\omega\,\partial_\mu\omega^{-1}\right)\widehat{\Phi}\right] - \frac{1}{2}\partial_\mu \operatorname{Tr}\left[\left(\omega\,\partial_\nu\omega^{-1}\right)\widehat{\Phi}\right].$$

Следовательно тензор

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{4}{g}\left(\widehat{\Phi}\,\partial_\mu\widehat{\Phi}\,\partial_\nu\widehat{\Phi}\right) \quad (3.133)$$

является калибровочно инвариантным относительно $G(X)$. **Эту физическую наблюдаемую** (введенную впервые в несколько иной форме т'Хуфтом) **мы и отождествим в модели Янга—Миллса—Хиггса с электромагнитным полем.**

Хорошо известно, что система уравнений Максвелла в вакууме

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu *} = 0, \quad (3.134)$$

где $F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, симметрична относительно так называемых преобразований дуальности $F_{\mu\nu} \leftrightarrow F^*_{\mu\nu}$, т. е. замены электрического поля $E_i = F_{i0}$ на магнитное

$$B^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk}, \quad (3.135)$$

и наоборот. Однако в присутствии источников, описываемых электрическим током j^μ, система (3.134) перестает быть дуально симметричной, поскольку первая половина уравнений Максвелла модифицируется:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (3.136)$$

Магнитный заряд

Дирак заметил, что можно восстановить дуальную симметрию полных уравнений, если предположить существование в природе магнитных зарядов, которые порождают магнитный ток k^μ так, что вторая половина уравнений приобретает вид

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = k^\nu. \quad (3.137)$$

Из (3.136)—(3.137) видно, что оба тока имеют нулевую дивергенцию

$$\partial_\mu j^\nu = 0 = \partial_\mu k^\mu \tag{3.138}$$

так, что соответствующие заряды

$$e = \int d^3x\, j^0, \quad \mu = \int d^3x\, k^0$$

сохраняются во времени. Интегрируя временны́е компоненты уравнений (3.136)—(3.137), с помощью теоремы Гаусса можно выразить полные электрический e и *магнитный* μ заряды через потоки соответственно электрического и магнитного полей через пространственную границу S^2_∞:

$$e = \int d^3x\, \mathrm{div}\, \mathbf{E} = \int\limits_{S^2_\infty} ds_i\, E^i, \tag{3.139}$$

$$\mu = \int d^3x\, \mathrm{div}\, \mathbf{B} = \int\limits_{S^2_\infty} ds_i\, B^i. \tag{3.140}$$

Основной трудностью теории Дирака является тот факт, что левая часть (3.137) тождественно обращается в 0, если существует всюду регулярный вектор-потенциал A_μ, для которого

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Поэтому в присутствии магнитных зарядов потенциал A_μ с необходимостью должен быть сингулярным. Причем его сингулярности расположены на луче, начинающемся на магнитном заряде и уходящем в бесконечность. Все сказанное относится, однако, к стандартной теории Максвелла, в которой источники — точечные частицы и энергия классических решений бесконечна.

Возвращаясь к модели Янга—Миллса—Хиггса, отметим, что электромагнитный сектор в ней является частью более общей нелинейной системы (3.114)—(3.116). При этом группа $H = U(1)$ возникает как подгруппа точной симметрии в рамках механизма спонтанного нарушения $G = SU(2)$ симметрии, что позволяет определить эффективное электромагнитное поле, описываемое потенциалом A_μ (3.129) и тензором напряженности $F_{\mu\nu}$ (3.133). Калибровочно инвариантный тензор (3.133) в отличие от теории Максвелла не есть просто "ковариантный ротор" от 4-потенциала, и тем самым магнитный ток k^μ и *магнитный заряд* μ полевых конфигураций системы Янга—Миллса—Хиггса с необходимостью нетривиальны.

Найдем электрический и магнитный токи в рассматриваемой неабелевой модели. Для этого согласно (3.136)—(3.137) требуется вычислить дивергенцию тензора (3.133), а также дуального к нему тензора $F^*_{\mu\nu}$. Преобразуем сначала (3.133). Используя определение (3.129), нетрудно видеть, что

$$F_{\mu\nu} = \widehat{\Phi}_a F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{g}\,\varepsilon_{abc}\widehat{\Phi}^a\, D_\mu \widehat{\Phi}^b\, D_\nu \widehat{\Phi}^c. \tag{3.141}$$

Подставляя (3.141) в (3.136)—(3.137), получим следующие явные выражения для токов

$$j^\nu = (\partial_\mu \widehat{\Phi}^a)\left(F^{\mu\nu}_a + \frac{1}{g}\,\varepsilon_{abc}\widehat{\Phi}^b\, D^\mu D^\nu \widehat{\Phi}^c\right), \tag{3.142}$$

$$k^\nu = \frac{1}{2g}\,\varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{abc}\,D_\alpha\widehat{\Phi}^a\,D_\beta\widehat{\Phi}^b\,D_\gamma\widehat{\Phi}^c. \tag{3.143}$$

Формулы (3.142)—(3.143) определяют распределение и динамику (эффективных) источников электромагнитного поля через $SU(2)$ калибровочные и хиггсовские поля. В частности, рассмотрим случай, когда модель (3.120) находится в хиггсовском вакууме, т. е. имеет место (3.117). Тогда из (3.142)—(3.143) вытекает, что

$$F_{\mu\nu} = \widehat{\Phi}_a F^a_{\mu\nu}, \quad k^\mu = j^\mu = 0.$$

Таким образом, в хиггсовском вакууме $SU(2)$ калибровочное поле имеет одну компоненту (отвечающую "нейтральному" направлению в изотопическом пространстве, которое связано с генератором $U(1)$ ненарушенной симметрии), и эта компонента является свободным электромагнитным полем, удовлетворяющим уравнениям Максвелла в вакууме. Последний результат имеет большое значение, поскольку выше было установлено, что точные решения уравнений поля (3.114)—(3.116) (с конечной энергией) нетривиальны только в областях с размерами порядка m^{-1} или M^{-1}, а всюду в M^4 вне этих областей полевые конфигурации близки к хиггсовскому вакууму. На больших расстояниях отличие от вакуума экспоненциально мало, и следовательно, "издали" полевая конфигурация модели Янга—Миллса—Хиггса будет выглядеть как система электрических и магнитных зарядов, порождающих (почти) максвелловское электромагнитное поле.

Найдем магнитный заряд произвольного распределения полей модели. Подставляя (3.143) в (3.140), получим

$$\mu = -4\pi\,\frac{N}{g}$$

в силу (3.123). Таким образом, топологический инвариант (3.123), классифицирующий решения с конечной энергией, в сущности есть магнитный заряд полевой конфигурации. Учитывая, что константа связи g в данной модели пропорциональна электрическому заряду (так как W несет $\pm g$), перепишем полученное соотношение в виде

$$\frac{\mu g}{4\pi} = -N, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{3.144}$$

Эта формула является известным *условием квантования зарядов*, которые Дирак получил в своей теории магнитных монополей из квантово-механических соображений. Примечательно, что в модели Янга—Миллса—Хигсса квантование зарядов имеет классическое топологическое происхождение. Для большей строгости уточним, что условие Дирака отличается от (3.144) дополнительным множителем $\frac{1}{2}$ справа, однако последний нетрудно восстановить, если учесть, что заряд g не является минимальным. Можно показать, что минимальный заряд равен половине от g.

Модель Полякова—т'Хуфта

Исследуем теперь точные решения уравнений поля (3.114)—(3.116). Покажем сначала существование решений с произвольным значением топологического (магнитного) заряда. С этой целью рассмотрим конфигурации, которые всюду в M^4 находятся в хиггсовском вакууме (3.117). Таковыми, например, являются

$$\left.\begin{aligned} \Phi^a &= (a\sin(N\chi)\sin\theta,\ a\cos(N\chi)\sin\theta,\ a\cos\theta), \\ A^a_\mu &= -\frac{1}{ga^2}\,\varepsilon^{abc}\Phi_b\,\partial_\mu\Phi_c, \end{aligned}\right\} \tag{3.145}$$

где χ, θ — обычные сферические углы. На бесконечности S^2_∞ функции $Y_{1,2}(y)$ (см. (3.121)) имеют простой вид

$$Y_1 = N\chi, \quad Y_2 = \theta,$$

и топологический заряд (3.122)—(3.123) равен N. Легко убедиться, что (3.145) являются решениями уравнений (3.114)—(3.116). При этом напряженность $SU(2)$ калибровочного поля принимает вид

$$F^a_{\mu\nu} = -\frac{1}{ga^2}\,\varepsilon^{abc}\,\partial_\mu\Phi_b\,\partial_\nu\Phi_c, \tag{3.146}$$

и подставляя сюда независимые от времени хиггсовские поля (3.145), находим, что нетривиальны только магнитные компоненты

$$F^a_{ij} = -\frac{N}{g}\,\widehat{\Phi}_a\varepsilon_{ijk}\,\frac{x^k}{r^3}. \tag{3.147}$$

Таким образом, электромагнитное поле (3.141) есть

$$F_{ij} = -\frac{N}{g}\varepsilon_{ijk}\frac{x^k}{r^3},$$

и для компонент магнитного поля (3.134) получим

$$\mathbf{B} = -\frac{N}{g}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{3.148}$$

Сферически симметричное решение (3.148) является *магнитным монополем* с зарядом $\mu = -4\pi\frac{N}{g}$ в полном согласии с (3.144). Этот монополь является точечным и находится в начале координат. Поэтому функционал энергии расходится на решениях (3.145)—(3.148). Отметим, что точечные монополи (3.148) присутствуют в теории Дирака (3.136)—(3.137), однако там присутствуют также сингулярные нити, на которых 4-потенциал A_μ не существует. Качественная особенность решения (3.145)—(3.148) заключается в том, что $U(1)$ потенциал (3.129) для него тождественно равен нулю, а электромагнитный тензор (3.133) порождается хиггсовскими полями.

Получение регулярных решений с конечной энергией для произвольного N сталкивается с трудностями. В частности, это связано с тем, что такие конфигурации не являются сферически симметричными.

Продемонстрируем, однако, существование $N = 1$ монополей. Основная идея построения таких решений довольно проста. Рассмотрим опять сингулярные конфигурации (3.145), которые при $N = 1$ имеют следующий вид:

$$\Phi^a = a\,\frac{x^a}{r}, \quad A^a_r = \frac{1}{g}\,\varepsilon_{aij}\,\frac{x^j}{r^2}, \quad A^a_0 = 0. \tag{3.149}$$

Заметим, что **поля (3.149) инвариантны относительно одновременных $SO(3)$ вращений декартовых пространственных координат x^i и внутренних координат в изотопическом пространстве**. Будем искать $N = 1$ решения с конечной энергией в классе регулярных $SO(3)$-симметричных конфигураций (3.17), для которых (3.149) на пространственной бесконечности имеет асимптотику (3.18). Очевидным $SO(3)$-симметричным обобщением (3.17) является анзац

$$\Phi^a = \frac{H(r)}{gr^2}\,x^a, \quad A^a_i = [1 - K(r)]\,\varepsilon^a_{ij}\,\frac{x^j}{gr^2}, \quad A^a_0 = 0. \tag{3.150}$$

Условия регулярности в $r = 0$ и асимптотика (3.18) при $r \to \infty$ фиксируют поведение функций H и K на границах:

$$\left.\begin{aligned} &H(r) \leqslant O(agr), \quad K(r) \leqslant 1 + O(agr), \quad r \to 0, \\ &H(r) \to agr, \qquad K(r) \to 0, \qquad\qquad r \to \infty \end{aligned}\right\} \tag{3.151}$$

Подстановка (3.150) в уравнения поля (3.114)—(3.116) приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} r^2K'' &= K[H^2 + K^2 - 1], \\ r^2H'' &= H\left[2K^2 + \frac{\lambda}{g^2}(H^2 - g^2a^2r^2)\right], \end{aligned}\right\} \tag{3.152}$$

где штрихом обозначается производная по радиусу r.

Нетрудно видеть, что в анзаце (3.150) эффективный $U(1)$ потенциал (3.129) тождественно равен нулю ($A_\mu = 0$). Электромагнитный тензор (3.133), (3.141) благодаря вкладу хиггсовских полей имеет вид

$$F_{i0} = 0, \quad F_{ij} = -\frac{1}{g}\varepsilon_{ijk}\frac{x^k}{r^3}.$$

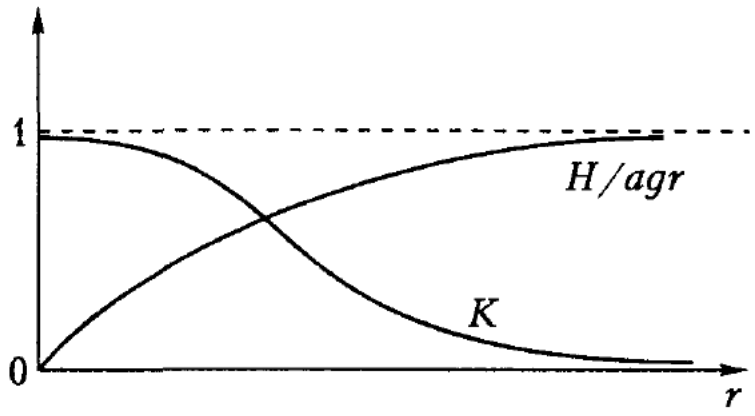


Рис. 16

Решение системы (3.152), удовлетворяющее граничным условиям (3.151), существует, хотя его нельзя выразить в элементарных функциях.

Оценим поведение полей на бесконечности. На основе асимптотики (3.141) при $r \to \infty$ функции $K(r)$ и $h(r) = H(r) - agr$ являются малыми, так что в (3.152) можно пренебречь нелинейными членами. В этом приближении

$$K'' \approx (ga)^2K = M^2K, \quad h'' \approx 2\lambda a^2h = m^2h \tag{3.153}$$

и для хиггсовских и калибровочных полей получаем ожидаемую асимптотику

$$\Phi^a \approx \frac{ax^a}{r}\left(1 - O\left(\frac{e^{-mr}}{r}\right)\right), \quad A_i^a \approx \frac{1}{g}\varepsilon_{ij}^a\frac{x^j}{r^2}\left(1 - O(e^{-Mr})\right).$$

В полном согласии с проведенным ранее анализом физического содержания модели массивные поля имеют нетривиальное поведение только на расстояниях порядка M^{-1} и m^{-1}.

Уравнение Богомольного

Монополь т'Хуфта—Полякова имеет магнитный заряд

$$\mu = -\frac{1}{4\pi g},$$

и электрически нейтрален ($e = 0$, поскольку $j^\mu = 0$ для статических конфигураций (3.150)), а его энергия E конечна. Величину E можно найти численным интегрированием, причем она существенным образом зависит только от отношения $\frac{\lambda}{g^2}$, а именно:

$$E = \frac{4\pi a}{g} f\left(\frac{\lambda}{g^2}\right),$$

где f — гладкая функция такая, что $f \geqslant 1$, и равенство достигается только в 0 ($f(0) = 1$). Последнее реализуется при $\lambda = 0$ и заслуживает отдельного рассмотрения.

Прежде всего заметим, что при $\lambda = 0$ уравнения поля (3.114)—(3.116) тождественно удовлетворяются на решениях следующей системы:

$$F_{ij}^a = \pm\varepsilon_{ijk} D^k \Phi^a, \quad F_{0j}^a = 0, \tag{3.154}$$

где хиггсовские и калибровочные поля не зависят от времени. Уравнение (3.154) называется *уравнением Богомольного*. Мы по-прежнему будем считать, что на бесконечности поля стремятся к своим вакуумным значениям (3.117). Поскольку такая асимптотика вытекает из требования конечности энергии, которая для статистических полей в калибровке $A_0^a = 0$ имеет вид

$$E = \int d^3x \left\{ V(\Phi) + \frac{1}{2}\left[(D_i\Phi)^2 + \frac{1}{2}(F_{ij}^a)^2 \right] \right\},$$

условие обращения в нуль константы λ следует понимать как *предельный переход* $\lambda \to 0$, который называется *пределом Прасада—Зоммерфельда*. Убедимся, что в данном пределе энергия достигает своего минимального значения на уравнении Богомольного. Для этого выпишем очевидную оценку интеграла (3.155) снизу:

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left\{ V(\Phi) + \frac{1}{4}(F_{ij}^a \mp \varepsilon_{ijk} D^k \Phi^a)^2 \pm \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} F_{ij}^a D_k \Phi_a \right\} \geqslant \\ &\geqslant \pm \int d^3x \, \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} D_k (F_{ij}^a \Phi_a) = \pm \int ds_i \, \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} F_{ij}^a \Phi_a = \pm\mu a. \end{aligned} \tag{3.156}$$

Таким образом, ввиду (3.144) в $N = 1$ секторе для энергии имеем неравенство

$$E \geqslant \frac{4\pi a}{g}$$

(откуда, кстати, следует, что введенная выше функция $f\left(\frac{\lambda}{g^2}\right) \geqslant 1$). Равенство в (3.156), на котором реализуется минимум энергии, достигается для $\lambda = 0$ в уравнении Богомольного (3.154).

Решение в $N = 1$ топологическом секторе можно выписать в элементарных функциях. Подставив (3.150) в (3.154), получим систему

$$rK' = \pm KH, \quad rH' = H \pm (K^2 - 1). \tag{3.157}$$

Отсюда находим

$$H = \frac{\pm\beta r}{\operatorname{sh}(\beta r)}, \quad K = -1 + \beta r \operatorname{cth}(\beta r), \tag{3.158}$$

где β — произвольная константа интегрирования.

Наше рассмотрение ограничилось $SU(2)$ моделью Джорджи—Глэшоу и простейшими решениями уравнений поля. Поэтому в заключение сделаем несколько замечаний о возможных обобщениях. Во-первых, (3.150) не является самым общим $SO(3)$-симметричным анзацем в $N = 1$ топологическом секторе. Для нулевой компоненты калибровочного поля решение можно искать в виде

$$A_0^a = J(r)\frac{x^a}{gr^2}.$$

Найденное точное решение системы уравнений для функций K, H, J (обобщающий (3.152)) описывает так называемый дион — объект, обладающий как магнитным, так и электрическим зарядами. При этом $\mu = -\frac{1}{4\pi g}$, а e произволен.

В реалистических моделях с более общими калибровочными группами также существуют монополи. Соответствующий топологический инвариант (магнитный заряд) классифицирует гомотопически неэквивалентные вакуумные конфигурации хиггсовских полей на пространственной бесконечности S^2_∞. Для связных полупростых групп G спонтанное нарушение симметрии до подгруппы $H \subset G$ обеспечивается в моделях Большого объединения хиггсовскими полями, многообразие вакуумов которых изоморфно G/H. Множество монопольных решений тем самым определяются гомотопической группой $\pi_2(G/H)$, изоморфной ядру естественного отображения фундаментальных групп $\pi_1(H) \to \pi_1(G)$, индуцируемого вложением $H \subset G$. Для односвязных групп $\pi_2(G/H) \approx \pi_1(H)$, и следовательно, монополи будут с необходимостью возникать в моделях с группой ненарушенных симметрий, содержащей электромагнитную группу $U(1)$. Точные монопольные решения в таких моделях можно построить с помощью вложения $SU(2)$ монополя Полякова—т'Хуфта.

Глава 4

Геометрии пространства-времени

В настоящее время можно выделить три основных круга калибровочных моделей, описывающих геометрию пространства-времени. Это калибровочная теория самой гравитации, многомерные модели Калуца—Клейна и теория супергравитации. Здесь мы сосредоточим внимание только на краеугольных элементах этих теорий. В теории гравитации это — нарушение пространственно-временных симметрий, обусловленное принципом эквивалентности и присутствием фермионной материи. В моделях Калуца—Клейна — математическое доказательство того, что метрика многомерного пространства может быть выражена через метрику и калибровочные потенциалы на пространственно-временном многообразии. В теории супергравитации это — определение суперпространства.

§ 1. Гравитация

В теории гравитации, если не касаться проблемы гравитационных сингулярностей, пространство-время обычно предполагается 4-мерным ориентируемым многообразием X^4, удовлетворяющим тем условиям, которые мы договорились требовать от многообразий. Будем называть его *мировым многообразием* (world manifold). Оно становится пространственно-временным многообразием, когда наделено дополнительной структурой (3+1)-разбиения, которая не присуща ему автоматически. Геометрия мирового многообразия — это геометрия его касательного и кокасательного расслоений TX и T^*X, ассоциированных с *главным расслоением линейных реперов* LX из Примера 1.7.7 со структурной группой $GL(4, \mathbb{R})$. Сама по себе эта геометрия, однако, не очень богата.

Во-первых, касательное и кокасательное расслоения могут быть наделены общей линейной связностью K из Примера 1.6.3, которая ассоциирована с некоторой связностью на главном расслоении LX. Во-вторых, структурная группа $GL(4, \mathbb{R})$ расслоения LX всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе $O(4)$. Согласно Теореме 1.7.4 отсюда следует, что всегда существует глобальное сечение g^R ассоциированного с LX фактор-расслоения

$$LX/O(4) \to X^4. \tag{4.1}$$

Типичный слой этого расслоения изоморфен пространству римановых билинейных форм в $\mathbb{R}^4$, приводимых общими линейными преобразованиями к евклидовой метрике. Следовательно глобальное сечение g^R расслоения (4.1) — это *риманова метрика* на многообразии X^4. Таким образом мировое многообразие X^4 всегда может быть наделено римановой метрикой. Однако риманова метрика и общая линейная связность — это не те объекты, которыми оперирует теория гравитации.

В дальнейшем предположим для упрощения, что ориентация мирового многообразия X^4 фиксирована и, чтобы не вводить новых обозначений, будем понимать под LX

главное расслоение линейных ориентируемых реперов со структурной группой

$$GL_4 = GL^+(4, \mathbb{R})$$

4×4-матриц с положительным детерминантом.

Теория гравитации описывает круг явлений, суть которых состоит в так называемом спонтанном нарушении пространственно-временных симметрий. Физической первопричиной такого нарушения симметрий является фермионная материя. Дело состоит в том, что:

- группой симметрий фермионной материи служит группа Лоренца;
- как следует из структуры уравнения Дирака, эта группа не является внутренней;
- фермионные поля не допускают других преобразований из группы GL_4, кроме лоренцевских и еще растяжений.

На геометрическом языке это означает, что фермионные поля на мировом многообразии описываются сечениями расслоений со структурной группой Лоренца и, поскольку эта группа не является внутренней, такие расслоения должны быть ассоциированы тем или иным образом с главным расслоением LX, структурной группой которого является группа GL_4. Эту возможность и обеспечивает гравитационное поле.

Предлагаются различные спинорные модели для фермионной материи. Однако все пока известные фермионные частицы описываются дираковскими спинорными полями. Эти поля представляются сечениями спинорных расслоений, типичным слоем которых является пространство дираковских спиноров, и, чтобы они описывали реальные фермионы, на них должен быть определен оператор Дирака.

Есть разные способы введения дираковских спиноров. Мы будем следовать их алгебраическому определению, исходя из алгебры Клиффорда.

Пусть M — *пространство Минковского с метрикой Минковского* η. Построим тензорную алгебру

$$A_M = \bigoplus_n M^n, \qquad M^0 = \mathbb{R}, \qquad M^{n>0} = \bigotimes^n M,$$

моделируемую над векторным пространством M. Рассмотрим фактор этой алгебры по двустороннему идеалу, порождаемому элементами вида

$$e \otimes e' + e' \otimes e - 2\eta(e, e') \in A_M, \qquad e \in M,$$

т. е. при переходе к фактору такие элементы приравниваются нулю. Комплексифицируем этот фактор и тогда получим *комплексную алгебру Клиффорда* $\mathbb{C}_{1,3}$. Пространство Минковского M является подпространством этой алгебры. В свою очередь *спинорным пространством* или более полно пространством дираковских спиноров называется некоторый *минимальный левый идеал* V *алгебры Клиффорда* $\mathbb{C}_{1,3}$, на который эта алгебра действует левыми умножениями. В частности, имеет место представление

$$\gamma : M \otimes V \to V \tag{4.2}$$

элементов пространства Минковского $M \subset \mathbb{C}_{1,3}$ дираковскими γ-матрицами V:

$$\widehat{e^a}(v^A) = \gamma(e^a \otimes v^A) = \gamma^{aA}{}_B v^B,$$

где

$$\{e^a,\ a=0,\ 1,\ 2,\ 3\},\quad \eta_{00}=-\eta_{11}=-\eta_{22}=-\eta_{33}=1,$$

— фиксированный базис M и $\{v^A\}$ — базис V.

Заметим, что выбор того или иного минимального левого идеала алгебры Клиффорда в качестве спинорного пространства не однозначен, но фиксируется заданием стандартной формы матриц Дирака γ^a в представлении (4.2).

Рассмотрим преобразования, сохраняющие представление (4.2). Это пары $(l,\ l_s)$ преобразований Лоренца пространства Минковского M и обратимых элементов l_s алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_{1,3}$ таких, что

$$lM = l_s M l_s^{-1},$$
$$\gamma\left(lM \otimes l_s V\right) = l_s \gamma\left(M \otimes V\right).$$

Элементы l_s образуют *группу Клиффорда*, действие которой на пространстве Минковского M однако не является эффективным. Поэтому обычно ограничиваются рассмотрением ее подгруппы $L_s = SL(2,\ \mathbb{C})$, которую мы будем называть *спинорной группой*. Имеет место соотношение

$$L = SO(1,\ 3) = L_s/\mathbb{Z}_2,$$

где $SO(1,\ 3)$ — *связная группа Лоренца*. Матрицы представления l этой группы на пространстве Минковского M удовлетворяют условиям

$$\det l = 1,\quad l^0{}_0 > 0.$$

Генераторы спинорной группы L_s, действующей на спинорном пространстве V, принимают вид

$$I_{ab} = \frac{1}{4}\left[\gamma_a,\ \gamma_b\right].$$

При этом следует иметь в виду, что, поскольку

$$(I_{ab})^+ \neq -I_{ab},$$

стандартная эрмитова билинейная форма

$$(v,\ v) = v^+ v$$

на V не является L_s-инвариантной. В то же время справедливы соотношения

$$(\gamma^0)^+ = \gamma^0,\quad (\gamma^0\gamma^a)^+ = \gamma^0\gamma^a,\quad (I_{ab})^+\gamma_0 = -\gamma_0 I_{ab}.$$

Поэтому в качестве L_s-инвариантной метрики на спинорном пространстве V следует выбрать билинейную форму

$$\mathbf{a}(v,\ v) = v^+\gamma^0 v. \tag{4.3}$$

Рассмотрим теперь расслоение над мировым многообразием X^4, слоями которого служат алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_{1,3}$. Его подрасслоениями являются *спинорное расслоение* $S_M \to X^4$ и *расслоение* $Y_M \to X^4$ *на пространства Минковского* образующих элементов алгебр Клиффорда $\mathbb{C}_{1,3}$. Для них определен послойный морфизм

$$\gamma_M : Y_M \times S_M \to S_M$$

представления элементов расслоения Y_M матрицами Дирака на элементах спинорного расслоения S_M. Чтобы сечения спинорного расслоения S_M могли описывать *дираковские фермионные поля*, в частности, чтобы на них был задан оператор Дирака, расслоение Y_M должно быть изоморфно кокасательному расслоению T^*X над X^4. Это имеет место, если структурная группа кокасательного расслоения T^*X и ассоциированного с ним главного расслоения LX редуцируема к группе Лоренца L и Y_M ассоциировано с одним из его редуцированных подрасслоений L^hX со структурной группой L, т. е.

$$Y_M = M^hX = (L^hX \times M)/L = T^*X. \tag{4.4}$$

В этом случае спинорное расслоение S_M ассоциировано с L_s-главным расслоением P_h, накрывающим L^hX:

$$S_M = S_h = (P_h \times V)/L_s. \tag{4.5}$$

Для такой редукции существуют топологические препятствия, но мы их обсудим позже.

Согласно Теореме 1.7.4 имеет место взаимно однозначное соответствие между редуцированными главными L-подрасслоениями L^hX расслоения LX и глобальными сечениями h расслоения

$$\Sigma := LX/L \to X^4, \tag{4.6}$$

типичным слоем которого служит фактор-пространство GL_4/L. Следуя принципам геометрического подхода к теории поля, естественно попытаться связать с h какое-либо физическое поле.

Групповое пространство GL_4 диффеоморфно многообразию $\mathbb{R}P^3 \times S^3 \times \mathbb{R}^{10}$, а групповое пространство L — это $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^3$. Фактор-пространство GL_4/L диффеоморфно $S^3 \times \mathbb{R}^7$ и представляет собой 2-листное накрытие пространства $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^7$ пространства билинейных форм в $\mathbb{R}^4$, приводимых общими линейными преобразованиями к метрике Минковского η. Отсюда следует, что расслоение Σ (4.6) изоморфно двулистному накрытию ассоциированного с LX расслоения Σ_g псевдоримановых билинейных форм в касательных пространствах к X^4. Глобальным сечением расслоения Σ_g является *псевдориманова метрика* g на мировом многообразии X^4, отождествляемая в эйнштейновской теории гравитации с гравитационным полем. Следовательно сечение h расслоения Σ тоже эквивалентным образом описывает гравитационное поле. Мы будем называть его *тетрадным полем* (tetrad field).

Таким образом *гравитационное поле* представляет собой своего рода хиггсовское поле, отвечающее спонтанному нарушению пространственно-временных симметрий. Оно обеспечивает необходимое условие существования дираковских фермионных полей на мировом многообразии.

Если забыть про фермионные поля, нарушение симметрий в теории гравитации является прямым следствием принципа эквивалентности. Будучи сформулированным в геометрических терминах, *принцип эквивалентности* постулирует возможность существования лоренцевских инвариантов на мировом многообразии X^4. Для этого необходимо, чтобы имела место редукция структурной группы GL_4 главного расслоения LX и ассоциированных с ним расслоений к группе Лоренца L. В этом случае согласно Теореме 1.7.3 существуют атласы этих расслоений с лоренцевскими функциями перехода так, что при переходах с карты на карту лоренцевские инварианты, заданные в таком атласе, сохраняются.

Действительно, пусть дано тетрадное поле h. Рассмотрим Ψ^h атлас главного расслоения LX, задаваемый некоторым семейством локальных сечений $\{z^h_\xi\}$ расслоения LX, принимающих значения в редуцированном подрасслоении L^hX. Именно о таком атласе

говорится в Теореме 1.7.3. Его функции перехода принимают значения в группе Лоренца L. Будем обозначать ассоциированные с ним атласы ассоциированных расслоений тем же символом Ψ^h. В частности, легко убедиться, что во всяком таком атласе Ψ^h сечение h представляется семейством функций $f_h(z_\xi(x))$, принимающих значения в центре фактор-пространства GL_4/L, а соответствующая псевдориманова метрика g — метрическими функциями, совпадающими с метрикой Минковского η. Поля h и g, записанные в атласе Ψ^h, таким образом дают пример лоренцевских инвариантов, о которых говорит принцип эквивалентности.

Заметим, что в физической интерпретации задание атласа расслоения LX означает фиксацию некоторой *системы отсчета*, когда в каждой точке x мирового многообразия X^4 восстанавливается репер (тетраду) $z_\xi(x)$ касательных векторов, определяющий локальную систему отсчета в этой точке. В частности, традиционная общековариантная формулировка теории гравитации подразумевает выбор только голономных систем отсчета. Хотя остается проблема, как реализовать такие системы отсчета реальными физическими приборами. В этом смысле можно сказать, что всякое гравитационное поле h само определяет некоторое семейство собственных систем отсчета Ψ^h, в которых его метрические функции сводятся к метрике Минковского.

Существенно, что собственные атласы Ψ^h тетрадного поля h в общем случае не являются голономными. Поэтому, если заданы атлас Ψ^h и некоторый голономный атлас $\Psi^T = \{\psi^T_\xi\}$ расслоения LX, тетрадное поле h можно представить семейством GL_4-значных *тетрадных функций*

$$\begin{aligned} h_\xi &= \psi^T_\xi \circ z^h_\xi, \\ dx^\lambda &= h^\lambda_a(x) h^a, \end{aligned} \tag{4.7}$$

которые описывают преобразования между базисами $\{dx^\lambda\}$ и $\{h^a\}$ слоев кокасательного расслоения T^*X, соответствующими атласам Ψ^T и Ψ^h. В частности, получаем известное соотношение

$$g^{\mu\nu} = h^\mu_a h^\nu_b \eta^{ab}. \tag{4.8}$$

Ясно, что тетрадное поле h представляется тетрадными функциями $h^\lambda_a(x)$ неоднозначно, а с точностью до калибровочных лоренцевских преобразований, действующих на их индексы a, что отвечает произволу в выборе атласа Ψ^h.

Пусть задано тетрадное гравитационное поле h, а M^hX и S_h — соответственно расслоение на пространства Минковского (4.4) и спинорное расслоение (4.5). Определено послойное представление

$$\gamma_h : T^*X \otimes S_h = \left(P_h \times \left(M \otimes V\right)\right)/L_s \to \left(P_h \times \gamma\left(M \otimes V\right)\right)/L_s = S_h, \tag{4.9}$$

$$\hat{dx}^\lambda = \gamma_h(dx^\lambda) = h^\lambda_a(x)\gamma^a,$$

кокасательных векторов к многообразию X^4 матрицами Дирака γ на элементах спинорного расслоения S_h. Говорят, что глобальные сечения спинорного расслоения S_h описывают *дираковские фермионные поля на многообразии X^4 в присутствии гравитационного поля h*. Действительно, пусть A_h — связность на спинорном расслоении S_h, ассоциированная с некоторой связностью на главном расслоении L^hX, и

$$D : J^1 S_h \underset{S_h}{\to} T^*X \underset{S_h}{\otimes} VS_h,$$

$$D = \left(y^A_\lambda - A^{ab}{}_\lambda(x) I_{ab}{}^A{}_B y^B\right) dx^\lambda \otimes \partial_A,$$

— соответствующий ковариантный дифференциал. Тогда композиция $\gamma_h \circ D$ представляет собой дифференциальный оператор первого порядка на спинорном расслоении S_h:

$$\mathscr{D}_h = \gamma_h \circ D : J^1 S_h \to T^*X \underset{S_h}{\otimes} VS_h \to VS_h, \tag{4.10}$$

$$\dot{y}^A \circ \mathscr{D}_h = h_c^\lambda \gamma^{cA}{}_B (y_\lambda^B - A^{ab}{}_\lambda I_{ab}{}^A{}_B y^B).$$

Это *оператор Дирака*. Здесь использовано то обстоятельство, что вертикальное касательное расслоение VS_h допускает каноническое вертикальное расщепление

$$VS_h = S_h \times S_h,$$

и γ_h в выражении (4.10) — это поднятие

$$\gamma_h : T^*X \underset{S_h}{\otimes} VS_h \underset{S_h}{\to} VS_h,$$
$$\gamma_h(h^a \otimes \dot{y}^A \partial_A) = \gamma^{aA}{}_B \dot{y}^B \partial_A,$$

на VS_h морфизма (4.9).

Суть спонтанного нарушения пространственно-временных симметрий, обусловленного гравитационным полем, состоит в том, что для разных гравитационных полей h и h' представления γ_h и $\gamma_{h'}$ не эквивалентны.

Из вида оператора Дирака (4.10) следует, что в общем случае гравитационное взаимодействие описывается парами (h, A_h) тетрадного гравитационного поля h и лоренцевской связности A_h, которая интерпретируются в духе калибровочной теории как калибровочный гравитационный потенциал.

Заметим, что вследствие условия эквивариантности всякая связность A_h на редуцированном подрасслоении L^hX может быть однозначно продолжена до связности Γ_h на всем главном расслоении LX. При этом ковариантные производные тетрадного поля h и соответствующего метрического поля g относительно связностей, ассоциированных с Γ_h, равны нулю. Обратно, связность Γ на главном расслоении LX редуцируема к связности на его лоренцевском подрасслоении L^hX тогда и только тогда, когда сечение h является интегральным сечением ассоциированной с Γ связности на расслоении Σ. Такую связность мы будем называть *лоренцевской связностью*. Не каждая связность на LX является лоренцевской. Если задана псевдориманова метрика g, всякая *общая линейная связность* Γ допускает разложение

$$\Gamma = \{\} + S + C \tag{4.11}$$

на символы Кристоффеля $\{\}$ метрики g, *тензор конторсии* S и *тензор неметричности* C. В голономном атласе они даются следующими координатными выражениями:

$$\Gamma_{\alpha\nu\mu} = \{_{\alpha\nu\mu}\} + S_{\alpha\nu\mu} + C_{\alpha\nu\mu},$$
$$\{_{\alpha\nu\mu}\} = \{_{\alpha\mu\nu}\} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\nu\mu}),$$
$$S_{\alpha\nu\mu} = -S_{\nu\alpha\mu} = (\Omega_{\alpha\nu\mu} + \Omega_{\mu\nu\alpha} + \Omega_{\nu\mu\alpha} + C_{\mu\alpha\nu} - C_{\mu\nu\alpha}),$$
$$\Omega_{\alpha\nu\mu} = -\Omega_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\nu\mu} - \Gamma_{\alpha\mu\nu}),$$
$$\partial_\mu g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\alpha\nu\mu} - \Gamma_{\nu\alpha\mu} = -2C_{\alpha\nu\mu},$$

где Ω — *кручение* связности Γ. В частности, если связность — лоренцевская, ее разложение относительно соответствующей псевдоримановой метрики g включает только символы Кристоффеля и тензор кручения. При переходе от голономного атласа к атласу Ψ^h, задаваемому тетрадными функциями h_a^λ, имеем соотношение

$$\partial_\lambda h_a^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} h_a^\nu - \Gamma^b{}_{a\lambda} h_b^\mu = 0.$$

Если Γ — лоренцевская связность, редуцируемая к связности A_h на L^hX, то

$$\Gamma^{ab}{}_\lambda = 2A^{ab}{}_\lambda, \qquad \Gamma^{ab}{}_\lambda = -\Gamma^{ba}{}_\lambda,$$

где $A^{ab}{}_\lambda$ — коэффициенты локальной 1-формы связности A_h.

В отсутствии фермионной материи, в качестве гравитационных величин можно использовать метрическое поле g и тензор кручения Ω, который входит в разложение (4.11) лоренцевской связности Γ на LX.

Нарушение симметрий в теории гравитации приводит не только к появлению гравитационного поля, но и индуцирует пространственно-временную структуру на мировом многообразии X^4.

Если структурная группа главного расслоения LX редуцируема к группе Лоренца L, последняя в свою очередь всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе $SO(3)$. Это означает, что:

- всякое редуцированное расслоение L^hX содержит главное редуцированное подрасслоение L_0^hX со структурной группой $SO(3)$;
- существует атлас Ψ^h расслоения LX и ассоциированных расслоений с $SO(3)$-значными функциями перехода;
- всегда существует глобальное сечение расслоения

  $$L^hX/SO(3) \to X^4,$$

  которое может быть представлено нигде не нулевой *тетрадной* 1-*формой*

  $$h^0 = h_\mu^0 dx^\mu \tag{4.12}$$

  на X^4.

Более того, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} GL_4 & \longrightarrow & SO(4) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & \longrightarrow & SO(3) \end{array} \tag{4.13}$$

редукции структурных групп расслоения LX.

Редукция структурной группы L к $SO(3)$, в частности, позволяет задать глобальное поле $(\gamma_h \circ h^0)(x) = \gamma^0$ матриц Дирака γ^0 и построить послойную L-инвариантную метрику (4.3) в спинорном расслоении S_h.

В то же время тетрадная форма (4.12) выделяет 3-мерное ориентируемое подрасслоение FX касательного расслоения TX над X^4, которое задается соотношением

$$t \lrcorner h^0(x) = 0, \qquad t \in F_x X.$$

Его слои $F_x X$ являются пространственно-подобными подпространствами касательных пространств $T_x X$ относительно псевдоримановой метрики g, ассоциированной с h. В результате может быть осуществлено $(3+1)$-разбиение

$$TX = FX \oplus T^0 X \tag{4.14}$$

касательного расслоения на 3-мерное пространственно-подобное подрасслоение FX и ортогональное ему (относительно g) 1-мерное времени-подобное дополнение $T^0 X$. Такое разбиение определяет на мировом многообразии X^4 *пространственно-временную структуру*, ассоциированную с данным гравитационным полем h, превращая X^4 в *пространственно-временное многообразие*. При этом расслоение $T^0 X$ указывает направление локального времени в каждой точке $x \in X^4$.

Более того, следствием коммутативности диаграммы (4.13) является следующая известная теорема.

Теорема 4.1.1. Для всякого гравитационного поля g на мировом многообразии X^4 и ассоциированного с ним пространственно-временного разбиения (4.14) с производящей формой h^0 (4.12) существует риманова метрика g^R такая, что

$$g^R = 2h^0 \otimes h^0 - g.$$

□

Риманова метрика g^R из Теоремы 4.1.1 индуцирует согласованную с g функцию расстояния на пространственно-временном многообразии X^4, которая превращает X^4 в метрическое топологическое пространство. Его топология эквивалентна топологии многообразия на X^4. Однако для одного и того же гравитационного поля g, но разных пространственно-временных разбиений (4.14) мы имеем разные ассоциированные римановы метрики и разные функции расстояний на X^4. В физической интерпретации это означает, что в разных пространственно-временных системах отсчета наблюдатели должны наблюдать разные римановы свойства пространства-времени. Известное изменение видимых размеров тел при переходе к движущейся системе отсчета иллюстрирует это явление.

Выше уже отмечалось, что существуют топологические препятствия для редукции структурной группы главного расслоения линейных реперов LX к группе Лоренца и следовательно для существования гравитационного поля, а также спинорной и пространственно-временной структур на многообразии X^4. Рассмотрим эти препятствия.

Многообразия X^4 классифицируются по следующим характеристическим классам своих касательных расслоений:

- первый класс Понтрягина $p_1(X) \in H^4(X, \mathbb{Z})$,
- класс Эйлера $e(X) \in H^4(X, \mathbb{Z})$ при фиксированной ориентации X^4,
- классы Штифеля—Уитни $w_i(X) \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$, $i \leqslant 2$.

Здесь $H^i(X, \mathbb{Z})$ и $H^i(X, \mathbb{Z}_2)$ обозначают группы симплициальных когомологий.

Отметим сразу, что, поскольку многообразие X^4 является ориентируемым, класс Штифеля—Уитни $w_1(X)$ равен нулю, или более точно является нулевым элементом группы $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$.

Существенно, что, благодаря гомоморфизмам групп симплициальных когомологий $H^*(X, \mathbb{Z})$ в группы $H^*(X, \mathbb{R})$ когомологий Де Рама внешних дифференциальных форм на X^4 класс Понтрягина p_1 и класс Эйлера e могут быть представлены когомологическими классами соответствующих характеристических форм:

$$p_1 = -\frac{1}{8\pi^2}\operatorname{Tr}(R \wedge R) = \frac{1}{8\pi^2} R^{ab} \wedge R_{ab},$$
$$e = \frac{1}{32\pi^2}\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}. \tag{4.15}$$

Заметим, что в этих выражениях должна использоваться 2-форма кривизны R линейной связности Γ на TX, принимающая значения только в алгебре Ли $so(4-k, k)$ ортогональной группы или одной из псевдоортогональных групп:

$$R = \frac{1}{2} R^{ab} I_{ab}, \qquad I_{ab} = -I_{ba}.$$

В частности, это может быть кривизна какой-либо римановой связности или лоренцевской связности, если последняя существует на TX.

Если X^4 компактное многообразие, интегрированием характеристических форм (4.15) мы получаем число Понтрягина

$$P_1 = \int_X p_1$$

и эйлерову характеристику

$$\chi = \int_X e$$

многообразия X^4.

Спинорные расслоения S над X^4 со структурной группой L_s классифицируются по классам Чженя $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$, $i \leqslant 2$. При этом, так как структурная группа L_s всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе $SU(2)$, класс Чженя $c_1(E)$ спинорного расслоения совпадает с нулевом элементом группы $H^2(X, \mathbb{Z})$.

Классы Чженя совпадают с когомологическими классами характеристических форм Чженя

$$c_1 = \frac{i}{2\pi}\operatorname{Tr} R = 0,$$
$$c_2 = \frac{1}{8\pi^2}\operatorname{Tr}(R \wedge R) = -\frac{1}{32\pi^2} R^{ab} \wedge R_{ab}, \tag{4.16}$$

где R — 2-форма кривизны связности A на расслоении S. Она дается выражением

$$R = \frac{1}{2} F^{ab} I_{ab},$$

где I_{ab} — генераторы группы L_s на двумерном комплексном пространстве.

Поскольку существует включение

$$GL_4 \to GL(4, \mathbb{C}),$$

касательное расслоение TX можно считать ассоциированным с некоторым комплексным расслоением T^cX со структурной группой $GL(4, \mathbb{C})$ так, что имеет место соотношение

$$p_1(X) = -c_2(T^cX).$$

Пусть теперь структурная группа касательного расслоения TX редуцирована к группе Лоренца и S — спинорное расслоение, ассоциированное с TX. Тогда расслоение T^cX ассоциировано с тензорным произведением $S \otimes S^*$ и выполняются соотношения

$$p_1(X) = -c_2(T^cX) = -4c_2(S),$$
$$w_2(X) = 0.$$

Причем, первое соотношение можно получить непосредственно из равенства характеристических форм (4.15) и (4.16), если форма $p_1(X)$ подсчитана в случае лоренцевской связности, ассоциированной со связностью на спинорном расслоении S.

Следующая теорема суммирует топологические условия на многообразие X^4, чтобы оно допускало гравитационное поле, дираковское фермионное поле и пространственно-временное разбиение (4.14).

Теорема 4.1.2. Указанные выше структуры существуют на некомпактных многообразиях X^4, если их касательные расслоения тривиальны, и на компактных многообразиях X^4, если их эйлерова характеристика и классы Штифеля—Уитни $w_{1,2}$ равны нулю, а число Понтрягина P_1 кратно 48. □

§ 2. Многомерная гравитация

Первая модель многомерной гравитации — *модель Калуца—Клейна* — была предложена в 20-е годы как совместное геометрическое описание гравитации и электромагнетизма. Ее главным атрибутом является 5-мерное пространство X^5 с координатами $(x^A,\ A = 0, 1, 2, 3; 5)$ и метрикой

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu} \\ -g^{\nu} & 1 + g^{\lambda}g_{\lambda} \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Компоненты метрики g^{AB} предполагаются независимыми от координаты x^5, а на волновые функции в 5-мерном пространстве накладывается условие цикличности по координате x^5, т. е.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^5} = im\Psi,$$
$$\Psi = \psi(x^0, \ldots, x^3)\exp(imx^5), \tag{4.18}$$

при целом m.

Это означает, что пространство X^5 представляет собой прямое произведение

$$X^4 \times S^1$$

4-мерного пространства-времени и окружности S^1 с циклической координатой x^5. При этом выражение (4.17) для метрики g^{AB} и выражение (4.18) для волновых функций ψ на X^5 через метрику $g^{\mu\nu}$ и функции ψ на X^4 составляют условия проекции физических, геометрических и других объектов на пространстве X^5 в пространство-время X^4. Например, волновое уравнение

$$\Box\Psi = 0$$

на пространстве X^5 приводится на пространстве X^4 к уравнению Прока

$$(\Box - m^2)\psi = 0,$$

а уравнения Эйнштейна для метрики g^{AB} — к уравнениям Эйнштейна для метрики $g^{\mu\nu}$ и уравнениям Максвелла для величин g^{μ}, которые в модели Калуца—Клейна интерпретируются как электромагнитный потенциал.

Все эти моменты присутствуют и в обобщенных *многомерных* моделях гравитации, когда на $(4 + d)$-мерном пространстве компоненты метрики с индексами высших размерностей, как оказалось, соответствуют калибровочным потенциалам на 4-мерном пространственно-временном многообразии. Это соответствие и стало главной причиной широкого внимания к многомерным моделям как одного из путей объединения гравитации с другими фундаментальными взаимодействиями. Мы посвятим настоящий параграф обоснованию этого ключевого пункта, а именно доказательству следующего факта.

Если G — компактная группа преобразований многообразия E с изоморфными орбитами в E, тогда существует взаимно однозначное соответствие между G-инвариантными метриками на E и тройками (γ, A, h) метрики γ на пространстве орбит M группы G в E, калибровочных полей A группы N/H, где H — стабилизатор точки в E и N — нормализатор подгруппы H в G, и некоторых скалярных полей h, характеризующих внутреннюю геометрию орбит.

Пусть E — многообразие, на котором задано правое действие компактной связной группы Ли G, т. е.

$$G \ni g : E \ni q \mapsto qg \in E.$$

Для всякой точки $q \in E$ обозначим $G(q)$ орбиту группы G в E, проходящую через q, а посредством H_q — стабилизатор точки q. Для точек q и q', принадлежащих одной и той же орбите, подгруппы H_q и $H_{q'}$ сопряжены в G, а значит изоморфны. Для точек, принадлежащих разным орбитам, это, вообще говоря, не так. Однако в дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда стабилизаторы всех точек $q \in E$ сопряжены с некоторой стандартной подгруппой H в G.

Нормализатором подгруппы H в G называется максимальная подгруппа N группы G такая, что H является в N *инвариантной* подгруппой (*нормальным делителем*), т. е.

$$N = \{g \in G : \ gH = Hg\}.$$

Рассмотрим правое фактор-пространство G/H и фактор-группу N/H. На G/H определено правое действие группы G по правилу

$$g' : G/H \ni [g] \mapsto [g]g' = [gg'] \in G/H, \tag{4.19}$$

где

$$[g] = [gh], \quad h \in H,$$

обозначает правый класс смежности элемента g из G. Зададим левое действие

$$n : G/H \ni [g] \mapsto [ng] \in G/H \tag{4.20}$$

группы N на G/H. Оно перестановочно с правым действием G на G/H:

$$n([g]g') = n[gg'] = [ngg'] = [ng]g' = (n[g])g'.$$

Более того, действие (4.20) зависит только от класса смежности $[n]$ элемента n в N/H:

$$nh'[g] = n[h'g],$$

т. е. сводится к действию

$$[n][g] = [ng] \tag{4.21}$$

фактор-группы N/H на G/H.

Рассмотрим главное расслоение $P_{N/H}$ со структурной группой N/H над базой M и ассоциированное с ним расслоение $Y_{G/H}$ с типичным слоем G/H, на котором определено правое действие группы G:

$$g' : (q, [g])/(N/H) \mapsto (q, [gg'])/(N/H), \tag{4.22}$$

где $q \in P_{N/H}$ и действие группы N/H на

$$P_{N/H} \times (G/H)$$

имеет вид

$$[n] : (q, [g]) \mapsto (q[n], [n][g]) = (q[n], [ng]).$$

Поскольку правое действие (4.19) группы G на G/H и левое действие (4.21) группы N/H на G/H перестановочны, действие (4.21) группы G на $P_{G/H}$ является послойным. На каждом слое, как на своей орбите, группа G действует транзитивно, но не свободно (поскольку центр фактор-пространства G/H имеет своим стабилизатором подгруппу H).

Существует вложение $P_{N/H}$ на подмногообразие в $P_{G/H}$. Оно осуществляется отображением

$$\gamma : P_{N/H} \ni q \mapsto (q, [\widehat{1}])/(N/H) \in P_{G/H}.$$

Причем, если $q \neq q'$, то $\gamma(q) \neq \gamma(q')$, поскольку центр $[\widehat{1}]$ фактор-пространства G/H не имеет стабилизатора в N/H и

$$(q[n], [\widehat{1}])/(N/H) = (q, [n])/(N/H) \neq (q, [\widehat{1}])/(N/H).$$

Используем все приведенные конструкции для доказательства следующей теоремы.

Теорема 4.2.1. Пусть E — многообразие, на котором задано правое действие группы G такое, что стабилизаторы всех точек из E сопряжены с некоторой подгруппой H в G. Пусть M — множество орбит группы G в E. Тогда E имеет структуру расслоения $\pi : E \to M$ над M с типичным слоем G/H и структурной группой N/H. □

Выделим в E подпространство точек, стабилизатором которых является подгруппа H:

$$Q = \{q \in E : \ qH = q\}.$$

Заметим, что, если $q \in Q$, то $qg \in Q$ тогда и только тогда, когда $g \in N$, поскольку

$$qgH = qHg = qg$$

лишь при $g \in N$. В силу этого свойства на Q определено правое действие N/H и оно свободно. Это превращает Q в главное (N/H)-расслоение $P_{N/H}$ с базой M. Зададим отображение

$$Q \times G/H \ni (q, [g]) \mapsto qg \in E.$$

Оно обладает свойством

$$(q[n], [n]^{-1}g) \mapsto qg, \qquad [n] \in N/H,$$

и задает на E структуру ассоциированного с $P_{N/H}$ расслоения с типичным слоем G/H. Все описанные конструкции и отображения могут быть сделаны гладкими.

Рассмотрим теперь индуцируемые H, N и N/H разбиения алгебры Ли $\mathscr{G}$ группы G. Пусть H — компактная связная подгруппа Ли группы G. Обозначим $(\ ,\ )$ невырожденную G-инвариантную билинейную форму на алгебре $\mathscr{G}$, на которой G действует по присоединенному представлению $\mathrm{ad}\, G$. Пусть $\mathscr{H}$ — алгебра Ли группы H и $\mathscr{P}_H$ — ее ортогональное дополнение в $\mathscr{G}$. Причем, поскольку

$$(\mathscr{P}_H, H) = \big((\mathrm{ad}\, H)(\mathscr{P}_H), (\mathrm{ad}\, H)(H)\big) = \big((\mathrm{ad}\, H)(\mathscr{P}_H), H\big) = 0,$$

имеем

$$(\mathrm{ad}\, H)(\mathscr{P}_H) = \mathscr{P}_H.$$

Алгебра $\mathscr{H}$ и ее ортогональное дополнение $\mathscr{P}_H$ образуют разбиение

$$\begin{aligned} &\mathscr{G} = \mathscr{H} + \mathscr{P}_H, \\ &[\mathscr{H}, \mathscr{P}_H] \subset \mathscr{P}_H, \end{aligned} \tag{4.23}$$

алгебры Ли $\mathscr{G}$. Так же как алгебра Ли $\mathscr{G}$ отождествляется с касательным пространством к многообразию группы Ли G в единице группы, векторное пространство $\mathscr{P}_H$, наделенное действием $\mathrm{ad}H$, может быть отождествлено с касательным пространством к многообразию G/H в его центре.

Аналогичное разбиение имеет место для алгебры Ли $\mathscr{N}$ группы N:

$$\mathscr{N} = \mathscr{H} + \mathscr{K}_H,$$

где $\mathscr{K}_H$ — ортогональное дополнение $\mathscr{H}$ в $\mathscr{N}$ и

$$[\mathscr{H}, \mathscr{K}_H] \subset \mathscr{K}_H.$$

В то же время, поскольку H — инвариантная подгруппа N, имеем

$$[\mathscr{H}, \mathscr{K}_H] \subset \mathscr{H}.$$

Отсюда следует, что $[\mathscr{H}, \mathscr{K}_H] = 0$, и ортогональное дополнение $\mathscr{K}_H$ образует подпространство векторов в касательном пространстве $\mathscr{P}_H$ к G/H, инвариантных относительно действия подгруппы H. Более того,

$$[\mathscr{K}_H, \mathscr{K}_H] \subset \mathscr{K}_H,$$

и поэтому $\mathscr{K}_H$ является подалгеброй Ли в $\mathscr{N}$, которая может быть отождествлена с алгеброй Ли группы $K = N/H$.

Введем также ортогональное дополнение $\mathscr{P}_N$ алгебры Ли $\mathscr{N}$ в $\mathscr{G}$:

$$\begin{aligned} &\mathscr{G} = \mathscr{N} + \mathscr{P}_N, \qquad [\mathscr{N}, \mathscr{P}_N] \subset \mathscr{P}_N, \\ &\mathscr{P}_H = \mathscr{K}_H + \mathscr{P}_N, \qquad [\mathscr{H}, \mathscr{P}_N] \subset \mathscr{P}_N, \\ &\mathscr{G} = \mathscr{H} + \mathscr{K}_H + \mathscr{P}_N. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Фиксируем в алгебре Ли $\mathscr{G}$ базис I_A:

$$[I_A, I_B] = c_{AB}^D I_D,$$

согласованный с разбиением (4.24), т.е.

$$\begin{aligned} &I_A = \{I_i, I_\alpha : I_i \in \mathscr{H}, \ I_\alpha \in \mathscr{P}_H\}, \\ &I_\alpha = \{I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2} : I_{\alpha_1} \in \mathscr{K}_H, \ I_{\alpha_2} \in \mathscr{P}_H\}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Обозначим $\Lambda_B^A(g)$ морфизмы присоединенного представления G на $\mathscr{G}$. Тогда для $n \in N$ матрица $\Lambda(n)$ имеет следующий вид

$$\Lambda(n) = \begin{pmatrix} \Lambda_i^j(n) & 0 \\ 0 & \Lambda_\alpha^\beta(n) \end{pmatrix},$$

где $\Lambda_i^j(n)$ — матрицы представления N на $\mathscr{H}$, а $\Lambda_\alpha^\beta(n)$ — матрицы представления N на $(\mathscr{K}_H + \mathscr{P}_N)$.

Обозначим τ_A фундаментальное поле на E, отвечающее генератору I_A группы преобразований G на E:

$$\tau_A(q) = \frac{d}{ds}(q \exp(sI_A))|_{s=0}. \tag{4.26}$$

Поскольку имеется гомоморфизм алгебры Ли $\mathscr{G}$ в алгебру Ли векторных полей на E, образом которого являются фундаментальные поля, получаем

$$[\tau_A, \tau_B](q) = c_{AB}^D \tau_D(q), \qquad q \in E. \tag{4.27}$$

Векторы $\tau_A(q)$ в $q \in E$ касательны к линиям, вдоль которых переносится точка q под действием преобразований $\exp(tI_A)$ при малых параметрах t. Поэтому все они лежат в вертикальном пространстве V_qE к E в точке q, т. е. в подпространстве, касательном к слою E_x, $x \in M$, расслоения $P_{N/H}$, проходящего через точку $q \in E$ (к орбите $G(q) = E_{\pi(q)}$ в E). В частности, поскольку

$$\dim V_qE = \dim G - \dim H < \dim G,$$

система векторов $\{\tau_A(q)\}$ не является линейно независимой в V_qE.

Из определения (4.26) следует, что поля τ_i (см. обозначения (4.25)) исчезают на подмногообразии Q в E, поскольку $qE = q$, $q \in Q$, тогда как векторы $\{\tau_\alpha(q)\}$ линейно независимы в точках $q \in Q$, а векторы τ_{α_1} касательны к Q. Следовательно $\{\tau_\alpha(q)\}$ линейно независимы и в некоторой окрестности U подмногообразия Q в E так, что

$$[\tau_\alpha, \tau_\beta](q) = f_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma(q), \qquad q \in U. \tag{4.28}$$

Сравнивая (4.28) с (4.27), получаем, что

$$f^{\gamma}_{\alpha\beta}(q)\tau_{\gamma}(q) = c^{A}_{\alpha\beta}\tau_{A}(q), \qquad q \in U,$$
$$f^{\gamma}_{\alpha\beta}(q) = c^{\gamma}_{\alpha\beta}, \qquad q \in Q.$$

Беря от обоих частей этого равенства коммутатор с полем τ_δ в точках подмногообразия Q, находим

$$\tau_\delta(f^{\gamma}_{\alpha\beta})(q) = c^{A}_{\alpha\beta}c^{\gamma}_{\delta A} - c^{\mu}_{\alpha\beta}c^{\gamma}_{\delta\mu} = c^{i}_{\alpha\beta}c^{\gamma}_{\delta i}. \tag{4.29}$$

Из (4.26) также следует (с учетом $\tau_i(q) = 0$, $q \in Q$), что

$$\tau_\alpha(qn) = \Lambda^{\beta}_{\alpha}(n)\tau_\beta(q), \qquad q \in Q,\ n \in N. \tag{4.30}$$

Рассмотрим теперь G-инвариантную метрику g на E, т. е. производные Ли метрики g вдоль полей τ_A равны 0. Покажем, что g определяет следующие объекты:

- G-инвариантную метрику h_x на каждом слое E_x;
- G-инвариантное распределение горизонтальных пространств H_qE, $q \in E$, на E, или эквивалентно связность на главном расслоении $P_{N/H}$;
- метрику γ на M.

Обратно, метрика g однозначно восстанавливается по указанным выше величинам.

Метрика g на E задает скалярное произведение двух вертикальных векторов и тем самым индуцирует G-инвариантную метрику h_x на каждом слое E_x. Эту метрику достаточно знать в какой-либо одной точке $q \in E_{x=\pi(q)}$ слоя E_x, из которой, используя ее G-инвариантность, она может быть перенесена во все точки слоя E_x. Выберем некоторое локальное сечение $\sigma : M \to Q$ главного расслоения $P_{N/H}$, определяющее карту этого и ассоциированного с ним расслоений в окрестности $x \in M$, и будем задавать метрику h_x ее значением

$$h(x) = g(\sigma(x))$$

в точке $q = \sigma(x) \in Q$. В качестве базисов вертикальных касательных пространств V_qE в точках $q \in Q$ можно выбрать линейно независимые векторы $\{\tau_\alpha(q)\}$. В таком базисе метрика $h(x)$ имеет компоненты

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(q) = g_q(\tau_\alpha(q), \tau_\beta(q)).$$

При переходе к другому локальному сечению

$$\sigma'(x) = \sigma(x)n(x), \qquad n(x) \in N,$$

используя закон преобразований (4.30), получаем

$$h'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(qn) = \Lambda^{\mu}_{\alpha}(n)\Lambda^{\nu}_{\beta}(n)g_{\mu\nu}(q) = \Lambda^{\mu}_{\alpha}(n)\Lambda^{\nu}_{\beta}(n)h_{\mu\nu}.$$

В частности, если $n \in H \subset N$, то $\sigma = \sigma'$ и

$$h_{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}(n)\Lambda^{\nu}_{\beta}(n)h_{\mu\nu}, \tag{4.31}$$

т. е. матрица $h_{\alpha\beta}(x)$ является H-инвариантной. Причем, поскольку $[\mathscr{H}, \mathscr{H}_H] = 0$ и матрицы $\Lambda^{\mu}_{\alpha}(n)$, $n \in H$, имеют вид

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \delta^{\mu_1}_{\alpha_1} & 0 \\ 0 & \Lambda^{\mu_2}_{\alpha_2} \end{pmatrix},$$

из условия (4.31) можно получить ограничения на форму матрицы $h_{\alpha\beta}$, а именно:

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{\alpha_1\beta_1} & 0 \\ 0 & h_{\alpha_2\beta_2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что векторы $\tau_{\alpha_1}(q)$ и $\tau_{\alpha_2}(q)$, $q \in Q$, ортогональны относительно метрики g, а тем самым векторы τ_{α_2} ортогональны подмногообразию Q.

Обозначим H_qE ортогональное относительно метрики g дополнение в касательном пространстве T_qE к E в точке $q \in E$ вертикального пространства V_qE. В частности, пространства H_qE в точках $q \in Q$ ортогональны векторам τ_{α_2}, а значит являются касательными к подмногообразию Q. Прямая сумма H_qE и пространства V_qQ, натянутого на векторы $\tau_{\alpha_1}(q)$, касательные к слою $Q_{x=\pi(q)}$, образует касательное пространство к Q в точках $q \in Q$. Поскольку метрика g является G-инвариантной, распределение H_qE тоже G-инвариантно, т. е.

$$(H_qE)a = H_{qa}E, \qquad a \in G.$$

Тем самым распределение H_qE при ограничении на многообразие Q удовлетворяет всем требованиям к распределению горизонтальных подпространств на главном расслоении $Q = P_{N/H}$, и, следовательно, вводит некоторую связность на $P_{N/H}$.

Метрика γ на M задается следующим образом. Пусть t, t' — два касательных вектора к M в точках $x \in M$. Выберем произвольную точку q в слое E_x над x и определим

$$\gamma_x(t, t') = g_q(t^H_q, t'^H_q), \tag{4.32}$$

где t^H_q и t'^H_q — поднятия t и t' в горизонтальное пространство H_qE. В силу G-инвариантности метрики g это определение не зависит от выбора точки q.

Обратно, предположим известными метрику γ на M, распределение H_qE, $q \in Q$, и G-инвариантную метрику h_x на слоях E_x. Возьмем произвольные два вектора t_q, $t'_q \in T_qE$. Пусть $q_0 \in Q$ — точка такая, что $q = q_0a$ для некоторого элемента $a \in G$, векторы $\pi^*(t_q)$ и $\pi^*(t'_q)$ — проекции t_q и t'_q на $T_{\pi(q)}M$ и векторы t^H_q и t'^H_q — поднятия $\pi^*(t_q)$ и $\pi^*(t'_q)$ в горизонтальное векторное пространство $H_{q_0}E$. Тогда векторы

$$t_q - t^H_q a, \qquad t'_q - t'^H_q a$$

— вертикальные и метрика g может быть определена следующим образом:

$$g_q(t_q, t'_q) = \gamma_x(\pi(t_q), \pi(t'_q)) + h_x(t_q - t^H_q a, t'_q - t'^H_q a). \tag{4.33}$$

Например, пусть $q \in Q$ и векторы t_q, t'_q — горизонтальные. Тогда второй член в выражении (4.33) отсутствует и оно сводится к выражению (4.32). Если векторы t_q, t'_q имеют только вертикальные составляющие, то

$$\pi^*(t_q) = \pi^*(t'_q) = 0,$$

и выражение (4.33) воспроизводит определение метрики h_x.

Перепишем выражение (4.33) для метрики g в компонентах. Пусть $\{x^\mu\}$ — некоторая локальная система координат на многообразии M и $\{e_\mu(q)\}$ — горизонтальные поднятия векторов ∂_μ в $H_q E$. Векторы $\{e_\mu(q), \tau_\alpha(q)\}$ образуют базис касательного пространства $T_q E$ к E в точках подмногообразия Q и некоторой его окрестности U. Поскольку векторы $e_\mu(q)$ и $\tau_\alpha(q)$ ортогональны относительно метрики g, последняя в базисе $\{e_\mu(q), \tau_\alpha(q)\}$ имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta}(x, y) \end{pmatrix},$$

где

$$(x, y) \in M \times (G/H)$$

— локальная система координат

$$q = [\sigma(x)]_y, \qquad x = \pi(q),$$

на E, определяемая локальным сечением σ главного расслоения Q, и

$$g_{\mu\nu}(x, y) = g(e_\mu(q), e_\nu(q)) = \gamma(\partial_\mu, \partial_\nu) = \gamma_{\mu\nu}(x).$$

Выразим теперь e_μ через ∂_μ. В локальной системе координат

$$(x, a) \in M \times (N/H), \qquad q = [\sigma(x)]a, \qquad a \in N/H,$$

определяемой сечением σ на Q, форма связности $\overline{A}$ на Q в точках $q = (x, \hat{1})$ имеет вид

$$\overline{A} = -A_\mu^{\alpha_1}(x) I_{\alpha_1} dx^\mu + I_{\alpha_1} d\tau^{\alpha_1}.$$

Из условия $\overline{A}(e_\mu) = 0$ находим

$$e_\mu(x, \hat{1}) = \partial_\mu + A_\mu^{\alpha_1}(x) \tau_{\alpha_1}(x, \hat{1}).$$

Тогда, учитывая, что

$$g_{\alpha\beta}(\sigma(x)) = g_{\alpha\beta}(x, \hat{1}) = h_{\alpha\beta}(x),$$

выражение (4.33) для метрики g в точках $q = (x, \hat{1})$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} g &= \gamma^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu + h^{\alpha\beta} \tau_\alpha \otimes \tau_\beta = \\ &= \gamma^{\mu\nu} (\partial_\mu + A_\mu^{\alpha_1} \tau_{\alpha_1}) \otimes (\partial_\nu + A_\nu^{\beta_1} \tau_{\beta_1}) + h^{\alpha\beta} \tau_\alpha \otimes \tau_\beta = \\ &= \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu + \gamma^{\mu\nu} A_\mu^{\alpha_1} \tau_{\alpha_1} \otimes \partial_\nu + \gamma^{\mu\nu} A_\nu^{\beta_1} \partial_\mu \otimes \tau_{\beta_1} + \\ &\quad + (h^{\alpha_1\beta_1} + \gamma^{\mu\nu} A_\mu^{\alpha_1} A_\nu^{\beta_1}) \tau_{\alpha_1} \otimes \tau_{\beta_1} + h^{\alpha_2\beta_2} \tau_{\alpha_2} \otimes \tau_{\beta_2}. \end{aligned}$$

Это означает, что в точках $q = (x, \hat{1}) \in Q \subset E$ в базисе $\{\partial_\mu, \tau_{\alpha_1}(x, \hat{1})\}$ контравариантные компоненты G-инвариантной метрики g на E имеют вид

$$g(x, \hat{1}) = \begin{pmatrix} \gamma^{\mu\nu} & \gamma^{\mu\nu} A_\mu^{\alpha_1} & 0 \\ \gamma^{\mu\nu} A_\nu^{\beta_1} & h^{\alpha_1\beta_1} + \gamma^{\mu\nu} A_\mu^{\alpha_1} A_\nu^{\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & h^{\alpha_2\beta_2} \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

Таким образом она выражается через:

- компоненты метрики $\gamma^{\mu\nu}$ на "пространстве-времени" M (хотя надо подчеркнуть, что существование на E инвариантной метрики с наперед заданной сигнатурой не гарантировано);
- калибровочные потенциалы $A_\mu^{\alpha'}$ группы N/H на M;
- мультиплет скалярных полей $h^{\alpha\beta}$ — компоненты метрики во "внутреннем" пространстве G/H.

Приведем еще выражение для скалярной кривизны метрики g на E:

$$R = R_\gamma + h^{\beta\beta'}\left(\frac{1}{2}c^\gamma_{\alpha\beta}c^\alpha_{\beta'\gamma} - \frac{1}{4}h^{\alpha\alpha'}h_{\gamma\gamma'}c^\gamma_{\alpha\beta}c^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} + c^{\alpha_1}_{\gamma\beta}c^\gamma_{\beta'\alpha_1} - c^\alpha_{\alpha\beta}c^\gamma_{\gamma\beta'}\right) - \\ - \frac{1}{4}F^\alpha{}_{\mu\nu}F_\alpha{}^{\mu\nu} - \nabla_\mu(h^{\alpha\beta}D^\mu h_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}h^{\gamma\delta}\left(D_\mu h_{\alpha\gamma}D^\mu h_{\alpha\delta} + D_\mu h_{\alpha\beta}D^\mu h_{\gamma\delta}\right), \tag{4.35}$$

которая выражается через ковариантные производные ∇_μ и кривизну R_γ метрики γ на M, ковариантные производные D_μ и напряженность F калибровочных потенциалов A группы N/H и метрику h на G/H.

Выражения типа (4.34) и (4.35) составляют математическую основу многомерных объединенных моделей типа Калуца—Клейна.

§ 3. Супергравитация

Одним из перспективных кандидатов на объединение фундаментальных взаимодействий, включая гравитацию, является теория суперсимметрий и супергравитации. Ведение суперсимметрий основывается на том, что классические поля образуют $\mathbb{Z}_2$-*градуированную суперкоммутативную алгебру* E, т. е.

$$\phi\otimes\phi' = -\phi'\otimes\phi,$$

когда ϕ и ϕ' — только фермионные (нечетные) элементы E, и

$$\phi\otimes\phi' = \phi'\otimes\phi$$

в остальных случаях. На этой алгебре, кроме обычных симметрий, могут быть заданы преобразования суперсимметрий, переводящие бозонные и фермионные поля друг в друга.

Рассмотрим линейные операторы, действующие на алгебре E. На множестве этих операторов также можно задать $\mathbb{Z}_2$-градуировку, полагая четными (соотв. нечетными) операторы, не меняющие (соотв. меняющие на противоположную) четность элементов из E.

Введение нечетных операторов на $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебре полей E приводит к обобщению понятия алгебры Ли. Элементами алгебры Ли являются генераторы I *четных преобразований*, которые действуют на тензорные произведения полей по закону

$$I(\phi\otimes\phi') = I(\phi)\otimes\phi' + \phi\otimes I(\phi'). \tag{4.36}$$

Определим действие на тензорное произведение полей генераторов *нечетного преобразования* Q. Пусть ϕ и ϕ' — нечетные элементы E. Тогда, чтобы удовлетворить условию

$$Q(\phi\otimes\phi') = -Q(\phi'\otimes\phi),$$

надо по аналогии с (4.36) положить

$$Q(\phi \otimes \phi') = Q(\phi) \otimes \phi' - \phi \otimes Q(\phi').$$

Таким образом при перестановке нечетного генератора с нечетным элементом из E появляется множитель -1.

Рассмотрим теперь действие четных операторов QQ' и $Q'Q$:

$$\begin{aligned} QQ'(\phi \otimes \phi') &= (QQ')(\phi) \otimes \phi' + (-1)^{|\phi|+1} Q(\phi) \otimes Q'(\phi') + \\ &\quad + (-1)^{|\phi|} Q'(\phi) \otimes Q(\phi') + \phi \otimes (QQ')(\phi'), \\ Q'Q(\phi \otimes \phi') &= (Q'Q)(\phi) \otimes \phi' + (-1)^{|\phi|+1} Q'(\phi) \otimes Q(\phi') + \\ &\quad + (-1)^{|\phi|} Q(\phi) \otimes Q'(\phi') + \phi \otimes (Q'Q)(\phi'), \end{aligned} \tag{4.37}$$

где $|\phi|$ обозначает *четность элемента* ϕ. Действие (4.37) отличается от действия (4.36) четного генератора I алгебры Ли. Как видно из выражения (4.37), нужным образом будет действовать антикоммутатор

$$[Q, Q'] = QQ' + Q'Q,$$

который и представляет собой генератор некоторого четного преобразования.

Таким образом рассмотрение нечетных операторов на $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебре полей E приводит к обобщению конструкции алгебры Ли до супералгебры Ли.

Супералгеброй Ли называется *$\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство*

$$L = L^0 \oplus L^1,$$

с заданной на нем билинейной операцией $[,]$, удовлетворяющей следующим условиям

$$\begin{aligned} [I, I'] &= (-1)^{|I||I'|+1}[I', I], \\ [I, [I', I'']] &= [[I, I'], I''] + (-1)^{|I||I'|}[I', [I, I'']]. \end{aligned}$$

Четная часть L^0 супералгебры Ли L является алгеброй Ли, а коммутатор

$$[L^0, L^1] \subset L^1$$

задает представление алгебры Ли

$$L^0 : L^1 \to L^1$$

на пространстве нечетной части L^1 супералгебры Ли. Это позволяет классифицировать полупростые супералгебры Ли, используя классификацию Картана алгебр Ли.

Линейные представления супералгебр Ли реализуются в $\mathbb{Z}_2$-градуированных векторных пространствах

$$V^{n,m} = V^0 \bigoplus V^1 = \mathbb{R}^n \bigoplus \mathbb{R}^m.$$

При этом четные генераторы не меняют четность элемента пространства представления, т. е. имеют вид

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где A — $(n \times n)$-матрицы и B — $(m \times m)$-матрицы.

Подчеркнем, что супералгебра Ли является алгеброй над полем $\mathbb{R}$, т. е. ее коэффициенты — вещественные числа. Однако переход к групповым нечетным преобразованиям требует расширения числового поля до алгебры Грассмана $\wedge$. Это вызвано следующим обстоятельством.

Пусть g — оператор линейного нечетного преобразования в алгебре E. Естественно потребовать, чтобы действие g на тензорное произведение полей имело обычный вид

$$g(\phi \otimes \phi') = g(\phi) \otimes g(\phi'). \tag{4.38}$$

Пусть ϕ и ϕ' — нечетные элементы алгебры E. Тогда

$$g(\phi \otimes \phi') = -g(\phi' \otimes \phi) = -g(\phi') \otimes g(\phi). \tag{4.39}$$

Сравнивая (4.38) и (4.39), видим, что элементы $g(\phi)$и $g(\phi')$ также нечетны, что противоречит предположению, что g меняет четность.

Это противоречие можно устранить, расширяя поле $\mathbb{R}$ до алгебры Грассмана $\wedge$ и заменяя супералгебру Ли на алгебру Ли, являющуюся ее $\wedge$-оболочкой.

Алгеброй Грассмана $\wedge$ называется ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) с единицей, обладающая канонической системой из l образующих

$$\chi^{i_1}, \ldots, \chi^{i_k}, \qquad \chi^i\chi^j + \chi^j\chi^i = 0.$$

Алгебра Грассмана является суперкоммутативной алгеброй. Ее четная (соотв. нечетная) часть $\wedge^0$ (соотв. $\wedge^1$) образована всевозможными линейными комбинациями произведений четного (соотв. нечетного) числа образующих. Имеется вложение поля $\mathbb{R}$ в $\wedge$ на $\mathbb{R}\widehat{1}$, где $\widehat{1}$ — единица алгебры $\wedge$. Базис алгебры $\wedge$ как вещественного векторного пространства образуют элементы вида

$$\chi^{i_1} \ldots \chi^{i_k}, \qquad i_1 < \ldots < i_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, l,$$

где $[i_1, \ldots, i_k]$ — всевозможные упорядоченные наборы чисел от 0 до l и $\chi^0 = \widehat{1}$. Размерность этого пространства равна 2^l.

Расширение поля $\mathbb{R}$ до алгебры Грассмана означает переход от векторных пространств над $\mathbb{R}$ к $\wedge$-*модулям*, т. е. к тем же линейным пространствам, но с коэффициентами из $\wedge$. При этом $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство $V^{n,m}$ над $\mathbb{R}$ превращается в $\mathbb{Z}_2$-*градуированный* $\wedge$-*модуль*, в котором четность элемента λv ($\lambda \in \wedge$, $v \in V^{n,m}$) дается суммой

$$|\lambda v| = (|\lambda| + |v|)/\bmod 2$$

четностей элементов λ и v. Например, четная часть $\wedge$-модуля имеет вид

$$\left(\wedge^0 \otimes V^0\right) \oplus \left(\wedge^1 \otimes V^1\right). \tag{4.40}$$

Она называется *грассмановой* $\wedge$-*оболочкой* $\mathbb{Z}_2$-градуированного векторного пространства $V^{n,m}$ и представляет собой, с одной стороны, $\wedge^0$-модуль, а с другой стороны, $2^{l-1}(n+m)$-мерное вещественное векторное пространство

$$\left(\mathbb{R}^{2^{l-1}} \otimes \mathbb{R}^n\right) \oplus \left(\mathbb{R}^{2^{l-1}} \otimes \mathbb{R}^m\right). \tag{4.41}$$

В частности, взятие $\wedge$-оболочки от супералгебры Ли делает все ее элементы четными и превращает ее в алгебру Ли. Генерируемые элементами этой алгебры, например посредством экспоненциального отображения

$$\lambda I \mapsto \exp(\lambda I), \qquad |\lambda| = |I|,$$

групповые преобразования также являются четными. Это элементы супергруппы Ли.

Среди супералгебр Ли, действующих на $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебре классических полей, особое место занимает *супералгебра Пуанкаре* $(L_{ab}, P_\mu, Q_A, Q_{B'})$, которая (не выписывая коммутаторы лоренцевских генераторов L_{ab}) задается соотношениями

$$\begin{aligned} [Q_A, Q_{B'}] &= 2\sigma^\mu{}_{AB'} P_\mu, \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [Q_A, Q_B] &= [Q_{A'}, Q_{B'}] = 0, \\ [P_\mu, Q_A] &= [P_\mu, Q_{B'}] = 0, \end{aligned} \tag{4.42}$$

где A и B' — индексы 2-компонентных (непунктирных и пунктирных) вейлевских спиноров, $\sigma^{1,2,3}$ — матрицы Паули и $\sigma^0 = -1$. Дело в том, что эта супералгебра оставляет инвариантным совместный функционал действия бозонного и фермионного полей, хотя и путем введения вспомогательного поля.

Например, пусть ϕ — скалярное поле, а ψ_A — вейлевское спинорное поле и $F_{AB} = -F_{BA}$ — вспомогательное псевдоскалярное поле. Представление супералгебры (4.42) на мультиплете

$$(\phi, \psi_A, F_{AB})$$

выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_A\phi &= \sqrt{2}\psi_A, & Q_{B'}\phi &= 0 \\ Q_A\psi_B &= \sqrt{2}F_{AB}, & Q_{B'}\psi_C &= i\sqrt{2}\sigma^\mu{}_{CB'}\partial_\mu\phi, \\ Q_A F_{BC} &= 0, & Q_{B'}F_{AC} &= i\sqrt{2}\sigma^\mu{}_{CB'}\partial_\mu\psi_A, \end{aligned} \tag{4.43}$$

Введение вспомогательного поля необходимо, чтобы антикоммутатор $[Q_A, Q_{B'}]$ сводился к генераторам трансляций P_μ. Легко проверить, что супералгебра (4.42) в представлении (4.43) оставляет инвариантным функционал действия

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}(i\partial_\mu\overline{\psi}\sigma^\mu\psi + \phi^*\Box\phi + F^*F).$$

Инвариантность этого функционала в общем случае, однако, нарушается при переходе к неинфинитезимальным калибровочным суперпреобразованиям Пуанкаре.

Чтобы функционал действия оставался инвариантным относительно конечных трансляций, надо предположить, что последние сопровождаются также преобразованиями координатного пространства

$$x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu(x).$$

Однако в рамках супергруппы Пуанкаре преобразования трансляций могут возникать в результате суперпозиции преобразований с нечетными генераторами Q:

$$\begin{aligned} \exp(\lambda^A Q_A)\exp(\lambda^{B'}Q_{B'}) &= \exp\left(\lambda^A Q_A + \lambda^{B'}Q_{B'} + \frac{1}{2}[\lambda^A Q_A, \lambda^{B'}Q_{B'}] + \ldots\right) \\ &= \exp\left(\lambda^A Q_A + \lambda^{B'}Q_{B'} + \lambda^A\lambda^{B'}\sigma^\mu{}_{AB'}P_\mu + \ldots\right). \end{aligned}$$

Это означает, что координатное пространство X, реализующее представление группы трансляций, необходимо расширить до пространства, допускающего представление супергруппы Пуанкаре.

Таковым могло бы быть суперпространство, параметризуемое как обычными координатами x, так и "спинорными" координатами θ, на котором супералгебра Пуанкаре реализовывалась бы операторами вида

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial\theta^A} - i\sigma^\mu{}_{AB'}\theta^{B'}\frac{\partial}{\partial x^\mu},$$
$$Q_{B'} = \frac{\partial}{\partial\theta^{B'}} - i\sigma^\mu{}_{AB'}\theta^A\frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Однако строгое математическое описание такого суперпространства оказалось серьезной проблемой. По-видимому, наиболее удовлетворительно она разрешается в рамках формализма супермногообразий и суперрасслоений. Этот формализм является непосредственным градуированным обобщением (путем замены поля действительных чисел $\mathbb{R}$ на алгебру Грассмана $\wedge$) обычной теории дифференцируемых многообразий и расслоений. Такое обобщение может быть построено, если на алгебре $\wedge$ ввести банахову структуру, превращая ее в нормированное евклидово топологическое пространство.

Банаховой алгеброй называется алгебра с нормой, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\|\widehat{1}\| = 1,$$
$$\|ab\| \leqslant \|a\|\,\|b\|.$$

Банахова структура может быть задана на алгебре Грассмана с помощью нормы

$$\lambda = \sum_{k=0}^{l}\sum_{(i_1\ldots i_k)} a_{i_1\ldots i_k}\chi^{i_1\ldots i_k}, \qquad a_{i_1\ldots i_k}\in\mathbb{R}, \tag{4.44}$$

$$\|\lambda\| = \sum_{k=0}^{l}\sum_{(i_1\ldots i_k)} |a_{i_1\ldots i_k}|.$$

Такая норма индуцирует на $\wedge$ топологию 2^l-мерного вещественного евклидова пространства.

Алгебраическая структура $\wedge$ может быть реализована также вещественными матрицами, а именно, алгебра Грассмана $\wedge$ изоморфна подалгебре алгебры $(2^l\times 2^l)$-мерных вещественных треугольных матриц, строящихся по следующему правилу.

Обозначим I упорядоченный набор $(i_1\ldots i_k)$. Пусть $J\subset I$, т. е. I содержит в себе все элементы из J. Обозначим $I-J$ набор из тех элементов I, которые не входят в J. Аналогично, если $I\cap J=\varnothing$, обозначим $I+J$ набор, состоящий из элементов как I, так и J. Пусть $(I|J)$ — четность перестановки при упорядочивании множества $i_1\ldots i_k j_1\ldots j_n$. Поставим в соответствие элементу

$$\lambda = \sum_I a_I\chi^I, \qquad \chi^I = \chi^{i_1}\ldots\chi^{i_k}$$

алгебры $\wedge$ матрицу с компонентами

$$\begin{aligned} A_{IJ} &= (-1)^{(I|J-I)}a_{J-I}, && I\subset J,\\ A_{IJ} &= 0, && I\cap J\neq I. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Например, если $l = 2$, произвольный элемент из $\wedge$ имеет вид

$$\lambda = a_0 + a_1\chi^1 + a_2\chi^2 + a_{12}\chi^1\chi^2$$

и ему отвечает матрица

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_{12} \\ 0 & a_0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что умножение элементов λ из алгебры Грассмана $\wedge$ соответствует произведению сопоставляемых этим элементам вещественных матриц (4.45). Это важно, поскольку позволяет представить алгебры и группы Ли с параметрами из алгебры Грассмана как вещественные алгебры и группы Ли.

Суперпространством $B^{n,m}$ размерности (n, m) называется $\wedge$-оболочка (4.40) $\mathbb{Z}_2$-градуированного векторного пространства $V^{n,m}$ с базисом $\{v_k\}$, $k = 1, \ldots, n+m$, и нормой, индуцируемой нормой (4.44) по правилу

$$\|b\| = \sum_{i=1}^{n+m} \|b^i\|,$$

$$b = (b^1, \ldots, b^n, b^{n+1}, \ldots, b^{n+m}), \qquad b^{k\leqslant n} \in \wedge^0, \; b^{n+k} \in \wedge^1.$$

Такая норма определяет на $B^{n,m}$ топологию $2^{l-1}(n+m)$-мерного евклидова пространства. С другой стороны, суперпространство $B^{n,m}$ можно представить как $2^{l-1}(n+m)$-мерное вещественное векторное пространство (4.41) с базисом $\{e_{I_k}\}$.

Рассматриваются отображения

$$F : B^{n,m} \to \wedge,$$

называемые *суперфункциями*. Их супердифференцируемость определяется по аналогии с дифференцируемостью обычных функций на банаховых пространствах. Суперфункция F может считаться r раз *супердифференцируемой* в точке $b \in B^{n,m}$, если для всякого элемента $(b + h)$ из некоторой окрестности $U \in b$ суперфункцию $F(b + h)$ можно представить в виде

$$F(b + h) = F(b) + \sum_{p=1}^{r} (G^p F)(b, h) + \eta(b, h)\|h\|^p,$$

где $(G^p F)(b, h)$ — полилинейные, кратности p, непрерывные отображения

$$B^{n,m} \mapsto (G^p F)(b, h) \in \wedge$$

суперпространства $B^{n,m}$ как $\wedge^0$-модуля в алгебру $\wedge$, а суперфункция $\eta(b, h)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|h\|\to 0} \|\eta(b, h)\| \to 0.$$

Суперфункция F считается r раз супердифференцируемой (класса G^r) в открытой области $U \subset B^{n,m}$, если она r раз супердифференцируема во всех точках $b \in U$. Суперфункция F считается класса G^∞, если она класса G^r при любом r.

Обозначим $G^\infty(U)$ множество суперфункций класса G^∞ на $U \subset B^{n,m}$. Тогда сопоставление

$$G_h : F(b) \to (GF)(b, h), \qquad b \in U,$$

задает отображение $G^\infty(U)$ в себя, удовлетворяющее условиям

$$G_h(FF'') = G_h(F)F' + FG_h(F'),$$
$$G_{h'}G_h = G_hG_{h'}.$$

Оно представляет собой производную суперфункции F по направлению h. На полиномиальных и аналитических суперфункциях производной по направлению можно придать вид

$$G_h = h^k \frac{\partial}{\partial b^k}, \qquad |h^k| = |b^k|,$$

при выполнении условий

$$\frac{\partial}{\partial b^k}(FF') = \frac{\partial}{\partial b^k}(F)F' + (-1)^{|b^k||F|}F\frac{\partial}{\partial b^k}(F'),$$
$$\frac{\partial}{\partial b^k}\frac{\partial}{\partial b^q} = (-1)^{|b^k||b^q|}\frac{\partial}{\partial b^q}\frac{\partial}{\partial b^k}.$$

Поскольку и суперпространство $B^{n,m}$, и алгебра Грассмана $\wedge$ представляют собой также вещественные пространства, суперфункция F может быть задана набором 2^l вещественных функций f_I от $2^{l-1}(n+m)$ действительных переменных y^{I_k} так, что суперанализ во многом аналогичен комплексному анализу. В частности, функции f_I с необходимостью должны удовлетворять некоторым условиям типа Коши—Римана. Одно из них

$$\frac{\partial}{\partial y^{I_k}} f_I = \frac{\partial}{\partial y^{J_k}} f_J.$$

Супермногообразие $M^{n,m}$ размерности (n, m) определяется как банахово многообразие, допускающее атлас

$$\Psi_M = \{U_i, \phi_i : U_i \to B^{n,m}\},$$

функции перехода которого супердифференцируемы.

По аналогии с обычной дифференциальной геометрией строятся касательные пространства к супермногообразию. Касательный вектор к супермногообразию $M^{n,m}$ в точке $b \in M^{n,m}$ определяется как класс эквивалентных пар

$$(h \in B^{n,m}, \phi_i(b)), \qquad b \in U_i,$$

при преобразованиях атласа Ψ_M. В карте $(\phi_i, U_i \ni b)$ он может быть представлен оператором производной по направлению h в точке b на множестве суперфункций $G^\infty(U_i)$, поскольку $G_h = G_{h'}$, если пары (h, ϕ_i) и (h', ϕ_i') эквивалентны. Множество G_h, когда h пробегает $B^{n,m}$, образует касательное пространство к $M^{n,m}$ в точке b. Оно изоморфно $B^{n,m}$.

Множество касательных пространств к $M^{n,m}$ составляет *касательное суперрасслоение* — супердифференцируемое расслоение $TM^{n,m}$ над $M^{n,m}$, получаемое склеиванием тривиальных расслоений $U_i \times B^{n,m}$ посредством функций перехода

$$\rho_{ij} : (U_j \times B^{n,m}) \ni (b, h) \mapsto \left(b, G(\phi_i\phi_j^{-1})\right)(b, h) \in (U_i \times B^{n,m}),$$

где $G(\phi_i\phi_j^{-1})$ — аналог матрицы Якоби.

Глобальное сечение τ касательного суперрасслоения $TM^{n,m}$ составляет *суперполе* на супермногообразии $M^{n,m}$. Подобно векторному полю на многообразии, суперполе τ на супермногообразии определяет отображение G_τ пространство суперфункций $G^\infty(M^{n,m})$ в себя такое, что для любых $\lambda \in \Lambda^0$, F, $F' \in G^\infty(M^{n,m})$, выполняются условия

$$G_\tau(FF') = G_\tau(F)F' + FG_\tau(F'),$$
$$G_\tau(\lambda F) = \lambda G_\tau(F).$$

Коммутатор двух суперполей

$$[G_\tau, G_{\tau'}] = G_\tau G_{\tau'} - G_{\tau'} G_\tau$$

тоже суперполе, и множество суперполей на супермногообразии образует Λ^0-модуль, являющийся алгеброй Ли.

Примером супермногообразий и суперполей на них служат супергруппы Ли и супералгебры Ли. *Супергруппой Ли SG* называется группа, допускающая параметризацию грассмановыми величинами, которая превращает групповое пространство в аналитическое супермногообразие. Как и в теории групп Ли, алгебра Ли $\mathscr{SG}$ супергруппы Ли SG определяется как алгебра Ли левоинвариантных суперполей на групповом супермногообразии, т. е. полей, инвариантных относительно преобразований, порождаемых левыми сдвигами $g \mapsto g'g$ на групповом многообразии.

Теорема 4.3.1. Пусть SG — супергруппа Ли размерности (n, m) и $\mathscr{G}$ — алгебра Ли группы SG, рассматриваемой в качестве вещественной группы Ли G размерности $2^{l-1}(n+m)$. Тогда алгебра $\mathscr{SG}$, рассматриваемая как $2^{l-1}(n+m)$-мерная алгебра Ли, изоморфна $\mathscr{G}$. Обратно, пусть A — алгебра Ли, образующая суперпространство размерности (n, m), и G — $2^{l-1}(n+m)$-мерная вещественная группа Ли с A в качестве $2^{l-1}(n+m)$-мерной вещественной алгебры Ли. Тогда на G можно задать структуру супергруппы Ли с алгеброй Ли A. □

В физических приложениях обычно рассматриваются супергруппы Ли, чьи алгебры Ли представляют собой $\wedge$-оболочки супералгебр Ли.

Как и в случае касательного суперрасслоения, определение *главного суперрасслоения* дословно повторяет определение главного расслоения. Причем, поскольку **супермногообразия, супергруппы Ли и суперрасслоения представляют собой также обычные многообразия, группы Ли и расслоения**, ряд теорем для расслоений остается справедливым и для суперрасслоений. Например, если SH — замкнутая суперподгруппа Ли супергруппы Ли SG, то для редукции структурной супергруппы SG главного суперрасслоения к SH необходимо и достаточно существование глобального сечения ассоциированного расслоения на фактор-пространства SG/SH.

Перейдем теперь к *супергравитации*. Рассмотрим супермногообразие $M^{4,4}$. Структурной группой его касательного суперрасслоения $TM^{4,4}$ является супергруппа $L(4, 4)$ всех изоморфизмов суперпространства $B^{4,4}$ — типичного слоя суперрасслоения $TM^{4,4}$. Одной из подгрупп $L(4, 4)$ является супергруппа Ли $OSp(4, 2; 1)$, алгебра Ли которой представляет собой $\wedge$-оболочку супералгебры $osp(4, 2; 1)$. Четной частью супералгебры $osp(4, 2; 1)$ является алгебра Ли

$$so(3, 1) \oplus sp(4),$$

а нечетная часть состоит из 16 генераторов Q_μ^A, $(\mu = 0, 1, 2, 3;\ A = 1, \ldots, 4)$. Генераторы Q_μ^A по индексам μ реализуют векторное представление алгебры Лоренца $so(1, 3)$, а по индексам A — фундаментальное представление алгебры Ли $sp(4)$.

Представление алгебры $osp(4, 2; 1)$ на $\mathbb{Z}_2$-градуированном пространстве $V^{4,4}$ ($\wedge$-оболочкой которого является суперпространство $B^{4,4}$) осуществляется матрицами A, удовлетворяющими условию

$$A^t\Gamma + \Gamma A = 0, \tag{4.46}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \widehat{\eta} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widehat{\eta}$ — (4×4)-матрица метрики Минковского, $(-\sigma^0)$ — единичная (2×2)-матрица, а операция "t" задается по правилу

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} B^T & D^T \\ -C^T & E^T \end{pmatrix},$$

где B, C, D, E — (4×4)-матрицы, а "T" — обычное транспонирование. В представлении (4.46) четный сектор пространства $V^{4,4}$ реализует 4-векторное представление алгебры Лоренца $so(1, 3)$, а нечетный сектор — *действительное* (*майорановское*) *спинорное* представление алгебры $so(1, 3) \subset sp(4)$ матрицами

$$L_{12} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \qquad L_{31} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{02} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_{03} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix},$$

$$L_{23} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_{01} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix},$$

где σ^i — матрицы Паули.

Грассманова оболочка $B^{4,4}$ пространства $L^{4,4}$ реализует представление супергруппы $OSp(4, 2; 1)$, порождаемое представлением супералгебры $osp(4, 2; 1)$. При этом операторы супергруппы $OSp(4, 2; 1)$ сохраняют инвариантной билинейную форму

$$\eta_s(b, b') = x^\mu \Gamma_{\mu\nu} x'^\nu + \theta^A \Gamma_{AB} \theta'^B = x^0x'^0 - x^1x'^1 - x^2x'^2 - x^3x'^3 + \theta^1\theta'^3 - \theta^3\theta'^1 + \theta^2\theta'^4 - \theta^4\theta'^2, \tag{4.47}$$

где Γ — матрица (4.46) на элементах

$$b = x^\mu b_\mu + \theta^A b_A$$

суперпространства $B^{4,4}$. Координаты x^μ и θ^A элементов $b \in B^{4,4}$ являются соответственно четными и нечетными элементами алгебры Грассмана, и форма η_s принимает значения в $\wedge^0$.

Как и в теории гравитации, потребуем редукцию структурной супергруппы $L(4, 4)$ касательного суперрасслоения $TM^{4,4}$ к $OSp(4, 2; 1)$. Необходимым и достаточным условием такой редукции является существование глобального сечения g_s ассоциированного с $TM^{4,4}$ расслоения на фактор-пространства

$$L(4, 4)/OSp(4, 2; 1).$$

Это фактор-пространство изоморфно пространству всех билинейных форм на суперпространстве $B^{4,4}$, приводимых к каноническому виду (4.47) преобразованиями из $L(4, 4)$. Таким образом, глобальное сечение g_s может рассматриваться как *суперметрика* на супермногообразии $M^{4,4}$.

Для физических приложений естественно требовать, чтобы супермногообразие включало в себя многообразие. Такое включение индуцируется вложением поля $\mathbb{R}$ в Λ и гомоморфизмом σ алгебры Λ на $\mathbb{R}$, при котором

$$\sigma\lambda = \sigma\left(\sum_{k=0}^{l}\sum_{(i_1\ldots i_k)} a_{i_1\ldots i_k}\chi^{i_1}\cdots\chi^{i_k}\right) = a_0.$$

На суперпространстве $B^{n,m}$ отображение имеет вид

$$\sigma : (x^1, \ldots, x^n; \theta^1, \ldots, \theta^m) \mapsto (\sigma x^1, \ldots, \sigma x^n),$$

т. е. суперпространство проектируется на свой четный сектор. При этом у четных координат x сохраняется только вещественная часть.

Однако определение морфизма σ на супермногообразии $M^{n,m}$ сталкивается с трудностью. Действительно, пусть (U, ϕ) и (U', ϕ') — две карты на супермногообразии $M^{n,m}$, пересечение которых несвязно, т. е.

$$U \cap U' = V_1 \cup V_2, \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing .$$

Обозначим

$$\phi_{1,2} = \phi|_{V_{1,2}}, \qquad \phi'_{1,2} = \phi'|_{V_{1,2}}.$$

Пусть $b_1 \in V_1$, $b_2 \in V_2$ — два σ-эквивалентных элемента в карте (U, ϕ), т. е.

$$\sigma\phi_1 b_1 = \sigma\phi_2 b_2.$$

Но эти элементы не обязательно эквивалентны (т. е. $\sigma\phi'_1 b_1 \neq \sigma\phi'_2 b_2$) в карте (U', ϕ'), поскольку в общем случае

$$\sigma\phi'_1\phi_1^{-1}\sigma \neq \sigma\phi'_2\phi_2^{-1}\sigma.$$

Супермногообразие $M^{n,m}$ имеет атлас, в котором отношение σ-эквивалентности хорошо определено. Однако фактор-пространство супермногообразия $M^{n,m}$ по этому отношению в общем случае не является даже топологическим многообразием.

Вариационное исчисление и законы сохранения

Существуют разные способы построения дифференциальных законов сохранения в теории поля. Здесь мы изложим один из них, основанный на первой вариационной формуле. Этот подход представляется наиболее универсальным.

Пусть $Y \to X$ — расслоение, сечения которого s описывают классические поля. Под дифференциальным законом сохранения понимается соотношение

$$d(s^*T) = 0, \tag{A.1}$$
$$\frac{d}{dx^\mu} T^\mu = 0,$$

где сохраняющаяся величина $T = T^\mu(x^\lambda, y^i, y^i_\mu)\omega_\mu$ это горизонтальная $(n-1)$-форма на конфигурационном пространстве полей $J^1Y \to X$.

Равенство (A.1) именуется *сильным законом сохранения*, если оно справедливо для всех сечений s расслоения $Y \to X$, и оно называется *слабым законом сохранения*, если оно имеет место только на критических сечениях, т. е. на решениях полевых уравнений. Для обозначения такого условного равенства будет использоваться символ "$\approx$". При этом может случиться, что сохраняющаяся величина T принимает вид

$$T = W + dU,$$

где $W \approx 0$. В этом случае говорят, что она сводится к *суперпотенциалу* U.

В излагаемом нами подходе, дифференциальные законы сохранения связаны с инвариантностью лагранжиана полей относительно той или иной группы симметрий. Суть заключатся в том, что всякая 1-параметрическая группа G_t послойных изоморфизмов расслоения $Y \to X$ порождает полное проектируемое векторное поле u на Y и обратно. Можно показать, что лагранжиан первого порядка L на конфигурационном пространстве J^1Y инвариантен относительно этих изоморфизмов тогда и только тогда, когда его производная Ли вдоль этого векторного поля равна нулю:

$$\mathbf{L}_{\overline{u}} L = 0. \tag{A.2}$$

Пусть дано проектируемое векторное поле

$$u = u^\mu(x)\partial_\mu + u^i(y)\partial_i$$

на расслоении $Y \to X$ и $\overline{u}$ — его продолжение (1.52) на конфигурационное пространство $J^1Y \to X$. Рассмотрим производную Ли лагранжиана L вдоль $\overline{u}$. Имеет место каноническое разложение

$$\mathbf{L}_{\overline{u}} L = d_H T + u_V \rfloor \mathscr{E}_L, \tag{A.3}$$

где $\mathscr{E}_L$ — оператор Эйлера—Лагранжа второго порядка. Это так называемая первая вариационная формула вариационного исчисления.

Она получается в рамках общепринятой формулировки вариационной задачи, когда вариации сечений s расслоения $Y \to X$ порождаются локальными 1-параметрическими группами преобразований расслоения Y. Оператор Эйлера—Лагранжа $\mathscr{E}_L$ по определению обращается в 0 на критических сечениях расслоения $Y \to X$, и равенство (A.3) сводится к слабому тождеству

$$s^* \mathbf{L}_{\overline{u}} L \approx -\frac{d}{dx^\lambda}\left[\pi_i^\lambda (u^\mu \partial_\mu s^i - u^i) - u^\lambda \mathscr{L}\right]\omega, \tag{A.4}$$

где $\pi_i^\mu = \partial_i^\mu \mathscr{L}$. Если лагранжиан L удовлетворяет сильному равенству (A.2), слабое тождество (A.4) превращается в закон сохранения тока

$$T^\lambda = \pi_i^\lambda (u^\mu \partial_\mu s^i - u^i) - u^\lambda \mathscr{L}.$$

Большинство дифференциальных законов сохранения в теории поля может быть получено таким способом, включая законы сохранения энергии-импульса и тождества Нетер.

Пространство струй бесконечного порядка

В целях дальнейшего изложения, приведем основные понятия формализма струй бесконечного порядка.

Пространство струй бесконечного порядка $J^\infty Y$ определяется как проективный предел обратной последовательности

$$X \xleftarrow{\pi} Y \xleftarrow{\pi_0^1} \dots J^{r-1}Y \xleftarrow{\pi_{r-1}^r} J^r Y \xleftarrow{\pi_r^{r+1}} \dots .$$

Пространство $J^\infty Y$ наделяется топологией проективного предела и параметризуется координатами

$$(x^\alpha, y^i, \dots, y^i_{\lambda_1 \dots \lambda_r}, \dots)$$

где $\lambda_1 \dots \lambda_r$ — наборы чисел по модулю перестановок. Хотя оно не является вполне хорошим многообразием, на нем можно задать пучки гладких функций, векторных полей, дифференциальных форм и ввести дифференциальное исчисление.

Векторное поле u^r на многообразии струй $J^r Y$ называется *проектируемым*, если для любого $k < r$ существует векторное поле u^k на $J^k Y \to X$, такое что

$$u^k \circ \pi_k^r = T\pi_k^r \circ u^r.$$

Касательный морфизм $T\pi_k^r$ отображает проектируемые векторные поля на $J^r Y$ в проектируемые векторные поля на $J^k Y$. Линейное пространство проектируемых векторных полей на $J^\infty Y$ определяется как предел обратной системы проектируемых векторных полей на многообразиях струй конечного порядка. В частности, всякое проектируемое векторное поле

$$u = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i$$

на расслоении $Y \to X$ может быть продолжено до проектируемого векторного поля $\overline{u}^r$ на $J^r Y$ и до проектируемого векторного поля $\overline{u}^\infty$ на $J^\infty Y$. Имеет место его каноническое расщепление

$$\overline{u}^\infty = u_H^\infty + u_V^\infty,$$

$$u_H^\infty = u^\lambda \widehat{\partial}_\lambda^\infty = u^\lambda(\partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + \ldots),$$
$$u_V^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\partial}^k_{\lambda_k} \ldots \widehat{\partial}^1_{\lambda_1} u_V{}^i \partial_i^{\lambda_1 \ldots \lambda_k},$$

где u_V — вертикальная составляющая канонического расщепления (1.57) векторного поля $\pi_0^{1*} u$, индуцированного на J^1Y посредством π_0^1.

Базис внешних дифференциальных форм на $J^\infty Y$ может быть образован из горизонтальных форм dx^λ и так называемых *k-контактных форм*

$$\widehat{dy}^i_{\lambda_1 \ldots \lambda_k} = dy^i_{\lambda_1 \ldots \lambda_k} - y^i_{\lambda_1 \ldots \lambda_k \nu} dx^\nu.$$

Обозначим $\Omega^{r,k}$ подпространство внешних форм на $J^\infty Y$, натянутое на всевозможные внешние произведения горизонтальных r-форм и k-контактных форм $\widehat{dy}^i_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}$. Тогда пространство Ω^m внешних m-форм на $J^\infty Y$ допускает каноническое разложение

$$\Omega^m = \Omega^{m,0} \oplus \Omega^{m-1,1} \oplus \ldots \oplus \Omega^{0,m}.$$

Обозначим h_k проекцию

$$h_k : \Omega^m \to \Omega^{m-k,k}.$$

В частности, *горизонтальная проекция* h_0 представляет собой замену

$$dy^i_{\lambda_1 \ldots \lambda_k} \to y^i_{\lambda_1 \ldots \lambda_k \nu} dx^\nu.$$

Эта операция применима и к внешним формам на многообразиях струй конечного порядка J^rY, индуцированным на $J^{r+1}Y$.

Оператор внешнего дифференцирования внешних форм на $J^\infty Y$ тоже раскладывается в сумму

$$d = d_H + d_V \tag{A.5}$$

оператора *горизонтального дифференцирования*

$$d_H : \Omega^{r,k} \to \Omega^{r+1,k}$$

и оператора *вертикального дифференцирования*

$$d_V : \Omega^{r,k} \to \Omega^{r,k+1},$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$d_H d_H = 0, \qquad d_V d_V = 0, \qquad d_V d_H + d_H d_V = 0.$$

В координатах эти операторы имеют вид

$$d_H \phi = dx^\mu \wedge \widehat{\partial}_\mu^\infty(\phi),$$
$$\widehat{\partial}_\mu^\infty(\phi \wedge \sigma) = \widehat{\partial}_\mu^\infty(\phi) \wedge \sigma + \phi \wedge \widehat{\partial}_\mu^\infty(\sigma),$$
$$\widehat{\partial}_\mu^\infty(f) = \widehat{\partial}_\mu^\infty f, \qquad f \in \Omega^0,$$
$$\widehat{\partial}_\mu^\infty(dx^\lambda) = 0,$$
$$\widehat{\partial}_\mu^\infty(\widehat{dy}^i_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}) = \widehat{dy}^i_{\lambda_1 \ldots \lambda_k \mu},$$

и

$$d_V f = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_i^{\lambda_1 \dots \lambda_k} f \, \widehat{dy}^i_{\lambda_1 \dots \lambda_k}, \qquad f \in \Omega^0,$$

$$d_V dy^i_{\lambda_1 \dots \lambda_k} = -dx^\mu \wedge dy^i_{\lambda_1 \dots \lambda_k \mu},$$

$$d_V \widehat{dy}^i_{\lambda_1 \dots \lambda_k} = 0.$$

Заметим, что для внешних форм σ на многообразиях струй конечного порядка $J^r Y$ разложение (A.5) принимает вид

$$\pi_r^{r+1*} d\sigma = d_H \sigma + d_V \sigma$$

и имеет место соотношение

$$h_0(d\sigma) = d_H h_0(\sigma). \tag{A.6}$$

Вариационное исчисление

Пусть $Y \to X$ — расслоение, параметризуемое координатами (x^λ, y^i), и s обозначает его сечения. Пусть N — некоторое n-мерное компактное подмногообразие X с границей ∂N. Гладкой *вариацией с фиксированной границей* сечения s, определенного на открытой окрестности U подмногообразия N, считается 1-параметрическое семейство сечений s_t на U, таких что $s_{t=0} = s$ на U и $s_t = s$ в некоторой окрестности ∂N. Можно показать, что всегда существует вертикальное векторное поле u на Y, обращающееся в 0 в окрестности $\pi^{-1}(\partial N)$, которое порождает такую вариацию. Оно называется *вариационным векторным полем.*

Пусть задана некоторая n-форма ρ на многообразии струй $J^r Y$. Сечение s расслоения Y называется *критическим сечением* (critical section) вариационной задачи для формы ρ, если для всякого вертикального векторного поля u на расслоении $Y \to X$, которое обращается в 0 на некоторой окрестности $\pi^{-1}(\partial N)$, имеет место равенство

$$\int_N s^* \mathbf{L}_{\overline{u}^r} \rho = 0, \tag{A.7}$$

где $\overline{u}^r = j_0^r u$ обозначает продолжение u на $J^r Y$.

Используя формулу (1.40):

$$s^* \mathbf{L}_{\overline{u}^r} \rho = s^* (\overline{u}^r \rfloor d\rho) + s^* d(\overline{u}^r \rfloor \rho),$$

можно представить функционал (A.7) в виде

$$\int_N s^* \mathbf{L}_{\overline{u}^r} \rho = \int_N s^* (\overline{u}^r \rfloor d\rho) + \int_{\partial N} s^* (\overline{u}^r \rfloor \rho). \tag{A.8}$$

Однако разложение (A.8) оказывается не вполне удовлетворительным для получения условий на критические сечения, если первый член в этом разложении зависит от производных векторного поля u и тем самым может давать вклад в интеграл по границе ∂N.

Например, если $L = \mathscr{L}\omega$ — лагранжиан первого порядка на многообразии струй $J^1 Y$ расслоения Y, мы имеем выражение

$$s^* (\overline{u} \rfloor dL) = s^* \left[u^i \partial_i \mathscr{L} + \widehat{\partial}_\lambda u^i \partial_i^\lambda \mathscr{L} \right] \omega,$$

второй член в котором может быть представлен в виде

$$s^*\widehat{\partial}_\lambda u^i \partial_i^\lambda \mathscr{L}\,\omega = s^*\left[\widehat{\partial}_\lambda(u^i\partial_i^\lambda \mathscr{L})\,\omega - u^i\widehat{\partial}_\lambda(\partial_i^\lambda \mathscr{L})\omega\right].$$

Он содержит точную форму $d(s^*u^i\partial_i^\lambda \mathscr{L}\omega_\lambda)$, которую следует учесть в интеграле по границе.

Таким образом, уравнение

$$s^*(\overline{u}^r \rfloor d\rho) = 0$$

является условием на критические сечения формы ρ на J^rY, если для всякого сечения s форма $s^*(\overline{u}^r \rfloor d\rho)$ зависит только от компонент векторного поля u, но не их производных. Форма ρ, удовлетворяющая этому требованию, называется *лепажевой формой* (Lepagian form).

Пусть ρ — n-форма на J^rY. Следующие условия эквивалентны.

- Проекция $h_1(\pi_r^{r+1*}d\rho)$ является горизонтальной формой на расслоении струй $J^{r+1}Y \to Y$, т. е. зависит только от dx^λ и dy^i.
- Для всякого проектируемого векторного поля u^r на J^rY, горизонтальная проекция $h_0(u^r \rfloor d\rho)$ зависит только от его проекции на Y.
- Для всякого вертикального векторного поля на расслоении струй $J^rY \to Y$, имеет место равенство
$$h_0(u^r \rfloor d\rho) = 0.$$

Лагранжианы, как мы видели выше, не являются в общем случае лепажевыми формами. Можно однако заменить вариационную задачу для лагранжиана L вариационной задачей для соответствующей лепажевой формы ρ_L, называемой *лепажевым эквивалентом* L. Таковой является лепажева форма на $J^{r+k}Y$, удовлетворяющая условию

$$h_0(\rho_L) = \pi_r^{r+k+1*}L$$

и приводящая к равенству

$$\int_N s^*L = \int_N s^*\rho_L.$$

Доказано, что для любого лагранжиана порядка r всегда существуют его лепажевы эквиваленты порядка $2r-1$. Они образуют аффинное пространство над линейным пространством лепажевых эквивалентов нулевого лагранжиана порядка r. Центром этого аффинного пространства может быть выбрана одна из *форм Картана*, разложимая по контактным формам $\widehat{dy}^i_{\mu_1\dots\mu_k<r}$. Заметим, что всякая лепажева форма ρ является лепажевым эквивалентом лагранжиана

$$L = h_0(\rho).$$

Пусть ρ_L — лепажев эквивалент лагранжиана L порядка r. Для всякого проектируемого векторного поля u на расслоении $Y \to X$ справедливо равенство

$$\mathbf{L}_{\overline{u}^{r+1}}h_0 = h_0\mathbf{L}_{\overline{u}^r}$$

и имеет место соотношение

$$\pi_r^{2r*}\mathbf{L}_{\overline{u}^r}L = h_0\left(\mathbf{L}_{\overline{u}^{2r-1}}\rho_L\right) = h_0\left(\overline{u}^{2r-1} \rfloor d\rho_L\right) + h_0\,d\left(\overline{u}^{2r-1} \rfloor \rho_L\right), \qquad \text{(A.9)}$$

называемое *первой вариационной формулой*. Уравнение

$$s^*\overline{u}^{2r-1} \rfloor d\rho_L = 0, \tag{A.10}$$

выполняемое для всех вертикальных векторных полей u на $Y \to X$, является условием на критические сечения s вариационной задачи для лагранжиана L. Причем, для всякого такого критического сечения равенство (A.10) остается справедливым и в случае произвольного проектируемого векторного поля на $J^{2r-1}Y$.

Ограничимся теперь рассмотрением лагранжианов первого порядка L и их лепажевых эквивалентов на многообразии струй J^1Y. В этом случае форма Картана Ξ_L определена однозначно и совпадает с формой Пуанкаре—Картана

$$\Xi_L = \mathscr{L}\omega + \pi_i^\lambda \widehat{dy}^i \wedge \omega_\lambda \tag{A.11}$$

лагранжиана L. Общий вид лепажева эквивалента лагранжиана первого порядка L дается выражением

$$\rho_L = \Xi_L - \left(\widehat{\partial}_\nu c_i^{\mu\nu} \widehat{dy}^i + c_i^{\mu\nu} \widehat{dy}^i_\nu\right) \wedge \omega_\mu + \chi, \tag{A.12}$$

где $c_i^{\mu\nu} = -c_i^{\nu\mu}$ — антисимметричные локальные функции на Y и χ — некоторая $(k>1)$-контактная форма на J^1Y.

В случае лагранжианов L первого порядка первая вариационная формула (A.9) принимает вид

$$\pi_1^{2*}\mathbf{L}_{\overline{u}}L = h_0(\overline{u} \rfloor d\rho_L) + h_0(d\overline{u} \rfloor \rho_L) \tag{A.13}$$

для произвольного проектируемого векторного поля u на Y. После простых вычислений получаем

$$\pi_1^{2*}\mathbf{L}_{\overline{u}}L = u_V \rfloor \mathscr{E}_L + h_0(d\overline{u} \rfloor \rho_L), \tag{A.14}$$

где

$$u_V = (u \rfloor \widehat{dy}^i)\partial_i$$

это вертикальная часть канонического расщепления (1.57) продолжения $\pi_0^{1*}u$ поля u на J^1Y, а

$$\mathscr{E}_L = \left[\partial_i - (\partial_\lambda + y^j_\lambda \partial_j + y^j_{\mu\lambda}\partial^\mu_j)\partial^\lambda_i\right] \mathscr{L}\, dy^i \wedge \omega = \delta_i \mathscr{L}\, dy^i \wedge \omega \tag{A.15}$$

— оператор Эйлера—Лагранжа второго порядка, ассоциированный с лагранжианом L. Коэффициенты $\delta_i\mathscr{L}$ формы (A.15) называются *вариационными производными* лагранжиана L.

Отсюда следует, что условием на критические сечения s расслоения $Y \to X$ для вариационной задачи лагранжиана L являются уравнения Эйлера—Лагранжа второго порядка

$$\partial_i \mathscr{L} - \left(\partial_\lambda + \partial_\lambda s^j \partial_j + \partial_\lambda \partial_\mu s^j \partial^\mu_j\right) \partial^\lambda_i \mathscr{L} = 0. \tag{A.16}$$

Заметим, что разные лагранжианы L и L' могут иметь один и тот же оператор Эйлера—Лагранжа $\mathscr{E}_L = \mathscr{E}_{L'}$, если они отличаются друг от друга на лагранжиан L_0, для которого оператор Эйлера—Лагранжа $\mathscr{E}_{L_0}$ равен 0. Можно показать, что необходимым и достаточным условием того, чтобы $\mathscr{E}_{L_0} = 0$, является равенство

$$L_0 = h_0(\epsilon), \tag{A.17}$$

где ϵ — замкнутая n-форма на расслоении Y.

В этой связи важно подчеркнуть, что, поскольку $J^1Y \to Y$ является аффинным расслоением, когомологии де Рама многообразия J^1Y совпадают с когомологиями де Рама расслоения Y. Это означает, что всякая замкнутая внешняя форма на J^1Y представляет собой сумму замкнутой формы на Y и точной формы на J^1Y.

Законы сохранения

Рассмотрим в лагранжевом формализме первого порядка дифференциальные законы сохранения, исходя из первой вариационной формулы (А.14).

Пусть L — лагранжиан на J^1Y. Тем же символом L мы будем обозначать и его продолжение $\pi_1^{2*}L$ на J^2Y. Пусть u — проектируемое векторное поле на $Y \to X$ и $\overline{u}$ — его лифт (1.52) на многообразие струй $J^1Y \to X$.

Запишем первую вариационную формулу (А.14), выбрав в качестве лепажева эквивалента лагранжиана L форму Пуанкаре—Картана Ξ_L (А.11):

$$\mathbf{L}_{\overline{u}}L = u_V \rfloor \mathscr{E}_L + d_H h_0(u \rfloor \Xi_L). \tag{A.18}$$

Будучи ограниченным на ядро

$$\left[\partial_i - (\partial_\lambda + y^j_\lambda \partial_j + y^j_{\mu\lambda}\partial^\mu_j)\partial^\lambda_i\right]\mathscr{L} = 0$$

оператора Эйлера—Лагранжа (А.15), равенство (А.18) сводится к слабому тождеству

$$\mathbf{L}_{\overline{u}}L \approx d_H h_0(u \rfloor \Xi_L), \tag{A.19}$$

$$\partial_\lambda u^\lambda \mathscr{L} + \left[u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + \left(\partial_\lambda u^i + y^j_\lambda \partial_j u^i - y^i_\mu \partial_\lambda u^\mu\right)\partial^\lambda_i\right]\mathscr{L} \approx \widehat{\partial}_\lambda\left[\pi^\lambda_i(u^i - u^\mu y^i_\mu) + u^\lambda \mathscr{L}\right],$$

$$\widehat{\partial}_\lambda = \partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + y^i_{\mu\lambda}\partial^\mu_i.$$

На решениях s уравнений Эйлера—Лагранжа, слабое тождество (А.19) принимает форму дифференциального закона сохранения

$$s^*\mathbf{L}_{\overline{u}}L \approx d(s^*u \rfloor \Xi_L), \tag{A.20}$$

который имеет координатный вид (А.4).

Заметим, что в случае выбора другого лепажева эквивалента ρ_L лагранжиана L соответствующее слабое тождество

$$\mathbf{L}_{\overline{u}}L \approx h_0(d\overline{u} \rfloor \rho_L)$$

отличается от (А.19) на сильное равенство

$$0 = h_0(d\overline{u} \rfloor \varepsilon) = d_H h_0(\overline{u} \rfloor \varepsilon), \tag{A.21}$$

где $\rho_L = \Xi_L + \varepsilon$. В физической интерпретации это означает, что **разные лепажевы эквиваленты приводят к разным суперпотенциалам в законах сохранения**.

Можно также взять лагранжиан L', отличный от L, но который имеет тот же оператор Эйлера—Лагранжа. И в этом случае слабый закон сохранения отличается от (А.19) на сильное равенство

$$\mathbf{L}_{\overline{u}}h_0(\epsilon) = h_0(d\overline{u} \rfloor \epsilon), \tag{A.22}$$

где ϵ — некоторая замкнутая форма на Y.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда лагранжиан L зависит от фоновых полей. Такой лагранжиан представляет собой форму, индуцированную из некоторого лагранжиана $L_{\rm tot}$ на конфигурационном пространстве всех полей посредством сечений $\phi^A(x)$, описывающих фоновые поля. В присутствии фоновых полей ϕ^A, соответствующие вариационные

производные $\delta_A\mathscr{L}$ в операторе Эйлера—Лагранжа (А.15) не обращаются в 0, и мы получаем правую часть в законе сохранения (А.19) в виде

$$0 \approx \left(u^A - u^\mu y^A_\mu\right)\delta_A\mathscr{L} + \widehat{\partial}_\lambda\left[\pi^\lambda_A\left(u^A - u^\mu y^A_\mu\right) + \pi^\lambda_i\left(u^i - u^\mu y^i_\mu\right) + u^\lambda\mathscr{L}\right].$$

Например, многие полевые модели описывают поля в присутствии фоновой метрики g на базе X. В этом случае частные производные $\partial_\lambda\mathscr{L}$ в слабом тождестве (А.19) содержат член

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\partial_\lambda g^{\mu\nu},$$

приводящий к метрическому тензору энергии-импульса полей:

$$t_{\mu\nu}\sqrt{|g|} = 2\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g^{\mu\nu}}.$$

Важно отметить, что слабое тождество (А.19) линейно по векторному полю u. Поэтому можно рассматривать суперпозицию различных законов сохранения (А.19), отвечающих разным векторным полям u. Например, если u и u' проектируемые векторные поля на расслоении $Y \to X$, накрывающие одно и то же векторное поле на базе X, их разность $u - u'$ является вертикальным векторным полем на $Y \to X$. Соответственно разность слабых тождеств (А.19), записанных для u и u', приведет к слабому тождеству (А.19), получаемому в случае вертикального векторного поля $u - u'$.

В частности, всякое проектируемое векторное поле u на расслоении $Y \to X$, накрывающее векторное поле τ на базе X представляется суммой вертикального векторного поля на $Y \to X$ и некоторого поднятия векторного τ на Y.

Отсюда следует, что всякий дифференциальный закон сохранения сводится к суперпозиции закона сохранения, записанного для вертикального векторного поля на расслоении $Y \to X$, и закона сохранения, отвечающего упомянутому выше лифту на Y векторного поля на X.

Исследуем эти два типа законов сохранения.

Нетеровские законы сохранения

Рассмотрим слабое тождество (А.20), когда u вертикальное векторное поле на расслоении $Y \to X$. Оно принимает вид

$$s^*\mathbf{L}_u L \approx \frac{d}{dx^\lambda}T^\lambda, \tag{А.23}$$

$$(u^i\partial_i + \widehat{\partial}_\lambda u^i\partial^\lambda_i)\mathscr{L} \approx \widehat{\partial}_\lambda(\pi^\lambda_i u^i),$$

где величина

$$T = u \rfloor \Xi_L = \pi^\lambda_i u^i\omega_\lambda \tag{А.24}$$

называется *нетеровским током*, отвечающим вертикальному векторному полю u.

Если лагранжиан L удовлетворяет сильному условию

$$\mathbf{L}_u L = 0,$$

мы получаем слабый закон сохранения нетеровского тока (А.24):

$$\frac{d}{dx^\lambda}T^\lambda \approx 0.$$

Хорошо известный пример таких законов сохранения дает калибровочная теория.

Пусть $P \to X$ — главное расслоение со структурной группой Ли G. Напомним, что имеет место взаимно однозначное соответствие между связностями на P и глобальными сечениями расслоения C (1.89), параметризуемого координатами (x^μ, k^m_μ).

Пусть Y — векторное расслоение (2.24), ассоциированное с $P \to X$, сечения которого описывают материальные поля в калибровочной теории. В случае ненарушенных симметрий полное конфигурационное пространство калибровочной модели представляет собой прямое произведение

$$J^1E \underset{X}{\times} J^1C. \tag{A.25}$$

Рассмотрим вертикальное векторное поле $u_\mathcal{G}$, отвечающее локальной 1-параметрической группе калибровочных изоморфизмов (1.83) расслоения P. На произведении $C \underset{X}{\times} Y$ оно имеет вид

$$u_\mathcal{G} = \left(u^{A\lambda}_m \partial_\lambda \alpha^m + u^A_m \alpha^m\right) \partial_A = \left(\partial_\mu \alpha^m + c^m_{nl} k^l_\mu \alpha^n\right) \partial^\mu_m + \alpha^m(x) I_m{}^i{}_j y^j \partial_i, \tag{A.26}$$

где $\alpha^m(x)$ — локальные функции параметров и A — коллективный индекс.

Лагранжиан L на конфигурационном пространстве (A.25) является калибровочно инвариантным, если для всякого векторного поля $u_\mathcal{G}$ (A.26) выполняется сильное равенство

$$\mathbf{L}_{\overline{u}_\mathcal{G}} L = 0.$$

В этом случае первая вариационная формула (A.13) приводит к сильному равенству

$$\left(u^A_m \alpha^m + u^{A\mu}_m \partial_\mu \alpha^m\right) \delta_A \mathscr{L} + \widehat{\partial}_\lambda \left[\left(u^A_m \alpha^m + u^{A\mu}_m \partial_\mu \alpha^m\right) \partial^\lambda_A \mathscr{L}\right] = 0,$$

где $\delta_A \mathscr{L}$ — вариационные производные лагранжиана L. В силу произвольности функций $\alpha^m(x)$, это равенство эквивалентно системе сильных равенств

$$u^A_m \delta_A \mathscr{L} + \widehat{\partial}_\mu (u^A_m \partial^\mu_A \mathscr{L}) = 0, \tag{A.27a}$$

$$u^{A\mu}_m \delta_A \mathscr{L} + \widehat{\partial}_\lambda (u^{A\mu}_m \partial^\lambda_A \mathscr{L}) + u^A_m \partial^\mu_A \mathscr{L} = 0, \tag{A.27b}$$

$$u^{A\lambda}_m \partial^\mu_A \mathscr{L} + u^{A\mu}_m \partial^\lambda_A \mathscr{L} = 0. \tag{A.27c}$$

Подставляя (A.27b) и (A.27c) в (A.27a), мы получим известные условия связи на вариационные производные калибровочно инвариантного лагранжиана L:

$$u^A_m \delta_A \mathscr{L} - \widehat{\partial}_\mu (u^{A\mu}_m \delta_A \mathscr{L}) = 0.$$

На решениях уравнений Эйлера—Лагранжа сильные равенства (A.27a)—(A.27c) воспроизводят *тождества Нетер*

$$\widehat{\partial}_\mu (u^A_m \partial^\mu_A \mathscr{L}) \approx 0, \tag{A.28a}$$

$$\widehat{\partial}_\lambda (u^{A\mu}_m \partial^\lambda_A \mathscr{L}) + u^A_m \partial^\mu_A \mathscr{L} \approx 0, \tag{A.28b}$$

$$u^{A\lambda}_m \partial^\mu_A \mathscr{L} + u^{A\mu}_m \partial^\lambda_A \mathscr{L} = 0. \tag{A.28c}$$

Заметим, что с физической точки зрения тождества (A.28a)—(A.28c) представляют собой необходимое и достаточное условие инвариантности закона сохранения

$$\widehat{\partial}_\lambda \left[\left(u^A_m \alpha^m + u^{A\mu}_m \partial_\mu \alpha^m\right) \partial^\lambda_A \mathscr{L}\right] \approx 0 \tag{A.29}$$

относительно калибровочных преобразований. Это означает, что, если равенство (A.29) выполняется для некоторых калибровочных параметров $\alpha(x)$, оно остается справедливым и при их произвольных вариациях $\alpha+\delta$. При этом, в силу (A.27b) и (A.27c), сохраняющейся нетеровский ток может быть приведен к виду

$$T^\lambda = \left(u^A_m \alpha^m + u^{A\mu}_m \partial_\mu \alpha^m\right) \partial^\lambda_A \mathscr{L} = -\alpha^m u^{A\lambda}_m \delta_A \mathscr{L} + \widehat{\partial}_\mu \left(\alpha^m u^{A\mu}_m \partial^\lambda_A \mathscr{L}\right),$$

т. е. он сводится к суперпотенциалу

$$T^\lambda \approx \widehat{\partial}_\mu \left(\alpha^m u^{A\mu}_m \partial^\lambda_A \mathscr{L}\right).$$

Законы сохранения энергии-импульса

В общем случае векторное поле τ на базе X может быть поднято на расслоение Y только с помощью некоторой связности на $Y \to X$. Слабое тождество (A.19), записанное для такого векторного поля на Y, приводит к закону сохранения энергии-импульса.

Пусть τ — некоторое векторное поле на X и

$$\tau_\Gamma = \tau \rfloor \Gamma = \tau^\mu(\partial_\mu + \Gamma^i_\mu \partial_i)$$

— его горизонтальный лифт на Y посредством связности

$$\Gamma = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + \Gamma^i_\mu \partial_i)$$

на Y. В этом случае слабое тождество (A.19) принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tau^\mu \mathscr{L} + \left[\tau^\mu \partial_\mu + \tau^\mu \Gamma^i_\mu \partial_i + \left(\partial_\lambda(\tau^\mu \Gamma^i_\mu) + \tau^\mu y^j_\lambda \partial_j \Gamma^i_\mu - y^i_\mu \partial_\lambda \tau^\mu\right) \partial^\lambda_i\right] \mathscr{L} - \\ - \widehat{\partial}_\lambda \left[\pi^\lambda_i (\tau^\mu \Gamma^i_\mu - \tau^\mu y^i_\mu) + \delta^\lambda_\mu \tau^\mu \mathscr{L}\right] \approx 0 \end{aligned} \tag{A.30}$$

и после некоторых упрощений может быть приведено к равенству

$$\tau^\mu \left\{\left[\partial_\mu + \Gamma^i_\mu \partial_i + \left(\partial_\lambda \Gamma^i_\mu + y^j_\lambda \partial_j \Gamma^i_\mu\right) \partial^\lambda_i\right] \mathscr{L} - \widehat{\partial}_\lambda \left[\pi^\lambda_i \left(\Gamma^i_\mu - y^i_\mu\right) + \delta^\lambda_\mu \mathscr{L}\right]\right\} \approx 0.$$

Поскольку это равенство справедливо для любого векторного поля τ на X, оно эквивалентно системе слабых равенств

$$\left[\partial_\mu + \Gamma^i_\mu \partial_i + \left(\partial_\lambda \Gamma^i_\mu + y^j_\lambda \partial_j \Gamma^i_\mu\right) \partial^\lambda_i\right] \mathscr{L} - \widehat{\partial}_\lambda \left[\pi^\lambda_i \left(\Gamma^i_\mu - y^i_\mu\right) + \delta^\lambda_\mu \mathscr{L}\right] \approx 0. \tag{A.31}$$

На решениях s уравнений Эйлера—Лагранжа, слабое тождество (A.30) превращается в закон сохранения

$$s^* \mathbf{L}_{\tau_\Gamma} L + \frac{d}{dx^\lambda} \left[\tau^\mu \mathscr{T}_\Gamma{}^\lambda{}_\mu(s)\right] \omega \approx 0,$$

который эквивалентен системе слабых равенств

$$\left[\partial_\mu + \Gamma^i_\mu \partial_i + \left(\partial_\lambda \Gamma^i_\mu + \partial_\lambda s^j \partial_j \Gamma^i_\mu\right) \partial^\lambda_i\right] \mathscr{L} + \frac{d}{dx^\lambda} \left[\pi^\lambda_i \left(\partial_\mu s^i - \Gamma^i_\mu\right) - \delta^\lambda_\mu \mathscr{L}\right] \approx 0. \tag{A.32}$$

Величина $\mathscr{T}_\Gamma{}^\lambda{}_\mu(s)$ здесь это *тензор энергии-импульса, отвечающий данной связности* Γ на расслоении $Y \to X$. Он задается коэффициентами T^*X-значной $(n-1)$-формы

$$\mathscr{T}_\Gamma(s) = -(\Gamma \rfloor \Xi_L) \circ s = \left[\pi^\lambda_i (\partial_\mu s^i - \Gamma^i_\mu) - \delta^\lambda_\mu \mathscr{L}\right] dx^\mu \otimes \omega_\lambda$$

на X.

Например, пусть лагранжиан L зависит от фоновой метрики g на базе X. В этом случае закон сохранения (А.32) принимает вид

$$-t^\alpha_\beta\sqrt{|g|}\{^\beta_{\mu\alpha}\}+\left[\Gamma^i_\mu\partial_i+\left(\partial_\lambda\Gamma^i_\mu+\partial_\lambda s^j\partial_j\Gamma^i_\mu\right)\partial^\lambda_i\right]\mathscr{L}+\frac{d}{dx^\lambda}\left[\pi^\lambda_i\left(\partial_\mu s^i-\Gamma^i_\mu\right)-\delta^\lambda_\mu\mathscr{L}\right]\approx 0,$$

где $\{^\beta_{\mu\alpha}\}$ — символы Кристоффеля метрики g и

$$t^\alpha_\beta=g^{\alpha\gamma}t_{\gamma\beta}$$

— *метрический тензор энергии-импульса.* При определенных свойствах симметрии лагранжиана L этот закон сохранения превращается в *ковариантный закон сохранения*

$$\nabla_\alpha t^\alpha_\beta=0,$$

где ∇_α обозначает ковариантную производную по связности $\{^\beta_{\mu\alpha}\}$.

Рассмотрим теперь слабое тождество (А.30) в вариантах, когда векторное поле τ на базе X поднимается до векторного поля на Y посредством разных связностей Γ и Γ' на $Y\to X$. Их разность приводит к слабому тождеству

$$\left[\tau^\mu\sigma^i_\mu\partial_i+\left(\partial_\lambda(\tau^\mu\sigma^i_\mu)+y^j_\lambda\partial_j(\tau^\mu\sigma^i_\mu)\right)\partial^\lambda_i\right]\mathscr{L}-\widehat{\partial}_\lambda\left[\pi^\lambda_i\tau^\mu\sigma^i_\mu\right]\approx 0, \tag{А.33}$$

где $\sigma=\Gamma'-\Gamma$ это припаивающая форма на расслоении $Y\to X$ и

$$\tau\rfloor\sigma=\tau^\mu\sigma^i_\mu\partial_i \tag{А.34}$$

— вертикальное векторное поле. Тождество (А.33) это в точности тождество (А.19), записанное для вертикального векторного поля (А.34).

Таким образом можно сделать вывод, что **всякий дифференциальный закон сохранения есть суперпозиция закона сохранения некоторого нетеровского тока и закона сохранения энергии-импульса**.

Энергия-импульс калибровочных полей

Пусть $P\to X$ — главное расслоение со структурной полупростой группой Ли G и C — расслоение (1.89) с координатами (x^μ,k^m_μ).

На конфигурационном пространстве J^1C лагранжиан Янга—Миллса калибровочных полей L_{YM} в присутствии фоновой метрики g на базе X задается выражением (2.21).

Для всякого векторного поля τ на X существует поднятие этого поля

$$\tau_B=\tau^\lambda\partial_\lambda+\left[\tau^\lambda\left(\partial_\mu B^m_\lambda-c^m_{nl}k^n_\mu B^l_\lambda\right)+\partial_\mu\tau^\lambda\left(B^m_\lambda-k^m_\lambda\right)\right]\partial^\mu_m \tag{А.35}$$

на расслоение C посредством некоторой связности B на расслоении P. Часть этого выражение в квадратных скобках аналогична выражению для вертикального векторного поля на C, отвечающего калибровочным изоморфизмам. Поэтому производная Ли калибровочно инвариантного лагранжиана L_{YM} вдоль $\overline{\tau}_B$ сводится к

$$\mathbf{L}_{\overline{\tau}_B}L_{\text{YM}}=\left(\partial_\lambda\tau^\lambda\mathscr{L}_{\text{YM}}+\tau^\lambda\partial_\lambda\mathscr{L}_{\text{YM}}-\mathscr{F}^m_{\mu\nu}\partial_\lambda\tau^\mu\pi^{\nu\lambda}_m\right)\omega.$$

Подставляя это выражение в (А.30), получаем закон сохранения энергии-импульса калибровочных полей в виде

$$\begin{aligned}&\partial_\lambda\tau^\lambda\mathscr{L}_{\text{YM}}-\tau^\mu t^\alpha_\beta\sqrt{|g|}\{^\beta_{\mu\alpha}\}-\mathscr{F}^m_{\mu\nu}\partial_\lambda\tau^\mu\pi^{\nu\lambda}_m\approx\\&\quad\approx\widehat{\partial}_\lambda\left[\pi^{\nu\lambda}_m\left(\tau^\mu(\partial_\nu B^m_\mu-c^m_{nl}k^n_\nu B^l_\mu)+\partial_\nu\tau^\mu(B^m_\mu-k^m_\mu)-\tau^\mu k^m_{\nu\mu}\right)+\delta^\lambda_\mu\tau^\mu\mathscr{L}_{\text{YM}}\right],\end{aligned} \tag{А.36}$$

где

$$t^\alpha_\beta = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\pi^{\nu\alpha}_m \mathscr{F}^m_{\beta\nu} - \delta^\alpha_\beta \mathscr{L}_{\text{YM}}\right)$$

— метрический тензор энергии-импульса калибровочных полей.

Для всякого заданного решения A уравнений Янга—Миллса выберем лифт (A.35) векторного поля τ на расслоение C посредством самой связности A. В этом случае закон сохранения энергии-импульса (A.36) на критическом сечении A принимает форму

$$\tau^\mu t^\alpha_\beta \sqrt{|g|}\,\{^\beta{}_{\mu\alpha}\} \approx \tau^\mu \frac{d}{dx^\lambda}\left(\pi^{\nu\lambda}_m F^m_{\mu\nu} - \delta^\lambda_\mu \mathscr{L}_{\text{YM}}\right)$$

и сводится к известному ковариантному закону сохранения

$$\sqrt{|g|}\,\nabla_\lambda t^\lambda_\mu \approx 0. \tag{A.37}$$

Отметим, что при произвольном выборе связности B, соответствующий закон сохранения энергии-импульса (A.36) отличается от ковариантного закона сохранения (A.37) на нетеровский закон сохранения

$$\widehat{\partial}_\lambda(\pi^{\nu\lambda}_m u_{\mathscr{G}}{}^m_\nu) \approx 0,$$

где

$$u_{\mathscr{G}} = (\partial_\nu \alpha^m + c^m_{nl} k^l_\nu \alpha^n)\partial^\nu_m,$$
$$\alpha^m = \tau^\mu (B^m_\mu - A^m_\mu),$$

— вертикальное векторное поле на расслоении C, отвечающее его калибровочным изоморфизмам.

Условие общей ковариантности

Рассмотрим теперь класс расслоений $T \to X$, которые допускают каноническое поднятие векторного поля τ на X. Они называются *геометрическими расслоениями* (bundles of geometric objects).

Пусть $\tau = \tau^\mu \partial_\mu$ — векторное поле на многообразии X. Существует его каноническое поднятие

$$\widetilde{\tau} = T\tau = \tau^\mu \partial_\mu + \partial_\nu \tau^\alpha \dot{x}^\nu \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha} \tag{A.38}$$

на касательное расслоение TX над X. Обобщая (A.38), можно построить *канонический лифт* векторного поля на следующие расслоения над X (мы будем обозначать все эти поднятия одним и тем же символом $\widetilde{\tau}$):

- $$\widetilde{\tau} = \tau^\mu \partial_\mu + \left[\partial_\nu \tau^{\alpha_1} \dot{x}^{\nu\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_k} + \ldots - \partial_{\beta_1}\tau^\nu \dot{x}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\nu\beta_2\cdots\beta_k} - \ldots\right] \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_k}}$$
  на тензорное расслоение
  $$T^k_m X = (\overset{m}{\otimes} TX) \otimes (\overset{k}{\otimes} T^* X);$$
- $$\widetilde{\tau} = \tau^\mu \partial_\mu + \left[\partial_\nu \tau^\alpha k^\nu{}_{\beta\mu} - \partial_\beta \tau^\nu k^\alpha{}_{\nu\mu} - \partial_\mu \tau^\nu k^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_{\beta\mu}\tau^\alpha\right] \frac{\partial}{\partial k^\alpha{}_{\beta\mu}}$$
  на расслоение C_w общих линейных связностей на X.

Заметим, что векторное поле $\widetilde{\tau}$ на геометрическом расслоении T можно считать ассоциированным с некоторой локальной 1-параметрической группой (голономных) изоморфизмов T, индуцированных диффеоморфизмами базы X. В частности, если $T = TX$, это касательные изоморфизмы. Будем называть такие голономные изоморфизмы *общими ковариантными преобразованиями*.

Пусть T — геометрическое расслоение и L — лагранжиан на соответствующем конфигурационном пространстве J^1T. Рассмотрим некоторое векторное поле τ на базе X и его канонический лифт $\widetilde{\tau}$ на T. Применим первую вариационную формулу (А.18), чтобы получить соответствующий закон сохранения энергии-импульса. Предположим, что лагранжиан L инвариантен относительно общих ковариантных преобразований, т. е.

$$\mathbf{L}_{j_0^1\widetilde{\tau}} L = 0. \tag{A.39}$$

Подставив это условие в (А.18), мы приходим к слабому закону сохранения

$$0 \approx d_H h_0(\widetilde{\tau} \rfloor \Xi_L). \tag{A.40}$$

При этом можно показать, что сохраняющаяся величина сводится к суперпотенциалу.

Проиллюстрируем этот факт на примере тензорного расслоения $T \to X$, параметризуемого координатами (x^λ, y^A) с коллективным индексом A. Канонический лифт векторного поля τ на такое расслоение дается выражением

$$\widetilde{\tau} = \tau^\lambda \partial_\lambda + u^{A\beta}_{\ \ \alpha} \partial_\beta \tau^\alpha \partial_A.$$

Если лагранжиан L инвариантен относительно общих ковариантных преобразований, он удовлетворяет сильному условию (А.39), которое в данном случае имеет вид

$$\partial_\alpha(\tau^\alpha \mathscr{L}) + u^{A\beta}_{\ \ \alpha} \partial_\beta \tau^\alpha \partial_A \mathscr{L} + \widehat{\partial}_\mu(u^{A\beta}_{\ \ \alpha} \partial_\beta \tau^\alpha)\, \partial^\mu_A \mathscr{L} - y^A_\alpha \partial_\beta \tau^\alpha \partial^\beta_A \mathscr{L} = 0. \tag{A.41}$$

Это условие справедливо для всех векторных полей τ. Поэтому в силу произвольности функций τ^α равенство (А.41) эквивалентно системе равенств

$$\partial_\lambda \mathscr{L} = 0, \tag{A.42a}$$

$$\delta^\beta_\alpha \mathscr{L} + u^{A\beta}_{\ \ \alpha} \partial_A \mathscr{L} + \widehat{\partial}_\mu(u^{A\beta}_{\ \ \alpha}) \partial^\mu_A \mathscr{L} - y^A_\alpha \partial^\beta_A \mathscr{L} = 0, \tag{A.42b}$$

$$u^{A\beta}_{\ \ \alpha} \partial^\mu_A \mathscr{L} + u^{A\mu}_{\ \ \alpha} \partial^\beta_A \mathscr{L} = 0. \tag{A.42c}$$

Равенство (А.42b) можно привести к виду

$$\delta^\beta_\alpha \mathscr{L} + u^{A\beta}_{\ \ \alpha} \delta_A \mathscr{L} + \widehat{\partial}_\mu(u^{A\beta}_{\ \ \alpha} \partial^\mu_A \mathscr{L}) = y^A_\alpha \partial^\beta_A \mathscr{L}, \tag{A.43}$$

где $\delta_A \mathscr{L}$ — вариационные производные лагранжиана L. Подставив (А.43) и (А.42c) в слабое тождество (А.40), мы получим закон сохранения

$$0 \approx \widehat{\partial}_\lambda \left[-u^{A\lambda}_{\ \ \alpha} \delta_A \mathscr{L} \tau^\alpha - \widehat{\partial}_\mu(u^{A\lambda}_{\ \ \alpha} \partial^\mu_A \mathscr{L} \tau^\alpha) \right],$$

где сохраняющаяся величина сводится к суперпотенциалу

$$U^{\lambda\mu}(\tau) = -u^{A\lambda}_{\ \ \alpha} \partial^\mu_A \mathscr{L} \tau^\alpha.$$

Энергия-импульс гравитационного поля

Эйнштейновская теория гравитации и аффинно-метрическая теория гравитации являются полевыми моделями как раз на геометрических расслоениях, и их лагранжианы инвариантны относительно общих ковариантных преобразований. Поэтому к ним можно применить изложенную в предыдущем разделе технику для исследования закона сохранения энергии-импульса гравитационного поля.

Эйнштейновская теория гравитации, где динамическими переменными являются компоненты псевдоримановой метрики, является лагранжевой моделью второго порядка, хотя и вырожденной. Поэтому мы здесь на ней не будем останавливаться. Отметим только, что закон сохранения энергии-импульса гравитационного поля в этой модели, обусловленный инвариантностью гильберт-эйнштейновского лагранжиана относительно общих ковариантных преобразований, имеет вид

$$\frac{d}{dx^\lambda}T^\lambda(\tau)\approx 0, \qquad T^\lambda \approx \frac{d}{dx^\lambda}U^{\mu\lambda}(\tau), \tag{A.44}$$

где

$$U^{\mu\lambda}(\tau)=\frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}\left(g^{\lambda\nu}\tau^{\mu}_{;\nu}-g^{\mu\nu}\tau^{\lambda}_{;\nu}\right) \tag{A.45}$$

— известный *суперпотенциал Комара*. Символами "$_{;\mu}$" здесь обозначены ковариантные производные по связности Леви-Чивита.

Этот результат обобщается в рамках аффинно-метрической теории гравитации на случай общей линейной связности $K^{\alpha}{}_{\gamma\mu}$ и произвольного лагранжиана L, инвариантного относительно общих ковариантных преобразований.

Динамическими переменными в *аффинно-метрической теории гравитации* являются *псевдориманова метрика и общая линейная связность* на пространстве-времени $\boldsymbol{X}$. Мы будем называть их мировой метрикой и мировой связностью.

Пусть $LX \to X$ — главное расслоение линейных реперов в касательных пространствах к X со структурной группой GL_4.

Как и в случае калибровочной теории, существует взаимно однозначное соответствие между мировыми связностями и глобальными сечениями расслоения

$$C_w = J^1LX/GL_4.$$

Обозначим $\Sigma_g \to X$ расслоение псевдоримановых метрик. Мы будем его отождествлять с открытым подмногообразием тензорного расслоения

$$\overset{2}{\vee}T^*X \to X.$$

Полное *конфигурационное пространство* аффинно-метрической теории гравитации тогда имеет вид

$$J^1Y = J^1(\Sigma_g \underset{X}{\times} C_w) \tag{A.46}$$

и параметризуется координатами

$$(x^\lambda, g^{\alpha\beta}, k^{\alpha}{}_{\beta\lambda}, g^{\alpha\beta}{}_{\mu}, k^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu}).$$

Предположим, что лагранжиан L аффинно-метрической теории гравитации на конфигурационном пространстве (A.46) зависит от метрических координат $g^{\alpha\beta}$ и комбинаций типа кривизны

$$R^{\alpha}{}_{\beta\nu\lambda} = k^{\alpha}{}_{\beta\lambda\nu} - k^{\alpha}{}_{\beta\nu\lambda} + k^{\alpha}{}_{\varepsilon\nu}k^{\varepsilon}{}_{\beta\lambda} - k^{\alpha}{}_{\varepsilon\lambda}k^{\varepsilon}{}_{\beta\nu}.$$

В этом случае выполняются соотношения

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k^{\alpha}{}_{\beta\nu}} = \pi_{\sigma}{}^{\beta\nu\lambda} k^{\sigma}{}_{\alpha\lambda} - \pi_{\alpha}{}^{\sigma\nu\lambda} k^{\beta}{}_{\sigma\lambda},$$
$$\pi_{\alpha}{}^{\beta\nu\lambda} = \partial_{\alpha}{}^{\beta\nu\lambda} \mathscr{L} = -\pi_{\alpha}{}^{\beta\lambda\nu}.$$

Предположим, что L инвариантен относительно общих ковариантных преобразований.

Пусть τ — векторное поле на X. Его канонический лифт на расслоение $\Sigma_g \times C_w$ имеет вид

$$\widetilde{\tau} = \tau^{\lambda}\partial_{\lambda} + \left(g^{\nu\beta}\partial_{\nu}\tau^{\alpha} + g^{\alpha\nu}\partial_{\nu}\tau^{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}} + \left[\partial_{\nu}\tau^{\alpha}k^{\nu}{}_{\beta\mu} - \partial_{\beta}\tau^{\nu}k^{\alpha}{}_{\nu\mu} - \partial_{\mu}\tau^{\nu}k^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_{\beta\mu}\tau^{\alpha}\right]\frac{\partial}{\partial k^{\alpha}{}_{\beta\mu}}.$$

Для упрощения выражений введем следующие обозначения

$$\widetilde{\tau} = \tau^{\lambda}\partial_{\lambda} + \left(g^{\nu\beta}\partial_{\nu}\tau^{\alpha} + g^{\alpha\nu}\partial_{\nu}\tau^{\beta}\right)\partial_{\alpha\beta} + \left(u^{A\beta}{}_{\alpha}\partial_{\beta}\tau^{\alpha} - u^{A\varepsilon\beta}{}_{\alpha}\partial_{\varepsilon\beta}\tau^{\alpha}\right)\partial_{A}.$$

Поскольку

$$\mathbf{L}_{j_0^1\widetilde{\tau}} L = 0, \tag{A.47}$$

мы получаем слабый закон сохранения

$$0 \approx \widehat{\partial}_{\lambda}\left[\partial^{\lambda}_{A}\mathscr{L}\left(u^{A\beta}{}_{\alpha}\partial_{\beta}\tau^{\alpha} - u^{A\varepsilon\beta}{}_{\alpha}\partial_{\varepsilon\beta}\tau^{\alpha} - y^{A}_{\alpha}\tau^{\alpha}\right) + \tau^{\lambda}\mathscr{L}\right], \tag{A.48}$$

где

$$\partial^{\lambda}_{A}\mathscr{L}u^{A\varepsilon\beta}{}_{\alpha} = \pi_{\alpha}{}^{\varepsilon\beta\lambda},$$
$$\partial^{\varepsilon}_{A}\mathscr{L}u^{A\beta}{}_{\alpha} = \pi_{\alpha}{}^{\gamma\mu\varepsilon}k^{\beta}{}_{\gamma\mu} - \pi_{\sigma}{}^{\beta\mu\varepsilon}k^{\sigma}{}_{\alpha\mu} - \pi_{\sigma}{}^{\gamma\beta\varepsilon}k^{\sigma}{}_{\gamma\alpha} =$$
$$= \partial_{\alpha}{}^{\beta\varepsilon}\mathscr{L} - \pi_{\sigma}{}^{\gamma\beta\varepsilon}k^{\sigma}{}_{\gamma\alpha}.$$

В силу произвольности функций τ^{α} равенство (A.47) приводит к сильному равенству

$$\delta^{\beta}_{\alpha}\mathscr{L} + \sqrt{-g}\,T^{\alpha}_{\beta} + u^{A\beta}{}_{\alpha}\partial_{A}\mathscr{L} + \widehat{\partial}_{\mu}(u^{A\beta}{}_{\alpha})\partial^{\mu}_{A}\mathscr{L} - y^{A}_{\alpha}\partial^{\beta}_{A}\mathscr{L} = 0. \tag{A.49}$$

При этом величину

$$\sqrt{-g}\,T^{\alpha}_{\beta} = 2g^{\alpha\nu}\partial_{\nu\beta}\mathscr{L}$$

можно интерпретировать как метрический тензор энергии-импульса мировых связностей.

Подстановкой $y^{A}_{\alpha}\partial^{\beta}_{A}\mathscr{L}$ из выражения (A.49) в закон сохранения (A.48) последний приводится к виду

$$0 \approx \widehat{\partial}_{\lambda}\Big[-\sqrt{-g}\,T^{\lambda}_{\alpha}\tau^{\alpha} + \partial^{\lambda}_{A}\mathscr{L}\left(u^{A\beta}{}_{\alpha}\partial_{\beta}\tau^{\alpha} - u^{A\varepsilon\beta}{}_{\alpha}\partial_{\varepsilon\beta}\tau^{\alpha}\right) - \\ - \partial_{A}\mathscr{L}u^{A\lambda}{}_{\alpha}\tau^{\alpha} - \partial^{\mu}_{A}\mathscr{L}\widehat{\partial}_{\mu}(u^{A\lambda}{}_{\alpha})\tau^{\alpha}\Big]. \tag{A.50}$$

Выделим в выражении (A.50) член с компонентами оператора Эйлера—Лагранжа

$$\mathscr{E}_{L} = (\delta_{\alpha\beta}\mathscr{L}\,dg^{\alpha\beta} + \delta_{\alpha}{}^{\gamma\mu}\mathscr{L}\,dk^{\alpha}{}_{\gamma\mu}) \wedge \omega.$$

Мы получим

$$0 \approx \widehat{\partial}_\lambda \left[\partial_A^\lambda \mathscr{L} u^{A\mu}{}_\alpha \partial_\mu \tau^\alpha - \widehat{\partial}_\mu \left(\partial_A^\mu \mathscr{L} u^{A\lambda}{}_\alpha\right) \tau^\alpha + \widehat{\partial}_\mu \left(\pi_\alpha{}^{\varepsilon\mu\lambda}\right) \partial_\varepsilon \tau^\alpha\right] + \\ + \widehat{\partial}_\lambda \left[-2g^{\lambda\mu}\tau^\alpha \delta_{\alpha\mu}\mathscr{L} - u^{A\lambda}{}_\alpha \tau^\alpha \delta_A \mathscr{L}\right] - \widehat{\partial}_\lambda \left[\widehat{\partial}_\mu (\pi_\alpha{}^{\nu\mu\lambda} \partial_\nu \tau^\alpha)\right]$$

и затем

$$0 \approx \widehat{\partial}_\lambda \left[-\widehat{\partial}_\mu (\partial_\alpha{}^{\lambda\mu} \mathscr{L})\tau^\alpha\right] + \widehat{\partial}_\lambda \left[-2g^{\lambda\mu}\tau^\alpha \delta_{\alpha\mu}\mathscr{L} - \left(k^\lambda{}_{\gamma\mu}\delta_\alpha{}^{\gamma\mu}\mathscr{L} - k^\sigma{}_{\alpha\mu}\delta_\sigma{}^{\lambda\mu}\mathscr{L} - \right.\right. \\ \left.\left. - k^\sigma{}_{\gamma\alpha}\delta_\sigma{}^{\gamma\lambda}\mathscr{L}\right)\tau^\alpha + \delta_\alpha{}^{\varepsilon\lambda}\mathscr{L}\partial_\varepsilon\tau^\alpha\right] - \widehat{\partial}_\lambda \left[\widehat{\partial}_\mu \left(\pi_\alpha{}^{\nu\mu\lambda}(D_\nu\tau^\alpha + \Omega^\alpha{}_{\nu\sigma}\tau^\sigma)\right)\right].$$

Закон сохранения (А.48) принимает окончательный вид

$$0 \approx \widehat{\partial}_\lambda \left[-2g^{\lambda\mu}\tau^\alpha \delta_{\alpha\mu}\mathscr{L} - \left(k^\lambda{}_{\gamma\mu}\delta_\alpha{}^{\gamma\mu}\mathscr{L} - k^\sigma{}_{\alpha\mu}\delta_\sigma{}^{\lambda\mu}\mathscr{L} - k^\sigma{}_{\gamma\alpha}\delta_\sigma{}^{\gamma\lambda}\mathscr{L}\right)\tau^\alpha + \right. \\ \left. + \delta_\alpha{}^{\varepsilon\lambda}\mathscr{L}\partial_\varepsilon\tau^\alpha - \widehat{\partial}_\mu \left(\delta_\alpha{}^{\lambda\mu}\mathscr{L}\right)\tau^\alpha\right] - \widehat{\partial}_\lambda \left[\widehat{\partial}_\mu (\pi_\alpha{}^{\nu\mu\lambda}(D_\nu\tau^\alpha + \Omega^\alpha{}_{\nu\sigma}\tau^\sigma)\right],$$

где сохраняющаяся величина сводится к суперпотенциалу

$$U^{\mu\lambda}(\tau) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial K^\alpha{}_{\nu\mu,\lambda}} \left(D_\nu \tau^\alpha + \Omega^\alpha{}_{\nu\sigma}\tau^\sigma\right),$$

называемому *обобщенным суперпотенциалом Комара.*

Когомологии со значениями в пучках

Начнем с определения предпучка и пучка. *Предпучок* считается заданным на топологическом пространстве X, если каждому открытому множеству $U \subset X$ сопоставлена некоторая абелева группа S_U ($S_\varnothing = 0$), а каждой паре открытых множеств $V \subset U$ сопоставлен гомоморфизм

$$r_V^U : S_U \to S_V,$$

такой, что

а) $r_U^U = \mathrm{Id}_{S_U}$;

б) $r_W^U = r_W^V r_V^U$ для $W \subset Z \subset U$.

Пример В.1. Пусть X — топологическое пространство, S_U — абелева группа по сложению всех непрерывных вещественных функций, определенных на $U \subset X$, а гомоморфизм

$$r_V^U : S_U \to S_V$$

определяется как сужение их на $V \subset X$. Тогда $S \in \{S_U, r_V^U\}$ — предпучок. □

Следующая конструкция позволяет каждому предпучку сопоставить специального вида расслоение (накрытие) $(S(X), \pi, X)$, называемое *пучком*.

1. Для каждой точки $x \in X$ обозначим S_x прямой предел абелевых групп S_U, $x \in U$, по отношению к гомоморфизмам r_V^U. По определению это означает, что для каждой открытой окрестности U точки x каждый элемент $s \in S_U$ определяет некоторый элемент $s_x \in S_x$, называемый *ростком* элемента s в точке x. Причем два элемента $s \in S_U$ и $s' \in S'_V$ определяют один и тот же росток тогда и только тогда, когда существует такая окрестность $W \ni x$, что

$$r_W^U s = r_W^V s'.$$

В частности, если s s' — вещественные функции из Примера В.1, они определяют один и тот же *росток* s_x, если совпадают на некоторой окрестности W точки x.

2. Прямой предел S_x абелевых групп S_U (он называется *стеблем пучка*) является абелевой группой (это **неверно для неабелевых групп**). Пусть $S(X)$ — объединение всех групп S_x, $x \in X$. Введем на этом множестве топологию. Для каждого открытого множества $U \subset X$ и каждого элемента $s \in S_U$ обозначим $S(U)$ подмножество множества $S(X)$, состоящее из всех ростков s_x, $x \in U$, элемента s. Семейство всех множеств $S(U)$ (U пробегает всевозможные открытые множества пространства X, а s пробегает все элементы из S_U) образует базу топологии, вводимой в S.

3. Пусть $\pi : S(X) \to X$ — отображение, переводящее каждый из стеблей S_x, $x \in X$, в соответствующую точку $x \in X$. Согласно определению топологии в $S(X)$ это отображение непрерывно, и тройка $P = (S(U), \pi, X)$ образует расслоение. Слоем этого

расслоения над точкой $x \in X$ является стебель $S_x = \pi^{-1}(x)$, на котором **индуцируется дискретная топология** (ее базу составляют сами элементы $s_x \in S_x$).

Пример В.2. Пусть X — топологическое пространство и S_U — абелева группа всех постоянных вещественных функций на U. Росток s_x элемента $s \in S_U$, $x \in U$, однозначно определяется значением $s(x)$ в точке x. Стеблем S_x является множество действительных чисел $\mathbb{R}$, в котором введена дискретная топология. Пучок $P = (S(X), \pi, X)$ называется *постоянным пучком с коэффициентами в* $\mathbb{R}$. □

Пучок, порождаемый предпучком из Примера В.1, называется *пучком ростков непрерывных функций*. Соответственно, если X — многообразие, определяется пучок ростков гладких функций.

Два разных предпучка могут порождать один и тот же пучок. Например, тот же пучок ростков непрерывных функций порождается и предпучком только ограниченных функций.

По пучку можно построить предпучок. Обозначим $\Gamma(U, P)$ множество всех сечений расслоения P над $U \subset X$. Оно наделено структурой абелевой группы, нулем которой является нулевое сечение $x \to 0_x$. Сопоставим каждому открытому множеству $U \subset X$ группы $\Gamma(U, P)$ (при $U = \varnothing$ группу $\Gamma(U, P)$ по определению считаем нулевой) и любым двум открытым множествам U и $V \subset U$ — гомоморфизм

$$r_V^U : \Gamma(U, P) \to (V, P),$$

относящий каждому сечению пучка P над U его ограничение на V. В результате получим предпучок $\{\Gamma(U, P), r_V^U\}$, называемый *каноническим предпучком* пучка P. Можно показать, что пучок, порождаемый предпучком $\{\Gamma(U, P), r_V^U\}$, совпадает с пучком P.

Для пучка ростков непрерывных функций $\Gamma(U, P)$ — абелева группа непрерывных вещественных функций на U, т. е. $\Gamma(U, P) = S_U$.

Пусть пучок P порожден некоторым предпучком $\{S_U, r_V^U\}$. Сопоставим каждому элементу $s \in S_U$ сечение $h_U(s)$ пучка P над U, сопоставляющее всякой точке $x \in U$ росток s_x в точке x. Это сопоставление $s \to h_U(s)$ определяет гомоморфизм абелевых групп

$$h_U : S_U \to \Gamma(U, P).$$

Эти гомоморфизмы перестановочны с гомоморфизмами r_V^U, т. е.

$$r_V^U h_U = h_V r_V^U,$$

и определяют *гомоморфизм предпучка* $\{S_U, r_V^U\}$ в предпучок $\{\Gamma(U, P), r_V^U\}$. В общем случае этот гомоморфизм не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом.

Прежде чем перейти к когомологиям, рассмотрим точные последовательности предпучков и пучков.

Пусть имеется *последовательность предпучков* над одним и тем же топологическим пространством

$$\ldots \longrightarrow S^q \longrightarrow S^{q+1} \longrightarrow S^{q+2} \longrightarrow \ldots, \tag{B.1}$$

где стрелки обозначают гомоморфизмы пучков. Пусть для каждого $U \subset X$ соответствующая последовательность абелевых групп

$$\ldots \longrightarrow S_U^q \longrightarrow S_U^{q+1} \longrightarrow S_U^{q+2} \longrightarrow \ldots \tag{B.2}$$

является точной, т. е. образ предыдущего гомоморфизма совпадает с ядром последующего. Тогда последовательность (В.1) тоже является точной. При переходе к прямому

пределу свойство точности последовательности сохраняется. Поэтому для каждой точки $x \in X$ индуцируемая последовательностью (В.2) последовательность стеблей

$$\ldots \longrightarrow S_x^q \longrightarrow S_x^{q+1} \longrightarrow S_x^{q+2} \longrightarrow \ldots, \tag{В.3}$$

тоже является точной. Последовательность (В.3) для каждого x определяет *последовательность пучков*

$$\ldots \longrightarrow P^q \longrightarrow P^{q+1} \longrightarrow P^{q+2} \longrightarrow \ldots, \tag{В.4}$$

порождаемых предпучками S^q, где стрелки обозначают послойные отображения расслоений, тождественные на базе X и являющиеся гомоморфизмами абелевых групп на слоях. Из точности последовательности (В.3) следует точность последовательности (В.4). Таким образом, **точность последовательности предпучков (В.1) приводит к точности последовательности порождаемых этими предпучками пучков (В.4).**

Последовательность пучков (В.4) индуцирует последовательность групп сечений

$$\ldots \longrightarrow \Gamma(U, P^q) \longrightarrow \Gamma(U, P^{q+1}) \longrightarrow \Gamma(U, P^{q+2}) \longrightarrow \ldots, \tag{В.5}$$

но важно отметить, что эта последовательность не является, вообще говоря, точной, хотя образует коцепной комплекс, поскольку гомоморфизм

$$P^q \to 0 \in P^{q+2}$$

индуцирует гомоморфизм

$$\Gamma(U, P^q) \to 0 \in \Gamma(U, P^{q+2}).$$

Перейдем теперь непосредственно к определению когомологий со значениями в пучках. Пусть S — некоторый предпучок над топологическим пространством X и пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие X. Определим в качестве *p-мерной коцепи* (покрытия $\{U\}$ с коэффициентами в S) функцию f, сопоставляющую каждой последовательности $(i_0, \ldots, i_p)$ индексов из множества I некоторый элемент $f(i_0, \ldots, i_p)$ группы

$$S_V, \quad V = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}.$$

Все такие p-мерные коцепи очевидным образом образуют абелеву группу $C^p(\{U\}, S)$ относительно формального сложения, а формула

$$(\delta^p f)(i_0, \ldots, i_{p+1}) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k r_W^{W_k}(f(i_0, \ldots, \hat{i}_k, \ldots, i_{p+1})),$$

$$W = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_{p+1}}, \quad W_k = U_{i_0} \cap \ldots \cap \hat{U}_{i_k} \cap \ldots \cap U_{i_{p+1}},$$

определяет гомоморфизм

$$\delta^p : C^p(\{U\}, S) \to C^{(p+1)}(\{U\}, S).$$

Легко проверить, что

$$\delta^{p+1}\delta^p = 0$$

и определены группы когомологий

$$H^p(\{U\}, S) = \operatorname{Ker}\delta^p/\operatorname{Im}\delta^{p-1}.$$

Эти группы зависят от покрытия $\{U\}$. Пусть покрытие $\{V\}$ вписано в покрытие $\{U\}$ (т. е. если $U_i \cap V_j \neq \varnothing$, то $V_j \subset U_i$). Как можно показать, это индуцирует гомоморфизм

$$H^p(\{U\}, S) \to H(\{V\}, S)$$

и, беря прямой предел групп $H^p(\{U\}, S)$ по отношению к этим гомоморфизмам, где $\{U\}$ пробегает все покрытия пространства X, получаем определение *групп когомологий $H^*(X, S)$ пространства X с коэффициентами в предпучке S*.

Группами когомологий $H^*(X, P)$ со значениями в пучке P называются группы когомологий со значениями в каноническом пучке $\{\Gamma(U, P), r_V^U\}$. Если X — паракомпактное пространство, группы когомологий со значениями в предпучках S, порождающих один и тот же пучок P, изоморфны группам $H^*(X, P)$.

Группа $H^0(X, P)$ по определению изоморфна группе глобальных сечений $\Gamma(X, P)$ пучка P.

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Для всякого пучка P над Y оно индуцирует пучок (расслоение) f^*P над X и определяет гомоморфизм групп когомологий

$$f^* : H(Y, P) \to H(X, f^*(P)).$$

Пучок P над паракомпактным пространством X называется *тонким*, если для любого локально конечного открытого покрытия $\{U_i\}$ пространства X существует семейство гомоморфизмов пучков $\{h_i : P \to P\}$, такое, что:

а) для всякого i найдется замкнутое множество A_i, такое, что $A_i \subset U_i$ и $h_i(S_x) = 0$ для $x \not\subset A_i$, где S_x — стебель в P над x;

б) $\sum\limits_i h_i(S_x) = \mathrm{Id}_P$.

Пример В.3. Пучок ростков непрерывных вещественных функций на X является тонким. Чтобы это показать, выберем в качестве h_i умножение на функции φ_i, составляющие разбиение единицы для пространства X. Аналогично устанавливается тонкость пучков ростков гладких функций и внешних дифференциальных p-форм на гладком многообразии X. □

Теорема В.1. Группы когомологий $H^p(X, P)$, $p > 0$, паракомпактного пространства X с коэффициентами в тонком пучке P равны нулю. □

Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{h} P_0 \xrightarrow{h^0} P_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_p \xrightarrow{h^p} \ldots \tag{B.6}$$

над паракомпактным пространством X. Эта последовательность называется *резольвентой пучка P*, если группы когомологий

$$H^q(X, P) = 0, \quad q > 0,$$

для всех q и p (например, когда все пучки P_p тонкие). Последовательность (В.6) определяет коцепной комплекс

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, P) \xrightarrow{h_*} \Gamma(X, P_0) \xrightarrow{h_*^0} \Gamma(X, P_1) \xrightarrow{h_*^1} \ldots \tag{B.7}$$

групп глобальных сечений пучков P, P_0, ..., который, вообще говоря, точен только в членах $\Gamma(X, P)$ и $\Gamma(X, P_0)$. Имеет место следующая важная теорема.

ТЕОРЕМА В.2. Рассмотрим резольвенту (В.6) пучка P над паракомпактным пространством X. Тогда q-я группа когомологий комплекса (В.7) изоморфна группе когомологий $H^q(X, P)$, т. е.

$$H^q(X, P) = \operatorname{Ker} h_*^q / \operatorname{Im} h_*^{q-1}, \quad q > 0, \quad H^0(X, P) = \operatorname{Ker} h_*^0.$$

□

Пусть, в частности, P — постоянный пучок с коэффициентами в $\mathbb{R}$ из Примера В.2 (будем обозначать его R), а P_q — пучки ростков внешних q-форм на гладком многообразии X. Рассмотрим последовательность

$$0 \xrightarrow{in} R \xrightarrow{in} P_0 \xrightarrow{d^*} P_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_p \xrightarrow{d^*} \ldots, \tag{В.8}$$

где d^* — гомоморфизм ростков q-форм, порождаемых внешним дифференцированием форм. Последовательность (В.8) точна, поскольку росток всякой замкнутой формы является и ростком некоторой точной формы. Так как все пучки P_p тонкие, то последовательность (В.8) является резольвентной для P. Она определяет комплекс де Рама

$$0 \xrightarrow{\text{in}} R \xrightarrow{\text{in}} \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \longrightarrow \ldots$$

внешних дифференциальных форм на X, и в силу предыдущей теоремы получаем изоморфизм

$$H^p(X) = H^p(X, \mathbb{R})$$

групп когомологий де Рама $H^p(X)$ и групп когомологий $H^p(X, \mathbb{R})$ гладкого многообразия X с коэффициентами в постоянном пучке R.

Библиография

[1] Атья М., Хитчин Н. *Геометрия и динамика магнитных монополей.* М., 1991.

[2] Березин Ф.А. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными.* М., 1983.

[3] Ботт Р., Ту Л. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии.* М., 1989.

[4] Бредон Г. *Теория пучков.* М., 1988.

[5] Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры.* М., 1968.

[6] Виноградов А., Красильщик И., Лычагин В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений.* М., 1986.

[7] Весс Ю., Беггер Дж. *Суперсимметрия и супергравитация.* М., 1986.

[8] Бурбаки Н. *Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов* М., 1975

[9] Даниэль Д., Виалле С. *Геометрический подход к калибровочным теориям типа Янга—Миллса,* УФН, т.136 (1982) с.377.

[10] Дольд А. *Лекции по алгебраической топологии.* М., 1976.

[11] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы теории гомологий.* М., 1984.

[12] Зуланке Р., Винтген П. *Дифференциальная геометрия и расслоения.* М., 1975.

[13] Иваненко Д., Пронин П., Сарданашвили Г. *Калибровочная теория гравитации.* М., 1985.

[14] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* т.1, М., 1981.

[15] Маклейн С. *Гомология.* М., 1966.

[16] Манин Ю.И. *Калибровочные поля и комплексная геометрия.* М., 1984.

[17] Милнор Дж., Сташеф Дж. *Характеристические классы.* М., 1979.

[18] Раджараман Р. *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.* М., 1985.

[19] Рохлин В.А., Фукс Д.Б. *Начальный курс топологии. Геометрические главы.* М., 1977.

[20] Уорнер Ф. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли.* М., 1987.

[21] Хирцебрух Ф. *Топологические методы в алгебраической геометрии.* М., 1973.

[22] Binz E., Sniatycki J. and Fisher H. *Geometry of classical fields* (North-Holland, Amsterdam, 1988).

[23] Cianci R. *Introduction to supermanifolds* (Bibliopolis, Napoli, 1990).

[24] Boya L., Cariñena J., J. Mateos. *Homotopy and solitons,* Fortschritte der Physik, v. 26 (1978) p. 175.

[25] Bryant R., Chern S., Gardner R., Goldschmidt H., Griffiths P. *Exterior differential systems* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).

[26] Coquereaux R. and Jadczyk A. *Riemannian geometry, fiber bundles, Kaluza—Klein theories and all that* (World Scientific, Singapore, 1998).

[27] Croom F. *Basic concepts of algebraic topology* (Springer–Verlag, Berlin, 1978).

[28] De Witt B. *Supermanifolds* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984).

[29] Eguchi T., Gilkey P. and Hanson A. *Gravitation, gauge theories and differential geometry*, Physics Reports, v. 66 (1980) p. 213.

[30] Greub W., Halperin S. and Vanstone R. *Connections, curvature and cohomology*, vol. I–III (Academic Press, N.-Y., 1972–1976).

[31] Hitchin N. *On the construction of monopoles*, Comm. Math. Physics, v. 89 (1983) p. 145.

[32] Kolař I., Michor P., Slovăk J. *Natural operations in differential geometry* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).

[33] Lopuszínski J. *An introduction to symmetry and supersymmetry in quantum field theory* (World Scientific, Singapore, 1991).

[34] Marathe K. and Martucci G. *The mathematical foundationes of gauge theories* (North-Holland, Amsterdam, 1992).

[35] Nash C. *Differential topology and quantum field theory* (Academic Press, N.-Y., 1991).

[36] Sardanashvily G. *Gauge theories in jet manifolds* (Hadronic Press, Palm Harbor, 1993).

[37] Sardanashvily G. *Generalized Hamiltonian formalism for field theory* (World Scientific, Singapore, 1995).

[38] Saunders D. *The geometry of jet bundles* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989).

[39] *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange*, ed. M.Francaviglia (Elseiver Science Publishers, 1991).

Предметный указатель

А

Аронова–Бома эффект 122
алгебра банахова 187
— Грассмана 185
— Клиффорда 167
— Ли левая 60
— — правая 64
алгебраическая структура 9
антисолитон 107
атлас ассоциированный 61
— главного расслоения 59
— голономный 25
— многообразия 15
— окружности стандартный 18
— расслоения 24
атласы эквивалентные многообразия 15
— — расслоения 24
аффинно-метрическая теория гравитации 206
аффинное пространство (см. пространство аффинное)
— расслоение (см. расслоение аффинное)

Б

база расслоения 14
— топологии (см. топологии база)
базис голономный 19, 30
Бетти число 118
бордизм 112

В

вакуум янг-миллсовский 155
— хиггсовский 155
вакуумное поле 106
— — калибровочное 121
вариационная производная 198
— формула 198
вариация с фиксированной границей 196
векторное поле 27
— — вариационное 196
— — вертикальное 42
— — неособое 27
— — полное 35
— — проектируемое 42, 194
— — фундаментальное 37, 78
вертикальное касательное расслоение 32
— кокасательное расслоение 34
— расщепление (см. расщепление вертикальное)
вложение 14, 20
вторая аксиома счетности 7

Г

Гамильтона оператор (см. оператор Гамильтона)
— уравнение (см. уравнение Гамильтона)
— функция 86
гамильтониан 82
— ассоциированный с лагранжианом 87
гамильтонова связность 82
гамильтоново векторное поле 86
гессиан 69
голономии группа 124
— — ограниченная 124
гомеоморфизм 9
гомологии относительные 130
— сингулярные 114, 116
— — проективных пространств 116
— — сфер 116
гомологий группа 111
гомоморфизм Гуревича 117
— предпучка 210
гомотопическая группа 101
— — высшая 101
— — относительная 103
— — n-мерная 101
— эквивалентность 100
— — слабая 102
гомотопически обратное отображение 100
— эквивалентные пространства 100
гомотопический класс 100
гомотопные отображения 99
горизонтальная плотность 44
— проекция 195
— форма (см. форма горизонтальная)
горизонтальное расслоение 33
— расщепление (см. расщепление горизонтальное)
горизонтальный лифт векторного поля 73
— — — — канонический 204
гравитационное поле 169
градуированная суперкоммутативная алгебра 183
градуированное векторное пространство 184

градуированный Λ-модуль 185
граница 111
— множества 8
— ориентированная 111
— относительная 129
— симплекса 114
— — сингулярного 114
грассманова оболочка 185
группа голономии связности (см. голономии группа)
— гомологий (см. гомологий группа)
— гомотопическая (см. гомотопическая группа)
— калибровочная (см. калибровочная группа)
— Клиффорда 168
— когомологий (см. когомологий группа)
— Ли 16
— — $SO(3)$ 17
— — $SU(2)$ 17
— — $U(1)$ 16
— Лоренца 168
— симметрий внутренних 75
— — точных 155, 157
— спинорная (см. спинорная группа)
— структурная (см. структурная группа расслоения)
— фундаментальная 101

Д

двойственность Пуанкаре 120
— де Рама 120
действие группы свободное 29
— — транзитивное 11
— — эффективное 11
диффеоморфизм 18
— локальный 20
дифференциал внешний (см. дифференцирование внешнее)
— ковариантный (см. ковариантный дифференциал)
— отображения (см. касательный морфизм)
— (F-N) 41
дифференциальное уравнение 52
дифференциальный оператор 52
дифференцирование вертикальное 195
— внешнее 39
— горизонтальное 195
— Ли (см. производная Ли)

З

закон сохранения 73
— — ковариантный 203
— — сильный 193
— — слабый 193
замыкание множества 8
заряд магнитный 160
— топологический 146

И

изоморфизм расслоений 27
— — главных (см. калибровочный изоморфизм)
иммерсия 20
инстантон 142
— БПШТ 150
интегральное сечение связности 57
инъекция 14

К

калибровка сингулярная 151
калибровочная группа 79
калибровочные преобразования 79
— условия 93
калибровочный изоморфизм 62
— потенциал 75
— принцип 74
Калуца–Клейна модель 175
— — многомерная 176
карта 15
касательное пространство 19
— расслоение 19, 25
касательный морфизм 19, 27
— — вертикальный 32
квантование магнитного заряда 161
— — потока 124
кватернионы 143
— вещественные 143
— мнимые 143
кинк 107
класс гомотопический (см. гомотопический класс)
— Понтрягина (см. Понтрягина класс)
— Тодда 138
— характеристический (см. характеристический класс)
— Чженя (см. Чженя класс)
— Чженя–Саймонса 147
— Штифеля–Уитни 142
— Эйлера (см. Эйлера класс)
— эквивалентности 10
классификационная теорема 133
классическое поле 68
— — вакуумное (см. вакуумное поле)
Клейна бутылка 112
клетка 103
клеточная аппроксимация 103
клеточное пространство 103
— разбиение 103
ковариантная производная 53
ковариантный дифференциал 57
ковекторное поле 30
когомологии де Рама 119
— относительные 129
— с коэффициентами в пучке 212
когомологий группа 118
когранница 118

— относительная 130
кокасательное расслоение 30
коммутант группы 117
компактификация локально компактного пространства 12
— прямой 13
комплекс де Рама 119
— коцепной 118
— цепной 111
компонента связности 10
конторсии тензор 171
конфигурационное пространство 69
— — гравитации 206
— — калибровочных потенциалов 75
— — материальных полей 77
— — поля Прока 96
координат система 16
координаты голономные 19
— канонические 81
— подчиненные вертикальному расщеплению 33
— производных (см. скоростей)
— расслоенные 23
— — аффинные 29
— скоростей 46
коцепь 118
— относительная 130
— с коэффициентами в пучке 211
коцикл 118
— относительный 130
кривизна связности 56
— припаивающей формы 57
кручение 117
— связности 57, 172

Л

лагранжева плотность (см. лагранжиан)
— связность 71
лагранжиан 68
— материальных полей 77
— невырожденный (см. регулярный)
— полурегулярный 89
— поля Прока 96
— регулярный 69
— Янга–Миллса 75
Лагранжа функция 69
лассо 126
Лежандра многообразие 80
— отображение 80
— расслоение 80
лепажев эквивалент лагранжиана 197
лепажева форма 197
лист Мебиуса 25

М

материальное поле 77
метрика (см. расстояния функция)
— Минковского 168
— на многообразии 31
— послойная 30
— псевдориманова 169
— риманова 166
многообразие 15
— Грассмана 17
— Лежандра (см. Лежандра многообразие)
— мировое 166
— ориентированное 22
— ориентируемое 22
— полисимплектическое (см. полисимплектическое многообразие)
— пространственно-временное 173
— струй (см. струй многообразие)
— топологическое 16
— Штифеля 18
множество замкнутое 7
— ограниченное 11
— открыто-замкнутое 8
— открытое 6
— плотное 8
мономорфизм расслоений 27
монополь магнитный 162
морфизм главных расслоений 62
— импульсный 83
— касательный (см. касательный морфизм)
— многообразий 18
— послойный 15, 27
— расслоений (см. послойный)
— топологических пространств (см. непрерывное отображение)
— тривиализации (см. тривиализации морфизм)
мультинстантон 152

Н

накрытие 105
напряженность калибровочного поля 66
неметричности тензор 171
непрерывное отображение 8
Нетер тождества 79, 201
нетеровский ток (см. ток симметрии)
нормализатор подгруппы 176
нормальный делитель (см. инвариантная подгруппа)
носитель 13

О

область 8
— тривиализации (см. тривиализации область)
ограниченное множество (см. множество ограниченное)
окрестностей фундаментальная система 5
окрестность 5
оператор Гамильтона 84
— Дирака 171
— Эйлера–Лагранжа 70
— — второго порядка 70

— — первого порядка 70
орбита группы 11
ориентация многообразия 22
отделимость Фреше 12
отношение 10
— эквивалентности 10
отображение Лежандра (см. Лежандра отображение)
— непрерывное (см. непрерывное отображение)
— открытое 23
— пары топологических пространств 103
— пространства с отмеченной точкой 101
отображения гомотопные (см. гомотопные отображения)

П

параллельный перенос 52, 53
погружение 20
подгруппа инвариантная 176
— циклическая 116
подмногообразие 20
— вложенное 20
подпространство топологического пространства 9
подрасслоение 27
полисимплектическая структура 81
— форма 81
полисимплектическое многообразие 81
полиэдр 113
полное семейство гамильтонианов 91
Понтрягина индекс 147
— класс 138
— — многообразия 140
— — полный 139
последовательность гомотопических групп пары 104
— — — расслоения 105
— групп гомологий пары 129
— — когомологий пары 130
— касательных расслоений 34
— кокасательных расслоений 34
— точная 34
почти комплексная структура 140
предел Прасада–Зоммерфельда 164
предпучок 209
— канонический 210
преобразование атласов расслоения 24
— нечетное 183
— общее ковариантное 205
— четное 183
принцип калибровочный (см. калибровочный принцип)
— расщепления 136
— эквивалентности 169
присоединенное представление 61
проективное пространство 17
проекция 14, 21
— стереографическая (см. стереографическая проекция)
произведение внешнее расслоений 29
— — форм 38
— прямое расслоений 28
— расслоений 29
— связностей (см. связностей произведение)
— тензорное абелевых групп 117
— топологических пространств 7
производная ковариантная (см. ковариантная производная)
— Ли 36
— — внешней формы 42
— — тангенциально-значной формы 42
— полная 72
Прока поле 96
пространство аффинное 29
— касательное (см. касательное пространство)
— классифицирующее 133
— клеточное (см. клеточное пространство)
— конфигурационное (см. конфигурационное пространство)
— метрическое 6
— Минковского 167
— проективное (см. проективное пространство)
— расслоенное (см. расслоенное пространство)
— с отмеченной точкой 101
— связей 87
— спинорное (см. спинорное пространство)
— топологическое (см. топологическое пространство)
— фазовое (см. фазовое пространство)
Пуанкаре лемма 119
путь накрывающий 53
пучок 209
— алгебр Ли 37
— внешних форм 38
— постоянный 210
— сечений 31
— тангенциально-значных форм 41
— тонкий 212

Р

разбиение гамильтониана каноническое 84
— единицы 13
— клеточное (см. клеточное пространство)
— множества 10
расслоение 24
— ассоциированное 58, 61
— аффинное 29
— векторное 29
— вертикальное касательное (см. вертикальное касательное расслоение)
— — кокасательное (см. вертикальное кокасательное расслоение)
— геометрическое 204
— главное 59

— — реперное 63, 167
— горизонтальное (см. горизонтальное расслоение)
— групповое 28, 61
— дифференцируемое 24
— дуальное 29
— индуцированное 28
— касательное (см. касательное расслоение)
— кокасательное (см. кокасательное расслоение)
— Лежандра (см. Лежандра расслоение)
— на алгебры Клиффорда 168
— на пространства Минковского 168
— обобщенное аффинное 29
— редуцированное 62
— связностей 65
— со структурной группой (см. структурная группа расслоения)
— сопряженное 64
— спинорное (см. спинорное расслоение)
— струй (см. струй расслоение)
— тензорное 30
— универсальное 133
расслоений изоморфизм (см. изоморфизм расслоений)
— мономорфизм (см. мономорфизм расслоений)
— морфизм (см. морфизм послойный)
— произведение (см. произведение прямое расслоений)
— — внешнее (см. произведение внешнее расслоений)
— — тензорное (см. произведение тензорное расслоений)
— свертка (см. свертка расслоений)
— сумма Уитни (см. сумма Уитни векторных расслоений)
расслоения эквивалентные 25
расслоенное многообразие 21
— — локально тривиальное 23
— — тривиальное 23
— пространство 14
расстояния функция 6
расщепление вертикальное 33
— — для аффинного расслоения 33
— — для векторного расслоения 33
— горизонтальное 54
— — каноническое 49
— — проектируемого векторного поля 50
— конфигурационного пространства 92
— локальное расслоенного многообразия 21, 23
— фазового пространства 93
редукция структурной группы (см. расслоение редуцированное)
резольвента пучка 212
росток функции 209
— элемента предпучка 209

С

свертка внешних форм и векторных полей 39
— расслоений 30
связностей произведение 55
— — тензорное 56
связность 53-55
— аффинная 55
— гамильтонова (см. гамильтонова связность)
— дуальная 56
— лагранжева (см. лагранжева связность)
— линейная 55
— — общая 171
— лоренцевская 171
— на ассоциированном расслоении 67
— — главном расслоении 64
— — расслоении связностей 67
— плоская 126
сечение 14, 21
— глобальное 14, 26
— голономное 48
— индуцированное 28
— интегральное (см. интегральное сечение связности)
— критическое 196
— локальное 26
сигнатура многообразия 120
симплекс сингулярный 114
— стандартный 113
система отсчета 170
скобки Ли 37
— (*F*-*N*) 41
слабое равенство 73
слой 14, 23
— типичный 23
солитон 106
— нетопологический 107
— топологический 106
спинорная группа 168
спинорное пространство 167
— расслоение 168
спиноры дираковские 167
— майорановские 191
стабилизатор элемента 110
стебель пучка 209
степень отображения 22
стереографическая проекция 9
струй многообразие 46
— — второго порядка 51
— — голономное 51
— — повторное 50
— — полуголономное 50
— — k-порядка 51
— — — повторное 52
— — — полуголономное 52
— пространство бесконечного порядка 194
— расслоение 46
струйное продолжение морфизма 47

— — сечения 48
структурная группа расслоения 58
струя сечений расслоения 45
субмерсия 21
сужение расслоения 28
сумму Уитни векторных расслоений 29
супералгебра Ли 184
— Пуанкаре 186
супергравитация 190
супергруппа Ли 190
— $L(4, 4)$ 190
— $OSp(4, 2; 1)$ 190
суперметрика 191
супермногообразие 189
суперпотенциал 193
— Комара 206
— — обобщенный 208
суперпространство 188
суперрасслоение главное 190
— касательное 189
суперфункция 188
— супердифференцируемая 188
сфера 8
сюръекция 14

Т

тензор конторсии (см. конторсии тензор)
— неметричности (см. неметричности тензор)
— энергии-импульса (см. энергии-импульса тензор)
тензорное поле 30
— расслоение (см. расслоение тензорное)
тензоры т'Хуфта 143
— антисамодуальные 143
— самодуальные 143
тетрадная форма 172
— функция 170
тетрадное поле 169
ток симметрии 73, 200
топологии база 7
— сравнимые 8
топологическая структура 5
топологическое пространство 5
— — векторное 9
— — вполне несвязное 10
— — дискретное 6
— — евклидово 7
— — компактное 12
— — локально евклидово 9
— — локально компактное 12
— — — — счетное в бесконечности 13
— — отделимое 11
— — паракомпактное 13
— — связное 8
— — стягиваемое 100
— — хаусдорфово (см. отделимое)
— — k-связное 102
топология индуцированная 9
— метрическая 6
— образа 9
— подчиненная структуре многообразия 15
— сильнее 8
— сильнейшая 8
— слабее 8
— слабейшая 8
точка бесконечно удаленная 12
— прикосновения 8
— предельная 12
точная последовательность (см. последовательность точная)
тривиализации морфизм 24, 25
— область 24

У

уравнение Богомольного 164
— Гамильтона 85
— — алгебраическое 85
— самодуальности 151
— Эйлера—Лагранжа алгебраическое 70, 71
— — второго порядка 70, 71
— — первого порядка 70, 71

Ф

фазовое пространство 80
— — калибровочных потенциалов 94
— — поля Прока 96
— — электромагнитных потенциалов 95
фактор по отношению (см. фактор-множество)
фактор-группа 11
фактор-множество 11
фактор-пространство 11
— левое 11
— правое 11
— топологическое 11
фермионное поле 169, 170
флаксон 122
форма векторнозначная 35
— вертикально-значная горизонтальная 43
— внешняя 35, 37
— — горизонтальная 43
— — замкнутая 39
— — точная 39
— — индуцированная 40
— горизонтальная 42
— Картана 197
— Киллинга 76
— контактная 195
— лепажева (см. лепажева форма)
— Лиувилля 43, 85
— — обобщенная 81
— полисимплектическая (см. полисимплектическая форма)
— припаивающая 43
— — каноническая 44

— производящая оператора Эйлера–Лагранжа 70
— Пуанкаре–Картана 69
— пфаффова (см. ковекторное поле)
— связности 65
— — локальная 65
— симплектическая 43, 85
— тангенциально-значная 35, 40
— — вертикальная 42
— — горизонтальная 43
— — каноническая 41
— — проектируемая 43
— характеристическая (см. характеристическая форма)
— Чженя (см. Чженя форма)
— Эйлера (см. Эйлера форма)
функция Гамильтона (см. Гамильтона функция)
— Лагранжа (см. Лагранжа функция)
— перехода 15, 24, 25
— эквивариантная 62

Х

характеристическая форма 135
характеристический класс 134
— полином 134
хиггсовское поле 63, 154

Ц

цепь 111
— относительная 129
— сингулярная 114
цикл 111
— относительный 129

Ч

четность элемента 184
Чженя класс 136
— — вещественного многообразия 140
— форма 135
— — полная 135
— характер 138
— число 137
число Бетти (см. Бетти число)
— Чженя (см. Чженя число)

Ш

шар замкнутый 8
— открытый 7

Э

Эйлера класс 141
— форма 142
эйлерова характеристика 118
— — многообразия 120
эквивалентности класс (см. класс эквивалентности)
— отношение (см. отношение эквивалентности)
эквивалентность гомотопическая (см. гомотопическая эквивалентность)
эквивалентные атласы (см. атласы эквивалентные)
— расслоения (см. расслоения эквивалентные)
электромагнитное поле 76
энергии-импульса тензор 73, 202
— — метрический 203

Я

ядро послойного морфизма 34
Якоби матрица 20
якобиан 22

Содержание

Введение 3

Глава 1. Дифференциальная геометрия 5

§1. Топологические пространства 5
§2. Многообразия 15
§3. Расслоенные многообразия 23
§4. Дифференциальные формы 35
§5. Многообразия струй 45
§6. Связности на расслоениях 52
§7. Расслоения со структурными группами 58

Глава 2. Геометрическая теория поля 68

§1. Лагранжев формализм 68
§2. Калибровочная теория 74
§3. Гамильтонов формализм 79
§4. Системы со связями 86
Калибровочные потенциалы (94). *Электромагнитное поле* (95). *Поле Прока* (96).

Глава 3. Топологические характеристики в теории поля 99

§1. Гомотопические группы 99
§2. Топологические солитоны 106
Модель кинков (107). *Модель синус-Гордона* (107). *Модель Нильсена—Олесена* (108). *Модель т'Хуфта—Полякова* (109).
§3. Гомологии и когомологии 110
Гомологии комплексов (110). *Сингулярные гомологии* (113). *Когомологии* (118).
§4. Эффект Ааронова—Бома 121
Вакуумные калибровочные поля (121). *Относительные гомологии и когомологии* (129).
§5. Характеристические классы расслоений 132
Классификационная теорема (132). *Классы Чженя* (134). *Классы Понтрягина* (138).
§6. Инстантоны 142
§7. Магнитные монополи 154
Электромагнитное поле в модели т'Хуфта—Полякова (158). *Магнитный заряд* (159). *Модель т'Хуфта—Полякова* (161). *Уравнение Богомольного* (163).

Глава 4. Геометрии пространства-времени **166**

§1. Гравитация 166
§2. Многомерная гравитация 175
§3. Супергравитация 183

Приложение А. Вариационное исчисление и законы сохранения **193**

Пространство струй бесконечного порядка (194). *Вариационное исчисление* (196). *Законы сохранения* (199). *Нетеровские законы сохранения* (200). *Законы сохранения энергии-импульса* (202). *Энергия-импульс калибровочных полей* (203). *Условие общей ковариантности* (204). *Энергия-импульс гравитационного поля* (206).

Приложение В. Когомологии со значениями в пучках **209**

Библиография **214**

Предметный указатель **216**

Г.А.Сарданашвили

ГЕОМЕТРИЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Современные методы теории поля. Т. 2

М.: УРСС, 1998. — 168 с.

Содержание

Введение 3

Предварительные сведения 8

Расслоения (9). Векторные расслоения (10). Аффинные расслоения (11). Касательные и кокасательные расслоения (11). Касательные и кокасательные расслоения к расслоениям (12). Векторные поля (13). Векторные поля на расслоении (14). Мультивекторные поля (16). (S-N)-скобки (16). Внешние формы (16). Внешние формы на расслоении (17). Производная Ли (18). Тангенциально-значные формы (18). Распределения (19). Слоения (20). Касательные и кокасательные расслоения к группам Ли (20). Главное реперное расслоение (22). Многообразия струй (23). Канонические горизонтальные расщепления (25). Многообразия струй второго порядка (25). Полная производная (26). Многообразия струй высшего порядка (26). Дифференциальные операторы и уравнения (27). Связности (27). Кривизна связности (28). Линейные связности (28). Аффинные связности (29). Плоские связности (29). Композиционные расслоения (30). Пучки (32).

Глава 1. Симплектическая механика **34**

§1. Структура Якоби 34

§2. Контактная структура 35

§3. Структура Пуассона 36

§4. Симплектическая структура 39

§5. Симплектические гамильтоновы системы 44

§6. Пресимплектические гамильтоновы системы 46

§7. Дираковские системы со связями 48

§8. Гамильтоновы системы с симметриями 54

§9. Обобщенные скобки Пуассона 56

§10. Мультисимплектическая структура 58

Глава 2. Лагранжева механика **61**

§1. Расслоения над R 61

§2. Уравнения движения 64

§3. Динамические связности 66

§4. Системы отсчета 72

§5. Лагранжевы системы 75

§6. Ньютоновы системы 82

§7. Лагранжевы законы сохранения 86

Глава 3. Неавтономная гамильтонова механика **90**

§1. Каноническая структура Пуассона 90

§2. Гамильтоновы связности и гамильтоновы формы 92

§3. Канонические преобразования 99
§4. Уравнение эволюции 103
§5. Вырожденные системы 103
§6. Квадратичные вырожденные системы 114
§7. Гамильтоновы законы сохранения 118
§8. Неконсервативные системы с симметриями 120
§9. Системы с зависящими от времени параметрами 124
§10. Единый лагранжево-гамильтонов формализм 130
Глава 4. БРСТ механика **133**
§1. Системы с флуктуациями 133
§2. Интуитивная БРСТ механика 139
§3. Механика на градуированных многообразиях 143
Глава 5. Релятивистская механика **148**
Библиография 157
Предметный указатель 161

Предметный указатель

А
автоморфизм расслоений, 10
алгебра Грассмана, 144
— Ли левая, 20
— — правая, 20
аннулятор распределения, 19
анти-БРСТ преобразования, 141
антидухи, 139
ассоциированное расслоение, 121
атлас локально постоянных тривиализаций, 29
— расслоения, 9
аффинная связность, 29
аффинное расслоение, 11
Б
база расслоения, 9
БРСТ преобразования, 141
В
вариационная последовательность, 84
вариационные производные, 77
вариационный оператор, 85
векторное поле, 13
— — левоинвариантное, 20
— — Лиувилля, 15
— — локальное, 14
— — — интегрируемое, 14
— — неособое, 13
— — правоинвариантное, 20
— — проектируемое, 15
— — Риба, 36
— расслоение, 10 векторные суперполя, 146
вертикальное векторное поле, 15
— касательное расслоение, 12
— кокасательное расслоение, 13
вертикальный касательный морфизм, 12
— ковариантный дифференциал, 31
— лифт векторного поля, 15
— эндоморфизм, 63
взаимно инерциальные системы отсчета, 74, 123
вложенное подмногообразие, 20
внешнее произведение, 10
— расслоение, 145
внешняя алгебра, 16, 144
— форма, 16
вполне интегрируемая гамильтонова система, 45
Г
гамильтон-дираковская система, 49
гамильтониан, 45, 94
— релятивистский, 155
гамильтонова система, 45

— форма ассоциированная с лагранжианом, 104
— —, БРСТ расширение, 141
— —, вертикальное расширение, 135
— — ограниченная, 112
гамильтоново векторное поле, 38
— — — относительно пресимплектической формы, 46
— — — — симплектической формы, 42
— отображение, 94
генератор локальной 1 - параметрической группы диффеоморфизмов, 14 генераторы представления, 21
гессиан, 77
гиперболоид скоростей, 153
главное расслоение, 120
голономное сечение, 24
голономные автоморфизмы, 23
— координаты, 11
голономный атлас, 11
— корепер, 11
— репер, 11
горизонтальная плотность, 17
— форма, 17
горизонтальное векторное поле, 63
— распределение, 29
— слоение, 29
горизонтальный внешний дифференциал, 85
— лифт векторного поля, 28
градуированная коммутативная алгебра, 144
— — — банахова, 144
— оболочка, 145
градуированное векторное пространство, 144
— дифференцирование, 146
— многообразие, 145
градуированной коммутативности условие, 144
градуированный модуль, 145
Д
движение, 65
динамическое векторное поле, 65
дираковская система, 51
— — полная, 53
дифференциальное уравнение, 27
дифференциальный идеал, 19
— оператор, 27
дуальная связность, 28
дуальное векторное расслоение, 10
духи, 139
З
закон движения, 65
— Ньютона второй, 75
— — первый, 75
— сохранения, 87
— — нетеровский, 87
И
изоморфизм расслоений, 10
изотропное подмногообразие, 43
импульсное отображение, 54
— — эквивариантное, 55
инволютивное распределение, 19
индуцированная форма, 17
индуцированное расслоение, 10
инерциальное преобразование, 123
инерциальные преобразования, 74
интеграл движения в неавтономной механике, 87
— — нетеровский, 87
— Пуанкаре—Картана, 94
интегралы движения в инволюции, 45
интегральная кривая, 14
интегральное многообразие максимальное, 19
— — максимальной размерности, 19
— — распределения, 19
— сечение, 28
интегрируемая гамильтон-дираковская система, 50
интегрируемые распределения, 19
К
калибровочные преобразования, 121

— условия, 117
каноническая 3-форма, 92
— —, БРСТ расширение, 142
— —, вертикальное расширение, 134
— —, струйное расширение, 130
— симплектическая форма, 41
— тангенциально-значная форма, 18
— форма Лиувилля, 41
— — на реперном расслоении, 23
канонические когомологии, 58
— координатные преобразования, 100
— координаты,39, 100
— преобразования активные, 100
— — пассивные, 100
канонический автоморфизм, 100
— лифт векторного поля, 15
каноническое горизонтальное расщепление, 25
касательное расслоение, 11
касательный морфизм, 11
ковариантный дифференциал, 28
когомологии группы, 56
когранича на группе, 55
кодифференциальный оператор, 57
коизотропное подмногообразие, 43
кокасательное расслоение, 11
композиционное расслоение, 30
контактная форма, 24, 35
контактное многообразие, 35
конфигурационное пространство, 5
— — вертикальное, 133
— — релятивистской механики, 152
координаты Дарбу, 36
—, сопутствующие системе отсчета, 73
коприсоединенное представление, 21
косимплектическая структура, 40
коцикл на группе, 55
—, отвечающий действию группы, 56
кривизна связности, 28
кручение динамической связности, 69
Л
лагранжева связность, 79
лагранжево подмногообразие, 43
лагранжиан, 76
— вертикальное расширение, 137
— вполне регулярный, 111
— гиперрегулярный, 78
— квадратичный, 114
— полурегулярный, 107
— регулярный (невырожденный), 77
линейная производная, 11
— связность, 28
локальная 1-параметрическая группа локальных диффеоморфизмов, 14
локально гамильтоново векторное поле, 42
М
Маурера—Картана уравнение, 22
метрика Минковского, 153
многогамильтонова система, 110
многообразие струй, 23
— — второго порядка, 26
— — высшего порядка, 26
— — повторное, 25
— — подмногообразий, 148
— — полуголономное, 25
мономорфизм расслоений, 10
мультивекторное поле, 16
мультисимплектическая форма, 59
мультискобка, 59
Н
нетеровский ток, 87
ньютонова система, 84
О
обратная задача, 84
общие ковариантные преобразования, 23
ограничение внешней формы на подмногообразие, 17
однородный элемент, 144
оператор Гамильтона, 97
— типа Эйлера—Лагранжа, 84
— Эйлера—Лагранжа, 77
— Эйлера—Лагранжа—Картана, 80
осциллятор Берри, 130

относительная скорость, 72
относительное ядро симплектической формы, 42
отображение гамильтоново, 94
— Гельмгольца—Сонина, 85
— Лежандра, 77
— Пуанкаре—Картана, 81
— Эйлера—Лагранжа, 85
П
первый интеграл движения, 45
плоская связность, 29
плотность энергии, 87
поднятие внешней формы, 17
— функции,17
подрасслоение, 10
поле параметров, 124
— Якоби, 136
полисимплектическая форма, 60
полная производная, 24, 26
— связность, 64
— система отсчета, 73
полное векторное поле, 14
— семейство гамильтоновых форм, 110
послойные координаты, 9
послойный морфизм, 9
правило Лейбница, 37
предпучок, 32
— канонический, 33
пресвязность, 150
пресимплектическая гамильтонова система, 46
— — — внешняя, 47
— — — внутренняя, 47
— форма, 40
принцип относительности Галилея, 74
припаивающая форма, 28
присоединенное представление, 21
проекция, 9
произведение расслоений, 10
производная Ли, 18
производящая функция, 102
пространство связей, 48
— — вторичных, 52
— — лагранжевых, 104
— — первичных, 48
— — финальных, 53
— событий в нерелятивистской механике, 5
— — вертикальное, 133
прямое произведение структур Пуассона, 38
пуассонов морфизм, 37
пуассоново бивекторное поле, 35
— многообразие, 37 пучок, 32
— постоянный, 33
— ростков непрерывных функций, 33
Р
ранг 2-формы в точке, 39
распределение, 19
расслоение, 9
— Лежандра, 60
— — однородное, 59
— параметров, 124
— реперное, 22
решение дифференциального уравнения, 27
росток многообразия, 43
С
свертка, 17
— векторных расслоений, 10
связи, 48
— вторичные, 49
— второго рода, 52
— первичные, 51
— первого рода, 52
— третичные, 49
— финальные, 53
связность, 27
— Берри, 130
— гамильтонова, 97
— динамическая, 67
— — симметричная, 68
— композиционная, 31
— локально гамильтонова, 92
сечение, 9
— локальное, 9

сила, 75
— инерции, 75
— физическая, 75
симплектическая гамильтонова система, 45
— форма, 40
— — R^n-значная, 60
— — релятивистская, 154
симплектическое действие группы, 54
— многообразие, 40
— подмногообразие, 43
— слоение, 38
симплектоморфизм, 40
система лагранжева, 75
— отсчета в нерелятивистской механике, 72
— — инерциальная абсолютная, 75
— — сопутствующая, 74
— связей полная, 49
скобки Schouten—Nijenhuis, 16
— Ли векторных полей, 13
— Пуассона, 37
— Якоби, 34
скорость нерелятивистская, 151
— релятивистская, 153
слабое тождество, 86
слоение, 20
— поверхностей уровня, 20
— сингулярное, 20
сопряженное пространство алгебры Ли, 21
стандартная 1-форма, 5
стандартное векторное поле, 5
стебель пучка, 32
струйное продолжение векторного поля, 24
— — морфизма, 24
— — сечения, 24
структура Пуассона, 37
— — невырожденная, 37
— — нулевая, 37
— — регулярная, 37
— Якоби, 34
структурная группа, 120
струя сечений, 23
сужение расслоения, 10
сумма Уитни векторных расслоений, 10
супермногообразие, 145
суперпространство векторное, 145
суперформа, 147
суперфункция, 146
Т
тензор масс, 83
тензорное произведение векторных расслоений, 10
типичный слой, 9
тождество Якоби, 34
ток, 86
У
уравнение геодезических, 71
— движения, 65
— динамическое, 65
— свободного движения, 66
— эволюции, 45, 103
уравнения Гамильтона, 45, 97
— — ограниченные, 112
— Гамильтона—де Дондера, 81
— движения первого порядка, 98
— Картана, 80
— равновесия, 101
— Эйлера—Лагранжа, 77
Ф
фазовое пространство вертикальное, 133
— — нерелятивистской неавтономной механики, 5
— — релятивистской механики, 154
форма гамильтонова, 94
— — локально, 93
— де Дондера, 81
— левоинвариантная, 21
— — каноническая, 22
— правоинвариантная, 21
— — каноническая, 22
— Пуанкаре—Картана, 76
— тангенциально-значная, 18

функции перехода, 9 функция Гамильтона, 94
— Казимира, 37
— Лагранжа, 76
Х
характеристическое распределение, 38
— слоение, 38
Ч
четный сектор, 144
Я
ядро внешней формы, 39

Введение

Настоящая книга является своего рода приложением общего геометрического аппарата классической теории поля к теоретической механике. Приходится констатировать, что в конце XX века мы все еще не имеем строгих математических основ неавтономной и релятивистской механик, в отличие от симплектической механики консервативных систем. Такие основные понятия механики, как сила, система отсчета, энергия и др. нуждаются в математической формализации.

Мы ограничимся здесь случаем механических систем первого порядка, описываемых уравнениями движения второго порядка по координатам и уравнениями движения первого порядка по координатам и импульсам.

Как известно, гамильтонова механика консервативных систем, когда гамильтонианы не зависят явно от времени, адекватно формулируется в терминах симплектических многообразий [1, 12, 46, 71]. Стандартным примером служит механическая система, пространством событий которой является многообразие M, а фазовым пространством — кокасательное расслоение T^*M к M. Последнее наделено канонической симплектической формой

$$\Omega = dp_i \wedge dy^i, \tag{B.1}$$

записанной в голономных координатах $(y^i, p_i = \dot{y}_i)$ на T^*M. Гамильтониан системы $\mathscr{H}$ представляет собой вещественную функцию на T^*M, а траекториями движения являются интегральные кривые гамильтонова векторного поля

$$\vartheta = \vartheta_i \partial^i + \vartheta^i \partial_i$$

на T^*M, которые удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\begin{aligned} \vartheta \rfloor \Omega &= -d\mathscr{H}, \\ \vartheta^i = \partial^i \mathscr{H}, &\quad \vartheta_i = -\partial_i \mathscr{H}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Такая формулировка, однако, не допускает прямой экстраполяции на неавтономную и релятивистскую механики, поскольку симплектическая форма (B.1) не инвариантна относительно зависящих от времени преобразований, включая переходы между взаимно инерциальными системами отсчета. Поэтому для описания неконсервативных систем обычно используют лагранжев формализм. Однако лагранжев и гамильтонов формализмы в общем случае неэквивалентны как с физической, так и с математической точек зрения.

Например, в классической механике наблюдаемыми величинами являются скорости, а не импульсы, тогда как в квантовой механике наоборот — именно импульсы, а не скорости. В гамильтоновой механике нет понятия силы.

В математическом аспекте лагранжева и гамильтонова формулировки механики эквивалентны только для гиперрегулярных лагранжианов, когда преобразование Лежандра от скоростей к импульсам является диффеоморфизмом конфигурационного и фазового

пространств. В случае вырожденного лагранжиана необходимо рассмотреть, как правило, семейство гамильтонианов и уравнений Гамильтона, чтобы воспроизвести решения уравнений Лагранжа.

В качестве пространства событий в неавтономной механике обычно выбирается произведение

$$Y = \mathbb{R} \times M, \tag{B.3}$$

где M — некоторое многообразие, а вещественной прямой $\mathbb{R}$ придается смысл оси времени. Такому пространству событий соответствует конфигурационное пространство

$$\mathbb{R} \times TM \tag{B.4}$$

и фазовое пространство

$$\mathbb{R} \times T^*M, \tag{B.5}$$

где TM и T^*M обозначают соответственно касательное и кокасательное расслоения к многообразию M [17, 24, 30, 44, 53].

Замечание B.1. Отметим различия в терминологии, встречающиеся в литературе. Часто конфигурационным пространством называют именно пространство координат механической системы Y. □

С физической точки зрения выбор прямого произведения (B.3) в качестве пространства событий означает фиксацию абсолютной инерциальной системы отсчета. При этом фазовое пространство (B.5) наделяется пресимплектической формой

$$\mathrm{pr}_2^* \Omega = dp_i \wedge dy^i, \tag{B.6}$$

индуцированной на нем канонической симплектической формой Ω (B.1) на T^*M [22]. Зависящий от времени гамильтониан $\mathscr{H}$ представляется вещественной функцией на $\mathbb{R} \times T^*M$, а траекториями движения являются интегральные кривые временезависимого гамильтонова векторного поля

$$\vartheta : \mathbb{R} \times T^*M \to TT^*M,$$

удовлетворяющего уравнениям Гамильтона типа (B.2).

Проблема заключается в том, что расщепления (B.3)–(B.5) нарушаются при временезависимых преобразованиях, а форма (B.6) на фазовом пространстве неавтономной механики не является канонической и тоже не сохраняется при таких преобразованиях.

Наш подход состоит в том, чтобы описать неавтономную механику как частный случай классической теории поля на расслоениях над 1-мерной базой $\mathbb{R}$ [17, 23, 33, 64, 65]. Это и послужило поводом включить книгу по механике в серию "Современные методы теории поля".

Геометрический аппарат классической теории поля хорошо разработан. Ему посвящен первый том настоящей серии [8] (см. также [17, 33, 65]). Этот аппарат основан на представлении классических полей сечениями расслоенных многообразий $Y \to X$. Конфигурационным пространством полей в таком подходе является конечномерное многообразие струй J^1Y сечений $s : X \hookrightarrow Y$. На нем строится лагранжев формализм классической теории поля. Его гамильтоновым партнером является полисимплектический гамильтонов формализм на расслоении Лежандра

$$\Pi = VY \otimes \Big(\bigwedge^{n-1} T^*X\Big), \quad n = \dim X,$$

когда канонические импульсы соответствуют производным полевых функций по всем пространственно-временным координатам.

Частный случай $X = \mathbb{R}$ геометрической теории поля приводит нас к формулировке неавтономной механики на расслоенном многообразии

$$\pi : Y \to \mathbb{R} \tag{B.7}$$

с координатами (t, y^i), которое имеет смысл *пространства событий* в нерелятивистской механике.

Замечание B.2. В нерелятивистской механике база $\mathbb{R}$ — ось абсолютного времени, параметризуемая координатой t с функциями перехода $t' = t + \text{const}$. При такой параметризации $\mathbb{R}$ наделяется *стандартным векторным полем* ∂_t и *стандартной 1-формой* dt. Последняя является также элементом объема на $\mathbb{R}$. □

Конфигурационным пространством нерелятивистской неавтономной механики в таком подходе служит многообразие струй J^1Y сечений расслоения (B.7), параметризуемое координатами (t, y^i, y^i_t). Имеет место каноническое вложение

$$\lambda : J^1Y \underset{Y}{\hookrightarrow} TY, \tag{B.8}$$
$$\lambda = \partial_t + y^i_t \partial_i,$$

этого конфигурационного пространства в касательное расслоение TY к Y. Мы будем отождествлять J^1Y с его образом в TY. Это существенно упрощает многие конструкции, а также ведет к важным физическим следствиям. В частности, именно вложение (B.8) позволяет трактовать многообразие струй J^1Y как конфигурационное пространство.

Фазовым пространством нерелятивистской неавтономной механики является расслоение Лежандра $\Pi = V^*Y$ — вертикальное кокасательное расслоение к пространству событий $Y \to \mathbb{R}$ с голономными координатами $(t, y^i, p_i = \dot{y}_i)$. Оно наделено канонической 3-формой

$$\Omega = dp_i \wedge dy^i \wedge dt, \tag{B.9}$$

которая представляет собой частный случай для $X = \mathbb{R}$ канонической полисимплектической формы [8, 33]. Она инвариантна относительно произвольных автоморфизмов расслоенного многообразия $Y \to \mathbb{R}$ и индуцированных ими голономных преобразований фазового пространства V^*Y.

В неавтономной гамильтоновой механике каноническая 3-форма Ω играет ту же роль, что каноническая симплектическая форма (B.1) в симплектической механике. **Форма (B.9) задает каноническую структуру Пуассона на фазовом пространстве неавтономной механики и приводит к ее гамильтоновой формулировке в терминах гамильтоновых связностей и гамильтоновых форм.** Эта формулировка согласуется с лагранжевым формализмом неавтономной механики и эквивалентна ему в случае гиперрегулярных лагранжианов.

Одна из главных особенностей гамильтоновой неавтономной механики, в сравнении с механикой консервативных систем, состоит в том, что гамильтониан как геометрический объект на фазовом пространстве неавтономной механики не является функцией. К нему не применима операция скобок Пуассона. Поэтому, в частности, уравнение эволюции в неавтономной механике не сводится к скобкам Пуассона, а интегралы движения не могут быть определены как функции на фазовом пространстве, находящиеся

в инволюции с гамильтонианом. По этой же причине в неавтономной механике не применима и известная процедура описания систем со связями, использующая скобки Пуассона гамильтониана с уравнениями связи.

В книге уделяется особое внимание вырожденным лагранжевым системам и гамильтоновым системам со связями. Однако мы ограничиваемся рассмотрением лагранжевых связей, когда пространством первичных связей является образ конфигурационного пространства в фазовом пространстве при переходе от скоростей к импульсам. Именно такие связи возникают в моделях с вырожденными лагранжианами. Специфика этих моделей состоит в том, что такому лагранжиану, как правило, соответствует не один, как в регулярном случае, а некоторое семейство гамильтонианов. Таким образом, это своего рода многогамильтоновы системы.

В дальнейшем ради простоты мы будем предполагать, что пространство событий $Y \to \mathbb{R}$ является расслоением с типичным слоем M. Тогда оно тривиально. При этом разные тривиализации

$$Y \cong \mathbb{R} \times M \tag{B.10}$$

отличаются друг от друга проекциями $Y \to M$, тогда как проекция $Y \to \mathbb{R}$ в нерелятивистской механике всегда остается одной и той же. При заданной тривиализации пространства событий (B.10), имеют место соответствующие тривиализации конфигурационного и фазового пространств

$$J^1Y \cong \mathbb{R} \times TM,$$
$$V^*Y \cong \mathbb{R} \times T^*M.$$

С физической точки зрения, тривиализация пространства событий (B.10) определенным образом отделяет время от других параметров механической системы и описывает некоторую систему отсчету в нерелятивистской механике. Таким образом, следуя геометрическим методам теории поля и в отличие от принятого до сих пор подхода, **мы формулируем механику в произвольной системе отсчета, не предполагая существования абсолютного пространства и абсолютной инерциальной системы отсчета.** Мы покажем, что всякая тривиализация пространства событий (B.10) отвечает некоторой полной связности

$$\Gamma : Y \to J^1Y \subset TY$$

на расслоении $Y \to \mathbb{R}$, которая, благодаря каноническому вложению (B.8), задает поле скоростей

$$\Gamma = \partial_t + \Gamma^i \partial_i$$

"наблюдателя" на пространстве событий Y. В результате развиваемая в рамках геометрического подхода формулировка механики оказывается ковариантной относительно преобразований систем отсчета. Это важно для анализа различных явлений, связанных с системами отсчета — сил инерции, закона сохранения энергии и др. По аналогии с калибровочной теорией поля, можно говорить о своего рода калибровочной механике.

Несмотря на общность описания в терминах расслоений, имеет место принципиальное отличие механики от теории поля, которое состоит в том, что, поскольку база расслоения $Y \to \mathbb{R}$ одномерна, кривизна связностей на нем всегда тождественно равна 0, и эти связности, в отличие от калибровочных потенциалов в теории поля, не являются динамическими объектами. Для них нельзя построить, говоря языком теории поля, калибровочно инвариантный лагранжиан. Поэтому лагранжианы в механике не инвариантны, а только ковариантны относительно временезависимых преобразований, если даже это преобразования между взаимно инерциальными системами отсчета.

Кстати, именно это обстоятельство позволяет сформулировать понятие взаимно инерциальных систем отсчета, которое не является абсолютным, а зависит от механической системы и ее лагранжиана.

Отметим, что связности играют ключевую роль в формулировке неавтономной механики. Связности на $Y \to \mathbb{R}$ описывают, как уже отмечалось, системы отсчета. Всякая голономная связность на расслоении $J^1Y \to \mathbb{R}$ задает уравнение движения второго порядка; ему отвечает динамическая связность на расслоении струй $J^1Y \to Y$. Интегральные кривые гамильтоновых связностей на расслоении Лежандра $V^*Y \to \mathbb{R}$ являются траекториями движения механической системы в фазовом пространстве.

В отличие от нерелятивистского случая, в релятивистской механике не предполагается какой-либо выделенной проекции пространства событий Z на ось времени $\mathbb{R}$. Допускаются преобразования временной координаты, произвольно (а не только по лоренцевскому закону) зависящие от других координат системы. Конфигурационным пространством такой механической системы является многообразие струй J^1_1Z одномерных подмногообразий многообразия событий Z [4, 33]. Это обобщает используемое в нерелятивистской механике понятие струй сечений расслоения. Расслоение струй $J^1_1Z \to Z$ оказывается проективным расслоением, и мы приходим к общей формулировке релятивистской механики, частным случаем которой является специальная теория относительности на пространстве событий $Z = \mathbb{R}^4$. При этом конфигурационное пространство J^1_1Z релятивистской механики приобретает смысл пространства нерелятивистских скоростей, а касательное расслоение TZ к пространству событий — пространства релятивистских скоростей, наделенного псевдоримановой метрикой.

Книга содержит ряд дополнительных разделов (обобщения скобок Пуассона, мультисимплектические структуры, БРСТ механика и др.), чтобы познакомить российского читателя с наиболее современными математическими методами в теоретической механике.

В книге используется математический аппарат, в достаточной мере изложенный в первом томе серии [8] (см. также [33, 42, 63, 67]). Его основные положения, а также ряд дополнительных вопросов кратко обсуждаются в Предварительных сведениях.

В книге, если специально не оговорено, мы придерживаемся системы единиц (назовем ее абсолютной), в которой все величины считаются физически безразмерными. Однако при переходе к физическим моделям в ряде случаев используется универсальная система единиц, в которой скорость света c и постоянная Планка $\hbar$ приравниваются единице, а единицей длины является планковская длина

$$\left(G\hbar c^{-3}\right)^{1/2} = G^{1/2} = 1,616 \cdot 10^{-33}\text{см},$$

где G — ньютоновская гравитационная постоянная. В универсальной системе единиц декартовы координаты пространства и времени по определению имеют физическую размерность длины, а функционал действия и компоненты метрического тензора безразмерны. Переход от фундаментальной к универсальной системе единиц осуществляется делением или умножением тех или иных величин на фундаментальную длину, а также введением массы, имеющей размерность [длина]$^{-1}$.

Предварительные сведения

Данная глава включает следующие разделы, расположенные в соответствии с логикой изложения материала.

Расслоения 9
Векторные расслоения 11
Аффинные расслоения 11
Касательные и кокасательные расслоения 11
Касательные и кокасательные расслоения к расслоениям . 13
Векторные поля 13
Векторные поля на расслоении 15
Мультивекторные поля 17
(S-N)-скобки 17
Внешние формы 17
Внешние формы на расслоении 17
Производная Ли 19
Тангенциально-значные формы 19
Распределения 19
Слоения 21
Касательные и кокасательные расслоения к группам Ли . 21
Главное реперное расслоение 23
Многообразия струй 23
Канонические горизонтальные расщепления 25
Многообразия струй второго порядка 25
Полная производная 27
Многообразия струй высшего порядка 27
Дифференциальные операторы и уравнения 27
Связности 27
Кривизна связности 29
Линейные связности 29
Аффинные связности 29
Плоские связности 29
Композиционные расслоения 31
Пучки 33

Все отображения, как обычно, предполагаются гладкими, а многообразия — конечномерными, отделимыми, локально компактными, паракомпактными и, если специально не оговорено, связными.

Мы используем стандартные обозначения $\oplus$, $\otimes$, $\vee$ и $\wedge$ соответственно для прямой суммы, тензорного произведения, симметризованного тензорного произведения и антисимметризованного тензорного (внешнего) произведения. Значком $\lrcorner$ обозначается операция свертки дуальных величин — векторов и форм.

Символы ∂_B^A применяются для упрощенной записи операторов частных производных по координатам с индексами $\frac{B}{A}$.

Композиция отображений обозначается значком $\circ$.

Расслоения

Расслоением называется проекция

$$\pi : Y \to X \tag{П.1}$$

многообразия Y на n-мерное многообразие X. Под *проекцией* π понимается сюръекция и субмерсия, т. е. отображение, касательный к которому морфизм $T\pi$ — сюръекция. По определению расслоение (П.1) допускает открытое покрытие $\{U_\xi\}$ *базы* X такое, что многообразие Y выглядит как бы склеенным из тривиальных расслоений

$$\psi_\xi : \pi^{-1}(U_\xi) \to U_\xi \times V$$

с одним и тем же *типичным слоем* V посредством *функций перехода*

$$\rho_{\xi\zeta} : (U_\xi \cap U_\zeta) \times V \to (U_\xi \cap U_\zeta) \times V,$$
$$\psi_\xi(y) = (\rho_{\xi\zeta} \circ \psi_\zeta)(y), \quad y \in \pi^{-1}(U_\xi \cap U_\zeta).$$

Пары областей и морфизмов тривиализации (U_ξ, ψ_ξ) составляют *атлас расслоения* $\Psi = \{U_\xi, \psi_\xi, \rho_{\xi\zeta}\}$. При данном атласе Ψ расслоение Y наделяется атласом ассоциированных *послойных координат* (x^λ, y^i), где

$$x^\lambda(y) = (x^\lambda \circ \pi)(y), \quad y \in Y,$$

— координаты базы X, а

$$y^i(y) = (y^i \circ \mathrm{pr}_2 \circ \psi_\xi)(y)$$

— координаты типичного слоя V.

Говорят, что расслоение $Y \to X$ тривиально, если оно диффеоморфно произведению $X \times V$. Разные тривиализации одного и того же расслоения отличаются друг от друга проекциями Y на его типичный слой V. Всякое расслоение над стягиваемой базой тривиально.

Сечением расслоения (П.1) называется вложение $s : X \hookrightarrow Y$ такое, что $\pi \circ s = \mathrm{id}\, X$. Аналогично, *локальным сечением* s расслоения $Y \to X$ на подмногообразии $N \subset X$ называется отображение $s : N \hookrightarrow Y$ такое, что $\pi \circ s = \mathrm{id}\, N$. Если область определения локального сечения не упоминается, подразумевается, что оно задано на некотором открытом подмножестве базы расслоения. Расслоение по определению имеет локальное сечение на некоторой открытой окрестности всякой точки $x \in X$. Расслоение, типичный слой которого диффеоморфен $\mathbb{R}^m$, всегда имеет глобальное сечение, и всякое его локальное сечение на замкнутом подмногообразии базы X продолжается до глобального сечения.

В качестве морфизмов расслоений рассматриваются *послойные морфизмы*, т. е. такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Phi} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array} \tag{П.2}$$

коммутативна. Послойный морфизм (П.2) над $f = \mathrm{id}\, X$ называется морфизмом над X. Говорят, что (П.2) — послойный морфизм над f. Он обозначается $\underset{f}{\longrightarrow}$. Если послойный морфизм (П.2) — погружение, то его образ является подмногообразием в Y' и называется *подрасслоением* расслоения $Y' \to X$. Послойное вложение часто называют *мономорфизмом* расслоений, а послойный диффеоморфизм — *изоморфизмом* или, если это диффеоморфизм на себя, *автоморфизмом* расслоений.

Если дано расслоение $\pi' : Y' \to X'$, всякий морфизм $f : X \to X'$ порождает *индуцированное расслоение* f^*Y' над X, образованное всевозможными парами

$$\{(y', x) \in Y' \times X \,:\, \pi'(y') = f(x)\}$$

с естественной проекцией $(y', x) \mapsto x$. Другими словами, слоем индуцированного расслоения f^*Y' над точкой $x \in X$ является слой расслоения Y' над точкой $f(x) \in X'$. Если $X \subset X'$ является подмногообразием в X' и i_X — его естественное погружение, то индуцированное расслоение

$$i_X^* Y' = Y'\big|_X$$

называется *сужением расслоения* Y' на $X \subset X'$.

Произведение расслоений $\pi : Y \to X$ и $\pi' : Y' \to X$ над одной и той же базой X определяется как индуцированное расслоение

$$Y \underset{X}{\times} Y' = \pi^* Y' \to Y \quad \text{или} \quad Y \underset{X}{\times} Y' = \pi'^* Y \to Y'$$

с естественной проекцией на X.

Векторные расслоения

Векторным называется расслоение $Y \to X$, слои и типичный слой которого являются векторными пространствами, и которое наделено атласом линейных послойных координат. Приведем основные операции с векторными расслоениями над одной и той же базой:

- *дуальное* к Y векторное расслоение Y^* с типичным слоем V^*, дуальным типичному слою V векторного расслоения Y;
- *сумма Уитни* $Y \oplus Y'$ векторных расслоений Y и Y' с типичным слоем $V \oplus V'$ — прямой суммой типичных слоев расслоений Y и Y';
- *тензорное произведение* $Y \otimes Y'$ векторных расслоений Y и Y' с типичным слоем $V \otimes V'$ — тензорным произведением типичных слоев расслоений Y и Y';
- *внешнее произведение* $\bigwedge^r Y = Y \wedge \cdots \wedge Y$ расслоения Y с типичным слоем — внешним произведением $\bigwedge^r V$ типичного слоя V расслоения Y;
- *свертка* $\lrcorner : Y \otimes Y^* \underset{X}{\longrightarrow} X \times \mathbb{R}$.

Аффинные расслоения

Аффинным называется расслоение $Y \to X$, слои и типичный слой которого являются аффинными пространствами, и которое наделено атласом аффинных послойных координат (x^λ, y^i). Говорят, что аффинное расслоение моделируется над векторным расслоением $\overline{Y} \to X$, если заданы послойные морфизмы

$$Y \underset{X}{\times} \overline{Y} \underset{X}{\longrightarrow} Y, \qquad (y^i, \overline{y}^i) \mapsto y^i + \overline{y}^i,$$
$$Y \underset{X}{\times} Y \underset{X}{\longrightarrow} \overline{Y}, \qquad (y^i, y'^i) \mapsto y^i - y'^i,$$

где $(\overline{y}^i)$ — линейные послойные координаты на векторном расслоении $\overline{Y}$. В частности, всякое векторное расслоение Y имеет каноническую структуру аффинного расслоения. Аффинное расслоение, как и векторное, всегда обладает глобальным сечением.

Всякий морфизм $\Phi : Y \to Y'$ аффинных расслоений, моделируемых соответственно над векторными расслоениями $\overline{Y}$ и $\overline{Y}'$, порождает линейный морфизм

$$\overline{\Phi} : \overline{Y} \to \overline{Y}',$$
$$\overline{y}'^i \circ \overline{\Phi} = \frac{\partial \Phi^i}{\partial y^j} \overline{y}^j,$$

последних. Он называется *линейной производной* Φ.

Касательные и кокасательные расслоения

Слоями *касательного расслоения*

$$\pi_Z : TZ \to Z$$

к многообразию Z являются касательные пространства к Z. Если задан координатный атлас $\Psi_Z = \{U_\xi, \phi_\xi\}$ многообразия Z, то в качестве атласа касательного расслоения обычно выбирают *голономный атлас*

$$\Psi = \{U_\xi, \psi_\xi = T\phi_\xi\}.$$

Ассоциированной системой послойных координат на TZ являются *голономные координаты* $(z^\lambda, \dot{z}^\lambda)$ с функциями перехода

$$\dot{z}'^\lambda = \frac{\partial z'^\lambda}{\partial z^\mu} \dot{z}^\mu. \qquad \text{(П.3)}$$

Они являются координатами касательных векторов к Z относительно *голономных реперов* $\{\partial_\lambda\}$. Всякий морфизм многообразий $f : Z \to Z'$ порождает послойный *касательный морфизм* к f касательных расслоений

$$Tf : TZ \underset{f}{\longrightarrow} TZ',$$
$$\dot{z}'^\lambda \circ Tf = \frac{\partial f^\lambda}{\partial z^\mu} \dot{z}^\mu.$$

Дуальным к касательному расслоению $TZ \to Z$ является *кокасательное расслоение*

$$\pi_{*Z} : T^*Z \to Z.$$

Оно наделяется атласом голономных координат $(z^\lambda, \dot{z}_\lambda)$, которые являются координатами кокасательных векторов к Z относительно *голономных кореперов* $\{dz^\lambda\}$, дуальных к $\{\partial_\lambda\}$.

Касательные и кокасательные расслоения к расслоениям

Пусть $\pi_Y : TY \to Y$ — касательное расслоение к расслоению $\pi : Y \to X$. При заданных послойных координатах (x^λ, y^i) на Y голономными координатами на TY являются $(x^\lambda, y^i, \dot{x}^\lambda, \dot{y}^i)$.

Расслоение TY естественным образом является также расслоением

$$\pi \circ \pi_Y : TY \to X,$$

а касательный морфизм $T\pi$ к π задает на нем еще и структуру расслоения

$$T\pi : TY \to TX.$$

В результате имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} TY & \xrightarrow{T\pi} & TX \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Касательное расслоение $TY \to Y$ к расслоению $Y \to X$ обладает *вертикальным касательным подрасслоением*

$$VY = \operatorname{Ker} T\pi \to Y.$$

Его слоями являются вертикальные подпространства, касательные к слоям расслоения Y. Координатами на VY служат голономные координаты $(x^\lambda, y^i, \dot{y}^i)$. Если дан послойный морфизм $\Phi : Y \to Y'$, то касательный морфизм $T\Phi$ отображает $VY \subset TY$ в $VY' \subset TY'$, и ограничение

$$V\Phi = T\Phi\big|_{VY} : VY \to VY',$$
$$\dot{y}'^i \circ V\Phi = \partial_V \Phi^i = \dot{y}^j \partial_j \Phi^i, \qquad \text{(П.4)}$$

называется *вертикальным касательным морфизмом* к Φ.

Для всякого векторного расслоения $Y \to X$ существует каноническое *вертикальное расщепление*

$$VY \cong Y \underset{X}{\times} Y, \qquad \text{(П.5)}$$

так как координаты $\dot{y}^i$ преобразуются по тому же линейному закону, что и координаты y^i. Аффинное расслоение $Y \to X$, моделируемое над векторным расслоением $\overline{Y} \to X$, допускает каноническое вертикальное расщепление

$$VY \cong Y \underset{X}{\times} \overline{Y}, \qquad \text{(П.6)}$$

поскольку координаты $\dot{y}^i$ преобразуются по тому же линейному закону, что и координаты $\overline{y}^i$.

Голономными координатами на кокасательном расслоении T^*Y к расслоению $Y \to X$ являются $(x^\lambda, y^i, \dot{x}_\lambda, \dot{y}_i)$. Кокасательное расслоение T^*Y является также расслоением над X, но T^*Y не образует расслоения над T^*X.

Вертикальное кокасательное расслоение $V^*Y \to Y$ определяется как векторное расслоение, дуальное вертикальному касательному расслоению $VY \to Y$. Однако, в отличие от $VY \subset TY$, какого-либо канонического вложения V^*Y в кокасательное расслоение T^*Y к Y не существует. В то же время имеет место каноническая проекция

$$\zeta : T^*Y \underset{Y}{\to} V^*Y, \tag{П.7}$$

$$\zeta : \dot{x}_\lambda dx^\lambda + \dot{y}_i dy^i \mapsto \dot{y}_i \bar{dy}^i, \tag{П.8}$$

где $\{\bar{dy}^i\}$ — голономные базисы слоев вертикального кокасательного расслоения V^*Y, дуальные базисам $\{\partial_i\}$ слоев вертикального касательного расслоения VY.

Полностью соотношения между расслоениями TY и VY, а также между T^*Y и V^*Y можно представить в виде двух точных последовательностей:

$$0 \to VY \hookrightarrow TY \to Y \underset{X}{\times} TX \to 0, \tag{П.9 a}$$

$$0 \to Y \underset{X}{\times} T^*X \hookrightarrow T^*Y \to V^*Y \to 0, \tag{П.9 b}$$

где все отображения — это послойные морфизмы над Y. Точность последовательностей означает, что образ предыдущего отображения совпадает с ядром последующего.

Для упрощения выражений символы TX и T^*X обычно используются для обозначения также индуцированных расслоений

$$Y \underset{X}{\times} TX, \quad Y \underset{X}{\times} T^*X.$$

Рассмотрим расслоения TT^*X и T^*TX. В голономных координатах $(x^\lambda, p_\lambda = \dot{x}_\lambda)$ на T^*X и $(x^\lambda, v^\lambda = \dot{x}^\lambda)$ на TX эти расслоения имеют голономные координаты $(x^\lambda, p_\lambda, \dot{x}^\lambda, \dot{p}_\lambda)$ и $(x^\lambda, v^\lambda, \dot{x}_\lambda, \dot{v}_\lambda)$ соответственно. Сравнивая законы преобразования этих координат, легко убедиться, что имеет место изоморфизм

$$TT^*X \cong T^*TX, \quad p_\lambda \longleftrightarrow \dot{v}_\lambda, \quad \dot{p}_\lambda \longleftrightarrow \dot{x}_\lambda. \tag{П.10}$$

Если $Y \to X$ — расслоение, аналогично получаем изоморфизм

$$VV^*Y \cong V^*VY, \quad p_i \longleftrightarrow \dot{v}_i, \quad \dot{p}_i \longleftrightarrow \dot{y}_i, \tag{П.11}$$

где (x^λ, y^i, p_i) — голономные координаты на V^*Y и (x^λ, y^i, v^i) — на VY.

Векторные поля

Векторным полем на многообразии Z называется глобальное сечение касательного расслоения $TZ \to Z$. Векторное поле называется *неособым*, если оно нигде не обращается в нуль. Множество $\mathscr{T}_1(Z)$ векторных полей на Z образует вещественную алгебру Ли относительно *скобок Ли*

$$[v, u] = (v^\lambda \partial_\lambda u^\mu - u^\lambda \partial_\lambda v^\mu)\partial_\mu.$$

Векторные поля на многообразии Z образуют модуль над кольцом гладких функций $\mathscr{O}^0(Z)$ на Z. Этот модуль является локально конечно порожденным.

Кривая $s : () \to Z$ на интервале $() \subset \mathbb{R}$ называется *интегральной кривой* векторного поля u на многообразии Z, если

$$Ts(\partial_t) = u \circ s,$$
$$\partial_t s^\lambda(t) = u^\lambda(s(t)), \quad t \in ().$$

Как известно, для всякого векторного поля u на Z существует единственная интегральная кривая на некотором интервале $(-\epsilon, \epsilon)$, проходящая через данную точку $z \in Z$.

Локальным векторным полем на подмногообразии $N \subset Z$ называется локальное сечение расслоения $TZ \to Z$ на N. Подчеркнем, что оно в общем случае не является векторным полем на многообразии N, поскольку не обязательно принадлежит $TN \subset TZ$. Локальное векторное поле на подмногообразии N именуется *интегрируемым*, если его интегральная кривая, проходящая через какую-либо точку N, принадлежит N. Очевидно, что это имеет место тогда и только тогда, когда оно принимает значения в TN, т. е. является векторным полем на многообразии N.

Пусть $U \subset Z$ — открытое подмножество и $\epsilon > 0$. *Локальной 1-параметрической группой локальных диффеоморфизмов* Z, определенной на $(-\epsilon, \epsilon) \times U$, называется отображение

$$G : (-\epsilon, \epsilon) \times U \ni (t, z) \mapsto G_t(z) \in Z,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- для всякого $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ G_t — это диффеоморфизм U на открытое подмножество $G_t(U) \subset Z$;
- $G_{t+t'}(z) = G_t \circ G_{t'}(z)$, если $t + t' \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Когда $U = Z$ и $() = \mathbb{R}$, мы имеем 1-параметрическую группу диффеоморфизмов многообразия Z.

Теорема П.1. Всякая локальная 1-параметрическая группа локальных диффеоморфизмов G определяет векторное поле u на U такое, что $u(z) = TG_0(z)(\partial_t)$ — это касательный вектор к кривой $s(t) = G_t(z)$ в точке $t = 0$. Обратно, пусть u — векторное поле на многообразии Z. Для всякого $z \in Z$ существуют: $\epsilon > 0$, окрестность U точки z и единственная локальная 1-параметрическая группа локальных диффеоморфизмов на $(-\epsilon, \epsilon) \times U$, которая определяет u [7]. □

Коротко можно сказать, что векторное поле u является *генератором* локальной 1-параметрической группы локальных диффеоморфизмов. Это следует из того факта, что внешняя форма ϕ на Z инвариантна относительно локальной 1-параметрической группы локальных диффеоморфизмов G с генератором u, т. е.

$$g^*\phi = \phi, \quad \forall g \in G_t,$$

только если ее производная Ли $\mathbf{L}_u\phi = 0$.

Векторное поле на многообразии называется *полным*, если ему соответствует 1-параметрическая группа диффеоморфизмов этого многообразия.

Векторные поля на расслоении

Векторное поле

$$u = u^\lambda(x)\partial_\lambda + u^i(y)\partial_i$$

на расслоении $Y \to X$ называется *проектируемым*, если оно проектируется на векторное поле $u_X = u^\lambda \partial_\lambda$ на X, т. е. имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u} & TY \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T\pi} \\ X & \xrightarrow{u_X} & TX \end{array}$$

Обратно, векторное поле $\tau = \tau^\lambda \partial_\lambda$ на базе X расслоения $Y \to X$ в общем случае может быть поднято до проектируемого на τ векторного поля на Y только посредством некоторой связности на $Y \to X$ (см. (П.47)). Однако для тензорных расслоений

$$T = \left(\overset{m}{\otimes} TX\right) \otimes \left(\overset{k}{\otimes} T^*X\right)$$

имеет место *канонический лифт*

$$\tilde{\tau} = \tau^\mu \partial_\mu + \left[\partial_\nu \tau^{\alpha_1} \dot{x}^{\nu\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_k} + \ldots - \partial_{\beta_1}\tau^\nu \dot{x}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\nu\beta_2\cdots\beta_k} - \ldots\right] \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_k}} \qquad (\text{П.12})$$

на T всякого векторного поля τ на X, в частности, канонический лифт

$$\tilde{\tau} = \tau^\mu \partial_\mu + \partial_\nu \tau^\alpha \dot{x}^\nu \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha} \qquad (\text{П.13})$$

на касательное расслоение TX и канонический лифт

$$\tilde{\tau} = \tau^\mu \partial_\mu - \partial_\beta \tau^\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\beta} \qquad (\text{П.14})$$

на кокасательное расслоение T^*X. В дальнейшем для упрощения записи мы будем использовать обозначения

$$\dot{\partial}_\lambda = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\lambda}. \qquad (\text{П.15})$$

Проектируемое векторное поле $u = u^i(y)\partial_i$ на расслоении Y называется *вертикальным*, если оно проектируется на всюду нулевое векторное поле на X. На векторном расслоении $Y \to X$, как это следует из расщепления (П.5), существует каноническое вертикальное *векторное поле Лиувилля*

$$u_Y = y^i \partial_i.$$

Например, на касательном расслоении TX векторное поле Лиувилля дается выражением

$$u_{TX} = \dot{x}^\lambda \dot{\partial}_\lambda. \qquad (\text{П.16})$$

Соответственно, всякое векторное поле $\tau = \tau^\lambda \partial_\lambda$ на многообразии X имеет *вертикальный лифт*

$$\tau_V = \tau^\lambda \dot{\partial}_\lambda \qquad (\text{П.17})$$

на касательное расслоение TX.

Мультивекторные поля

Мультивекторным полем ϑ степени r (или просто r-векторным полем) на многообразии Z называется сечение

$$\vartheta = \frac{1}{r!}\vartheta^{\lambda_1\dots\lambda_r}\partial_{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{\lambda_r}$$

внешнего произведения $\overset{r}{\bigwedge} TZ \to Z$. Обозначим $\mathcal{T}_r(Z)$ векторное пространство r-векторных полей на Z. Все мультивекторные поля на Z образуют $\mathbb{Z}$-градуированную алгебру относительно операции внешнего произведения.

(S-N)-скобки

Алгебра мультивекторных полей наделяется скобками *Schouten—Nijenhuis*, или просто (S-N)-скобками

$$[\,.\,,\,.\,]_{\mathrm{SN}} : \mathcal{T}_r(M)\times\mathcal{T}_s(M)\to\mathcal{T}_{r+s-1}(M), \tag{П.18}$$

$$\vartheta = \frac{1}{r!}\vartheta^{\lambda_1\dots\lambda_r}\partial_{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{\lambda_r},\quad \upsilon = \frac{1}{s!}\upsilon^{\alpha_1\dots\alpha_s}\partial_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{\alpha_s},$$

$$[\vartheta,\upsilon]_{\mathrm{SN}} = \vartheta\star\upsilon + (-1)^{|\vartheta||\upsilon|}\upsilon\star\vartheta,$$

$$\vartheta\star\upsilon = \frac{r}{r!s!}(\vartheta^{\mu\lambda_1\dots\lambda_{r-1}}\partial_\mu\upsilon^{\alpha_1\dots\alpha_s}\partial_{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{\lambda_{r-1}}\wedge\partial_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{\alpha_s}),$$

которые обобщают скобки Ли векторных полей [16, 71]. Имеют место соотношения

$$[\vartheta,\upsilon]_{\mathrm{SN}} = (-1)^{|\vartheta||\upsilon|}[\upsilon,\vartheta]_{\mathrm{SN}},$$

$$[\nu,\vartheta\wedge\upsilon]_{\mathrm{SN}} = [\nu,\vartheta]_{\mathrm{SN}}\wedge\upsilon + (-1)^{|\nu||\vartheta|+|\vartheta|}\vartheta\wedge[\nu,\upsilon]_{\mathrm{SN}}.$$

Внешние формы

Внешней r-формой на многообразии Z называется сечение

$$\phi = \frac{1}{r!}\phi_{\lambda_1\dots\lambda_r}dz^{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\lambda_r}$$

внешнего произведения $\overset{r}{\bigwedge} T^*Z \to Z$. Обозначим $\mathcal{O}^r(Z)$ векторное пространство внешних r-форм на многообразии Z. Все внешние формы на Z составляют *внешнюю $\mathbb{Z}$-градуированную алгебру*. На ней задан оператор внешнего дифференцирования, или просто *внешний дифференциал*

$$d : \mathcal{O}^r(Z)\to\mathcal{O}^{r+1}(Z),$$

$$d\phi = \frac{1}{r!}\partial_\mu\phi_{\lambda_1\dots\lambda_r}dz^\mu\wedge dz^{\lambda_1}\wedge\cdots dz^{\lambda_r},$$

который удовлетворяет известным соотношениям

$$d\circ d = 0,$$

$$d(\phi\wedge\sigma) = d(\phi)\wedge\sigma + (-1)^{|\phi|}\phi\wedge d(\sigma).$$

Для всякого морфизма $f : Z \to Z'$, символом $f^*\phi$ обозначается форма, *индуцированная* на Z формой ϕ на Z' посредством морфизма f. Если ϕ — 1-форма, $f^*\phi$ определяется условием

$$v \rfloor f^*\phi(z) = Tf(v) \rfloor \phi(f(z)), \quad \forall v \in T_z Z.$$

Выполняются соотношения

$$f^*(\phi \wedge \sigma) = f^*\phi \wedge f^*\sigma,$$
$$df^*\phi = f^*(d\phi).$$

В частности, если $i_N : N \to Z$ — подмногообразие, то индуцированная форма $i_N^*\phi$ на N называется *ограничением* на N внешней формы ϕ на Z.

Свертка векторного поля $u = u^\mu \partial_\mu$ и r-формы ϕ дается выражением

$$u \rfloor \phi = \sum_{k=1}^{r} \frac{(-1)^{k-1}}{r!} u^{\lambda_k} \phi_{\lambda_1 \ldots \lambda_k \ldots \lambda_r} dz^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dz}^{\lambda_k} \wedge \cdots \wedge dz^{\lambda_r} =$$
$$= \frac{1}{(r-1)!} u^\mu \phi_{\mu\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}} dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_{r-1}}. \tag{П.19}$$

Выполняются соотношения

$$\phi(u_1, \ldots, u_r) = u_r \rfloor \cdots u_1 \rfloor \phi,$$
$$u \rfloor (\phi \wedge \sigma) = u \rfloor \phi \wedge \sigma + (-1)^{|\phi|} \phi \wedge u \rfloor \sigma,$$
$$[u, u'] \rfloor \phi = u \rfloor d(u' \rfloor \phi) - u' \rfloor d(u \rfloor \phi) + u' \rfloor u \rfloor d\phi, \quad \phi \in \mathscr{O}^1(Z). \tag{П.20}$$

Внешние формы на расслоении

Для расслоения $\pi : Y \to X$ имеет место вложение $\pi^* : \mathscr{O}^*(X) \to \mathscr{O}^*(Y)$. Внешние формы

$$\phi : Y \to \bigwedge^r T^*X,$$
$$\phi = \frac{1}{r!} \phi_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_r},$$

на расслоении $Y \to X$ такие, что $\vartheta \rfloor \phi = 0$ для всякого вертикального поля ϑ на $Y \to X$, называются *горизонтальными*. Горизонтальная n-форма именуется *горизонтальной плотностью*.

В случае касательного расслоения TX существует другой способ, имея форму σ на X, поднять ее на TX [44, 75]. Пусть f — функция на X. Назовем ее *поднятием* на TX функцию

$$\tilde{f} = \dot{x}^\lambda \partial_\lambda f.$$

Пусть σ — r-форма на X. Ее *поднятием* на TX называется r-форма $\tilde{\sigma}$, задаваемая соотношением

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_r) = \widetilde{\sigma(\tau_1, \ldots, \tau_r)}, \tag{П.21}$$

где τ_i — произвольные векторные поля на X и $\widetilde{\tau}_i$ — их канонические лифты (П.13) на TX. В координатах форма (П.21) имеет вид

$$\sigma = \frac{1}{r!}\,\sigma_{\lambda_1\dots\lambda_r}dx^{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\lambda_r},$$

$$\widetilde{\sigma} = \frac{1}{r!}\Big[\dot{x}^{\lambda}\partial_{\lambda}\sigma_{\lambda_1\dots\lambda_r}dx^{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\lambda_r} + \sum_{i=1}^{r}\sigma_{\lambda_1\dots\lambda_r}dx^{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge d\dot{x}^{\lambda_i}\wedge\cdots\wedge dx^{\lambda_r}\Big].$$

В частности, справедливо равенство

$$d\widetilde{\sigma} = \widetilde{d\sigma}.$$

Производная Ли

Производная Ли внешней формы ϕ вдоль векторного поля u дается выражением

$$\mathbf{L}_u\phi = u\rfloor d\phi + d(u\rfloor\phi).$$

В частности, если ϕ — функция, то

$$\mathbf{L}_u\phi = u\rfloor d\phi.$$

Справедливо равенство

$$\mathbf{L}_u(\phi\wedge\sigma) = \mathbf{L}_u\phi\wedge\sigma + \phi\wedge\mathbf{L}_u\sigma.$$

Тангенциально-значные формы

Элементы тензорного произведения $\mathscr{O}^r(Z)\otimes_{\mathscr{O}_1(Z)}$ называются *тангенциально-значными r-формами*

$$\phi : Z\to\bigwedge^r T^*Z\otimes TZ,$$

$$\phi = \frac{1}{r!}\,\phi^{\mu}_{\lambda_1\dots\lambda_r}dz^{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\lambda_r}\otimes\partial_{\mu}.$$

Имеет место взаимно однозначное соответствие между тангенциально-значными 1-формами ϕ на многообразии Z и линейными послойными отображениями над Z:

$$\widehat{\phi} : TZ\to TZ,$$

$$\widehat{\phi} : T_zZ\ni v\mapsto v\rfloor\phi(z)\in T_zZ, \qquad \text{(П.22)}$$

$$\widehat{\phi}^* : T^*Z\to T^*Z,$$

$$\widehat{\phi}^* : T^*_zZ\ni v^*\mapsto\phi(z)\rfloor v^*\in T^*_zZ. \qquad \text{(П.23)}$$

В частности, *каноническая тангенциально-значная 1-форма*

$$\theta_Z = dz^{\lambda}\otimes\partial_{\lambda}$$

на Z соответствует тождественным морфизмам (П.22) и (П.23).

Пусть $Z = TX$. Рассмотрим послойный морфизм J расслоения $TTX\to TX$ в себя такой, что для всякого векторного поля τ на X

$$J\circ\widetilde{\tau} = \tau_V, \quad J\circ\tau_V = 0,$$

где $\tilde{\tau}$ — канонический лифт (П.13), а τ_V — вертикальный лифт (П.17) векторного поля τ на TX. В координатах он имеет вид

$$J(\partial_\lambda) = \dot{\partial}_\lambda, \quad J(\dot{\partial}_\lambda) = 0. \tag{П.24}$$

Очевидно, что $J \circ J = 0$ и ранг J равен n. Морфизму J (П.24) соответствует тангенциально-значная форма

$$\phi_J = dx^\lambda \otimes \dot{\partial}_\lambda$$

на касательном расслоении TX.

Распределения

Распределением размерности r на k-мерном многообразии Z именуется r-мерное подрасслоение $\mathbf{T}$ касательного расслоения TZ. Распределение $\mathbf{T}$ называется *инволютивным*, если для любых векторных полей u и u', лежащих в $\mathbf{T}$, их коммутатор $[u, u']$ тоже лежит в $\mathbf{T}$. *Аннулятором* $\mathbf{T}^*$ r-мерного распределения $\mathbf{T}$ называется $(k-r)$-мерное подрасслоение кокасательного расслоения T^*Z такое, что в некоторой окрестности U всякой точки $z \in Z$ существует $(k-r)$ линейно независимых сечений $\phi_1, \ldots, \phi_{k-r}$ подрасслоения $\mathbf{T}^*$ таких, что

$$\mathbf{T}\big|_U = \bigcap_j \operatorname{Ker} \phi_j.$$

Обозначим $\bigwedge \mathbf{T}^*$ идеал внешней алгебры $\mathscr{O}^*(Z)$, порождаемый сечениями подрасслоения $\mathbf{T}^* \to Z$.

Предложение П.2. Распределение $\mathbf{T}$ является инволютивным тогда и только тогда, когда $\bigwedge \mathbf{T}^*$ является *дифференциальным идеалом*, т. е. $d(\bigwedge \mathbf{T}^*) \subset \bigwedge \mathbf{T}^*$ [73]. □

Связное подмногообразие N многообразия Z называется *интегральным многообразием* распределения $\mathbf{T}$ на Z, если касательные пространства к N принадлежат слоям этого распределения. В дальнейшем под интегральным многообразием мы будем понимать только *интегральное многообразие максимальной размерности*, равной размерности $\mathbf{T}$. Интегральное многообразие N называется *максимальным*, если не существует другого интегрального многообразия, содержащего N.

Теорема П.3. Если распределение $\mathbf{T}$ на Z является инволютивным, для всякой точки $z \in Z$ существует единственное максимальное интегральное многообразие распределения $\mathbf{T}$, проходящее через z [73]. □

Поэтому инволютивные распределения называются также *интегрируемыми распределениями*.

Следствие П.4. Для всякой точки $z \in Z$ имеется локальная система координат $(z^1, \ldots, z^k)$ в окрестности $U \ni z$ такая, что ограничения $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}^*$ на U порождаются r векторными полями

$$\frac{\partial}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z^r}$$

и $(k-r)$ формами $dz^{k-r+1}, \ldots, dz^k$ соответственно. Отсюда следует, что интегральные многообразия инволютивного распределения на многообразии образуют слоение этого многообразия. □

Например, всякое 1-мерное распределение на многообразии Z является интегрируемым. Его сечением является неособое векторное поле u на Z, интегральные кривые

которого служат интегральными многообразиями указанного распределения. Следствие П.4 показывает, что в окрестности всякой точки $z \in Z$ существует локальная система координат $(z^1, \ldots, z^k)$, относительно которой неособое векторное поле u принимает вид

$$u = \frac{\partial}{\partial z^1}.$$

Слоения

Слоением размерности r на многообразии Z называется разбиение Z на связные подмногообразия F_ι (слои слоения), обладающее следующим свойством: в окрестности U всякой точки Z существует локальная система координат (z^α) такая, что для всякого слоя F_ι компоненты связности пересечения $F_\iota \cap U$ задаются уравнениями

$$z^{r+1} = \text{const}, \quad \ldots, \quad z^k = \text{const}$$

[10, 41, 61]. В частности, субмерсия является слоением. Подчеркнем, что слои слоения в общем случае могут не быть *вложенными подмногообразиями*, т. е. топологическими подпространствами.

Всякая вещественная функция f на многообразии Z такая, что $df \neq 0$ всюду на Z, является субмерсией $Z \to \mathbb{R}$ и определяет слоение коразмерности 1, слои которого задаются уравнениями

$$f(z) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Оно называется *слоением поверхностей уровня* функции f. Согласно сказанному выше всякое слоение коразмерности 1 локально представляет собой слоение поверхностей уровня

$$z^k = f(z) = \text{const}$$

некоторой функции на Z.

Поверхности уровня всякой функции $f \neq \text{const}$ на многообразии Z задают так называемое *сингулярное слоение* F [11, 41]. Его слои в общем случаем не будут многообразиями. Однако в некоторой открытой окрестности U всякой неособой точки z, где $df(z) \neq 0$, ограничение F на U является слоением с производящей функцией $f\big|_U$.

Касательные и кокасательные расслоения к группам Ли

Пусть G — вещественная связная группа Ли ($\dim G > 0$). Обозначим $\mathscr{G}_l$ [соотв. $\mathscr{G}_r$] *левую* [соотв. *правую*] алгебру Ли *левоинвариантных векторных полей* $\xi_l(g) = TL_g(\xi_l(e))$ [соотв. *правоинвариантных векторных полей* $\xi_r(g) = TR_g(\xi_r(e))$] на группе G, где e — единица группы, а L_g и R_g обозначают, как обычно, левое и правое действие группы G на себя. Всякому левоинвариантному векторному полю $\xi_l(g)$ [соотв. правоинвариантному векторному полю $\xi_r(g)$] сопоставляется элемент $v = \xi_l(e)$ [соотв. $v = \xi_r(e)$] касательного пространства T_eG, которое, таким образом, наделено структурами как левой, так и правой алгебр Ли. Например, для $v \in T_eG$ обозначим $v_l(g)$ и $v_r(g)$ соответствующие левоинвариантное и правоинвариантное векторные поля. Имеет место соотношение

$$v_l(g) = TL_g \circ TR_g^{-1}(v_r(g)) = \operatorname{ad} g(v_r(g)).$$

Обозначим $\{\epsilon_m = \epsilon_m(e)\}$ [соотв. $\{\varepsilon_m = \varepsilon_m(e)\}$] базис левой [соотв. правой] алгебры Ли и c_{mn}^k — правые структурные константы:

$$[\varepsilon_m, \varepsilon_n] = c_{mn}^k \varepsilon_k.$$

Отображение $g \mapsto g^{-1}$ определяет изоморфизм

$$\rho : \mathscr{G}_l \ni \epsilon_m \mapsto \varepsilon_m = -\epsilon_m \in \mathscr{G}_r \tag{П.25}$$

левой и правой алгебр Ли. В частности, имеем

$$[\epsilon_m, \epsilon_n] = -c^k_{mn}\epsilon_k.$$

Касательное расслоение $\pi_G : TG \to G$ к группе G тривиально, и имеют место изоморфизмы

$$\varrho_l : TG \ni q \mapsto (g = \pi_G(q), TL_g^{(-1)}(q)) \in G \times \mathscr{G}_l,$$
$$\varrho_r : TG \ni q \mapsto (g = \pi_G(q), TR_g^{(-1)}(q)) \in G \times \mathscr{G}_r.$$

Левое действие группы G на себя порождает ее присоединенное представление $g \mapsto \mathrm{ad}\, g$ на правой алгебре Ли и естественное тождественное представление на левой алгебре Ли. Соответственно определено *присоединенное представление*

$$\varepsilon' : \varepsilon \mapsto \mathrm{ad}\, \varepsilon'(\varepsilon) = [\varepsilon', \varepsilon],$$
$$\mathrm{ad}\, \varepsilon_m(\varepsilon_n) = c^k_{mn}\varepsilon_k,$$

правой алгебры Ли $\mathscr{G}_r$ на себе.

Левое действие

$$G \times Z \ni (g, z) \mapsto gz \in Z$$

группы G на многообразии Z определяет гомоморфизм

$$\mathscr{G}_r \ni \varepsilon \to \xi_\varepsilon \in \mathscr{T}_1(Z)$$

правой алгебры Ли $\mathscr{G}_r$ в алгебру Ли векторных полей на Z [7] такой, что

$$\xi_{\mathrm{ad}\, g(\varepsilon)} = Tg \circ \xi_\varepsilon \circ g^{-1}. \tag{П.26}$$

Векторные поля ξ_{ε_m} именуются *генераторами представления* группы G на Z.

Обозначим $\mathscr{G}^* = T^*_e G$ векторное пространство, сопряженное пространству T_eG, с базисом $\{\varepsilon^m\}$, дуальным базису $\{\varepsilon_m\}$ пространства T_eG. Будем называть его *сопряженным пространством алгебры Ли.* Группа G и алгебра Ли $\mathscr{G}_r$ действуют на $\mathscr{G}^*$ по *коприсоединенному представлению*

$$\langle \mathrm{ad}^*\, g(\varepsilon^*), \varepsilon\rangle = \langle \varepsilon^*, \mathrm{ad}\, g^{-1}(\varepsilon)\rangle, \quad \varepsilon^* \in \mathscr{G}^*, \quad \varepsilon \in \mathscr{G}_r, \tag{П.27}$$
$$\langle \mathrm{ad}^*\, \varepsilon'(\varepsilon^*), \varepsilon\rangle = -\langle \varepsilon^*, [\varepsilon', \varepsilon]\rangle, \quad \varepsilon' \in \mathscr{G}_r,$$
$$\mathrm{ad}^*\, \varepsilon_m(\varepsilon^n) = -c^n_{mk}\varepsilon^k.$$

Нужно отметить, что в литературе встречается другое определение коприсоединенного представления, вытекающее из соотношения

$$\langle \mathrm{ad}^*\, g(\varepsilon^*), \varepsilon\rangle = \langle \varepsilon^*, \mathrm{ad}\, g(\varepsilon)\rangle,$$

отличного от (П.27) [12].

Внешняя форма ϕ на группе G называется *левоинвариантной* [соотв. *правоинвариантной*], если $\phi(e) = L^*_g(\phi(g))$ [соотв. $\phi(e) = R^*_g(\phi(g))$]. Внешний дифференциал левоинвариантной [соотв. правоинвариантной] формы является левоинвариантным [соотв.

правоинвариантным]. В частности, для левоинвариантных 1-форм выполняется *уравнение Маурера—Картана*

$$d\phi(\epsilon, \epsilon') = -\frac{1}{2}\,\phi([\epsilon, \epsilon']), \quad \epsilon, \epsilon' \in \mathcal{G}_l.$$

На группе G определена *каноническая левоинвариантная* $\mathcal{G}_l$*-значная* 1-форма

$$\theta_l : T_eG \ni \epsilon \mapsto \epsilon \in \mathcal{G}_l.$$

Компоненты θ_l^m ее разложения $\theta_l = \theta_l^m \epsilon_m$ по базису алгебры Ли $\mathcal{G}_l$ образуют базис пространства внешних левоинвариантных 1-форм на G:

$$\epsilon_m \lrcorner\, \theta_l^n = \delta_m^n.$$

Уравнение Маурера—Картана для них имеет вид

$$d\theta_l^m = \frac{1}{2}\, c_{nk}^m \theta_l^n \wedge \theta_l^k.$$

Соответственно, на группе G определена *каноническая правоинвариантная* $\mathcal{G}_r$*-значная* 1-форма

$$\theta_r : T_eG \ni \varepsilon \mapsto \varepsilon \in \mathcal{G}_r.$$

Она связана с θ_l соотношением

$$\theta_l(v_g) = \theta_l(TL_g^{-1}(v_g)) = TL_g^{-1}(v_g), \quad v_g \in T_gG,$$
$$\theta_r(v_g) = \theta_r(TR_g^{-1}(v_g)) = TR_g^{-1}(v_g),$$
$$\rho(\theta_l(v_g)) = -TL_g \circ TR_g^{-1}\theta_r(v_g) = -\operatorname{ad} g(\theta_r(v_g)),$$

где ρ — изоморфизм (П.25).

Главное реперное расслоение

Мы не касаемся здесь общей теории главных расслоений, отсылая к литературе [6, 7, 8]. Пусть X — n-мерное связное ориентированное многообразие. Обозначим

$$\pi_{LX} : LX \to X$$

расслоение ориентированных реперов $\{s_a\}$ в касательных пространствах к многообразию X. Назовем его просто *реперным расслоение.* Это главное расслоение со структурной группой $GL^+(n, \mathbb{R})$. Оно ассоциировано с касательным TX и кокасательным T^*X расслоениями над X. Относительно голономных базисов $\{\partial_\mu\}$ слоев касательного расслоения TX всякий элемент $\{s_a\}$ реперного расслоения LX принимает вид

$$s_a = s^\mu{}_a \partial_\mu,$$

где $s^\mu{}_a$ — матричные элементы естественного представления группы $GL^+(n, \mathbb{R})$ в $\mathbb{R}^n$. Они составляют послойные координаты

$$(x^\lambda, s^\mu{}_a), \quad s'^\mu{}_a = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\, s^\lambda{}_a,$$

реперного расслоения LX. В этих координатах каноническое правое действие группы $GL^+(n, \mathbb{R})$ на LX имеет вид

$$R_g : s^\mu{}_a \mapsto s^\mu{}_b g^b{}_a, \quad g \in GL^+(n, \mathbb{R}).$$

Реперное расслоение LX наделено *канонической $\mathbb{R}^n$-значной 1-формой*

$$\theta_{LX} = s^a{}_\mu dx^\mu \otimes t_a, \tag{П.28}$$

где $\{t_a\}$ — фиксированный базис $\mathbb{R}^n$ и $s^a{}_\mu$ — элементы обратной матрицы к $s^\mu{}_a$.

Для реперного расслоения всякий диффеоморфизм f его базы X каноническим образом поднимается до его автоморфизма

$$\widetilde{f} : (x^\lambda, s^\lambda{}_a) \mapsto (f^\lambda(x), \partial_\mu f^\lambda s^\mu{}_a)$$

и соответствующих автоморфизмов ассоциированных с ним тензорных расслоений. Эти автоморфизмы называются *общими ковариантными преобразованиями* или *голономными автоморфизмами*. Например, в случае TX это — касательные морфизмы $\widetilde{f} = Tf$ к диффеоморфизмам f. Генераторами общих ковариантных преобразований являются канонические поднятия $\widetilde{\tau}$ (П.12) векторных полей τ на X.

Многообразия струй

Пусть дано расслоение $Y \to X$. Рассмотрим классы эквивалентности $j^1_x s$, $x \in X$, его сечений s, отождествляемых по своим значениям $s^i(x)$ и значениям своих частных производных первого порядка $\partial_\mu s^i(x)$ в точках $x \in X$. Класс эквивалентности $j^1_x s$ называют *струей сечений s* в точке $x \in X$. Множество J^1Y всех струй наделяется структурой многообразия с координатным атласом

$$(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda),$$
$$(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda)(j^1_x s) = (x^\lambda, s^i(x), \partial_\lambda s^i(x)),$$
$$y'^i_\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}(\partial_\mu + y^j_\mu \partial_j) y'^i, \tag{П.29}$$

и называется *многообразием струй* сечений расслоения $Y \to X$ (или просто многообразием струй расслоения $Y \to X$).

Многообразие струй имеет естественные расслоения

$$\pi^1 : J^1Y \ni j^1_x s \mapsto x \in X, \tag{П.30}$$
$$\pi^1_0 : J^1Y \ni j^1_x s \mapsto s(x) \in Y. \tag{П.31}$$

При этом расслоение (П.31) является аффинным, моделируемым над векторным расслоением

$$T^*X \underset{Y}{\otimes} VY \to Y.$$

Пусть J^1Y — многообразие струй расслоения $Y \to X$. Существуют два канонических послойных мономорфизма над Y:

$$\lambda : J^1Y \hookrightarrow T^*X \underset{Y}{\otimes} TY, \tag{П.32}$$
$$\lambda = dx^\lambda \otimes d_\lambda = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i),$$

где d_λ называется *полной производной*, и

$$\theta_1 : J^1Y \hookrightarrow T^*Y \underset{Y}{\otimes} VY, \tag{П.33}$$
$$\theta_1 = \theta^i \otimes \partial_i = (dy^i - y^i_\lambda dx^\lambda) \otimes \partial_i,$$

где

$$\theta^i = dy^i - y^i_\lambda dx^\lambda \tag{П.34}$$

именуется *контактной формой*. Отождествляя J^1Y с его образами относительно морфизмов (П.32) и (П.33), мы можем всякий элемент многообразия струй представить тангенциально-значными формами

$$dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i) \quad \text{или} \quad (dy^i - y^i_\lambda dx^\lambda) \otimes \partial_i.$$

Любой послойный морфизм расслоений $\Phi : Y \to Y'$ над диффеоморфизмом f продолжается до морфизма многообразий струй

$$J^1\Phi : J^1Y \to J^1Y',$$
$$J^1\Phi : j^1_x s \mapsto j^1_{f(x)}(\Phi \circ s \circ f^{-1}),$$
$$y'^i_\lambda \circ J^1\Phi = \left(\partial_j \Phi^i y^j_\mu + \partial_\mu \Phi^i\right) \frac{\partial (f^{-1})^\mu}{\partial x'^\lambda},$$

над Φ, называемого *струйным продолжением* морфизма Φ.

Всякое сечение s расслоения $Y \to X$ имеет *струйное продолжение* до сечения

$$(J^1 s)(x) = j^1_x s,$$
$$(y^i, y^i_\lambda) \circ J^1 s = (s^i(x), \partial_\lambda s^i(x)),$$

расслоения $J^1Y \to X$. Сечение $\overline{s}$ расслоения $J^1Y \to X$ называется *голономным*, если оно является струйным продолжением некоторого сечения $Y \to X$.

Всякое проектируемое векторное поле

$$u = u^\lambda(x)\partial_\lambda + u^i(y)\partial_i$$

на расслоении $Y \to X$ имеет *струйное продолжение* до векторного поля

$$\overline{u} = r_1 \circ J^1 u : J^1Y \to J^1TY \to TJ^1Y,$$
$$\overline{u} = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (\partial_\lambda u^i + y^j_\lambda \partial_j u^i - y^i_\mu \partial_\lambda u^\mu)\partial^\lambda_i, \tag{П.35}$$

на J^1Y. Здесь использован канонический послойный морфизм

$$r_1 : J^1TY \to TJ^1Y,$$
$$\dot{y}^i_\lambda \circ r_1 = (\dot{y}^i)_\lambda - y^i_\mu \dot{x}^\mu_\lambda.$$

В частности, имеет место канонический изоморфизм

$$VJ^1Y = J^1VY, \tag{П.36}$$
$$\dot{y}^i_\lambda = (\dot{y}^i)_\lambda.$$

Можно показать, что струйное продолжение $u \mapsto \overline{u}$ является морфизмом алгебр Ли, т. е.

$$\overline{[u, u']} = [\overline{u}, \overline{u'}].$$

Канонические горизонтальные расщепления

Канонические морфизмы (П.32) и (П.33) определяют канонические вложения

$$\widehat{\lambda} : J^1Y \underset{X}{\times} TX \ni \partial_\lambda \mapsto d_\lambda = \partial_\lambda \rfloor \lambda \in J^1Y \underset{Y}{\times} TY \tag{П.37}$$

и

$$\widehat{\theta}_1 : J^1Y \underset{Y}{\times} V^*Y \ni dy^i \mapsto \theta^i = \theta_1 \rfloor dy^i \in J^1Y \underset{Y}{\times} T^*Y, \tag{П.38}$$

где $\{\overline{dy}^i\}$ — базисы слоев V^*Y, которые следует отличать от элементов dy^i голономных базисов T^*Y. Эти вложения задают *каноническое горизонтальное расщепление* индуцированных расслоений

$$J^1Y \underset{Y}{\times} TY = \widehat{\lambda}(TX) \underset{J^1Y}{\oplus} VY, \tag{П.39}$$

$$\dot{x}^\lambda\partial_\lambda + \dot{y}^i\partial_i = \dot{x}^\lambda(\partial_\lambda + y^i_\lambda\partial_i) + (\dot{y}^i - \dot{x}^\lambda y^i_\lambda)\partial_i,$$

и

$$J^1Y \underset{Y}{\times} T^*Y = T^*X \underset{J^1Y}{\oplus} \widehat{\theta}_1(V^*Y), \tag{П.40}$$

$$\dot{x}_\lambda dx^\lambda + \dot{y}_i dy^i = (\dot{x}_\lambda + \dot{y}_i y^i_\lambda)dx^\lambda + \dot{y}_i(dy^i - y^i_\lambda dx^\lambda).$$

Многообразия струй второго порядка

Рассмотрим многообразие струй J^1J^1Y расслоения $J^1Y \to X$. Оно называется *повторным многообразием струй* и наделяется координатами

$$(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, y^i_{(\mu)}, y^i_{\mu\lambda}),$$

$$y'^i_{(\lambda)} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}(\partial_\mu + y^j_{(\mu)}\partial_j)y'^i,$$

$$y'^i_{\mu\lambda} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}(\partial_\alpha + y^j_{(\alpha)}\partial_j + y^j_{\nu\alpha}\partial^\nu_j)y'^i_\lambda.$$

Существуют два разных расслоения J^1J^1Y над J^1Y:

- обычное расслоение струй (П.31) над J^1Y

$$\pi_{11} : J^1J^1Y \to J^1Y, \quad y^i_\lambda \circ \pi_{11} = y^i_\lambda,$$

- и расслоение

$$J^1\pi^1_0 : J^1J^1Y \to J^1Y, \quad y^i_\lambda \circ J^1\pi_{01} = y^i_{(\lambda)}.$$

Точки, в которых проекции π_{11} и $J^1\pi^1_0$ совпадают, образуют аффинное расслоение $\widehat{J}^2Y \to J^1Y$, называемое *полуголономным многообразием струй* и задаваемое координатным условием

$$y^i_{(\lambda)} = y^i_\lambda.$$

Оно параметризуется координатами $(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, y^i_{\mu\lambda})$.

Многообразие струй второго порядка J^2Y расслоения $Y \to X$ определяется как подрасслоение $\pi_1^2 : J^2Y \to J^1Y$ расслоения $\widehat{J}^2Y \to J^1Y$, задаваемое координатным условием

$$y^i_{\lambda\mu} = y^i_{\mu\lambda}$$

и параметризуемое координатами $(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, y^i_{\lambda\mu} = y^i_{\mu\lambda})$. Можно дать другое эквивалентное определение многообразия 2-струй J^2Y как объединения всех классов эквивалентности $j^2_x s$ сечений s расслоения $Y \to X$, отождествляемых по их значениям и значениям их частных производных первого и второго порядков в точках $x \in X$:

$$y^i_\lambda(j^2_x s) = \partial_\lambda s^i(x), \quad y^i_{\lambda\mu}(j^2_x s) = \partial_\lambda \partial_\mu s^i(x).$$

Пусть s — сечение расслоения $Y \to X$ и $J^1 s$ — его струйное продолжение до сечения расслоения $J^1Y \to X$. В свою очередь рассмотрим струйное продолжение последнего до сечения J^1J^1s расслоения $J^1J^1Y \to X$. Оно лежит в многообразии струй J^2Y и обозначается J^2s.

Предложение П.5. Пусть $\overline{s}$ — сечение расслоения $J^1Y \to X$ и $J^1\overline{s}$ — его струйное продолжение до сечения расслоения $J^1J^1Y \to X$. Следующие условия эквивалентны:

- сечение $\overline{s}$ является голономным, т.е. $\overline{s} = J^1 s$, где s — некоторое сечение расслоения $Y \to X$;
- сечение $J^1\overline{s}$ принимает значения в $\widehat{J}^2Y$;
- сечение $J^1\overline{s}$ принимает значения в J^2Y.

□

Полная производная

Во многих координатных выражениях на многообразиях струй J^1Y удобно использовать оператор *полной производной*

$$d_\lambda = \partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + y^i_{\lambda\mu}\partial^\mu_i.$$

Он обладает свойствами

$$d_\lambda(\phi \wedge \sigma) = d_\lambda(\phi) \wedge \sigma + \phi \wedge d_\lambda(\sigma),$$
$$d_\lambda(d\phi) = d(d_\lambda(\phi)).$$

Многообразия струй высшего порядка

Многообразие струй k*-го порядка* J^kY расслоения $Y \to X$ состоит из классов эквивалентности $j^k_x s$, $x \in X$, сечений s расслоения Y таких, что сечения s и s' принадлежат одному и тому же классу $j^k_x s$ тогда и только тогда, когда их значения и значения их частных производных до k-го порядка включительно совпадают в точке x. Многообразие струй J^kY параметризуется координатами

$$(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, \ldots, y^i_{\lambda_k \cdots \lambda_1}),$$
$$y^i_{\lambda_l \cdots \lambda_1}(j^k_x s) = \partial_{\lambda_l} \cdots \partial_{\lambda_1} s^i(x), \quad 0 \leqslant l \leqslant k.$$

Всякое сечение s расслоения $Y \to X$ имеет k-струйное продолжение до сечения $J^k s$ расслоения $J^kY \to X$ такое, что

$$y^i_{\lambda_l \cdots \lambda_1} \circ J^k s = \partial_{\lambda_l} \cdots \partial_{\lambda_1} s^i, \quad 0 \leqslant l \leqslant k.$$

Дифференциальные операторы и уравнения

Пусть J^kY — многообразие k-струй расслоения $Y \to X$ и $E \to X$ — векторное расслоение над X. Всякий послойный морфизм

$$\mathscr{E} : J^kY \underset{X}{\to} E$$

над X называется *дифференциальным оператором* k-го порядка на сечениях расслоения Y, или просто на расслоении Y. Он отображает всякое сечение $s(x)$ расслоения $Y \to X$ в сечение $(\mathscr{E} \circ J^k s)(x)$ расслоения $E \to X$. *Ядром* дифференциального оператора называется подмножество

$$\operatorname{Ker} \mathscr{E} = \mathscr{E}^{-1}(\widehat{0}(X)) \subset J^kY, \tag{П.41}$$

где $\widehat{0}$ — нулевое сечение расслоения $E \to X$.

Системой дифференциальных уравнений в частных производных k-го порядка (или просто *дифференциальным уравнением*) на расслоении $Y \to X$ называется замкнутое подрасслоение S расслоения $J^kY \to X$ [4, 19, 33]. Его *решением* считается (локальное) сечение s расслоения $Y \to X$, k-струйное продолжение $J^k s$ которого лежит в S.

В частности, если ядро (П.41) дифференциального оператора $\mathscr{E}$ является замкнутым подрасслоением расслоения $J^kY \to X$, оно задает дифференциальное уравнение, которое коротко можно записать как

$$\mathscr{E} \circ J^k s = 0.$$

Связности

Связность на расслоении $Y \to X$ определяется как глобальное сечение

$$\Gamma : Y \to J^1Y,$$
$$\Gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda(y)),$$

аффинного расслоения струй $J^1Y \to Y$. Всякая такая связность Γ в композициях с морфизмами (П.37) и (П.38) определяет расщепление

$$\widehat{\lambda} \circ \Gamma : TX \to TY, \quad \widehat{\theta}_1 \circ \Gamma : V^*Y \to T^*Y$$

точных последовательностей (П.9 a) и (П.9 b). Соответственно, подставляя $y^i_\lambda = \Gamma^i_\lambda(y)$ в выражения (П.39) и (П.40), мы получаем горизонтальные расщепления касательного расслоения

$$TY = \Gamma(TX) \underset{Y}{\oplus} VY, \tag{П.42}$$
$$\dot{x}^\lambda \partial_\lambda + \dot{y}^i \partial_i = \dot{x}^\lambda(\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda \partial_i) + (\dot{y}^i - \dot{x}^\lambda \Gamma^i_\lambda)\partial_i,$$

и кокасательного расслоения

$$T^*Y = T^*Y \oplus \Gamma(V^*Y), \tag{П.43}$$
$$\dot{x}_\lambda dx^\lambda + \dot{y}_i dy^i = (\dot{x}_\lambda + \Gamma^i_\lambda \dot{y}_i)dx^\lambda + \dot{y}_i(dy^i - \Gamma^i_\lambda dx^\lambda),$$

относительно связности Γ на Y. Эквивалентно расщеплению (П.42) связность Γ определяется как проекция

$$\Gamma : TY \ni \dot{x}^\lambda \partial_\lambda + \dot{y}^i \partial_i \mapsto (\dot{y}^i - \dot{x}^\lambda \Gamma^i_\lambda)\partial_i \in VY. \qquad (П.44)$$

Связности на расслоении $Y \to X$ образуют аффинное пространство, моделируемое над линейным пространством *припаивающих форм*

$$\sigma = \sigma^i_\lambda dx^\lambda \otimes \partial_i.$$

Всякая связность Γ на расслоении $Y \to X$ определяет дифференциальный оператор первого порядка на Y

$$D_\Gamma : J^1Y \ni z \mapsto [z - \Gamma(\pi^1_0(z))] \in T^*X \underset{Y}{\otimes} VY, \qquad (П.45)$$

$$D_\Gamma = (y^i_\lambda - \Gamma^i_\lambda) dx^\lambda \otimes \partial_i,$$

называемый *ковариантным дифференциалом*. Его действие на сечения s расслоения Y имеет вид

$$\nabla^\Gamma s = D_\Gamma \circ J^1 s = [\partial_\lambda s^i - (\Gamma \circ s)^i_\lambda] dx^\lambda \otimes \partial_i \qquad (П.46)$$

и называется ковариантным дифференцированием. В частности, сечение s именуется *интегральным сечением* для связности Γ, если $\nabla^\Gamma s = 0$, т. е. $\Gamma \circ s = J^1 s$. Для всякого сечения s расслоения $Y \to X$ существует связность Γ на $Y \to X$, которая имеет s своим интегральным сечением. Она является продолжением локального сечения $s(x) \mapsto J^1 s(x)$ расслоения струй $J^1Y \to Y$ на замкнутом подмногообразии $s(X) \subset Y$.

Связность Γ на расслоении $Y \to X$ задает *горизонтальный лифт*

$$\Gamma\tau = \tau^\lambda(\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda \partial_i) \qquad (П.47)$$

на Y всякого векторного поля $\tau = \tau^\lambda \partial_\lambda$ на X.

Кривизна связности

Кривизной связности Γ на расслоении $Y \to X$ называется 2-форма

$$R = \frac{1}{2} R^i_{\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i,$$

$$R^i_{\lambda\mu} = \partial_\lambda \Gamma^i_\mu - \partial_\mu \Gamma^i_\lambda + \Gamma^j_\lambda \partial_j \Gamma^i_\mu - \Gamma^j_\mu \partial_j \Gamma^i_\lambda. \qquad (П.48)$$

Линейные связности

Пусть $Y \to X$ — векторное расслоение. *Линейная связность* на Y имеет вид

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + \Gamma_\lambda{}^i{}_j(x) y^j \partial_i].$$

Ей соответствует *дуальная линейная связность*

$$\Gamma^* = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda - \Gamma_\lambda{}^j{}_i(x) y_j \partial^i]$$

на дуальном векторном расслоении $Y^* \to X$. Например, линейная связность K на касательном расслоении TX к многообразию X и дуальная связность K^* на кокасательном расслоении T^*X имеют вид

$$K = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + K_\lambda{}^\alpha{}_\nu(x) \dot{x}^\nu \dot{\partial}_\alpha),$$

$$K^* = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda - K_\lambda{}^\mu{}_\nu(x) \dot{x}_\mu \dot{\partial}^\nu).$$

Аффинные связности

Пусть $Y \to X$ — аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $\overline{Y} \to X$. *Аффинная связность* на Y имеет вид

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + (\Gamma_\lambda{}^i{}_j(x)y^j + \Gamma^i_\lambda(x))\partial_i],$$

где

$$\overline{\Gamma} = dx^\lambda \otimes \left[\partial_\lambda + \Gamma_\lambda{}^i{}_j(x)\overline{y}^j \frac{\partial}{\partial \overline{y}^i}\right]$$

— линейная связность на $\overline{Y}$.

Плоские связности

Всякая связность Γ на расслоении $Y \to X$ определяет *горизонтальное распределение* $\Gamma(TX) \subset TY$ на Y, порождаемое векторными полями (П.47). Следующие условия эквивалентны.

- Горизонтальное распределение является инволютивным.
- Связность Γ — *плоская*, т. е. ее кривизна всюду равна нулю.
- Через всякую точку $y \in Y$ проходит (локальное) интегральное сечение для связности Γ.

Таким образом, плоская связность Γ на $Y \to X$ определяет интегрируемое горизонтальное распределение, т. е. *горизонтальное слоение* на Y, которое трансверсально расслоению $Y \to X$. Его слой через точку $y \in Y$ задается локально интегральным сечением s_y для связности Γ через y. Обратно, пусть на расслоении $Y \to X$ существует горизонтальное слоение такое, что для любой точки $y \in Y$ слой этого слоения через y задается локально сечением s_y расслоения $Y \to X$, проходящим через y. Тогда морфизм

$$\Gamma : Y \to J^1Y,$$
$$\Gamma(y) = j^1_x s_y, \quad \pi(y) = x,$$

определяет плоскую связность на Y. Существует взаимно однозначное соответствие между плоскими связностями и горизонтальными слоениями на расслоении $Y \to X$.

В свою очередь, для каждого горизонтального слоения на $Y \to X$ имеется атлас послойных координат (x^λ, y^i) на Y такой, что функции перехода $y^i \to y'^i(y^j)$ не зависят от координат x^λ (он называется *атласом локально постоянных тривиализаций*), а слои этого слоения локально определяются уравнениями $y^i = \text{const}$ [21, 33]. Два атласа локально постоянных тривиализаций считаются эквивалентными, если их объединение тоже является таким атласом. Они ассоциированы с одним и тем же горизонтальным слоением. В результате имеет место взаимно однозначное соответствие между плоскими связностями Γ на расслоении $Y \to X$ и классами эквивалентности атласов локально постоянных тривиализаций расслоения Y таких, что $\Gamma^i_\lambda = 0$ в координатах, ассоциированных с этими атласами.

Композиционные расслоения

Рассмотрим композицию расслоений

$$Y \to \Sigma \to X, \tag{П.49}$$

где

$$\pi_{Y\Sigma} : Y \to \Sigma \tag{П.50}$$

и

$$\pi_{\Sigma X} : \Sigma \to X \tag{П.51}$$

— расслоения. Назовем (П.49) *композиционным расслоением.* Композиционное расслоение (П.49) наделяется атласом послойных координат $(x^\lambda, \sigma^m, y^i)$, где (x^μ, σ^m) — послойные координаты на расслоении (П.51). Отличие композиционного расслоения (П.49) от просто расслоения $Y \to X$ состоит в том, что преобразования координат $\sigma^m \to \sigma'^m(x^\lambda, \sigma^k)$ не зависят от координат y^i.

Следующие два факта существенны для применения композиционных расслоений [33, 65].

Предложение П.6. Для любого сечения h расслоения $\Sigma \to X$ и любого сечения s_Σ расслоения $Y \to \Sigma$ их композиция

$$s = s_\Sigma \circ h \tag{П.52}$$

является сечением композиционного расслоения Y (П.49). Обратно, всякое глобальное сечение s расслоения $Y \to X$ представляет собой композицию (П.52) сечения $h = \pi_{Y\Sigma} \circ s$ расслоения $\Sigma \to X$ и некоторого локального сечения s_Σ расслоения $Y \to \Sigma$ на подмногообразии $h(X) \subset \Sigma$. □

Предложение П.7. Для всякого сечения h расслоения $\Sigma \to X$ ограничение

$$Y_h = h^*Y \tag{П.53}$$

расслоения $Y \to \Sigma$ на $h(X) \subset \Sigma$ является подрасслоением

$$i_h : Y_h \hookrightarrow Y$$

расслоения $Y \to X$. □

Рассмотрим многообразия струй $J^1\Sigma$, $J^1_\Sigma Y$ и J^1Y расслоений $\Sigma \to X$, $Y \to \Sigma$ и $Y \to X$, наделенные соответственно координатами

$$(x^\lambda, \sigma^m, \sigma^m_\lambda), \quad (x^\lambda, \sigma^m, y^i, \widetilde{y}^i_\lambda, y^i_m), \quad (x^\lambda, \sigma^m, y^i, \sigma^m_\lambda, y^i_\lambda).$$

Существует каноническое отображение

$$\rho : J^1\Sigma \underset{\Sigma}{\times} J^1_\Sigma Y \underset{Y}{\longrightarrow} J^1Y, \tag{П.54}$$
$$y^i_\lambda \circ \rho = y^i_m \sigma^m_\lambda + \widetilde{y}^i_\lambda.$$

В частности, пусть

$$A_\Sigma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \widetilde{A}^i_\lambda \partial_i) + d\sigma^m \otimes (\partial_m + A^i_m \partial_i) \tag{П.55}$$

— связность на расслоении $Y \to \Sigma$ и

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma^m_\lambda \partial_m)$$

— связность на расслоении $\Sigma \to X$. Тогда в соответствии с морфизмом (П.54) определена связность

$$A = dx^\lambda \otimes \left[\partial_\lambda + \Gamma^m_\lambda \partial_m + (A^i_m \Gamma^m_\lambda + \widetilde{A}^i_\lambda)\partial_i\right] \tag{П.56}$$

на композиционном расслоении $Y \to X$. Она называется *композиционной связностью* и удовлетворяет тому свойству, что горизонтальный лифт $\Gamma\tau$ на Σ всякого векторного поля τ на X посредством связности Γ, а потом его горизонтальный лифт $A_\Sigma(\Gamma\tau)$ с Σ на Y посредством связности A_Σ в точности совпадает с горизонтальным лифтом $A\tau$ векторного поля τ с X непосредственно на Y с помощью композиционной связности (П.56).

Для композиционного расслоения Y (П.49) имеет место следующая точная последовательность вертикальных касательных расслоений:

$$0 \to V_\Sigma Y \hookrightarrow VY \to Y \underset{\Sigma}{\times} V\Sigma \to 0, \tag{П.57}$$

помимо известной точной последовательности (П.9 а). В дальнейшем $V_\Sigma Y$ обозначает вертикальное касательное расслоение к расслоению $Y \to \Sigma$. Всякая связность A_Σ (П.55) на расслоении $Y \to \Sigma$ задает расщепление

$$VY = V_\Sigma Y \underset{Y}{\oplus} A_\Sigma(Y \underset{\Sigma}{\times} V\Sigma), \tag{П.58}$$

$$\dot{y}^i \partial_i + \dot{\sigma}^m \partial_m = (\dot{y}^i - A^i_m \dot{\sigma}^m)\partial_i + \dot{\sigma}^m(\partial_m + A^i_m \partial_i).$$

Исходя из этого расщепления, может быть построен дифференциальный оператор первого порядка

$$\widetilde{D} : J^1 Y \to T^*X \underset{Y}{\otimes} V_\Sigma Y,$$

$$\widetilde{D} = dx^\lambda \otimes (y^i_\lambda - \widetilde{A}^i_\lambda - A^i_m \sigma^m_\lambda)\partial_i, \tag{П.59}$$

на композиционном расслоении Y. В частности, он может быть введен как композиция

$$\widetilde{D} = \mathrm{pr}_1 \circ D_A : J^1 Y \to T^*X \underset{Y}{\otimes} VY \to T^*X \underset{Y}{\otimes} VY_\Sigma,$$

где D_A — ковариантный дифференциал (П.45) относительно композиционной связности A, порождаемой связностью A_Σ и некоторой связностью Γ на расслоении $\Sigma \to X$. При этом результат не зависит от выбора Γ.

Оператор (П.59) называется *вертикальным ковариантным дифференциалом* [33, 65]. Он обладает следующим примечательным свойством. Пусть h — сечение расслоения $\Sigma \to X$ и Y_h — подрасслоение (П.53) композиционного расслоения $Y \to X$, являющееся ограничением расслоения $Y \to \Sigma$ на $h(X)$. Тогда вертикальный ковариантный дифференциал $\widetilde{D}$ (П.59), ограниченный на $J^1 i_h(J^1 Y_h) \subset J^1 Y$, совпадает с обычным ковариантным дифференциалом относительно связности

$$A_h = dx^\lambda \otimes \left[\partial_\lambda + (A^i_m \partial_\lambda h^m + (\widetilde{A} \circ h)^i_\lambda)\partial_i\right] \tag{П.60}$$

на Y_h, получаемой ограничением на $h(X)$ связности A_Σ в соответствии с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} J^1Y_h & \xrightarrow{J^1 i_h} & J^1Y \\ {\scriptstyle A_h}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle A_\Sigma} \\ Y_h & \xrightarrow{i_h} & Y \end{array}$$

Пример П.3. Пусть $\Gamma : Y \to J^1Y$ — связность на расслоении $Y \to X$. Тогда согласно каноническому изоморфизму $VJ^1Y \cong J^1VY$ (П.36) вертикальный касательный морфизм $V\Gamma : VY \to VJ^1Y$ к Γ задает связность

$$V\Gamma : VY \to J^1VY,$$
$$V\Gamma = dx^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda \frac{\partial}{\partial y^i} + \partial_j \Gamma^i_\lambda \dot{y}^j \frac{\partial}{\partial \dot{y}^i}\right), \qquad \text{(П.61)}$$

на вертикальном касательном расслоении $VY \to Y \to X$. Дуальная ей связность на вертикальном кокасательном расслоении $V^*Y \to Y \to X$ имеет вид

$$V^*\Gamma : V^*Y \to J^1V^*Y,$$
$$V^*\Gamma = dx^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda \frac{\partial}{\partial y^i} - \partial_j \Gamma^i_\lambda \dot{y}_i \frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}\right). \qquad \text{(П.62)}$$

□

Пучки

Имеется несколько эквивалентных определений пучков [2, 8]. Для нас целесообразно исходить из следующего. *Пучком* на топологическом пространстве X называется топологическое расслоение $S \to X$, слоями которого (*стеблями* пучка) являются абелевы группы S_x, наделенные дискретной топологией.

Предпучок считается заданным на топологическом пространстве X, если каждому открытому множеству $U \subset X$ сопоставлена некоторая абелева группа S_U ($S_\varnothing = 0$), а каждой паре открытых множеств $V \subset U$ сопоставлен гомоморфизм

$$r^U_V : S_U \to S_V$$

такой, что

$$r^U_U = \mathrm{id}\, S_U,$$
$$r^U_W = r^V_W r^U_V, \quad W \subset V \subset U.$$

Пример П.4. Пусть X — топологическое пространство, S_U — абелева группа по сложению всех непрерывных вещественных функций, определенных на $U \subset X$, а гомоморфизм

$$r^U_V : S_U \to S_V$$

определяется как сужение их на $V \subset X$. Тогда $\{S_U, r^U_V\}$ — предпучок. □

Всякий предпучок $\{S_U, r^U_V\}$ на топологическом пространстве X определяет пучок. Стеблем этого пучка S_x в точке $x \in X$ служит прямой предел абелевых групп S_U, $x \in U$,

по отношению к гомоморфизмам r_V^U. Это означает, что для всякой открытой окрестности U точки x каждый элемент $s \in S_U$ задает некоторый элемент $s_x \in S_x$, называемый *ростком* элемента s в точке x, причем два элемента $s \in S_U$ и $s' \in S_V$ определяют один и тот же росток тогда и только тогда, когда существует такая окрестность $W \ni x$, что

$$r_W^U s = r_W^V s'.$$

В частности, вещественные функции s, s' на X определяют один и тот же росток s_x, если они совпадают на некоторой окрестности W точки x. Пучок, порождаемый предпучком из Примера П.4, называется *пучком ростков непрерывных функций.* Если X — многообразие, то соответствующим образом определяется пучок ростков гладких функций.

Пример П.5. Пусть X — топологическое пространство и S_U — абелева группа всех постоянных вещественных функций на U. Росток s_x элемента $s \in S_U$, $x \in U$, однозначно определяется значением $s(x)$ в точке x. Стеблем S_x является множество действительных чисел $\mathbb{R}$, в котором введена дискретная топология. Это *постоянный пучок с коэффициентами в* $\mathbb{R}$. □

Два разных предпучка могут порождать один и тот же пучок. Например, тот же пучок ростков непрерывных функций порождается и предпучком только ограниченных функций.

Обратно, по пучку можно построить предпучок, если всякому открытому подмножеству $U \subset X$ сопоставить абелеву группу $\Gamma(U, S)$ сечений пучка S на $U \subset X$. В результате получим предпучок $\{\Gamma(U, S), r_V^U\}$, называемый *каноническим предпучком* пучка S. Можно показать, что пучок, порождаемый каноническим предпучком $\{\Gamma(U, S), r_V^U\}$, совпадает с исходным пучком S, поэтому для простоты мы будем отождествлять понятия "пучок" и "канонический предпучок".

Глава 1

Симплектическая механика

В этой главе описываются основные структуры гамильтоновой механики. Мы начнем со структуры Якоби, частным случаем которой являются структура Пуассона и симплектическая структура. Заметим, что, в отличие от механики консервативных систем, в неавтономной механике отсутствует симплектическая структура, но вводится каноническая структура Пуассона. Рассматривается также более общая по сравнению с симплектической пресимплектическая структура. Она играет важную роль при описании систем со связями, поскольку сужение симплектической формы на подпространство фазового пространства является в общем случае именно пресимплектической формой. Мы не углубляемся здесь в общую динамику консервативных систем, рассматривая ее как частный случай неавтономной механики, но системам со связями уделяется особое внимание. В заключительных параграфах этой главы приводятся некоторые варианты расширения скобок Пуассона и обобщения симплектической структуры, которые сейчас обсуждаются в литературе. Одно из таких обобщений — полисимплектическая структура, — служит, как уже отмечалось, основой гамильтоновой формулировки классической теории поля и исходным пунктом гамильтоновой формулировки неавтономной механики.

Всюду в этой главе, если специально не оговорено, Z — k-мерное многообразие, параметризуемое координатами (z^λ).

В целях сокращения записи (S-N)-скобки $[\,.\,,\,.\,]_{SN}$ будут обозначаться просто $[\,.\,,\,.\,]$.

§ 1. Структура Якоби

Скобками Якоби (*структурой Якоби*) на многообразии Z называется билинейное отображение

$$\mathscr{O}^0(Z) \times \mathscr{O}^0(Z) \ni (f, g) \to \{f, g\} \in \mathscr{O}^0(Z)$$

на векторном пространстве $\mathscr{O}^0(Z)$ вещественных функций на Z, удовлетворяющее условиям:

(A1) $\{g, f\} = -\{f, g\}$ (антисимметричность),

(A2) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (*тождество Якоби*),

(A3) носитель $\{f, g\}$ содержится в пересечении носителей f и g.

Скобки Якоби наделяют векторное пространство $\mathscr{O}^0(Z)$ вещественных функций на многообразии Z структурой алгебры Ли. В явном виде скобки Якоби можно задать следующим образом.

Предложение 1.1. Скобки Якоби на многообразии Z однозначно определяются соотношением

$$\{f, g\} = w(df, dg) + u \lrcorner (f\,dg - g\,df), \tag{1.1}$$

где u — векторное и w — бивекторное поля на Z такие, что

$$[u, w] = 0, \quad [w, w] = 2u \wedge w \tag{1.2}$$

[47]. □

Пример 1.1. Выбирая бивекторное поле $w = 0$ в (1.1), находим, что всякое векторное поле u на многообразии Z задает скобки Якоби

$$\{f, g\} = u \lrcorner (f\,dg - g\,df).$$

Соотношения (1.2), очевидно, выполняются. □

Скобки Якоби (1.1), в которых векторное поле $u = 0$, называются скобками Пуассона. Из Предложения 1.1 следует, что бивекторное поле w на многообразии Z задает скобки Пуассона тогда и только тогда, когда

$$[w, w] = 0.$$

Такое бивекторное поле называется *пуассоновым*.

Замечание 1.2. Пусть

$$w = \frac{1}{2} w^{\mu\nu} \partial_\mu \wedge \partial_\nu$$

— бивекторное поле. Получим координатное выражение для (S-N)-скобок

$$[w, w] = \frac{1}{2} w^{\mu\lambda_1} \partial_\mu w^{\lambda_2\lambda_3} \partial_{\lambda_1} \wedge \partial_{\lambda_2} \wedge \partial_{\lambda_3}.$$

Всякое бивекторное поле w на многообразии Z определяет послойный морфизм

$$w^\sharp : T^*Z \to TZ$$

над Z согласно соотношению

$$w^\sharp(\alpha) \lrcorner \beta = w(z)(\alpha, \beta), \quad z \in Z, \quad \alpha, \beta \in T_z^*Z, \tag{1.3}$$
$$w^\sharp(\alpha) = w^{\mu\nu}(z)\alpha_\mu \partial_\nu.$$

Этот морфизм является изоморфизмом, если бивекторное поле невырождено. Невырожденное бивекторное поле в силу своей антисимметричности существует только на многообразиях четной размерности. В этой связи напомним, что фазовое пространство автономной механики является четномерным, тогда как фазовое пространство неавтономной механики — нечетномерным. □

§ 2. Контактная структура

Нечетномерные многообразия могут быть наделены контактной структурой.

Определение 1.2. 1-форма θ на $(2m + 1)$-мерном многообразии Z называется *контактной формой*, если

$$\theta \wedge (d\theta)^m \neq 0$$

всюду на Z. Пара (Z, θ) именуется *контактным многообразием*. □

Заметим, что внешний дифференциал $d\theta$ контактной формы θ является пресимплектической формой ранга $2m$ (см. Определение 1.11).

Следующее утверждение является вариантом известной теоремы Дарбу [46].

Теорема 1.3. Для любой точки z $(2m+1)$-мерного контактного многообразия (Z, θ) существуют открытая окрестность U и локальная система координат $(z^0, \ldots, z^{2m})$ на U такие, что θ на U принимает вид

$$\theta = dz^0 - \sum_{i=1}^{m} z^{m+i} dz^i.$$

Эти координаты называются *координатами Дарбу*. □

Контактная структура и структура Якоби связаны следующим образом.

Предложение 1.4. Для всякой контактной формы θ на многообразии Z существует единственное неособое векторное поле E на Z такое, что

$$E \lrcorner \theta = 1, \quad E \lrcorner d\theta = 0 \tag{1.4}$$

[46]. Легко видеть, что в координатах Дарбу это векторное поле имеет вид $E = \partial_0$. Оно называется *векторным полем Риба*. □

Предложение 1.5. Контактная форма θ на $(2m+1)$-мерном многообразии Z определяет на нем структуру Якоби, задаваемую векторным полем Риба E (1.4) и бивекторным полем w таким, что

$$\begin{aligned} w^\sharp \phi \lrcorner \theta &= 0, \\ w^\sharp \phi \lrcorner d\theta &= -(\phi - (E \lrcorner \phi)\theta) \end{aligned} \tag{1.5}$$

для произвольной 1-формы ϕ на Z. [47]. □

В координатах Дарбу скобки Якоби (1.1), определяемые контактной формой, имеют вид

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{m} (\partial_{m+i} g \partial_i f - \partial_{m+i} f \partial_i g) + (\tilde{g}\partial_0 f - \tilde{f}\partial_0 g),$$

где

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^{m} z^{m+i} \partial_{m+i} f - f,$$

$$\tilde{g} = \sum_{i=1}^{m} z^{m+i} \partial_{m+i} g - g.$$

§ 3. Структура Пуассона

Структура Пуассона является ключевой для гамильтоновой формулировки как автономной, так и неавтономной механики. В автономной механике это, как правило, симплектическая структура.

Как уже отмечалось, бивекторное поле

$$w = \frac{1}{2} w^{\mu\nu} \partial_\mu \wedge \partial_\nu$$

на многообразии Z определяет на нем *скобки Пуассона* (*структуру Пуассона*)

$$\{f, g\} = w(df, dg) \tag{1.6}$$

тогда и только тогда, когда оно пуассоново, т. е.

$$[w, w] = 0, \quad w^{\mu\lambda_1}\partial_\mu w^{\lambda_2\lambda_3} + w^{\mu\lambda_2}\partial_\mu w^{\lambda_3\lambda_1} + w^{\mu\lambda_3}\partial_\mu w^{\lambda_1\lambda_2} = 0.$$

Помимо свойств (A1–A3), скобки Пуассона (1.6) удовлетворяют также *правилу Лейбница*

$$\{h, fg\} = \{h, f\}g + f\{h, g\}.$$

Многообразие Z, наделенное пуассоновым бивекторным полем w, называется *пуассоновым многообразием*.

Пример 1.3. Всякое многообразие допускает *нулевую структуру Пуассона*, характеризуемую нулевым бивекторным полем $w = 0$. □

Структура Пуассона (1.6) называется *регулярной*, если задаваемый бивектором w морфизм $w^\sharp : T^*Z \to TZ$ (1.3) имеет постоянный ранг. В дальнейшем рассматриваются только регулярные структуры Пуассона.

Структура Пуассона (1.6) называется *невырожденной*, если морфизм $w^\sharp$ (1.3) — изоморфизм. Как уже отмечалось, невырожденная структура Пуассона может существовать на многообразиях только четной размерности.

Функция C на пуассоновом многообразии (Z, w) называется *функцией Казимира*, если

$$\{C, f\} = 0, \quad \forall f \in \mathscr{O}^0(Z).$$

Очевидно, что в случае невырожденной структуры Пуассона функции Казимира могут быть только константами.

Определение 1.6. Отображение $\zeta : Z \to Z'$ пуассонова многообразия (Z, w) в пуассоново многообразие (Z', w') называется *пуассоновым морфизмом*, если для любой пары функций f, g на Z' справедливо равенство

$$\{f \circ \zeta, g \circ \zeta\} = \{f, g\}' \circ \zeta.$$

□

В общем случае структура Пуассона на многообразии Z не переносится на Z' при отображении многообразий $Z \to Z'$ и не индуцируется на Z' при отображении $Z' \to Z$. Приведем условия, когда такое возможно.

Предложение 1.7. Пусть (Z, w) — пуассоново многообразие и $\pi : Z \to Y$ — расслоение. Следующие свойства эквивалентны:

- для любой пары функций (f, g) на Y и для всякой точки $y \in Y$ функция $\{f \circ \pi, g \circ \pi\}$ постоянна на слое $\pi^{-1}(y)$;

- на многообразии Y существует структура Пуассона $\{.,.\}'$ такая, что π — пуассонов морфизм, т. е.

$$\{f \circ \pi, g \circ \pi\} = \{f, g\}' \circ \pi.$$

Если такая структура Пуассона существует, она единственна [46]. □

Прямое произведение $Z \times Z'$ пуассоновых многообразий (Z, w) и (Z', w') наделяется естественной структурой Пуассона, задаваемой пуассоновым бивекторным полем $w \oplus w'$ на $Z \times Z'$. Она называется *прямым произведением структур Пуассона.* При этом проекции pr_1 и pr_2 являются пуассоновыми морфизмами.

Задание на многообразии Z структуры Пуассона выделяет на нем подкласс гамильтоновых векторных полей — ключевых объектов гамильтоновой динамики.

Определение 1.8. Пусть f — некоторая функция на пуассоновом многообразии (Z, w). Образ

$$\vartheta_f = w^\sharp df,$$
$$\vartheta_f = w^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu,$$

ее дифференциала df относительно морфизма $w^\sharp$ называется *гамильтоновым векторным полем*, ассоциированным с f. □

В силу определения гамильтоновы векторные поля ϑ_f удовлетворяют соотношениям

$$\vartheta_f \lrcorner dg = \{f, g\}, \quad \forall g \in \mathscr{O}^0(Z), \tag{1.7}$$
$$[\vartheta_f, \vartheta_g] = \vartheta_{\{f,g\}}. \tag{1.8}$$

Пример 1.4. С функцией Казимира на пуассоновом многообразии ассоциировано всюду нулевое гамильтоново векторное поле. □

Соотношение (1.8) наделяет множество гамильтоновых векторных полей структурой вещественной алгебры Ли.

Значения гамильтоновых векторных полей образуют $2m$-мерное *характеристическое распределение* на многообразии Пуассона (Z, w). Из соотношения (1.8) следует, что это распределение инволютивно, а значит, согласно Теореме П.3 интегрируемо. Соответствующее слоение называется *характеристическим.*

Теорема 1.9. Структура Пуассона порождает симплектическую структуру (см. § 1.4) на слоях характеристического слоения, которое поэтому называется также *симплектическим слоением* [71]. □

Для симплектического слоения существуют локальные координаты

$$(\ldots, z^{2m+1}, \ldots, z^k),$$

описанные в Следствии П.4. Более того, эти координаты можно выбрать таким образом, что скобки Пуассона принимают следующий канонический вид [71, 74].

Предложение 1.10. В окрестности всякой точки z многообразия Пуассона существует система координат

$$(y^1, \ldots, y^m, p_1, \ldots, p_m, z^{2m+1}, \ldots, z^k)$$

такая, что

$$\{p_i, y^j\} = \delta_i^j, \tag{1.9}$$
$$\{y^i, y^j\} = \{p_i, p_j\} = \{y^i, z^A\} = \{p_i, z^A\} = \{z^A, z^B\} = 0.$$

Эти координаты называются *каноническими*. □

В локальных канонических координатах (1.9) скобки Пуассона (1.6) даются выражениями

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial y^i} - \frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial g}{\partial p_i},$$

а функциями Казимира являются произвольные функции от координат z^A. Соответственно, гамильтоново векторное поле, ассоциированное с функцией f, принимает вид

$$\vartheta_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial y^i} - \frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Замечание 1.5. Теорему 1.9 можно переформулировать в следующем виде: всякая структура Пуассона на многообразии Z локально представляет собой прямое произведение симплектической структуры и нулевой структуры Пуассона. В частности, если структура Пуассона невырождена, характеристическое распределение совпадает с TZ, а характеристическое слоение имеет единственный слой — само многообразие Z, которое наделено симплектической структурой (см. Предложение 1.13). □

§ 4. Симплектическая структура

Невырожденная структура Пуассона на многообразии Z определяет на нем симплектическую структуру и обратно.

Всякая 2-форма

$$\Omega = \frac{1}{2}\,\Omega_{\mu\nu} dz^\mu \wedge dz^\nu \tag{1.10}$$

на k-мерном многообразии Z задает послойный морфизм

$$\begin{aligned} &\Omega^\flat : TZ \to T^*Z, \\ &\Omega^\flat(v) = -v \lrcorner \Omega(z), \quad v \in T_zZ, \\ &\Omega^\flat(v) = -\Omega_{\mu\nu} v^\mu dz^\nu. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Говорят, что форма Ω (1.10) в точке z имеет *ранг* r, если в этой точке имеет ранг r морфизм (1.11). Это максимальное из чисел $2k$ таких, что внешнее произведение $\overset{k}{\wedge}\Omega$ нигде не обращается в 0.

Назовем *ядром* 2-формы Ω множество

$$\operatorname{Ker}\Omega = \bigcup_{z\in Z} \{v \in T_zZ : v \lrcorner u \lrcorner \Omega = 0,\ \forall u \in T_zZ\}, \tag{1.12}$$

которое является ядром морфизма (1.11). Очевидно, что всякий его слой $\operatorname{Ker}_z\Omega$ над точкой $z \in Z$ образует векторное подпространство касательного пространства T_zZ, коразмерность которого равна рангу Ω в точке z. Если 2-форма Ω имеет один и тот же

ранг r во всех точках, то ее ядро (1.12) является распределением, т. е. подрасслоением касательного расслоения TZ.

Форма Ω (1.10) называется невырожденной, если ее ранг равен $\dim Z$. Невырожденная 2-форма Ω может существовать на многообразии только четной размерности $2m$. Тогда $\overset{m}{\wedge}\Omega$ всюду отлична от 0 и является элементом объема на многообразии Z.

Определение 1.11. Внешняя 2-форма Ω на многообразии Z называется *пресимплектической*, если она замкнута, т. е. $d\Omega = 0$. Пресимплектическая форма именуется *симплектической*, если она невырождена. Многообразие, наделенное симплектической формой, называется *симплектическим многообразием*. □

Используя формулу (П.20), легко проверить, что ядро $\operatorname{Ker}\Omega$ (1.12) пресимплектической формы Ω постоянного ранга образует инволютивное распределение и определяет слоение на многообразии Z. При сужении на слои этого слоения форма Ω обращается в 0.

В отличие от структуры Пуассона, пресимплектическая структура индуцируется на произвольном многообразии Z при его отображении $\zeta : Z \to Z'$ в пресимплектическое многообразие (Z', Ω'). Очевидно, что индуцированная форма $\zeta^*\Omega'$ является пресимплектической формой на Z. Ясно, что, если Ω' — симплектическая форма, индуцированная форма $\zeta^*\Omega'$ не обязательно симплектическая.

Определение 1.12. Отображение $\zeta : Z \to Z'$ симплектического многообразия (Z, Ω) в симплектическое многообразие (Z', Ω') называется *симплектоморфизмом*, если $\Omega = \zeta^*\Omega'$. □

Установим связь между структурами Пуассона и симплектическими структурами.

Предложение 1.13. На многообразии Z четной размерности $2m$ имеет место взаимно однозначное соответствие между симплектическими формами Ω и невырожденными пуассоновыми бивекторными полями w. Оно дается соотношениями

$$w(\phi, \sigma) = \Omega(w^\sharp\phi, w^\sharp\sigma), \quad \Omega(\vartheta, \nu) = w(\Omega^\flat\vartheta, \Omega^\flat\nu), \qquad (1.13)$$
$$\phi, \sigma \in \mathscr{O}^1(Z), \quad \vartheta, \nu \in \mathscr{T}_1(Z),$$

(см. формулы (1.3) и (1.11)). □

Равенства (1.13) имеют координатный вид

$$\Omega_{\alpha\beta}w^{\alpha\nu} = \delta^\beta_\nu.$$

В частности, канонические координаты для невырожденного пуассонова бивекторного поля w являются каноническими и для соответствующей ему симплектической формы Ω. В этих координатах они имеют вид

$$\Omega = dp_i \wedge dy^i, \quad w = \partial^i \wedge \partial_i.$$

Замечание 1.6. Ввиду указанного в Предложении 1.13 соответствия структуру Пуассона иногда называют *косимплектической структурой*. □

Фазовое пространство в автономной механике по определению считается симплектическим многообразием. При этом в физических моделях мы ограничимся следующим частным случаем симплектических многообразий.

Пример 1.7. Пусть M — многообразие с координатами (y^i) и T^*M — кокасательное расслоение с голономными координатами (y^i, p_i). Расслоение T^*M наделено *канонической формой Лиувилля*

$$\theta = p_i dy^i.$$

Она определяется условием

$$v \lrcorner \theta(p) = T\pi_{*M}(v) \lrcorner p, \quad \forall v \in T_pT^*M, \quad p \in T^*M.$$

Ее внешний дифференциал задает *каноническую симплектическую форму*

$$\Omega = d\theta = dp_i \wedge dy^i \tag{1.14}$$

на T^*M, для которой любые голономные координаты на T^*M являются каноническими.

Форма (1.14) не является единственной симплектической формой на кокасательном расслоении T^*M. Для всякой замкнутой 2-формы ϕ на M, форма

$$\Omega + \pi^*_{*M}\phi \tag{1.15}$$

также является симплектической формой на T^*M такой, что

$$\phi = \widehat{0}^*(\Omega + \pi^*_{*M}\phi),$$

где $\widehat{0}$ — глобальное нулевое сечение расслоения $T^*M \to M$. Отсюда следует, что всякая пресимплектическая форма ϕ на многообразии M может быть представлена как индуцированная некоторой симплектической формой, например, формой (1.15) на T^*M. □

Каноническая симплектическая форма (1.14) играет особую роль в симплектической геометрии в силу приведенной ниже теоремы Дарбу [46], которая может быть получена как следствие Предложений 1.10 и 1.13.

Теорема 1.14. В некоторой окрестности U всякой точки $z \in Z$ симплектического многообразия (Z, Ω) имеется локальная система канонических координат

$$(y^1, \ldots, y^m, p_1, \ldots, p_m)$$

такая, что Ω на U дается координатным выражением (1.14). □

Симплектическая форма Ω на многообразии Z задает изоморфизм расслоений

$$\Omega^\flat : TZ \to T^*Z$$

(1.11), который в локальных канонических координатах (y^i, p_i) на Z имеет вид

$$\Omega^\flat : v^i\partial_i + v_i\partial^i \mapsto -v_i dy^i + v^i dp_i.$$

Соответствующее ей невырожденное пуассоново бивекторное поле w определяет обратный изоморфизм

$$w^\sharp = -(\Omega^\flat)^{-1} : T^*Z \to TZ$$

(1.3), который в локальных канонических координатах имеет вид

$$w^\sharp : v_i dy^i + v^i dp_i \mapsto -v^i \partial_i + v_i \partial^i.$$

В частности, гамильтоновы векторные поля на симплектическом многообразии могут быть определены следующим образом.

Определение 1.15. Векторное поле ϑ на симплектическом многообразии (Z, Ω) называется *локально гамильтоновым* [соотв. *гамильтоновым*], если форма $\vartheta \lrcorner \Omega$ является замкнутой [соотв. точной]. □

Из этого определения непосредственно следует, что:

- векторное поле ϑ локально гамильтоново тогда и только тогда, когда оно является генератором локальной 1-параметрической группы локальных симплектоморфизмов, т. е.
$$\mathbf{L}_\vartheta \Omega = d(\vartheta \lrcorner \Omega) = 0;$$
- векторное поле ϑ является гамильтоновым, только если оно является гамильтоновым согласно Определению 1.8 для некоторой функции f на Z, и тогда
$$\vartheta_f \lrcorner \Omega = -df; \tag{1.16}$$
- скобки Пуассона, определяемые симплектической формой Ω, имеют вид
$$\{f, g\} = \vartheta_g \lrcorner \vartheta_f \lrcorner \Omega.$$

Из формулы (1.16) видно, что гамильтоново векторное поле ϑ_f касательно к слоям сингулярного слоения поверхностей уровня функции f в ее неособых точках.

Пример 1.8. Рассмотрим кокасательное расслоение T^*M с канонической симплектической формой Ω (1.14). Пусть $u = u^i \partial_i$ — векторное поле на M. Тогда его канонический лифт
$$\tilde{u} = u^i \partial_i - p_j \partial_i u^j \partial^i \tag{1.17}$$
на T^*M является гамильтоновым:
$$\tilde{u} \lrcorner \Omega = -d(u^i p_i).$$
□

Замечание 1.9. Нужно отметить, что в литературе встречается определение гамильтонова векторного поля, которое отличается знаком от (1.16) [12]. □

Выделяют следующие классы подмногообразий симплектического многообразия. Пусть (Z, Ω) — симплектическое многообразие и N — его подмногообразие. Рассмотрим множество
$$\mathrm{Ker}^N \Omega = \bigcup_{z \in N} \{v \in T_z Z : v \lrcorner u \lrcorner \Omega = 0, \quad \forall u \in T_z N\}. \tag{1.18}$$
Оно называется *относительным ядром симплектической формы.*

Подмногообразие $N \subset Z$ именуется

- *изотропным*, если $TN \subset \mathrm{Ker}^N\,\Omega$,
- *коизотропным*, если $\mathrm{Ker}^N\,\Omega \subset TN$,
- *лагранжевым*, если $\mathrm{Ker}^N\,\Omega = TN$,
- *симплектическим*, если сужение $i_N^*\Omega$ симплектической формы Ω на N — симплектическая форма.

Как следует из определений, симплектическая форма, ограниченная на изотропное или лагранжево подмногообразие, обращается в 0.

Лагранжево подмногообразие $2m$-мерного многообразия имеет размерность m. В локальных канонических координатах (y^i, p_i) оно определяется локально соотношениями

$$y^b = \partial^b S, \quad p_a = -\partial_a S, \tag{1.19}$$

где $S(y^a, p_b)$ — функция от m переменных $\{y^a, p_b;\ a \in A,\ b \in B\}$ для некоторого разбиения (A, B) множества $(1, \ldots, m)$. Напомним, что *ростком* подмногообразия N в точке $z \in Z$ называется класс эквивалентности $(N; z)$ подмногообразий многообразия Z, проходящих через точку z и совпадающих с N в какой-либо открытой окрестности точки z. Тогда росток лагранжева подмногообразия $(N; z)$ симплектически эквивалентен ростку подпространства

$$\{(y, p) \in \mathbb{R}^{2m} :\ p_i = 0,\ i = 1, \ldots, m\} \tag{1.20}$$

в точке $0 \in \mathbb{R}^{2m}$ симплектического пространства $\mathbb{R}^{2m}$ [29]. Выражение (1.20) получается из (1.19) композицией симплектоморфизмов

$$y^b \mapsto -p_b, \quad p_b \mapsto y^b$$

и

$$p_i \to p_i + \partial_i S(y^a, y^b).$$

Росток $(2m - r)$-мерного коизотропного подмногообразия $(N; z)$ симплектически эквивалентен ростку подпространства

$$\{(y, p) \in \mathbb{R}^{2m} :\ y^i = 0,\ i = 1, \ldots, r\}$$

в точке $0 \in \mathbb{R}^{2m}$ симплектического пространства $\mathbb{R}^{2m}$.

Росток $2(m - r)$-мерного симплектического подмногообразия $(N; z)$ симплектически эквивалентен ростку подпространства

$$\{(y, p) \in \mathbb{R}^{2m} :\ y^i = p_i = 0,\ i = 1, \ldots, r\}$$

в точке $0 \in \mathbb{R}^{2m}$ симплектического пространства $\mathbb{R}^{2m}$ [29].

Пример 1.10. Пусть Ω — каноническая симплектическая форма (1.14) на кокасательном расслоении T^*M к m-мерному многообразию M. Тогда ее поднятие $\tilde{\Omega}$ (П.21) является симплектической формой

$$\tilde{\Omega} = dp_i \wedge dy^i + dp_i \wedge d\dot{y}^i \tag{1.21}$$

на TT^*M. В силу изоморфизма $TT^*M \cong T^*TM$ (П.10), форма (1.21) является канонической симплектической формой на кокасательном расслоении T^*TM к многообразию TM в канонических координатах $(y^i, \dot{y}^i, \dot{p}_i, p_i)$. Пусть

$$\vartheta_f = \partial^i f \partial_i - \partial_i f \partial^i$$

— гамильтоново векторное поле для некоторой функции f на T^*M. Оно определяет $2m$-мерное подмногообразие

$$\dot{y}^i = \partial^i f, \quad \dot{p}_i = -\partial_i f \tag{1.22}$$

$4m$-мерного симплектического многообразия T^*TM. Ограничение симплектической формы (1.21) на него тождественно равно 0, и оно лагранжево с производящей функцией $f(y^i, p_i)$. □

§ 5. Симплектические гамильтоновы системы

Остановимся коротко на динамике консервативных механических систем на фазовом пространстве — симплектическом многообразии Z.

Рассмотрим расслоение

$$Y = \mathbb{R} \times Z \to \mathbb{R} \tag{1.23}$$

с послойными координатами (t, z^λ), согласующимися с тривиализацией (1.23). Последнее означает, что функции перехода $z^\lambda \to z'^\lambda$ координат z^λ не зависят от t. В случае тривиального расслоения (1.23) его многообразие струй диффеоморфно произведению

$$J^1Y = \mathbb{R} \times TZ.$$

В этом легко убедиться, сравнивая преобразования (П.29) координат z^λ_t на J^1Y и преобразования (П.3) голономных координат $\dot{z}^\lambda$ на TZ. Эти координаты могут быть отождествлены: $z^\lambda_t = \dot{z}^\lambda$.

Всякое векторное поле u на многообразии Z определяет замкнутое подрасслоение

$$S_u = \mathbb{R} \times u(Z), \tag{1.24}$$
$$(t, z^\lambda, \dot{z}^\lambda) = (t, z^\lambda, u^\lambda(z)),$$

расслоения $J^1Y \to \mathbb{R}$ и тем самым задает систему дифференциальных уравнений первого порядка (1.24) на $\mathbb{R} \times Z$. Ее решениями являются (локальные) сечения r расслоения (1.23) такие, что

$$d_t r^\lambda(t) = u^\lambda(r(t)),$$

т. е. $\mathrm{pr}_2 \circ s$ являются интегральными кривыми векторного поля u.

Пусть $\mathscr{H}$ — некоторая вещественная функция на симплектическом многообразии (Z, Ω) и $\vartheta_{\mathscr{H}}$ — соответствующее гамильтоново векторное поле. Согласно сказанному выше, оно определяет систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbb{R} \times S_{\mathscr{H}} \subset \mathbb{R} \times TZ,$$
$$S_{\mathscr{H}} = \bigcup_{z \in Z} \{v \in T_z Z : v \rfloor \Omega + d\mathscr{H}(z) = 0\}, \tag{1.25}$$

на расслоении (1.24), которая в локальных канонических координатах (y^i, p_i) на Z задается условиями

$$\dot{y}^i = \partial^i \mathscr{H}, \quad \dot{p}_i = -\partial_i \mathscr{H}. \tag{1.26}$$

Они называются *уравнениями Гамильтона* для *гамильтониана* $\mathscr{H}$. Их решения $r(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dr^i}{dt} = \partial^i \mathscr{H}, \quad \frac{dr_i}{dt} = -\partial_i \mathscr{H}. \tag{1.27}$$

Локальное решение проходит через любую точку гамильтоновой системы (1.25).

Подмножество $S_{\mathscr{H}}$ (1.25) называется *симплектической гамильтоновой системой* или просто *гамильтоновой системой*. Ее решением считается гамильтоново векторное поле для гамильтониана $\mathscr{H}$. Интегральные кривые этого векторного поля являются решениями уравнений Гамильтона (1.26).

Пример 1.11. Пусть $Z = T^*M$ — симплектическое многообразие с канонической симплектической формой. Тогда согласно Примеру 1.10 всякая гамильтонова система является лагранжевым подмногообразием (1.22) симплектического многообразия T^*TM, наделенного канонической симплектической формой (1.21) [45, 69, 70]. Производящей функцией этого подмногообразия служит гамильтониан $\mathscr{H}$. □

Пусть $\mathscr{H}$ — гамильтониан на симплектическом многообразии Z. Производная Ли произвольной вещественной функции f на Z вдоль гамильтонова векторного поля $\vartheta_{\mathscr{H}}$, ассоциированного с $\mathscr{H}$, имеет вид

$$\mathbf{L}_{\vartheta_{\mathscr{H}}} f = \vartheta_{\mathscr{H}} \rfloor df = \{\mathscr{H}, f\}. \tag{1.28}$$

Выражение (1.28) называется *уравнением эволюции*. При подстановке в него решения $r(t)$ уравнений Гамильтона (1.27) мы получаем, как принято говорить, эволюцию

$$d_t(f \circ r) = \{\mathscr{H}, f\} \circ r$$

функции f во времени на этом решении. В частности, если

$$\{\mathscr{H}, f\} = 0, \tag{1.29}$$

функция f является постоянной на любом решении уравнений Гамильтона для гамильтониана $\mathscr{H}$, или, что то же самое, постоянна на интегральных кривых гамильтонова векторного поля, ассоциированного с $\mathscr{H}$. Функция $f \neq \text{const}$, удовлетворяющая условию (1.29), называется *первым интегралом движения* гамильтоновой системы с гамильтонианом $\mathscr{H}$. Геометрически это означает, что гамильтоново векторное поле $\vartheta_{\mathscr{H}}$ касательно к поверхностям уровня функции f в ее неособых точках.

Пример 1.12. Сам гамильтониан консервативной системы является с очевидностью первым интегралом движения определяемой им гамильтоновой системы. □

Два первых интеграла f_1 и f_2 называются независимыми, если определяемые ими сингулярные слоения не совпадают. Говорят, что они находятся в *инволюции*, если

$$\{f_1, f_2\} = 0.$$

Гамильтонова система на $2m$-мерном симплектическом многообразии называется вполне интегрируемой, если существует m ее независимых первых интегралов f_i в инволюции.

§ 6. Пресимплектические гамильтоновы системы

Обобщим понятие гамильтоновой системы на случай пресимплектического многообразия.

Пусть Z — k-мерное многообразие с пресимплектической формой Ω и $\mathscr{H}$ — функция на Z. *Пресимплектической гамильтоновой системой* для гамильтониана $\mathscr{H}$ называется, как и (1.25), подмножество

$$S_{\mathscr{H}} = \bigcup_{z \in Z} \{v \in T_z Z : v \lrcorner \Omega + d\mathscr{H}(z) = 0\}. \tag{1.30}$$

Ее решением считается локальное интегрируемое векторное поле ϑ на Z, лежащее в $S_{\mathscr{H}}$, т. е. удовлетворяющее равенству

$$\vartheta \lrcorner \Omega = -d\mathscr{H}. \tag{1.31}$$

О нем можно говорить как о *гамильтоновом векторном поле* для гамильтониана $\mathscr{H}$ относительно пресимплектической формы Ω. Отличие от симплектического случая состоит в том, что, если форма Ω вырождена, множество (1.30) в общем случае не является подмногообразием и решения уравнений (1.31) существуют не везде на многообразии Z.

Заметим, что для всякой точки $z \in Z$ слой

$$\{v \in T_z Z : v \lrcorner \Omega + d\mathscr{H}(z) = 0\} \tag{1.32}$$

множества $S_{\mathscr{H}}$ над z является аффинным пространством, моделируемым над векторным пространством

$$\operatorname{Ker}_z \Omega = \{v \in T_z Z : u \lrcorner v \lrcorner \Omega = 0,\ \forall u \in T_z Z\}$$

— слоем ядра $\operatorname{Ker} \Omega$ (1.12) пресимплектической формы Ω. Слой (1.32) однако может быть пустым.

Предложение 1.16. Уравнение

$$v \lrcorner \Omega + d\mathscr{H}(z) = 0, \quad v \in T_z Z, \tag{1.33}$$

имеет решения только в тех точках подмножества

$$N_2 = \{z \in Z : u \lrcorner d\mathscr{H}(z) = 0,\ \forall u \in \operatorname{Ker}_z \Omega\} \subset Z, \tag{1.34}$$

т. е. где $\operatorname{Ker}_z \Omega \subset \operatorname{Ker}_z dH$ [34, 55].

доказательство. Предположим, что существует вектор $v \in T_z Z$, удовлетворяющий уравнению (1.33). Тогда, сворачивая правую часть уравнения (1.33) с произвольным элементом $u \in \operatorname{Ker}_z \Omega$, получаем равенство $u \lrcorner d\mathscr{H}(z) = 0$. Для доказательства обратного достаточно показать, что

$$d\mathscr{H}(z) \in \operatorname{Im} \Omega^\flat.$$

Это следует из цепочки включений

$$d\mathscr{H}(z) \in \operatorname{Ann}(\operatorname{Ker} d\mathscr{H}(z)) \subset \operatorname{Ann}(\operatorname{Ker}_z \Omega) = \operatorname{Im} \Omega^\flat,$$

где $\operatorname{Ann}(V) \subset T_z^* Z$ обозначает аннулятор подпространства $V \in T_z Z$. □

Замечание 1.13. Небезынтересен случай пресимплектической гамильтоновой системы с нулевым гамильтонианом (см. Замечание 2.14). Тогда уравнение (1.33) допускает решение на всем многообразии Z. □

Пусть пресимплектическая форма Ω имеет постоянный ранг и подмножество N_2 (1.34) — подмногообразие Z (не обязательно связное). Тогда $S_{\mathscr{H}} \to N_2$ является аффинным расслоением и имеет сечение — локальное гамильтоново векторное поле $\vartheta_{\mathscr{H}}$ на подмногообразии N_2. Оно, однако, не является интегрируемым в точках $z \in N_2$, где $S_{\mathscr{H}} \cap T_z N_2 = \varnothing$. Здесь возможны два варианта; назовем их *внешним* и *внутренним*.

В первом варианте ищется подмногообразие $N \subset N_2$ такое, что $S_{\mathscr{H}}\big|_N \cap T_z N \neq \varnothing$ для всех $z \in N$. Если оно существует, его можно получить следующей процедурой. Рассмотрим пересечение

$$S_{\mathscr{H}}\big|_{N_2} \cap TN_2$$

и спроектируем его на Z. Получим подмножество

$$N_3 = \pi_Z(S_{\mathscr{H}}\big|_{N_2} \cap TN_2) \subset Z.$$

Далее возьмем пересечение

$$S_{\mathscr{H}}\big|_{N_3} \cap TN_3.$$

Его проекция на Z даст нам подмножество N_4 и т. д. Поскольку многообразие Z конечномерно, процедура на конечном числе шагов завершится одним из следующих случаев.

- Множество N_i для некоторого $i \geqslant 2$ оказывается пустым. Это означает, что решения пресимплектической гамильтоновой системы не существует.
- Множество N_i для некоторого $i \geqslant 2$ не является подмногообразием. В этом случае говорят, что не существует или не везде на N_i существует динамическое решение.
- Если $N_{i+1} = N_i$, начиная с некоторого N_i, $i \geqslant 2$, то в окрестности всякой точки $z \in N_i$ существует локальное векторное поле, принимающее значения в $S_{\mathscr{H}}$.

Во втором варианте на подмногообразии N_2 вводится индуцированная пресимплектическая форма $\Omega_2 = i_{N_2}^* \Omega$ и рассматривается пресимплектическая гамильтонова система

$$S_{\mathscr{H}_2} = \bigcup_{z \in N_2} \{v \in T_z N_2 : \ v \lrcorner \Omega_2 + d\mathscr{H}_2(z) = 0\}$$

для индуцированного на N_2 гамильтониана $\mathscr{H}_2 = i_{N_2}^* \mathscr{H}$. Повторяя предыдущие рассуждения, ищем ее решения. Получаем, что уравнение

$$v \lrcorner \Omega_2 + d\mathscr{H}_2(z) = 0, \quad v \in T_z N_2,$$

имеет решение на подмножестве

$$N_3' = \{z \in N_2 : \ u \lrcorner i_{N_2}^* d\mathscr{H}(z) = 0, \ \forall u \in \operatorname{Ker}_z \Omega_2\} \subset N_2$$

и т. д. Получаем цепочку подмножеств

$$N_2 \supset N_3' \supset N_4' \supset \cdots,$$

которая конечна и оканчивается опять же в одном из следующих трех случаев.

- Множество N_i' для некоторого $i \geqslant 2$ оказывается пустым.
- Множество N_i' для некоторого $i \geqslant 2$ не является подмногообразием.
- Если $N_{i+1}' = N_i'$, для некоторого N_i', $i \geqslant 2$, то на N_i' существует векторное поле, принимающее значения в $S_{\mathscr{H}_i} \subset TN_i'$.

Сравнивая внешний и внутренний варианты, легко установить, что всякое решение ϑ уравнений (1.31) на подмногообразии $N \subset N_2 \subset Z$ в первом варианте является и решением уравнений

$$\vartheta \lrcorner i_N^*(\Omega_2 + d\mathscr{H}_2) = 0$$

во втором варианте.

Проблема состоит в том, что в случае пресимплектической гамильтоновой системы на многообразии Z это многообразие, вообще говоря, не наделено структурой Пуассона, т.е. не заданы скобки Пуассона на функциях на Z и трудно написать явные выражения. Однако, как отмечалось в Примере 1.7, всякая пресимплектическая форма на многообразии Z может быть представлена как индуцированная некоторой симплектической формой на многообразии, подмногообразием которого является Z. Таким образом пресимплектические гамильтоновы системы сводятся к дираковским системам со связями.

§ 7. Дираковские системы со связями

Рассмотрим теперь гамильтоновы системы со связями. Пусть (Z, Ω) — $2m$-мерное симплектическое многообразие и $\mathscr{H}$ — гамильтониан на Z. Пусть Q — подмногообразие Z, называемое *пространством первичных связей*, или просто *пространством связей*. Задача может быть поставлена двояко.

(А) Исследовать решения ассоциированной с $\mathscr{H}$ гамильтоновой системы на Z, принадлежащие пространству связей Q.

(Б) Определить сужение гамильтоновой системы на пространство связей Q.

Замечание 1.14. Приведем некоторые полезные локальные соотношения. Пусть Q — вложенное $(2m - n)$-мерное подмногообразие многообразия Z. Локально оно задается уравнениями

$$f_a(z) = 0, \quad a = 1, \ldots, n, \tag{1.35}$$

где $f_a(z)$ — локальные функции на Z, называемые *связями*. Рассмотрим подмножество $\operatorname{Ker} i_Q^* \subset \mathscr{O}^0(Z)$ вещественных функций f на Z таких, что $i_Q^* f = 0$. Это ядро морфизма $i_Q^* : \mathscr{O}^0(Z) \to \mathscr{O}^0(Q)$. Всякая такая функция f локально представима в виде

$$f = \sum_{a=1}^{n} g^a f_a, \tag{1.36}$$

где g^a — некоторые функции на Z.

Обозначим $d \operatorname{Ker} i_Q^*$ подмодуль $\mathscr{O}^0(Z)$-модуля $\mathscr{O}^1(Z)$, порождаемый внешними дифференциалами df функций f из $\operatorname{Ker} i_Q^*$. Его элементами являются 1-формы

$$\sigma = \sum g^i df_i, \quad f_i \in \operatorname{Ker} i_Q^*, \quad g^i \in \mathscr{O}^0(Z).$$

Принимая во внимание (1.36), замечаем, что всякая такая форма локально представима в виде

$$\sigma = \sum_{a=1}^{n} (g^a df_a + f_a \phi^a), \tag{1.37}$$

где g^a — некоторые функции и ϕ^a — некоторые 1-формы на многообразии Z.

Еще раз подчеркнем, что выражения (1.36) и (1.37) справедливы локально в области, где подмногообразие Q задается уравнениями (1.35). □

Решение задачи (А) вполне очевидно. Если гамильтоново векторное поле $\vartheta_{\mathscr{H}}$, ограниченное на пространство связей Q, касательно к Q, то всякое решение гамильтоновой системы через точку $z \in Q$ принадлежит TQ. Другими словами, множество

$$S_{\mathscr{H}}\big|_Q = \bigcup_{z \in Q} \{v \in T_z Z : v \lrcorner \Omega + d\mathscr{H}(z) = 0\}$$

должно принадлежать $TQ \subset TZ$.

Например, пусть Q — вложенное подмногообразие, локально задаваемое уравнениями (1.35). Оно удовлетворяет сформулированному выше условию, если

$$\vartheta_{\mathscr{H}} \lrcorner df_a = \{\mathscr{H}, f_a\} \in \operatorname{Ker} i_Q^*$$

для всех связей, т. е.

$$\{\mathscr{H}, f_a\} = \sum_{c=1}^{n} g_a^c f_c, \tag{1.38}$$

где g^c — некоторые функции на Z.

Если соотношение (1.38) не выполняется, введем *вторичные связи*

$$\{\mathscr{H}, f_a\} = 0.$$

Если система первичных и вторичных связей не замкнута в смысле условия (1.38), рассмотрим *третичные связи*

$$\{\mathscr{H}, \{\mathscr{H}, f_a\}\} = 0$$

и т. д. Поскольку многообразие Z конечномерно, процедура на конечном числе шагов завершится построением *полной системы связей*. Определяемое полной системой связей подмногообразие будет пусто в окрестностях тех точек, где гамильтоново векторное поле $\vartheta_{\mathscr{H}}$ трансверсально пространству первичных связей Q.

Перейдем к решению задачи (Б). *Гамильтон-дираковской системой*, порождаемой гамильтонианом $\mathscr{H}$ на подмногообразии Q симплектического многообразия (Z, Ω), называется подмножество

$$S_{Q,\mathscr{H}} = \bigcup_{z \in Q} \{v \in T_z Z : u \lrcorner (v \lrcorner \Omega + d\mathscr{H}(z)) = 0,\ \forall u \in T_z Q\} \tag{1.39}$$

[48]. Заметим что

$$S_{\mathscr{H}}\big|_Q \subset S_{Q,\mathscr{H}}.$$

Поэтому множество (1.39) не пусто.

Говорят, что гамильтон-дираковская система на Q имеет решение, если в окрестности всякой точки $z \in Q$ существует векторное поле на Q, лежащее в множестве $S_{Q,\mathscr{H}}$ (1.39). В частности, всякое решение задачи (А) является и решением задачи (Б).

Пример 1.15. В следующем случае задача (Б) имеет исчерпывающее решение в терминах ростков. Пусть $Z = T^*M$ — симплектическое многообразие с канонической симплектической формой Ω и Q — его коизотропное подмногообразие. Тогда TQ является коизотропным подмногообразием симплектического многообразия TT^*M с симплектической формой $\tilde{\Omega}$ (1.21). Действительно, пусть $u \in TTQ$ и $v \in TTT^*M \setminus TTQ$. Существует векторное поле τ_u на Q такое, что его канонический лифт $\tilde{\tau}_u$ на TQ содержит u. Аналогично, существует (и не одно) векторное поле τ_v на T^*M такое, что его канонический лифт $\tilde{\tau}_v$ содержит v. Пусть

$$\pi_{TQ}(u) = \pi_{T^*M}(v) = q \in T_zQ.$$

Тогда в силу соотношения (П.21) можно записать

$$v \lrcorner u \lrcorner \tilde{\Omega} = \tilde{\tau}_v(q) \lrcorner \tilde{\tau}_u(q) \lrcorner \tilde{\Omega} = \overbrace{(\tau_v(z) \lrcorner \tau_u(z) \lrcorner \Omega)}.$$

В общем случае произвольного $u \in T_qTQ$ это выражение отлично от 0, поскольку τ_v в сколь угодно малой окрестности z не принадлежит $\operatorname{Ker}^Q \Omega$.

Пусть $\mathscr{H}$ — гамильтониан на T^*M. Гамильтон-дираковская система на коизотропном $(2m-n)$-мерном подмногообразии Q имеет решение, если коизотропное подмногообразие $TQ \subset TT^*M$ и лагранжево подмногообразие $S_{\mathscr{H}}$ (1.25) не трансверсальны. Росток всякой такой пары $(TQ, S; .)$ симплектически эквивалентен паре

$$\left(\{y^1 = \cdots = y^{2n} = 0\}, \{y^a = \partial^a S(p),\ a = 1, \ldots, 2m\}; 0\right), \quad (y, p) \in \mathbb{R}^{4m},$$

где S — росток функции такой, что ранг в 0 касательного морфизма к морфизму

$$p \to (\partial_1 S, \ldots, \partial_{2n} S)$$

не максимален. Можно дать и более детальную классификацию ростков производящих функций S [29]. □

Гамильтон-дираковская система называется *интегрируемой*, если через каждую точку множества $S_{Q^*\mathscr{H}}$ проходит некоторое ее решение. Очевидно, что это имеет место, только если $S_{Q^*\mathscr{H}} \subset TQ$.

Заметим, что для всякой точки $z \in Q$ слой

$$\{v \in T_zZ : u \lrcorner (v \lrcorner \Omega + d\mathscr{H}(z)) = 0,\ \forall u \in T_zQ\}$$

множества $S_{Q^*\mathscr{H}}$ над $z \in Q$ является непустым аффинным пространством, моделируемым над векторным пространством

$$\operatorname{Ker}_z^Q \Omega = \{v \in T_zZ : u \lrcorner v \lrcorner \Omega = 0,\ \forall u \in T_zQ\} \tag{1.40}$$

— слоем относительного ядра $\operatorname{Ker}^Q \Omega$ (1.18) симплектической формы Ω. Отсюда следует, что $\operatorname{Ker}_z^Q \Omega \subset TQ$ и гамильтон-дираковская система на пространстве связей Q интегрируема, только если Q — коизотропное подмногообразие. Кроме того, в этом случае немедленно получаем, что

$$u \lrcorner d\mathscr{H} = 0, \quad \forall u \in \operatorname{Ker}^Q \Omega.$$

Чтобы сформулировать достаточные условия интегрируемости гамильтон-дираковской системы, предположим, что для всех $z \in Q$ векторные пространства (1.40) имеют

одну и ту же размерность. Тогда относительное ядро $\mathrm{Ker}^Q\,\Omega \to Q$ является векторным расслоением, а гамильтон-дираковская система $S_{Q^*\mathscr{H}} \to Q$ — аффинным расслоением над Q.

Предложение 1.17. Пусть подмногообразие Q симплектического многообразия (Z, Ω) коизотропно. Тогда $\mathrm{Ker}^Q\,\Omega$ — инволютивное распределение на Q. Пусть форма $d\mathscr{H}$ постоянна вдоль слоев соответствующего слоения. Тогда гамильтон-дираковская система (1.39) интегрируема [48].

доказательство. Поскольку множество $S_{Q^*\mathscr{H}}$ не пусто, достаточно доказать, что оно принадлежит TQ. Пусть $v \in S_{Q^*\mathscr{H}}$ и $z = \pi_Z(v)$. Для всех $u \in \mathrm{Ker}^Q_z\,\Omega \subset T_zQ$ справедливо равенство

$$v \rfloor u \rfloor \Omega = u \rfloor d\mathscr{H} = 0.$$

Отсюда следует, что $v \in T_zQ$. Поскольку $S_{Q^*\mathscr{H}} \subset TQ$, через каждую точку гамильтон-дираковской системы $S_{Q^*\mathscr{H}}$ проходит векторное поле на Q. Это решение не единственно: если v — такое векторное поле, то всякое векторное поле $v + u$, где u принимает значения в относительном ядре $\mathrm{Ker}^Q\,\Omega \subset TQ$, тоже является решением гамильтон-дираковской системы. □

Таким образом, интегрируемые гамильтон-дираковские системы следует рассматривать на коизотропных подмногообразиях. В случае коизотропного подмногообразия Q гамильтонова система на нем фактически определяется ограничением $\Omega_Q = i_Q^*\Omega$ симплектической формы Ω и ограничением $\mathscr{H}_Q = i_Q^*\mathscr{H}$ гамильтониана $\mathscr{H}$ на Q. Действительно, если $v \in TQ$, система (1.39) представима в виде

$$S_{Q^*\mathscr{H}} = \bigcup_{z\in Q}\{v \in T_zQ :\ v \rfloor \Omega_Q + d\mathscr{H}_Q(z) = 0\}. \tag{1.41}$$

Система (1.41) может быть определена на любом подмногообразии Q. Она называется *дираковской системой* на пространстве первичных связей Q [5, 34, 54]. Это пресимплектическая гамильтонова система на многообразии Q с пресимплектической формой Ω_Q. В частности, из Предложения 1.16 следует, что уравнение

$$v \rfloor \Omega_Q + d\mathscr{H}_Q(z) = 0, \quad v \in T_zQ, \tag{1.42}$$

имеет решения только в точках подмножества

$$N_2 = \{z \in Q :\ u \rfloor d\mathscr{H}_Q(z) = 0,\ \forall u \in \mathrm{Ker}_z\,\Omega_Q\}. \tag{1.43}$$

Далее применим внутренний вариант описания пресимплектических систем из предыдущего параграфа. Однако в данном случае, когда эта система вложена в симплектической пространство (Z, Ω), можно сказать больше.

Предположим, что пространство первичных связей Q — вложенное подмногообразие, задаваемое локально уравнениями (1.35), которые называются *первичными связями*. Рассмотрим подмодуль векторных полей

$$\mathscr{T}_Q(Z) = \{u \in \mathscr{T}_1(Z) :\ u \rfloor \Omega \in d\,\mathrm{Ker}\,i_Q^*\}$$

на многообразии Z. Локально всякое такое векторное поле представимо в виде

$$u = \sum_{a=1}^{n} g^a \vartheta_{f_a} + v,$$

где v — векторное поле, обращающееся в 0 на Q, g^a — некоторые функции на Z, а ϑ_{f_a} — локальные гамильтоновы векторные поля для функций f_a (1.35), т. е.

$$\vartheta_{f_a} \lrcorner \Omega = -df_a.$$

Рассмотрим подмодуль $\mathscr{T}_Q^0(Z)$ модуля $\mathscr{T}_Q(Z)$, образованный векторными полями ϑ на Z такими, что

$$\vartheta \lrcorner u \lrcorner \Omega \in \operatorname{Ker} i_Q^*, \quad \forall u \in \mathscr{T}_Q(Z).$$

Очевидно, на Q эти векторные поля принимают значения в ядре $\operatorname{Ker} \Omega_Q$ пресимплектической формы Ω_Q.

Пусть пресимплектическая форма Ω_Q имеет постоянный ранг $2m - n - k$, т. е. $\operatorname{Ker}_z \Omega_Q$ имеет размерность $k \leqslant n$ во всех точках $z \in Q$. Тогда она определяет слоение на пространстве связей Q, при ограничении на слои которого Ω_Q обращается в 0. В этом случае локальными образующими подмодуля $\mathscr{T}_Q^0(Z)$ являются векторные поля, обращающиеся в 0 на Q, и семейство k линейно независимых векторных полей, которые на Q касательны к слоям указанного слоения. Они имеют вид

$$u_b = \sum_{a=1}^{n} g_b^a \vartheta_{f_a}, \quad b = 1, \ldots, k, \tag{1.44}$$

где g_b^a — некоторые функции на Z и ϑ_{f_a} — гамильтоновы векторные поля для связей f_a. Тогда в качестве первичных связей можно выбрать семейство функций f_b^1, $b = 1, \ldots, n$, где первые k функций задаются в виде

$$f_b^1 = \sum_{a=1}^{n} g_b^a f_a, \quad b = 1, \ldots, k.$$

Так как векторные поля (1.44) удовлетворяют условиям

$$u_b \lrcorner \vartheta_{f_a} \lrcorner \Omega \in \operatorname{Ker} i_Q^*, \quad a = 1, \ldots, n,$$
$$\vartheta_{f_b^1}\big|_Q = u_b\big|_Q,$$

то

$$\{f_b^1, f_c^1\}\big|_Q = -u_b \lrcorner \vartheta_{f_c^1} \lrcorner \Omega\big|_Q = 0, \quad b = 1, \ldots, k, \quad c = 1, \ldots, n.$$

Тогда согласно (1.36) можно записать

$$\{f_b^1, f_c^1\} = \sum_{a=1}^{n} C_{bc}^a f_a^1, \quad b = 1, \ldots, k, \quad c = 1, \ldots, n, \tag{1.45}$$

где C_{bc}^a — локальные функции на Z. Связи $f_1^1, \ldots, f_k^1$, подчиняющиеся условию (1.45), называются *связями первого рода*, а оставшиеся $f_{k+1}^1, \ldots, f_n^1$ — *второго рода*.

Как уже отмечалось, дираковская система на подмногообразии Q может иметь решение только на подмножестве (1.43), т. е. в точках $z \in Q$, где

$$u_b(z) \lrcorner d\mathscr{H}(z) = \{\mathscr{H}(z), f_b^1(z)\} = 0, \quad b = 1, \ldots, k. \tag{1.46}$$

Вторичные связи (1.46) определяют локально подмногообразие $N_2 \subset Q$, называемое *пространством вторичных связей*. Существуют векторные поля ϑ на Z, которые на Q

являются гамильтоновыми векторными полями относительно пресимплектической формы Ω_Q для гамильтониана $\mathscr{H}_Q$ и на N_2 касательны к Q. Локально они имеют вид

$$\vartheta = \vartheta_{\mathscr{H}} + \sum_{a=1}^{n} \lambda^a \vartheta_{f_a^1},$$

где λ^a — функции на Z, удовлетворяющие на N_2 уравнениям

$$\{\mathscr{H}, f_b^1\} + \sum_{a=k+1}^{n} \lambda^a \{f_a^1, f_b^1\} = 0, \quad b = k+1, \ldots, n.$$

Процедура повторяется для пространства вторичных связей N_2 и т. д. до многообразия *финальных связей* N, если оно существует. Локально оно задается *финальными связями*

$$f_a = 0, \quad a = 1, \ldots, r,$$
$$\{\mathscr{H}, f_a\} = \sum_{b=1}^{r} B_a^b f_b, \quad a = 1, \ldots, s,$$

где B_a^b — локальные функции на Z. Среди них выделяются связи первого рода $f_1, \ldots, f_s$, т. е. такие, что

$$\{f_b, f_c\} = \sum_{a=1}^{r} C_{bc}^a f_a, \quad b = 1, \ldots, s, \quad c = 1, \ldots, r.$$

Решением дираковской системы на финальном пространстве N (она называется *полной дираковской системой*) является векторное поле

$$\vartheta = \vartheta_{\mathscr{H}} + \sum_{a=1}^{r} \lambda^a \vartheta_{f_a},$$

где коэффициентные функции $\lambda^{s+1}, \ldots, \lambda^r$ выражаются через связи f_a посредством уравнений

$$\{\mathscr{H}, f_b\} + \sum_{a=1}^{r} \lambda^a \{f_a, f_b\}\big|_N = 0, \quad b = s+1, \ldots, r. \tag{1.47}$$

Каждое такое решение является решением гамильтоновой системы на Z для гамильтониана

$$\mathscr{H} + \sum_{a=1}^{r} \lambda^a f_a.$$

Пример 1.16. Если гамильтоново векторное поле $\vartheta_{\mathscr{H}}$ касательно к N, то, как следует из уравнений (1.47), оно является и решением дираковской системы на N. □

Пример 1.17. Рассмотрим полную дираковскую систему на подмногообразии $N \subset Z$ таком, что сужение симплектической формы Ω на N является симплектической формой. Это система со связями только второго рода. □

Замечание 1.18. Если связи дираковской системы только первого рода, они образуют алгебру Ли над $\mathbb{R}$. □

§ 8. Гамильтоновы системы с симметриями

Наличие симметрий гамильтоновой системы приводит к появлению интегралов движения. Мы ограничимся здесь симплектическими гамильтоновыми системами с симметриями (случай пресимплектических систем с симметриями см. в [56]).

Пусть (Z, Ω) — симплектическое многообразие, на котором задано левое действие вещественной группы Ли G такое, что для всякого $g \in G$ отображение $z \mapsto gz$ является изоморфизмом симплектического многообразия Z. Такое действие группы G называется *симплектическим* [12].

Пусть ε — элемент правой алгебры Ли $\mathscr{G}_r$ группы G и ξ_ε — соответствующее векторное поле на Z. Оно является локально гамильтоновым, т. е.

$$\mathbf{L}_{\xi_\varepsilon}\Omega = d(\xi_\varepsilon \lrcorner \Omega) = 0.$$

Допустим, что оно гамильтоново, т. е.

$$\xi_\varepsilon \lrcorner \Omega = -dJ_\varepsilon,$$

где J_ε — некоторая вещественная функция на Z.

Определение 1.18. Отображение симплектического многообразия Z в сопряженное пространство алгебры Ли

$$\hat{J} : Z \to \mathscr{G}^*,$$

удовлетворяющее соотношению

$$J_\varepsilon(z) = \langle \hat{J}(z), \varepsilon \rangle, \quad \forall \varepsilon \in \mathscr{G}_r, \tag{1.48}$$

называется *импульсным отображением*. □

Легко убедиться, что, если $\hat{J}$ и $\hat{J}'$ — два разных импульсных отображения для одного и того же действия G на Z, то

$$d\langle \hat{J}(z) - \hat{J}'(z), \varepsilon \rangle = 0, \quad \forall \varepsilon \in \mathscr{G}_r,$$

т. е. $\hat{J} - \hat{J}' = \text{const}$ на Z.

Пример 1.19. Пусть симплектическая форма на Z является точной: $\Omega = d\theta$, а θ — G-инвариантной, т. е.

$$\mathbf{L}_{\xi_\varepsilon}\theta = d(\xi_\varepsilon \lrcorner \theta) + \xi_\varepsilon \lrcorner \Omega = 0, \quad \forall \varepsilon \in \mathscr{G}_r.$$

Тогда отображение $\hat{J} : Z \to \mathscr{G}^*$, определяемое соотношением

$$\langle \hat{J}(z), \varepsilon \rangle = (\xi_\varepsilon \lrcorner \theta)(z),$$

является импульсным. □

Задание импульсного отображения $\hat{J}$ определяет семейство интегралов движения гамильтоновой системы для гамильтониана $\mathscr{H}$ на симплектическом многообразии Z, если $\mathscr{H}$ инвариантен относительно действия группы G на Z. В этом случае

$$\mathbf{L}_{\xi_\varepsilon}\mathscr{H} = \xi_\varepsilon \lrcorner d\mathscr{H} = 0, \quad \forall \varepsilon \in \mathscr{G}_r,$$

откуда следует, что

$$\{\mathscr{H}, J_\varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon \in \mathscr{G}_\mathrm{r}.$$

Таким образом, функции $J_\varepsilon(z)$ (1.48) являются первыми интегралами движения. Однако в общем случае они не находятся в инволюции друг с другом. Найдем их скобки Пуассона.

Определение 1.19. Импульсное отображение $\hat{J}$ называется *эквивариантным*, если

$$J(gz) = \mathrm{ad}^*\, g(J(z)), \quad \forall g \in G.$$

□

Пример 1.20. Импульсное отображение из Примера 1.19 является эквивариантным. Действительно, согласно соотношению (П.27) для его эквивариантности достаточно показать, что

$$J_\varepsilon(gz) = J_{\mathrm{ad}\, g^{-1}(\varepsilon)}(z),$$

т. е.

$$(\xi_\varepsilon \lrcorner\, \theta)(gz) = (\xi_{\mathrm{ad}\, g^{-1}(\varepsilon)} \lrcorner\, \theta)(z).$$

Последнее следует из соотношения (П.26). □

Пример 1.21. Пусть, как в Примере 1.8, T^*M — симплектическое многообразие с канонической симплектической формой Ω (1.14). Пусть группа G действует слева на M с генераторами

$$\xi_m = \varepsilon_m^i(y)\partial_i.$$

Ее канонический лифт на T^*M с генераторами

$$\tilde{\xi}_m = \varepsilon_m^i \partial_i - p_j \partial_i \varepsilon_m^j \partial^i \tag{1.49}$$

сохраняет каноническую форму Лиувилля θ. Согласно Примеру 1.8 векторные поля (1.49) являются гамильтоновыми для функций

$$J_m = \varepsilon_m^i(y) p_i, \tag{1.50}$$

и, как это следует из Примера 1.20, существует эквивариантное импульсное отображение

$$\hat{J} = \varepsilon_m^i(y) p_i \varepsilon^m.$$

В случае G-инвариантного гамильтониана на T^*M функции (1.50) являются первыми интегралами движения. □

Не всякое импульсное отображение является эквивариантным. Поэтому рассмотрим разность

$$\sigma(g) = \hat{J}(gz) - \mathrm{ad}^*\, g(J(z)). \tag{1.51}$$

Можно показать [12], что эта разность постоянна на Z и удовлетворяет равенству

$$\sigma(gh) = \sigma(g) + \mathrm{ad}^*\, g(\sigma(h)). \tag{1.52}$$

Определение 1.20. Отображение $\sigma : G \to \mathscr{G}^*$ называется *коциклом на группе G*, если выполняется условие (1.52). Коцикл σ именуется *кограницей на группе G*, если существует такой элемент $\mu \in \mathscr{G}^*$, что

$$\sigma(g) = \mu - \mathrm{ad}^*\, g(\mu). \tag{1.53}$$

Коциклы, отличающиеся на кограницы, образуют классы эквивалентности, составляющие *группу когомологий группы* G. □

Согласно этому определению, разность (1.51) является *коциклом на группе* G, *отвечающем действию* G *на* Z.

Предложение 1.21. Всякому симплектическому действию группы G на симплектическом многообразии Z соответствует некоторый когомологический класс $[\sigma]$ на группе G.

доказательство. Пусть $\widehat{J}$ и $\widehat{J}'$ — разные импульсные отображения, отвечающие симплектическому действию группы G на симплектическом многообразии Z. Как уже отмечалось, разность $\widehat{J}-\widehat{J}'$ постоянна на Z. Тогда разность соответствующих коциклов $\sigma-\sigma'$ сводится к кограницe (1.53), где $\mu=\widehat{J}-\widehat{J}'$. □

В частности, эквивариантному импульсному отображению соответствует нулевой когомологический класс на группе G.

Теорема 1.22. Если $\widehat{J}$ — импульсное отображение, отвечающее симплектическому действию группы G на Z, то имеет место соотношение

$$\{J_\varepsilon, J_{v\varepsilon'}\} = J([\varepsilon, \varepsilon']) - \langle d\langle\sigma, \varepsilon'\rangle(e), \varepsilon\rangle \tag{1.54}$$

(см. [12], где, однако, гамильтоновы векторные поля отличаются знаком от используемых здесь и рассматривается левая, а не правая алгебра Ли). □

В случае эквивариантного импульсного отображения, например, как в Примере 1.21, соотношение (1.54) приводит к гомоморфизму

$$\{J_\varepsilon, J_{\varepsilon'}\} = J([\varepsilon, \varepsilon']) \tag{1.55}$$

алгебры Ли $\mathscr{G}_\tau$ в алгебру Ли функций на симплектическом многообразии Z относительно скобок Пуассона. Это также искомые скобки Пуассона для первых интегралов движения G-инвариантной гамильтоновой системы.

§ 9. Обобщенные скобки Пуассона

Пусть w — пуассоново бивекторное поле на многообразии Z. Рассмотрим обобщения определяемых им скобок Пуассона на мультивекторные поля и внешние формы.

Определим на внешней алгебре $\mathscr{T}_*(Z)$ мультивекторных полей на Z операцию

$$\widehat{w}(\vartheta) = -[w, \vartheta]_{\mathrm{SN}},$$

где $[\,.\,,\,.\,]_{\mathrm{SN}}$ — (S-N)-скобки (П.18). Эта операция, как можно показать, обладает гомологическим свойством

$$\widehat{w}\circ\widehat{w} = 0$$

[71]. Для произвольных мультивекторных полей ϑ и v введем скобки

$$[\vartheta, v]_w = -[\widehat{w}(\vartheta), v]_{\mathrm{SN}}.$$

Они обладают свойством

$$[\vartheta, v]_w = -(-1)^{|\vartheta||v|}[v, \vartheta]_w + \widehat{w}([\vartheta, v]_{\mathrm{SN}}).$$

Таким образом, эти скобки градуированно антисимметричны на факторе

$$\mathscr{T}_*(Z)/\widehat{w}(\mathscr{T}_*(Z)).$$

Если пуассоново бивекторное поле w невырождено, оно определяет изоморфизм $w^\sharp$ (1.3) расслоений TZ и T^*Z и переносит операцию (S-N)-скобок на алгебру внешних форм [50]:

$$\{\,.\,,\,.\,\}_w : \mathscr{O}^r(Z) \times \mathscr{O}^s(Z) \to \mathscr{O}^{r+s-1}(Z), \tag{1.56}$$

где

$$w^\sharp(\{\phi, \sigma\}_w) = [w^\sharp\phi, w^\sharp\sigma]_{\mathrm{SN}}, \quad \phi, \sigma \in \mathscr{O}^*(Z).$$

В общем случае пуассонова бивекторного поля имеет место гомоморфизм $\mathscr{O}^*(Z) \to \mathscr{T}_*(Z)$:

$$w^\sharp\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) = (-1)^r\phi(w^\sharp\sigma_1, \ldots, w^\sharp\sigma_r), \quad \phi \in \mathscr{O}^r(Z), \quad \sigma \in \mathscr{O}^1(Z),$$
$$\widehat{w}(w^\sharp\phi) = -w^\sharp(d\phi).$$

Поэтому, чтобы построить скобки (1.56), рассмотрим на алгебре внешних форм $\mathscr{O}^*(Z)$ *кодифференциальный оператор*

$$\delta_w = w \lrcorner \circ d - d \circ w \lrcorner : \mathscr{O}^r(Z) \to \mathscr{O}^{r-1}(Z), \tag{1.57}$$

$$\delta_w(f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_r) = \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\{f_0, f_i\}df_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{df}_i \wedge \cdots \wedge df_r +$$
$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}(-1)^{i+j} f_0 d\{f_i, f_j\} \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{df}_i \wedge \cdots \wedge \widehat{df}_j \wedge \cdots \wedge df_r,$$

[18, 43, 71]. Напомним правило свертки

$$(\vartheta_1 \wedge \cdots \wedge \vartheta_r) \lrcorner \phi = \vartheta_r \lrcorner \cdots \vartheta_1 \lrcorner \phi$$

мультивекторных полей и внешних форм. Оператор δ_w (1.57) связан с оператором $\widehat{w}$ соотношением

$$\widehat{w}(\vartheta) \lrcorner \phi = \vartheta \lrcorner (\delta_w\phi) + (-1)^r\delta_w(\vartheta \lrcorner \phi), \quad \forall\phi \in \mathscr{O}^r(Z), \quad \forall\vartheta \in \mathscr{T}_{r-1}(Z).$$

Тогда скобки (1.56) на алгебре внешних форм определяются как

$$\{\,.\,,\,.\,\}_w : \mathscr{O}^r(Z) \times \mathscr{O}^s(Z) \to \mathscr{O}^{r+s-1}(Z),$$
$$\{\phi, \sigma\}_w = (\delta_w\phi) \wedge \sigma + (-1)^{|\phi|}\phi \wedge (\delta_w\sigma) - \delta_w(\phi \wedge \sigma). \tag{1.58}$$

Они обладают свойствами

$$\{\phi, \sigma\}_w = (-1)^{|\phi||\sigma|}\{\sigma, \phi\}_w,$$
$$(-1)^{|\phi|(|\theta|-1)}\{\phi, \{\sigma, \theta\}_w\}_w + (-1)^{|\sigma|(|\phi|-1)}\{\sigma, \{\theta, \phi\}_w\}_w + (-1)^{|\theta|(|\sigma|-1)}\{\theta, \{\phi, \sigma\}_w\}_w = 0,$$
$$w^\sharp(\{\phi, \sigma\}_w) = [w^\sharp\phi, w^\sharp\sigma]_{\mathrm{SN}}.$$

В частности, для 1-форм скобки (1.58) принимают вид

$$\{\phi, \sigma\}_w = \mathbf{L}_{w^\sharp\phi}\sigma - \mathbf{L}_{w^\sharp\sigma}\phi - d(w(\phi, \sigma)), \tag{1.59}$$
$$\{\phi, \sigma\}_w = w^\sharp\phi \lrcorner d\sigma - w^\sharp\sigma \lrcorner d\phi + d(w(\phi, \sigma)).$$

Они наделяют $\mathscr{O}^1(Z)$ структурой алгебры Ли так, что морфизм

$$w^\natural : \mathscr{O}^1(Z) \to \mathscr{T}_1(Z)$$

является гомоморфизмом алгебр Ли

$$w^\natural(\{\phi, \sigma\}) = [w^\natural\phi, w^\natural\sigma].$$

Имеет место следующая связь между скобками (1.59) и скобками Пуассона (1.6):

$$\{df, dg\}_w = d\{f, g\}.$$

Оператор δ_w (1.57) обладает гомологическими свойствами

$$\delta_w \circ \delta_w = 0, \tag{1.60}$$

$$d \circ \delta_w + \delta_w \circ d = 0. \tag{1.61}$$

Последнее из них приводит к формуле

$$d\{\phi, \sigma\}_w = -\{d\phi, \sigma\}_w - (-1)^{|\phi|}\{\phi, d\sigma\}_w.$$

Тогда можно ввести скобки

$$\{\phi, \sigma\}_d = -\{d\phi, \sigma\}_w \tag{1.62}$$

[20, 50]. Они являются градуированно антисимметричными

$$\{\phi, \sigma\}_d = -(-1)^{|\phi||\sigma|}\{\sigma, \phi\}_d$$

на факторе $\mathscr{O}^*(Z)/d\mathscr{O}^*(Z)$.

Замечание 1.22. Пусть (Z, w) — пуассоново многообразие и δ_w — кодифференциальный оператор (1.57). Его гомологическое свойство (1.60) определяет *канонический комплекс*

$$\cdot \xrightarrow{\delta_w} \mathscr{O}^{r-1}(Z) \xrightarrow{\delta_w} \mathscr{O}^r(Z) \xrightarrow{\delta_w} \cdots.$$

Гомологические группы $H^{\mathrm{can}}_*(Z)$ этого комплекса называются *каноническими когомологиями* пуассонова многообразия (Z, w). В частности, в случае симплектического $2m$-мерного многообразия (Z, w) имеет место изоморфизм групп канонических когомологий $H^{\mathrm{can}}_i(Z)$ и групп когомологий де Рама $H^{2m-i}(Z)$. □

§ 10. Мультисимплектическая структура

Коснемся теперь другой возможности обобщения пуассоновой и симплектической структур — мультисимплектической и полисимплектической структур.

Пусть M — m-мерное многообразие с координатами (z^λ). Рассмотрим внешнее произведение

$$\zeta : \overset{k}{\wedge} T^*M \to M$$

с голономными координатами (z^λ, p_Λ), где $\Lambda = (\lambda_1 < \ldots < \lambda_k)$ — мульти-индекс длины $|\Lambda| = k$. Многообразие $\overset{k}{\wedge} T^*M$ наделено канонической внешней k-формой Θ, задаваемой соотношением

$$u_n \lrcorner \ldots u_1 \lrcorner \Theta(p) = T\zeta(u_n) \lrcorner \ldots T\zeta(u_1) \lrcorner p, \quad p \in \overset{k}{\wedge} T^*M, \quad u_i \in T_p(\overset{k}{\wedge} T^*M).$$

Она имеет координатный вид

$$\Theta = \sum_{\Lambda} p_{\lambda_1 \dots \lambda_k} dz^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\lambda_k}, \tag{1.63}$$

где сумма берется по всем мульти-индексам Λ.

Внешний дифференциал формы (1.63) представляет собой $(k+1)$-симплектическую форму

$$\Omega_M = d\Theta = \sum_{\Lambda} dp_{\lambda_1 \dots \lambda_k} \wedge dz^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\lambda_k},$$

которая принадлежит к классу *мультисимплектических форм* [49]. Если $k = 1$, $d\Theta$ — каноническая симплектическая форма на кокасательном расслоении T^*M.

Пример 1.23. В частности, рассмотрим расслоение $Y \to X$ над $(1 < n)$-мерной базой X и его внешнее произведение $\overset{n}{\wedge} T^*Y$, на котором задана каноническая форма Θ (1.63). Пусть

$$Z_Y = T^*Y \wedge (\overset{n-1}{\wedge} T^*X) \tag{1.64}$$

— так называемое *однородное расслоение Лежандра* над Y с голономными координатами $(x^\lambda, y^i, p_i^\lambda, p)$, где координата p подчиняется закону преобразования

$$p' = \det\left(\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\right)\left(p - \frac{\partial y^j}{\partial y'^i}\frac{\partial y'^i}{\partial x^\mu}p_j^\mu\right).$$

Каноническое вложение

$$i_Z : T^*Y \wedge (\overset{n-1}{\wedge} T^*X) \to \overset{n}{\wedge} T^*Y$$

индуцирует на Z_Y каноническую форму

$$\Xi = i_Z^*\Theta = p\omega + p_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda,$$

где используются обозначения $\omega = d^n x$, $\omega_\lambda = \partial_\lambda \rfloor \omega$. Ее внешний дифференциал

$$\Omega_Z = dp \wedge \omega + dp_i^\lambda \wedge dy^i \wedge \omega_\lambda \tag{1.65}$$

также называется *мультисимплектической формой* [35]. Например, в случае расслоения $Y \to \mathbb{R}$ мультисимплектическая форма (1.65) сводится к канонической симплектической форме

$$\Omega_Z = dp \wedge dt + dp_i \wedge dy^i$$

на кокасательном расслоении $Z_Y = T^*Y$. □

Аналогично тому, как вместо симплектической 2-формы рассматривается некоторая мультисимплектическая $(2 < k)$-форма, вместо пуассонова бивектора можно взять $(2 < k)$-мультивекторное поле и ввести *мультискобку*

$$\{f_1, \dots, f_k\} = w^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \partial_{\alpha_1} f_1 \cdots \partial_{\alpha_k} f_k$$

для k функций на многообразии Z [14, 39, 68]. В частности, мультискобка для k функций на k-мерном многообразии Z дается выражением

$$\{f_1, \dots, f_k\} dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^k = df_1 \wedge \cdots \wedge df_k.$$

Упомянем еще одно обобщение симплектической структуры, когда рассматривается не внешняя симплектическая, а $\mathbb{R}^n$-значная 2-форма [58, 59].

Пусть X — n-мерное многообразие и LX — главное реперное расслоение над ним с координатами $(x^\lambda, s^\mu{}_a)$. Реперное расслоение LX наделено канонической $\mathbb{R}^n$-значной 1-формой θ_{LX} (П.28), которая имеет координатный вид

$$\theta_{LX} = s^a{}_\mu dx^\mu \otimes t_a,$$

где $\{t_a\}$ — базис $\mathbb{R}^n$. Возьмем ее внешний дифференциал

$$d\theta_{LX} = ds^a{}_\mu \wedge dx^\mu \otimes t_a. \tag{1.66}$$

Форма (1.66) называется *n-симплектической*. Легко проверить, что она невырождена в том смысле, что для всякого векторного поля

$$u = u^\mu \partial_\mu + u^a_\mu \partial^\mu_a$$

на LX равенство $u \rfloor d\theta_{LX} = 0$ имеет место, только если $u = 0$. По аналогии с симплектическим случаем запишем

$$u_f \rfloor d\theta_{LX} = -df, \tag{1.67}$$

где f — некоторая $\mathbb{R}^n$-значная функция на реперном расслоении LX. Не для любой такой функции f найдется векторное поле u, удовлетворяющее равенству (1.67). Однако такие функции (например, постоянные вдоль слоев расслоения LX) существуют. Для них определена скобка Якоби

$$\{f, g\} = u_f \rfloor dg,$$

которая тоже принадлежит к указанному классу функций.

Возьмем теперь произвольное расслоение $Y \to X$ и рассмотрим соответствующее ему *расслоение Лежандра*

$$\Pi = \bigwedge^n T^*X \underset{Y}{\otimes} TX \underset{Y}{\otimes} V^*Y, \tag{1.68}$$

наделенное голономными координатами $(x^\lambda, y^i, p^\lambda_i)$ с функциями перехода

$$p'^\lambda_i = \frac{\partial y^j}{\partial y'^i} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \det\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\right) p^\mu_j.$$

Как подробно описано в первом томе [8], расслоение Лежандра (1.68) играет роль конечномерного фазового пространства в гамильтоновой формулировке классической теории поля [33, 64, 65]. Оно наделено каноническое векторнозначной формой

$$\Lambda = dp^\lambda_i \wedge dy^i \wedge \omega \otimes \partial_\lambda, \tag{1.69}$$

называемой *полисимплектической формой*. Для нас эта модель интересна тем, что в случае $X = \mathbb{R}$ она приводит к гамильтоновой формулировке неавтономной механики (Глава 3).

Глава 2

Лагранжева механика

В качестве пространства событий неавтономной механики, как уже обсуждалось, берется расслоение $Y \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ играет роль оси времени. Привычный случай прямого произведения $Y = \mathbb{R} \times M$ возникает при различных тривиализациях расслоения $Y \to \mathbb{R}$, что соответствует выбору определенной системы отсчета и заданию соответствующей связности на этом расслоении.

Данная глава посвящена формулировке неавтономной механики на конфигурационном пространстве координат и скоростей. Им является многообразие струй первого порядка J^1Y расслоения $Y \to \mathbb{R}$. Общая формулировка лагранжева формализма на многообразиях струй дана в первом томе [8] (см. также [33, 64, 65]). Помимо лагранжева формализма, в этой главе значительное внимание уделяется уравнениям движения, их формулировке в терминах связностей. Следует подчеркнуть, что далеко не всякое уравнение движения является уравнением Лагранжа и наоборот. Взаимно однозначное соответствие между ними устанавливается в случае ньютоновых систем и регулярных лагранжианов. При этом вводятся математические определения системы отсчета, силы, энергии и др. Это делается не ради математических формальностей, но приводит к ряду важных конструкций, например, к общему выражению для сил инерции, к законам сохранения.

В этой и следующей главах под $\pi : Y \to \mathbb{R}$ понимается расслоение с типичным слоем — m-мерным многообразием M, а $\mathbb{R}$ параметризуется декартовой координатой t с функциями перехода $t' = t + \text{const}$. В универсальной системе единиц она имеет размерность длины. При такой параметризации $\mathbb{R}$, как уже отмечалось, наделяется стандартным векторным полем ∂_t и стандартной 1-формой dt. Послойными координатами на Y являются (t, y^i).

§ 1. Расслоения над $\mathbb{R}$

Отметим ряд важных для дальнейших конструкций особенностей расслоений над $\mathbb{R}$.

1. Поскольку $\mathbb{R}$ стягиваемо, всякое расслоение над $\mathbb{R}$ тривиально.

2. Стандартное векторное поле ∂_t и стандартная 1-форма dt при преобразованиях $t' = t + \text{const}$ не меняются. Поэтому имеет место взаимно однозначное соответствие между векторными полями $f\partial_t$ и вещественными функциями f на $\mathbb{R}$, а также между горизонтальными плотностями ϕdt и вещественными функциями ϕ на расслоениях $Y \to \mathbb{R}$. Грубо говоря, участием $T\mathbb{R}$ и $T^*\mathbb{R}$ в тех или иных выражениях можно пренебречь. Однако подобные упрощения требуют осторожности при использовании универсальной системы единиц, поскольку, например, коэффициент ϕ плотности ϕdt имеет физическую размерность [длина]$^{-1}$, а не безразмерен, как функция.

3. Пусть $Y \to \mathbb{R}$ — расслоение и J^1Y — его многообразие струй с координатами (t, y^i, y^i_t). В данном случае канонический мономорфизм (П.32) принимает вид

$$\lambda : J^1Y \hookrightarrow TY, \tag{2.1}$$
$$\lambda : (t, y^i, y^i_t) \mapsto (t, y^i, \dot{t} = 1, \dot{y}^i = y^i_t).$$

Коротко можно записать

$$\lambda = d_t = \partial_t + y^i_t \partial_i, \tag{2.2}$$

где d_t — оператор полной производной. В дальнейшем мы будем отождествлять многообразие струй J^1Y с его образом в TY.

Замечание 2.1. Если в точности следовать выражению (П.32), морфизм λ (2.2) следует записать в виде

$$\lambda = dt \otimes (\partial_t + y^i_t \partial_i).$$

В универсальной системе единиц он физически безразмерен, а λ (2.2) имеет размерность [длина]$^{-1}$. □

Замечание 2.2. Тривиализация пространства событий $Y \cong \mathbb{R} \times M$ при координатах $(t, \overline{y}^i)$ приводит к соответствующей тривиализации конфигурационного пространства

$$J^1Y \cong \mathbb{R} \times TM$$

при координатах $(t, \overline{y}^i, \overline{y}^i_t)$, где $\overline{y}^i_t$ совпадают с голономными координатами $\dot{\overline{y}}^i$ на TM. □

Одним из следствий вложения (2.1) является то, что аффинное расслоение $J^1Y \to Y$ моделируется над вертикальным касательным расслоением VY. Это означает, что имеет место каноническое расщепление (П.6) вертикального касательного расслоения V_YJ^1Y к аффинному расслоению $J^1Y \to Y$:

$$\alpha : V_YJ^1Y \cong J^1Y \underset{Y}{\times} VY, \quad \alpha(\partial^t_i) = \partial_i, \tag{2.3}$$

и соответствующее расщепление вертикального кокасательного расслоения $V^*_YJ^1Y$ к $J^1Y \to Y$:

$$V^*_YJ^1Y \cong J^1Y \underset{Y}{\times} V^*Y.$$

В этом случае точная последовательность вертикальных касательных расслоений (П.57) для композиционного расслоения

$$J^1Y \to Y \to \mathbb{R}$$

принимает вид

$$0 \longrightarrow V_YJ^1Y \overset{i}{\hookrightarrow} VJ^1Y \overset{\pi_V}{\longrightarrow} J^1Y \underset{Y}{\times} VY \longrightarrow 0, \qquad \alpha^{-1}$$

Отсюда получаем следующий линейный эндоморфизм над J^1Y вертикального касательного расслоения VJ^1Y к $J^1Y \to \mathbb{R}$:

$$v = i \circ \alpha^{-1} \circ \pi_V, \tag{2.4}$$
$$\widehat{v}(\partial_i) = \partial^t_i, \quad \widehat{v}(\partial^t_i) = 0.$$

Очевидно, что

$$\widehat{v} \circ \widehat{v} = 0. \tag{2.5}$$

Далее, учитывая каноническое горизонтальное расщепление (П.39) и соответствующую проекцию

$$\mathrm{pr}_2 : J^1Y \underset{Y}{\times} TY \to J^1Y \underset{Y}{\times} VY \cong V_YJ^1Y,$$
$$\partial_t \mapsto -y^i_t\partial^t_i, \quad \partial_i \mapsto \partial^t_i,$$

а также вложение $VJ^1Y \hookrightarrow TJ^1Y$, можно продолжить эндоморфизм (2.4) на все касательное расслоение TJ^1Y:

$$\widehat{v}(\partial_t) = -y^i_t\partial^t_i, \quad \widehat{v}(\partial_i) = \partial^t_i, \quad \widehat{v}(\partial^t_i) = 0. \tag{2.6}$$

Он называется *вертикальным эндоморфизмом* и сохраняет свойство (2.5). Соответственно определяется линейный морфизм кокасательного расслоения

$$\widehat{v}^* : T^*J^1Y \to T^*J^1Y,$$
$$\widehat{v}^*(dt) = 0, \quad \widehat{v}^*(dy^i) = 0, \quad \widehat{v}^*(dy^i_t) = \theta^i = dy^i - y^i_t dt,$$
$$\widehat{v}^* \circ \widehat{v}^* = 0.$$

Используя его, введем *вертикальный внешний дифференциал*

$$d_v = \widehat{v}^* \circ d,$$

который действует на алгебре $\mathscr{O}^*(J^1Y)$ внешних форм на конфигурационном пространстве J^1Y. Например, если f — функция на J^1Y, тогда

$$d_v f = \partial^t_i f \theta^i,$$

где θ^i — контактные формы (П.34).

4. Всякая связность

$$\Gamma = dt \otimes (\partial_t + \Gamma^i\partial_i) \tag{2.7}$$

на расслоении $Y \to \mathbb{R}$ является плоской. Учитывая мономорфизм λ (2.1), она отождествляется с неособым *горизонтальным векторным полем*

$$\Gamma = \partial_t + \Gamma^i\partial_i \tag{2.8}$$

на Y, которое представляет собой горизонтальный лифт $\Gamma\partial_t$ (П.47) стандартного векторного поля ∂_t на $\mathbb{R}$ посредством связности (2.7). Обратно, всякое векторное поле Γ на Y такое, что $dt \rfloor \Gamma = 1$, определяет некоторую связность на $Y \to \mathbb{R}$, причем интегральные кривые векторного поля (2.8):

$$s : \mathbb{R} \supset () \to Y,$$
$$d_\tau t(\tau) = 1, \quad d_\tau s^i(\tau) = \Gamma^i, \quad \tau \in (),$$

совпадают с интегральными сечениями

$$\partial_t s^i(t) = (\Gamma \circ s)^i$$

связности (2.7).

Связность Γ на расслоении $Y \to \mathbb{R}$ определяет на нем горизонтальное интегрируемое распределение, интегральными многообразиями которого являются интегральные кривые векторного поля (2.8), трансверсальные слоям расслоения $Y \to \mathbb{R}$. Всякой связности Γ соответствует атлас локально постоянных тривиализаций — система послойных координат на Y таких, что функции перехода $y^i \to y'^i(y^j)$ не зависят от t и связность Γ в этих координатах принимает вид

$$\Gamma = \partial_t. \tag{2.9}$$

Обратно, всякий атлас локально постоянных тривиализаций расслоения $Y \to \mathbb{R}$ задает связность на $Y \to \mathbb{R}$, равную (2.9) относительно этого атласа.

Связность Γ на расслоении $Y \to \mathbb{R}$ называется *полной*, если горизонтальное векторное поле (2.8) является полным.

Предложение 2.1. Всякая тривиализация расслоения $Y \to \mathbb{R}$ задает на нем полную связность. Обратно, полная связность Γ на расслоении $Y \to \mathbb{R}$ определяет его тривиализацию $Y \cong \mathbb{R} \times M$ такую, что векторное поле (2.8) сводится к ∂_t в координатах, отвечающих этой тривиализации.

доказательство. Всякая тривиализация $Y \to \mathbb{R}$ определяет горизонтальный лифт стандартного векторного поля ∂_t на $\mathbb{R}$ до векторного поля ∂_t (2.8) на Y, которое является полным и отвечает полной связности на Y. Обратно, пусть Γ — полная связность на расслоении $Y \to \mathbb{R}$. Векторное поле Γ (2.8) является генератором 1-параметрической группы G_Γ, которая действует свободно на Y. Орбитами этого действия являются интегральные кривые векторного поля Γ. Таким образом, определена проекция

$$Y \to Y/G_\Gamma = M, \tag{2.10}$$

которую можно наглядно представить себе как проекцию Y вдоль интегральных кривых на некоторый слой, например, $Y_{t=0} \cong M$, расслоения Y. Проекция (2.10) вместе с проекцией $Y \to \mathbb{R}$ и определяют тривиализацию

$$\psi : Y \cong \mathbb{R} \times M. \tag{2.11}$$

□

Напомним, что разные тривиализации (2.11) отличаются друг от друга разными проекциями $\mathrm{pr}_2 \circ \psi$ расслоения Y на типичный слой M при одной и той же его проекции $\mathrm{pr}_1 \circ \psi = \pi$ на базу $\mathbb{R}$.

Связности на расслоении $Y \to \mathbb{R}$ образуют аффинное пространство, моделируемое над векторным пространством вертикальных полей на $Y \to \mathbb{R}$. Соответственно, ковариантный дифференциал (П.45), задаваемый связностью Γ на $Y \to \mathbb{R}$, принимает значения в вертикальном касательном расслоении к $Y \to \mathbb{R}$:

$$D_\Gamma : J^1Y \underset{Y}{\to} VY, \tag{2.12}$$
$$\dot{y}^i \circ D_\Gamma = y^i_t - \Gamma^i.$$

§ 2. Уравнение движения

Пусть J^2Y — многообразие струй второго порядка расслоения $Y \to \mathbb{R}$, параметризуемое координатами $(t, y^i, y^i_t, y^i_{tt})$. Отметим, что оно совпадает с полуголономным многообразием струй $\bar{J}^2Y$.

Определение 2.2. В механике *уравнением движения*, или *динамическим уравнением*, называется дифференциальное уравнение второго порядка на пространстве событий Y, которое является замкнутым подрасслоением расслоения $J^2Y \to \mathbb{R}$, задаваемым равенством

$$y^i_{tt} = \xi^i(t, y^j, y^j_t). \tag{2.13}$$

□

Решениями уравнения движения (2.13) служат (локальные) сечения s расслоения $Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнениям

$$d_t^2 s^i = \xi^i \circ s. \tag{2.14}$$

Такое сечение s называется *законом движения*, или просто *движением*.

Замечание 2.3. Специфика уравнений движения (2.13) среди других дифференциальных уравнений второго порядка на пространстве событий Y состоит в том, что оно является сечением расслоения $J^2Y \to Y$. Имея в виду вложение $J^2Y \to J^1J^1Y$, мы можем рассматривать его как систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} y^i_{tt} &= \xi^i(t, y^j, y^j_t), \\ y^i_{(t)} &= y^i_t \end{aligned} \tag{2.15}$$

на конфигурационном пространстве J^1Y. Его решения $\overline{s}$ принимают значения в J^2Y и, согласно Предложению П.5, являются голономными, т. е. $\overline{s} = \partial_t s$. Поэтому уравнения (2.13) и (2.15) эквивалентны. □

По аналогии с вложением (2.1) имеет место вложение

$$\begin{gathered} J^2Y \hookrightarrow J^1J^1Y \hookrightarrow TJ^1Y, \\ (t, y^i, y^i_t, y^i_{tt}) \mapsto (t, y^i, y^i_t, 1, \dot{y}^i = y^i_t, \dot{y}^i_t = y^i_{tt}). \end{gathered}$$

При таком вложении образ уравнения движения (2.13) в касательном расслоении TJ^1Y совпадает с неособым векторным полем

$$\xi = \partial_t + y^i_t \partial_i + \xi^i \partial^t_i \tag{2.16}$$

на конфигурационном пространстве J^1Y. Обратно, всякое векторное поле ξ на J^1Y, удовлетворяющее условиям

$$dt \rfloor \xi = 1, \quad \widehat{v}(\xi) = 0,$$

где $\widehat{v}$ — эндоморфизм (2.6), определяет уравнение движения на пространстве событий Y. Поэтому уравнение движения часто вводят именно как векторное поле (2.16) на многообразии струй J^1Y. Мы будем называть (2.16) *динамическим векторным полем*. Его интегральные кривые

$$\begin{gathered} s : \mathbb{R} \ni () \to J^1Y, \\ d_\tau t(\tau) = 1, \quad d_\tau s^i = s^i_t, \quad d_\tau s^i_t(\tau) = (\xi \circ s)^i, \quad \tau \in (), \end{gathered}$$

являются решениями уравнения движения (2.13).

Легко заметить, что динамическое векторное поле ξ (2.16) на конфигурационном пространстве J^1Y, удовлетворяя условию $dt \rfloor \xi = 1$, определяет голономную связность на расслоении $J^1Y \to \mathbb{R}$. Обратно, всякая голономная связность на расслоении $J^1Y \to \mathbb{R}$ задает динамическое векторное поле (2.16). Таким образом, мы приходим к эквивалентному определению уравнения движения.

Определение 2.3. Уравнение движения на пространстве событий Y дается голономной связностью ξ (2.16) на конфигурационном пространстве $J^1Y \to \mathbb{R}$. □

Интегральные сечения $\bar{s}$ такой связности ξ согласно Предложению П.5 являются голономными, т. е. $\bar{s} = J^1 s$, где s совпадают с интегральными кривыми динамического векторного поля ξ и являются движениями.

В частности, определение уравнения движения как голономной связности позволяет получить правило его преобразования при переходах к другим послойным координатам $y^i \mapsto y'^i$;

$$y'^i_{tt} = \xi'^i, \quad \xi'^i = (\xi^j \partial_j + y^j_t y^k_t \partial_j \partial_k + y^j_t \partial_j \partial_t + \partial_t) y'^i. \tag{2.17}$$

Связность ξ задает на J^1Y соответствующий ковариантный дифференциал (2.12):

$$D_\xi : J^1 J^1 Y \to V_Y J^1 Y \subset V J^1 Y,$$
$$\dot{y}^i \circ D_\xi = 0, \quad \dot{y}^i_t \circ D_\xi = y^i_{tt} - \xi^i,$$

который, как видно из первого равенства, принимает значения в вертикальном касательном расслоении $V_Y J^1 Y$ к расслоению струй $J^1Y \to Y$. Таким образом, сечение s расслоения $Y \to \mathbb{R}$ является решением уравнения движения (2.14) только тогда, когда ковариантная производная от $J^1 s$ относительно связности ξ равна нулю, т. е.

$$d_t J^1 s = (\xi \circ J^1 s)^i.$$

Динамические векторные поля (2.16), а следовательно и уравнения движения (2.13) образуют аффинное пространство, моделируемое над векторным пространством векторных полей на J^1Y, лежащих в $V_Y J^1 Y$. В частности, говорят, что уравнение (2.13) описывает свободное движение, если существует такая система послойных координат на расслоении $Y \to \mathbb{R}$, в которых оно принимает вид

$$y^i_{tt} = 0. \tag{2.18}$$

Возникает вопрос, всегда ли уравнение *свободного движения* (2.18) существует.

§ 3. Динамические связности

Чтобы ответить на поставленный выше вопрос, установим соответствие между голономными связностями на $J^1Y \to \mathbb{R}$ (или, что то же самое, уравнениями движения на пространстве событий Y), связностями на расслоении струй $J^1Y \to Y$ и связностями на касательном расслоении $TY \to Y$.

Пусть

$$\gamma : J^1Y \to J^1_Y J^1 Y$$

— связность на расслоении струй $J^1Y \to Y$. Под $J^1_Y J^1 Y$ понимается многообразие струй расслоения $J^1Y \to Y$, наделенное координатами $(t, y^\lambda, y^i_t, y^i_{\lambda t})$, где для простоты

использованы компактные обозначения $(y^{\lambda=0}=t, y^i)$. Связность γ имеет координатный вид

$$\gamma = dy^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \gamma^i_\lambda \partial^t_i) \tag{2.19}$$

с функциями перехода

$$\gamma'^i_\lambda = \left(\partial_j y'^i \gamma^j_\mu + \partial_\mu y'^i_t\right) \frac{\partial y^\mu}{\partial y'^\lambda}. \tag{2.20}$$

Предложение 2.4. Всякая связность γ (2.19) на расслоении струй $J^1Y \to Y$ определяет голономную связность ξ_γ (2.22) на расслоении $J^1Y \to \mathbb{R}$.

доказательство. Рассмотрим композиционное расслоение

$$J^1Y \to Y \to \mathbb{R}.$$

и морфизм ρ (П.54), который в данном случае принимает вид

$$\rho : J^1_Y J^1Y \ni (y^\lambda, y^i_t, y^i_{\lambda t}) \mapsto (y^\lambda, y^i_t, y^i_{(t)} = y^i_t, y^i_{tt} = y^i_{0t} + y^j_t y^i_{jt}) \in J^2Y. \tag{2.21}$$

Построим композицию отображений

$$\xi_\gamma = \rho \circ \gamma : J^1Y \to J^1_Y J^1Y \to J^2Y, \tag{2.22}$$
$$\xi_\gamma = \partial_t + y^i_t \partial_i + (\gamma^i_0 + y^j_t \gamma^i_j)\partial^t_i.$$

Она определяет искомую голономную связность на $J^1Y \to \mathbb{R}$. □

Таким образом, всякая связность γ (2.19) на расслоении струй $J^1Y \to Y$ задает уравнение движения

$$y^i_{tt} = (\gamma^i_0 + y^j_t \gamma^i_j) \tag{2.23}$$

на пространстве событий Y. Оно может быть определено как ограничение на J^2Y ядра $\operatorname{Ker} \widetilde{D}_\gamma$ вертикального ковариантного дифференциала $\widetilde{D}_\gamma$ (П.59), определяемого связностью γ:

$$\widetilde{D}_\gamma : J^1J^1Y \to V_Y J^1Y,$$
$$\dot{y}^i_t \circ \widetilde{D}_\gamma = y^i_{tt} - \gamma^i_0 - y^j_t \gamma^i_j.$$

Поэтому связности на $J^1Y \to Y$ называются *динамическими*. Соответственно, уравнение (2.14) переписывается в виде

$$d^2_t s^i = \rho \circ \gamma \circ J^1 s, \tag{2.24}$$

где ρ — морфизм (2.21).

Ясно, что разные динамические связности могут приводить к одному и тому же уравнению движения (2.23).

Предложение 2.5. Всякая голономная связность ξ (2.16) на конфигурационном пространстве $J^1Y \to \mathbb{R}$ определяет динамическую связность γ_ξ (2.25) на расслоении струй $J^1Y \to Y$.

доказательство. Пусть ξ — динамическое векторное поле (2.16). Для произвольного вертикального векторного поля

$$u = a^i \partial_i + b^i \partial^t_i$$

на расслоении $J^1Y \to \mathbb{R}$ положим

$$I_\xi(u) = [\xi, \widehat{v}(u)] - \widehat{v}([\xi, u]),$$
$$I_\xi(u) = -a^i\partial_i + (b^i - a^j\partial_j^t\xi^i)\partial_i^t,$$

где $\widehat{v}$ — эндоморфизм (2.6). Тем самым определен морфизм

$$I_\xi : VJ^1Y \underset{J^1Y}{\to} VJ^1Y,$$
$$I_\xi : \dot{y}^i\partial_i + \dot{y}_t^i\partial_i^t \mapsto -\dot{y}^i\partial_i + (\dot{y}_t^i - \dot{y}^j\partial_j^t\xi^i)\partial_i^t.$$

Легко проверить, что он удовлетворяет условию

$$I_\xi \circ I_\xi = I_\xi,$$

и можно построить проекцию

$$J_\xi = \frac{1}{2}(I_\xi + \mathrm{id}\, VJ^1Y) : VJ^1Y \underset{J^1Y}{\to} V_YJ^1Y,$$
$$J_\xi : \dot{y}^i\partial_i + \dot{y}_t^i\partial_i^t \mapsto \left(\dot{y}_t^i - \frac{1}{2}\dot{y}^j\partial_j^t\xi^i\right)\partial_i^t.$$

Напомним, что голономная связность ξ на $J^1Y \to \mathbb{R}$ определяет проекцию (П.44):

$$\xi : TJ^1Y \ni \dot{t}\partial_t + \dot{y}^i\partial_i + \dot{y}_t^i\partial_i^t \mapsto (\dot{y}^i - \dot{t}y_t^i)\partial_i + (\dot{y}_t^i - \dot{\xi}^i)\partial_i^t \in VJ^1Y.$$

Рассмотрим композицию отображений

$$I_\xi \circ \xi : TJ^1Y \to VJ^1Y \to V_YJ^1Y,$$
$$\dot{t}\partial_t + \dot{y}^i\partial_i + \dot{y}_t^i\partial_i^t \mapsto \left[\dot{y}_t^i - \dot{t}\left(\xi^i - \frac{1}{2}y_t^j\partial_j^t\xi^i\right) - \frac{1}{2}\dot{y}^j\partial_j^t\xi^i\right]\partial_i^t.$$

Она соответствует связности

$$\gamma_\xi = dt \otimes \left[\partial_t + \left(\xi^i - \frac{1}{2}y_t^j\partial_j^t\xi^i\right)\partial_i^t\right] + dy^j \otimes \left[\partial_j + \frac{1}{2}\partial_j^t\xi^i\partial_i^t\right] \tag{2.25}$$

на расслоении струй $J^1Y \to Y$. □

Легко убедиться, что динамическая связность γ является связностью типа γ_ξ для некоторого уравнения движения ξ, только если

$$\gamma_i^k = \frac{\partial\gamma_0^k}{\partial y_t^i} + \frac{\partial\gamma_j^k}{\partial y_t^i}y_t^j. \tag{2.26}$$

Динамическая связность, удовлетворяющая условию (2.26), называется *симметричной*. Она обладает следующим свойством симметрии:

$$\frac{\partial\gamma_i^k}{\partial y_t^j} = \frac{\partial\gamma_j^k}{\partial y_t^i}.$$

Пусть γ — динамическая связность (2.19) и ξ_γ — определяемое ею уравнение движения (2.22). Тогда динамическая связность, ассоциированная с ξ_γ, имеет вид

$$\gamma_{\xi_\gamma}{}^k_i = \frac{1}{2}(\gamma^k_i + \partial^t_i\gamma^k_0 + y^j_t\partial^t_i\gamma^k_j), \quad \gamma_{\xi_\gamma}{}^k_0 = \xi^k - y^i_t\gamma_{\xi_\gamma}{}^k_i.$$

Определим *кручение динамической связности* γ следующим образом:

$$T : J^1Y \to V^*Y \underset{Y}{\otimes} VY,$$
$$T = T^k_i dy^i \otimes \partial_k,$$
$$T^k_i = \gamma^k_i - \partial^t_i\gamma^k_0 - y^j_t\partial^t_i\gamma^k_j.$$

Видно, что динамическая связность является симметричной, только если ее кручение равно нулю. Также $\gamma = \gamma_{\xi_\gamma}$ тогда и только тогда, когда $T = 0$.

Пример 2.4. Поскольку расслоение струй $J^1Y \to Y$ — аффинное, на нем может быть определена аффинная связность

$$\gamma = dy^\lambda \otimes \left[\partial_\lambda + (\gamma^i_{\lambda 0}(y) + \gamma^i_{\lambda j}(y)y^j_t)\partial^t_i\right]. \tag{2.27}$$

В частности, она является симметричной, если $\gamma^i_{kj} = \gamma^i_{jk}$. Аффинная связность (2.27) определяет линейную связность

$$\overline{\gamma} = dy^\lambda \otimes \left[\partial_\lambda + \gamma^i_{\lambda j}(y)\dot{y}^j_t\dot{\partial}_i\right]$$

на вертикальном касательном расслоении $VY \to Y$. □

Установим теперь соответствие между динамическими связностями γ, т. е. связностями на расслоении струй $J^1Y \to Y$, и связностями

$$K = dt \otimes (\partial_t + K^\mu_0\dot{\partial}_\mu) + dy^j \otimes (\partial_j + K^\mu_j\dot{\partial}_\mu) \tag{2.28}$$

на касательном расслоении $TY \to Y$ к пространству событий Y. В (2.28) использованы обозначения (П.15). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} J^1_Y J^1Y & \xrightarrow{J^1\lambda} & J^1_Y TY \\ {\scriptstyle\gamma}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle K} \\ J^1Y & \xrightarrow{\lambda} & TY \end{array} \tag{2.29}$$

где $J^1_Y TY$ — многообразие струй касательного расслоения $TY \to Y$, параметризуемое координатами

$$(t, y^i, \dot{t}, \dot{y}^i, (\dot{t})_\mu, (\dot{y}^i)_\mu),$$

а струйное продолжение над Y канонического вложения λ (2.1) имеет вид

$$J^1\lambda : (t, y^i, y^i_t, y^i_{\mu t}) \mapsto \left(t, y^i, \dot{t} = 1, \dot{y}^i = y^i_t, (\dot{t})_\mu = 0, (\dot{y}^i)_\mu = y^i_{\mu t}\right).$$

Соответственно, получаем

$$J^1\lambda\circ\gamma : (t, y^i, y^i_t) \mapsto \left(t, y^i, \dot t = 1, \dot y^i = y^i_t, (\dot t)_\mu = 0, (\dot y^i)_\mu = \gamma^i_\mu\right),$$
$$K\circ\lambda : (t, y^i, y^i_t) \mapsto \left(t, y^i, \dot t = 1, \dot y^i = y^i_t, (\dot t)_\mu = K^0_\mu, (\dot y^i)_\mu = K^i_\mu\right).$$

Отсюда следует, что диаграмма (2.29) может быть коммутативной, только если связность K на $TY\to Y$ имеет нулевые компоненты K^0_μ. Поскольку многообразие Y наделено послойными координатами (t, y^i), где t не преобразуется через y^i, такие связности на касательном расслоении $TY\to Y$ существуют. Можно просто положить $K^0_\mu = 0$ в K (2.28) и получить требуемую связность

$$K = dt\otimes(\partial_t + K^i_0\dot\partial_i) + dy^j\otimes(\partial_j + K^i_j\dot\partial_i) \tag{2.30}$$

с законом преобразований

$$K'^i_\lambda = \left(\partial_j y'^i K^j_\mu + \partial_\mu\dot y'^i\right)\frac{\partial y^\mu}{\partial y'^\lambda}. \tag{2.31}$$

Теперь диаграмму (2.29) можно сделать коммутативной, если связности γ и K удовлетворяют соотношению

$$\gamma^i_\mu = K^i_\mu\circ\lambda = K^i_\mu(t, y^i, \dot t = 1, \dot y^i = y^i_t). \tag{2.32}$$

Поскольку подстановка $\dot y^i = y^i_t$ в (2.31) воспроизводит закон преобразований связности (2.20) на $J^1Y\to Y$, соотношение (2.32) выполняется глобально.

Предложение 2.6. Согласно соотношению (2.32), всякая связность K типа (2.30) (а следовательно, произвольная связность K (2.28)) на касательном расслоении $TY\to Y$ определяет связность γ на расслоении струй $J^1Y\to Y$ и уравнение движения

$$y^i_{tt} = K^i_0\circ\lambda + y^j_t K^i_j\circ\lambda$$

на пространстве событий Y. □

Пример 2.5. Имеет место взаимно однозначное соответствие между аффинными связностями γ на расслоении струй $J^1Y\to Y$ и линейными связностями K (2.30) на касательном расслоении $TY\to Y$. Оно задается соотношением (2.32) в виде

$$\gamma^i_\mu = \gamma^i_{\mu 0} + \gamma^i_{\mu j}y^j_t = K_\mu{}^i{}_0(y)\dot t + K_\mu{}^i{}_j(y)\dot y^j\big|_{\dot t=1,\dot y^i=y^i_t} = K_\mu{}^i{}_0(y) + K_\mu{}^i{}_j(y)y^j_t.$$

□

Фиксируем некоторую тривиализацию $Y\cong\mathbb{R}\times M$ пространства событий $Y\to\mathbb{R}$ при соответствующих координатах $(t, \bar y^i)$, где $\bar y^i$ — координаты на M, чьи функции перехода, очевидно, не зависят от t. Соответствующая тривиализация $J^1Y\cong\mathbb{R}\times TM$ осуществляется при координатах $(t, \bar y^i, \dot{\bar y}^i)$, где $\dot{\bar y}^i$ — голономные координаты на TM. В этих координатах закон преобразования (2.20) связности γ на $J^1Y\to Y$ имеет вид

$$\gamma'^i_0 = \frac{\partial\bar y'^i}{\partial\bar y^j}\gamma^j_0, \quad \gamma'^i_k = \left(\frac{\partial\bar y'^i}{\partial\bar y^j}\gamma^j_n + \frac{\partial\dot{\bar y}'^i}{\partial\bar y^n}\right)\frac{\partial\bar y^n}{\partial\bar y'^k}.$$

Таким образом, при заданной тривиализации расслоения $Y \to \mathbb{R}$ связность γ на $J^1Y \to Y$ задает вертикальное временезависимое векторное поле γ_0^i и временезависимую связность γ_k^i на $TM \to M$.

Обратно, возьмем некоторую связность

$$\overline{K} = d\bar{y}^k \otimes \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}^k} + \overline{K}_k^i(\bar{y}^j, \dot{\bar{y}}^j) \frac{\partial}{\partial \dot{\bar{y}}^i} \right) \tag{2.33}$$

на $TM \to M$. В случае упомянутой выше тривиализации расслоения $Y \to \mathbb{R}$ связность $\overline{K}$ определяет связность K (2.30) на касательном расслоении $TY \to Y$ с компонентами

$$K_0^i = 0, \quad K_k^i = \overline{K}_k^i$$

и соответствующую связность γ на $J^1Y \to Y$ с компонентами

$$\overline{\gamma}_0^i = 0, \quad \overline{\gamma}_k^i = \overline{K}_k^i. \tag{2.34}$$

Используя закон преобразований (2.20), можно получить выражение для связности (2.34) относительно произвольной системы послойных координат (t, y^i) на пространстве событий Y. Она имеет вид

$$\gamma_k^i = \left[\frac{\partial y^i}{\partial \bar{y}^j} \overline{K}_n^j \left(\bar{y}^j(y^i), \dot{\bar{y}}^j(y^i, y_t^i) \right) + \frac{\partial^2 y^i}{\partial \bar{y}^n \partial \bar{y}^j} \dot{\bar{y}}^j + \frac{\partial \Gamma^i}{\partial \bar{y}^n} \right] \partial_k \bar{y}^n, \tag{2.35}$$

$$\gamma_0^i = \partial_t \Gamma^i + \partial_j \Gamma^i y_t^j - \gamma_k^i \Gamma^k,$$

где

$$\Gamma^i = \partial_t y^i(t, \bar{y}^j) \tag{2.36}$$

— связность на $Y \to \mathbb{R}$, отвечающая данной тривиализации Y, т. е. $\Gamma = 0$ в координатах $(t, \bar{y}^i)$. Уравнение движения на пространстве событий Y, определяемое динамической связностью (2.35), запишется следующим образом:

$$y_{tt}^i = \partial_t \Gamma^i + y_t^j \partial_j \Gamma^i + \gamma_k^i (y_t^k - \Gamma^k). \tag{2.37}$$

Предложение 2.7. Таким образом, всякая связность $\overline{K}$ на многообразии M задает уравнение движения (2.37) на пространстве событий Y. □

Это уравнение движения описывает консервативную систему и в координатах $(t, \bar{y}^i)$ принимает форму

$$\ddot{\bar{y}}^i = \overline{K}_k^i \dot{\bar{y}}^k \tag{2.38}$$

известного *уравнения геодезических* связности $\overline{K}$ (2.33) на M.

Следствие 2.8. На Y существует уравнение равномерного движения тогда и только тогда, когда его типичный слой M допускает линейную связность с нулевой кривизной. Оно определяется этой связностью. □

Пусть $\overline{K}$ — такая плоская связность. В координатах $\bar{y}^i$ на M, в которых $\overline{K}_j^i = 0$, такое уравнение свободного движения имеет вид

$$\ddot{\bar{y}}^i = 0, \tag{2.39}$$

а в произвольных координатах

$$y^i_{tt} = \partial_t\Gamma^i - \Gamma^j\partial_j\Gamma^i + y^k_t\left(2\partial_k\Gamma^i + \frac{\partial y^i}{\partial\bar{y}^j}\frac{\partial\bar{y}^j}{\partial y^m\partial y^k}\,\Gamma^m\right) - \frac{\partial y^i}{\partial\bar{y}^j}\frac{\partial\bar{y}^j}{\partial y^m\partial y^k}\,y^k_t y^m_t. \qquad (2.40)$$

Его можно также получить из уравнения (2.17), положив в нем $\xi = 0$ и переобозначив $y^i \to \bar{y}^i$ и $y'^i \to y^i$.

Уравнение (2.40) можно принять за общее выражение для уравнения свободного движения. Ему соответствует аффинная динамическая связность γ, задаваемая формулами (2.35), если положить в них $\overline{K} = 0$. Такой связности, как отмечалось в Примере 2.5, соответствует линейная связность K на $TY \to Y$, которая является плоской. При некоторой заданной тривиализации расслоения $Y \to \mathbb{R}$ компоненты R^i_{kj} кривизны (П.48) этой связности задают кривизну временезависимой линейной связности $\overline{K}^i_j$ на $TM \to M$, которая при любом t равна 0.

§ 4. Системы отсчета

Пусть $Y \to \mathbb{R}$ — пространство событий. С физической точки зрения выбор системы отсчета означает задание в каждой точке Y некоторого касательного вектора, характеризующего скорость "наблюдателя". Это мотивирует следующее математическое определение системы отсчета.

Определение 2.9. *Система отсчета в нерелятивистской механике* отождествляется с заданием связности Γ на пространстве событий $Y \to \mathbb{R}$. □

Действительно, всякая связность Γ на $Y \to \mathbb{R}$ определяет векторное поле (2.8) на Y, которое можно интерпретировать как поле скоростей "наблюдателя", а соответствующий ковариантный дифференциал

$$D_\Gamma(y^i_t) = y^i_t - \Gamma^i = \dot{y}^i_\Gamma \qquad (2.41)$$

— как *скорость относительно системы отсчета* Γ, записанную в координатах y^i. В частности, пусть $s : \mathbb{R} \to Y$ — некоторое движение. Тогда ковариантная производная $\nabla^\Gamma s$ (П.46) — это скорость движения относительно системы отсчета Γ. Например, если s — интегральное сечение связности Γ, скорость движения s относительно системы отсчета Γ равна 0. Поэтому такое s можно трактовать как движение "наблюдателя" Γ.

Замечание 2.6. Таким образом, не конфигурационное пространство J^1Y, а вертикальное касательное расслоение VY правильнее называть "пространством координат и скоростей". Однако в универсальной системе единиц элементы VY следует разделить на фундаментальную длину, чтобы они имели правильную размерность скорости. □

Как отмечалось в § 2.1, всякой связности Γ соответствует атлас локально постоянных тривиализаций такой, что

$$\Gamma = \partial_t \qquad (2.42)$$

в соответствующих послойных координатах $(t, \bar{y}^i)$ с функциями перехода $\bar{y}^i \to \bar{y}'^i$, не зависящими от времени. Задание таких координат тоже можно рассматривать как выбор системы отсчета, отвечающей связности (2.42), записанной в этих координатах. Мы

будем называть их *координатами, сопутствующими системе отсчета* Γ. В координатах $\bar{y}^i$, сопутствующих системе отсчета Γ, скорость относительно этой системы отсчета, естественно, равна

$$D_\Gamma(\bar{y}^i_t) = \dot{\bar{y}}^i_\Gamma = \bar{y}^i_t.$$

Ясно, что системой отсчета является не всякая система послойных координат (t, y^i) на пространстве событий Y, а только отвечающая некоторому атласу локально постоянных тривиализаций, т. е. когда функции перехода координат $y^i \to y'^i$ не зависят от времени t.

Система отсчета называется *полной*, если связность Γ — полная. Согласно Предложению 2.1, полная система отсчета соответствует некоторой тривиализации

$$\psi_\Gamma : Y \cong \mathbb{R} \times M$$

расслоения $Y \to \mathbb{R}$ и обратно. Координаты, сопутствующие этой системе отсчета, — это $\bar{y}^i \circ \psi_\Gamma$, где $\bar{y}^i$ — координаты на M. В произвольной системе координат связность Γ принимает вид (2.36).

В дальнейшем для простоты изложения под системами отсчета мы будем понимать только полные системы отсчета.

То, что связность Γ на расслоении $Y \to \mathbb{R}$ действительно характеризует систему отсчета в физическом понимании, видно на примере свободного движения. Пусть дана система отсчета Γ и $\bar{y}^i$ — сопутствующие ей координаты. Уравнение свободного движения (2.39) относительно системы отсчета Γ в координатах $\bar{y}^i$ имеет вид

$$d_t \dot{\bar{y}}^i = 0.$$

Соответственно, уравнение свободного движения (2.40) относительно системы отсчета Γ в произвольных координатах y^i представимо как

$$d_t \dot{y}^i_\Gamma = d_t \left(\frac{\partial y^i}{\partial \bar{y}^k} \dot{\bar{y}}^k \right),$$

где $\dot{y}^i_\Gamma$ — скорость (2.41) относительно системы отсчета Γ в координатах y^i.

Пример 2.7. Рассмотрим свободное движение на плоскости. Его пространством событий является $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, параметризуемое координатами $(t, \bar{y}^1, \bar{y}^2)$. Введем вращающуюся относительно исходной систему отсчета, характеризуемую координатами

$$y^1 = \bar{y}^1 \cos wt - \bar{y}^2 \sin wt, \quad y^2 = \bar{y}^2 \cos wt + \bar{y}^1 \sin wt.$$

В этих координатах уравнение свободного движения (2.40) имеет вид

$$y^i_{tt} = \partial_t \Gamma^i + 2y^j_t \partial_j \Gamma^i - \Gamma^j \partial_j \Gamma^i, \tag{2.43}$$

где

$$\Gamma^1 = \partial_t y^1 = -wy^2, \quad \Gamma^2 = \partial_t y^2 = wy^1. \tag{2.44}$$

Подставляя (2.44) в (2.43), получаем знакомые уравнения

$$y^1_{tt} = w^2 y^1 - 2wy^2, \quad y^2_{tt} = w^2 y^2 + 2wy^1$$

свободного движения в системе координат, сопутствующей вращающейся системе отсчета. □

Пример 2.8. Уравнение (2.38) сохраняет форму уравнения геодезических, будучи записанным и в произвольной системе координат:

$$d_t \dot{y}^i_\Gamma = K'^i_{\ k} \dot{y}^k_\Gamma + \partial_k \Gamma^i \dot{y}^k_\Gamma,$$
$$K'^i_{\ k} = \frac{\partial y^i}{\partial \bar{y}^j} \frac{\partial \bar{y}^n}{\partial y^k} K^j_n\left(\bar{y}^j(y^i), \dot{\bar{y}}^j_\Gamma(y^i, \dot{y}^i_\Gamma)\right) - \frac{\partial y^i}{\partial \bar{y}^j} \frac{\partial \bar{y}^j}{\partial y^m \partial y^k} \dot{y}^m_\Gamma.$$

□

Пусть γ — динамическая связность на $J^1Y \to Y$ и $\Gamma : Y \to J^1Y$ — система отсчета. Рассмотрим ковариантную производную Γ относительно γ:

$$\nabla^\gamma \Gamma = \nabla^\gamma_\lambda \Gamma^k dy^\lambda \otimes \partial_k,$$
$$\nabla^\gamma_\lambda \Gamma^k = \partial_\lambda \Gamma^k - \gamma^k_\lambda \circ \Gamma.$$

Система отсчета Γ называется *сопутствующей* уравнению движения γ, если

$$\Gamma \lrcorner \nabla^\gamma \Gamma = \left(\partial_t \Gamma^i - \gamma^i_0 \circ \Gamma + \Gamma^k \partial_k \Gamma^i - \Gamma^k (\gamma^i_k \circ \Gamma)\right) \partial_i = 0.$$

Предложение 2.10. Интегральные сечения s для системы отсчета Γ являются решениями уравнения движения γ тогда и только тогда, когда Γ — система отсчета, сопутствующая γ.

доказательство. Легко проверить, что если s — интегральное сечение для связности Γ, уравнение движения (2.24) для s принимает вид

$$[\Gamma \lrcorner \nabla^\gamma \Gamma] \circ s = 0.$$

□

Например, для уравнения свободного движения

$$\bar{y}^i_{tt} = 0 \tag{2.45}$$

в координатах $(t, \bar{y}^i)$ сопутствующими системами отсчета являются только $\Gamma^i = v^i = \text{const}$. В координатах

$$\bar{y}'^i = \bar{y}^i - v^i t - a^i, \tag{2.46}$$

связанных с любой такой системой отсчета, уравнение свободного движения (2.45), как это следует из (2.40), опять будет выглядеть как уравнение свободного движения.

Назовем системы отсчета Γ и Γ' такие, что $\Gamma - \Gamma' = \text{const}$ в системе координат, сопутствующей системе отсчета Γ (или Γ'), *взаимно инерциальными*. Как легко убедиться, отношение взаимной инерциальности между системами отсчета является отношением эквивалентности. Системы координат, сопутствующие взаимно инерциальным системам отсчета, связаны между собой глобальными преобразованиями координат (2.46). Назовем эти преобразования *инерциальными*. Отсюда следует, что уравнения свободного движения остаются инвариантными при преобразованиях между системами координат, сопутствующими взаимно инерциальным системам отсчета. Это составляет содержание известного *принципа относительности Галилея*, который, однако, в математическом

аспекте ничего дополнительно не постулирует. Мы определили инерциальные системы отсчета именно так, чтобы они были связаны преобразованиями симметрий уравнений свободного движения. Общий случай рассмотрен в § 3.8.

Несовпадающие взаимно инерциальные системы существуют не всегда. Легко установить взаимно однозначное соответствие между взаимно инерциальными системами отсчета и постоянными векторными полями на многообразии M. Такие ненулевые векторные поля существуют на любом некомпактном многообразии M, а на компактном многообразии M — только если его эйлерова характеристика равна 0. Например, на четномерных сферах существует только нулевое постоянное векторное поле.

Как уже отмечалось, динамические векторные поля ξ на конфигурационном пространстве J^1Y образуют аффинное пространство, моделируемое над векторным пространством вертикальных V_YJ^1Y-значных векторных полей

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}^i\partial_i^t.$$

Они являются математической моделью *физических сил*. Правую часть уравнения движения (2.13), т. е. вертикальную компоненту $\xi^i\partial_i$ динамического векторного поля, будем соответственно именовать просто *силой*. Ясно, что силы образуют аффинное пространство, моделируемое над векторным пространством физических сил. Если существует уравнение свободного движения, за центр этого аффинного пространства естественно принять правую часть этого уравнения, назвав ее *силой инерции*. Правая часть уравнения (2.40) дает общее выражение для силы инерции, которая квадратична по координатам y_t^i. Обратно, всякую такую комбинацию в правой части уравнения движения можно исключить переходом к некоторой системе координат. Таким образом, налицо математическое различие между силами инерции и физическими силами, что в свое время было предметом бурных дискуссий. Сила инерции, если ее можно ввести в данной механической системе, является силой, но не физической силой, а физическая сила не является просто силой. В общем же случае разделить силу канонически на физическую силу и силу инерции не удается.

Подчеркнем, что с физической точки зрения речь выше идет об обобщенных силах. Реальные силы составляют умноженную на массу правую часть уравнения движения точечной массивной частицы в декартовых координатах, как это устанавливает *второй закон Ньютона*. Разделение их на реальные физические силы и силу инерции осуществляется согласно *первому закону Ньютона*, который постулирует существование *абсолютной инерциальной декартовой системы отсчета*. Силой инерции считается вертикальная компонента динамического векторного поля, которое задает свободное уравнение движения в упомянутой абсолютной инерциальной системе отсчета.

§ 5. Лагранжевы системы

Построение исчерпывающей схемы неавтономной механики на конфигурационном пространстве J^1Y осложняется тем, что это пространство не допускает ни одной из канонических структур, перечисленных в Главе 1. Поскольку J^1Y нечетномерно, на нем не существует симплектической формы, а пресимплектическая структура и структура Пуассона вводятся только при задании на J^1Y лагранжиана и зависят от его выбора, т. е. имеют место только для лагранжевых систем. Под *лагранжевой системой* мы будем понимать механическую систему, движение в которой является решением уравнений Лагранжа, отвечающих некоторому лагранжиану на конфигурационном пространстве J^1Y.

Как уже отмечалось, далеко не все механические системы лагранжевы, а уравнения Лагранжа не всегда являются уравнениями движения, как они определялись в § 2.2, и даже дифференциальными уравнениями, если следовать определению, данному в Предварительных сведениях.

Заметим, что уравнения Лагранжа — это не единственный тип уравнений, описывающих лагранжевы системы. В лагранжевом формализме фигурируют еще уравнения Картана и Гамильтона—де Дондера. Все эти уравнения эквивалентны друг другу в случае регулярных лагранжианов. Кроме того, уравнения Лагранжа тоже могут быть введены разными способами. Упомянем два из них. В первом случае они выводятся, исходя из пресимплектической структуры, определяемой лагранжианом на конфигурационном пространстве J^1Y. Во втором случае — как ядро оператора Эйлера—Лагранжа. Операторы Эйлера—Лагранжа, в свою очередь, могут быть введены как в рамках вариационной задачи для лагранжианов, так и вне связи с ней как особый тип так называемых вариационных операторов на расслоении $Y \to \mathbb{R}$ (см. § 2.6).

Все эти тонкости носят не только формальный характер, а оказываются существенными, например, в случае вырожденных лагранжианов.

Лагранжиан механической системы определяется как горизонтальная плотность

$$L = \mathscr{L}\,dt, \qquad \mathscr{L} : J^1Y \to \mathbb{R}, \tag{2.47}$$

на конфигурационном пространстве J^1Y, где $\mathscr{L}$ называется *функцией Лагранжа*. В универсальной системе единиц лагранжиан (2.47) остается безразмерным.

Мы не будем здесь углубляться в вариационную задачу (см. т.1 [8]), а просто применим первую вариационную формулу.

Возьмем векторное поле

$$u = u^t\partial_t + u^i\partial_i, \quad u^t = 0, 1, \tag{2.48}$$

на $Y \to \mathbb{R}$ и рассмотрим производную Ли лагранжиана (2.47) вдоль этого векторного поля. Для этого необходимо поднять u до векторного поля

$$\overline{u} = u^t\partial_t + u^i\partial_i + d_t u^i\partial_i^t, \qquad d_t = \partial_t + y_t^i\partial_i + \cdots,$$

согласно формуле (П.35). Тогда получаем

$$\mathbf{L}_{\overline{u}}L = (\overline{u} \rfloor d\mathscr{L})dt = (u^t\partial_t + u^i\partial_i + d_t u^i\partial_i^t)\mathscr{L}\,dt. \tag{2.49}$$

Первая вариационная формула обеспечивает каноническое разложение производной Ли (2.49) в соответствии с вариационной задачей:

$$\overline{u} \rfloor d\mathscr{L} = (u^i - u^t y_t^i)\mathscr{E}_i + d_t(u \rfloor H_L), \tag{2.50}$$

где

$$H_L = \pi_i dy^i - (\pi_i y_t^i - \mathscr{L})dt \tag{2.51}$$

— *форма Пуанкаре—Картана*, а

$$\mathscr{E}_L : J^2Y \to V^*Y, \qquad \mathscr{E}_L = \mathscr{E}_i\overline{dy}^i = (\partial_i - d_t\partial_i^t)\mathscr{L}\overline{dy}^i, \tag{2.52}$$

— *оператор Эйлера—Лагранжа* для лагранжиана L, представимый также в виде 2-формы

$$\mathscr{E}_L = (\partial_i - d_t\partial_i^t)\mathscr{L}\, dy^i \wedge dt.$$

Коэффициенты $\mathscr{E}_i$ называются *вариационными производными*. Мы будем использовать обозначения

$$\pi_i = \partial_i^t\mathscr{L}, \quad \pi_{ji} = \partial_j^t\partial_i^t\mathscr{L}.$$

Ядро $\operatorname{Ker}\mathscr{E}_L \subset J^2Y$ оператора Эйлера—Лагранжа определяет систему дифференциальных *уравнений Эйлера—Лагранжа* второго порядка на Y:

$$(\partial_i - d_t\partial_i^t)\mathscr{L} = 0. \tag{2.53}$$

Их решениями являются сечения s расслоения $Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\partial_i\mathscr{L} \circ J^1s - d_t(\pi_i \circ J^1s) = 0. \tag{2.54}$$

Замечание 2.9. В общем случае ядро оператора Эйлера—Лагранжа $\operatorname{Ker}\mathscr{E}_L$ не является подрасслоением расслоения $J^2Y \to \mathbb{R}$ и (2.53) — не дифференциальные уравнения, если следовать их определению, данному в Предварительных сведениях. Например, требования к дифференциальным уравнениям выполняются, если ранг морфизма (2.52) постоянен. В частности, это имеет место, если лагранжиан L *регулярен* (*невырожден*), т. е. *гессиан*

$$\det \pi_{ji} \neq 0$$

всюду на конфигурационном пространстве J^1Y. □

Пример 2.10. Рассмотрим пространство событий $Y = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ с координатами (t, y). Соответствующее конфигурационное пространство J^1Y параметризуется координатами (t, y, y_t). Выберем на нем лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}\, y^2y_t^2dt.$$

Он приводит к оператору Эйлера—Лагранжа

$$\mathscr{E}_L = \left[yy_t^2 - d_t(y^2y_t)\right]\bar{d}y,$$

ядро которого не является многообразием в окрестности точки $y = 0$. □

Всякий лагранжиан L на конфигурационном пространстве J^1Y определяет *отображение Лежандра*

$$\begin{gathered}\widehat{L} : J^1Y \to V^*Y, \\ p_i \circ \widehat{L} = \pi_i,\end{gathered} \tag{2.55}$$

где (t, y^i, p_i) — голономные координаты на вертикальном кокасательном расслоении V^*Y. Действительно, с учетом вертикального расщепления (2.3), вертикальный касательный морфизм VL к L определяет линейный морфизм

$$VL : J^1Y \times VY \to \mathbb{R}$$

и, соответственно, морфизм (2.55).

В неавтономной механике кокасательное расслоение $\boldsymbol{V}^*Y$ играет роль расслоения Лежандра (1.68) и фазового пространства (см. Главу 3).

Замечание 2.11. Отображение Лежандра (2.55) является локальным диффеоморфизмом, т. е. имеет постоянный максимальный ранг тогда и только тогда, когда лагранжиан L — регулярный. Если отображение Лежандра $\widehat{L}$ — диффеоморфизм, лагранжиан L называется *гиперрегулярным*. □

Фазовое пространство $\boldsymbol{V}^*Y$ наделено канонической 3-формой

$$\boldsymbol{\Omega} = dp_i \wedge dy^i \wedge dt, \tag{2.56}$$

которая получается из полисимплектической формы (1.69). Рассмотрим форму

$$\boldsymbol{\Omega}_L = \widehat{L}^*\boldsymbol{\Omega} = d\pi_i \wedge dy^i \wedge dt, \tag{2.57}$$

индуцированную на конфигурационном пространстве J^1Y формой (2.56) посредством отображения Лежандра $\widehat{L}$ (2.55). Она позволяет ввести на конфигурационном пространстве конструкцию, подобную гамильтоновой механике на фазовом пространстве; эта конструкция, однако, не является канонической, а зависит от выбора лагранжиана L. При этом лагранжевым партнером гамильтоновой формы оказывается форма Пуанкаре—Картана (2.51).

В частности, если лагранжиан L регулярен, форма $\boldsymbol{\Omega}_L$ (2.57) определяет на конфигурационном пространстве J^1Y структуру Пуассона. Действительно, с ее помощью всякому вертикальному векторному полю

$$\vartheta = \vartheta^i\partial_i + \dot{\vartheta}^i\partial_i^t$$

на расслоении $J^1Y \to \mathbb{R}$ ставится в соответствие 2-форма

$$\vartheta \rfloor \boldsymbol{\Omega}_L = \left\{\left[\dot{\vartheta}^j\pi_{ji} + \vartheta^j(\partial_j\pi_i - \partial_i\pi_j)\right]dy^i - \vartheta^i\pi_{ji}dy_t^j\right\} \wedge dt.$$

Это соответствие взаимно однозначно, если лагранжиан L регулярен. В этом случае для произвольной 2-формы

$$\phi = (\phi_i dy^i + \dot{\phi}_i dy_t^i) \wedge dt$$

на J^1Y алгебраические уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}^j\pi_{ji} + \vartheta^j(\partial_j\pi_i - \partial_i\pi_j) &= \phi_i,\\ -\vartheta^i\pi_{ji} &= \dot{\phi}_j\end{aligned}$$

имеют единственное решение

$$\begin{aligned}\vartheta^i &= -(\pi^{-1})^{ij}\dot{\phi}_j,\\ \dot{\vartheta}^j &= (\pi^{-1})^{ji}\left[\phi_i + (\pi^{-1})^{kn}\dot{\phi}_n(\partial_k\pi_i - \partial_i\pi_k)\right].\end{aligned}$$

В частности, любая функция f на J^1Y определяет, согласно соотношению

$$\vartheta_f \rfloor \boldsymbol{\Omega}_L = -df \wedge dt,$$

вертикальное векторное поле

$$\vartheta_f = (\pi^{-1})^{ij}\partial_j^t f\,\partial_i - (\pi^{-1})^{ji}\Big[\partial_i f + (\pi^{-1})^{kn}\partial_n^t f(\partial_k\pi_i - \partial_i\pi_k)\Big]\partial_j^t \tag{2.58}$$

на $J^1Y \to \mathbb{R}$. Тогда для произвольных функций $f, g \in \mathscr{O}^0(J^1Y)$ могут быть введены скобки Пуассона

$$\{f,g\}_L dt = \vartheta_g \rfloor \vartheta_f \rfloor \Omega_L, \tag{2.59}$$
$$\{f,g\}_L = (\pi^{-1})^{ij}(\partial_i^t f\,\partial_j g - \partial_i^t g\,\partial_j f) + (\partial_n\pi_k - \partial_k\pi_n)(\pi^{-1})^{ki}(\pi^{-1})^{nj}\partial_i^t f\,\partial_j^t g.$$

При этом вертикальное векторное поле ϑ_f (2.58) является гамильтоновым векторным полем для функции f относительно скобок Пуассона (2.59). Структура Пуассона (2.59) определяет соответствующее симплектическое слоение на J^1Y, которое совпадает с расслоением $J^1Y \to \mathbb{R}$. Симплектическими формами на слоях этого слоения являются

$$\Omega_t = d\pi_i \wedge dy^i$$

[33, 72].

Пример 2.12. Если лагранжиан L является гиперрегулярным, структура Пуассона (2.59) очевидно изоморфна канонической структуре Пуассона на фазовом пространстве V^*Y. Действительно, легко вычислить скобки Пуассона

$$\{\pi_i, \pi_j\} = \{y^i, y^j\} = 0, \quad \{\pi_i, y^j\} = \delta_i^j.$$

□

Определение 2.11. Связность

$$\xi_L = \partial_t + \xi^i\partial_i + \xi_t^i\frac{\partial}{\partial y_{(t)}^i}$$

на расслоении $J^1Y \to \mathbb{R}$ называется *лагранжевой связностью* для лагранжиана L, если выполняется условие

$$\xi_L \rfloor \Omega_L = dH_L, \tag{2.60}$$

которое имеет координатный вид

$$(\xi^i - y_t^i)\pi_{ji} = 0, \tag{2.61 a}$$
$$\partial_i\mathscr{L} - \partial_t\pi_i - \xi^j\partial_j\pi_i - \xi_t^j\pi_{ji} + (\xi^j - y_t^j)\partial_i\pi_j = 0. \tag{2.61 b}$$

□

Нетрудно заметить, что для регулярного лагранжиана L, как следует из уравнения (2.61 a), лагранжева связность является голономной ($\xi^i = y_t^i$). В силу уравнения (2.61 b) она всегда существует и единственна. Такая связность, как обсуждалось в § 2.2, задает уравнение движения.

Чтобы прояснить смысл условия (2.60), рассмотрим лагранжиан

$$\overline{\mathscr{L}} = \mathscr{L} + (y_{(t)}^i - y_t^i)\pi_i$$

на повторном многообразии струй J^1J^1Y. Соответствующий оператор Эйлера—Лагранжа имеет вид

$$\mathscr{E}_{\overline{L}} : J^1J^1Y \to T^*J^1Y,$$
$$\mathscr{E}_{\overline{L}} = \left[(\partial_i\mathscr{L} - \widehat{d}_t\pi_i + \partial_i\pi_j(y^j_{(t)} - y^j_t))dy^i + \pi_{ij}(y^j_{(t)} - y^j_t)dy^i_t\right] \wedge dt, \tag{2.62}$$
$$\widehat{d}_t = \partial_t + y^i_{(t)}\partial_i + y^i_{tt}\partial^t_i.$$

Он называется оператором *Эйлера—Лагранжа—Картана*. Тогда условие (2.60) эквивалентно условию

$$\xi_L(J^1Y) \subset \operatorname{Ker}\mathscr{E}_{\overline{L}}$$

и приводит к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\partial^t_i\pi_j(y^j_{(t)} - y^j_t) = 0, \tag{2.63 a}$$
$$\partial_i\mathscr{L} - \widehat{d}_t\pi_i + (y^j_{(t)} - y^j_t)\partial_i\pi_j = 0 \tag{2.63 b}$$

на расслоении $J^1Y \to \mathbb{R}$. Они именуются *уравнениями Картана*.

Замечание 2.13. Как будет показано в следующей главе, именно оператор Эйлера—Лагранжа—Картана служит лагранжевым аналогом оператора Гамильтона. □

Решениями уравнений Картана являются (локальные) интегральные сечения $\overline{s} : () \to J^1Y$ лагранжевых связностей ξ_L для лагранжиана L, т. е. $J^1\overline{s} = \xi_L \circ \overline{s}$. Условие (2.60) для них эквивалентно выполнению соотношения

$$\overline{s}^*(u \rfloor dH_L) = 0 \tag{2.64}$$

для произвольного вертикального векторного поля u на $J^1Y \to \mathbb{R}$.

Легко заметить, что ограничение оператора $\mathscr{E}_{\overline{L}}$ на голономное многообразие струй $J^2Y \subset J^1J^1Y$ воспроизводит оператор Эйлера—Лагранжа $\mathscr{E}_L$. Поэтому уравнения Лагранжа (2.53) эквивалентны уравнениям Картана (2.63 a)—(2.63 b) на голономных сечениях $\overline{s} = J^1s$ расслоения $J^1Y \to \mathbb{R}$. Их решениями являются интегральные сечения голономных лагранжевых связностей, которые принимают значения в ядре оператора Эйлера—Лагранжа

$$\operatorname{Ker}\mathscr{E}_L = J^2Y \cap \operatorname{Ker}\mathscr{E}_{\overline{L}}.$$

Разные голономные лагранжевы связности определяют разные уравнения движения, соответствующие одним и тем же уравнениям Лагранжа.

В случае регулярного лагранжиана L уравнения Картана (2.63 a)—(2.63 b) полностью эквивалентны уравнениям Лагранжа (2.53) и приводят к единственному уравнению движения

$$y^j_{tt} = (\pi^{-1})^{ij}\left[-\partial_i\mathscr{L} + \partial_t\pi_i + y^k_t\partial_k\pi_i\right]. \tag{2.65}$$

По самому своему виду форма Пуанкаре—Картана H_L (2.51) представляет собой послойный морфизм

$$\widehat{H}_L : J^1Y \underset{Y}{\longrightarrow} T^*Y, \tag{2.66}$$
$$(p_i, p) \circ \widehat{H}_L = (\pi_i,\ \mathscr{L} - \pi_i y^i_t),$$

конфигурационного пространства J^1Y в кокасательное расслоение T^*X, которое в механике выполняет роль однородного расслоения Лежандра (1.64) с голономными координатами (t, y^i, p, p_i). Морфизм (2.66) часто тоже именуют отображением Лежандра. Мы будем называть его *отображением Пуанкаре—Картана*, чтобы отличать от отображения Лежандра $\widehat{L}$. Связь между отображениями Лежандра и Пуанкаре—Картана дается соотношением

$$\widehat{L} = \zeta \circ \widehat{H}_L, \tag{2.67}$$

где ζ — каноническая проекция $T^*Y \to V^*Y$ (П.7).

Нетрудно также заметить, что форма Пуанкаре—Картана H_L является формой, индуцированной на конфигурационном пространстве J^1Y канонической формой Лиувилля

$$\Xi = pdt + p_i dy^i \tag{2.68}$$

на кокасательном расслоении T^*Y посредством морфизма (2.66). Соответственно,

$$dH_L = d\pi_i \wedge dy^i - d(p_i y^i - \mathscr{L}) \wedge dt$$

является пресимплектической формой, индуцированной на конфигурационном пространстве J^1Y канонической симплектической формой

$$d\Xi = dp \wedge dt + dp_i \wedge dy^i \tag{2.69}$$

на кокасательном расслоении T^*Y к пространству событий Y.

Предположим, что образ Z_L конфигурационного пространства J^1Y в T^*Y при отображении Пуанкаре—Картана $\widehat{H}_L$ (2.66) является вложенным подмногообразием

$$i_L : Z_L \hookrightarrow T^*Y.$$

Он наделяется индуцированной *формой де Дондера*

$$\Xi_L = i_L^* \Xi.$$

По аналогии с уравнениями Картана (2.64), вводятся *уравнения Гамильтона—де Дондера* для сечений $\overline{r}$ расслоения $Z_L \to \mathbb{R}$ из условия, что

$$\overline{r}^*(u \rfloor d\Xi_L) = 0 \tag{2.70}$$

для произвольного вертикального векторного поля u на $Z_L \to \mathbb{R}$. Чтобы получить эти уравнения в явном виде, нужно подставить решения $y_t^i(t, y^j, p_j)$, $\mathscr{L}(t, y^j, p_j, p)$ уравнений

$$\begin{aligned} p_i &= \pi_i(t, y^j, y_t^j), \\ p &= \mathscr{L}(t, y^j, y_t^j) - \pi_i(t, y^j, y_t^j) y_t^i \end{aligned} \tag{2.71}$$

в уравнения Картана (2.64).

Если лагранжиан L регулярен, уравнения (2.71) имеют единственное решение. Тогда уравнения Гамильтона—де Дондера принимают координатный вид

$$\partial_t \overline{r}^i = -\partial^i \overline{r},$$

$$\partial_t \overline{r}_i = \partial_i \overline{r},$$

$$\overline{r} = \mathscr{L}\left(t, y^j, y_t^j(t, y^j, p_j)\right) - p_i y_t^i(t, y^j, p^j),$$

и эквивалентны уравнениям Картана. Если лагранжиан L вырожден, уравнения (2.71) могут иметь много различных решений или вообще ни одного. Укажем наиболее общий случай, когда уравнения Картана и Гамильтона—де Дондера эквивалентны.

Предложение 2.12. Пусть отображение Пуанкаре—Картана $\widehat{H}_L : J^1Y \to Z_L$ — это субмерсия. Тогда сечение $\overline{s}$ расслоения $J^1Y \to X$ является решением уравнений Картана (2.64) тогда и только тогда, когда $\widehat{H}_L \circ \overline{s}$ является решением уравнений Гамильтона—де Дондера (2.70) [35]. □

Замечание 2.14. Уравнение Гамильтона—де Дондера (2.70) можно рассматривать как задачу (Б) для дираковской системы на симплектическом многообразии T^*Y с нулевым гамильтонианом и пространством первичных связей $Q = Z_L$ при дополнительном условии, что компонента v^t решения v уравнения (1.42) равняется 1. □

В заключение коснемся коротко случая консервативных лагранжевых систем. Предположим, что для некоторой тривиализации

$$\psi : Y \cong \mathbb{R} \times M$$

в координатах $(t, \overline{y}^i)$ лагранжиан L не зависит от t. В этих координатах на конфигурационном пространство J^1Y определена пресимплектическая форма

$$\omega_L = d\pi_i \wedge d\overline{y}^i,$$

и уравнение (2.60) для лагранжевой связности ξ_L может быть записано в виде

$$\xi_L \rfloor \omega_L = -d(\pi_i \overline{y}^i_t - \mathscr{L}).$$

Таким образом, консервативная лагранжева система сводится к пресимплектической гамильтоновой системе с "гамильтонианом" $(\pi_i \overline{y}^i_t - \mathscr{L})$, и к ней применима процедура, описанная в §1.6 [55]. Обобщение этой процедуры на неконсервативные вырожденные лагранжевы системы см. в [24, 27, 45]. Мы рассмотрим такие системы в рамках гамильтонова формализма.

§ 6. Ньютоновы системы

Пусть L — лагранжиан на конфигурационном пространстве и $\widehat{L}$ — отображение Лежандра (2.55). Возьмем вертикальное касательное отображение $V\widehat{L}$, которое с учетом вертикального расщепления (2.3) принимает вид

$$V\widehat{L} : J^1Y \underset{Y}{\times} VY \to V^*Y \underset{Y}{\times} V^*Y$$

и порождает послойный морфизм

$$\flat = (\mathrm{Id}_{J^1Y}, \mathrm{pr}_2 \circ V\widehat{L}) : V_Y J^1Y \to V^*_Y J^1Y, \qquad (2.72)$$
$$\flat : \partial^t_i \mapsto \pi_{ij} \overline{dy}^j_t,$$

где $\{\overline{dy}^j_t\}$ — базисы слоев расслоения $V^*_Y J^1Y$. Морфизм (2.72) определяет отображение

$$J^1Y \to V^*_Y J^1Y \underset{J^1Y}{\otimes} V^*_Y J^1Y$$

и, наконец,

$$\widehat{m} : J^1Y \underset{Y}{\longrightarrow} V^*Y \underset{Y}{\otimes} V^*Y,$$
$$p_{ij} \circ \widehat{m} = \pi_{ij},$$

где (t, y^i, p_{ij}) — голономные координаты на $V^*Y \underset{Y}{\otimes} V^*Y$. Таким образом, $\pi_{ij} = m_{ij}$ являются компонентами симметричного $\overset{2}{\vee} V^*Y$-значного поля на конфигурационном пространстве J^1Y. Оно называется *тензором масс*.

Пусть лагранжиан L регулярен. Тогда тензор масс невырожден, а для L существует единственная лагранжева связность, которая согласно уравнению (2.61 a) голономна и удовлетворяет уравнению (2.61 b), которое принимает вид

$$\pi_{ik}\xi^k = -\partial_t\pi_i - \partial_j\pi_i y_t^j + \partial_i\mathscr{L}. \tag{2.73}$$

Эта связность определяет уравнение движения (2.65). Уравнение (2.73) приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} V_YJ^1Y & \xrightarrow{\flat} & V_Y^*J^1Y \\ & {\scriptstyle D_{\xi_L}}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle \mathscr{E}_L} & \\ & J^2Y & \end{array}$$

$$\mathscr{E}_L = \flat \circ D_{\xi_L}, \quad \mathscr{E}_i = m_{ik}(y_{tt}^k - \xi^k), \tag{2.74}$$

а взятием производной по y_t^j — к соотношению

$$\xi_L \rfloor dm_{ij} + m_{ik}\gamma_j^k + m_{jk}\gamma_i^k = 0, \tag{2.75}$$

где

$$\gamma_i^k = \frac{1}{2}\,\partial_i^t\xi^k$$

— коэффициенты симметричной динамической связности γ_{ξ_L} (2.25), отвечающей уравнению движения ξ_L.

Таким образом, всякий регулярный лагранжиан L определяет динамическое уравнение ξ_L, связанное с оператором Эйлера—Лагранжа $\mathscr{E}_L$ соотношением (2.74), и невырожденный тензор масс m_{ij}, связанный с динамическим уравнением ξ_L равенством (2.75). Это подводит нас к определению ньютоновой системы.

Определение 2.13. Пусть $Y \to \mathbb{R}$ — расслоение, для которого определена послойная риманова метрика $\widehat{m}$ в расслоении $V_YJ^1Y \to J^1Y$:

$$\widehat{m} : J^1Y \to V^*Y \underset{Y}{\otimes} V^*Y,$$
$$\widehat{m} = \frac{1}{2}\, m_{ij}\bar{d}y^i \vee \bar{d}y^j,$$

удовлетворяющая условию

$$\partial_k^t m_{ij} = \partial_j^t m_{ik}, \tag{2.76}$$

и динамическое векторное поле ξ (2.16) на конфигурационном пространстве J^1Y, связанное с тензором масс $\widehat{m}$ соотношением (2.75). Тройка $(Y, \widehat{m}, \xi)$ называется *ньютоновой системой*. □

Смысл такого определения понятен: оно обобщает второй закон Ньютона для точечной массы. Уравнение движения ньютоновой системы можно записать в эквивалентной форме

$$m_{ik}y^k_{tt} = m_{ik}\xi^k_\gamma. \tag{2.77}$$

Есть две причины, почему это может понадобиться.

Во-первых, как было показано, когда тензор π_{ij} римановы, регулярный лагранжиан приводит к ньютоновой системе, где (2.77) — уравнение Эйлера—Лагранжа.

Пример 2.15. Уравнение свободного движения в неинерциальной системе координат (2.40) не является уравнением Лагранжа, но оно эквивалентно уравнению Лагранжа для лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}\sum_i (y^i_t - \Gamma^i)^2 dt.$$

□

Во-вторых, в универсальной системе единиц тензор масс $\widehat{m}$ не безразмерен. Например, для точечной массы в декартовых координатах y^i тензор массы имеет размерность [длина]$^{-1}$, а в угловых — размерность длины. В первом случае правая часть уравнения (2.77) является силой, а во втором — моментом силы.

Установим теперь, при каких условиях ньютонова система является лагранжевой. Это пример так называемой *обратной задачи* в механике. Она была решена в разных вариантах. Мы рассмотрим ее как частный случай обратной задачи для динамических систем на расслоениях [33].

Дело в том, что уравнение (2.77) является ядром *дифференциального оператора типа Эйлера—Лагранжа* 2-го порядка

$$\begin{aligned} &\mathscr{E} : J^2Y \to V^*Y, \\ &\mathscr{E} = m_{ik}(\xi^k - y^k_{tt})\overline{d}y^i. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Такие операторы представимы в виде 2-форм

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_i\theta^i \wedge dt, \tag{2.79}$$

где θ^i — контактные формы (П.34). К ним относятся и операторы Эйлера—Лагранжа (2.52). Таким образом, проблема состоит в том, при каком условии операторы типа Эйлера—Лагранжа являются операторами Эйлера—Лагранжа.

Для расслоения $Y \to \mathbb{R}$ имеет место так называемая *вариационная последовательность*

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathscr{O}^0(Y) \xrightarrow{d_H} \mathscr{O}^{0,1}(J^1Y) \xrightarrow{\delta} \mathscr{O}^{1,1}(J^2Y) \xrightarrow{\delta_2} \mathscr{O}^{2,1}(J^3Y) \xrightarrow{\delta_3} \cdots, \tag{2.80}$$

где $\mathscr{O}^{0,1}(J^1Y)$ обозначает пространство горизонтальных плотностей $\mathscr{L}dt$ на J^1Y, а $\mathscr{O}^{1,1}(J^2Y)$ — пространство 2-форм на J^2Y вида $\mathscr{E}_i\theta^i \wedge dt$ и т. д. Таким образом, элементами $\mathscr{O}^{0,1}(J^1Y)$ являются лагранжианы $\mathscr{L}dt$, а элементами $\mathscr{O}^{1,1}(J^2Y)$ — операторы типа Эйлера—Лагранжа, представляемые в виде 2-форм (2.79). Последовательность

(2.80) является комплексом, т. е.

$$\delta \circ d_H = 0, \tag{2.81a}$$

$$\delta_2 \circ \delta = 0 \tag{2.81b}$$

и т. д., где

$$d_H(f) = d_t f\, dt, \quad f \in \mathscr{O}^0(J^1Y),$$

— *горизонтальный внешний дифференциал*,

$$\delta(\mathscr{L}\, dt) = (\partial_i - d_t\partial_i^t)\mathscr{L}\theta^i \wedge dt \tag{2.82}$$

— *отображение Эйлера—Лагранжа* (или *вариационный оператор*) и

$$\delta_2(\mathscr{E}_i\theta^i \wedge dt) = \Big[(2\partial_j - d_t\partial_j^t + d_t^2\partial_j^{tt})\mathscr{E}_i\theta^j \wedge \theta^i + \\ + (\partial_j^t\mathscr{E}_i + \partial_i^t\mathscr{E}_j - 2d_t\partial_j^{tt}\mathscr{E}_i)\theta_t^i \wedge \theta^j + (\partial_j^{tt}\mathscr{E}_i - \partial_i^{tt}\mathscr{E}_j)\theta_{tt}^j \wedge \theta^i\Big] \wedge dt = 0$$

— *отображение Гельмгольца—Сонина*.

Выражение (2.82) для вариационного оператора показывает, что его образ $\operatorname{Im}\delta$ составляют операторы Эйлера—Лагранжа, а из равенства (2.81 b) следует, что $\operatorname{Im}\delta \subset \operatorname{Ker}\delta_2$. Таким образом,

$$\delta_2(\mathscr{E}) = 0 \tag{2.83}$$

является необходимым условием того, чтобы оператор типа Эйлера—Лагранжа $\mathscr{E}$ был оператором Эйлера—Лагранжа, т. е.

$$\mathscr{E} = \delta(L) \tag{2.84}$$

для некоторого лагранжиана L. В координатах это условие имеет вид

$$\partial_j\mathscr{E}_i - \partial_i\mathscr{E}_j + \frac{1}{2}\, d_t(\partial_i^t\mathscr{E}_j - \partial_j^t\mathscr{E}_i) = 0, \tag{2.85a}$$

$$\partial_j^t\mathscr{E}_i + \partial_i^t\mathscr{E}_j - 2d_t\partial_j^{tt}\mathscr{E}_i = 0, \tag{2.85b}$$

$$\partial_j^{tt}\mathscr{E}_i - \partial_i^{tt}\mathscr{E}_j = 0. \tag{2.85c}$$

Препятствие тому, чтобы условие (2.83) влекло (2.84), является топологическим. В случае $Y = \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ (а значит, во всех случаях локально) вариационная последовательность (2.80) является точной, т. е. $\operatorname{Im}\delta = \operatorname{Ker}\delta_2$.

Применим теперь условие (2.83) к оператору (2.78). Легко убедиться, что условие (2.85 c) удовлетворяется благодаря симметричности тензора масс. Условие (2.85 b) выполняется в силу равенства (2.75) и свойства симметрии (2.76). И остается еще условие (2.85 a).

Пример 2.16. Рассмотрим одномерное движение точечной массы m_0 в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости. Оно описывается уравнением

$$m_0 y_{tt} = -k y_t, \quad y_t \geqslant 0, \tag{2.86}$$

на пространстве событий $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ с координатами (t, y). Это механическая система с функцией масс $m = m_0$ и динамическим векторным полем

$$\xi = \partial_t + y_t\partial_y - \frac{k}{m}\, y_t\partial_y^t. \tag{2.87}$$

Однако она не является ни ньютоновой, ни лагранжевой. Необходимые условия (2.85 a) и (2.85 c) выполняются для любой функции массы $m(t, y, y_t)$, а условие (2.85 b) принимает вид

$$-ky_t\partial_y^t m - km + \partial_t m + y_t\partial_y m = 0.$$

Функция масс $m = \text{const}$ не удовлетворяет этому уравнению, как и уравнению (2.75). Но есть их решение

$$m = m_0 \exp\left[\frac{k}{m_0}\, t\right]. \tag{2.88}$$

Система с функцией масс (2.88) и динамическим векторным полем (2.87) является и ньютоновой, и лагранжевой с функцией Лагранжа

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\, m_0 \exp\left[\frac{k}{m_0}\, t\right] y_t^2.$$

Получаемое из нее уравнение Лагранжа эквивалентно уравнению (2.86). □

Отметим, что, как это следует из равенства (2.81 a), лагранжиан L в равенстве (2.84) определен не однозначно, а с точностью до слагаемого $d_t f\, dt$, где f — некоторая функция на Y.

§ 7. Лагранжевы законы сохранения

Одним из преимуществ описания механической системы как лагранжевой является то, что инвариантность лагранжиана относительно тех или иных групп преобразований позволяет найти первые интегралы движения.

Существуют разные способы получения первых интегралов движения и законов сохранения. Следуя общей процедуре построения лагранжевых законов сохранения [8, 33, 66], мы будем исходить из первой вариационной формулы.

Пусть L — лагранжиан (2.47) на конфигурационном пространстве J^1Y и

$$u = u^t\partial_t + u^i\partial_i, \quad u^t = 0, 1, \tag{2.89}$$

— векторное поле (2.48) на расслоении $Y \to \mathbb{R}$. Это поле можно интерпретировать как генератор локальной 1-параметрической группы локальных автоморфизмов расслоения $Y \to \mathbb{R}$. В частности, если $u^t = 0$, мы имеем дело с вертикальным векторным полем — генератором вертикальных автоморфизмов расслоения $Y \to \mathbb{R}$, проектируемых на тождественное преобразование базы $\mathbb{R}$. Если $u^t = 1$, векторное поле u (2.89) проектируется на стандартное векторное поле ∂_t на базе $\mathbb{R}$, которое является генератором группы трансляций $\mathbb{R}$.

Рассмотрим первую вариационную формулу (2.50) для лагранжиана L и векторного поля u (2.89). На уравнениях движения (2.53) она принимает форму *слабого тождества*

$$\overline{u} \rfloor d\mathscr{L} \approx -d_t\mathbf{T}, \tag{2.90}$$
$$(u^t\partial_t + u^i\partial_i + d_t u^i\partial_i^t)\mathscr{L} \approx -d_t(\pi_i(u^t y_t^i - u^i) - u^t\mathscr{L}),$$

где

$$\mathbf{T} = -u \rfloor H_L = \pi_i(u^t y_t^i - u^i) - u^t\mathscr{L} \tag{2.91}$$

— *ток* вдоль векторного поля u.

Если производная Ли $\mathbf{L}_{\overline{u}}L$ лагранжиана L вдоль векторного поля u равна 0 (т. е. лагранжиан L инвариантен относительно 1-параметрической группы преобразований, генератором которых является u), получаем слабый *закон сохранения*

$$0 \approx -d_t\big[\pi_i(u^t y_t^i - u^i) - u^t\mathscr{L}\big].$$

На решениях s уравнений Лагранжа (2.54) он принимает вид дифференциального закона сохранения

$$0 \approx -\frac{d}{dt}\big[(\pi_i \circ J^1 s)(u^t \partial_t s^i - u^i \circ s) - u^t \mathscr{L} \circ J^1 s\big].$$

Таким образом, в неавтономной механике сохраняющийся ток (2.91) играет роль *первого интеграла движения.*

Рассмотрим сначала случай вертикального векторного поля ϑ, когда $\vartheta^t = 0$. Тогда слабое тождество (2.90) запишется в виде

$$(\vartheta^i\partial_i + d_t\vartheta^i\partial_i^t)\mathscr{L} \approx d_t(\pi_i\vartheta^i).$$

Если производная Ли лагранжиана L вдоль ϑ равна нулю, мы получаем слабый закон сохранения

$$0 \approx d_t(\pi_i\vartheta^i) \tag{2.92}$$

и интеграл движения

$$\mathbf{T} = -\pi_i\vartheta^i. \tag{2.93}$$

По аналогии с теорией поля, назовем (2.92) *нетеровским законом сохранения*, а ток (2.93) — *нетеровским током* или *нетеровским интегралом движения.*

Пример 2.17. Допустим, что при некоторой тривиализации $Y \cong \mathbb{R}\times M$ в координатах (t, y^i) лагранжиан L не зависит от координаты y^1. Тогда его производная Ли вдоль вертикального векторного поля $\vartheta = \partial_1$ равна 0, и мы имеем нетеровский интеграл движения (2.93), который сводится к соответствующему импульсу $\mathbf{T} = \pi_1$. В произвольной системе координат (t, y'^i) этот интеграл движения примет вид

$$\mathbf{T} = -\frac{\partial y^1}{\partial y'^i}\pi'_i.$$

Это наиболее широко встречающийся пример лагранжева закона сохранения в механике. □

В случае горизонтального векторного поля Γ (2.8), когда $u^t = 1$, слабое тождество (2.90) принимает вид

$$(\partial_t + \Gamma^i\partial_i + d_t\Gamma^i\partial_i^t)\mathscr{L} = -d_t(\pi_i(y_t^i - \Gamma^i) - \mathscr{L}), \tag{2.94}$$

где

$$\mathbf{T}_\Gamma = \pi_i(y_t^i - \Gamma^i) - \mathscr{L} \tag{2.95}$$

— это *плотность энергии* относительно системы отсчета Γ.

Замечание 2.18. Конечно, как и в отношении сил, речь идет об обобщенной энергии. □

Пример 2.19. В координатах, сопутствующих системе отсчета Γ, слабое тождество (2.94) принимает форму знакомого закона сохранения энергии

$$\partial_t \mathscr{L} = -d_t(\pi_i y^i_t - \mathscr{L}). \tag{2.96}$$

□

Пример 2.20. Рассмотрим одномерное движение и систему отсчета $Y \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с сопутствующими координатами (t, y^i). Возьмем равноускоренную относительно данной систему отсчета

$$\Gamma = at. \tag{2.97}$$

Построим лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}(y_t - at)^2 dt \tag{2.98}$$

свободного движения относительно равноускоренной системы отсчета (2.97). Рассмотрим закон сохранения плотности энергии относительно системы отсчета (2.97), т. е. вдоль векторного поля

$$\Gamma = \partial_t + at\partial_y.$$

Легко убедиться, что производная Ли лагранжиана (2.98) вдоль этого векторного поля равна 0, и мы получаем сохраняющуюся плотность энергии

$$\mathbf{T}_\Gamma = \mathscr{L}$$

относительно равноускоренной системы отсчета Γ. □

Таким образом, формула (2.95) действительно является выражением плотности энергии относительно системы отсчета Γ.

В общем случае всякое векторное поле u (2.89) может быть разложено в сумму $u = \Gamma + \vartheta$ некоторого горизонтального векторного поля Γ (2.8) и вертикального векторного поля ϑ, в том числе, $\vartheta = 0$. Следовательно, всякий ток (2.91) вдоль такого векторного поля u (2.89) на пространстве событий Y может быть представлен как сумма нетеровского тока вдоль вертикального векторного поля ϑ и плотности энергии вдоль горизонтального векторного поля (т. е. относительно системы отсчета Γ (2.8) [31, 33]). Обратно, плотности энергии относительно разных горизонтальных векторных полей Γ и Γ' отличаются друг от друга на нетеровский ток вдоль вертикального векторного поля $\Gamma - \Gamma'$.

Используя первую вариационную формулу, можно получить законы сохранения и для систем, которые не вполне лагранжевы, а именно, если они описываются уравнениями типа

$$(\partial_i - d_t\partial^t_i)\mathscr{L} + F_i(t, y^i, y^i_t) = 0, \tag{2.99}$$

где L — какой-либо лагранжиан, а F имеет смысл внешней силы. Предположим, что производная Ли этого лагранжиана вдоль некоторого векторного поля поля u (2.89) равна 0. С учетом этого условия и уравнений (2.99) применим к этому лагранжиану первую вариационную формулу (2.50). В результате получим слабое равенство

$$(u^i - y^i_t u^t)F_i \approx -d_t\big[\pi_i(u^t y^i_t - u^i) - u^t\mathscr{L}\big]. \tag{2.100}$$

Например, пусть в системе отсчета с сопутствующими координатами y^i существует уравнение свободного движения, которое является уравнением Лагранжа для лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}\sum_i (y_t^i)^2 dt. \tag{2.101}$$

Тогда всякое уравнение движения (2.13) можно представить в виде (2.99), где L — лагранжиан свободной системы (2.101) и $F_i = \xi^i$. Производная Ли лагранжиана (2.101) вдоль векторного поля $u = \partial_t$ равна, очевидно, 0. В этом случае слабое равенство принимает вид

$$\sum_i y_t^i \xi^i = d_t \frac{1}{2}\sum_i (y_t^i)^2.$$

Это известный закон, который гласит, что изменение энергии системы пропорционально мощности действующей на нее внешней силы, т. е. скалярному произведению силы на скорость системы.

Неавтономная гамильтонова механика

Эта глава посвящена гамильтоновой формулировке неавтономной механики в произвольных системах отсчета и ее связи с лагранжевым формализмом в случае вырожденных систем. Отметим следующие особенности этой формулировки в сравнении с симплектической механикой.

- Фазовое пространство неавтономной механики не является симплектическим, а наделено канонической вырожденной структурой Пуассона.

- Гамильтонианы в неавтономной механике как геометрические объекты не являются функциями на фазовом пространстве и на них не определены скобки Пуассона. Поэтому уравнение эволюции в неавтономной механике не сводится к скобкам Пуассона. В частности, интегралы движения не могут быть определены как функции на фазовом пространстве, находящиеся в инволюции с гамильтонианом. В неавтономной механике также неприменима известная процедура описания систем со связями из § 2.7, использующая скобки Пуассона с уравнениями связи.

- Гамильтоновы и лагранжевы формулировки неавтономной механики эквивалентны в случае гиперрегулярных лагранжианов. Однако системы с вырожденными лагранжианами являются, как правило, многогамильтоновыми. Такая система описывается целым семейством гамильтонианов и уравнений Гамильтона, чьи решения призваны воспроизвести решения уравнения Лагранжа.

В качестве примера в § 3.6 дается исчерпывающий анализ важного для приложений случая вырожденных систем с квадратичными лагранжианами.

§ 1. Каноническая структура Пуассона

Как уже отмечалось, фазовым пространством нерелятивистской неавтономной механики является вертикальное кокасательное расслоение

$$\pi_\Pi : V^*Y \to Y \tag{3.1}$$

над пространством событий $Y \to \mathbb{R}$. Оно является частным случаем расслоения Лежандра Π (1.68) над расслоением $Y \to X$, когда $X = \mathbb{R}$. Там принимают значения отображения Лежандра (2.55), порождаемые всевозможными лагранжианами на конфигурационном пространстве J^1Y. Фазовое пространство (3.1) параметризуется голономными координатами $(t, y^i, p_i = \dot{y}_i)$.

Фазовое пространство V^*Y неавтономной механики может быть наделено канонической структурой Пуассона. Для этого рассмотрим кокасательное расслоение T^*Y с голономными координатами (t, y^i, p, p_i). На нем заданы каноническая форма Лиувилля

$$\Xi = pdt + p_i dy^i \tag{3.2}$$

и каноническая симплектическая форма

$$d\Xi = dp \wedge dt + dp_i \wedge dy^i. \tag{3.3}$$

Соответствующие скобки Пуассона на пространстве функций $\mathscr{O}^0(T^*Y)$ на T^*Y имеют вид

$$\{f, g\} = \partial^p f \partial_t g - \partial^p g \partial_t f + \partial^i f \partial_i g - \partial^i g \partial_i f. \tag{3.4}$$

Рассмотрим подпространство пространства $\mathscr{O}^0(T^*Y)$, состоящее из функций $\zeta^* f$, индуцированных на T^*Y функциями f на V^*Y посредством канонической проекции $T^*Y \to V^*Y$ (П.7), т. е. из функций, не зависящих от координаты p. Легко убедиться, что это подпространство замкнуто относительно скобок Пуассона (3.4). Тогда, в силу Предложения 1.7, на фазовом пространстве неавтономной механики V^*Y существует каноническая структура Пуассона

$$\{f, g\}_V = \partial^i f \partial_i g - \partial^i g \partial_i f, \tag{3.5}$$

порождаемая структурой Пуассона (3.4), т. е. такая что

$$\{f, g\}_V = \{\zeta^* f, \zeta^* g\}.$$

Соответствующее пуассоново бивекторное поле

$$w(df, dg) = \{f, g\}_V$$

на расслоении $V^*Y \to \mathbb{R}$ является вертикальным и в голономных координатах на V^*Y имеет вид

$$w^{ij} = 0, \quad w_{ij} = 0, \quad w^i{}_j = 1. \tag{3.6}$$

Таким образом, голономные координаты на V^*Y являются каноническими для структуры Пуассона (3.5). Так как ранг бивекторного поля w (3.6) постоянен, структура Пуассона (3.5) регулярна. Она с очевидностью вырождена.

При наличии скобок Пуассона (3.5), гамильтоново векторное поле ϑ_f для функции f на фазовом пространстве V^*Y определяется соотношением

$$\{f, g\}_V = \vartheta_f \rfloor dg, \quad \forall g \in \mathscr{O}^0(V^*Y).$$

Это вертикальное векторное поле

$$\vartheta_f = \partial^i f \partial_i - \partial_i f \partial^i \tag{3.7}$$

на расслоении $V^*Y \to \mathbb{R}$. Отсюда следует, что характеристическое распределение структуры Пуассона (3.5) в точности совпадает с вертикальным касательным расслоением VV^*Y к расслоению $V^*Y \to \mathbb{R}$. Далее, в соответствии с Теоремой 1.9 структура Пуассона (3.5) задает симплектическое слоение на фазовом пространстве V^*Y, слои которого совпадают со слоями расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$. Симплектические формы

$$\Omega_t = dp_i \wedge dy^i$$

на слоях $V^*Y \to \mathbb{R}$ индуцированы канонической симплектической формой на типичном слое T^*M расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$ посредством морфизмов тривиализации этого расслоения [22].

Структура Пуассона (3.5) может быть получена и другим способом.

Каноническая полисимплектическая форма (1.69) на расслоении Лежандра $V^*Y \to Y$ (3.1) принимает вид

$$\Lambda = dp_i \wedge dy^i \wedge dt \otimes \partial_t$$

и в силу Замечания В.2 сводится к *канонической внешней 3-форме*

$$\Omega = dp_i \wedge dy^i \wedge dt \tag{3.8}$$

[33, 64, 65]. Последняя является внешним дифференциалом канонической 2-формы

$$\Theta = p_i dy^i \wedge dt \tag{3.9}$$

на фазовом пространстве V^*Y. Формы (3.8) и (3.9) являются каноническими в том смысле, что они инвариантны при любых преобразованиях голономных координат на V^*Y.

При наличии канонической формы (3.8) всякая функция f на фазовом пространстве V^*Y определяет соответствующее гамильтоново векторное поле ϑ_f (3.7) из соотношения

$$\vartheta_f \rfloor \Omega = -df \wedge dt, \tag{3.10}$$

тогда как скобки Пуассона (3.5) воспроизводятся в виде

$$\{f, g\}_V dt = \vartheta_g \rfloor \vartheta_f \rfloor \Omega.$$

§ 2. Гамильтоновы связности и гамильтоновы формы

В этом параграфе вводятся основные объекты неавтономной гамильтоновой механики — гамильтоновы связности, гамильтоновы формы, оператор Гамильтона и уравнения Гамильтона.

Следуя общей схеме полисимплектического гамильтонова формализма, мы будем называть горизонтальное векторное поле или, что то же самое, связность

$$\gamma = \partial_t + \gamma^i \partial_i + \gamma_i \partial^i \tag{3.11}$$

на расслоении $V^*Y \to \mathbb{R}$ *локально гамильтоновой*, если внешняя форма $\gamma \rfloor \Omega$ замкнута, т. е.

$$\mathbf{L}_\gamma \Omega = d(\gamma \rfloor \Omega) = 0. \tag{3.12}$$

Легко убедиться, что связность γ (3.11) на $V^*Y \to \mathbb{R}$ локально гамильтонова тогда и только тогда, когда она удовлетворяет соотношениям

$$\partial^i \gamma^j - \partial^j \gamma^i = 0, \tag{3.13a}$$
$$\partial_i \gamma_j - \partial_j \gamma_i = 0, \tag{3.13b}$$
$$\partial_j \gamma^i + \partial^i \gamma_j = 0. \tag{3.13c}$$

Пример 3.1. Всякая связность

$$\Gamma : Y \to J^1Y \subset TY,$$
$$\Gamma = \partial_t + \Gamma^i \partial_i, \tag{3.14}$$

на пространстве событий $Y \to \mathbb{R}$ продолжается до локально гамильтоновой связности

$$\tilde{\Gamma} = V^*\Gamma = \partial_t + \Gamma^i \partial_i - p_i \partial_j \Gamma^i \partial^j \tag{3.15}$$

(П.62) на фазовом пространстве $V^*Y \to \mathbb{R}$ так, что

$$\tilde{\Gamma} \rfloor \Omega = dH_\Gamma,$$
$$H_\Gamma = p_i dy^i - p_i \Gamma^i dt. \tag{3.16}$$

□

Локально гамильтоновы связности образуют аффинное пространство, моделируемое над векторным пространством вертикальных векторных полей ϑ на $V^*Y \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют такому же условию

$$d(\vartheta \rfloor \Omega) = 0, \tag{3.17}$$

что и (3.12). Локально они являются гамильтоновыми векторными полями, как показывает следующая лемма.

Лемма 3.1. Всякая замкнутая форма $\gamma \rfloor \Omega$ на расслоении $V^*Y \to \mathbb{R}$ является точной.

доказательство. Проведем разбиение

$$\gamma = \tilde{\Gamma} + \vartheta, \tag{3.18}$$

где Γ — связность на расслоении $Y \to \mathbb{R}$ и $\tilde{\Gamma}$ — ее лифт (3.15) на расслоение $V^*Y \to \mathbb{R}$, а ϑ — вертикальное векторное поле, удовлетворяющее равенству (3.17). Легко установить, что

$$\vartheta \rfloor \Omega = \sigma \wedge dt,$$

где σ — некоторая 1-форма. Используя свойства групп когомологий де Рама произведения многообразий, можно показать, что всякая замкнутая 2-форма вида $\sigma \wedge dt$ на $V^*Y \cong \mathbb{R} \times T^*M$ является точной, а следовательно, $\gamma \rfloor \Omega$ — тоже точная форма [33]. Более того, в соответствии с относительной леммой Пуанкаре можно записать локально

$$\vartheta \rfloor \Omega = df \wedge dt.$$

□

Определение 3.2. Внешняя 1-форма H на фазовом пространстве V^*Y называется *локально гамильтоновой*, если

$$\gamma \rfloor \Omega = dH$$

для некоторой связности γ на расслоении $V^*Y \to \mathbb{R}$. □

Согласно Предложению 3.1, имеет место взаимно однозначное соответствие между локально гамильтоновыми связностями и локально гамильтоновыми формами, рассматриваемыми по модулю замкнутых форм. В частности, форма H_Γ (3.16) является локально гамильтоновой формой.

Замечание 3.2. В дальнейшем, если специально не оговорено все локально гамильтоновы и гамильтоновы формы рассматриваются по модулю замкнутых форм. □

Определение 3.3. *Гамильтоновой формой* на фазовом пространстве V^*Y называется внешняя 1-форма

$$H = h^*\Xi = p_i dy^i - \mathscr{H} dt, \tag{3.19}$$

индуцированная канонической формой Лиувилля Ξ (3.2) на T^*Y посредством некоторого сечения h расслоения

$$\zeta : T^*Y \to V^*Y. \tag{3.20}$$

В универсальной системе единиц гамильтонова форма остается безразмерной. □

При заданной тривиализации $Y \cong \mathbb{R} \times M$ пространства событий гамильтонова форма (3.19) выглядит, как известный *интеграл Пуанкаре—Картана* [1]. Поэтому величину $\mathscr{H}$ в выражении (3.19) для гамильтоновой формы можно назвать *гамильтонианом*. При этом из выражения (3.19) видно, что гамильтонианы являются не функциями, а глобально плохо определенными геометрическими объектами, которые имеют смысл только в составе гамильтоновых форм. Можно, однако, сказать, что гамильтонианы, как и гамильтоновы формы, образуют аффинное пространство, моделируемое над векторным пространством функций на V^*Y.

Например, всякая связность Γ на пространстве событий $Y \to \mathbb{R}$ является аффинным сечением

$$p \circ \Gamma = -p_i \Gamma^i$$

(см. (П.40)) расслоения (3.20) и соответственно определяет гамильтонову форму H_Γ (3.16) на фазовом пространстве V^*Y с гамильтонианом

$$\mathscr{H} = p_i \Gamma^i.$$

Отсюда следует, что всякая гамильтонова форма на фазовом пространстве V^*Y допускает разбиение

$$H = H_\Gamma - \widetilde{\mathscr{H}_\Gamma} dt = p_i dy^i - (p_i \Gamma^i + \widetilde{\mathscr{H}_\Gamma}) dt, \tag{3.21}$$

где Γ — некоторая связность на $Y \to \mathbb{R}$ и $\widetilde{\mathscr{H}_\Gamma}$ — вещественная функция на V^*Y, называемая *функцией Гамильтона*. Более того, как мы ниже покажем, каждая гамильтонова форма допускает каноническое разбиение (3.21).

Замечание 3.3. Забегая вперед (см. §3.7), отметим, что функция Гамильтона $\widetilde{\mathscr{H}_\Gamma}$ в разложении (3.21) имеет смысл плотности энергии гамильтоновой системы относительно системы отсчета Γ. При квантовании именно функция Гамильтона $\widetilde{\mathscr{H}_\Gamma}$, взятая относительно той или иной системы отсчета Γ, а не гамильтониан $\mathscr{H}$, становится гамильтонианом квантовой системы. Ключевой особенностью квантования неконсервативных механических систем является то, что при квантовании в разных системах отсчета квантовые гамильтонианы отличаются классическим слагаемым. □

Назовем *гамильтоновым отображением* всякий послойный морфизм

$$\Phi : V^*Y \underset{Y}{\to} J^1Y,$$
$$y_i^i \circ \Phi = \Phi^i(p), \quad p \in V^*Y, \tag{3.22}$$

фазового пространства в конфигурационное. Его композиция с каноническим морфизмом λ (2.1) является морфизмом расслоений

$$\Phi : V^*Y \underset{Y}{\to} TY,$$
$$\Phi = \partial_t + \Phi^i(p)\partial_i. \tag{3.23}$$

Например, всякая связность Γ на расслоении $Y \to \mathbb{R}$ задает гамильтоново отображение

$$\widehat{\Gamma} = \Gamma \circ \pi_\Pi : V^*Y \to Y \to J^1Y,$$

для которого векторное поле (3.23) совпадает с горизонтальным векторным полем Γ (3.14). Обратно, всякое гамильтоново отображение Φ (3.22) задает соответствующую связность

$$\Gamma_\Phi = \Phi \circ \widehat{0}$$

на пространстве событий $Y \to \mathbb{R}$, где $\widehat{0}$ — глобальное нулевое сечение кокасательного расслоения $V^*Y \to Y$. В частности, нетрудно убедиться, что

$$\Gamma_{\widehat{\Gamma}} = \Gamma.$$

Предложение 3.4. Любое гамильтоново отображение (3.23) определяет гамильтонову форму

$$H_\Phi = -\Phi \rfloor \Theta = p_i dy^i - p_i \Phi^i dt, \tag{3.24}$$

где Θ — каноническая 2-форма (3.9). □

Предложение 3.5. Обратно, всякая гамильтонова форма H на фазовом пространстве V^*Y задает соответствующее гамильтоново отображение

$$\widehat{H} : V^*Y \to J^1Y,$$
$$y^i_t \circ \widehat{H} = \partial^i \mathscr{H}. \tag{3.25}$$

доказательство. Пусть $h : V^*Y \hookrightarrow T^*Y$ — сечение расслоения (3.20), соответствующее гамильтоновой форме H, т.е. $H = h^*\Xi$. Вертикальный касательный морфизм Vh к h порождает линейный послойный морфизм

$$\overline{V}h : VV^*Y \to T^*Y$$

над Y, который может быть представлен как сечение

$$\overline{V}h = \overline{d}p_i \otimes dy^i - \partial^i \mathscr{H} \overline{d}p_i \otimes dt$$

расслоения

$$V^*V^*Y \underset{V^*Y}{\otimes} T^*Y \to V^*Y.$$

В результате естественных сверток это сечение превращается в сечение

$$\overline{V}h = (dy^i - \partial^i \mathscr{H} dt) \otimes \partial_i$$

расслоения

$$V^*Y \underset{Y}{\times} (T^*Y \otimes VY) \to V^*Y$$

и принимает значение в образе многообразия струй J^1Y при его каноническом вложении (П.33) в $T^*Y \otimes VY$. □

Следствие 3.6. Всякой гамильтоновой форме H на фазовом пространстве V^*Y соответствует связность

$$\Gamma_H = \widehat{H} \circ \widehat{0}$$

на пространстве событий $Y \to \mathbb{R}$. □

В частности, легко установить, что

$$\Gamma_{H_\Gamma} = \Gamma,$$

где H_Γ — гамильтонова форма (3.16), определяемая связностью Γ на расслоении $Y \to \mathbb{R}$.

Следствие 3.7. Любая гамильтонова форма H (3.19) допускает каноническое разбиение

$$H = H_{\Gamma_H} - \overline{\mathscr{H}}\, dt. \tag{3.26}$$

□

Установим теперь связь между локально гамильтоновыми и гамильтоновыми формами, которые вводились, казалось бы, исходя из совершенно разных соображений.

Предложение 3.8. Локально гамильтоновы формы локально являются гамильтоновыми.

доказательство. Пусть даны две произвольные локально гамильтоновы формы H_γ и $H_{\gamma'}$ на фазовом пространстве V^*Y. Их разность

$$\sigma = H_\gamma - H_{\gamma'},$$
$$d\sigma = (\gamma - \gamma') \lrcorner \mathbf{\Omega},$$

является 1-формой на V^*Y такой, что 2-форма $\sigma \wedge dt$ замкнута и следовательно, как в Лемме 3.1, точна. Тогда в соответствии с уже упоминавшейся относительной леммой Пуанкаре можно записать локально

$$\sigma = f dt + dg,$$

где f и g — локальные функции на V^*Y. Учитывая это, а также разбиение (3.18), получаем, что в окрестности всякой точки $p \in V^*Y$ любая локально гамильтонова форма H_γ может быть записана в виде

$$H_\gamma = H_\Gamma + f dt$$

и тем самым является гамильтоновой формой, индуцированной канонической формой Лиувилля Ξ на T^*Y посредством локального сечения

$$(t, y^i, p_i) \mapsto (t, y^i, p_i, p = -p_i\Gamma^i + f)$$

расслоения $T^*Y \to V^*Y$. □

В обратную сторону справедливо следующее утверждение: всякая гамильтонова форма является локально гамильтоновой.

Предложение 3.9. Для любой гамильтоновой формы H на фазовом пространстве V^*Y существует единственная связность γ_H на расслоении $V^*Y \to \mathbb{R}$, называемая *гамильтоновой связностью*, такая что

$$\gamma_H \rfloor \Omega = dH. \tag{3.27}$$

доказательство. Введем на фазовом пространстве V^*Y, как и в полисимплектическом случае, дифференциальный оператор первого порядка — ассоциированный с H *оператор Гамильтона*

$$\mathscr{E}_H : J^1V^*Y \to \overset{2}{\wedge} T^*V^*Y,$$
$$\mathscr{E}_H = dH - \lambda \rfloor \Omega = \left[(y^i_t - \partial^i\mathscr{H})dp_i - (p_{ti} + \partial_i\mathscr{H})dy^i\right] \wedge dt, \tag{3.28}$$

где λ — канонический мономорфизм (2.1) и J^1V^*Y — многообразие струй расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$, параметризуемое координатами

$$(t, y^i, p_i, y^i_t, p_{ti}).$$

Нетрудно заметить, что ядро оператора Гамильтона $\mathscr{E}_H$ (3.28) — это образ глобального сечения

$$\gamma_H = \partial_t + \partial^i\mathscr{H}\partial_i - \partial_i\mathscr{H}\partial^i \tag{3.29}$$

расслоения струй $J^1V^*Y \to V^*Y$, являющегося искомой гамильтоновой связностью. □

Напомним, что гамильтоновы формы H на фазовом пространстве V^*Y образуют аффинное пространство, моделируемое над векторным пространством вещественных функций, а точнее горизонтальных плотностей $f dt$ на расслоении $V^*Y \to \mathbb{R}$. Тогда из соотношения (3.27) следует, что гамильтоновы связности γ_H образуют аффинное пространство, моделируемое над векторным пространством гамильтоновых векторных полей (3.10). Действительно,

$$H - H' = df, \quad \gamma_H - \gamma_{H'} = -\vartheta_f.$$

Образ гамильтоновой связности (3.29) образует замкнутое вложенное подрасслоение расслоения $J^1V^*Y \to \mathbb{R}$ и определяет тем самым систему дифференциальных уравнений первого порядка на фазовом пространстве V^*Y. Это *уравнения Гамильтона*

$$y^i_t = \partial^i\mathscr{H}, \tag{3.30 a}$$
$$p_{ti} = -\partial_i\mathscr{H} \tag{3.30 b}$$

для гамильтоновой формы H. Заметим, что, в отличие от уравнений Лагранжа, уравнения Гамильтона всегда хорошо определены как система дифференциальных уравнений. Интегральные сечения $r : \mathbb{R} \ni () \to V^*Y$ гамильтоновой связности (3.29) (или, что эквивалентно, интегральные кривые горизонтального векторного поля (3.29)) являются решениями уравнений Гамильтона (3.30 a)–(3.30 b). При этом из уравнений (3.30 a) следует, что для всякого решения r уравнений Гамильтона выполняется соотношение

$$J^1(\pi_\Pi \circ r) = \widehat{H} \circ r. \tag{3.31}$$

Замечание 3.4. Уравнения Гамильтона (3.30 a)–(3.30 b) являются частным случаем *уравнений движения первого порядка*

$$y^i_t = \gamma^i, \quad p_{ti} = \gamma_i \tag{3.32}$$

на фазовом пространстве $V^*Y \to \mathbb{R}$, где γ — некоторая связность (3.11) на расслоении $V^*Y \to \mathbb{R}$.

Пример уравнения движения первого порядка, которое не является уравнениями Гамильтона, дает движение точечной массы m в среде с сопротивлением из Примера 2.16. Оно имеет вид

$$y_t = \frac{1}{m} p, \quad p_t = -\frac{k}{m} p. \tag{3.33}$$

Связность

$$\gamma = \partial_t + \frac{1}{m} p\partial_y - \frac{k}{m} p\partial_p$$

не удовлетворяет условию (3.13 c). □

Отметим, что уравнения Гамильтона (3.30 a)–(3.30 b) могут быть введены и без помощи оператора Гамильтона. На сечениях r расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$ эти уравнения

$$\partial_t r^i = \partial^i \mathscr{H} \circ r, \quad \partial_t r_i = -\partial_i \mathscr{H} \circ r \tag{3.34}$$

эквивалентны условию

$$r^*(u \rfloor dH) = 0, \tag{3.35}$$

выполняемому для произвольного вертикального векторного поля u на $V^*Y \to \mathbb{R}$.

Замечание 3.5. Всякая гамильтонова форма H на фазовом пространстве V^*Y определяет пресимплектическую, а при некоторых дополнительных условиях и контактную структуры.

По определению, гамильтонова форма $H = h^*\Xi$ индуцирована канонической формой Лиувилля Ξ (3.2) посредством некоторого сечения h расслоения $T^*Y \to V^*Y$. Соответственно, ее внешний дифференциал

$$dH = h^* d\Xi = (dp_i + \partial_i \mathscr{H} dt) \wedge (dy^i - \partial^i \mathscr{H} dt) \tag{3.36}$$

индуцирован канонической симплектической формой (3.3) и тем самым является пресимплектической формой. Пресимплектическая форма (3.36) имеет постоянный ранг $2m$, поскольку форма

$$(dH)^m = (dp_i \wedge dy^i)^m - m(dp_i \wedge dy^i)^{m-1} \wedge d\mathscr{H} \wedge dt \tag{3.37}$$

с очевидностью нигде не обращается в 0.

Предложение 3.10. Гамильтонова форма (3.15) является контактной формой, если функция

$$\gamma_H \rfloor H = p_i \partial^i \mathscr{H} - \mathscr{H} = [\mathscr{H}] \tag{3.38}$$

нигде не обращается в 0 [46].

доказательство. Так как гамильтонова связность γ_H (3.29) является неособым векторным полем, условие

$$H \wedge (dH)^m \neq 0$$

того, что форма H является контактной, эквивалентно условию

$$\gamma_H \lrcorner (H \wedge (dH)^m) = (\gamma_H \lrcorner H)(dH)^m = [\mathscr{H}](dH)^m \neq 0.$$

Последнее имеет место, поскольку форма $(dH)^m$ (3.37) нигде не обращается в 0. □

Заметим, что функцию $[\mathscr{H}]$ можно сделать нигде не обращающейся в 0, если добавить к H какую-либо точную форму, например, форму cdt, $c = \text{const}$. Так, например, гамильтонова форма H_Γ (3.16) не является контактной, поскольку $[\mathscr{H}_\Gamma] = 0$, тогда как $H_\Gamma - dt$ — контактная форма с $[\mathscr{H}_\Gamma - 1] = 1$.

Если гамильтонова форма H контактная, соответствующее векторное поле Риба (1.4) имеет вид

$$E_H = [\mathscr{H}]^{-1}\gamma_H. \tag{3.39}$$

Тогда, согласно Предложению 1.5, можно ввести скобки Якоби, определяемые векторным полем (3.39) и бивекторным полем w_H на V^*Y, удовлетворяющим соотношениям (1.5):

$$w_H(\phi, .) \lrcorner H = 0,$$
$$w_H(\phi, .) \lrcorner dH = -(\phi - (E_H \lrcorner \phi)H),$$

для всякой 1-формы ϕ на V^*Y. Получаем

$$w_H(\phi, \sigma) = \phi^i\sigma_i - \sigma^i\phi_i + p_i\sigma^i E_H \lrcorner \phi - p_i\phi^i E_H \lrcorner \sigma,$$

где ϕ, σ — произвольные 1-формы на V^*Y. Соответствующие скобки Якоби на функциях на фазовом пространстве V^*Y имеют вид

$$\{f, g\}_H = w_H(\phi, \sigma) + E_H \lrcorner (f\,dg - g\,df) = \{f, g\}_V + [\mathscr{H}]^{-1}(\tilde{g}\gamma_H \lrcorner df - \tilde{f}\gamma_H \lrcorner dg),$$

где $\{f, g\}_V$ — скобки Пуассона (3.5) и

$$\tilde{f} = p_i\partial^i f - f, \quad \tilde{g} = p_i\partial^i g - g.$$

□

Замечание 3.6. Имея каноническую структуру Пуассона (3.5) на фазовом пространстве V^*Y, можно ввести также обобщенные скобки Пуассона $\{\,.\,,\,.\,\}_w$ (1.58) на внешней алгебре $\mathscr{O}^*(V^*Y)$ или скобки $\{\,.\,,\,.\,\}_d$ (1.62) на факторе

$$\mathscr{O}^*(V^*Y)/d\mathscr{O}^*(V^*Y).$$

В частности, обобщенные скобки Пуассона (1.58) двух гамильтоновых форм H и H' имеют вид

$$\{H, H'\}_w = p_i(\partial^i\mathscr{H}' - \partial^i\mathscr{H})dt.$$

□

§ 3. Канонические преобразования

Отметим сразу, что канонические преобразования, при которых канонические координаты y^i преобразуются через канонические импульсы p_i, не сохраняют расслоение $V^*Y \to Y$, что нарушает, в частности, структуру гамильтоновых форм. Другой важный вопрос — это существование производящей функции канонического преобразования.

Рассматриваются два типа канонических преобразований: *активные* — автоморфизмы фазового пространства, и *пассивные* — канонические координатные преобразования.

Определение 3.11. Вертикальный автоморфизм ρ расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$ называется *каноническим автоморфизмом*, если он сохраняет каноническую структуру Пуассона (3.5) на фазовом пространстве V^*Y, т. е.

$$\{f \circ \rho, g \circ \rho\}_V = \{f, g\}_V \circ \rho.$$

□

Нетрудно убедиться, что автоморфизм ρ расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$ является каноническим тогда и только тогда, когда он сохраняет каноническую форму Ω (3.8) на V^*Y, т. е.

$$\Omega = \rho^*\Omega.$$

Определение 3.12. Послойные координаты на расслоении $V^*Y \to \mathbb{R}$ называются *каноническими*, если они канонические для структуры Пуассона (3.5). □

Преобразования между системами канонических координат на фазовом пространстве V^*Y естественно назвать *каноническими координатными преобразованиями*. Они удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial p'_i}{\partial p_j}\frac{\partial y'^i}{\partial p_k} - \frac{\partial p'_i}{\partial p_k}\frac{\partial y'^i}{\partial p_j} = 0,$$
$$\frac{\partial p'_i}{\partial y^j}\frac{\partial y'^i}{\partial y^k} - \frac{\partial p'_i}{\partial y^k}\frac{\partial y'^i}{\partial y^j} = 0,$$
$$\frac{\partial p'_i}{\partial p_j}\frac{\partial y'^i}{\partial y^k} - \frac{\partial p'_i}{\partial y^k}\frac{\partial y'^j}{\partial p_k} = \delta^k_j.$$

По определению, голономные координаты на расслоении $V^*Y \to Y$ являются каноническими. Соответственно, голономные автоморфизмы

$$(y^i, p_i) \mapsto \left(y'^i, p'_i = \frac{\partial y^j}{\partial y'^i}\, p_j\right) \tag{3.40}$$

фазового пространства, порождаемые произвольными вертикальными автоморфизмами пространства событий $Y \to \mathbb{R}$, являются каноническими автоморфизмами.

Предложение 3.13. Канонические автоморфизмы переводят локально гамильтоновы связности в локально гамильтоновы и, соответственно, локально гамильтоновы формы в локально гамильтоновы.

доказательство. Если γ — локально гамильтонова связность для H, то

$$T\rho(\gamma) \lrcorner \Omega = (\rho^{-1})^*(\gamma \lrcorner \Omega) = d\big((\rho^{-1})^*H\big),$$

и $T\rho(\gamma)$ тоже локально гамильтонова связность. □

Предложение 3.14. Пусть γ — полная локально гамильтонова связность на $V^*Y \to \mathbb{R}$, т.е. векторное поле (3.11) является полным. Тогда существуют канонические координатные преобразования, которые обращают все компоненты γ в 0, т.е. $\gamma = \partial_t$.

доказательство. Выражение (3.12) показывает, что всякая локально гамильтонова связность γ является генератором локальной 1-параметрической группы канонических автоморфизмов фазового пространства $V^*Y \to \mathbb{R}$. Возьмем, например, слой V_0^*Y расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$ над точкой $0 \in \mathbb{R}$. Тогда канонические координаты на V_0^*Y, переносимые вдоль интегральных кривых полного векторного поля γ, удовлетворяют требуемым условиям. □

Другими словами, полная локально гамильтонова связность γ на фазовом пространстве V^*Y определяет, согласно Предложению 2.1, некоторую тривиализацию

$$\psi : V^*Y \to \mathbb{R} \times V_0^*Y \tag{3.41}$$

расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$, и координаты на V^*Y, соответствующие этой тривиализации, являются каноническими. Однако подчеркнем, что, хотя слой V_0^*Y гомеоморфен T^*M, тривиализация (3.41) не является тривиализацией типа $V^*Y \cong \mathbb{R} \times T^*M$, поскольку морфизм тривиализации ψ не является послойным морфизмом расслоения $V^*Y \to Y$.

В частности, пусть H — гамильтонова форма (3.21) такая, что гамильтонова связность γ_H (3.29) является полной. Согласно Предложению 3.14, существует тривиализация фазового пространства V^*Y в глобальных канонических координатах (q^A, p_A) (где q^A в общем случае не являются координатами на Y) такая, что

$$\Omega = dp_A \wedge dq^A \wedge dt, \quad \gamma_H = \partial_t, \quad dH = dp_A \wedge dq^A$$

и H принимает вид гамильтоновой формы

$$H = p_A dy^A$$

с нулевым гамильтонианом $\mathscr{H}$. Тогда уравнения Гамильтона в этих координатах сводятся к *уравнениям равновесия*

$$q_t^A = 0, \quad p_{tA} = 0. \tag{3.42}$$

Соответственно, всякий гамильтониан $\mathscr{H}$ может быть локально обращен в 0, а уравнения Гамильтона локально приведены к уравнениям равновесия (3.42) посредством локальных канонических преобразований.

Пример 3.7. Рассмотрим одномерное движение с постоянным ускорением a относительно координат (t, y). Соответствующий гамильтониан и гамильтонова связность имеют вид

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2} - ay,$$
$$\gamma_H = \partial_t + p\partial_y + a\partial_p.$$

Эта гамильтонова связность на фазовом пространстве $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ является полной. Канонические координатные преобразования

$$y' = y - pt + \frac{at^2}{2}, \quad p' = p - at$$

обращают ее в $\gamma_H = \partial_t$. □

Пример 3.8. Рассмотрим одномерный осциллятор относительно тех же координат, что и в предыдущем Примере. Его гамильтониан и гамильтонова связность имеют вид

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(p^2 + y^2),$$
$$\gamma_H = \partial_t + p\partial_y - y\partial_p.$$

Эта гамильтонова связность является полной на фазовом пространстве $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Канонические координатные преобразования

$$y' = y\cos t - p\sin t, \quad p' = p\cos t + y\sin t$$

обращают ее в $\gamma_H = \partial_t$. □

Следует подчеркнуть, что канонические автоморфизмы в общем случае переводят гамильтоновы формы в гамильтоновы только локально.

Пусть H — гамильтонова форма (3.19) на фазовом пространстве V^*Y с координатами (t, y^i, p_i) и ρ — канонический автоморфизм. Тогда

$$d(\rho^* H - H) = 0$$

и локально можно записать

$$\rho^* H - H = dS,$$

где S — локальная функция на V^*Y и

$$\rho^* H = \rho_i d\rho^i - \mathscr{H} \circ \rho dt.$$

Отсюда получаем локальные соотношения

$$\partial_i S = \rho_j \partial_i \rho^j - p_i,$$
$$\partial^i S = \rho_j \partial^i \rho^j,$$
$$\mathscr{H}' - \mathscr{H} = \rho_i \partial_t \rho^i - \partial_t S.$$

Будучи взятой на графике

$$\Delta_\rho = \{(p, \rho(p)) \in V^*Y \times V^*Y\}$$

канонического автоморфизма, функция S играет роль локальной *производящей функции* канонического преобразования. В частности, если график Δ_ρ параметризуется координатами

$$(t, y^i, y'^i = y^i \circ \rho),$$

мы получаем знакомое соотношение для гамильтонианов

$$\mathscr{H}' - \mathscr{H} = \partial_t S(t, y^i, y'^i).$$

Например, локальной производящей функцией голономного автоморфизма (3.40) является

$$S(t, y'^j, p_i) = y^i(t, y'^j)p_i.$$

§ 4. Уравнение эволюции

Как и в симплектической гамильтоновой механике, для функций f на фазовом пространстве V^*Y неавтономной механики можно определить уравнение эволюции.

Пусть дана гамильтонова форма H (3.21) и соответствующая гамильтонова связность γ_H (3.29). Рассмотрим производную Ли функции $f \in \mathcal{O}^0(V^*Y)$ вдоль горизонтального векторного поля γ_H:

$$\mathbf{L}_{\gamma_H} f = \gamma_H \rfloor df = \left(\partial_t + \partial^i \mathscr{H} \partial_i - \partial_i \mathscr{H} \partial^i\right) f. \tag{3.43}$$

Это равенство называется *уравнением эволюции* в неавтономной механике. Действительно, подставляя в него решения уравнений Гамильтона (3.34), получим производную функции f по времени вдоль этих решений.

Существенное отличие уравнения эволюции (3.43) от уравнения эволюции (1.28) в симплектической механике состоит в том, что его правая часть не сводится к скобкам Пуассона, поскольку гамильтониан на фазовом пространстве неавтономной механики не является функцией. С учетом разбиения (3.21) гамильтоновой формы H, уравнение эволюции (3.43) приводится к виду

$$\mathbf{L}_{\gamma_H} f = \partial_t f + (\Gamma^i \partial_i - \partial_i \Gamma^j p_j \partial^i) f + \{\widetilde{\mathscr{H}_\Gamma}, f\}_V. \tag{3.44}$$

Второй член в правой части этого уравнения существенен (например, для квантования неконсервативных систем). Когда при квантовании скобки Пуассона в (3.44) заменяются операторными скобками, он остается классическим. Его, однако, можно устранить соответствующим выбором системы канонических координат.

Пусть связность Γ в разбиении гамильтоновой формы (3.21) выбрана полной. Сопутствующая системе отсчета Γ система координат (t, y^i) на пространстве событий Y тривиализует расслоение $Y \to \mathbb{R}$, а соответствующая голономная система координат (t, y^i, p_i) на фазовом пространстве V^*Y является канонической. В этой системе координат уравнение эволюции (3.44) принимает привычный вид

$$\mathbf{L}_{\gamma_H} f = \partial_t f + \{\widetilde{\mathscr{H}}, f\}_V.$$

Заметим также, что, поскольку уравнение эволюции (3.44) не сводится к скобкам Пуассона, интегралы движения в неавтономной механике уже нельзя определить как функции на фазовом пространстве, находящиеся в инволюции с гамильтонианом. Мы вернемся к этому вопросу в § 3.7.

§ 5. Вырожденные системы

В этом параграфе мы исследуем связь между гамильтоновым и лагранжевым формализмами неавтономной механики.

Как мы убедимся, в случае гиперрегулярных лагранжианов, когда отображение Лежандра (2.55) конфигурационного пространства на фазовое является диффеоморфизмом, эти формализмы эквивалентны. Обратно, пусть H — гамильтонова форма и γ_H — соответствующая гамильтонова связность (3.29) на фазовом пространстве $V^*Y \to \mathbb{R}$. Рассмотрим композицию морфизмов

$$J^1\widehat{H} \circ \gamma_H : V^*Y \to J^2Y \subset J^1J^1Y, \tag{3.45}$$
$$\left(y^i_t, y^i_{(t)}, y^i_{tt}\right) \circ J^1\widehat{H} \circ \gamma_H = \left(\partial^i \mathscr{H}, \partial^i \mathscr{H}, \gamma_H \rfloor d\partial^i \mathscr{H}\right),$$

где

$$J^1\widehat{H} : J^1V^*Y \to J^1J^1Y,$$
$$(y^i_t, y^i_{(t)}, y^i_{tt}) \circ J^1\widehat{H} = (\partial^i\mathscr{H}, y^i_t, d_t\partial^i\mathscr{H}),$$

— струйное продолжение гамильтонова отображения $\widehat{H}$ (3.25). Если гамильтоново отображение $\widehat{H}$ — диффеоморфизм, тогда $J^1\widehat{H}\circ\gamma_H\circ\widehat{H}^{-1}$ является голономной связностью на расслоении J^1Y и определяет уравнение движения. Это уравнение движения эквивалентно уравнению Лагранжа для функции Лагранжа

$$\mathscr{L} = \widehat{H}^{-1*}[\mathscr{H}],$$

индуцированной на конфигурационном пространстве J^1Y функцией $[\mathscr{H}]$ (3.25) посредством обратного морфизма $\widehat{H}^{-1}$.

Сосредоточим свое внимание на случае лагранжевых систем с вырожденными лагранжианами. Им отвечают многогамильтоновы системы со связями.

Следуя общей схеме полисимплектического гамильтонова формализма, мы скажем, что гамильтонова форма H на фазовом пространстве V^*Y *ассоциирована* с лагранжианом L на конфигурационном пространстве J^1Y, если H удовлетворяет условиям

$$\widehat{L}\circ\widehat{H}\circ\widehat{L} = \widehat{L}, \tag{3.46 a}$$
$$H = H_{\widehat{H}} + L\circ\widehat{H} \tag{3.46 b}$$

[33, 64, 65]. Из условия (3.46 a) следует, что $\widehat{L}\circ\widehat{H}$ — проективный оператор

$$p_i(p) = \partial_i\mathscr{L}\left(t, y^j, \partial^j\mathscr{H}(p)\right), \quad p\in Q, \tag{3.47}$$

на

$$Q = \widehat{L}(J^1Y) \subset V^*Y \tag{3.48}$$

— образе конфигурационного пространства в фазовом пространстве при отображении Лежандра. Мы будем называть Q *пространством лагранжевых связей.* Оно задается соотношениями (3.47) для любой ассоциированной с лагранжианом L гамильтоновой формы H. Соответственно, $\widehat{H}\circ\widehat{L}$ является проекционным отображением на $\widehat{H}(Q)\subset J^1Y$. Условие (3.46 b) можно записать в виде

$$\mathscr{L}\circ\widehat{H} = [\mathscr{H}] \tag{3.49}$$

всюду на V^*Y.

Замечание 3.9. Если специально не оговорено, пространство лагранжевых связей Q будет пониматься просто как подмножество фазового пространства V^*Y, не наделенное какой-либо структурой многообразия. Все объекты определены на всем фазовом пространстве V^*Y, и их ограничение на Q означает только, что рассматриваются их значения в точках, принадлежащих $Q\subset V^*Y$. □

Установим некоторые общие свойства гамильтоновых форм, ассоциированных с лагранжианами.

Предложение 3.15. Гамильтонова форма H, ассоциированная с лагранжианом L, при ограничении на Q совпадает с формой, индуцированной на V^*Y формой Пуанкаре—Картана H_L (2.51) посредством гамильтонова отображения $\widehat{H}$, т. е.

$$H\big|_Q = \widehat{H}^* H_L\big|_Q. \tag{3.50}$$

□

Доказательство (3.50) проводится непосредственными вычислениями.

Действуя на обе части равенства (3.49) оператором внешнего дифференцирования, можно получить равенства

$$\partial_t \mathscr{H}(p) = -(\partial_t \mathscr{L})\big(t, y^j, \partial^j \mathscr{H}(p)\big), \quad p \in Q, \tag{3.51}$$

$$\partial_i \mathscr{H}(p) = -(\partial_i \mathscr{L})\big(t, y^j, \partial^j \mathscr{H}(p)\big), \quad p \in Q, \tag{3.52}$$

$$\big(p_i - (\partial_i^t \mathscr{L})(t, y^j, \partial^j \mathscr{H})\big)\partial^i \partial^a \mathscr{H} = 0. \tag{3.53}$$

В частности, равенство (3.53) показывает, что

- условие (3.46 a) следует из условия (3.46 b), если гамильтоново отображение $\widehat{H}$ регулярно, т. е.

  $$\det(\partial^i \partial^j \mathscr{H}) \neq 0$$

  во всех точках пространства лагранжевых связей Q;

- гамильтоново отображение $\widehat{H}$ вне пространства лагранжевых связей Q вырождено.

Пример 3.10. Возьмем нулевой лагранжиан $L = 0$. В этом случае пространством лагранжевых связей является

$$Q = \hat{0}(Y)$$

— образ глобального нулевого сечения $\hat{0}$ расслоения $V^*Y \to Y$. Условие (3.46 a) с очевидностью выполняется для всех гамильтоновых отображений, а условие (3.46 b) принимает координатный вид

$$\mathscr{H} = p_i \partial^i \mathscr{H}.$$

Ему удовлетворяют гамильтоновы формы H_Γ (3.16). □

Остановимся подробно на случае гиперрегулярного лагранжиана L. Для него всегда существует единственная ассоциированная гамильтонова форма

$$H = H_{\widehat{L}^{-1}} + \widehat{L}^{-1*} L. \tag{3.54}$$

Соответствующее ей гамильтоново отображение (3.25) является диффеоморфизмом $\widehat{H} = \widehat{L}^{-1}$, так же как и его струйное продолжение $J^1\widehat{H}$:

$$J^1\widehat{L} \circ J^1\widehat{H} = \mathrm{id}\, J^1 V^* Y,$$

$$J^1\widehat{H} \circ J^1\widehat{L} = \mathrm{id}\, J^1 J^1 Y.$$

Предложение 3.16. Пусть L — гиперрегулярный лагранжиан и H — ассоциированная с ним гамильтонова форма. Выполняются соотношения

$$H_L = \widehat{L}^* H, \tag{3.55}$$

$$\mathscr{E}_{\overline{L}} = (J^1\widehat{L})^* \mathscr{E}_H, \tag{3.56}$$

$$\mathscr{E}_H = (J^1\widehat{H})^* \mathscr{E}_{\overline{L}}, \tag{3.57}$$

где $\mathscr{E}_H$ — оператор Гамильтона (3.28) для H, а $\mathscr{E}_{\overline{L}}$ — оператор Эйлера—Лагранжа—Картана (2.62) для L. □

Доказательство следует из непосредственных вычислений.

Соотношения (3.50) и (3.55) показывают, что именно форма Пуанкаре—Картана оказывается лагранжевым партнером гамильтоновой формы, тогда как из соотношений (3.56) и (3.57) следует, что лагранжевым партнером оператора Гамильтона является оператор Эйлера—Лагранжа—Картана $\mathscr{E}_{\overline{L}}$ (2.62).

В частности, если γ — гамильтонова связность для гамильтоновой формы H (3.54), композиция $J^1\widehat{H} \circ \gamma$ (3.45), согласно (3.57), принимает значения в ядре оператора Эйлера—Лагранжа—Картана $\mathscr{E}_{\overline{L}}$ (а более точно, в ядре оператора Эйлера—Лагранжа $\mathscr{E}_L$). Тогда композиция

$$\begin{aligned} J^1\widehat{H} \circ \gamma \circ \widehat{L} : J^1Y \ni (t, y^i, y^i_t) \mapsto \\ \mapsto \left(t, y^i, y^i_t = \partial^i \mathscr{H} \circ \widehat{L}, y^i_{(t)} = \partial^i \mathscr{H} \circ \widehat{L}, y^i_{tt} = \gamma_H \lrcorner \partial^i \mathscr{H} \circ \widehat{L}\right) = \\ = \left(t, y^i, y^i_t, y^i_{(t)} = y^i_t, y^i_{tt} = \gamma_H \lrcorner \partial^i \mathscr{H} \circ \widehat{L}\right) \in J^2Y \end{aligned} \tag{3.58}$$

является голономной лагранжевой связностью для лагранжиана L. Обратно, если ξ — лагранжева связность для L, то $J^1\widehat{L} \circ \xi \circ \widehat{H}$ является гамильтоновой связностью для H. Тем самым доказано следующее утверждение.

Предложение 3.17. Пусть L — гиперрегулярный лагранжиан и H — ассоциированная с ним гамильтонова форма (3.54).

(i) Если сечение r расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$ — решение уравнений Гамильтона (3.30 a)—(3.30 b) для гамильтоновой формы H, тогда сечение

$$s = \pi_\Pi \circ r$$

расслоения $Y \to \mathbb{R}$ — решение уравнений Лагранжа (2.53) для лагранжиана L, а его струйное продолжение $J^1 s$ — решение уравнений Картана (2.63 a)—(2.63 b).

(ii) Обратно, если сечение $\overline{s}$ расслоения $J^1Y \to \mathbb{R}$ — решение уравнений Картана для лагранжиана L, тогда сечение

$$r = \widehat{L} \circ \overline{s}$$

расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнениям Гамильтона (3.30 a)—(3.30 b) для гамильтоновой формы H. □

Таким образом, в случае гиперрегулярного лагранжиана L имеет место взаимно однозначное соответствие между решениями уравнений Лагранжа (и, следовательно, уравнений Картана) и решениями уравнения Гамильтона для единственной ассоциированной с L гамильтоновой формы (3.54).

В случае регулярного (но не гиперрегулярного) лагранжиана L пространство лагранжевых связей Q является открытым подрасслоением расслоения Лежандра $V^*Y \to Y$.

Тогда всякая ассоциированная с L гамильтонова форма определена на $Q \subset V^*Y$ и, вообще говоря, не может быть гладко продолжена на все фазовое пространство V^*Y. В то же время, поскольку Q открыто, на нем могут быть индуцированы посредством вложения $Q \hookrightarrow V^*Y$ структура Пуассона и другие атрибуты фазового пространства. Если регулярный лагранжиан к тому же и полурегулярен (см. Определение 3.18), то отображение Лежандра является диффеоморфизмом конфигурационного пространства J^1Y на Q, и на пространстве лагранжевых связей Q можно воспроизвести результаты, справедливые для гиперрегулярных лагранжианов.

Пример 3.11. Пусть Y — расслоение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ с координатами (t, y). Его многообразие струй $J^1Y \cong \mathbb{R}^3$ и расслоение Лежандра $V^*Y \cong \mathbb{R}^3$ параметризуются соответственно координатами (x, y, y_t) и (t, y, p). Положим функцию Лагранжа равной

$$\mathscr{L} = \exp y_t. \tag{3.59}$$

Она регулярна, но не гиперрегулярна. Соответствующее отображение Лежандра имеет вид

$$p \circ \hat{L} = \exp y_t,$$

и пространство лагранжевых связей Q задается координатным условием $p > 0$. Это открытое подмножество фазового пространства, и отображение Лежандра $\hat{L}$ является диффеоморфизмом J^1Y на Q. Поэтому имеется единственная гамильтонова форма H на Q, ассоциированная с лагранжианом (3.59). Она имеет вид

$$\mathscr{H} = p(\ln p - 1).$$

Однако эту гамильтонову форму нельзя гладко продолжить на все фазовое пространство V^*Y. □

Переходя к вырожденным системам, мы ограничимся случаем полурегулярных лагранжианов. С одной стороны, это широкий класс моделей, к которому, например, относятся все системы с квадратичными по скоростям лагранжианами. С другой стороны, в этом случае удается установить содержательные отношения между лагранжевым и гамильтоновым формализмами.

Определение 3.18. Лагранжиан L называется *полурегулярным*, если прообраз $\hat{L}^{-1}(p)$ любой точки пространства лагранжевых связей $p \in Q$ является связным подмногообразием конфигурационного пространства J^1Y. □

Условие связности прообраза отображения Лежандра имеет следующее важное следствие.

Предложение 3.19. Все гамильтоновы формы H, ассоциированные с полурегулярным лагранжианом L, совпадают друг с другом на пространстве лагранжевых связей Q:

$$H\big|_Q = H'\big|_Q.$$

Более того, форма Пуанкаре—Картана H_L для лагранжиана L совпадает с формой

$$H_L = \hat{L}^* H,$$
$$(\pi_i y_t^i - \mathscr{L})dt = \mathscr{H}(t, y^i, \pi_i)dt, \tag{3.60}$$

индуцированной на J^1Y всякой ассоциированной с L гамильтоновой формой H посредством отображения Лежандра $\hat{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u — вертикальное векторное поле на расслоении струй $J^1Y \to Y$. Если оно принимает свои значения в ядре $\operatorname{Ker} T\widehat{L}$ касательного морфизма к $\widehat{L}$, то легко установить, что

$$\mathbf{L}_u H_L = 0.$$

Отсюда следует, что форма Пуанкаре—Картана H_L для полурегулярного лагранжиана L постоянна на связном прообразе $\widehat{L}^{-1}(p)$ всякой точки $p \in Q$. Тогда второе утверждение следует из (3.50). □

Важно подчеркнуть, что, хотя гамильтонианы в гамильтоновых формах из Предложения 3.19 совпадают друг с другом на пространстве лагранжевых связей Q, это нельзя сказать о соответствующих им операторах Гамильтона, поскольку они зависят от производных гамильтонианов. Поэтому для разных гамильтоновых форм, ассоциированных с одним и тем же полурегулярным лагранжианом, мы имеем неэквивалентные уравнения Гамильтона даже при ограничении их на пространство лагранжевых связей Q.

Пусть H — гамильтонова форма, ассоциированная с полурегулярным лагранжианом L. Действуя оператором внешнего дифференцирования на обе стороны соотношения (3.60), мы получаем равенство

$$\left(y_i^i - \partial^i \mathscr{H} \circ \widehat{L}\right) d\pi_i \wedge dt - \left(\partial_i \mathscr{L} + \partial_i(\mathscr{H} \circ \widehat{L})\right) dy^i \wedge dt = 0, \tag{3.61}$$

или, что то же самое, систему равенств

$$\pi_{ij}(y_i^j - \partial^j \mathscr{H} \circ \widehat{L}) = 0,$$
$$\partial_i \pi_j (y_i^j - \partial^j \mathscr{H} \circ \widehat{L}) - (\partial_i \mathscr{L} + (\partial_i \mathscr{H}) \circ \widehat{L}) = 0,$$

которым удовлетворяет гамильтониан формы H.

Используя равенство (3.61), можно показать, что соотношение (3.56):

$$\mathscr{E}_{\overline{L}} = (J^1 \widehat{L})^* \mathscr{E}_H, \tag{3.62}$$

(но не соотношение (3.57)) справедливо и в случае полурегулярных лагранжианов. Это позволяет распространить пункт (i) Предложения 3.17 также на гамильтоновы формы, ассоциированные с полурегулярными лагранжианами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.20. Пусть сечение r расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$ является решением уравнений Гамильтона для гамильтоновой формы H, ассоциированной с полурегулярным лагранжианом L. Если r лежит в пространстве лагранжевых связей Q, то сечение

$$s = \pi_\Pi \circ r$$

расслоения $Y \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа для лагранжиана L, а его струйное продолжение

$$\overline{s} = \widehat{H} \circ r = J^1 s$$

является решением уравнений Картана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\overline{s} = \widehat{H} \circ r$. Так как $r(\mathbb{R}) \subset Q$, то

$$r = \widehat{L} \circ \overline{s}, \quad J^1 r = J^1 \widehat{L} \circ J^1 \overline{s}.$$

Если r является решением уравнений Гамильтона, внешняя форма $\mathscr{E}_H$ обращается в 0 в точках $J^1r(\mathbb{R})$. Поэтому индуцированная форма

$$\mathscr{E}_{\overline{L}} = (J^1\widehat{L})^*\mathscr{E}_H$$

обращается в 0 в точках $J^1\overline{s}(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что сечение $\overline{s}$ расслоения $J^1Y \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнениям Картана. Поскольку, согласно уравнению (3.30 a), $\overline{s} = J^1s$, то сечение s является решением уравнений Лагранжа, принадлежащим $\widehat{H}(Q)$. □

В случае полурегулярных лагранжианов пункт (ii) Предложения 3.17 модифицируется следующим образом.

Предложение 3.21. Пусть сечение $\overline{s}$ расслоения $J^1Y \to \mathbb{R}$ является решением уравнений Картана (2.63 a)–(2.63 b) для полурегулярного лагранжиана L. Допустим, что существует ассоциированная с L гамильтонова форма H такая, что соответствующее гамильтоново отображение удовлетворяет условию

$$\widehat{H} \circ \widehat{L} \circ \overline{s} = J^1(\pi_0^1 \circ \overline{s}). \tag{3.63}$$

Тогда сечение

$$r = \widehat{L} \circ \overline{s},$$
$$r_i = \pi_i(t, \overline{s}^j, \overline{s}^j_t), \quad r^i = \overline{s}^i,$$

расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$ является решением уравнений Гамильтона (3.30 a)–(3.30 b) для H, с очевидностью принадлежащим пространству лагранжевых связей Q.

доказательство. Уравнения Гамильтона (3.30 a) выполняются в силу условия (3.63). Уравнения Гамильтона (3.30 b) с помощью соотношений (3.61) и (3.63) сводятся к уравнениям Картана (2.63 b):

$$\begin{aligned} d_t\pi_i \circ \overline{s} &= -(\partial_i\mathscr{H}) \circ \widehat{L} \circ \overline{s} = \\ &= -\left(\overline{s}^j_t - \partial^j\mathscr{H} \circ \widehat{L} \circ \overline{s}\right)\partial_i\pi_j \circ \overline{s} + \partial_i\mathscr{L} \circ \overline{s} = \\ &= (\partial_t\overline{s}^j - \overline{s}^j_t)\partial_i\pi_j \circ \overline{s} + \partial_i\mathscr{L} \circ \overline{s}. \end{aligned}$$

□

Как следует из Предложения 3.20, если H — гамильтонова форма, ассоциированная с полурегулярным лагранжианом L, то всякое решение уравнения Гамильтона для H, лежащее в пространстве лагранжевых связей Q, порождает решение уравнений Лагранжа и уравнений Картана для лагранжиана L. Таким образом, партнерами лагранжевых систем являются гамильтоновы системы со связями.

Мы ограничимся в дальнейшем случаем, когда подпространством связей фазового пространства является пространство лагранжевых связей Q — образ конфигурационного пространства при отображении Лежандра. Оно играет роль пространства первичных связей. Для существования локальных решений уравнений Гамильтона для гамильтоновой формы H, лежащих в пространстве лагранжевых связей Q, необходимо, чтобы горизонтальное векторное поле — гамильтонова связность γ_H — касалось Q. Это условие дается системой уравнений

$$p_i = \partial_i^t\mathscr{L}(t, y^j, \partial^j\mathscr{H}), \tag{3.64 a}$$
$$\left(\partial_t + \partial^i\mathscr{H}\partial_i - \partial_i\mathscr{H}\partial^i\right) \rfloor d\left(p_i - \partial_i^t\mathscr{L}(t, y^j, \partial^j\mathscr{H})\right) = 0, \tag{3.64 b}$$

где (3.64a) — уравнение (3.47) пространства лагранжевых связей, а (3.64b) требует, чтобы горизонтальное векторное поле γ_H касалось Q в точке с координатами (t, y^i, p_i). В отличие от случая консервативных систем со связями, левая часть уравнения (3.64b) не представляет собой скобок Пуассона. Поэтому мы не можем следовать той же процедуре выделения финального пространства связей, что и в §2.7.

В то же время имеется другая возможность. Для данного решения уравнения Лагранжа можно попытаться найти соответствующую гамильтонову форму H такую, чтобы это решение было решением уравнений Гамильтона для H. Для разных решений это будут, вообще говоря, разные гамильтоновы формы. Таким образом, механические системы с вырожденными лагранжианами представляют собой своего рода *многогамильтоновы системы.*

Заметим, что в случае, например, полурегулярных лагранжианов задача воспроизведения решений уравнений Картана $\overline{s}$ как решений уравнений Гамильтона сталкивается с препятствием, каковым является условие (3.63). Это является также препятствием к тому, чтобы решение $\overline{s}$ уравнений Картана порождало решение уравнений Лагранжа. Поэтому очевидно, что не всякое решение уравнений Картана для данного вырожденного лагранжиана L может быть представлено как решение каких-либо уравнений Гамильтона. Однако можно пытаться найти такое семейство ассоциированных с L гамильтоновых форм, чтобы все решения уравнений Лагранжа для L воспроизводились как решения уравнений Гамильтона для гамильтоновых форм из этого семейства.

Определение 3.22. Семейство гамильтоновых форм H, ассоциированных с лагранжианом L, называется *полным*, если для всякого решения s уравнений Лагранжа для L существует решение r уравнений Гамильтона для какой-либо гамильтоновой формы H из этого семейства такое, что

$$s = \pi_\Pi \circ r, \quad r = \widehat{L} \circ J^1 s \tag{3.65}$$

(см. соотношение (3.31)). □

Если L — полурегулярный лагранжиан, то, согласно Предложению 3.21, полное семейство ассоциированных с ним гамильтоновых форм существует тогда и только тогда, когда для каждого решения s уравнений Лагранжа для L существует гамильтонова форма H из этого семейства такая, что выполняется условие

$$\widehat{H} \circ \widehat{L} \circ J^1 s = J^1 s. \tag{3.66}$$

Пример 3.12. Пусть $L = 0$. Это полурегулярный лагранжиан. Уравнения Лагранжа для него сводятся к тождеству $0 \equiv 0$. Всякое сечение s расслоения $Y \to \mathbb{R}$ является их решением. Для любого такого сечения s существует связность Γ на расслоении $Y \to \mathbb{R}$ такая, что s является ее интегральным сечением. Рассмотрим гамильтонову форму H_Γ (3.16), ассоциированную с $L = 0$. Она удовлетворяет условию (3.66). Уравнения Гамильтона для нее принимают вид

$$y^i_t = \Gamma^i, \quad p_{ti} = -p_j \partial_i \Gamma^j.$$

Они имеют решение

$$r = \widehat{L} \circ J^1 s,$$
$$r^i = s^i, \quad r_i = 0,$$

лежащее в пространстве лагранжевых связей $p_i = 0$. □

Приводимый ниже пример показывает, что полное семейство ассоциированных гамильтоновых форм может существовать и тогда, когда лагранжиан не полурегулярен.

Пример 3.13. Пусть Y — расслоение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ из Примера 3.11, параметризуемое координатами (t, y). Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\mathscr{L} = \frac{1}{3}(y_t)^3.$$

Соответствующее отображение Лежандра имеет вид

$$p \circ \hat{L} = y_t^2, \tag{3.67}$$

а пространство лагранжевых связей Q дано координатным соотношением (3.47): $p \geqslant 0$. Заметим, что оно является подмногообразием с границей фазового пространства V^*Y. На Q существуют две ассоциированные с L гамильтоновы формы

$$H_+ = pdy - \frac{2}{3}p^{3/2}dt,$$

$$H_- = pdy + \frac{2}{3}p^{3/2}dt,$$

которые соответствуют двум различным решениям

$$y_t = \sqrt{p}, \quad y_t = -\sqrt{p}$$

уравнения (3.67). Как легко установить, они образуют полное семейство. □

Замечание 3.14. Пусть γ_H — гамильтонова связность для гамильтоновой формы H, ассоциированной с полурегулярным лагранжианом L. Согласно соотношению (3.62) композиция $J^1\widehat{H} \circ \gamma_H$ (3.45) принимает значения в ядре оператора Эйлера—Лагранжа $\mathscr{E}_L$. Тогда морфизм

$$J^1\widehat{H} \circ \gamma \circ \hat{L} : J^1Y \ni (t, y^i, y^i_t) \mapsto \left(t, y^i, y^i_t = \partial^i\mathscr{H} \circ \hat{L}, y^i_{(t)} = \partial^i\mathscr{H} \circ \hat{L}, y^i_{tt} = \gamma_H \lrcorner\, \partial^i\mathscr{H} \circ \hat{L}\right)$$

при ограничении на $\widehat{H}(Q)$ является локальным голономным сечением на $\widehat{H}(Q) \subset J^1Y$ расслоения струй $J^2Y \to J^1Y$, поскольку

$$\widehat{H} \circ \hat{L}|_{\widehat{H}(Q)} = \mathrm{Id}\,\big|_{\widehat{H}(Q)}.$$

Пусть $\widehat{H}(Q)$ — замкнутое подмногообразие (это имеет место, например, когда лагранжиан L является вполне регулярным; см. Определение 3.23). Тогда сечение $J^1\widehat{H} \circ \gamma_H \circ \hat{L}$ может быть расширено до голономной связности на расслоении $J^1Y \to \mathbb{R}$, определяющей динамическое уравнение на пространстве событий Y. В этом случае, если r — лежащее в Q решение уравнений Гамильтона для H, проекция $\pi_\Pi \circ r$ является решением не только уравнений Лагранжа, но и указанного выше динамического уравнения. □

Определение 3.23. Полурегулярный лагранжиан L называется *вполне регулярным*, если: (i) пространство лагранжевых связей Q является замкнутым вложенным подрасслоением $i_Q : Q \hookrightarrow V^*Y$ расслоения Лежандра $V^*Y \to Y$; (ii) отображение Лежандра $\hat{L} : J^1Y \to Q$ — расслоение. □

В случае вполне регулярного лагранжиана L для всякой ассоциированной с ним гамильтоновой формы H гамильтоново отображение $\widehat{H} : Q \to J^1Y$ является сечением расслоения $\widehat{L} : J^1Y \to Q$, и его образ $\widehat{H}(Q)$ — замкнутое вложенное подмногообразие конфигурационного пространства J^1Y. Поэтому, как это следует из Замечания 3.14, всякое решение уравнений Лагранжа для L, которое может быть представлено как решение уравнений Гамильтона, является и решением некоторого уравнения движения.

Поскольку в случае вырожденного лагранжиана L решения уравнений Лагранжа отвечают решениям уравнений Гамильтона ассоциированных с L гамильтоновых (вообще говоря, разных) форм, можно сделать вывод, что уравнения Гамильтона по сравнению с уравнениями Лагранжа содержат дополнительные условия, связанные, по-видимому, с тем, что они определены на всем фазовом пространстве. Поэтому попробуем выделить часть уравнений Гамильтона, определенную на пространстве лагранжевых связей Q. Мы ограничимся случаем вполне регулярных лагранжианов.

Обозначим $H_Q = i_Q^*H$ ограничение гамильтоновой формы H, ассоциированной с вполне регулярным лагранжианом L, на пространство лагранжевых связей Q. Будем называть H_Q *ограниченной гамильтоновой формой*. Согласно Предложению 3.19, она одна и та же для всех гамильтоновых форм, ассоциированных с L. Именно H_Q индуцирует форму Пуанкаре—Картана $H_L = \hat{L}^*H_Q$. Зададим на сечениях r расслоения $Q \to \mathbb{R}$ *ограниченные уравнения Гамильтона*

$$r^*(u_Q \rfloor dH_Q) = 0, \tag{3.68}$$

которые должны выполняться для произвольного вертикального векторного поля u_Q на расслоении $Q \to \mathbb{R}$ [32, 33, 65]. Для простоты мы будем отождествлять всякое вертикальное векторное поле u_Q на $Q \to \mathbb{R}$ с его образом $Ti_Q(u_Q)$, и поэтому можем переписать ограниченные уравнения Гамильтона (3.68) в виде

$$r^*(u_Q \rfloor dH) = 0, \tag{3.69}$$

где r — сечение расслоения $Q \to \mathbb{R}$ и u_Q — произвольное вертикальное векторное поле на этом расслоении. Ясно, что эти уравнения не эквивалентны уравнениям Гамильтона (3.35) на сечениях того же самого расслоения $Q \to \mathbb{R}$.

Следующие два утверждения вместе с Предложением 3.21 устанавливают связь между уравнениями Картана, Гамильтона—де Дондера, Гамильтона и ограниченными уравнениями Гамильтона в случае вполне регулярного лагранжиана [33].

Предложение 3.24. Для всякой гамильтоновой формы H, ассоциированной с вполне регулярным лагранжианом L, любое решение r уравнений Гамильтона, лежащее в пространстве лагранжевых связей Q, является решением ограниченных уравнений Гамильтона (3.69).

доказательство. Для всякого вертикального векторного поля u_Q на расслоении $Q \to \mathbb{R}$ векторное поле $Ti_Q(u_Q)$ является с очевидностью локальным вертикальным векторным полем на расслоении $V^*Y \to \mathbb{R}$. Тогда получаем, что

$$r^*(u_Q \rfloor dH_Q) = r^*(u_Q \rfloor i_Q^*dH) = r^*(Ti_Q(u_Q) \rfloor dH) = 0,$$

если r — решение уравнений Гамильтона (3.35) для гамильтоновой формы H. □

Предложение 3.25. Сечение $\overline{s}$ расслоения $J^1Y \to \mathbb{R}$ является решением уравнений Картана (2.64) тогда и только тогда, когда $\widehat{L} \circ \overline{s}$ — решение ограниченных уравнений Гамильтона (3.69).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u_Q — вертикальное векторное поле на $Q \to \mathbb{R}$. Так как $\widehat{L}$ — субмерсия, существует вертикальное векторное поле v на $J^1Y \to \mathbb{R}$ такое, что

$$T\widehat{L} \circ v = u_Q.$$

Например, в качестве v можно выбрать горизонтальный лифт u посредством какой-либо связности на расслоении $J^1Y \to Q$. Предположим, что сечение $\overline{s} : \mathbb{R} \hookrightarrow J^1Y$ является решением уравнений Картана (2.64). Тогда

$$(\widehat{L} \circ \overline{s})^*(u_Q \rfloor dH_Q) = \overline{s}^*(v \rfloor dH_L) = 0, \tag{3.70}$$

т. е. $\widehat{L} \circ \overline{s} : \mathbb{R} \hookrightarrow Q$ является решением уравнений (3.69). Обратное следует из соотношений (3.70), если иметь в виду, что ограничение на $\overline{s}(\mathbb{R})$ всякого векторного поля v на J^1Y является проектируемым векторным полем относительно $\widehat{L}$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.26. Ограниченные уравнения Гамильтона (3.68) эквивалентны уравнениям Гамильтона—де Дондера (2.70).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H — гамильтонова форма, ассоциированная с вполне регулярным лагранжианом L, и h — соответствующее сечение расслоения

$$\zeta : T^*Y \to V^*Y$$

(см. Определение 3.3). Это сечение порождает морфизм

$$h_Q = h \circ i_Q : Q \to T^*Y,$$

который не зависит от выбора H, а является сечением расслоения $T^*Y \to V^*Y$ над $Q \subset V^*Y$, т. е.

$$\zeta \circ h_Q = \mathrm{id}\, Q. \tag{3.71}$$

Более того, для любой гамильтоновой формы H, ассоциированной с L, можно записать

$$H_Q = i_Q^* H = i_Q^*(h^*\Xi) = h_Q^*\Xi.$$

Согласно соотношению (3.60), имеем

$$\widehat{H}_L = h_Q \circ \widehat{L}, \tag{3.72}$$

где $\widehat{H}_L$ — отображение Пуанкаре—Картана (2.66), определяемое формой Пуанкаре—Картана H_L. Подставляя (2.67) в (3.72), получаем

$$\widehat{H}_L = h_Q \circ \zeta \circ \widehat{H}_L.$$

Отсюда следует, что

$$h_Q \circ \zeta\big|_{Z_L} = \mathrm{id}\, i_L(Z_L), \tag{3.73}$$

где $i_L(Z_L) = \widehat{H}_L(J^1Y)$ — образ отображения Пуанкаре—Картана $\widehat{H}_L$. Соотношения (3.71) и (3.73) показывают, что существует изоморфизм расслоений

$$Z_L \underset{i_L^{-1} \circ h_Q}{\overset{\zeta \circ i_L}{\rightleftarrows}} Q$$

над Y. Так как $H_Q = h_Q^*\Xi$ и $\Xi_L = i_L^*\Xi$, получаем

$$H_Q = (i_L^{-1} \circ h_Q)^*\Xi_L, \quad \Xi_L = (\zeta \circ i_L)^* H_Q.$$

Следовательно, уравнения Гамильтона—де Дондера (2.70) эквивалентны ограниченным уравнениям Гамильтона (3.68). □

§ 6. Квадратичные вырожденные системы

В качестве полезного применения развитого в предыдущем параграфе аппарата, в частности, Предложений 3.20 и 3.21, опишем полные семейства гамильтоновых форм, ассоциированных с вполне регулярными квадратичными лагранжианами. Это особенно важно, поскольку в неавтономной механике гамильтонианы не являются функциями и к ним нельзя применить известный анализ нормальных форм [3] (в частности, квадратичных гамильтонианов [1]) в симплектической механике.

Пусть $Y \to \mathbb{R}$ — пространство событий неавтономной механики. Рассмотрим на конфигурационном пространстве J^1Y *квадратичный лагранжиан*

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} a_{ij} y^i_t y^j_t + b_i y^i_t + c, \tag{3.74}$$

где a, b и c — локальные функции на Y. Соответствующее отображение Лежандра имеет вид

$$p_i \circ \widehat{L} = a_{ij} y^j_t + b_i. \tag{3.75}$$

Лемма 3.27. Лагранжиан (3.74) является полурегулярным.

доказательство. Для всякого $p \in Q$ решения системы линейных алгебраических уравнений (3.75) относительно величин y^i_t образуют аффинное пространство, моделируемое над векторным пространством однородных линейных алгебраических уравнений

$$0 = a_{ij} \dot{y}^j,$$

где $\dot{y}^j$ — голономные координаты вертикального векторного расслоения VY. Оно во всех случаях связно. □

Будем предполагать в дальнейшем, что лагранжиан L (3.74) вполне регулярен. Очевидно, что это имеет место тогда и только тогда, когда ранг матрицы a_{ij} во всех точках пространства событий Y постоянен.

Поскольку отображение Лежандра (3.75) является аффинным послойным морфизмом над Y, оно определяет послойный линейный морфизм

$$\overline{L} : VY \underset{Y}{\to} V^*Y,$$
$$p_i \circ \overline{L} = a_{ij} \dot{y}^j,$$

образ которого $\overline{Q}$ является линейным подрасслоением расслоения Лежандра $V^*Y \to Y$. Соответственно, пространство лагранжевых связей Q, задаваемое уравнениями (3.75), является аффинным подрасслоением фазового пространства $V^*Y \to Y$, моделируемым над $\overline{Q}$. Поэтому расслоение лагранжевых связей $Q \to \mathbb{R}$ имеет глобальное сечение. Ради простоты предположим, что это нулевое сечение $\widehat{0}(Y)$ расслоения $V^*Y \to Y$. Тогда $\overline{Q} = Q$.

Ядро

$$\operatorname{Ker} \widehat{L} = \widehat{L}^{-1}(\widehat{0}(Y))$$

отображения Лежандра является аффинным подрасслоением расслоения струй $J^1Y \to Y$, моделируемым над векторным расслоением

$$\operatorname{Ker} \overline{L} = \overline{L}^{-1}(\widehat{0}(Y)) \subset VY.$$

Поэтому существует связность

$$\Gamma : Y \to \operatorname{Ker} \widehat{L}, \tag{3.76}$$

$$a_{ij}\Gamma^j + b_i = 0, \tag{3.77}$$

на пространстве событий $Y \to \mathbb{R}$, которая принимает значения в ядре отображения Лежандра $\operatorname{Ker} \widehat{L}$. Используя эту связность, можем привести лагранжиан (3.74) к виду

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} a_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j + c',$$

$$\dot{y}^i = y^i_t - \Gamma^i.$$

Например, если квадратичный лагранжиан (3.74) регулярен, связность (3.76) является единственным решением алгебраических уравнений (3.77).

Предложение 3.28. Существует линейный послойный морфизм

$$\sigma : V^*Y \to VY, \tag{3.78}$$

$$\dot{y}^i \circ \sigma = \sigma^{ij}p_j,$$

над Y такой, что

$$\overline{L} \circ \sigma \circ i_Q = i_Q.$$

доказательство. Отображение (3.78) является решением в каждой точке пространства Y алгебраических уравнений

$$a_{ij}\sigma^{jk}a_{kb} = a_{ib}. \tag{3.79}$$

Поскольку матрица a_{ij} симметрична, предположим, что после диагонализации она имеет ненулевые компоненты a^{AA}, $A \in I$. Тогда решение уравнений (3.79) принимает вид

$$\sigma_{AA} = \frac{1}{a^{AA}}, \quad \sigma_{AA'} = 0, \quad A \neq A' \in I,$$

тогда как остальные компоненты остаются произвольными. В частности, выберем решение

$$\sigma_{AA} = \frac{1}{a^{AA}}, \quad \sigma_{CB} = 0, \quad B \neq A, \quad A \in I. \tag{3.80}$$

Оно удовлетворяет условию

$$\sigma = \sigma \circ \overline{L} \circ \sigma, \tag{3.81}$$

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ik}a_{kb}\sigma^{jb}.$$

□

В дальнейшем под σ мы будем подразумевать именно матрицу (3.80). Если квадратичный лагранжиан (3.74) регулярен, отображение (3.78) однозначно определяется уравнениями (3.79).

Связность (3.76) и отображение (3.78) являются ключевыми для дальнейшего рассмотрения объектами.

Предложение 3.29. Матрица σ определяет расщепление конфигурационного пространства

$$J^1Y = \operatorname{Ker}\widehat{L} \underset{Y}{\oplus} \operatorname{Im}(\sigma \circ \widehat{L}), \tag{3.82}$$
$$y^i_t = \left[y^i_t - \sigma^{ik}(a_{kj}y^j_t + b_k)\right] + \left[\sigma^{ik}(a_{kj}y^j_t + b_k)\right].$$

□

Отсюда, в частности, следует, что, поскольку $\overline{L}$ и σ — линейные морфизмы, их композиция $\overline{L} \circ \sigma$ задает расслоение фазового пространства V^*Y над пространством лагранжевых связей Q.

Предложение 3.30. Имеет место расщепление фазового пространства

$$V^*Y = \operatorname{Ker}\sigma \underset{Y}{\oplus} Q, \tag{3.83}$$
$$p_i = [p_i - a_{ij}\sigma^{jk}p_k] + [a_{ij}\sigma^{jk}p_k].$$

□

Следствие 3.31. Всякое вертикальное векторное поле

$$u = u^i\partial_i + u_i\partial^i$$

на фазовом пространстве $V^*Y \to \mathbb{R}$ допускает разложение

$$u = (u - u_Q) + u_Q, \tag{3.84}$$
$$u_i = [u_i - a_{ij}\sigma^{jk}u_k] + [a_{ij}\sigma^{jk}u_k],$$

где

$$u_Q = u^i\partial_i + a_{ij}\sigma^{jk}u_k\partial^i$$

— вертикальное векторное поле на расслоении лагранжевых связей $Q \to \mathbb{R}$. □

Имея линейный морфизм σ (3.78) и связность Γ (3.76), рассмотрим аффинное гамильтоново отображение

$$\Phi = \Gamma + \sigma : V^*Y \to J^1Y, \tag{3.85}$$
$$\Phi^i = \Gamma^i(y) + \sigma^{ij}p_j,$$

и гамильтонову форму

$$H = H_\Phi + Ldt,$$
$$H = p_i dy^i - \left[\Gamma^i\left(p_i - \frac{1}{2}b_i\right) + \frac{1}{2}\sigma^{ij}p_ip_j - c\right]dt. \tag{3.86}$$

Легко проверить, что $\widehat{H} = \Phi$ и, используя соотношение (3.81), что форма H ассоциирована с квадратичным лагранжианом (3.74).

Покажем, что множество гамильтоновых форм (3.86), параметризуемых связностями Γ (3.76), образует полное семейство.

Для данной гамильтоновой формы (3.86) рассмотрим уравнения Гамильтона (3.30 а) для сечений r расслоения $V^*Y \to \mathbb{R}$. Они имеют вид

$$J^1 s = (\widehat{\Gamma} + \sigma) \circ r, \quad s = \pi_\Pi \circ r, \tag{3.87}$$

или

$$\nabla_t r^i = \sigma^{ij} r_j,$$

где

$$\nabla_t r^i = \partial_t r^i - (\Gamma \circ s)^i$$

— ковариантная производная относительно связности Γ. Выпишем проекции

$$\mathscr{S} = \mathrm{pr}_1 : J^1 Y \to \mathrm{Ker}\, \hat{L}, \tag{3.88}$$
$$\mathscr{S} : y_t^i \to y_t^i - \sigma^{ik}(a_{kj} y_t^j + b_k),$$

и

$$\mathscr{T} = \mathrm{pr}_2 : J^1 Y \to \mathrm{Im}(\sigma \circ \hat{L}), \tag{3.89}$$
$$\mathscr{T} : y_t^i \to \sigma^{ik}(a_{kj} y_t^j + b_k),$$

отвечающие расщеплению (3.82). Относительно этих проекций уравнения Гамильтона (3.87) разбиваются на две части:

$$\mathscr{S} \circ J^1 s = \Gamma \circ s, \tag{3.90}$$
$$\nabla_t r^i = \sigma^{ik}(a_{kj} \partial_t r^j + b_k),$$

и

$$\mathscr{T} \circ J^1 s = \sigma \circ r, \tag{3.91}$$
$$\sigma^{ik}(a_{kj} \partial_t r^j + b_k) = \sigma^{ik} r_k.$$

Уравнения Гамильтона (3.90) не зависят от канонических импульсов r_k и выполняют роль *калибровочных условий*. Более того, для всякого сечения s расслоения $Y \to \mathbb{R}$ (в частности, для всякого решения уравнений Лагранжа), существует связность Γ (3.76) такая, что выполняются уравнения (3.90). В самом деле, пусть Γ' — связность на расслоении $Y \to \mathbb{R}$, которая имеет своим интегральным сечением s. Положим

$$\Gamma = \mathscr{S} \circ \Gamma',$$
$$\Gamma = \Gamma'^i - \sigma^{ik}(a_{kj} \Gamma'^j + b_k).$$

В этом случае, гамильтоново отображение (3.85) удовлетворяет условию (3.66) для s, т. е.

$$\Phi \circ \hat{L} \circ J^1 s = J^1 s.$$

Следовательно всевозможные гамильтоновы формы (3.86) образуют полное семейство. Разные гамильтоновы формы из этого семейства отличаются друг от друга только связностью Γ (3.76), что ведет к разным калибровочным условиям (3.90).

Предложение 3.32. Для любой гамильтоновой формы H (3.86) уравнения Гамильтона (3.30b) и (3.91) на сечениях расслоения $Q \to \mathbb{R}$ эквивалентны ограниченным уравнениям Гамильтона (3.69).

доказательство. В соответствии с разбиением (3.84) вертикального векторного поля u на фазовом пространстве $V^*Y \to \mathbb{R}$, ограниченные уравнения Гамильтона (3.69) принимают вид

$$r^*(a_{ij}\sigma^{jk}\partial^i \rfloor dH) = 0, \tag{3.92a}$$

$$r^*(\partial_i \rfloor dH) = 0. \tag{3.92b}$$

Уравнения (3.92b) с очевидностью являются уравнениями Гамильтона (3.30b) для H. Имея в виду соотношения (3.77) и (3.81), уравнения Гамильтона (3.92a) легко привести к виду (3.91). □

Таким образом, именно уравнения (3.90) представляют собой те дополнительные условия, которые отличают уравнения Гамильтона от ограниченных уравнений Гамильтона (3.69) и уравнений Лагранжа в случае квадратичного лагранжиана.

Следствие 3.33. Согласно Предложению 3.25, сечение $\overline{s}$ расслоения $J^1Y \to \mathbb{R}$ является решением уравнений Картана (2.63a)–(2.63b) для вполне регулярного квадратичного лагранжиана (3.74) тогда и только тогда, когда $\widehat{L} \circ \overline{s}$ является решением ограниченных гамильтоновых уравнений (3.30b) и (3.91). □

Следовательно, уравнения (3.90) представляют собой препятствие (3.63) к тому, чтобы решения $\overline{s}$ уравнений Картана порождали решения уравнений Гамильтона и уравнений Лагранжа для лагранжиана (3.74). Ясно, что уравнения (3.91) не дают вклада в условие (3.63). Если $r = \widehat{L} \circ \overline{s}$, эти уравнения выполняются на решениях $\overline{s}$ уравнений Картана (2.63a).

Предложение 3.34. Пусть $\overline{s}$ — решение уравнений Картана для вполне регулярного лагранжиана L (3.74). Пусть $\overline{s}_0$ — сечение расслоения $VY \to \mathbb{R}$, которое принимает значение в $\operatorname{Ker} \overline{L}$ и проектируется на $s = \pi^1_0 \circ \overline{s}$. Тогда сумма $\overline{s} + \overline{s}_0$ над Y также является решением уравнений Картана.

доказательство. Это является непосредственным следствием соотношения

$$r = \widehat{L} \circ \overline{s} = \widehat{L} \circ (\overline{s} + \overline{s}_0).$$

□

В заключение приведем еще одно следствие. Всякое решение уравнений Лагранжа для вполне регулярного квадратичного лагранжиана (3.74) является решением некоторого уравнения движения. Это следует из того, что гамильтоновы формы, ассоциированные с таким лагранжианом, образуют полное семейство, и всякое решение уравнений Лагранжа служит также решением той или иной системы уравнений Гамильтона.

§ 7. Гамильтоновы законы сохранения

Как уже отмечалось, понятие интегралов движения в механике консервативных систем, определяемых как функции на фазовом пространстве, находящиеся в инволюции с гамильтонианом, не может быть распространено на неавтономную механику, поскольку уравнение эволюции (3.44) в неавтономной механике не сводится к скобкам Пуассона.

В § 2.7 уже рассматривались законы сохранения в лагранжевой механике. Чтобы использовать эти результаты в рамках гамильтонова формализма, применим следующую интересную конструкцию.

Пусть H — гамильтонова форма (3.19) на фазовом пространстве V^*Y. Рассмотрим лагранжиан

$$L_H = (p_i y^i_t - \mathscr{H})dt \tag{3.93}$$

на многообразии струй J^1V^*Y фазового пространства $V^*Y \to \mathbb{R}$. Легко установить, что форма Пуанкаре—Картана этого лагранжиана в точности совпадает с самой гамильтоновой формой H, индуцированной на J^1V^*Y посредством проекции $J^1V^*Y \to V^*Y$, а оператор Эйлера—Лагранжа для L_H воспроизводит оператор Гамильтона для H, индуцированный таким же образом на J^2V^*Y. Как следствие, уравнения Лагранжа для лагранжиана L_H (3.93) эквивалентны уравнениям Гамильтона для H. Поэтому для построения гамильтоновых законов сохранения применим уже апробированную процедуру получения лагранжевых законов сохранения к лагранжиану L_H.

Замечание 3.15. Лагранжиан (3.93) играет важную роль при применении методов функционального интегрирования в механике и теории поля. □

Рассмотрим векторное поле u (2.89) на пространстве событий Y и его лифт

$$\widetilde{u} = u^t\partial_t + u^i\partial_i - \partial_i u^j p_j \partial^i$$

на фазовое пространство V^*Y. Легко проверить, что

$$\mathbf{L}_{\widetilde{u}} H = \mathbf{L}_{J^1\widetilde{u}} L_H,$$

где $J^1\widetilde{u}$ — струйное продолжение (П.35) векторного поля $\widetilde{u}$ на J^1V^*Y. Применим поэтому к лагранжиану (3.93) первую вариационную формулу (2.50). Как частный случай слабого тождества (2.90) получаем на решениях уравнений Гамильтона для гамильтоновой формы H слабое равенство

$$-u^i\partial_i\mathscr{H} - u^t\partial_t\mathscr{H} + p_i d_t u^i \approx -d_t(-p_i u^i + u^t\mathscr{H}) \tag{3.94}$$

для тока

$$\widetilde{\mathbf{T}} = -p_i u^i + u^t\mathscr{H}. \tag{3.95}$$

В случае вертикального векторного поля u, когда $u^t = 0$, это равенство сводится к выражению

$$\mathbf{L}_{J^1\widetilde{u}} L_H \approx d_t(p_i u^i).$$

Если $\mathbf{L}_{J^1\widetilde{u}} L_H = 0$, получаем слабый закон сохранения

$$0 \approx d_t(p_i u^i)$$

нетеровского тока

$$\widetilde{\mathbf{T}} = -p_i u^i.$$

В случае горизонтального векторного поля (связности) Γ (3.14) на Y слабое равенство (3.94) принимает вид

$$-\partial_t\mathscr{H} - \Gamma^i\partial_i\mathscr{H} + p_i d_t\Gamma^i \approx -d_t\widetilde{\mathscr{H}}_\Gamma,$$

где $\widetilde{\mathscr{H}}_\Gamma = \mathscr{H} - p_i\Gamma^i$ функция Гамильтона из расщепления (3.21).

Имеется следующая связь между лагранжевыми и гамильтоновыми сохраняющимися токами.

Предложение 3.35. Пусть гамильтонова форма H на фазовом пространстве V^*Y ассоциирована с полурегулярным лагранжианом L на конфигурационном пространстве J^1Y. Пусть r — решение уравнений Гамильтона (3.30a)–(3.30b) для H, которое лежит в пространстве лагранжевых связей Q, и s — соответствующее решение уравнений Лагранжа для лагранжиана L такие, что выполняются соотношения (3.65). Пусть u — векторное поле (2.89) на пространстве событий $Y \to \mathbb{R}$. Тогда получаем

$$\tilde{\mathbf{T}}(r) = \mathbf{T}(\widehat{H} \circ r),$$
$$\tilde{\mathbf{T}}(\widehat{L} \circ J^1 s) = \mathbf{T}(s),$$

где $\mathbf{T}$ — ток (2.91) на конфигурационном пространстве J^1Y и $\tilde{\mathbf{T}}$ — ток (3.95) на фазовом пространстве V^*Y. □

Следствие 3.36. Гамильтоновым аналогом в смысле Предложения 3.35 лагранжевой функции энергии $\mathbf{T}_\Gamma$ (2.95) относительно системы отсчета Г является функция Гамильтона $\widetilde{\mathscr{H}_\Gamma}$ из расщепления (3.21). □

Таким образом, можно интерпретировать функцию Гамильтона $\widetilde{\mathscr{H}_\Gamma}$ как гамильтонову функцию энергии относительно системы отсчета Г. В частности, если $\Gamma^i = 0$, мы получаем известный закон сохранения энергии

$$\partial_t \mathscr{H} \approx d_t \mathscr{H}$$

в сопутствующих данной системе отсчета координатах. Он является аналогом лагранжева закона сохранения энергии (2.96).

§ 8. Неконсервативные системы с симметриями

В механике, подобно теории поля, системы с симметриями можно описывать в терминах расслоений со структурными группами, как это подробно изложено в первом томе [8]. Однако в механике такое описание имеет следующую существенную особенность.

Поскольку база главных расслоений одномерна, напряженность калибровочных потенциалов — связностей на этих расслоениях — тождественно равна нулю. Следовательно для них нельзя построить лагранжиан Янга—Миллса, и калибровочные потенциалы в механике не являются динамическими переменными. Более того, по этой причине в механике вообще не существуют калибровочно инвариантные лагранжианы, а только калибровочно ковариантные, в которые калибровочные потенциалы входят как фоновые поля.

В то же время в механике особую важность приобретают преобразования, которые не сохраняют лагранжианы, но оставляют инвариантными уравнения Лагранжа. Это наиболее общий случай инерциальных преобразований.

Пусть $\pi_P : P \to \mathbb{R}$ — *главное расслоение* со *структурной группой* Ли G, каноническое действие которой на P справа

$$r_g : p \mapsto pg, \quad p \in P, \quad g \in G, \tag{3.96}$$

является послойным, свободным и транзитивным. Пусть

$$Y = (P \times V)/G \tag{3.97}$$

— *ассоциированное* с P векторное расслоение с типичным слоем V, на который структурная группа G действует слева. Напомним, что фактор в выражении (3.97) берется путем отождествления элементов (p, v) и $(pg, g^{-1}v)$ для всех $g \in G$.

Калибровочными преобразованиями называются вертикальные (над X) автоморфизмы Φ главного расслоения P, эквивариантные относительно правого действия (3.96) его структурной группы G, т. е.

$$\mathbf{\Phi} \circ r_g = \rho_g \circ \mathbf{\Phi}, \quad \forall g \in G.$$

Благодаря условию эквивариантности, калибровочные преобразования главного расслоения Φ порождают калибровочные преобразования всякого ассоциированного с ним расслоения:

$$\Phi_Y : (P \times V)/G \to (\Phi(P) \times V)/G.$$

Таким образом, векторное расслоение Y (3.97) можно рассматривать как пространство событий механической системы с группой симметрий G.

Всякой 1-параметрической группе калибровочных преобразований главного расслоения P соответствует полное вертикальное векторное поле на P, инвариантное относительно правого действия группы G на P. Поэтому множество таких полей находится во взаимно однозначном соответствии с множеством сечений расслоения

$$V_G P = VP/VG \to X, \tag{3.98}$$

где VP — вертикальное касательное расслоение к главному расслоению P, а его фактор берется относительно вертикальных касательных морфизмов Vr_g к морфизмам r_g (3.96). Расслоение $V_G P$ ассоциировано с главным расслоением P. Его типичным слоем является правая алгебра Ли $\mathscr{G}_r$ структурной группы G, на которую эта группа действует по присоединенному представлению. Поэтому сечения расслоения (3.98) образуют алгебру Ли.

Соответственно, всякой 1-параметрической группе калибровочных преобразований ассоциированного с P пространства событий Y отвечает вертикальное векторное поле

$$u = \alpha^m(t)\varepsilon_m{}^i{}_j y^j \partial_i, \tag{3.99}$$

где $\varepsilon_m{}^i{}_j$ — генераторы действия группы G в типичном слое V, а $\alpha_m(t)$ — локальные функции на $\mathbb{R}$. Действительно, при переходе к другим послойным координатам y'^i с функциями перехода ρ, принимающими значения в структурной группе G, векторное поле (3.99) запишется в виде

$$u = \alpha^m(t)\ \mathrm{ad}\ \rho(\varepsilon_m)^i{}_j y'^j \partial'_i = \alpha'^m(t)\varepsilon_m{}^i{}_j y'^j \partial'_i.$$

Векторные поля (3.99) находятся, очевидно, во взаимно однозначном соответствии с сечениями расслоения (3.98) и образуют алгебру Ли относительно операции скобок Ли. Обозначим эту алгебру $\mathscr{G}(\mathbb{R})$. Всякая тривиализация главного расслоения P и соответственно ассоциированного с ним расслоения Y задает изоморфизм алгебры Ли $\mathscr{G}(\mathbb{R})$ на алгебру Ли, получаемую из $\mathscr{G}_r$ расширением поля вещественных чисел до кольца $\mathscr{O}^0(\mathbb{R})$ гладких функций на $\mathbb{R}$.

Любая 1-параметрическая группа калибровочных преобразований пространства событий Y канонически продолжается до 1-параметрической группы калибровочных преобразований фазового пространства V^*Y с генератором

$$\tilde{u} = \alpha^m(t)\varepsilon_m{}^i{}_j y^j \partial_i - \alpha^m(t)\varepsilon_m{}^i{}_j p_i \partial^j.$$

Как легко установить, это векторное поле является гамильтоновым векторным для нетеровского тока $p_i u^i$ (§ 3.7) относительно канонической 3-формы (3.8), и эти нетеровские токи образуют алгебру Ли, т. е.

$$\{p_i u^i, p_j u'^j\}_V = p_i [u, u']^i. \tag{3.100}$$

В частности, пусть $p_i u^i$ и $p_i u'^i$ — сохраняющиеся нетеровские токи для некоторой гамильтоновой формы H на фазовом пространстве V^*Y. Учитывая, что

$$[\widetilde{u, u'}] = [\tilde{u}, \tilde{u}'], \quad J^1[\tilde{u}, \tilde{u}'] = [J^1\tilde{u}, J^1\tilde{u}']$$

и

$$\mathbf{L}_{J^1\tilde{u}} L_H = 0, \quad \mathbf{L}_{J^1\tilde{u}'} L_H = 0,$$

получаем

$$\mathbf{L}_{J^1[\tilde{u},u']} L_H = 0,$$

т. е. нетеровский ток (3.100) тоже сохраняется. Таким образом, в гамильтоновой неавтономной механике сохраняющиеся нетеровские токи образуют алгебру Ли (сравните с Примером 1.21).

Этот результат переносится и на нетеровские токи (2.93) в лагранжевой механике. При данном лагранжиане L нетеровские токи (2.93) [соотв. сохраняющиеся нетеровские токи (2.93)] вдоль векторных полей (3.99) образуют алгебру Ли относительно скобок Пуассона (2.59).

Замечание 3.16. То, что сохраняющиеся нетеровские токи образуют алгебру Ли, важно при квантовании. Это означает, что состояния квантовой механической системы образуют представление этой алгебры Ли. □

Всякая связность на главном расслоении P порождает связность

$$A = \partial_t + A^m(t)\varepsilon_m{}^i{}_j y^j$$

на ассоциированном с ним пространстве событий, где A^m — калибровочные потенциалы. Однако эти потенциалы, как уже отмечалось, всегда могут быть устранены соответствующим выбором атласа расслоения P. При этом все же могут возникнуть нетривиальные следствия, если базой пространства событий является не $\mathbb{R}$, а окружность S^1, и его типичный слой M имеет нетривиальную первую гомотопическую группу.

Рассмотрим теперь случай, когда изоморфизмы пространства событий не сохраняют данный лагранжиан L, но оставляют инвариантным соответствующий ему оператор Эйлера—Лагранжа $\mathscr{E}_L$. Такие преобразования могут существовать, поскольку, как уже отмечалось, лагранжианы, отличающиеся друг от друга слагаемым $d_t f dt$, где f — некоторая функция на Y, приводят к одному и тому же оператору Эйлера—Лагранжа. Более точно, можно показать, что для всякого проектируемого векторного поля u на пространстве событий Y справедливо равенство

$$\mathbf{L}_{J^2 u} \mathscr{E}_L = \delta(\mathbf{L}_{J^1 u} L), \tag{3.101}$$

где J^2u — струйное продолжение векторного поля u на многообразие струй 2-го порядка J^2Y и δ — вариационный оператор (2.82).

Если для лагранжиана L полное векторное поле u удовлетворяет условию

$$\delta(\mathbf{L}_{J^1u}L) = 0, \tag{3.102}$$

то, согласно равенству (3.101), получаем

$$\mathbf{L}_{J^2u}\mathscr{E}_L = 0,$$

и это означает, что оператор Эйлера—Лагранжа $\mathscr{E}_L$ и, следовательно, уравнения Лагранжа инвариантны относительно 1-параметрической группы автоморфизмов G_τ пространства событий Y, генератором которой является векторное поле u. Ограничимся в дальнейшем случаем, когда u — вертикальное векторное поле на $Y \to \mathbb{R}$. Тогда условие (3.102) эквивалентно равенству

$$J^1u \rfloor d\mathscr{L} = d_t f, \tag{3.103}$$

где f — некоторая функция на Y.

Пусть Γ — полная связность на расслоении $Y \to \mathbb{R}$, которая при преобразовании

$$G_{\tau=1} = \exp(u) \tag{3.104}$$

переходит в связность Γ'. Тогда системы отсчета Γ и Γ' на пространстве событий Y можно считать *взаимно инерциальными* для данного оператора Эйлера—Лагранжа $\mathscr{E}_L$, поскольку преобразование (3.104) оставляет его инвариантным. Соответственно, преобразование между координатами y^i и y'^i, сопутствующими системам отсчета Γ и Γ', можно назвать *инерциальным преобразованием* для оператора Эйлера—Лагранжа $\mathscr{E}_L$. Эти координаты связаны условием

$$(y^i \circ G_{\tau=1})(y) = y'^i(y), \quad \forall y \in Y.$$

Замечание 3.17. Ясно, что преобразования, оставляющие инвариантным лагранжиан L, являются инерциальными для соответствующего оператора Эйлера—Лагранжа. Однако часто они сохраняют и систему отсчета, т. е. $\Gamma = \Gamma'$. □

Замечание 3.18. Пусть производная Ли лагранжиана L вдоль вертикального векторного поля u удовлетворяет условию (3.103). Применим к этой производной Ли первую вариационную формулу (2.50). Тогда слабое тождество (2.90) принимает вид закона сохранения

$$0 \approx d_t(\pi_i u^i - f),$$

который может, однако, сводиться к уже известным нетеровским законам сохранения. □

Пример 3.19. Рассмотрим пространство событий $Y = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и лагранжиан одномерного свободного движения

$$L = \frac{1}{2}\, y_t^2 dt. \tag{3.105}$$

Соответствующий ему оператор Эйлера—Лагранжа имеет вид

$$\mathscr{E}_L = -y_{tt} dy \wedge dt. \tag{3.106}$$

Вертикальное векторное поле $u = vt\partial_y$, $v = \text{const}$, на пространстве событий Y является генератором 1-параметрической группы преобразований, которые оставляют инвариантным оператор Эйлера—Лагранжа (3.106) и уравнение свободного движения, но не лагранжиан (3.105). Действительно, легко получить, что

$$\mathbf{L}_{J^1 u} L = J^1 u \rfloor d\mathscr{L} dt = (vt\partial_y + v\partial_y^t) \rfloor y_t dy_t^i \wedge dt = d_t(vy)dt.$$

Соответствующее преобразование (3.104) имеет вид

$$G_{\tau=1} = \exp(u) = \exp(vt\partial_y) : y \to y + vt$$

и является обычным инерциальным преобразованием для уравнения свободного движения, как это было описано в § 2.4. □

§ 9. Системы с зависящими от времени параметрами

Рассмотрим пространство событий, которое является композицией расслоений

$$Y \to \Sigma \to \mathbb{R}, \tag{3.107}$$

параметризуемой координатами (t, σ^m, y^i), где (t, σ^m) — координаты расслоения $\Sigma \to \mathbb{R}$. Мы будем интерпретировать сечения h расслоения $\Sigma \to \mathbb{R}$ как временезависимые параметры, а расслоение (3.107) — как пространство событий системы с параметрами. Назовем $\Sigma \to \mathbb{R}$ *расслоением параметров*. Отметим, что расслоение $Y \to \Sigma$ не обязательно тривиально.

Напомним, что, согласно Предложению П.7, для всякого сечения h расслоения параметров $\Sigma \to \mathbb{R}$ ограничение

$$Y_h = h^* Y \tag{3.108}$$

расслоения $Y \to \Sigma$ на $h(\mathbb{R}) \subset \Sigma$ является подрасслоением $i_h : Y_h \hookrightarrow Y$ расслоения $Y \to \mathbb{R}$. Расслоение $Y_h \to \mathbb{R}$ можно трактовать как пространство событий системы с данным *полем параметров* $h(t)$.

Конфигурационным пространством системы с параметрами является многообразие струй $J^1 Y$ расслоения (3.107), на котором введены координаты $(t, \sigma^m, y^i, \sigma_t^m, y_t^i)$.

Предположим, что на расслоении $Y \to \Sigma$ задана некоторая связность

$$A_\Sigma = dt \otimes (\partial_t + \tilde{A}_t^i \partial_i) + d\sigma^m \otimes (\partial_m + A_m^i \partial_i). \tag{3.109}$$

Тогда на пространстве событий Y может быть введен вертикальный ковариантный дифференциал (П.59):

$$\widetilde{D} : J^1 Y \to V_\Sigma Y,$$
$$\widetilde{D} = (y_t^i - \tilde{A}_t^i - A_m^i \sigma_t^m)\partial_i. \tag{3.110}$$

Он обладает тем свойством, что для любого сечения h расслоения параметров $\Sigma \to \mathbb{R}$ его ограничение на $J^1 i_h(J^1 Y_h) \subset J^1 Y$ совпадает с обычным ковариантным дифференциалом относительно связности

$$A_h = \partial_t + \left(A_m^i \partial_t h^m + (\tilde{A} \circ h)_t^i\right)\partial_i \tag{3.111}$$

на Y_h, получаемой ограничением на $h(\mathbb{R})$ связности A_Σ. Это дает основание использовать именно вертикальный ковариантный дифференциал $\widetilde{D}$ для построения лагранжианов систем с параметрами на пространстве событий Y (3.107).

Мы предположим, что такого рода лагранжиан L зависит от производных параметров σ^m_t, находящихся только в составе вертикального ковариантного дифференциала $\widetilde{D}$ (3.110), т. е.

$$L = \mathscr{L}\left(t, \sigma_m, y^i, y^i_t - \widetilde{A}^i - A^i_m \sigma^m_t\right) dt. \tag{3.112}$$

Ясно, что такой лагранжиан является вырожденным из-за наличия связи

$$\pi_m + A^i_m \pi_i = 0. \tag{3.113}$$

Эта связь приводит к тому, что полная система уравнений Лагранжа

$$(\partial_i - d_t \partial^t_i)\mathscr{L} = 0, \tag{3.114}$$

$$(\partial_m - d_t \partial^t_m)\mathscr{L} = 0 \tag{3.115}$$

не имеет решения, если не выполняется весьма специфическое условие

$$(\partial_m + A^i_m \partial_i)\mathscr{L} + \pi_i d_t A^i_m = 0. \tag{3.116}$$

В этом, однако, и нет необходимости, поскольку поле параметров по самому своему смыслу не зависит от движения механической системы и является фоновым, т. е., как говорят, "задается руками", или является решением некоторых уравнений, не зависящих от координат системы. В моделях с параметрами возможен, конечно, режим обратной связи, когда функции параметров зависят от состояния системы, но это, как правило, не лагранжевы модели, и мы их здесь не касаемся. Поэтому в нашем случае требуется выполнение только уравнений Лагранжа (3.114).

Запишем при этом условии первую вариационную формулу. Пусть

$$u = u^t \partial_t + u^m(t, \sigma^k)\partial_m + u^i(t, \sigma^k, y^j)\partial_i, \quad u^t = 0, 1, \tag{3.117}$$

— проектируемое векторное поле как относительно расслоения $Y \to \mathbb{R}$, так и относительно расслоения $Y \to \Sigma$. Тогда производная Ли $\mathbf{L}_{\overline{u}} L$ лагранжиана L относительно векторного поля u (3.117) принимает вид

$$\left[u^t \partial_t + u^m \partial_m + u^i \partial_i + d_t u^m \partial^t_m + d_t u^i \partial^t_i\right]\mathscr{L} =$$
$$= (u^m - \sigma^m_t u^t)\partial_m \mathscr{L} + \pi_m d_t(u^m - \sigma^m_t u^t) + (u^i - y^i_t u^t)\mathscr{E}_i - d_t\left[\pi_i(u^t y^i_t - u^i) - u^t \mathscr{L}\right],$$
$$d_t = \partial_t + \sigma^m_t \partial_m + y^i_t \partial_i + \sigma^m_{tt} \partial^t_m + y^i_{tt} \partial^t_i.$$

На уравнениях Лагранжа (3.114) мы приходим к слабому тождеству

$$\left[u^t \partial_t + u^m \partial_m + u^i \partial_i + d_t u^m \partial^t_m + d_t u^i \partial^t_i\right]\mathscr{L} \approx$$
$$\approx (u^m - \sigma^m_t u^t)\partial_m \mathscr{L} + \pi_m d_t(u^m - \sigma^m_t u^t) - d_t\left[\pi_i(u^t y^i_t - u^i) - u^t \mathscr{L}\right].$$

Если производная Ли $\mathbf{L}_{\overline{u}} L$ равна 0, получаем закон сохранения

$$0 \approx (u^m - \sigma^m_t u^t)\partial_m \mathscr{L} + \pi_m d_t(u^m - \sigma^m_t u^t) - d_t\left[\pi_i(u^t y^i_t - u^i) - u^t \mathscr{L}\right] \tag{3.118}$$

для системы с параметрами.

Запишем теперь эту систему в гамильтоновой форме. Ее фазовым пространством является вертикальное кокасательное расслоение V^*Y. Если дана связность (3.109), оно допускает расщепление

$$V^*Y = A_\Sigma(V^*_\Sigma Y) \underset{Y}{\oplus} (Y \underset{Y}{\times} V^*\Sigma),$$

$$p_i\bar{d}y^i + p_m\bar{d}\sigma^m = p_i(\bar{d}y^i - A^i_m\bar{d}\sigma^m) + (p_m + A^i_m p_i)\bar{d}\sigma^m, \tag{3.119}$$

дуальное расщеплению (П.58). В соответствии с этим расщеплением на фазовом пространстве V^*Y можно ввести координаты

$$\bar{p}_i = p_i, \quad \bar{p}_m = p_m + A^i_m p_i, \tag{3.120}$$

которые однако не являются каноническими. Тогда для любого сечения h расслоения параметров $\Sigma \to \mathbb{R}$ подмногообразие

$$\{\sigma = h(t),\ \bar{p}_m = 0\} \tag{3.121}$$

фазового пространства V^*Y изоморфно расслоению Лежандра V^*Y_h подрасслоения (3.108) расслоения $Y \to \mathbb{R}$, являющегося пространством событий системы с фиксированным полем параметров $h(t)$.

Рассмотрим гамильтоновы формы на фазовом пространстве V^*Y, ассоциированные с лагранжианом L (3.112). Пусть дана связность

$$\Gamma = \partial_t + \Gamma^m\partial_m \tag{3.122}$$

на расслоении параметров $\Sigma \to \mathbb{R}$. Тогда гамильтонову форму, ассоциированную с L, можно искать в виде

$$H = (p_i dy^i + p_m d\sigma^m) - [p_i A^i + p_m\Gamma^m + \widetilde{\mathscr{H}}(t, \sigma^m, y^i, p_i)]dt, \tag{3.123}$$

где

$$A = \partial_t + \Gamma^m\partial_m + A^i\partial_i, \quad A^i = \tilde{A}^i + A^i_m\Gamma^m,$$

— композиционная связность (П.56) на расслоении $Y \to \mathbb{R}$, определяемая связностями A_Σ (3.109) на $Y \to \Sigma$ и Γ (3.122) на $\Sigma \to \mathbb{R}$. При этом функция Гамильтона $\widetilde{H}$ должна удовлетворять условиям

$$\pi_i\left(t, y^i, \sigma^m, \partial^i\widetilde{\mathscr{H}}(t, \sigma^m, y^i, \pi_i)\right) = \pi_i,$$
$$p_i\partial^i\widetilde{\mathscr{H}} - \widetilde{\mathscr{H}} = \mathscr{L}\left(t, y^i, \sigma^m, \partial^i\widetilde{\mathscr{H}}\right),$$

которые следуют из условий (3.46 a)–(3.46 b) при подстановке в них выражения (3.123).

Уравнения Гамильтона для гамильтоновой формы (3.123) имеют вид

$$y^i_t = \tilde{A}^i + A^i_m\Gamma^m + \partial^i\widetilde{\mathscr{H}}, \tag{3.124 a}$$
$$p_{ti} = -p_j(\partial_i\tilde{A}^j + \partial_i A^j_m\Gamma^m) - \partial_i\widetilde{\mathscr{H}}, \tag{3.124 b}$$
$$\sigma^m_t = \Gamma^m, \tag{3.124 c}$$
$$p_{tm} = -p_i(\partial_m\tilde{A}^i + \Gamma^n\partial_m A^i_n) - \partial_m\widetilde{\mathscr{H}}. \tag{3.124 d}$$

Если гамильтонова форма известна, пространство лагранжевых связей определяется уравнениями

$$p_i = \pi_i(t, y^i, \sigma^m, \partial^i \widetilde{\mathscr{H}}(t, \sigma^m, y^i, p_i)) \tag{3.125}$$

$$p_m + A^i_m p_i = 0. \tag{3.126}$$

Система уравнений (3.124 a)–(3.126) при выполнении условий, рассмотренных в § 3.5, соответствует уравнениям Лагранжа (3.114)–(3.115). При этом из-за уравнений (3.124 d) и (3.126) она переопределена. Поэтому уравнения Гамильтона (3.124 a)–(3.124 d) имеют решение, лежащее в пространстве лагранжевых связей (3.125)–(3.126), только при весьма специфичных условиях, аналогичных условиям (3.116). Однако в нашей ситуации, когда уравнения Лагранжа (3.115) игнорируются, и нет необходимости искать такие решения. Заметим, что уравнения (3.124 d) и (3.126) служат только для определения импульсов p_m и не влияют на другие уравнения.

Поэтому рассмотрим систему уравнений (3.124 a)–(3.124 c) и (3.125)–(3.126). Предположим, что связность Γ в уравнении (3.124 c) полная и его решением является поле параметров $h(t)$ — интегральное сечение полной связности Γ. Вместе с уравнением (3.126) оно задает, как уже отмечалось, подмногообразие V^*Y_h фазового пространства V^*Y, являющееся фазовым пространством модели с фиксированным полем параметров $h(t)$. Оставшиеся уравнения (3.124 a)–(3.124 b) и (3.125) являются уравнениями этой модели на фазовом пространстве V^*Y_h, соответствующие уравнениям Лагранжа (3.114) в присутствии фонового поля параметров $h(t)$.

Обратно, для всякого поля параметров $h(t)$ существует связность Γ на расслоении параметров $\Sigma \to \mathbb{R}$ такая, что $h(t)$ — ее интегральное сечение. Тогда соответствующая система уравнений (3.124 a)–(3.124 b) и (3.125)–(3.126) описывает модель с данным полем параметров $h(t)$. При этом локально в координатах (t, σ^m, y^i, p_i) можно просто ограничиться уравнениями (3.124 a)–(3.124 b) и (3.125).

Чтобы проиллюстрировать описаную выше конструкцию, приведем два простых примера.

Пример 3.20. Рассмотрим одномерное движение пробной частицы, которая находится в поле силового центра, который сам движется по некоторому явно заданному закону. Пространством событий этой системы является композиционное расслоение

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

где $Y = \mathbb{R}^3$, $\Sigma = \mathbb{R}^2$, параметризуемое координатами (t, σ, y), где σ — координата силового центра относительно некоторой, как мы будем считать, инерциальной системы отсчета, а y — координата пробной частицы относительно силового центра. Существует естественное вложение

$$Y \underset{\Sigma}{\times} T\Sigma \ni (t, \sigma, y, \dot{t}, \dot{\sigma}) \mapsto (t, \sigma, \dot{t}, \dot{\sigma}, \dot{y} = -\dot{\sigma}) \in TY,$$

которое определяет связность

$$A_\Sigma = dt \otimes \partial_t + d\sigma \otimes (\partial_\sigma - \partial_y)$$

на расслоении $Y \to \Sigma$. Смысл выбора такой связности состоит в том, что отвечающий ей вертикальный ковариантный дифференциал (3.110):

$$\widetilde{D} = (y_t + \sigma_t)\partial_y,$$

представляет собой скорость пробной частицы относительно инерциальной системы отсчета. Тогда лагранжиан такой частицы запишется в виде

$$L = \left[\frac{1}{2}(y_t + \sigma_t)^2 - V(y)\right] dt. \tag{3.127}$$

В частности, можно получить закон сохранения (а вернее, изменения) энергии в этой системе. Возьмем векторное поле $u = \partial_t$. Очевидно, что производная Ли лагранжиана (3.127) вдоль этого векторного поля равна 0. Тогда непосредственно из формулы (3.118) получаем

$$0 \approx -\pi_y \sigma_{tt} - d_t[\pi_y y_t - \mathscr{L}],$$

или

$$0 \approx \partial_y \mathscr{L}\, \sigma_t - d_t\big[\pi_y(y_t + \sigma_t) - \mathscr{L}\big],$$

где

$$\mathbf{T} = \pi_y(y_t + \sigma_t) - \mathscr{L}$$

— функция энергии пробной частицы относительно инерциальной системы отсчета. □

Пример 3.21. Рассмотрим одномерный осциллятор, частота которого является временезависимым параметром. Мы будем следовать адиабатической гипотезе, согласно которой существует такая координата y, что этот осциллятор отличается от стандартного только кинетической энергией. Возьмем в качестве пространства событий системы композиционное расслоение

$$Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{3.128}$$

где $\mathbb{R}^+$ обозначает положительную полупрямую. Оно наделено координатами $(t, \sigma > 0, y)$, где σ — параметр частоты. Соответствующее фазовое пространство V^*Y параметризуется координатами $(t, \sigma, y, p_\sigma, p_y)$.

Гамильтонову форму для осциллятора можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= p_\sigma d\sigma + p_y dy - \mathscr{H} dt, \\ \mathscr{H} &= p_\sigma \Gamma^\sigma + \frac{1}{2}(\sigma^2 p_y^2 + y^2). \end{aligned} \tag{3.129}$$

Ассоциированная с ней связность

$$\Gamma_H = \partial_t + \Gamma_t^\sigma \partial_\sigma \tag{3.130}$$

на $Y \to \mathbb{R}$ является композиционной связностью (П.56), порождаемой некоторой линейной связностью

$$\Gamma = dt \otimes \left(\partial_t + \Gamma(t)\sigma\partial_\sigma\right)$$

на расслоении параметров

$$\Sigma = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

и тривиальной связностью

$$A_\Sigma = dt \otimes \partial_t + d\sigma \otimes \partial_\sigma$$

на расслоении $Y \to \Sigma$.

Гамильтонова форма (3.129) ассоциирована с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\left(\sigma^{-2} y_t^2 - y^2\right) dt,$$

который действительно, в соответствии с адиабатической гипотезой, в координатах (t, y) описывает осциллятор с любой наперед заданной переменной частотой $\sigma = h(t)$. Уравнения Гамильтона (3.124 a)–(3.124 c) для гамильтоновой формы (3.129) имеют вид

$$y_t = \sigma^2 p_y, \tag{3.131 a}$$

$$p_t = -y, \tag{3.131 b}$$

$$\sigma_t = \Gamma(t)\sigma. \tag{3.131 c}$$

Они тоже описывают осциллятор с данной переменной частотой $\sigma = h(t)$, если положить $\Gamma = h^{-1}\partial_t h$. Уравнения (3.125) тривиальны.

Рассмотрим каноническое преобразование

$$y = \sigma y',$$

$$p_y = \frac{1}{\sigma} p'_y,$$

$$p_\sigma = p'_\sigma - \frac{1}{\sigma} y' p'_y.$$

В новых координатах $(t, \sigma, y', p'_\sigma, p'_y)$ связность (3.130) принимает вид

$$\Gamma_H = \partial_t + \Gamma^\sigma(\partial_\sigma - y'\partial_{y'}),$$

а гамильтонова форма (3.129) запишется в виде

$$H = p'_\sigma d\sigma + p'_y dy' - \mathscr{H} dt,$$

$$\mathscr{H} = p'_\sigma \Gamma^\sigma - p'_y y' \Gamma + \frac{1}{2}(p'^2_y + \sigma^2 y'^2).$$

Соответственно, уравнения Гамильтона (3.131 a)–(3.131 c) трансформируются в уравнения

$$p'_{ty} = \frac{1}{\sigma} p'_y \Gamma^\sigma - \sigma^2 y', \tag{3.132 a}$$

$$y'_t = -\frac{1}{\sigma} y' \Gamma^\sigma + p'_y, \tag{3.132 b}$$

$$\sigma_t = \Gamma^\sigma_t. \tag{3.132 c}$$

Подстановка $\sigma = h(t)$ и (3.132 c) в уравнения (3.132 a) и (3.132 b) превращает последние в уравнения Гамильтона для гамильтоновой формы

$$H = p'_y dy' - \mathscr{H} dt,$$

$$\mathscr{H} = -\frac{1}{\sigma}\partial_t \sigma y' p'_y + \frac{1}{2}(p'^2_y + \sigma^2 y'^2),$$

описывающие известный *осциллятор Берри*, когда связность (3.111) является классическим вариантом *связности Берри*

$$A_h = \partial_t - \frac{1}{\sigma}\,\partial_t\sigma y'\partial_{y'}$$

[52, 60]. □

§ 10. Единый лагранжево-гамильтонов формализм

Связь между лагранжевым и гамильтоновым формализмами, описанная в предыдущих параграфах, нарушается при канонических преобразованиях, когда преобразования $y^i \to y'^i$ зависят от импульсов. Следующая конструкция позволяет преодолеть эту трудность.

Пусть $Y \to \mathbb{R}$ — пространство событий. Рассмотрим V^*J^1Y — вертикальное касательное расслоение к конфигурационному пространству $J^1Y \to \mathbb{R}$, параметризуемое координатами

$$(t, y^i, y^i_t, \dot{y}_i, \dot{y}^t_i),$$

и J^1V^*Y — многообразие струй фазового пространства $V^*Y \to \mathbb{R}$ с координатами

$$(t, y^i, p_i, y^i_t, p_{ti}).$$

Предложение 3.37. Имеет место изоморфизм этих расслоений

$$\mathbf{\Pi} = V^*J^1Y \cong J^1V^*Y, \quad \dot{y}_i \longleftrightarrow p_{ti}, \quad \dot{y}^t_i \longleftrightarrow p_i, \tag{3.133}$$

над J^1Y.

доказательство. Изоморфизм (3.133) легко установить, сравнивая законы координатных преобразований $(\dot{y}_i, \dot{y}^t_i)$ и (p_i, p_{ti}). □

Имея в виду изоморфизм (3.133), многообразие $\mathbf{\Pi}$ можно интерпретировать и как фазовое пространство над конфигурационным пространством J^1Y, и как конфигурационное пространство над фазовым пространством V^*Y. Поэтому представляется заманчивым использовать $\mathbf{\Pi}$ как единое конфигурационное и фазовое пространство для объединенного лагранжева и гамильтонова формализма.

Многообразие $\mathbf{\Pi}$ параметризуется голономными координатами

$$(t, y^i, y^i_t, p_{ti}, p_i), \tag{3.134}$$

где (y^i, p_{ti}) и (y^i_t, p_i) — пары канонически сопряженных координат и импульсов. Многообразие $\mathbf{\Pi}$ наделяется *струйным расширением* канонической 3-формы (2.56), которое в координатах (3.134) дается выражением

$$\mathbf{\Omega} = (dp_{ti} \wedge dy^i + dp_i \wedge dy^i_t) \wedge dt = d_t(dp_i \wedge dy^i \wedge dt), \tag{3.135}$$

где

$$d_t = \partial_t + y^i_t\partial_i + p_{ti}\partial^i$$

— полная производная на $\mathbf{\Pi}$. Соответствующие скобки Пуассона (3.5) имеют вид

$$\{f, g\}_V = \frac{\partial f}{\partial p_{ti}}\frac{\partial g}{\partial y^i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial y^i_t} - \frac{\partial g}{\partial p_{ti}}\frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial y^i_t}. \tag{3.136}$$

Очевидно, что каноническая форма (3.135) и, следовательно, скобки Пуассона (3.136) инвариантны относительно преобразований $\mathbf{\Pi}$, являющихся струйным продолжением канонических автоморфизмов фазового пространства V^*Y.

Рассмотрим гамильтонову форму

$$H = p_{ti}dy^i + p_i dy^i_t - \mathscr{H}(t, y^i, y^i_t, p_{ti}, p_i)dt$$

на объединенном фазовом и конфигурационном пространстве $\mathbf{\Pi}$. Соответствующие уравнения Гамильтона (3.30 a)—(3.30 b) имеют вид

$$d_t y^i = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_{ti}}, \tag{3.137 a}$$

$$d_t y^i_t = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i}, \tag{3.137 b}$$

$$d_t p_i = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial y^i_t}, \tag{3.137 c}$$

$$d_t p_{ti} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial y^i}. \tag{3.137 d}$$

Подставляя (3.137 a) в (3.137 b) и (3.137 c) в (3.137 d), получаем уравнения

$$d_t\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_{ti}} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i}, \tag{3.138 a}$$

$$d_t\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial y^i_t} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial y^i}, \tag{3.138 b}$$

которые выглядят как уравнения Лагранжа для "лагранжиана" $\mathscr{H}$. Однако $\mathscr{H}$ не функция и не является в действительности лагранжианом. Можно выбрать

$$\mathscr{H} = -\mathscr{L} + d_t(p_i\Gamma^i), \tag{3.139}$$

где $L_Y = \mathscr{L}dt$ — некоторый лагранжиан на конфигурационном пространстве J^1Y. Тогда уравнения (3.138 a)—(3.138 b) эквивалентны уравнениям Лагранжа для лагранжиана L_Y на J^1Y. Однако их решения в общем случае не являются решениями уравнений Гамильтона (3.137 a)—(3.137 d) для гамильтониана (3.139). Это иллюстрирует тот факт, что решения уравнений Гамильтона (3.137 a)—(3.137 d) являются решениями уравнений Лагранжа (3.138 a)—(3.138 b), но не наоборот.

Чтобы построить объединенный лагранжево-гамильтонов формализм, рассмотрим гамильтонову форму

$$H = p_{ti}dy^i + p_i dy^i_t - \left(d_t\mathscr{H}_\Pi + (p_i y^i_t - \mathscr{H}_\Pi) - \mathscr{L}\right)dt, \tag{3.140}$$

где L_Y — полурегулярный лагранжиан на конфигурационном пространстве J^1Y и H_Π — ассоциированная с ним гамильтонова форма на фазовом пространстве V^*Y.

Уравнения Гамильтона (3.137 a)–(3.137 d) для H (3.140) запишутся в виде

$$d_t y^i = \frac{\partial \mathscr{H}_\Pi}{\partial p_i}, \tag{3.141 a}$$

$$d_t y^i_t = d_t \frac{\partial \mathscr{H}_\Pi}{\partial p_i} + y^i_t - \frac{\partial \mathscr{H}_\Pi}{\partial p_i}, \tag{3.141 b}$$

$$d_t p_i = -\frac{\partial \mathscr{H}_\Pi}{\partial y^i} - p_i + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y^i_t}, \tag{3.141 c}$$

$$d_t p_{ti} = -d_t \frac{\partial \mathscr{H}_\Pi}{\partial y^i} + \frac{\partial \mathscr{H}_\Pi}{\partial y^i} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y^i}. \tag{3.141 d}$$

Используя соотношения (3.46 a) и (3.51), можно показать, что решения уравнений Гамильтона (3.30 a)–(3.30 b) для гамильтоновой формы H_Π, лежащие в пространстве лагранжевых связей $\hat{L}_Y(J^1Y) \subset V^*Y$, являются решениями уравнений (3.141 a)–(3.141 d).

Рассмотрим, в свою очередь, уравнения Лагранжа (3.138 a)–(3.138 b) для гамильтоновой формы (3.140). Они запишутся так:

$$d_t y^i - \frac{\partial \mathscr{H}_\Pi}{\partial p_i} = 0, \tag{3.142 a}$$

$$d_t p_i - d_t \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y^i_t} = -\frac{\partial \mathscr{H}_\Pi}{\partial y^i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y^i}. \tag{3.142 b}$$

Согласно Предложению 3.21, всякое решение уравнений Лагранжа для лагранжиана L_Y такое, что выполняется условие (3.66), является решением уравнений (3.142 a)–(3.142 b).

В частности, если лагранжиан L_Y гиперрегулярный, уравнения (3.142 a)–(3.142 b) и уравнения (3.141 a)–(3.141 d) эквивалентны соответственно уравнениям Лагранжа для лагранжиана L_Y и уравнениям Гамильтона для единственной ассоциированной с ним гамильтоновой формы.

Глава 4

БРСТ механика

В настоящее время БРСТ формализм является одной из наиболее перспективных схем квантования в рамках метода функционального интегрирования как в теории поля, так и в механике. Суть БРСТ формализма состоит в добавлении к обычным динамическим переменным антикоммутирующих величин так, чтобы лагранжиан или гамильтониан системы были инвариантны относительно специальных БРСТ преобразований. Этот подход берет начало в квантовой теории калибровочных полей, когда в функционале действия появляются антикоммутирующие духи Фаддеева—Попова и эффективный лагранжиан, не будучи калибровочно инвариантным, оказывается инвариантным относительно специального класса преобразований, вовлекающих антикоммутирующие величины [9]. Литература по БРСТ квантованию чрезвычайно обширна, и мы подробно рассмотрим этот вопрос в четвертом томе серии. Здесь мы остановимся на геометрической формулировке БРСТ механики, которая строится как механика на градуированных многообразиях. В первом параграфе этой главы описывается расширение механики на вертикальное касательное расслоение VY к пространству событий Y, которое не только необходимо для ее дальнейшего БРСТ обобщения, но и описывает системы с малыми линейными флуктуациями. Во втором параграфе БРСТ механика формулируется на интуитивном уровне, а геометрическому обоснованию этой формулировки посвящен третий параграф главы.

§ 1. Системы с флуктуациями

Пусть $Y \to \mathbb{R}$ — пространство событий неавтономной механики, параметризуемое координатами (t, y^i). Рассмотрим вертикальное касательное расслоение VY к расслоению $Y \to \mathbb{R}$ и будем интерпретировать его как новое пространство событий, параметризуемое голономными координатами $(t, y^i, \dot{y}^i)$. Назовем его *вертикальным пространством событий.*

Соответствующим ему конфигурационным пространством является многообразие струй J^1VY расслоения $VY \to \mathbb{R}$, которое канонически изоморфно вертикальному касательному расслоению VJ^1Y к обычному конфигурационному пространству $J^1Y \to \mathbb{R}$ (см. (П.36)). Назовем VJ^1Y *вертикальным конфигурационным пространством* с голономными координатами

$$(t, y^i, \dot{v}^i, y^i_t, \dot{y}^i_t).$$

Вертикальным фазовым пространством — расслоением Лежандра над вертикальным пространством событий VY — служит вертикальное кокасательное расслоение V^*VY к расслоению $VY \to \mathbb{R}$. Оно изоморфно вертикальному касательному расслоению VV^*Y

к обычному фазовому пространству $V^*Y \to \mathbb{R}$ (см. (П.11)) и параметризуется координатами

$$(t, y^i, p_i, \dot{y}^i, \dot{p}_i).$$

Каноническими парами "координата—импульс" являются $(y^i, \dot{p}_i)$ и $(\dot{y}^i, p_i)$, как это видно из законов координатных преобразований

$$p'_i = \frac{\partial y^j}{\partial y'^i}\, p_j,$$

$$\dot{p}'_i = \frac{\partial p'_i}{\partial p_j}\, \dot{p}_j + \frac{\partial p'_i}{\partial y^j}\, \dot{y}^j = \frac{\partial y^j}{\partial y'^i}\, \dot{p}_j + \frac{\dot{y}^j}{\partial y'^i}\, p_j.$$

Таким образом, конфигурационным и фазовым пространствами, отвечающими вертикальному пространству событий VY, являются вертикальные касательные расслоения соответственно к обычному конфигурационному и обычному фазовому пространствам. Это позволяет строить механику на вертикальном пространстве событий, переходя просто к вертикальным касательным морфизмам.

Вертикальное фазовое пространство VV^*Y наделено канонической 3-формой

$$\mathbf{\Omega}_V = \partial_V \mathbf{\Omega} = \left[d\dot{p}_i \wedge dy^i + dp_i \wedge d\dot{y}^i\right] \wedge dt, \tag{4.1}$$

которая является *вертикальным расширением* канонической 3-формы $\mathbf{\Omega}$ (3.8). Здесь и в дальнейшем применяется обозначение ∂_V (П.4):

$$\partial_V = \dot{y}^i \partial_i + \dot{p}_i \partial^i.$$

Каноническая 3-форма (4.1) определяет на вертикальном фазовом пространстве структуру Пуассона

$$\{f, g\}_{VV} = \dot{\partial}^i f \partial_i g + \partial^i f \dot{\partial}_i g - \partial^i g \dot{\partial}_i f - \dot{\partial}^i g \partial_i f.$$

Здесь использованы сокращенные обозначения (П.15).

Гамильтоновы векторные поля, гамильтоновы связности, гамильтоновы формы и т. д. вводятся на вертикальном фазовом пространстве VV^*Y в соответствии с общей схемой из § 3.2. Например, всякая гамильтонова форма на VV^*Y дается выражением

$$H_V = \dot{p}_i dy^i + p_i d\dot{y}^i - \mathscr{H}_V dt.$$

Поскольку гамильтоновы формы рассматриваются по модулю точных форм и функция $p_i\dot{y}^i$ на VV^*Y глобально определена, мы будем записывать гамильтонову форму на вертикальном фазовом пространстве VV^*Y как

$$H_V = \dot{p}_i dy^i - \dot{y}^i dp_i - \mathscr{H}_V dt. \tag{4.2}$$

Соответствующие уравнения Гамильтона имеют вид

$$\gamma^i = y^i_t = \dot{\partial}^i \mathscr{H}_V, \tag{4.3 a}$$

$$\gamma_i = p_{ti} = -\dot{\partial}_i \mathscr{H}_V, \tag{4.3 b}$$

$$\tilde{\gamma}^i = \dot{y}^i_t = \partial^i \mathscr{H}_V, \tag{4.3 c}$$

$$\tilde{\gamma}_i = \dot{p}_{ti} = -\partial_i \mathscr{H}_V, \tag{4.3 d}$$

где

$$\tilde{\gamma} = \partial_t + \gamma^i\partial_i + \gamma_i\partial^i + \tilde{\gamma}^i\dot{\partial}_i + \tilde{\gamma}_i\dot{\partial}^i$$

— гамильтонова связность на вертикальном фазовом пространстве $VV^*Y \to \mathbb{R}$.

Установим теперь соответствие между гамильтоновыми формализмами на фазовом и вертикальном фазовом пространствах.

Предложение 4.1. Пусть γ_H — гамильтонова связность на фазовом пространстве $V^*Y \to \mathbb{R}$, ассоциированная с гамильтоновой формой

$$H = p_i dy^i - \mathscr{H}\, dt. \tag{4.4}$$

Тогда связность $V\gamma_H$ (П.61) на вертикальном фазовом пространстве $VV^*Y \to \mathbb{R}$ является гамильтоновой связностью, ассоциированной с гамильтоновой формой

$$\begin{aligned} H_V &= (\dot{p}_i dy^i - \dot{y}^i dp_i) - \partial_V\mathscr{H}\, dt, \\ \mathscr{H}_V &= \partial_V\mathscr{H} = (\dot{y}^i\partial_i + \dot{p}_i\partial^i)\mathscr{H}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Назовем H_V (4.5) *вертикальным расширением* гамильтоновой формы H.

доказательство. Легко проверить прямыми вычислениями, что для гамильтоновой связности

$$\begin{aligned} \gamma_H &= \partial_t + \gamma^i\partial_i + \gamma_i\partial^i, \\ \gamma^i &= \partial^i\mathscr{H}, \quad \gamma_i = -\partial_i\mathscr{H}, \end{aligned}$$

на $V^*Y \to \mathbb{R}$ связность

$$\begin{aligned} V\gamma_H &= \partial_t + \gamma^i\partial_i + \gamma_i\partial^i + \tilde{\gamma}^i\dot{\partial}_i + \tilde{\gamma}_i\dot{\partial}^i, \\ \tilde{\gamma}^i &= \partial_V\gamma^i, \quad \tilde{\gamma}_i = \partial_V\gamma_i, \end{aligned}$$

на $VV^*Y \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнениям Гамильтона (4.3 a)–(4.3 d) для гамильтоновой формы (4.5), т. е.

$$\gamma^i = \dot{\partial}^i\mathscr{H}_V = \partial^i\mathscr{H}, \tag{4.6 a}$$

$$\gamma_i = -\dot{\partial}_i\mathscr{H}_V = -\partial_i\mathscr{H}, \tag{4.6 b}$$

$$\tilde{\gamma}^i = \partial^i\mathscr{H}_V = \partial_V\partial^i\mathscr{H}, \tag{4.6 c}$$

$$\tilde{\gamma}_i = -\partial_i\mathscr{H}_V = -\partial_V\partial_i\mathscr{H}. \tag{4.6 d}$$

□

В частности, если дано разбиение гамильтониана

$$\mathscr{H} = p_i\Gamma^i + \widetilde{\mathscr{H}}_\Gamma \tag{4.7}$$

относительно связности Γ на пространстве событий $Y \to \mathbb{R}$, имеет место соответствующее разбиение гамильтониана

$$\mathscr{H}_V = \dot{p}_i\Gamma^i - \dot{y}^j(-p_i\partial_j\Gamma^i) + \partial_V\widetilde{\mathscr{H}}_\Gamma$$

относительно связности $\tilde{\Gamma}$ (3.15) на фазовом пространстве $V^*Y \to \mathbb{R}$.

Уравнения Гамильтона (4.6 a)–(4.6 b) для гамильтоновой формы H_V (4.5) — это в точности уравнения Гамильтона для гамильтоновой формы H.

Выясним физический смысл уравнений Гамильтона (4.6 c)–(4.6 d). Пусть пространство событий $Y \to \mathbb{R}$ — векторное расслоение. Тогда вертикальное пространство событий в голономных координатах изоморфно прямой сумме

$$VY = Y \underset{\mathbb{R}}{\oplus} Y.$$

Его можно интерпретировать как пространство событий исходной механической системы и ее малых линейных флуктуаций, описываемых суммой

$$y^i + \varepsilon \dot{y}^i,$$

где ε — малый параметр. Соответственно вертикальное фазовое пространство

$$VV^*Y = V^*Y \underset{\mathbb{R}}{\oplus} V^*Y$$

тоже можно интерпретировать как фазовое пространство исходной механической системы и ее малых линейных флуктуаций

$$y^i + \varepsilon \dot{y}^i, \quad p_i + \varepsilon \dot{p}_i.$$

Пусть исходная механическая система описывается гамильтоновой формой H на фазовом пространстве V^*Y. Будем искать ее флуктуации $\dot{r}(t)$, которые являются *полями Якоби*, т. е. если $r(t)$ — решение уравнений Гамильтона для гамильтоновой формы H, то и

$$r(t) + \varepsilon \dot{r}(t)$$

в первом порядке по малому параметру ε тоже является решением этих уравнений Гамильтона. Нетрудно убедиться, что такие поля Якоби подчиняются уравнениям Гамильтона (4.6 c)–(4.6 d) для H_V (4.5). Подставляя в них решение $r(t)$ уравнений Гамильтона (4.6 a)–(4.6 b), получаем систему однородных линейных дифференциальных уравнений для полей Якоби $\dot{r}(t)$. Это действительно уравнения линейных флуктуаций.

Гамильтонову форму H_V (4.5) можно также ввести следующим образом. Рассмотрим вертикальное касательное расслоение VT^*Y к кокасательному расслоению $T^*Y \to \mathbb{R}$, параметризуемое координатами

$$(t, y^i, p_i, p, \dot{y}^i, \dot{p}_i, \dot{p}).$$

Оно наделено канонической формой

$$\Xi_V = \dot{p}dt + \dot{p}_i dy^i - \dot{y}^i dp_i,$$

сохраняющейся при голономных координатных преобразованиях. Можно рассмотреть также каноническую форму

$$\Xi_V + d(\dot{y}^i p_i),$$

так как форма $d(\dot{y}^i p_i^\lambda)$ глобально определена. Следуя Определению 3.3, представим гамильтонову форму H (4.4) в виде индуцированной формы $H = h^*\Xi$, где h — сечение расслоения $T^*Y \to V^*Y$. Тогда

$$H_V = (Vh)^*\Xi_V,$$

где $Vh : VV^*Y \to VT^*Y$ — вертикальный касательный морфизм к h.

Предложение 4.1 можно обобщить следующим образом.

Предложение 4.2. Всякая связность γ на фазовом пространстве $V^*Y \to \mathbb{R}$ продолжается до гамильтоновой связности $V\gamma$ (П.61) на вертикальном фазовом пространстве $VV^*Y \to \mathbb{R}$.

доказательство. Рассмотрим гамильтонову форму

$$H_V = \dot{p}_i(dy^i - \gamma^i dt) - \dot{y}^i(dp_i - \gamma_i dt) = \dot{p}_i dy^i - \dot{y}^i dp_i - (\dot{p}_i\gamma^i - \dot{y}^i\gamma_i)dt.$$

Соответствующая гамильтонова связность на $VV^*Y \to \mathbb{R}$ дается уравнениями Гамильтона (4.3 a)–(4.3 d) и имеет вид

$$\gamma^i = \gamma^i, \quad \gamma_i = \gamma_i, \quad \tilde{\gamma}^i = \dot{p}_j\partial^i\gamma^j - \dot{y}^j\partial^i\gamma_j, \quad \tilde{\gamma}_i = -\dot{p}_j\partial_i\gamma^j + \dot{y}^j\partial_i\gamma_j. \tag{4.8}$$

В частности, легко установить, что если γ — локально гамильтонова связность на фазовом пространстве $V^*Y \to \mathbb{R}$, подчиняющаяся соотношениям (3.13 a)–(3.13 c), то гамильтонова связность (4.8) совпадает со связностью $V\gamma$ (П.61). □

Отсюда следует, что всякое уравнение движения первого порядка (3.32) на фазовом пространстве V^*Y может быть представлено как часть (4.3 a), (4.3 b) уравнений Гамильтона на вертикальном фазовом пространстве. В частности, уравнения движения (3.33) в среде с сопротивлением (см. Замечание 3.4) являются уравнениями Гамильтона (4.3 a), (4.3 b) для гамильтониана

$$\mathscr{H}_V = p\left(\frac{1}{m}\dot{p} + \frac{k}{m}\dot{y}\right)$$

на вертикальном фазовом пространстве.

Аналогично тому, как это сделано для гамильтоновых формализмов, устанавливается связь между лагранжевыми формализмами на конфигурационном и вертикальным конфигурационном пространствами.

Пусть $L = \mathscr{L}dt$ — лагранжиан (2.47) на обычном конфигурационном пространстве J^1Y. Возьмем вертикальный касательный морфизм

$$V\mathscr{L} : J^1Y \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

к функции Лагранжа $\mathscr{L}$ и рассмотрим лагранжиан

$$L_V = (\mathrm{pr}_2 \circ V\mathscr{L})dt = \mathscr{L}_V dt, \tag{4.9}$$
$$\mathscr{L}_V = \partial_V\mathscr{L} = (\dot{y}^i\partial_i + \dot{y}^i_t\partial^t_i)\mathscr{L},$$

на вертикальном конфигурационном пространстве VJ^1Y. Он называется *вертикальным расширением* лагранжиана L. Соответствующие ему уравнения Лагранжа имеют вид

$$(\dot{\partial}_i - d_t\dot{\partial}^t_i)\mathscr{L}_V = 0, \tag{4.10 a}$$
$$(\partial_i - d_t\partial^t_i)\mathscr{L}_V = 0. \tag{4.10 b}$$

Уравнения Лагранжа (4.10 a) являются в точности уравнениями Лагранжа для исходного лагранжиана L. В случае векторного расслоения $Y \to \mathbb{R}$ уравнения Лагранжа (4.10 b), подобно уравнениям Гамильтона (4.6 c)–(4.6 d), могут описывать малые линейные флуктуации исходной системы.

Лагранжиан L_V (4.9) на вертикальном конфигурационном пространстве VJ^1Y определяет отображение Лежандра $\widehat{L}_V$, которое представляет собой вертикальный касательный морфизм к отображению Лежандра $\widehat{L}$:

$$\widehat{L}_V = V\widehat{L} : VJ^1Y \underset{VY}{\to} VV^*Y, \tag{4.11}$$

$$p_i = \dot{\partial}_i^t \mathscr{L}_V = \pi_i, \quad \dot{p}_i = \partial_V \pi_i, \tag{4.12}$$

где, как и раньше, $\pi_i = \partial_i^t \mathscr{L}$.

Аналогично всякая гамильтонова форма H_V (4.5) на вертикальном фазовом пространстве VV^*Y задает гамильтоново отображение $\widehat{H}_V$, которое является вертикальным касательным морфизмом к гамильтонову отображению $\widehat{H}$:

$$\widehat{H}_V = V\widehat{H} : VV^*Y \underset{VY}{\to} VJ^1Y, \tag{4.13}$$

$$y_t^i = \dot{\partial}^i \mathscr{H}_V = \partial^i \mathscr{H}, \quad \dot{y}_t^i = \partial_V \partial^i \mathscr{H}.$$

Предложение 4.3. Если гамильтонова форма H на фазовом пространстве V^*Y ассоциирована с лагранжианом L на конфигурационном пространстве J^1Y, то ее вертикальное расширение H_V (4.5) на вертикальном фазовом пространстве VV^*Y ассоциировано с вертикальным расширением L_V (4.9) лагранжиана L на вертикальном конфигурационном пространстве VJ^1Y.

доказательство. Согласно равенствам (4.11) и (4.13), условие (3.46 a) для H_V принимает вид

$$V\widehat{L} \circ V\widehat{H} \circ V\widehat{L} = V\widehat{L},$$

что непосредственно следует из условия (3.46 a) для H. Условие (3.46 b) для H_V, записанное в координатной форме (3.49), выполняется в силу условия (3.49) для H. □

Из равенств (4.12) следует, что если лагранжиан L на конфигурационном пространстве J^1Y полурегулярный, то таковым является и его вертикальное расширение L_V (4.9) на вертикальном конфигурационном пространстве VJ^1Y. Поэтому Предложение 4.3 может быть переформулировано и для полурегулярных лагранжианов. В частности, для H_V и L_V выполняется соотношение (3.60), если оно выполняется для H и L.

Таким образом, если лагранжева система с лагранжианом L и гамильтонова система с гамильтоновой формой H ассоциированы, то соответствующие системы с флуктуациями — полями Якоби — тоже ассоциированы.

Замечание 4.1. Пусть H_V — гамильтонова форма (4.2) на вертикальном фазовом пространстве VV^*Y. Следуя примеру лагранжиана (3.93), рассмотрим лагранжиан

$$L_H = \dot{p}_i y_t^i - \dot{y}^i p_{ti} - \mathscr{H}_V \tag{4.14}$$

на многообразии струй J^1VV^*Y вертикального фазового пространства $VV^*Y \to \mathbb{R}$. Нетрудно убедиться, что уравнения Лагранжа этого лагранжиана в точности воспроизводят уравнения Гамильтона (4.3 a)–(4.3 d) для гамильтоновой формы H_V. В частности, пусть H — гамильтонова форма на обычном фазовом пространстве V^*Y и $\mathscr{H}_V = \partial_V \mathscr{H}$. В этом случае лагранжиан (4.14) принимает вид

$$L_H = \dot{p}_i(y_t^i - \partial^i \mathscr{H}) - \dot{y}^i(p_{ti} + \partial_i \mathscr{H}).$$

Как легко заметить, он обращается в 0 на решениях уравнений Гамильтона для гамильтоновой формы H, что обуславливает его применение при формулировке механики в терминах функциональных интегралов [36, 37]. □

§ 2. Интуитивная БРСТ механика

Все объекты и операции, вводимые в этом параграфе, носят формальный алгебраический характер. Их геометрическому обоснованию будет посвящен следующий параграф.

Пусть пространство событий $Y \to \mathbb{R}$ является векторным расслоением. Помимо координат $(t, y^i, p_i, \dot{y}^i, \dot{p}_i)$ на вертикальном фазовом пространстве VV^*Y введем еще величины

$$c^i, c_i, \overline{c}^i, \overline{c}_i, \tag{4.15}$$

которые будем считать антикоммутирующими. Следуя физической терминологии, будем именовать их соответственно *духами* и *антидухами*. Пусть c^i и $\overline{c}^i$ имеют те же функции перехода по индексам i, что и координаты $\dot{y}^i$, а c_i и $\overline{c}_i$ — те же функции перехода, что и координаты $\dot{p}_i$ (а также p_i), т. е.

$$c'^i = \frac{\partial y'^i}{\partial y^j}\, c^j, \quad c'_i = \frac{\partial y^j}{\partial y'^i}\, c_j, \quad \overline{c}'^i = \frac{\partial y'^i}{\partial y^j}\, \overline{c}^j, \quad \overline{c}'_i = \frac{\partial y^j}{\partial y'^i}\, \overline{c}_j. \tag{4.16}$$

Всевозможные формальные произведения элементов (4.15) порождают алгебру полиномов над кольцом локальных комплексных функций на VV^*Y. Дополненная единицей, она образует $\mathbb{Z}_2$-градуированное кольцо полиномов $\mathscr{P}(c, \overline{c})$ по антикоммутирующим переменным. Будем считать, что такой полином глобально определен, если он инвариантен при преобразованиях (4.16).

Договоримся упорядочивать, как правило, полином от антикоммутирующих переменных так, чтобы все антидухи $\overline{c}$ располагались слева от духов c.

Введем формальные операторы левых производных

$$\frac{\partial}{\partial c}, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{c}} \tag{4.17}$$

по антикоммутирующим переменным, определяемые как операции понижения степени полинома. Они удовлетворяют следующим условиям.

- Обозначим $\{\phi\}$, $\{\sigma\}$ степени однородных полиномов ϕ и σ. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \overline{c}}(\phi\sigma) = \frac{\partial \phi}{\partial \overline{c}}\,\sigma + (-1)^{\{\phi\}}\phi\,\frac{\partial \sigma}{\partial \overline{c}}, \quad \frac{\partial}{\partial c}(\phi\sigma) = \frac{\partial \phi}{\partial \overline{c}}\,\sigma + (-1)^{\{\phi\}}\phi\,\frac{\partial \sigma}{\partial \overline{c}}.$$

- Производные по антикоммутирующим переменным антикоммутируют, а производные по антикоммутирующим переменным и по обычным координатам коммутируют.

Ради удобства введем общие обозначения q^A для всех переменных механической системы, полагая четность $\{q\} = 0$ для обычных координат и $\{q\} = 1$ для духов и антидухов. Очевидно, что четность однородного полинома по антикоммутирующим переменным равна его степени. Тогда приведенные выше условия на операторы производных запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial q}(\phi\sigma) = \frac{\partial}{\partial q}(\phi)\sigma + (-1)^{\{\phi\}\{q\}}\phi\,\frac{\partial}{\partial q}(\sigma), \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial q^A}\frac{\partial}{\partial q^B} = (-1)^{\{q^A\}\{q^B\}}\frac{\partial}{\partial q^B}\frac{\partial}{\partial q^A}. \tag{4.19}$$

Введем дифференциалы dq как объекты, дуальные производным $\partial/\partial q$, определив свертку

$$\frac{\partial}{\partial q^A} \lrcorner\, dq^B = \delta_A^B \tag{4.20}$$

и четность

$$\{dq\} = \{q\}.$$

Задавая формально операцию внешнего произведения дифференциалов dq по правилу

$$dq \wedge dq' = (-1)^{\{q\}\{q'\}+1} dq' \wedge dq, \tag{4.21}$$

расширим кольцо полиномов $\mathscr{P}(c, \bar{c})$ до $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$-биградуированного кольца полиномов $\mathscr{P}(c, \bar{c}, dq)$. Последнее определяется как алгебра внешних форм по переменным q с коэффициентами из кольца $\mathscr{P}(c, \bar{c})$, где произведение qdq' удовлетворяет правилу перестановки

$$qdq' = (-1)^{\{q\}\{q'\}}(dq')q.$$

Как обычно, обозначим $|\phi|$ степень такой внешней формы. Тогда перестановочные соотношения (4.21) запишутся в общем виде

$$\phi \wedge \sigma = (-1)^{|\phi||\sigma|+\{\phi\}\{\sigma\}} \sigma \wedge \phi, \quad \phi, \sigma \in \mathscr{P}(c, \bar{c}, dq). \tag{4.22}$$

С учетом этого правила операция свертки производных $\partial/\partial q$ с формами из $\mathscr{P}(c, \bar{c}, dq)$ определяется, наряду с (4.20), соотношением

$$\frac{\partial}{\partial q} \lrcorner\, (\phi \wedge \sigma) = \left(\frac{\partial}{\partial q} \lrcorner\, \phi\right) \wedge \sigma + (-1)^{|\phi|+\{\phi\}\{q\}} \phi \wedge \left(\frac{\partial}{\partial q} \lrcorner\, \sigma\right), \quad \phi, \sigma \in \mathscr{P}(c, \bar{c}, dq). \tag{4.23}$$

Введем, наконец, оператор внешнего дифференцирования d на кольце $\mathscr{P}(c, \bar{c}, dq)$. Он определяется в виде

$$d\phi = \sum_A dq^A \frac{\partial}{\partial q^A}(\phi), \tag{4.24}$$

где операция взятия производной

$$\frac{\partial}{\partial q}(\phi), \quad \phi \in \mathscr{P}(c, \bar{c}, dq),$$

удовлетворяет таким же правилам (4.18) и (4.19), как и на элементах $\mathscr{P}(c, \bar{c})$, при условии, что

$$\frac{\partial}{\partial q}(dq') = 0.$$

Из правил перестановки (4.19) и (4.21) следует, что внешний дифференциал (4.24) обладает гомологическим свойством

$$d \circ d = 0.$$

Нетрудно убедиться, что при $c = 0$, $\bar{c} = 0$ алгебра $\mathscr{P}(c, \bar{c}, dq)$ сводится к алгебре внешних форм от коммутирующих переменных, а операции (4.22)–(4.24) — к обычным операциям на этой алгебре.

Основным критерием БРСТ расширения механики является инвариантность относительно *БРСТ и анти-БРСТ преобразований* с генераторами

$$\vartheta = c^i \frac{\partial}{\partial y^i} + c_i \frac{\partial}{\partial p_i} + i\dot{y}^i \frac{\partial}{\partial \overline{c}^i} + i\dot{p}_i \frac{\partial}{\partial \overline{c}_i}, \tag{4.25}$$

$$\overline{\vartheta} = \overline{c}^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \overline{c}_i \frac{\partial}{\partial p_i} - i\dot{y}^i \frac{\partial}{\partial c^i} - i\dot{p}_i \frac{\partial}{\partial c_i} \tag{4.26}$$

[36, 37]. Генераторы (4.25)–(4.26) являются, как нетрудно убедиться, нильпотентными:

$$\vartheta\vartheta = 0, \quad \overline{\vartheta}\,\overline{\vartheta} = 0, \quad \overline{\vartheta}\vartheta + \vartheta\overline{\vartheta} = 0. \tag{4.27}$$

Эти соотношения следует понимать в том смысле, что для произвольной функции $f(q)$ выполняются равенства

$$\vartheta \rfloor d(\vartheta \rfloor df) = 0,$$
$$\overline{\vartheta} \rfloor d(\overline{\vartheta} \rfloor df) = 0,$$
$$\overline{\vartheta} \rfloor d(\vartheta \rfloor df) + \vartheta \rfloor d(\overline{\vartheta} \rfloor df) = 0.$$

Замечание 4.2. Свойство нильпотентности (4.27) является ключевым в БРСТ моделях [38]. Физические состояния определяются как гомологические классы генераторов БРСТ и анти-БРСТ преобразований. □

Следуя указанному выше критерию, возьмем для произвольной гамильтоновой формы H (4.4) на фазовом пространстве V^*Y ее вертикальное расширение H_V (4.5). Посмотрим, какую 1-форму H_C к ней надо добавить, чтобы сумма

$$H_S = H_V + H_C$$

была бы БРСТ инвариантна, т. е. ее производная Ли вдоль векторного поля ϑ (4.25) была бы равна 0:

$$\mathbf{L}_\vartheta(H_V + H_C) = \vartheta \rfloor d(H_V + H_C) + d\Big(\vartheta \rfloor (H_V + H_C)\Big) = 0. \tag{4.28}$$

Вычисления приводят к следующему результату:

$$H_S = \dot{p}_i dy^i - \dot{y}^i dp_i + i(\overline{c}_i dc^i - \overline{c}^i dc_i) - \partial_V \mathscr{H}\, dt - \mathscr{H}_C dt, \tag{4.29}$$
$$\mathscr{H}_C = i(\overline{c}_j \partial^j + \overline{c}^j \partial_j)(c_j \partial^j + c^j \partial_j)\mathscr{H}.$$

Назовем форму H_S *БРСТ расширением* гамильтоновой формы H. Нетрудно проверить, что гамильтонова форма (4.29) инвариантна также относительно анти-БРСТ преобразований, т. е. удовлетворяет условию типа (4.28) для векторного поля $\overline{\vartheta}$ (4.26).

В частности, если дано разбиение гамильтониана

$$\mathscr{H} = p_i \Gamma^i{}_j y^j + \widetilde{\mathscr{H}}$$

относительно линейной связности Γ на пространстве событий $Y \to \mathbb{R}$, имеет место соответствующее разбиение БРСТ расширенного гамильтониана

$$\mathscr{H}_S = \dot{p}_i \Gamma^i{}_j y^j - \dot{y}^j(-p_i \Gamma^i{}_j) + \overline{c}_i \Gamma^i{}_j c^j - \overline{c}^j(-\Gamma^i{}_j c_i) + \partial_V \widetilde{\mathscr{H}} + i(\overline{c}_j \partial^j + \overline{c}^j \partial_j)(c_j \partial^j + c^j \partial_j)\widetilde{\mathscr{H}}$$

относительно связности $\widetilde{\Gamma}$ (3.15) на фазовом пространстве $V^*Y \to \mathbb{R}$. Это разбиение показывает, что форма (4.29) глобально определена, а связность задана на величинах (c^i, c_i) как на элементах расслоения VV^*Y.

Введем также *БРСТ расширение* канонической 3-формы Ω (3.8). Оно получается из канонической 3-формы Ω_V (4.1) и имеет вид

$$\Omega_S = \left[d\dot{p}_i \wedge dy^i + dp_i \wedge d\dot{y}^i + i\left(d\overline{c}_i \wedge dc^i - d\overline{c}^i \wedge dc_i\right)\right] \wedge dt. \tag{4.30}$$

Форма (4.30) задана глобально и по определению БРСТ инвариантна. Найдем гамильтоново векторное поле

$$\gamma = \partial_t + \gamma_i\partial^i + \gamma^i\partial_i + \tilde{\gamma}_i\dot{\partial}^i + \tilde{\gamma}^i\dot{\partial}_i + \overline{g}_i\frac{\partial}{\partial\overline{c}_i} + \overline{g}^i\frac{\partial}{\partial\overline{c}^i} + g_i\frac{\partial}{\partial c_i} + g^i\frac{\partial}{\partial c^i}$$

для гамильтоновой формы H_S (4.29) относительно 3-формы Ω_S. Оно удовлетворяет уравнениям Гамильтона

$$\gamma^i = y^i_t = \partial^i\mathscr{H}, \tag{4.31 a}$$
$$\gamma_i = p_{ti} = -\partial_i\mathscr{H}, \tag{4.31 b}$$
$$\tilde{\gamma}^i = \dot{y}^i_t = \partial^i\mathscr{H}_S, \tag{4.31 c}$$
$$\tilde{\gamma}_i = \dot{p}_{ti} = -\partial_i\mathscr{H}_S, \tag{4.31 d}$$
$$\overline{g}^i = \overline{c}^i_t = (\overline{c}_j\partial^j + \overline{c}^j\partial_j)\partial^i\mathscr{H}, \tag{4.31 e}$$
$$\overline{g}_i = \overline{c}_{ti} = -(\overline{c}_j\partial^j + \overline{c}^j\partial_j)\partial_i\mathscr{H}, \tag{4.31 f}$$
$$g^i = c^i_t = (c_j\partial^j + c^j\partial_j)\partial^i\mathscr{H}, \tag{4.31 g}$$
$$g_i = c_{ti} = -(c_j\partial^j + c^j\partial_j)\partial_i\mathscr{H} \tag{4.31 h}$$

для гамильтоновой формы H_S.

Уравнения (4.31 a)–(4.31 b), как легко заметить, являются уравнениями Гамильтона для исходной гамильтоновой формы H.

Проясним смысл остальных уравнений. Пусть $q(t)$ — решение уравнений Гамильтона (4.31 a)–(4.31 h), где $y^i(t), p_i(t)$ — решение уравнений Гамильтона (4.31 a)–(4.31 b). Тогда

$$y^i(t) + \overline{\varepsilon}\varepsilon\dot{y}^i(t) + \overline{\varepsilon}c^i(t) + \varepsilon\overline{c}^i(t),$$
$$p_i(t) + \overline{\varepsilon}\varepsilon\dot{p}_i(t) + \overline{\varepsilon}c_i(t) + \varepsilon\overline{c}_i(t)$$

является решением уравнений Гамильтона для гамильтониана H, обобщенных на случай четных, но не обязательно вещественных переменных y^i, p_i. Необходимость такого обобщения, казалось бы, прямо следует из уравнений (4.31 c)–(4.31 d), которые допускают вещественные решения $\dot{y}^i(t), \dot{p}_i(t)$ только при нулевых духовых решениях уравнений (4.31 e)–(4.31 h). Однако делать этого не следует. В механике, как и в теории поля, лагранжианы и гамильтонианы, выражаемые через антикоммутирующие переменные, являются атрибутами квантовой, а не классической теории. Для них не выписываются уравнения движения. Например, в классической теории поля лагранжиан дираковских фермионных полей является чисто вещественным, тогда как в квантовой теории он фигурирует в производящем функционале как составленный из антикоммутирующих величин.

Замечание 4.3. В заключение приведем еще одну конструкцию, которая является ключевой для приложений БРСТ формализма. Как уже отмечалось в Замечании 3.3, при квантовании в системе отсчета Г функция Гамильтона $\widetilde{\mathscr{H}}_\Gamma$ классической системы, взятая из разбиения (3.21), превращается в гамильтониан квантовой системы.

Пусть $\widetilde{\mathscr{H}}$ — некоторая функция Гамильтона. Рассмотрим операторы

$$\mathscr{H}_\beta = e^{\beta\widetilde{\mathscr{H}}}\vartheta \lrcorner de^{-\beta\widetilde{\mathscr{H}}},$$
$$\overline{\mathscr{H}}_\beta = e^{-\beta\widetilde{\mathscr{H}}}\overline{\vartheta} \lrcorner de^{\beta\widetilde{\mathscr{H}}},$$

действующие на функции $f(q)$ по закону

$$\vartheta(f) = \vartheta \lrcorner df, \quad \widetilde{\mathscr{H}}(f) = \widetilde{\mathscr{H}} f.$$

В результате простых вычислений находим

$$\mathscr{H}_\beta = \vartheta - \beta(c_j\partial^j + c^j\partial_j)\widetilde{\mathscr{H}},$$
$$\overline{\mathscr{H}}_\beta = \overline{\vartheta} + \beta(\bar{c}_j\partial^j + \bar{c}^j\partial_j)\widetilde{\mathscr{H}}.$$

Легко убедиться, что операторы $\mathscr{H}_\beta$ и $\overline{\mathscr{H}}_\beta$ являются нильпотентными:

$$\mathscr{H}_\beta \circ \mathscr{H}_\beta = 0, \quad \overline{\mathscr{H}}_\beta \circ \overline{\mathscr{H}}_\beta = 0. \tag{4.32}$$

Пусть $\widetilde{\mathscr{H}}_S$ — БРСТ расширение функции Гамильтона $\widetilde{\mathscr{H}}$, рассматриваемое как оператор на функциях $f(q)$. Имеют место соотношения

$$\mathscr{H}_\beta \circ \widetilde{\mathscr{H}}_S - \widetilde{\mathscr{H}}_S \circ \mathscr{H}_\beta = 0,$$
$$\overline{\mathscr{H}}_\beta \circ \widetilde{\mathscr{H}}_S - \widetilde{\mathscr{H}}_S \circ \overline{\mathscr{H}}_\beta = 0,$$
$$i\beta\widetilde{\mathscr{H}}_S = \overline{\mathscr{H}}_\beta \circ \mathscr{H}_\beta + \mathscr{H}_\beta \circ \overline{\mathscr{H}}_\beta.$$

Эти соотношения вместе с (4.32) определяют структуру супералгебры Ли на операторах $\mathscr{H}_\beta$, $\overline{\mathscr{H}}_\beta$, $\widetilde{\mathscr{H}}_S$ [26]. □

§ 3. Механика на градуированных многообразиях

Общий путь построения БРСТ механики — это сформулировать механику на супермногообразиях [13, 25, 57]. Однако проведенное выше на интуитивном уровне рассмотрение показывает, что можно существенно упростить задачу.

Во-первых, мы строим не супермеханику вообще, а БРСТ расширение обычной механики, исходя из условия инвариантности относительно БРСТ и анти-БРСТ преобразований. Генераторы этих преобразований (4.25)–(4.26) могут быть глобально определены, если функции перехода по индексам i для духов c^i касательны к функциям перехода для координат y^i. Чтобы удовлетворить этому условию, мы предположили, что пространство событий $Y \to \mathbb{R}$ является векторным расслоением. Это означает, что все функции перехода между антикоммутирующими переменными являются линейными с коэффициентами, зависящими только от t.

Во-вторых, БРСТ расширение гамильтонианов не более чем полиномиально по духовым переменным. Это сужает класс рассматриваемых суперфункций и упрощает операции с ними.

Напомним некоторые основные понятия.

Векторное пространство Q называется $\mathbb{Z}_2$-*градуированным*, или просто *градуированным*, если задано разложение

$$Q = Q_0 \oplus Q_1,$$

где Q_0 называется *четным*, а Q_1 — *нечетным сектором* градуированного пространства. Элемент градуированного векторного пространства именуется *однородным*, если он принадлежит только Q_0 или Q_1. Как и раньше, будем обозначать $\{v\}$ степень однородного элемента $v \in Q$. Говорят, что градуированное векторное пространство Q является (m, n)-мерным, если $\dim Q_0 = m$, $\dim Q_1 = n$.

Градуированной коммутативной алгеброй B называется алгебра, являющаяся градуированным пространством $B = B_0 \oplus B_1$ и такая, что выполняется условие *градуированной коммутативности*:

$$a_r a_s = (-1)^{rs} a_s a_r \in B_{r+s}, \quad a_r \in B_r, \quad a_s \in B_s, \quad s, r = 0, 1.$$

Градуированной коммутативной банаховой алгеброй B называется градуированная коммутативная алгебра, если она банахова и удовлетворяет условию

$$\|a_0 + a_1\| = \|a_0\| + \|a_1\|.$$

Пусть V — векторное пространство (в общем случае бесконечномерное) и

$$\Lambda = \wedge V = \mathbb{R} \bigoplus_k \overset{k}{\wedge} V \tag{4.33}$$

— его *внешняя алгебра*. Это $\mathbb{Z}$-градуированная коммутативная алгебра, которая наделяется также $\mathbb{Z}_2$-градуировкой так, что

$$\Lambda_0 = \mathbb{R} \bigoplus_m \overset{2m}{\wedge} V,$$

$$\Lambda_1 = \bigoplus_m \overset{2m+1}{\wedge} V.$$

Она называется *алгеброй Грассмана*. В некотором фиксированном базисе $\{c^i, i \in I\}$ векторного пространства V ее элементы имеют вид

$$a = \sum_k \sum_{(i_1 \cdots i_k)} a_{i_1 \cdots i_k} c^{i_1} \cdots c^{i_k}, \tag{4.34}$$

где сумма берется по всем наборам индексов $(i_1 \cdots i_k)$, не получаемым друг из друга перестановкой.

Для простоты мы не будем писать значок внешнего произведения для элементов алгебры Грассмана. Алгебра Грассмана становится градуированной коммутативной банаховой алгеброй, если для всякого ее элемента (4.34) задать норму

$$\|a\| = \sum_k \sum_{(i_1 \cdots i_k)} |a_{i_1 \cdots i_k}|.$$

Заметим, что встречается также другое определение банаховой алгебры Грассмана [40], которое эквивалентно предыдущему только в случае бесконечномерного пространства V [28].

Пусть Q — градуированное векторное пространство и B — градуированная коммутативная алгебра с единицей. Если Q является двусторонним B-модулем таким, что

$$a_s v_r = v_r a_s \in Q_{s+r},$$

он называется *градуированным B-модулем*. Понятно, что всякий градуированный B-модуль является также B_0-модулем.

Пример 4.4. Всякое градуированное векторное пространство Q превращается в градуированный B-модуль взятием его *градуированной B-оболочки*

$$BQ = BQ_0 \oplus BQ_1 = (B_0 \otimes Q_0 \oplus B_1 \otimes Q_1) \oplus (B_1 \otimes Q_0 \oplus B_0 \otimes Q_1).$$

Градуированная оболочка

$$B^{m+n} = (B_0^m \oplus B_1^n) \oplus (B_0^n \oplus B_1^m)$$

(m, n)-мерного градуированного векторного пространства $Q^{m,n}$ называется *векторным суперпространством*. Его B_0-подмодулем является

$$B^{m,n} = B_0^m \oplus B_1^n,$$

который тоже именуют *векторным суперпространством*. Если алгебра B банахова, суперпространство B^{m+n} превращается в банахово посредством нормы

$$\|a_i c^i\| = \sum_i \|a_i\|, \quad a_i \in B,$$

где $\{c^i\}$ — фиксированный базис $Q^{m,n}$. □

Главным математическим объектом теории супермногообразий является пучок $\mathscr{B}$ градуированных коммутативных алгебр на многообразии Z. Это топологическое расслоение над Z, слоями которого являются градуированные коммутативные алгебры B_z, наделенные дискретной топологией. Обозначим $(Z, \mathscr{B}(U))$ его канонический предпучок, где $\mathscr{B}(U)$ — градуированная коммутативная алгебра сечений пучка $\mathscr{B}$ на открытом подмножестве $U \subset Z$ относительно поточечных операций. Если пучок $\mathscr{B}$ удовлетворяет ряду условий — так называемым аксиомам Ротштейна, — он называется *R-супермногообразием* [15, 28, 62]. Это понятие включает в себя в качестве вариантов градуированные многообразия Березина, супермногообразия по A. Rogers и бесконечномерные супермногообразия, описанные A. Jadczyk и K. Pilch.

Мы ограничимся следующим типом R-супермногообразий [25]. Пусть $E \to Z$ — векторное расслоение с типичным слоем V и $E^* \to Z$ — дуальное к нему расслоение. Рассмотрим *внешнее расслоение*

$$\wedge E^* = \mathbb{R} \underset{Z}{\oplus} \left(\underset{k}{\oplus} \overset{k}{\underset{Z}{\wedge}} E^* \right) \tag{4.35}$$

над Z, получаемой из E. Его типичным слоем является алгебра Грассмана Λ (4.33). Сечения внешнего расслоения образуют пучок алгебр Грассмана $\mathscr{B}$ над многообразием Z, который относится к классу *градуированных многообразий*. Его сечения — сечения

внешнего расслоения (4.35) — называются *суперфункциями*. В послойных координатах (z^λ, y^i) относительно базисов $\{c_j\}$ слоев расслоении $E \to Z$ суперфункции имеют вид

$$f = \sum_k \sum_{(i_1 \cdots i_k)} a_{i_1 \cdots i_k} c^{i_1} \cdots c^{i_k}, \tag{4.36}$$

где $\{c^i\}$ — дуальные базисы слоев E^*.

Рассмотрим пучок $\mathrm{der}\,\mathscr{B}$ градуированных дифференцирований пучка $\mathscr{B}$. Пусть U — открытое подмножество многообразия Z и $\mathscr{B}(U)$ — ограничение пучка грассмановых алгебр $\mathscr{B}$ на U. *Градуированным дифференцированием* пучка $\mathscr{B}(U)$ называется его эндоморфизм такой, что

$$\begin{aligned} &\vartheta : \mathscr{B}(U) \to \mathscr{B}(U), \\ &\vartheta(ab) = \vartheta(a)b + (-1)^{\{\vartheta\}\{a\}} a\vartheta(b), \end{aligned} \tag{4.37}$$

для однородных элементов ϑ и $a, b \in \mathscr{B}(U)$. Градуированные дифференцирования $\mathscr{B}(U)$ образуют, очевидно, $\mathscr{B}$-модуль $\mathrm{der}\,\mathscr{B}(U)$, а предпучок таких $\mathscr{B}$-модулей порождает пучок $\mathrm{der}\,\mathscr{B}$. Можно показать, что он изоморфен пучку сечений расслоения

$$TE \underset{E}{\otimes} \wedge E \to Z. \tag{4.38}$$

Его элементы могут трактоваться как Λ-зависимые векторные поля на расслоении E, т. е. их коэффициентами являются сечения внешнего расслоения $\wedge E \to Z$. Назовем их *векторными суперполями*. Они имеют вид

$$\vartheta = a^\lambda \frac{\partial}{\partial z^\lambda} + a^i \frac{\partial}{\partial c^i}, \tag{4.39}$$

где a^λ, a^i — суперфункции (4.36), а

$$\frac{\partial}{\partial c^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}$$

— элементы голономных базисов на TE. С учетом разбиения $VE \cong E \times E$ (П.5) они могут быть отождествлены с базисными элементами c_i в расслоении E. Тогда действие операторов градуированного дифференцирования $\partial/\partial c^i$ на суперфункции (4.36) аналогично свертке векторов и мультиковекторов по формуле (П.19). Согласно правилу (4.37), они имеют четность 1. Операторы градуированного дифференцирования $\partial/\partial z^\lambda$ действуют на суперфункции (4.36) как обычные производные и имеют четность 0.

Дуальным к пучку градуированных дифференцирований $\mathrm{der}\,\mathscr{B}$ является пучок $\mathrm{der}^*\mathscr{B}$, порождаемый линейными морфизмами

$$\mathrm{der}\,\mathscr{B}|_U \to \mathscr{B}(U). \tag{4.40}$$

Это пучок сечений расслоения

$$T^*E \underset{E}{\otimes} \wedge E \to Z.$$

Его элементы имеют вид

$$\phi = a_\lambda dz^\lambda + a_i dc^i, \tag{4.41}$$

где a_λ, a_i — суперфункции (4.36), а $dc^i = dy^i$ — элементы голономных базисов слоев T^*E. Их можно рассматривать как Λ-зависимые 1-формы на расслоении E, а морфизмы (4.40) — как свертку векторных полей (4.39) и 1-форм (4.41).

Определена операция внешнего дифференцирования суперфункций:

$$d : \mathscr{B} \to \mathrm{der}^* \mathscr{B},$$
$$df(\vartheta) = (-1)^{\{f\}\{\vartheta\}}\vartheta(f) = (-1)^{\{f\}\{\vartheta\}}\vartheta \rfloor df.$$

Она распространяется на всю внешнюю алгебру Λ-зависимых форм на E, которые называются *внешними суперформами* и представляются сечениями расслоения

$$\bigwedge T^*E \underset{E}{\otimes} \bigwedge E \to Z, \tag{4.42}$$

где $\bigwedge T^*E$ — внешнее расслоение, получаемое из T^*E.

Векторные суперполя как сечения расслоения (4.38) и внешние суперформы как сечения расслоения (4.42) являются теми математическими объектами, которые мы рассматривали в предыдущем параграфе как формальные векторные поля и формальные формы от антикоммутирующих переменных. Операции с ними подчиняются правилам (4.18)–(4.24).

При этом описанное выше БРСТ расширение гамильтоновой механики получается в терминах векторных суперполей и суперфункций, если выбрать в качестве многообразия Z вертикальное фазовое пространство VV^*Y, а в качестве расслоения E — вертикальное касательное расслоение к расслоению $VV^*Y \to \mathbb{R}$ и взять комплексифицированную алгебру Грассмана.

Релятивистская механика

Особенностью нерелятивистской механики, как уже отмечалось, является то, что проекция пространства событий $Y \to \mathbb{R}$, а вслед за ним фазового и конфигурационного пространств на ось времени $\mathbb{R}$ изначально фиксирована. Это означает, что преобразования временно́й координаты $t \to t'$, зависящие от других координат механической системы, в нерелятивистской механике не рассматриваются. Мы покажем, что отмена этого ограничения сама по себе, без апелляции к каким-либо физическим принципам, ведет к общей формулировке релятивистской механики, частным случаем которой для систем, параметризуемых декартовыми координатами, становится специальная теория относительности.

Ключевым является тот факт, что для построения конфигурационного пространства системы, когда расслоение $Y \to \mathbb{R}$ пространства событий не фиксировано, мы не можем использовать математический аппарат струй сечений расслоений. Его обобщает формализм струй подмногообразий [4, 33].

Определение 5.1. Пусть Z — многообразие размерности $m+n$. *Многообразие $J^1_n Z$ струй первого порядка n-мерных подмногообразий многообразия Z* является объединением

$$J^1_n Z = \bigcup_{z \in Z} [S]^1_z$$

классов эквивалентности $[S]^1_z$ вложенных n-мерных подмногообразий Z, которые проходят через точку $z \in Z$ и касаются друг друга в z. Имеет место естественная проекция $J^1_n Z \to Z$. □

Множество струй $J^1_n Z$ наделяется структурой многообразия следующим образом.

Пусть $Y \to X$ — $(m+n)$-расслоение над n-мерной базой X и Φ — вложение расслоения Y в многообразие Z. Тогда имеет место естественное вложение многообразия струй $J^1 Y$ сечений расслоения $Y \to X$ в множество $J^1_n Z$:

$$J^1\Phi : J^1 Y \to J^1_n Z, \tag{5.1}$$
$$j^1_x s \mapsto [S]^1_{\Phi(s(x))}, \quad S = \mathrm{Im}(\Phi \circ s),$$

где s — сечения расслоения $Y \to X$.

Предложение 5.2. Вложение (5.1) задает карту на многообразии $J^1_n Z$. Такие карты покрывают все множество $J^1_n Z$, и функции перехода между ними дифференцируемы. Они наделяют множество $J^1_n Z$ структурой конечномерного многообразия.

доказательство. Доказательство основывается на том факте, что для всякого подмногообразия $S \subset Z$, принадлежащего струе $[S]^1_z$, существует окрестность U_z точки z и

цилиндрическая окрестность U_S пересечения $U_z \cap S$ такие, что имеет место расслоение

$$U_S \to U_z \cap S.$$

Это означает, что всякая струя $[S]^1_z$ принадлежит карте упомянутого выше вида. □

В дальнейшем мы будем использовать следующую систему координат на многообразии струй $J^1_n Z$ подмногообразий многообразия Z.

Пусть многообразие Z имеет координатный атлас

$$(z^A), \quad A = 1, \ldots, n+m. \tag{5.2}$$

По определению $J^0_n Z$ — многообразие, диффеоморфное Z. Однако, в отличие от Z, зададим на $J^0_n Z$ координатный атлас, заменив каждую координатную карту $(U; z^A)$ на Z

$$\binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

координатными картами на том же открытом подмножестве U, соответствующими различным разбиениям набора $(z^1 \cdots z^A)$ на наборы из n и m координат. Обозначим эти координаты

$$(x^\lambda, y^i), \quad \lambda = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{5.3}$$

Функции перехода между координатными картами (5.3) на $J^0_n Z$, являющимися разбиением одной и той же координатной карты (5.2) на Z, сводятся просто к перестановкам координат x^λ и y^i. Функции перехода между произвольными координатными картами (5.3) на многообразии $J^0_n Z$ имеют вид

$$\begin{aligned} \widetilde{x}^\lambda &= \widetilde{g}^\lambda(x^\mu, y^j), \quad \widetilde{y}^i = \widetilde{f}^i(x^\mu, y^j), \\ x^\lambda &= g^\lambda(\widetilde{x}^\mu, \widetilde{y}^j), \quad y^i = f^i(\widetilde{x}^\mu, \widetilde{y}^j). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Имея координатный атлас (5.3) на многообразии $J^0_n Z$, введем на многообразии струй $J^1_n Z$ координаты

$$(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda), \quad \lambda = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{5.5}$$

Замечание 5.1. Если $S \subset Z$ является вложенным подмногообразием, которое принадлежит струе $[S]^1_z$, то существует открытая окрестность U_z точки $z \in Z$ и система координат (x^λ, y^i) (5.3) на U_z такие, что $S \cap U_z$ задается уравнением

$$y^i = S^i(x^\lambda)$$

и

$$(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda)([S]^1_z) = \left(x^\lambda(z), S^i(x^\mu(z)), \partial_\lambda S^i(x^\mu(z))\right).$$

□

Используя операторы полных производных

$$d_\lambda = \partial_\lambda + y^i_\lambda \partial^i,$$

функции перехода между координатами (5.5) при преобразованиях координат (5.4) можно записать в следующем виде. Пусть даны координатные преобразования (5.4). Легко установить, что

$$d_{\widetilde{x}^\lambda} = \left[d_{\widetilde{x}^\lambda} g^\alpha(\widetilde{x}^\lambda, \widetilde{y}^i)\right] d_{x^\alpha}. \tag{5.6}$$

Тогда получаем

$$\widetilde{y}^i_\lambda = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^\lambda} + \widetilde{y}^p_\lambda \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^p}\right) g^\alpha(\widetilde{x}^\lambda, \widetilde{y}^i)\right] \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + y^j_\alpha \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \widetilde{f}^i(x^\mu, y^j). \tag{5.7}$$

Нетрудно заметить, что координатные преобразования (П.29) являются частным случаем координатных преобразований (5.7), когда функции перехода g^α (5.4) не зависят от координат $\widetilde{y}^i$. В то же время, в сравнении с (П.29), преобразования координат (5.7) не являются аффинными. Это означает, что расслоение струй $J^1_n Z \to Z$ не является аффинным расслоением. Выясним характер этого расслоения.

Имеет место взаимно однозначное соответствие между струями $[S]^1_z$ в точке $z \in Z$ и n-мерными векторными подпространствами касательного пространства $T_z Z$:

$$[S]^1_z \mapsto \dot{x}^\lambda(\partial_\lambda + y^i_\lambda([S]^1_z)\partial_i). \tag{5.8}$$

Расслоение $J^1_n Z \to Z$ имеет структурную группу

$$GL(n, m; \mathbb{R}) \subset GL(m+n, \mathbb{R})$$

линейных преобразований векторного пространства $\mathbb{R}^{m+n}$, которые сохраняют его векторное подпространство $\mathbb{R}^n$. Типичным слоем этого расслоения является многообразие Грассмана

$$\mathbb{R}G(m+n, n) = GL(n+m; \mathbb{R})/GL(n, m; \mathbb{R})$$

n-мерных векторных подпространств векторного пространства $\mathbb{R}^{m+n}$. В частности, если $n = 1$, координаты y^i_0 на $J^1_1 Z \to Z$ с функциями перехода (5.7) — это в точности стандартные координаты на проективном пространстве $\mathbb{R}P^m$.

Пример 5.2. Пусть $Y \to X$ — $(m+n)$-мерное расслоение над n-мерной базой X и J^1Y — многообразие струй первого порядка его сечений. Пусть $J^1_n Y$ — многообразие струй первого порядка n-мерных подмногообразий Y. Тогда образ вложения $J^1Y \hookrightarrow J^1_n Y$ (5.1) является аффинным подрасслоением расслоения $J^1_n Y \to Y$. Его образ в точке $y \in Y$ состоит из n-мерных векторных подпространств касательных пространств $T_y Y$, чьи пересечения с вертикальным касательным подпространством сводятся к точке 0. □

Замечание 5.3. Обобщая понятие связности на расслоении, можно рассмотреть глобальные сечения расслоения $J^1_n Z \to Z$, трактуя их как своего рода *пресвязности* на многообразии Z [51]. Действительно, согласно известной теореме, если такая пресвязность Γ существует, ее образ $\Gamma(Z)$ в касательном расслоении $TZ \to Z$ при отображении $J^1_n Z \to TZ$ (5.8) является векторным подрасслоением со структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$. Фактор $TZ/\Gamma(Z)$ — это также векторное подрасслоение со структурной группой $GL(m, \mathbb{R})$. В результате имеет место расщепление

$$TZ = \Gamma(Z) \oplus TZ/G(Z),$$

которое можно трактовать как горизонтальное расщепление касательного расслоения TZ, определяемое связностью Γ. Однако следует подчеркнуть, что, поскольку $J^1_n Z \to Z$

не является аффинным расслоением, пресвязности, в отличие от связностей на расслоениях, не образуют аффинного пространства и вообще существуют не на всяком многообразии Z. □

Обратимся теперь к механике, когда пространством событий является многообразие Z, проекция которого на ось времени $\mathbb{R}$ не фиксирована или вообще не определена.

Чтобы построить конфигурационное пространство такой системы, используем приведенный выше формализм струй подмногообразий в случае 1-мерных подмногообразий.

Пусть пространство событий Z — $(m+1)$-мерное многообразие. Введем на нем координатный атлас (5.3) с функциями перехода (5.4):

$$(z^0, z^i), \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$z^0 \to \tilde{z}^0(z^0, z^j), \quad z^i \to \tilde{z}^i(z^0, z^j). \tag{5.9}$$

Координаты z^0 в различных координатных картах на Z играют роль времени. При заданной координатной карте $(U; z^0, z^i)$ в области ее определения $U \subset Z$ задано расслоение

$$U \ni (z^0, z^i) \mapsto z^0 \in () \subset \mathbb{R},$$

которое можно рассматривать как пространство событий некоторой локальной нерелятивистской механической системы.

В качестве конфигурационного пространства системы выберем многообразие струй первого порядка $J^1_1 Z$ одномерных подмногообразий пространства событий Z. Оно наделено координатами (z^0, z^i, z^i_0) (5.5). При этом координаты z^i_0 можно интерпретировать как *нерелятивистскую скорость* относительно локальной системы отсчета — локальной пресвязности Γ, для которой координаты (z^0, z^i) являются сопутствующими, т. е. ее компоненты $\Gamma^i = z^i_0 \circ \Gamma$ равны нулю. Подобно системам отсчета в нерелятивистской механике, всякую локальную пресвязность Γ можно интерпретировать как локальную нерелятивистскую систему отсчета. Недостаток таких систем отсчета, однако, состоит в том, что, в отличие от нерелятивистской механики, при преобразованиях координат, поскольку закон преобразований $z^i_0 \to z'^i_0$ и $\Gamma^i \to \Gamma'^i$ не является с необходимостью аффинным, относительные скорости $z^i_0 - \Gamma^i$ не выражаются через относительные скорости $z^i_0 - \Gamma^i$.

Найдем упомянутый выше закон преобразований координат z^i_0. Пусть даны координатные преобразования (5.9). Полная производная (5.6) имеет вид

$$d_{\tilde{z}^0} = d_{\tilde{z}^0}(z^0) d_{z^0} = \left(\frac{\partial z^0}{\partial \tilde{z}^0} + \tilde{z}^k_0 \frac{\partial z^0}{\partial \tilde{z}^k} \right) d_{z^0}.$$

Тогда в качестве частного случая выражения (5.7) получаем уравнение

$$\tilde{z}^i_0 = d_{\tilde{z}^0}(z^0) d_{z^0}(\tilde{z}^i) = \left(\frac{\partial z^0}{\partial \tilde{z}^0} + \tilde{z}^k_0 \frac{\partial z^0}{\partial \tilde{z}^k} \right) \left(\frac{\partial \tilde{z}^i}{\partial z^0} + z^j_0 \frac{\partial \tilde{z}^i}{\partial z^j} \right).$$

Его решением является

$$\tilde{z}^i_0 = \left(\frac{\partial \tilde{z}^i}{\partial z^0} + z^j_0 \frac{\partial \tilde{z}^i}{\partial z^j} \right) \Big/ \left(\frac{\partial \tilde{z}^0}{\partial z^0} + z^k_0 \frac{\partial \tilde{z}^0}{\partial z^k} \right). \tag{5.10}$$

Этот закон преобразования нерелятивистских скоростей иллюстрирует тот факт, что расслоение струй $J^1_1 Z \to Z$ не аффинно, а проективно.

Пример 5.4. Возьмем случай специальной теории относительности, когда пространством событий является $Z = \mathbb{R}^4$. Пусть на нем заданы декартовы координаты

$$(z^0, z^i), \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.11}$$

Рассмотрим лоренцевский поворот в плоскости (z^0, z^1):

$$\begin{aligned} \tilde{z}^0 &= z^0 \operatorname{ch} \alpha - z^1 \operatorname{sh} \alpha, \\ \tilde{z}^1 &= -z^0 \operatorname{sh} \alpha + z^1 \operatorname{ch} \alpha, \\ \tilde{z}^{2,3} &= z^{2,3}. \end{aligned}$$

Подставляя эти преобразования в формулу (5.10), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{z}^1_0 &= \frac{-\operatorname{sh} \alpha + z^1_0 \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch}\alpha - z^1_0 \operatorname{sh} \alpha}, \\ \tilde{z}^{2,3}_0 &= \frac{z^{2,3}_0}{\operatorname{ch} \alpha - z^1_0 \operatorname{sh} \alpha}. \end{aligned}$$

Это в точности закон преобразования нерелятивистских скоростей, в чем легко убедиться, если подставить

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}},$$

где v — скорость движущейся системы отсчета вдоль оси z^1. □

Этот пример показывает, что многообразие струй $J^1_1 Z$ можно интерпретировать как *конфигурационное пространство релятивистской механики* и что правомерно трактовать координаты z^i_0 в качестве значений нерелятивистских скоростей. Таким образом, конфигурационное пространство $J^1_1 Y$ релятивистской механики является пространством нерелятивистских скоростей. Заметим, что мы нигде не прибегали к условию, что z^0 — декартова координата, как обычное время. Поэтому построенный выше формализм является общим. Он пригоден и к системам, параметризуемым не только декартовыми координатами. В случае декартовых координат мы приходим к специальной теории относительности.

Введем теперь релятивистские скорости. Рассмотрим касательное расслоение TZ к пространству событий Z, наделенное голономными координатами

$$(z^0, z^i, \dot{z}^0, \dot{z}^i).$$

Согласно (5.8), имеет место (многозначное) отображение λ конфигурационного пространства $J^1_1 Z$ в касательное расслоение TZ, когда точке (z^0, z^i, z^i_0) ставится в соответствие прямая с координатами

$$(\dot{z}^0, \dot{z}^i = \dot{z}^0 z^i_0)$$

в касательном пространстве к Z в точке (z^0, z^i). Обратно, на образе $\lambda(J^1_1 Z) \subset TZ$ определен морфизм

$$\begin{aligned} &\rho : \lambda(J^1_1 Z) \underset{Z}{\to} J^1_1 Z, \\ &z^i_0 \circ \rho = \frac{\dot{z}^i}{\dot{z}^0}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

такой, что

$$\rho \circ \lambda = \mathrm{id}\, J^1_1 Z.$$

Действительно, легко проверить, что законы преобразований координат z^i_0 и $\dot{z}^i/\dot{z}^0$ идентичны. Поэтому векторы касательного пространства TZ можно интерпретировать как *релятивистские скорости* с компонентами $(\dot{z}^0, \dot{z}^i)$. Заметим, однако, что в универсальной системе единиц эти векторы надо разделить на фундаментальную длину, чтобы они имели физическую размерность релятивистских скоростей, которые, например, в декартовых координатах безразмерны.

Отображение λ конфигурационного пространства $J^1_1 Z$ в касательное расслоение TZ является многозначным, а обратный морфизм (5.12) — сюръекцией. Выделим поэтому в касательном расслоении TZ такое подрасслоение Q, чтобы отображение

$$\rho : Q \to J^1_1 Z$$

было инъекцией. Для этого предположим, что многообразие Z ориентируемо и допускает псевдориманову метрику g, и выберем в качестве слоев $Q_z \subset T_z Z$ подрасслоения Q гиперболоиды, называемые *гиперболоидами скоростей* и задаваемые соотношениями

$$g_{\mu\nu}(z)\dot{z}^\mu \dot{z}^\nu = 1, \quad \mu, \nu = 0, 1, \ldots, m. \tag{5.13}$$

Расслоение Q представляет собой объединение двух связных вложенных подмногообразий

$$Q = \bigcup_{z \in Z} Q_z = Q^+ \cup Q^- \subset TZ.$$

Ограничение морфизма (5.12) на каждое из этих подмногообразий является вложением в $J^1_1 Z$.

Рассмотрим образ этого вложения в слое $J^1_1 Z$ над точкой $z \in Z$. В окрестности всякой точки $z \in Z$ существует локальная система координат (z^0, z^i) такая, что псевдориманова метрика $g(z)$ в z в соответствующей голономной системе координат на $T_z Z$ превращается в *метрику Минковского*

$$g(z) = \eta = \mathrm{diag}(1, -1, \cdots, -1).$$

В этих координатах гиперболоид скоростей $Q_z \subset T_z Z$ задается уравнением

$$(\dot{z}^0)^2 - \sum_i (\dot{z}^i)^2 = 1. \tag{5.14}$$

Он состоит из двух полостей: Q^+_z при $z^0 > 0$ и Q^-_z при $z^0 < 0$. Образ каждой из них в пространстве нерелятивистских скоростей J^1_1 при отображении (5.12) является открытым шаром

$$\sum_i (z^i_0) < 1.$$

Таким образом, в самом общем виде мы приходим к известному условию релятивистской теории, являющемуся физическим постулатом специальной теории относительности и гласящему, что нерелятивистские скорости релятивистской механической системы ограничены.

На гиперболоиде (5.14) отображение (5.12) сводится к знакомому соотношению между нерелятивистскими и релятивистскими скоростями в специальной теории относительности

$$\dot{z}^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \sum(z_0^i)^2}},$$
$$\dot{z}^i = \frac{z_0^i}{\sqrt{1 - \sum(z_0^i)^2}}.$$

Заметим, однако, что в универсальной системе единиц величины $\dot{z}$ имеют в общем случае физическую размерность, и единица в правой части выражения (5.13) должна быть заменена размерной величиной. Например, в декартовых координатах компоненты касательных векторов $\dot{z}$ имеют размерность длины, тогда как метрический тензор остается безразмерным. Поэтому их свертку следует приравнять квадрату фундаментальной длины — корню из ньютоновской гравитационной постоянной $\sqrt{G}$. В то же время для релятивистских скоростей

$$u^\lambda = \frac{\dot{z}^\lambda}{\sqrt{G}} \tag{5.15}$$

выражение (5.13) сохраняет свой вид, как это должно быть согласно специальной теории относительности.

В заключение остановимся на основных особенностях лагранжева и гамильтонова формализмов релятивистской механики.

Проблема состоит в том, что лагранжиан по самому своему определению может быть задан на конфигурационном пространстве $J_1^1 Z$ релятивистской системы только локально — на координатной карте (5.5), которая может рассматриваться как конфигурационное пространство нерелятивистской системы. Он представляет собой локальную 1-форму

$$L = \mathscr{L}\, dz^0. \tag{5.16}$$

Примером является лагранжиан специальной теории относительности

$$L = -m\sqrt{1 - \sum(z_0^i)^2}\, dz^0 \tag{5.17}$$

для свободной точечной частицы массы m.

Более обещающим представляется описание релятивистской динамики на *фазовом пространстве релятивистской механики*, каковым служит кокасательное расслоение T^*Z к пространству событий Z с голономными координатами

$$(z^0,\ z^i,\ p_0 = \dot{z}_0,\ p_i = \dot{z}_i).$$

Оно наделено канонической симплектической формой

$$\Omega = dp_\mu \wedge dz^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{5.18}$$

Назовем ее *релятивистской симплектической формой.*

Замечание 5.5. По отношению ко всякой локальной лагранжевой системе с лагранжианом L на карте (5.5) фазовое пространство T^*Z играет роль однородного расслоения

Лежандра. Лагранжиан L (5.16) определяет на T^*Z локальную дираковскую систему с нулевым гамильтонианом на пространстве первичных связей

$$p_0 = \mathscr{L} - z_0^i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial z_0^i}, \quad p_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial z_0^i}. \tag{5.19}$$

Уравнениями движения этой дираковской системы являются уравнения Гамильтона—де Дондера (2.70) для лагранжиана L. Допустим, что удается разрешить уравнения (5.19) относительно

$$p_0 = p_0(z^\mu, p_i).$$

Тогда решением дираковской системы являются интегральные кривые векторного поля

$$\vartheta = \partial_0 + \vartheta^i \partial_i + \vartheta_i \partial^i$$

на пространстве первичных связей (5.19), удовлетворяющего условию

$$\vartheta \rfloor \Omega_Q = 0, \tag{5.20}$$
$$\vartheta_i = \partial_i p_0, \quad \vartheta^i = \partial^i p_0,$$

где Ω_Q — ограничение на (5.19) релятивистской симплектической формы (5.18). Это условие представляет собой уравнения Гамильтона автономной нерелятивистской механики для гамильтониана $\mathscr{H} = -p_0$. Например, лагранжиан (5.17) специальной теории относительности определяет дираковскую систему с нулевым гамильтонианом на пространстве первичных связей

$$p_0^2 - \sum p_i^2 = m^2. \tag{5.21}$$

□

Релятивистскую систему на симплектическом фазовом пространстве T^*Z можно описывать как гамильтонову систему с некоторым гамильтонианом $\mathbf{H}$ на T^*Z. Назовем его *релятивистским гамильтонианом*. В отличие от нерелятивистского гамильтониана, он не имеет смысла функции энергии. Всякий такой гамильтониан $\mathbf{H}$ определяет гамильтоново отображение

$$\widehat{\mathbf{H}} : T^*Z \to TZ,$$
$$\dot{z}^\mu = \partial^\mu \mathbf{H},$$

фазового пространства T^*Z в пространство релятивистских скоростей TZ. Заметим, что в универсальной системе единиц правильнее писать

$$u^\mu = \partial^\mu \mathbf{H}$$

(см. соотношение (5.15)).

Поскольку предполагается, что релятивистские скорости связаны соотношением (5.13), получаем аналогичное условие связи

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_\mu} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_\nu} = 1 \tag{5.22}$$

на фазовом пространстве. Это означает, что релятивистская система в присутствии псевдоримановой метрики g на пространстве событий Z должна описываться как дираковская система на пространстве первичных связей (5.22).

Например, релятивистский гамильтониан специальной теории относительности имеет вид

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\left(p_0^2 - \sum p_i^2\right), \tag{5.23}$$

а пространство первичных связей задается (5.22) задается соотношением (5.21). Релятивистский гамильтониан (5.23) на этом пространстве связей сводится к константе, и мы в согласии с Замечанием 5.5 получаем дираковскую систему на пространстве первичных связей с гамильтонианом, дифференциал которого равен 0. Таким образом, лагранжиан специальной теории относительности (5.16), заданный на локальных картах, отличающихся друг от друга преобразованиями Лоренца, описывает глобальную релятивистскую систему.

Понятно, что не всякий локальный лагранжиан на релятивистском конфигурационном пространстве $J_1^1 Z$ обладает таким свойством.

Библиография

[1] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики.* М.: Наука, 1978.

[2] Г. Бредон, *Теория пучков.* М.: Наука, 1988.

[3] А. Д. Бруно, Нормальные формы симплектических систем, *УМН* **43** (1988) N1, 23.

[4] А. Виноградов, И. Красильщик, В. Лычагин, *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1986.

[5] Д. Гитман, И. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями.* М.: Наука, 1986.

[6] Р. Зуланке, П. Винтген, *Дифференциальная геометрия и расслоения.* М.: Мир, 1975.

[7] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии, т.1.* М.: Наука, 1981.

[8] Г. А. Сарданашвили, *Современные методы теории поля. 1. Геометрия и классические поля.* М.: УРСС, 1996.

[9] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей.* М.: Наука, 1978.

[10] И. Тамура, *Топология слоений.* М., 1979.

[11] Д. Б. Фукс, Когомологии бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений, в сб: *Итоги науки и техники*, ВИНИТИ, серия "Современные проблемы математики", **10** (1978) 179.

[12] R. Abraham and J. Marsden, *Foundations of Mechanics, Second Edition* (Benjamin/Cummings Publ. Comp., London, 1978).

[13] S. Albeverio and Shao-Ming Fei, BRST Structures and symplectic geometry on a class of supermanifolds, *Lett. Math. Phys.* **33** (1995) 207.

[14] J. de Azcárraga, A. Perelomov and J. Pérez Bueno, The Schouten—Nijenhuis bracket, cohomology and generalized Poisson structures, *J. Phys. A* **29** (1996) 7993.

[15] C. Bartocci, U. Bruzzo, D. Hernández Ruipérez, V. Pestov, Foundations of supermanifold theory: the axiomatic approach, *Diff. Geom. and Appl.*, **3** (1993) 135.

[16] K. Bhaskara and K. Vismanath, *Poisson Algebras and Poisson Manifolds*, Pithman Research Notes in Mathematics, **174** (Longhman Sci., Harlow, 1988).

[17] E. Binz, H. Fischer and J. Śniatycki, *Geometry of Classical Fields* (North-Holland, Amsterdam, 1988).

[18] J-L. Brylinski, A differential complex for Poisson manifolds, *J. Diff. Geom.* **28** (1988) 93.

[19] R. Bryant, S. Chern, R. Gardner, H. Goldschmidt, P. Griffiths, *Exterior Differential Systems* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).

[20] A. Cabras and A. Vinogradov, Extension of the Poisson bracket to differential forms and multi-vectors, *J. Geom. Phys.* **9** (1992) 75.

[21] D. Canarutto, Bundle splittings, connections and locally principle fibred manifolds, *Bull. U. M. I. Algebra e Geometria* Serie VI **V-D** (1986) 18.

[22] J. Cariñena and M. Rañada, Poisson maps and canonical transformations for time-dependent Hamiltonian systems, *J. Math. Phys.* **30** (1989) 2258.

[23] J. Cariñena, J. Fernández-Núñez and E. Martínez, A geometric approach to Noether's second theorem in time-dependent Lagrangian mechanics, *Lett. Math. Phys.* **23** (1991) 51.

[24] J. Cariñena and J. Fernández-Núñez, Geometric theory of time-dependent singular Lagrangians, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 517.

[25] J. Cariñena and H. Figueroa, Hamiltonian versus Lagrangian formulations of supermechanics, *J. Phys. A* **30** (1997) 2705.

[26] S. Cecotti and C. Vafa, Topological anti-topological fusion, *Nucl. Phys.* **B367** (1991) 359.

[27] D. Chinea, M. de León, and C. Marrero, The constraint algorithm for time-dependent Lagrangians, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 3410.

[28] R. Cianci, *Introduction to Supermaniifolds* (Bibliopolis, Naples, 1990).

[29] W. Domitrz and S. Janeczko, Normal forms of symplectic structures on the stratified spaces, *Colloquium Mathematicum* **LXVIII** (1995) fasc.1, 101.

[30] A. Echeverría Enríquez, M. Muñoz Lecanda and N. Román Roy, Geometrical setting of time-dependent regular systems. Alternative models, *Rev. Math. Phys.* **3** (1991) 301.

[31] A. Echeverría Enríquez, M. Muñoz Lecanda and N. Román Roy, Non-standard connections in classical mechanics, *J. Phys. A* **19** (1995) 5553.

[32] G. Giachetta and L. Mangiarotti, Constrained Hamiltonian systems and gauge theories, *Int. J. Theor. Phys.* **34** (1995) 2353.

[33] G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory* (World Scientific, Singapore, 1997).

[34] M. Gotay, M. Nester and G. Hinds, Presymplectic manifolds and the Dirac—Bergman theory of constraints, *J. Math. Phys.* **19** (1978) 2388.

[35] M. Gotay, A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations. I. Covariant Hamiltonian formalism, in *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange*, ed. M. Francaviglia (Elsevier Science Publishers B. V., 1991), p. 203.

[36] E. Gozzi, M. Reuter and W. Thacker, Hidden BRS invariance in classical mechanics, *Phys. Rev.* **D40** (1989) 3363.

[37] E. Gozzi, M. Reuter and W. Thacker, Symmetries of the classical path integral on a generalized phase-space manifold, *Phys. Rev.* **D46** (1992) 757.

[38] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1992).

[39] R. Ibáñez, M. de León, J. Marrero and D. Martín de Diego, Dynamics of Poisson and Nambu—Poisson brackets, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 2332.

[40] A. Jadczyk and K. Pilch, Superspaces and Supersymmetries, *Comm. Math. Phys.* **78** (1981) 391.

[41] F. Kamber and P. Tondeur, *Foliated Bundles and Characteristic Classes*, Lecture Notes in Mathematics, **493** (Springer-Verlag, Berlin, 1975).

[42] I. Kolář, P. Michor and J. Slovák, *Natural Operations in Differential Geometry* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).

[43] Y. Kosmann-Schwarzbach and F. Magri, Poisson—Nijenhuis structures, *Ann. l'Inst. Henri Poincaré* **53** (1990) 35.

[44] M. de León and P. Rodrigues, *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics* (North-Holland, Amsterdam, 1989).

[45] M. de León and J. Marrero, Constrained time-dependent Lagrangian systems and Lagrangian submanifolds, *J. Math. Phys.* **34** (1993) 622.

[46] P. Libermann and C-M. Marle, *Symplectic Geometry and Analitical Mechanics* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987).

[47] C-M. Marle, On Jacobi manifolds and Jacobi bundles, in *Symplectic Geometry, Groupoids, and Integrable Systems*, ed. P. Dazord and A. Weinstein (Springer-Verlag, Berlin, 1989), p. 227.

[48] G. Marmo, G. Mendella and W. Tulczyjew, Constrained Hamiltonian systems as implicit differential equations, *J. Phys. A* **30** (1997) 277.

[49] G. Martin, A Darboux theorem for multi-symplectic manifolds, *Lett. Math. Phys.* **16** (1988) 133.

[50] P. Michor, A generalization of Hamiltonian mechanics, *J. Geom. Phys.* **2** (1985) N2, 67.

[51] M. Modugno, A. Vinogradov, Some variations on the notion of connections, *Ann. Matem. Pura ed Appl.* **CLXVII** (1994) 33.

[52] R. Montgomery, The connection whose holonomy is the classical adiabatic angles of Hannay and Berry and its generalization to the non-integrable case, *Comm. Math. Phys.* **120** (1988) 269.

[53] G. Morandi, C. Ferrario and G. Lo Vecchio, The inverse problem in the calculus of variations and the geometry of the tangent bundle, *Phys. Rep.* **188** (1990) 147.

[54] M. Muñoz-Lecanda, Hamiltonian systems with constraints: A geometric approach, *Int. J. Theor. Phys.* **28** (1989) 1405.

[55] M. Muñoz and N. Román-Roy, Lagrangian theory for presymplectic systems, *Ann. Inst. Henrí Poincaré* **57** (1992) 27.

[56] M. Muñoz and N. Román-Roy, Gauge systems: Presymplectic and group action theory, *Int. J. Theor. Phys.* **32** (1993) 2077.

[57] Kh. Nirov and A. Razumov, Equivalence between Lagrangian and Hamiltonian BRST formalisms, *J. Math. Phys.* **34** (1993) 3933.

[58] L. Norris, Symplectic geometry on T^*M derived from n-symplectic geometry on LM, *J. Geom. Phys.* **13** (1994) 51.

[59] L. Norris, Schouten—Nijenhuis brackets, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 2694.

[60] P. Pereshogin and P. Pronin, Geometrical treatment of nonholonomic phase in quantum mechanics and applications, *Int. J. Theor. Phys.* **32** (1993) 219.

[61] B. Reinhart, *Differential Geometry and Foliations* (Springer-Verlag, Berlin, 1983).

[62] M. Rotstein, The axioms of /supermanifolds and a new structure arising from them, *Trans. Amer. Math. Society* **297** (1986) 159.

[63] G. Sardanashvily, *Gauge Theory in Jet Manifolds* (Hadronic Press, Palm Harbor, 1993).

[64] G. Sardanashvily, Constraint field systems in multimomentum canonical variables, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 6584.

[65] G. Sardanashvily, *Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory. Constraint Systems.* (World Scientific, Singapore, 1995).

[66] G. Sardanashvily, Stress-energy-momentum tensors in constraint field theories, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 847.

[67] D. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles* (Cambr. Univ. Press, Cambridge, 1989).

[68] L. Takhtajan, On foundations of the generalized Nambu mechanics, *Comm. Math. Phys.* **160** (1994) 295.

[69] W. Tulczyjew, Lagrangian submanifolds and Hamiltonian dynamics, *C. R. Acad. Sci. Paris A* **283** (1976) 15.

[70] W. Tulczyjew, Lagrangian submanifolds and Lagrangian dynamics, *C. R. Acad. Sci. Paris A* **283** (1976) 675.

[71] I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds* (Birkhäuser Verlag, Basel, 1994).

[72] I. Vaisman, Second order Hamiltonian vector fields on tangent bundles, *Diff. Geom. and Appl.* **5** (1995) 153.

[73] F. Warner, *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups* (Springer-Verlag, Berlin, 1983).

[74] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, *J. Diff. Geom.* **18** (1983) 523.

[75] K. Yano and S. Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundles*, Pure and Applied Mathematics Ser. 16 (Marcel Dekker, N. Y., 1973).

Предметный указатель

А

автоморфизм расслоений, 10
алгебра Грассмана, 144
— Ли левая, 20
— — правая, 20
аннулятор распределения, 19
анти-БРСТ преобразования, 141
антидухи, 139
ассоциированное расслоение, 121
атлас локально постоянных тривиализаций, 29
— расслоения, 9
аффинная связность, 29
аффинное расслоение, 11

Б

база расслоения, 9
БРСТ преобразования, 141

В

вариационная последовательность, 84
вариационные производные, 77
вариационный оператор, 85
векторное поле, 13
— — левоинвариантное, 20
— — Лиувилля, 15
— — локальное, 14
— — — интегрируемое, 14
— — неособое, 13
— — правоинвариантное, 20
— — проектируемое, 15
— — Риба, 36
— расслоение, 10
векторные суперполя, 146
вертикальное векторное поле, 15
— касательное расслоение, 12
— кокасательное расслоение, 13
вертикальный касательный морфизм, 12
— ковариантный дифференциал, 31
— лифт векторного поля, 15
— эндоморфизм, 63
взаимно инерциальные системы отсчета, 74, 123
вложенное подмногообразие, 20
внешнее произведение, 10
— расслоение, 145
внешняя алгебра, 16, 144
— форма, 16
вполне интегрируемая гамильтонова система, 45

Г

гамильтон-дираковская система, 49
гамильтониан, 45, 94
— релятивистский, 155
гамильтонова система, 45
— форма ассоциированная с лагранжианом, 104
— —, БРСТ расширение, 141
— —, вертикальное расширение, 135
— — ограниченная, 112
гамильтоново векторное поле, 38
— — — относительно пресимплектической формы, 46
— — — — симплектической формы, 42
— отображение, 94
генератор локальной 1-параметрической группы диффеоморфизмов, 14
генераторы представления, 21
гессиан, 77
гиперболоид скоростей, 153
главное расслоение, 120
голономное сечение, 24
голономные автоморфизмы, 23
— координаты, 11
голономный атлас, 11
— корепер, 11
— репер, 11
горизонтальная плотность, 17
— форма, 17

горизонтальное векторное поле, 63
— распределение, 29
— слоение, 29
горизонтальный внешний дифференциал, 85
— лифт векторного поля, 28
градуированная коммутативная алгебра, 144
— — — банахова, 144
— оболочка, 145
градуированное векторное пространство, 144
— дифференцирование, 146
— многообразие, 145
градуированной коммутативности условие, 144
градуированный модуль, 145

Д

движение, 65
динамическое векторное поле, 65
дираковская система, 51
— — полная, 53
дифференциальное уравнение, 27
дифференциальный идеал, 19
— оператор, 27
дуальная связность, 28
дуальное векторное расслоение, 10
духи, 139

З

закон движения, 65
— Ньютона второй, 75
— — первый, 75
— сохранения, 87
— — нетеровский, 87

И

изоморфизм расслоений, 10
изотропное подмногообразие, 43
импульсное отображение, 54
— — эквивариантное, 55
инволютивное распределение, 19
индуцированная форма, 17
индуцированное расслоение, 10
инерциальное преобразование, 123
инерциальные преобразования, 74
интеграл движения в неавтономной механике, 87
— — нетеровский, 87
— Пуанкаре—Картана, 94
интегралы движения в инволюции, 45
интегральная кривая, 14
интегральное многообразие максимальное, 19
— — максимальной размерности, 19
— — распределения, 19
— сечение, 28
интегрируемая гамильтон-дираковская система, 50
интегрируемые распределения, 19

К

калибровочные преобразования, 121
— условия, 117
каноническая 3-форма, 92
— —, БРСТ расширение, 142
— —, вертикальное расширение, 134
— —, струйное расширение, 130
— симплектическая форма, 41
— тангенциально-значная форма, 18
— форма Лиувилля, 41
— — на реперном расслоении, 23
канонические когомологии, 58
— координатные преобразования, 100
— координаты, 39, 100
— преобразования активные, 100
— — пассивные, 100
канонический автоморфизм, 100
— лифт векторного поля, 15
каноническое горизонтальное расщепление, 25
касательное расслоение, 11
касательный морфизм, 11
ковариантный дифференциал, 28
когомологии группы, 56
кограница на группе, 55
кодифференциальный оператор, 57
коизотропное подмногообразие, 43
кокасательное расслоение, 11
композиционное расслоение, 30
контактная форма, 24, 35
контактное многообразие, 35
конфигурационное пространство, 5
— — вертикальное, 133
— — релятивистской механики, 152
координаты Дарбу, 36
—, сопутствующие системе отсчета, 73
коприсоединенное представление, 21
косимплектическая структура, 40
коцикл на группе, 55
—, отвечающий действию группы, 56

кривизна связности, 28
кручение динамической связности, 69

Л

лагранжева связность, 79
лагранжево подмногообразие, 43
лагранжиан, 76
— вертикальное расширение, 137
— вполне регулярный, 111
— гиперрегулярный, 78
— квадратичный, 114
— полурегулярный, 107
— регулярный (невырожденный), 77
линейная производная, 11
— связность, 28
локальная 1-параметрическая группа локальных диффеоморфизмов, 14
локально гамильтоново векторное поле, 42

М

Маурера—Картана уравнение, 22
метрика Минковского, 153
многогамильтонова система, 110
многообразие струй, 23
— — второго порядка, 26
— — высшего порядка, 26
— — повторное, 25
— — подмногообразий, 148
— — полуголономное, 25
мономорфизм расслоений, 10
мультивекторное поле, 16
мультисимплектическая форма, 59
мультискобка, 59

Н

нетеровский ток, 87
ньютонова система, 84

О

обратная задача, 84
общие ковариантные преобразования, 23
ограничение внешней формы на подмногообразие, 17
однородный элемент, 144
оператор Гамильтона, 97
— типа Эйлера—Лагранжа, 84
— Эйлера—Лагранжа, 77
— Эйлера—Лагранжа—Картана, 80
осциллятор Берри, 130
относительная скорость, 72
относительное ядро симплектической формы, 42
отображение гамильтоново, 94
— Гельмгольца—Сонина, 85
— Лежандра, 77
— Пуанкаре—Картана, 81
— Эйлера—Лагранжа, 85

П

первый интеграл движения, 45
плоская связность, 29
плотность энергии, 87
поднятие внешней формы, 17
— функции, 17
подрасслоение, 10
поле параметров, 124
— Якоби, 136
полисимплектическая форма, 60
полная производная, 24, 26
— связность, 64
— система отсчета, 73
полное векторное поле, 14
— семейство гамильтоновых форм, 110
послойные координаты, 9
послойный морфизм, 9
правило Лейбница, 37
предпучок, 32
— канонический, 33
пресвязность, 150
пресимплектическая гамильтонова система, 46
— — — внешняя, 47
— — — внутренняя, 47
— форма, 40
принцип относительности Галилея, 74
припаивающая форма, 28
присоединенное представление, 21
проекция, 9
произведение расслоений, 10
производная Ли, 18
производящая функция, 102
пространство связей, 48
— — вторичных, 52
— — лагранжевых, 104
— — первичных, 48
— — финальных, 53
— событий в нерелятивистской механике, 5
— — вертикальное, 133
прямое произведение структур Пуассона, 38

пуассонов морфизм, 37
пуассоново бивекторное поле, 35
— многообразие, 37
пучок, 32
— постоянный, 33
— ростков непрерывных функций, 33

Р

ранг 2-формы в точке, 39
распределение, 19
расслоение, 9
— Лежандра, 60
— — однородное, 59
— параметров, 124
— реперное, 22
решение дифференциального уравнения, 27
росток многообразия, 43

С

свертка, 17
— векторных расслоений, 10
связи, 48
— вторичные, 49
— второго рода, 52
— первичные, 51
— первого рода, 52
— третичные, 49
— финальные, 53
связность, 27
— Берри, 130
— гамильтонова, 97
— динамическая, 67
— — симметричная, 68
— композиционная, 31
— локально гамильтонова, 92
сечение, 9
— локальное, 9
сила, 75
— инерции, 75
— физическая, 75
симплектическая гамильтонова система, 45
— форма, 40
— — $\mathbb{R}^n$-значная, 60
— — релятивистская, 154
симплектическое действие группы, 54
— многообразие, 40
— подмногообразие, 43
— слоение, 38
симплектоморфизм, 40
система лагранжева, 75
— отсчета в нерелятивистской механике, 72
— — инерциальная абсолютная, 75
— — сопутствующая, 74
— связей полная, 49
скобки Schouten—Nijenhuis, 16
— Ли векторных полей, 13
— Пуассона, 37
— Якоби, 34
скорость нерелятивистская, 151
— релятивистская, 153
слабое тождество, 86
слоение, 20
— поверхностей уровня, 20
— сингулярное, 20
сопряженное пространство алгебры Ли, 21
стандартная 1-форма, 5
стандартное векторное поле, 5
стебель пучка, 32
струйное продолжение векторного поля, 24
— — морфизма, 24
— — сечения, 24
структура Пуассона, 37
— — невырожденная, 37
— — нулевая, 37
— — регулярная, 37
— Якоби, 34
структурная группа, 120
струя сечений, 23
сужение расслоения, 10
сумма Уитни векторных расслоений, 10
супермногообразие, 145
суперпространство векторное, 145
суперформа, 147
суперфункция, 146

Т

тензор масс, 83
тензорное произведение векторных расслоений, 10
типичный слой, 9
тождество Якоби, 34
ток, 86

У

уравнение геодезических, 71
— движения, 65
— динамическое, 65
— свободного движения, 66
— эволюции, 45, 103
уравнения Гамильтона, 45, 97

— — ограниченные, 112
— Гамильтона—де Дондера, 81
— движения первого порядка, 98
— Картана, 80
— равновесия, 101
— Эйлера—Лагранжа, 77

Ф

фазовое пространство вертикальное, 133
— — нерелятивистской неавтономной механики, 5
— — релятивистской механики, 154
форма гамильтонова, 94
— — локально, 93
— де Дондера, 81
— левоинвариантная, 21
— — каноническая, 22
— правоинвариантная, 21
— — каноническая, 22
— Пуанкаре—Картана, 76
— тангенциально-значная, 18
функции перехода, 9
функция Гамильтона, 94
— Казимира, 37
— Лагранжа, 76

Х

характеристическое распределение, 38
— слоение, 38

Ч

четный сектор, 144

Я

ядро внешней формы, 39

Содержание

Введение **3**

Предварительные сведения **8**

Расслоения (9). *Векторные расслоения* (10). *Аффинные расслоения* (11). *Касательные и кокасательные расслоения* (11). *Касательные и кокасательные расслоения к расслоениям* (12). *Векторные поля* (13). *Векторные поля на расслоении* (14). *Мультивекторные поля* (16). *(S-N)-скобки* (16). *Внешние формы* (16). *Внешние формы на расслоении* (17). *Производная Ли* (18). *Тангенциальнозначные формы* (18). *Распределения* (19). *Слоения* (20). *Касательные и кокасательные расслоения к группам Ли* (20). *Главное реперное расслоение* (22). *Многообразия струй* (23). *Канонические горизонтальные расщепления* (25). *Многообразия струй второго порядка* (25). *Полная производная* (26). *Многообразия струй высшего порядка* (26). *Дифференциальные операторы и уравнения* (27). *Связности* (27). *Кривизна связности* (28). *Линейные связности* (28). *Аффинные связности* (29). *Плоские связности* (29). *Композиционные расслоения* (30). *Пучки* (32).

Глава 1. Симплектическая механика **34**

§1. Структура Якоби 34
§2. Контактная структура 35
§3. Структура Пуассона 36
§4. Симплектическая структура 39
§5. Симплектические гамильтоновы системы 44
§6. Пресимплектические гамильтоновы системы 46
§7. Дираковские системы со связями 48
§8. Гамильтоновы системы с симметриями 54
§9. Обобщенные скобки Пуассона 56
§10. Мультисимплектическая структура 58

Глава 2. Лагранжева механика **61**

§1. Расслоения над $\mathbb{R}$ 61
§2. Уравнения движения 64
§3. Динамические связности 66
§4. Системы отсчета 72
§5. Лагранжевы системы 75
§6. Ньютоновы системы 82
§7. Лагранжевы законы сохранения 86

Глава 3. Неавтономная гамильтонова механика 90

§1. Каноническая структура Пуассона 90
§2. Гамильтоновы связности и гамильтоновы формы 92
§3. Канонические преобразования 99
§4. Уравнение эволюции 103
§5. Вырожденные системы 103
§6. Квадратичные вырожденные системы 114
§7. Гамильтоновы законы сохранения 118
§8. Неконсервативные системы с симметриями 120
§9. Системы с зависящими от времени параметрами 124
§10. Единый лагранжево-гамильтонов формализм 130

Глава 4. БРСТ механика 133

§1. Системы с флуктуациями 133
§2. Интуитивная БРСТ механика 139
§3. Механика на градуированных многообразиях 143

Глава 5. Релятивистская механика 148

Библиография 157

Предметный указатель 161

Г.А.Сарданашвили

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ
(Современные методы теории поля. Т. 3)

В этом томе излагаются основные методы и имеющиеся модели алгебраической формулировки квантовой теории. Эта формулировка основана на так называемой конструкции Гельфанда— Наймарка—Сигала, когда квантовая система характеризуется некоторой алгеброй наблюдаемых, а физически достоверными считаются значения той или иной положительной формы на этой алгебре. В книге приводятся необходимые математические сведения по топологическим векторным пространствам, инволютивным алг-ебрам и мерам. Книга призвана помочь читателю ориентироваться в современной литературе по алгебраической квантовой теории.

Содержание

Введение	3
Глава 1. Пространства	**5**
§1. Топологические векторные пространства	5
§ 2. Сопряженные пространства	8
§3. Пространства линейных отображений	11
§4. Гильбертовы пространства	12
§ 5. Операторы в гильбертовых пространствах	16
§6. Счетно-гильбертовы и ядерные пространства	18
§7. Дополнение. Кэлеровы многообразия	20
Глава 2. Алгебры и их представления	**26**
§1. Инволютивные алгебры	26
§ 2. Представления инволютивных алгебр	29
§3. Гильбертовы интегралы представлений	32
§4. Конструкция ГНС	35
§5. Следы	40
§6. Гильбертовы интегралы состояний	45
§ 7. Дополнение. Функциональное представление C^*-алгебр	47
Глава 3. Симметрии квантовых систем	**51**
§ 1. Морфизмы и йордановы морфизмы	51
§2. Дифференцирования	54
§ 3. Модулярная группа	59
§4. Инвариантные состояния	62
§5. Группы и C^*-алгебры	65
§ 6. Дополнение. Группоиды и C^*-алгебры	72
Глава 4. Квантовомеханические системы	**84**
§1. Универсальные обертывающие алгебры	84
§2. Конечно порожденные C^* -алгебры	87
§ 3. Когерентные состояния	91
§4. Квантование по Березину	97
§5. Геометрическое квантование	102
§ 6. Канонические коммутационные соотношения	110

§ 7. Протяженные системы 124
§ 8. Канонические антикоммутационные соотношения 129
§ 9. Квантовые группы 131
§ 10. Деформационное квантование 139
Глава 5. Алгебраическая квантовая теория поля **149**
§1. Алгебры неограниченных операторов 149
§ 2. Алгебры свободных полей 152
§ 3. Производящие функционалы 156
Глава 6. Дополнения **161**
§ 1 Квантовая теория при конечной температуре 161
§ 2. Системы со многими вакуумами 170
Приложение А. Меры 178
Приложение Б. Преобразования Лапласа 194
Библиография 203
Список обозначений 206
Предметный указатель **207**

Предметный указатель

А
абстрактная теорема об ядре, 19
алгебра Борхерса, 153
— Вейля, 142
— Гейзенберга—Вейля, 111
— КАС, 129
— Пуассона, 98
— Хопфа, 132
— — инволютивная, 132
— — квазитриангулярная, 133
— — классическая, 135
— — кокоммутативная, 132
— банахова, 26
— инволютивная, 26
— — нормированная, 26
— — типа I, 32
— конечно порожденная, 88
— простая, 35
— с присоединенной единицей, 27
— свободная, 87
— фон Неймана, 29
— — конечная, 41
— — полуконечная, 41
— — порожденная, 29
— — типа I, 29
— - типа III, 170
— — σ-конечная, 59
— C^*-функций, 124
C^*-алгебра, 26
— группоида, 82
— квазилокальная, 126
— конечно порожденная, 88
— локальная, 126
— локально компактной группы, 66
— порожденная присоединенными элементами, 90
— элементарная, 34
CCR-алгебра, 35
GCR-алгебра, 35
Op^*-алгебра, 149
алгебраически сопряженное, 8
аналитический вектор, 60
анти голоморфное касательное пространство, 22
антиморфизм, 51
антиобратное отображение, 132
аппроксимативная единица, 27
Б
базис, 6
— меры, 184
— ортонормальный, 14
барицентр, 193

бикоммутант, 29
бинваринтное подпространство, 70
борелевская алгебра, 191
— мера, 191
— — внутренне регулярная, 191
— — локально ограниченная, 191
борелевское множество, 191
— пространство, 191
— — подчиненное топологии, 191
— — стандартное, 191
бэровская мера, 192
бэровское множество, 192
В
вакуум, 170
вакуумное среднее, 170
вектор бесконечно дифференцируемый, 85
— допустимый, 91
— ортонормальный, 13
векторная форма, 36
векторное поле комплексное, 22
вероятностное пространство, 158
верхний интеграл, 180, 183
виковский поворот, 201
воспроизводящая система, 99
— тройка, 99
воспроизводящее ядро, 92
второе сопряжение, 10
выпуклая оболочка, 5
Г
гамильтониан, 58
гауссова мера с ненулевым средним, 120
— промера, 189
— промера каноническая, 189
гиббсовское состояние, 161
гильбертов интеграл, 33
гильбертова алгебра, 42
— — группы, 70
— — полная, 42
— — совершенная, 42
— размерность, 14
— сумма, 15
— — представлений, 30
гильбертово пространство дуальное, 15
— — сепарабельное, 14
гиперподпространство, 5
голоморфное касательное пространство, 22
— многообразие, 22
граф-топология, 150
группа Гейзенберга—Вейля, 111
— изотропная, 73
— когомологий группоида, 77
— модулярных автоморфизмов, 60
— равномерно непрерывная, 53
— сильно непрерывная, 54
— слабо непрерывная, 54
групповая алгебра, 66
групповое расслоение, 74
группоид, 72
— главный, 73
— топологический, 78
— транзитивный, 73
— тривиальный, 74
— l-дискретный, 79
Д
дези нтегрирование представления, 34
действие группы раздельно непрерывное, 53
— слабо непрерывное, 54
деформационное квантование строгое, 147
деформация Ли, 140
— ассоциативная, 140
— билинейной формы, 139
C^*-динамическая система, 162
W^*-динамическая система, 162
дискретная серия представлений, 70
дифференцирование внутреннее, 55
— внутренние аппроксимативно, 55
— допустимое, 57
— симметрическое, 54
допустимая пара, 72
дуальная пара, 9
Е

евклидизация пространства Минковского, 199
единица левая, 73
— правая, 73
естественный положительный конус, 61
З
замыкание оператора, 56
— представления, 150
И
идеал, 27
— двусторонний, 27
— — максимальный, 27
— примитивный, 31
— собственный, 27
— существенный, 88
измельчение меры, 184
измеримое отображение, 183
— подмножество, 183
изометрия, 51
изоморфизм пространственный, 29
изотонности условие, 126
инволюция, 26
интеграл, 178
— верхний, 179
— со значениями в векторном пространстве, 190
Й
йорданов автоморфизм, 51
— изоморфизм, 51
— морфизм, 51
К
калибровочная функция множества, 7
квазиспектр, 32
квантование по Березину, 99
квантовая алгебра Ли, 137
— группа, 135
— решетка, 127
квантовое гильбертово пространство, 106
— распределение, 127
— тождество Якоби, 138
— удвоение, 136
— число, 137
квантовые коммутационные соотношения, 138
— структурные константы, 138
квантовый детерминант, 136
— факториал, 137
коалгебра, 132
когерентное состояние, 92
— состояние ковариантное, 95
— состояние обобщенное, 94
— состояние обобщенное допустимое, 94
когомологии Хосшильда, 140
— Шевалье—Эленберга, 141
коединица, 132
коммутант, 29
— сильно ограниченный, 150
— слабо ограниченный, 150
комплексная форма, 22
комплексное гамильтоново векторное поле, 24
— касательное пространство, 22
— касательное расслоение, 22
— кокасательное пространство, 22
— кокасательное расслоение, 22
комплексный касательный вектор, 22
конструкция ГНС, 3
— Федосова, 142
копроизведение, 132
коэффициент представления, 69
кэлерова метрика, 23
кэлерово многообразие, 23
КАС, 129
ККС C^*-алгебра, 124
ККС алгебра, 111
ККС в форме Вейля, 111
ККС в форме Гейзенберга, 111
ККС группа, 111
Л
лемма Шура, 86
линейное расслоение, 103
локально интегрируемая функция, 184
локальной коммутативности условие, 127

М
матрица плотности, 59
мера, 178
— Баргмана, 122
— Дирака, 178
— Лиувилля, 98
— Хаара, 186
— — левая, 186
— борелевская стандартная, 191
— вероятностная, 191
— внешняя открытого множества, 179
— — произвольного множества, 180
— инвариантная, 186
— — на пространстве единиц, 80
— индуцированная, 183
— — на группоиде, 80
— квазиинвариантная, 186
— — на пространстве единиц, 80
— максимальная, 193
— множества, 178
— обратная, 185
— ограниченная, 179
— ортогональная, 46
— положительная, 179
— псевдососредоточенная, 192
— сосредоточенная, 183
— точечная, 178
меры эквивалентные, 184
метрическая связность, 23
множество локально пренебрежимое, 182
— орбит группоида, 74
— пренебрежимое, 180
множитель подалгебры, 88
модуль группы, 186
— элемента, 40, 49
модулярная группа, 60
— инволюция, 60
— функция, 80
модулярное условие, 60
модулярный оператор, 60
мультипликатор меры, 186
Н
норма, 6
— Гильберта—Шмидта, 17
— операторная, 16
— следовая, 18
носитель меры, 178, 183
— обобщенной функции, 197
О
обертывающая алгебра фон Неймана, 172
— *C**-алгебра, 38
область, 196
— определения оператора, 56
обобщенная функция, 194
обобщенное граничное значение, 197
обобщенный собственный вектор, 20
оболочка выпуклая замкнутая, 5
образ меры, 184
— промеры, 188
образующие элементы, 87
огибающая, 179
оператор Гильберта—Шмидта, 17
— Казимира, 86
— Лиувилля, 167
— замкнутый, 56
— замыкаемый, 56
— компактный, 17
— комплексной структуры, 21
— неограниченный, 56
— нормальный, 16
— ограниченный, 16
— полного числа частиц, 116
— положительно определенный, 17, 190
— присоединенный, 58, 89
— разложимый, 33
— рождения, 115
— самосопряженный, 56
— симметрический, 56
— сопряженный, 16, 56
— — максимальный, 56
— сплетающий, 31
— суперотбора, 172
— существенно самосопряженный, 56

— унитарный, 16
— уничтожения, 115
— эрмитов, 16
— ядерный, 18
операторное поле измеримое, 33
определенное почти всюду отображение, 181
основные функции, 194
отделяющее подмножество, 59
относительно инвариантная мера, 187
отношение эквивалентности единиц, 73
отображение антилинейное, 15
— аффинное, 52
— вполне непрерывное, 17
— вырожденное, 17
— положительное, 51
— скалярно непрерывное, 190
— слабо непрерывное, 12
— сопряженное, 12
— ядерное, 19
— μ-собственное, 184
П
параметр деформации, 139
плотность меры, 184
подалгебра максимальная, 97
подмножество абсолютно выпуклое, 5
— ограниченное, 10
— относительно компактное, 180
— поглощающее, 6
— слабо ограниченное, 10
— уравновешенное, 5
подобные гомоморфизмы, 75
— группоиды, 75
подпространство самосопряженное, 151
поле гильбертовых пространств измеримое, 32
— — — с интегрируемым квадратом, 33
— представлений, 34
— *C**-алгебр, 124
полная масса меры, 180
— система обобщенных собственных векторов, 20
полунорма, 6
полуплотность, 106
польское пространство, 191
поляризация, 105
полярное разложение, 41
пополнение, 7
преддвойственное пространство, 53
предквантование, 105
предквантовое расслоение, 105
предмера, 182
— локально ограниченная, 182
— ограниченная, 182
преднорма, 6
представление Шредингера, 121
— вполне приводимое, 71
— группоида, 81
— замкнутое, 150
— квадратично интегрируемое, 91
— невырожденное, 30
— неприводимое, 151
— — алгебраически, 31
— — топологически, 30
— ограниченное, 81
— полное, 133
— регулярное левое, 68
— — правое, 69
— с интегрируемым квадратом, 70
— самосопряженное, 150
— со следом, 43
— сопряженное, 150
— — второе, 150
— существенно самосопряженное, 150
— точное, 30
— фоковское, 118
— циклическое, 30
— чисел заполнения, 122
— эрмитово, 149
представления дизъюнктные, 31
— квазиэквивалентные, 31
— со следом квазиэквивалентные, 43
— — эквивалентные, 43

преобразование Гельфанда, 48, 50
— Лапласа, 198
— Фурье обобщенной функции,196
— — промеры, 188
— — функции, 195
— — функции обратное, 195
— Фурье—Лапласа, 196
преобразования Боголюбова неоднородные, 121
— — однородные, 119
принцип соответствия, 97
— — слабый, 99
присоединенное действие алгебры Хопфа, 137
проективное гильбертово пространство, 24
проектор, 16
проекторы ортогональные, 43
проекционный оператор, 16
произведение Вейля, 143
— Мойла, 141
— косое, 76
— мер, 185
— подкрученное, 148
— полупрямое, 76
производная Радона—Никодима, 184
производящая функция, 112
промера, 188
пространства μ-эквивалентные, 180
пространство Гординга, 85
— Фреше, 7
— Шварца, 194
— банахово, 7
— выпуклое, 5
— гильбертово, 14
— единиц, 73
— локально выпуклое, 6
— оснащенное гильбертово, 20
— предгильбертово, 13
— пробных функций, 194
— рефлексивное, 10
— случайных величин, 158
— счетно-гильбертово, 18
— ядерное, 19
протяженная система, 124
прямая сумма гильбертовых пространств, 15
прямой интеграл представлений, 34
Р
равномерно непрерывное действие, 53
разложение единицы, 96
— эргодическое, 64
распределение Шварца, 195
— умеренного роста, 194
расслоение группоидов, 77
— линейное универсальное, 109
— модулей, 77
— — постоянное, 77
— на C^*-алгебры, 125
— подгрупп, 79
расширение представления, 150
расширенная числовая прямая, 180
решетка, 193
ряд Лорана, 148
С
свертка мер, 185
— меры и функции, 187
— функций, 187
связность абелева, 146
— допустимая, 105
— симплектическая, 145
семейство полное, 14
— топологически свободное, 13
— тотальное, 14
сепарабельное пространство, 7
сеть, 27
сильно непрерывное действие, 54
символ оператора, 100
— — контравариантный, 100
симплекс, 193
система Хаара, 78
— — правая, 79
скалярное произведение, 13
след, 41
— конечный, 41
— нормальный, 41
— полуконечный, 41

— точный, 41
случайный процесс, 158
— — гауссовский, 158
собственное подпространство, 20
сопряженные показатели, 183
состояние, 36
— КМШ, 162
— инвариантное, 63
— когерентное, 96
— на ненормированной алгебре, 152
— основное, 63
— сепарабельное, 169
— точное, 59
— эргодическое, 64
спектр, 31
— оператора, 16
— элемента, 27
спектральное разложение, 20
спиновая решетка, 131
стационарная подгруппа, 93
субпредставление, 151
сужение группоида, 75
сумма мер, 183
суммируемое семейство мер, 184
существенный верхний интеграл, 181, 182
Т
тензор кривизны симплектической связности, 146
тензорная алгебра, 85
тензорное произведение гильбертовых пространств, 16
— — — — неполное, 128
— — C^*-алгебр, 127
теорема Алаоглу—Бурбаки, 11
— Борхерса—Арвесона, 58
— Бохнера, 188
— Вика, 155
— Колмогорова, 10
— Макки—Аренса, 11
— Пуанкаре—Биркгофа— Витте, 85
— Рисса, 193
— Сакаи, 29
— Томита—Такесаки, 60
— Хана—Банаха, 9
— Шура, 72
— фон Неймана, 122
термополевая динамика, 166
топологически сопряженное, 9
топологическое векторное пространство, 5
топология Джекобсона, 31
— Макки, 11
— Фелла, 79
— индуктивного предела, 8
— компактной сходимости, 8
— — — по всем производным, 8
— определяемая семейством преднорм, 7
— ослабленная, 198
— поточечной сходимости, 7, 158
— прямой суммы, 86
— равномерная, 7
— равномерной сходимости, 8
— — — на семействе множеств, 10, 12
— сильная, 10
— — операторная, 28
— слабая, 9
— — операторная, 28
— — определяемая пространством, 9
— слабая*, 10
— сходимости в среднем, 181
— — — порядка p, 181
— ультрасильная, 28
— ультраслабая, 28
— широкая, 179
— согласующаяся с двойственностью, 9
тотализирующий вектор, 30
— — сильно, 150
точка крайняя, 11
трансляционная квазиинвариантность, 114
трубчатое множество, 197
У
универсальная обертывающая алгебра, 85

— R-матрица, 133
универсальное представление, 38
унимодулярная группа, 187
уравнение Янга—Бакстера, 134
— Янга—Бакстера квантовое, 133
условие Бора—Зоммерфельда, 106
— Дирака, 98
— КМШ, 162
— КМШ для мер, 80
— сильной аналитичности, 60
— слабой аналитичности, 60
— справедливое почти всюду, 180
— целочисленности симплектической формы, 105
Ф
фактор, 29
фактор-представление, 31
фильтрующееся семейство, 182
фоковское представление, 122
— представление КАС, 131
форма Киллинга, 87
— ковариации, 189
— мажорирующая, 36
— ортогональная, 46
— положительная, 35
— нормальная, 53
— центральная, 45
— чистая, 39
— эрмитова, 13
— — невырожденная, 13
— — положительная, 13
формальная размерность, 70
формула Костанта—Сурьо, 105
формы связанные с представлением, 36
фундаментальная форма эрмитовой метрики, 23
функции быстро убывающие на бесконечности, 194
— интегрируемые, 181
— интегрируемые в p-степени, 181
функция Грина, 167
— Уайтмана, 199
— Швингера, 199
— антиголоморфная, 21
— аффинная, 192
— вогнутая, 192
— выпуклая, 192
— голоморфная, 21
— интегрируемая, 181
— модерантная, 183
— положительного типа, 68, 188
— — — чистая, 68
— пренебрежимая, 180
— существенно ограниченная, 33
Х
характер, 44
— группы, 71
— коммутативной алгебры, 47
характеристическая функция множества, 178
Ц
целые аналитические элементы, 61
центр универсальной обертывающей алгебры, 86
центральный носитель, 71
циклический вектор, 30
Э
эквивалентные представления, 30
экстремальное разложение, 47
элемент Гильберта—Шмидта, 42
— Казимира, 87
— положительный, 40
— — строго, 89
— со следом, 42
эрмитова метрика, 22
эрмитово многообразие, 23
Я
ядерная группа, 112
ядро положительного типа, 159

Алгебраический подход в квантовой теории основывается на предположении, что квантовая система характеризуется некоторой топологической инволютивной алгеброй A, но физически достоверными могут быть только значения той или

иной непрерывной положительной линейной формы на A, которые интерпретируются как средние значения наблюдаемых квантовой системы. При этом действие алгебры A на себя левыми умножениями выглядит под знаком формы f как ее представление в некотором гильбертовом пространстве. Это составляет содержание так называемой конструкции Гельфанда—Наймарка—Сигала *(конструкции ГНС)*.

В рамках алгебраического подхода были получены глубокие результаты, но провести, как надеялись, аксиоматическое построение квантовой теории в целом не удалось. Одна из причин неудачи заложена в исходном постулате алгебраического подхода. Вышеупомянутая форма f на алгебре наблюдаемых с точностью до постоянного множителя определяется своим ядром $f^1(0)$. Таким образом, задание средних значений — это задание аннулятора на алгебре квантовой системы. Следовательно сама эта алгебра по средним значениям реконструируется не полностью и остается, вообще говоря, неизвестной.

Поэтому в данной книге мы не обсуждаем аксиоматику алгебр наблюдаемых квантовых систем (см., например, [25]), а следуем конструктивному подходу, когда квантовые наблюдаемые отождествляются с эрмитовыми элементами топологических инволютивных алгебр. В квантовой механике это, как правило, нормированные алгебры, выполняемые ограниченными операторами в гильбертовых пространствах. В алгебраической квантовой теории поля алгебры квантовых полей не нормированы [24].

По алгебраической квантовой теории существует обширнейшая литература. Эта теория имеет много аспектов, которые ни по методам, ни по кругу решаемых задач не выстраиваются в какую-либо единую логическую схему. Суммировать их все в рамках одной монографии невозможно. Поэтому в данной книге затронуты в основном те стороны алгебраической квантовой теории, которые так или иначе имеют выход в квантовую теорию поля. При этом, как и в предыдущих томах, мы уделяем основное внимание не моделям, а методам и идеям, на которых эти методы основаны. Чтобы сделать изложение компактным, мы опускаем, как правило, доказательства приводимых утверждений и теорем, отсылая читателя за деталями к цитируемой литературе.

В отношении алгебраической квантовой теории поля мы решаем тоже ограниченную, но более близкую к реалистическим моделям задачу, сводя описание квантовых полей к заданию производящих функционалов их хронологических вакуумных средних. Под знаком такой формы квантовые поля (будем говорить для определенности о скалярном поле) коммутируют, и их алгебру можно заменить соответствующей коммутативной тензорной алгеброй, которая, в свою очередь, представляет собой обертывающую алгебру коммутативной алгебры Ли трансляций в бесконечномерном ядерном пространстве Q. Состояние на такой алгебре задается функцией Z положительного типа на Q и имеет смысл производящего функционала. Она является преобразованием Фурье некоторой положительной меры на сопряженном к Q пространстве обобщенных функций, т.е. записывается в виде функционального интеграла. Это важно, поскольку широко применяемые сейчас в

квантовой теории поля функциональные интегралы строятся обычно как формальный предел мер в конечномерных пространствах и на них иногда необоснованно экстраполируются свойства этих мер, например, трансляционная инвариантность меры Лебега.

Введение

Алгебраический подход в квантовой теории основывается на предположении, что квантовая система характеризуется некоторой топологической инволютивной алгеброй A, но физически достоверными могут быть только значения той или иной непрерывной положительной линейной формы на A, которые интерпретируются как средние значения наблюдаемых квантовой системы. При этом действие алгебры A на себя левыми умножениями выглядит под знаком формы f как ее представление в некотором гильбертовом пространстве. Это составляет содержание так называемой конструкции Гельфанда—Наймарка—Сигала (*конструкции ГНС*).

В рамках алгебраического подхода были получены глубокие результаты, но провести, как надеялись, аксиоматическое построение квантовой теории в целом не удалось. Одна из причин неудачи заложена в исходном постулате алгебраического подхода. Вышеупомянутая форма f на алгебре наблюдаемых с точностью до постоянного множителя определяется своим ядром $f^{-1}(0)$. Таким образом, задание средних значений — это задание аннулятора на алгебре квантовой системы. Следовательно сама эта алгебра по средним значениям реконструируется не полностью и остается, вообще говоря, неизвестной.

Поэтому в данной книге мы не обсуждаем аксиоматику алгебр наблюдаемых квантовых систем (см., например, [25]), а следуем конструктивному подходу, когда квантовые наблюдаемые отождествляются с эрмитовыми элементами топологических инволютивных алгебр. В квантовой механике это, как правило, нормированные алгебры, выполняемые ограниченными операторами в гильбертовых пространствах. В алгебраической квантовой теории поля алгебры квантовых полей не нормированы [24].

По алгебраической квантовой теории существует обширнейшая литература. Эта теория имеет много аспектов, которые ни по методам, ни по кругу решаемых задач не выстраиваются в какую-либо единую логическую схему. Суммировать их все в рамках одной монографии невозможно. Поэтому в данной книге затронуты в основном те стороны алгебраической квантовой теории, которые так или иначе имеют выход в квантовую теорию поля. При этом, как и в предыдущих томах, мы уделяем основное внимание не моделям, а методам и идеям, на которых эти методы основаны. Чтобы сделать изложение компактным, мы опускаем, как правило, доказательства приводимых утверждений и теорем, отсылая читателя за деталями к цитируемой литературе.

В отношении алгебраической квантовой теории поля мы решаем тоже ограниченную, но более близкую к реалистическим моделям задачу, сводя описание квантовых полей к заданию производящих функционалов их хронологических вакуумных средних. Под знаком такой формы квантовые поля (будем говорить для определенности о скалярном поле) коммутируют, и их алгебру можно заменить соответствующей коммутативной тензорной алгеброй, которая, в свою очередь, представляет собой обертывающую алгебру коммутативной алгебры Ли трансляций в бесконечномерном ядерном пространстве Q. Состояние на такой алгебре задается функцией Z положительного типа

на Q и имеет смысл производящего функционала. Она является преобразованием Фурье некоторой положительной меры на сопряженном к Q пространстве обобщенных функций, т.е. записывается в виде функционального интеграла. Это важно, поскольку широко применяемые сейчас в квантовой теории поля функциональные интегралы строятся обычно как формальный предел мер в конечномерных пространствах и на них иногда необоснованно экстраполируются свойства этих мер, например, трансляционная инвариантность меры Лебега.

Глава 1

Пространства

Эта глава посвящена пространствам, с которыми имеет дело алгебраическая квантовая теория. К ним относятся всевозможные бесконечномерные топологические векторные пространства, в том числе гильбертовы пространства, в которых реализуются представления алгебр наблюдаемых.

§ 1. Топологические векторные пространства

Мы ограничимся в этом параграфе вещественными векторными пространствами.

Топологическое векторное пространство E над $\mathbb{R}$ — это векторное пространство, наделенное топологией, согласующейся с его алгебраической структурой, т. е. операции сложения векторов и их умножения на числа непрерывны. Более того, эти операции являются гомеоморфизмами и топология E определяется базисом окрестностей его начала.

Приведем основные понятия (см. [5, 17]).

Подмножество топологического векторного пространства, если оно само является векторным пространством, называется векторным подпространством. Замыкание векторного подпространства является векторным подпространством. Максимальное собственное векторное подпространство именуется *гиперподпространством*. Гиперподпространство либо замкнуто, либо плотно.

Подмножество V векторного пространства E называется *выпуклым*, если линейная комбинация $\lambda x + \mu y$ принадлежит V для всех элементов $x, y \in V$ и чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям: $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$. В частности, пересечение любого семейства выпуклых множеств выпукло. Если V выпукло, то множество $x + \lambda V$ тоже выпукло для любых $x \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть V — подмножество E. Множество всевозможных конечных линейных комбинаций $\lambda_i x^i$, где $x^i \in V$, $\lambda_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_i \lambda_i = 1$, выпукло и называется *выпуклой оболочкой* подмножества V. Это наименьшее выпуклое подмножество E, содержащее V.

Подмножество V называется *уравновешенным*, если $\lambda x \in V$ для всех $x \in V$ и таких λ, что $|\lambda| \leqslant 1$.

В топологическом векторном пространстве замыкание выпуклого (соотв. уравновешенного) множества выпукло (соотв. уравновешено). В частности, замыкание выпуклой оболочки подмножества V выпукло. Оно называется *замкнутой выпуклой оболочкой* V.

Подмножество V называется *абсолютно выпуклым*, если оно и выпукло, и уравновешено, т. е. $\lambda x + \mu y \in V$ для всех $x, y \in V$ и таких чисел λ, μ, что $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$. В частности, если подмножества V и W абсолютно выпуклы, то подмножество $V + W$, образованное суммами элементов из V и W, и подмножество λV тоже абсолютно выпуклы.

Говорят, что подмножество V топологического векторного пространства E является *поглощающим*, если для каждого элемента $x \in E$ существует такое $\lambda > 0$, что $x \in \varepsilon V$ для всех ε, $|\varepsilon| > \lambda$.

Абсолютно выпуклое множество V является поглощающим тогда и только тогда, когда оно *порождает* E, т. е.

$$E = \bigcup_n nV, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть E — топологическое векторное пространство и $\mathcal{U}_0$ — его *базис* (фундаментальная система) окрестностей начала. Легко видеть, что для всякой окрестности начала $U \in \mathcal{U}_0$ имеют место следующие свойства:

- U — поглощающее множество;
- существует окрестность $V \in \mathcal{U}_0$ такая, что $V + V \subset U$;
- существует уравновешенная окрестность $W \subset U$.

Из последнего следует, что в каждом топологическом векторном пространстве имеется базис уравновешенных окрестностей начала.

Топологическое векторное пространство E называется *локально выпуклым*, если в нем имеется базис выпуклых окрестностей начала. Очевидно, что в таком пространстве существует базис абсолютно выпуклых и поглощающих окрестностей начала, обладающих свойствами:

- если $U \in \mathcal{U}_0$, то $\lambda U \in \mathcal{U}_0$ для всех $\lambda \neq 0$;
- для любых $U, V \in \mathcal{U}_0$ существует окрестность $W \in \mathcal{U}_0$ такая, что $W \subset U \cap V$.

Обратно, если в векторном пространстве E задано семейство абсолютно выпуклых и поглощающих множеств с приведенными выше свойствами, то в E существует локально выпуклая топология, в которой это семейство составляет базис окрестностей начала.

В дальнейшем мы будем рассматривать только локально выпуклые топологические векторные пространства. Топология в таких пространствах определяется системами преднорм.

Определение 1.1.1. Неотрицательная (принимающая конечные значения) функция p на векторном пространстве E называется *преднормой* (или *полунормой*), если она удовлетворяет условиям

$$p(x) \geqslant 0, \qquad p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x), \qquad p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$$

для всех $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Невырожденная преднорма p, когда $p(x) = 0$ влечет $x = 0$, называется *нормой*. □

Пусть p — преднорма на E. Тогда множества $\{x : \ p(x) < \varepsilon\}$ и $\{x : \ p(x) \leqslant \varepsilon\}$ для любого $\varepsilon > 0$ абсолютно выпуклые и поглощающие. Обратно, каждому абсолютно выпуклому и поглощающему множеству $V \subset E$ соответствует преднорма

$$p_V(x) = \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda V\}$$

на E, обладающая свойством

$$\{x : \ p_V(x) < 1\} \subset V \subset \{x : \ p_V(x) \leqslant 1\}.$$

Преднорма p_V именуется *калибровочной функцией множества* V. Пусть E — топологическое векторное пространство. Калибровочная функция p_V на E непрерывна тогда и только тогда, когда V — окрестность. В этом случае $\{x:\ p_V(x) < 1\}$ — внутренность, а $\{x:\ p_V(x) \leqslant 1\}$ — замыкание множества V в E.

Указанная связь между преднормами и абсолютно выпуклыми поглощающими множествами и позволяет определять топологию локально выпуклого векторного пространства посредством преднорм.

Теорема 1.1.2. Пусть на векторном пространстве E задано некоторое семейство преднорм $Q = \{p_i,\ i \in I\}$, индексируемое множеством I. Тогда в E существует слабейшая топология, в которой каждая преднорма из семейства Q непрерывна. В этой топологии E является локально выпуклым топологическим векторным пространством с базисом замкнутых окрестностей начала, образованным множествами вида

$$\{x:\ \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i(x) \leqslant \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0, \qquad p_i \in Q, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Говорят, что эта топология *определяется семейством преднорм* Q. □

Заметим, что топология, определяемая семейством преднорм, в общем случае не отделима. Она отделима тогда и только тогда, когда для каждого ненулевого элемента $x \in E$ существует преднорма $p \in Q$ такая, что $p(x) > 0$.

В частности, пусть p — норма на векторном пространстве E. Топология в E, задаваемая семейством Q, состоящим из одного элемента p, называется *равномерной*. Она является метрической топологией с функцией расстояния

$$\rho(x, y) = p(x - y)$$

и отделимой. В свою очередь, топологическое векторное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно отделимо и обладает счетным базисом окрестностей начала. Не всякое метризуемое топологическое векторное пространство является нормированным. Полное нормированное векторное пространство называется *банаховым*, а полное метризуемое векторное пространство — *пространством Фреше*.

Замечание 1.1.1. Топологическое векторное пространство называется *полным*, если всякий фильтр Коши в нем сходится. Всякое нормированное векторное пространство и всякое метризуемое векторное пространство всегда могут быть минимальным образом расширены до полных векторных пространств, называемых их *пополнением*. □

Замечание 1.1.2. Топологическое пространство именуется *сепарабельным*, когда его топология имеет счетную базу. Если пространство метризуемо, то оно сепарабельно тогда и только тогда, когда в этом пространстве существует плотное счетное множество. □

Приведем некоторые примеры топологических векторных пространств.

Пример 1.1.3. В конечномерном векторном пространстве единственной отделимой топологией является евклидова. □

Пример 1.1.4. Пусть X — произвольное множество. Векторное пространство всех вещественных или комплексных функций f на X можно сделать локально выпуклым пространством, наделив его *топологией поточечной сходимости*, определяемой преднормами

$$p_x(f) = |f(x)|$$

для каждого $x \in X$. □

Пример 1.1.5. Векторное пространство $L(K)$ непрерывных вещественных функций f на компактном топологическом пространстве K допускает метрическую топологию *равномерной сходимости* на K, определяемую нормой

$$\| f \| = \sup_{x \in K} |f(x)| . \tag{1.1}$$

□

Пример 1.1.6. Пространство $L(X)$ непрерывных вещественных функций на топологическом (не обязательно компактном) пространстве X может быть наделено *топологией компактной сходимости*, задаваемой семейством преднорм

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| , \tag{1.2}$$

где K — всевозможные компактные подмножества X. Обозначим $\mathcal{K}(X)$ плотное в $L(X)$ относительно топологии компактной сходимости пространство непрерывных вещественных функций с компактным носителем. Это банахово пространство относительно нормы (1.1). Однако соответствующая равномерная топология в нем сильнее топологии компактной сходимости, определяемой преднормами (1.2). В дальнейшем, если особо не оговаривается, будет подразумеваться, что $\mathcal{K}(X)$ снабжено именно топологией компактной сходимости.

В то же время пространство $\mathcal{K}(X)$ может быть наделено еще одной топологией, которая сильнее и топологии компактной сходимости, и равномерной топологии. Это *топология индуктивного предела*, особенно приспособленная к теории интегрирования. Для каждого компактного множества $K \subset X$ обозначим $\mathcal{K}_K(X)$ векторное подпространство пространства $\mathcal{K}(X)$, состоящее из тех функций, носитель которых содержится в K. Пусть $\mathcal{U}$ — множество всех абсолютно выпуклых поглощающих подмножеств U из $\mathcal{K}(X)$ таких, что $U \cap \mathcal{K}_K(X)$ для каждого K есть окрестность в $\mathcal{K}_K(X)$, наделенном топологией равномерной сходимости в K. Тогда $\mathcal{U}$ — базис окрестностей локально выпуклой топологии в $\mathcal{K}(X)$, индуцирующей на каждом $\mathcal{K}_K(X)$ топологию, мажорируемую топологией равномерной сходимости. □

Пример 1.1.7. Пространство бесконечно дифференцируемых функций на прямой $\mathbb{R}$ допускает локально выпуклую метризуемую топологию *компактной сходимости по всем производным*, определяемую преднормами

$$p_{mn}(f) = \sup_{x \in [-n,n]} \left| f^{(m)}(x) \right| , \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad n = 1, \ldots . \tag{1.3}$$

□

§ 2. Сопряженные пространства

Рассмотрим множество E^* линейных форм на векторном пространстве E. Это векторное пространство, именуемое *алгебраически сопряженным* к E. Пусть $f \in E^*$ — ненулевая линейная форма на E. Ее ядро $f^{-1}(0)$ образует гиперподпространство пространства E. Всякая ненулевая линейная форма на E полностью определяется заданием своего ядра и значением в некоторой не принадлежащей ядру точке. В частности, для любого гиперпространства в E всегда существует линейная форма, ядром которой

оно является. Линейная форма на топологическом векторном пространстве непрерывна тогда и только тогда, когда ее ядро замкнуто. Приведем один из вариантов *теоремы Хана—Банаха* о продолжении непрерывной линейной формы.

Теорема 1.2.1. Любая непрерывная линейная форма, заданная на векторном подпространстве (локального выпуклого) топологического векторного пространства E, допускает непрерывное линейное продолжение на все E, хотя, конечно, не единственное. □

Определение 1.2.2. Обозначим E' векторное подпространство пространства E^*, состоящее из всех непрерывных линейных форм на топологическом векторном пространстве E. Оно называется *топологически сопряженным* или просто *сопряженным* к E. □

Отображение

$$\tilde{x} : f \to f(x), \qquad x \in E, \qquad f \in E', \tag{1.4}$$

определяет вложение векторного пространства E в векторное пространство E'^*. Приведем одно из следствий теоремы Хана—Банаха.

Следствие 1.2.3. Пусть E — отделимое топологическое векторное пространство с сопряженным E'. Если $f(x) = 0$ для всех $f \in E'$, то $x = 0$. □

Рассмотрим топологии, которые вводятся в сопряженном пространстве.

Начнем с конструкции, обобщающей понятие сопряженного пространства. Пусть E и F — два векторных пространства, и на произведении $E \times F$ задана билинейная форма $\langle x, y\rangle$, удовлетворяющая условию, что для каждого элемента $x \neq 0$ из E существует такой элемент $y \in F$, что $\langle x, y\rangle \neq 0$, и соответственно для каждого элемента $y \neq 0$ из F существует такой элемент $x \in E$, что $\langle x, y\rangle \neq 0$. Тогда имеет место естественный мономорфизм F в E^*, при котором образом $y \in F$ служит форма $\tilde{y}(x) = \langle x, y\rangle$. Соответственно задается мономорфизм E в F^*. В этом случае говорят, что (E, F) — *дуальная пара*. Очевидно, если (E, F) — дуальная пара, то (F, E) — тоже дуальная пара.

Пусть (E, F) — дуальная пара. Каждому элементу $y \in F$ отвечает преднорма

$$p_y(x) = |\langle x, y\rangle|$$

на E. Топологию в E, задаваемую системой таких преднорм $\{p_y,\ y \in F\}$, называют *слабой топологией, определяемой пространством* F, и обозначают $\sigma(E, F)$. Множества

$$\Big\{x : \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle x, y_i\rangle| \leqslant 1\Big\}, \tag{1.5}$$

где $\{y_i\}$ — всевозможные конечные наборы элементов из F, образуют базис замкнутых окрестностей начала в топологии $\sigma(E, F)$, которая локально выпукла и отделима.

Значение топологии $\sigma(E, F)$ состоит в том, что всякий элемент из F является непрерывной формой на векторном пространстве E, наделенном этой топологией, т. е. $F \subset E'$. Более того, можно показать, что F совпадает с сопряженным пространством E' к векторному пространству E, наделенному топологией $\sigma(E, F)$. Однако это не единственная топология в E, которая обладает таким свойством. Всякая локально выпуклая топология в векторном пространстве E, дающая в качестве сопряженного к E пространство F, называется *топологией, согласующейся с двойственностью* между E и F. Топология $\sigma(E, F)$ является слабейшей из них.

В частности, пусть E — отделимое топологическое векторное пространство, E' — его сопряженное и $\langle , \rangle$ — естественная билинейная форма на $E \times E'$. Тогда (E, E') — дуальная пара. Топология $\sigma(E, E')$ в E называется *слабой*. Это слабейшая топология в E,

при которой все линейные формы из E' непрерывны. В частности, она слабее исходной топологии в E.

Введем топологию и в сопряженном пространстве E', исходя из того, что (E', E) — тоже дуальная пара. В E' может быть задана топология $\sigma(E', E)$, которая называется *слабой**. Это такая топология, что для всякого элемента $x \in E$ форма $\tilde{x}$ (1.4) на E' является непрерывной, и сопряженным к E', наделенному слабой* топологией, служит E.

Замечание 1.2.1. Отметим противоречивость встречающейся в литературе терминологии. Например, в [5] слабая топология в E называется ослабленной, а слабая* топология в E' — просто слабой. □

Слабая* топология в сопряженном пространстве E' представляет собой частный (слабейший) случай так называемых топологий равномерной сходимости в E' на семействе подмножеств из E. Опишем эти топологии.

Напомним, что подмножество V топологического векторного пространства называется *ограниченным*, если оно поглощается всякой окрестностью начала U, т.е. $V \subset \lambda U$, $\lambda \in \mathbb{R}$, начиная с некоторого значения $|\lambda|$.

Замечание 1.2.2. Отметим, что согласно *теореме Колмогорова* отделимое топологическое векторное пространство, содержащее ограниченную окрестность начала, нормируемо. Отсюда следует, между прочим, что шары $\{x : \rho(x) \leqslant \varepsilon\}$ метризуемого ненормированного векторного пространства не являются ограниченными множествами. □

Пусть (E, E') — дуальная пара и $\mathcal{V}$ — некоторое семейство *слабо ограниченных* (т.е. ограниченных в слабой топологии) подмножеств из E (напомним, что E отделимо). Рассмотрим подмножества

$$V' = \Big\{ y \in E' : \sup_{x \in V} |\langle x, y \rangle| \leqslant 1 \Big\}, \qquad V \in \mathcal{V}, \tag{1.6}$$

сопряженного пространства E'. Они абсолютно выпуклые и поглощающие. Их калибровочные функции

$$p_{V'}(y) = \sup_{x \in V} |\langle x, y \rangle|, \qquad V \in \mathcal{V}, \tag{1.7}$$

образуют систему преднорм на E'. Следовательно, в E' существует слабейшая топология, в которой подмножества (1.6) образуют базис окрестностей начала. Она называется *топологией равномерной сходимости на семействе подмножеств* $\mathcal{V}$.

В случае, когда $\mathcal{V}$ — семейство всех конечных подмножеств векторного пространства E, топология равномерной сходимости на этом семействе совпадает с введенной выше слабой* топологией в E' и является слабейшей из всех топологий равномерной сходимости. Отсюда, в частности, следует, что всякая топология равномерной сходимости отделима. Сильнейшая топология равномерной сходимости отвечает семейству всех слабо ограниченных подмножеств из E. Она называется *сильной топологией* в E'. Пространство, сопряженное к E' в случае сильной топологии в E', называется *вторым сопряжением* к E и обозначается E''. Говорят, что пространство E *рефлексивно*, если оно изоморфно своему второму сопряжению E''.

Рассматривая дуальную пару (E', E), пространство E также можно наделить топологией равномерной сходимости на семействе подмножеств из E' (например, *слабой** и *сильной* топологиями). Более того, каждая отделимая локально выпуклая топология в E является топологией равномерной сходимости на семействе подмножеств из E'. Сильнейшей из них является сильная топология в E. Однако не всякая топология равномерной сходимости согласуется с двойственностью между E и E'. Для этого необходимо и достаточно, чтобы она была топологией равномерной сходимости на каком-

либо семействе абсолютно выпуклых слабо* компактных подмножеств из E' (*теорема Макки—Аренса*). Среди таких топологий есть сильнейшая — топология равномерной сходимости на семействе всех абсолютно выпуклых слабо* компактных подмножеств E'. Она называется *топологией Макки.*

Предложение 1.2.4. Для всех топологий в отделимом топологическом векторном пространстве E, согласующихся с двойственностью между E и E', ограниченные множества одни и те же. □

Пример 1.2.3. Пусть E — нормированное пространство. Рассмотрим семейство всех шаров $\{x : \| x \| \leqslant \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ в E. Топология равномерной сходимости на этом семействе совпадает с равномерной топологией в E', задаваемой нормой

$$\| y \| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, y \rangle| \tag{1.8}$$

на E', а также с сильной топологией, поскольку ограниченные по норме множества в E совпадают со слабо ограниченными. Единичные шары нормированного пространства E' слабо компактны (*теорема Алаоглу—Бурбаки*), и топология Макки в E совпадает с сильной и исходной равномерной топологиями в E.

Пусть $\overline{E}$ — банахово пространство, получаемое пополнением нормированного пространства E. Тогда E' канонически отождествимо с $(\overline{E})'$ как нормированное пространство. Однако слабые* топологии в E' и $(\overline{E})'$ различны. Подчеркнем, что E' и второе сопряжение E'' являются банаховыми пространствами и что нормированное пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда его единичный шар слабо компактен. Если E — банахово пространство, то оно замкнуто в E'' в сильной топологии в E'' и плотно в слабой* топологии в E''. Слабая* топология в банаховом пространстве E совпадает с топологией $\sigma(E, F)$, где $F \subset E$ и $F' = E \subset E''$.

Таким образом, резюмируя вышесказанное, в банаховых пространствах обычно рассматриваются слабая, слабая* и сильная, она же равномерная, топологии. □

Замечание 1.2.4. Скажем несколько слов о компактных подмножествах отделимого топологического векторного пространства E. Компактное множество в таком пространстве замкнуто и ограничено. Если в E существует компактная окрестность начала, то оно конечномерно. Например, локально компактные векторные пространства конечномерны. Напомним, что точка x выпуклого множества V в векторном пространстве E называется *крайней*, если из соотношения

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z, \qquad y, z \in V,$$

следует, что $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$. Каждое компактное выпуклое множество в отделимом топологическом векторном пространстве представляет собой замкнутую выпуклую оболочку множества своих крайних точек. Пусть V — компактное множество, обладающее компактной замкнутой выпуклой оболочкой W. Тогда каждая крайняя точка множества W принадлежит V. □

§ 3. Пространства линейных отображений

Рассмотрим линейные отображения топологических векторных пространств и приведем соотношения между условиями непрерывности этих отображений относительно различных топологий.

Линейное отображение отделимого топологического векторного пространства E в отделимое топологическое векторное пространство F называется *слабо непрерывным*, если оно непрерывно при наделении E и F слабыми топологиями.

Предложение 1.3.1. Непрерывное отображение E в F также слабо непрерывно. При этом, если топология в E — это топология Макки, то каждое слабо непрерывное отображение E в F непрерывно. □

Всякое линейное отображение $\gamma : E \to F$ порождает соответствующее линейное отображение $\gamma' : F' \to E'$, определяемое соотношением

$$\langle x, \gamma'(y)\rangle = \langle \gamma(x), y\rangle, \qquad x \in E, \qquad y \in F'. \tag{1.9}$$

Оно называется *сопряженным* к γ.

Предложение 1.3.2. Если γ слабо непрерывно, то γ' слабо* непрерывно. □

Пример 1.3.1. Если E и F нормированные пространства, то всякое слабо непрерывное отображение $\gamma : E \to F$ является непрерывным и сильно непрерывным, а для непрерывности сопряженного отображения γ' (относительно равномерных топологий в E и F) необходима и достаточна непрерывность γ. □

Обозначим $L(E, F)$ векторное пространство непрерывных линейных отображений топологического векторного пространства E в топологическое векторное пространство F. Введем топологию в $L(E, F)$ по аналогии с топологизацией сопряженного пространства.

Пусть $\mathcal{V}$ — некоторое семейство ограниченных множеств из E, и пусть $\mathcal{U}_0$ — базис абсолютно выпуклых окрестностей начала в F. Для каждого множества $V \in \mathcal{V}$ и каждой окрестности $U \in \mathcal{U}_0$ положим

$$W_{V,U} = \{\gamma : \ \gamma(V) \subset U\}, \qquad \gamma \in L(E, F).$$

Множества $W_{U,V}$ являются абсолютно выпуклыми и поглощающими. Они определяют в $L(E, F)$ локально выпуклую топологию, называемую *топологией равномерной сходимости на семействе множеств* $\mathcal{V}$. Эта топология определяется также семейством преднорм, когда каждому множеству $V \in \mathcal{V}$ и всякой непрерывной преднорме p на F ставится в соответствие преднорма

$$p_V(\gamma) = \sup_{x \in V} p(\gamma(x)) \tag{1.10}$$

на $L(E, F)$. Сильнейшая такая топология получается, если в качестве $\mathcal{V}$ взято множество всех ограниченных подмножеств пространства E. В частности, если E и F — нормированные пространства, то пространство $L(E, F)$ тоже нормируемо с нормой

$$\| \gamma \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| \gamma(x) \| . \tag{1.11}$$

§ 4. Гильбертовы пространства

Пусть теперь E — комплексное векторное пространство. Заметим, что все изложенное ниже легко переносится и на вещественные векторные пространства. Поэтому можно говорить о вещественных предгильбертовых и гильбертовых пространствах.

При этом вещественные отделимые предгильбертовы пространства — это вещественные нормированные пространства, а вещественные гильбертовы пространства — это вещественные банаховы пространства (см. ниже Замечание 1.4.1).

Определение 1.4.1. *Эрмитовой формой* на E называется комплексная функция ϕ на $E \times E$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}, \qquad x, y \in E,$$
$$\phi(x + z, y) = \phi(x, y) + \phi(z, y),$$
$$\phi(\lambda x, y) = \lambda\phi(x, y), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

□

Говорят, что эрмитова форма ϕ *положительна*, если $\phi(x, x) \geqslant 0$ при всех $x \in E$. Положительная форма обладает свойством

$$\phi(x, y)^2 \leqslant \phi(x, x)\phi(y, y). \tag{1.12}$$

Она называется *невырожденной*, если $\phi(x, x) > 0$ для всех $x \neq 0$.

Векторное пространство E, наделенное положительной эрмитовой формой, именуется *предгильбертовым*. В дальнейшем эрмитову форму, задающую на E структуру предгильбертова пространства, будем обозначать $\langle .|. \rangle_E$ или просто $\langle .|. \rangle$. Она наделяет предгильбертово пространство E преднормой

$$\| x \| = \langle x|x \rangle^{1/2} \tag{1.13}$$

и соответствующей топологией. В этом случае положительная эрмитова форма на E называется *скалярным произведением*. При этом для отделимости E необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение $\langle .|. \rangle$ было невырождено, т. е. преднорма (1.13) была нормой. Изоморфизм γ предгильбертова пространства E на предгильбертово пространство F предполагает, что

$$\big\langle \gamma(x)|\gamma(y) \big\rangle_F = \langle x|y \rangle_E.$$

Замечание 1.4.1. Легко убедиться, что в случае вещественного нормированного пространства E норма $\| \cdot \|$ на E задает вещественную невырожденную положительную эрмитову форму

$$\langle x|y \rangle = \frac{1}{4}\big(\| x + y \| - \| x - y \| \big)$$

на E, превращая его в отделимое вещественное предгильбертово пространство. В свою очередь, всякое предгильбертово пространство имеет структуру вещественного нормированного пространства. □

Наличие эрмитовой формы позволяет ввести понятие ортогональности векторов предгильбертова пространства.

Семейство $\{e_i,\ i \in I\}$ векторов предгильбертова пространства E называется *ортонормальным*, если векторы e_i и e_j ортогональны при $i \neq j$ и $\| e_i \| = 1$ для всех $i \in I$. Справедливы следующие утверждения.

- Каждое ортонормальное семейство в отделимом предгильбертовом пространстве *топологически свободно*, т. е. каков бы ни был индекс $j \in I$, замкнутая линейная оболочка векторов $\{e_i,\ i \neq j\}$ не содержит e_j.

- Для каждого $x \in E$ множество тех $i \in I$, для которых $\langle x|e_i\rangle \neq 0$, не более чем счетно и имеет место соотношение

$$\sum_{i\in I}\langle x|e_i\rangle^2 \leqslant \| x \|^2 .$$

Ортонормальное семейство векторов $\{e_i,\ i \in I\}$ называется *тотальным (полным)*, если его линейная оболочка плотна в E. Для этого необходимо и достаточно, чтобы из условия, что $\langle x|e_i\rangle = 0$ для всех e_i, следовало $x = 0$. Тогда для всякого $x \in E$ имеет место выражение

$$x = \sum_{i\in I}\langle x|e_i\rangle e_i, \qquad \| x \|^2 = \sum_{i\in I}\left|\langle x|e_i\rangle\right|^2.$$

Если семейство $\{e_i,\ i \in I\}$ тотально, то для всякого набора чисел $\{\lambda^i,\ i \in I\}$ таких, что

$$\sum_{i\in I}|\lambda^i|^2 < \infty,$$

существует элемент $x \in E$, для которого $\langle x|e_i\rangle = \lambda^i$ при каждом i. Если $\{\beta^i,\ i \in I\}$ — другое такое же семейство чисел и y — соответствующий вектор, то

$$\langle x|y\rangle = \sum_i \lambda^i\overline{\beta}^i.$$

Тотальное ортонормальное семейство векторов $\{e_i,\ i \in I\}$ в отделимом предгильбертовом пространстве E называется *ортонормальным базисом* этого пространства, а числа $\langle x|e_i\rangle$ — координатами вектора $x \in E$ относительно базиса $\{e_i\}$. Подчеркнем, что ортонормальный базис в отделимом предгильбертовом пространстве существует не всегда.

Определение 1.4.2. Полное отделимое предгильбертово пространство называется *гильбертовым пространством*. □

Любое отделимое предгильбертово пространство единственным образом может быть пополнено до гильбертова пространства. При этом ортонормальный базис предгильбертова пространства (если он существует) становится и ортонормальным базисом его пополнения.

В каждом гильбертовом пространстве существует ортонормальный базис, и всякое ортонормальное семейство векторов содержится в некотором ортонормальном базисе. Причем все ортонормальные базисы гильбертова пространства имеют одну и ту же мощность, называемую *гильбертовой размерностью* этого пространства. В частности, если гильбертова размерность не более чем счетна, то гильбертово пространство является *сепарабельным*; справедливо и обратное утверждение.

Всегда имеется автоморфизм гильбертова пространства, преобразующий один ортонормальный базис в другой.

Приведем некоторые операции с гильбертовыми пространствами.

Пусть E' — сопряженное к гильбертову пространству E. Отображение

$$y \mapsto \overline{y}(x) \ =^{\text{def}} \ \langle x|y\rangle, \qquad x, y \in E, \tag{1.14}$$

осуществляет биективное отображение нормированного пространства E на нормированное пространство E' с нормой (1.8). Это отображение *антилинейно*, т. е. $\overline{(\lambda y)} = \overline{\lambda}\overline{y}$. При этом

$$\|\overline{y}\|_{E'} = \|y\|_E.$$

Более того, E' наделяется скалярным произведением

$$\langle \overline{y} | \overline{x} \rangle' = \langle x | y \rangle. \tag{1.15}$$

Пространство E' изоморфно гильбертову пространству $\overline{E}$, получаемому из E путем наделения E внешней композицией

$$(\lambda, x) = \overline{\lambda} x.$$

Оно называется *дуальным* к E.

Пусть $\{E^\alpha\}$ — семейство гильбертовых пространств. Обозначим $\prod E^\alpha$ произведение векторных пространств E^α из этого семейства, а $\sum E^\alpha$ — их *прямую сумму*. Последняя представляет собой подпространство $\prod E^\alpha$, образованное теми точками $x \in \prod E^\alpha$, у которых $x^\alpha \neq 0$ лишь для конечного числа индексов α. Для любой пары элементов $x = (x^\alpha)$ и $y = (y^\alpha)$ из $\sum E^\alpha$ определена сумма

$$\langle x | y \rangle_{\sum E^\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\alpha \langle x^\alpha | y^\alpha \rangle_{E^\alpha}, \tag{1.16}$$

которая задает на $\sum E^\alpha$ невырожденную положительную эрмитову форму и наделяет $\sum E^\alpha$ структурой отделимого предгильбертова пространства. *Гильбертовой суммой*

$$E = \bigoplus_\alpha E^\alpha$$

семейства гильбертовых пространств $\{E^\alpha\}$ называется пополнение $\sum E^\alpha$ по форме (1.16). Его можно отождествить с подпространством произведения $\prod E^\alpha$, состоящим из точек x, для которых

$$\sum_\alpha \| x^\alpha \|_{E^\alpha} < \infty.$$

При этом объединение ортонормальных базисов гильбертовых пространств E^α составляет ортонормальный базис предгильбертова пространства $\sum E^\alpha$ и гильбертовой суммы E.

Аналогично определяется тензорное произведение гильбертовых пространств. Пусть E и H — два гильбертовых пространства. Обозначим S векторное пространство всех билинейных форм на произведении $E \times H$. Пусть S^* — его алгебраическое сопряженное. Существует естественное отображение

$$\varrho : (x, y) \mapsto \varrho(x, y)(z) = z(x, y), \quad x \in E, \quad y \in F, \quad z \in S,$$

произведения $E \times H$ в S^*. Его образ, вообще говоря, не является векторным подпространством. Рассмотрим линейную оболочку T образа $\varrho(E \times H)$ в S^*. Каждый ее элемент может быть записан в виде конечной суммы

$$w = \sum_\alpha x^\alpha \otimes y^\alpha, \qquad x^\alpha \in E, \qquad y^\alpha \in F,$$

хотя и не единственным образом. Тем не менее пространство T может быть наделено положительной невырожденной эрмитовой формой

$$\langle w_1|w_2\rangle = \sum_{\alpha,\beta}\left\langle x_1^\alpha|x_2^\beta\right\rangle_E\left\langle y_1^\alpha|y_2^\beta\right\rangle_H,$$

которая превращает его в отделимое предгильбертово пространство. Пополнение T по этой форме называется *тензорным произведением* $E\otimes H$ гильбертовых пространств E и H. Пусть $\{e_i\}$ и $\{h_j\}$ — ортонормальные базисы гильбертовых пространств E и H соответственно. Тогда семейство $\{e_i\otimes h_j\}$ составляет ортонормальный базис предгильбертова пространства T и гильбертова пространства $E\otimes H$.

§ 5. Операторы в гильбертовых пространствах

Если специально не оговорено, оператором в гильбертовом пространстве E называется непрерывное линейное отображение $E\to E$ как топологических векторных пространств. Всякий такой оператор *а ограничен*, т. е. существует такое число λ, что

$$\|ax\|\leqslant\lambda\|x\|,\qquad \forall x\in E.$$

В частности, всякий оператор a в гильбертовом пространстве наделен *операторной нормой*

$$\|a\| = \sup_{\|x\|_E=1}\|ax\|_E. \tag{1.17}$$

Замечание 1.5.1. В отличие от квантовой теории поля, в квантовой механике мы имеем дело, как правило, с ограниченными операторами. Пример неограниченных операторов дают дифференцирования — генераторы однопараметрических групп автоморфизмов алгебр наблюдаемых (см. § 3.2). □

Для каждого оператора a в гильбертовом пространстве E существует оператор a^*, именуемый *сопряженным*, такой, что

$$\langle ax|y\rangle = \langle x|a^*y\rangle,\qquad \forall x,y\in E.$$

Очевидно, что $(a^*)^* = a$. Напомним основные термины. Оператор a в гильбертовом пространстве называется:

- *эрмитовым*, если $a^* = a$;
- *проектором* (*проекционным оператором*), если он эрмитов и $a^2 = a$;
- *нормальным*, если $aa^* = a^*a$;
- *унитарным*, если он нормальный и $aa^* = \mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ всюду в дальнейшем обозначает тождественный оператор или единичный элемент алгебр и групп.

Спектром $\operatorname{Sp} a$ оператора a именуется множество комплексных чисел λ таких, что оператор $a-\lambda\mathbb{1}$ необратим.

Остановимся теперь более подробно на операторах Гильберта—Шмидта и ядерных операторах в гильбертовых пространствах.

Определение 1.5.1. Непрерывное отображение γ гильбертова пространства E в гильбертово пространство H называется *вполне непрерывным*, если это *компактный оператор*, т. е. переводящий всякое ограниченное множество в множество с компактным замыканием. □

Для того чтобы отображение γ было вполне непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы существовали ортонормальные базисы $\{e^i\}$ и $\{h^i\}$ пространств E и H, относительно которых отображение γ принимало бы вид

$$\gamma(x) = \sum_i \lambda_i \langle x | e^i \rangle_E h^i, \tag{1.18}$$

где λ_i — положительные числа, причем $\lambda_i \neq 0$ для не более чем счетного множества индексов i и $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$. Всякое вполне непрерывное отображение может быть представлено в виде $\gamma = UT$, где T — *положительно определенный* (т. е. $\langle Tx|x\rangle \geqslant 0$, $\forall x \in E$) вполне непрерывный оператор в E и U — некоторое изометрическое отображение E в H.

Например, всякое *вырожденное отображение* (т. е. отображение E на конечномерное подпространство H) вполне непрерывно. Примером может служить отображение

$$\gamma : x \to \langle x | y \rangle_E \xi,$$

где y и ξ — некоторые фиксированные элементы соответственно E и H. Более того, множество вполне непрерывных отображений совпадает с пополнением множества вырожденных операторов по операторной норме

$$\| \gamma \| = \sup_{\|x\|_E = 1} \| \gamma(x) \|_H = \max_i \lambda_i,$$

где λ_i — коэффициенты из разложения (1.18). В частности, всякий оператор в конечномерном гильбертовом пространстве вполне непрерывен.

Определение 1.5.2. *Оператором Гильберта—Шмидта* в гильбертовом пространстве E называется вполне непрерывный оператор $\mathcal{E} = UT$, для которого сходится ряд

$$\| \mathcal{E} \|^2 = \sum_i (\lambda_i^T)^2 = \mathrm{Tr}(\mathcal{E}^* \mathcal{E}),$$

составленный из квадратов собственных значений λ_i^T оператора T. □

Для этого необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_i \| \mathcal{E} e^i \|^2 \geqslant \|\mathcal{E}\|^2$$

сходился для некоторого ортонормального базиса $\{e^i\}$ гильбертова пространства E. Тогда он будет сходиться для любого другого ортонормального базиса E, и его сумма будет равна

$$\| \mathcal{E} \|_{\mathrm{HS}}^2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_i \lambda_i^2$$

в представлении (1.18). Эта величина называется *нормой Гильберта—Шмидта* оператора $\mathcal{E}$. Множество операторов Гильберта—Шмидта является полным нормированным

пространством относительно этой нормы и более того, гильбертовой алгеброй (см. Замечание 2.5.3).

Заметим, что если a — оператор в гильбертовом пространстве и $\mathcal{E}$ — оператор Гильберта—Шмидта, то $a\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}a$ — операторы Гильберта—Шмидта.

Определение 1.5.3. Вполне непрерывный оператор $\mathcal{E} = UT$ в гильбертовом пространстве E называется *ядерным*, если сходится ряд

$$\| \mathcal{E} \|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \lambda_i,$$

составленный из собственных значений λ_i^T оператора T. □

Значение этого ряда называется *следовой нормой* оператора $\mathcal{E}$. Множество ядерных операторов составляет полное нормированное пространство относительно этой нормы и, более того, гильбертову алгебру (см. ниже Замечание 2.5.3). Например, всякий (непрерывный) оператор в конечномерном гильбертовом пространстве ядерный.

Очевидно, что ядерные операторы являются операторами Гильберта—Шмидта. Более того, произведение любых двух операторов Гильберта—Шмидта является ядерным оператором, и всякий ядерный оператор может быть представлен как такое произведение.

§ 6. Счетно-гильбертовы и ядерные пространства

Применение аппарата гильбертовых пространств ограничивается тем фактом, что, как уже отмечалось, сопряженное гильбертову пространству изоморфно самому этому гильбертову пространству. Конструкция счетно-гильбертовых пространств описывает дуальные пары (E, E'), где E и E' обладают целым рядом хороших свойств, но E' значительно шире E [8]. Примером могут служить описанные в Приложении Б.1 пространство Шварца быстро убывающих функций и сопряженное ему пространство обобщенных функций.

Определение 1.6.1. Пусть в комплексном векторном пространстве E задана счетная система невырожденных эрмитовых форм $\langle .|. \rangle_n$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\langle x|x\rangle_1 \leqslant \ldots \leqslant \langle x|x\rangle_n \leqslant \ldots$$

для всех $x \in E$. Пространство E называется *счетно-гильбертовым*, если в нем введена топология, определяемая семейством норм

$$\left\{ \| \cdot \|_n = \langle .|. \rangle_n^{1/2},\ n = 1, \ldots \right\}, \tag{1.19}$$

и если оно полно в этой топологии. □

Замечание 1.6.1. Указанная выше топология является метрической, и пополнение берется относительно метрики

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\| x \|_n}{1 + \| x \|_n}.$$

□

Счетно-гильбертово пространство в общем случае не является предгильбертовым, но гильбертовы пространства — счетно-гильбертовы.

Обозначим E_n пополнение счетно-гильбертова пространства E по норме $\|.\|_n$ (1.19). Имеют место вложения

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

и гомеоморфизм

$$E = \bigcap_n E_n.$$

Для сопряженных пространств, в свою очередь, находим

$$E_1' \subset E_2' \subset \ldots \subset E_n' \subset \ldots, \qquad E' = \bigcup_n E_n'.$$

Можно также показать, что счетно-гильбертово пространство рефлексивно.

Определение 1.6.2. Пусть $m \leqslant n$ и T_m^n — отображение

$$E_n \supset E \ni x \mapsto x \in E \subset E_m,$$

продолженное до непрерывного отображения E_n на плотное подмножество в E_m. Счетно-гильбертово пространство называется *ядерным*, если для любого m найдется такое n, что T_m^n является *ядерным отображением*, т. е. имеет вид

$$T_m^n(x) = \sum_i \lambda_i \langle x | e_n^i \rangle_{E_n} e_m^i,$$

где $\{e_n^i\}$, $\{e_m^i\}$ — ортонормальные базисы соответственно в E_n и E_m, все $\lambda_i \geqslant 0$ и ряд $\sum \lambda_i$ сходится. □

Ядерное пространство сепарабельно. Слабая и сильная топологии в нем совпадают. Бесконечномерное гильбертово пространство не может быть ядерным, но всякое конечномерное гильбертово пространство является таковым.

Для ядерных пространств выполняется так называемая *абстрактная теорема о ядре*. Приведем ее частный вариант.

Теорема 1.6.3. Пусть E — ядерное пространство, и $M(x, y)$ — билинейная форма на $E \times E$, непрерывная по каждому аргументу. Тогда найдутся такие значения m и n, что $M(x, y)$ можно представить в виде

$$M(x, y) = \langle y, \mathcal{E}x \rangle = \sum_i \lambda_i \langle x | e^i \rangle_{E_m} \langle y, h_i \rangle_{E_n'},$$

где $\mathcal{E}$ — оператор Гильберта—Шмидта, отображающий гильбертово пространство E_m в гильбертово пространство E_n', $\{e^i\}$ и $\{h_i\}$ — некоторые ортонормальные базисы в E_m и E_n', $\lambda_i \geqslant 0$ и ряд $\sum_i \lambda_i^2$ сходится. □

Следующая конструкция приводит к определению оснащенного гильбертова пространства.

Пусть E — ядерное пространство, и, помимо форм $\langle .|. \rangle_n$, в нем еще задана невырожденная положительная эрмитова форма $\langle .|. \rangle$, непрерывная по каждому аргументу. В частности, найдется такое число m, что

$$\langle x | x \rangle \leqslant \varepsilon \|x\|_m^2, \qquad x \in E, \qquad \varepsilon > 0.$$

Форма $\langle .|. \rangle$ превращает ядерное пространство в предгильбертово. Построим гильбертово пространство $\tilde{E}$, пополнив E по этой форме. Имеют место вложения

$$E \subset \tilde{E} \subset E', \tag{1.20}$$

где E — плотное подпространство $\tilde{E}$, а $\tilde{E}$ — плотное подпространство E', наделенного слабой* топологией. Вложение $\tilde{E} \to E'$ является антилинейным отображением, сопряженным к вложению $E \to \tilde{E}$. Последнее может быть продолжено до ядерного отображения $E_n \to \tilde{E}$ для некоторого числа n. Тройка (1.20) называется *оснащенным гильбертовым пространством.*

Одно из важных свойств оснащенных гильбертовых пространств связано со спектральным представлением унитарных и самосопряженных операторов в них.

Пусть $\mathcal{E}$ — оператор, действующий в топологическом векторном пространстве E. *Обобщенным собственным вектором* оператора $\mathcal{E}$, отвечающим собственному значению λ, называется такой элемент ϕ_λ сопряженного пространства E', что для всех $x \in E$ имеет место равенство

$$\phi_\lambda(\mathcal{E}x) = \lambda\phi_\lambda(x). \tag{1.21}$$

Каждому собственному значению λ соответствует *собственное подпространство* V_λ пространства E', образованное элементами, удовлетворяющими условию (1.21). Сопоставим всякому элементу $x \in E$ и числу λ форму

$$x_\lambda(\phi_\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_\lambda(x)$$

на V_λ. Соответствие $x \to x_\lambda$ называется *спектральным разложением* x относительно оператора $\mathcal{E}$. При этом спектральным разложением элемента $\mathcal{E}x$ будет λx_λ. Система обобщенных собственных векторов оператора $\mathcal{E}$ называется *полной*, если из равенства $x_\lambda = 0$ для любого λ следует, что $x = 0$.

Теорема 1.6.4. Если задано оснащенное гильбертово пространство $E \subset \tilde{E} \subset E'$ и оператор $\mathcal{E}$ в E может быть продолжен до унитарного (соотв. самосопряженного) оператора в $\tilde{E}$, то $\mathcal{E}$ обладает полной системой обобщенных собственных векторов в E', отвечающих комплексным собственным значениям λ с $|\lambda| = 1$ (соотв. вещественным собственным значениям). □

§ 7. Дополнение. Кэлеровы многообразия

В этом параграфе мы коротко коснемся в необходимом нам аспекте кэлеровых многообразий, моделируемых над комплексными гильбертовыми пространствами [37, 52]. Их конструкция обобщает конструкцию конечномерных кэлеровых многообразий (см. [13, 22]).

Пусть E — гильбертово пространство, $\overline{E}$ — дуальное к E и

$$E \ni x \mapsto \overline{x} \in \overline{E}$$

— соответствующий антилинейный морфизм (см. (1.14)). Рассмотрим прямую сумму $E \oplus \overline{E}$. Определен ее автоморфизм

$$J : E \oplus \overline{E} \ni x + \overline{y} \mapsto ix - i\overline{y} = ix + \overline{(iy)} \in E \oplus \overline{E} \tag{1.22}$$

такой, что $J^2 = -\mathbb{1}$. Он называется *оператором комплексной структуры*. Пространства E и $\overline{E}$ являются его собственными подпространствами, отвечающими собственным значениям i и $-i$ соответственно. Выполняется соотношение

$$\overline{Jx} = J\overline{x}.$$

Обобщим теперь на гильбертовы пространства конструкцию голоморфных и антиголоморфных производных из комплексного анализа.

Пусть E и H — комплексные гильбертовы пространства, $U \subset E$ — открытое подмножество и $f : U \to H$ — дифференцируемая функция между вещественными банаховыми пространствами E и H. Это означает, что для всякой точки $z_0 \in U$ существует непрерывное $\mathbb{R}$-линейное отображение $l_{z_0} : E \to H$ такое, что

$$f(z) = f(z_0) + l_{z_0}(z - z_0) + o(z - z_0), \qquad z \in U.$$

Это условие можно переформулировать в следующем виде. Существуют отображения

$$a : E \to H,$$
$$a(z) = \frac{1}{2} l_{z_0}(z) - \frac{i}{2} l_{z_0}(iz),$$

и

$$b : \overline{E} \to H,$$
$$b(\overline{z}) = \frac{1}{2} l_{z_0}(z) + \frac{i}{2} l_{z_0}(iz),$$

такие, что

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + b(\overline{z - z_0}) + o(z - z_0). \tag{1.23}$$

Они определяют $\mathbb{C}$-линейные отображения

$$(\partial_{z_0} f)(x + \overline{y}) = a(x), \qquad (\overline{\partial}_{z_0} f)(x + \overline{y}) = b(\overline{y}) \tag{1.24}$$

из $E \oplus \overline{E}$ в H. Назовем $\mathbb{C}$-линейное отображение

$$f'_{z_0} : E \oplus \overline{E} \to H,$$
$$f'_{z_0} = \partial_{z_0} f + \overline{\partial}_{z_0} f, \tag{1.25}$$

производной функции f в точке $z_0 \in U$. Аналогично определяются производные высших порядков. Соответственно, функция f между гильбертовыми пространствами называется:

- гладкой, если она бесконечно дифференцируема;
- *голоморфной*, если она дифференцируема и $\overline{\partial}_z f = 0$ для всех $z \in U$;
- *антиголоморфной*, если она дифференцируема и $\partial_z f = 0$ для всех $z \in U$.

Как и в конечномерном случае, голоморфность функции означает, что она гладкая и представима в виде ряда.

Рассмотрим *голоморфное многообразие* $\mathcal{P}$, моделируемое над гильбертовым пространством E. Это означает, что оно покрыто картами (U_ι, ψ_ι), где морфизмы ψ_ι принимают значения в гильбертовом пространстве E, а функции перехода $\psi_\zeta \psi_\iota^{-1}$ из $\psi_\iota(U_\iota \cap U_\zeta) \subset E$ в $\psi_\zeta(U_\iota \cap U_\zeta) \subset E$ являются голоморфными. Понятие касательного вектора к голоморфному многообразию вводится по аналогии с конечномерным случаем. Для точки $z \in \mathcal{P}$ рассмотрим пару $(v; U_\iota, \psi_\iota)$ вектора $v \in E$ и карты голоморфного многообразия (U_ι, ψ_ι), накрывающей z. Две такие пары $(v; U_\iota, \psi_\iota)$ и $(v'; U_\zeta, \psi_\zeta)$ считаются эквивалентными, если

$$v' = \partial_{\psi_\iota(z)}(\psi_\zeta \psi_\iota^{-1})v.$$

Классы эквивалентности этих пар образуют *голоморфное касательное пространство* $T_z\mathcal{P}$ к голоморфному многообразию $\mathcal{P}$ в точке $z \in \mathcal{P}$. Оно изоморфно E как топологическое векторное пространство. Дуальное к $T_z\mathcal{P}$ пространство $\overline{T}_z\mathcal{P}$ называется *антиголоморфным касательным пространством. Комплексным касательным пространством* к голоморфному многообразию $\mathcal{P}$ в точке z именуется прямая сумма

$$\mathcal{T}_z\mathcal{P} = T_z\mathcal{P} \oplus \overline{T}_z\mathcal{P}.$$

Оно естественным образом наделяется операцией инволюции

$$v + \overline{u} \mapsto \overline{v} + u$$

и оператором комплексной структуры J_z. Всякий *комплексный касательный вектор* $x \in \mathcal{T}_z\mathcal{P}$ однозначно раскладывается в сумму $x = v + \overline{u}$ своих голоморфных и антиголоморфных компонент. Комплексный касательный вектор x называется действительным, если $x = \overline{x}$. Объединение комплексных касательных пространств к голоморфному многообразию $\mathcal{P}$ образует *комплексное касательное расслоение* $\mathcal{TP}$ над $\mathcal{P}$. Его сечениями являются *комплексные векторные поля* на $\mathcal{P}$.

Сопряженное пространство к комплексному касательному пространству $T_z\mathcal{P}$ называется *комплексным кокасательным пространством* к голоморфному многообразию $\mathcal{P}$ в точке z. Комплексные кокасательные пространства составляют *комплексное кокасательное расслоение* $\mathcal{T}^*\mathcal{P}$ над $\mathcal{P}$, сечения которого именуются *комплексными 1-формами*. Обобщая эту конструкцию, можно рассмотреть тензорные произведения касательных и кокасательных расслоений над $\mathcal{P}$. В частности, определены внешние формы на голоморфном многообразии $\mathcal{P}$ и действующий на них оператор внешнего дифференцирования d.

Пример 1.7.1. Дифференциал df гладкой функции $f : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ может рассматриваться как комплексная 1-форма. Обозначим ее голоморфную и антиголоморфную компоненты соответственно как ∂f и $\overline{\partial} f$. При этом для всякого комплексного касательного вектора $\vartheta_z = v_z + \overline{u}_z$ в точке $z \in \mathcal{P}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
\langle \vartheta_z | df \rangle &= f'_z(\vartheta_z), \\
\langle \vartheta_z | \partial f \rangle &= \langle v_z | df \rangle = (\partial_z f)(v_z), \\
\langle \vartheta_z | \overline{\partial} f \rangle &= \langle \overline{u}_z | df \rangle = (\overline{\partial}_z f)(\overline{u}_z).
\end{aligned}$$

□

Перейдем теперь к определению *эрмитовой метрики* на голоморфном многообразии $\mathcal{P}$. Это комплексная симметричная билинейная форма g на $\mathcal{TP}$, удовлетворяющая условиям:

- $g(\vartheta_z, \nu_z) = 0$, если оба комплексных касательных вектора $\vartheta_z, \nu_z \in \mathcal{T}_z\mathcal{P}$ одновременно голоморфны или антиголоморфны;
- $g(\vartheta_z, \overline{\vartheta}_z) > 0$ для всякого ненулевого касательного вектора $\vartheta_z \in \mathcal{T}_z\mathcal{P}$;
- топология, порождаемая билинейной формой $g_z(.,.)$ в комплексном касательном пространстве $\mathcal{T}_z\mathcal{P}$, эквивалентна его топологии как гильбертова пространства.

Из определения g следует, что

$$\overline{g(\vartheta_z, \nu_z)} = g(\overline{\vartheta}_z, \overline{\nu}_z),$$
$$g(J\vartheta_z, J\nu_z) = g(\vartheta_z, \nu_z).$$

Пример 1.7.2. Пусть $\mathcal{P} = E$ — гильбертово пространство. Эрмитова форма $\langle .|. \rangle$ на E однозначно определяет постоянную эрмитову метрику на E:

$$g : (E \oplus \overline{E}) \times (E \oplus \overline{E}) \to \mathbb{C},$$
$$g(\vartheta_1, \vartheta_2) = \langle v_1 | u_2 \rangle + \langle v_2 | u_1 \rangle, \tag{1.26}$$

для всех комплексных векторов $\vartheta_1 = v_1 + \overline{u}_1$ и $\vartheta_2 = v_2 + \overline{u}_2$. Обратно, любая постоянная эрмитова метрика на гильбертовом пространстве E задает на нем эрмитову форму. □

Пара $(\mathcal{P}, g)$ называется *эрмитовым многообразием*. Всякой эрмитовой метрике g на голоморфном многообразии $\mathcal{P}$ отвечает антисимметричная билинейная форма ω на $\mathcal{P}$, определяемая равенством

$$\omega(\vartheta_z, \nu_z) = g(J\vartheta_z, \nu_z) \tag{1.27}$$

для произвольной точки $z \in \mathcal{P}$ и произвольной пары комплексных касательных векторов $\vartheta_z, \nu_z \in \mathcal{T}_z\mathcal{P}$. Она называется *фундаментальной формой* эрмитовой метрики g. Для нее, как и для эрмитовой метрики, выполняются соотношения

$$\overline{\omega(\vartheta_z, \nu_z)} = \omega(\overline{\vartheta}_z, \overline{\nu}_z),$$
$$\omega(J_z\vartheta_z, J_z\nu_z) = \omega(\vartheta_z, \nu_z).$$

Определение 1.7.1. Эрмитова метрика g называется *кэлеровой*, если $d\omega = 0$, т. е. если ω является симплектической формой. В этом случае говорят, что $(\mathcal{P}, g)$ — *кэлерово многообразие*. □

Пример 1.7.3. Пусть, как в Примере 1.7.2, $\mathcal{P} = E$ — гильбертово пространство с эрмитовой метрикой g (1.26). Ее фундаментальная форма (1.27) постоянна на E и имеет вид

$$\omega(\vartheta_1, \vartheta_2) = i\langle v_1 | u_2 \rangle - i\langle v_2 | u_1 \rangle \tag{1.28}$$

для всех векторов $\vartheta_1 = v_1 + \overline{u}_1$ и $\vartheta_2 = v_2 + \overline{u}_2$. Ясно, что $d\omega = 0$. Поэтому метрика g (1.26) является кэлеровой. □

На эрмитовом многообразии $(\mathcal{P}, g)$ всегда существует *метрическая связность* такая, что ковариантный дифференциал эрмитовой метрики обращается в 0, т. е. $\nabla g = 0$. Справедливо равенство

$$\overline{\nabla_\vartheta \nu} = \nabla_{\overline{\vartheta}} \overline{\nu}$$

для любой пары комплексных векторных полей ϑ, ν на $\mathcal{P}$. В случае кэлерова многообразия $\nabla\omega = 0$, а также $\nabla J = 0$, где J рассматривается как сечение расслоения $\mathcal{T}^*\mathcal{P} \otimes \mathcal{T}\mathcal{P}$.

Обозначим D и $\overline{D}$ голоморфную и антиголоморфную компоненты ∇. Если $\vartheta = v + \overline{u}$ — комплексное векторное поле на $\mathcal{P}$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
&\nabla_\vartheta = D_\vartheta + \overline{D}_\vartheta,\\
&D_\vartheta = \nabla_v, \qquad \overline{D}_\vartheta = \overline{\nabla}_{\overline{u}},\\
&D_{J\vartheta} = iD_\vartheta, \qquad \overline{D}_{J\vartheta} = -i\overline{D}_\vartheta.
\end{aligned}$$

Если f — функция на кэлеровом многообразии, тогда, как обычно, $\nabla f = df$.

Пример 1.7.4. На гильбертовом пространстве E, рассматриваемом как кэлерово многообразие с кэлеровой метрикой (1.26), метрическая связность тривиальна, а D и $\overline{D}$ совпадают с обычными голоморфными и антиголоморфными дифференциалами ∂ и $\overline{\partial}$. □

Приведем также соотношения для ковариантных дифференциалов второго порядка

$$\begin{aligned}
(\nabla\nabla f)(\vartheta_z, \nu_z) &= (\nabla\nabla f)(\nu_z, \vartheta_z),\\
(DDf)(\vartheta_z, \nu_z) &= (DDf)(\nu_z, \vartheta_z),\\
(\overline{D}\overline{D}f)(\vartheta_z, \nu_z) &= (\overline{D}\overline{D}f)(\nu_z, \vartheta_z),\\
(\overline{D}Df)(\vartheta_z, \nu_z) &= (D\overline{D}f)(\nu_z, \vartheta_z),
\end{aligned}$$

где ϑ, ν — комплексные векторные поля, а f — функция на кэлеровом многообразии $\mathcal{P}$.

Кэлерова метрика g и ее фундаментальная форма ω определяют соответствующие изоморфизмы

$$g^\flat : \mathcal{T}\mathcal{P} \ni v \mapsto v\rfloor g \in \mathcal{T}^*\mathcal{P}, \tag{1.29}$$

$$\omega^\flat : \mathcal{T}\mathcal{P} \ni v \mapsto v\rfloor \omega \in \mathcal{T}^*\mathcal{P}. \tag{1.30}$$

Обозначим $g^\sharp$ и $\omega^\sharp$ обратные изоморфизмы $\mathcal{T}^*\mathcal{P} \to \mathcal{T}\mathcal{P}$. Они обладают свойствами

$$g^\sharp(\phi)\rfloor\sigma = g^\sharp(\sigma)\rfloor\phi, \qquad \omega^\sharp(\phi)\rfloor\sigma = -\omega^\sharp(\sigma)\rfloor\phi, \qquad \phi, \sigma \in \mathcal{T}^*\mathcal{P},$$

$$g^\sharp = J\omega^\sharp, \qquad \omega^\sharp = -Jg^\sharp,$$

а также

$$\nabla g^\sharp = 0, \qquad \nabla\omega^\sharp = 0,$$

где $g^\sharp$ и $\omega^\sharp$ рассматриваются как сечения расслоения $\mathcal{T}^*\mathcal{P} \otimes \mathcal{T}\mathcal{P}$.

В частности, всякой функции f на кэлеровом многообразии $\mathcal{P}$ можно сопоставить комплексное векторное поле

$$g^\sharp(df) = g^\sharp(\overline{\partial}f) + g^\sharp(\partial f), \tag{1.31}$$

где $g^\sharp(\overline{\partial}f)$ и $g^\sharp(\partial f)$ — его голоморфная и антиголоморфная составляющие, а также *комплексное гамильтоново векторное поле*

$$\omega^\sharp(df) = -J\big(g^\sharp(df)\big) = -ig^\sharp(\overline{\partial}f) + ig^\sharp(\partial f). \tag{1.32}$$

В заключение приведем важный пример *проективного гильбертова пространства* PE, образованного (комплексными) 1-мерными подпространствами гильбертова пространства E. Это голоморфное многообразие. Опишем его стандартный атлас. Для произвольного ненулевого элемента $x \in E$ обозначим x такую точку PE, что $x \in$ x. Всякому

нормированному элементу $h \in E$, $\|h\| = 1$, гильбертова пространства E сопоставим карту (U_h, ψ_h) на проективном гильбертовом пространстве PE, где

$$U_h = \{\mathrm{x} \in PE \ : \ \langle x|h\rangle \neq 0\}, \qquad \psi_h(\mathrm{x}) = \frac{x}{\langle x|h\rangle} - h. \tag{1.33}$$

Образом этой карты в гильбертовом пространстве E является подпространство

$$E_h = \{z \in E \ : \ \langle z|h\rangle = 0\}. \tag{1.34}$$

Обратно, образ $\psi_h^{-1}(z)$ всякого элемента $z \in E_h$ — это такой элемент в U_h, что $z + h \in \psi_h^{-1}(z)$. Семейство таких карт образует голоморфный атлас проективного гильбертова пространства PE. Заметим, что для всякой точки $\mathrm{x} \in PE$ можно выбрать карту E_h, $h \in \mathrm{x}$, с центром в x, т. е. такую, что $\psi_h(\mathrm{x}) = 0$.

На проективном гильбертовом пространстве PE существует единственная эрмитова метрика g такая, что определяемая ею функция расстояния на PE имеет вид

$$\rho(\mathrm{x}, \mathrm{x}') = \sqrt{2}\arccos\left(\left|\langle x|x'\rangle\right|\right), \tag{1.35}$$

где x, x' — нормированные элементы E. Это кэлерова метрика. Она называется *метрикой Фубини—Штуди* и в локальной карте (U_h, E_h) на PE дается выражением

$$g(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{\langle v_1|u_2\rangle + \langle v_2|u_1\rangle}{1 + \|z\|^2} - \frac{\langle z|u_2\rangle\langle v_1|z\rangle + \langle z|u_1\rangle\langle v_2|z\rangle}{(1 + \|z\|^2)^2}, \qquad z \in E_h, \tag{1.36}$$

для комплексных векторов $\vartheta_1 = v_1 + \overline{u}_1$, $\vartheta_2 = v_2 + \overline{u}_2$, $\vartheta_1, \vartheta_2 \in T_z PE$, $\vartheta_1, \vartheta_2 \in T_z PE$. Соответствующая фундаментальная форма имеет вид

$$\omega(\vartheta_1, \vartheta_2) = i\frac{\langle v_1|u_2\rangle - \langle v_2|u_1\rangle}{1 + \|z\|^2} - i\frac{\langle z|u_2\rangle\langle v_1|z\rangle - \langle z|u_1\rangle\langle v_2|z\rangle}{(1 + \|z\|^2)^2}. \tag{1.37}$$

В центрированной карте в точке $z = 0$ выражения (1.36) и (1.37) сводятся к выражениям (1.26) и (1.28).

Глава 2

Алгебры и их представления

Алгебрами наблюдаемых в квантовой механике являются, как правило, инволютивные алгебры, C^*-алгебры и алгебры фон Неймана. В этой главе мы приведем основные сведения об этих алгебрах и их представлениях [3, 10, 25].

§ 1. Инволютивные алгебры

Начнем с определения инволютивных алгебр. Пусть A — ассоциативная алгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. *Инволюцией* в A называется такое отображение $a \mapsto a^*$ алгебры A на себя, что

$$
\begin{aligned}
&(a^*)^* = a,\\
&(a+b)^* = a^* + b^*,\\
&(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*,\\
&(ab)^* = b^* a^*
\end{aligned}
$$

для всех $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Определение 2.1.1. Алгебра A, снабженная инволюцией, называется *инволютивной*. □

Как и для операторов в гильбертовых пространствах, вводятся понятия эрмитова, нормального и унитарного элементов инволютивной алгебры (см. § 1.5).

Инволютивная алгебра называется *нормированной*, если она как векторное пространство наделена нормой $\|a\|$ такой, что

$$
\|ab\| \leqslant \|a\|\,\|b\|, \qquad \|a^*\| = \|a\|, \qquad a, b \in A.
$$

В дальнейшем, если специально не оговорено, подразумевается, что нормированная алгебра снабжена определяемой нормой равномерной топологией. Таким образом, она является также топологическим векторным пространством. Полная нормированная алгебра называется *банаховой*.

Определение 2.1.2. Инволютивная банахова алгебра именуется *C^*-алгеброй*, если

$$
\|a\|^2 = \|a^* a\|.
$$

□

Если C^*-алгебра имеет единицу $\mathbb{1}$, то $\|\mathbb{1}\| = 1$.

Инволютивная алгебра A не обязательно содержит единицу. Однако такой элемент к A всегда можно присоединить, рассмотрев алгебру

$$\tilde{A} = A + \lambda\mathbb{1}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

называемую алгеброй с *присоединенной единицей*. При этом многие свойства алгебры A продолжаются на алгебру $\tilde{A}$ с присоединенной единицей. В частности, если A — инволютивная нормированная алгебра, то на $\tilde{A}$ существует норма, например,

$$\|a + \lambda\mathbb{1}\| = \|a\| + |\lambda|,$$

продолжающая норму на A и превращающая $\tilde{A}$ в инволютивную нормированную алгебру. Если A — C^*-алгебра, то такая норма на $\tilde{A}$ единственна и превращает $\tilde{A}$ в C^*-алгебру.

Вместе с тем бывают ситуации, когда наличие или отсутствие единицы имеет существенное значение. Поэтому вводят также понятие аппроксимативной единицы.

Замечание 2.1.1. Напомним, что *сетью* именуется частично упорядоченное множество I, в котором для всякой пары $i, j \in I$ найдется такой элемент $k \in I$, что $i \leqslant k$, $j \leqslant k$. Сеть элементов топологического пространства можно рассматривать как обобщение понятия последовательности. □

Определение 2.1.3. *Аппроксимативной единицей* в нормированной алгебре A называется сеть $\{u_i, i \in I\}$ элементов A такая, что

- $\|u_i\| < 1$ при любом $i \in I$;
- $\|u_i a - a\| \to 0$, $\|a u_i - a\| \to 0$ при любом $a \in A$.

□

Единица, очевидно, является аппроксимативной единицей. В C^*-алгебре всегда существует аппроксимативная единица.

Левым (соотв. правым) *идеалом* алгебры A называется ее подалгебра $N \subset A$ такая, что $AN \subset N$ (соотв. $NA \subset N$). Когда идеал одновременно правый и левый, говорят, что он *двусторонний*. Двусторонний идеал N алгебры A называется *максимальным*, если он *собственный* (т. е. $N \neq A$, $N \neq 0$) и не существует другого собственного двустороннего идеала, содержащего в себе N. Пусть A — инволютивная алгебра и N — самосопряженный ($N^* = N$) двусторонний идеал в A. Инволюция в A индуцирует при факторизации A по N инволюцию в фактор-алгебре A/N, а каноническое отображение A на A/N является морфизмом инволютивных алгебр. Если A — инволютивная нормированная алгебра (соотв. C^*-алгебра) и N — самосопряженный замкнутый двусторонний идеал, то A/N — инволютивная нормированная алгебра (соотв. C^*-алгебра).

Пример 2.1.2. Пусть A — C^*-алгебра и $\tilde{A}$ — C^*-алгебра, получаемая из A присоединением единицы. Тогда A является замкнутым двусторонним идеалом коразмерности 1 в $\tilde{A}$. □

Обозначим $\mathrm{Sp}_A a$ — *спектр элемента* инволютивной алгебры A, т. е. множество комплексных чисел λ таких, что $(a - \lambda\mathbb{1})$ — необратимый элемент в алгебре $\tilde{A}$ с присоединенной единицей. Очевидно, что

$$\mathrm{Sp}_A a^* = \overline{\mathrm{Sp}_A a}.$$

Заметим, что если B — инволютивная подалгебра A и $a \in B$, то $\mathrm{Sp}_A a$, вообще говоря, не совпадает с $\mathrm{Sp}_B a$. Однако в случае C^*-алгебры $\mathrm{Sp}_A a = \mathrm{Sp}_B a$ для любой C^*-подалгебры B алгебры A. Пусть A — C^*-алгебра. Если a — эрмитов элемент, то все числа из $\mathrm{Sp}_A a$ вещественны. Если A — C^*-алгебра с единицей и a — унитарный элемент, то все числа из $\mathrm{Sp}_A a$ имеют модуль 1. Пусть A — банахова алгебра с единицей и $a \in A$. Если f — голоморфная комплексная функция в окрестности $\mathrm{Sp}_A a \subset \mathbb{C}$, то существует элемент $f(a) \in A$ такой, что

$$\mathrm{Sp}_A f(a) = f(\mathrm{Sp}_A a).$$

Как уже отмечалось, физическими наблюдаемыми квантовой системы являются средние значения. Математически это означает задание положительной формы на ее алгебре наблюдаемых, что соответствует операторному представлению этой алгебры в некотором гильбертовом пространстве. Поэтому рассмотрим в качестве важного примера алгебру $B(E)$ непрерывных (т. е. ограниченных) эндоморфизмов гильбертова пространства E. Это инволютивная алгебра относительно операции эрмитова сопряжения операторов. Операторная норма (1.17) превращает $B(E)$ в нормированную алгебру. Тогда всякая замкнутая в равномерной топологии инволютивная подалгебра $B \subset B(E)$, в том числе и сама алгебра $B(E)$, является C^*-алгеброй.

В алгебре $B(E)$, помимо равномерной топологии, рассматриваются и другие топологии. *Сильной операторной*, *слабой операторной*, *ультрасильной* и *ультраслабой* называются топологии в $B(E)$, определяемые соответственно следующими семействами преднорм:

- $$p_x(a) = \|ax\|_E, \qquad x \in E;$$
- $$p_{x,x'}(a) = \left|\langle ax|x'\rangle\right|, \qquad x, x' \in E;$$
- $$p_{\{x_i\}}(a) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \|ax_i\|^2\right]^{1/2},$$

  где $\{x_i\}$ — последовательности элементов гильбертова пространства E такие, что

  $$\sum_i \|x_i\|^2 < \infty;$$

- $$p_{\{x_i\},\{x_i'\}}(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle ax_i|x_i'\rangle\right|,$$

  где $\{x_i\}$, $\{x_i'\}$ — такие последовательности элементов E, что

  $$\sum_i \|x_i\|^2 < \infty, \qquad \sum_i \|x_i'\|^2 < \infty.$$

Связь между указанными топологиями может быть представлена схемой

$$\begin{array}{ccccc} \text{равномерная} & > & \text{ультрасильная} & > & \text{ультраслабая} \\ & & \vee & & \vee \\ & & \text{сильная} & > & \text{слабая}, \end{array}$$

где знак $>$ означает «сильнее». Отметим, что отображения $a \mapsto ab$ и $a \mapsto ba$ алгебры $B(E)$, когда элемент b алгебры $B(E)$ фиксирован, непрерывны во всех пяти топологиях, тогда как отображение $a \mapsto a^*$ непрерывно только в равномерной, ультраслабой и слабой топологиях, а отображение $(a, b) \mapsto ab$ непрерывно только в равномерной топологии.

Замечание 2.1.3. Пусть B — инволютивная подалгебра $B(E)$ и B_1 — единичный шар в B. Следующие восемь условий эквивалентны: подалгебра B сильно, слабо, ультрасильно, ультраслабо замкнута и шар B_1 сильно, слабо, ультрасильно, ультраслабо замкнут. □

Пусть N — подмножество $B(E)$. *Коммутантом* N называется множество N' элементов $B(E)$, перестановочных с элементами N. Множество N' является подалгеброй $B(E)$ с единицей. Обозначим $N'' = (N')'$ *бикоммутант* подмножества N. Имеем

$$N \subset N'', \qquad N' = N'''.$$

Определение 2.1.4. Инволютивная подалгебра B с единицей алгебры $B(E)$ называется *алгеброй фон Неймана*, если $B = B''$, что эквивалентно каждому из восьми упомянутых в Замечании 2.1.3 условиям. □

Пример 2.1.4. Например, $B(E)$ — алгебра фон Неймана. Алгебра скалярных операторов (умножений на число) $C(E)$ в E тоже алгебра фон Неймана. Если N — самосопряженное подмножество в $B(E)$, то N' — алгебра фон Неймана, а N'' — наименьшая алгебра фон Неймана, содержащая N. Она называется *алгеброй фон Неймана, порожденной подмножеством* N. □

Пусть B — алгебра фон Неймана. По определению B и B' служат коммутантами друг друга. Общим центром B и B' является $B \cap B'$. Если он сводится к скалярным операторам, то алгебра фон Неймана B называется *фактором*. Алгебра фон Неймана именуется *алгеброй типа I*, если она изоморфна алгебре фон Неймана B такой, что B' коммутативен.

В этой связи заметим, что изоморфизм γ алгебр фон Неймана $B_1 \subset B(E_1)$ и $B_2 \subset B(E_2)$ является изоморфизмом B_1 и B_2 как инволютивных алгебр; он изометрический (см. § 3.1). Изоморфизм гильбертовых пространств E_1 и E_2 тоже определяет изоморфизм, называемый *пространственным*, соответствующих алгебр фон Неймана. Однако, не всякий изоморфизм алгебр фон Неймана является пространственным.

В заключение отметим следующую связь между C^*-алгебрами и алгебрами фон Неймана. Алгебра фон Неймана слабо, а тем самым равномерно замкнута в $B(E)$ и является C^*-алгеброй. Однако теория алгебр фон Неймана не сводится к теории C^*-алгебр. Алгебры фон Неймана могут быть наделены той или иной более слабой операторной топологией, и объекты, непрерывные в такой топологии, обладают дополнительными свойствами. В частности, C^*-алгебра изоморфна некоторой алгебре фон Неймана тогда и только тогда, когда согласно *теореме Сакаи* она является сопряженным пространством некоторому банахову пространству (см. § 3.1).

§ 2. Представления инволютивных алгебр

Рассмотрим теперь представления инволютивных алгебр и C^*-алгебр в гильбертовых пространствах.

Представлением инволютивной алгебры A в гильбертовом пространстве E называется морфизм π алгебры A в инволютивную алгебру $B(E)$ непрерывных операторов в E. При этом говорят, что два ее представления π_1 и π_2 в гильбертовых пространствах E_1 и E_2 *эквивалентны*, если существует изоморфизм гильбертова пространства E_1 на гильбертово пространство E_2, переводящий $\pi_1(a)$ в $\pi_2(a)$ для всех $a \in A$.

Подчеркнем, что алгебры A и $\pi(A)$ не обязаны быть изоморфными. Более того, инволютивная алгебра A может не иметь представления в виде изоморфной ей операторной алгебры $\pi(A)$. Однако для всякой C^*-алгебры существует ее изометрическое инъективное представление в гильбертовом пространстве. Оно называется *точным*. Поэтому замкнутые инволютивные подалгебры алгебр $B(E)$ дают самые общие примеры C^*-алгебр.

Представление π инволютивной алгебры A в гильбертовом пространстве E продолжается единственным образом до представления $\tilde{\pi}$ в E алгебры $\tilde{A}$, полученной из A присоединением единицы; при этом $\tilde{\pi}(\mathbb{1}) = 1$.

Говорят, что представление π инволютивной алгебры A в гильбертовом пространстве E *невырождено*, если множество AE плотно в E, или эквивалентно, когда не существует ненулевого элемента в E, который обращался бы в нуль всеми операторами $\pi(a)$, $a \in A$. В дальнейшем представление, если специально не оговорено, будет подразумеваться невырожденным.

Пусть π — представление инволютивной алгебры A в гильбертовом пространстве E и $\theta \in E$. Замыкание множества $\pi(A)\theta$ является замкнутым векторным подпространством E, инвариантным относительно $\pi(A)$. Если оно совпадает с E, то говорят, что θ — *тотализирующий* или *циклический* вектор для представления π, которое называют *циклическим*.

Пусть $\{\pi_\iota, \iota \in I\}$ — семейство представлений инволютивной алгебры A в гильбертовых пространствах E_ι, пусть $E = \bigoplus_\iota E_\iota$ — гильбертова сумма. Если для всякого элемента $a \in A$ нормы $\|\pi_\iota(a)\|$ ограничены (это всегда верно для инволютивной банаховой алгебры, поскольку при ее морфизме норма элементов не увеличивается), то можно построить непрерывный линейный оператор $\pi(a)$ в E, который индуцирует оператор $\pi_\iota(a)$ в каждом гильбертовом пространстве E_ι. Тогда $a \mapsto \pi(a)$ является представлением A в E, которое называется *гильбертовой суммой* представлений π_ι.

Теорема 2.2.1. Всякое представление инволютивной алгебры является гильбертовой суммой представлений, допускающих тотализирующий вектор. □

Это обстоятельство указывает на особую роль тотализирующих векторов, которые в физических моделях обычно связывают с вакуумом или основным состоянием системы.

Определение 2.2.2. Говорят, что представление π инволютивной алгебры A в гильбертовом пространстве E *топологически неприводимо*, если оно ненулевое и удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:

- единственным ненулевым замкнутым векторным подпространством в E, инвариантным относительно $\pi(A)$, является само E;
- коммутант $\pi(A)$ в $B(E)$ сводится к скалярам;
- любой ненулевой вектор в E является тотализирующим для представления π.

□

Представление π инволютивной алгебры A называется *алгебраически неприводимым*, если единственным векторным подпространством (не обязательно замкнутым) гильбертова пространства E, инвариантным относительно $\pi(A)$, является E. Для бесконечномерных представлений инволютивных алгебр это условие строже, чем топологическая неприводимость. Но для представлений C^*-алгебр оба понятия эквивалентны. Отметим, что всякое конечномерное представление инволютивной алгебры является гильбертовой суммой неприводимых представлений, однако для бесконечномерных представлений это в общем случае неверно.

Неприводимое представление инволютивной алгебры $A \to \pi(A)$ (как и всякой ассоциативной алгебры) можно характеризовать его ядром $\pi^{-1}(0) \subset A$. Оно является двусторонним идеалом в A, который называется *примитивным идеалом*. Имеется каноническая сюръекция множества $\hat{A}$ классов алгебраически неприводимых представлений инволютивной алгебры A на множество $\mathrm{Prim}(A)$ ее примитивных идеалов. Это означает, что неэквивалентные неприводимые представления A могут иметь одно и то же ядро. Но если неприводимые представления имеют разные ядра, они заведомо неэквивалентны.

Пример 2.2.1. Если алгебра A имеет единицу, тогда всякий максимальный двусторонний идеал A является примитивным. Пусть $\tilde{A}$ — это C^*-алгебра A с присоединенной единицей. Тогда A является примитивным идеалом в $\tilde{A}$, а именно ядром представления

$$\pi(a + \lambda\mathbb{1}) = \lambda\mathbb{1}, \qquad \forall a \in A, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

□

На множестве $\mathrm{Prim}(A)$ примитивных идеалов вводится так называемая *топология Джекобсона*, которую мы здесь не будем описывать. В общем случае она неотделима, но обладает свойством, что для любых двух точек из $\mathrm{Prim}(A)$ каждая из них имеет окрестность, не содержащую другую точку. Посредством канонической сюръекции множество $\hat{A}$ алгебраически неприводимых представлений наделяется прообразом топологии Джекобсона, и в этом случае $\hat{A}$ называется *спектром* инволютивной алгебры A. Пусть A — C^*-алгебра, $\{a_\iota, \iota \in I\}$ — семейство элементов, плотное в A, и Z_ι — множество таких $\pi \in \hat{A}$, что $\|\pi(a_\iota)\| > 1$. Тогда $\{Z_\iota, \iota \in I\}$ образует базу топологии в спектре $\hat{A}$. Спектр C^*-алгебры локально квазикомпактен. Он отделим тогда и только тогда, когда для всякого элемента $a \in A$ функция $\pi \to \|\pi(a)\|$ непрерывна на $\hat{A}$.

Наряду с эквивалентностью и неэквивалентностью представлений, вводятся также более детализирующие понятия квазиэквивалентности и дизъюнктности представлений.

Пусть A — инволютивная алгебра и π_1 и π_2 — ее представления в гильбертовых пространствах E_1 и E_2. Всякий линейный оператор $T : E_1 \to E_2$ такой, что

$$T\pi_1(a) = \pi_2(a)T, \qquad \forall a \in A,$$

называется оператором, *сплетающим* π_1 и π_2. Говорят, что представления π_1 и π_2 *дизъюнктны*, если единственным сплетающим их оператором является 0, т. е. никакие подпредставления τ_1 в π_1 и τ_2 в π_2 между собой не эквивалентны. Представление π инволютивной алгебры A называется *фактор-представлением*, если его нельзя представить как сумму двух дизъюнктных представлений.

Представления π_1 и π_2 инволютивной алгебры A называются *квазиэквивалентными*, если выполняются эквивалентные условия:

- ни одно подпредставление π_1 не дизъюнктно с π_2, и ни одно подпредставление π_2 не дизъюнктно с π_1;

- существуют эквивалентные кратные представления $\bigoplus_n \pi_1$ и $\bigoplus_m \pi_2$ представлений π_1 и π_2, где n и m — некоторые кардинальные числа;

- имеется такой изоморфизм γ алгебр фон Неймана B_1 и B_2, порожденных $\pi_1(A)$ и $\pi_2(A)$, что

$$\pi_2(a) = \gamma(\pi_1(a)), \qquad \forall a \in A.$$

Условия эквивалентности и квазиэквивалентности представлений связаны следующим образом.

- Если представления эквивалентны, то они квазиэквивалентны.

- Если представления топологически неприводимы и квазиэквивалентны, то они эквивалентны.

- Если два представления конечномерны и квазиэквивалентны, то в их разложения на неприводимые компоненты входят одни и те же неприводимые представления, но не обязательно с одинаковой кратностью.

- Когда представление квазиэквивалентно топологически неприводимому представлению π, оно имеет вид $\bigoplus_n \pi$, где n — некоторое кардинальное число.

- Фактор-представления либо квазиэквивалентны, либо дизъюнктны.

Множество $\overline{A}$ классов квазиэквивалентности фактор-представлений инволютивной алгебры A называется *квазиспектром*.

Говорят, что представление π инволютивной алгебры A имеет тип I, если алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(A)$, имеет тип I. В частности, фактор-представление типа I квазиэквивалентно топологически неприводимому представлению. Инволютивная алгебра называется *алгеброй типа I*, если все ее представления — типа I; для такой алгебры спектр и квазиспектр совпадают.

§ 3. Гильбертовы интегралы представлений

Одной из особенностей представлений бесконечномерных инволютивных алгебр является конструкция гильбертова интеграла представлений, не имеющая аналога в конечномерном случае.

Определение 2.3.1. Пусть Y — борелевское пространство и μ — положительная мера на нем (см. Приложение А.6). Тогда *μ-измеримым полем гильбертовых пространств* на Y называется пара $\{E_y, Y, \Gamma\}$, состоящая из семейства гильбертовых пространств E_y, параметризуемого элементами Y, и множества Γ векторных полей на Y со значениями в E_y, удовлетворяющие следующим условиям.

(а) Γ — векторное подпространство произведения гильбертовых пространств $\prod E_y$.

(б) Существует последовательность $(u_1, u_2, \ldots)$ элементов Γ таких, что для любого $y \in Y$ элементы $u_i(y)$ образуют последовательность, тотальную в E_y (т.е. пространства E_y сепарабельны).

(в) Для любого $u \in \Gamma$ функция $y \to \|u(y)\|_{E_y}$, где $\|.\|_{E_y}$ обозначает норму в гильбертовом пространстве E_y, является μ-измеримой.

(г) Пусть u — векторное поле на Y со значениями в гильбертовых пространствах E_y. Если для любого $u' \in \Gamma$ функция

$$y \to \langle u(y)|u'(y)\rangle_{E_y}$$

μ-измерима, то $u \in \Gamma$.

При этих условиях элементы Γ называются измеримыми векторными полями. □

Пусть $\{E_y, Y, \Gamma\}$ — μ-измеримое поле сепарабельных гильбертовых пространств на борелевском пространстве Y. Векторное поле $u \in \Gamma$ называется *полем с интегрируемым квадратом*, если

$$\int \|u(y)\|^2_{E_y}\, d\mu < \infty.$$

Если u, u' — поля с интегрируемым квадратом, то $u + u'$ и λu, $\lambda \in \mathbb{C}$, тоже поля с интегрируемым квадратом, а функция

$$y \to \left\langle u(y)|u'(y)\right\rangle_{E_y}$$

интегрируема. Определим

$$\langle u|u'\rangle = \int \left\langle u(y)|u'(y)\right\rangle_{E_y} d\mu(y). \tag{2.1}$$

Тогда векторные поля с интегрируемым квадратом образуют гильбертово пространство E с положительной эрмитовой формой (2.1) (поля, совпадающие почти всюду, отождествляются). Оно называется *гильбертовым интегралом*

$$E(Y, \mu) = \int E_y\, d\mu. \tag{2.2}$$

Если μ' — положительная мера на Y, эквивалентная μ, то существует изоморфизм между гильбертовыми интегралами $E(Y, \mu)$ и $E(Y, \mu')$.

Пусть $\{E_y, Y, \Gamma\}$ — измеримое поле гильбертовых пространств и для каждого $y \in Y$ задан элемент $a(y) \in B(E_y)$. Если для любого $u \in \Gamma$ поле

$$y \to a(y)u(y)$$

измеримо, то $a(y)$ называется *измеримым операторным полем* и функция $y \to \|a(y)\|_{E_y}$ измерима. Предположим также, что она *существенно ограничена* (т. е. имеется число λ такое, что $\|a(y)\|_{E_y} < \lambda$ для всех $y \in Y$). Пусть E — гильбертов интеграл (2.2). Тогда для любого $u \in E(Y, \mu)$ поле

$$au : y \to a(y)u(y)$$

принадлежит $E(Y, \mu)$, т. е. $a \in B(E(Y, \mu))$ и норма $\|a\|$ равна существенной верхней грани функции $y \to \|a(y)\|$. Обозначим

$$a = \int a(y)\, d\mu. \tag{2.3}$$

Операторы в $E(Y, \mu)$ такого типа называются *разложимыми*.

Рассмотрим сепарабельную C^*-алгебру A и измеримое поле сепарабельных гильбертовых пространств $\{E_y, Y, \Gamma\}$ таких, что для каждого $y \in Y$ задано представление π_y алгебры A в E_y. Говорят, что $y \to \pi_y$ — *поле представлений* A. Оно называется *измеримым*, если для каждого $a \in A$ операторное поле $\pi_y(a)$ измеримо. При этом, поскольку $\|\pi_y(a)\| < \|a\|$, оно существенно ограничено. Тогда для каждого $a \in A$ можно образовать непрерывный оператор

$$\pi(a) = \int \pi_y(a)\, d\mu \tag{2.4}$$

в гильбертовом пространстве $E(Y, \mu)$ (2.2), и отображение $a \to \pi(a)$ является представлением A в $E(Y, \mu)$. Представление (2.4) называется *прямым интегралом представлений* $\{\pi_y, Y\}$, и оно определено с точностью до поля представлений меры 0.

Опишем теперь операцию дезинтегрирования представлений. Пусть π — представление сепарабельной C^*-алгебры A в сепарабельном гильбертовом пространстве E, и $\mathcal{Z}$ — центр алгебры фон Неймана, порожденной $\pi(A)$. Тогда существуют: стандартная мера μ на квазиспектре $\overline{A}$ (который для сепарабельных C^*-алгебр наделен борелевской структурой), μ-измеримое поле $\{E_y, \overline{A}, \Gamma\}$ гильбертовых пространств на $\overline{A}$, μ-измеримое поле π_y ненулевых фактор-представлений A в E_y такое, что $\pi_y \in y \in \overline{A}$, и изоморфизм $\gamma : E \to E(\mu, \overline{A})$, который отображает $\mathcal{Z}$ в алгебру диагональных операторов, а π в прямой интеграл представлений

$$\pi = \int \pi_y\, d\mu. \tag{2.5}$$

Равенство (2.5) называют *дезинтегрированием* представления π. Пусть μ', E'_y, π'_y и γ' имеют те же свойства. Тогда меры μ и μ' эквивалентны.

Следовательно, класс эквивалентности мер μ на $\overline{A}$ определяется представлением π однозначно. Пусть π_1 и π_2 — два представления сепарабельной C^*-алгебры в сепарабельных гильбертовых пространствах. Тогда для их квазиэквивалентности необходимо и достаточно, чтобы классы мер на квазиспектре $\overline{A}$, определяемые представлениями π_1 и π_2, совпадали.

Можно осуществить дезинтегрирование на неприводимые представления. Пусть π — представление сепарабельной C^*-алгебры в сепарабельном гильбертовом пространстве E и $\mathcal{Z}$ — максимальная коммутативная подалгебра фон Неймана в коммутанте $\pi(A)'$. Существуют: стандартное борелевское пространство Y, ограниченная положительная мера μ на Y, измеримое поле $\{E_y, Y, \Gamma\}$ гильбертовых пространств, измеримое поле $\{\pi_y, Y\}$ неприводимых представлений A в E_y и изоморфизм E на $E(Y, \mu)$, который преобразует $\mathcal{Z}$ в алгебру диагональных операторов, а π в прямой интеграл представлений

$$\int \pi_y\, d\mu.$$

Заметим, что если при данном π изменить $\mathcal{Z}$, то дезинтегрирование может полностью измениться так, что никакое неприводимое представление не будет принимать участие в обоих разложениях одновременно.

Естественно возникает вопрос о классификации представлений C^*-алгебр. Она существует только для некоторых типов C^*-алгебр, к которым относятся элементарные алгебры, сепарабельные CCR-алгебры и сепарабельные GCR-алгебры.

C^*-алгебра A называется *элементарной*, если существует такое гильбертово пространство E, что A изоморфна C^*-алгебре $K(E)$ вполне непрерывных (непрерывных

компактных) операторов в E, т. е. таких операторов $a \in E$, что замыкание множества $a(D_1)$, где D_1 — открытый единичный шар в E, компактно в E. Например, если E конечномерно, то $B(E) = K(E)$ и $B(E)$ — элементарная C^*-алгебра. Элементарная C^*-алгебра является *простой*, так как единственными замкнутыми двусторонними идеалами в такой алгебре являются 0 и сама алгебра. Тем самым элементарная алгебра имеет всего одно неприводимое представление $K(E)$, которое является точным.

C^*-алгебра называется *CCR-алгеброй*, если для любого ее неприводимого представления π в гильбертовом пространстве E оказывается, что $\pi(A) = K(E)$. Очевидно, что элементарная C^*-алгебра является CCR-алгеброй. Заметим, что C^*-алгебра $\tilde{A}$, получаемая из CCR-алгебры A присоединением единицы, не всегда оказывается CCR-алгеброй. Если A — CCR-алгебра с единицей, то все ее неприводимые представления очевидно конечномерны, поскольку замыкание открытого единичного шара является компактом только в конечномерном пространстве.

Наконец, C^*-алгебра именуется *GCR-алгеброй*, если всякая ненулевая фактор-C^*-алгебра алгебры A обладает ненулевым замкнутым двусторонним CCR-идеалом. Каждая GCR-алгебра является CCR-алгеброй, но не обратно. Всякая GCR-алгебра является алгеброй типа I. В частности, все ее фактор-представления квазиэквивалентны неприводимым представлениям, и $\hat{A} = \overline{A}$. Важно также, что неприводимые представления такой алгебры с одним и тем же ядром эквивалентны, т. е. отображение ее спектра $\hat{A}$ на $\mathrm{Prim}\, A$ является биекцией.

Приведем классификацию представлений сепарабельной GCR-алгебры. Пусть A — такая алгебра и π — ее представление в сепарабельном гильбертовом пространстве E. Тогда существуют попарно независимые (т. е. не кратные друг другу) положительные меры $\mu_1, \ldots, \mu_\infty$ на спектре $\hat{A} = \overline{A}$ такие, что π эквивалентно представлению

$$\int y\, d\mu_1 \oplus 2 \int y\, d\mu_2 \oplus \cdots \oplus N \int y\, d\mu_\infty, \qquad y \in \hat{A}, \tag{2.6}$$

где N — кардинальное число множества натуральных чисел. При этом, если меры $\mu_1', \ldots, \mu_\infty'$ обладают тем же свойством, то μ_n и μ_n' эквивалентны для каждого n. Представление π также квазиэквивалентно представлению

$$\int y\, d\mu_1 \oplus \int y\, d\mu_2 \oplus \cdots \oplus \int y\, d\mu_\infty = \int y\, d\mu,$$

где

$$\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_\infty. \tag{2.7}$$

Поэтому класс мер на $\hat{A}$, определяемых представлением π, содержит меру μ (2.7).

§ 4. Конструкция ГНС

Как уже отмечалось, физическими наблюдаемыми квантовой системы являются средние значения. Математически это означает задание линейной числовой функции — положительной формы — на алгебре наблюдаемых. Рассмотрим такие формы и их связь с представлениями алгебры наблюдаемых.

Пусть f — комплексная форма на инволютивной алгебре A. Говорят, что форма f ***положительна***, если $f(a^*a) \geqslant 0$ для всех $a \in A$.

Определение 2.4.1. Если A — инволютивная нормированная алгебра, то *состоянием* на A называется положительная непрерывная форма f на A с нормой

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|a\|=1} |f(a)| = 1.$$

□

Если A — инволютивная банахова алгебра с единицей и $\|\mathbb{1}\| = 1$, то положительная форма f на A всегда непрерывна и $\|f\| = f(\mathbb{1})$. Пусть теперь A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу $\{u_i\}$, и f — непрерывная положительная форма на A. Тогда:

- $f(a^*) = \overline{f(a)}$;
- $|f(a)|^2 \leqslant \|f\| f(a^* a)$;
- $|f(b^* a b)| \leqslant \|a\| f(b^* b)$, в частности, $|f(a)| \leqslant \|a\|$;
- $\|f\| = \sup\limits_{\|a\|=1} f(a a^*)$;
- $f(u_i) \to \|f\|$, $f(u_i^* u_i) \to \|f\|$;
- f однозначно продолжается до такой положительной формы на $\tilde{A}$, что $\tilde{f}(\mathbb{1}) = \|f\|$, и всякая положительная форма f' на $\tilde{A}$, продолжающая f, *мажорирует* $\tilde{f}$, т. е. $f' - \tilde{f}$ — положительная форма на $\tilde{A}$.

Приведенными выше свойствами обладают и положительные формы на C^*-алгебрах. В частности, они непрерывны, а непрерывная форма f на C^*-алгебре с единицей положительна тогда и только тогда, когда $f(\mathbb{1}) = 1$.

Пусть A — инволютивная алгебра. Если π — ее представление в гильбертовом пространстве E и θ — некоторый элемент E, то

$$a \to \left\langle \pi(a)\theta | \theta \right\rangle \tag{2.8}$$

— положительная форма на A, про которую говорят, что она определяется π и θ. Для заданного представления π и разных элементов $\theta \in E$ получаем множество положительных форм на A, которые называются *связанными с представлением* π. В частности, пусть B — инволютивная подалгебра алгебры $B(E)$ непрерывных эндоморфизмов гильбертова пространства E и θ — некоторый элемент E. Обозначим ω_θ положительную форму (2.8) на B, связанную с естественным представлением B в E и элементом θ. Положительная форма на B называется *векторной*, если она совпадает с ω_θ для некоторого $\theta \in E$.

Предложение 2.4.2. Пусть π_1 и π_2 — представления инволютивной алгебры A в гильбертовых пространствах E_1 и E_2 соответственно, $\theta_1 \in E_1$ и $\theta_2 \in E_2$ — тотализирующие векторы для π_1 и π_2 и

$$f_1(a) = \left\langle \pi_1(a)\theta_1 | \theta_1 \right\rangle_{E_1} = \left\langle \pi_2(a)\theta_2 | \theta_2 \right\rangle_{E_2} = f_2(a), \qquad \forall a \in A.$$

Тогда существует единственный изоморфизм E_1 на E_2, переводящий π_1 в π_2 и θ_1 в θ_2. □

Таким образом, представление инволютивной алгебры определяет на ней положительную форму, которая является непрерывной, если эта алгебра банахова. Верно и обратное. Непрерывная положительная форма на инволютивной банаховой алгебре с аппроксимативной единицей задает ее представление. Это положение составляет содержание уже упоминавшейся конструкции ГНС.

Теорема 2.4.3. Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, $\tilde{A}$ — инволютивная алгебра с присоединенной единицей, f — непрерывная положительная форма на A и $\tilde{f}$ — ее продолжение на $\tilde{A}$. Определим на алгебре $\tilde{A}$ эрмитову форму

$$\langle a|b\rangle = \tilde{f}(b^*a), \tag{2.9}$$

которая вводит на $\tilde{A}$ структуру предгильбертова пространства. Рассмотрим в $\tilde{A}$ левый идеал

$$N_f = \{a : \tilde{f}(a^*a) = 0\},$$

который является также множеством таких элементов $a \in \tilde{A}$, что $f(ba) = 0$ для любого $b \in \tilde{A}$. Фактор-пространство $\tilde{A}/N_f$ — отделимое предгильбертово пространство. Обозначим E_f его пополнение по факторизованной норме (2.9). Для каждого $a \in \tilde{A}$ определим оператор $\tau(a)$ в $\tilde{A}/N_f$, возникающий при переходе к фактору из оператора левого умножения на a в $\tilde{A}$. Пусть $\theta_f = \eta(\mathbb{1})$ — канонический образ $\mathbb{1}$ в $\tilde{A}/N_f$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- Любой оператор $\tau(a)$ продолжается единственным образом до непрерывного линейного оператора $\pi_f(a)$ в E_f.
- Отображение $a \to \pi_f(a)$ является представлением A в E_f.
- Вектор θ_f — тотализирующий для представления $\pi_f(A)$.
- $f(a) = \langle \pi_f(a)\theta_f|\theta_f\rangle$ для любого $a \in A$.

□

Говорят, что представление π_f и тотализирующий вектор θ_f *определяются формой* f. В частности, пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, f — непрерывная положительная форма на A, а π_f и θ_f — представление и тотализирующий вектор, определяемые f. Тогда положительная форма (2.8) на A, определяемая π_f и θ_f, совпадает с f.

Замечание 2.4.1. Линейная форма f на алгебре A как векторном пространстве однозначно характеризуется своим ядром и значением в некоторой точке, не принадлежащей ядру (см. § 1.2). Поэтому, с физической точки зрения, конструкция ГНС означает, что задание средних — это определение аннулятора на алгебре наблюдаемых квантовой системы, действие которой на себя левыми умножениями выглядит при факторизации как представление в некотором гильбертовом пространстве, получаемом как фактор-пространство самой алгебры. Таким образом можно сказать, что вся информация о квантовой системе содержится в ее алгебре наблюдаемых. При этом согласно Следствию 1.2.3 алгебра наблюдаемых не содержит «скрытых» наблюдаемых. □

Разные формы на алгебре A могут быть связаны с одним и тем же представлением, но разными тотализирующими векторами. Важно уметь это установить. Основным критерием является следующий.

Предложение 2.4.4. Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, f — положительная форма на A, а π_f и θ_f — представление и тотализирующий вектор, определяемые f. Тогда при любом $b \in A$ форма $a \to f(b^*ab)$ связана с π_f и, если f' — другая положительная форма на A, связанная с π_f, то f' является пределом по норме в A форм $a \to f(b_i^*ab_i)$, $b_i \in A$. □

Замечание 2.4.2. Приведенная ниже конструкция обертывающих C^*-алгебр позволяет в большинстве вопросов о представлениях инволютивных банаховых алгебр, допускающих аппроксимативную единицу, ограничиться случаем C^*-алгебр.

Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу. Пусть $F(A)$ — множество непрерывных положительных форм на A. Для любого $a \in A$ обозначим

$$\|a\|' = \sup_{f \in F(A)} f(a^*a)^{1/2}.$$

Тогда $\|a\|' \leqslant \|a\|$. Отображение $a \to \|a\|'$ является преднормой на A, обладающей свойствами

$$\|ab\|' \leqslant \|a\|\,\|b\|, \qquad \|a^*\|' = \|a\|, \qquad \|a^*a\| = \|a\|'^2$$

для любых $a, b \in A$. Пусть I — множество таких $a \in A$, что $\|a\|' = 0$. Это замкнутый самосопряженный двусторонний идеал в A. Отображение $a \to \|a\|'$ при переходе к фактору определяет норму на A/I. Пополнение $A^\dagger$ фактора A/I по этой норме является C^*-алгеброй, называемой *обертывающей C^*-алгеброй* алгебры A. Каноническое отображение $\tau : A \to A^\dagger$ представляет собой морфизм инволютивных алгебр, не увеличивающий норму. Если A — C^*-алгебра, то $A^\dagger = A$.

Теорема 2.4.5. Пусть A, $A^\dagger$ и τ — введенные выше объекты. Справедливы следующие утверждения.

- Если π — представление алгебры A, то существует единственное представление $\pi^\dagger$ ее обертывающей C^*-алгебры $A^\dagger$ в том же гильбертовом пространстве такое, что $\pi = \pi^\dagger \circ \tau$ и $\pi^\dagger(A^\dagger)$ — C^*-алгебра, порожденная $\pi(A)$. Отображение $\pi \to \pi^\dagger$ является биекцией множества представлений A на множество представлений $A^\dagger$. При этом, для того чтобы представление $\pi^\dagger$ было невырожденным (соотв. неприводимым), необходимо и достаточно, чтобы π было невырожденным (соотв. неприводимым).

- Пусть f — непрерывная положительная форма на A. Существует единственная положительная форма $f^\dagger$ на $A^\dagger$ такая, что $f = f^\dagger \circ \tau$. При этом $f \to f^\dagger$ является биекцией множества непрерывных положительных форм на A на множество положительных форм на $A^\dagger$.

□

В частности, пусть $F(A)$ — множество непрерывных положительных форм на инволютивной банаховой алгебре A, допускающей аппроксимативную единицу. Представление

$$\pi = \bigoplus_{f \in F(A)} \pi_f$$

называется *универсальным представлением* A. Тогда

$$\|a\|' = \|\pi(a)\|, \qquad \forall a \in A.$$

Отсюда следует, что соответствующее представление $\pi^\dagger$ обертывающей алгебры $A^\dagger$ осуществляет изоморфизм $A^\dagger$ на $\overline{\pi(A)}$ — замыкание $\pi(A)$. □

Рассмотрим теперь положительные формы, связанные с неприводимыми представлениями.

Определение 2.4.6. Пусть A — инволютивная банахова алгебра, f — непрерывная положительная форма на A. Говорят, что ненулевая форма f на A является *чистой*, если все непрерывные положительные формы на A, мажорируемые f, имеют вид λf $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. □

Теорема 2.4.7. Представление π_f инволютивной банаховой алгебры A с аппроксимативной единицей, определяемое непрерывной положительной формой f на A, топологически неприводимо тогда и только тогда, когда f — чистая форма. □

Для чистых форм и неприводимых представлений конструкция ГНС из Теоремы 2.4.3 упрощается. Пусть A — C^*-алгебра, f — чистая форма на A и N_f — левый идеал в A, образованный такими элементами $a \in A$, что $f(aa^*) = 0$. Тогда $E_f = A/N_f$, наделенное скалярным произведением (2.9), полно и является пространством представления, определяемого f. Более того, N_f состоит из элементов $a \in A$, для которых $\pi_f(a)\theta_f = 0$, где θ_f — тотализирующий вектор, определяемый f.

Критерий того, что чистые состояния на C^*-алгебре A связаны с одним и тем же неприводимым представлением, принимает следующий вид.

Предложение 2.4.8. Для того чтобы чистые состояния f_1 и f_2 на A определяли эквивалентные представления, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой унитарный элемент U в $\tilde{A}$, что

$$f_2(a) = f_1(U^*aU), \qquad \forall a \in A.$$

Обратно, пусть A — инволютивная алгебра, π — ее топологически неприводимое представление в гильбертовом пространстве E, а θ_1 и θ_2 — элементы E. Положительные формы на A, определяемые (π_1, θ_1) и (π_2, θ_2), равны тогда и только тогда, когда $\theta_1 = \lambda\theta_2$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\lambda| = 1$. □

В § 7 будет показано, что чистые формы, отвечающие одному и тому же неприводимому представлению C^*-алгебры, составляют проективное гильбертово пространство.

Следующее утверждение является аналогом Теоремы 1.2.1 Хана—Банаха о продолжении форм.

Предложение 2.4.9. Пусть C^*-алгебра A имеет C^*-подалгебру A_1 и ϕ_1 — состояние на A_1. На A существует состояние ϕ (не единственное), продолжающее ϕ_1, и если ϕ_1 — чистое, то ϕ можно выбрать чистым. □

Обозначим:

- $F_1(A)$ — множество положительных форм на C^*-алгебре A с нормой $\leqslant 1$;
- $E(A)$ — множество состояний на A;
- $P(A)$ — множество чистых состояний.

Все они — подмножества топологически сопряженного к A пространства A'. При этом справедливы следующие утверждения.

- Множества $F_1(A)$ и $E(A)$ выпуклы, поскольку для C^*-алгебр выполняется равенство

$$\|f_1 + f_2\| = \|f_1\| + \|f_2\|.$$

- Множество $F_1(A)$ слабо* компактно и образует слабо* замкнутую оболочку своих крайних точек, каковыми являются 0 и элементы $P(A)$.
- Если C^*-алгебра A содержит единицу, $E(A)$ слабо* компактно и является слабо* замкнутой выпуклой оболочкой $P(A)$.

Предложение 2.4.8 устанавливает сюръекцию $P(A) \to \hat{A}$. Это отображение биективно тогда и только тогда, когда любое неприводимое представление C^*-алгебры A одномерно, что имеет место только для коммутативных алгебр. Ниже будет показано, что $P(A) \to \hat{A}$ — это топологическое расслоение на кэлеровы многообразия (см. § 7).

Замечание 2.4.3. Из приведенного в Предложении 2.4.8 критерия для форм, связанных с одним и тем же неприводимым представлением, можно получить такое следствие. Пусть A — C^*-алгебра с единицей, ϕ и ϕ' — чистые состояния на A, для которых $\|\phi - \phi'\| < 2$. Тогда представления π_ϕ и $\pi_{\phi'}$ эквивалентны. Таким образом, в $E(A)$ чистые состояния, отвечающие неэквивалентным неприводимым представлениям, не лежат близко в равномерной топологии. С физической точки зрения это означает, что степень нарушения симметрии не бывает малой. □

§ 5. Следы

Следы — еще один тип форм, рассматриваемых на C^*-алгебрах. В отличие от положительных форм, они не обязательно конечны, но определяются только на положительных элементах C^*-алгебры.

Элемент a инволютивной алгебры называется *положительным*, если он эрмитов и $\mathrm{Sp}_A\, a \geqslant 0$. Будем писать $a \geqslant 0$. Обозначим A_+ множество положительных элементов алгебры A.

Пример 2.5.1. Элемент a C^*-алгебры $B(E)$ непрерывных операторов в гильбертовом пространстве E является положительным тогда и только тогда, когда a — положительно определенный оператор из $B(E)$. □

На множестве A_+ определено отношение частичного упорядочения $a - b \geqslant 0$, согласованное со структурой векторного пространства в A. В частности, если $a \leqslant b$, $a, b \in A_+$, то $\|a\| \leqslant \|b\|$, а также $c^*ac \leqslant c^*bc$ для любого $c \in A$.

Если A — C^*-алгебра и элемент $a \in A$ эрмитов, следующие условия эквивалентны:

- a — положительный элемент;
- a принимает вид bb^*, $b \in A$;
- a принимает вид h^2, где h — положительный эрмитов элемент.

Элемент h имеет смысл квадратного корня из a и обозначается $\sqrt{a}$ или $a^{1/2}$. Если a — произвольный элемент C^*-алгебры A, то элемент aa^* положителен, и поэтому можно определить *модуль* $|a| = \sqrt{aa^*}$ элемента a (см. ниже Пример 2.7.4). Если a обратим, то элементы aa^* и $|a|$ тоже обратимы, и $a = u\,|a|$, где $u = a|a|^{-1}$ — унитарный элемент из C^*-подалгебры A_a, порождаемой a и a^*. Это частный случай так называемого полярного разложения.

Замечание 2.5.2. Пусть E — гильбертово пространство и $a \in B(E)$. Зададим оператор u на подпространстве $|a|\,E$ гильбертова пространства E, полагая

$$u\,|a|\,x = ax, \qquad x \in E.$$

Это корректно определенный изометрический оператор на $|a|\,E$, и можно расширить u до частично изометрического оператора в E, доопределив его нулем на ортогональном дополнении к $|a|\,E$ и расширив по свойству линейности. В результате получаем *полярное разложение*

$$a = u\,|a|\,, \tag{2.10}$$

которое единственно. Оператор u принадлежит алгебре фон Неймана, порождаемой C^*-алгеброй A_a. □

Операторы физических наблюдаемых связывают обычно именно с положительными элементами C^*-алгебры квантовой системы.

Определение 2.5.1. *Следом* на множестве A_+ положительных элементов C^*-алгебры A называют функцию

$$\phi : A_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty],$$

удовлетворяющую таким условиям:

(а) $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$;

(б) если $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$, то $\phi(\lambda a) = \lambda\phi(a)$ с условием $0 \cdot \infty = 0$;

(в) $\phi(aa^*) = \phi(a^*a)$. □

Говорят, что след ϕ *конечен*, если $\phi(a) < \infty$ для всех $a \in A_+$, и *полуконечен*, если для каждого $a \in A_+$ значение $\phi(a)$ — верхняя грань чисел $\phi(b)$ для таких $b \in A_+$, что $b \leqslant a$ и $\phi(b) < \infty$. В дальнейшем мы будем предполагать полунепрерывность снизу следа на A_+. Если след не конечен, обозначим $R_{+\phi}$ множество таких $a \in A_+$, что $\phi(a) < \infty$, и T_ϕ множество таких $a \in A$, что $\phi(aa^*) < \infty$. Тогда T_ϕ — самосопряженный двусторонний идеал в A, и $T_\phi^2 = R_\phi$ — множество линейных комбинаций элементов из $R_{+\phi}$. На R_ϕ существует единственная линейная форма ϕ', совпадающая с ϕ на $R_{+\phi}$. Подчеркнем, что R_ϕ — двусторонний идеал, т. е., если $a \in R_\phi$, то ba, $ab \in R_\phi$. Имеем

$$\begin{aligned} &\phi'(a^*) = \overline{\phi'(a)}, && a \in R_\phi, \\ &\phi'(ba) = \phi'(ab), && a \in R_\phi, \qquad b \in A. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Подобно следу на A_+, определяется след t на множестве положительных элементов B_+ алгебры фон Неймана B. В этом случае видоизменяется условие (б), а именно:

(б) если $a \in B_+$ и U — унитарный элемент из B, то

$$t(UaU^{-1}) = t(a).$$

След t называется *точным*, если из условия $t(a) = 0$, $a \in B_+$, следует $a = 0$. След t называется *нормальным*, если для любой возрастающей сети $F \subset B_+$ с точной верхней гранью $b \in B_+$ число $t(b)$ является точной верхней гранью $t(F)$.

Примером полуконечного точного нормального следа на $B(E)$ служит

$$t(b) = \mathrm{Tr}(b) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_i \langle be_i | e_i \rangle, \tag{2.12}$$

где $\{e_i\}$ — некоторый ортонормальный базис гильбертова пространства E, но след (2.12) не зависит от выбора ортонормального базиса.

Определение 2.5.2. Алгебра фон Неймана B называется *конечной* (соотв. *полуконечной*), если для любого ненулевого $b \in B_+$ существует конечный (соотв. полуконечный) нормальный след t на B_+ такой, что $t(b) \neq 0$. □

Например, алгебра типа I полуконечна.

Пусть $B \subset B(E)$ — полуконечный фактор и t — полуконечный точный след на B_+. Тогда нормальный след на B_+ всегда имеет вид λt, где $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$, и идеалы T_t и R_t не зависят от выбора t. Элементы R_t называются *элементами со следом*, а элементы T_t — *элементами Гильберта—Шмидта* относительно полуконечного фактора B. В случае $B = B(E)$ со следом (2.12) это просто операторы Гильберта—Шмидта.

Замечание 2.5.3. Введем понятие гильбертовой алгебры. Пусть инволютивная алгебра A наделена скалярным произведением $\langle .|. \rangle$, превращающим ее в предгильбертово пространство и удовлетворяющим условиям:

- $\langle a|b\rangle = \langle b^*|a^*\rangle$, $a, b \in A$;
- $\langle ca|b\rangle = \langle a|c^*b\rangle$, $a, b, c \in A$;
- для любого $b \in A$ отображение $a \to ba$ предгильбертова пространства A в себя непрерывно;
- произведения ab, $a, b \in A$, плотны в A.

Отсюда следует, что

$$\langle ac|b\rangle = \langle a|bc^*\rangle, \qquad a, b, c \in A,$$

и что отображение $a \to ab$ также непрерывно. Инволютивная алгебра с таким скалярным произведением называется *гильбертовой алгеброй*.

Пусть E — гильбертово пространство — пополнение A, а U_b и V_b — элементы $B(E)$, продолжающие умножения слева и справа на b в A. Тогда $b \mapsto U_b$ и $b \mapsto V_b$ образуют невырожденные представления A в E. Очевидно, что операторы U_b и V_b перестановочны и

$$(U_b(x^*))^* = V_{b^*}(x), \qquad \forall x \in E.$$

Слабое замыкание множества элементов U_b (соотв. V_b) образует алгебру фон Неймана $\mathcal{U}(A)$ (соотв. $\mathcal{V}(A)$), называющуюся *связанной слева* (соотв. *связанной справа*) с A. Имеем

$$\mathcal{U}(A) = \mathcal{V}(A)', \qquad \mathcal{V}(A) = \mathcal{U}(A)'.$$

В частности, если $c \in \mathcal{U}(A) \cap \mathcal{V}(A)$, то

$$(c(x^*))^* = c^*(x), \qquad \forall x \in E.$$

Говорят, что элемент $x \in E$ *ограничен* (относительно A), если отображение $b \to V_b x$ (или эквивалентно $b \to U_b x$) пространства A в E непрерывно. В частности, всякий элемент $a \in A \subset E$ ограничен, а элемент x^* ограничен тогда и только тогда, когда x ограничен. Гильбертова алгебра A называется *совершенной*, если все ограниченные элементы принадлежат $A \subset E$. Например, *полная гильбертова алгебра* (когда A — гильбертово пространство) совершенна.

Обозначим теми же символами U_a и V_a непрерывные продолжения на E отображений $A \ni b \to V_b x \in E$ и $A \ni b \to U_b x \in E$. Если элементы $a, b \in E$ ограничены, то $U_a b = V_b a$. Положим $ab = U_a b$. Это определяет на множестве $\mathcal{A}$ ограниченных элементов E структуру гильбертовой алгебры, содержащей A как плотную гильбертову

подалгебру. Гильбертова алгебра $\mathscr{A}$ совершенна. Имеем $\mathcal{U}(A) = \mathcal{U}(\mathscr{A})$ и $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(\mathscr{A})$. Для элемента $c \in \mathcal{U}(A)_+$ положим

$$t(c) = \begin{cases} \langle a|a\rangle, : U_a = \sqrt{c} \text{ при } a \in \mathscr{A}, \\ \infty : \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.13}$$

Тогда t (2.13) — полуконечный точный нормальный след на $\mathcal{U}(A)_+$.

Например, операторы Гильберта—Шмидта $\mathcal{E}$ в гильбертовом пространстве H образуют инволютивную алгебру. Эта алгебра, снабженная скалярным произведением

$$(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Tr}(\mathcal{E}'^* \mathcal{E}),$$

является полной гильбертовой алгеброй. Она изоморфна гильбертову пространству $H' \otimes H$ так, что элементу $\xi \otimes \sigma \in H' \otimes H$ ставится в соответствие оператор

$$x \mapsto \langle x, \xi\rangle \sigma.$$

Пусть A — полная гильбертова алгебра и P_ι — семейство минимальных проекторов из $\mathcal{U}(A) \cap \mathcal{V}(A)$. Они *взаимно ортогональны*, т. е. для $P_\iota \neq P_\kappa$ подпространства $P_\iota(E)$ и $P_\kappa(E)$ взаимно ортогональны. Тогда:

- $A_\iota = P_\iota(A)$ является совершенной гильбертовой алгеброй, так что алгебры A_ι попарно аннулируются, т. е. $A_\iota A_\kappa = 0$, и являются самосопряженными двусторонними идеалами в A;
- гильбертово пространство A является гильбертовой суммой A_ι;
- после умножения нормы в A_ι на константу гильбертова алгебра становится изоморфной гильбертовой алгебре операторов Гильберта—Шмидта в некотором гильбертовом пространстве;
- если $\mathcal{U}(A)$ и $\mathcal{V}(A)$ — конечные алгебры фон Неймана, то все A_ι конечномерны.

□

Подобно тому как положительная форма на C^*-алгебре определяет ее представление, след на C^*-алгебре определяет ее представление со следом.

Определение 2.5.3. Представлением C^*-алгебры *со следом* называется пара (π, t), обладающая следующими свойствами:

- t — точный нормальный след на B_+, где B — алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(A)$;
- $\pi(A) \cap T_t$ порождает B.

Из этих условий следует полуконечность t и полуконечность B. □

Пусть (π_1, t_1) и (π_2, t_2) — два представления C^*-алгебры A со следом, а B_1 и B_2 — алгебры фон Неймана, порожденные $\pi_1(A)$ и $\pi_2(A)$. Говорят, что представления со следом (π_1, t_1) и (π_2, t_2) *квазиэквивалентны* (соотв. *эквивалентны*), если существует изоморфизм (соотв. пространственный изоморфизм) B_1 на B_2, который преобразует π_1 в π_2 и t_1 в t_2. Тогда представления π_1 и π_2 квазиэквивалентны (соотв. эквивалентны).

Если (π, t) — представление C^*-алгебры со следом, тогда

$$\phi(A_+) = t(\pi(A_+))$$

— полунепрерывный полуконечный снизу след на A_+. Про него говорят, что он связан с (π, t). Если заменить (π, t) на квазиэквивалентное представление со следом, то след ϕ не изменится. Обратно, пусть ϕ — полунепрерывный снизу полуконечный след на A_+. Обозначим N_ϕ — множество таких $a \in T_\phi$, что $\phi(aa^*) = 0$. Это двусторонний идеал в A. Форма (2.9) при переходе к фактору определяет структуру отделимого предгильбертова пространства на инволютивной алгебре T_ϕ/N_ϕ. Обозначим E_ϕ гильбертово пополнение T_ϕ/N_ϕ и $\langle .|. \rangle_\phi$ — скалярное произведение в E_ϕ. Отображение $a \to ba$, $b \in A$, $a \in T_\phi$, переносится на фактор-пространство T_ϕ/N_ϕ и продолжается по непрерывности до линейных операторов $\pi_\phi(a)$ в E_ϕ, реализуя представление A в E_ϕ. Скалярное произведение $\langle .|. \rangle_\phi$ на T_ϕ/N_ϕ удовлетворяет всем тем условиям (см. Замечание 2.5.3), которые превращают T_ϕ/N_ϕ в гильбертову алгебру. Воспроизведем для T_ϕ/N_ϕ те же конструкции, что и в Замечании 2.5.3. Тогда можно показать, что алгебра фон Неймана $\mathcal{U}(T_\phi/N_\phi)$ есть алгебра фон Неймана B_ϕ, порожденная $\pi_\phi(A)$, и t_ϕ (2.13) — след на $B_{\phi+}$. Построенное представление со следом (π_ϕ, t_ϕ) называется связанным с ϕ.

Предложение 2.5.4. Пусть A — C^*-алгебра и ϕ — полунепрерывный снизу полуконечный след на A_+, а (π_ϕ, t_ϕ) — представление со следом, связанное с ϕ. Тогда след на A_+, связанный с (π_ϕ, t_ϕ), совпадает с ϕ. Обратно, пусть (π, t) — представление A со следом и ϕ — след, связанный с (π, t). Тогда представление со следом, связанное с ϕ, квазиэквивалентно (π, t). Таким образом, существует каноническая биекция множества полунепрерывных снизу полуконечных следов на A_+ на множество классов квазиэквивалентности представлений C^*-алгебры A со следом. □

Так же как неприводимым представлениям C^*-алгебры A отвечают чистые формы на ней, ее фактор-представления находятся в соответствии с характерами алгебры A.

Определение 2.5.5. Полунепрерывный снизу полуконечный след ϕ на A_+ называется *характером* A, если всякий другой такой след на A_+, мажорируемый ϕ, пропорционален ϕ на положительных элементах замыкания множества R_ϕ. □

Предложение 2.5.6. Пусть ϕ — полунепрерывный снизу полуконечный след на A_+ и (π_ϕ, t_ϕ) — представление C^*-алгебры со следом, связанное с ϕ. Для того чтобы π было фактор-представлением, необходимо и достаточно, чтобы ϕ был характером. Существует каноническая биекция между множеством классов квазиэквивалентных фактор-представлений C^*-алгебры, допускающих след (т. е. если есть такой след t на A_+, что (π, t) — представление со следом), и множеством характеров A с точностью до положительного множителя. □

Например, пусть A — GCR-алгебра и π — неприводимое представление A. Для каждого $a \in A_+$ введем

$$\phi_\pi(a) = \mathrm{Tr}(\pi(a)).$$

Тогда $\phi_\pi(a)$ является характером, и существует изоморфизм T_ϕ/N_ϕ на гильбертову алгебру операторов Гильберта—Шмидта в E_π. Если π' — другое неприводимое представление A и $\phi_\pi = \phi_{\pi'}$, то π и π' квазиэквивалентны и эквивалентны. Каждое представление GCR-алгебры имеет след.

Замечание 2.5.4. Пусть π, π' — неприводимые представления инволютивной алгебры в онечномерных векторных пространствах. Если

$$\mathrm{Tr}(\pi(a)) = \mathrm{Tr}(\pi'(a)), \qquad \forall a \in A,$$

тогда π и π' эквивалентны. □

Связь между формами на C^*-алгебрах и следами устанавливается в случае конечных следов.

Предложение 2.5.7. Рассмотрим положительную *центральную форму* f на C^*-алгебре A (т. е. $f(ab) = f(ba)$, $a, b \in A$). Тогда сужение f на A_+ представляет собой конечный след. Обратно, пусть ϕ — конечный след на A_+, тогда $R_\phi = A$, и f — положительная центральная форма на A, продолжающая ϕ. □

В этом случае:

- $\pi_f = \pi_\phi$;
- след t_ϕ на $B_{\phi+}$ конечен, и если t'_ϕ — его продолжение на B_ϕ, то

$$t'_\phi(\pi_f(a)) = \left\langle \pi_f(a)\theta_f | \theta_f \right\rangle$$

для всех $a \in A$;

- θ_f — тотализирующий и отделяющий вектор для алгебры фон Неймана B_ϕ, совпадающей с алгеброй фон Неймана, порождаемой $\pi_f(A)$.

Замечание 2.5.5. Пусть B — инволютивная подалгебра $B(E)$. Напомним, что ненулевой вектор $x \in E$ называется *отделяющим* для B, если из условия $b(x) = 0$, $b \in B$, следует, что $b = 0$. □

§ 6. Гильбертовы интегралы состояний

Аналогично операциям интегрирования и дезинтегрирования представлений определены операции интегрирования и дезинтегрирования форм и следов.

Пусть f — положительная форма на сепарабельной C^*-алгебре A, E — пространство представления π_f, Y — борелевское пространство, μ — положительная мера на Y, E_y — измеримое поле гильбертовых пространств, π_y — измеримое поле неприводимых представлений A в E_y таких, что

$$E = \int E_y \, d\mu, \qquad \pi_f = \int \pi_y \, d\mu.$$

Пусть θ_y — такое поле векторов, что

$$\theta_f = \int \theta_y \, d\mu.$$

Для почти каждого y имеем $\theta_y \neq 0$. Пусть f_y — чистые положительные формы (для почти всех y), определяемые π_y и θ_y. Тогда для каждого $a \in A$ функция $y \to f_y(a)$ интегрируема и

$$f(a) = \int f_y(a) \, d\mu. \tag{2.14}$$

Пусть ϕ — полуконечный полунепрерывный снизу след на A_+, определяющий объекты E_ϕ, π_ϕ, B_ϕ, t_ϕ. Тогда существуют: стандартная положительная мера μ на квазиспектре $\overline{A}$, характер ϕ_y для каждого $y \in \overline{A}$ и такие измеримые поля E_y, π_y, B_y, t_y, что: $\pi_y \in y$ почти всюду,

$$E_\phi = \int E_y \, d\mu, \qquad \pi_\phi = \int \pi_y \, d\mu,$$
$$B_\phi = \int B_y \, d\mu, \qquad t_\phi = \int t_y \, d\mu,$$

а для каждого $a \in A_+$ функция $y \to \phi_y(a)$ измерима и

$$\phi(a) = \int \phi_y(a) \, dy.$$

Если мера μ', характеры ϕ'_y и поля E'_y, π'_y, B'_y t'_y обладают теми же свойствами, то меры μ и μ' эквивалентны.

Разложение (2.14) является частным случаем так называемых барицентрических разложений (см. Приложение А.7). Рассмотрим описание состояний на C^*-алгебрах в терминах этих разложений.

Пусть A — C^*-алгебра. Напомним, что множество состояний $E(A)$ на алгебре A выпукло, слабо* компактно и является слабо* замкнутой выпуклой оболочкой множества чистых состояний $P(A)$. Поэтому всякое состояние f на алгебре A является барицентром

$$f = \int y \, d\mu_f \tag{2.15}$$

некоторой положительной меры μ_f на $E(A)$ с полной массой 1. Разложение (2.15) неоднозначно. Обозначим множество всех таких мер M_f и рассмотрим его подмножество O_f ортогональных мер.

Положительные формы f_1 и f_2 на C^*-алгебре A называются *ортогональными*, если они удовлетворяют следующим эквивалентным условиям:

- представление, определяемое суммой $f = f_1 + f_2$, является прямой суммой представлений, определяемых f_1 и f_2;
- если f' — положительная форма на A такая, что $f' \leqslant f_1$ и $f' \leqslant f_2$, то $f' = 0$;
- существует такой проектор $P \in \pi_f(A)'$, что

$$f_1(a) = \left\langle \pi_f(a)\theta_f | P\theta_f \right\rangle, \qquad \forall a \in A,$$
$$f_2(a) = \left\langle \pi_f(a)\theta_f | (\mathbb{1} - P)\theta_f \right\rangle.$$

Пусть μ — положительная мера на $E(A)$. Если для любого борелевского множества $V \subset E(A)$ формы

$$\int\limits_V y \, d\mu \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{E(A)\setminus V} y \, d\mu$$

ортогональны, то μ называется *ортогональной мерой* на $E(A)$.

Пусть в дальнейшем A — C^*-алгебра с единицей. Следующие утверждения устанавливают связь ортогональных мер со специальными классами подалгебр фон Неймана и проективных операторов.

Если $\mu \in M_f$, то существует единственное линейное отображение

$$\chi_\mu : L^\infty(E(A), \mu) \ni s \to \chi_\mu(s) \in \pi_f(A)', \tag{2.16}$$

удовлетворяющее соотношению

$$\left\langle \chi_\mu(s)\pi_f(A)\theta_f | \theta_f \right\rangle = \int s(y)y(A)\, d\mu(y).$$

Напомним, что $L^\infty(X, \mu)$, $L^1(X, \mu)$ — дуальная пара, и можно снабдить $L^\infty(E(A))$ топологией $\sigma\left(L^\infty(E(A)), L^1(E(A))\right)$. Тогда, если коммутант $\pi_f(A)'$ наделен слабой операторной топологией, то отображение (2.16) непрерывно.

Эквивалентны условия:

- мера μ ортогональна;
- отображение (2.16) является инъективным морфизмом $L^\infty(E(A))$ в $\pi_f(A)'$.

Если они выполнены, то $B = \chi_\mu(L^\infty(E(A)))$ является абелевой подалгеброй фон Неймана в $\pi_f(A)'$.

Пусть f — состояние на A. Существует взаимно однозначное соответствие между тремя множествами: множеством ортогональных мер $\mathcal{O}_f$, множеством всех абелевых подалгебр фон Неймана $B \subset \pi_f(A)'$ и множеством всех ортогональных операторов P в $\pi_f(A)$ таких, что

$$P\theta_f = \theta_f, \qquad P\pi_f(A)P \subset (P\pi_f(A)P)'.$$

Причем $B = (\pi_f(A) \cup P)'$ и P — ортогональный проектор на пространство $B\theta_f$.

В заключение приведем теорему, которая описывает *экстремальные разложения* (2.15), т. е. разложения по чистым состояниям.

Теорема 2.6.1. Пусть f — состояние на C^*-алгебре A с единицей, B — максимальная абелева подалгебра в $\pi_f(A)'$ и μ — соответствующая ортогональная мера на $E(A)$. Тогда мера μ максимальна и псевдососредоточена на множестве чистых состояний $P(A)$. Если A сепарабельна, то μ сосредоточена на $P(A)$. Если коммутант $\pi_f(A)'$ абелев, то такая максимальная мера единственна. Для того чтобы всякое состояние на A обладало таким свойством, необходимо и достаточно, чтобы алгебра A была абелева (в этом случае $E(A)$ — симплекс). □

В § 3.4 будет рассмотрен другой тип барицентрических разложений — так называемые эргодические разложения.

§ 7. Дополнение. Функциональное представление C^*-алгебр

Начнем со случая коммутативных C^*-алгебр (см. [6, 10]).

Характером коммутативной C^*-алгебры называется ненулевой морфизм этой алгебры в $\mathbb{C}$. Любой характер коммутативной C^*-алгебры A имеет ненулевую норму $\leqslant 1$ и эрмитов.

Замечание 2.7.1. Следует отметить определенное противоречие в терминологии. Характер коммутативной C^*-алгебры A как общей C^*-алгебры является функцией вида $a \mapsto \lambda\chi(a)$ на A_+, где $\lambda > 0$ и $\chi(a)$ — характер A, как мы его только что определили. □

Множество характеров коммутативной C^*-алгебры A, снабженное слабой топологией, является локально компактным пространством, называемым спектром алгебры A. Он совпадает со спектром $\hat{A}$ алгебры A как общей C^*-алгебры, а также с множеством примитивных идеалов $\mathrm{Prim}\, A$ и множеством чистых состояний $P(A)$ на алгебре A. Это обусловлено тем, что любое неприводимое представление коммутативной C^*-алгебры одномерно. Отсюда также следует, что коммутативная C^*-алгебра есть CCR-алгебра.

Пример 2.7.2. Пусть X — локально компактное пространство, A — инволютивная алгебра непрерывных комплексных функций f на X, стремящихся к нулю на бесконечности (т. е. в бесконечно удаленной точке в пространстве, получаемом компактификацией X). Наделенная нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|, \tag{2.17}$$

эта алгебра становится C^*-алгеброй. □

Определение 2.7.1. Пусть A — коммутативная C^*-алгебра. Для всякого $a \in A$ функция

$$\mathcal{F}_a : \chi \to \chi(a) \tag{2.18}$$

на спектре $\hat{A}$ называется *преобразованием Гельфанда* элемента a. □

Функция (2.18) непрерывна, разделяет точки $\hat{A}$, и для любого $\chi \in \hat{A}$ существует такой элемент $a \in A$, что $\mathcal{F}_a(\chi) \neq 0$. Если A содержит единицу, то множество значений функции $\mathcal{F}_a$ совпадает со спектром элемента a.

Пример 2.7.3. Пусть A — коммутативная C^*-алгебра с единицей. Предположим, что ее под-C^*-алгебра, порожденная $\mathbb{1}$ и элементом a, равна A. Тогда преобразование Гельфанда (2.18) является гомеоморфизмом $\hat{A}$ на $\mathrm{Sp}\, a$, где $\hat{A}$ — компакт. Заметим, что если A — C^*-алгебра с единицей и a — ее нормальный элемент, то элементы $\mathbb{1}$ и a порождают коммутативную под-C^*-алгебру A_a алгебры A. Отсюда следует, что спектр $\mathrm{Sp}_A\, a$ нормального элемента $a \in A$ относительно алгебры A совпадает с его спектром относительно алгебры A_a и является компактом. □

Приведем основную теорему теории коммутативных C^*-алгебр.

Теорема 2.7.2. Пусть A — коммутативная C^*-алгебра, $\hat{A}$ — ее спектр и $\mathcal{S}(\hat{A})$ — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на $\hat{A}$, стремящихся к нулю на бесконечности. Преобразование Гельфанда осуществляет изоморфизм C^*-алгебры A на C^*-алгебру $\mathcal{S}(\hat{A})$. □

Функциональное исчисление в коммутативных C^*-алгебрах основывается на следующем утверждении.

Предложение 2.7.3. Пусть A — C^*-алгебра, a — нормальный элемент A и $\mathcal{S}(\mathrm{Sp}_A\, a)$ — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на $\mathrm{Sp}_A\, a$. Существует единственный изометрический морфизм C^*-алгебр

$$\zeta : \mathcal{S}(\mathrm{Sp}_A\, a) \ni f \to f(a) \in A$$

такой, что $\zeta(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ и $\zeta(\hat{\lambda}) = a$, где $\hat{\lambda}$ обозначает функцию $\lambda \to \lambda$ на $\hat{A}$. Образом этого морфизма является под-C^*-алгебра $A_a \subset A$, порожденная элементами $\mathbb{1}$ и a. □

Тот факт, что ζ — изометрический морфизм, выражается следующими соотношениями, где f и g — непрерывные комплексные функции на $\mathrm{Sp}_A\, a$:

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a),$$
$$(fg)(a) = f(a)g(a),$$
$$\overline{f}(a) = f(a^*),$$
$$\|f(a)\| = \|f\|,$$
$$\mathrm{Sp}_A\, f(a) = f(\mathrm{Sp}_A\, a).$$

Следствие 2.7.4. Пусть A — коммутативная C^*-алгебра с единицей, a — элемент A и $\mathcal{F}$ — преобразование Гельфанда, f — непрерывная комплексная функция на $\mathrm{Sp}_A\, a$. Тогда

$$\mathcal{F}_{f(a)} = f(\mathcal{F}_a).$$

□

Пример 2.7.4. Пусть a — эрмитов элемент C^*-алгебры a. Рассмотрим функцию $f(\lambda) = |\lambda|$ на его вещественном спектре. Ей отвечает положительный элемент $|a|$ этой алгебры, называемый *модулем* эрмитова элемента a. Можно ввести эрмитовы элементы

$$a_+ = \frac{1}{2}\big(|a| + a\big), \qquad a_- = \frac{1}{2}\big(|a| - a\big)$$

такие, что $a_+a_- = a_-a_+ = 0$. Отсюда следует, что $a^2 = |a|^2$, и $|a|$ является модулем элемента a, как он был определен в § 5. □

Перейдем теперь к случаю некоммутативной C^*-алгебры с единицей, элементы которой могут быть представлены функциями на пространстве чистых состояний $P(A)$.

Начнем с алгебры $B(E)$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве E. Рассмотрим проективное гильбертово пространство PE (см. § 1.7). Сопоставим элементу $a \in B(E)$ комплексную функцию

$$f_a(\mathrm{x}) = \langle ax|x\rangle \tag{2.19}$$

на PE, где $x \in E$ — нормированный представитель элемента $\mathrm{x} \in PE$. Отображение (2.19) является включением $B(E)$ в пространство гладких функций $C^\infty(PE)$ на PE. Оно линейно и согласуется с операцией инволюции. Чтобы превратить его в морфизм алгебр, зададим на элементах PE операцию произведения

$$f \star g = fg + \frac{1}{2}\big\langle \partial f, g^\sharp(\overline{\partial} g)\big\rangle = fg + \frac{1}{2}\big\langle df, g^\sharp(dg)\big\rangle + \frac{i}{2}\big\langle df, \omega^\sharp(dg)\big\rangle, \tag{2.20}$$

где g — метрика Фубини—Штуди (1.36), а ω — ее фундаментальная форма (1.37). Тогда можно показать [36, 37], что

$$f_{ab} = f_a \star f_b.$$

Более того,

$$\|a\| = \sup_{\mathrm{x}\in PE} (\overline{f}_a \star f_a)(\mathrm{x}).$$

Чтобы построить функциональное представление произвольной C^*-алгебры A с единицей, воспользуемся тем, что каноническое отображение $P(A) \to \hat{A}$ является топологическим расслоением, каждый слой которого $P_\pi(A)$ (т. е. множество чистых состояний,

связанных с неприводимым представлением π) в индуцированной топологии является кэлеровым многообразием, изоморфным проективному гильбертову пространству PE_π, где E_π — пространство представления π [37, 61]. Этот изоморфизм определяется тем, что каждому чистому состоянию $\phi \in P_\pi(A)$ сопоставляется единичный тотализирующий вектор $x_\phi \in E_\pi$, который является представителем некоторого элемента x_ϕ проективного гильбертова пространства PE_π, и обратно. На $P_\pi(A)$ вводится кэлерова метрика такая, что соответствующая функция расстояния имеет вид

$$\rho(\phi, \phi') = \sqrt{2}\arccos\left(\left|\langle x_\phi | x_{\phi'}\rangle\right|\right).$$

Сопоставим всякому элементу $a \in A$ функцию

$$f_a(\phi) = \langle a, \phi\rangle$$

на пространстве чистых состояний $P(A)$ алгебры A. Определим на множестве таких функций произведение $\star$, задаваемое послойно формулой (2.20). Тогда отображение $a \mapsto f_a$, тоже называемое *преобразованием Гельфанда*, является линейным, согласующимся с инволюцией вложением A в $C^\infty(P(A))$ таким, что

$$f_{ab} = f_a \star f_b$$

и

$$\|a\| = \sup_{\phi \in P(A)} (\overline{f}_a \star f_a)(\phi).$$

В частности, если A — коммутативная C^*-алгебра с единицей, то $P(A) = \hat{A}$, и мы приходим к классическому преобразованию Гельфанда, описанному в Предложении 2.7.3.

Глава 3

Симметрии квантовых систем

Как следует из конструкции ГНС, алгебра наблюдаемых полностью характеризует квантовую систему. Поэтому под преобразованиями симметрий квантовой системы мы, как правило, будем подразумевать автоморфизмы C^*-алгебр и алгебр фон Неймана. При этом следует иметь в виду, что нет полной эквивалентности между автоморфизмами алгебры наблюдаемых и морфизмами ее состояний, в том числе морфизмами гильбертовых пространств ее представлений, т. е. между симметриями в «гейзенберговской» и «шредингеровской» картинах квантовой теории.

§ 1. Морфизмы и йордановы морфизмы

Пусть $\gamma : A_1 \to A_2$ — линейное отображение инволютивной алгебры A_1 как векторного пространства в инволютивную алгебру A_2. Говорят, что [3, 25]:

- γ — морфизм, если

$$\gamma(ab) = \gamma(a)\,\gamma(b), \qquad \gamma(a^*) = \gamma(a)^*;$$

- γ — *антиморфизм*, если

$$\gamma(ab) = \gamma(b)\,\gamma(a), \qquad \gamma(a^*) = \gamma(a)^*;$$

- γ — *положительное отображение*, если $\gamma(A_{1+}) \subset A_{2+}$;
- γ — *изометрия*, если A_1 и A_2 — нормированные алгебры и $\|\gamma(a)\|_2 = \|a\|_1$, $a \in A_1$;
- γ — *йорданов* морфизм, если

$$\gamma(\{a, b\}) = \{\gamma(a), \gamma(b)\}, \qquad \gamma(a^*) = \gamma(a)^*,$$

  где $\{a, b\} = ab + ba$ — антикоммутатор;

- γ — изоморфизм (соотв. *йорданов* изоморфизм), если γ — морфизм (соотв. йорданов морфизм) и существует обратный морфизм (соотв. обратный йорданов морфизм) γ^{-1};
- γ — автоморфизм (соотв. *йорданов* автоморфизм), если γ — изоморфизм (соотв. йорданов изоморфизм) инволютивной алгебры A на себя.

Морфизмы C^*-алгебр как инволютивных алгебр являются их морфизмами как C^*-алгебр, т. е. образом такого морфизма является C^*-алгебра. Они непрерывны и положительны. Изоморфизм C^*-алгебр изометричен. Аналогично, морфизмы алгебр фон Неймана как инволютивных алгебр являются их морфизмами как алгебр фон Неймана. Они положительны и ультрасильно (а значит сильно, ультраслабо и слабо) непрерывны, т. е. непрерывны в ультрасильной операторной топологии в алгебре фон Неймана. Изоморфизм алгебр фон Неймана изометричен. Морфизмы и антиморфизмы являются йордановыми морфизмам, но йорданов морфизм может не быть морфизмом инволютивной алгебры. Йордановы морфизмы C^*-алгебр положительны.

Рассмотрение йордановых морфизмов связано с тем, что преобразования, дуальные преобразованиям множеств состояний на C^*-алгебрах являются именно йордановыми морфизмами этих алгебр (см. ниже Предложение 3.1.4).

Предложение 3.1.1. Пусть γ — линейное сохраняющее операцию инволюции отображение C^*-алгебры A_1 как векторного пространства на C^*-подалгебру $A_2 \subset B(E)$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве E. Отображение γ является йордановым морфизмом в том и только том случае, если существует оператор проектирования $T \in A_2' \cap A_2''$ такой, что $A_1 \to \gamma(A_1)T$ является морфизмом, а

$$A_1 \to \gamma(A_1)(\mathbb{1} - T)$$

— антиморфизмом. □

Таким образом, йордановы морфизмы можно получить «сложением» морфизмов и антиморфизмов. Это важно для характеристики йордановых морфизмов.

Пусть C^*-алгебры A_1 и A_2 обладают единицами и $A_2 \subset B(E)$ — алгебра ограниченных операторов в гильбертовом пространстве E. Рассмотрим линейное отображение $\gamma : A_1 \to A_2$, имеющее обратное; причем $\gamma(\mathbb{1}) = 1$. Следующие условия эквивалентны:

- γ — йорданов морфизм;
- если элемент a унитарен, то оператор $\gamma(a)$ унитарен; если a эрмитов, то $\gamma(|a|) = |\gamma(a)|$; если a обратим, то $\gamma(a)$ обратим и $\gamma(a^{-1}) = \gamma(a)^{-1}$;
- γ — изометрия;
- сопряженное к γ отображение γ' обладает тем свойством, что $\gamma'(E(A_2)) = E(A_1)$, где $E(A_1)$ и $E(A_2)$ — множества состояний соответственно на A_1 и A_2.

Замечание 3.1.1. Напомним, что если $\gamma : A_1 \to A_2$ — линейное отображение, то сопряженное отображение $\gamma' : A_2' \to A_1'$ непрерывно в слабых* топологиях в $E(A_1)$ и $E(A_2)$, а из линейности γ следует, что отображение γ' является *аффинным*, т. е.

$$\gamma'(\lambda f + (1-\lambda)g) = \lambda\gamma'(f) + (1-\lambda)\gamma'(g), \qquad \forall \lambda \in [0,1].$$

□

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Предложение 3.1.2. Пусть γ — йорданов автоморфизм C^*-алгебры с единицей. Он индуцирует сопряженное биективное слабо* непрерывное аффинное отображение пространства состояний $E(A)$ (а также множества чистых состояний $P(A)$) на алгебре A на себя. □

Справедливо частичное обращение этого утверждения.

Нормальной положительной формой на алгебре фон Неймана B называется форма f такая, что для любой возрастающей сети $F \subset B_+$ с верхней гранью $s \in B_+$ число $f(s)$ является точной верхней гранью $f(F)$ (см. определение нормального следа). Форма f на B_+ нормальна тогда и только тогда, когда она ультраслабо непрерывна. Множество B_* нормальных форм на алгебре фон Неймана B называется *преддвойственным пространством*. Оно банахово относительно нормы, индуцированной из сопряженного пространства B', и B сопряжено банахову пространству B_* как пространство форм $f \to f(a)$, $a \in B_*$. Таким образом, как уже отмечалось, алгебра фон Неймана — это C^*-алгебра, которая является сопряженной преддвойственному пространству.

Теперь можно сформулировать следующее утверждение.

Предложение 3.1.3. Пусть B — алгебра фон Неймана и $N(B)$ — множество нормальных состояний на B. Если ζ — аффинное отображение $N(B)$ на себя, то существует единственный йорданов автоморфизм γ алгебры B такой, что $\zeta = \gamma'$. □

Этот результат можно распространить и на C^*-алгебры.

Предложение 3.1.4. Пусть A — C^*-алгебра с единицей и $E(A)$ — множество всех состояний на A. Всякое слабо* непрерывное аффинное биективное отображение множества $E(A)$ на себя является дуальным некоторому йорданову автоморфизму C^*-алгебры A. □

С физической точки зрения, Предложения 3.1.2–3.1.4 устанавливают связь между преобразованиями симметрий в «гейзенберговской» и «шредингеровской» картинах. Поэтому преобразования симметрий квантовых систем естественно отождествлять с йордановыми автоморфизмами C^*-алгебр и алгебр фон Неймана. Однако, если перейти к рассмотрению связных топологических групп симметрий, реализующие эти группы йордановы автоморфизмы оказываются просто автоморфизмами (см. ниже Предложение 3.1.5).

Замечание 3.1.2. Напомним, что действие топологической группы G в топологическом пространстве X называется:

- *непрерывным*, если отображение $G \times X \to X$ непрерывно;
- *раздельно непрерывным*, если частичные отображения $G \times X \to X$ при каждом фиксированном $x \in X$ и при каждом фиксированном $g \in G$ непрерывны.

Первое условие более сильное. Например, действие операторной алгебры на себя внутренними автоморфизмами непрерывно только в равномерной операторной топологии (см. §2.1). При этом условие равномерной непрерывности является весьма жестким ограничением. Например, известно, что неприводимые унитарные представления связной вещественной группы Ли, непрерывные в равномерной операторной топологии, конечномерны. Поэтому в дальнейшем под непрерывным действием группы автоморфизмов будет пониматься именно раздельно непрерывное действие.

Как правило, мы будем иметь дело с топологическими группами, действующими в банаховых пространствах. Говорят, что топологическая группа G действует в банаховом пространстве X:

- *равномерно непрерывно* (или коротко, что G — *равномерно непрерывная группа*, действующая в X), если дано ее непрерывное отображение в группу ограниченных операторов в X, наделенную равномерной операторной топологией, которая действует непрерывно в равномерной (сильной) топологии в X;

- *сильно непрерывно* или просто непрерывно, когда действие G (раздельно) непрерывно в равномерной (сильной) топологии в X (т. е. дано непрерывное отображение G в группу ограниченных операторов в X, наделенную сильной операторной топологией);
- *слабо непрерывно*, когда ее действие (раздельно) непрерывно в слабой топологии в X.

□

Предложение 3.1.5. Пусть G — связная группа йордановых автоморфизмов C^*-алгебры A с единицей, наделенная слабой операторной топологией и действующая слабо непрерывно в A. Тогда:

- G — слабо непрерывная группа автоморфизмов алгебры A;
- если π — представление A в гильбертовом пространстве E, то $\pi_g(a) = \pi(g(a))$, $g \in G$, для всякого $a \in A$ — сильно непрерывная группа, действующая в E.

□

Аналогичная ситуация имеет место для некоторых типов алгебр фон Неймана. Пусть G — связная ультраслабо непрерывная группа йордановых автоморфизмов алгебры фон Неймана B. Если B абелева или фактор, то G — группа автоморфизмов. Например, алгебра $B(E)$ — фактор, и все ее йордановы автоморфизмы — автоморфизмы.

Учитывая это, будем под группами симметрий, как правило, понимать слабо или сильно непрерывные группы автоморфизмов C^*-алгебр и слабо или ультраслабо непрерывные группы автоморфизмов алгебр фон Неймана.

§ 2. Дифференцирования

Рассмотрим особо однопараметрические группы автоморфизмов C^*-алгебр и алгебр фон Неймана. В частности, такие группы описывают эволюцию квантовых систем. При этом сошлемся сразу на следующую теорему [3].

Теорема 3.2.1. Слабо непрерывная группа изометрий банахова пространства является сильно непрерывной. □

Генераторы упомянутых однопараметрических групп автоморфизмов являются дифференцированиями [3]. В этом параграфе мы рассмотрим обратную задачу, при каких условиях дифференцирования могут служить генераторами однопараметрических групп автоморфизмов, а также условия выполнения этих групп унитарными операторами в гильбертовых пространствах.

Определение 3.2.2. *Симметрическим дифференцированием* C^*-алгебры A называется линейный оператор δ, действующий из некоторой инволютивной подалгебры $D(\delta) \subset A$ в A и такой, что для любых a и b из его области определения $D(\delta)$ выполняются равенства

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \qquad \delta(a^*) = \delta(a)^*.$$

Последнее из них является условием, что дифференцирование симметрическое. □

В дальнейшем мы будем иметь дело только с симметрическим дифференцированием, называя его просто дифференцированием. Предположим также, что A содержит единицу и что $\mathbb{1} \in D(\delta)$. Нетрудно убедиться, что $\delta(\mathbb{1}) = 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда операторы дифференцирования ограничены.

Предложение 3.2.3. Если $D(\delta)$ — C^*-алгебра, например, $D(\delta) = A$, то оператор δ ограничен. Обратно, если множество $D(\delta)A$ плотно в A и дифференцирование δ ограничено, оно единственный образом продолжается до ограниченного дифференцирования на A. □

В дальнейшем будет предполагаться, что область определения дифференцирования плотна в алгебре A.

Пример 3.2.1. Дифференцирование C^*-алгебры A называется *внутренним*, если существует такой элемент $b \in A$, что

$$\delta(a) = i[a, b].$$

Внутреннее дифференцирование определено на всей алгебре A. Оно ограничено. Дифференцирование δ называется *аппроксимативно внутренним*, если существует такая последовательность эрмитовых элементов $\{b_n\}$ алгебры A, что

$$\delta(a) = \lim_n i[b_n, a], \qquad a \in D(\delta).$$

□

Существует следующая связь между ограниченными дифференцированиями и однопараметрическими группами автоморфизмов C^*-алгебр.

Предложение 3.2.4. Пусть δ — линейный оператор в C^*-алгебре A. Следующие условия эквивалентны:

- δ — всюду определенное, а следовательно ограниченное дифференцирование алгебры A;
- δ — генератор равномерно непрерывной однопараметрической группы автоморфизмов
$$g_t = \exp[t\delta], \qquad t \in \mathbb{R},$$
алгебры A.

□

Более того, при выполнении приведенных выше условий для каждого представления π алгебры A найдется самосопряженный оператор $H \in \pi(A)''$ такой, что

$$\pi(\delta(a)) = i[H, \pi(a)]$$

и

$$\pi(g_t(a)) = e^{itH}\pi(a)e^{-itH}$$

для всех $a \in A$ и $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, равномерно непрерывные однопараметрические группы автоморфизмов C^*-алгебр (и алгебр фон Неймана) унитарно представимы. Однако не все C^*-алгебры допускают нетривиальные группы равномерно непрерывных автоморфизмов, равно как и нетривиальные ограниченные дифференцирования. Поэтому перейдем к случаю, когда оператор дифференцирования не обязательно ограничен на своей области определения.

Замечание 3.2.2. Приведем основные понятия, касающиеся неограниченных операторов в гильбертовых (и аналогично банаховых) пространствах. Оператором в гильбертовом пространстве E с *областью определения* $D(a)$ называется линейное отображение a из плотного в E векторного подпространства $D(A) \subset E$ в E. Оператор a считается *ограниченным* в $D(a)$, если величина

$$\|a\| = \sup\left\{\|ax\|_E : \ \|x\|_E = 1, \ x \in D(a)\right\}$$

конечна. В противном случае говорят, что он *неограниченный*. Любой ограниченный в области определения оператор однозначно продолжается до ограниченного оператора на всем гильбертовом пространстве E.

Оператор a с областью определения $D(a)$ называется *замкнутым*, если из условий, что последовательность $\{x_i\}$ в области определения $D(a)$ сходится к некоторому элементу $x \in E$, а ее образ $\{ax_i\}$ сходится к некоторому элементу $y \in E$, следует, что $x \in D(a)$ и $ax = y$. Оператор a является замкнутым тогда и только тогда, когда его график $\{(x, ax), \ x \in D(a)\}$ является замкнутым подмножеством $E \oplus E$. Оператор a называется *замыкаемым*, если существует его расширение до замкнутого оператора b, т. е. такого, что $D(a) \subset D(b)$ и $b|_{D(a)} = a$. *Замыканием* $\bar{a}$ оператора a считается его минимальное замкнутое расширение.

Как уже отмечалось, ограниченный оператор с областью определения E замкнут и, обратно, замкнутый оператор с областью определения E ограничен, а следовательно непрерывен.

Операторы a и b в гильбертовом пространстве E с областями определения $D(a)$ и $D(b)$ называются *сопряженными*, если

$$\langle ax|y\rangle = \langle x|by\rangle, \qquad \forall x \in D(a), \qquad \forall y \in D(b).$$

Для оператора a с плотной областью определения $D(a)$ существует единственный *максимальный сопряженный* оператор a^*; он замкнут. Оператор a называется *симметрическим*, если

$$\langle ax|y\rangle = \langle x|ay\rangle, \qquad \forall x, y \in D(a),$$

т. е. $D(a) \subset D(a^*)$ и a^* совпадает с a на $D(a)$ или, короче говоря, $a \subset a^*$. Таким образом, симметрический оператор замыкаем и $\bar{a} \subset a^*$. Иногда под замыканием симметрического оператора понимается оператор a^{**}. Однако заметим, что в общем случае сопряженный к a оператор a^* не является симметрическим. Если $a = a^*$, то оператор a именуется *самосопряженным*. Наконец, оператор a называется *существенно самосопряженным*, если его замыкание является самосопряженным оператором. □

Свойство замкнутости является существенным условием для того, чтобы дифференцирование C^*-алгебры A было генератором ее группы автоморфизмов. Приведем критерии замыкаемости симметрического дифференцирования δ с плотной областью определения $D(\delta)$ [49].

Предложение 3.2.5. Дифференцирование δ C^*-алгебры A является замыкаемым, если существует такое состояние ϕ на A, что представление π_ϕ алгебры A точно и

$$|\phi(\delta(a))| \leqslant \lambda\|a\| \tag{3.1}$$

при всех $a \in D(\delta)$ и некотором $\lambda \geqslant 0$. □

Дифференцирование δ называется *допустимым*, если для всякого положительного элемента $a \in D(\delta)$ существует состояние ϕ на A такое, что

$$\phi(a) = \|a\|, \qquad \phi(\delta(a)) = 0.$$

Предложение 3.2.6. Если дифференцирование δ является допустимым, то оно замыкаемо и его замыкание $\overline{\delta}$ тоже является допустимым. □

Укажем на следующие два случая, когда дифференцирование оказывается допустимым.

- Дифференцирование δ допустимо, если для всякого положительного элемента $a \in D(\delta)$ его корень $\sqrt{a}$ тоже принадлежит $D(\delta)$.
- Дифференцирование δ допустимо, если оно является аппроксимативно внутренним.

Замечание 3.2.3. Если дифференцирование δ замкнуто и для всякого положительного элемента $a \in D(\delta)$ его корень $\sqrt{a}$ тоже принадлежит $D(\delta)$, то $D(\delta) = A$ и δ ограничено. □

Установим теперь связь между (неограниченными) дифференцированиями C^*-алгебр и генераторами их однопараметрических групп автоморфизмов.

Предложение 3.2.7. Пусть δ — замыкаемое симметрическое дифференцирование C^*-алгебры A с плотной областью определения $D(\delta)$. Его замыкание $\overline{\delta}$ является генератором сильно непрерывной однопараметрической группы автоморфизмов алгебры A тогда и только тогда, когда:

а) множества $(\mathbb{1} + \lambda\delta)(D(\delta))$ плотны в A для любого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

б) $\|(\mathbb{1} + \lambda\delta)a\| \geqslant \|a\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in D(\delta)$. □

Заметим, что условие (б) выполняется, если дифференцирование δ допустимо. В этом случае Предложение 3.2.7 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 3.2.8. Пусть δ — допустимое симметрическое дифференцирование в C^*-алгебре A с плотной областью определения $D(\delta)$. Его замыкание $\overline{\delta}$ является генератором сильно непрерывной однопараметрической группы автоморфизмов алгебры A, если выполняется условие (а) Предложения 3.2.7 [32, 57]. □

Утверждение, аналогичное Предложению 3.2.7, можно сформулировать и для алгебр фон Неймана.

Предложение 3.2.9. Пусть B — алгебра фон Неймана и δ — линейный оператор с областью определения $D(\delta) \subset B$, плотной в слабой топологии. Пусть $\mathbb{1} \in D(\delta)$ и δ слабо* замкнут. Оператор δ является генератором ультраслабо непрерывной однопараметрической группы автоморфизмов алгебры B тогда и только тогда, когда для B выполняются условия (а) — (б) из Предложения 3.2.7. □

Пусть теперь δ — симметрическое дифференцирование, определенное на инволютивной подалгебре B алгебры $B(E)$ в гильбертовом пространстве E, θ — единичный вектор, тотализирующий для B, и ω_θ — соответствующее ему состояние. Тогда эквивалентны следующие условия:

- при всех $a \in B$ и некотором $\lambda \geqslant 0$

$$|\omega_\theta(\delta(a))| \leqslant \lambda\left[\omega_\theta(a^*a) + \omega_\theta(aa^*)\right]^{1/2}; \tag{3.2}$$

- существует симметрический оператор H в E такой, что $D(H) = B\theta$ и

$$\delta(a)x = i[H, a]x, \qquad \forall a \in B, \qquad \forall x \in D(H).$$

Таким образом, если g_t — сильно непрерывная однопараметрическая группа автоморфизмов C^*-алгебры A или ультраслабо непрерывная однопараметрическая группа автоморфизмов алгебры фон Неймана A и ее генератор удовлетворяет условию (3.2) для некоторого состояния ϕ на A, тогда группа g_t выполнима посредством сильно непрерывной однопараметрической группы

$$\pi_\phi(g_t(a)) = U_t \pi_\phi(a) U_t^*, \qquad a \in A,$$

с генератором

$$\pi_\phi(\delta(a))x = i\left[H, \pi_\phi(a)\right]x, \qquad x \in \pi_\phi\left(D(\delta)\right)\theta_\phi,$$

где симметрический оператор H в гильбертовом пространстве E_ϕ можно выбрать самосопряженным. В частности, если H — самосопряженный оператор на всем гильбертовом пространстве E_ϕ, то группа автоморфизмов продолжается до слабо* непрерывной группы автоморфизмов алгебры $B(E_\phi)$.

Замечание 3.2.4. Заметим, что для под-C^*-алгебры B условие (3.2) совпадает с условием (3.1) замыкаемости дифференцирования. □

Приведенные выше условия унитарного выполнения однопараметрической группы автоморфизмов достаточные. Полное решение задачи такого представления ультраслабо непрерывных однопараметрических групп автоморфизмов алгебр фон Неймана B следует из *теоремы Борхерса—Арвесона*. Мы не приводим здесь ее формулировку и лишь отметим, что она дает описание класса групп с полуограниченным спектром (содержащего класс равномерно непрерывных групп с ограниченным оператором дифференцирования, спектр которого компактен) и устанавливает, что полуограниченность спектра влечет реализацию группы автоморфизмов группой унитарных операторов, и обратно, спектр генератора унитарной группы полуограничен. Причем унитарные операторы U_t можно выбрать внутри алгебры B, а генераторы таких групп имеют вид

$$\delta(a) = i[H, a], \qquad a \in B, \tag{3.3}$$

где самосопряженный оператор H (*гамильтониан*) можно выбрать положительным и *присоединенным* к алгебре фон Неймана B, т. е. $B'D(H) \subset D(H)$ и $H\{H\}' \supset \{H\}'H$, где $\{H\}$ обозначает одноэлементное множество, состоящее только из H.

Пример 3.2.5. В качестве еще одного примера унитарного выполнения групп автоморфизмов рассмотрим алгебру фон Неймана $B(E)$. Все ее автоморфизмы внутренние, и группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(B(E))$ изоморфна фактор-группе унитарных операторов в гильбертовом пространстве E по подгруппе умножений на комплексные числа λ, $|\lambda| = 1$. Последнее означает, что операторы U_γ, отвечающие автоморфизмам $\gamma \in \mathrm{Aut}(B(E))$, образуют группу только с точностью до фазового множителя $\exp(i\alpha)$, т. е.

$$U_\gamma U_\beta = \exp(i\alpha) U_{\gamma\beta}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Однако в случае однопараметрической слабо* непрерывной группы γ_t автоморфизмов $B(E)$ возможен согласованный выбор представителей U_t, при котором они образуют однопараметрическую слабо (сильно) непрерывную группу. □

§ 3. Модулярная группа

Опишем особо так называемую модулярную группу автоморфизмов σ-конечных алгебр фон Неймана [3, 64]. Приведем несколько понятий.

Определение 3.3.1. Алгебра фон Неймана называется *σ-конечной*, если мощность любого ее ортонормального семейства не более чем счетна. □

В частности, всякая алгебра фон Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве E, в том числе $B(E)$, σ-конечна.

Пусть B — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве E. Подмножество $N \subset E$ называется *отделяющим* для B, если для $a \in B$ из условия $ax = 0$, $\forall x \in N$, следует, что $a = 0$. Отделяющее множество для B является тотализирующим для коммутанта B', и обратно.

Состояние ϕ на алгебре фон Неймана называется *точным*, если $\phi(a) > 0$ для любого ненулевого $a \in B_+$.

Предложение 3.3.2. Пусть B — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве E. Тогда эквивалентны условия:

- B является σ-конечной;
- существует счетное подмножество в E, отделяющее для B;
- существует точное нормальное состояние на B;
- B изоморфна алгебре фон Неймана $\pi(B)$ в некотором гильбертовом пространстве, обладающей отделяющим тотализирующим вектором.

□

Отметим, что большинство алгебр фон Неймана B в алгебраической квантовой теории относятся именно к классу σ-конечных алгебр. Это вызвано следующим обстоятельством. Пусть ϕ — нормальное состояние на алгебре фон Неймана B, действующей в гильбертовом пространстве E. Тогда существует положительный оператор ρ в E, имеющий след $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ и такой, что

$$\phi(b) = \mathrm{Tr}(\rho b) = \mathrm{Tr}(b\rho), \qquad \forall b \in B. \tag{3.4}$$

Оператор ρ обратим тогда и только тогда, когда состояние ϕ точно. В физических приложениях ρ — это *матрица плотности*. При этом в случае несепарабельного пространства E оператор ρ имеет не более чем счетное множество ненулевых собственных значений и векторов. Поэтому состояние ϕ' — продолжение ϕ на $B(E)$ — обязательно обратится в 0 на некотором элементе $B(E)$ и не будет точным. Следовательно, алгебра фон Неймана $B(E)$ действительно σ-конечна только в случае сепарабельного пространства E.

Пусть ϕ — точное нормальное состояние на σ-конечной алгебре фон Неймана B, а (π, θ) — представление и тотализирующий вектор в некотором гильбертовом пространстве E, определяемые ϕ. Зададим два антилинейных оператора:

$$S_0 a\theta = a^*\theta, \qquad \forall a \in \pi(B)$$

и

$$F_0 a\theta = a^*\theta, \qquad \forall a \in \pi(B)',$$

имеющие плотные области определения $D(S_0) = \pi(B)\theta$ и $D(F_0) = \pi(B)'\theta$. Оба оператора замыкаемы: $S = \overline{S_0}$ и $F = \overline{F_0}$. Полярное разложение $S = J\Delta^{1/2}$ оператора S определяет единственным образом обратимый положительный самосопряженный оператор Δ, называемый *модулярным оператором*, и антилинейный оператор J с областью определения $D(J) = E$, называемый *модулярной инволюцией*. Имеют место следующие равенства:

$$\Delta = FS, \qquad \Delta^{-1} = SF, \qquad S = J\Delta^{1/2}, \qquad F = J\Delta^{-1/2},$$
$$J = J^*, \qquad J^2 = \mathbb{1}, \qquad \Delta^{-1/2} = J\Delta^{1/2}J.$$

Области значений операторов Δ и J находятся из *теоремы Томита—Такесаки*, а именно:

$$J\pi(B)J = \pi(B)',$$
$$\Delta^{it}\pi(B)\Delta^{-it} = \pi(B), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Она устанавливает существование ультраслабо непрерывной однопараметрической группы автоморфизмов алгебры фон Неймана B, которая задается формулой

$$\sigma_t^{\phi}(a) = \pi^{-1}\left(\Delta^{it}\pi(a)\Delta^{-it}\right), \qquad a \in B. \tag{3.5}$$

При этом выполняется *модулярное условие*

$$\left\langle \Delta^{1/2}\pi(a)\theta | \Delta^{1/2}\pi(b)\theta \right\rangle = \left\langle \pi(b^*)\theta | \pi(a^*)\theta \right\rangle, \qquad a, b \in B. \tag{3.6}$$

Определение 3.3.3. Группа (3.5) называется группой *модулярных автоморфизмов*, ассоциированных с парой (B, ϕ), или *модулярной группой*. □

Подчеркнем, что наличие модулярной группы является свойством любой σ-конечной алгебры фон Неймана. Более того, такая группа допускает продолжение в область комплексных параметров t и в такой форме играет ключевую роль при построении алгебраической квантовой теории при конечной температуре (см. §6.1). Опишем это продолжение.

Пусть на комплексном банаховом пространстве X задана слабо (а значит и сильно) непрерывная однопараметрическая группа изометрий g_t. Вектор $a \in X$ называется *аналитическим* для g_t, если существует полоса

$$T_\lambda = \{z : \ |\operatorname{Im} z| < \lambda\}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

в $\mathbb{C}$ и функция $q_a : T_\lambda \to X$ такие, что

(а) $q_a(t) = g_t(a)$ при $t \in \mathbb{R}$;

(б) $z \to f(q_a(z))$ — аналитическая функция при всех $f \in X'$.

При выполнении этих условий будем писать

$$g_z(a) \stackrel{\text{def}}{=} q_a(z), \qquad z \in T_\lambda.$$

Условие *слабой аналитичности* (б) эквивалентно *условию сильной аналитичности*, которое гласит, что

$$\lim_{h \to 0} h^{-1}\left(q_a(z+h) - q_a(z)\right)$$

существует в смысле нормы в X при каждом $z \in T_\lambda$. Пусть a — некоторый элемент X.

Обозначим

$$a_n = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2} \int g_t(a) \exp\left[-nt^2\right]\, dt,$$

где n — натуральные числа. Все a_n — аналитические элементы для g_t. Причем, $\|a_n\| \leqslant \|a\|$ и $a_n \to a$ в слабой (а, следовательно, сильной) топологии при $n \to \infty$. Элементы a_n именуются *целыми аналитическими элементами*. Они образуют слабо (и сильно) плотное подмножество в X.

В случае $X = B$ и $g_t(a) = \Delta^{it} a \Delta^{-it}$, где Δ — обратимый положительный самосопряженный оператор, получаем

$$g_z(a) = \Delta^{iz} a \Delta^{-iz}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

для всякого аналитического элемента $a \in B$. В частности, если Δ — модулярный оператор, при $t = i/2$ модулярное условие (3.6) принимает вид

$$\phi\left(\sigma^{\phi}_{i/2}(a)\, \sigma^{\phi}_{-i/2}(b)\right) = \phi(ba). \tag{3.7}$$

Пример 3.3.1. Если $B = B(E)$ — алгебра фон Неймана ограниченных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве E, то каждое точное нормальное состояние ϕ на $B(E)$ имеет вид (3.4) с обратимым оператором ρ. Тогда соответствующая модулярная группа приобретает форму

$$\sigma^{\phi}_t(a) = \rho^{it} a \rho^{-it}, \qquad a \in B(E), \tag{3.8}$$

и выполняется модулярное условие (3.7):

$$\mathrm{Tr}\left(\rho\left(\rho^{-1/2} a \rho^{1/2}\right)\left(\rho^{1/2} b \rho^{-1/2}\right)\right) = \mathrm{Tr}(\rho ba) = \phi(ba),$$

где использовано соотношение (2.11). Этим условием модулярная группа σ^{ϕ}_t определяется однозначно. □

Пусть B — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве E, имеющая тотализирующий отделяющий вектор θ, а Δ и J — модулярный оператор и модулярная инволюция, ассоциированные с (B, θ). В пространстве E выделяется так называемый *естественный положительный конус* P, ассоциированный с (B, θ) и определяемый как замыкание множества $\{aJaJ\theta,\ a \in B\}$. Он обладает следующими свойствами:

- $P = \overline{\Delta^{1/4} B_+ \theta} = \overline{\Delta^{-1/4} B'_+ \theta}$;
- $\Delta^{it} P = P$, $\forall t \in \mathbb{R}$;
- если $x \in P$, то $Jx = x$;
- конус P самосопряжен, т. е.

$$P = \{x \in E :\ \langle x | y \rangle \geqslant 0,\ \forall y \in P\};$$

- E совпадает с линейной оболочкой P;

- если вектор ξ принадлежит P, то он является тотализирующим для B тогда и только тогда, когда он отделяющий для B;
- если $\xi \in P$ — тотализирующий (и следовательно отделяющий) вектор для B, то для модулярной инолюции J_ξ и положительного конуса P_ξ, ассоциированных с парой (B, ξ), получаем равенства $J_\xi = J$ и $P_\xi = P$.

Для любой положительной нормальной формы f (обозначим их множество B_{*+}) на B существует такой единственный вектор $\xi(f) \in P$, что $f = \omega_{\xi(f)}$, т. е.

$$f(a) = \big\langle a\xi(f)|\xi(f)\big\rangle, \qquad a \in B.$$

В частности, для всякого тотализирующего отделяющего для B вектора $x \in E$ существует единственный вектор $\xi \in P$ со свойством

$$\langle ax|x\rangle = \langle a\xi|\xi\rangle, \qquad \forall a \in B.$$

Отображение $\xi \to \omega_\xi$ является гомеоморфизмом, если наделить P и B_{*+} равномерными топологиями, и множество положительных векторных форм ω_ξ, отвечающих тотализирующим отделяющим векторам для B, плотно по норме в B_{*+}. Отсюда следует, что существует единственное унитарное выполнение

$$\gamma \in \mathrm{Aut}(B) \to U_\gamma$$

в E группы $\mathrm{Aut}(B)$ всех автоморфизмов σ-конечной алгебры фон Неймана B в E, обладающее свойствами:

- $U_\gamma a U_\gamma^* = \gamma(a)$, $a \in B$;
- $U_\gamma P \subset P$;
- $U_\gamma \theta(f) = \theta(\gamma'^{-1}(f))$, $f \in B_{*+}$, где $\gamma'(f)(a) = f(\gamma(a))$;
- $[U_\gamma, J] = 0$.

Однако такое выполнение перестает быть единственным и, более того, не всегда может оказаться естественным, если рассмотреть однопараметрическую группу автоморфизмов σ-конечной алгебры фон Неймана. Существует ее другая, не совпадающая с $U_t \in B$ (с генератором (3.3)), унитарная реализация V_t со свойствами

$$\gamma_t(a) = V_t a V_t^* = U_t a U_t^*, \qquad V_t = U_t J U_t J, \qquad V_t P \subset P$$

и генератором

$$H' = H - JHJ. \tag{3.9}$$

§ 4. Инвариантные состояния

Для исследования симметрий квантовых систем важным является тот факт, что группа симметрий допускает унитарную реализацию, если существует состояние, инвариантное относительно этой группы. Приведем соответствующее утверждение [10].

Предложение 3.4.1. Пусть ϕ — состояние на C^*-алгебре A и γ — автоморфизм A, оставляющий ϕ инвариантным, т. е.

$$\phi(\gamma(a)) = \phi(a), \qquad \forall a \in A.$$

Пусть π_ϕ и θ_ϕ — представление и тотализирующий вектор, связанные с ϕ. В гильбертовом пространстве E_ϕ представления π_ϕ существует и единствен такой унитарный оператор U, что

$$U\pi_\phi(a)U^* = \pi_\phi(\gamma(a)) \tag{3.10}$$

для всех $a \in A$ и

$$\eta(\gamma(a)) = U\eta(a), \qquad U\theta_\phi = \theta_\phi,$$

где η — каноническое отображение $A \to \tilde{A}/N_\phi \subset E_\phi$ (см. Теорему 2.4.3).

Пусть теперь G — сильно непрерывная группа автоморфизмов C^*-алгебры A и ϕ — состояние, *инвариантное* относительно G. Тогда в E_ϕ существует сильно непрерывное унитарное представление G операторами (3.10). Если G — однопараметрическая группа, то ее генератор замыкаем. □

Остановимся на случае однопараметрических групп более подробно. Пусть $\{g_t\}$ — однопараметрическая сильно непрерывная группа автоморфизмов C^*-алгебры A с генератором δ. Состояние ϕ на A называется *основным*, если

$$-i\phi(a^*\delta(a)) \geqslant 0, \qquad \forall a \in D(\delta). \tag{3.11}$$

Основное состояние является инвариантным относительно группы $\{g_t\}$ [58]. Поэтому эта группа имеет сильно непрерывное унитарное представление

$$U_t = \exp[itH]$$

в гильбертовом пространстве E_ϕ, где H — самосопряженный оператор в E, который можно выбрать так, что $H \in \overline{\pi_\phi(A)}$.

Следует подчеркнуть, что инвариантность состояния ϕ на C^*-алгебре A относительно однопараметрической группы $\{g_t\}$ автоморфизмов этой алгебры не обязательно предполагает, что $\phi(\delta(a)) = 0$, $\forall a \in A$. Однако, если это условие выполняется, то очевидно, что состояние ϕ является основным и инвариантным. Заметим, что подобное состояние удовлетворяет условию (3.2) унитарной выполнимости однопараметрических групп автоморфизмов.

Инвариантные состояния допускают барицентрические разложения [3].

Пусть G — группа автоморфизмов γ_g, $g \in G$, C^*-алгебры A с представлениями

$$(\overline{\gamma}_g\phi)(a) = \phi(\gamma_{g^{-1}}(a)), \qquad a \in A, \qquad \phi \in E(A),$$

на пространстве состояний $E(A)$ на A и

$$(\tilde{\gamma}_g f)(\phi) = f(\overline{\gamma}_{g^{-1}}(\phi))$$

на пространстве функций $L^\infty(E(A), \mu)$ на $E(A)$.

Множество G-инвариантных состояний — это выпуклое слабо* замкнутое, а значит и слабо* компактное подмножество $E^G(A)$ в $E(A)$, крайние точки которого называются

эргодическими состояниями (обозначим их множество N_G). Поэтому всякое G-инвариантное состояние ϕ на C^*-алгебре A с единицей допускает барицентрическое разложение (см. Приложение А.7). Существует взаимно однозначное соответствие между следующими тремя множествами:

(а) множеством Q_ϕ всех ортогональных мер $\mu \in \mathcal{O}_\phi$ на $E(A)$ с барицентром ϕ, которые удовлетворяют условию инвариантности

$$\mu(\tilde{\gamma}_g(f_1)f_2) = \mu(f_1 f_2) \tag{3.12}$$

при всех $f_1, f_2 \in L^\infty(E(A), \mu)$ и $g \in G$;

(б) множеством всех абелевых подалгебр фон Неймана B коммутанта $(\pi_\phi(A) \cup U_\phi(G))'$, где $U_\phi(G)$ — унитарное представление G в пространстве E_ϕ представления π_ϕ;

(в) множеством всех ортогональных проекторов P в E_ϕ таких, что

$$P\theta_\phi = \theta_\phi, \qquad U_\phi(g)P = P, \qquad P\pi_\phi(A)P \subset (P\pi_\phi(A)P)'.$$

В частности, если коммутант из пункта (б) абелев, максимальная мера, удовлетворяющая условию инвариантности (3.12), единственна, и обратно.

Следующий результат касается носителя инвариантных ортогональных мер, имеющих своим барицентром инвариантное состояние. Эквивалентны условия:

- $\mu(\tilde{\gamma}_g(f_1)f_2) = \mu(f_1 f_2)$ для всех функций $f_1, f_2 \in \mathcal{K}(E(A))$ на $E(A)$ с компактным носителем;
- носитель μ содержится в $E^G(A)$.

Если μ удовлетворяет этим условиям и максимальна, то она псевдососредоточена на множестве эргодических состояний N_G, а если алгебра A сепарабельна, то μ сосредоточена на N_G. Такое разложение называют *эргодическим*.

Обозначим P_ϕ ортогональный проектор на подпространство в E_ϕ, образованное векторами, инвариантными относительно $U_\phi(G)$. Рассмотрим следующие условия:

(а) $(\pi_\phi(A))'' \cap U_\phi(G) = \{\lambda \mathbb{1}\}$;

(б) проектор P_ϕ одномерен;

(в) состояние ϕ является эргодическим;

(г) $\pi_\phi(A) \cup U_\phi(G)$ неприводимо в E_ϕ.

Имеет место импликация (а) $\to$ (б) $\to$ (в) $\leftrightarrow$ (г). Кроме того, из (а) следует, что вектор θ_ϕ является отделяющим для $\pi_\phi(A)''$. Обратно, если θ_ϕ — отделяющий вектор для $\pi_\phi(A)''$, то все четыре приведенные выше условия эквивалентны.

Однозначность эргодического разложения связана с условием асимптотической абелевости.

Для каждого $a \in A$ обозначим $\mathrm{Co}(\gamma_G(a))$ выпуклую оболочку множества $\gamma_G(a)$. Пусть ϕ — некоторое G-инвариантное состояние на A. Пару (A, ϕ) называют G-абелевой, если

$$\inf_{a' \in \mathrm{Co}(\gamma_G(a))} \left|\omega\left([a', b]\right)\right| = 0 \tag{3.13}$$

для всех $a, b \in A$ и всех G-инвариантных векторных состояний ω, ассоциированных с π_ϕ. Подчеркнем, что если H — подгруппа G и пара (H, ϕ) является H-абелевой, то она автоматически будет G-абелевой. Эквивалентны условия:

- пара (A, ϕ) является G-абелевой;

- коммутант $(\pi_\phi(A) \cup U_\phi(G))'$ абелев;
- существует единственная максимальная ортогональная мера $\mu \in \mathcal{O}_\phi$.

Если пара (A, ϕ) абелева при всех $\phi \in E^G(A)$, пространство $E^G(A)$ является симплексом.

Отметим, что эргодические состояния обладают определенными кластерными свойствами. Пусть ϕ, P_ϕ, $\mathrm{Co}(\gamma_G(a))$ — ранее принятые обозначения. Тогда эквивалентны условия:

- проектор P_ϕ одномерен;
- при всех $a, b \in A$
$$\inf_{b' \in \mathrm{Co}(\gamma_G(b))} \left|\phi(ab') - \phi(a)\phi(b)\right| = 0;$$
- для любого $b \in A$ существует такая сеть $\{b_i\} \in \mathrm{Co}(\gamma_G(b))$, что при всех $a \in A$
$$\lim_i \left|\phi(a\gamma_g(b_i)) - \phi(a)\phi(b)\right| \to 0$$
равномерно по $g \in G$.

Приведем в заключение результат, касающийся разложения G-инвариантного эргодического состояния по состояниям с более низкой симметрией.

Пусть G — топологическая группа, а H — такая ее нормальная подгруппа, что фактор-группа G/H компактна. Обозначим dg нормированную меру Хаара на G/H. Пусть G действует как сильно непрерывная группа автоморфизмов γ на C^*-алгебре A с единицей, и пусть $\omega \in N_G$. Тогда найдется максимальная мера μ_ω с полной массой 1 и с барицентром ω, сосредоточенная на некотором замкнутом подмножестве в N_H. Кроме того, существует состояние $\tilde{\omega} \in N_H$ такое, что

$$\omega(a) = \int_{G/H} \tilde{\omega}(\gamma_g(a))\, dg$$

при всех $a \in A$. Если пара (A, ω) является H-абелевой, то μ_ω — единственная максимальная мера на $E^H(A)$ с барицентром ω, и она совпадает с максимальной ортогональной мерой, соответствующей $(\pi_\omega(A) \cup U_\omega(H))'$.

§ 5. Группы и C^*-алгебры

В следующей главе будет показано, что если квантовая система наделена группой симметрий, выполняемой операторами в некотором гильбертовом пространстве, то генераторам этой группы должны соответствовать определенные наблюдаемые. В этом параграфе мы рассмотрим сильно непрерывные унитарные представления локально компактной (и, в частности, компактной) группы G, содержащиеся в ее регулярном представлении в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций на G. Тогда в таком пространстве реализуются представления некоторых связанных с группой G алгебр, в том числе C^*-алгебры локально компактной группы G [10].

В дальнейшем, если специально не оговорено, под непрерывным унитарным представлением (или просто унитарным представлением) локально компактной группы понимается ее непрерывный морфизм в группу унитарных операторов в гильбертовом

пространстве, наделенную сильной операторной топологией. Заметим, что в унитарной группе сильная и слабая операторные топологии совпадают.

Пусть G — локально компактная группа. Обозначим dg левую меру Хаара на G. Пусть $L^1(G)$ — банахово пространство классов совпадающих почти всюду комплексных интегрируемых функций f на G, наделенное структурой инволютивной банаховой алгебры относительно операции свертки функций

$$(f_1 * f_2)(g) = \int f_1(q) f_2(q^{-1}g)\, dq, \qquad q, g \in G,$$

и операции инволюции

$$f(g) \to f^*(g) = \Delta(g^{-1})\overline{f(g^{-1})}$$

(см. Приложение А.3).

Определение 3.5.1. Алгебра $L^1(G)$ называется *групповой алгеброй* группы G. □

Пусть $M^1(G)$ — инволютивная банахова алгебра ограниченных комплексных мер на G, заданная относительно операций свертки мер

$$\int f(g) d(\mu_1 * \mu_2)(g) = \int f(g_1 g_2)\, d\mu_1(g_1)\, d\mu_2(g_2)$$

и инволюции

$$d\mu^*(g) = \overline{d\mu(g^{-1})}.$$

Если с каждой функцией $f \in L^1(G)$ связать меру

$$d\mu(g) = f(g)\, dg \in M^1(G),$$

то получим изометрическое вложение банаховой алгебры $L^1(G)$ в $M^1(G)$. В частности,

$$d\mu^*(g) = f^*(g)\, dg.$$

Будем в дальнейшем отождествлять $L^1(G)$ с ее образом в $M^1(G)$. Групповая алгебра $L^1(G)$ допускает аппроксимативную единицу, сходящуюся к мере Дирака $\varepsilon_{\mathbb{1}}$ — единице в $M^1(G)$.

Пример 3.5.1. Пусть G — группа трансляций в $\mathbb{R}^n$. Ее групповое пространство — само пространство $\mathbb{R}^n$, мера Хаара — $d^n x$, а инволютивная алгебра $L^1(G)$ — алгебра интегрируемых комплексных функций f на $\mathbb{R}^n$ с операцией умножения

$$(f_1 * f_2)(y) = \int f_1(x) f_2(y - x)\, d^n x.$$

□

Определение 3.5.2. Обертывающая C^*-алгебра $C^*(G)$ групповой алгебры $L^1(G)$ называется *C^*-алгеброй локально компактной группы G*. □

Связь между унитарными представлениями локально компактной группы G и представлениями алгебр $M^1(G)$, $L^1(G)$ и, следовательно, $C^*(G)$ устанавливается следующим образом.

Пусть π — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве E_π. Для любой меры $\mu \in M^1(G)$ положим

$$\pi^L(\mu) = \int \pi(g)\, d\mu(g) \in B(E_\pi). \tag{3.14}$$

Тогда $\mu \to \pi^L(\mu)$ — представление инволютивной банаховой алгебры $M^1(G)$ в E_π, сужение которого

$$\pi^L(f) = \int \pi(g) f(g)\, dg \in B(E_\pi)$$

на $L^1(G)$ невырождено. Говорят, что полученные представления алгебр $M^1(G)$ и $L^1(G)$ связаны с представлением π группы G. В частности, справедливы соотношения (см. обозначения в Приложении А.3)

$$\begin{aligned}
&\pi^L(\varepsilon_g) = \pi(g),\\
&\pi^L\,(\gamma(g)f) = \pi^L(\varepsilon_{g^{-1}} * f) = \pi(g^{-1})\pi^L(f),\\
&\pi^L\,(\tau(g)f) = \pi^L\left(\Delta(g^{-1})f * \varepsilon_{g^{-1}}\right) = \Delta(g^{-1})\pi^L(f)\pi(g^{-1}),
\end{aligned}$$

где Δ — модуль группы G и $\varepsilon * f$ обозначает свертку меры и функции.

Обратно, пусть E — гильбертово пространство, π^L — невырожденное представление инволютивной банаховой алгебры $L^1(G)$ в E. Тогда π связано с единственным унитарным представлением G в E, которое получается вложением G на меры ε_g, $g \in G$, в $M^1(G)$, т. е.

$$\pi(g) = \pi^L(\varepsilon_g).$$

Таким образом, имеет место взаимно однозначное соответствие между непрерывными унитарными представлениями π группы G и невырожденными представлениями π^L групповой алгебры $L^1(G)$ в одних и тех же гильбертовых пространствах. При этом

- замкнутые векторные подпространства, инвариантные относительно π и π^L, — одни и те же;
- тотализирующие векторы для π и π^L — одни и те же;
- эти представления имеют один и тот же коммутант и порождают одну и ту же алгебру фон Неймана.

В частности, топологическая неприводимость π^L эквивалентна топологической неприводимости π. При этом представление π^L, вообще говоря, не является алгебраически неприводимым. В дальнейшем, если специально не оговорено, под неприводимыми представлениями топологической группы понимаются именно ее топологически неприводимые представления. Обозначим $\hat{G}$ множество классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений локально компактной группы G. Имеет место биекция $\hat{G}$ на спектр C^*-алгебры группы G, что позволяет наделить $\hat{G}$ топологией и ввести на $\hat{G}$ другие конструкции, как на спектре C^*-алгебры.

Биективное соответствие между представлениями G и $L^1(G)$ дает возможность задавать унитарные представления локально компактной группы G в рамках конструкции ГНС посредством непрерывных положительных форм на $L^1(G)$. Всякая такая форма определяется элементом из пространства функций $L^\infty(G)$ (см. Приложение А.1), который, чтобы форма была положительна, должен удовлетворять определенным условиям.

Определение 3.5.3. Непрерывная комплексная функция ψ на G называется *функцией положительного типа*, если для любых наборов $g_1, \ldots, g_n$ элементов из G $n \times n$ матрица с компонентами $\psi(g_i^{-1} g_j)$ положительно определена, т. е.

$$\sum_{i,j} \psi(g_j^{-1} g_i) \bar{c}_i c_j \geqslant 0, \qquad \forall c_i, c_j \in \mathbb{C}.$$

□

В частности, при $n = 2$ и $g_1 = \mathbb{1}$ получаем, что

$$\psi^* = \psi, \qquad |\psi| \leqslant \psi(\mathbb{1}), \qquad \|\psi\|_\infty = \psi(\mathbb{1}).$$

Предложение 3.5.4. Пусть $\psi \in L^\infty(G)$ и

$$\phi(f) = \int \psi(g) f(g) dg \tag{3.15}$$

— непрерывная линейная форма на $L^1(G)$, определяемая ψ. Для положительности ϕ необходимо и достаточно, чтобы ψ была локально почти всюду равна некоторой непрерывной функции положительного типа. Тогда в представлении π_ψ^L с тотализирующим вектором θ_ψ, определяемым формой (3.15), задано циклическое унитарное представление $\pi(G)$ группы G такое, что

$$\psi(g) = \left\langle \pi(g)\theta_\psi | \theta_\psi \right\rangle. \tag{3.16}$$

Обратно, комплексная функция ψ на G является непрерывной функцией положительного типа тогда и только тогда, когда существует унитарное представление π группы G с тотализирующим вектором θ_ψ таким, что выполняется соотношение (3.16). □

Непрерывная функция положительного типа ψ на G называется *чистой*, если определяемое ею представление π_ψ неприводимо. Это условие равносильно тому, что положительная форма (3.15) на $L^1(G)$, определяемая ψ, является чистой. Следующее утверждение показывает, что локально компактная группа имеет «достаточно много» неприводимых унитарных представлений.

Предложение 3.5.5. Любая непрерывная комплексная функция на G является пределом в топологии компактной сходимости линейных комбинаций чистых функций положительного типа. □

Широкий класс унитарных представлений локально компактной группы содержится в ее *левом регулярном представлении* Π в гильбертовом пространстве $L^2(G)$ комплексных квадратично интегрируемых функций на G:

$$(\Pi(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \qquad f \in L^2(G), \qquad x \in G.$$

Регулярное представление инъективно. Соответствующее представление $\Pi(s)$ групповой алгебры $L^1(G)$ в $L^2(G)$ задается согласно (3.14) в виде

$$(\Pi(s)f)(x) = \int s(g)\,(\Pi(g)f)(x)\,dg = \int s(g) f(g^{-1}x)\,dg = (s * f)(x). \tag{3.17}$$

Правое регулярное представление локально компактной группы на $L^2(G)$ дается выражением

$$g : f(x) \mapsto f'(x) = \Delta(g)^{1/2} f(xg).$$

Левое и правое регулярные представления изоморфны.

Замечание 3.5.2. Приведем следующую общую конструкцию [38]. Пусть Y — топологическое пространство, на котором действует слева топологическая группа G. Пусть μ — мера на Y, квазиинвариантная относительно этого действия, т. е.

$$d\mu_g(y) = d\mu(g^{-1}y) = \frac{d\mu_g}{d\mu}(y)\, d\mu(y),$$

где $(d\mu_g/d\mu)(y)$ — производная Радона—Никодима. Существует унитарное (см. ниже (4.102)) представление

$$G \ni g : u \mapsto T_g u, \quad (T_g u)(y) = \left[\frac{d\mu_g}{d\mu}(y)\right]^{1/2} u(g^{-1}y), \quad u \in L^2(Y, \mu), \tag{3.18}$$

группы G в гильбертовом пространстве $L^2(Y, \mu)$ квадратично μ-интегрируемых комплексных функций на Y. При этом на группе G существует слабейшая топология такая, что представление (3.18) сильно непрерывно. Например, если G — локально компактная группа, $Y = G$ и μ — левая мера Хаара, эта топология слабее, чем исходная топология на G. □

В дальнейшем в этом параграфе предполагается, что группа G унимодулярна (см. общий случай в § 4.3).

Предложение 3.5.6. Пусть G — унимодулярная группа и ψ — непрерывная функция на G положительного типа с интегрируемым квадратом (т. е. $\psi \in L^2(G)$). Тогда представление π_ψ группы G содержится в ее левом регулярном представлении Π. Обратно, пусть π — циклическое унитарное представление G, содержащееся в Π. Тогда существует связанная с π непрерывная функция положительного типа на G с интегрируемым квадратом. □

Представление π_ψ из Предложения 3.5.6 устроено следующим образом. Для всякой непрерывной квадратично интегрируемой функции ψ на G положительного типа существует такая функция $\theta \in L^2(G)$ положительного типа, что

$$\psi = \theta * \theta = \theta * \theta^* = \theta^* * \overline{\theta}^*.$$

Элемент θ является тотализирующим для представления π_ψ. В частности, если представления π_ψ и $\pi_{\psi'}$, определяемые непрерывными функциями положительного типа ψ и ψ' с интегрируемыми квадратами, неприводимы и неэквивалентны, то элементы θ и θ' ортогональны, а функции ψ и ψ' удовлетворяют соотношениям

$$\int \psi'(g)\, \overline{\psi}(g) dg = 0, \qquad \psi * \psi' = 0. \tag{3.19}$$

Пусть π — неприводимое подпредставление левого регулярного представления Π группы G и $\xi, \eta \in E_\pi$. Рассмотрим функцию

$$\phi_{\xi,\eta}(g) = \phi^*_{\eta,\xi}(g) = \langle \pi(g)\xi | \eta \rangle = \overline{(\eta * \xi^*)(g)}$$

на G. Она называется *коэффициентом представления* π.

Тогда

$$\overline{\phi}^*_{\xi,\eta} = \xi * \eta^* \in L^2(G),$$

а замкнутое векторное подпространство $K_\pi \subset L^2(G)$, порожденное коэффициентами $\overline{\phi}^*_{\xi,\eta}$, является *биинвариантным*, т.е. инвариантным относительно левого и правого регулярного представлений. Биинвариантное подпространство K_π является минимальным. Говорят, что оно связано с представлением π, и $E_\pi \subset K_\pi$.

Неприводимое унитарное представление π группы G называется *представлением с интегрируемым квадратом*, если существует такой вектор $\xi \in E_\pi$, что коэффициент $\phi_{\xi,\xi}$ представления π является квадратично интегрируемой функцией. Согласно Предложению 3.5.6 оно содержится в левом регулярном представлении. Можно показать, что все коэффициенты $\phi_{\xi,\eta}$ такого представления являются квадратично интегрируемыми функциями на G. При этом существует единственная константа d_π $(0 < d_\pi < \infty)$ такая, что

$$\int \phi_{\xi,\eta}(g)\overline{\phi_{\xi',\eta'}(g)}\, dg = d_\pi^{-1}\langle\xi|\xi'\rangle\overline{\langle\eta|\eta'\rangle}, \tag{3.20}$$

$$\phi_{\xi,\eta} * \phi_{\xi',\eta'} = d_\pi^{-1}\langle\xi|\eta'\rangle\phi_{\xi',\eta} \tag{3.21}$$

для любых $\xi, \eta, \xi'\eta' \in E_\pi$. В частности, если ψ — непрерывная функция положительного типа, связанная с неприводимым унитарным представлением π и равная 1 в $\mathbb{1} \in G$, то

$$\|\psi\|^2 = d_\pi^{-1}, \qquad \psi * \psi = d_\pi^{-1}\psi. \tag{3.22}$$

Константа d_π называется *формальной размерностью* представления π, поскольку в случае компактной группы (см. ниже) равна размерностям ее неприводимых унитарных представлений (они конечномерны).

Пример 3.5.3. Пусть G — полупростая локально компактная группа Ли (она унимодулярна). Всякое ее неприводимое унитарное представление с интегрируемым квадратом имеет квадратично интегрируемые коэффициенты представления и тем самым принадлежит *дискретной серии представлений* группы G. □

Пусть π и π' — неэквивалентные неприводимые унитарные представления с интегрируемым квадратом. Биинвариантные подпространства K_π и $K_{\pi'}$, связанные с этими представлениями, ортогональны, а для коэффициентов $\phi_{\xi,\eta}$ и $\phi_{\xi',\eta'}$ этих представлений выполняются соотношения

$$\int \phi_{\xi,\eta}(g)\phi_{\xi',\eta'}(g)\, dg = 0, \tag{3.23}$$

$$\phi_{\xi,\eta} * \phi_{\xi',\eta'} = 0. \tag{3.24}$$

Рассмотрим инволютивную алгебру $\mathcal{K}(G, \mathbb{C})$ комплексных непрерывных функций на G с компактным носителем (относительно операции свертки функций), снабженную скалярным произведением

$$\langle f|f'\rangle = \int f(g)\,\overline{f}'(g)\, dg.$$

Она является гильбертовой алгеброй, и ее пополнение совпадает с $L^2(G)$ (см. Замечание 2.5.3). Гильбертова алгебра A_G ограниченных элементов из $L^2(G)$ $(\mathcal{K}(G, \mathbb{C}) \subset A_G \subset L^2(G))$ называется *гильбертовой алгеброй группы* G.

Пусть π — неприводимое унитарное представление G с интегрируемым квадратом. Рассмотрим проектор $P_\pi \in \mathcal{U}(A_G)$ на биинвариантное подпространство K_π, связанное с π, и его *центральный носитель* F_π, т. е. минимальный проектор из $\mathcal{U}(A_G) \cap \mathcal{V}(A_G)$, мажорирующий P_π. Получаем $K_\pi = F_\pi(L^2(G))$, и K_π — гильбертова алгебра. Для любой функции $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ имеем

$$\int \left|(F_\pi(f))\,(g)\right|^2 dg = d_\pi \operatorname{Tr}\left(\pi(f)\pi(f)^*\right) = \|f\|^2.$$

Предложение 3.5.7. Пусть π и π' — два неприводимых унитарных представления группы G с интегрируемыми квадратами. Для того чтобы представления π и π' были эквивалентны (соотв. неэквивалентны), необходимо и достаточно, чтобы соответствующие центральные проекторы F_π и $F_{\pi'}$ были равны (соотв. ортогональны). □

Замечание 3.5.4. Отметим, что локально компактная группа G может и не иметь неприводимых унитарных представлений в $L^2(G)$. Это, например, комплексные полупростые связные группы Ли и нильпотентные односвязные вещественные группы Ли. □

Пример 3.5.5. Пусть G — коммутативная группа и $\hat{G}$ — множество классов эквивалентности ее неприводимых унитарных представлений. Элементы $\chi \in \hat{G}$ являются *характерами группы* G, т. е. ненулевыми морфизмами группы G в $\mathbb{C}$. При этом $|\chi|^2 = 1$. Поэтому, если G компактна, то любой элемент $\hat{G}$ — представление с интегрируемым квадратом; а если G некомпактна, то ни один элемент $\hat{G}$ не является представлением с интегрируемым квадратом. □

В заключение остановимся коротко на случае компактных групп [10, 15]. Приведем основные утверждения.

- Всякое непрерывное представление компактной группы в предгильбертовом пространстве эквивалентно унитарному представлению.
- Неприводимое унитарное представление компактной группы конечномерно.
- Всякое унитарное представление компактной группы является гильбертовой суммой неприводимых представлений. В частности, любое конечномерное представление компактной группы *вполне приводимо*, т. е. является прямой суммой неприводимых представлений.

Мера Хаара на компактной группе выбирается так, что ее полная масса равна 1. Гильбертова алгебра A_G компактной группы равна $L^2(G)$ и является полной. Пусть F_ι — семейство попарно ортогональных минимальных проекторов из $\mathcal{U}(A_G) \cap \mathcal{V}(A_G)$. Тогда A_G — гильбертова сумма попарно аннулирующих друг друга самосопряженных двусторонних идеалов $F_\iota(A_G)$, каждый из которых изоморфен гильбертовой алгебре операторов Гильберта—Шмидта в конечномерном гильбертовом пространстве. В частности, пусть π — неприводимое унитарное представление компактной группы G и K_π — биинвариантное подпространство $L^2(G)$, связанное с π. Тогда K_π изоморфно гильбертовой алгебре операторов Гильберта—Шмидта в конечномерном гильбертовом пространстве.

Установим связь между неприводимыми унитарными представлениями компактной группы G и ее характерами.

Определение 3.5.8. Пусть π — неприводимое унитарное представление G. Непрерывная функция

$$\chi_\pi(g) = \operatorname{Tr}(\pi(g))$$

на G называется *характером* компактной группы G. □

В частности, $\chi(\mathbb{1}) = \dim \pi$. Когда группа G коммутативна, мы получаем обычное определение характера.

Если $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — ортонормированный базис пространства представления E_π, то

$$\chi_\pi(g) = \sum_{i=1}^{n} \langle \pi(g)\xi_i | \xi_i \rangle.$$

Отсюда следует, что характер χ_π является коэффициентом $\phi_{\xi,\xi}$ представления π, где

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

Следовательно, ξ_ϕ — функция положительного типа с интегрируемым квадратом, связанная с представлением π и зависящая только от его класса эквивалентности. В частности, это означает, что всякое неприводимое унитарное представление компактной группы содержится в ее левом регулярном представлении, и для неэквивалентных таких представлений π и π' выполняются соотношения (3.20), (3.23) и (3.24):

$$\chi_\pi * \chi_\pi = (\dim \pi)^{-1} \chi_\pi,$$
$$\int \chi_\pi(g)\chi_{\pi'}(g)\, dg = 0,$$
$$\chi_\pi * \chi_{\pi'} = 0.$$

Более того, характеры группы G образуют ортонормальный базис центра гильбертовой алгебры $L^2(G)$.

Замечание 3.5.6. Пусть $\{\xi_i^\pi\}$ — ортонормальный базис пространства представления π. Обозначим

$$\phi_{i,j}^\pi(g) = \langle \xi_i^\pi | \xi_j^\pi \rangle$$

коэффициенты этого представления. Тогда частным случаем равенств (3.20), (3.21), (3.23) и (3.24) являются соотношения *теоремы Шура*:

$$\int \phi_{i,j}^\pi(g)\phi_{i',j'}^{\pi'}(g)\, dg = 0, \qquad (\pi, i, j) \neq (\pi', i', j'),$$
$$\int \left|\phi_{i,j}^\pi(g)\right| dg = d_\pi^{-1}.$$

□

§ 6. Дополнение. Группоиды и C^*-алгебры

Конструкция C^*-алгебры локально компактной группы может быть обобщена на группоиды, в которых единичный элемент не является единственным [59]. Это важно для ряда физических приложений, например, при описании систем канонических антикоммутационных соотношений (§ 4.8) и квантовых систем при конечной температуре (§ 6.1).

Группоидом называется множество G, снабженное операцией перехода к обратному $x \to x^{-1}$ и операцией произведения $(x, y) \to xy$, которая, однако, определена не на всем прямом произведении $G \times G$, как в случае группы, а на его подмножестве $G^2 \subset G \times G$ так называемых *допустимых пар*. К допустимым парам относятся:

- пары (x, x^{-1}) и (x^{-1}, x) (обозначим $l(x) = xx^{-1}$ и $r(x) = x^{-1}x$);
- а также пары (x, y) такие, что $r(x) = l(y)$, т. е. $x^{-1}x = yy^{-1}$.

Тогда вышеупомянутые операции удовлетворяют условиям:
(а) $(x^{-1})^{-1} = x$;
(б) если $(x, y) \in G^2$, то $(y^{-1}, x^{-1}) \in G^2$ и $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$;
(в) если $(x, y) \in G^2$, то $(x^{-1}, xy) \in G^2$ и $x^{-1}(xy) = y$;
(г) если $(x, y) \in G^2$, то $(xy, y^{-1}) \in G^2$ и $(xy)y^{-1} = x$;
(д) если $(x, y), (y, z) \in G^2$, тогда $(xy, z), (x, yz) \in G^2$ и $(xy)z = x(yz)$.
Условие (в) показывает, что для всякого элемента $x \in G$ элемент $l(x) = xx^{-1}$ является *левой единицей*, но не на всех элементах G, а только на тех y, которые образуют с x допустимые пары $(x, y) \in G^2$. Соответственно из условия (г) следует, что для произвольного $y \in G$ элемент $r(y) = y^{-1}y$ служит *правой единицей* на тех элементах x, которые образуют с y допустимые пары $(x, y) \in G^2$. Множество $G^0 = l(G) = r(G)$ именуется *пространством единиц* группоида G.

Группоид G называется *транзитивным*, если отображение

$$(l, r) : G \ni x \mapsto (xx^{-1}, x^{-1}x) \in G^0 \times G^0 \tag{3.25}$$

является сюръекцией. Это имеет место тогда и только тогда, когда для любых двух элементов $x, y \in G$ существует элемент $z \in G$ такой, что пары (x, z) и (z, y) допустимы.

Группоид G называется *главным*, если отображение (3.25) является вложением. Это происходит тогда и только тогда, когда для любых элементов $x, y \neq x^{-1}$ пары (x, y) и (y, x) не являются одновременно допустимыми.

Пусть $u, v \in G^0$ — элементы пространства единиц. Обозначим $G^u = l^{-1}(u)$, $G_v = r^{-1}(v)$ и $G_v^u = G^u \cap G_v$. Ясно, что всякий элемент x принадлежит одному и только одному множеству G_v^u. Легко проверить, что:

- G_u^u является группой, называемой *изотропной группой* элемента u;
- отношение такое, что $u \sim v$ тогда и только тогда, когда $G_v^u \neq \varnothing$, является отношением эквивалентности, называемым *отношением эквивалентности единиц*;
- образом отображения (3.25) является график $R \subset G^0 \times G^0$ отношения эквивалентности единиц;
- если группоид G главный, то он отождествляется с графиком отношения эквивалентности единиц и обратно;
- группоид является транзитивным тогда и только тогда, когда его пространство единиц G^0 состоит только из одной орбиты отношения эквивалентности единиц.

Приведем несколько примеров группоидов.

Пример 3.6.1. Пусть группа K действует на пространстве S справа. Тогда произведение $S \times K$ может быть наделено структурой группоида, если:

- $(s, g)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (s \cdot g, g^{-1})$;
- пара $((s, g), (s', g'))$ является допустимой, только если $s' = s \cdot g$;
- $(s, g)(s \cdot g, g') = (s, gg')$.

Тогда

$$l(s,g)=(s,\mathbb{1}),\qquad r(s,g)=(s\cdot g,\mathbb{1})$$

и отображение $(s,\mathbb{1})\to s$ отождествляет пространство единиц G^0 с S. Легко убедиться, что этот группоид является главным (соотв. транзитивным) тогда и только тогда, когда группа K действует на S свободно (соотв. транзитивно). □

Пример 3.6.2. Пусть на множестве S задано некоторое отношение эквивалентности $s\sim s'$, и $R\subset S\times S$ — его график. Тогда R является главным группоидом, если:

- $(s,s')^{-1}\stackrel{\text{def}}{=}(s',s)$;
- пара $((s,s'),(q,q'))$ является допустимой, только если $s'=q$;
- $(s,q)(q,q')\stackrel{\text{def}}{=}(s,q')$.

Его пространство единиц R^0 состоит из пар (s,s), $s\in S$, и является диагональю отношения эквивалентности R. Оно может быть отождествлено с S. □

Пример 3.6.3. Группоид G называется *групповым расслоением*, если $l(x)=r(x)$ для всех $x\in G$. Отсюда немедленно следует, что график отношения эквивалентности единиц сводится к диагонали множества $G^0\times G^0$, т.е. $u\sim v$, только если $u=v$. Поэтому отображение $l(x)=r(x)=(l,r)(x)$ является проекцией группоида G на его пространство единиц G^0. При этом элементы группоида образуют допустимые пары тогда и только тогда, когда они принадлежат одному и тому же слою G^u_u этой проекции. В результате групповое расслоение G представляет собой объединение изотропных групп элементов пространства единиц G^0, которое служит базой этого расслоения. В частности, всякая группа G является группоидом — групповым расслоением над $G^0=\{\mathbb{1}\}$.

Заметим, что всякое групповое расслоение G может рассматриваться как топологическое расслоение, если наделить G и G^0 дискретной топологией. Обратно, всякое топологическое групповое расслоение $\pi: Q\to Q^0$, слои которого являются группами, наделяется структурой группоида с пространством единиц Q^0 так, что его элементы образуют допустимую пару, только если принадлежат одному и тому же слою $\pi^{-1}(u)$ этого расслоения, и на таких элементах определены групповые операции группы $\pi^{-1}(u)$, которая является тем самым изотропной группой элемента $u\in Q^0$. □

Пример 3.6.4. Всякое множество X может рассматриваться как *тривиальный группоид*, если считать допустимыми парами только (x,x), $x\in X$, и положить

$$x^{-1}=x,\qquad (x,x)=x.$$

Например, *множество орбит* G^0/R группоида G наделяется структурой тривиального группоида так, что естественная сюръекция

$$\psi: G\stackrel{l}{\to}G^0\to\frac{G^0}{R} \tag{3.26}$$

является гомоморфизмом группоидов. Отсюда, в частности, следует, что элементы x,y группоида G могут образовать допустимую пару, только если они проектируются на одну и ту же орбиту $[u]\in G^0/R$. Обратно, сопоставим каждой орбите $[u]\in G^0/R$ некоторый ее представитель u в G^0. Тогда вложение $G^0/R\to G^0\subset G$ тоже является гомоморфизмом группоидов. □

Гомоморфизмы группоидов по определению сохраняют алгебраические операции, переводят допустимые пары в допустимые пары и отображают пространство единиц в пространство единиц. Два гомоморфизма $\gamma, \xi : G \to H$ группоида G в группоид H называются *подобными*, если существует такая функция $\Phi : G^0 \to H$, что

$$(\Phi \circ l)(x)\gamma(x) = \xi(x)(\Phi \circ r)(x), \qquad \forall x \in G. \tag{3.27}$$

Определение 3.6.1. Два группоида G и H называются *подобными*, если существуют гомоморфизмы $\gamma : G \to H$ и $\xi : H \to G$ такие, что $\gamma \circ \xi$ и $\xi \circ \gamma$ подобны тождественным гомоморфизмам группоидов G и H. □

Отношение подобия группоидов является важным, например, для гомологичеких характеристик группоидов. Чтобы пояснить его, приведем следующий пример подобных группоидов.

Определение 3.6.2. Пусть G — группоид и N — подмножество его пространства единиц. Ограничение

$$G|_N = \{x \in G \ : \ l(x), r(x) \in N\}$$

является подгруппоидом группоида G, называемым *сужением группоида* G на N. □

Предложение 3.6.3. Пусть G — группоид. Если подмножество $N \subset G^0$ пересекается со всеми орбитами, то группоиды $G|_N$ и G подобны. □

Чтобы доказать это утверждение, достаточно рассмотреть случай, когда подмножество N пересекается с каждой орбитой в G^0 только в одной точке. Рассмотрим естественное вложение подгруппоида $G|_N$ в G и построим следующую проекцию G на $G|_N$ (заметим, что она не является канонической). Пусть u — точка пересечения орбиты группоида $[u]$ с множеством N. Группоид $G|_N$ представляет собой групповое расслоение над N, слоем которого над точкой u является изотропная группа G_u^u элемента u. Зададим отображение слоя $\psi^{-1}([u])$, где ψ — проекция (3.26), на G_u^u. Пусть элемент $x \in \psi^{-1}([u])$ принадлежит подмножеству G_w^v, т. е. $x^{-1}x = v$ и $xx^{-1} = w$. Тогда существуют такие элементы $k, c \in G$, что

$$v = kk^{-1}, \qquad w = c^{-1}c, \qquad u = k^{-1}k = cc^{-1}. \tag{3.28}$$

Легко проверить, что пары (c, x) и (x, k) допустимы, а элемент cxk определен и принадлежит множеству G_u^u. Тогда $\gamma : x \mapsto cxk$ для всех $x \in G$ является искомым отображением $G \to G|_N$. Нетрудно убедиться, что это гомоморфизм группоидов. В частности, если (x, y) — допустимая пара, т. е. $x \in G_w^v$ и $y \in G_v^q$, тогда

$$\gamma(x) = cxk, \qquad \gamma(y) = k^{-1}ya, \qquad \gamma(xy) = cxya,$$

где $u = a^{-1}a$, $q = aa^{-1}$, элементы k, c определяются соотношениями (3.28) и $xy \in G_w^q$. Легко проверить, что отображение

$$G|_N \to G \xrightarrow{\gamma} G|_N$$

является тождественным преобразованием группоида $G|_N$. Поэтому, чтобы доказать подобие группоидов G и $G|_N$, достаточно показать, что отображение

$$G \xrightarrow{\gamma} G|_N \to G$$

подобно тождественному преобразованию группоида G. Для этого надо построить функцию $\Phi : G_0 \to G$, удовлетворяющую условию (3.27), а именно

$$(\Phi \circ l)(x)\gamma(x) = x(\Phi \circ r)(x), \qquad \forall x \in G.$$

Это условие выполняется, если для всякого элемента $v \in [u]$ положить $\Phi(v) = k$, где $v = kk^{-1}$ и $u = k^{-1}k$.

Перейдем теперь к описанию когомологий группоидов. Введем предварительно несколько важных конструкций.

Определение 3.6.4. Пусть G — группоид, A — группа и $\rho : G \to A$ — гомоморфизм. *Косым произведением* G_A называется группоид $G \times A$, где:

- $(x, a)^{-1} = \left(x^{-1}, a\rho(x)\right)$;
- пара $((x, a), (y, b))$ является допустимой, только если пара (x, y) допустима и $b = a\rho(x)$;
- $(x, a)\,(y, a\rho(x)) = (xy, a)$;
- $l(x, a) = (l(x), a)$ и $r(x, a) = (r(x), a\rho(x))$.

Пространством единиц косого произведения G_A является $G^0_A = G^0 \times A$. □

Определение 3.6.5. Пусть G — группоид, A — группа и $\alpha : A \to \mathrm{Aut}(G)$ — гомоморфизм. Обозначим

$$x \cdot a = \left[\alpha(a^{-1})\right](x), \qquad x \in G, \qquad a \in A.$$

Полупрямым произведением $G \times_\alpha A$ называется группоид $G \times A$, где

- $(x, a)^{-1} = (x^{-1} \cdot a, a^{-1})$;
- пара $((x, a), (y, b))$ является допустимой, только если $y = z \cdot a$ и пара (x, z) допустима;
- $(x, a)(z \cdot a, b) = (xy, ab)$;
- $l(x, a) = (l(x), \mathbb{1})$ и $r(x, a) = (r(x) \cdot a, \mathbb{1})$.

□

Например, пусть G_A — косое произведение. Задано каноническое действие A на G_A по формуле

$$\alpha(a)(x, b) = (x, ab),$$

и существует естественный гомоморфизм $\rho(x, a) = a$ полупрямого произведения $G \times_\alpha A$ в A. Справедливы следующие утверждения:

- группоиды $G_A \times_\alpha A$ и G подобны;
- группоиды $(G \times_\alpha A)_A$ и G подобны.

Пусть $\pi : A \to A^0$ — групповое расслоение с изоморфными слоями. Обозначим $A_u = \pi^{-1}(u)$, $u \in A^0$. Пусть $\mathrm{Iso}(A)$ — множество всевозможных изоморфизмов $\gamma^u_v : A_v \to A_u$, $u, v \in A^0$. Это множество имеет естественную структуру группоида, где:

- $(\gamma_v^u)^{-1}$ — обратный морфизм к γ_v^u;
- пара (γ_v^u, γ_w^q) является допустимой тогда и только тогда, когда $v = q$;
- $\gamma_v^u \gamma_w^v = \gamma_v^u \circ \gamma_w^v$.

База A^0 группового расслоения A отождествляется посредством $u \to \mathrm{Id}_u^u$ с пространством единиц группоида $\mathrm{Iso}(A)$.

Определение 3.6.6. Пусть G — группоид с пространством единиц G^0 и $A \to A^0 = G^0$. Пара (G, A) вместе с гомоморфизмом $\Psi : G \to \mathrm{Iso}(A)$ над G^0 называется *расслоением группоидов*. Если A — расслоение абелевых групп, то пара (G, A) называется *расслоением модулей*. Если специально не оговорено, групповая операция в абелевых группах будет записываться как сложение. В этом случае $\mathbb{1}$ обозначается как 0, а A^0 отождествляется посредством $u \to 0 \in A_u$ с множеством нулей слоев расслоения модулей. □

Пример 3.6.5. Расслоение модулей (G, A) называется *постоянным*, если все слои $A \to G^0$ канонически отождествимы с одной и той же абелевой группой B (типичным слоем) и $\Psi(x) = \mathrm{Id}\ B$ для всех $x \in G$. □

Имея расслоение модулей (G, A), можно сконструировать следующий коцепной комплекс. Множества G^0, $G^1 = G$, G^2 уже были определены. Для $n > 2$ обозначим G^n подмножество элементов $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ произведения $\overset{n}{\times} G$ таких, что всякая пара (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, i = n-1$, является допустимой. Тогда n-коцепью называется отображение $f : G^n \to A$, которое удовлетворяет условиям

- $(\pi \circ f)(x_0, \ldots, x_{n-1}) = l(x_0)$;
- если $n > 0$ и $x_i \in G^0$ для некоторого $i = 0, \ldots, n-1$, то $f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in A^0$.

Множество $C^n(G, A)$ n-коцепей является абелевой группой относительно поточечного сложения, и мы получаем коцепной комплекс

$$0 \to C^0(G, A) \xrightarrow{\delta^0} \ldots \to C^n(G, A) \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}(G, A) \to \ldots, \tag{3.29}$$

$$(\delta^0 f)(x) = \Psi(x)(f \circ r)(x) - (f \circ l)(x),$$

$$(\delta^n f)(x_0, \ldots, x_n) = \Psi(x_0) f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_0, \ldots, x_{i-1} x_i, \ldots, x_n) +$$

$$+ (-1)^{n+1} f(x_0, \ldots, x_{n-1}), \qquad n > 0.$$

Определение 3.6.7. Группа n-коциклов комплекса (3.29) обозначается как $Z^n(G, A)$, группа n-кограниц — как $B^n(G, A)$, и группа n-когомологий коцепного комплекса (3.29) обозначается

$$H^n(G, A) = \frac{Z^n(G, A)}{B^n(G, A)}.$$

Группы $H^n(G, A)$ называются *группами когомологий группоида* G с коэффициентами в расслоении модулей A. □

В частности, 0-коцепи — это сечения группового расслоения $A \to G^0$. Такое сечение f называется инвариантным, если оно удовлетворяет условию

$$\Psi(x)(f \circ r)(x) - (f \circ l)(x) = 0,$$

т. е. инвариантное сечение является 0-коциклом. Поскольку 0-кограницы представлены единственным сечением f, принимающим значения в 0 абелевых групп A_u, то $H^0(G, A) = Z^0(G, A)$ — множество всех инвариантных сечений расслоения $A \to G^0$. Соответственно, 1-коциклом $c \in Z^1(G, A)$ является 1-коцепь, которая удовлетворяет условию

$$c(xy) = \Psi(x)\, c(y) + c(x).$$

Например, если (G, A) — постоянное расслоение модулей с типичным слоем B, то всякий 1-коцикл c — это гомоморфизм группоида G в абелеву группу B. В этом случае вместо $Z^n(G, A)$ можно писать $Z^n(G, B)$.

Предложение 3.6.8. Группы когомологий подобных группоидов со значениями в постоянном расслоении модулей изоморфны. □

Подобно топологическим группам рассматриваются *топологические группоиды*, когда операции $x \to x^{-1}$ и $(x, y) \to xy$ непрерывны. При этом:

- множество G^n наделяется топологией, индуцированной из $\overset{n}{\times} G$;
- переход к обратному $x \to x^{-1}$ — гомеоморфизм, а $l, r : G \to G^0$ — непрерывные отображения;
- в пространстве единиц G^0 топология подпространства $G^0 \subset G$ и топология фактора $l : G \to G^0$ совпадают;
- если группоид G отделим, то G^0 — замкнутое подпространство G.

В дальнейшем мы будем рассматривать только локально компактные группоиды.

Определение 3.6.9. Пусть G — локально компактный группоид и $\mathcal{K}(G, \mathbb{C})$ — пространство комплексных функций на G с компактным носителем. *Левой системой Хаара* на G называется семейство мер $\{\mu_u,\ u \in G^0\}$ на G такое, что выполняются следующие условия:

- носителем $\operatorname{supp}(\mu_u)$ меры μ_u является $G^u = l^{-1}(u)$;
- (условие непрерывности) для всякой функции $f \in \mathcal{K}(G, \mathbb{C})$ отображение

$$\mu_f : G^0 \ni u \mapsto \mu_u(f) \in \mathbb{C} \tag{3.30}$$

  является непрерывным;

- (условие левой инвариантности) для всех $f \in G$ и $f \in \mathcal{K}(G, \mathbb{C})$

$$\int f(xy)\, d\mu_{r(x)}(y) = \int f(y)\, d_{l(x)}(y).$$

□

Если G — локально компактный группоид с левой системой Хаара, то можно показать, что отображение

$$\mathcal{K}(G, \mathbb{C}) \in f \to \mu_f \in \mathcal{K}(G^0, \mathbb{C})$$

является непрерывным, а проекция $l : G \to G^0$ открыта, т. е. переводит открытые множества в открытые.

Пример 3.6.6. Пусть K — локально компактная группа, действующая непрерывно в локально компактном пространстве S. Рассмотрим группоид $S \times K$ из Примера 3.6.1. Это локально компактный группоид с левой системой Хаара $\{\mu_s,\ s \in S\}$, где $\mu_s = \varepsilon_s \otimes \mu_K$ — произведение меры Дирака ε_s на S и левой меры Хаара μ_K на локально компактной группе K. □

Пример 3.6.7. Пусть G — локально компактное групповое расслоение из Примера 3.6.3. Левая система Хаара для G, если она существует, определена с точностью до непрерывной положительной функции h на G^0 такой, что $\mu_u = h(u)\mu'_u$.

В частности, пусть K — локально компактная группа. Множество S_K подгрупп K, наделенное *топологией Фелла*, является компактным пространством. Определим топологический группоид

$$G = \{(Q, x) :\ Q \in S_K,\ \ x \in Q\} \tag{3.31}$$

с топологией, индуцированной из $S_K \times K$, и структурой группоида:

- $(Q, x)^{-1} = (Q, x^{-1})$;
- пара $\big((Q, x), (Q', x')\big)$ является допустимой тогда и только тогда, когда $Q = Q'$;
- $(Q, x)(Q, y) = (Q, xy)$.

Группоид (3.31) является локально компактным групповым расслоением над S_K, называемым *расслоением подгрупп* группы K. Он допускает левую систему Хаара $\{\mu_Q, Q \in S_K\}$, где μ_Q — левая мера Хаара на Q. □

Пример 3.6.8. Локально компактный группоид G называется *l-дискретным*, если его пространство единиц является открытым. Такой группоид обладает рядом примечательных свойств.

- Для всякого $u \in G^0$ подпространства G^u и G_u являются дискретными пространствами. Это следует из того, что пересечение G^u (соотв. G_u) с открытым множеством G^0 является открытым в G^u (соотв. G_u). Однако такое пересечение сводится к точке u, которая тем самым является открытым множеством в G^u и G_u. Отсюда нетрудно показать, что произвольная точка в G^u (соотв. G_u) является открытым множеством в G^u (соотв. G_u).
- Если группоид G допускает левую систему Хаара, то ее можно выбрать так, что $\mu_u(\{u\}) = 1$ для всех $u \in G^0$, а тогда из условия инвариантности следует, что $\mu_u(\{x\}) = 1$ для всех $x \in G^u_v$.
- Если группоид G — l-дискретный и допускает левую систему Хаара, то операция произведения $G^2 \to G$ и проекция l — локальные диффеоморфизмы. Справедливо и обратное утверждение.

□

Пусть в дальнейшем G — это локально компактный группоид с левой системой Хаара $\{\mu_u\}$. Обозначим $\mu^u = {\mu_u}^{-1}$ обратную меру — образ меры μ_u при переходе к обратному. Тогда меры μ^u образуют *правую* систему Хаара.

Для всякой меры λ на пространстве единиц G^0 локально компактного группоида G с левой системой Хаара $\{\mu_u\}$ определим меру

$$\nu = \int \mu_u \, d\lambda(u) \tag{3.32}$$

на G из условия

$$\nu(f) = \int \mu_f(u)\, d\lambda(u), \qquad f \in \mathcal{K}(G, \mathbb{C}),$$

где $\mu_f(u)$ — функция (3.30). Она называется мерой, *индуцированной* мерой λ. При этом обратной ей мерой является

$$\nu^{-1} = \int \mu^u\, d\lambda(u).$$

Определение 3.6.10. Мера λ на пространстве единиц G^0 называется *квазиинвариантной*, если индуцированная ею мера ν на G эквивалентна обратной мере ν^{-1}. Соответствующая производная Радона—Никодима

$$\Delta = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$$

называется *модулярной функцией* меры ν. Квазиинвариантная мера называется *инвариантной*, когда модулярная функция Δ тождественно равна 1. □

Пример 3.6.9. Если G — локально компактная группа, то $G^0 = \{\mathbb{1}\}$, и ее левая система Хаара сводится к левой мере Хаара μ. В этом случае квазиинвариантной мерой на $\{\mathbb{1}\}$ является, например, мера Дирака, а индуцированная ею мера на G совпадает с левой мерой Хаара μ. Соответствующей модулярной функцией представляет собой модуль группы G (см. Приложение А.3). □

Пример 3.6.10. Рассмотрим группоид $G = S \times K$ из Примера 3.6.1 с левой системой Хаара из Примера 3.6.6. Пусть λ — мера на S. Тогда индуцированная ею мера на группоиде G — это произведение мер $\mu_K \otimes \lambda$, где μ_K — левая мера Хаара на группе K. Пусть K действует на S транзитивно, т.е. является орбитой своего элемента s. Тогда квазиинвариантной мерой λ на S является мера Дирака ε_s. □

Приведем еще одно полезное понятие. Заметим сначала, что когомологии на локально компактном группоиде с коэффициентами в локально компактном групповом расслоении определяются так, что все отображения считаются непрерывными. Тогда, например, $Z^1(G, \mathbb{R})$ — группа непрерывных гомоморфизмов группоида G в $\mathbb{R}$. Пусть $c \in Z^1(G, \mathbb{R})$ — некоторый 1-коцикл. Обозначим $\mathrm{Min}(c)$ множество таких единиц $u \in G^0$, что $c(G_u)$ содержится в $[0, +\infty)$, и $\mathrm{Max}(c)$ — множество $\mathrm{Min}(-c)$.

Определение 3.6.11. Пусть $c \in Z^1(G, \mathbb{R})$ и $\beta \in [-\infty, +\infty]$. Говорят, что мера λ на пространстве единиц G^0 удовлетворяет (c, β)-*условию КМШ* (Кубо—Мартина—Швингера), если:

- для конечного β мера λ является квазиинвариантной с модулярной функцией $\exp[-\beta c]$;
- для $\beta = \pm\infty$ носитель меры λ содержится в $\mathrm{Min}(\pm c)$.

□

При этом можно показать, что пределом при $\beta \to \infty$ семейства мер, удовлетворяющих условию КМШ для (c, β), является мера, удовлетворяющая условию КМШ для (c, ∞).

Перейдем теперь к описанию C^*-алгебр группоидов. Пусть G — локально компактный группоид с левой системой Хаара $\{\mu_u\}$ и $\sigma \in Z^2(G, \mathbb{T})$, где $\mathbb{T}$ — абелева группа

комплексных чисел с модулем 1, записанная мультипликативно. Рассмотрим пространство $\mathcal{K}(G, \mathbb{C})$ непрерывных комплексных функций на группоиде G с компактным носителем.

Предложение 3.6.12. Пространство $\mathcal{K}(G, \mathbb{C})$ становится топологической инволютивной алгеброй, будучи наделенным операциями

$$(f * g)(x) = \int f(xy)\, g(y^{-1})\, \sigma(xy, y^{-1})\, d\mu_{r(x)}(y), \qquad f, g \in \mathcal{K}(G, \mathbb{C}),$$
$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\, \overline{\sigma(x, x^{-1})}.$$

Обозначим эту алгебру $C(G, \sigma)$. □

Заметим, что алгебра $C(G, \sigma)$ зависит от выбора 2-коцикла σ, который необходим для задания операций произведения и инволюции. При этом можно показать, что, если коциклы σ и σ' принадлежат одному и тому же когомологическому классу, т. е. отличаются на кограницу, то инволютивные алгебры $C(G, \sigma)$ и $C(G, \sigma')$ изоморфны.

Инволютивная алгебра $C(G, \sigma)$ становится нормированной инволютивной алгеброй, если на $\mathcal{K}(G, \mathbb{C})$ ввести норму

$$\|f\|_I = \max\big(\|f\|_l, \|f\|_r\big), \qquad f \in \mathcal{K}(G, \mathbb{C}),$$
$$\|f\|_l = \sup_{u \in G^0} \int |f|\, d\mu_u, \qquad \|f\|_r = \sup_{u \in G^0} \int |f|\, d\mu^u.$$

Эта норма задает на $\mathcal{K}(G, \mathbb{C})$ топологию, более сильную, чем топология индуктивного предела.

Определение 3.6.13. Представлением π алгебры $C(G, \sigma)$ в гильбертовом пространстве E называется ее гомоморфизм в алгебру ограниченных операторов $B(E)$ в E, непрерывный, когда алгебра $C(G, \sigma)$ наделена топологией индуктивного предела, а $B(E)$ — слабой операторной топологией. Предполагается, что представление невырождено, т. е. $C(G, \sigma)E$ плотно в E. Представление называется *ограниченным*, если $\|\pi(f)\| \leqslant \|f\|_I$, $\forall f \in C(G, \sigma)$. □

Например, все представления группоида $K \times S$ из Примера 3.6.1 и l-дискретного группоида из Примера 3.6.8 в сепарабельных гильбертовых пространствах ограничены.

Пример 3.6.11. Ограниченное представление алгебры $C(G, \sigma)$ можно получить в следующем виде. Пусть пространство единиц G^0 наделено квазиинвариатной мерой λ. Рассмотрим расслоение гильбертовых пространств $H \to G^0$. Тогда *представлением группоида* G называется его отображение $\Psi : G \to \mathrm{Iso}(H)$ в множество изометрий

$$\mathrm{Iso}(H) = \{g_v^u : H_v \to H_u, \;\; u, v \in G^0\}$$

такое, что

- $\Psi(x) : H_{r(x)} \to H_{l(x)}$ и $\Psi(u) = \mathrm{Id}\, H_u$, $u \in G^0$;
- $\Psi(x)\Psi(y) = \sigma(x, y)\Psi(xy)$ почти всюду на G^2 относительно меры

$$\nu^2 = \int \mu^u \otimes \mu_u d\lambda(u),$$

индуцированной на G^2 мерой λ;

- $\Psi(x)^{-1} = \overline{\sigma(x, x^{-1})}\Psi(x^{-1})$ для почти всех x относительно меры ν (3.32), индуцированной на G мерой λ;
- отображение

$$x \to \left\langle \Psi(x)(s \circ r)(x) | (s' \circ l)(x) \right\rangle_{H_{l(x)}}$$

является ν-измеримым для любой пары λ-измеримых сечений s и s' расслоения $H \to G^0$.

Два представления (Ψ, H, λ) и $(\Psi', H'\lambda')$ группоида G считаются эквивалентными, если меры λ и λ' эквивалентны и существует такой изоморфизм Φ расслоений H и H' над G^0, что

$$(\Psi' \circ \Phi)(x) = (\Phi \circ \Psi)(x) \ .$$

для почти всех $x \in G$ относительно меры на G, индуцированной λ.

Рассмотрим гильбертово пространство $L^2(H)$ сечений расслоения $H \to G^0$ с интегрируемым квадратом. Тогда представление группоида G в H индуцирует представление π алгебры $C(G, \sigma)$ в гильбертовом пространстве $L^2(H)$, задаваемое соотношением:

$$\left\langle \pi(f)s | s' \right\rangle = \int f(x) \left\langle \Psi(x)(s \circ r)(x) | (s' \circ l)(x) \right\rangle_{H_{l(x)}} \Delta^{-1/2}(x)\, d\nu(x). \qquad (3.33)$$

При этом, если представления группоида G эквивалентны, то и соответствующие представления (3.33) алгебры $C(G, \sigma)$ тоже эквивалентны. □

Определение 3.6.14. Пополнение алгебры $C(G, \sigma)$ по норме

$$\|f\| = \sup \|\pi(f)\|,$$

где π пробегает все ограниченные представления алгебры $C(G, \sigma)$, является C^*-алгеброй, обозначаемой $C^*(G, \sigma)$ и именуемой *C^*-алгеброй группоида G*. □

Рассмотрим автоморфизмы C^*-алгебры $C^*(G, \sigma)$. Пусть A — локально компактная абелева группа, A' — ее дуальная группа и $c \in Z^1(G, A)$ — 1-коцикл. Для всякого характера $\xi \in A'$ определим отображение

$$\alpha_\xi(f)(x) = \xi(c(x))\, f(x), \qquad f \in C(G, \sigma). \qquad (3.34)$$

Это отображение является автоморфизмом алгебры $C(G, \sigma)$, который продолжается до автоморфизма C^*-алгебры $C^*(G, \sigma)$. Более того,

$$\alpha : \xi \to \alpha_\xi$$

является непрерывным гомоморфизмом A' в группу $\mathrm{Aut}(C^*(G, \sigma))$ автоморфизмов алгебры $C^*(G, \sigma)$, наделенной топологией поточечной сходимости [55]. Если c — 1-граница, то автоморфизмы α_ξ внутренние.

В частности, можно построить α-инвариантное состояние на C^*-алгебре $C^*(G, \sigma)$. Пусть μ — некоторая положительная мера на пространстве единиц G^0. Ограничивая функции из $C(G, \sigma)$ на G^0 и интегрируя их по мере μ, мы получим положительную форму ϕ_μ на $C(G, \sigma)$, непрерывную в топологии индуктивного предела. Если G — l-дискретный группоид и μ — вероятностная мера, то ϕ_μ определяет состояние на C^*-алгебре $C^*(G, \sigma)$. Это состояние α-инвариантно, поскольку $c(x) = \mathbb{1}$, $x \in G^0$, и $\xi(\mathbb{1}) = 1$ в выражении (3.34) для α_ξ.

Теорема 3.6.15. [33, 59] Пусть:

- $C^*(G, \sigma)$ — C^*-алгебра группоида G;
- $c \in Z^1(G, \mathbb{R})$ — коцикл;
- α_t, $t \in \mathbb{R}$ — группа автоморфизмов (3.34) алгебры $C^*(G, \sigma)$, определяемая c;
- ϕ_μ — α-инвариантное состояние на $C^*(G, \sigma)$, определяемое мерой μ на пространстве единиц G^0;
- $\beta \in [0, +\infty]$.

Рассмотрим C^*-динамическую систему $(C^*(G, \sigma), \alpha)$ (см. §6.1). Следующие условия эквивалентны:

- мера μ удовлетворяет (c, β)-условию КМШ из Определения 3.6.11;
- ϕ_μ — (α, β)-состояние КМШ на C^*-алгебре $C^*(G, \sigma)$, удовлетворяющее условию КМШ (6.4).

□

Глава 4

Квантовомеханические системы

В этой главе приводятся некоторые основные варианты квантования механических систем в рамках алгебраического подхода.

§ 1. Универсальные обертывающие алгебры

В квантовой механике одними из главных наблюдаемых, характеризующих систему, являются операторы физических величин — импульса, момента, спина и др. Они представляют собой базисные элементы алгебры Ли соответствующей группы симметрий. Однако при этом возникают две проблемы.

- Если дано унитарное представление группы Ли в гильбертовом пространстве, то алгебра Ли в общем случае выполняется неограниченными операторами в этом пространстве.
- Алгебры Ли не являются ассоциативными и сами по себе не могут служить алгебрами наблюдаемых.

Замечание 4.1.1. В дальнейшем, если специально не оговорено, мы ограничимся случаем связных конечномерных групп Ли. Примером бесконечномерных групп Ли является группа Гейзенберга—Вейля канонических коммутационных соотношений над ядерным пространством (см. § 6). Напомним в этой связи, что локально компактные группы Ли конечномерны и обратно, а связные локально компактные группы сепарабельны. Заметим также, что под неприводимым представлением алгебры Ли понимается именно ее алгебраически неприводимое представление. □

Говоря о первой проблеме, заметим, что все равномерно непрерывные неприводимые унитарные представления вещественных групп Ли только конечномерны. В частности, все группы внутренних симметрий (момента, спина и др.) компактны и их неприводимые унитарные представления равномерно непрерывны и конечномерны. В случае конечномерного представления гомоморфизм группы Ли G в группу Ли $GL(E)$ изоморфизмов пространства представления E является вещественно-аналитическим, и представление алгебры Ли группы G выполняется ограниченными операторами из алгебры Ли $gl(E)$.

В случае произвольной действительной группы Ли G представление ее алгебры Ли $\mathcal{G}$, ассоциированное с унитарным представлением π группы G в гильбертовом пространстве E, строится следующим образом. Обозначим через E_∞ подпространство E, состоящее из векторов x, для которых

$$\langle \pi(g)x, v\rangle : G \to \mathbb{C}$$

являются гладкими функциями на G при любом $v \in E'$. Они называются *бесконечно дифференцируемыми векторами* в E. Тогда на пространстве E_∞, называемом *пространством Гординга*, естественным образом реализуется представление алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы G. Пространство E_∞ плотно в E. Отметим, что в число бесконечно дифференцируемых векторов входят векторы вида

$$x_f = \pi^L(f)x = \int f(g)\pi(g)x\,dg, \qquad x \in E, \qquad f \in \mathcal{K}^\infty(G) \subset L^1(G),$$

где $\mathcal{K}^\infty(G)$ — пространство гладких функций на G с компактным носителем и π^L — ассоциированное с π представление групповой алгебры $L^1(G)$ группы G. Пусть u_a — правоинвариантное векторное поле на группе Ли G, отвечающее элементу a алгебры Ли $\mathcal{G}$. Полагая

$$\pi_\infty(a) : \pi^L(f)x \mapsto \pi^L(u_a\rfloor df)x, \tag{4.1}$$

мы получаем представление π_∞ комплексифицированной алгебры Ли $\mathcal{G}^c$ на векторах x_f. Заметим, что из топологической неприводимости представления π отнюдь не следует алгебраическая неприводимость представления π_∞. Более того, представление π_∞ может содержать бесконечное множество попарно неэквивалентных неприводимых представлений алгебры Ли $\mathcal{G}^c$.

Что касается второй из упомянутых выше проблем, то всякой алгебре Ли можно сопоставить соответствующую ассоциативную алгебру — универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли. Опишем эту конструкцию [11].

Пусть $\mathcal{G}$ — вещественная алгебра Ли некоторой (конечномерной) группы Ли G. Рассмотрим *тензорную алгебру*

$$T = \mathbb{R} \oplus \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^2 \oplus \cdots \tag{4.2}$$

векторного пространства $\mathcal{G}$, где $\mathcal{G}^n = \overset{n}{\otimes}\mathcal{G}$. Пусть I — двусторонний идеал алгебры T, порожденный элементами вида

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \qquad x, y \in \mathcal{G}, \tag{4.3}$$

т. е. I — минимальный двусторонний идеал, содержащий элементы (4.3).

Определение 4.1.1. Бесконечномерная ассоциативная алгебра $\overline{\mathcal{G}} = T/I$ с единицей называется *универсальной обертывающей алгеброй* алгебры Ли $\mathcal{G}$. □

Имеется каноническое вложение $\mathcal{G} \to \overline{\mathcal{G}}$ (*теорема Пуанкаре—Биркгофа—Витте*). Используя это вложение, фиксируем некоторый упорядоченный базис $\{e_1, \ldots, e_k\}$ алгебры Ли $\mathcal{G}$. Тогда элементы вида

$$e_1^{m_1} \otimes \cdots \otimes e_k^{m_k}, \tag{4.4}$$

где m_i — всевозможные натуральные числа, образуют базис векторного пространства $\overline{\mathcal{G}}$.

На алгебре $\overline{\mathcal{G}}$ определен антиавтоморфизм

$$* : e_1^{m_1} \otimes \cdots \otimes e_k^{m_k} \mapsto (-1)^{m_1+\ldots+m_k} e_k^{m_k} \otimes \cdots \otimes e_1^{m_1}, \tag{4.5}$$

где правую часть надо привести к упорядоченному виду (4.4), используя соотношения

$$e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i - c_{ij}^k e_k = 0$$

(c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathcal{G}$). Комплексифицируем алгебру $\overline{\mathcal{G}}$ и наложим на антиавтоморфизм (4.5) добавочное условие

$$* : \lambda x \mapsto \overline{\lambda} x^*, \qquad x \in \overline{\mathcal{G}}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда он будет удовлетворять всем требованиям, предъявляемым к операции инволюции, и алгебра $\overline{\mathcal{G}}$ становится инволютивной. В частности, элементы $ie_1, \ldots, ie_k$ являются эрмитовыми.

Инволютивная алгебра $\overline{\mathcal{G}}$ может быть наделена топологией, превращающей ее в топологическую инволютивную алгебру. Рассмотрим евклидову топологию в конечномерном векторном пространстве $\mathcal{G}$. Введем в тензорной алгебре T (4.2) *топологию прямой суммы*, когда последовательность

$$\left\{a^i = (x_0^i, \ldots, x_n^i, \ldots),\ x_n^i \in \mathcal{G}^n\right\}$$

(по индексу i) элементов из T сходится к нулю, если при любом n соответствующая последовательность $\{x_n^i\} \subset \mathcal{G}^n$ сходится к нулю относительно топологии в $\mathcal{G}^n$ и существует число N, не зависящее от i, такое, что $x_n^i = 0$ при всех $n > N$. Затем определим в $\overline{\mathcal{G}}$ фактор-топологию.

Использовать универсальную обертывающую алгебру $\overline{\mathcal{G}}$ в качестве алгебры наблюдаемых позволяет следующий факт.

Теорема 4.1.2. Пусть A — алгебра с единицей и γ — гомоморфизм алгебры Ли $\mathcal{G}$ в A. Тогда γ продолжается единственным образом до гомоморфизма $\overline{\gamma}$ универсальной обертывающей алгебры $\overline{\mathcal{G}}$ в A, переводящего $\mathbb{1}$ в $\mathbb{1}$. □

Следствие 4.1.3. Пусть ρ — представление алгебры Ли $\mathcal{G}$ в векторном пространстве V. Тогда существует одно и только одно продолжение ρ до представления $\overline{\rho}$ универсальной обертывающей алгебры $\overline{\mathcal{G}}$ в V. □

При этом векторные подпространства V, инвариантные относительно ρ, являются инвариантными и относительно $\overline{\rho}$. В частности, если представление ρ алгебры Ли $\mathcal{G}$ неприводимо, то представление $\overline{\rho}$ алгебры $\overline{\mathcal{G}}$ тоже (алгебраически) неприводимо. Если ρ_1 и ρ_2 — два представления алгебры Ли $\mathcal{G}$, то они эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие представления $\overline{\rho}_1$ и $\overline{\rho}_2$ универсальной обертывающей алгебры $\overline{\mathcal{G}}$. В результате имеет место определенное соответствие между множеством примитивных идеалов ассоциативной алгебры $\overline{\mathcal{G}}$ и множеством неприводимых унитарных представлений группы Ли G [11].

Пример 4.1.2. Пусть $\mathcal{G} = \mathrm{so}(3)$ со стандартным базисом $\{I_3, H_+, H_-\}$. Ядром представления универсальной обертывающей алгебры $\overline{\mathcal{G}}$, характеризуемого спином $l/2$, является примитивный идеал алгебры $\overline{\mathcal{G}}$, порождаемый элементами вида H_+^n, H_-^n, $n > l$. □

Замечание 4.1.3. Напомним известную лемму Шура. Подмножество $Z\mathcal{G}$ элементов универсальной обертывающей алгебры $\overline{\mathcal{G}}$, коммутирующих со всеми элементами $a \in \mathcal{G}$ (и следовательно со всеми элементами $\overline{\mathcal{G}}$), называется *центром* алгебры $\overline{\mathcal{G}}$. Можно показать, что в центре $Z\mathcal{G}$ существует конечное число полиномиальных образующих $C_1, C_2, \ldots, C_p$ таких, что любой элемент $z \in Z\mathcal{G}$ является полиномом от образующих C_i. Согласно *лемме Шура*, если представление ρ алгебры Ли $\mathcal{G}$ неприводимо, то операторы $\overline{\rho}(C_i)$, называемые *операторами Казимира*, пропорциональны $\mathbb{1}$. □

Приведем еще одно следствие Теоремы 4.1.2 [15].

Следствие 4.1.4. Поскольку для всякого элемента $a \in \mathcal{G}$, правоинвариантное векторное поле u_a на группе G отождествляется с правоинвариантным линейным дифференциальным оператором на G, универсальная обертывающая алгебра $\overline{\mathcal{G}}$ изоморфна алгебре всех правоинвариантных линейных дифференциальных операторов на G. □

Опираясь на Следствия 4.1.3 и 4.1.4, вернемся теперь к исходной проблеме. Пусть π — унитарное представление группы Ли G в гильбертовом пространстве E, π_∞ — ассоциированное с ним представление комплексифицированной алгебры Ли $\mathcal{G}^c$ и $\overline{\pi}_\infty$ — соответствующее представление универсальной обертывающей алгебры $\overline{\mathcal{G}}$. Если представление π конечномерно, то элементы ia, $a \in \mathcal{G}$, алгебры $\overline{\mathcal{G}}$ выполняются эрмитовыми ограниченными операторами в E и могут играть роль квантовомеханических наблюдаемых. Если представление π группы Ли G бесконечномерно, то представление π_∞ (4.1) алгебры Ли $\mathcal{G}$ в пространстве Гординга E_∞ продолжается до представления $\overline{\pi}_\infty$ универсальной обертывающей алгебры $\overline{\mathcal{G}}$ в E_∞ [23]. Тогда представление $\overline{\pi}_\infty$ можно интерпретировать как выполнение топологической инволютивной алгебры $\overline{\mathcal{G}}$ неограниченными операторами в гильбертовом пространстве E с областью определения E_∞, плотной в E. При этом эрмитовы элементы из $\overline{\mathcal{G}}$, в частности ia, переходят в симметрические операторы в E_∞. Однако, чтобы эрмитов элемент $b \in \overline{\mathcal{G}}$ можно было считать квантовомеханической наблюдаемой, нужно, чтобы оператор $\overline{\pi}_\infty(b)$ в E был существенно самосопряженным. Это условие выполняется, если, например, эрмитов элемент b принадлежит центру $Z\mathcal{G}$ алгебры $\overline{\mathcal{G}}$.

Пример 4.1.4. Рассмотрим *форму Киллинга*

$$g_{mn} = c^k_{ml} c^l_{nk}$$

на алгебре Ли $\mathcal{G}$. Пусть $\mathcal{G}$ — полупростая алгебра Ли, т. е. форма Киллинга невырождена. Тогда элемент

$$C_2 = g^{mn} e_m e_n, \tag{4.6}$$

называемый *элементом Казимира*, принадлежит центру универсальной обертывающей алгебры $\overline{\mathcal{G}}$. Легко видеть, что он эрмитов. Например, в случае $\mathcal{G} = \mathrm{so}(3)$, это квадрат момента. □

§ 2. Конечно порожденные C^*-алгебры

Универсальные обертывающие алгебры, описанные в предыдущем параграфе, дают пример конечно порожденных алгебр. Они, однако, не являются C^*-алгебрами и, вообще говоря, выполняются неограниченными операторами в гильбертовых пространствах. Развивая эту конструкцию, мы рассмотрим C^*-алгебры, порождаемые конечным набором элементов, которые сами, однако, не обязательно принадлежат такой алгебре и поэтому могут быть неограниченными операторами [69, 71]. Например, в отличие от универсальной обертывающей алгебры $\overline{\mathcal{G}}$, порождаемой генераторами (связной) локально компактной группы Ли G, C^*-алгебра, порождаемая этими же генераторами, является C^*-алгеброй $C^*(G)$ группы G.

Остановимся сначала на случае конечно порожденной C^*-алгебры, когда ее образующие элементы принадлежат самой этой алгебре. Начнем с самых общих понятий.

Рассмотрим *свободную алгебру* A_{free} всех некоммутативных полиномов от N элементов $e_1, \ldots, e_N$ с комплексными коэффициентами. Эти элементы называются *образующими*. Пусть задано некоторое множество отношений (алгебраических равенств), накладываемых на образующие. Пусть I — двусторонний идеал, порождаемый этими

отношениями. Тогда фактор

$$A = \frac{A_{\text{free}}}{I}$$

называется *конечно порожденной алгеброй.* Другой способ построения конечно порожденной алгебры состоит в том, чтобы задать согласованный с упомянутыми выше отношениями гомоморфизм γ алгебры A_{free} в некоторую алгебру B, т. е. такой, что $\gamma(e_i)$ удовлетворяют этим отношениям в B. Тогда идеал I является пересечением ядер всех таких гомоморфизмов γ, согласованных с отношениями.

Например, пусть E — сепарабельное гильбертово пространство. Выберем в качестве B алгебру $B(E)$ ограниченных операторов в E. Предположим, что отношения равномерно ограничены, т. е. существует набор чисел $M_1, \ldots, M_N$ таких, что

$$\|T_i\| \leqslant M_i \tag{4.7}$$

для всех наборов ограниченных операторов $T_1, \ldots, T_N$ в E, удовлетворяющих отношениям. Тогда для всякого элемента $a \in A_{\text{free}}$ положим

$$\|a\| = \sup_{\gamma} \|\gamma(a)\|, \tag{4.8}$$

где γ пробегает все гомоморфизмы A_{free} в $B(E)$, согласованные с отношениями. Это преднорма на A_{free}. Тогда

$$I = \left\{a \in A_{\text{free}} \,:\, \|a\| = 0\right\},$$

и при переходе к фактору преднорма (4.8) определяет норму на алгебре A_{free}/I, пополнение которой по этой норме является C^*-алгеброй.

Определение 4.2.1. Эта алгебра называется *конечно порожденной* C^*-алгеброй. □

Пример 4.2.1. Под-C^*-алгебра A алгебры $B(E)$ конечно порождена операторами $T_1, \ldots, T_N$, если она является замыканием по операторной норме множества алгебраических комбинаций из этих операторов. □

Перейдем теперь к конструкции C^*-алгебры, порождаемой неограниченными элементами, которые тем самым не могут быть элементами этой алгебры. Ради простоты, как в Примере 4.2.1, мы рассмотрим случай, когда конструируемая C^*-алгебра является подалгеброй алгебры $B(E)$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве E. Как уже отмечалось, всякая C^*-алгебра изоморфно представима в таком виде. В дальнейшем мы будем предполагать, что E — сепарабельное гильбертово пространство и C^*-алгебра A сепарабельна.

Обозначим $C(E)$ множество всех невырожденных сепарабельных под-C^*-алгебр A алгебры $B(E)$ (невырожденность означает, что AE плотно в E). Оператор $a \in B(E)$ именуется *множителем* подалгебры A, если aA и Aa содержится в A. Обозначим $M(A)$ множество всех множителей C^*-алгебры A. Легко убедиться, что $M(A)$ является C^*-алгеброй и A — ее замкнутый двусторонний идеал. Более того, если $a \in M(A)$ и $aA = 0$, тогда $a = 0$. Поэтому говорят, что A — *существенный идеал* $M(A)$, и $M(A)$ — наибольшая C^*-алгебра, содержащая A как существенный идеал.

Пример 4.2.2. Пусть $A = K(E)$ — алгебра непрерывных компактных операторов в E. Тогда $M(A) = B(E)$. □

Пример 4.2.3. Если C^*-алгебра A коммутативна, то согласно Теореме 2.7.2 она изоморфна C^*-алгебре $S(\hat{A})$ непрерывных комплексных функций на локально компактном

спектре $\hat{A}$ алгебры A, обращающихся в 0 на бесконечности, и тогда $M(A)$ — алгебра ограниченных непрерывных функций на $\hat{A}$. □

Эрмитов элемент $a \in M(A)$ называется *строго положительным* на A, если он положителен ($a \geqslant 0$) и aA плотно в A. Мы будем писать $a > 0$. В рассматриваемом случае сепарабельной C^*-алгебры A строго положительный элемент всегда существует. Для эрмитовых элементов $a, b \in M(A)$ мы будем писать $a > b$, если $a - b$ — строго положительный элемент на A. Легко установить, что $a + b > 0$ для всех $a > 0$ и $b \geqslant 0$ и что, если $a > b$ и $b \geqslant c$, то $a > c$.

Предложение 4.2.2. Поскольку A — замкнутый двусторонний идеал в $M(A)$, всякое состояние ϕ на C^*-алгебре A однозначно продолжается до состояния на $M(A)$, обозначаемого тем же символом ϕ, и $a > 0$ тогда и только тогда, когда $\phi(a) > 0$ для всякого чистого состояния ϕ на A. □

Пусть теперь T — в общем случае неограниченный оператор в гильбертовом пространстве E с областью определения $D(T)$, плотной в E. Введем оператор

$$z_T = T(\mathbb{1} + T^*T)^{-1/2}. \tag{4.9}$$

Оператор (4.9) ограничен, т.е. $z_T \in B(E)$, и $\|z_T\| < 1$. Он содержит всю информацию об операторе T, поскольку

$$T = z_T(\mathbb{1} - z_T^* z_T)^{-1/2}.$$

В частности, $\|T\| < \infty$, если $\|z_T\| < 1$. В этом случае можно показать, что T и z_T принадлежат одной и той же C^*-алгебре (как пределы некоторых сходящихся по норме последовательностей).

Определение 4.2.3. Пусть $A \in \mathcal{C}(E)$ — сепарабельная под-C^*-алгебра алгебры $B(E)$ и T — замкнутый оператор в E с плотной областью определения. Будем говорить, что оператор T *присоединен* к A, и писать $T\eta A$, если $z_T \in M(A)$ и $z_T^* z_T < \mathbb{1}$ на A. □

Обозначим A^η множество операторов, присоединенных к A. Легко убедиться, что если $T\eta A$, то $T^*\eta A$ и $T^*T\eta A$. Множители A являются единственными ограниченными операторами, присоединенными к A, т.е. $A \subset M(A) \subset A^\eta$.

Пример 4.2.4. Всякий замкнутый оператор с плотной областью определения в E является присоединенным к алгебре $K(E)$ непрерывных компактных операторов в E. □

Пример 4.2.5. Если A — коммутативная C^*-алгебра, тогда A^η — пространство непрерывных функций на спектре $\hat{A}$ алгебры A. □

Предложение 4.2.4. C^*-алгебра A является конечно порожденной своим элементами (см. Определение 4.2.1) тогда и только тогда, когда $A^\eta = A$. □

Обозначим $R(A, H)$ множество (невырожденных) представлений C^*-алгебры $A \in \mathcal{C}(E)$ в гильбертовом пространстве H. Поскольку алгебра A — существенный идеал в $M(A)$, всякое ее представление $\pi \in R(A, H)$ единственным образом продолжается до представления алгебры $M(A)$ в H. Более того, представление π распространяется на элементы, присоединенные к A. Если $T\eta A$, то $z_T \in M(A)$ и существует замкнутый оператор S в H с плотной областью определения такой, что $\pi(z_T) = z_S$. Обозначим его $\pi(T)$.

Пусть $B \in \mathcal{C}(H)$ — некоторая под-C^*-алгебра $B(H)$. Будем говорить, что представление $\pi \in R(A, H)$ является морфизмом A в B, если $\pi(A)B$ плотно в B. Обозначим $R(A, B)$ множество таких морфизмов. Справедливы следующие утверждения:

- $R(A, H) = R(A, K(H))$;
- если $T\eta A$ и $\pi \in R(A, B)$, то $\pi(T)\eta B$;
- если $a > 0$ на A и $\pi \in R(A, B)$, то $\pi(a) > 0$ на B.

Определение 4.2.5. Пусть $A \in C(E)$ и $T_1, \ldots, T_N$ — операторы, присоединенные к A. Говорят, что C^*алгебра A *порождена присоединенными элементами* $T_1, \ldots, T_N$, если для любого гильбертова пространства H, любой C^*-алгебры $B \in C(H)$ и всякого представления $\pi \in R(A, H)$ из условия $\pi(T_i)\eta B$, $i = 1, \ldots, N$, следует, что $\pi \in R(A, B)$. □

Приведем два конструктивных критерия того, что C^*-алгебра порождается присоединенными элементами.

Предложение 4.2.6. Пусть A, B — сепарабельные C^*-алгебры и $\gamma \in R(B, A)$ — вложение. Если $T_1, \ldots, T_N$ — присоединенные элементы к B и $\gamma(T_i)$ порождают A, тогда $\gamma(B) = A$. □

Предложение 4.2.7. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра и $T_1, \ldots, T_N$ — присоединенные к ней операторы. Обозначим $\mathcal{T}$ подмножество $M(A)$, состоящее из элементов вида $(\mathbb{1} + T_i^* T_i)^{-1}$, $(\mathbb{1} + T_i T_i^*)^{-1}$. Предположим, что:

- операторы $T_1, \ldots, T_N$ разделяют представления A в E, т. е. для различных $\pi, \pi' \in R(A, E)$ найдется такой элемент T_i, что $\pi(T_i) \neq \pi'(T_i)$;
- существуют элементы $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$ такие, что их произведение $t_1 \ldots t_k \in A$.

Тогда алгебра A порождается присоединенными операторами $T_1, \ldots, T_N$. □

Приведем несколько примеров.

Пример 4.2.6. Пусть C^*-алгебра $A \in C(E)$ конечно порождена своими элементами $\mathbb{1}, T_1, \ldots, T_N$. Если $\pi(T_i)$ присоединены к B, тогда по определению $z_{\pi(T_i)} \in M(B)$, а поскольку $\pi(T_i)$ ограниченные операторы, то они тоже являются множителями B и присоединены к B. Отсюда следует, что $\pi \in R(A, B)$, т. е. алгебра A порождена $T_1, \ldots, T_N$ в смысле Определения 4.2.5. Обратно, если алгебра A порождена ограниченными присоединенными элементами $T_1, \ldots, T_N$, в этом случае $T_i \in M(A)$. Пусть алгебра B конечно порождена операторами $\mathbb{1}, T_1, \ldots, T_N$. Тогда она является подалгеброй $M(A)$ и вложение $B \to M(A)$ принадлежит $R(B, A)$. Согласно Предложению 4.2.6 получаем $B = A$. □

Пример 4.2.7. Пусть X — локально компактное пространство и $T_1, \ldots, T_N$ — непрерывные комплексные функции на X. Они являются присоединенными элементами к C^*-алгебре $S(X)$ непрерывных комплексных функций на X, убывающих на бесконечности. Алгебра $S(X)$ порождается этими элементами, если они разделяют точки X и выполняется условие

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{N} |T_i(x)|^2 = +\infty. \tag{4.10}$$

Доказательство следует из Предложения 4.2.7. Поскольку функции $T_1, \ldots, T_N$ разделяют точки X, они разделяют представления $S(X)$. Можно также показать, что соотношение (4.10) эквивалентно

$$\lim_{x \to \infty} \prod_{i=1}^{N} \left(\mathbb{1} + |T_i(x)|^2\right)^{-1} = 0,$$

откуда следует, что произведение

$$(\mathbb{1} + T_1^* T_1)^{-1} \dots (\mathbb{1} + T_N^* T_N)^{-1}$$

содержится в $\mathcal{S}(X)$. Верно и обратное утверждение. Если алгебра $\mathcal{S}(X)$ порождается присоединенными элементами $T_1, \dots, T_N$, то эти функции разделяют точки пространства X и удовлетворяют условию (4.10). □

Пример 4.2.8. Пусть G — связная локально компактная группа Ли и $\mathcal{G}$ — ее алгебра Ли с базисными элементами $e_1, \dots, e_k$. Пусть π — произвольное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве E, π^L — представление ее групповой алгебры $L^1(G)$, $\pi^\dagger$ — соответствующее представление C^*-алгебры $C^*(G)$ группы G в E и π_∞ — представление алгебры Ли $\mathcal{G}$ неограниченными операторами (4.1). Можно показать, что базисные элементы $\pi_\infty(e_1), \dots, \pi_\infty(e_N)$ являются операторами, присоединенными к C^*-алгебре $\pi^\dagger(C^*(G))$, и $C^*(G)$ порождается элементами $e_1, \dots, e_k$ [71]. □

§ 3. Когерентные состояния

Пусть G — локально компактная группа и π — ее неприводимое унитарное представление с интегрируемым квадратом в гильбертовом пространстве E_π. Тогда можно выделить систему векторов в E, называемых когерентными состояниями и обладающих рядом полезных свойств. Когерентные состояния возникают во многих моделях [14, 16, 26], например, при построении канонических коммутационных соотношений (см. § 6).

Представления с интегрируемым квадратом уже рассматривались в § 3.5, но теперь мы не будем предполагать, что группа G унимодулярна. Напомним, что неприводимое унитарное представление π локально компактной группы G называется *представлением с интегрируемым квадратом* (или *квадратично интегрируемым представлением*), если существует такой вектор $\xi \in E_\pi$, что коэффициент $\phi_{\xi,\xi}$ представления π является квадратично интегрируемой функцией относительно левой меры Хаара dg на G, т. е.

$$\int \left|\langle \pi(g)\xi | \xi \rangle\right|^2 dg < \infty. \tag{4.11}$$

Назовем такой вектор *допустимым*. Легко убедиться, что если ξ — допустимый вектор, то все векторы $\pi(g)\xi$, $g \in G$, являются допустимыми. Очевидно, что множество допустимых векторов инвариантно относительно G и, поскольку представление π неприводимо, оно образует плотное подмножество в E_π, которое совпадает с E_π тогда и только тогда, когда группа G унимодулярна. При этом соотношение ортогональности (3.20) коэффициентов представления обобщается на неунимодулярный случай следующим образом [26, 43].

Предложение 4.3.1. Существует единственный положительный замкнутый обратимый оператор C в гильбертовом пространстве E_π, определенный на множестве всех допустимых векторов и такой, что

$$\int \phi_{\xi,\eta}(g)\overline{\phi_{\xi',\eta'}(g)}dg = \langle C\xi | C\xi' \rangle \overline{\langle \eta | \eta' \rangle}, \qquad \eta, \eta' \in E_\pi. \tag{4.12}$$

Причем $C = \lambda\mathbb{1}$, $\lambda > 0$, а соотношения (4.12) сводятся к (3.20) тогда и только тогда, когда группа G унимодулярна. Отсюда следует, что все коэффициенты $\phi_{\xi,\eta}$ представления π, когда один из векторов допустимый, являются квадратично интегрируемыми функциями на G. □

Соответственно соотношения (3.21) в общем случае локально компактной группы заменяются следующей конструкцией.

Определение 4.3.2. *Воспроизводящим ядром* на локально компактной группе G называется функция $K : G \times G \to \mathbb{C}$ такая, что

$$\begin{aligned} &K(g,g) > 0, \qquad \forall g \in G, \\ &K(g,g') = \overline{K(g',g)}, \\ &K(g,g') = \int K(g,g'')K(g'',g')\,dg''. \end{aligned} \tag{4.13}$$

□

Пусть ξ — допустимый вектор, нормализованный условием

$$\int |\phi_{\xi,\xi}|^2\,dg = \langle\xi|\xi\rangle. \tag{4.14}$$

С учетом соотношений (4.12) это условие принимает вид

$$\langle C\xi|C\xi\rangle = 1. \tag{4.15}$$

Тогда можно показать, что функция

$$K(g,g') = \left\langle \pi(g)\xi|\pi(g')\xi \right\rangle = \phi_{\xi,\pi(g')\xi}(g) \tag{4.16}$$

является воспроизводящим ядром на группе G. Например, в случае унимодулярной группы G условие нормализации (4.15) имеет вид

$$\langle\xi|\xi\rangle = d_\pi,$$

и тогда соотношение (4.13) для функции (4.16) является частным случаем равенства (3.21).

Перейдем теперь к понятию когерентных состояний.

Определение 4.3.3. Пусть π — неприводимое унитарное представление с интегрируемым квадратом локально компактной группы G и ξ — допустимый вектор пространства представления E_π, нормализованный условием (4.14). Рассмотрим его орбиту

$$\mathcal{S}_\xi = \left\{\xi_g = \pi(g)\xi \;:\; g \in G\right\} \tag{4.17}$$

в E_π под действием группы G. Ее элементы называются *когерентными состояниями.* □

Приведем основные свойства когерентных состояний (4.17).

- Во-первых, как мы ранее отмечали, когерентные состояния задают воспроизводящее ядро (4.16) на группе G.
- Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} &W_\xi : E_\pi \to L^2(G), \\ &(W_\xi\eta)(g) = \overline{\phi_{\xi,\eta}(g)} = \left\langle \eta|\pi(g)\xi \right\rangle, \qquad \eta \in E_\pi. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Согласно соотношениям (4.12) и (4.15) это изометрическое вложение, образ которого E_ξ является плотным в $L^2(G)$. Более того, отображение W_ξ (4.18) представляет собой сплетающий оператор представления π и левого регулярного представления Π группы G в $L^2(G)$, т. е.

$$W_\xi \pi(g) = \Pi(g) W_\xi, \qquad \forall g \in G.$$

- Отсюда следует, что неприводимое унитарное представление π с интегрируемым квадратом локально компактной группы G содержится в ее левом регулярном представлении. Используя соотношения (4.12) с учетом нормировки (4.15), можно показать, что пространство E_ξ состоит только из тех элементов $f \in L^2(G)$, которые удовлетворяют условию

$$f(g) = \int K(g', g) f(g')\, dg'. \tag{4.19}$$

- Обратное к W_ξ отображение $E_\xi \to E_\pi$ имеет вид

$$W_\xi^{-1}(f) = \int f(g) \xi_g\, dg, \qquad f \in E_\xi. \tag{4.20}$$

В частности, получаем равенство

$$\eta = \int (W_\xi \eta)(g) \xi_g\, dg = \int \langle \eta | \xi_g \rangle \xi_g\, dg.$$

Оно определяет разложение всякого элемента η пространства представления E_π по когерентным состояниям. Поскольку представление π неприводимо, когерентные состояния (4.17) образуют полное семейство в E_π, которое, однако, не будучи ортонормальным, в общем случае является переполненным.

Конструкция когерентных состояний имеет, однако, определенный дефект. Пусть π — неприводимое унитарное представление локально компактной группы G и ξ — некоторый вектор гильбертова пространства E_π. Рассмотрим те элементы h группы G, действие которых на вектор ξ сводится лишь к появлению фазового множителя, т. е.

$$h\xi = e^{i\alpha(h)} \xi. \tag{4.21}$$

Такие элементы образуют подгруппу H_ξ группы G, именуемую *стационарной подгруппой* элемента ξ. Тогда подынтегральное выражение в условии (4.11) допустимости вектора ξ фактически является функцией не на группе G, а на фактор-пространстве G/H_ξ. Можно сказать, что в интеграле (4.11) происходит лишнее интегрирование по стационарной подгруппе H_ξ. В частности, его конечное значение предполагает компактность группы H_ξ. Следовательно, целесообразно модифицировать определение когерентных состояний так, чтобы проводить интегрирование не по группе G, а по фактор-пространству G/H_ξ. Поэтому вводят понятие обобщенных когерентных состояний.

Пусть G — локально компактная группа, наделенная левой мерой Хаара dg, и π — ее унитарное неприводимое представление в гильбертовом пространстве E_π. Выберем некоторый фиксированный вектор $\xi \in E_\pi$ и обозначим ω_ξ определяемую им векторную форму (2.8) на алгебре $B(E_\pi)$ ограниченных операторов в E_π. Рассмотрим множество $\mathcal{S}_\xi$ (4.17) векторов $\xi_g = \pi(g)\xi$, $g \in G$. Пусть $H_\xi \subset G$ — стационарная подгруппа формы ω_ξ, т. е.

$$\omega_{\xi_h} = \omega_\xi, \qquad h \in H. \tag{4.22}$$

Согласно Предложению 2.4.8 равенство (4.22) имеет место тогда и только тогда, когда действие H_ξ на вектор ξ сводится к умножениям (4.21) на фазовые множители.

Определение 4.3.4. Множество векторных форм ω_{ξ_g}, $g \in G$, называется системой *обобщенных когерентных состояний* [16] (см. также ниже Определения 4.3.5 и 4.3.6). □

Ясно, что обобщенные когерентные состояния параметризуются элементами фактор-пространства G/H_ξ. Сохраняя эту параметризацию, более удобно, однако, использовать другое определение обобщенных когерентных состояний.

Определение 4.3.5. Пусть σ — сечение расслоения

$$\zeta : G \to \frac{G}{H_\xi}. \tag{4.23}$$

Тогда множество векторов

$$\mathcal{S}_\sigma = \left\{ \xi_{\sigma(q)} = \pi(\sigma(q))\,\xi, \;\; q \in \frac{G}{H_\xi} \right\} \tag{4.24}$$

из E_π тоже называется системой *обобщенных когерентных состояний* [16]. □

Легко убедиться, что при фиксированном сечении σ существует взаимно однозначное соответствие между обобщенными когерентными состояниями в смысле Определений 4.3.4 и 4.3.5.

Группа G действует на обобщенные когерентные состояния (4.24) по закону

$$g : \xi_{\sigma(q)} \mapsto \pi(g)\xi_{\sigma(q)} = e^{i\alpha(g,q)}\xi_{\sigma(gq)}.$$

Исходя из этого, условие допустимости этих когерентных состояний может быть сформулировано следующим образом.

Пусть фактор-пространство G/H_ξ наделено G-инвариантной мерой μ. Тогда обобщенные когерентные состояния (4.24) считаются *допустимыми*, если

$$\int\limits_{G/H_\xi} \left|\left\langle \pi(\sigma(q))\xi|\eta \right\rangle\right|^2 d\mu(q) < \infty, \qquad \forall \eta \in E_\pi. \tag{4.25}$$

В частности, когда проекция $G \to G/H_\xi$ является собственным отображением относительно меры Хаара dg на G и μ на G/H_ξ — образ dg при этом отображении, условие (4.25) эквивалентно условию допустимости когерентных состояний (4.11). В этом случае из соотношений (4.12), если вектор ξ нормализован условием (4.15), получаем, что интеграл (4.25) равен

$$\int\limits_{G/H_\xi} \left|\left\langle \pi(\sigma(q))\xi|\eta \right\rangle\right|^2 d\mu(q) = \langle \eta|\eta \rangle, \qquad \forall \eta \in E_\pi. \tag{4.26}$$

Определение 4.3.6. Под обобщенными когерентными состояниями часто подразумевают именно допустимые обобщенные когерентные состояния из Определения 4.3.5, которые удовлетворяют дополнительно условию (4.26). В этом случае говорят, что вектор ξ и сечение σ являются *допустимыми*. □

Например, в упомянутом выше случае, когда G-инвариантная мера μ на факторпространстве G/H_ξ является образом левой меры Хаара dg на G, система обобщенных когерентных состояний в смысле Определения 4.3.6 является подсистемой когерентных состояний в смысле Определения 4.3.3, состоящей из векторов $\xi_{g=\sigma\circ\zeta(g)}$.

Условие допустимости (4.26), однако, не является самым общим.

Определение 4.3.7. Система векторов (4.24) из Определения 4.3.5 именуется системой *ковариантных когерентных состояний*, если существует G-инвариантная мера μ на фактор-пространстве G/H_ξ и выполняется условие допустимости

$$\int\limits_{G/H_\xi} \left|\left\langle \pi(\sigma(q))\xi|\eta\right\rangle\right|^2 d\mu(q) = \langle\eta|a_\sigma\eta\rangle, \qquad \forall\eta\in E_\pi, \tag{4.27}$$

где a_σ — некоторый обратимый ограниченный положительный оператор в E_π [26]. □

Замечание 4.3.1. Таким образом, существует неоднозначность в имеющейся терминологии. Ковариантные когерентные состояния относятся к обобщенным когерентным состояниям из Определения 4.3.5, а их примером, когда $a_\sigma = \mathbb{1}$, являются обобщенные когерентные состояния из Определения 4.3.6. В свою очередь ковариантные когерентные состояния представляют собой частный случай воспроизводящих систем (см. следующий параграф), элементы которых тоже называются когерентными состояниями. □

Приведем основные свойства ковариантных когерентных состояний S_σ. Введем функцию

$$K_\sigma(q, q') = \left\langle \xi_{\sigma(q)}|a_\sigma^{-1}\xi_{\sigma(q')}\right\rangle \tag{4.28}$$

на произведении $G/H_\xi \times G/H_\xi$.

- Имеет место вложение

$$W_\xi : E_\pi \to L^2\left(\frac{G}{H_\xi}, \mu\right),$$
$$(W_\xi\eta)(q) = \langle\eta|\xi_{\sigma(q)}\rangle, \qquad \eta\in E_\pi. \tag{4.29}$$

  Его образ E_ξ состоит из функций f с интегрируемым квадратом относительно меры μ на G/H_ξ, удовлетворяющих условию

$$f(q) = \int K(q', q)f(q')\,d\mu(q'), \tag{4.30}$$

  аналогичному условию (4.19) для когерентных состояний.

- Обратное к W_ξ отображение $E_\xi \to E_\pi$ имеет вид

$$W_\xi^{-1}(f) = \int f(q)a_\sigma^{-1}\xi_{\sigma(q)}\,d\mu(q), \qquad f\in E_\xi. \tag{4.31}$$

  В частности, получаем равенство

$$\eta = \int (W_\xi\eta)(q)a_\sigma^{-1}\xi_{\sigma(q)}\,d\mu(q) = \int \langle\eta|\xi_{\sigma(q)}\rangle a_\sigma^{-1}\xi_{\sigma(q)}\,d\mu(q), \tag{4.32}$$

  или эквивалентно

$$a_\sigma\eta = \int \langle\eta|\xi_{\sigma(q)}\rangle\xi_{\sigma(q)}\,d\mu(q). \tag{4.33}$$

- Подынтегральное выражение в (4.33) можно записать в виде

$$F_{\sigma(q)}\eta = \langle\xi|\xi\rangle P_{\sigma(q)}\eta,$$

где $P_{\sigma(q)}$ — проекционный оператор на вектор $\xi_{\sigma(q)}$. Тогда (4.33) можно представить в виде равенства

$$\int F_{\sigma(q)}\, d\mu(q) = a_\sigma, \tag{4.34}$$

понимаемого как слабое равенство.

- Образ E_ξ отображения W_ξ (4.29) является полным относительно нормы

$$\langle f|f\rangle_\sigma = \left\langle f|W_\xi a_\sigma^{-1} W_\xi^{-1} f\right\rangle, \tag{4.35}$$

а само это отображение становится изометрическим, если наделить E_ξ этой нормой.

Ряд существенных дополнений к приведенным выше свойствам возникает для обобщенных когерентных состояний, т. е. когда $a_\sigma = \mathbb{1}$. В этом случае функция $K_\sigma(q, q')$ (4.28) становится воспроизводящим ядром на фактор-пространстве G/H_ξ, т. е. она удовлетворяет условиям

$$K_\sigma(q, q) > 0, \qquad \forall q \in \frac{G}{H_\xi},$$
$$K_\sigma(q, q') = \overline{K_\sigma(q', q)},$$
$$K_\sigma(q, q') = \int K_\sigma(q, q'')K_\sigma(q'', q')\, d\mu(q'').$$

Норма (4.35) совпадает со стандартной нормой в пространстве $L^2(G/H_\xi, \mu)$, и отображение W_ξ (4.29) является изометрическим вложением гильбертова пространства E_π в $L^2(G/H_\xi, \mu)$. Равенство (4.34) принимает вид

$$\int F_{\sigma(q)}\, d\mu(q) = \mathbb{1} \tag{4.36}$$

и может интерпретироваться как *разложение единицы*.

В дальнейшем, если специально не оговорено, под *когерентными состояниями* будут пониматься обобщенные или ковариантные когерентные состояния, а также элементы воспроизводящих систем (см. ниже Замечание 4.4.1).

Приведенная выше конструкция когерентных состояний зависит, очевидно, от выбора сечения σ расслоения (4.23). Однако эта зависимость не очень существенна. Действительно, всякие два сечения σ и σ' расслоения $G \to G/H_\xi$ связаны между собой соотношением

$$\sigma(q) = \sigma'(q)h(q), \qquad h(q) \in H_\xi.$$

Поэтому, если μ-измеримое сечение σ этого расслоения удовлетворяет условию допустимости (4.27), то тому же самому условию удовлетворяет и всякое другое его μ-измеримое сечение σ'. При этом соответствующие системы когерентных состояний $\mathcal{S}_\sigma$ и $\mathcal{S}_{\sigma'}$ находятся во взаимно однозначном соответствии

$$\xi_{\sigma(q)} = \sigma'(q)h(q)\xi = e^{i\alpha(q)}\xi_{\sigma'(q)}.$$

Другой произвол в задании когерентных состояний связан с выбором вектора ξ пространства представления E_π. Оказывается, что во многих случаях можно найти такой вектор ξ, что соответствующие когерентные состояния наиболее близки к классическим состояниям, т. е. в некотором смысле обладают минимальной неопределенностью.

Пусть G — вещественная локально компактная группа Ли и $\mathcal{G}^c$ — комплексификация ее алгебры Ли $\mathcal{G}$. Рассмотрим неприводимое унитарное представление π группы G в гильбертовом пространстве E_π и соответствующее представление алгебры $\mathcal{G}^c$ в пространстве Гординга $E_\infty \subset E_\pi$. Выберем $\xi \in E_\infty$. Обозначим $\mathcal{T}_\xi \subset \mathcal{G}^c$ стационарную подалгебру элемента ξ в алгебре $\mathcal{G}^c$, т. е. множество таких элементов $T \in \mathcal{G}^c$, что $T\xi = \lambda\xi$. Пусть $\overline{\mathcal{T}}_\xi$ — подалгебра $\mathcal{G}^c$, комплексно сопряженная к $\mathcal{T}_\xi$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{T}_\xi \cap \mathcal{G} = \mathcal{H}_\xi$ — стационарная подалгебра вектора ξ в алгебре Ли $\mathcal{G}$ и

$$\mathcal{T}_\xi \cap \overline{\mathcal{T}}_\xi = \mathcal{H}_\xi^c = \mathcal{H}_\xi \oplus i\mathcal{H}_\xi.$$

Подалгебра $\mathcal{T}_\xi$ называется *максимальной*, если

$$\mathcal{T}_\xi + \overline{\mathcal{T}}_\xi = \mathcal{G}^c.$$

Способ построения когерентных состояний, наиболее близких к классическим состояниям, состоит в таком выборе вектора ξ, чтобы его стационарная подалгебра $\mathcal{T}_\xi$ в $\mathcal{G}^c$ была максимальной [16].

Например, пусть G — компактная простая группа Ли, H — ее картановская подгруппа, $\mathcal{H}$ — соответствующая ей алгебра Ли и π_M — неприводимое унитарное представление G со старшим весом M. Заметим, что в случае компактной группы Ли G ее алгебра Ли $\mathcal{G}$ реализуется ограниченными операторами в E_π. Пусть ξ — некоторый элемент E_π. Нетрудно видеть, что если его стационарная подалгебра $\mathcal{T}_\xi$ максимальна, то

$$\dim \mathcal{T}_\xi = \frac{1}{2}(n + r),$$

где n — размерность G и r — ее ранг. Таким элементом является вектор ξ_M со старшим весом M. Было показано, что это состояние, а также все построенные с его помощью когерентные состояния обладают наименьшей неопределенностью [39], а именно, $\xi = \xi_M$ минимизирует величину

$$\Delta\pi(C_2) = \big\langle \pi(C_2)\xi|\xi\big\rangle - g^{mn}\big\langle \pi(e_m)\xi|\xi\big\rangle\big\langle \pi(e_n)\xi|\xi\big\rangle,$$

где C_2 — элемент Казимира (4.6).

§ 4. Квантование по Березину

В квантовой механике существуют разные точки зрения на процедуру квантования. В частности, распространено мнение, что классическая система содержит достаточно информации о квантовой системе, пределом которой при $\hbar \to 0$ она является, и что квантование — это переход

[классическая механика] $\Longrightarrow$ [квантовая механика]

при выполнении *принципа соответствия*

[классическая механика] $= \lim_{\hbar \to 0}$ [квантовая механика].

Одним из способов такого квантования является квантование по Березину [1, 16, 26, 28].

Пусть Z — конечномерное симплектическое многообразие и $\mathcal{O}^0(Z)$ — пространство гладких функций на Z, наделенное структурой *алгебры Пуассона* $\mathcal{A}(Z)$ относительно скобок Пуассона

$$(f, f') \mapsto \{f, f'\}, \qquad f, f' \in \mathcal{O}^0(Z), \tag{4.37}$$

которые в локальных канонических координатах q^i, p_i имеют вид

$$\{f, f'\} = \partial^i f \partial'_i - \partial_i f \partial^i f'.$$

Алгебра Пуассона $\mathcal{A}(Z)$ описывает классическую стационарную механическую систему [20]. Идея квантования такой системы сводится к тому, чтобы всякой функции $f \in \mathcal{A}(Z)$ сопоставить эрмитов оператор $\hat{f}$ в некотором гильбертовом пространстве E так, что выполняется *условие Дирака*

$$[\hat{f}, \hat{f}'] = -i\hbar\widehat{\{f, f'\}}, \tag{4.38}$$

где $[\hat{f}, \hat{f}']$ — коммутатор операторов $\hat{f}$ и $\hat{f}'$. Укажем возможный путь решения этой задачи.

Пусть E — гильбертово пространство, наделенное системой векторов ξ_z, параметризуемых точками симплектического многообразия Z и таких, что соответствующие проекционные операторы P_z порождают разложение единицы

$$\int F_z \, d\mu_{\mathrm{L}}(z) = \int \langle \xi_z | \xi_z \rangle P_z \, d\mu_{\mathrm{L}}(z) = \mathbb{1}, \tag{4.39}$$
$$F_z \eta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \eta | \xi_z \rangle \xi_z, \qquad \forall \eta \in E,$$

относительно *меры Лиувилля* на Z, которая в локальных канонических координатах имеет вид

$$d\mu_{\mathrm{L}} = \frac{1}{(2\pi)^m} \prod_{i=1}^{m} dp_i \wedge dq^i, \qquad 2m = \dim Z. \tag{4.40}$$

Тогда всякой функции f из $\mathcal{A}(Z)$ можно поставить в соответствие эрмитов оператор

$$\hat{f} = \int f(z) F_z \, d\mu_{\mathrm{L}}(z) \tag{4.41}$$

в гильбертовом пространстве E. Если функция f положительна, то этот оператор положителен.

Замечание 4.4.1. Разложение единицы (4.39) существует не всегда [26, 47]. В общем случае рассматривается сепарабельное гильбертово пространство E и ограниченный положительный оператор a в E, который допускает интегральное разложение

$$a = \int F_z \, d\mu(z)$$

относительно меры μ на некотором пространстве Z, где F_z — компактные операторы в E. Можно интерпретировать $F(z) = F_z$ как интегрируемую операторозначную функцию на Z. Оператор a может не быть обратимым, т. е. область определения $D(a^{-1})$ оператора a^{-1} не плотна в E. Если оператор a обратим (но не обязательно ограничен,

т.е. $D(a^{-1})$ плотна в E), тройка $(H, F(z), a)$ называется *воспроизводящей*. Если оператор a^{-1} ограничен, а операторы F_z для всех $z \in Z$ имеют один и тот же конечный ранг n (т.е. отображают E в n-мерные подпространства), то имеется система векторов ξ_z^i в E, параметризуемых точками пространства Z и индексами $i = 1, \ldots, n$, которая порождает разложение единицы (4.39). Она именуется *воспроизводящей системой*, а векторы ξ_z^i — когерентными состояниями.

Действительно, для каждого $z \in Z$ рассмотрим n-мерное подпространство $E_z \subset E$ — ортогональное дополнение $\operatorname{Ker} F_z$. В нем может быть задан базис $\{v^i(z)\}$, ортонормальный относительно скалярного произведения

$$\left\langle v^i(z) | v^j(z) \right\rangle_z = \left\langle F_z v^i(z) | v^j(z) \right\rangle_E = \delta^{ij}.$$

Определим

$$\xi_z^i = a^{-1/2} F_z v^i(z), \qquad \forall z \in Z, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.42}$$

Тогда имеет место разложение единицы

$$\int \tilde{F}_z \, d\mu(z) = \mathbb{1}, \qquad \tilde{F}_z \eta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle \eta | \xi_z^i \rangle \, \xi_z^i. \tag{4.43}$$

В частности, каждой непрерывной функции f на Z может быть сопоставлен эрмитов оператор

$$\hat{f} = \int f(z) \tilde{F}_z \, d\mu(z) \tag{4.44}$$

в гильбертовом пространстве E. □

Перейдем теперь к точной формулировке *квантования по Березину*. Квантованием алгебры Пуассона $\mathcal{A}(Z)$ по Березину называется инволютивная алгебра A, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Существует семейство инволютивных алгебр A_h таких, что:

   (a) h пробегает некоторое подмножество $N \subset \mathbb{R}_+$ положительных чисел, имеющее предельную точку 0, но $0 \notin N$;

   (b) $A \subset \bigoplus_h A_h$.

2. Существует гомоморфизм $\Phi : A \to \mathcal{A}(Z)$ со следующими свойствами:

(а) для любых двух точек $z, z' \in Z$ найдется разделяющая их функция f, принадлежащая $\Phi(A)$, т.е. $f(z) \neq f(z')$;

(б) для любых двух элементов $a, a' \in A$

$$\Phi\big([a, a']\big) = -\frac{ih}{2\pi}\big\{\Phi(a), \Phi(a')\big\};$$

(в) $\Phi(a^*) = \overline{\Phi(a)}$, $\forall a \in A$.

Условия (2а) и (2б) выражают принцип соответствия, а параметр h играет роль постоянной Планка. Говорят, что квантование удовлетворяет *слабому принципу соответствия*, если гомоморфизм Φ определен не на всей алгебре A, а на некотором ее векторном подпространстве A'. Квантование называется *специальным*, если выполняются следующие дополнительные условия.

3. Для каждого h алгебра A_h состоит из функций $Z \to \mathbb{C}$.

4. Алгебра A состоит из функций $N \times Z \to \mathbb{C}$ так, что их ограничения на $\{h\} \times Z$ принадлежат A_h для всякого фиксированного h.

5. Гомоморфизм $\Phi : A \to \mathcal{A}(Z)$ дается формулой

$$\Phi(a)(z) = \lim_{h \to 0} a(h, z).$$

Квантование по Березину оказывается наиболее эффективным, когда Z — кэлерово многообразие. Чтобы описать такое квантование, введем предварительно следующую конструкцию.

Пусть Z — $2m$-мерное симплектическое многообразие, наделенное мерой Лиувилля μ_{L} (4.40), и дана воспроизводящая система $\{\xi_z\}$ векторов гильбертова пространства E, параметризуемая элементами Z и задающая разложение единицы (4.39). Всякому оператору a в гильбертовом пространстве E, область определения которого содержит все векторы ξ_z, сопоставим комплексную функцию

$$\tilde{a}(z) = \mathrm{Tr}[P_z a] = \frac{\langle a\xi_z | \xi_z \rangle}{\|\xi_z\|^2} \tag{4.45}$$

на Z, где P_z — проекционный оператор на вектор ξ_z. Она называется *символом оператора* a и может быть расширена аналитически до функции

$$\tilde{a}(x, y) = \frac{\langle a\xi_x | \xi_y \rangle}{\langle \xi_x | \xi_y \rangle} \tag{4.46}$$

на $Z \times Z$. Пусть

$$W : E \to L^2(Z, \mu_{\mathrm{L}}), \tag{4.47}$$

$$(W\eta)(z) = \langle \eta | \xi_z \rangle, \tag{4.48}$$

— изометрическое вложение. Тогда можно записать

$$\big(W(a\eta)\big)(z) = \int \tilde{a}(x, z) \frac{\langle \xi_x | \xi_z \rangle}{\|\xi_x\|^2} W(\eta)\, d\mu(x), \tag{4.49}$$

где введена новая мера $d\mu(x) = \|\xi_x\|^2 d\mu_{\mathrm{L}}(x)$. Отсюда видно, что оператор a по функции (4.46) восстанавливается однозначно. В ряде случаев ограниченные операторы a восстанавливаются однозначно по своим символам (4.45), которые образуют алгебру относительно следующей операции произведения. Пусть $c = ab$ и $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ — символы соответственно операторов a, b и c. Тогда

$$\tilde{c}(z) = (\tilde{a} \circ \tilde{b})(z) = \int \tilde{a}(x, z)\tilde{b}(z, x) \frac{\big|\langle \xi_x | \xi_z \rangle\big|^2}{\|\xi_x\|^2 \|\xi_z\|^2}\, d\mu(x). \tag{4.50}$$

Комплексная функция $\hat{a}(z)$ на Z называется *контравариантным символом* оператора a, если

$$a = W^{-1}(\hat{a}) = \int \hat{a}(z) P_z\, d\mu(z)$$

(см. (4.31)). Символ и контравариантный символ оператора A связаны соотношением

$$\tilde{a}(z) = \int \hat{a}(x) \frac{\left|\langle \xi_z | \xi_x \rangle\right|^2}{\|\xi_z\|^2 \|\xi_x\|^2} \, d\mu(x).$$

Предположим теперь, что Z — (конечномерное) кэлерово многообразие (см. § 1.7 и [13, 22]). Это означает, что Z — комплексное многообразие, наделенное эрмитовой метрикой

$$g = g_{jk} d\bar{z}^j \otimes dz^k, \qquad j, k = 1, \ldots, m, \tag{4.51}$$

такой, что соответствующая фундаментальная форма (1.21)

$$\omega = \frac{1}{i} g_{ik} d\bar{z}^j \wedge dz^k \tag{4.52}$$

является замкнутой. Форма (4.52) вещественна и наделяет Z структурой $2m$-мерного вещественного симплектического многообразия. Соответствующие скобки Пуассона для функций f и g на Z в комплексных координатах даются выражением

$$\{f, g\} = ig^{jk} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} \frac{\partial g}{\partial z^k} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}^j} \frac{\partial f}{\partial z^k} \right). \tag{4.53}$$

Предположим, что кэлерова метрика g выражается через потенциал

$$g_{jk} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \bar{z}^j \partial z^k}$$

и что существует аналитическое продолжение $\mathcal{F}(z^j, \bar{x}^k)$ потенциала $\mathcal{F}(z^j, \bar{z}^k)$ на некоторую окрестность диагонали в $Z \times Z$. Рассмотрим гильбертово пространство $L^2(Z, \mu_h)$ квадратично интегрируемых комплексных функций на Z относительно меры

$$d\mu_h(z) = \left(\frac{i}{\pi}\right)^m \exp\left[-\frac{2\pi}{h} \mathcal{F}(z, \bar{z})\right] \det \|g_{jk}\| \prod_{i=1}^{m} dz^i \wedge d\bar{z}^i, \tag{4.54}$$

наделенное скалярным произведением

$$\langle f | g \rangle_h = c(h) \int f(z, \bar{z}) \overline{g(z, \bar{z})} \, d\mu_h(z, \bar{z}), \tag{4.55}$$

где $c(h)$ — нормировочная константа. Можно показать, что подмножество H_h голоморфных функций в $L^2(Z, \mu_h)$ является замкнутым гильбертовым подпространством. Более того, оно допускает воспроизводящее ядро

$$K_h(z, \bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \overline{f_k(x)}, \qquad z, x \in Z, \tag{4.56}$$

где $\{f_k\}$, $k = 1, \ldots,$ — ортонормальный базис в H_h такой, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k(z)\|^2 < \infty \qquad \forall z \in Z.$$

Тогда множество когерентных состояний

$$\mathcal{S}_h = \left\{\xi_{\overline{x}} \,:\, \xi_{\overline{x}} = K_h(z, \overline{x}),\ \ x \in Z\right\} \tag{4.57}$$

является переполненным и образует разбиение единицы в H_h относительно меры μ_h. Мы ограничимся весьма распространенным в физических приложениях случаем, когда потенциал $\mathcal{F}$ является логарифмом воспроизводящего ядра K_h. А именно, предположим, что существует такое подмножество $N \subset \mathbb{R}_+$, имеющее своей предельной точкой 0 (см. условие квантования (1а)) и такое, что

$$K_h(z, \overline{z}) = \lambda \exp\left[\frac{2\pi}{h}\mathcal{F}\left(z^i, \overline{z}^k\right)\right] \tag{4.58}$$

для каждого $h \in N$ (λ=const). Выберем нормировочную константу

$$c(h) = \left[\int \frac{d\mu_h(x)}{K_h(x, \overline{x})}\right]^{-1}$$

так, чтобы $\lambda = 1$.

Обозначим A_h алгебру символов ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H_h, определенных относительно воспроизводящей системы (4.57) и снабженных произведением (4.50). Рассмотрим подмножество A' из $\bigoplus\limits_h A_h$, состоящее из функций вида

$$\tilde{a}\left(h, z^i, \overline{z}^k\right) = a\left(0, z^i, \overline{z}^k\right) + \frac{h}{2\pi}a_1\left(z^i, \overline{z}^k\right) + \frac{h^2}{4\pi^2}a_2\left(z^i, \overline{z}^k\right), \tag{4.59}$$

где a, a_1, a_2 — функции на Z, имеющие аналитическое продолжение на $Z \times Z$. Можно убедиться, что

$$\left(\tilde{a} \circ \tilde{b}\right)\left(h, z^i, \overline{z}^k\right) = a\left(0, z^i, \overline{z}^k\right)\ b\left(0, z^i, \overline{z}^k\right) + o(h)$$

и

$$\left(\tilde{a} \circ \tilde{b} - \tilde{b} \circ \tilde{a}\right)\left(h, z^i, \overline{z}^k\right) = -\frac{ih}{2\pi}\left\{\tilde{a}, \tilde{b}\right\}\left(0, z^i, \overline{z}^k\right) + o(h).$$

Таким образом, A' является специальным квантованием по Березину, удовлетворяющим слабому принципу соответствия.

§ 5. Геометрическое квантование

Геометрическое квантование предлагает другой, отличный от (4.41), способ, как функциям f на симплектическом многообразии Z сопоставить операторы $\hat{f}$ в гильбертовом пространстве [23, 50, 63, 68].

Начнем с частного случая. Пусть M — m-мерное многообразие. Его кокасательное расслоение T^*M с голономными координатами (q^i, p_i) является $2m$-мерным симплектическим многообразием, наделенным канонической симплектической формой

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i \tag{4.60}$$

(см. [20]). Рассмотрим тривиальное расслоение

$$T^*M \times \mathbb{C} \to T^*M. \tag{4.61}$$

На нем может быть задана линейная связность

$$\Gamma = dp_j \otimes \partial^j + dq^j \otimes \left(\partial_j - 2\pi i p_j c \partial_c\right), \tag{4.62}$$

где c — координата на $\mathbb{C}$. Кривизна этой связности равна

$$R = -2\pi i c \Omega. \tag{4.63}$$

Тогда всякой функции f из алгебры Пуассона $\mathscr{A}(T^*M)$ сопоставим следующий дифференциальный оператор на сечениях s расслоения (4.61):

$$\hat{f}(s) = \left(\nabla_{\vartheta_f} - 2\pi i f\right) s = \left(\partial^j f(\partial_j + 2\pi i p_j) - \partial_j f \partial^j - 2\pi i f\right) s, \tag{4.64}$$

где ∇_{ϑ_f} — ковариантная производная, задаваемая связностью Γ (4.62), вдоль гамильтонова векторного поля

$$\vartheta_f \rfloor \Omega = -df,$$
$$\vartheta_f = \partial^i f \partial_i - \partial_i f \partial^i,$$

ассоциированного с функцией f. Нетрудно убедиться, что

$$\hat{f} \circ \hat{g} - \hat{g} \circ \hat{f} = \widehat{\{f, g\}} \tag{4.65}$$

для всех $f, g \in \mathscr{A}(T^*M)$. Причем это свойство является прямым следствием выражения (4.63) для формы кривизны связности Γ.

Замечание 4.5.1. В этом параграфе при использовании стандартных геометрических объектов мы будем следовать условию Дирака (4.65). Чтобы получить условие Дирака (4.38) с физическими коэффициентами, надо выбрать связность (4.62) в виде

$$\Gamma = dp_j \otimes \partial^j + dq^j \otimes \left(\partial_j + \frac{i}{\hbar} p_j c \partial_c\right),$$

а оператор (4.64) задать формулой

$$\hat{f}(s) = -i\hbar\left(\nabla_{\vartheta_f} + \frac{i}{\hbar} f\right) s.$$

□

Обобщим приведенную выше конструкцию. Пусть Z — симплектическое многообразие с симплектической формой Ω. Рассмотрим одномерное комплексное векторное расслоение $\zeta : C \to Z$, т. е. его типичным слоем является $\mathbb{C}$. Это расслоение со структурной группой $U(1)$. Оно называется комплексным *линейным расслоением* над Z и наделено послойными координатами (z^μ, c). Его подрасслоением с той же структурной группой является расслоение $\zeta : C_0 \to Z$ с типичным слоем $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Пусть

$$\Gamma = dz^\mu \otimes (\partial_\mu + \Gamma_\mu c \partial_c) \tag{4.66}$$

— линейная связность Γ на расслоениях $C \to Z$ и $C_0 \to Z$. Она определяет ковариантный дифференциал

$$\nabla s = \nabla_\mu s dz^\mu = (\partial_\mu s - \Gamma_\mu s)\, dz^\mu$$

на сечениях s этих расслоений.

На расслоении $C_0 \to Z$ существует комплексная 1-форма α, которая для произвольного векторного поля u на Z и сечения s этого расслоения удовлетворяет соотношению

$$\nabla_u s = 2\pi i \left(u \rfloor s^* \alpha\right) s.$$

Она имеет координатный вид

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{dc}{c} - \Gamma_\mu dz^\mu\right). \tag{4.67}$$

Нетрудно убедиться, что

$$d\alpha = -\frac{1}{\pi i c} R,$$

где

$$R = \frac{1}{2} R_{\nu\mu} dz^\nu \wedge dz^\mu,$$
$$R_{\nu\mu} = (\partial_\nu \Gamma_\mu - \partial_\mu \Gamma_\nu)c,$$

— форма кривизны связности Γ. Из этого соотношения следует, что на симплектическом многообразии Z существует комплексная 2-форма ω такая, что индуцированная ее 2-форма на C_0 совпадает с $d\alpha$, т. е.

$$d\alpha = \zeta^* \omega. \tag{4.68}$$

Она имеет координатный вид

$$\omega = -\frac{1}{2\pi i} \partial_\nu \Gamma_\mu dz^\nu \wedge dz^\mu.$$

Эта форма замкнута, но не обязательно точна, поскольку $\Gamma_\mu dz^\mu$ не является в общем случае 1-формой на Z.

Пусть g — послойная эрмитова метрика на расслоениях C и C_0. Говорят, что она инвариантна относительно связности Γ, если для любого векторного поля u на Z и произвольных сечений s, s' расслоения C выполняется соотношение

$$u \rfloor d\left(g(s, s')\right) = g\left(\nabla_u s, s'\right) + g\left(s, \nabla_u s'\right).$$

Предложение 4.5.1. На расслоении C существует эрмитова метрика g, инвариантная относительно связности Γ на C тогда и только тогда, когда форма $2\pi i(\alpha - \overline{\alpha})$ на C_0 является точной. Тогда метрика g определяется соотношением

$$2\pi i(\alpha - \overline{\alpha}) = d \ln(g(c, c)). \tag{4.69}$$

□

Если связность Γ на расслоении C удовлетворяет условиям Предложения 4.5.1, тогда форма $(\Gamma + \overline{\Gamma})/c$ является точной и 2-форма ω (4.68) на Z вещественна:

$$\zeta^*(\omega - \overline{\omega}) = d(\alpha - \overline{\alpha}) = 0,$$

т. е. это пресимплектическая форма.

Предположим теперь, что на комплексном линейном расслоении $C \to Z$ над симплектическим многообразием Z существует связность Γ, называемая *допустимой*, такая, что $\omega = \Omega$, т. е. ее форма кривизны R удовлетворяет соотношению (4.63). Согласно Предложению 4.5.1, в этом случае существует и Γ-инвариантная эрмитова метрика на C. Например, для связности (4.62) такой эрмитовой метрикой является

$$g(c, c) = c\bar{c}. \tag{4.70}$$

Теперь, как и в (4.64), сопоставим всякой функций f из алгебры Пуассона $\mathcal{A}(Z)$ дифференциальный оператор

$$\hat{f}(s) = \left(\nabla_{\vartheta_f} - 2\pi i f\right) s \tag{4.71}$$

на сечениях s линейного расслоения $C \to Z$ (*формула Костанта—Сурьо*). Тогда операторы (4.71) удовлетворяют соотношению (4.65) для всех $f, g \in \mathcal{A}(Z)$.

Чтобы получить условие существования допустимой связности Γ с формой кривизны (4.63), заметим, что форма Чженя c_1 такой связности дается выражением

$$c_1 = \frac{i}{2\pi} F = \frac{i}{2\pi} \frac{R}{c} = \Omega \tag{4.72}$$

(см. [19]). Она является представителем целочисленного когомологического класса в группе когомологий де Рама $H^2(Z)$. Таким образом, необходимым (и достаточным) условием существования допустимой связности на расслоении $C \to Z$ является то, что симплектическая форма Ω на Z должна иметь целочисленный когомологический класс де Рама (*условие целочисленности симплектической формы*). Например, каноническая симплектическая форма (4.60) на T^*M является точной, т. е. имеет нулевой когомологический класс де Рама.

Определение 4.5.2. Комплексное линейное расслоение $C \to Z$ над симплектическим многообразием Z, форма Чженя c_1 которого совпадает с симплектической формой Ω на Z, называется *предквантовым расслоением*. □

Смысл этого названия состоит в том, что операторы $\hat{f}$ (4.71) действуют в подпространстве гладких функций гильбертова пространства $L^2(Z, \mu_L)$ комплексных функций на Z с интегрируемым квадратом относительно меры Лиувилля (4.40) на Z. Однако по ряду причин такое представление алгебры Пуассона $\mathcal{A}(Z)$ оказывается не вполне удовлетворительным для квантования. Например, «квантование» (4.64) (локальных) функций $f = p_j$ и $f = q^j$ приводит соответственно к операторам

$$\hat{p}_j = \partial_j, \qquad \hat{q}^j = -\partial^j + 2\pi i q^j,$$

последний из которых отличен от стандартного оператора канонической координаты. Поэтому процедура построения предквантового расслоения над симплектическим многообразием, именуемая *предквантованием*, — лишь первый этап геометрического квантования. Его второй этап состоит в следующем.

Пусть Z — симплектическое многообразие с симплектической формой Ω. *Поляризацией* называется (максимальное) инволютивное распределение $\mathbf{T} \subset TZ$ на Z такое, что

$$\Omega(\vartheta, v) = 0, \qquad \forall \vartheta, v \in \mathbf{T}_z, \qquad z \in Z,$$

а также алгебра его сечений $\mathcal{T}_\Omega$. Интегральные многообразия этого распределения являются лагранжевыми. Обозначим $\mathscr{A}_T$ подалгебру алгебры Пуассона $\mathscr{A}(Z)$, состоящую из функций f таких, что

$$[\vartheta_f, \mathcal{T}_\Omega] \subset \mathcal{T}_\Omega.$$

Квантуют только элементы этой подалгебры. В частности, локальные функции $f = p_j$ и $f = q^j$, вообще говоря, не принадлежат этой подалгебре.

Пусть симплектическая форма Ω является целочисленной и $C \to Z$ — соответствующее комплексное линейное расслоение, Γ — допустимая связность и g — инвариантная послойная эрмитова метрика на C. Обозначим $\mathcal{D}$ комплексное линейное расслоение *полуплотностей* над Z, т.е. объектов с законом координатных преобразований

$$\rho' = \left|\det\left(\frac{\partial z'^\mu}{\partial z^\nu}\right)\right|^{1/2} \rho.$$

Тогда формула предквантования (4.71) может быть следующим образом распространена на сечения $s \otimes \rho$ расслоения $C \otimes \mathcal{D} \to Z$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(s \otimes \rho) &= \left(\nabla_{\vartheta_f} - 2\pi i f\right)(s \otimes \rho) = (\hat{f}s) \otimes \rho + s \otimes \mathbf{L}_{\vartheta_f}\rho, \\ \nabla_{\vartheta_f}(s \otimes \rho) &= \left(\nabla_{\vartheta_f} s\right) \otimes \rho + s \otimes \mathbf{L}_{\vartheta_f}\rho, \end{aligned} \tag{4.73}$$

где

$$\mathbf{L}_{\vartheta_f}\rho = \frac{1}{2}\partial_\mu(\vartheta_f^\mu \rho)$$

— производная Ли. Нетрудно убедиться, что операторы (4.73) удовлетворяют условию Дирака (4.65). Обозначим $\mathcal{H}_Z$ множество сечений q расслоения $C \otimes \mathcal{D} \to Z$ таких, что

$$\nabla_\vartheta q = 0, \qquad \forall \vartheta \in \mathcal{T}_\Omega.$$

Предложение 4.5.3. Для каждой функции $f \in \mathscr{A}_T$ и произвольного сечения $q \in \mathcal{H}_Z$ выполняется соотношение $\hat{f}q \in \mathcal{H}_Z$. □

Таким образом определено представление алгебры $\mathscr{A}_T$ в пространстве $\mathcal{H}_Z$.

Определение 4.5.4. Квантованием функции $f \in \mathscr{A}_T$ называется ограничение оператора $\hat{f}$ (4.73) на $\mathcal{H}_Z$. □

Заметим, что пространство $\mathcal{H}_Z$ не всегда существует (*условие Бора—Зоммерфельда*). Если симплектическое многообразие Z компактно (без границы), то эрмитова форма

$$\langle s_1 \otimes \rho_1 | s_2 \otimes \rho_2 \rangle = \frac{i^{m^2}}{\pi^m} \int_Z g(s_1, s_2)\rho_1 \overline{\rho}_2 \tag{4.74}$$

превращает его в предгильбертово пространство. Пополнение $\mathcal{H}_Z$ по этой форме называется *квантовым гильбертовым пространством* H_Z. При этом операторы $\hat{f}$ являются антиэрмитовыми, а будучи взятыми с физическими коэффициентами (см. Замечание 4.5.1), они эрмитовы.

Изложенная нами процедура геометрического квантования, конечно, схематична и требует детализации. Необходимо учесть случай некомпактных многообразий Z, не все

важные с физической точки зрения операторы попадают в подалгебру $\mathscr{A}_T$ и квантуются таким образом и т. д. Мы отсылаем за подробностями к литературе [50, 63, 68], а сейчас остановимся на геометрическом квантовании на голоморфных многообразиях и на его связи с когерентными состояниями [26, 53, 54].

Пусть Z — m-мерное голоморфное многообразие и $C \to Z$ — комплексное линейное расслоение с комплексными координатами $(c, z^j, \bar{z}^j)$. Это означает, что функции перехода между координатными картами на Z удовлетворяют условию

$$\frac{\partial z'^i}{\partial \bar{z}^k} = \frac{\partial \bar{z}'^i}{\partial z^k} = 0.$$

Предположим, что на C существует линейная связность

$$\Gamma = dz^i \otimes (\partial_i + \Gamma_i c\partial_c) + d\bar{z}^i \otimes (\bar{\partial}_i - \bar{\Gamma}_i c\partial_c)$$

с невырожденной 2-формой кривизны

$$R = -2\pi i c\Omega,$$

где Ω — замкнутая невырожденная вещественная 2-форма на Z. Тогда многообразие Z наделено симплектической структурой с симплектической формой Ω и Γ-инвариантной послойной эрмитовой метрикой g. В локальных комплексных канонических координатах $(z^j, \bar{z}^j)$ симплектическая форма Ω имеет вид

$$\Omega = 2i \sum_j dz^j \wedge d\bar{z}^j,$$

а эрмитова метрика g дается выражением (4.70). Поэтому приведенная ниже конструкция геометрического квантования на комплексном многообразии Z выглядит аналогично геометрическому квантованию на вещественном симплектическом многообразии Z, если комплексные и вещественные канонические координаты связать локальными соотношениями

$$z^j = \frac{1}{2}(p_j + iq^j), \qquad \bar{z}^j = \frac{1}{2}(p_j - iq^j).$$

На голоморфном многообразии Z существует каноническая поляризация

$$\mathbf{T} = \{v \in Tz \,:\, Jv = -iv\},$$

сечениями которой $\vartheta \in \mathcal{T}_\Omega$ являются комплексные векторные поля вида $\vartheta = \bar{v}^i\bar{\partial}_i$. Напомним обозначения

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial z^i}, \qquad \bar{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i},$$
$$d = \partial + \bar{\partial}, \qquad \partial = dz^i\partial_i, \qquad \bar{\partial} = d\bar{z}^i\bar{\partial}_i.$$

Рассмотрим, как и ранее, подалгебру $\mathscr{A}_T$ алгебры Пуассона $\mathscr{A}(Z)$, состоящую из комплексных функций f на Z таких, что

$$[\vartheta_f, \mathcal{T}_\Omega] \subset \mathcal{T}_\Omega,$$

где ϑ_f — гамильтоново векторное поле, ассоциированное с f. В локальных канонических координатах это векторное поле имеет вид

$$\vartheta_f = \frac{1}{2i}\sum_j(-\overline{\partial}_j f\partial_j + \partial_j f\overline{\partial}_j).$$

Отсюда легко установить, что, например, все голоморфные функции на Z принадлежат $\mathscr{A}_T$.

Построим пространство, в котором действуют операторы $\widehat{f}$, сопоставляемые функциям $f \in \mathscr{A}_T$. Для этого возьмем сечения s расслоения $C \to Z$ такие, что

$$\nabla_\vartheta s = 0, \qquad \vartheta \in \mathcal{T}_\Omega,$$

т.е. $(\overline{\partial}_i + \Gamma_i)s = 0$, и голоморфные сечения

$$\rho = \rho_{1\ldots m}dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^m$$

расслоения $T^{*(m,0)} \to Z$. Рассмотрим соответствующие сечения

$$q = s \otimes \rho = s\rho_{1\ldots m}dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^m \tag{4.75}$$

расслоения $C \otimes T^{*(m,0)} \to Z$. Теперь всякой функции $f \in \mathscr{A}_T$ сопоставим оператор

$$\widehat{f}(s \otimes \rho) = \left(\nabla_{\vartheta_f} - 2\pi i f\right)(s) \otimes \rho + s \otimes \mathbf{L}_{\vartheta_f}\rho. \tag{4.76}$$

В локальных комплексных канонических координатах $(z^j, \overline{z}^j)$ этот оператор имеет вид

$$\widehat{f}(s \otimes \rho) = \left(-\frac{1}{2i}\sum_k \overline{\partial}_k f(\partial_k s - \Gamma_k s) - 2\pi i f s\right) \otimes \rho + s \otimes \left(-\frac{1}{2i}\sum_k \partial_k(\rho\overline{\partial}_k f)\right).$$

Операторы (4.76) удовлетворяют условию Дирака (4.65).

Если Z — компактное пространство без границы, то сечения q (4.75) образуют предгильбертово пространство $\mathcal{H}_Z$ относительно скалярного произведения (4.74), а операторы $\widehat{f}$ (4.76), $f \in \mathscr{A}_T$, действуют в нем (т.е. $\widehat{f}\mathcal{H}_Z \subset \mathcal{H}_Z$) и являются антиэрмитовыми. Если пространство Z не компактно, то в качестве $\mathcal{H}_Z$ выбирается предгильбертово пространство сечений q (4.75) таких, что выражение (4.74) конечно. Операторы (4.76) в таком пространстве в общем случае не являются ограниченными и симметрическими.

Следующая конструкция предлагает своего рода стандартный способ геометрического квантования на голоморфном многообразии Z, когда задано вложение Z в некоторое гильбертово пространство E.

Пусть Z — голоморфное многообразие, наделенное симплектической формой Ω, и $C \to Z$ — комплексное линейное расслоение над Z. Обозначим E_Z гильбертово пространство — пополнение пространства сечений q расслоения $C \otimes T^{*(m,0)} \to Z$ таких, что выражение (4.74) конечно. Пусть задан атлас расслоения $C \otimes T^{*(m,0)} \to Z$ с областями тривиализации U_ι и базисами $s_\iota \otimes dz_\iota^1 \wedge \ldots \wedge dz_\iota^m$ слоев этого расслоения, где z_ι^k — локальные комплексные канонические координаты и s_ι — голоморфные базисы расслоения $C \to Z$ такие, что $s_\iota\overline{s}_\iota = 1$. Предположим дополнительно, что для любых точек $z_1, z_2 \in Z$ существуют сечения $q_1, q_2 \in E_Z$:

$$q_j(z_1) = q_{j\iota}(z)s_\iota \otimes dz_1^1 \wedge \ldots \wedge dz_1^m, \qquad z_1 \in U_\iota, \qquad j = 1, 2,$$
$$q_j(z_2) = q_{j\kappa}(z')s_\kappa \otimes dz_2^1 \wedge \ldots \wedge dz_2^m, \qquad z_2 \in U_\kappa,$$

такие, что

$$\det \begin{pmatrix} q_{1\iota}(z_1) & q_{1\kappa}(z_2) \\ q_{2\iota}(z_1) & q_{2\kappa}(z_2) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{4.77}$$

Это условие не зависит от выбора атласа расслоения.

Теорема 4.5.5. Существует функционал

$$K_\iota(x, z) = K_{\kappa\iota}(x, z) s_\kappa \otimes dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \tag{4.78}$$

такой, что

$$q_\iota(z) = \left\langle q(.) | K_\iota(., z) \right\rangle = \frac{i^{m^2}}{\pi^m} \int q(x) \overline{K_\iota(x, z)}.$$

□

Функционал (4.78) обладает свойствами воспроизводящего ядра:

- $K_{\iota\iota}(z, z) > 0$;
- $\overline{K_{\kappa\iota}(x, z)} = K_{\iota\kappa}(z, x)$;
- $K_{\kappa\iota}(x, z) = \left\langle K_\iota(., z) | K_\kappa(., x) \right\rangle$.

Он определяет отображение

$$\mathcal{K} : Z \supset U_\iota \ni z \mapsto K_\iota(., z) \in E_Z. \tag{4.79}$$

При этом в силу предположения (4.77) $K_\iota(., z) \neq \lambda K_\kappa(., z')$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ни для каких $z, z' \in Z$. Таким образом, отображение (4.79) — это также вложение Z в проективное гильбертово пространство PE_Z (которое является вложением многообразия, если $\mathcal{K}$ имеет максимальный ранг). Обозначим

$$\xi_z = \mathcal{K}(z) = K_\iota(., z) \in E_Z. \tag{4.80}$$

Нетрудно убедиться, используя свойства воспроизводящего ядра (4.78), что векторы ξ_z, $z \in Z$, образуют воспроизводящую систему, которая задает разложение единицы в гильбертовом пространстве E_Z относительно меры Лиувилля на Z, т. е. векторы (4.80) могут рассматриваться как когерентные состояния.

Интерес к проективным гильбертовым пространствам (см. § 1.7) в схеме геометрического квантования вызван тем, что над таким пространством существует каноническое линейное расслоение и соответственно имеет место стандартная процедура предквантования. Опишем эту конструкцию.

Пусть ради простоты E — сепарабельное гильбертово пространство и PE — соответствующее проективное гильбертово пространство. Рассмотрим расслоение

$$C = \left\{ (z, \mathrm{z}) \in E \times PE : z \in \mathrm{z} \right\} \tag{4.81}$$

с соответствующими проекциями $\zeta : C \to PE$ и $\pi : C \to E$. Оно называется *универсальным линейным расслоением*. Его подрасслоением C_0 с типичным слоем $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ является расслоение

$$C_0 = E \setminus \{0\} \to PE, \qquad \pi : z \to \mathrm{z}.$$

Фиксируем карту (U_h, ψ_h) (1.33) проективного гильбертова пространства PE. Ее образом в E является подпространство E_h (1.34). Зададим в этой карте следующую систему координат. Выберем в E ортонормальный базис $\{h, e_k\}$, $k = 1, \ldots, \dim E - 1$. Тогда $\{e_k\}$ составляет ортонормальный базис подпространства E_h, а координаты z_h^k относительно этого базиса образуют координаты в карте (U_h, ψ_h) проективного гильбертова пространства. Проективное гильбертово пространство PE наделено метрикой Фубини—Штуди (1.36) и соответствующей фундаментальной формой ω (1.37), которая имеет координатный вид

$$\omega = -i \sum_{j,k} \left(\frac{\delta^{jk}}{1 + \|z\|^2} - \frac{z^j \overline{z}^k}{(1 + \|z\|^2)^2} \right), \qquad \|z\|^2 = \sum_k z^k \overline{z}^k. \tag{4.82}$$

На универсальном линейном расслоении (4.81) существует связность

$$\Gamma = dz^j \otimes \left(\partial_j + 2\pi \frac{\overline{z}^j}{1 + \|z\|^2} c\partial_c \right) + d\overline{z}^j \otimes \left(\overline{\partial}_j - 2\pi \frac{z^j}{1 + \|z\|^2} c\partial_c \right), \tag{4.83}$$

которая оставляет инвариантной послойную метрику (4.70) на C и удовлетворяет условию

$$R = -2\pi i c \omega.$$

Пусть теперь Z — некоторое голоморфное многообразие, и определено его вложение $\mathcal{K}$ в проективное гильбертово пространство PE. Предположим, что индуцированная форма $\mathcal{K}^*\omega$ на Z является невырожденной, т.е. симплектической. Упомянутый выше стандартный способ геометрического квантования на голоморфных многообразиях состоит в том, чтобы рассмотреть индуцированное линейное расслоение $\mathcal{K}^*C$ над Z. На этом расслоении существует индуцированная связность $\mathcal{K}^*\Gamma$, форма кривизны которой равна $-2\pi i c \mathcal{K}^*\omega$, т.е. $\mathcal{K}^*C$ является предквантовым расслоением над Z.

§ 6. Канонические коммутационные соотношения

В подходе геометрического квантования, как было отмечено, возникают сложности с квантованием канонических координат и импульсов. Они в общем случае не принадлежат ни алгебре Пуассона $\mathcal{A}(Z)$, ни ее квантуемой подалгебре $\mathcal{A}_T$. Дело в том, что операторы канонических импульсов и координат являются неограниченными. Они описываются алгеброй канонических коммутационных соотношений (ККС) в схеме канонического квантования. Известна теорема, что представление этой алгебры в сепарабельном гильбертовом пространстве возможно только неограниченными операторами или импульсов, или координат [25].

Существуют различные подходы к построению алгебр ККС и их представлений. Имея в виду теорию поля, мы не станем ограничиваться системами с конечным числом степеней свободы и рассмотрим общий случай алгебр ККС над ядерными пространствами [8] (к которым относятся и конечномерные пространства). Выбор ядерных, а не гильбертовых пространств обусловлен тем, что для построения представлений алгебр ККС нужны гауссовы меры, задание которых на бесконечномерных гильбертовых пространствах сталкивается с ограничениями (см. Пример А.4). В наиболее общем варианте алгебра ККС определяется над предгильбертовым пространством.

Пусть Q — вещественное ядерное пространство, наделенное невырожденной положительной эрмитовой формой $\langle q|q'\rangle$, $q, q' \in Q$, непрерывной по каждому аргументу, которая превращает Q в предгильбертово пространство. Ядерное пространство Q, его пополнение $\tilde{Q}$ по эрмитовой форме $\langle .|. \rangle$ и сопряженное к Q пространство Q' составляют оснащенное гильбертово пространство $Q \subset \tilde{Q} \subset Q'$ (см. § 1.6).

Определение 4.6.1. *Алгеброй ККС* (*алгеброй Гейзенберга—Вейля*) называется (бесконечномерная) алгебра Ли $\mathcal{G}(Q)$, образованная элементами $\phi(q), \pi(q)$ $(q \in Q)$ и I, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$\big[\phi(q), I\big] = \big[\pi(q), I\big] = 0, \tag{4.84a}$$

$$\big[\phi(q), \phi(q')\big] = \big[\pi(q), \pi(q')\big] = 0, \tag{4.84b}$$

$$\big[\phi(q), \pi(q')\big] = i\langle q|q'\rangle I. \tag{4.84c}$$

□

Коммутационные соотношения (4.84a)–(4.84c) называются *каноническими коммутационными соотношениями в форме Гейзенберга.* При этом операторы $\phi(q)$ и $\pi(q)$ линейны по q, т. е.

$$\phi(\lambda q + q') = \lambda\phi(q) + \phi(q'), \qquad \pi(\lambda q + q') = \lambda\pi(q) + \pi(q'), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, если задан ортонормальный базис $\{q^k\}$ предгильбертова пространства Q, ККС (4.84b)–(4.84c) принимают вид

$$\big[\phi(q^j), \phi(q^k)\big] = \big[\pi(q^k), \pi(q^j)\big] = 0, \qquad \big[\phi(q^j), \pi(q^k)\big] = \delta^{jk}\mathbb{1}. \tag{4.85}$$

Группа ККС (*группа Гейзенберга—Вейля*) $G(Q)$ с алгеброй Ли $\mathcal{G}(Q)$ (4.84a)–(4.84c) состоит из всевозможных троек (q_1, q_2, λ), где $q_1, q_2 \in Q$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Закон композиции этих троек имеет вид

$$(q_1, q_2, \lambda)\left(q_1', q_2', \lambda'\right) = \left(q_1 + q_1', q_2 + q_2', \exp\big[i\langle q_2, q_1'\rangle\big]\lambda\lambda'\right). \tag{4.86}$$

Рассмотрим унитарные представления группы ККС $G(Q)$ (4.86), когда ее абелева подгруппа $(0, 0, \lambda)$ реализуется умножениями на комплексные числа λ.

Группа ККС $G(Q)$ содержит еще две абелевы подгруппы G_ϕ и G_π с элементами $(q, 0, 0)$ и $(0, q, 0)$ соответственно. Обозначим соответствующие операторы

$$T(q) = \exp\big[i\phi(q)\big], \qquad P(q) = \exp\big[i\pi(q)\big]. \tag{4.87}$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &T(q)T(q') = T(q + q'), \\ &P(q)P(q') = P(q + q'), \\ &T(q)P(q') = \exp\big[-i\langle q|q'\rangle\big]P(q')T(q), \end{aligned} \tag{4.88}$$

которые называются *каноническими коммутационными соотношениями в форме Вейля.* Преимущество ККС в форме Вейля состоит в том, что, в отличие от ККС в форме

Гейзенберга, они реализуются ограниченными унитарными операторами на всем пространстве представления.

Замечание 4.6.1. ККС в форме Вейля записывают также в следующем виде. Пусть Z — комплексное предгильбертово пространство с эрмитовой формой $\langle .|. \rangle$. Его элементам $z \in Z$ ставятся в соответствие операторы $W(z)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$W(z)W(z') = \exp\left[\frac{i}{2}\operatorname{Im}\langle z|z'\rangle\right] W(z+z'). \tag{4.89}$$

Их связь с ККС (4.88) устанавливается следующим образом. Пусть

$$Z = Q \oplus iQ, \qquad z = p + iq, \qquad p, q \in Q.$$

Положим

$$W(p+iq) = \exp\left[\frac{i}{2}\langle p|q\rangle\right] T(p)P(q) = \exp\left[-\frac{i}{2}\langle p|q\rangle\right] P(q)T(p). \tag{4.90}$$

Тогда ККС (4.89) для $W(p+iq)$ эквивалентны ККС (4.88) для $T(p)$, $P(q)$. □

Чтобы построить унитарные представления группы ККС $G(Q)$, опишем сначала (сильно непрерывные) циклические унитарные представления абелевой подгруппы Ли G_ϕ, которая является группой трансляций в ядерном пространстве Q. Она называется *ядерной группой*. Как и в случае локально компактных групп (см. Предложение 3.5.4), такое представление группы G_ϕ задается непрерывной комплексной функцией положительного типа $Z(q)$ на Q, т. е. $Z(0) = 1$ и

$$\sum_{i,j} Z(q_i - q_j)\bar{c}_i c_j \geqslant 0 \tag{4.91}$$

для любого конечного набора элементов $q_1, \ldots, q_n \in Q$ и комплексных чисел c_i. Назовем $Z(q)$ *производящей функцией*. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только таких производящих функций $Z(q)$, что функция

$$t \to Z(tq) \tag{4.92}$$

на $\mathbb{R}$ является аналитической в точке $t = 0$ для всех $q \in Q$.

Поскольку пространство Q ядерно, согласно теореме Бохнера (см. Приложение А.4) производящая функция является преобразованием Фурье

$$Z(q) = \int \exp\bigl[i\langle q, u\rangle\bigr]\, d\mu(u) \tag{4.93}$$

некоторой положительной меры μ с полной массой 1 на топологически сопряженным к Q пространстве Q'. Соответствующее ей сильно непрерывное циклическое унитарное представление T абелевой группы Ли G_ϕ реализуется в гильбертовом пространстве $L^2(Q', \mu)$ комплексных квадратично μ-интегрируемых функций на Q' унитарными операторами

$$T(q)\rho(u) = s_q(u)\rho(u) = \exp\bigl[i\langle q, u\rangle\bigr]\rho(u). \tag{4.94}$$

При этом функции $s_q(u)$ удовлетворяют условию

$$Z(q)s_q(u) = \int s_q(u+u')\,d\mu(u').$$

Тотализирующим вектором θ представления (4.94) является класс функций, μ-эквивалентных функции $\rho(u) = 1$, так что замыкание $G_\phi\theta$ совпадает с $L^2(Q', \mu)$ и согласно (4.93)

$$Z(q) = \left\langle T(q)\theta|\theta\right\rangle_\mu,$$

где $\langle .|.\rangle_\mu$ обозначает эрмитову форму на пространстве $L^2(Q', \mu)$. Представление (4.94), однако, не является топологически неприводимым. Например, пусть $s(u)$ — функция на Q', множество нулей которой не является μ-пренебрежимым. Тогда замыкание $G_\phi s$ является замкнутым G_ϕ-инвариантным подпространством $L^2(Q', \mu)$.

Замечание 4.6.2. Заметим, что, в отличие от случая локально компактной группы, представление ядерной группы G_ϕ, задаваемое функцией положительного типа, реализуется в пространстве квадратично интегрируемых функций не на Q, а на топологически сопряженным к Q пространстве Q'. Представление (4.94) строится следующим образом. Для всякого элемента $q \in Q$ производящая функция $Z(q)$ определяет непрерывную функцию

$$Z_q(q') \stackrel{\text{def}}{=} Z(q'-q)$$

на $q' \in Q$. Рассмотрим конечные линейные комбинации

$$v = \sum_i v^i Z_{q_i}, \qquad v^i \in \mathbf{C},$$

для всех элементов $q_i \in Q$. Они образуют предгильбертово пространство $\mathcal{H}$ относительно эрмитовой билинейной формы

$$\langle v'|v\rangle = Z(q_i - q_j)\,\overline{v}^i v'^j.$$

Эта форма является невырожденной и задает пополнение $\mathcal{H}$ до гильбертова пространства H, в котором группа G_ϕ действует по закону

$$r(q) : \sum_i v^i Z_{q_i} \mapsto \sum_i v^i Z_{q_i - q}.$$

Существует изометрическое вложение

$$\mathcal{H} \ni Z_q(q') \mapsto s_{q'-q}(u) \in L^2(Q', \mu),$$

продолжаемое на гильбертово пространство H. □

Можно показать, что для разных производящих функций $Z(q)$ и $Z'(q)$ представления T и T' (4.94) эквивалентны тогда и только тогда, когда меры μ и μ' эквивалентны. Действительно, пусть

$$d\mu'(u) = f^2(u)\,d\mu(u), \tag{4.95}$$

где $f(u)$ — положительная почти нигде не нулевая функция на Q' такая, что $\mu(f^2) = 1$. Тогда отображение

$$L^2(Q', \mu') \ni \rho(u) \mapsto f(u)\rho(u) \in L^2(Q', \mu) \tag{4.96}$$

осуществляет изоморфизм представления T' в представление T так, что $T'(q) = T(q)$ и

$$Z'(q) = \left\langle T(q)f(u)|f(u)\right\rangle_\mu. \tag{4.97}$$

В частности, всякий тотализирующий вектор $f \in L^2(Q', \mu)$ представления T определяет эквивалентное представление ядерной группы G_ϕ с мерой (4.95) и производящей функцией (4.97). Если вектор $f \in L^2(Q', \mu)$ не является тотализирующим, то меры μ' (4.95) и μ не эквивалентны и представления ядерной группы G_ϕ с производящими функциями $Z'(q)$ (4.97) и $Z(q)$ не эквивалентны.

При определенном условии на меру μ в выражении (4.93), построенное представление группы G_ϕ в $L^2(Q', \mu)$ можно расширить до представления всей группы ККС (4.88). Обозначим u_q элементы Q', задаваемые соотношением

$$\langle q', u_q\rangle = \langle q'|q\rangle, \qquad \forall q' \in Q. \tag{4.98}$$

Они образуют образ канонического вложения Q в Q', определяемого данной эрмитовой формой $\langle .|.\rangle$ на Q. В частности,

$$u_{\alpha q} = \alpha u_q, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Пусть мера μ в (4.93) квазиинвариантна относительно сдвигов на элементы из $Q \subset Q'$, т. е.

$$d\mu(u + u_q) = a^2(q, u)\, d\mu(u), \tag{4.99}$$

где $a(q, u)$ — почти нигде не нулевая положительная квадратично μ-интегрируемая функция на Q' такая, что

$$a(0, u) = 1, \qquad a(q + q', u) = a(q, u)\, a(q', u + u_q). \tag{4.100}$$

Свойство (4.99) называется *трансляционной квазиинвариантностью.* При этом следует иметь в виду, что на бесконечномерных векторных пространствах, как правило, не существует мер, инвариантных (мера Лебега) или квазиинвариантных относительно произвольных трансляций.

Если мера μ в преобразовании Фурье (4.93) трансляционно квазиинвариантна, тогда представление операторов $P(q)$ в пространстве $L^2(Q', \mu)$ можно определить в виде

$$P(q)\rho(u) = a(q, u)\, \rho(u + u_q) \tag{4.101}$$

(см. Замечание 3.5.2). Исходя из свойства (4.99), получаем унитарность таких операторов $P(q)$:

$$\begin{aligned} \|\rho\|_\mu^2 = \int |\rho(u)|^2\, d\mu(u) = \int \left|\rho(u + u_q)\right|^2\, d\mu(u + u_q) = \\ = \int a^2(q, u) \left|\rho(u + u_q)\right|^2\, d\mu(u) = \|P(q)\rho\|_\mu^2 . \end{aligned} \tag{4.102}$$

Таким образом, полученное нами представление (4.94), (4.101) группы ККС $G(Q)$ в пространстве $L^2(Q', \mu)$ является унитарным.

Соответствующее представление алгебры ККС $\mathcal{G}(Q)$ (4.84a)–(4.84c) в пространстве $L^2(Q', \mu)$ дается (неограниченными) операторами

$$\begin{aligned} &I = \mathbb{1}, \\ &\phi(q)\rho(u) = \langle q, u\rangle \rho(u), \\ &\pi(q)\rho(u) = -i\Big(\delta_q + \eta(q, u)\Big)\rho(u), \end{aligned} \tag{4.103}$$

где

$$\begin{aligned} &\delta_q \rho(u) = \lim_{\alpha\to 0} \alpha^{-1}\Big[\rho(u + \alpha u_q) - \rho(u)\Big], \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \\ &\eta(q, u) = \lim_{\alpha\to 0} \alpha^{-1}\Big[a(\alpha q, u) - 1\Big]. \end{aligned} \tag{4.104}$$

С учетом (4.100) получим полезные соотношения

$$\delta_q \delta_{q'} = \delta_{q'}\delta_q, \qquad \delta_q(\eta(q', u)) = \delta_{q'}(\eta(q, u)).$$

В частности,

$$\begin{aligned} &\delta_q = -\delta_{-q}, \qquad \delta_q\langle q', u\rangle = \langle q'|q\rangle, \\ &\eta(0, u) = 0, \qquad \delta_q\theta = 0, \qquad \forall u \in Q', \qquad \forall q \in Q. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, легко убедиться, что операторы (4.103) удовлетворяют ККС (4.84a)–(4.84c). Из свойства унитарности (4.102) следуют правила сопряжения

$$\langle q, u\rangle^* = \langle q, u\rangle, \qquad \delta_q^* = -\delta_q - 2\eta(q, u), \tag{4.105}$$

так что операторы (4.103) являются симметрическими.

Вводят также операторы *рождения* $a^+(q)$ и *уничтожения* $a^-(q)$:

$$a^{\pm}(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\phi(q) \mp i\pi(q)\Big] = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\mp\delta_q \mp \eta(q, u) + \langle q, u\rangle\Big]. \tag{4.106}$$

Они подчиняются правилам сопряжения

$$(a^{\pm}(q))^* = a^{\mp}(q)$$

и коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &\Big[a^-(q), a^+(q')\Big] = \langle q|q'\rangle \mathbb{1}, \\ &\Big[a^+(q), a^+(q')\Big] = \Big[a^-(q), a^-(q')\Big] = 0. \end{aligned} \tag{4.107}$$

Операторы (4.103) алгебры ККС определены на пространстве E_∞ гладких функций из $L^2(Q', \mu)$, все производные которых содержатся в $L^2(Q', \mu)$, а операторы $\phi(q)$ — на

всем пространстве $L^2(Q', \mu)$. В частности, если Q конечномерно, E_∞ совпадает просто с множеством гладких функций из $L^2(Q', \mu)$ и плотно в $L^2(Q', \mu)$. На пространстве E_∞ реализуется также представление универсальной обертывающей алгебры $\overline{\mathcal{G}}(Q)$ алгебры Ли $\mathcal{G}(Q)$, которая, как и в случае конечномерных групп Ли, может быть наделена структурой топологической инволютивной алгебры. Представление этой алгебры в пространстве E_∞, вообще говоря, приводимо. Поэтому рассмотрим его векторное подпространство $E_\theta = \overline{\mathcal{G}}(Q)\theta \subset E_\infty$, где θ — тотализирующий вектор представления группы ККС в $L^2(Q', \mu)$. Представление алгебры ККС в E_θ алгебраически неприводимо, и, если θ' — другой тотализирующий вектор из $L^2(Q', \mu)$, ее представления в E_θ и $E_{\theta'}$ эквивалентны. Выберем для определенности $\theta(u) = 1$.

Замечание 4.6.3. В пространстве представления E_1 алгебры ККС вводят также *оператор полного числа частиц* N, удовлетворяющий соотношениям

$$\left[N, a^+(q)\right] = a^+(q), \qquad \left[N, a^-(q)\right] = -a^-(q). \tag{4.108}$$

Этими соотношениями оператор N определяется не однозначно, а с точностью до скалярного оператора $\lambda\mathbb{1}$. В частности, пусть $\{q^k\}$ — ортонормальный базис (сепарабельного) предгильбертова пространства Q. Тогда, как нетрудно проверить,

$$N = \sum_k a^+(q^k)a^-(q^k) \tag{4.109}$$

— оператор полного числа частиц. В любом другом ортонормальном базисе пространства Q он имеет тот же вид. В случае конечномерного пространства Q оператор N (4.109) является элементом универсальной обертывающей алгебры $\overline{\mathcal{G}}(Q)$ и хорошо определен. Если Q бесконечномерно, то оператор полного числа частиц может быть задан в пространстве представления E_1 алгебры ККС не всегда. Например, он определен всюду на E_1, если в E_1 существует какой-либо его собственный вектор ξ:

$$N\xi = \lambda\xi, \qquad |\lambda| < \infty.$$

□

Пусть теперь μ' (4.95) — другая, эквивалентная μ, положительная мера на Q' с полной массой 1. Мера μ' трансляционно квазиинвариантна:

$$d\mu'(u + u_q) = f^{-2}(u)a^2(q, u)f^2(u + u_q)\, d\mu'(u).$$

Тогда изоморфизм (4.96) соответствующих представлений T и T' ядерной подгруппы G_ϕ группы ККС расширяется до изоморфизма представлений всей группы ККС:

$$P'(q) = f^{-1}P(q)f : \rho(u) \mapsto f^{-1}(u)a(q, u)f(u + u_q)\rho(u + u_q).$$

Приведем теперь некоторые основные типы представлений ККС.

На пространстве Q', сопряженном ядерному пространству Q, условию трансляционной квазиинвариантности (4.99) удовлетворяет гауссова мера μ с преобразованием Фурье

$$Z(q) = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle q|q\rangle\right] \tag{4.110}$$

и формой ковариации

$$M(q) = \langle q|q\rangle \tag{4.111}$$

(см. Приложение А.4). В этом случае в выражении (4.99) находим

$$a^2(q, u) = Z(q)\exp\left[-\langle q, u\rangle\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle q|q\rangle - \langle q, u\rangle\right]. \tag{4.112}$$

Легко убедиться, что функция

$$a(q, u) = \exp\left[-\frac{1}{4}\langle q|q\rangle - \frac{1}{2}\langle q, u\rangle\right], \tag{4.113}$$

полученная из (4.112), удовлетворяет соотношениям (4.100).

Рассмотрим на пространстве Q' гауссову меру μ_K с формой ковариации

$$M_K(q) = M(K^{-1}q) = \left\langle K^{-1}q|K^{-1}q\right\rangle, \tag{4.114}$$

где K — ограниченный обратимый линейный оператор в гильбертовом пространстве $\tilde{Q}$ — пополнении Q по эрмитовой форме $\langle .|.\rangle$. Форма (4.114) также является невырожденной положительной эрмитовой формой на Q, непрерывной по каждому аргументу. Аналогично гауссовой мере μ с формой ковариации $M(q)$ (4.111), гауссова мера μ_K является квазиинвариантной относительно сдвигов на векторы u_q^K, $q \in Q$, такие, что

$$\langle q', u_q^K\rangle = \left\langle K^{-1}q'|K^{-1}q\right\rangle.$$

Однако, поскольку

$$u_q = u_{Sq}^K, \qquad S = KK^*,$$

гауссова мера μ_K квазиинвариантна и относительно трансляций на элементы u_q (4.98). Тогда получаем

$$d\mu_K(u + u_q) = d\mu_K\left(u + u_{Sq}^K\right) = a_K^2(q, u)\, d\mu_K(u),$$

где

$$a_K(q, u) = \exp\left[-\frac{1}{4}M_K(Sq) - \frac{1}{2}\langle Sq, u\rangle\right]. \tag{4.115}$$

Заметим, что оператор S эрмитов. В частности, при $S = \mathbb{1}$ выражение (4.115) сводится к выражению (4.113).

Построим теперь представление алгебры ККС $\mathcal{G}(Q)$, задаваемое производящей функцией

$$Z_K = \exp\left[-\frac{1}{2}M_K(q)\right]. \tag{4.116}$$

Подставив (4.115) в (4.104), найдем

$$\eta(q, u) = -\frac{1}{2}\langle Sq, u\rangle. \tag{4.117}$$

Тогда операторы канонических координат и импульсов (4.103) принимают вид

$$\phi(q) = \langle q, u\rangle, \tag{4.118a}$$

$$\pi(q) = -i\left(\delta_q - \frac{1}{2}\langle Sq, u\rangle\right). \tag{4.118b}$$

Соответственно операторы рождения и уничтожения (4.106) даются выражением

$$a^+(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\delta_q + \frac{1}{2}\langle Sq, u\rangle + \langle q, u\rangle\right], \tag{4.119a}$$

$$a^-(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\delta_q - \frac{1}{2}\langle Sq, u\rangle + \langle q, u\rangle\right]. \tag{4.119b}$$

Они действуют в пространстве $L^2(Q', \mu_K)$ и являются симметрическими относительно эрмитовой формы $\langle .|. \rangle_{\mu_K}$ на $L^2(Q', \mu_K)$ (см. (4.105)). Исходя из свойств гауссовых интегралов (см. Приложение А.4), находим среднее значения

$$\left\langle a^{\pm}(q)\theta|\theta\right\rangle_{\mu} = 0.$$

Пример 4.6.4. При $K = \sqrt{2}\cdot\mathbb{1}$, когда производящая функция (4.116) имеет вид

$$Z_{\Gamma}(q) = \exp\left[-\frac{1}{4}\langle q|q\rangle\right], \tag{4.120}$$

получаем *фоковское представление* (см. ниже) алгебры ККС:

$$\phi(q) = \langle q, u\rangle, \qquad \pi(q) = -i\big(\delta_q - \langle q, u\rangle\big), \tag{4.121}$$

$$a^+(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[-\delta_q + 2\langle q, u\rangle\big], \qquad a^-(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_q. \tag{4.122}$$

Оно характеризуется тем условием, что существует тотализирующий вектор θ такой, что

$$a^-(q)\theta = 0, \qquad \forall q \in Q. \tag{4.123}$$

В данном случае, когда операторы $a^-(q)$ даны выражением (4.119b), $\theta(u) = 1$. Другой эквивалентный характеристический признак фоковского представления состоит в том, что оператор полного числа частиц N в пространстве неприводимого представления алгебры ККС определен и имеет ограниченный снизу спектр. В фоковском представлении (4.122) минимальное собственное значение оператора полного числа частиц N (4.109) равно 0. Соответствующим собственным вектором является тотализирующий вектор $\theta(u) = 1$, т.е. $N\theta(u) = 0$. Если интерпретировать его как бесчастичное состояние, то согласно соотношениям (4.108) операторы $a^+(q)$, $a^-(q)$ — действительно операторы рождения и уничтожения. □

В общем случае представления ККС с производящей функцией $Z_K(q)$ (4.116), как это следует из выражения (4.119b), равенство (4.123) для операторов $a^-(q)$ не выполняется. Критерием того, что такое представление эквивалентно фоковскому представлению

с производящей функцией $Z_F(q)$, может служить условие, что оператор полного числа частиц

$$N = \sum_j a^+(q^j)a^-(q^j) = \sum_j \Big[-\delta_{q^j}\delta_{q^j} + S^j_k\langle q^k, u\rangle \partial_{q^j} + \tag{4.124}$$
$$+ \left(\delta_{km} - \frac{1}{4}S^j_k S^j_m \langle q^k, u\rangle\langle q^m, u\rangle\right) - \left(\delta_{jj} - \frac{1}{2}S^j_j\right)\Big],$$

где $\{q^k\}$ — ортонормальный базис Q и $S^i_k = S^k_i$, определен на E_1 и его спектр ограничен снизу. Как можно показать, для этого необходимо, чтобы оператор S являлся суммой оператора $2\cdot\mathbb{1}$ и ядерного оператора, т. е., в частности,

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}S\right) < \infty.$$

В то же время согласно Примеру А.6 это условие является также достаточным для эквивалентности меры μ_K и меры μ_F, приводящей к фоковскому представлению (4.121) алгебры ККС, т. е. для эквивалентности представления (4.118a)–(4.118b) фоковскому представлению.

Пример 4.6.5. Представление алгебры ККС с производящей функцией

$$Z(q) = \exp\left[-\frac{c^2}{4}\langle q|q\rangle\right], \qquad c^2 \neq 1,$$

не эквивалентно фоковскому. □

Замечание 4.6.6. Переход (неизоморфный) к фоковскому представлению всегда возможен с помощью *однородных преобразований Боголюбова*

$$b^+(q^j) = A^j_k a^+(q^k) + B^j_k a^-(q^k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\delta_{q^j} + 2\langle q^j, u\rangle\right), \tag{4.125a}$$

$$b^-(q^j) = C^j_k a^+(q^k) + D^j_k a^-(q^k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{q^j}, \tag{4.125b}$$

с коэффициентами

$$A^j_k = \frac{1}{2}\left(3\delta^j_k - \frac{1}{2}S^j_k\right), \qquad D^j_k = \frac{1}{2}\left(\delta^j_k + \frac{1}{2}S^j_k\right),$$
$$B^j_k = -C^j_k = \frac{1}{2}\left(\delta^j_k - \frac{1}{2}S^j_k\right).$$

Заметим, что операторы $a^\pm$ (4.119a)–(4.119b) и $b^\pm$ (4.125a)–(4.125b) записаны в разных гильбертовых пространствах функций на Q'. В частности, в отличие от $a^\pm$, операторы b^+ и b^- являются взаимно сопряженными относительно эрмитовой формы $\langle .|.\rangle_{\mu_F}$.

В общем случае однородные преобразования Боголюбова (4.125a)–(4.125b), где

$$\left(A^i_k B^j_m - A^j_k B^i_m\right)\delta^{km} = 0,$$
$$\left(C^i_k D^j_m - C^j_k D^i_m\right)\delta^{km} = 0,$$
$$\left(A^i_k D^j_m - B^i_k C^j_m\right)\delta^{km} = \delta^{ij},$$

являются автоморфизмом алгебры ККС, но необязательно осуществляют изоморфизм представлений. Например, если представления ККС рассматриваются в одном и том же гильбертовом пространстве, то имеем условие

$$A^i_j = D^{*i}_j, \qquad B^i_j = C^{*i}_j,$$

и представления являются эквивалентными, если

$$\mathrm{Tr}\, B^2 = B^i_j B^{*j}_i < \infty. \tag{4.126}$$

□

Замечание 4.6.7. Нефоковское представление (4.118a)–(4.118b) алгебры ККС (4.84a)–(4.84b) в гильбертовом пространстве $L^2(Q', \mu_K)$ является фоковским представлением

$$\phi_K(q) = \phi(q) = \langle q, u\rangle,$$
$$\pi_K(q) = \pi(S^{-1}q) = -i\left(\delta^K_q - \frac{1}{2}\langle q, u\rangle\right), \qquad \delta^K_q = \delta_{S^{-1}q},$$

алгебры ККС $\{\phi_K(q), \pi_K(q), I\}$, где

$$\left[\phi_K(q), \pi_K(q)\right] = i\langle K^{-1}q | K^{-1}q'\rangle I.$$

□

Рассмотрим также представления ККС, определяемые гауссовыми мерами с ненулевым средним.

Пусть μ — гауссова мера на Q' с преобразованием Фурье $Z(q)$. *Гауссовой мерой с ненулевым средним* называется мера

$$d\mu_\sigma = d\mu(u - \sigma), \qquad \sigma \in Q'. \tag{4.127}$$

Ее преобразование Фурье имеет вид

$$Z_\sigma(q) = \exp\left[i\langle q, \sigma\rangle\right] Z(q). \tag{4.128}$$

Мера (4.127) трансляционно квазиинвариантна:

$$d\mu_\sigma(u + u_q) = a^2_\sigma(q, u)\, d\mu_\sigma(u),$$
$$a_\sigma(q, u) = a(q, u - \sigma), \qquad \eta_\sigma(q, u) = \eta(q, u - \sigma).$$

Например, мера $\mu_{\mathrm{F},\sigma}$ определяет представление алгебры ККС операторами

$$a^+(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\delta_q + 2\langle q, u\rangle - \langle q, \sigma\rangle\right), \qquad a^-(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta_q + \langle q, \sigma\rangle\right), \tag{4.129}$$

которые обладают ненулевыми средними

$$\left\langle a^\pm(q)\theta | \theta\right\rangle_{\mu_{\mathrm{F}}} = \mp\langle q, \sigma\rangle.$$

Переход к фоковскому представлению осуществляется *неоднородными преобразованиями Боголюбова*

$$b^{\pm}(q) = a^{\pm}(q) \pm \langle q, \sigma \rangle.$$

Однако эти преобразования являются изоморфизмом представлений, только если $\sigma = u_{q'} \in Q \subset Q'$. В этом случае меры μ_{F} и $\mu_{\mathsf{F},\sigma}$ эквивалентны, и изоморфизм представления (4.129) и фоковского представления осуществляется оператором

$$\rho(u) \mapsto \exp\left[-\langle q', u\rangle\right]\rho(u + u_{q'}).$$

Когда $\sigma \notin Q \subset Q'$, такой оператор нельзя определить.

Теперь остановимся специально на системах с конечным числом степеней свободы, т. е., когда $Q = Q' = \mathbb{R}^n$. В этом случае группа ККС является локально компактной. Согласно теореме фон Неймана (см. ниже), все неприводимые представления ККС такой системы эквивалентны фоковскому представлению. Однако представляют интерес различные формы этого представления.

Пусть $Q = \mathbb{R}^n$, наделено евклидовой билинейной формой $\langle .|. \rangle$, ортонормальным базисом $\{q^k\}$, $k = 1, \ldots, n$, дуальным базисом $\{q_i\}$ и координатами (x^i) относительно дуального базиса. Это ядерное пространство, и $Q = \tilde{Q} = Q'$. Поскольку все гауссовы меры на $Q' = \mathbb{R}^n$ эквивалентны друг другу (а также эквивалентны мере Лебега $d^n x$), рассмотрим представление группы ККС, определяемое производящей функцией $Z_{\mathsf{F}}(q)$ (4.120). Оно реализуется в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_{\mathsf{F}})$, где

$$d\mu_{\mathsf{F}} = \pi^{-n/2} \exp\left[-\sum_i (x^i)^2\right] d^n x. \tag{4.130}$$

Соответствующее представление алгебры ККС (4.85) выполняется операторами

$$\phi(q^i) = x^i, \qquad \pi(q^i) = -i\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i\right), \tag{4.131}$$

$$a^+(q^i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial x^i} + 2x^i\right), \qquad a^-(q^i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{4.132}$$

определенными на подпространстве E_∞ гладких функций из $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_{\mathsf{F}})$, которое плотно в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_{\mathsf{F}})$. Представление (4.132) называется *представлением Шредингера*. Оно неприводимо. Базисными векторами этого представления служат функции

$$(m_1, \ldots, m_n) \stackrel{\text{def}}{=} (|m|!)^{-1/2} 2^{-|m|/2} \prod_{k=1}^{n} \left(a^+(q^k)\right)^{m_k} \cdot 1 = \tag{4.133}$$

$$= (|m|!)^{-1/2} 2^{-|m|/2} \prod_{k=1}^{n} H_{m_k}(x^k), \quad m_k = 0, 1, \ldots, \quad |m| = m_1 + \ldots + m_n,$$

где $H_{m_i}(x^i)$ — многочлены Эрмита. Напомним рекурентные формулы для этих многочленов

$$H_{k+1}(x) = \left(-\frac{\partial}{\partial x} + 2x\right) H_k(x), \qquad \frac{\partial}{\partial x} H_k(x) = 2k H_{k-1}(x).$$

В базисе (4.133) действие операторов (4.132) имеет вид

$$a^+(q^i)(m_1,\ldots,m_n)=\sqrt{|m|+1}(m_1,\ldots,m_i+1,\ldots,m_n), \tag{4.134a}$$

$$a^-(q^i)(m_1,\ldots,m_n)=\sqrt{|m|}(m_1,\ldots,m_i-1,\ldots,m_n). \tag{4.134b}$$

Выполнение алгебры ККС операторами (4.134a)–(4.134b) называется *представлением чисел заполнения*. Именно его обычно называют *фоковским представлением*. Оно реализуется в тензорном произведении

$$\overset{n}{\otimes} L^2\left(\mathbb{R},\mu_{\mathrm{F}}^1\right), \qquad d\mu_{\mathrm{F}}^1(x)=\pi^{-1/2}\exp\left[-x^2\right]\,dx,$$

которое плотно в $L^2(\mathbb{R}^n,\mu_{\mathrm{F}})$.

Замечание 4.6.8. Стандартное выражение для операторов ККС можно получить, если перейти от (4.131) к представлению

$$\begin{aligned}\phi(q^i)&=\exp\left[-\frac{1}{2}|x|^2\right]x^i\exp\left[\frac{1}{2}|x|^2\right]=x^i,\\ \pi(q^i)&=\exp\left[-\frac{1}{2}|x|^2\right]\left(-i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-x^i\right)\right)\exp\left[\frac{1}{2}|x|^2\right]=-i\frac{\partial}{\partial x^i}\end{aligned} \tag{4.135}$$

в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n,d^nx)$ квадратично интегрируемых функций на $\mathbb{R}^n$ относительно меры Лебега d^nx. □

Приведем теперь *теорему фон Неймана.*

Теорема 4.6.2. Всякое представление группы ККС $G(\mathbb{R}^n)$ для системы с конечным числом степеней свободы эквивалентно прямой сумме конечной или бесконечной кардинальности $\dim H$ ее представлений Шредингера в пространстве $H\otimes L^2(\mathbb{R}^n,\mu_{\mathrm{F}})$, где H — некоторое гильбертово пространство. □

В заключение рассмотрим представление ККС, записанных в форме (4.89) (см. Замечание 4.6.1). Для простоты ограничимся случаем одной степени свободы, когда $Z=\mathbb{C}$. Легко убедиться, что соответствующая группа ККС

$$W(z)W(z')=\exp\left[\frac{1}{4}(z\overline{z}'-\overline{z}z')\right]W(z+z') \tag{4.136}$$

осуществляется унитарными операторами

$$W(z):\rho(y)\mapsto\exp\left[-\frac{z\overline{z}}{4}+\frac{i}{\sqrt{2}}y\overline{z}\right]\rho\left(y+\frac{i}{\sqrt{2}}z\right) \tag{4.137}$$

в пространстве голоморфных функций $\rho(y)$ на $\mathbb{C}$, квадратично интегрируемых относительно *меры Баргмана*

$$d\mu(x)=\frac{i}{2\pi}\exp\left[-y\overline{y}\right]d\overline{y}\wedge dy$$

на $\mathbb{C}$. Соответствующая алгебра ККС реализуется в виде

$$W(z) = \exp\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\bar{z}a^+ + za^-\right)\right],$$
$$\left[a^-(z), a^+(z')\right] = z\bar{z}',$$
$$a^+ = y, \qquad a^- = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Тотализирующим вектором этого представления является функция $\rho(y) = 1$.

Другое представление ККС (4.136) можно получить, если использовать формулу (4.90), где операторы

$$T(p) = \exp\left[i\phi(p)\right] = \exp[ip\phi], \qquad P(q) = \exp\left[i\pi(q)\right] = \exp[iq\pi]$$

выбраны в представлении (4.135) на пространстве $L^2(\mathbb{R}, dx)$ квадратично интегрируемых функций на $\mathbb{R}$ относительно меры Лебега dx:

$$\phi = x, \qquad \pi = -i\frac{\partial}{\partial x}.$$

Получаем

$$W(p+iq) : \rho(x) \mapsto \exp\left[\frac{i}{2}pq + ipx\right]\rho(x+q). \tag{4.138}$$

Соответственно операторы рождения и уничтожения имеют вид

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial x} + x\right), \qquad a^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\right). \tag{4.139}$$

Представление (4.138) стандартно используется для задания системы когерентных состояний ККС [16]. Обозначим

$$\xi_0 = \pi^{-1/4}\exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] \in L^2(\mathbb{R}, dx), \qquad |\xi_0| = 1.$$

Всякому элементу $z = p + iq \in \mathbb{C}$ сопоставим функцию

$$\xi_z = W(z)\xi_0 = \pi^{1/4}\exp\left[\frac{i}{2}pq + ipx - \frac{1}{2}(x+q)^2\right]. \tag{4.140}$$

Нетрудно проверить, что элементы ξ_z нормированы и являются собственными векторами оператора уничтожения a^- (4.139):

$$a^-\xi_z = \frac{i}{\sqrt{2}}z\xi_z.$$

Покажем, что векторы ξ_z (4.140) пространства представления $L^2(\mathbb{R}, dx)$ образуют систему (обобщенных) когерентных состояний согласно Определению 4.26.

Векторы ξ_z параметризуются элементами пространства $\mathbb{C}$, которое является фактором группы ККС $G(\mathbb{R})$ по абелевой подгруппе $(0, 0, \lambda)$ умножений на комплексные числа λ, $|\lambda| = 1$. Это стационарная подгруппа H_{ξ_0} элемента ξ_0 (см. (4.21)). Группа ККС действует на $\mathbb{C}$ как группа трансляций, оставляя инвариантной меру Лебега

$$d\mu = \frac{1}{2\pi} dp \wedge dq$$

на $\mathbb{C}$. Векторам ξ_z соответствует выбор сечения

$$\sigma(p + iq) = (p, q, 0)$$

расслоения $G(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$. Наконец, элементы ξ_z образуют разложение единицы (4.33), а именно для произвольной функции $\eta(x) \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ получаем

$$\int \langle \eta(x) | \xi_z(x) \rangle \xi_z(y)\, d\mu = \\ = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \int \exp\left[ip(y - x) - \frac{1}{2}(x + q)^2 - \frac{1}{2}(y + q)^2 \right] \eta(x)\, dx\, dp\, dq = \eta(y).$$

В то же время элементы ξ_z, $z \in \mathbb{C}$, не являются взаимно ортогональными и образуют переполненную систему.

В заключение заметим, что, как и в случае локально компактной группы G, для группы ККС $G(Q)$ можно построить *C^*-алгебру ККС*, но не на базе пространства $L^1(G)$, а из функций, обращающихся в нуль всюду, кроме конечных подмножеств пространства Q [25].

§ 7. Протяженные системы

Мы приведем здесь методы описания так называемых *протяженных систем*, когда всякой точке или открытому подмножеству некоторого пространства сопоставляется алгебра наблюдаемых. Стандартным примером таких систем являются квантовые решетки.

Пусть A — C^*-алгебра и X — локально компактное топологическое пространство. Рассмотрим множество $A(X)$ функций $a(x)$ на X со значениями в A таких, что $\|a(x)\|_A$ стремится к нулю на бесконечности на X (т. е. при стремлении к бесконечно удаленной точке в пространстве, компактифицирующим X). Множество $A(X)$ наделено структурой инволютивной алгебры относительно операций поточечного умножения, сложения и инволюции. Определим на $A(X)$ норму, положив для каждого $a \in A(X)$

$$\|a\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} \|a(x)\|. \tag{4.141}$$

Она превращает $A(X)$ в C^*-алгебру, называемую *алгеброй C^*-функций.*

Замечание 4.7.1. Существует более общая конструкция *непрерывных полей C^*-алгебр* подобно полям гильбертовых пространств из Определения 2.3.1, где: Y — просто топологическое пространство, в условии (в) требование μ-измеримости заменено на требование непрерывности, а условие (г) формулируется следующим образом:

- пусть $\phi \in \prod E_y$ — векторное поле; если для каждого $y \in Y$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\phi' \in \Gamma$, что

$$\|\phi(y) - \phi'(y)\| \leqslant \varepsilon$$

в окрестности y, то $\phi \in \Gamma$ [10].

Эту конструкцию можно сформулировать в терминах *расслоений на C^*-алгебры*, когда каждой точке $x \in X$ соответствует некоторая C^*-алгебра A_x. Пусть X — топологическое пространство. Рассмотрим локально тривиальное расслоение на алгебры над X, типичным слоем которого является C^*-алгебра A. Обозначим его $\Pi \to X$. Рассмотрим семейство $A(X)$ ограниченных по норме непрерывных сечений $a(x)$ расслоения Π такое, что для всякого $x \in X$ семейство $\{a(x), a \in A(X)\}$ является тотальным и инвариантным относительно умножения и инволюции подмножеством A_x. Оно составляет непрерывное локально тривиальное поле C^*-алгебр над пространством X и может быть наделено структурой инволютивной алгебры с нормой (4.141), которая, вообще говоря, не будет полной. Для ее полноты, в частности, необходимо, чтобы X было полным равномерным пространством. Таковыми и являются, например, локально компактные пространства [4]. Пусть X — такое пространство и, как и раньше, $A(X)$ — подмножество сечений Π, стремящихся по норме к 0 на бесконечности. Тогда $A(X)$ с нормой (4.141) является C^*-алгеброй. При этом, если $\overline{X}$ — компактификация X, то существует вложение $A(X)$ на главный двусторонний плотный идеал в $A(\overline{X})$ [10]. Алгебра $A(X)$ содержит единицу, если алгебра A имеет единицу и X компактно. Заметим также, что алгебра A содержится в $A(X)$ только тогда, когда X компактно и расслоение $\Pi \to X$ тривиально. Мы ограничимся случаем только тривиальных расслоений на C^*-алгебры с типичным слоем A. □

Для каждого $x \in X$ соответствие $a \mapsto a(x)$ осуществляет морфизм C^*-алгебры $A(X)$ на C^*-алгебру A. Пусть π — некоторое представление A. Тогда соответствие $a \mapsto \pi(a(x))$ задает некоторое представление $\rho(\pi, x)$ алгебры $A(X)$. Если π — неприводимое представление алгебры A, то $\rho(\pi, x)$ — неприводимое представление алгебры $A(X)$. Причем для $x \neq x'$ неприводимые представления $\rho(\pi, x)$ и $\rho(\pi, x')$ не эквивалентны, даже если π — одно и то же представление A. Это обусловлено тем, что всегда существует непрерывная числовая функция f на X такая, что $f(x) = 1$ и $f(x') = 0$. Тогда все элементы алгебры $A(X)$ вида fa, $\pi(a)x \neq 0$, принадлежат ядру представления $\rho(\pi, x')$, но не содержатся в ядре представления $\rho(\pi, x)$.

Указанное свойство устанавливает взаимно однозначное соответствие, хотя и не гомеоморфизм, между спектром $\widehat{A(X)}$ алгебры C^*-функций $A(X)$ и множеством $X \times \hat{A}$, где $\hat{A}$ — спектр алгебры A. В частности, когда A — элементарная C^*-алгебра, т. е. ее спектр $\hat{A}$ состоит из одного элемента, тогда спектр $\widehat{A(X)}$ гомеоморфен пространству X. Таким образом, можно строить C^*-алгебры $A(X)$ с наперед заданным спектром. Следующая теорема показывает, насколько конструкция C^*-алгебр $A(X)$ является общей [10].

Теорема 4.7.1. Если A — элементарная C^*-алгебра, то алгебра C^*-функций $A(X)$ — CCR-алгебра, и обратно, всякая CCR-алгебра с отделимым спектром может быть представлена как алгебра, определяемая непрерывным (но не обязательно локально тривиальным) полем элементарных C^*-алгебр. □

Принимая во внимание биекцию $\widehat{A(X)} = X \times \hat{A}$, представления алгебры C^*-функций $A(X)$ можно искать в пространствах прямых интегралов (2.5) представлений алгебры A.

Пусть μ — некоторая положительная мера с полной массой 1 на локально компактном пространстве X и f — некоторая положительная форма на C^*-алгебре A. Тогда функция $x \mapsto f(a(x))$ является μ-интегрируемой для всякого элемента $a \in A(X)$, а интеграл

$$f(a) = \int f(a(x))\, d\mu(x), \qquad a \in A(X),$$

задает положительную форму на $A(X)$ и представление $\rho(\mu, f)$ алгебры $A(X)$ в гильбертовом интеграле

$$E = \int E_f\, d\mu(x),$$

если пространство E_f представления алгебры A, определяемого формой f, сепарабельно. В частности, если $\mu = \varepsilon_x$ — мера Дирака, то представление $\rho(\varepsilon_x, f)$ — это представление $\rho(\pi_f, x)$, где π_f — представление алгебры A, определяемое формой f.

Например, когда A — элементарная сепарабельная C^*-алгебра и топологическое пространство X сепарабельно, тогда алгебра $A(X)$ сепарабельная и всякое ее представление в сепарабельном гильбертовом пространстве может быть получено как гильбертова сумма (2.6) представлений $\rho(\mu_i, f)$ для некоторых мер μ_i, $i = 1, \ldots, \infty$ на X.

Замечание 4.7.2. Алгебры C^*-функций могут описывать, помимо протяженных систем, также снятие вырождения в квантовой системе. Пусть, например, ϕ_x, $x \in X$, — некоторое множество состояний на C^*-алгебре A, связанных с одним и тем же ее неприводимым представлением π, т. е. X — это подмножество проективного гильбертова пространства PE_π (см. § 2.7). Предположим, что X наделено той или иной локально компактной топологией. Это всегда может быть дискретная топология или индуцированная топология, если, например, $X \subset PE_\pi$ — орбита некоторой локально компактной группы унитарных операторов в E_π. Рассмотрим C^*-алгебру $A(X)$. Тогда состояния ϕ_x на A — это также состояния на $A(X)$ такие, что ϕ_x и $\phi_{x' \neq x}$ отвечают неэквивалентным неприводимым представлениям алгебры $A(X)$, которая тем самым снимает вырождение по состояниям ϕ_x, $x \in X$. □

Алгебры C^*-функций являются частным случаем так называемых квазилокальных алгебр, описывающих протяженные системы [3, 25].

Пусть X — локально компактное счетное в бесконечности топологическое пространство, и всякому его открытому относительно компактному подмножеству $U \subset X$ сопоставлена C^*-алгебра A_U с единицей, называемая *локальной* C^*-алгеброй. Множество всех таких подмножеств U является сетью относительно включения. Предположим, что выполняется так называемое условие *изотонности*, т. е. для всякой пары $(U_i \subset U_j)$ существует вложение

$$r_{ij} : A_{U_i} \to A_{U_j}$$

такое, что $r_{ij}(\mathbb{1}_i) = \mathbb{1}_j$ и $r_{ij} \circ r_{ki} = r_{kj}$ для всех $U_k \subset U_i \subset U_j$.

Определение 4.7.2. *Квазилокальная алгебра* A_X определяется как индуктивный предел

$$A_X = \overline{\bigcup_U r_U(A_U)} \tag{4.142}$$

семейства C^*-алгебр $\{A_U\}$. Таким пределом называется C^*-алгебра A_X и семейство вложений $\{r_U : A_U \to A_X\}$ такие, что $r_{U_i} = r_{U_j} \circ r_{ij}$ для всех пар $U_i \subset U_j$ открытых локально компактных подмножеств X. Индуктивный предел (4.142) существует и является C^*-алгеброй с единицей. □

Пример 4.7.3. Рассмотрим описанную выше алгебру C^*-функций $A(X)$ на локально компактном пространстве X. Сопоставим всякому открытому относительно компактному подмножеству $U \subset X$ алгебру $\tilde{A}(U)$, получаемую присоединением единицы (т.е. характеристической функции множества U) к подалгебре $A(U)$ C^*-алгебры $A(X)$, состоящей из всех C^*-функций, носитель которых содержится в U. Для всякой пары $U_i \subset U_j$ существует естественное вложение $A(U_i) \to A(U_j)$, которое расширяется до вложения $\tilde{A}(U_i) \to \tilde{A}(U_j)$ отображением $\mathbb{1}_i \to \mathbb{1}_j$. Индуктивным пределом этих алгебр является алгебра $\tilde{A}(X)$, получаемая из $A(X)$ присоединением единицы. □

Для квазилокальных алгебр часто требуется выполнение условия *локальной коммутативности*. Оно состоит в следующем. Пусть $U_i \cap U_j = \varnothing$, тогда любые элементы $a_i \in \tau_{U_i}(A_{U_i})$ и $a_j \in \tau_{U_j}(A_{U_j})$ коммутируют между собой. В приведенном выше примере алгебр C^*-функций это условие выполняется автоматически, поскольку поточечное умножение C^*-функций, имеющих непересекающиеся носители, равно нулю.

Остановимся на важном примере квазилокальных алгебр, описывающих *квантовые распределения*, частным случаем которых являются *квантовые решетки* (т.е. счетные квантовые распределения).

Пусть Q — некоторое множество, наделенное дискретной топологией, и пусть каждому элементу $q \in Q$ сопоставлена C^*-алгебра A_q с единицей. Открытые относительно компактные подмножества Q — это всевозможные конечные наборы элементов из Q. Всякому такому поджмножеству U сопоставим следующим образом C^*-алгебру A_U.

Построим инволютивную алгебру

$$\bigotimes_{q \in U} A_q \tag{4.143}$$

и снабдим ее нормой как операторную алгебру, действующую в тензорном произведении гильбертовых пространств

$$\bigotimes_{q \in U} H_q,$$

где H_q — пространство точного представления C^*-алгебры A_q. При этом

$$\| \bigotimes_{q \in U} a_q \| \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{q \in U} \|a_q\|.$$

Алгебра A_U — пополнение алгебры (4.143) по этой норме — является C^*-алгеброй. Она называется *тензорным произведением* C^*-алгебр. Сохраним за ней обозначение (4.143). Пусть теперь $U_i \subset U_j$. Введем отображение

$$\tau_{ij} \left(\bigotimes_{q \in U_i} A_q \right) \to \left(\bigotimes_{q \in U_j} A_q \right) \otimes \left(\bigotimes_{q \in U_j \setminus U_i} \mathbb{1}_q \right),$$

продолжив его по непрерывности до вложения $A_{U_i} \to A_{U_j}$. Тогда семейство $\{A_U\}$ имеет индуктивный предел A_Q, который обозначим

$$A_Q = \bigotimes_{q \in Q} A_q. \tag{4.144}$$

Представления квазилокальной алгебры A_Q могут быть реализованы в бесконечном тензорном произведении гильбертовых пространств E_q представлений C^*-алгебр A_q. Обобщая конструкцию конечного тензорного произведения гильбертовых пространств (§ 1.4), оно определяется следующим образом.

Обозначим E векторное пространство, получаемое при факторизации векторного пространства всех формальных линейных комбинаций семейств $\{x_q\}$, $x_q \in E_q$, $q \in Q$, по векторному подпространству, порожденному элементами вида:

- $\{x_q\} + \{y_q\} - \{z_q\}$, где $x_i + y_i = z_i$ для какого-либо одного значения i индекса q из Q и $x_q = y_q = z_q$ при всех $q \neq i$;
- $\{x_q\} - \lambda\{y_q\}$, где $x_i = \lambda y_i$ для какого-либо одного значения i индекса q из Q и $x_q = y_q$ при всех $q \neq i$.

Для некоторого фиксированного семейства $\{v_q : v_q \in E_q, q \in Q, |v_q| = 1\}$ обозначим

$$\bigotimes_{q\in Q}^{v} E_q \tag{4.145}$$

подпространство в E, полученное конечными линейными комбинациями всех элементов вида $\{x_q, q \in Q$, где $x_q = v_q$ для всех элементов $q \in Q$, кроме конечного числа$\}$. Снабдим пространство (4.145) скалярным произведением

$$\left\langle \bigotimes_q x_q \middle| \bigotimes_q y_q \right\rangle = \prod_q \langle x_q | y_q \rangle_{E_q},$$

которое превращает его в предгильбертово пространство. Пополнение E^v этого пространства называется *неполным тензорным произведением* гильбертовых пространств E_q относительно задающего семейства $\{v_q\}$; сохраним за ним обозначение (4.145).

Пусть на каждой алгебре A_q задано состояние ϕ_q, определяющее представление π_q алгебры A_q в гильбертовом пространстве E_q с нормированным на 1 тотализирующим вектором θ_q. Образуем *неполное тензорное произведение* гильбертовых пространств

$$E^\theta = \bigotimes_{q\in Q}^{\theta} E_q \tag{4.146}$$

относительно семейства $\{\theta_q, q \in Q\}$. Для каждого семейства $\{a_q : a_q \in A_q,\ a_q = \mathbb{1}_q$ для всех $q \in Q$, кроме конечного числа$\}$ и для каждого семейства $\{x_q : x_q \in E_q,\ x_q = \theta_q$ для всех $q \in Q$, кроме конечного числа$\}$ образуем отображение

$$\pi(\bigotimes_q a_q)(\bigotimes_q x_q) = \bigotimes_q \pi_q(a_q)x_q,$$

которое допускает расширение до представления квазилокальной алгебры $A_Q = \bigotimes_q A_q$ в E^θ (4.146) с тотализирующим вектором $\theta = \bigotimes_q \theta_q$. Обозначим его

$$\pi^\theta = \bigotimes^{\theta} \pi_q. \tag{4.147}$$

Представление π^θ и тотализирующий вектор θ задают состояние ϕ на алгебре A_Q такое, что

$$\phi(\bigotimes_q a_q) = \prod_q \phi_q(a_q) \tag{4.148}$$

для любого семейства $\{a_q : a_q \in A_q,\ a_q = \mathbb{1}_q$ для всех $q \in Q$, кроме конечного числа$\}$. Причем состояние ϕ (4.148) является чистым тогда и только тогда, когда все состояния ϕ_q чистые.

Построенное представление π^θ квазилокальной алгебры A_Q зависит, очевидно, от выбора задающего семейства элементов $\{\theta_q, q \in Q\}$. Встает вопрос — как связаны между собой такие представления для различных задающих семейств $\{\theta_q\}$. Справедливо следующее утверждение [25].

Предложение 4.7.3.. Пусть $\{\pi_q, q \in Q\}$ — одно и то же семейство неприводимых представлений C^*-алгебр A_q в пространствах E_q, и пусть $\{\theta_q, q \in Q\}$ и $\{\varepsilon_q, q \in Q\}$ — два задающих семейства тотализирующих векторов для этих представлений. Представления π^θ и π^ε эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\sum_{q\in Q} \Big| |\langle \varepsilon_q | \theta_q \rangle| - 1 \Big| < \infty.$$

□

Отсюда, в частности, следует, что представления квазилокальной алгебры A_Q в гильбертовых пространствах E^θ и E^ε, ассоциированных с задающими семействами $\{\theta_q, q \in Q\}$ и $\{\varepsilon_q, q \in Q\}$, не эквивалентны, когда векторы θ_q и ε_q ортогональны в E_q для всех $q \in Q$, кроме конечного числа.

В следующем параграфе мы используем приведенную конструкцию квазилокальной алгебры A_Q (4.144) для описания спиновой решетки.

§ 8. Канонические антикоммутационные соотношения

Проблема канонических антикоммутационных соотношений (КАС) гораздо проще проблемы ККС [25, 33]. Они реализуются ограниченными операторами в гильбертовых пространствах. Более того, для систем с конечным числом степеней свободы пространства неприводимых представлений КАС конечномерны.

Определение 4.8.1. Пусть Q — сепарабельное предгильбертово пространство с эрмитовой формой $\langle .|. \rangle$. *Алгеброй КАС* $\mathcal{A}(Q)$ называется C^*-алгебра с единицей, порождаемая элементами $a^+(q)$, $a^-(q)$, $q \in Q$, подчиняющимися операции инволюции $(a^\pm)^* = a^\mp$ и каноническим антикоммутационным соотношениям (*КАС*)

$$\begin{aligned} \left[a^-(q), a^-(q')\right]_+ &= \left[a^+(q), a^+(q')\right]_+ = 0, \\ \left[a^-(q), a^+(q')\right]_+ &= \langle q|q' \rangle \mathbb{1}. \end{aligned} \tag{4.149}$$

При этом элементы $a^-(q)$ линейны, а $a^+(q)$ антилинейны по q, т. е.

$$\begin{aligned} a^-(\lambda q + q') &= \lambda a^-(q) + a^-(q'), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \\ a^+(\lambda q + q') &= \overline{\lambda} a^+(q) + a^+(q'), \end{aligned}$$

и $\|a^\pm(q)\| = \|q\|_Q$. □

Замечание 4.8.1. Пусть $\{q^k\}$ — ортонормальный базис предгильбертова пространства Q. Используя условие линейности и вводя обозначения $a_i^{\pm} = a^{\pm}(q^i)$, алгебру КАС можно однозначно задать соотношениями

$$[a_i^-, a_k^-]_+ = [a_i^+, a_k^+]_+ = 0, \qquad [a_i^-, a_k^+]_+ = \delta_{ik}\mathbb{1}. \tag{4.150}$$

□

То, что алгебры КАС являются C^*-алгебрами, позволяет применить к ним стандартную технику C^*-алгебр и, в частности, конструкцию ГНС. Более того, можно убедиться, что всякая алгебра КАС является простой. Поэтому все ее представления точные. Если пространство Q конечномерно то, как и в случае алгебр ККС, все неприводимые представления алгебры КАС $\mathscr{A}(Q)$ эквивалентны ее фоковскому представлению (см. ниже Пример 4.8.2).

Приведем следующую полезную реализацию КАС (4.150). Пусть $\mathcal{M}$ обозначает C^*-алгебру комплексных 2×2-матриц, порождаемую матрицами Паули

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и единичной матрицей $\sigma^0 = \mathbb{1}$. Рассмотрим счетное тензорное произведение (4.144) экземпляров $\mathcal{M}_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, алгебры $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}(\mathbb{Z}_+) = \bigotimes_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{M}_k. \tag{4.151}$$

Существует каноническое вложение алгебры КАС $\mathscr{A}(Q)$ (4.150) в C^*-алгебру $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_+)$ (4.151) такое, что

$$a_k^- = \frac{1}{2}\sigma_1^3 \ldots \sigma_{k-1}^3 \left(\sigma_k^1 + i\sigma_k^2\right),$$
$$a_k^+ = \frac{1}{2}\sigma_1^3 \ldots \sigma_{k-1}^3 \left(\sigma_k^1 - i\sigma_k^2\right).$$

Следующая теорема позволяет во многих случаях отождествлять алгебру КАС $\mathscr{A}(Q)$ с образом этого вложения в $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_+)$.

Теорема 4.8.2. Для любого представления π C^*-алгебры $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_+)$ определим представление π^o алгебры КАС $\mathscr{A}(Q)$ к к сужение π на $\mathscr{A}(Q) \subset \mathcal{M}(\mathbb{Z}_+)$. Тогда:

- $\pi \to \pi^o$ является биекцией множества всех представлений алгебры $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_+)$ на множество всех представлений алгебры КАС $\mathscr{A}(Q)$;
- π — циклическое (соотв. неприводимое) представление тогда и только тогда, когда представление π^o — циклическое (соотв. неприводимое);
- два представления π_1 и π_2 алгебры $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_+)$ эквивалентны (соотв. квазиэквивалентны), только если соответствующие представления π_1^o и π_2^o алгебры $\mathscr{A}(Q)$ эквивалентны (соотв. квазиэквивалентны).

□

Таким образом, можно строить представления алгебры КАС $\mathscr{A}(Q)$ (4.150) как представления квазилокальной алгебры $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_+)$ (4.151). Для этого заметим, что алгебра $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_+)$ — это C^*-алгебра одномерной *спиновой решетки* $\mathbb{Z}_+$, в каждом узле $k \in \mathbb{Z}_+$ которой находится частица спина 1/2, описываемая алгеброй наблюдаемых $\mathcal{M}_k$. Всякое ее неприводимое представление типа π^θ (4.147) характеризуется определенной задающей последовательностью $(s_1, s_2, \ldots)$ чисел заполнения $|s_k| \leqslant 1$ — средних значений операторов σ_q^3. Оно реализуется в гильбертовом пространстве E^θ (4.146), порождаемом последовательностями чисел заполнения $(s_1', s_2', \ldots)$, отличающихся от задающей последовательности $(s_1, s_2, \ldots)$ не более, чем в конечном числе узлов решетки. Задающие последовательности чисел заполнения (s_k) и $(\tilde{s}_k)$, отличающиеся друг от друга в бесконечном числе узлов решетки $\mathbb{Z}_+$, согласно Предложению 4.7.3 соответствуют неэквивалентным представлениям КАС, если ряд

$$\sum_k \left(1 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+s_k)(1+\tilde{s}_k)} + \sqrt{(1-s_k)(1-\tilde{s}_k)}\right]\right) \tag{4.152}$$

расходится.

Пример 4.8.2. Неприводимое представление алгебры КАС с задающей последовательностью чисел заполнения $(1, 1, \ldots)$ (т. е. все спины ориентированы вверх), называется *фоковским*. Оно характеризуется тем, что

$$a^-(q)(1, 1, \ldots) = 0, \qquad \forall q \in Q.$$

Ясно, что в случае конечного числа степеней свободы все неприводимые представления алгебры КАС эквивалентны фоковскому представлению. □

Замечание 4.8.3. Отметим, что для описания спиновых решеток и, следовательно, представлений алгебр КАС может быть использован аппарат группоидов [59]. Пусть на всем множестве S последовательностей чисел заполнения $s = (s_1, s_2, \ldots)$ спиновой решетки $\mathbb{Z}_+$ задано отношение эквивалентности R такое, что $s \sim s'$, если эти последовательности отличаются только конечным числом членов. Тогда его график $R \subset S \times S$ является главным группоидом (см. Пример 3.6.2). □

§ 9. Квантовые группы

Мы ограничимся здесь основными алгебраическими понятиями из теории квантовых групп (см. [34, 35, 40, 65]), оставляя для следующего тома вопросы дифференциального исчисления и дифференциальной (некоммутативной) геометрии на квантовых группах [70]. Квантовые группы дают пример деформационного квантования, когда модифицируются коммутационные соотношения алгебр Ли, алгебр Пуассона и т. д. Квантовые группы и квантовые алгебры Ли являются частным случаем алгебр Хопфа. Поэтому начнем с определения абстрактной алгебры Хопфа.

Пусть $\mathscr{A}$ — ассоциативная алгебра с единицей $\mathbb{1}$ над $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), операцию произведения в которой обозначим

$$m(a \otimes b) \mapsto ab, \qquad a, b \in \mathscr{A}.$$

Отметим, что тензорное произведение $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ также является ассоциативной алгеброй с операциями

$$(a \otimes b) \otimes (a' \otimes b') \mapsto (aa') \otimes (bb'),$$
$$\lambda(a \otimes b) = (\lambda a) \otimes b = a \otimes (\lambda b), \qquad a, b \in \mathscr{A}.$$

Коалгеброй называется векторное пространство $\mathscr{A}$, наделенное линейными отображениями:

- *копроизведением* $\Delta : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$;
- и *коединицей* $\epsilon : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$,

которые удовлетворяют соотношениям

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta(a) = (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta(a),$$
$$(\epsilon \otimes \mathrm{Id})\Delta(a) = (\mathrm{Id} \otimes \epsilon)\Delta(a) = a, \qquad a \in \mathscr{A}.$$

Вводят обозначения

$$\Delta(a) = \sum a^i_{(1)} \otimes a^i_{(2)}.$$

Биалгеброй $(\mathscr{A}, m, \Delta, \epsilon)$ именуется ассоциативная алгебра $\mathscr{A}$ с единицей, которая одновременно является коалгеброй, так что

$$\Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}, \qquad \epsilon(\mathbb{1}) = 1.$$

Определение 4.9.1. *Алгебра Хопфа* $(\mathscr{A}, m, \Delta, \epsilon, S)$ — это биалгебра $\mathscr{A}$, наделенная обратимым линейным отображением $S : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, называемым *антиобратным* и таким, что

$$m\big((S \otimes \mathrm{Id})\Delta(a)\big) = m\big((\mathrm{Id} \otimes S)\Delta(a)\big) = \epsilon(a)\mathbb{1}.$$

Отсюда, в частности, следует, что антиобратное отображение S является антиморфизмом, т. е. $S(ab) = S(b)S(a)$, $a, b \in \mathscr{A}$, и $S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. □

Пусть $\mathscr{A}$ — инволютивная ассоциативная алгебра с операцией инволюции $a \mapsto a^*$. Алгебра Хопфа $(\mathscr{A}, m, \Delta, \epsilon, S)$ называется *инволютивной*, если

$$\Delta(a^*) = \sum a^{*i}_{(1)} \otimes a^{*i}_{(2)},$$
$$\epsilon(a^*) = \overline{\epsilon(a)},$$
$$\big(S(a^*)\big)^* = S^{-1}(a).$$

Алгебра Хопфа считается *кокоммутативной*, когда $\Delta = P \circ \Delta$, где P — операция перестановки $a \otimes b \mapsto b \otimes a$. Если $(\mathscr{A}, m, \Delta, \epsilon, S)$ — алгебра Хопфа, то

$$\big(\mathscr{A}, m, \Delta' = P \circ \Delta, \epsilon, S' = S^{-1}\big)$$

— тоже алгебра Хопфа.

Алгебра Хопфа $\mathscr{A}$ называется *квазитриангулярной*, если задан обратимый элемент $\mathcal{R} \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, представимый некоторой суммой $\mathcal{R} = r_i \otimes r^i$, который подчиняется соотношениям

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}, \tag{4.153a}$$

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}, \tag{4.153b}$$

$$(P \circ \Delta)(a) = \mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1}, \qquad a \in \mathscr{A}, \tag{4.153c}$$

где

$$\mathcal{R}_{12} \stackrel{\text{def}}{=} r_k \otimes r^k \otimes \mathbb{1},$$
$$\mathcal{R}_{13} \stackrel{\text{def}}{=} r_k \otimes \mathbb{1} \otimes r^k,$$
$$\mathcal{R}_{23} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1} \otimes r_k \otimes r^k.$$

Элемент $\mathcal{R}$ называется *универсальной R-матрицей* алгебры Хопфа $\mathscr{A}$. Она удовлетворяет *квантовому уравнению Янга—Бахтера*

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}. \tag{4.154}$$

Пример 4.9.1. Пусть $\mathcal{G}$ — конечномерная алгебра Ли с базисом $\{e_k\}$. Ее универсальная обертывающая алгебра $\overline{\mathcal{G}}$ может быть наделена структурой кокоммутативной квазитриангулярной алгебры Хопфа так, что:

$$\Delta(e_k) = e_k \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes e_k,$$
$$\epsilon(e_k) = 0,$$
$$S(e_k) = -e_k,$$
$$\mathcal{R} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}.$$

□

Говорят, что инволютивная алгебра Хопфа $(\mathscr{A}', m', \Delta', \epsilon', S')$ дуальна инволютивной алгебре Хопфа $(\mathscr{A}, m, \Delta, \epsilon, S)$, если существует невырожденное внутреннее произведение

$$\langle .,. \rangle : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}' \to \mathbb{C}$$

такое, что для любых $a, b \in \mathscr{A}$ и $a', b' \in \mathscr{A}'$:

$$\langle ab, a' \rangle = \big\langle a \otimes b, \Delta(a') \big\rangle, \qquad \big\langle \Delta(a), a' \otimes b' \big\rangle = \langle a, a'b' \rangle, \tag{4.155a}$$

$$\langle \mathbb{1}, a' \rangle = \epsilon'(a'), \qquad \epsilon(a) = \langle a, \mathbb{1} \rangle, \tag{4.155b}$$

$$\big\langle S(a), a' \big\rangle = \big\langle a, S'(a') \big\rangle, \tag{4.155c}$$

$$\langle a^*, a' \rangle = \big\langle a, \big(S'(a')\big)^* \big\rangle. \tag{4.155d}$$

Эти соотношения достаточны, чтобы, имея алгебру Хопфа $\mathscr{A}$, построить дуальную ей алгебру Хопфа $\mathscr{A}'$.

В частности, пусть $\mathcal{U}$ — алгебра Хопфа и $\rho(\mathcal{U})$ — ее *полное* представление комплексными $N \times N$ матрицами, т.е. всякий ненулевой элемент $u \in \mathcal{U}$ выполняется

ненулевой матрицей $\rho(u)$, и для всякой пары индексов $i, j = 1, \ldots, N$ существует такой элемент $u \in \mathcal{U}$, что $\rho^i{}_j(u) \neq 0$. Такое представление позволяет построить новую алгебру Хопфа $\mathscr{A}$, дуальную $\mathcal{U}$. Она порождается N^2 элементами $A^i{}_j$ такими, что

$$\langle u, A^i{}_j \rangle = \rho^i{}_j(u), \qquad \forall u \in \mathcal{U}. \tag{4.156}$$

Поскольку представление ρ полное, внутреннее произведение (4.156) невырождено, и элементы $A^i{}_j \in \mathscr{A}$ определяются однозначно. Удобно считать, что они образуют $N \times N$ матрицу, но это не числовая матрица, т. е. $A^i{}_j A^k{}_r \neq A^k{}_r A^i{}_j$. Произведение элементов $A^i{}_j$ алгебры Хопфа $\mathscr{A}$ согласно условию дуальности (4.155a) определяется копроизведением $\Delta_{\mathcal{U}}$ в алгебре Хопфа $\mathcal{U}$. Условия дуальности (4.155a)–(4.155d) приводят к следующим операциям в алгебре Хопфа $\mathscr{A}$:

$$\Delta(A^i_j) = A^i{}_k \otimes A^k{}_j, \qquad \epsilon(A^i{}_j) = \delta^i_j, \qquad S(A^i{}_j) = (A^{-1})^i{}_j. \tag{4.157}$$

Если алгебра Хопфа $\mathcal{U}$ квазитриангулярна с универсальной R-матрицей $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$, тогда, используя ее свойство (4.153c), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \mathcal{R}_{\mathcal{U}} \Delta_{\mathcal{U}}(u) - P \circ \Delta_{\mathcal{U}} \mathcal{R}_{\mathcal{U}}, A^i{}_k \otimes A^j{}_l \right\rangle = \\ &= \left\langle u, R^{ij}{}_{mn} A^m{}_k A^n{}_l - A^j{}_n A^i{}_m R^{mn}{}_{kl} \right\rangle, \qquad \forall u \in \mathcal{U}, \end{aligned} \tag{4.158}$$

где

$$R^{ij}{}_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \mathcal{R}_{\mathcal{U}}, A^i{}_k \otimes A^i{}_l \right\rangle = (\rho \otimes \rho)^{ij}{}_{kl}(\mathcal{R}) \tag{4.159}$$

можно рассматривать как компоненты числовой $N^2 \times N^2$ матрицы R. Пусть $A \cdot A$ обозначает $N^2 \times N^2$ матрицу с компонентами

$$(A \cdot A)^{ij}{}_{kl} = A^i{}_k A^j{}_l$$

и $P(A \cdot A)$ — матрицу с компонентами

$$(P(A \cdot A))^{ij}{}_{kl} = A^j{}_l A^i{}_k.$$

Тогда соотношение (4.158) можно записать в компактном виде

$$R(A \cdot A) = P(A \cdot A)R. \tag{4.160}$$

Матрица R удовлетворяет *уравнению Янга—Бахтера*

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}, \tag{4.161}$$

где $R_{\alpha\beta} = (\rho \otimes \rho \otimes \rho)(\mathcal{R})$ — $N^3 \times N^3$ матрицы с коэффициентами

$$\begin{aligned} (R_{12})^{ijk}{}_{lmn} &= R^{ij}{}_{lm} \delta^k_n, \\ (R_{13})^{ijk}{}_{lmn} &= R^{ik}{}_{ln} \delta^j_m, \\ (R_{23})^{ijk}{}_{lmn} &= R^{jk}{}_{mn} \delta^i_l. \end{aligned} \tag{4.162}$$

Уравнение (4.161) непосредственно следует из квантового уравнения Янга—Бахтера (4.154), так как

$$R_{12}R_{13}R_{23} = (\rho \otimes \rho \otimes \rho)(\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}).$$

Определение 4.9.2. Алгебра Хопфа $\mathcal{A}$, которая дуальна некоторой квазитриангулярной алгебре Хопфа, называется *квантовой группой*. □

Таким образом, квантовая группа является алгеброй Хопфа, а не истинной группой или полугруппой. Смысл этого термина состоит в том, что квантовая группа порождается элементами, которые образуют $N \times N$ матрицу с нечисловыми компонентами. Часто квантовую группу определяют именно как алгебру Хопфа, порождаемую N^2 элементами $A^i{}_j$ так, что выполняются соотношения (4.157) и (4.160), где R удовлетворяет уравнению Янга—Бахтера (4.161). В широком смысле под квантовой группой понимают всякую некоммутативную алгебру Хопфа [34]. Например, алгебра Хопфа из Примера 4.9.1 не является квантовой группой даже в широком смысле. Она именуется *классической алгеброй Хопфа* алгебры Ли $\mathcal{G}$.

Пример 4.9.2. Простейшим примером квантовой группы (в узком смысле Определения 4.9.2) является деформация группы $GL(2)$, обозначаемая $GL_q(2)$, где $q \in \mathbb{R}_+$. Эта алгебра Хопфа порождается четырьмя образующими элементами a, b, c, d, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &ab = qba, \quad && ac = qca, \quad && ad - da = \lambda bc, \quad && \lambda = q - q^{-1}, \\ &bc = cb, && bd = qdb, && cd = qdc. \end{aligned} \tag{4.163}$$

Эти образующие элементы можно представить как компоненты матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{4.164}$$

Тогда коммутационные соотношения (4.163) получаются из условия (4.160), где

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \tag{4.165}$$

Соответствующие соотношения (4.157) имеют вид

$$\begin{aligned} &\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c, && \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d, \\ &\Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, && \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d, \\ &\epsilon(a) = \epsilon(d) = 1, && \epsilon(b) = \epsilon(c) = 0, \\ &S(a) = (\det_q A)^{-1} d, && S(b) = -q^{-1}(\det_q A)^{-1} b, \\ &S(c) = -q(\det_q A)^{-1} c, && S(d) = (\det_q A)^{-1} a, \end{aligned}$$

где

$$\det_q A \stackrel{\text{def}}{=} ad - qbc$$

называется *квантовым детерминантом* матрицы A (4.164). Он принадлежит центру алгебры $GL_q(2)$, т. е. коммутирует со всеми порождающими ее элементами. В «классическом пределе» $q \to 1$ матрица A становится числовой и квантовая группа $GL_q(2)$ сводится к матричной группе $GL(2)$. □

Существуют разные методы построения квантовых (в широком смысле) групп.

Например, пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Хопфа с генераторами $\{a^i\}$ и $\mathcal{B}$ — дуальная ей алгебра Хопфа относительно некоторого внутреннего произведения $\langle .,. \rangle$ с генераторами $\{b_i\}$. Тогда существует единственная алгебра Хопфа $\mathcal{D}$ такая, что

- $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются подалгебрами $\mathcal{D}$;
- $\mathcal{D}$ порождается элементами вида $a^i b_j$;
- $$b_j a^i = \sum \left\langle a^{i(1)}, S_{\mathcal{B}}(b_{j(1)}) \right\rangle \left\langle a^{i(3)}, b_{j(3)} \right\rangle a^{i(2)} b_{j(2)},$$
  где использованы обозначения
  $$(\Delta_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{Id})\Delta_{\mathcal{A}}(a^i) = \sum a^{i(1)} \otimes a^{i(2)} \otimes a^{i(3)},$$
  $$(\Delta_{\mathcal{B}} \otimes \mathrm{Id})\Delta_{\mathcal{B}}(b_j) = \sum b_{j(1)} \otimes b_{j(2)} \otimes b_{j(3)}.$$

Она называется *квантовым удвоением* алгебры Хопфа $\mathcal{A}$. Этот прием используется, в частности, при квантовании простых комплексных алгебр Ли [34]. Мы ограничимся здесь простейшим примером квантования $U_q(su(2))$ алгебры Ли $su(2)$.

Пример 4.9.3. Выберем базис Вейля $(X_\pm, H)$ алгебры Ли $su(2)$ с коммутационными соотношениями

$$[H, X_\pm] = \pm 2X_\pm, \qquad [X_+, X_-] = H. \tag{4.166}$$

Эта алгебра Ли имеет две подалгебры (X_+, H) и (X_+, H). Проводится их раздельное квантование $\mathcal{A}_+$ и $\mathcal{A}_-$, и алгебра Хопфа $U_q(su(2))$ строится как квантовое удвоение $\mathcal{D}$ алгебр Хопфа $\mathcal{A}_+$ и $\mathcal{A}_-$ относительно некоторого внутреннего произведения $\langle .,. \rangle$. В результате получаем, что алгебра $U_q(su(2))$ — это инволютивная квазитриангулярная алгебра Хопфа, порождаемая элементами X_+, X_- и H по модулю коммутационных соотношений

$$[H, X_\pm] = \pm 2X_\pm, \qquad [X_+, X_-] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}, \qquad q \in \mathbb{R}_+. \tag{4.167}$$

Соответствующие операции копроизведения, коединицы, антиобратного отображения и инволюции имеют вид

$$\begin{aligned}
&\Delta(H) = H \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H, \quad \Delta(X_\pm) = X_\pm \otimes q^{H/2} + q^{-H/2} \otimes X_\pm, \\
&\epsilon(H) = \epsilon(X_\pm) = 0, \\
&S(H) = -H, \qquad S(X_\pm) = -q^{\pm 1} X_\pm, \\
&H^* = H, \qquad X_\pm^* = X_\mp.
\end{aligned} \tag{4.168}$$

Алгебра Хопфа (4.168) не кокоммутативна и является квантовой группой (в широком смысле). В пределе $q \to 1$ она переходит в классическую алгебру Хопфа алгебры Ли $su(2)$ из Примера 4.9.1. Универсальная R-матрица $\mathcal{R}$ для $U_q(su(2))$ имеет вид

$$\mathcal{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q^{-2})^n}{[n]_q!} q^{\frac{1}{2}(H \otimes H + n(H \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes H))} X_+^n \otimes X_-^n, \tag{4.169}$$

где использованы стандартные обозначения для *квантового числа*

$$[x]_q = \frac{q^{2x} - 1}{q^2 - 1}$$

и *квантового факториала*

$$[0]_q! = 1, \qquad [n]_q! = \prod_{m=1}^{n} [m]_q.$$

Заметим, что матрицы

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

реализуют фундаментальное представление как алгебры $su(2)$, так и квантовой группы $U_q(su(2))$. Соответствующее выполнение (4.159) универсальной R-матрицы $\mathcal{R}$ (4.169) посредством численной 4×4 матрицей имеет вид $q^{-1/2}R$, где R — матрица (4.165). □

Упомянем еще одну разновидность алгебр Хопфа — квантовые алгебры Ли.

Замечание 4.9.4. Левое (соотв. правое) *присоединенное действие* алгебры Хопфа $\mathscr{A}$ на себя определяется как

$$a \triangleright b : a \otimes b \mapsto \sum a^i_{(1)} b S\left(a^i_{(2)}\right),$$
$$b \triangleleft a : a \otimes b \mapsto \sum S\left(a^i_{(1)}\right) b a^i_{(2)}.$$

Например, левое (соотв. правое) присоединенное действие классической алгебры Хопфа из Примера 4.9.1 на себя для элементов $a, b \in \mathcal{G}$ имеет вид

$$a \triangleright b = [a, b], \qquad b \triangleleft a = [b, a].$$

□

Определение 4.9.3. Алгебра Хопфа $\mathscr{A}$ называется *квантовой алгеброй Ли*, если существует конечномерное подпространство $B \subset \mathscr{A}$ (с базисом $\{b_i\}$, $i = 1, \ldots, N$) такое, что:

- $\mathscr{A}$ как векторное пространство является универсальной обертывающей алгеброй элементов из B по модулю их коммутационных соотношений;
- подпространство B инвариантно относительно левого присоединенного действия алгебры $\mathscr{A}$, т. е. $\mathscr{A} \triangleright B \subset B$;
- $\Delta(b) \in \mathscr{A} \otimes (\mathbb{1} \oplus B)$ для всех $b \in B$;
- $\epsilon(b) = 0$ для всех $b \in B$.

□

Исходя из этих условий, можно показать, что

$$\Delta(b_i) = b_i \otimes \mathbb{1} + \mathcal{O}_i{}^k \otimes b_k, \qquad \mathcal{O}_i{}^k \in \mathscr{A}, \tag{4.170}$$
$$b_i \triangleright b_k = f_{ik}{}^j b_j, \qquad f_{ik}{}^j \in \mathbb{C},$$
$$\mathcal{O}_i{}^k \triangleright b_j = R^{km}{}_{ij} b_m, \qquad R^{km}{}_{ij} \in \mathbb{C},$$

и наконец

$$b_i b_j - R^{km}{}_{ij} b_k b_m = f_{ij}{}^n b_n. \tag{4.171}$$

Пример 4.9.5. Сравнивая (4.168) с (4.170), мы видим, что алгебра Хопфа $U_q(su(2))$ из Примера 4.9.3 не является квантовой алгеброй Ли. □

Соотношения (4.171) называются *квантовыми коммутационными соотношениями*, а коэффициенты $f_{ij}{}^n$ в них — *квантовыми структурными константами*. При этом коэффициенты $R^{km}{}_{ij}$ можно рассматривать как компоненты числовой $N^2 \times N^2$ матрицы. Если

$$R^{km}{}_{ij} = \delta_i^k \delta_j^m,$$

квантовые коммутационные соотношения (4.171) сводятся к обычным коммутационным соотношениям алгебры Ли. Можно сказать, что квантовые коммутационные соотношения (4.171) являются деформацией обычных коммутационных соотношений алгебры Ли как по структурным константам $f_{ij}{}^n$ (которые, например, не обязательно антисимметричны), так и по матрице $R^{km}{}_{ij}$. При этом квантовые структурные константы $f_{ij}{}^n$ и матрица $R^{km}{}_{ij}$ в квантовой алгебре Ли подчиняются определенным соотношениям. Это уравнение Янга—Бахтера

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12},$$

где использованы обозначения (4.162), *квантовое тождество Якоби*

$$f_{is}{}^k f_{jn}{}^s - R^{sr}{}_{ij} f_{sm}{}^k f_{rn}{}^m = f_{ij}{}^m f_{mn}{}^k,$$

а также

$$R^{sk}{}_{in} f_{js}{}^m - R^{sr}{}_{ji} R^{mk}{}_{sl} f_{rn}{}^l = R^{mk}{}_{sn} f_{ji}^s - R^{sl}{}_{in} R^{mr}{}_{js} f_{rl}{}^k,$$
$$R^{mi}{}_{js} f_{kn}{}^s = R^{sr}{}_{jk} R^{li}{}_{rn} f_{sl}{}^m.$$

Подчеркнем, что коммутационные соотношения (4.171) не обязательно независимы, а матрица R не является, вообще говоря, универсальной R-матрицей алгебры Хопфа $\mathscr{A}$, т. е. квантовая алгебра Ли $\mathscr{A}$ не обязательно квазитриангулярна.

Пример 4.9.6. Рассмотрим в качестве простого примера квантовую алгебру Ли $U_q(sl(2))$. Она представляет собой универсальную обертывающую алгебру четырех элементов

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_+ \\ b_- & b_2 \end{pmatrix}$$

по модулю коммутационных соотношений

$$b_1 b_+ - b_+ b_1 + \frac{\lambda}{q} b_+ b_2 = \frac{1}{q} b_+,$$
$$b_1 b_- - b_- b_1 - \frac{\lambda}{q} b_2 b_- = -\frac{1}{q} b_-,$$
$$b_2 b_+ - q^2 b_+ b_2 = -q b_+,$$
$$b_2 b_- \frac{1}{q^2} b_- b_2 = \frac{1}{q} b_-,$$

$$b_+b_- - b_-b_+ + \frac{\lambda}{q}b_2(b_1 - b_2) = \frac{1}{q}(b_1 - b_2),$$
$$b_1b_2 - b_2b_1 = 0,$$

где $\lambda = q - q^{-1}$. При $q \to 1$ эти коммутационные соотношения сводятся к коммутационным соотношениям алгебры Ли $sl(2)$. □

§ 10. Деформационное квантование

Идея квантования путем деформации алгебраической структуры может быть перенесена на алгебры функций на многообразиях, в частности, алгебры Пуассона. Такие конструкции получили название деформационного квантования. Не углубляясь в детали, приведем основные элементы деформационного квантования.

Пусть Z — конечномерное симплектическое многообразие и $\mathcal{O}^0(Z)$ — векторное пространство гладких вещественных (или комплексных) функций на Z. Рассмотрим на этом пространстве две алгебраические структуры: кольца функций $C^\infty(Z)$ относительно поточечного умножения и алгебры Пуассона $\mathcal{A}(Z)$ относительно скобок Пуассона $\{.,.\}$ (4.37). Целью деформационного квантования является построение нового произведения функций $f * f'$ и нового коммутатора $\{.,.\}_*$, зависящих от *параметра деформации* γ (играющего роль постоянной Планка $\hbar$) так, чтобы при $\gamma \to 0$ операция $f*f'$ сводилась к обычному произведению функций, а скобки $\{.,.\}_*$ — к скобкам Пуассона [12, 27, 40, 45]. Начнем с общего определения деформации.

Определение 4.10.1. Пусть B — некоторая $C^\infty(Z)$-значная $\mathbb{R}$-билинейная форма на векторном пространстве $C^\infty(Z)$. Ее (формальной) *деформацией* называется следующий формальный (мы не исследуем его сходимость) степенной ряд по вещественному параметру $\gamma \geqslant 0$:

$$B_\gamma(f, f') = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma^r C_r(f, f'), \tag{4.172}$$

где $C_0(f, f') = B(f, f')$ и $C_{r>0}(f, f')$ — тоже $C^\infty(Z)$-значные билинейные формы на $C^\infty(Z)$. □

В качестве исходной билинейной формы B мы рассмотрим:

- обычное поточечное умножение функций $B(f, f') = ff'$, обозначив его деформацию

$$B_\gamma(f, f') = f *_\gamma f' = ff' + \sum_{r=1}^{\infty} \gamma^r C_r(f, f'), \tag{4.173}$$

которая предполагается ассоциативной, но не обязательно коммутативной;

- скобки Пуассона $B(f, f') = \{f, f'\}$, обозначив их деформацию

$$B_\gamma(f, f') = \{f, f'\}_* = \{f, f'\} + \sum_{r=1}^{\infty} \gamma^r S_r(f, f'), \tag{4.174}$$

которая, как предполагается, имеет структуру алгебры Ли.

Деформация (4.173) называется *ассоциативной деформацией* алгебры $C^\infty(Z)$, а (4.174) — *деформацией Ли* скобок Пуассона.

В частности, если построена ассоциативная деформация $f * f'$, можно определить деформацию Ли в виде

$$\{f, f'\}_* = \frac{i}{\gamma}(f * f' - f' * f). \tag{4.175}$$

Ассоциативная деформация должна удовлетворять условию

$$(f_1 *_\gamma f_2) *_\gamma f_3 - f_1 *_\gamma (f_2 *_\gamma f_3) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k D_k(f_1, f_2, f_3) = 0, \tag{4.176}$$

$$D_k(f_1, f_2, f_3) = \sum_{s+r=k,\, s,r\geqslant 0} C_r\big(C_s(f_1, f_2), f_3\big) - C_r\big(f_1, C_s(f_2, f_3)\big), \tag{4.177}$$

т. е. $D_k(f_1, f_2, f_3) = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Это условие формулируется в терминах когомологий Хосшильда.

Замечание 4.10.1. Напомним когомологии Хосшильда. Пусть A — ассоциативная алгебра. Определим p-коцепи как p-линейные отображения $C : \overset{p}{\otimes} A \to A$ и введем гомоморфизм

$$\begin{aligned}(\partial C)(a_0, \ldots, a_p) &= a_0 C(a_1, \ldots, a_p) + \\ &+ \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{i+1} C(a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_p) + (-1)^{p+1} C(a_0, \ldots, a_{p+1})\, a_p.\end{aligned} \tag{4.178}$$

Легко убедиться, что $\partial^2 = 0$, и соответствующие когомологии $H^p_{\mathrm{H}}(A)$ называются *когомологиями Хосшильда*. □

Вернемся к выражению (4.177). Обозначим $E_k(f_1, f_2, f_3)$ сумму членов в его правой части с индексами $s, r \geqslant 1$. Тогда оно перепишется в виде

$$D_k(f_1, f_2, f_3) = E_k(f_1, f_2, f_3) - (\partial C_k)(f_1, f_2, f_3), \tag{4.179}$$

где ∂ — оператор (4.178). Теперь построение ассоциативной деформации (4.173) может быть осуществлено как рекуррентная процедура. Предположим, что существуют 2-коцепи $C_i(f, f')$, $i \leqslant k$, так что $D_i = 0$ для всех $i \leqslant k$. Надо найти такую коцепь C_{k+1}, чтобы $D_{k+1} = 0$. Заметим, что E_{k+1} зависит только от $C_{i\leqslant k}$ и можно показать, что если $D_{i\leqslant k} = 0$, то $\partial E_{k+1} = 0$. В этом случае E_{k+1} является 3-коциклом. Если этот коцикл оказывается кограницей, т. е. принадлежит нулевому элементу группы когомологий Хосшильда $H^3_{\mathrm{H}}(C^\infty(Z))$, тогда требуемую коцепь C_{k+1} можно найти. Таким образом, препятствием построению ассоциативной деформации является нетривиальная группа когомологий Хосшильда $H^3_{\mathrm{H}}(C^\infty(Z))$. Если эта группа когомологий равна нулю, ассоциативная деформация может быть определена. Например, ассоциативная деформация всегда существует на симплектическом многообразии [67]. В частности, для начала рекуррентной процедуры, чтобы $D_1 = 0$, всегда можно выбрать

$$C_1(f, f') = \lambda\{f, f'\},$$

где λ — некоторая константа (см. ниже произведение Мойла).

Аналогично рассмотрим условие существования деформации Ли (4.174), где

$$S_r(f, f') + S_r(f', f) = 0.$$

Деформация Ли должна удовлетворять тождеству Якоби

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}_*\}_* + \{f_2, \{f_3, f_1\}_*\}_* + \{f_3, \{f_1, f_2\}_*\}_* = \tag{4.180}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} T_k(f_1, f_2, f_3) = 0,$$

$$T_k(f_1, f_2, f_3) = \sum_{r+s=k,\, s,r\geqslant 0} \Big[S_r\big(f_1, S_s(f_2, f_3)\big) + \tag{4.181}$$
$$+ S_r\big(f_2, S_s(f_3, f_1)\big) + S_r\big(f_3, S_s(f_1, f_2)\big)\Big].$$

Обозначим $Q_k(f_1, f_2, f_3)$ сумму членов в правой части выражения (4.181) с индексами $s, r \geqslant 1$. Тогда оно перепишется в виде

$$S_k(f_1, f_2, f_3) = Q_k(f_1, f_2, f_3) - (\tilde{\partial} S_k)(f_1, f_2, f_3), \tag{4.182}$$

где оператор

$$(\tilde{\partial} S_k)(f_1, f_2, f_3) = \Big[\big\{f_1, S_k(f_2, f_3)\big\} + \big\{f_2, S_k(f_3, f_1)\big\} + \big\{f_3, S_k(f_1, f_2)\big\}\Big] +$$
$$+\Big[S_k\big(f_1, \{f_2, f_3\}\big) + S_k\big(f_2, \{f_3, f_1\}\big) + S_k\big(f_3, \{f_1, f_2\}\big)\Big]$$

является оператором кограницы ($\tilde{\partial}^2 = 0$) для *когомологий Шевалье—Эленберга*. Поэтому построение деформации Ли (4.174) тоже может быть проведено как рекуррентная процедура. Предположим, что существуют 2-коцепи $S_i(f, f')$, $i \leqslant k$, так, что $T_i = 0$ для всех $i \leqslant k$. Надо найти такую коцепь S_{k+1}, чтобы $T_{k+1} = 0$. Слагаемое Q_{k+1} в правой части выражения (4.182) зависит только от $S_{i\leqslant k}$. Как и для ассоциативных деформаций, было показано, что если $T_{i\leqslant k} = 0$, то E_{k+1} является 3-коциклом, и если группа когомологий Шевалье—Эленберга $H^3_{\mathrm{CE}}(C^\infty(Z))$ тривиальна, то деформация Ли существует.

Рассмотрим некоторые варианты деформационного квантования.

Пусть $Z = \mathbb{R}^{2n}$ с координатами (Q^i, P_i), наделенное стандартной симплектической формой. Введем оператор

$$f \overleftrightarrow{\mathrm{P}} f' = \{f, f'\}, \qquad f, f' \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}).$$

Зададим формальную ассоциативную деформацию

$$f * f' = f \exp\left[\frac{-i\hbar}{2} \overleftrightarrow{\mathrm{P}}\right] f'. \tag{4.183}$$

Она называется *произведением Мойла* [44, 48]. Произведение Мойла (4.183) определяет соответствующую деформацию Ли (4.175).

Замечание 4.10.2. Чтобы установить класс функций, на которых произведение Мойла определено, построим его следующим образом. Ограничимся для простоты случаем $Z = \mathbb{R}^2$. Возьмем дуальное ему импульсное пространство $\mathbb{R}_2$ с координатами (q, p)

(см. обозначения в Приложении Б.1) и рассмотрим операторы ККС $W(p+iq)$ (4.138), действующие в пространстве обобщенных функций $S'(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}$ по закону

$$W(p+iq):\rho(x)\mapsto \exp\left[i\hbar\left(\frac{1}{2}pq+px\right)\right]\rho(x+q),$$

где, в отличие от (4.138), учтена постоянная Планка $\hbar$. Выберем в $S'(\mathbb{R})$ полную систему обобщенных собственных векторов e^{ikx} оператора трансляций $x\mapsto x+a$ (см. Теорему 1.6.4) и определим линейную форму в классе обобщенных функций

$$\phi[W]=\frac{1}{2\pi}\int e^{-ikx}We^{ikx}\,dk\,dx$$

на операторах ККС. В частности, получаем

$$\phi\left[W(p+iq)W(p'+iq')\right]=\frac{1}{\hbar}\delta(p+p')\delta(q+q')\exp\left[i\hbar\left(\frac{1}{2}(p'q'+pq)+p'q\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{\hbar}\delta(p+p')\delta(q+q').$$

Пусть f — функция на $\mathbb{R}^2$ и $f^F(p,q)$ — ее преобразование Фурье на $\mathbb{R}_2$. Поскольку функция f вещественна, то $f^F(-p,-q)=\overline{f^F(p,q)}$. Сопоставим функции f оператор

$$W_{f^F}=\frac{\hbar}{(2\pi)^2}\int f^F(p,q)W(p+iq)\,dp\,dq.$$

Возьмем другую функцию f' на $\mathbb{R}^2$ и рассмотрим величину

$$\phi\left[W(p+iq)W_{\overline{f}^F}W_{f'^F}\right]. \tag{4.184}$$

Нетрудно убедиться, что она является преобразованием Фурье произведения Мойла $f*f'$ (4.183). Можно показать, что величина (4.183) определена на некотором подклассе обобщенных функций $f^F\in S'(\mathbb{R}_2)$ на $\mathbb{R}_2$, включающем, например, $L^2(\mathbb{R}_2)$. □

Следующая конструкция, называемая *конструкцией Федосова*, обобщает произведение Мойла на произвольное симплектическое многообразие [41, 42].

Пусть Z — $2n$-мерное симплектическое многообразие с координатами (z^α) и симплектической формой

$$\Omega=\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}dz^\alpha\wedge dz^\beta.$$

Определение 4.10.2. Формальной *алгеброй Вейля* $\mathcal{A}_z$ над касательным пространством T_zZ называется ассоциативная алгебра с единицей, элементами которой являются формальные суммы

$$a(y,\gamma)=\sum_{2k+r\geqslant 0}\gamma^k a_{k,\alpha_1\ldots\alpha_r}y^{\alpha_1}\ldots y^{\alpha_r}, \tag{4.185}$$

где $y^\mu = \dot{z}^\mu$ — голономные координаты на касательном пространстве $T_z Z$. Алгебра $\mathscr{A}_z$ наделена *произведением Вейля*

$$a \circ a' = \exp\left[-\frac{i\gamma}{2}\Omega^{\alpha\beta}(z)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial y'^\beta}\right] a(y,\gamma)a'(y',\gamma)|_{y=y'} = \tag{4.186}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{i\gamma}{2}\right)^k \frac{1}{k!}\Omega^{\alpha_1\beta_1}(z)\ldots\Omega^{\alpha_k\beta_k}(z)\frac{\partial^k a}{\partial^{\alpha_1}\ldots\partial^{\alpha_k}}\frac{\partial^k a'}{\partial^{\beta_1}\ldots\partial^{\beta_k}}.$$

□

Ясно, что это определение не зависит от выбора системы координат. Беря объединение алгебр Вейля A_z, $z \in Z$, мы получим расслоение на алгебры Вейля $A \to Z$, сечения которого имеют вид

$$a(z,y,\gamma) = \sum_{2k+r\geqslant 0}\gamma^k a_{k,\alpha_1\ldots\alpha_r}(z)y^{\alpha_1}\ldots y^{\alpha_r}, \tag{4.187}$$

где $a_{k,\alpha_1\ldots\alpha_l}(z)$ — сечения симметризованных тензорных расслоений $\overset{l}{\vee} TZ$. Множество сечений (4.185) расслоения A тоже составляет ассоциативную алгебру $\mathscr{A}$ с единицей относительно послойного умножения (4.186). Ее единицей является элемент $a(z,y,\gamma) = 1$. Центр $\mathscr{Z}$ алгебры $\mathscr{A}$ состоит из элементов

$$a = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k a_k(z), \tag{4.188}$$

не зависящих от координат y^α. Имеет место фильтрация $\mathscr{A} \supset \mathscr{A}_1 \supset \ldots$ алгебры $\mathscr{A}$ по элементам с фиксированными значениями $2k + r$ в выражении (4.187).

Усложним конструкцию. Рассмотрим градуированную алгебру

$$\mathcal{O}^*(Z) = \bigoplus_{i=0}^{2n}\mathcal{O}^i(Z)$$

внешних дифференциальных форм на многообразии Z и зададим тензорное произведение алгебр $\mathscr{A} \otimes \mathcal{O}^*(Z)$. Его элементами являются A-значные внешние формы на многообразии Z:

$$a(z,y,dz,\gamma) = \sum\gamma^k a_{k,\alpha_1\ldots\alpha_r,\beta_1\ldots\beta_s}(z)y^{\alpha_1}\ldots y^{\alpha_r}dz^{\beta_1}\wedge\ldots\wedge dz^{\beta_s}, \tag{4.189}$$

которые будем называть просто формами. Их произведение определяется как внешнее произведение дифференциальных форм и умножение Вейля $\circ$ (4.186) полиномов по y^α. Обозначим его тем же символом $\circ$. Определим коммутатор двух форм a и a' (4.189) по формуле

$$[a,a'] = a\circ a' - (-1)^{|a'|}a'\circ a, \tag{4.190}$$

где $|a|$ означает степень формы $a' \in \mathscr{A}\otimes\mathcal{O}^{|a'|}(Z)$.

Говорят, что элемент a принадлежит центру алгебры $\mathscr{A}\otimes\mathcal{O}^*(Z)$, если его коммутатор (4.190) со всеми элементами этой алгебры равен нулю. Таким центром алгебры $\mathscr{A}\otimes\mathcal{O}^*(Z)$ является $\mathscr{Z}\otimes\mathcal{O}^*(Z)$. Существуют две проекции формы $a(z,y,dz,\gamma)$ на центр $\mathscr{Z}\otimes\mathcal{O}^*(Z)$. Это

$$a_0 = a(z,0,dz,\gamma), \qquad a_{00} = a(z,0,0,\gamma). \tag{4.191}$$

На формах (4.189) определяют также два оператора:

$$\delta : \mathscr{A}_r \otimes \mathcal{O}^s(Z) \to \mathscr{A}_{r-1} \otimes \mathcal{O}^{s+1}(Z),$$
$$\delta a = dz^\lambda \wedge \frac{\partial}{\partial y^a} a,$$

и

$$\delta^* : \mathscr{A}_r \otimes \mathcal{O}^s(Z) \to \mathscr{A}_{r+1} \otimes \mathcal{O}^{s-1}(Z),$$
$$\delta^* a = y^\lambda \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \rfloor a.$$

Эти операторы имеют следующие свойства:

- оператор δ является антипроизводной, т. е.

$$\delta(a \circ a') = (\delta a) \circ a' + (-1)^{|a|} a \circ \delta a',$$

  и можно записать

$$\delta a = -\left[\frac{i}{\gamma}\Omega_{\alpha\beta} y^\alpha dz^\beta, a\right];$$

- $\delta^2 = (\delta^*)^2 = 0$;
- при действии на одночлен

$$a = y^{\alpha_1} \ldots y^{\alpha_r} dz^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge dz^{\beta_s} \tag{4.192}$$

  получаем

$$(\delta\delta^* + \delta^*\delta)a = (r+s)a.$$

Определяют также оператор

$$\delta^{-1} : \mathscr{A}_r \otimes \mathcal{O}^s(Z) \to \mathscr{A}_{r+1} \otimes \mathcal{O}^{s-1}(Z)$$

его действием на одночлены (4.192) по формуле

$$\delta^{-1} a = \begin{cases} (r+s)^{-1}\delta^* a, & r+s > 0, \\ \delta^{-1} a = 0, & r+s = 0. \end{cases}$$

Тогда всякая форма (4.189) допускает разложение

$$a = \left(\delta\delta^{-1} + \delta^{-1}\delta\right) a + a_{00}. \tag{4.193}$$

Введем еще один необходимый объект — связность на симплектическом многообразии Z. Она представима тангенциально-значной формой

$$\Gamma = dz^\lambda \otimes \left(\frac{\partial}{\partial z^\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{\partial}{\partial y^\mu}\right) \tag{4.194}$$

(см. формулу (1.69) в [19], где для согласования с принятыми в [41, 42] обозначениями изменен знак). Связность Γ (4.194) называется *симплектической*, если она симметрична и ковариантный дифференциал симплектической формы по этой связности равен нулю:

$$D\Omega_{\alpha\beta} = dz^\lambda D_\lambda \Omega_{\alpha\beta} = dz^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z^\lambda} \Omega_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}\Omega_{\mu\beta} + \Gamma^\mu{}_{\beta\lambda}\Omega_{\alpha\mu} \right) = 0.$$

В локальных канонических координатах, когда $\Omega_{\alpha\beta} = \text{const}$, коэффициенты

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \Omega_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda} \tag{4.195}$$

симплектической связности являются симметричными по всем индексам. Симплектическая связность всегда существует, но не единственна. Коэффициенты (4.195) разных симплектических связностей отличаются на симметричный по всем индексам тензор $\tau_{\mu\nu\lambda}$. Ковариантный дифференциал D по симплектической связности Γ распространяется и на элементы a (4.189) алгебры $\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}^*(Z)$:

$$Da = dz^\lambda \wedge D_\lambda a.$$

Он обладает свойствами:

- $D(a \circ a') = Da \circ a' + (-1)^{|a|} a \circ Da'$;
- для всякой скалярной формы $\phi \in \mathcal{O}^k(Z)$

$$D(\phi \wedge a) = d\phi \wedge a + (-1)^k \phi \wedge Da;$$

- $(D\delta + \delta D)a = 0$;
- в локальных канонических координатах

$$Da = da + \left[\frac{i}{\gamma} G, a \right],$$

где

$$d = dz^\lambda \wedge \frac{\partial}{\partial z^\lambda}, \qquad G = \frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu\lambda} y^\mu y^\nu dz^\lambda;$$

- $D^2 a = \left[\frac{i}{\gamma} R, a \right]$, где

$$R = \frac{1}{4} R_{\mu\nu\alpha\lambda} y^\mu y^\nu dz^\alpha \wedge dz^\lambda.$$

Величина $R_{\mu\nu\alpha\lambda} = \Omega_{\mu\beta} R^\beta{}_{\nu\alpha\lambda}$ называется *тензором кривизны* симплектической связности.

При заданной симплектической связности Γ на симплектическом многообразии Z, рассмотрим в расслоении на алгебры Вейля $A \to Z$ более общую связность, ковариантный дифференциал которой имеет вид

$$\widetilde{D}a = Da + \left[\frac{i}{\gamma} \tau, a \right] = da + \left[\frac{i}{\gamma} (G + \tau), a \right], \tag{4.196}$$

где τ — A-значная 1-форма на Z. Форма τ, удовлетворяющая условию (4.196), не единственна. Поэтому наложим дополнительное условие $\tau_0 = 0$, которое определяет ее однозначно. Форма

$$\frac{i}{\gamma}\tilde{R} = \frac{i}{\gamma}\left(R + D\tau + \tau^2\right) \tag{4.197}$$

называется кривизной связности (4.196).

Связность (4.196) именуется *абелевой*, если для всякого элемента a алгебры $\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}^*(Z)$ выполняется соотношение

$$\widetilde{D}^2 a = \left[\frac{i}{\gamma}\tilde{R}, a\right] = 0,$$

т. е. кривизна $\tilde{R}$ (4.197) этой связности принадлежит центру $\mathcal{Z} \otimes \mathcal{O}^2(Z)$ алгебры $\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}^*(Z)$.

Предложение 4.10.3. Для всякой симплектической связности на симплектическом многообразии Z на расслоении $A \to Z$ на алгебры Вейля существует абелева связность вида

$$\widetilde{D} = D - \delta + \left[\frac{i}{\gamma}r, .\right] = D + \left[\frac{i}{\gamma}\left(\Omega_{\alpha\beta}y^\alpha dz^\beta + r\right), .\right], \tag{4.198}$$

где r — элсмент $\mathcal{A}_3 \otimes \mathcal{O}^1(Z)$ такой, что $r_0 = 0$. □

Вычисляя кривизну связности (4.198), получаем

$$\tilde{R} = -\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}y^\alpha dz^\beta + R - \delta r + Dr + \frac{i}{\gamma}r^2.$$

Связность будет абелевой, если

$$\delta r = R + Dr + \frac{i}{\gamma}r^2. \tag{4.199}$$

Тогда $\tilde{R} = -\Omega$ — центральная форма.

Лемма 4.10.4. Уравнение (4.199) имеет единственное решение r такое, что

$$\delta^{-1}r = 0. \tag{4.200}$$

Более того, такой элемент r может быть построен итерационной процедурой. □

Заключительный этап конструкции Федосова состоит в следующем. Пусть дана абелева связность $\widetilde{D}$ (4.198), удовлетворяющая условиям (4.199), (4.200). Обозначим подалгебру $\mathcal{A}_D$ алгебры $\mathcal{A}$, состоящую из элементов a таких, что $\widetilde{D}a = 0$; они называются *плоскими*.

Теорема 4.10.5. Для всякого элемента $b \in \mathcal{Z}$ (4.188) существует единственный плоский элемент $a(z, y, \gamma) \in \mathcal{A}_D$ такой, что

$$\sigma(a) \stackrel{\text{def}}{=} a_0(z, 0, \gamma) = b.$$

Такой элемент тоже может быть построен итерационной процедурой. □

Тогда ассоциативная деформация для элементов $a, a' \in \mathcal{Z}$ (4.188) на симплектическом многообразии Z всегда может быть определена как

$$a * a' = \sigma\left(\sigma^{-1}(a) \circ \sigma^{-1}(a')\right). \tag{4.201}$$

Пример 4.10.3. Если $Z = \mathbb{R}^{2n}$, симплектическая связность в конструкции Федосова может быть выбрана нулевой. Тогда соответствующая абелева связность (4.198) имеет вид

$$\widetilde{D} = -\delta + d.$$

В этом случае ассоциативная деформация (4.201) воспроизводит произведение Мойла (4.183). □

Отметим, что конструкция Федосова применима и к пуассоновым многообразиям.

Одна из проблем, которую в разных вариантах пытаются решить в схеме деформационного квантования, заключается в том, чтобы деформация Ли (4.173) была задана не в качестве формального степенного ряда по параметру деформации γ, а как обычная гладкая функция, и чтобы классический переход $\gamma \to 0$ был непрерывен. В этой связи вводят понятие строгой деформации в терминах C^*-алгебр [60].

Пусть Z — пуассоново многообразие и $C^\infty(Z)$ — кольцо комплексных гладких функций на Z. Предположим, что скобки Пуассона на $C^\infty(Z)$ вещественны, т. е.

$$\{f^*, f'^*\} = \{f, f'\}^*.$$

Обозначим $C_\infty(Z)$ подалгебру гладких функций на Z, стремящихся к нулю на бесконечности. Это C^*-алгебра относительно нормы $\|.\|_\infty$ (2.17).

Определение 4.10.6. Пусть $\mathcal{A}$ — плотная инволютивная подалгебра C^*-алгебры $C_\infty(Z)$, например пространство Шварца $S(Z)$ быстро убывающих гладких функций на Z. *Строгим деформационным квантованием* алгебры $\mathcal{A}$ называется открытый интервал I в $\mathbb{R}$, содержащий 0, и тройка

$$\left(*_\gamma, {}^{*_\gamma}, \|.\|_\gamma\right), \qquad \gamma \in I, \tag{4.202}$$

ассоциативной деформации, операции инволюции и C^*-нормы на $\mathcal{A}$ таких, что

- при $\gamma = 0$ тройка (4.202) совпадает с исходными операциями в $\mathcal{A}$;
- пополнения $\mathcal{A}_\gamma$ алгебры $\mathcal{A}$ по нормам $\|.\|_\gamma$ образуют непрерывное поле C^*-алгебр (в частности, отображение $\gamma \to \|f\|_\gamma$, $f \in \mathcal{A}$, непрерывно);
- для произвольных функций $f, f' \in \mathcal{A}$

$$\left\| \frac{i}{\gamma}(f *_\gamma f' - f' *_\gamma f) - \{f, f'\} \right\|_\gamma \to 0$$

при $\gamma \to 0$.

□

Пример 4.10.4. Пусть A — C^*-алгебра, и задан гомоморфизм ρ группы трансляций $\mathbb{R}^{2n}$ в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(A)$ алгебры A, непрерывный в равномерной топологии в $\mathrm{Aut}(A)$. Для произвольного числа $\gamma \in \mathbb{R}$, симплектической формы Ω на $\mathbb{R}^{2n}$ и двух любых бесконечно дифференцируемых для ρ элементов $a, b \in A$ можно определить ассоциативную деформацию (*подкрученное произведение*)

$$a *_\gamma b = \int \big(\rho(\gamma u)a\big)\big(\rho(v)b\big) \exp\big[2\pi i\Omega(u, v)\big]\, du\, dv \tag{4.203}$$

так, что элемент $a *_\gamma b \in A$ тоже является бесконечно дифференцируемым. Пополнение множества таких бесконечно дифференцируемых элементов образует деформированную C^*-алгебру A_γ. Это пример строгого деформационного квантования, который может быть обобщен на случай, когда вместо $\mathbb{R}^{2n}$ рассматривается группа трансляций в гильбертовом пространстве H [66]. □

Проблема возникает с представлениями деформированных C^*-алгебр. Ее общее решение может быть дано в рамках конструкции ГНС, если рассматривать такую алгебру как инволютивную алгебру над полем $\mathcal{C}((\gamma))$ степенных *рядов Лорана*

$$\sum_{k=-N}^{\infty} \gamma^k a_k$$

с действительными или комплексными коэффициентами, ограниченных по отрицательным степеням параметра деформаций γ. На такой алгебре определяется положительная форма со значениями в поле $\mathcal{C}((\gamma))$, которой, как можно показать, соответствует представление этой алгебры в предгильбертовом пространстве над полем $\mathcal{C}((\gamma))$ [30]. Этот формализм может быть распространен и для деформационного квантования при конечной температуре [31].

В заключение упомянем еще одно обобщение деформационного квантования, когда параметр деформации не является числом и не коммутирует с элементами исходной алгебры [56].

Глава 5

Алгебраическая квантовая теория поля

Особенность применения алгебраического подхода к квантовой теории поля, как уже отмечалось, состоит в том, что инволютивные алгебры, описывающие полевые системы, в общем случае не нормированы и их представления реализуются неограниченными операторами. Однако, используя формализм Op^*-алгебр, конструкция ГНС может быть распространена и на квантовые полевые системы [24, 29]. Более того, проблема существенно упрощается, если ограничиться хронологическими вакуумными средними квантовых полей. В случае бозонных полей они могут быть представлены как состояния на универсальной обертывающей алгебре коммутативной алгебры Ли, и для их описания может быть использована техника представлений ядерных групп Ли, уже применявшаяся в § 4.6 для канонических коммутационных соотношений.

§ 1. Алгебры неограниченных операторов

В Замечании 3.2.2 были приведены основные понятия, относящиеся к неограниченным операторам. Поэтому перейдем к определению Op^*-алгебр таких операторов [24].

Определение 5.1.1. *Op^*-алгеброй* называется пара (B, D), где B — некоторая алгебра (неограниченных) операторов с единицей в гильбертовом пространстве E и D — плотное векторное подпространство в E такое, что

(а) $D(b) = D$ и $bD \subset D$ для всех $b \in B$;

(б) $D \subset D(b^*)$;

(в) $b^+ = b^*|_D \in B$. □

Это инволютивная алгебра с инволюцией $b \to b^+$. В силу свойства (b) все ее элементы замыкаемы.

В отличие от § 2.2, посвященного представлениям инволютивных алгебр в гильбертовом пространстве E только ограниченными операторами из $B(E)$, здесь мы рассмотрим представления этих алгебр неограниченными операторами.

Представление $\pi(A)$ инволютивной алгебры A неограниченными операторами в гильбертовом пространстве E является Op^*-алгеброй, если существует плотное векторное подпространство $D(\pi) \subset E$ такое, что $D(\pi) = D(\pi(a))$ для всех $a \in A$, и если это представление *эрмитово*, т. е. $\pi(a^*) \subset \pi(a)^*$ для всех $a \in A$. В этом случае образуют также следующие конструкции:

$$\overline{\pi} : a \to \overline{\pi}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\pi(a)}\Big|_{D(\overline{\pi})}, \qquad D(\overline{\pi}) = \bigcap_{a \in A} D\left(\overline{\pi(a)}\right),$$

$$\pi^* : a \to \pi^*(a) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(a^*)^*\Big|_{D(\pi^*)}, \qquad D(\pi^*) = \bigcap_{a \in A} D\left(\pi(a)^*\right),$$

$$\pi^{**}: a \to \pi^{**}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \pi^*(a^*)^*\big|_{D(\pi^{**})}, \qquad D(\pi^{**}) = \bigcap_{a\in A} D\left(\pi^*(a)^*\right),$$

которые называются соответственно *замыканием* представления π, *сопряженным* к представлению π и *вторым сопряженным* к представлению π. Справедливы соотношения

$$\pi \subset \overline{\pi} \subset \pi^{**} \subset \pi^*,$$

где $\pi_1 \subset \pi_2$ обозначает *расширение представления*, т. е. $D(\pi_1) \subset D(\pi_2)$. Из эрмитовости представления π следует эрмитовость $\overline{\pi}$ и π^{**}, а для π^* справедливы равенства

$$\pi^* = \overline{\pi}^* = \pi^{***}.$$

Эрмитово представление (Op^*-алгебру) $\pi(A)$ называют:

- *замкнутым*, если $\pi = \overline{\pi}$;
- *существенно самосопряженным*, если $\pi^{**} = \pi^*$;
- *самосопряженным*, если $\pi = \pi^*$.

При этом для замкнутости (соотв. самосопряженности) π достаточно, чтобы был замкнут (соотв. самосопряжен) хотя бы один из операторов $\pi(a)$.

В области $D(\pi)$ задается так называемая *граф-топология*. Пусть N — некоторое конечное подмножество элементов из A. Граф-топология на $D(\pi)$ порождается системой окрестностей нуля

$$U(N,\varepsilon) = \left\{x \in D(\pi) \,:\, \sum_{a\in N} \|\pi(a)x\| < \varepsilon\right\}.$$

Все операторы $\pi(a)$ непрерывны в граф-топологии.

Обозначим $\overline{Y}^g$ замыкание подмножества $Y \subset D(\pi)$ в граф-топологии. В частности, представление π является замкнутым тогда и только тогда, когда его область определения замкнута в граф-топологии, т. е. $D(\overline{\pi}) = \overline{D(\pi)}^g$.

Вектор $\theta \in D(\pi)$ такой, что $\overline{(\pi(A)\theta)}^g \supset D(\pi)$, называется *сильно тотализирующим*.

Вводятся *сильно* и *слабо ограниченные коммутанты* Op^*-алгебры $\pi(A)$:

$$\pi'_s = \left\{T \in B(E) \,:\, bT = Tb,\ b \in \pi(A)\right\},$$
$$\pi'_w = \left\{T \in B(E) \,:\, \langle b^*x|Ty\rangle = \langle T^*x|by\rangle,\ b \in \pi(A),\ x,y \in D(\pi)\right\}.$$

Подчеркнем, что они состоят из ограниченных операторов и обладают следующими свойствами:

- π'_w — слабо замкнутое самосопряженное векторное подпространство $B(E)$, содержащее единицу и порождаемое своими положительными элементами ($\pi'_w = \overline{\pi}'_w$);
- π'_s — слабо замкнутая алгебра с единицей;
- $\pi'_s \subset \pi'_w$ и, если $\pi = \pi^*$, то $\pi'_s = \pi'_w$.

В случае самосопряженного представления ($\pi = \pi^*$) его коммутант $\pi' = \pi'_s = \pi'_w$ является алгеброй фон Неймана.

Векторное подпространство $V \subset E$ считается инвариантным относительно Op^*-алгебры $\pi(A)$, если

$$V \subset D, \qquad \pi(A)V \subset V.$$

Сужение $\pi|_V$ задает *субпредставление* Op^*-алгебры $\pi(A)$ в гильбертовом пространстве $\overline{V}$ — замыкании V. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5.1.2. Пусть π — эрмитово представление, V — векторное подпространство в E, а P и $P^\perp$ — проекторы на $\overline{V}$ и его ортогональное дополнение $\overline{V}^\perp$. Эквивалентны условия:

- $P \in \pi'_s$;
- $P^\perp \in \pi'_s$;
- V ортогонально приводит π, т. е. для всех $a \in A$

$$PD(\pi) = \overline{V} \cap D(\pi), \quad \pi(a)PD(\pi) \subset PD(\pi), \quad \pi(a)P^\perp D(\pi) \subset P^\perp D(\pi).$$

Также эквивалентны условия

- $P \in \pi'_w$;
- $P^\perp \in \pi'_w$;
- V слабо ортогонально приводит π, т. е. для всех $a \in A$

$$PD(\pi) \subset \overline{V} \cap D(\pi), \quad \pi^*(a)PD(\pi) \subset PD(\pi), \quad \pi^*(a)P^\perp D(\pi) \subset P^\perp D(\pi).$$

□

В случае самосопряженного представления условие, что проектор $P \in \pi'$, выделяет в E подпространство, где действует самосопряженное субпредставление π. Такое подпространство называется *самосопряженным подпространством*. Для самосопряженного представления π существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех проекторов из коммутанта π' и множеством всех самосопряженных подпространств.

Эрмитово представление $\pi(A)$, для которого π'_w сводится только к скалярным операторам, называется *неприводимым*. Его свойства отличаются от свойств неприводимых представлений нормированных инволютивных алгебр.

Предложение 5.1.3. Если π — самосопряженное представление, то условия

(а) π неприводимо,

(б) π не имеет нетривиальных самосопряженных подпространств,

(в) π не имеет нетривиальных замкнутых в граф-топологии инвариантных подпространств,

(д) любой вектор из $D(\pi)$ сильно тотализирующий,

(г) любой вектор из $D(\pi)$ тотализирующий

связаны импликацией

$$\begin{array}{ccccc} (а) & \longleftrightarrow & (б) & \longleftrightarrow & (в) \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ (д) & & \longleftarrow & & (г) \end{array}$$

□

Конструкция ГНС обобщается на ненормированные топологические инволютивные алгебры следующим образом [24]. Пусть A — топологическая инволютивная алгебра с единицей. *Состоянием* на A называется непрерывная положительная форма ϕ на A такая, что $\phi(\mathbb{1}) = 1$. Определение чистого состояния повторяет Определение 2.4.6.

Предложение 5.1.4. Каждому состоянию ϕ на топологической инволютивной алгебре A с единицей отвечает сильно циклическое эрмитово представление π алгебры A такое, что для всех $a \in A$

$$\phi(a) = \left\langle \pi(a)\theta_\phi | \theta_\phi \right\rangle, \tag{5.1}$$

где θ_ϕ — сильно тотализирующий вектор для π. При этом представление π, порождаемое состоянием ϕ, неприводимо тогда и только тогда, когда ϕ чисто. □

В общем случае о некоторых свойствах состояний на Op^*-алгебре B можно судить, рассматривая состояния на ассоциированной с B алгебре фон Неймана $(B'_w)'$, когда они определяются как векторные состояния (5.1) одним и тем же вектором $\theta \in D(B)$. Однако для описания систем квантовых полей мы в дальнейшем ограничимся некоторыми частными случаями Op^*-алгебр, состояния на которых будут построены в явном виде.

§ 2. Алгебры свободных полей

В рамках алгебраического подхода, как уже отмечалось, система квантовых полей характеризуется топологической инволютивной алгеброй A с единицей и непрерывной положительной формой (состоянием) f на ней:

$$f(aa^*) \geqslant 0, \qquad f(\mathbb{1}) = 1, \qquad a \in A.$$

При этом большинство реалистических моделей квантовой теории поля исходит из концепции частиц и описывается тензорными алгебрами. Для простоты мы ограничимся здесь случаем вещественного скалярного поля.

Пусть Q — вещественное (локально выпуклое) топологическое векторное пространство, снабженное некоторой (возможно тривиальной) операцией инволюции $q \to q^*$, $q \in Q$. Рассмотрим тензорную алгебру

$$A_Q = \bigoplus_{n=0}^{\infty} Q^n, \qquad Q^0 = \mathbb{R}, \qquad Q^{n>0} = \overset{n}{\otimes} Q,$$

с операцией тензорного произведения

$$Q^n \ni q^1 \dots q^n \overset{\text{def}}{=} q^1 \otimes \dots \otimes q^n, \qquad q^k \in Q.$$

Она является инволютивной алгеброй относительно операции инволюции

$$(q^1 \dots q^n)^* \overset{\text{def}}{=} (q^n)^* \dots (q^1)^*.$$

Будучи наделенной топологией прямой суммы (см. § 4.1), алгебра A_Q становится топологической инволютивной алгеброй с единицей. Состояние f на A_Q задается набором непрерывных форм $\{f_n\}$ на пространствах Q^n. При этом его значение $f(q^1 \dots q^n)$ интерпретируется как вакуумное среднее для системы полей $q^1, \dots, q^n$.

Для описания вещественного скалярного поля на пространстве Минковского $M = \mathbb{R}^4$ выберем в качестве пространства Q вещественное ядерное пространство Шварца RS^4 основных вещественных функций на $\mathbb{R}^4$. Это вещественное подпространство пространства Шварца $S(\mathbb{R}^4)$ (см. Приложение Б.1). Топологически сопряженным последнему является пространство обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^4)$. Укажем два свойства, которые побуждают сделать такой выбор образующего пространства Q алгебры вещественных скалярных полей. Во-первых, оператор сдвигов $x \to x + a$, $x \in \mathbb{R}^4$, обладает в $S(\mathbb{R}^4)$ полной системой обобщенных собственных векторов (плоских волновых функций) $e^{ipx} \in S'(\mathbb{R}^n)$ (см. Теорему 1.6.4). Во-вторых, при преобразованиях Фурье пространства $S(\mathbb{R}^4)$ и $S'(\mathbb{R}^4)$ переходят в изоморфные им пространства $S(\mathbb{R}_4)$ и $S'(\mathbb{R}_4)$ (см. Приложение Б.1).

Соответствующая тензорная алгебра A_{RS^4} называется *алгеброй Борхерса* [24, 29]. Отметим, что подмножество $\overset{n}{\otimes} S(\mathbb{R}^k)$ плотно в $S(\mathbb{R}^{kn})$ и всякая непрерывная форма на этом подмножестве однозначно продолжается до непрерывной формы на $S(\mathbb{R}^{kn})$. Поэтому можно положить

$$A_{RS^4} = \mathbb{R} \oplus RS^1 \oplus RS^2 \oplus \cdots. \tag{5.2}$$

Тогда всякое состояние на алгебре Борхерса (5.2) представимо семейством обобщенных функций $\{W_n \in S'(\mathbb{R}^{4n})\}$:

$$f(\psi_n) = \int W_n(x_1, \ldots, x_n)\psi_n(x_1, \ldots, x_n)\, d^4x_1 \ldots d^4x_n, \qquad \psi_n \in RS^{4n}. \tag{5.3}$$

В частности, если состояние f удовлетворяет аксиомам Уайтмана аксиоматической квантовой теории поля, W_n представляют собой n-точечные функции Уайтмана [2, 18] (см. Приложение Б.3).

Замечание 5.2.1. Хотя вакуумные средние (5.3) определяются на элементах из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^4)$, это не значит, что реальные физические поля должны представляться только гладкими быстроубывающими на бесконечности функциями. Пространство Шварца $S(\mathbb{R}^4)$ является плотным подпространством пространства обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^4)$, и, например, вакуумные средние (5.3) могут быть продолжены, как это обычно имеет место, на плоские волновые функции $e^{ipx} \in S'(\mathbb{R}^4)$, но уже не в классе непрерывных форм на $S'(\mathbb{R}^4)$. □

Рассмотрим состояния на алгебре Борхерса RS^4, которые описывают скалярные поля массы m.

Зададим на RS^4 положительную комплексную билинейную форму

$$(\psi|\psi') = \frac{2}{i}\int d^4x\, d^4y \psi(x) D^-(x-y)\psi'(y) = \int \frac{d_3p}{\omega}\psi^F(\omega, \vec{\mathrm{p}})\overline{\psi'^F(\omega, \vec{\mathrm{p}})}, \tag{5.4}$$

$$D^-(x) = i(2\pi)^{-3}\int d^4p \exp[-ipx]\theta(p_0)\delta(p^2 - m^2),$$

где $D^-(x)$ — отрицательно частотная часть функции Паули—Йордана, θ — функция ступеньки, p^2 — минковский квадрат импульса с сигнатурой $(+\ -\ -\ -)$ и $\omega = (\vec{\mathrm{p}}^2 + m^2)^{1/2}$. Так как функция $\psi(x)$ вещественна, $\psi^F(p) = \overline{\psi}^F(-p)$. Билинейная форма (5.6) вырождена, поскольку функция Паули—Йордана D^- удовлетворяет уравнению массовой поверхности

$$(\Box + m^2)D^-(x) = 0,$$

а форма (5.4) может принимать ненулевые значения только на элементах $\psi^F(p) \in RS_4$, не исчезающих на массовой поверхности $p^2 = m^2$.

Поэтому рассмотрим фактор-пространство

$$\gamma : RS^4 \to \frac{RS^4}{J}, \tag{5.5}$$

где

$$J = \{\psi \in RS^4 \ : \ (\psi|\psi) = 0\}$$

— ядро квадратичной формы (5.4). Отображение γ сопоставляет всякому элементу $\psi \in RS^4$, имеющему своим преобразованием Фурье $\psi^F(p_0, \vec{p}) \in RS_4$, пару функций $\left(\psi^F(\omega, \vec{p}), \psi^F(-\omega, \vec{p})\right)$. Зададим на фактор-пространстве RS^4/J вещественную билинейную форму

$$(\gamma\psi|\gamma\psi')_L = \mathrm{Re}(\psi|\psi') = \tag{5.6}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d_3\,\vec{p}}{\omega}\left[\psi^F(\omega, \vec{p})\psi'^F(-\omega, -\vec{p}) + \psi^F(-\omega, \vec{p})\psi'^F(\omega, -\vec{p})\right].$$

Фактор-пространство (5.5) представляет собой прямую сумму

$$\frac{RS^4}{J} = L^+ \oplus L^-$$

взаимно ортогональных относительно формы (5.6) подпространств

$$L^\pm = \left\{\psi^F_\pm(\omega, \vec{p}) = \pm\psi_\pm(-\omega, \vec{p})\right\}.$$

Существуют непрерывные изометрические отображения

$$\gamma_+ : \psi^F_+(\omega, \vec{p}) \mapsto q^F(\vec{p}) = \omega^{-1/2}\psi^F_+(\omega, \vec{p}),$$
$$\gamma_- : \psi^F_-(\omega, \vec{p}) \mapsto q^F(\vec{p}) = -i\omega^{-1/2}\psi^F_-(\omega, \vec{p})$$

пространств L^+ и L^- в пространство RS^3, наделенное невырожденной положительной эрмитовой формой

$$\langle q|q'\rangle = \int q^F(\vec{p})\overline{q'^F(\vec{p})}\, d_3p, \tag{5.7}$$

непрерывной по каждому аргументу. Заметим, что образы $\gamma_+(L^+)$ и $\gamma_-(L^-)$ не являются ортогональными в RS^3 относительно скалярного произведения (5.7). Суперпозиции отображений γ и $\gamma_\pm$ определяют непрерывные отображения

$$\tau_+(\psi) = \gamma_+(\gamma\psi) = \frac{1}{2\omega^{1/2}}\int\left[\psi^F(\omega, \vec{p}) + \psi^F(-\omega, \vec{p})\right]\exp\left[-i\,\vec{p}\,\vec{x}\right] d_3p,$$
$$\tau_-(\psi) = \gamma_-(\gamma\psi) = \frac{1}{2i\omega^{1/2}}\int\left[\psi^F(\omega, \vec{p}) - \psi^F(-\omega, \vec{p})\right]\exp\left[-i\,\vec{p}\,\vec{x}\right] d_3p$$

пространства RS^4 в RS^3.

Рассмотрим теперь алгебру ККС

$$\mathcal{G}(RS^3) = \{\phi(q), \pi(q),\ \ q \in RS^3\}$$

(4.84a)–(4.84c), где $\langle .|. \rangle$ — эрмитова форма (5.7) на пространстве Шварца RS^3. Зададим отображение

$$RS^4 \ni \psi \mapsto \phi(\tau_+(\psi)) - \pi(\tau_-(\psi)).$$

Оно придает алгебре $\mathcal{G}(RS^3)$ смысл алгебры одновременных канонических коммутационных соотношений полей $\psi \in RS^4$. С его помощью всякое представление (4.103) этой алгебры, задаваемое некоторой трансляционно квазиинвариантной мерой μ на $S'(\mathbb{R}^3)$, определяет состояние

$$f(\psi^1 \dots \psi^n) = \int \left[\phi\left(\tau_+(\psi^1)\right) - \pi\left(\tau_-(\psi^1)\right)\right] \dots \left[\phi\left(\tau_+(\psi^n)\right) - \pi\left(\tau_-(\psi^n)\right)\right] d\mu \qquad (5.8)$$

на алгебре Борхерса A_{RS^4}. При этом соответствующие обобщенные функции W_n удовлетворяют уравнению массовой поверхности и выполняется коммутационное соотношение

$$W_2(x, y) - W_2(y, x) = -iD(x - y), \qquad (5.9)$$

где

$$D(x) = i(2\pi)^{-3} \int d^4p \exp[-ipx]\left(\theta(p_0) - \theta(-p_0)\right)\delta(p^2 - m^2)$$

— функция Паули—Йордана. Это показывает, что состояние (5.8) описывает скалярные частицы с массой m.

Замечание 5.2.2. Подчеркнем, что, в отличие от того, как это обычно делается, мы не задавали никаких коммутационных соотношений для элементов алгебры Борхерса, т. е. не определяли коммутатор квантовых полей $\psi\psi' - \psi'\psi$. Известные коммутационные соотношения получаются под знаком состояния $f(\psi\psi' - \psi'\psi)$ (5.8) в силу соотношения (5.9). □

В частности, в случае фоковского представления (4.121) алгебры ККС $\mathcal{G}(RS^3)$ состояние f (5.8) удовлетворяет *теореме Вика*:

$$f_n\left(\psi^1 \dots \psi^n\right) = \sum f_2\left(\psi^{i_1}\psi^{i_2}\right) \dots f_2\left(\psi^{i_{n-1}}\psi^{i_n}\right),$$

где сумма берется по всем разбиениям множества $1, \dots, n$ на пары $i_1 < i_2, \dots, i_{n-1} < i_n$, а форма f_2 представлена функцией Уайтмана

$$W_2(x, y) = \frac{1}{i}D^-(x - y).$$

Такое состояние f описывает свободное скалярное поле с массой m. Можно получить также состояния f (5.8) на алгебре Борхерса S_{RS^4} скалярных полей, порождаемые нефоковскими представлениям алгебры ККС $\mathcal{G}(RS^3)$.

§ 3. Производящие функционалы

Состояния (5.2) на алгебре Борхерса характеризуют невзаимодействующие поля. Взаимодействие полей в терминах рождения и уничтожения частиц описывается хронологическими формами f^c, задаваемыми функционалами

$$W_n^c(x_1, \ldots, x_n) = \sum \theta\left(x_{i_1}^0 - x_{i_2}^0\right) \ldots \theta\left(x_{i_{n-1}}^0 - x_{i_n}^0\right) W_n\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\right), \qquad (5.10)$$

где сумма берется по всем перестановкам индексов $(i_1 \ldots i_n)$. Функционалы (5.10) симметричны, но в общем случае не являются непрерывными, а формы f^c — положительными на пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^{4n})$. Поэтому хронологические формы не задают состояний на алгебре Борхерса A_{RS^4}.

Замечание 5.3.1. Чтобы проиллюстрировать, в какой мере хронологические формы (5.10) не являются непрерывными, укажем, что хронологическая форма

$$W_1^c(x) = \theta(x) W_1(x)$$

принадлежит $S'(\mathbb{R})$, только если $W_1 \in S'(\mathbb{R}_\infty)$, где $\mathbb{R}_\infty$ — компактификация $\mathbb{R}$, получаемая присоединением отождествленных точек $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$ [2]. □

Чтобы использовать конструкцию ГНС для описания процессов рождения и уничтожения полей, перейдем к рассмотрению симметричных форм на алгебре Борхерса A_{RS^4} полей в евклидовом пространстве-времени $\mathbb{R}^4$. Заметим, что они отличны от функций Швингера (см. Приложение Б.3). Их виковский поворот (см. Приложение Б.4) дает полные функции Грина (хронологические вакуумные средние) релятивистских полей на пространстве Минковского.

Используем тот факт, что симметричные формы на алгебре Борхерса A_{RS^4} идентичны формам на симметричной тензорной алгебре B_{RS^4} евклидовых полей ϕ, получаемой как фактор алгебры A_{RS^4} по двустороннему идеалу, порожденному множеством элементов вида $\phi\phi' - \phi'\phi$, где $\phi, \phi' \in A_{RS^4}$. Коммутативная тензорная алгебра B_{RS^4} является топологической инволютивной алгеброй и представляет собой универсальную обертывающую алгебру абелевой ядерной группы Ли G_{RS^4} трансляций в RS^4. Поэтому состояния F на B_{RS^4} можно получить как векторные формы, отвечающие сильно непрерывным циклическим унитарным представлениям группы G_{RS^4}. Поскольку группа G_{RS^4} абелева, к ней применим способ построения представлений ядерной подгруппы G_ϕ группы ККС (см. § 4.6).

Пусть Q — вещественное ядерное пространство, наделенное скалярным произведением $\langle .|. \rangle$, и G_Q — абелева ядерная группа трансляций в Q. Ее сильно непрерывное циклическое унитарное представление $\pi(G_Q)$, как уже отмечалось, характеризуется производящей функцией (непрерывной функцией положительного типа) $Z(q)$ на Q, являющейся преобразованием Фурье

$$Z(q) = \int \exp\left[i\langle q, u\rangle\right] d\mu(u) \qquad (5.11)$$

некоторой положительной меры μ с полной массой 1 на топологически сопряженном пространстве Q'. Напомним, что такое представление реализуется унитарными операторами (4.94):

$$T(q) : \rho(u) \mapsto \exp\left[i\langle q, u\rangle\right] \rho(u)$$

в пространстве $L^2(Q', \mu)$ квадратично μ-интегрируемых функций $\rho(u)$ на Q'. Его тотализирующим вектором θ является класс функций, μ-эквивалентных функции $\rho(u) = 1$.

Замечание 5.3.2. Чтобы описать свойства этого представления, можно ввести алгебру фон Неймана

$$B = \left\{T(q) = \exp\left[i\langle q, u\rangle\right],\ q \in Q\right\}'', \tag{5.12}$$

являющуюся замыканием (в слабой и сильной топологиях) инволютивной алгебры, образованной линейной оболочкой множества $\pi(G_Q)$. Она абелева, и тотализирующим для нее служит тотализирующий вектор θ представления π. Поскольку $B \subset B'$, вектор θ является также отделяющим для B, т. е. алгебра фон Неймана B (5.12) согласно Предложению 3.3.2 является σ-конечной, а векторное состояние

$$\omega_\theta(T(q)) = \left\langle T(q)\theta|\theta\right\rangle = Z(q)$$

точным и нормальным. Легко убедиться, что соответствующий модулярный оператор $\Delta = \mathbb{1}$, а модулярная инволюция совпадает с обычной инволюцией. □

Ограничимся, как и ранее, рассмотрением производящих функций $Z(q)$ таких, что функция (4.92) является аналитической в 0 для всех $q \in Q$. В этом случае соответствующее состояние F на универсальной обертывающей алгебре B_Q группы G_Q дается формулой

$$F(q_1 \dots q_n) = i^{-n}\frac{\partial}{\partial\alpha^1}\dots\frac{\partial}{\partial\alpha^n}Z(\alpha^i q_i)\Big|_{\alpha^i=0} = \tag{5.13}$$
$$= \int\langle q_1, u\rangle \dots \langle q_n, u\rangle\, d\mu(u).$$

Из нее следует, что в приложении к квантовой теории поля, когда $Q = RS^4$, производящая функция $Z(Q)$ имеет физический смысл производящего функционала полных функций Грина (вакуумных ожиданий) (5.13) евклидовых полей, а выражение (5.11) задает представление этого производящего функционала в виде функционального интеграла по вещественному подпространству пространства обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^4)$.

Например, если μ — гауссова мера, ее преобразование Фурье имеет вид

$$Z(q) = \exp\left[-\frac{1}{2}M(q, q)\right], \tag{5.14}$$

где форма ковариаций M — невырожденная непрерывная положительно определенная билинейная форма на Q. Производящая функция (5.14) определяет непрерывную форму F на коммутативной тензорной алгебре B_Q, где

$$F(q) = 0, \qquad F(q_1 q_2) = M(q_1, q_2),$$

а вакуумные ожидания $F(q_1 \dots q_{n>2})$ подчиняются теореме Вика.

Замечание 5.3.3. Отметим, что в случае бесконечномерного пространства Q меру μ в функциональном интеграле (5.11), вообще говоря, не удается записать в явном виде. Привычное выражение

$$\exp\left[-S(\phi)\right]\prod_x\left[d\phi(x)\right]$$

в производящем функционале пертурбативной квантовой теории поля не является истинной мерой. В то же время, всякая мера μ на Q' однозначно определяется набором мер μ_N на всевозможных конечномерных фактор-пространствах

$$\mathbb{R}_N = \frac{Q'}{Q'_N},$$

где $Q'_N \subset Q'$ — подпространство непрерывных форм на Q, обращающихся в 0 на некотором конечномерном подпространстве $\mathbb{R}^N \subset Q$. Мера μ_N является образом меры μ при каноническом отображении $Q' \to \mathbb{R}_N$. В частности, ограничившись вакуумными ожиданиями только для некоторого фиксированного конечного набора полей $q^1, \ldots, q^N$, порождающих подпространство $\mathbb{R}^N \subset Q$, их производящую функцию можно записать в виде конечномерного интеграла

$$Z_N(\lambda_j q^j) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp(i\lambda_j u^j)\, d\mu_N(u^j), \tag{5.15}$$

где $\{u^j\}$ — координаты относительно дуального к $\{q^j\}$ базиса в $\mathbb{R}_N$. Например, если μ — гауссова мера с невырожденной матрицей ковариации M, мы приходим к известному выражению (A.13):

$$d\mu_N = \frac{(\det M)^{1/2}}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(M^{-1})_{ij}u^i u^j\right] d^N u, \tag{5.16}$$

где $M^{ij} = M(q^i, q^j)$. С физической точки зрения, Z_N (5.15) можно интерпретировать как эффективный производящий функционал, получаемый из полного производящего функционала Z (5.11) путем учета внутренних диаграмм по всем полям, кроме $q^1, \ldots, q^N$. □

Замечание 5.3.4. Подчеркнем также, что тройку (Q', μ, Q) можно интерпретировать как *случайный процесс*, где (Q', μ) — *вероятностное пространство* и $Q = Q''$ — *пространство случайных величин*. Если мера μ — гауссова, то это *гауссовский случайный процесс*.

Отметим, что на любом счетном множестве I можно определить гауссовский случайный процесс.

Пусть I — некоторое множество и $\mathbb{R}^I$ — векторное пространство вещественных функций f на I, наделенное *топологией поточечной сходимости*, т. е. топологией, задаваемой семейством преднорм

$$\{p_i(f) = |f(i)|, \quad i \in I\}.$$

Каждому элементу $i \in I$ сопоставим линейную форму

$$\epsilon_i : f \to f(i)$$

на $\mathbb{R}^I$. Такие формы составляют базис сопряженного к $\mathbb{R}^I$ пространства V.

Ядром положительного типа на I называется вещественная функция $M(i, j)$ на $I \times I$ такая, что

$$M(i, j) = M(j, i),$$

$$\sum_{\lambda,\beta=1}^{n} \lambda_\alpha \lambda_\beta M(i_\alpha, i_\beta) \geqslant 0,$$

каковы бы ни были положительные целые числа n, элементы $i_1, \ldots, i_n$ из I и действительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Если $M(i, j)$ — ядро положительного типа, то формула

$$M(\lambda^k \epsilon_k) = \sum_{i,j \in I} \lambda^i \lambda^j M(i, j) \tag{5.17}$$

определяет положительную квадратичную форму на V. Обратно, когда M — положительная квадратичная форма на V, тогда формула

$$M(i, j) = \frac{1}{2}\big(M(\epsilon_i + \epsilon_j) - M(\epsilon_i) - M(e_j)\big)$$

задает ядро положительного типа на I.

Ядро положительного типа $M(i, j)$ на I определяет гауссову промеру μ на пространстве $\mathbb{R}^I$ с формой ковариации M (5.17) на V. Если множество I счетно, то μ — мера [7]. В этом случае, если дополнительно предположить, что ядро $M(i, j)$ невырождено и диагонализуемо, гауссова мера μ является тензорным произведением $\bigotimes_{i \in I} \mu_i$ гауссовых мер

$$d\mu_i = M(i, i)^{1/2} \exp\left[-\frac{r^2}{2M(i, i)}\right] \frac{dr}{(2\pi)^{1/2}}, \qquad r \in \mathbb{R},$$

на $\mathbb{R}$. Для такой меры имеет смысл формальная запись

$$d\mu = (\det M)^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(M^{-1})_{ij} r^i r^j\right] \prod_{k \in I} \frac{dr^k}{(2\pi)^{1/2}},$$

которая является обобщением выражения (5.16) на счетномерное пространство. □

В случае евклидовых полей $Q = RS^4$, матрица ковариации M гауссовой меры задается некоторой обобщенной функцией $W \in S'(\mathbb{R}^8)$:

$$M(\phi_1, \phi_2) = \int W(y_1, y_2)\phi_1(y_1)\phi_2(y_2)\, d^4y_1\, d^4y_2. \tag{5.18}$$

Предположим, что $W(y_1, y_2)$ является функцией Грина некоторого положительного эллиптического дифференциального оператора:

$$L_y M(y, y') = \delta(y - y').$$

Тогда

$$W(y_1, y_2) = w(y_1 - y_2)$$

и

$$F(\phi_1\phi_2) = M(\phi_1, \phi_2) = \int w(y_1 - y_2)\phi_1(y_1)\phi_2(y_2)\, d^4y_1\, d^4y_2 =$$

$$= \int w(y)\phi_1(y_1)\phi_2(y_1 - y)\, d^4y\, d^4y_1 = \int w(y)\varphi(y)\, d^4y = \int w^F(q)\varphi^F(-q)\, d_4q,$$

$$y = y_1 - y_2, \qquad \varphi(y) = \int \phi_1(y_1)\phi_2(y_1 - y)\, d^4y_1.$$

Например, если

$$w(y_1 - y_2) = \int \frac{\exp\left[-iq(y_1 - y_2)\right]}{q^2 + m^2}\, d_4q \tag{5.19}$$

— функция Грина эллиптического оператора $-\Delta + m^2$, где q^2 — евклидов квадрат, матрица ковариации (5.18) характеризует свободные евклидовы поля с массой m.

Замечание 5.3.5. Функция $w(y_1 - y_2)$ (5.19) совпадает с функцией Швингера s_2 (B.14) на области определения последней $(y_1^0 - y_2^0) < 0$. □

Пусть обобщенная функция $w^F(q)$ удовлетворяет условию (B.15). Тогда ее виковский поворот (B.20) задает билинейный функционал

$$\widehat{w}(x) = \theta(x) \int\limits_{\overline{Q}_+} w^F(q) \exp(-qx)\, dq + \theta(-x) \int\limits_{\overline{Q}_-} w^F(q) \exp(-qx)\, dq$$

на полях ψ на пространстве Минковского.

Например, для свободного массивного евклидова скалярного поля, когда $w(y)$ дается выражением (5.19) и

$$w^F(q) = (q^2 + m^2)^{-1},$$

используя аналитичность $w^F(q)$ при $\operatorname{Im} q \cdot \operatorname{Re} q > 0$, легко показать, что

$$\widehat{w}(x) = -iD^c(x),$$

где $D^c(x)$ — известная причинная функция Грина.

Дополнения

Приведем в качестве дополнения два раздела алгебраической квантовой теории, которые, по нашему мнению, полезно иметь в виду при исследовании также и квантовых полевых моделей.

§ 1. Квантовая теория при конечной температуре

Учет температурных эффектов в квантовой теории поля приобрел сейчас принципиальное значение [51, 62]. Это связано с разработкой объединенных моделей фундаментальных взаимодействий, а также инфляционного сценария эволюции ранней Вселенной, в которых ключевым пунктом является спонтанное нарушение симметрий в результате формирования хиггсовского вакуума при определенной температуре. Таким образом, согласно современным представлениям хиггсовский вакуум в квантовой теории поля заведомо должен быть температурным объектом. Более того, он сам может быть источником температурных эффектов, выполняя роль своеобразного термостата. Здесь мы, однако, ограничимся только алгебраическим подходом к квантовой теории при конечной температуре. Суть состоит в том, что состояния квантовой системы при конечной температуре удовлетворяют так называемому условию Кубо—Мартина—Швингера (КМШ) [25, 33], которое аналогично модулярным условиям (3.6), (3.7) и может быть введено для всякого нормального точного состояния на σ-конечной алгебре фон Неймана наряду с модулярной группой автоморфизмов (см. § 3.3).

Условие КМШ обосновывают по-разному. Поясним эти условия сначала на примере следующей формальной квантовостатистической конструкции.

Пусть A_V — локальная C^*-алгебра с единицей, описывающая квантовую систему в «объеме» V, и H_V — гамильтониан этой системы, а $\phi_{V,\beta}$ — *гиббсовское равновесное состояние*

$$\phi_{V,\beta}(a) = \frac{\mathrm{Tr}[e^{-\beta H_V} a]}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_V}}, \qquad a \in A_V, \tag{6.1}$$

где $\beta = 1/T$ — обратная температура. При этом предполагается, что:

- A_V имеет точное представление в сепарабельном гильбертовом пространстве;
- гамильтониан H_V самосопряжен;
- $\exp[-\beta H_V]$ — оператор с конечным следом;
- существует состояние ϕ_β квазилокальной алгебры A_∞ — термодинамический предел состояний $\phi_{V,\beta}$ при $V \to \infty$.

Примером такой системы может служить спиновая решетка в магнитном поле B с гамильтонианом

$$H_V = \sum_k B(k)\sigma_k^3, \qquad k \in V \subset \mathbb{Z}_+.$$

Рассмотрим в A_V группу автоморфизмов

$$\tau_{t,V}(a) = e^{itH_V} a e^{-itH_V}, \qquad a \in A_V, \tag{6.2}$$

и запишем формальное тождество

$$\begin{aligned}\phi_{V\beta}(\tau_{t,V}(a)b) &= \frac{\operatorname{Tr}\left[e^{-\beta H_V}\left(e^{itH_V} a e^{-itH_V}\right)b\right]}{\operatorname{Tr} e^{-\beta H_V}} = \\ &= \frac{\operatorname{Tr}\left[\left(e^{i(t+i\beta)H_V} a e^{-i(t+i\beta)H_V}\right)e^{-\beta H_V} b\right]}{\operatorname{Tr} e^{-\beta H_V}} = \\ &= \frac{\operatorname{Tr}\left[e^{-\beta H_V} b\left(e^{i(t+i\beta)H_V} a e^{-i(t+i\beta)H_V}\right)\right]}{\operatorname{Tr} e^{-\beta H_V}} = \phi_{V,\beta}\left(b\tau_{t+i\beta,V}(a)\right),\end{aligned} \tag{6.3}$$

где мы использовали соотношения (2.11). Предположим, что существует термодинамический предел $\tau_t(A_\infty)$ семейства $\tau_{t,V}(A_V)$, хотя, поскольку гамильтониан неограниченной системы в общем случае не определен, нельзя заранее гарантировать, что автоморфизмы τ_t алгебры A_∞ имеют вид (6.2). Совершив формальный переход к термодинамическому пределу в выражении (6.3), получаем равенство

$$\phi_\beta(\tau_t(b)a) = \phi_\beta(a\tau_{t+i\beta}(b)), \tag{6.4}$$

которому, если термодинамический предел существует, должно удовлетворять состояние ϕ_β. Оно называется *условием КМШ*.

Условие КМШ (6.4), как уже отмечалось, имеет тот же вид, что и модулярные условия (3.6), (3.7) в теории Томиты—Такесаки. Это позволяет получить условие КМШ, исходя из группы модулярных автоморфизмов.

Приведем строгую формулировку условия КМШ.

Назовем *C^*-динамической системой* пару (A, τ), состоящую из C^*-алгебры A и сильно непрерывной однопараметрической группы τ_t, $t \in \mathbb{R}$, автоморфизмов A. Обозначим A_τ равномерно плотную в A инволютивную подалгебру целых аналитических для τ элементов из A. Она τ_t-инвариантна при всех $t \in \mathbb{R}$. Будем рассматривать также *W^*-динамическую систему* (B, τ), где B — алгебра фон Неймана и τ_t — ультраслабая однопараметрическая группа автоморфизмов B. Соответственно B_τ — ультраслабо плотное τ-инвариантное подмножество целых аналитических элементов из B.

Определение 6.1.1. Пусть (A, τ) — C^*-динамическая система. Состояние ω на алгебре A называется *(τ, β)-состоянием КМШ* (т. е. состоянием КМШ относительно группы автоморфизмов τ, соответствующее значению $\beta \geqslant 0$), если

$$\omega(a\tau_{i\beta}(b)) = \omega(ba) \tag{6.5}$$

для всех элементов из равномерно плотной τ-инвариантной инволютивной подалгебры в A_τ. □

Аналогично, если (B, τ) — W^*-динамическая система, состояние ω на алгебре B называется (τ, β)-состоянием КМШ, когда равенство (6.5) выполняется для всех элементов

из равномерно плотной τ-инвариантной инволютивной подалгебры в B_τ. Укажем связь между состояниями КМШ для C^*-динамической и W^*-динамической систем.

Пусть ω — (τ, β)-состояние КМШ C^*-динамической системы (A, τ) при $\beta > 0$ и $\tilde{\omega}$ — расширение ω до нормального состояния на алгебре фон Неймана $B_\omega = \pi_\omega(A)''$, где π_ω — представление алгебры A, определяемое ω ($B_\omega = \tilde{\pi}_\omega(B)$, где B — обертывающая алгебра фон Неймана для A (см. § 2)). Тогда существует единственная ультраслабо непрерывная группа $\tilde{\tau}$ автоморфизмов B_ω такая, что

$$\tilde{\tau}(\pi_\omega(A)) = \pi_\omega(\tau(A))$$

и $\tilde{\omega}$ является $(\tilde{\tau}, \beta)$-состоянием КМШ на алгебре B_ω.

Условие КМШ (6.5) определено только для целых τ-аналитических элементов алгебры A, что неудобно для приложений. Поэтому полезна следующая переформулировка условия КМШ.

Пусть (A, τ) — C^*-динамическая система, ω — состояние на A и $\beta \in \mathbb{R}$. Определим

$$D_\beta = \{z : z \in \mathbb{C},\ 0 < \operatorname{Im} z < \beta\},$$

и пусть $\widetilde{D}_{\beta \neq 0}$ — замыкание D_β, а $\widetilde{D}_{\beta=0} = \mathbb{R}$. Эквивалентны условия:

- ω — (τ, β)-состояние КМШ;
- для всякой пары элементов $a, b \in A$ существует комплексная функция $F_{a,b}(z)$, которая аналитична на D_β, ограничена и непрерывна на $\widetilde{D}_\beta$ и такая, что

$$F_{a,b}(t) = \omega(a\tau_t(b)), \qquad F_{a,b}(t + i\beta) = \omega(\tau_t(b)a). \tag{6.6}$$

Если эти условия выполняются, тогда

$$\sup_{z \in \widetilde{D}_\beta} |F_{a,b}(z)| \leqslant \|a\|\,\|b\|.$$

Приведем некоторые свойства состояний КМШ.

- Если ω — (τ, β)-состояние КМШ и δ — генератор τ, то для всех $a \in D(\delta)$

$$-i\beta\omega(a^*\delta(a)) \geqslant \omega(a^*a) \ln\left(\frac{\omega(a^*a)}{\omega(aa^*)}\right). \tag{6.7}$$

- Пусть ω — (τ, β)-состояние КМШ на C^*-алгебре A при $\beta > 0$. Тогда оно τ-инвариантно, т. е.

$$\omega(\tau_t(a)) = \omega(a), \qquad a \in A,$$

и следовательно существует унитарное представление U_ω группы τ в пространстве представления E_ω алгебры A такое, что

$$\pi_\omega(\tau_t(a)) = U_\omega(t)\pi_\omega(a)U_\omega^{-1}(t).$$

- Пусть (A, τ) — C^*-динамическая система и ω — (τ, β)-состояние КМШ. Тогда тотализирующий вектор θ_ω, определяемый состоянием ω, является отделяющим для бикоммутанта $\pi_\omega(A)'' = B_\omega$.

Последнее свойство и позволяет установить связь между теорией КМШ и уже упоминавшейся теорией Томита—Такесаки модулярной группы, определяемой точным нормальным состоянием на алгебре фон Неймана.

Предложение 6.1.2. Пусть B — алгебра фон Неймана и ω — нормальное состояние на B. Эквивалентны условия:

- ω является точным как состояние на $\pi_\omega(B)$, т. е. существует проектор $T \in B' \cap B$ такой, что $\omega(\mathbb{1} - T) = 0$ и $\omega|_{BT}$ — точная форма на BT;
- существует ультраслабо непрерывная однопараметрическая группа τ автоморфизмов B такая, что ω является $(\tau, 1)$-состоянием КМШ.

□

Если эти условия выполнены, то $\tau_t(T) = T$ и ограничение τ на BT является однозначно определенной модулярной группой автоморфизмов BT, ассоциированной с состоянием ω.

Аналогично состояние ω на C^*-алгебре A является состоянием КМШ относительно некоторой однопараметрической группы τ автоморфизмов $\pi_\omega(A)''$ в том и только том случае, когда $\tilde{\omega}$ — точное состояние на $\pi_\omega(A)''$. При этом группа τ определена однозначно.

Замечание 6.1.1. В этой связи напомним полезный критерий точности состояния. Пусть B — C^*-алгебра в гильбертовом пространстве E и θ — тотализирующий вектор, определяемый состоянием ϕ. Если из условия $\phi(a^*a)$ следует $\phi(aa^*)$ для всех $a \in A$, то вектор θ является отделяющим для A и состояние ϕ точное. □

Хотя модулярная группа точным состоянием ω определена однозначно, не однозначно ее представление унитарными операторами в пространстве E_ω (см. (3.9)). Дело в том, что в пространстве E_ω разные тотализирующие отделяющие векторы могут быть ассоциированы с одной и той же положительной нормальной формой ω на σ-конечной алгебре фон Неймана. Проиллюстрируем это следующим примером.

Пусть C^*-алгебра A совпадает с алгеброй $B(E)$ для некоторого сепарабельного гильбертова пространства E и ω — точное нормальное состояние (3.4) на A, задаваемое матрицей плотности ρ. В физических моделях это может быть локальная C^*-алгебра некоторой ограниченной квантовой системы, а ω — ее гиббсовское равновесное состояние (6.1). Построим представление π_ω алгебры A с тотализирующим вектором θ_ω, определяемое состоянием ω. Такое представление эквивалентно $B(E)$. Однако вопрос состоит в том, чтобы построить тотализирующий вектор θ_ω в явном виде.

Рассмотрим инволютивную алгебру $S(E)$ всех операторов Гильберта—Шмидта в E, снабженную скалярным произведением

$$\langle a_1 | a_2 \rangle = \mathrm{Tr}(a_1 a_2^*).$$

Напомним, что $S(E)$ — двусторонний идеал в алгебре $B(E)$. Это позволяет определить на $S(E)$ представление C^*-алгебры A левыми умножениями

$$\pi_\omega(a)b \stackrel{\text{def}}{=} ab, \qquad a \in A, \qquad b \in S(E), \tag{6.8}$$

с тотализирующим вектором $\theta_\omega = \rho^{1/2}$. Нетрудно проверить, что представление (6.8) и вектор $\rho^{1/2} \in S(E)$ действительно ассоциированы с формой

$$\omega(a) = \mathrm{Tr}(a\rho).$$

Состояние ω является (τ, β)-состоянием КМШ относительно группы автоморфизмов

$$\tau_t(a) = \rho^{-it/\beta} a \rho^{it/\beta}, \qquad a \in A, \tag{6.9}$$

которую в пространстве $S(E)$ можно реализовать операторами

$$U_t(a\rho^{1/2}) = \rho^{-it/\beta} a \rho^{1/2}. \tag{6.10}$$

Однако эти операторы не оставляют неподвижным тотализирующий вектор $\theta_\omega = \rho^{1/2}$. Построим модулярный оператор Δ и модулярную инволюцию J, ассоциированные с $(\pi_\omega(A), \theta_\omega)$. Определим

$$Jb = b^*, \qquad b \in B(E).$$

Легко показать, что для любых $a, b, c \in A$ выполняется равенство

$$\pi_\omega(a) J \pi_\omega(b) J \pi_\omega(c) \theta_\omega = aJbJc\rho^{1/2} = JbJac\rho^{1/2} = J\pi_\omega(b) J \pi_\omega(a) \pi_\omega(c) \rho^{1/2},$$

т. е.

$$J\pi_\omega(A)J = \pi_\omega(A)'. \tag{6.11}$$

Следовательно оператор J является модулярной инволюцией. Тогда, исходя из определения операторов

$$Sa\theta_\omega = a^*\theta_\omega, \qquad \Delta^{1/2} = JS$$

(см. § 3.3), получаем

$$\begin{aligned} &S = \rho^{-1/2} J \rho^{1/2}, \qquad \Delta^{1/2} = J\rho^{-1/2} J \rho^{1/2}, \\ &\Delta = J\rho^{-1/2} J \rho^{1/2} J \rho^{-1/2} J \rho^{1/2} = \rho J \rho^{-1} J. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Оператор (6.12) удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к модулярному оператору, в том числе, оставляет неподвижным тотализирующий вектор:

$$\Delta\theta_\omega = \Delta\rho^{1/2} = \rho^{1/2}.$$

Модулярная группа совпадает с группой (6.9) автоморфизмов алгебры A, но в пространстве $S(E)$ реализуется унитарными операторами

$$\begin{aligned} &V_t = \Delta^{-it/\beta} = U_t J U_t J, \\ &V_t(a\rho^{1/2}) = \rho^{-it/\beta} a \rho^{it/\beta} \rho. \end{aligned} \tag{6.13}$$

При этом, если генератором преобразований (6.10) является гамильтониан H (т. е. $\rho = \exp[-\beta H]$), то генератором преобразований (6.13) служит *оператор Лиувилля* (3.9)

$$H' = H - JHJ. \tag{6.14}$$

Необходимо отметить, что задание оператора J выводит за рамки представления $\pi_\omega(A)$ в силу свойства модулярной инволюции (6.11). В более общем виде это вытекает из следующего утверждения.

Предложение 6.1.3. Пусть B — алгебра фон Неймана с циклическим и отделяющим вектором θ, а Δ, J, P — ассоциированные с ними модулярный оператор, модулярная инволюция и естественный положительный конус. Если U — такой унитарный оператор, что $UP = P$, то существует проектор $T \in B \cap B'$ такой, что

$$UBU^* = BT + B'(\mathbb{1} - T).$$

□

Таким образом, автоморфизмы алгебры A действуют в объединении $\pi_\omega(A) \cup \pi_\omega(A)'$ и происходит как бы удвоение операторной алгебры (поскольку коммутант $\pi_\omega(A)'$ антиизоморфен $\pi_\omega(A)$). Этому удвоению можно придать следующий смысл. Обозначим $\tilde{a} = JaJ$. Тогда

$$\omega(\tau_t(b)a) = \omega\left(\tilde{a}^*\widetilde{\tau_t(b^*)}\right)$$

и модулярное условие можно записать в виде

$$\omega\left(a\tau_{t+i\beta}(b)\right) = \omega\left(\tilde{a}^*\widetilde{\tau_t(b^*)}\right).$$

Это означает, что в физических моделях (особенно в квантовой теории поля) комплексификацию параметра эволюции, возникающую при учете температуры, можно заменить удвоением операторной алгебры, что и делается в рамках так называемой *термополевой динамики* [21, 46, 51].

Проиллюстрируем процедуру удвоения на примере состояний КМШ алгебры ККС.

Пусть A — алгебра ККС на предгильбертовом пространстве Q, порождаемая элементами $a^{\pm}(q)$, $q \in Q$. Хотя, если быть строгим, следует рассматривать C^*-алгебру ККС, для простоты изложения ограничимся операторами $a^{\pm}(q)$. Здесь удобно ввести обозначения $a = a^-$, $a^* = a^+$. Пусть

$$\tau_t(a(q)) = a(\tau_t(q))$$

— группа автоморфизмов алгебры ККС, порождаемая группой автоморфизмов предгильбертова пространства Q с генератором H — самосопряженным оператором в Q, спектр которого не содержит нуля. Пусть ω — (τ, β)-состояние КМШ C^*-алгебры ККС и Δ, J, θ_ω — соответствующие модулярный оператор, модулярная инволюция и тотализирующий вектор. Тогда

$$\begin{aligned}\omega\left(a^*(q')a(q)\right) &= -\langle q|q'\rangle + \omega\left(a(q)a^*(q')\right) = \\ &= -\langle q|q'\rangle + \omega\left(a^*(q')\Delta a(q)\Delta^{-1}\right) = -\langle q|q'\rangle + \omega\left(a^*(q')\Delta a(q)\right).\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\omega\left(a^*(q')(\mathbb{1} - \Delta)a(q)\right) = -\langle q|q'\rangle \neq 0, \tag{6.15}$$

т. е. $a(q)$ не является оператором уничтожения относительно вакуума θ_ω. Так и должно быть, иначе состояние, определяемое θ_ω, не было бы точным.

Введем операторы

$$\tilde{a} = JaJ, \qquad \tilde{a}^* = Ja^*J,$$

которые удовлетворяют ККС и коммутируют с операторами a, a^* в силу условия (6.11). Будем обозначать $\pi_\omega(a)$ просто как a. Исходя из свойств модулярного оператора Δ, получаем

$$\Delta^{1/2} a\theta_\omega = \tilde{a}^*\theta_\omega, \qquad \Delta^{-1/2}\tilde{a}\theta_\omega = a^*\theta_\omega,$$
$$\omega\left(a^*(q')a(q)\right) = \omega\left(a(q)\Delta a^*(q')\right) = \omega\left(\tilde{a}^*(q)\tilde{a}(q')\right),$$

т.е. $\tilde{a}(q')$ также не является оператором уничтожения относительно вакуума θ_ω.

Однако, если q_k — собственные векторы оператора H, т.е.

$$H(q_k) = \lambda_k q_k,$$

можно, учитывая равенство (6.15), построить преобразования Боголюбова

$$b(q_k) = \mathrm{ch}(\Omega_k)a(q_k) + \mathrm{sh}(\Omega_k)\tilde{a}^*(q_k),$$
$$\tilde{b}^*(q_k) = \mathrm{sh}(\Omega_k)a(q_k) + \mathrm{ch}(\Omega_k)\tilde{a}^*(q_k), \tag{6.16}$$
$$\mathrm{sh}^2(\Omega_k) = \frac{e^{-\beta\lambda_k}}{1 - e^{-\beta\lambda_k}}, \tag{6.17}$$

такие, что $b^*(q_k)$, $b(q_k)$ — операторы рождения и уничтожения относительно вакуума θ_ω. Однако преобразования (6.16) в общем случае, если не удовлетворяется условие (4.126), не являются преобразованиями эквивалентности представлений алгебры ККС.

Аналогично можно рассмотреть состояния КМШ алгебр КАС, но в этом случае в результате удвоения операторы

$$\left(a,\ a^*,\ \tilde{a} = JaJ,\ \tilde{a}^* = Ja^*J\right)$$

не образуют алгебру КАС, поскольку элементы a и $\tilde{a}$ коммутируют, а не антикоммутируют. Эту трудность можно преодолеть посредством некоторой дополнительной конструкции, на которой мы здесь не станем останавливаться.

Мы рассмотрели случай ограниченных систем, но построение модулярных операторов (6.13) и процедура удвоения остаются справедливыми и в термодинамическом пределе. Более того, в этом пределе определен именно оператор H' (6.14), а не H. Поэтому эволюция описывается именно группой модулярных операторов (6.13). Сам переход к термодинамическому пределу удобно осуществлять в терминах функций Грина.

Пусть $(A_V, \tau_{t,V})$ — ограниченная C^*-динамическая система и ω_V — ее $(\tau_{t,V}, \beta)$-состояние КМШ. Определим двухточечные *функции Грина*

$$G_V(a, b; t) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_V\left(a\tau_{t,V}(b)\right). \tag{6.18}$$

Они удовлетворяют условиям:

(а) отображение $(a, b) \mapsto G_V(a, b; t)$ билинейно;

(б) отображение $t \mapsto G_V(a, b; t)$ непрерывно;

(в) $G_V(a, cb; 0) = G_V(ac, b; 0)$;

(г) $G_V(\mathbb{1}, \mathbb{1}; 0) = 1$;

(д) если $\{a_i\}_{1\leqslant i\leqslant n} \subset A_V$ и $\{t_i\}_{1\leqslant i\leqslant n} \subset \mathbb{R}$ — конечные последовательности, то

$$\sum_{i,j=1}^{n} G_V(a_i^*, a_j; t_j - t_i) \geqslant 0;$$

(e) существует такое β, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)G_V(a,b;t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+i\beta)G_V(b,a;-t)\,dt \tag{6.19}$$

для всех $a, b \in A_V$ и всех функций f, преобразования Фурье которых f^F относятся к классу бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Равенство (6.19) — это одна из форм условия КМШ.

Функции Грина (6.18) однозначно задают не только ограниченную, но и произвольную C^*-динамическую систему.

Пусть A — C^*-алгебра с единицей и

$$G : A \times A \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

— функция, удовлетворяющая выписанным выше условиям (a)–(e). Тогда

$$a \mapsto \omega(a) = G(\mathbb{1}, a; 0)$$

является состоянием на алгебре A. Обозначим $(E_\omega, \pi_\omega, \theta_\omega)$ определяемое ω представление A. Существуют гильбертово пространство E и сильно непрерывная однопараметрическая группа U_t, действующая в E_ω, такие, что

$$U_t E_\omega \subset E, \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$
$$G(a,b;t) = \left\langle U_t \pi_\omega(b)\theta_\omega \middle| \pi_\omega(a^*)\theta_\omega \right\rangle.$$

Если для G также выполняется равенство (6.19), то вектор θ_ω является отделяющим для $\pi_\omega(A)''$ и группа автоморфизмов бикоммутанта $\pi_\omega(A)''$, определяемая операторами U_t, совпадает с модулярной группой, ассоциированной с $(\pi_\omega(A)'', \theta_\omega)$.

При выполнении определенных требований, которые мы не будем здесь перечислять [33], система, задаваемая локальной алгеброй A_V и функциями Грина G_V, имеет своим термодинамическим пределом систему, описываемую квазилокальной алгеброй A_∞ и функциями Грина G, удовлетворяющими условиям (a)–(e).

Рассмотрим теперь множество состояний КМШ относительно данной модулярной группы.

Пусть B — алгебра фон Неймана, ω — ее точное нормальное состояние, τ — соответствующая модулярная группа, а ϕ — некоторое другое нормальное состояние B. Эквивалентны условия:

- ϕ — $(\tau, 1)$-состояние КМШ;
- существует положительный оператор T, присоединенный к центру $B \cap B'$ и такой, что

$$\phi(a) = \omega\left(T^{1/2} a T^{1/2}\right), \qquad a \in B.$$

Оператор T единствен. В частности, ω является единственным (τ, β)-состоянием КМШ тогда и только тогда, когда B — фактор. Кроме того, если ω и ϕ — два точных нормальных состояния алгебры фон Неймана B, а τ^ω и τ^ϕ — соответствующие модулярные

группы, то существует сильно непрерывное однопараметрическое семейство $t \mapsto T_t$ унитарных элементов в B таких, что

$$\tau_t^{\phi}(a) = T_t \tau_t^{\omega}(a) T_t^*, \qquad T_{t+s} = T_t \tau_t^{\omega}(T_s), \qquad a \in B.$$

Приведем некоторые свойства множества K_β (τ, β)-состояний КМШ C^*-динамической системы, предполагая (без существенных ограничений общности), что C^*-алгебра A содержит единицу:

- K_β выпукло и слабо* компактно;
- K_β — симплекс;
- ω — крайняя точка K_β тогда и только тогда, когда состояние ω факторное;
- две крайние точки ω_1 и ω_2 из K_β или равны, или дизъюнктны;
- для $\omega \in K_\beta$ единственная максимальная мера μ_ω на K_β с барицентром ω является центральной.

В квантовой статистике состояния КМШ описывают равновесные состояния, а крайние состояния КМШ — чистые термодинамические фазы. В частности, если состояние ω *сепарабельно* (т. е. гильбертово пространство E_ω сепарабельно), мера μ_ω (см. § 2.6) сосредоточена на множестве крайних точек и равновесное состояние представляет собой суперпозицию чистых термодинамических фаз.

Разложение по чистым термодинамическим фазам при определенных условиях совпадает с τ-эргодическим разложением.

Пусть (A, τ) — C^*-динамическая система (где A — C^*-алгебра с единицей), K_β — множество (τ, β)-состояний КМШ, $\omega \in K_\beta$ и $\mu \in M_\omega(K_\beta)$ — однозначно определенная максимальная мера с барицентром ω. Эквивалентны условия:

- существует однозначно определенная максимальная мера $\nu_\omega \in M_\omega(E^G(A))$ такая, что $\mu_\omega = \nu_\omega$, где $E^G(A)$ — пространство τ-инвариантных состояний на A;
- пара (A, ω) асимптотически абелева, т. е.

$$\lim_{t_2 - t_1 \to \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \omega\big(a\,[\tau_t(b), c]\,d\big)\,dt = 0 \tag{6.20}$$

  для всех $a, b, c, d \in A$;

- состояние ω является центральным.

В частности, крайнее состояние КМШ ω может быть эргодическим тогда и только тогда, когда выполняется условие (6.20).

Заметим, что суперпозиция состояний КМШ при разных β не является состоянием КМШ, т. е. равновесным состоянием, и для неограниченных систем состояния КМШ, вообще говоря, весьма чувствительны к вариациям β.

Пусть (A, τ) — C^*-динамическая система и ω, ϕ — два состояния КМШ при разных β_1 и β_2. Если $\pi_\omega(A)''$ — алгебра фон Неймана *типа III* (т. е. $\tau^\omega|_{B_\omega T}$ не является внутренней группой автоморфизмов $B_\omega T$ ни для одного проектора T из центра $B_\omega \cap B_\omega'$),

состояния ω и ϕ дизъюнктны. Например, термодинамический предел равновесных систем бозе-частиц описывается алгебрами фон Неймана типа III.

Определение состояния КМШ можно распространить на экстремальный случай $\beta = +\infty$ — нулевой температуры.

Пусть (A, τ) — C^*-динамическая система, δ — генератор τ и ω — состояние на A. Состояние ω называется (τ, ∞)-состоянием КМШ, если

$$-i\omega(a\delta(a)) \geqslant 0$$

(см. (6.7) для всех $a \in D(\delta)$. Эквивалентны следующие условия:

- ω — (τ, ∞)-состояние КМШ;
- для $a, b \in A$ существует функция $F_{a,b}(z)$ такая, что

$$F_{a,b}(t) = \omega(a\tau_t(b)),$$

непрерывная при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, ограниченная и аналитическая при $\operatorname{Im} z > 0$;

- ω является τ-инвариантным и, если

$$e^{itH_\omega}\pi_\omega(a)\theta_\omega = \pi_\omega(\tau_t(a))\theta_\omega$$

— унитарное представление τ в E_ω, то $H_\omega \geqslant 0$ и

$$e^{itH_\omega} \in \pi_\omega(A)'', \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Имеется ряд существенных отличий между состояниями КМШ при $\beta < \infty$ и $\beta = \infty$. Одно из них состоит в том, что (τ, ∞)-состояние КМШ ω на $\pi_\omega(A)$ не является точным.

§ 2. Системы со многими вакуумами

Рассмотрим в этом параграфе некоторые общие свойства неинвариантных и неэквивалентных состояний квантовых систем. Проблема состоит в том, что переходы между такими состояниями не выполняются унитарными операторами. Если квантовая система имеет подобные состояния, то о ней можно говорить как о системе со многими вакуумами. Под *вакуумом* мы будем понимать тотализирующий вектор θ представления, определяемого состоянием системы, реализующий это состояние как векторную форму (2.8), называемую *вакуумным средним*. Всякий вакуум характеризуется таким образом, но, помимо этого, в зависимости от рассматриваемой модели на него накладываются еще другие условия — минимума энергии, трансляционной инвариантности и т.д. [9]. Мы здесь не касаемся этих дополнительных требований и исследуем только проблему переходов между вакуумами, являющимися тотализирующими векторами неэквивалентных представлений.

Начнем с критерия, как различать неэквивалентные состояния. Он основывается на Предложениях 2.4.2 и 2.4.4. Положительные формы f_1 и f_2 на C^*-алгебре A связаны с одним и тем же ее представлением тогда и только тогда, когда $f_2(a)$ является пределом по норме в A последовательности форм

$$a \mapsto f_1(b_k^* a b_k), \qquad b_k \in A,$$

т. е. когда форма f_2 получается из формы f_1 асимптотически внутренним линейным отображением алгебры A:

$$f_2(a) = f_1(g(a)), \qquad g(a) = \lim_{\{b_k\}} b_k^* a b_k. \tag{6.21}$$

Если f_1 и f_2 — чистые состояния, то $g(a)$ в (6.21) — внутренний автоморфизм

$$g(a) = U^* a U$$

алгебры $\tilde{A}$ (алгебры A с присоединенной единицей), осуществляемый посредством некоторого унитарного элемента $U \in \tilde{A}$ (см. Предложение 2.4.8).

В физической интерпретации это означает, что неэквивалентные вакуумы квантовой системы не могут быть переведены друг в друга операторами из ее алгебры. Иллюстрацией могут служить неэквивалентные состояния спиновой решетки (см. § 4.8), отличающиеся друг от друга ориентацией спинов не менее чем в бесконечном числе узлов.

В этой связи встает вопрос — существует ли алгебра, операторы которой могут выполнять переход между неэквивалентными вакуумами, и существует ли оператор, по собственным значениям которого эти вакуумы можно было бы различать. Оказывается, что существуют, хотя возникает вопрос об их физическом смысле.

Пусть A — C^*-алгебра и f_1, f_2 — состояния на ней, определяющие представления π_1 и π_2 этой алгебры в гильбертовых пространствах E_1 и E_2 с тотализирующими векторами θ_1 и θ_2. Рассмотрим представление $\rho = \pi_1 \oplus \pi_2$ алгебры A в пространстве $E_1 \oplus E_2$, а также алгебру $B(E_1 \oplus E_2)$ и алгебру фон Неймана $B = \rho(A)''$, порождаемую $\rho(A)$ в $E_1 \oplus E_2$. Векторы θ_1 и θ_2 являются тотализирующими для C^*-алгебры $B(E_1 \oplus E_2)$ и задают векторные состояния ω_{θ_1} и ω_{θ_2}, продолжающие на $B(E_1 \oplus E_2)$ состояния f_1 и f_2 на алгебре A. При этом существует унитарный оператор $U \in B(E_1 \oplus E_2)$ такой, что $\theta_2 = U\theta_1$ и

$$\omega_{\theta_2}(b) = \langle b\theta_2 | \theta_2 \rangle = \langle U^* b U \theta_1 | \theta_1 \rangle = \omega_{\theta_1}(U^* b U)$$

для всех $b \in B(E_1 \oplus E_2)$. Таким образом, в «расширенной» квантовой системе с C^*-алгеброй $B(E_1 \oplus E_2)$ «расширенные» состояния f_1 и f_2 оказываются эквивалентными. Коммутант $B' = \rho(A)'$ алгебры фон Неймана B содержит проекторы P и $(\mathbb{1} - P)$ на E_1 и E_2. Поэтому можно ввести оператор

$$T = \lambda_1 P + \lambda_2(\mathbb{1} - P), \tag{6.22}$$

для которого пространства E_1 и E_2 будут собственными подпространствами с разными собственными значениями. Если представления π_1 и π_2 дизъюнктны, оператор (6.22) можно выбрать из центра самой алгебры B, т. е. $T \in B \cap B'$.

Приведем более общую конструкцию. Пусть $F(A)$ — множество положительных форм на C^*-алгебре A и π_f — представления, определяемые $f \in F(A)$. Рассмотрим универсальное представление

$$\pi = \bigoplus_{f \in F(A)} \pi_f$$

алгебры A в гильбертовом пространстве

$$E_\pi = \bigoplus_{f \in F(A)} E_f.$$

Оно точно. Обозначим B слабое замыкание $\pi(A)$, которое является алгеброй фон Неймана в E_π. Она называется *обертывающей алгеброй фон Неймана* для A и обладает следующими свойствами [10].

- Любая нормальная положительная форма на B является векторной формой ω_θ для некоторого $\theta \in E_\pi$.
- Для любой непрерывной формы f на A существует единственная слабо непрерывная форма $\tilde{f}$ на B такая, что $\tilde{f}(\pi(a)) = f(a)$ для всех $a \in A$.
- Отображение $f \to \tilde{f}$ является изометрическим изоморфизмом банахова пространства A', сопряженного к A, на преддвойственное пространство для B, который переводит множество положительных форм на A в множество положительных нормальных форм на B.
- Определим форму
$$\tilde{y} : f \mapsto \tilde{f}(y), \qquad y \in B,$$
на A'. Тогда $y \mapsto \tilde{y}$ представляет собой изометрический изоморфизм B на A'' (непрерывный в слабой операторной топологии на B и топологии $\sigma(A'', A')$ на A'').
- Для всякого представления τ алгебры A существует единственное нормальное представление $\tilde{\tau}$ алгебры фон Неймана B в E_τ такое, что
$$\tilde{\tau}(\pi(a)) = \tau(a), \qquad \forall a \in A,$$
и $\tilde{\tau}(B)$ есть слабое замыкание $\tau(A)$.

Алгебра B представляет собой прямую сумму алгебр фон Неймана $\tilde{\pi}_f(B)$, действующих в пространствах E_f, и ее центр $B \cap B'$ содержит проекторы P_f на подпространства $E_f \subset E_\pi$. Причем эти проекторы образуют разбиение $\mathbb{1}$. В результате можно построить оператор
$$T = \sum_{f \in F(A)} \lambda(f) P_f, \tag{6.23}$$
собственные подпространства которого E_f различаются собственными значениями $\lambda(f)$, где $\lambda(f)$ — некоторая функция из $F(A)$ в $\mathbb{R}$. В общем случае оператор T (6.23) или принадлежит центру B, или присоединен к нему. Он обладает свойством
$$\tilde{f}(Ta) = \lambda(f)\tilde{f}(a), \qquad \forall a \in B,$$
т. е. всякая форма $\tilde{f}$ (и форма f, продолжением которой на B является $\tilde{f}$) оказывается обобщенным собственным вектором оператора T с собственным значением $\lambda(f)$.

Оператор (6.23) является вариантом так называемого *оператора суперотбора*, когда имеются состояния, не переводимые друг в друга элементами алгебры наблюдаемых [24]. Например, операторами суперотбора, различающими неэквивалентные неприводимые представления группы Ли G и ее C^*-алгебры $C^*(G)$, служат операторы Казимира из универсальной обертывающей алгебры $\overline{\mathcal{G}}$ алгебры Ли $\mathcal{G}$. Отметим, что операторы суперотбора принято связывать с макроскопическими наблюдаемыми, поскольку они коммутируют, а значит совместны, со всеми операторами из алгебры наблюдаемых квантовой системы. Это говорит за то, чтобы рассматривать неэквивалентные состояния как взаимно классические, переходы между которыми в рамках данной квантовой системы

невозможны (см. также Замечание 2.4.3). Однако приведенная выше конструкция обертывающей алгебры фон Неймана показывает, что, вообще говоря, может существовать более широкая квантовая система, относительно которой эти состояния перестают быть взаимно классическими.

Рассмотрим теперь случай, когда состояния на C^*-алгебре A связаны некоторым ее автоморфизмом g (не обязательно внутренним), т. е.

$$(g(f))(a) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(a)), \qquad a \in A. \tag{6.24}$$

Покажем, что пространства представлений, определяемые такими состояниями, изоморфны.

Зададим отображение (см. обозначения Теоремы 2.4.3)

$$\gamma_g : \frac{\tilde{A}}{N_f} \ni \eta_f(a) \mapsto \eta_{g(f)}(g(a)) \in \frac{\tilde{A}}{N_{g(f)}}, \qquad a \in \tilde{A}. \tag{6.25}$$

Оно получается факторизацией преобразования автоморфизма $a \mapsto g(a)$, которая согласуется с отношениями эквивалентности, отвечающими факторизациям алгебры A по левым идеалам N_f и $N_{g(f)}$, поскольку $N_{g(f)} = g(N_f)$ и из условия $a = b \pmod{N_f}$ следует условие $g(a) = g(b) \pmod{g(N_f)}$. Если автоморфизм g непрерывен, то отображение (6.25) непрерывно. Оно обладает непрерывным обратным, а следовательно является гомеоморфизмом топологических пространств $\tilde{A}/N_f$ и $\tilde{A}/N_{g(f)}$. Кроме того, поскольку структуры предгильбертова пространства в $\tilde{A}/N_f$ и $\tilde{A}/N_{g(f)}$ определяются факторизованными формами $\tilde{f}(a)$ и $\tilde{f}_{g(f)}(a) = \tilde{f}(g(a))$, отображение (6.25) осуществляет изоморфизм предгильбертовых пространств $\tilde{A}/N_f$ и $\tilde{A}/N_{g(f)}$, который расширяется до изоморфизма гильбертовых пространств E_f и $E_{g(f)}$ представлений π_f и $\pi_{g(f)}$, определяемых формами f и $g(f)$. В частности, $\gamma_g(\theta_f) = \theta_{g(f)}$. Так как для всех $a, b \in A$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\left(\gamma_g^{-1}\pi_{g(f)}(a)\gamma_g\right)\left(\eta_f(b)\right) &= \left(\gamma_g^{-1}\pi_{g(f)}(a)\right)\left(\eta_{g(f)}(g(b))\right) = \\ &= \gamma_g^{-1}\left(\eta_{g(f)}(ag(b))\right) = \eta_f\left(g^{-1}(a)b\right) = \pi_f\left(g^{-1}(a)\right)\left(\eta_f(b)\right),\end{aligned}$$

изоморфизм (6.25) гильбертовых пространств порождает изоморфизм операторных алгебр $\pi_{g(f)}(A)$ и $\pi_f(g^{-1}(A))$. Однако это не означает эквивалентность представлений $\pi_{g(f)}(A)$ и $\pi_f(A)$, поскольку в общем случае не эквивалентны представления $\pi_f(g^{-1}(A))$ и $\pi_f(A)$ алгебры A. Однако, если $g(a) = U^*aU$ — внутренний изоморфизм, то указанная эквивалентность имеет место. Отметим еще, что, когда представление π_f неприводимо, представление $\pi_{g(f)}$ тоже неприводимо, поскольку, если $g(f) - f' \geqslant 0$, то $f - g^{-1}(f') \geqslant 0$ и $g^{-1}(f') = \lambda f$, а значит $f' = \lambda g(f)$, т. е. $g(f)$ — чистая форма.

Отображение (6.25) позволяет реализовывать все представления $\pi_{g(f)}(A)$, определяемые формами $g(f)$, получаемыми из данного состояния f на алгебре A посредством ее автоморфизмов, в одном и том же гильбертовом пространстве E_f представления $\pi_f(A)$. Примером могут служить преобразования Боголюбова алгебры ККС.

Рассмотрим несколько примеров автоморфизмов алгебр наблюдаемых.

Как уже было отмечено, для всякого представления C^*-алгебры A, определяемого состоянием f, существует единственное нормальное представление $\tilde{\pi}_f$ в E_f обертывающей алгебры фон Неймана B для A такое, что

$$\tilde{\pi}_f(\pi(A)) = \pi_f(A),$$

где π — универсальное представление A. В частности, это означает, что на E_f может быть определена матрица плотности ρ и

$$f(a) = \mathrm{Tr}(\rho\pi_f(a)), \qquad a \in A.$$

Если f — состояние C^*-алгебры A, при котором алгебра фон Неймана $\tilde{\pi}_f(B)$ оказывается σ-конечной, то $g(f)$ эквивалентно f для всех автоморфизмов g алгебры A, продолжаемых на слабое замыкание $\pi_f(A)$, поскольку они в этом случае выполнимы унитарными операторами в E_f (см. § 3.3).

Состояния $g(f)$ и f эквивалентны также, когда g — элементы 1-параметрической слабо непрерывной группы автоморфизмов с полуограниченным спектром (см. § 3.2).

На этом основании можно сделать вывод, что в широком диапазоне квантовых моделей преобразования симметрий не сопровождаются переходами между неэквивалентными состояниями. Хотя нетрудно привести и контрпримеры.

Пример 6.2.1. Рассмотрим спиновую решетку $\mathbb{Z}_+$ из § 4.8 и состояние f, характеризуемое задающей последовательностью $(1, 1, \ldots)$. Совершим автоморфизм алгебры наблюдаемых

$$\begin{aligned}
&\sigma_k^1 \to \sigma_k^1 \cos\alpha + \sigma_k^3 \sin\alpha,\\
&\sigma_k^3 \to -\sigma_k^1 \sin\alpha + \sigma_k^3 \cos\alpha,\\
&\sigma_k^2 \to \sigma_k^2.
\end{aligned}$$

В результате состояние f перейдет в состояние f' с задающей последовательностью $(\cos\alpha, \cos\alpha, \ldots)$, которое не эквивалентно f, поскольку ряд (4.152) расходится. □

Пример 6.2.2. Другой пример преобразований симметрий, сопровождаемых переходами между неэквивалентными состояниями дают сдвиги пространства X в алгебре C^* функций $A(X)$ на X (см. § 4.7). Пусть π — неприводимое представление алгебры $A(X)$ и f_π — соответствующее состояние на $A(X)$. При сдвиге $x \to x'$ состояние

$$f_x : a \mapsto f_\pi(a(x)), \qquad a \in A(X),$$

определяющее неприводимое представление $\rho(\pi, x)$ алгебры $A(X)$, переходит в состояние

$$f_{x'} : a \mapsto f_\pi(a(x')),$$

которое задает неприводимое представление $\rho(\pi, x')$, неэквивалентное $\rho(\pi, x)$. □

Пример 6.2.3. Укажем также на неэквивалентность, которая возникает при переходе от инвариантного состояния к неинвариантному. Ограничимся неприводимыми представлениями. Пусть чистое состояние f инвариантно относительно некоторой группы G автоморфизмов алгебры A. Если чистое состояние f' эквивалентно f, то существует такой унитарный элемент $U \in A$, что

$$f'(a) = f(U^* a U),$$

и состояние f' инвариантно относительно изоморфной G группы автоморфизмов алгебры A. Таким образом, эквивалентные чистые состояния имеют изоморфные группы инвариантности и изоморфизм этих групп осуществляется внутренним автоморфизмом C^*-алгебры A. □

Остановимся подробнее на ситуации, когда в C^*-алгебре A действуют две (сильно непрерывные) группы автоморфизмов — однопараметрическая группа τ (можно считать, что это некоторая динамическая группа) и группа G. Рассмотрим несколько вариантов.

Пусть группы τ и G коммутируют и f — единственное G-инвариантное состояние A. Тогда из равенства

$$f_t(a) \stackrel{\text{def}}{=} f(\tau_t(a)) = f(G\tau_t(a)) = f(\tau_t G(a)) = f_t(G(a)), \qquad a \in A,$$

следует, что состояния f_t для всех τ_t являются G-инвариантными. Поскольку по предположению f — единственное G-инвариантное состояние, то $f_t = f$, т.е. состояние f устойчиво относительно преобразований динамической группы τ. Тогда согласно Предложению 3.4.1 группа τ действует унитарными операторами в пространстве представления E_f и ее генератор имеет в своем спектре 0.

Допустим теперь, что группы τ и G не коммутируют и состояние f является τ-инвариантным, но G-неинвариантным. Пусть симметрическое дифференцирование δ в A — генератор τ, и пусть g — такой элемент из G, что

$$\delta(g) \stackrel{\text{def}}{=} \delta g - g\delta \neq 0$$

и принадлежит $D(\delta)$. Тогда

$$f_g(\delta(a)) = f(g\delta(a)) = f(\delta g(a)) - f(\delta(g)(a)) = -f(\delta(g)(a)) \neq 0, \qquad a \in D(\delta),$$

т. е. состояние $f_g = f \circ g$ оказывается τ-неинвариантным. Вместо этого оно инвариантно относительно преобразований с генератором $\delta g - g\delta g^{-1}$.

Рассмотрим случай, когда группа G компактна и коммутирует с группой τ; причем в центре G содержится такой автоморфизм σ, что $\sigma^2 = \mathbb{1}$. Обозначим A^G подалгебру A, состоящую из G-инвариантных элементов, а A_+ и A_- — четную и нечетную подалгебры A относительно автоморфизма σ, т. е.

$$A_\pm = \{a \,:\, \sigma(a) = \pm a,\ \ a \in A\}.$$

Предположим также, что выполняются асимптотические соотношения

$$\lim_{|t|\to\infty} \|[a, \tau_t(b)]\| = 0, \qquad a \in A, \qquad b \in A_+,$$

$$\lim_{|t|\to\infty} \|\{a, \tau_t(b)\}\| = 0, \qquad a, b \in A_-.$$

При этих условиях на систему (A, τ, G, σ), если ω — τ-инвариантное эргодическое состояние на A^G, существует расширение ω до τ-инвариантного крайнего (в множестве таких расширений) состояния ϕ на C^*-алгебре A, и любые два таких расширения ϕ_1 и ϕ_2 связаны соотношением $\phi_1 = \phi_2 \circ g$, $g \in G$ [33]. В частности, группы G_1 и G_2, оставляющие инвариантными состояния ϕ_1 и ϕ_2, изоморфны и сопряжены в группе G. С физической точки зрения это означает, что степень нарушения симметрии определяется состоянием ω на подалгебре G-инвариантных элементов C^*-алгебры A. Причиной являются кластерные свойства τ-инвариантных крайних состояний рассматриваемой системы.

Предложение 6.2.1. Пусть (A, τ, G, σ) — описанная выше система и ϕ — τ-инвариантное состояние на A. Тогда эквивалентны условия:

- ϕ — эргодическое состояние;
- ϕ обладает кластерным свойством

$$\lim_{t_2-t_1\to\infty}\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\phi(a\tau_t(b))\,dt=\phi(a)\phi(b).$$

□

В частности, рассмотрим случай, когда τ — модулярная группа в C^*-алгебре A, в которой непрерывно действует еще группа автоморфизмов G. Пусть ω — состояние КМШ. Если оно G-инвариантно, то

$$\omega(ab)=\omega\left(bg^{-1}\Delta g(a)\right)$$

для всех $a,b\in A$, $g\in G$, т.е. модулярная группа коммутирует с группой G. Когда состояние ω является G-неинвариантным, т.е.

$$\omega_g(a)=\omega(ga)\neq\omega(a),$$

то

$$\omega_g(ab)=\omega_g\left(bg^{-1}\Delta g(a)\right),$$

и в результате, если операторы $g\in G$ и Δ коммутируют, состояние ω_g — еще одно, помимо ω, состояние КМШ для данной модулярной группы. Этого не может быть, когда ω — факторное (т.е. крайнее) состояние. Следовательно, если крайнее состояние КМШ G-неинвариантно, то модулярный оператор Δ тоже G-неинвариантен. Более конкретно характер такой G-неинвариантности можно выявить, рассмотрев, как и выше, систему (A,τ,G,σ). Если ω — крайнее (τ,β)-состояние КМШ алгебры A^G при $\beta>0$ такое, что соответствующее представление π_ω алгебры A^G точно, то крайнее τ-инвариантное состояние ϕ алгебры A является β-состоянием КМШ относительно однопараметрической группы автоморфизмов A вида $t\mapsto\tau_t g_t$, где $t\mapsto g_t$ — однопараметрическая подгруппа из центра группы

$$G_\phi=\{g\,:\,\phi\circ g=\phi,\quad g\in G\}$$

— стабилизатора состояния ϕ. Группа g_t состоянием ϕ определяется однозначно.

Группа $\tau_t g_t$ выполняется в пространстве представления E_ϕ унитарными операторами, и ее генератором является сумма

$$H_G=H+\lambda I,\qquad \lambda\in\mathbb{R},\tag{6.26}$$

G-инвариантного генератора H группы τ и G_ϕ-инвариантного, но G-неинвариантного генератора I подгруппы g_t группы G. Таким образом, в состоянии ϕ имеет место нарушение симметрии с группой нарушенных симметрий G и группой точных симметрий G_ϕ. Причем, что важно подчеркнуть, необходимым условием такого нарушения является переход к гамильтониану вида (6.26). Матрица плотности ограниченной равновесной системы в этом случае равна

$$\rho_{V,\beta}=\frac{e^{-\beta(H_V+\lambda I)}}{\operatorname{Tr}e^{-\beta(H_V+\lambda I)}}.$$

Например, если A — C^*-алгебра ККС или КАС, порожденная операторами $a^{\pm}(q)$, и G — группа фазовых преобразований

$$g_\alpha(a^{\pm}(q)) = e^{\pm i\alpha} a^{\pm}(q),$$

то λ — химический потенциал.

Приложение А

Меры

Гильбертовы и оснащенные гильбертовы пространства допускают реализацию в виде тех или иных пространств интегрируемых функций. Это делает теорию мер одной из математических основ алгебраической квантовой теории. При этом приходится выходить за привычные рамки мер на компактных пространствах, рассматривая более общие случаи мер, включая меры на бесконечномерных векторных пространствах [7, 8, 38].

1. Меры на локально компактных пространствах

Мерой на локально компактном пространстве X считается любая непрерывная линейная форма μ на пространстве $\mathcal{K}(X)$ непрерывных вещественных функций с компактным носителем из Примера 1.1.6. Значение этой формы на функции $f \in \mathcal{K}(X)$ называется *интегралом* $\int f\, d\mu$ от f относительно меры μ. Пусть K — компактное подмножество X и ϕ_K — его *характеристическая функция*, т. е. равная 1 на K и 0 на $X \setminus K$. *Мерой множества* K называется интеграл от характеристической функции $\mu(K) = \mu(\phi_K)$.

Требование непрерывности μ можно заменить следующим эквивалентным условием. Пусть $\{K_i\}$ — семейство компактных подмножеств из X, внутренности которых образуют покрытие X. Для того чтобы линейная форма μ на $\mathcal{K}(X)$ была мерой, необходимо и достаточно существование для каждого K_i такого числа λ_i, что

$$|\mu(f)| \leqslant \lambda_i \|f\| \tag{A.1}$$

для любой функции $f \in \mathcal{K}(X)$ с носителем в K_i. Если μ и ν — две меры на X такие, что $\mu(K) = \nu(K)$ для произвольного компактного подмножества $K \subset X$, то $\mu = \nu$.

Пример А.1. Легко убедиться, что для всякой точки $x \in X$ отображение

$$\varepsilon_x : f \mapsto f(x)$$

пространства $\mathcal{K}(X)$ в $\mathbb{R}$ удовлетворяет условию (А.1), где $M_K = 1$ для всякого компактного множества K, содержащего x. Тем самым ε_x является мерой на X. Она именуется *мерой Дирака*. □

Носителем $\operatorname{supp}(\mu)$ меры μ на локально компактном пространстве X называется замкнутое множество, являющееся дополнением наибольшего множества U из всех открытых подмножеств X, на котором мера μ обращается в нуль, т. е. $\mu(f) = 0$ для всех $f \in \mathcal{K}(U) \subset \mathcal{K}(X)$. В частности, всякая мера на X с конечным носителем (*точечная мера*) является линейной комбинацией мер Дирака из Примера А.1.

Обозначим $M(X) = \mathcal{K}(X)'$ векторное пространство мер на локально компактном пространстве X. Это сопряженное к $\mathcal{K}(X)$ пространство может быть наделено локально выпуклой отделимой топологией равномерной сходимости на некотором семействе слабо ограниченных множеств $\mathcal{V}$ из $\mathcal{K}(X)$. Наиболее употребительной топологией в $M(X)$

является слабая* топология — топология равномерной сходимости на семействе конечных множеств из $\mathcal{K}(X)$, которая называется *широкой топологией* в $M(X)$.

Мера на локально компактном пространстве X называется *положительной*, если $\mu(f) \geqslant 0$ для всех $f \in \mathcal{K}(X)$. Всякой мере μ можно сопоставить положительную меру $|\mu|(f) = |\mu(f)|$ с тем же носителем. Обозначим множество положительных мер $M_+(X)$. Отметим, что множество точечных мер тотально в широкой топологии в конусе $M_+(X) \times \mathbb{R}$, т. е. всевозможные линейные комбинации точечных мер образуют плотное подмножество этого конуса.

Мера на локально компактном пространстве X называется *ограниченной*, если она непрерывна относительно равномерной топологии в $\mathcal{K}(X)$. Это эквивалентно существованию такого числа $\lambda \geqslant 0$, что для любой функции $f \in \mathcal{K}(X)$ справедливо неравенство

$$|\mu(f)| \leqslant \lambda \|f\|.$$

Ограниченные меры образуют пространство $M^1(X)$, которое является банаховым с нормой

$$\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\mu(f)|, \qquad f \in \mathcal{K}(X). \tag{A.2}$$

Например, мера Дирака ε_x ограничена и $\|\varepsilon_x\| = 1$. Нормированное пространство $\mathcal{K}(X)$ и пространство ограниченных мер $M^1(X)$ образуют дуальную пару. Отметим также, что единичные шары $\{\mu : \|\mu\| \leqslant 1\}$ в нормированном пространстве $M^1(X)$ широко компактны.

Расширим пространство функций, на котором определяется мера.

Обозначим J_+ множество положительных полунепрерывных снизу функций на локально компактном пространстве X со значениями в *расширенной числовой прямой* $\overline{\mathbb{R}}$, получаемой присоединением к $\mathbb{R}$ точек $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$. Оно обладает теми свойствами, что сумма произвольного семейства функций из J_+ принадлежит J_+, а также верхняя огибающая произвольного семейства функций из J_+ и нижняя огибающая конечного семейства функций из J_+ принадлежат J_+.

Замечание А.2. Напомним, что, если $\{f_i, i \in I\}$ — семейство числовых функций на множестве X, верхней *огибающей* (соотв. нижней огибающей) семейства $\{f_i\}$ называют определенную на множестве X числовую функцию $\sup f_i(x)$ (соотв. $\inf f_i(x)$). □

Распространить определение меры на пространство J_+ позволяет следующий факт.

Всякая функция $f \in J_+$ есть верхняя огибающая множества положительных функций $g \in \mathcal{K}_+(X)$, удовлетворяющих условию $g \leqslant f$. Тогда, если на X задана положительная мера μ, то *верхним интегралом* от функции $f \in J_+$ относительно μ называется положительное число

$$\mu^*(f) = \overline{\int} f \, d\mu = \sup\{\mu(g) : \ g \in K_+(X), \ g \leqslant f\} \tag{A.3}$$

из $\overline{\mathbb{R}}$. При этом для любой функции $f \in \mathcal{K}_+(X)$ выполняется равенство $\mu^*(f) = \mu(f)$, и μ^* есть продолжение μ на J_+.

Примером верхнего интеграла (А.3) является внешняя мера открытого множества. Если U — открытое множество в X, то его характеристическая функция ϕ_U полунепрерывна снизу на X. Если на X задана положительная мера μ, то *внешней мерой* $\mu^*(U)$ открытого множества U называется верхний интеграл $\mu^*(\phi_U)$. В частности, внешняя

мера открытого *относительно компактного* подмножества (т. е. содержащегося в некотором компакте) конечна. Если число $\mu^*(X)$ конечно, то оно называется *полной массой меры* μ.

Рассмотрим теперь положительные функции f на локально компактном пространстве X со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$, не требуя их полунепрерывности снизу. Для всякой функции $f \geqslant 0$ найдутся функции $g \in J_+$ такие, что $g \geqslant f$ (например, $g = \text{const} = +\infty$). Тогда, если μ — положительная мера на X, *верхним интегралом* от f относительно μ называют положительное число

$$\mu^*(f) = \inf\{\mu^*(g) \,:\, g \in J_+,\ g \geqslant f\}. \tag{A.4}$$

Для $f \in J_+$ это определение совпадает с (A.3).

Приведем следующие свойства верхних интегралов положительных функций f на X:

- для всякой возрастающей последовательности $\{f_n\}$

$$\mu^*(\sup_n f_n) = \sup_n \mu^*(f_n);$$

- для любой последовательности $\{f_n\}$

$$\mu^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(f_n).$$

Примером верхнего интеграла (A.4) является *внешняя мера* $\mu^*(V) = \mu^*(\phi_V)$ произвольного множества $V \subset X$, которая является нижней гранью внешних мер открытых множеств, содержащих V.

Положительная функция f на X называется *пренебрежимой* относительно меры μ на X, если $|\mu|^*(f) = 0$. При этом сумма и верхняя огибающая последовательности $\{f_n\}$ таких функций тоже пренебрежимы. Для того чтобы положительная полунепрерывная снизу функция на X была μ-пренебрежима, необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в нуль на носителе меры μ. В случае, когда $f = \phi_V$ — характеристическая функция множества V из X, мы приходим к определению *μ-пренебрежимого* множества V такого, что $|\mu|^*(V) = 0$, и получаем свойства таких множеств:

- всякое подмножество пренебрежимого множества пренебрежимо;
- всякое счетное объединение пренебрежимых множеств пренебрежимо;
- открытое множество μ-пренебрежимо тогда и только тогда, когда его пересечение с носителем меры μ пусто.

Говорят, что какое-либо условие *справедливо почти всюду* относительно меры μ на X, если множество тех $x \in X$, для которых оно не выполняется, μ-пренебрежимо.

В частности, пусть μ — мера на локально компактном пространстве X и F — некоторое множество. Два отображения γ и γ' множества X в F называются *μ-эквивалентными*, если $\gamma(x) = \gamma'(x)$ почти всюду на X. Это задает отношение эквивалентности на множестве всех отображений из X в F, и определен фактор этого множества по отношению μ-эквивалентности, элементами $\tilde{\gamma}$ которого являются классы μ-эквивалентных отображений. Классы μ-эквивалентности $\tilde{\gamma}$ отображений X в F могут быть расширены

за счет отображений, определенных не всюду, а почти всюду на X и μ-эквивалентных γ. Отображение ζ множества V из X в множество F называется *определенным почти всюду* на X, если дополнение V есть μ-пренебрежимое множество. Классом μ-эквивалентности такого отображения ζ считают класс эквивалентности всякого отображения γ, определенного всюду на X и совпадающего с ζ на V.

Введем теперь понятие интегрируемых функций. Пусть f — $\overline{\mathbb{R}}$-значная функция на локально-компактном пространстве X и μ — мера на X. Обозначим

$$N_p(f) = \left[\int^* |f|^p \, d\,|\mu|\right]^{1/p}, \qquad p = 1, \ldots, \infty, \tag{A.5}$$

положительное число из $\overline{\mathbb{R}}$. Очевидно, что $N_p(f) = N_p(g)$ для μ-эквивалентных функций f и g на X и любого $p \geqslant 1$. Для величин (A.5) выполняется неравенство Минковского

$$N_p(f+g) \leqslant N_p(f) + N_p(g). \tag{A.6}$$

Введем следующие пространства функций.

- $R(X)$ — пространство $\mathbb{R}$-значных функций на X.
- $R^p(X)$ — локально выпуклое подпространство $R(X)$, состоящее из функций f, для которых $N_p(f) < \infty$. В силу свойства (A.6) $N_p(f)$ является преднормой на этом пространстве, и $R^p(X)$ наделяется топологией, определяемой этой преднормой. Она называется *топологией сходимости в среднем порядка* p (и просто *топологией сходимости в среднем*, если $p = 1$). Пространство $R^p(X)$ полно, но не отделимо. Его подпространством является $K(X)$.
- $L^p(X)$ — замыкание в $R^p(X)$ векторного подпространства $K(X)$ в топологии сходимости в среднем порядка p. Функции из $L^p(X)$ называются *интегрируемыми в p-степени*, а функции из $L^1(X)$ — просто *интегрируемыми*. Например, множество $V \subset X$ называется *интегрируемым*, если $\phi_V \subset L^1(X)$. В частности, для того чтобы мера μ на локально компактном пространстве X была ограничена, необходимо и достаточно, чтобы X было $|\mu|$-интегрируемым, т. е. $|\mu|^*(X) < \infty$.
- $L^\infty(X)$ — пространство функций, интегрируемых в любой степени.
- $L^p(X, \overline{\mathbb{R}})$ — множество определенных почти всюду конечных и почти всюду $\overline{\mathbb{R}}$-значных функций на X, которые μ-эквивалентны функциям из $L^p(X)$.
- $\tilde{L}^p(X)$ — отделимое банахово пространство классов μ-эквивалентных функций из $L^p(X)$ и из $L^p(X, \overline{\mathbb{R}})$ с нормой (A.5).

Наряду с верхним интегралом определяется еще существенно верхний интеграл. Пусть X — локально компактное пространство и μ — положительная мера на нем. Рассмотрим пространство $\overline{R}_+(X)$ неотрицательных $\overline{\mathbb{R}}$-значных функций на X, приписывая произведению $0 \cdot \infty$ значение 0. В частности, если $f \in \overline{R}_+(X)$ и $V \subset X$, то $f\phi_V$ — функция, совпадающая с f на V и равная 0 на дополнении V. Для любой функции $f \in \overline{R}_+(X)$ *существенным верхним интегралом* от f относительно μ называется

$$\overline{\mu}(f) = \sup_K \mu^*(f\phi_K), \tag{A.7}$$

где K пробегает множество компактных подмножеств из X. Поскольку $f\phi_K \leqslant f$ для любого компактного подмножества K из X, то $\overline{\mu}(f) \leqslant \mu^*(f)$. Например, для подмножества V интеграл $\mu^*(V) = 0$ означает, что V пренебрежимо, а $\overline{\mu}(\phi_V) = 0$ — что V *локально пренебрежимо*, т. е. для любой точки $x \in X$ существует окрестность U такая, что $V \cap U$ пренебрежимо.

Именно существенные верхние интегралы фигурируют при определении меры на отделимых, но не обязательно локально компактных пространствах.

2. Меры на отделимых пространствах

Предмерой на отделимом пространстве X называется отображение μ, которое каждому компактному подмножеству K из X ставит в соответствие некоторую меру μ_K на K так, что если K и Q два компактных подмножества из X и $K \subset Q$, то мера $(\mu_Q)_K$, индуцированная мерой μ_Q на K, совпадает с μ_K.

Пусть μ — положительная предмера на X. Для всякой функции $f \in \overline{R}_+(X)$ определяется *существенный верхний интеграл*

$$\overline{\mu}(f) = \sup_K \mu_K(f\phi_K), \tag{A.8}$$

где K пробегает множество компактных подмножеств из X. Предмера μ на X считается *ограниченной*, если $\overline{\mu}(X) < \infty$, и *локально ограниченной*, если для любого $x \in X$ существует такая окрестность U, что $\overline{\mu}(U) < \infty$.

Предмера μ на отделимом пространстве X называется мерой, если предмера $|\mu|$ локально ограничена. В частности, если X — локально компактное пространство, всякая предмера на X является мерой, и обратно, для всякой меры μ на X отображение $K \to \mu_K$ является предмерой, так что существенные верхние интегралы (A.7) и (A.8) совпадают. Меры на отделимом пространстве X включают в себя все меры с компактными носителями. В частности, для любой точки $x \in X$ определена мера Дирака ε_x, которая характеризуется равенством

$$\overline{\varepsilon}_x(f) = f(x), \qquad f \in \overline{R}_+(X).$$

Приведем два свойства существенных верхних интегралов.

- Пусть I — возрастающее фильтрующееся семейство положительных функций, полунепрерывных снизу на любом компактном подмножестве из X (напомним, что упорядоченное множество называется *фильтрующимся* сверху (соотв. снизу), если каждое его конечное подмножество ограничено сверху (соотв. снизу)). Тогда

$$\overline{\mu}(\sup_i f_i) = \sup_i \overline{\mu}(f_i).$$

- Пусть I — убывающее фильтрующееся семейство положительных функций, полунепрерывных сверху на любом компакте из X. Если среди $\{f_i, i \in I\}$ существует такая функция f, что $\overline{\mu}(f) < \infty$, то

$$\overline{\mu}(\inf_i f_i) = \inf_i \overline{\mu}(f_i).$$

Функция $f \in \overline{\mathbb{R}}_+(X)$ на отделимом топологическом пространстве (соотв. множество $V \subset X$) называется *пренебрежимой* относительно меры μ, если $\overline{\mu}(f) = 0$ (соотв.

$\overline{\mu}(V) = 0$). Это эквивалентно тому, что функция $f|_K$ пренебрежима относительно меры μ_K для любого компактного подмножества $K \subset X$. В частности, говорят, что мера μ *сосредоточена* на подмножестве $U \subset X$, если его дополнение $X \setminus U$ локально пренебрежимо. *Носителем* меры μ на отделимом топологическом пространстве X называется дополнение наибольшего открытого μ-пренебрежимого множества.

Говорят, что отображение γ отделимого топологического пространства X в топологическое пространство Y *измеримо* относительно меры μ на X, если для любого компактного подмножества $K \subset X$ отображение $\gamma|_K$ является μ_K-измеримым, т. е. существует разбиение K на μ_K-пренебрежимое множество N и на последовательность K_n таких компактных множеств, что суженные отображения $\gamma|_{K_n}$ непрерывны. Говорят, что подмножество V из X *измеримо*, если характеристическая функция ϕ_V измерима. В частности, открытые и замкнутые подмножества μ-измеримы.

В случае отделимого пространства *верхний интеграл* функции $f \in \overline{R}_+(X)$ определяется в виде

$$\mu^*(f) = \inf_g \overline{\mu}(g), \tag{A.9}$$

где g пробегает множество полунепрерывных снизу функций, мажорирующих f. Для локально компактных пространств интегралы (A.4) и (A.9) совпадают. Для отделимых пространств они совпадают на множестве модератных функций.

Говорят, что функция f на отделимом пространстве X со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ *модерантна* относительно меры μ, если она обращается в 0 на дополнении счетного объединения открытых μ-интегрируемых множеств. Если функция $f \in \overline{R}_+(X)$ модерантна, то $\mu^*(f) = \overline{\mu}(f)$, в противном случае $\mu^*(f) = +\infty$.

Обозначим $\overline{L}^p(X)$ пространство μ-измеримых в p-степени модерантных функций на X. Оно является полным пространством с преднормой

$$\overline{N}_p(f) = \overline{\mu}(|f|^p),$$

а пространство $\tilde{\overline{L}}^p(X)$ — банаховым и рефлексивным. Пространство $\overline{L}^p(X)$ обладает многими свойствами пространства $L^p(X)$. В частности, пусть $p, q = 1, 2, \ldots, \infty$ — *сопряженные показатели*, т. е.

$$p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Всякая непрерывная линейная форма на $\overline{L}^p(X)$ имеет вид

$$f \to \int fg \, d\mu,$$

где g — функция из $\overline{L}^q(X)$, класс которой в $\tilde{\overline{L}}^q(X)$ однозначно задан.

Определим некоторые операции над положительными мерами на отделимом пространстве X.

Индуцированная мера. Пусть V — μ-измеримое подмножество X. Мерой μ_V, индуцированной μ на V, называется сужение отображения $\mu : K \to \mu_K$ на множество компактных подмножеств из V.

Сумма мер. Пусть $\{\mu_i, i \in I\}$ — возрастающее фильтрующееся семейство мер на X. Для того чтобы семейство мер $\{\mu_i\}$ было мажорировано в $M(X)$, необходимо и достаточно, чтобы величина $\sup_i \mu_i$ была локально ограничена. Тогда семейство $\{\mu_i\}$ имеет в множестве $M(X)$ мер на X верхнюю грань μ, и $\overline{\mu} = \sup_i \overline{\mu}_i$. Пусть J — множество конечных подмножеств из I и $\mu_s = \sum_{i \in s} \mu_i$ для каждого $s \in J$. Если семейство $\{\mu_s, s \in J\}$

имеет в $M(X)$ верхнюю грань μ, то семейство $\{\mu_i\}$ называется *суммируемым*, а μ — его суммой. Пусть μ — сумма суммируемого семейства $\{\mu_i, i \in I\}$ мер на X. Для того чтобы отображение пространства X в топологическое пространство Y было μ-измеримым, необходимо и достаточно, чтобы оно было μ_i-измеримым для любого $i \in I$.

Измельчение. Измельчением пространства X относительно меры μ называется локально счетное семейство $\{K_i, i \in I\}$ таких попарно непересекающихся компактных подмножеств из X, что множество $X \setminus \bigcup_i K_i$ локально μ-пренебрежимо. Справедливы следующие утверждения:

- измельчение пространства X относительно μ существует;
- если $\{K_i\}$ — μ-измельчение и μ_i — индуцированные меры на K_i, то семейство $\{\mu_i\}$ суммируемо, его сумма равна μ и для любой функции $f \in \overline{R}_+(X)$ выполняется соотношение
$$\overline{\mu}(f) = \sum_i \mu_i(f_i);$$
- для всякого μ-измеримого отображения γ пространства X в топологическое пространство Y существует такое измельчение $\{K_i, i \in I\}$ пространства X относительно μ, что сужение γ на K_i непрерывно для всех $i \in I$.

Отметим, что если $\{K_i, i \in I\}$ — μ-измельчение X, то множество X можно наделить топологией, являющейся суммой топологий подпространств K_i и дискретной топологии в $X \setminus \bigcup_i K_i$, превратив его в локально компактное пространство. Обозначим это пространство X°. На нем существует мера μ° такая, что $\overline{\mu}(f) = \overline{\mu}^\circ(f)$, $f \in \overline{R}_+(X)$, и измеримые отображения будут одними и теми же для мер μ и μ°. Это позволяет многое в описании мер на отделимых пространствах сводить к мерам на локально компактных пространствах.

Меры, определенные посредством числовых плотностей. Функция $f \in \overline{R}_+(X)$ называется *локально μ-интегрируемой*, если она μ-измерима и для любой точки $x \in X$ имеется такая окрестность U, что
$$\overline{\mu}(f\phi_U) < \infty.$$
Определим меру
$$\mu_f : K \to f_K \mu_K, \qquad f_K = f|_K = f\phi_K,$$
где K пробегает все компактные подмножества X. Она называется мерой с *плотностью* f и *базисом* μ. Для любой функции $g \in \overline{R}_+(X)$ выполняется соотношение
$$\overline{\mu}_f(g) = \overline{\mu}(fg).$$
Для того чтобы мера ν на X была мерой с базисом μ, необходимо и достаточно, чтобы всякое компактное μ-пренебрежимое множество было ν-пренебрежимым. В этом случае меры μ и ν называются *эквивалентными*, а функция f — *производной Радона—Никодима*. Она часто обозначается
$$f = \frac{d\mu_f}{d\mu}.$$

Образ меры. Отображение γ пространства X в топологическое пространство Y называется *μ-собственным*, если оно измеримо и любая точка $y \in Y$ обладает такой окрестностью U, что $\overline{\mu}(\gamma^{-1}(U)) < \infty$. Если γ — μ-собственное отображение, на Y существует единственная мера μ_γ, обладающая тем свойством, что
$$\overline{\mu}_\gamma(g) = \overline{\mu}(g \circ \gamma)$$

для любой функции $g \in \overline{R}_+(Y)$. Она называется образом меры μ при отображении γ. В частности, если X — подпространство Y и γ — вложение X в Y, то мера μ_γ сосредоточена на X и $(\mu_\gamma)_X = \mu$.

Произведение мер. Пусть X и Y — топологические пространства, наделенные топологическими предмерами μ и ν соответственно. Пусть K — компактное подмножество произведения $X \times Y$. Рассмотрим сужение $(\mu \otimes \nu)_K$ на K тензорного произведения двух линейных форм μ и ν на $\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{K}(Y)$. Определяемая соотношениями

$$\mu \otimes \nu : K \to (\mu \otimes \nu)_K$$

предмера $\mu \otimes \nu$ называется произведением предмер μ и ν. Это единственная предмера на $X \times Y$ такая, что для любых функций $f \in \overline{R}_+(X)$ и $g \in \overline{R}_+(Y)$ выполняется соотношение

$$\overline{\mu \otimes \nu}(f \otimes g) = \overline{\mu}(f)\overline{\nu}(g).$$

Если μ и ν — меры, то $\mu \otimes \nu$ — тоже мера.

Свертка мер. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — локально компактные пространства и μ_i — меры на X_i. Обозначим

$$X = \underset{i}{\times} X_i, \qquad \mu = \underset{i}{\otimes} \mu_i.$$

Пусть γ — отображение X в локально компактное пространство Y. Последовательность $\{\mu_i\}$ называется γ-свертываемой, если отображение γ является μ-собственным. В этом случае образ μ_γ меры μ при отображении γ называется сверткой мер μ_i относительно γ и обозначается $*\mu_i$. Справедлива формула

$$\int f(y) d * \mu_i(y) = \int f\big(\gamma(x_1, \ldots, x_n)\big)\, d\mu_1(x_1) \ldots d\mu_n(x_n),$$

где $f \in \mathcal{K}(Y)$. Из нее следует, что

$$d * \mu_i(y) = \int_X d\varepsilon_{\gamma(x_1, \ldots, x_n)}(y)\, d\mu_1(x_1) \ldots d\mu_n(x_n).$$

3. Меры Хаара на топологических группах

Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно слева в отделимом топологическом пространстве X:

$$\gamma(g) : X \ni x \mapsto gx \in X, \qquad g \in G.$$

Действие группы G на функции f и меры μ на X определяется формулами

$$(\gamma(g)f)(x) = f(g^{-1}x),$$
$$(\gamma(g)\mu)(f) = \mu(\gamma(g^{-1})f).$$

Мера $\gamma(g)\mu$ может быть определена как образ меры μ при отображении $\gamma(g)$. В частности, если V — $(\gamma(g)\mu)$-интегрируемое множество, то $g^{-1}(V)$ является μ-интегрируемым множеством.

Образ μ^{-1} меры μ при переходе к обратному $g \to g^{-1}$ называется *обратной мерой*. Она задается соотношением

$$\int f(g)\, d\mu^{-1}(g) = \int f(g^{-1})\, d\mu(g) = \int f(g)\, d\mu(g^{-1}).$$

Говорят, что (комплексная) мера μ на X:

- *инвариантна*, если $\gamma(g)\mu = \mu$, т. е.

$$\int f(gx)\, d\mu(x) = \int f(x)\, d\mu(x)$$

для всех $g \in G$;

- *относительно инвариантна*, если $\gamma(g)\mu$ пропорциональна μ для любых $g \in G$;
- *квазиинвариантна*, если $\gamma(g)\mu$ эквивалентна μ для любого $g \in G$.

Если мера μ относительно инвариантна, то для каждого $g \in G$ существует единственное комплексное число $\chi(g)$ такое, что

$$\gamma(g)\mu = \chi(g)^{-1}\mu.$$

При этом функция $g \to \chi(g)$ на группе G является представлением G в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Она называется *мультипликатором меры* μ.

Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно в отделимом топологическом пространстве X справа:

$$\tau(g) : X \ni x \mapsto xg^{-1} \in X.$$

Ее действие на функции и меры на X дается формулами:

$$(\tau(g)f)(x) = f(xg),$$
$$(\tau(g)\mu)(f) = \mu(\tau(g^{-1})f).$$

Так же как и в случае левого действия определяются инвариантные, относительно инвариантные и квазиинвариантные меры относительно правого действия G на X.

Пусть теперь G — локально компактная топологическая группа, которая действует на себя как левыми, так и правыми сдвигами:

$$\gamma(g) : q \mapsto gq, \qquad \tau(g) : q \mapsto qg^{-1}, \qquad q \in G,$$
$$\gamma(g_1)\tau(g_2) = \tau(g_2)\gamma(g_1). \tag{A.10}$$

Соответственно определяются левоинвиариантные, правоинвариантные и т. д. меры на группе G. *Левой мерой Хаара* (или просто *мерой Хаара*) на локально компактной группе G называется левоинвариантная положительная ненулевая мера на G. На всякой локально компактной группе существует и притом одна с точностью до постоянного множителя левая мера Хаара. Если μ — мера Хаара на G, для произвольного $g \in G$ мера $\tau(g)\mu$ в силу равенства (A.10) тоже левоинвариантна, и поэтому существует единственное число $\Delta(g) > 0$ такое, что

$$\tau(g)\mu = \Delta(g)\mu.$$

Поскольку все меры Хаара друг другу пропорциональны, число $\Delta(g)$ не зависит от выбора меры Хаара μ. Функция Δ на G называется *модулем группы* G. Она задает непрерывное представление G в $\mathbb{R}_+$. В частности, выполняется соотношение

$$d\mu^{-1}(g) \stackrel{\text{def}}{=} d\mu(g^{-1}) = \Delta(g)^{-1} d\mu(g),$$

где мера μ^{-1} называется *обратной*.

Если $\Delta = 1$, то группа G называется *унимодулярной*. Например, дискретные, компактные, коммутативные, нильпотентные и полупростые группы унимодулярны. Имеется следующий критерий унимодулярности. Если в группе существует компактная окрестность единицы, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов, то группа унимодулярна. В унимодулярной группе левые и *правые меры Хаара* пропорциональны.

Меры $\mu_1, \ldots, \mu_n$ на локально компактной группе G называются свертываемыми, если они свертываемы относительно отображения

$$(g_1, \ldots, g_n) \mapsto g_1 \ldots g_n,$$

т. е.

$$\int f(g)\, d * \mu_i(g) = \int f(g_1 \ldots g_n)\, d\mu_1(g_1) \ldots d\mu_n(g_n).$$

В частности, для всех $x, y, z \in G$ справедливы соотношения:

- $\varepsilon_x * \varepsilon_y = \varepsilon_{xy}$;
- $\varepsilon_x * \mu = \gamma(x)\mu$, $\mu * \varepsilon_x = \tau(x^{-1})\mu$;
- если меры λ, μ, ν свертываемы, то то же верно и для пар λ и μ, μ и ν, $|\lambda| * |\mu|$ и ν, λ и $|\mu| * |\nu|$. Причем

$$\lambda * \mu * \nu = (\lambda * \mu) * \nu = \lambda * (\mu * \nu).$$

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — меры на G. Если все μ_i, кроме может быть одной, имеют компактный носитель, то они свертываемы. В частности, любые два элемента из $M^1(G)$ свертываемы, и $M^1(G)$ является полной нормированной алгеброй относительно свертки и нормы $\|\mu\|$, обладающая единичным элементом ε_1. Определены также:

- *свертка меры ν и функции f* — это плотность свертки $\nu * f\mu$ относительно меры Хаара μ;
- *свертка функций f_1 и f_2* — это плотность свертки $f_1\mu * f_2\mu$ относительно меры Хаара μ, т. е.

$$(f_1 * f_2)(q) = \int f_1(g) f_2(g^{-1}q)\, d\mu(g), \qquad q, g \in G.$$

4. Меры на бесконечномерных векторных пространствах

Пусть в дальнейшем E — локально выпуклое отделимое вещественное топологическое векторное пространство. Все меры считаются положительными. Обозначим $N(E)$ множество замкнутых векторных подпространств из E конечной коразмерности, упорядоченное отношением вложения. Для того чтобы подпространство V из E принадлежало $N(E)$, необходимо и достаточно, чтобы в топологически сопряженном пространстве E' нашлось конечное число таких элементов $y_1, \ldots, y_n$, что V состоит из элементов $x \in E$, удовлетворяющих соотношениям

$$\langle x, y_i \rangle = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Промерой μ на E называется семейство $\{\mu_V, V \in N(E)\}$ положительных ограниченных мер μ_V на конечномерных пространствах E/V с одной и той же полной массой. Причем $\mu_V = r_V^W \mu_W$, когда $W \subset V$ и $r_V^W : E/W \to E/V$.

В частности, пусть μ — ограниченная мера на E с полной массой 1. Для произвольного $V \in N(E)$ обозначим μ_V образ меры μ при каноническом отображении $r_V : E \to E/V$. Семейство $\{\mu_V\}$ является промерой на E, ассоциированной с мерой μ. Отображение

$$\mu \to \{\mu_V,\ V \in N(E)\}$$

— это биекция множества ограниченных мер на E на множество промер на E, удовлетворяющих следующему условию. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное подмножество $K \subset E$, что

$$\mu_V\left(\frac{E}{V - r_V(K)}\right) \leqslant \varepsilon, \qquad \forall V \in N(E).$$

Рассмотрим линейное непрерывное отображение γ векторного пространства E в (локально выпуклое) топологическое векторное пространство F. Для любого $W \in N(F)$ подпространство $V = \gamma^{-1}(W)$ из E принадлежит $N(E)$, и γ определяет линейное отображение γ_W пространства E/V в F/W. Пусть теперь

$$\mu = \{\mu_V,\ V \in N(E)\}$$

— промера на E. Для любого $W \in N(F)$ определим меру

$$\nu_W = \gamma_W(\mu_{\gamma^{-1}(W)}).$$

Семейство

$$\nu = \{\nu_W,\ W \in N(F)\}$$

является промерой на F, которую называют *образом* промеры μ при отображении γ.

В частности, выберем в качестве F поле $\mathbb{R}$. Для любой непрерывной формы y на E обозначим μ_y меру на $\mathbb{R}$ — образ промеры μ на E при отображении y. *Преобразованием Фурье* промеры μ называется функция

$$Z(y) = \int e^{it}\, d\mu_y(t), \qquad y \in E'. \tag{A.11}$$

Если μ — ограниченная мера на E, то ее преобразование Фурье имеет вид

$$Z(y) = \int_E \exp\bigl[i\langle x, y\rangle\bigr]\, d\mu(x), \qquad y \in E'. \tag{A.12}$$

Справедлив следующий вариант *теоремы Бохнера.*

Определение А.1. Комплексная функция Z на топологическом векторном пространстве E называется *функцией положительного типа*, если выполняется неравенство

$$\sum_{i,j} Z(e_i - e_j)\bar{c}_i c_j \geqslant 0$$

для произвольного конечного набора $e_1, \ldots, e_n$ элементов из E и любых комплексных чисел $c_1, \ldots, c_n$. □

Теорема А.2. Преобразование Фурье является биекцией множества промер на топологическом векторном пространстве E на множество функций Z положительного типа на E', сужение которых на всякое конечномерное подпространство из E' непрерывно. □

Важный для приложений тип мер на вещественном топологическом векторном пространстве E составляют гауссовы меры. Для любой положительной квадратичной формы M на топологически сопряженном пространстве E' существует единственная промера μ_M на E такая, что ее преобразование Фурье имеет вид

$$Z(y) = \exp\left[-\frac{M(y)}{2}\right], \qquad y \in E'.$$

Полная масса μ_M равна 1. Она называется *гауссовой промерой* с *формой ковариации* M. Для любого элемента $y \in E'$ образ μ_M при отображении $y : E \to \mathbb{R}$ является гауссовой мерой на $\mathbb{R}$ с формой ковариации $M(y)$. Обратно, если образ μ_y промеры μ на E при отображении y является гауссовой мерой на $\mathbb{R}$, то μ — гауссова промера на E.

Пусть μ — гауссова мера на E с формой ковариации M на E'. Для всякого целого $n \geqslant 0$ и любого $y \in E'$ справедливы соотношения

$$\int_E \big(\langle x, y\rangle\big)^{2n} d\mu(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!} M(y)^n,$$

$$\int_E \big(\langle x, y\rangle\big)^{2n+1} d\mu(x) = 0.$$

Приведем примеры гауссовых мер.

Пример А.3. Пусть $E = \mathbb{R}^n$ — конечномерное пространство. Гауссова мера с (невырожденной) формой ковариации M эквивалентна мере Лебега и, будучи записанной относительно базиса $\{e_i\}$ в $E' = \mathbb{R}^n$, имеет вид

$$d\mu = \frac{(\det M)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(M^{-1}_{ij} x^i x^j\right)\right] d^n x. \tag{A.13}$$

□

Пример А.4. Пусть E — действительное гильбертово пространство, E' — его сопряженное, наделенное положительной эрмитовой формой $\langle . | . \rangle'$. Гауссова промера на E с формой ковариации

$$M(y) = \langle y | y \rangle', \qquad y \in E',$$

называется *канонической*. Можно показать, что в случае бесконечномерного пространства E эта промера, однако, не является мерой. Пусть T — непрерывный оператор на E'. Отображение

$$E' \ni y \mapsto \langle Ty | Ty \rangle'$$

является положительной квадратичной формой на E'. Соответствующая промера на E — это мера в том и только в том случае, когда T — оператор Гильберта—Шмидта. В виду этого ограничения гауссовы меры предпочтительно рассматривать на ядерных пространствах. □

Пример А.5. Пусть E — вещественное ядерное пространство и E' — его топологически сопряженное, наделенное топологией равномерной сходимости, которая совпадает

в данном случае со слабой* топологией. Пусть μ — промера на E'. Для того чтобы μ была мерой, необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Фурье было непрерывно на пространстве E (которое является топологически сопряженным к E', наделенному слабой* топологией). Преобразование Фурье задает биекцию множества положительных ограниченных мер на E' на множество непрерывных функций положительного типа на ядерном пространстве E. В частности, всякая гауссова промера на пространстве E', топологически сопряженном ядерному пространству E, с непрерывной формой ковариации на E является мерой. Это не так, если E — счетно-гильбертово, но не ядерное пространство. □

Пример А.6. Пусть $E \subset \tilde{E} \subset E'$ — оснащенное гильбертово пространство и μ — гауссова мера на E', определяемая невырожденной положительной эрмитовой формой $\langle .|. \rangle$ на E. Рассмотрим *положительно определенный оператор* T в $\tilde{E}$, т. е.

$$\langle y|y\rangle_T = \langle Ty|y\rangle \geqslant 0, \tag{A.14}$$

и гауссову меру μ_T на E', определяемую формой ковариации (А.14), суженной на $E \cdot \subset \tilde{E}$. Если T имеет дискретный спектр и ряд $\sum\limits_k \lambda_k$, составленный из его собственных значений, сходится (например, T — ядерный оператор), то меры μ_T и μ неэквивалентны. Наоборот, если произведение $\prod \lambda_k$ конечно и не равно 0 (т. е. T представляет собой сумму единичного и ядерного операторов), то меры μ_T и μ эквивалентны. В частности, все гауссовы меры на конечномерном пространстве эквивалентны. □

5. Интегралы со значениями в векторных пространствах

Пусть X — локально компактное пространство, E — локально выпуклое отделимое вещественное топологическое векторное пространство, E' — его топологически сопряженное, а E'^* — алгебраически сопряженное E'. Пространство E отождествимо с некоторым подпространством пространства E'^* (см. § 1.2). При этом пространство E'^*, наделенное топологией $\sigma(E'^*, E')$, совпадает с пополнением пространства E в топологии $\sigma(E, E^*)$. Пусть $\mathcal{K}(X, E)$ — пространство непрерывных отображений $v : X \to E$ с компактным носителем, а $\mathcal{S}(X, E)$ — пространство *скалярно непрерывных отображений* (т. е. функция $x \mapsto \langle v(x), z\rangle$ непрерывна при всех $z \in E'$) с компактным носителем. Ясно, что $\mathcal{K}(X, E) \subset \mathcal{S}(X, E)$.

Для любого отображения $v \in \mathcal{S}(X, E)$ *интегралом от v со значениями в векторном пространстве E* относительно меры μ на X называется элемент $\int v\, d\mu$ из E'^*, определяемый формулой

$$\left\langle \int v\, d\mu, z \right\rangle = \mu\big(\langle v, z\rangle\big)$$

для любого $z \in E'$. В частности,

$$\int v d\varepsilon_x = v(x).$$

Заметим, что элемент $\int v\, d\mu$ не всегда принадлежит $E \subset E'^*$. Например, это имеет место, когда E — банахово пространство, или когда $v(X)$ содержится в полном выпуклом подмножестве пространства E. Если U_μ — носитель меры μ и E'^* наделено топологией $\sigma(E'^*, E')$, то интеграл $\int v\, d\mu$ принадлежит замыканию в E' выпуклого конуса, порождаемого $v(U_\mu)$.

Частным случаем интегралов со значениями в векторном пространстве являются интегралы от комплексных функций.

6. Борелевские меры

Все рассмотренные выше меры так или иначе связаны с мерами на компактных пространствах. Более общий тип мер составляют борелевские меры, определяемые алгебраически не на топологическом пространстве, а на борелевской алгебре множеств.

Борелевским пространством называется множество X вместе с некоторым множеством Σ его подмножеств, замкнутым относительно операций счетного объединения, счетного пересечения и перехода к дополнению множества, а также включающим $\varnothing$ и X. Элементы Σ называются *борелевскими множествами*, а само Σ — *борелевской алгеброй* на X.

Пусть Λ — некоторое множество подмножеств из X. Среди борелевских алгебр Σ на X существует наименьшая, содержащая Λ. Говорят, что она порождается Λ.

Борелевской мерой на борелевской алгебре Σ (или на борелевском пространстве X) называется такое отображение $m : \Sigma \to \mathbb{R}_+$, что

$$m(\bigcup_i V_i) = \sum_i m(V_i),$$

где $\{V_i\}$ — счетное семейство элементов из Σ таких, что $V_i \cap V_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, т. е. отображение m счетно аддитивно. Борелевская мера с полной массой 1 называется *вероятностной мерой*.

Ограничимся случаем, когда борелевское пространство X — это топологическое пространство. Пусть Λ — множество всех открытых и замкнутых подмножеств из X. Рассмотрим борелевскую алгебру Σ, порожденную Λ. Такое борелевское пространство (X, Σ) называется *подчиненным топологии* в X. Пусть X — отделимое топологическое пространство и (X, Σ) — борелевское пространство, подчиненное этой топологии. Рассмотрим борелевскую меру m на X. Для того чтобы на X существовала такая мера μ, что $\overline{\mu}(V) = m(V)$ для любого $V \in \Sigma$, необходимо и достаточно, чтобы:

- m была *локально ограничена*, когда всякая точка $x \in X$ обладает открытой окрестностью V_x, для которой $m(V_x) < \infty$;
- *внутренне регулярной*, т. е. для любого множества $V \in \Sigma$

$$m(V) = \sup_K m(K),$$

где K пробегает множество компактных подмножеств из V. Борелевские множества в отделимом топологическом пространстве X μ-измеримы относительно любой меры μ на X.

Замечание А.7. Борелевское пространство называется *стандартным*, если оно подчинено топологии *польского пространства*, (т. е. пространства, гомеоморфного полному сепарабельному метрическому пространству). Мера m на борелевском пространстве X называется *стандартной*, если существует такое борелевское подмножество $N \subset X$, что $m(N) = 0$ и $X \setminus N$ — стандартное борелевское пространство. □

Пусть K — выпуклое компактное подмножество (локально выпуклого) отделимого вещественного топологического векторного пространства E. Оно является замкнутой выпуклой оболочкой множества своих крайних точек N_K (см. Замечание 1.2.4). Напомним некоторые понятия. Функция $f \in R(K)$ называется:

- *выпуклой*, если

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \qquad \forall \lambda \in [0,1];$$

- *вогнутой*, если

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2);$$

- *аффинной*, если

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Обозначим $S(K)$ множество всех выпуклых непрерывных функций на K. Множество $S(K) - S(K)$, образованное разностями элементов $S(K)$, равномерно плотно в $R(K)$, т.е. непрерывная функция на K может быть равномерно аппроксимирована разностью непрерывных выпуклых функций.

Множество положительных мер $M_+(K)$ на K наделяется широкой топологией. Обозначим $M_1(K)$ его подмножество положительных мер с полной массой $\mu(K) = 1$. Согласно *теореме Рисса* имеет место взаимно однозначное соответствие между мерами из $M_+(K)$ и регулярными ограниченными борелевскими мерами на K, когда

$$m(V) = \sup_U m(U), \qquad V \in \Sigma,$$

где $U \subset V$ — всевозможные замкнутые подмножества V. Заметим, что к борелевским множествам в K относятся все счетные объединения замкнутых множеств (F_σ-множества) и все счетные пересечения открытых множеств (G_σ-множества). *Бэровские множества* компакта K определяются как элементы борелевской алгебры Σ_0, порождаемой замкнутыми G_σ-множествами или открытыми F_σ-множествами в K. Всякая мера на Σ_0 называется *бэровской мерой*. Она автоматически регулярна и обладает единственным регулярным расширением до борелевской меры на Σ. На компактном пространстве K меры из $M_+(K)$, регулярные борелевские и бэровские меры можно отождествить. В дальнейшем они будут обозначаться μ.

Напомним, что мера μ считается сосредоточенной на множестве $V \subset K$, если $\mu(V) = \mu(K)$, и *псевдососредоточенной* на $V \subset K$, если $\mu(W) = \mu(K)$ для любого бэровского множества W, содержащего V (при этом возможно, что $\mu(V) = 0$).

7. Барицентрические разложения

Барицентрические разложения широко применяются в алгебраической квантовой теории. Они, например, описывают разложение состояний C^*-алгебры с единицей по чистым состояниям, инвариантных состояний по эргодическим состояниям и равновесных состояний по чистым термодинамическим фазам.

Пусть E — (локально выпуклое) отделимое вещественное топологическое векторное пространство и K — выпуклое компактное подмножество из E. При каноническом отождествлении E с подпространством в E'^* топология, индуцированная в K топологией $\sigma(E'^*, E')$, совпадает с исходной топологией в K. Поскольку каноническое вложение K в E непрерывно и имеет компактный носитель, для любой меры μ на K интеграл

$$b(\mu) = \int x \, d\mu,$$

где x — тождественное отображение K в $K \subset E$, определен как элемент из E'^*. Для любой положительной меры $\mu \in M_1(K)$ он называется ее *барицентром*. В частности, барицентром меры Дирака ε_x, $x \in K$, является $x \in K \subset E'^*$. Справедливы следующие утверждения.

- Барицентр всякой меры $\mu \in M_1(K)$ принадлежит K, и обратно, всякая точка из K является барицентром некоторой меры $\mu \in M_1(K)$.
- Всякая точка из K является барицентром меры $\mu \in M_1(K)$, которая псевдососредоточена на множестве крайних точек N_K множества K, т. е. $\mu(W) = 1$ для всякого бэровского множества W, содержащего N_K. Если K метризуемо, то его бэровские и борелевские множества совпадают, и μ сосредоточена на N_K.
- Точка x является крайней точкой множества K тогда и только тогда, когда ε_x — единственная мера на N_K, имеющая x своим барицентром.
- Пусть f — аффинная полунепрерывная сверху функция на K. Если $\mu \in M_1(K)$ имеет барицентр $b(\mu)$, то
$$\int f \, d\mu = f(b(\mu)).$$

Рассмотрим, в какой степени мера на выпуклом компактном подмножестве K определяется своим барицентром однозначно. На $M_+(K)$ можно ввести частичное упорядочение, задаваемое условием $\mu \geqslant \nu$ тогда и только тогда, когда $\mu(f) \geqslant \nu(f)$, $f \in S(K)$. Обозначим M_b множество мер, имеющих своим барицентром точку b. Справедливы следующие утверждения.

- Мера μ принадлежит M_b тогда и только тогда, когда $\mu \geqslant \varepsilon_b$.
- Всякая точка $b \in K$ является барицентром некоторой меры $\mu \in M_1(K)$, *максимальной* относительно упорядочения $\geqslant$, и каждая такая максимальная мера псевдососредоточена на N_K.
- Всякая точка $b \in K$ является барицентром единственной меры μ_b тогда и только тогда, когда K является *симплексом*, т. е. *конус* $C = K \times \mathbb{R}^+$, порождаемый K, наделен таким упорядочением, что $a \geqslant b$ в том и только том случае, когда $a - b \in C$, а также является *решеткой*, т. е. любая пара его элементов имеет верхнюю и нижнюю грань.

Преобразования Лапласа

Мы приведем здесь основные сведения об обобщенных функциях и преобразованиях Лапласа [2], выпишем преобразования между функциями Уайтмана и Швингера [18] и виковского поворота в алгебраической квантовой теории поля.

1. Обобщенные функции

Существуют различные типы обобщенных функций. Обобщенные функции вводятся как элементы пространства, топологически сопряженного некоторому пространству «хороших» функций, называемых пробными функциями. Мы ограничимся здесь рассмотрением в основном только одного типа обобщенных функций — так называемых распределений умеренного роста.

Пусть $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ — пространство комплексных бесконечно дифференцируемых (гладких) функций на $\mathbb{R}^n$. Используем стандартные обозначения:

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набор n произвольных натуральных чисел (включая 0) и $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$;
- для всякого такого набора α введем оператор

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_n}}$$

на пространстве $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Выберем в качестве *основных функций* те гладкие функции u на $\mathbb{R}^n$, для которых величина

$$\|u\|_{k,m} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \sup_x \left(1 + |x|\right)^m \left|D^\alpha u(x)\right| \tag{B.1}$$

конечна для всех натуральных чисел k, m. Они называются *гладкими функциями, быстро убывающими на бесконечности.* Обозначим $S(\mathbb{R}^n)$ пространство этих функций. Будем называть его *пространством пробных функций,* или *пространством Шварца.* Оно наделяется топологией, определяемой семейством преднорм (B.1). Можно показать, что это ядерное пространство.

Пусть $S'(\mathbb{R}^n)$ — пространство, топологически сопряженное пространству Шварца $S(\mathbb{R}^n)$. Его элементы f называются *распределениями умеренного роста,* или просто *обобщенными функциями.* Хотя в общем случае обобщенные функции f не являются функциями на $\mathbb{R}^n$, принято писать

$$\langle \psi, f \rangle = \int f(x)\psi(x)\, d^n x. \tag{B.2}$$

Поскольку пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ ядерно, оно рефлексивно, т.е. совпадает со своим вторым сопряженным $S(\mathbb{R}^n) = (S'(\mathbb{R}^n))'$. При этом $S(\mathbb{R}^n)$ является плотным подпространством пространства обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^n)$. Пространство Шварца может быть наделено невырожденной положительной эрмитовой формой

$$\langle \psi | \psi' \rangle = \int \psi(x)\overline{\psi'(x)}\, d^n x, \tag{B.3}$$

непрерывной по каждому аргументу и согласующейся с (B.2). Пополнение пространства $S(\mathbb{R}^n)$ по этой форме превращает его в оснащенное гильбертово пространство

$$S(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n).$$

Замечание B.1. Упомянем еще один тип обобщенных функций. Обозначим $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ пространство комплексных гладких функций ψ на $\mathbb{R}^n$, обращающихся в 0 вне некоторого компакта Q в $\mathbb{R}^n$. Топология в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ задается набором преднорм

$$p_{\{\phi_\alpha\}}(\psi) = \sup_{x \in U} \Big| \sum_\alpha \phi_\alpha(x) D^\alpha \psi(x) \Big|,$$

где $\{\phi_\alpha\}$ — такое семейство гладких функций, что на любом компакте $Q \subset \mathbb{R}^n$ отлично от нуля только конечное число функций из этого семейства. Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ является подпространством $S(\mathbb{R}^n)$ и плотно в нем. Элементы топологически сопряженного к $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называются *распределениями Шварца*. В отличие от обобщенных функций (распределений умеренного роста) допустимый рост распределений Шварца в $\mathbb{R}^n$ на бесконечности никак не ограничен. В то же время всякое распределение $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее условию

$$|\langle \psi, f \rangle| \leqslant \|\psi\|_{k,m}$$

для некоторых натуральных чисел k, m и произвольных $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, может быть единственным образом продолжено до непрерывной формы на $S(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, всякую обобщенную функцию из $S'(\mathbb{R}^n)$ можно рассматривать и как распределение из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. □

Важное преимущество пространства $S'(\mathbb{R}^n)$ распределений умеренного роста, в сравнении, например, с пространством $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ всех распределений Шварца, состоит в том, что преобразование Фурье является отображением $S'(\mathbb{R}^n)$ и $S(\mathbb{R}^n)$ на изоморфные им пространства.

Пусть пространство $\mathbb{R}^n$ снабжено мерой Лебега $d^n x$. Обозначим дуальное и изоморфное ему пространство как $\mathbb{R}_n$ с координатами $p_1, \ldots, p_n$, наделив его мерой Лебега

$$d_n p = (2\pi)^{-n} d^n p.$$

Будем обозначать свертку $\langle x, p \rangle$ просто px.

Преобразованием Фурье квадратично интегрируемой функции $\psi(x)$ на $\mathbb{R}^n$ называется функция

$$\psi^F(p) = \int \psi(x) e^{ipx} d^n x \tag{B.4}$$

на $\mathbb{R}_n$. *Обратное преобразование Фурье* имеет вид

$$\psi(x) = \int \psi^F(p) e^{-ipx} d_n p. \tag{B.5}$$

Преобразования Фурье (В.4), (В.5) осуществляют изоморфизм пространств Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ и $S(\mathbb{R}_n)$. *Преобразование Фурье f^F обобщенной функции* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ определяется из условия

$$\int f(x)\psi(x)\,d^n x = \int f^F(p)\psi^F(-p)\,d_n p.$$

Как и для обычных функций, будем записывать преобразование и обратное преобразование Фурье в виде интегралов

$$f^F(p) = \int f(x)e^{ipx}d^n x,$$
$$f(x) = \int f^F(p)e^{-ipx}d_n p.$$

Эти преобразования осуществляют изоморфизм пространств обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^n)$ и $S'(\mathbb{R}_n)$.

2. Преобразование Фурье—Лапласа

Преобразование Фурье—Лапласа, вообще говоря, определяется для распределений Шварца из Замечания В.1, но мы ограничимся в основном случаем обобщенных функций.

Пусть $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ — обобщенная функция и $\Gamma(f)$ — подмножество таких $q \in R_n$, что

$$e^{-qx}f(x) \in S'(\mathbb{R}^n). \tag{В.6}$$

Это выпуклое множество. В частности, $0 \in \Gamma(f)$. Обозначим $\operatorname{Int}\Gamma(f)$ внутренность, а $\partial\Gamma(f)$ — границу подмножества $\Gamma(f)$.

Преобразованием Фурье—Лапласа обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ называется обобщенная функция

$$f^L(p+iq) = \left(e^{-qx}f(x)\right)^F(p) = \int f(x)e^{i(p+iq)x}d^n x \tag{В.7}$$

из $S'(\mathbb{R}_n)$, являющаяся преобразованием Фурье обобщенной функции (В.6) и зависящая от q как от параметра. Выражение (В.7) можно также интерпретировать как преобразование Фурье обобщенной функции f с комплексной переменной $k = p + iq$.

Важнейшим свойством преобразования Фурье—Лапласа является аналитичность. Пусть $\operatorname{Int}\Gamma(f) \neq \varnothing$. Тогда преобразование Фурье—Лапласа $f^L(k)$ (В.7) является голоморфной функцией от комплексной переменной $k = p + iq$ в открытом *трубчатом множестве*

$$\mathbb{R}_n + i\operatorname{Int}\Gamma(f) \subset \mathbb{C}_n$$

с основанием $\operatorname{Int}\Gamma(f)$. Причем для любого компакта $Q \subset \operatorname{Int}\Gamma(f)$ существуют числа $A, m > 0$ (зависящие от Q и от f) такие, что

$$\left|f^L(p+iq)\right| \leqslant A\left(1+|p|\right)^m, \qquad p \in \mathbb{R}_n, \qquad q \in Q. \tag{В.8}$$

Все вышесказанное остается справедливым, если $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ — распределение Шварца. Обратно, пусть $h(k)$ — голоморфная функция в трубчатой области $T^S = \mathbb{R}_n + iS$, где $S \subset \mathbb{R}_n$ — выпуклая *область* (непустое связное открытое множество). Если для

любого компакта $Q \subset S$ имеет место оценка (B.8), тогда существует единственное распределение $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что $S \subset \Gamma(f)$ и $h(k) = f^L(k)$ в T^S. При этом для $h(k)$ оценка (B.8) эквивалентна тому, что функция $h(p + iq)$ определяет семейство обобщенных функций $h_q(p)$ из $S'(\mathbb{R}_n)$ по переменной p, непрерывно зависящих от параметра $q \in S$.

Заметим, что если $0 \in \operatorname{Int}\Gamma(f)$, то предел $f^L(p + iq)$ при $q \to 0$ совпадает очевидно с $f^F(p)$. Однако особо надо рассмотреть случай, когда точка $q = 0$ не принадлежит $\operatorname{Int}\Gamma(f)$. Пусть S — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ такая, что $0 \in \partial S$, и пусть $h(p + iq)$ — голоморфная функция в трубчатой области T^S, определяющая семейство обобщенных функций $h_q(p)$ из $S'(\mathbb{R}_n)$, непрерывно зависящих от параметра q. Будем говорить, что $h(p + iq)$ имеет *обобщенное граничное значение* $h_0(p)$ в $S'(\mathbb{R}_n)$, если для любого компактного усеченного конуса $K^r \subset S \cup \{0\}$ (т. е. $K^r = \{q \in K : |q| \leqslant r\}$, где K — конус в $\mathbb{R}_n$) выполняется равенство

$$\lim_{|q|\to 0,\, q\in K^r\setminus\{0\}} h_q(\psi(p)) = h_0(\psi(p))$$

для всех $\psi \in S(\mathbb{R}_n)$. Справедливо следующее утверждение.

Пусть $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{Int}\Gamma(f) \neq \varnothing$ и $0 \notin \operatorname{Int}\Gamma(f)$. Тогда обобщенное граничное значение преобразования Фурье—Лапласа $f^L(k)$ существует в $S'(\mathbb{R}_n)$ и совпадает с преобразованием Фурье $f^F(p)$ обобщенной функции f.

Конструкция предела в смысле обобщенного граничного значения сводится, как в ситуации $0 \in \operatorname{Int}\Gamma(f)$, к обычному пределу также в следующем важном случае.

Напомним, что *носителем* $\operatorname{supp} f$ обобщенной функции f называется дополнение максимального открытого множества U, на котором f обращается в 0, т. е. $f(\psi) = 0$ для всех $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ с $\operatorname{supp}\psi \subset U$. Пусть $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ имеет носитель в подмножестве $\overline{\mathbb{R}}^n_+ \subset \mathbb{R}^n$ с неотрицательными координатами (в общем случае — в остром замкнутом конусе в $\mathbb{R}^n$). Тогда $\overline{\mathbb{R}}_{n+} \subset \Gamma(f)$ и преобразование Фурье—Лапласа f^L является голоморфной функцией в трубчатой области с основанием $\mathbb{R}_{n+} = \operatorname{Int}\overline{\mathbb{R}}_{n+}$ (f^L удовлетворяет определенной оценке, которая здесь не приводится), а ее граничное значение в $S'(\mathbb{R}_n)$ можно определить в смысле равенства

$$\lim_{|q|\to 0,\, q\in\mathbb{R}_{n+}} f^L_q(\psi(p)) = f^F(\psi(p))$$

для всех $\psi \in S(\mathbb{R}_n)$.

Обратно, по свойствам голоморфной функции $h(k)$ в трубчатой области $\mathbb{R}_n + i\mathbb{R}_{n+}$ можно судить о том, является ли она преобразованием Фурье—Лапласа некоторой обобщенной функции с носителем в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$. Это можно сделать даже, когда функция $h(k)$ известна лишь на $i\mathbb{R}_{n+}$.

Пусть функция $h(k) = f^L(k)$ является преобразованием Фурье—Лапласа обобщенной функции f с носителем в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$. Тогда формулы

$$h(\phi) = \int_{\mathbb{R}_{n+}} h(iq)\phi(q)\, d_n q = \int_{\mathbb{R}_{n+}} d_n q \int_{\overline{\mathbb{R}}^n_+} e^{-qx} f(x)\phi(q)\, d^n x = \tag{B.9}$$

$$= \int_{\overline{\mathbb{R}}^n_+} f(x)\widehat{\phi}(x)\, d^n x, \qquad \phi \in S(\mathbb{R}_{n+}),$$

$$\widehat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{R}_{n+}} e^{-qx}\phi(q)\, d_n q, \qquad x \in \overline{\mathbb{R}}^n_+, \qquad \widehat{\phi} \in S(\overline{\mathbb{R}}^n_+), \tag{B.10}$$

определяют линейный непрерывный функционал $\tilde{h}(q) = h(iq)$ на пространстве $S(\mathbb{R}_{n+})$.

Замечание В.2. Укажем, что элементами $S(\mathbb{R}_{n+})$ считаются функции из $S(\mathbb{R}_n)$, обращающиеся в 0 на $\mathbb{R}_n \setminus \mathbb{R}_{n+}$, а элементами $S'(\mathbb{R}_{n+})$ — обобщенные функции из $S'(\mathbb{R}_n)$, суженные на $S(\mathbb{R}_{n+})$. Элементы $S(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ можно отождествить с функциями из $S(\mathbb{R}^n)$, суженными на $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ (т. е. умноженными на характеристическую функцию множества $\overline{\mathbb{R}}^n_+$), а элементам $S'(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ можно сопоставить обобщенные функции из $S'(\mathbb{R}^n)$ с носителями в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$. □

Пример В.3. Проиллюстрируем соотношение (В.9) в одномерном случае. Пусть $f \in S'(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Имеем

$$h(p+iq) = \int_0^\infty e^{i(p+iq)x} f(x)\,dx, \qquad q > 0.$$

Тогда $f(x)$, $x \geqslant 0$, восстанавливается по $\tilde{h}(z) = h(iz)$ в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(p+iq)e^{-ipx}dp = e^{-qx}f(x),$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p+iq)x}h(p+iq)\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{q-i\infty}^{q+i\infty} e^{(q-ip)x}\tilde{h}(q-ip)\,d(q-ip) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{q-i\infty}^{q+i\infty} e^{zx}\tilde{h}(z)\,dz, \qquad q > 0.$$

При $q \to 0$ существует граничное значение $h(p+i0)$. В результате получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{0-i\infty}^{0+i\infty} e^{zx}\tilde{h}(z)\,dz, \qquad \tilde{h}(0-ip) = f^F(p). \tag{В.11}$$

Функция

$$\tilde{h}(q) = h(iq) = \int_0^\infty e^{-qx} f(x)\,dx, \qquad q > 0,$$

называется *преобразованием Лапласа* обобщенной функции f. □

Образ пространства $S(\mathbb{R}_{n+})$ при отображении $\phi(q) \to \hat{\phi}(x)$ (В.10) является плотным в $S(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$, а совокупность преднорм $\|\phi\|' = \|\hat{\phi}\|$ определяет в $S(\mathbb{R}_{n+})$ новую *ослабленную* топологию, относительно которой функционал (В.9) является непрерывным. Можно показать, что формулы (В.9) и (В.10) осуществляют взаимно однозначное соответствие между сужениями $\tilde{h}(q) = f^L(iq)$ на множество мнимых точек преобразований Фурье—Лапласа (т. е. преобразованиями Лапласа) обобщенных функций f из $S'(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ и обобщенными функциями из $S'(\mathbb{R}_{n+})$, непрерывными в ослабленной топологии в $S(\mathbb{R}_{n+})$.

Это важный математический факт. Например, с его помощью в алгебраической квантовой теории поля устанавливается соответствие между функциями Уайтмана и функциями Швингера.

3. Функции Уайтмана и Швингера

Согласно аксиомам Гординга—Уайтмана [2, 18] *функции Уайтмана*

$$W_n(x_1, \ldots, x_n) \subset S'(\mathbb{R}^{4n})$$

в пространстве Минковского удовлетворяют условиям трансляционной инвариантности и спектральности, т. е. существуют обобщенные функции $w_n \in S'(\mathbb{R}^{4n-4})$ такие, что

$$\begin{aligned} &w_n(x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n) = W_n(x_1, \ldots, x_n), \\ &\operatorname{supp} w_n^F(p^1, \ldots, p^{n-1}) \subset \overline{V}_+^n, \end{aligned} \tag{B.12}$$

где $\overline{V}_+$ обозначает замкнутый верхний световой конус в импульсном пространстве Минковского $\mathbb{R}_4$. Из условия спектральности (B.12) следует, что функция Уайтмана w_n является граничным значением в $S'(\mathbb{R}^{4n-4})$ функции $(w_n^F)^L$, являющейся преобразованием Фурье—Лапласа по переменным p_0^i функции w_n^F и голоморфной в трубе прошлого $(\mathbb{R}^4 + iV_-)^{n-1} \subset \mathbb{C}^{4n}$. Соответственно $W_n(x_1, \ldots, x_n)$ является граничным значением в $S'(\mathbb{R}^{4n})$ функции $W_n(z_1, \ldots, z_n)$, голоморфной в трубчатой области

$$\left\{z_i \,:\, \operatorname{Im}(z_{i+1} - z_i) \in V_-, \;\; \operatorname{Re} z_i \in \mathbb{R}^4\right\}.$$

В силу условия лоренц-ковариантности функций Уайтмана, функция $W_n(z_1, \ldots, z_n)$ может быть однозначно аналитически продолжена и в более широкую область — так называемую симметризованную трубу в $\mathbb{C}^{4n}$. Из условия локальности функции Уайтмана можно получить, что функция $W_n(x_1, \ldots, x_n)$ симметрична в этой области.

Обозначим в дальнейшем X пространство $\mathbb{R}^4$, отображаемое на вещественное подпространство в $\mathbb{C}^4$, и обозначим как Y пространство $\mathbb{R}^4$ с координатами $(y^0, y^{1,2,3})$, отображаемое на подпространство $\tilde{Y}$ в $\mathbb{C}^4$, образованное точками с координатами $(iy^0, y^{1,2,3})$. Если X — пространство Минковского, то Y считается его *евклидизацией*.

Рассмотрим подмножество $\tilde{Y}_{\neq}^n \subset \tilde{Y}^n \subset \mathbb{C}^{4n}$, состоящее из точек $(z_1, \ldots, z_n)$ таких, что $z_i \neq z_j$. Оно принадлежит области аналитичности функции Уайтмана $W_n(z_1, \ldots, z_n)$, и ограничение последней на $\tilde{E}_{\neq}^n$ определяет функцию

$$S_n(y_1, \ldots, y_n) = W_n(z_1, \ldots, z_n), \qquad z_i = \left(iy_i^0, y_i^{1,2,3}\right),$$

на $Y_{\neq}^n$, которая называется *функцией Швингера*. Она симметрична. В области $Y_<^n$, состоящей из точек $(y_1, \ldots, y_k)$ таких, что $0 < y_1^0 < \ldots < y_n^0$, функция S_n представима в виде

$$S_n(y_1, \ldots, y_n) = s_n(y_1 - y_2, \ldots, y_{n-1} - y_n),$$

где s_n — обобщенная функция из $S'(Y_-^{n-1})$, непрерывная на $S(Y_-^{n-1})$ в ослабленной топологии. Тогда, используя формулу (B.9), всякую такую функцию s_n можно представить в виде

$$\begin{aligned} s_n(y_1 - y_2, \ldots, y_{n-1} - y_n) = \int \exp\Big[&p_0^j \left(y_j^0 - y_{j+1}^0\right) - \\ &- i \sum_{k=1}^{3} p_k^j \left(y_j^k - y_{j+1}^k\right)\Big] w_n^F\left(p^1, \ldots, p^n\right) d_4p^1 \ldots d_4p^{n-1}, \end{aligned} \tag{B.13}$$

где обобщенная функция $w_n^F \in S'(\overline{\mathbb{R}}_{n+})$ — преобразование Фурье функции Уайтмана w_n, рассматриваемая как обобщенная функция из $S'(\mathbb{R}_{n+})$ с носителем на множестве $p_0^i \geqslant 0$. Формула (В.13) позволяет реконструировать в аксиоматической квантовой теории поля функции Уайтмана по симметричным функциям Швингера в евклидовом пространстве-времени [18, 72].

Приведем пример функций Уайтмана и Швингера w_2 и s_2 для массивного скалярного поля. Функция Швингера s_2 имеет вид

$$s_2(y_1 - y_2) = \int \frac{e^{-ip(y_1-y_2)}}{q^2 + m^2}\, d_4q, \tag{В.14}$$

где q^2 — евклидов квадрат и $(y_1^0 - y_2^0) < 0$. Оставляя за скобкой вычисления под знаком интеграла

$$\int e^{-i\vec{q}(\vec{y}_1-\vec{y}_2)}\, d_3q$$

и вводя обозначения $y^0 = y_1^0 - y_2^0$ и $M = (\vec{q}^{\,2} + m^2)^{1/2}$, с учетом (В.11) получаем

$$s_2(y^0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iq_0y^0}}{p_0^2 + M^2}\, dp_0 = \frac{1}{2M} e^{My^0}, \qquad y^0 < 0,$$

$$w_2(p_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{0-i\infty}^{0+i\infty} e^{-p_0y^0} s_2(y^0)\, dy^0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{0-i\infty}^{0+i\infty} \frac{1}{2M} e^{y^0(M-p_0)}\, dy^0 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2M} e^{ix(M-p_0)}\, dx = \frac{1}{2M}\delta(p_0 - M) = \delta(p_0^2 - M^2), \quad p_0 < 0, \quad x = -iy^0.$$

Отсюда, как и должно быть,

$$w_2(p_0, \vec{p}) = -iD^-(p),$$

где D^- — отрицательно частотная часть функции Паули—Йордана.

4. Виковский поворот

Перейдем теперь к преобразованию виковского поворота.

Чтобы избежать громоздких выкладок, прибегнем к следующему упрощению. Поскольку пространство Минковского M и его евклидизацию E при вложении в $\mathbb{C}^4$ можно по пространственным координатам отождествить, зависимость по этим координатам в дальнейшем выписываться не будет. Итак, рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C}^1 = X \oplus iY$ времени x и евклидова времени y и комплексную плоскость $\mathbb{C}_1 = P \oplus iQ$ соответствующих им импульсов p и q.

Замечание В.4. В этих обозначениях рассмотренная выше функция Уайтмана w_2 является обобщенной функцией на $\overline{P}_+$, а функция Швингера s_2 — обобщенной функцией на Y_-, непрерывной в ослабленной топологии и связанной с w_2 соотношениями

$$s_2(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{py} w_2(p)\, dp, \qquad y < 0,$$

$$w_2(p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0-i\infty}^{0+i\infty} e^{-py}s_2(y)\,dy = -iD^-(p).$$

□

Возьмем такую обобщенную функцию $W(q) \in S'(Q)$, что

$$W = W_+ + W_-, \qquad W_+ \in S'(\overline{Q}_+), \qquad W_- \in S'(\overline{Q}_-). \tag{B.15}$$

Например, $W(q)$ является обычной функцией в 0. Для всякой функции $\psi_+ \in S(X_+)$ можно записать

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\overline{Q}_+} W(q)\hat{\psi}_+(q)\,dq &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\overline{Q}_+} dq \int\limits_{X_+} dx\left[W(q)\exp(-qx)\psi_+(x)\right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\overline{Q}_+} dq\int\limits_P dp\int\limits_{X_+} dx\left[W(q)\psi_+^F(p)\exp(-ipx-qx)\right] = \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^2}\int\limits_{\overline{Q}_+} dq\int\limits_P dp\left[W(q)\frac{\psi_+^F(p)}{p-iq}\right] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\overline{Q}_+} W(q)\psi_+^L(iq)\,dq,\end{aligned} \tag{B.16}$$

исходя из того, что преобразование Фурье—Лапласа $\psi_+^L(p+iq)$ функции $\psi_+ \in S(X_+) \subset S'(X_+)$ существует и голоморфно в трубчатой области $P + iQ_+$. Причем $\psi_+^L(p+i0) = \psi_+^F(p)$, и функция $\hat{\psi}_+(q) = \psi_+^L(iq) \in S'(\overline{Q}_+)$ интерпретируется как *виковский поворот* функции $\psi_+(x)$. Равенство (B.16) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\overline{Q}_+} W(q)\hat{\psi}_+(q)\,dq = \int\limits_{X_+} \widehat{W}_+(x)\psi_+(x)\,dx, \tag{B.17}$$

$$\widehat{W}_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\overline{Q}_+} \exp(-qx)W(q)\,dq, \qquad x \in X_+. \tag{B.18}$$

Оно ставит в соответствие обобщенной функции $W(q) \in S'(Q)$ обобщенную функцию $\widehat{W}_+(x) \in S'(X_+)$ (B.18), непрерывную в ослабленной топологии на $S(X_+)$.

Для всякой функции $\psi_- \in S(X_-)$ имеют место аналогичные соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\overline{Q}_-} W(q)\hat{\phi}_-(q)\,dq = \int\limits_{X_-} \widehat{W}_-(x)\phi_-(x)\,dx, \tag{B.19}$$

$$\widehat{W}_-(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\overline{Q}_-} \exp(-qx)W(q)\,dq, \qquad x \in X_-.$$

Комбинируя (B.17) и (B.19), получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{Q} W(q)\hat{\psi}(q)\,dq = \int\limits_{X} \widehat{W}(x)\psi(x)\,dx, \tag{B.20}$$

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_+ + \hat{\psi}_-, \qquad \psi = \psi_+ + \psi_-,$$

где $\widehat{W}(x)$ является линейным функционалом на функциях $\psi \in S(X)$ таких, что ψ и все ее производные обращаются в 0 в точке $x = 0$. Он представляет собой *виковский поворот* обобщенной функции (В.15). Его можно рассматривать как функционал на $S(X)$, если добавочно доопределить в точке $x = 0$. Это известная неоднозначность хронологических форм в квантовой теории поля.

Библиография

[1] Ф. Березин, Квантование, *Изв. АН СССР* **38** (1974) 1116.

[2] Н. Боголюбов, А. Логунов, А. Оксак, И. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля.* М.: Наука, 1987.

[3] У. Браттели, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.* М.: Мир, 1982.

[4] Н. Бурбаки, *Общая топология.* М.: Физматгиз, 1958.

[5] Н. Бурбаки, *Топологические векторные пространства.* М.: Иностранная литература, 1959.

[6] Н. Бурбаки, *Спектральная теория.* М.: Мир, 1972.

[7] Н. Бурбаки, *Интегрирование, Гл. III–V, IX.* М.: Наука, 1977.

[8] И. Гельфанд, Н. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства (Обобщенные функции, вып. 4).* М.: Физматгиз, 1961.

[9] А. Гриб, *Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля.* М.: Атомиздат, 1978.

[10] Ж. Диксмье, *C^*-алгебры и их представления.* М.: Наука, 1974.

[11] Ж. Диксмье, *Универсальные обертывающие алгебры.* М.: Мир, 1978.

[12] В. Дринфельд, *Доклады АН СССР* **273**, N3, 531 (1983).

[13] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии, т.2.* М.: Наука, 1981.

[14] И. Малкин, В. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем.* М.: Наука, 1979.

[15] М. Наймарк, *Теория представлений групп.* М.: Наука, 1976.

[16] А. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения.* М.: Наука, 1987.

[17] А. Робертсон, В. Робертсон, *Топологические векторные пространства.* М.: Мир, 1967.

[18] Б. Саймон, *Модель $P(\phi)_2$ евклидовой квантовой теории поля.* М.: Мир, 1976.

[19] Г. Сарданашвили, *Современные методы теории поля. 1. Геометрия и классические поля.* М.: УРСС, 1996.

[20] Г. Сарданашвили, *Современные методы теории поля. 2. Геометрия и классическая механика.* М.: УРСС, 1998.

[21] Х. Умедзава, Х. Мацумото, М. Татики, *Термополевая динамика и конденсированные состояния.* М.: Мир, 1985.

[22] Р. Уэллс, *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.* М.: Мир, 1976.

[23] Н. Харт, *Геометрическое квантование в действии.* М.: Мир, 1985.

[24] С. Хоружий, *Введение в алгебраическую квантовую теорию поля.* М.: Наука, 1986.

[25] Ж. Эмх, *Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля.* М.: Мир, 1976.

[26] S. T. Ali, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau and U. Mueller, Coherent states and their generalizations: A mathematical overview, *Rev. Math. Phys.* **7** (1995) 1013.

[27] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerovicz and D. Sternbeimer, Deformation theory and quantization, *Ann. Phys.* **111** (1978) 61,111.

[28] F. Berezin, General concept of quantization, *Commun. Math. Phys.* **40** (1975) 153.

[29] H. Borchers, Algebras of unbounded operators in quantum field theory, *Physica* **124A** (1984) 127.

[30] M. Bordeman and S. Waldmann, Formal GNS construction and states in deformation quantization, *Commun. Math. Phys.* **195** (1998) 549.

[31] M. Bordeman, H. Römer and S. Waldmann, A remark on formal KMS states in deformation quantization, *Lett. Math. Phys.* **45** (1998) 49.

[32] O. Bratelli and D. Robinson, Unbounded derivations of C^*-algebras, *Commun. Math. Phys.* **42** (1975) 253; **46** (1976) 11.

[33] O. Bratelli and D. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, II* (Springer-Verlag, Berlin, 1981).

[34] Z. Chang, Quantum group and quantum symmetry, *Phys. Rep.* **262** (1995) 137.

[35] V. Chari and A. Pressly, *A Guide to Quantum Groups* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994).

[36] R. Cirelli, A. Manià and L. Pizzocchero, Quantum mechanics as an infinite-dimensional Hamiltonian system with uncertainty structure, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 2891,2898.

[37] R. Cirelli, A. Manià and L. Pizzocchero, A functional representation for non-commutative C^*-algebras, *Rev. Math. Phys.* **6** (1994) 675.

[38] X. Dao-Xing, *Measure and Integration Theory on Infinite-Dimensional Spaces* (Academic Press, N.Y., 1972).

[39] R. Delbougro and J. Fox, Maximum weight vectors possess minimal uncertainty, *J. Phys. A* **10** (1977) L233.

[40] H.-D. Doebner, J.-D. Henning (eds), *Quantum Groups*, Lecture Notes in Physics, **370** (Springer-Verlag, Berlin, 1990).

[41] B. Fedosov, A simple geometrical construction of deformation quantization, *J. Diff. Geom.* **40** (1994) 213.

[42] B. Fedosov, *Deformation Quantization and Index Theory* (Akademie Verlag, Berlin, 1996).

[43] A. Grossmann, J. Morlet and T. Paul, Integral transforms associated to square integrable representations, *J. Math. Phys.* **26** (1985) 2473.

[44] F. Hansen, Quantum mechanics in phase space, *Rep. Math. Phys.* **19** (1984) 361.

[45] M. Hazewinkel and M. Gerstenhaber (eds), *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications* (Kluwer, Dordrecht, 1988).

[46] P. Henning, Thermo field dynamics for quantum fields with continuous mass spectrum, *Phys. Rep.* **253** (1995) 235.

[47] C. Johnston, Remarks on resolutions of Hilbert—Schmidt operators, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 5968.

[48] J. Kammerer, Analysis of the Moyal product in flat space, *J. Math. Phys.* **27** (1986) 529.

[49] A. Kishimoto, Dissipations and derivations, *Commun. Math. Phys.* **47** (1976) 25.

[50] B. Kostant, Quantization and unitary representation, In: *Lectures in Modern Analysis and Applications III*, Lecture Notes in Mathematics, **170** (Springer-Verlag, Berlin, 1970), p. 87.

[51] N. Landsman and Ch. van Weert, Real- and imaginary-time field theory at finite temperature and density, *Phys. Rep.* **145** (1987) 141.

[52] J. Mujca, *Complex Analysis in Banach Spaces* (North-Holland, Amsterdam, 1986).

[53] A. Odzijewicz, On reproducing kernels and quantization of states, *Commun. Math. Phys.* **114** (1988) 577.

[54] A. Odzijewicz, Coherent states and geometric quantization, *Commun. Math. Phys.* **150** (1992) 385.

[55] G. Pedersen, *C^*-Algebras and their Automorphism Groups* (Academic Press, London, 1979).

[56] G. Pinson, Noncommutative deformation theory, *Lett. Math. Phys.* **41** (1997) 101.

[57] R. Powers and S. Sakai, Unbounded derivations in operator algebras, *J. Funct. Anal.* **19** (1975) 81.

[58] R. Powers and S. Sakai, Existence of ground states and KMS states for approximately inner dynamics, *Commun. Math. Phys.* **39** (1975) 273.

[59] J. Renault, *A Gruppoid Approach to C^*-Algebras*, Lecture Notes in Mathematics, **793** (Springer-Verlag, Berlin, 1980).

[60] M. Rieffel, Deformation quantization of Heisenberg manifolds, *Commun. Math. Phys.* **122** (1989) 531.

[61] F. Shultz, Pure states as a dual object of C^*-algebras, *Commun. Math. Phys.* **82** (1982) 497.

[62] A. Smilga, Physics of thermal QCD, *Phys. Rep.* **291** (1997) 1.

[63] J.Śniatycki, *Geometric Quqntization and Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 1980).

[64] M. Takesaki, *Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications*, Lecture Notes in Mathematics, **128** (Springer-Verlag, Berlin, 1970).

[65] L. Takhtajan, Lecture on quantum groups, In: *Introduction to Quantum Groups and Integral Massive Models in Quantum Field Theory*, ed. Mo-Lin Ge and Bao-Heng Zhao (World Scientific, Singapore, 1990).

[66] N. Weaver, Deformation quantization for Hilbert space actions, *Commun. Math. Phys.* **188** (1997) 217.

[67] M. DeWilde and P. B. A. Lecomte, Existance of star-products and of formal deformations of the Poisson-Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds, *Lett. Math. Phys.* 7 (1983) 487.

[68] N. Woodhouse, *Geometric Quantization* (Clarendon Press, Oxford, 1980).

[69] S. Woronowicz, Unbounded elements affiliated with C^*-algebras and non-compact quantum groups, *Commun. Math. Phys.* **136** (1991) 399.

[70] S. Woronowicz, Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups), *Commun. Math. Phys.* **122** (1989) 125.

[71] S. Woronowicz, C^*-algebras generated by unbounded elements, *Rev. Math. Phys.* 7 (1995) 481.

[72] Yu. Zinoviev, Equivalence of Euclidean and Wightman field theories, *Commun. Math. Phys.* **174** (1995) 1.

Список обозначений

$A^\dagger$, 38
A_+, 40
A_{free}, 87
$\widetilde{A}$, 27
$\overline{A}$, 32
$\widehat{A}$, 31
$\mathscr{A}(Z)$, 98
$\mathscr{A}_T$, 106

$B(E)$, 28
B_*, 53
B_+, 41
B_{*+}, 62

$C(E)$, 29
$C^*(G)$, 66
$\mathrm{Co}(\gamma_G(a))$, 64

$d_n p$, 195

E', 9
E'', 10
$E(A)$, 39
$E(Y, \mu)$, 33
E^*, 8
E_ϕ, 44
E_∞, 84
$\overline{E}$, 15
$\widetilde{E}$, 20

$F_1(A)$, 39
$\mathcal{F}_a$, 48
f^F, 196

$G(Q)$, 111
$GL(E)$, 84
$\Gamma(f)$, 196
$\overline{\mathcal{G}}$, 85
$\mathcal{G}$, 85
$\mathcal{G}(Q)$, 111
$\widehat{G}$, 67
$g^\flat$, 24
$g^\sharp$, 24

$gl(E)$, 84

J, 60
J_+, 179

$K(E)$, 34
K_π, 70
$\mathcal{K}(G, \mathbb{C})$, 70
$\mathcal{K}(X)$, 8
$\mathcal{K}(X, E)$, 190
$\mathcal{K}_+(X)$, 179

$L(E, F)$, 12
$L(X)$, 8
$L^1(G)$, 66
$L^2(G)$, 68
L^∞, 181
$L^p(X)$, 181
$L^p(X, \overline{\mathbb{R}})$, 181
$\overline{L}^p(X)$, 183
$\widetilde{L}^p(X)$, 181

$M(X)$, 178
$M^1(G)$, 66
$M^1(X)$, 179
$M_+(X)$, 179
$M_1(K)$, 192
M_f, 46

N', 29
N'', 29
$N(B)$, 53
$N(E)$, 187
N_G, 64
N_K, 193
N_ϕ, 44
$N_p(f)$, 181

$\mathcal{O}^k(Z)$, 143
$\mathcal{O}_f$, 46

$P(A)$, 39
PE, 24

$\mathrm{Prim}(A)$, 31

$R(X)$, 181
RS^4, 153
$R^p(X)$, 181
$\mathbb{R}^n_+$, 197
$\mathbb{R}_n$, 195
$\overline{R}_+(X)$, 181
$\overline{\mathbb{R}}^n_+$, 197
$\overline{\mathbb{R}}$, 179

$S'(\mathbb{R}^n)$, 194
$S(K)$, 192
$S(\mathbb{R}^n)$, 194
$\mathrm{Sp}_A\, a$, 27
$\mathcal{S}(X, E)$, 190

T_ϕ, 41
$\mathcal{T}_\Omega$, 106

$\mathcal{U}(A)$, 42

$\mathcal{V}(A)$, 42

$\overline{\gamma}_g$, 63
$\widetilde{\gamma}_g$, 63
Δ, 60
ε_x, 178
θ_f, 37
$\overline{\mu}$, 182
μ^*, 179
μ^{-1}, 185
μ_γ, 184
μ_f, 184
$*\mu_i$, 185
π_f, 37
$\widetilde{\pi}$, 30
$\sigma(E, F)$, 9
σ_t^ϕ, 60
ϕ_K, 178
$\omega^\flat$, 24
$\omega^\sharp$, 24
ω_θ, 36

Предметный указатель

А

абстрактная теорема об ядре, 19
алгебра Борхерса, 153
— Вейля, 142
— Гейзенберга—Вейля, 111
— КАС, 129
— Пуассона, 98
— Хопфа, 132
— — инволютивная, 132
— — квазитриангулярная, 133
— — классическая, 135
— — кокоммутативная, 132
— банахова, 26
— инволютивная, 26
— — нормированная, 26
— — типа I, 32
— конечно порожденная, 88
— простая, 35
— с присоединенной единицей, 27
— свободная, 87
— фон Неймана, 29
— — конечная, 41
— — полуконечная, 41
— — порожденная, 29
— — типа I, 29
— — типа III, 170
— — σ-конечная, 59
— C^*-функций, 124
C^*-алгебра, 26
— группоида, 82
— квазилокальная, 126
— конечно порожденная, 88
— локальная, 126
— локально компактной группы, 66
— порожденная присоединенными элементами, 90
— — элементарная, 34
CCR-алгебра, 35
GCR-алгебра, 35
Op^*-алгебра, 149
алгебраически сопряженное, 8
аналитический вектор, 60
антиголоморфное касательное пространство, 22
антиморфизм, 51
антиобратное отображение, 132
аппроксимативная единица, 27

Б

базис, 6
— меры, 184
— ортонормальный, 14
барицентр, 193
бикоммутант, 29
бинваринтное подпространство, 70
борелевская алгебра, 191
— мера, 191
— — внутренне регулярная, 191
— — локально ограниченная, 191
борелевское множество, 191
— пространство, 191
— — подчиненное топологии, 191
— — стандартное, 191
бэровская мера, 192
бэровское множество, 192

В

вакуум, 170
вакуумное среднее, 170
вектор бесконечно дифференцируемый, 85
— допустимый, 91
— ортонормальный, 13
векторная форма, 36
векторное поле комплексное, 22
вероятностное пространство, 158
верхний интеграл, 180, 183
виковский поворот, 201
воспроизводящая система, 99
— тройка, 99
воспроизводящее ядро, 92
второе сопряжение, 10
выпуклая оболочка, 5

Г

гамильтониан, 58
гауссова мера с ненулевым средним, 120
— промера, 189
— промера каноническая, 189
гиббсовское состояние, 161
гильбертов интеграл, 33
гильбертова алгебра, 42
— — группы, 70
— — полная, 42
— — совершенная, 42
— размерность, 14
— сумма, 15
— — представлений, 30
гильбертово пространство дуальное, 15

— — сепарабельное, 14
гиперподпространство, 5
голоморфное касательное пространство, 22
— многообразие, 22
граф-топология, 150
группа Гейзенберга—Вейля, 111
— изотропная, 73
— когомологий группоида, 77
— модулярных автоморфизмов, 60
— равномерно непрерывная, 53
— сильно непрерывная, 54
— слабо непрерывная, 54
групповая алгебра, 66
групповое расслоение, 74
группоид, 72
— главный, 73
— топологический, 78
— транзитивный, 73
— тривиальный, 74
— l-дискретный, 79

Д

дезинтегрирование представления, 34
действие группы раздельно непрерывное, 53
— слабо непрерывное, 54
деформационное квантование строгое, 147
деформация Ли, 140
— ассоциативная, 140
— билинейной формы, 139
C^*-динамическая система, 162
W^*-динамическая система, 162
дискретная серия представлений, 70
дифференцирование внутреннее, 55
— внутренние аппроксимативно, 55
— допустимое, 57
— симметрическое, 54
допустимая пара, 72
дуальная пара, 9

Е

евклидизация пространства Минковского, 199
единица левая, 73
— правая, 73
естественный положительный конус, 61

З

замыкание оператора, 56
— представления, 150

И

идеал, 27
— двусторонний, 27
— — максимальный, 27
— примитивный, 31
— собственный, 27
— существенный, 88
измельчение меры, 184
измеримое отображение, 183
— подмножество, 183
изометрия, 51
изоморфизм пространственный, 29
изотонности условие, 126
инволюция, 26
интеграл, 178
— верхний, 179
— со значениями в векторном пространстве, 190

Й

йорданов автоморфизм, 51
— изоморфизм, 51
— морфизм, 51

К

калибровочная функция множества, 7
квазиспектр, 32
квантование по Березину, 99
квантовая алгебра Ли, 137
— группа, 135
— решетка, 127
квантовое гильбертово пространство, 106
— распределение, 127
— тождество Якоби, 138
— удвоение, 136
— число, 137
квантовые коммутационные соотношения, 138
— структурные константы, 138
квантовый детерминант, 136
— факториал, 137
коалгебра, 132
когерентное состояние, 92
— состояние ковариантное, 95
— состояние обобщенное, 94
— состояние обобщенное допустимое, 94
когомологии Хосшильда, 140
— Шевалье—Эленберга, 141
коединица, 132
коммутант, 29
— сильно ограниченный, 150
— слабо ограниченный, 150
комплексная форма, 22
комплексное гамильтоново векторное поле, 24
— касательное пространство, 22
— касательное расслоение, 22
— кокасательное пространство, 22
— кокасательное расслоение, 22
комплексный касательный вектор, 22
конструкция ГНС, 3
— Федосова, 142
копроизведение, 132
коэффициент представления, 69
кэлерова метрика, 23
кэлерово многообразие, 23
КАС, 129
ККС C^*-алгебра, 124

ККС алгебра, 111
ККС в форме Вейля, 111
ККС в форме Гейзенберга, 111
ККС группа, 111

Л

лемма Шура, 86
линейное расслоение, 103
локально интегрируемая функция, 184
локальной коммутативности условие, 127

М

матрица плотности, 59
мера, 178
— Баргмана, 122
— Дирака, 178
— Лиувилля, 98
— Хаара, 186
— — левая, 186
— борелевская стандартная, 191
— вероятностная, 191
— внешняя открытого множества, 179
— — произвольного множества, 180
— инвариантная, 186
— — на пространстве единиц, 80
— индуцированная, 183
— — на группоиде, 80
— квазиинвариантная, 186
— — на пространстве единиц, 80
— максимальная, 193
— множества, 178
— обратная, 185
— ограниченная, 179
— ортогональная, 46
— положительная, 179
— псевдососредоточенная, 192
— сосредоточенная, 183
— точечная, 178
меры эквивалентные, 184
метрическая связность, 23
множество локально пренебрежимое, 182
— орбит группоида, 74
— пренебрежимое, 180
множитель подалгебры, 88
модуль группы, 186
— элемента, 40, 49
модулярная группа, 60
— инволюция, 60
— функция, 80
модулярное условие, 60
модулярный оператор, 60
мультипликатор меры, 186

Н

норма, 6
— Гильберта—Шмидта, 17
— операторная, 16
— следовая, 18
носитель меры, 178, 183
— обобщенной функции, 197

О

обертывающая алгебра фон Неймана, 172
— C^*-алгебра, 38
область, 196
— определения оператора, 56
обобщенная функция, 194
обобщенное граничное значение, 197
обобщенный собственный вектор, 20
оболочка выпуклая замкнутая, 5
образ меры, 184
— промеры, 188
образующие элементы, 87
огибающая, 179
оператор Гильберта—Шмидта, 17
— Казимира, 86
— Лиувилля, 167
— замкнутый, 56
— замыкаемый, 56
— компактный, 17
— комплексной структуры, 21
— неограниченный, 56
— нормальный, 16
— ограниченный, 16
— полного числа частиц, 116
— положительно определенный, 17, 190
— присоединенный, 58, 89
— разложимый, 33
— рождения, 115
— самосопряженный, 56
— симметрический, 56
— сопряженный, 16, 56
— — максимальный, 56
— сплетающий, 31
— суперотбора, 172
— существенно самосопряженный, 56
— унитарный, 16
— уничтожения, 115
— эрмитов, 16
— ядерный, 18
операторное поле измеримое, 33
определенное почти всюду отображение, 181
основные функции, 194
отделяющее подмножество, 59
относительно инвариантная мера, 187
отношение эквивалентности единиц, 73
отображение антилинейное, 15
— аффинное, 52
— вполне непрерывное, 17
— вырожденное, 17
— положительное, 51
— скалярно непрерывное, 190
— слабо непрерывное, 12
— сопряженное, 12
— ядерное, 19
— μ-собственное, 184

П

параметр деформации, 139
плотность меры, 184
подалгебра максимальная, 97

подмножество абсолютно выпуклое, 5
— ограниченное, 10
— относительно компактное, 180
— поглощающее, 6
— слабо ограниченное, 10
— уравновешенное, 5
подобные гомоморфизмы, 75
— группоиды, 75
подпространство самосопряженное, 151
поле гильбертовых пространств измеримое, 32
— — — с интегрируемым квадратом, 33
— представлений, 34
— C^*-алгебр, 124
полная масса меры, 180
— система обобщенных собственных векторов, 20
полунорма, 6
полуплотность, 106
польское пространство, 191
поляризация, 105
полярное разложение, 41
пополнение, 7
преддвойственное пространство, 53
предквантование, 105
предквантовое расслоение, 105
предмера, 182
— локально ограниченная, 182
— ограниченная, 182
преднорма, 6
представление Шредингера, 121
— вполне приводимое, 71
— группоида, 81
— замкнутое, 150
— квадратично интегрируемое, 91
— невырожденное, 30
— неприводимое, 151
— — алгебраически, 31
— — топологически, 30
— ограниченное, 81
— полное, 133
— регулярное левое, 68
— — правое, 69
— с интегрируемым квадратом, 70
— самосопряженное, 150
— со следом, 43
— сопряженное, 150
— — второе, 150
— существенно самосопряженное, 150
— точное, 30
— фоковское, 118
— циклическое, 30
— чисел заполнения, 122
— эрмитово, 149
представления дизъюнктные, 31
— квазиэквивалентные, 31
— со следом квазиэквивалентные, 43
— — эквивалентные, 43
преобразование Гельфанда, 48, 50
— Лапласа, 198
— Фурье обобщенной функции, 196
— — промеры, 188
— — функции, 195
— — функции обратное, 195
— Фурье—Лапласа, 196
преобразования Боголюбова неоднородные, 121
— — однородные, 119
принцип соответствия, 97
— — слабый, 99
присоединенное действие алгебры Хопфа, 137
проективное гильбертово пространство, 24
проектор, 16
проекторы ортогональные, 43
проекционный оператор, 16
произведение Вейля, 143
— Мойла, 141
— косое, 76
— мер, 185
— подкрученное, 148
— полупрямое, 76
производная Радона—Никодима, 184
производящая функция, 112
промера, 188
пространства μ-эквивалентные, 180
пространство Гординга, 85
— Фреше, 7
— Шварца, 194
— банахово, 7
— выпуклое, 5
— гильбертово, 14
— единиц, 73
— локально выпуклое, 6
— оснащенное гильбертово, 20
— предгильбертово, 13
— пробных функций, 194
— рефлексивное, 10
— случайных величин, 158
— счетно-гильбертово, 18
— ядерное, 19
протяженная система, 124
прямая сумма гильбертовых пространств, 15
прямой интеграл представлений, 34

Р

равномерно непрерывное действие, 53
разложение единицы, 96
— эргодическое, 64
распределение Шварца, 195
— умеренного роста, 194
расслоение группоидов, 77
— линейное универсальное, 109
— модулей, 77
— — постоянное, 77
— на C^*-алгебры, 125
— подгрупп, 79
расширение представления, 150
расширенная числовая прямая, 180
решетка, 193
ряд Лорана, 148

С

свертка мер, 185
— меры и функции, 187
— функций, 187

связность абелева, 146
— допустимая, 105
— симплектическая, 145
семейство полное, 14
— топологически свободное, 13
— тотальное, 14
сепарабельное пространство, 7
сеть, 27
сильно непрерывное действие, 54
символ оператора, 100
— — контравариантный, 100
симплекс, 193
система Хаара, 78
— — правая, 79
скалярное произведение, 13
след, 41
— конечный, 41
— нормальный, 41
— полуконечный, 41
— точный, 41
случайный процесс, 158
— — гауссовский, 158
собственное подпространство, 20
сопряженные показатели, 183
состояние, 36
— КМШ, 162
— инвариантное, 63
— когерентное, 96
— на ненормированной алгебре, 152
— основное, 63
— сепарабельное, 169
— точное, 59
— эргодическое, 64
спектр, 31
— оператора, 16
— элемента, 27
спектральное разложение, 20
спиновая решетка, 131
стационарная подгруппа, 93
субпредставление, 151
сужение группоида, 75
сумма мер, 183
суммируемое семейство мер, 184
существенный верхний интеграл, 181, 182

Т

тензор кривизны симплектической связности, 146
тензорная алгебра, 85
тензорное произведение гильбертовых пространств, 16
— — — — неполное, 128
— — C^*-алгебр, 127
теорема Алаоглу—Бурбаки, 11
— Борхерса—Арвесона, 58
— Бохнера, 188
— Вика, 155
— Колмогорова, 10
— Макки—Аренса, 11
— Пуанкаре—Биркгофа—Витте, 85
— Рисса, 193
— Сакаи, 29
— Томита—Такесаки, 60
— Хана—Банаха, 9
— Шура, 72
— фон Неймана, 122
термополевая динамика, 166
топологически сопряженное, 9
топологическое векторное пространство, 5
топология Джекобсона, 31
— Макки, 11
— Фелла, 79
— индуктивного предела, 8
— компактной сходимости, 8
— — — по всем производным, 8
— определяемая семейством преднорм, 7
— ослабленная, 198
— поточечной сходимости, 7, 158
— прямой суммы, 86
— равномерная, 7
— равномерной сходимости, 8
— — — на семействе множеств, 10, 12
— сильная, 10
— — операторная, 28
— слабая, 9
— — операторная, 28
— — определяемая пространством, 9
— слабая*, 10
— сходимости в среднем, 181
— — — порядка p, 181
— ультрасильная, 28
— ультраслабая, 28
— широкая, 179
— согласующаяся с двойственностью, 9
тотализирующий вектор, 30
— — сильно, 150
точка крайняя, 11
трансляционная квазиинвариантность, 114
трубчатое множество, 197

У

универсальная обертывающая алгебра, 85
— R-матрица, 133
универсальное представление, 38
унимодулярная группа, 187
уравнение Янга—Бахтера, 134
— Янга—Бахтера квантовое, 133
условие Бора—Зоммерфельда, 106
— Дирака, 98
— КМШ, 162
— КМШ для мер, 80
— сильной аналитичности, 60
— слабой аналитичности, 60
— справедливое почти всюду, 180
— целочисленности симплектической формы, 105

Ф

фактор, 29
фактор-представление, 31
фильтрующееся семейство, 182
фоковское представление, 122
— представление КАС, 131
форма Киллинга, 87
— ковариации, 189
— мажорирующая, 36
— ортогональная, 46
— положительная, 35
— нормальная, 53
— центральная, 45
— чистая, 39
— эрмитова, 13
— — невырожденная, 13
— — положительная, 13
формальная размерность, 70
формула Костанта—Сурьо, 105
формы связанные с представлением, 36
фундаментальная форма эрмитовой метрики, 23
функции быстро убывающие на бесконечности, 194
— интегрируемые, 181
— интегрируемые в p-степени, 181
функция Грина, 167
— Уайтмана, 199
— Швингера, 199
— антиголоморфная, 21
— аффинная, 192
— вогнутая, 192
— выпуклая, 192
— голоморфная, 21
— интегрируемая, 181
— модерантная, 183
— положительного типа, 68, 188
— — — чистая, 68
— пренебрежимая, 180
— существенно ограниченная, 33

Х

характер, 44
— группы, 71
— коммутативной алгебры, 47
характеристическая функция множества, 178

Ц

целые аналитические элементы, 61
центр универсальной обертывающей алгебры, 86
центральный носитель, 71
циклический вектор, 30

Э

эквивалентные представления, 30
экстремальное разложение, 47
элемент Гильберта—Шмидта, 42
— Казимира, 87
— положительный, 40
— — строго, 89
— со следом, 42
эрмитова метрика, 22
эрмитово многообразие, 23

Я

ядерная группа, 112
ядро положительного типа, 159

Содержание

Введение 3

Глава 1. **Пространства** 5
§ 1. Топологические векторные пространства 5
§ 2. Сопряженные пространства 8
§ 3. Пространства линейных отображений 11
§ 4. Гильбертовы пространства 12
§ 5. Операторы в гильбертовых пространствах 16
§ 6. Счетно-гильбертовы и ядерные пространства 18
§ 7. Дополнение.
Кэлеровы многообразия 20

Глава 2. **Алгебры и их представления** **26**
§ 1. Инволютивные алгебры 26
§ 2. Представления инволютивных алгебр 29
§ 3. Гильбертовы интегралы представлений 32
§ 4. Конструкция ГНС 35
§ 5. Следы 40
§ 6. Гильбертовы интегралы состояний 45
§ 7. Дополнение.
Функциональное представление C^*-алгебр 47

Глава 3. **Симметрии квантовых систем** **51**
§ 1. Морфизмы и йордановы морфизмы 51
§ 2. Дифференцирования 54
§ 3. Модулярная группа 59
§ 4. Инвариантные состояния 62
§ 5. Группы и C^*-алгебры 65
§ 6. Дополнение.
Группоиды и C^*-алгебры 72

Глава 4. **Квантовомеханические системы** **84**
§ 1. Универсальные обертывающие алгебры 84
§ 2. Конечно порожденные C^*-алгебры 87
§ 3. Когерентные состояния 91
§ 4. Квантование по Березину 97
§ 5. Геометрическое квантование 102
§ 6. Канонические коммутационные соотношения 110
§ 7. Протяженные системы 124
§ 8. Канонические антикоммутационные соотношения 129

§ 9. Квантовые группы 131
§ 10. Деформационное квантование 139

Глава 5. **Алгебраическая квантовая теория поля** **149**
§ 1. Алгебры неограниченных операторов 149
§ 2. Алгебры свободных полей 152
§ 3. Производящие функционалы 156

Глава 6. **Дополнения** **161**
§ 1. Квантовая теория при конечной температуре 161
§ 2. Системы со многими вакуумами 170

Приложение А. **Меры** **178**

Приложение Б. **Преобразования Лапласа** **194**

Библиография **203**

Список обозначений **206**

Предметный указатель **207**

Г.А.Сарданашвили

ГЕОМЕТРИЯ И КВАНТОВЫЕ ПОЛЯ

Современные методы теории поля. Т. 4

М.: УРСС, 2000. — 160 с.

В этом томе дается краткий обзор квантовых полевых моделей, в которых существенную роль играют связности. В квантовой теории поля используется алгебраическое понятие связностей на модулях и пучках.

Содержание

Введение	3
Глава 1 Алгебраические связности	**4**
§1. Дифференциальное исчисление на модулях	4
§2. Связности на модулях	12
§3. Связности на пучках	16
Глава 2. Связности в квантовой механике	**24**
§1. Эволюция квантовых систем	24
§2. Связности Берри	28
Глава 3. Суперсвязности	**32**
§1. Алгебра градуированных пространств	32
§2. Связности на градуированных многообразиях	35
§3. Суперрасслоения и суперсвязности	44
§4. Суперсвязности на главных суперрасслоениях	56
§5. Главные градуированные расслоения	61
§6. Суперсимметричная теория поля	64
§7. Суперсвязности Неемана— Куплена	70
Глава 4. Связности в БРСТ-формализме	**75**
§1. Связность на струях бесконечного порядка	75
§2. Вариационный бикомплекс	86
§3. Струи духов и антиполей	90
§4. БРСТ-связность	97
Глава 5. Топологические теории поля	**102**
§1. Пространство калибровочных полей	102
§2. Связности на калибровочных полях	107
§3. Инварианты Доналдсона	112
Глава 6. Аномалии	**115**
§1. Калибровочные аномалии	115
§2. Глобальные аномалии	119
§3. БРСТ-аномалии	122
Глава 7. Связности в некоммутативной геометрии	**125**
§1. Некоммутативная алгебра	125
§2. Некоммутативное дифференциальное исчисление	128
§3. Универсальные связности	132
§4. Связности Дюбуа— Виолетта	133
§5. Матричная геометрия	135
§6. Некоммутативная геометрия Кона	137

Приложение А. К-теория 139
Приложение Б. Теорема об индексе 141
Библиография 149
Предметный указатель 154

Предметный указатель

А
аномалий группа 121
— точная последовательность 121
аномалия 118
— глобальная 121
— локальная 121
антидуховое число 96
антиполе 94
антискобки 95
Атьи—Зингера связность 112
Атьи класс 23
Б
базис градуированного многообразия 37
базовая группа Ли 57
базовое пространство супермногообразия 47
Берри связность 30
— фазовый множитель 30
Бетти число 113
биалгебра 57
бикомплекс 87
бимодуль центральный 125
БРС-оператор 66
БРСТ-аномалия 123
БРСТ-замкнутая форма ПО
— — локальная 98
БРСТ-когомологии 98
БРСТ-оператор 96
— полный 98
БРСТ-связность 101
БРСТ-тензорнос поле 100
БРСТ-точная форма 110
— — локальная 98
В
вариационная последовательность 88
вариационный оператор 88
векторное поле на пространстве струй бесконечного порядка 86
вертикальное конфигурационное пространство 64
— расслоение Лежандра 65
— расширение гамильтоновой формы 65
вертикальный дифференциал 84
вещественный спектр 11
внешняя алгебра 33
— — градуированного модуля 33
Г
Гейзенберга уравнение 25
Гельмгольца—Сонина оператор 89
геометрический модуль 12
— фазовый множитель 31
главная часть дифференциального оператора 141 главное градуированное расслоение 63
— суперрасслоение 59
глобальная калибровка 107
гомотопическая производная 116
— связность 115
— формула Картана 116
гомотопический оператор 116
горизонтальная проекция 84
горизонтальный дифференциал 84
градуированная алгебра 33
— — банахова 33
— — дифференциальная 128
— оболочка 34
— общая линейная группа 35
— полная производная 92
— связность 40
— — композиционная 41
— — на градуированном расслоении 63
— форма 42
— — гамильтонова 68
— функция 35

Z-градуированная алгебра 128
градуированное векторное поле 37
— — пространство 33
— дифференцирование 37
— кольцо 32
— многообразие 35
— — простое 39
— подмногообразие 63
— — замкнутое 63
— расслоение 63
— — струй 63
— тензорное произведение 33
градуированные когомологии Де Рама 43
градуированный внешний дифференциал 43
— горизонтальный дифференциал 93
— комплекс Де Рама 43
— модуль 32
— — свободный 32
— — центральный 32
Грассмана алгебра 33
группа Гротендика 139
группоподобные элементы 62
Д
Де Рама комплекс на струях бесконечного порядка 82
детерминантов расслоение 121
дифференциальное исчисление 128
— - Кона 137
— — универсальное 129
— — Шевалле—Эйленберга 131
дифференциальный оператор сопряженный 143
— — эллиптический 142
дифференцирование 5
Доналдсона инвариант 114
— полином 114
духи для духов 94
духовая грассманова четность 93
духовое число 93
— — полное 93
И
индекс дифференциального оператора топологический 146
— комплекса 144
— многообразия 113
— эллиптического оператора 143
интегрируемое векторное поле 79
К
калибровочная группа 91
— -Ли 106
— — отмеченная 104
— — эффективная 104
калибровочно инвариантный полином 115
каноническая связность на струях бесконечного порядка 85
канонический пучок G-суперфункций 46
каноническое горизонтальное расщепление 79
киральный оператор Дирака 120
классический базис 94
ковариантный дифференциал на модуле 13
— лапласиан 106 когомологии группы 119
кольцо Фреше 11
$\mathcal{K}$-кольцо 4
комодуль 62
компактифицированное касательное расслоение 145
комплекс комплексов 87
— эллиптический 144
конечное сопряженное 61
контактная проекция 84
— форма 79, 84
кообратный 57
Косзула—Тейта дифференциал 99
коцикл 18
коядро 143
кривизна градуированной связности 41
_ некоммутативной связности 132
— — — Дюбуа—Виолетта 134
— НК-суперсвязности 72
— связности на модуле 15

— — — пучке 21
— суперсвязности 55
кручение некоммутативной связности 135
Л
левая производная 95
*-левый модуль 7
Лейбница привило 13
— — для дифференцирования 5
линейный дифференциальный оператор 4
локальная форма 94
локально вариационный оператор 89
— конечное открытое покрытие 21
локальное кольцо 17
М
многообразие струй высшего порядка 76
модуль дуальный 126
— конечный 126
— локально свободный 12
— проективный 126
— струй 7
—-модуль 126
морфизм градуированных многообразий 35
body-морфизм 33
— супермногообразия Де Витта 51
soul-морфизм 33
Н
некоммутативная связность 132
— — вещественная 135
— — Дюбуа—Виолетта 133
— — левая 132
— — линейная 135
— — правая 132
— — сопряженная 135
— — универсальная 132
— — эрмитова 135
некоммутативное векторное расслоение 127
— калибровочное поле 138
НК-суперрасслоение 71
О
областьтривиализации градуированного многообразия 36
— — НК-суперрасслоения 71
обобщенная функция 104
образ пучка 17
общая линейная супергруппа 58
ограничения гомоморфизм 16
оператор типа Эйлера—Лагранжа 89
основное уравнение 96
оценочный морфизм 46
— элемент 61
П
первая вариационная формула 89
полипом Хирцебруха 147
полная производная 76, 85
пополнение Соболева 104
правая производная 94
предпучок 16
— канонический 16
приемлемое решение 96
примитивный элемент 62
пробная функция 104
проективный предел 80
проектируемое векторное поле 78
произведение G-супермногообразий 52
прообраз пучка 17
простая точная последовательность 87
пространство калибровочных полей 102
— локальных колеи 17
— орбит 107
прямая система эндоморфизмов 82
прямое произведение градуированных многообразий 36
прямой предел 16
— — эндоморфизмов 82
пучок 16
— ацикличный 21
— вялый 20
— гладких функций 16
— дифференцирований 17
— локально свободный 18

— — — постоянного ранга 18
— множеств 19
— модулей 17
— мягкий 21
—- непрерывных функций 16
— постоянный 16
— струй 19
— структурный 18
— тонкий 21
Р
разбиение единицы 21
разностное расслоение 145
распределение умеренного роста 104
резольвента 22
— тонкая 22
росток 16
русская формула 123
С
связность каноническая на струях бесконечного порядка 84
— на главном градуированном расслоении 63
— — кольце 15
— — модуле 12
— — пучке 19
— — — колец 23
— неприводимая 105
символ дифференциального оператора 142
Соболева пространство 103
спектральная последовательность 88
— тройка 137
— — нечетная 137
— — четная 137
стебель 16
струйное продолжение 77
— — векторного поля 78
— — сечения 77
структурная алгебра простого градуированного многообразия 39
структурный модуль 12
— пучок градуированного многообразия 35
— — супервскторного расслоения 53
— — супермногообразия 47
струя бесконечного порядка 80
— духового поля 92
— модуля 7 супералгсбри Ли 38, 58
— — градуированной группы Ли 62
супервекторное иоле 49
— — инвариантное 60
— — левоинвариантнос 58
— — фундаментальное 60
— пространство 34
— расслоение 53
(7^{x}-супервекторное расслоение 53
супергруппа Ли 56
супердстерминант 35
суперкасательное пространство 48
— расслое Fine 54
G^{x}-суперкасательное расслоение 54
суперматрица 34
— нечетная 34
— четная 34
супермногообразис 47
— Де Витта 50
— стандартное 48
G-супермногообразие 47
G^{x} -супсрмногообразие базовое 48
G-супермногообразие 49
G^{x} -супермногообразие 49
супернространство 34, 48
суперрасслоение Неемана—Куплена 71
G-суперрасслоение 53
суперсвязность 55
— на главном суперрасслоении 61
— Неемана—Куплена 71
суперслед 34
супертранспонирование 34
суперформа 49
— связности 61
суперфункция 45
— гладкая 46
G-суперфункция 46
G^{x} -суперфункция 46
GH^{x} -суперфункция 46
H^{x} -суперфункция 46

R^x -суперфункция 49
Т
тело градуированного многообразия 35
— НК-суперрасслоения 70
— супермногообразия Де Витта 51
теорема Атьи—Зингера 146
— Батчелора 36
— вложения Соболева 104
— Де Рама 22
— Доналдсоиа 113
— об индексе Хирцебруха 113
— Серре—Свана 127
— Ходжа 144
топологическое тензорное произведение 12
топология Гротендика 12
— Де Витта 50
трансгрессии формула 115
— — смещенная 123
тривиальная пара 96
У
универсальное расслоение 108
уравнения спуска 98, 110, 123
Ф
фазовое пространство связностей 112
фильтрованное кольцо 82
фильтрованный модуль 82
— морфизм 82
фоновая калибровка 111
форма пересечения 112
— — четная 113
формула Кюннета 113
— трансгрессии локальная 116
фундаментальный цикл 113
Х
характеристическое расслоение градуированного многообразия 39
Ц
центр бимодуля 125 .К"-цикл 137
Ч
Чженя—Саймонса форма 116
Ш
Шварца пространство 104
— распределение 104
Шевалле—Эйленберга когомологии 130
— комплекс 131
— оператор кограницы 130
Шрёдингера уравнение 27
Э
Эйлера—Лагранжа оператор 89
— форма 89
эрмитова форма на *-модуле 127
Я
Якоби поле 64

Введение

Особенность использования геометрических методов в квантовой теории поля состоит в том, что многие геометрические понятия, например такие, как многообразие, расслоение, связность, формулируются в алгебраических терминах модулей и пучков. Поэтому первая глава книги посвящена дифференциальному исчислению на модулях и пучках.

Область применения геометрических методов в квантовой теории поля чрезвычайно обширна. В этой книге мы ограничимся в основном рассмотрением связностей в квантовых полевых моделях. Это суперсвязности, связности в БРСТ-формализме, в топологической теории поля, в теории аномалий, в некоммутативной геометрии и т. д. Как правило, они вводятся как связности на модулях и пучках. Такое определение связности эквивалентно привычному геометрическому понятию связности в случае векторных расслоений. При этом целью книги не является сколько-нибудь полное описание тех или иных полевых моделей. Главное внимание в ней уделяется тем конструкциям в квантовой теории поля, где фигурируют связности. Именно связности позволяют иметь дело с инвариантно определенными объектами как в классической, так и квантовой теории поля. Успехи калибровочной теории ясно показали, что это фундаментальный физический принцип. Кроме того, использование связностей устанавливает новые, подчас неожиданные, связи между классической и квантовой теориями.

Алгебраические связности

В первом томе [11] связности определялись на расслоениях. В квантовой теории поля обычно имеют дело не с расслоениями в их традиционном геометрическом описании, а с модулями и пучками их сечений (см. ниже Пример 1.3.4). Поэтому связности должны быть описаны в тех же алгебраических терминах. Эта глава посвящена связностям на модулях и пучках над коммутативными алгебрами [101, 113]. Обобщение этой конструкции на модули и пучки над градуированными коммутативными алгебрами приводит к градуированным связностям и суперсвязностям (Глава 3), а на модули над некоммутативными алгебрами — к связностям в квантовой механике (Глава 2) и некоммутативной геометрии (Глава 7).

Всюду в книге под гладкими функциями и отображениями подразумеваются функции и отображения класса C^∞, а многообразия предполагаются гладкими и являются отделимыми локально компактными и паракомпактными топологическими пространствами.

§ 1. Дифференциальное исчисление на модулях

Этот параграф посвящен основным элементам дифференциального исчисления на модулях над коммутативными алгебрами [4, 78, 101, 113] (см., например, [7, 8], а также § 7.1 по алгебраической теории колец и модулей).

Всюду в книге, если речь не идет об алгебрах Ли, алгебры предполагаются ассоциативными.

Пусть $\mathcal{K}$ — коммутативное кольцо и $\mathcal{A}$ — коммутативная $\mathcal{K}$-алгебра с единицей, т. е. $\mathcal{A}$ является одновременно $\mathcal{K}$-модулем и коммутативным кольцом, называемым также *$\mathcal{K}$-кольцом*. Например, если $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ — поле вещественных чисел и $\mathcal{A}$ — кольцо вещественных гладких функций на многообразии, мы приходим к привычному дифференциальному исчислению на многообразиях (см. Замечание 1.1.7 и далее конец этого параграфа).

Пусть P и Q — левые $\mathcal{A}$-модули (правые модули рассматриваются аналогично). Они являются также центральными $\mathcal{K}$-бимодулями (см. § 7.1). Множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(P, Q)$ гомоморфизмов $\mathcal{K}$-модуля P в $\mathcal{K}$-модуль Q может быть наделено структурой $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}$-бимодуля относительно левого и правого умножений

$$(a\phi)(p) = a\phi(p), \qquad (\phi \star a)(p) = \phi(ap), \qquad a \in \mathcal{A}, \qquad p \in P. \tag{1.1}$$

Однако это не центральный $\mathcal{A}$-бимодуль, поскольку в общем случае $a\phi \neq \phi \star a$. Обозначим

$$\delta_a \phi = a\phi - \phi \star a. \tag{1.2}$$

Определение 1.1.1. Элемент $\Delta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(P, Q)$ называется линейным *дифференциальным оператором* порядка s на $\mathcal{A}$-модуле P со значениями в $\mathcal{A}$-модуле Q (или сокращенно Q-значным дифференциальным оператором на P), если

$$\delta_{a_0} \circ \ldots \circ \delta_{a_s} \Delta = 0$$

для произвольного набора из $s+1$ элементов алгебры $\mathcal{A}$. □

В дальнейшем под дифференциальными операторами подразумеваются только линейные дифференциальные операторы.

Пример 1.1.1. Согласно Определению 1.1.1 дифференциальный оператор первого порядка Δ удовлетворяет условию

$$(\delta_a \circ \delta_b \Delta)(p) = \Delta(abp) - a\Delta(bp) - b\Delta(ap) + ab\Delta(p) = 0 \qquad (1.3)$$

для всех $p \in P$ и $a, b \in \mathcal{A}$. □

Множество $\mathrm{Diff}_s(P, Q) \subset \mathrm{Hom}_K(P, Q)$ дифференциальных операторов порядка s на модуле P со значениями в модуле Q наделено структурой $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}$-бимодуля (1.1). Легко убедиться, что

$$\mathrm{Diff}_s(P, Q) \subset \mathrm{Diff}_k(P, Q), \qquad k \geqslant s.$$

Поскольку левые и правые $\mathcal{A}$-модули $\mathrm{Diff}_s(P, Q)$ имеют разные свойства, мы будем обозначать эти модули раздельно как $\mathrm{Diff}_s^{\leftarrow}(P, Q)$ и $\mathrm{Diff}_s^{\rightarrow}(P, Q)$ соответственно, сохраняя символ $\mathrm{Diff}_s(P, Q)$ для $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}$-бимодуля.

Например, пусть $P = \mathcal{A}$ — K-алгебра. Рассмотрим морфизм

$$\mathcal{D}_s\colon \mathrm{Diff}_s^{\rightarrow}(\mathcal{A}, Q) \longrightarrow Q,$$

$$\mathcal{D}_s(\Delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Delta(\mathbf{1}), \quad \mathbf{1} \in \mathcal{A}.$$

Легко убедиться, что это дифференциальный оператор порядка s на правом $\mathcal{A}$-модуле $\mathrm{Diff}_s^{\rightarrow}(\mathcal{A}, Q)$ и в то же время дифференциальный оператор нулевого порядка на $\mathcal{A}$-левом модуле $\mathrm{Diff}_s^{\rightarrow}(\mathcal{A}, Q)$.

Теорема 1.1.2. Для всякого дифференциального оператора $\Delta \in \mathrm{Diff}_s^{\leftarrow}(P, Q)$ существует единственный гомоморфизм

$$\mathbf{f}_\Delta\colon P \longrightarrow \mathrm{Diff}_s^{\rightarrow}(\mathcal{A}, Q),$$

$$[\mathbf{f}_\Delta(p)](a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Delta(ap), \quad \forall\, a \in \mathcal{A},$$

такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\mathbf{f}_\Delta} & \mathrm{Diff}_s^{\rightarrow}(\mathcal{A}, Q) \\ & {\scriptstyle\Delta}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\mathcal{D}_s} & \\ & Q & \end{array}.$$

□

Соответствие $\Delta \mapsto \mathbf{f}_\Delta$ задает изоморфизм модулей

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(P, \mathrm{Diff}_s^{\rightarrow}(\mathcal{A}, Q)\big) = \mathrm{Diff}_s^{\leftarrow}(P, Q). \qquad (1.4)$$

Это означает, что любой Q-значный дифференциальный оператор на $\mathcal{A}$-модуле P представим в виде гомоморфизма P в правый $\mathcal{A}$-модуль Q-значных дифференциальных операторов на алгебре $\mathcal{A}$. Поэтому мы сосредоточим свое внимание именно на этих операторах.

Определение 1.1.3. Оператор первого порядка ∂ на алгебре $\mathcal{A}$ со значениями в $\mathcal{A}$-модуле Q называется Q-значным *дифференцированием* алгебры $\mathcal{A}$, если он удовлетворяет *правилу Лейбница*

$$\partial(aa') = a\partial(a') + a'\partial(a), \quad \forall\, a, a' \in \mathcal{A}. \qquad (1.5)$$

Это правило — частный случай условия (1.3). □

Поскольку для любого $a \in \mathcal{A}$ оператор $a\partial$ — это тоже дифференцирование, дифференцирования образуют подмодуль $\mathrm{Der}(\mathcal{A}, Q)$ левого $\mathcal{A}$-модуля $\mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q)$.

В то же время оператор $\partial \star a$ не является в общем случае дифференцированием. Поэтому множество дифференцирований $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, Q)$ наделено только правой структурой $\mathcal{K}$-модуля. Существует мономорфизм правых $\mathcal{K}$-модулей

$$i\colon \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, Q) \longrightarrow \mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, Q). \tag{1.6}$$

Легко убедиться, что дифференциальный оператор первого порядка Δ на алгебре $\mathcal{A}$ является дифференцированием тогда и только тогда, когда $\Delta(\mathbf{1}) = 0$. Таким образом, имеет место точная последовательность $\mathcal{K}$-модулей

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, Q) \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, Q) \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Замечание 1.1.2. Пусть $i\colon P \to Q$ — $\mathcal{A}$-подмодуль $\mathcal{A}$-модуля Q. Любое P-значное дифференцирование ∂ алгебры $\mathcal{A}$ порождает ее Q-значное дифференцирование $i \circ \partial$, и тем самым задан гомоморфизм левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\partial^1 i\colon \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, P) \longrightarrow \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, Q). \tag{1.7}$$

Трудность возникает, когда P не является $\mathcal{A}$-подмодулем модуля Q, как, например, в случае вложения (1.6). □

Применим функтор дифференцирования (1.7) к вложению (1.6). Модуль $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, Q))$ состоит из дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ со значениями в правом $\mathcal{A}$-модуле $\mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, Q)$. Если $\partial \in \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, Q))$, тогда $\partial(a) \in \mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, Q)$, $\forall\, a \in \mathcal{A}$, так что

$$\partial(aa') = \partial(a) \star a' + \partial(a') \star a, \quad \forall\, a, a' \in \mathcal{A}.$$

Возьмем теперь модуль $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, Q))$, где $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, Q)$ рассматривается как левый $\mathcal{A}$-модуль. Элементы $\partial \in \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, Q))$ удовлетворяют условию

$$\partial(aa') = a'\partial(a) + a\partial(a'), \quad \forall\, a, a' \in \mathcal{A}.$$

Тогда нетрудно проверить, что пересечение

$$\mathrm{Der}_2(\mathcal{A}, Q) = \mathrm{Der}\,\big(\mathcal{A}, \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, Q)\big) \cap \mathrm{Der}\,\big(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, Q)\big)$$

состоит из таких элементов модуля $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, Q))$, что выполняется условие

$$(\partial(a))(a') = (\partial(a'))(a).$$

Это левый $\mathcal{A}$-модуль. Существует естественный мономорфизм модулей

$$\mathrm{Der}_2(\mathcal{A}, Q) \longrightarrow \mathrm{Der}\,\big(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, Q)\big). \tag{1.8}$$

Определим по индукции модуль

$$\mathrm{Der}_{n+1}(\mathcal{A}, Q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Der}\,\big(\mathcal{A}, \mathrm{Der}_n(\mathcal{A}, Q)\big) \cap \mathrm{Der}\,\big(\mathcal{A}, (\mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, P))^n\big),$$

где

$$\big(\mathrm{Diff}_1^{-}(Q)\big)^k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Diff}_1^{-}\big(\mathcal{A}, \ldots, \mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, Q))\ldots\big).$$

Мономорфизм (1.8) обобщается на дифференцирования высшего порядка как

$$\mathrm{Der}_k(\mathcal{A}, Q) \longrightarrow \mathrm{Der}_{k-1}\big(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{-}(\mathcal{A}, Q)\big). \tag{1.9}$$

Перейдем теперь к модулям струй. Для данного $\mathcal{A}$-модуля P рассмотрим тензорное произведение $\mathcal{K}$-модулей $\mathcal{A} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} P$, наделенное структурой левого $\mathcal{A}$-модуля

$$b(a \otimes p) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (ba) \otimes p, \quad \forall\, b \in \mathcal{A}. \tag{1.10}$$

Для всякого элемента $b \in \mathcal{A}$ определим морфизм левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\delta^b(a \otimes p) = (ba) \otimes p - a \otimes (bp). \tag{1.11}$$

Обозначим через μ^{k+1} подмодуль левого $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{A} \underset{K}{\otimes} P$, порождаемый элементами вида

$$\delta^{b_0} \circ \ldots \circ \delta^{b_k}(1 \otimes p).$$

Определение 1.1.4. Модулем *струй порядка* k $\mathcal{A}$-модуля P называется фактор $\mathcal{J}^k(P)$ тензорного произведения $\mathcal{A} \underset{C}{\otimes} KP$ по подмодулю μ^{k+1}. Это левый $\mathcal{A}$-модуль относительно операции умножения

$$b(a \otimes p \bmod \mu^{k+1}) = ba \otimes p \bmod \mu^{k+1}. \tag{1.12}$$

□

Помимо структуры левого $\mathcal{A}$-модуля, индуцированной равенством (1.10), модуль k-струй $\mathcal{J}^k(P)$ допускает также структуру левого $\mathcal{A}$-модуля, задаваемую операцией умножения

$$b \star (a \otimes p \bmod \mu^{k+1}) = a \otimes (bp) \bmod \mu^{k+1}. \tag{1.13}$$

Назовем ее структурой *$\star$-левого модуля*. Определен гомоморфизм $\star$-левых $\mathcal{A}$-модулей

$$J^k\colon P \to \mathcal{J}^k(P), \qquad J^k p = 1 \otimes p \bmod \mu^{k+1} \tag{1.14}$$

такой, что $\mathcal{J}^k(P)$ как левый $\mathcal{A}$-модуль порождается элементами $J^k p$, $p \in P$. Нетрудно убедиться, что гомоморфизм J^k (1.14) — это дифференциальный оператор порядка k (достаточно сравнить соотношение (1.3) с приведенным ниже соотношением (1.15)).

Замечание 1.1.3. Если P — это $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}$-бимодуль, тензорное произведение $\mathcal{A} \underset{K}{\otimes} P$ наделено структурой правого $\mathcal{A}$-модуля

$$(a \otimes p)b \overset{\text{def}}{=} a \otimes pb, \quad \forall\, b \in \mathcal{A},$$

которая переносится и на модуль струй:

$$\bigl(a \otimes p \bmod \mu^{k+1}\bigr)b = a \otimes (pb) \bmod \mu^{k+1}.$$

Если P — центральный бимодуль, т. е.

$$ap = pa, \quad \forall\, a \in \mathcal{A}, \quad p \in P,$$

структура $\star$-левого $\mathcal{A}$-модуля (1.13) на $\mathcal{J}^k(P)$ эквивалентна структуре правого $\mathcal{A}$-модуля, индуцируемой на $\mathcal{J}^k(P)$ структурой правого $\mathcal{A}$-модуля на P. □

Модули струй обладают свойствами, аналогичными свойствам многообразий струй (см. первый том [11], а также § 4.1). В частности, поскольку $\mu^r \subset \mu^s$, $r > s$, имеет место обратная система эпиморфизмов левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{J}^s(P) \xrightarrow{\pi^s_{s-1}} \mathcal{J}^{s-1}(P) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\pi^1_0} P,$$

а для повторного модуля струй $\mathcal{J}^s(\mathcal{J}^k(P))$ определен гомоморфизм

$$\mathcal{J}^{s+k}(P) \longrightarrow \mathcal{J}^s\bigl(\mathcal{J}^k(P)\bigr).$$

Пример 1.1.4. Модуль струй первого порядка $\mathcal{J}^1(P)$ образован элементами $a \otimes p \bmod \mu^2$, т. е. элементами $a \otimes p$ по модулю соотношений

$$\delta^a \circ \delta^b(1 \otimes p) = (\delta_a \circ \delta_b)J^1(p) = 1 \otimes (abp) - a \otimes (bp) - b \otimes (ap) + ab \otimes p = 0. \tag{1.15}$$

В частности, морфизм $\pi_0^1\colon \mathcal{J}^1(P) \to P$ имеет вид

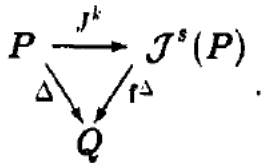
$$\pi_0^1\colon a \otimes p \bmod \mu^2 \to ap. \tag{1.16}$$

□

Теорема 1.1.5. Для всякого дифференциального оператора $\Delta \in \mathrm{Diff}_s^-(P, Q)$ существует единственный гомоморфизм

$$\mathbf{f}^\Delta\colon \mathcal{J}^s(P) \longrightarrow Q$$

такой, что коммутативна диаграмма



□

Доказательство. Доказательство основано на следующем факте [4]. Пусть $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes P, Q)$ и

$$\widehat{a}\colon P \ni p \mapsto a \otimes p \in \mathcal{A} \otimes P,$$

тогда

$$\delta_b(h \circ \widehat{a})(p) = h\bigl(\delta^b(a \otimes p)\bigr).$$

□

Соответствие $\Delta \mapsto \mathbf{f}^\Delta$ задает изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\bigl(\mathcal{J}^s(P), Q\bigr) = \mathrm{Diff}_s(P, Q), \tag{1.17}$$

который означает, что всякий (линейный) Q-значный дифференциальный оператор порядка s на $\mathcal{A}$-модуле P представим в виде гомоморфизма модуля струй $\mathcal{J}^s(P)$ в Q. Напомним, что в общем случае нелинейных дифференциальных операторов подобного рода гомоморфизм является определением дифференциального оператора (см. первый том [11], Определение 1.5.5).

Рассмотрим теперь специальный случай модулей струй $\mathcal{J}^s(\mathcal{A})$ самой алгебры $\mathcal{A}$, обозначив их $\mathcal{J}^s$ ради простоты. Модуль $\mathcal{J}^s$ может быть наделен структурой коммутативной алгебры с законом умножения

$$(aJ^s b) \cdot (a'J^s b) = aa'J^s(bb').$$

В частности, алгебра $\mathcal{J}^1$ состоит из элементов $a \otimes b$ по модулю соотношений

$$a \otimes b + b \otimes a = ab \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes ab. \tag{1.18}$$

Она имеет структуру левого $\mathcal{A}$-модуля

$$c((a \otimes b) \bmod \mu^2) = (ca) \otimes b \bmod \mu^2 \tag{1.19}$$

(1.12) и структуру $\star$-левого $\mathcal{A}$-модуля

$$c \star ((a \otimes b) \bmod \mu^2) = a \otimes (cb) \bmod \mu^2 \tag{1.20}$$

(1.13), которая совпадает со структурой, индуцируемой структурой правого $\mathcal{A}$-модуля на $\mathcal{A}$ (см. Замечание 1.1.3). Имеют место канонический мономорфизм левых $\mathcal{A}$-модулей

$$i_1\colon \mathcal{A} \to \mathcal{J}^1, \qquad i_1\colon a \mapsto a \otimes \mathbf{1} \bmod \mu^2, \tag{1.21}$$

и соответствующая проекция

$$\mathcal{J}^1 \longrightarrow \mathcal{J}^1/\operatorname{Im} i_1 = (\operatorname{Ker}\mu^1) \bmod \mu^2 = \Omega^1, \tag{1.22}$$
$$a \otimes b \bmod \mu^2 \longrightarrow (a \otimes b - ab \otimes 1) \bmod \mu^2.$$

Фактор-модуль Ω^1 (1.22) образован элементами

$$(a \otimes b - ab \otimes 1) \bmod \mu^2, \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}.$$

Он наделен структурой центрального $\mathcal{A}$-бимодуля

$$c((a \otimes b - ab \otimes 1) \bmod \mu^2) = (ca \otimes b - cab \otimes 1) \bmod \mu^2, \tag{1.23}$$
$$((1 \otimes ab - b \otimes a) \bmod \mu^2)c = (1 \otimes abc - b \otimes ac) \bmod \mu^2 \tag{1.24}$$

и структурой $\star$-левого $\mathcal{A}$-модуля

$$c \star ((a \otimes b - ab \otimes 1) \bmod \mu^2) = (a \otimes cb - acb \otimes 1) \bmod \mu^2. \tag{1.25}$$

Нетрудно убедиться, что проекция (1.22) является морфизмом как левых, так и $\star$-левых модулей. Тогда мы получаем морфизм $\star$-левых модулей

$$d^1 \colon \mathcal{A} \xrightarrow{J^1} \mathcal{J}^1 \longrightarrow \Omega^1, \tag{1.26}$$
$$d^1 \colon b \mapsto 1 \otimes b \bmod \mu^2 \mapsto (1 \otimes b - b \otimes 1) \bmod \mu^2,$$

такой, что центральный $\mathcal{A}$-бимодуль Ω^1 порождается элементами $d^1(b)$, $b \in \mathcal{A}$, согласно равенству

$$ad^1b = (a \otimes b - ab \otimes 1) \bmod \mu^2 = (1 \otimes ab) - b \otimes a) \bmod \mu^2 = (d^1b)a. \tag{1.27}$$

Предложение 1.1.6. Морфизм d^1 (1.26) является дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$ со значениями в модуле Ω^1, рассматриваемом как левый $\mathcal{A}$-модуль и центральный $\mathcal{A}$-бимодуль. □

Доказательство. Используя соотношение (1.18), получаем в явном виде

$$d^1(ba) = (1 \otimes ba - ba \otimes 1) \bmod \mu^2 =$$
$$= (b \otimes a + a \otimes b - ba \otimes 1 - ab \otimes 1) \bmod \mu^2 = bd^1a + ad^1b. \tag{1.28}$$

Это Ω^1-значный дифференциальный оператор первого порядка. В то же время

$$d^1(ba) = (1 \otimes ba - ba \otimes 1 + b \otimes a - b \otimes a) \bmod \mu^2 = (d^1b)a + bd^1a.$$

□

При помощи дифференцирования d^1 (1.26) мы получаем расщепление левых и $\star$-левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\mathcal{J}^1 = \mathcal{A} \oplus \Omega^1, \tag{1.29}$$
$$aJ^1(cb) = ai_1(cb) + ad^1(cb). \tag{1.30}$$

Соответственно имеет место точная последовательность

$$0 \to \Omega^1 \to \mathcal{J}^1 \to \mathcal{A} \to 0, \tag{1.31}$$

которая расщепляется мономорфизмом (1.21).

Предложение 1.1.7. Существует изоморфизм

$$\mathcal{J}^1(P) = \mathcal{J}^1 \otimes P, \tag{1.32}$$

где $\mathcal{J}^1 \otimes P$ — тензорное произведение правого (и $\star$-левого) $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{J}^1$ (1.20) и левого $\mathcal{A}$-модуля P, т. е.

$$\left[a \otimes b \bmod \mu^2\right] \otimes p = \left[a \otimes \mathbf{1} \bmod \mu^2\right] \otimes bp.$$

□

Доказательство. Изоморфизм (1.32) реализуется сопоставлением

$$(a \otimes bp) \bmod \mu^2 \longleftrightarrow \left[a \otimes b \bmod \mu^2\right] \otimes p. \tag{1.33}$$

□

Изоморфизм (1.29) приводит к изоморфизму

$$\mathcal{J}^1(P) = (\mathcal{A} \oplus \Omega^1) \otimes P,$$
$$(a \otimes bp) \bmod \mu^2 \longleftrightarrow \left[\left(ab + ad^1(b)\right) \bmod \mu^2\right] \otimes p,$$

и к расщеплению левых и $\star$-левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\mathcal{J}^1(P) = (\mathcal{A} \otimes P) \oplus (\Omega^1 \otimes P). \tag{1.34}$$

Применяя проекцию π_0^1 (1.16) к расщеплению (1.34), мы получаем точную последовательность левых и $\star$-левых $\mathcal{A}$-модулей

$$0 \longrightarrow \Omega^1 \otimes P \longrightarrow \mathcal{J}^1(P) \xrightarrow{\pi_0^1} P \longrightarrow 0, \tag{1.35}$$
$$0 \longrightarrow \left[(a \otimes b - ab \otimes \mathbf{1}) \bmod \mu^2\right] \otimes p \longrightarrow \left[(c \otimes \mathbf{1} + a \otimes b - ab \otimes \mathbf{1}) \bmod \mu^2\right] \otimes p =$$
$$= (c \otimes p + a \otimes bp - ab \otimes p) \bmod \mu^2 \longrightarrow cp,$$

аналогичную точной последовательности (1.31). Точная последовательность (1.35) допускает каноническое расщепление посредством морфизма $\star$-левых $\mathcal{A}$-модулей

$$P \ni ap \mapsto a \otimes p + d^1(a) \otimes p.$$

Однако она необязательно должна расщепляться каким-либо морфизмом левых $\mathcal{A}$-модулей. Такое расщепление, если оно существует, интерпретируется как связность на модуле P (см. § 1.2). В частности, каноническое расщепление (1.21) точной последовательности (1.31) представляет собой каноническую связность на алгебре $\mathcal{A}$.

В случае модуля струй $\mathcal{J}^s$ алгебры $\mathcal{A}$ изоморфизм (1.17) принимает вид

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{J}^s, Q) = \mathrm{Diff}_s(\mathcal{A}, Q). \tag{1.36}$$

Тогда Теорема 1.1.5 и Предложение 1.1.6 приводят к изоморфизму

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega^1, Q) = \mathrm{Der}(\mathcal{A}, Q). \tag{1.37}$$

Это означает, что, поскольку $d^1(\mathbf{1}) = 0$, всякое Q-значное дифференцирование алгебры $\mathcal{A}$ представимо в виде композиции $h \circ d^1$, где $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega^1, Q)$.

Пример 1.1.5. Если $Q = \mathcal{A}$, изоморфизм (1.37) сводится к условию дуальности

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega^1, \mathcal{A}) = \mathrm{Der}(\mathcal{A}), \tag{1.38}$$
$$u(d^1 a) = u(a), \qquad a \in \mathcal{A},$$

т. е. модуль дифференцирований $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{A}$ совпадает с левым $\mathcal{A}$-дуальным Ω^{1*} к модулю Ω^1. □

Определим теперь модули Ω^k, $k = 2, 3, \ldots$, как антисимметричные тензорные произведения $\mathcal{K}$-модуля Ω^1.

Предложение 1.1.8. [4]. Существуют изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega^k, Q) = \mathrm{Der}_k(\mathcal{A}, Q), \tag{1.39}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(\mathcal{J}^1(\Omega^k), Q\big) = \mathrm{Der}_k\big(\mathrm{Diff}_1(Q)\big). \tag{1.40}$$

□

Изоморфизм (1.39) является обобщением изоморфизма (1.37) на дифференцирования высшего порядка. Изоморфизм (1.40) и мономорфизм (1.9) предполагают гомоморфизм

$$h^k\colon \mathcal{J}^1(\Omega^{k-1}) \longrightarrow \Omega^k$$

и определяют операторы внешнего дифференцирования

$$d^k = h^k \circ J^1\colon \Omega^{k-1} \longrightarrow \Omega^k. \tag{1.41}$$

Легко установить, что $d^k \circ d^{k-1} = 0$, и эти операторы порождают комлекс Де Рама

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{d^1} \Omega^1 \xrightarrow{d^2} \ldots \longrightarrow \Omega^k \xrightarrow{d^{k+1}} \ldots . \tag{1.42}$$

Замечание 1.1.6. Пусть $\mathcal{A}$-модуль P является K-кольцом таким, что существует мономорфизм K-колец $\mathcal{A} \to P$. Отметим имеющееся различие между модулями струй $\mathcal{J}^k(P)$ $\mathcal{A}$-модуля P и модулями струй $\mathcal{J}^k$ K-кольца P. Например, имеет место канонический мономорфизм (1.21) P в $\mathcal{J}^1$, но не в $\mathcal{J}^1(P)$. □

Обратимся теперь к случаю, когда $\mathcal{A}$ — кольцо $C^\infty(X)$ вещественных гладких функций на дифференцируемом многообразии X.

Замечание 1.1.7. Обычно кольцо $C^\infty(X)$ наделяется топологией компактной сходимости по всем производным (см. третий том [13], Пример 1.1.7). Это топология пространства Фреше, и $C^\infty(X)$ является топологическим кольцом, называемым *кольцом Фреше*. □

Замечание 1.1.8. Дифференцируемое многообразие может быть описано как вещественный спектр кольца гладких функций на нем. Пусть Z — дифференцируемое многообразие и $\mu_z \subset C^\infty(Z)$ — максимальный идеал гладких функций на нем, обращающихся в 0 в точке $z \in Z$. Имеем $C^\infty(Z)/\mu_z = \mathbb{R}$. *Вещественным спектром* $\mathrm{Spec}_R\, C^\infty(Z)$ кольца $C^\infty(Z)$ называется множество всех его максимальных идеалов μ таких, что

$$\mathbb{R} \hookrightarrow C^\infty(Z) \to C^\infty(Z)/\mu$$

— это изоморфизм (см, например, [25]). Если вещественный спектр $\mathrm{Spec}_R\, C^\infty(Z)$ наделен топологией Зарискоro (совпадающей в данном случае с топологией Гельфанда), тогда отображение

$$Z \ni z \mapsto \mu_z \in \mathrm{Spec}_R\, C^\infty(Z)$$

— гомеоморфизм. Заметим, что спектр и вещественный спектр градуированного коммутативного кольца (см. Главу 3) тоже может быть наделен топологией Зарискоro [30].

Следует подчеркнуть, что, если X и X' — дифференцируемые многообразия, естественный морфизм

$$C^\infty(X) \otimes C^\infty(X') \to C^\infty(X \times X'),$$
$$f(x) \otimes f'(x') \mapsto f(x) f'(x'),$$

индуцирует изоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр Фреше

$$C^\infty(X) \,\widehat{\otimes}\, C^\infty(X') \cong C^\infty(X \times X'), \tag{1.43}$$

где слева стоит пополнение тензорного произведения модулей $C^\infty(X)\otimes C^\infty(X')$ в так называемой топологии Гротендика (см. ниже). Оно называется *топологическим тензорным произведением*. Напомним, что, если E и E' — локально выпуклые топологические векторные пространства, существует единственная локально выпуклая топология на их тензорном произведении $E\otimes E'$ такая, что для любого локально выпуклого топологического пространства F имеет место взаимно однозначное соответствие между линейными морфизмами $E\otimes E'\to F$, непрерывными в этой топологии, и непрерывными билинейными отображениями $E\times E'\to F$. Это сильнейшая топология, в которой естественное отображение $E\times E'$ в $E\otimes E'$ непрерывно [10]. Она называется *топологией Гротендика*. В частности, если E — топологическая алгебра, операция произведения в E представима как морфизм $E\,\widehat{\otimes}\,E\to E$. □

Перейдем теперь к подкатегории так называемых геометрических модулей над кольцом гладких функций $C^\infty(X)$ на многообразии X, которые допускают геометрическую интерпретацию.

Определение 1.1.9. $C^\infty(X)$-модуль P называется *геометрическим*, если

$$\bigcap_{x\in X}\mu_x P=0,$$

где μ_x — максимальный идеал гладких функций, обращающихся в 0 в точке $x\in X$. □

Коротко можно сказать, что элементы геометрического модуля над кольцом $C^\infty(X)$ определяются только своими значениями в точках многообразия X. Всякий такой $C^\infty(X)$-модуль P отождествляется со *структурным модулем* $Y(X)$ глобальных сечений некоторого гладкого векторного расслоения $Y\to X$ (необязательно конечномерного). При этом слой Y_x этого векторного расслоения над точкой $x\in X$ совпадает с фактор-модулем $P/\mu_x P$. В частности, подкатегория *локально свободных $C^\infty(X)$-модулей* конечного ранга эквивалентна категории гладких конечномерных векторных расслоений над многообразием X, т. е. всякий такой модуль является модулем глобальных сечений некоторого конечномерного векторного расслоения над X [101, 153]. В этом случае устанавливается следующее соответствие.

- Модуль дифференцирований $\mathrm{Der}\,(C^\infty(X))$ кольца $C^\infty(X)$ отождествляется с $C^\infty(X)$-модулем $\mathcal{T}(X)$ векторных полей на дифференцируемом многообразии X.
- Модуль Ω^1 совпадает с модулем $\Omega^1(X)$ 1-форм на многообразии X.
- Оператор d^k (1.41) представляет собой обычный внешний дифференциал на алгебре внешних форм на X.
- Если $Y(X)$ — структурный модуль сечений векторного расслоения $Y\to X$, модули струй $\mathcal{J}^k(Y(X))$ отождествляются с модулями $J^kY(X)$ сечений расслоений струй $J^kY\to X$.

Если многообразие X компактно, известная теорема Серре—Свана (см. ниже Теорему 7.1.1) устанавливает эквивалентность между категорией проективных $C^\infty(X)$-модулей конечного ранга и категорией гладких векторных расслоений над X [6, 144, 151].

§ 2. Связности на модулях

Чтобы ввести связности на левых $\mathcal{A}$-модулях, рассмотрим точную последовательность (1.35). В общем случае она не расщепляется.

Определение 1.2.1. *Связностью* на левом $\mathcal{A}$-модуле P называется морфизм левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\Gamma\colon P\to\mathcal{J}^1(P), \tag{1.44}$$

$$\Gamma(ap)=a\Gamma(p), \tag{1.45}$$

который расщепляет точную последовательность (1.35). □

Это расщепление имеет вид

$$J^1p = \Gamma(p) + \nabla^\Gamma(p), \tag{1.46}$$

где отображение

$$\nabla^\Gamma\colon P \to \Omega^1 \otimes P, \tag{1.47}$$
$$\nabla^\Gamma(p) = \mathbf{1} \otimes p \bmod \mu^2 - \Gamma(p),$$

имеет смысл *ковариантного дифференциала* на модуле P. Следуя традиции, мы будем использовать термины «ковариантный дифференциал» и «связность» на модулях и пучках как синонимы. Из равенства (1.45) легко следует, что морфизм ∇^Γ (1.47) удовлетворяет *правилу Лейбница*

$$\nabla^\Gamma(ap) = da \otimes p + a\nabla^\Gamma(p). \tag{1.48}$$

Таким образом, мы приходим к эквивалентному определению связности на модуле.

Определение 1.2.2. *Связностью* на левом $\mathcal{A}$-модуле P называется всякий морфизм ∇ (1.47), который удовлетворяет правилу Лейбница (1.48), т. е. ∇ — это $(\Omega^1 \otimes P)$-значный дифференциальный оператор первого порядка на P. □

Принимая во внимание Определение (1.2.2) и изоморфизм (1.34), удобно представить точную последовательность (1.35) в виде

$$0 \to \Omega^1 \otimes P \to \left(\mathcal{A} \oplus \Omega^1\right) \otimes P \to P \to 0. \tag{1.49}$$

Тогда связность ∇ на левом $\mathcal{A}$-модуле P может быть определена как расщепление этой точной последовательности морфизмом левых $\mathcal{A}$-модулей.

Покажем теперь, что в случае структурных модулей векторных расслоений связность на модуле эквивалентна обычной связности на векторном расслоении.

Предложение 1.2.3. Если $Y \to X$ — векторное расслоение, существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow T^*X \underset{X}{\otimes} Y \xrightarrow{\epsilon} J^1Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \tag{1.50}$$

векторных расслоений над X, где морфизм ϵ имеет координатный вид

$$y^i \circ \epsilon = 0, \qquad y^i_\lambda \circ \epsilon = \bar{y}^i_\lambda$$

относительно координат $\left(x^\lambda, y^i, \bar{y}^i_\lambda\right)$ на $T^*X \otimes Y$. □

Предложение 1.2.3 доказывается непосредственной проверкой законов координатных преобразований.

Благодаря каноническому расщеплению вертикального касательного расслоения VY (см. первый том [11], формулу (1.26)) точная последовательность (1.50) приводит к точной последовательности

$$0 \longrightarrow T^*X \underset{Y}{\otimes} VY \xrightarrow{\epsilon} J^1Y \longrightarrow VY \longrightarrow 0 \tag{1.51}$$

расслоений над Y, где $y^i_\lambda \circ \epsilon = \bar{y}^i_\lambda$ относительно координат $(x^\lambda, y^i, \bar{y}^i_\lambda)$ на $T^*X \otimes VY$. Нетрудно убедиться, что любое расщепление над Y точной последовательности (1.51) порождает расщепление точной последовательности (1.50) и обратно. Поэтому всякая линейная связность Γ на векторном расслоении $Y \to X$ порождает расщепление

$$\Gamma\colon VY = Y \times Y \underset{Y}{\longrightarrow} J^1Y,$$
$$J^1Y = \Gamma(VY) \oplus D_\Gamma(J^1Y), \tag{1.52}$$

точной последовательности (1.51), где D_Γ — ковариантный дифференциал относительно связности Γ (см. первый том [11], формулу (1.73)), и обратно. Так как многообразие струй J^1Y векторного расслоения $Y \to X$ является как аффинным подрасслоением тензорного расслоения $T^*X \otimes TY \to Y$, так и векторным расслоением над X, его элементами над $x \in X$ являются векторы

$$y^i e_i + dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y^i_\lambda e_i),$$

записанные относительно послойных базисов $\{e_i\}$ векторного расслоения $Y \to X$ и голономных базисов $\{\partial_i = e_i\}$ вертикального касательного расслоения $VY \to Y$. Тогда соответствующее расщепление точной последовательности (1.50) имеет вид

$$i_Y + \Gamma\colon y^i e_i \mapsto y^i e_i \oplus \Gamma,$$
$$y^i e_i + dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y^i_\lambda e_i) = y^i e_i \oplus \Gamma \oplus D_\Gamma. \tag{1.53}$$

Точная последовательность векторных расслоений (1.50) задает точную последовательность структурных модулей их сечений

$$0 \to \Omega^1(X) \otimes Y(X) \to J^1Y(X) \to Y(X) \to 0. \tag{1.54}$$

Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.2.4. Всякая точная последовательность векторных расслоений над X

$$0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{j} Y'' \longrightarrow 0 \tag{1.55}$$

допускает расщепление, т.е. существует линейный послойный морфизм

$$\Gamma\colon Y'' \underset{X}{\longrightarrow} Y$$

такой, что $j \circ \Gamma = \mathrm{Id}\, Y$ и [14, 90]

$$Y = i(Y') \oplus \Gamma(Y'').$$

Заметим, что точность последовательности (1.55) эквивалентна тому, что $Y'' = Y/Y'$ — фактор-расслоение. □

Можно сказать больше. Всякое расщепление точной последовательности (1.50) векторных расслоений предполагает расщепление точной последовательности (1.54) их структурных модулей и обратно. Для данного расщепления (1.53) точной последовательности (1.50) векторных расслоений посредством линейной связности Γ соответствующее расщепление точной последовательности (1.54) имеет вид

$$Y(X) \ni s \mapsto s \oplus \Gamma \circ s \in J^1Y(X),$$
$$s + J^1 s = s \oplus \Gamma \circ s \oplus \nabla^\Gamma s,$$

где ∇^Γ — ковариантный дифференциал относительно связности Γ (см. первый том [11], формулу (1.74)). Это морфизм $C^\infty(X)$-модулей

$$\nabla^\Gamma\colon Y(X) \to \Omega^1(X) \otimes Y(X), \tag{1.56}$$

который удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla^\Gamma(fs) = df \otimes s + f\nabla^\Gamma(s), \quad f \in C^\infty(X), \quad s \in Y(X),$$

и расщепляет точную последовательность

$$0 \to \Omega^1(X) \otimes Y(X) \to \left(C^\infty(X) \oplus \Omega^1(X)\right) \otimes Y(X) \to Y(X) \to 0, \tag{1.57}$$

являющуюся частным случаем точной последовательности (1.49).

Следует подчеркнуть, что, в отличие от случая векторных расслоений и их структурных модулей, произвольная точная последовательность модулей, вообще говоря, не расщепляется. Поэтому связность на модуле необязательно существует.

Морфизм (1.47) естественным образом может быть расширен до морфизма

$$\nabla\colon \Omega^1 \otimes P \to \Omega^2 \otimes P.$$

Легко убедиться, что в случае структурного модуля $P = Y(X)$ векторного расслоения $Y \to X$ морфизм

$$R = \nabla^2\colon P \to \Omega^2 \otimes P \tag{1.58}$$

задает кривизну линейной связности на Y (см. первый том [11], формулы (1.71), (1.72)). Это приводит к следующему определению кривизны алгебраической связности.

Определение 1.2.5. Морфизм R (1.58) называется *кривизной* связности ∇ на модуле P. □

В случае, когда $\mathcal{A} = C^\infty(X)$ и $\mathcal{S}$ — локально свободный $C^\infty(X)$-модуль конечного ранга, имеют место изоморфизмы

$$\Omega^1(X) = \operatorname{Hom}_{C^\infty(X)}\bigl(\operatorname{Der}(C^\infty(X)), C^\infty(X)\bigr), \tag{1.59}$$

$$\operatorname{Hom}_{C^\infty(X)}\bigl(\operatorname{Der}(C^\infty(X)), \mathcal{S}\bigr) = \Omega^1(X) \otimes \mathcal{S}.$$

Поэтому могут быть даны другие эквивалентные определения связности на $C^\infty(X)$-модулях.

Определение 1.2.6. Всякий морфизм

$$\nabla\colon \mathcal{S} \to \operatorname{Hom}_{C^\infty(X)}\bigl(\operatorname{Der}(C^\infty(X)), \mathcal{S}\bigr), \tag{1.60}$$

удовлетворяющий правилу Лейбница (1.48), называется связностью на $C^\infty(X)$-модуле $\mathcal{S}$. □

Определение 1.2.7. Связностью на $C^\infty(X)$-модуле $\mathcal{S}$ является морфизм $C^\infty(X)$-модулей

$$\operatorname{Der}(C^\infty(X)) \ni \tau \mapsto \nabla_\tau \in \operatorname{Diff}_1(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \tag{1.61}$$

такой, что для любого векторного поля τ на многообразии X дифференциальный оператор первого порядка ∇_τ удовлетворяет условию

$$\nabla_\tau(fs) = (\tau \rfloor df)s + f\nabla_\tau s. \tag{1.62}$$

□

Кривизна связности (1.61) определяется как дифференциальный оператор нулевого порядка

$$R(\tau, \tau') = [\nabla_\tau, \nabla_{\tau'}] - \nabla_{[\tau,\tau']} \tag{1.63}$$

на модуле $\mathcal{S}$ для произвольной пары векторных полей $\tau, \tau' \in \operatorname{Der}(C^\infty(X))$ на многообразии X. В случае структурного модуля векторного расслоения над многообразием X это определение эквивалентно обычному определению кривизны линейной связности на этом расслоении.

Если $\mathcal{S}$ — коммутативное $C^\infty(X)$-кольцо, Определение 1.2.7 может быть видоизменено следующим образом.

Определение 1.2.8. *Связность* на $C^\infty(X)$-кольце $\mathcal{S}$ — это морфизм левых $C^\infty(X)$-модулей

$$\operatorname{Der}(C^\infty(X)) \ni \tau \mapsto \nabla_\tau \in \operatorname{Der}\mathcal{S}, \tag{1.64}$$

который является связностью на $\mathcal{S}$ как $C^\infty(X)$-модуле, т. е. удовлетворяет правилу Лейбница (1.62). □

Определение 1.2.8 предполагает дополнительно, что связность ∇_τ является дифференцированием кольца $\mathcal{S}$, чтобы сохранить его алгебраическую структуру. Две такие связности ∇_τ и ∇'_τ отличаются друг от друга дифференцированием кольца $\mathcal{S}$, ядро которого содержит подкольцо $C^\infty(X) \subset \mathcal{S}$. Кривизна связности (1.64) на кольце дается формулой (1.63).

§ 3. Связности на пучках

Хотя основные понятия теории пучков уже были приведены в первом томе [11] (см. Приложение В), мы повторим их здесь в нужном нам контексте.

Существует несколько эквивалентных определений пучка [3, 14, 147]. Начнем с его геометрического определения. *Пучком* на топологическом пространстве X называется топологическое расслоение $S \to X$, слои которого S_x, именуемые *стеблями*, являются абелевыми группами, наделенными дискретной топологией.

Предпучок считается заданным на топологическом пространстве X, если каждому открытому подмножеству $U \subset X$ сопоставлена абелева группа S_U (в частности, $S_\varnothing = 0$), а каждой паре открытых подмножеств $V \subset U$ соответствует *гомоморфизм ограничения*

$$r_V^U\colon S_U \to S_V$$

такой, что

$$r_U^U = \mathrm{Id}\, S_U, \qquad r_W^U = r_W^V r_V^U, \qquad W \subset V \subset U.$$

Всякий предпучок $\{S_U, r_V^U\}$ на топологическом пространстве X порождает пучок на X, стеблем S_x которого над точкой $x \in X$ является *прямой предел* абелевых групп S_U, $x \in U$, относительно гомоморфизмов ограничения r_V^U (см. понятие прямого предела в [7, 9], а также в § 3.1). Здесь под прямым пределом понимается конструкция, когда для каждой открытой окрестности U точки $x \in X$ всякий элемент абелевой группы $s \in S_U$ определяет элемент стебля $s_x \in S_x$, называемый *ростком* s в x. Причем два элемента $s \in S_U$ и $s' \in S_V$ задают один и тот же росток в x тогда и только тогда, когда существует открытая окрестность $W \supset U \cap V \ni x$ точки x такая, что

$$r_W^U s = r_W^V s'.$$

Пример 1.3.1. Пусть X — топологическое пространство и $C^0(U)$ — аддитивные абелевы группы непрерывных вещественных функций на открытых подмножествах $U \subset X$ вместе с естественными гомоморфизмами ограничения

$$r_V^U\colon C^0(U) \to C^0(V)$$

этих функций на $V \subset U$. Тогда $\{C^0(U), r_V^U\}$ — предпучок на X. Две непрерывные вещественные функции s и s' на X задают один и тот же росток s_x в точке $x \in X$, если они совпадают на некоторой открытой окрестности x. Пучок C_X^0, порождаемый предпучком $\{C^0(U), r_V^U\}$, называется *пучком непрерывных функций* на топологическом пространстве X. *Пучок C_X^∞ гладких функций* на дифференцируемом многообразии X определяется аналогично. Упомянем также предпучок постоянных вещественных функций на открытых подмножествах топологического пространства X. Он определяет так называемый *постоянный пучок* на X, который обозначается просто $\mathbb{R}$. □

Два различных предпучка могут порождать один и тот же пучок. Обратно, всякий пучок S определяет предпучок абелевых групп $S(U)$ его локальных сечений на открытых подмножествах $U \subset X$. Он называется *каноническим предпучком* пучка S. Нетрудно показать, что пучок, порождаемый каноническим предпучком $\{S(U), r_V^U\}$ пучка S,

в точности совпадает с S. Поэтому мы обычно будем отождествлять пучок и его канонический предпучок. Отметим, что, если пучок S порождается предпучком $\{S_U, r_V^U\}$, существует естественный гомоморфизм предпучков $\{S_U\} \to \{S(U)\}$, который, однако, не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом.

Прямая сумма, тензорное произведение и гомоморфизмы пучков определяются естественным образом как послойные операции над абелевыми группами.

Пусть S и S' — пучки над одним и тем же топологическим пространством X и $\mathrm{Hom}\,(S|_U, S'|_U)$ — абелевы группы гомоморфизмов пучков $S|_U \to S'|_U$ для всевозможных открытых подмножеств $U \subset X$. Эти группы задают пучок $\mathrm{Hom}\,(S, S')$ на X. Следует подчеркнуть, что

$$\mathrm{Hom}\,(S, S')(U) \neq \mathrm{Hom}\,\big(S(U), S'(U)\big). \tag{1.65}$$

Как мы увидим ниже, это неравенство имеет важные последствия.

Пусть φ: $X \to X'$ — непрерывное отображение топологических пространств и S — пучок на X. *Образ* $\varphi_* S$ на X' пучка S — это пучок, задаваемый сопоставлением

$$X' \supset U \mapsto S\big(\phi^{-1}(U)\big)$$

для всякого открытого подмножества $U \subset X'$ (с учетом того, что $\varphi^{-1}(U)$ — всегда открытое подмножество X). Пусть теперь S' — пучок на X'. Чтобы определить *прообраз* $\varphi^* S'$ на X пучка S', мы сопоставим всякому открытому множеству $V \subset X$ предел абелевых групп $S'(U)$ по всем открытым подмножествам $U \subset X'$ таким, что $V \subset \varphi^{-1}(U)$, относительно вложений (напомним, что множество $\varphi(V)$, вообще говоря, не является открытым в X'). В частности, если $S' = C^\infty_{X'}$ — пучок гладких вещественных функций на многообразии X' из Примера 1.3.1, его прообраз $\varphi^* C^\infty_{X'}$ на многообразии X является пучком индуцированных функций на X.

Замечание 1.3.2. Понятие пучка обобщается на пучки коммутативных колец и алгебр, модулей над коммутативными алгебрами, а также пучки градуированных коммутативных алгебр и градуированных модулей над этими алгебрами [85]. □

Пусть $\mathcal{A}$ — пучок на топологическом пространстве X. Говорят, что пара $(X, \mathcal{A})$ является *пространством локальных колец*, если всякий стебель $\mathcal{A}_x$, $x \in X$, пучка $\mathcal{A}$ — это *локальное* коммутативное кольцо, т. е. оно содержит единственный максимальный идеал. Понятие пространства локальных колец эквивалентно геометрическому определению пучка как расслоения на локальные кольца. Однако мы будем использовать это понятие как самостоятельное, поскольку оно в явном виде включает пространство X, на котором задан пучок. В частности, в качестве морфизма пространства локальных колец $(X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ рассматривается пара (φ, Φ), состоящая из непрерывного отображения φ: $X \to X'$ и морфизма пучков Φ: $\mathcal{A}' \to \varphi_* \mathcal{A}$ на X', где, напомним, $\varphi_* \mathcal{A}$ — образ пучка $\mathcal{A}$. Морфизм (φ, Φ) называется:

- мономорфизмом, если φ — инъекция и Φ — сюръекция;
- эпиморфизмом, если φ — сюръекция, тогда как Φ — инъекция.

Пучком $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ *дифференцирований* пучка локальных колец $\mathcal{A}$ называется подпучок эндоморфизмов пучка $\mathcal{A}$ такой, что всякое сечение $u \in \mathrm{Der}\,\mathcal{A}(U)$ пучка $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ на открытом подмножестве $U \subset X$ является дифференцированием кольца $\mathcal{A}(U)$ сечений пучка $\mathcal{A}$ на U. Следует подчеркнуть, что из-за неравенства (1.65) дифференцирование кольца $\mathcal{A}(U)$, вообще говоря, не является сечением пучка $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}|_U$, поскольку может случиться, что для открытых множеств $U' \subset U \subset X$ не существует морфизма ограничения $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}(U)) \to \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}(U'))$.

Пусть $(X, \mathcal{A})$ — пространство локальных колец. Пучок P на X называется *пучком* $\mathcal{A}$*-модулей*, если всякий его стебель P_x, $x \in X$, — это $\mathcal{A}_x$-модуль, или эквивалентно если $P(U)$ — это $\mathcal{A}(U)$-модуль для любого открытого подмножества $U \subset X$. Говорят,

что пучок $\mathcal{A}$-модулей P является *локально свободным*, если для всякой точки $x \in X$ существует открытая окрестность U такая, что $P(U)$ является свободным $\mathcal{A}(U)$-модулем. Если все эти свободные модули имеют один и тот же ранг, пучок P называется пучком локально свободных модулей *постоянного ранга*.

Пример 1.3.3. Пучок C^∞_X гладких функций на многообразии X из Примера 1.3.1 является пучком коммутативных колец. Стебель $C^\infty_{X,x}$ ростков этих функций в точке $x \in X$ — это локальное кольцо, а пара (X, C^∞_X) служит примером пространства локальных колец. В частности, всякий морфизм многообразий $\varphi\colon X \to X'$ порождает индуцированный морфизм (φ, Φ) пространств локальных колец $(X, C^\infty_X) \to (X', C^\infty_{X'})$, где

$$\Phi\big(C^\infty_{X'}\big) = (\varphi_* \circ \varphi^*)\big(C^\infty_{X'}\big) \subset \varphi_*\big(C^\infty_X\big). \tag{1.66}$$

Тем самым, мы приходим к следующему алгебраическому определению дифференцируемого многообразия [30].

Предложение 1.3.1. Пусть X — топологическое пространство, $\{U_\zeta\}$ — открытое покрытие X, и S_ζ — пучок на U_ζ для каждого элемента U_ζ этого покрытия. Предположим, что:

- если $U_\zeta \cap U_\xi \neq \varnothing$, тогда существует изоморфизм пучков
$$\rho_{\zeta\xi}\colon S_\xi|_{U_\zeta \cap U_\xi} \to S_\zeta|_{U_\zeta \cap U_\xi};$$
- эти изоморфизмы удовлетворяют условию
$$\rho_{\xi\zeta} \circ \rho_{\zeta\iota}\big(S_\iota|_{U_\zeta \cap U_\xi \cap U_\iota}\big) = \rho_{\xi\iota}\big(S_\iota|_{U_\zeta \cap U_\xi \cap U_\iota}\big)$$
для произвольной тройки U_ζ, U_ξ, U_ι, т.е. они образуют *коцикл*.

Тогда существуют пучок S на X и изоморфизмы пучков $\phi_\zeta\colon S|_{U_\zeta} \to S_\zeta$ такие, что

$$\phi_\zeta|_{U_\zeta \cap U_\xi} = \rho_{\zeta\xi} \circ \phi_\xi|_{U_\zeta \cap U_\xi}.$$

□

Предложение 1.3.2. Пусть X — паракомпактное топологическое пространство и $(X, \mathcal{A})$ — пространство локальных колец, которое локально изоморфно $(\mathbb{R}^n, C^\infty_{\mathbb{R}^n})$. Тогда X является n-мерным дифференцируемым многообразием, и существует естественный изоморфизм пространств локальных колец $(X, \mathcal{A})$ и (X, C^∞_X). □

Возьмем произведение $X \times X'$ двух паракомпактных топологических пространств и произвольную пару их открытых подмножеств $U \subset X$ и $U' \subset X'$. Рассмотрим топологическое тензорное произведение колец $C^\infty(U) \mathbin{\widehat{\otimes}} C^\infty(U')$ (см. Замечание 1.1.8). Такие тензорные произведения определяют пучок колец на $X \times X'$, который обозначим $C^\infty_X \mathbin{\widehat{\otimes}} C^\infty_{X'}$. При этом изоморфизмы (1.43), взятые для всевозможных пар $U \subset X$ и $U' \subset X'$, приводят к изоморфизму пучков

$$C^\infty_X \mathbin{\widehat{\otimes}} C^\infty_{X'} = C^\infty_{X \times X'}. \tag{1.67}$$

□

Пример 1.3.4. Пусть $Y \to X$ — векторное расслоение с типичным слоем размерности m. Ростки его сечений образуют *пучок S_Y сечений* расслоения $Y \to X$. Стебель $S_{Y,x}$ этого пучка над точкой $x \in X$ состоит из ростков сечений расслоения $Y \to X$ в окрестности точки x. Он представляет собой модуль над кольцом $C^\infty_{X,x}$ ростков гладких функций на X в точке $x \in X$. Следовательно S_Y является пучком модулей над пучком C^∞_X колец относительно операции поточечного умножения. Канонический предпучок пучка S_Y изоморфен предпучку локальных сечений векторного расслоения $Y \to X$. Он называется *структурным пучком* векторного расслоения $Y \to X$. Аналогично дифференцируемым многообразиям из предыдущего Примера векторное

расслоение задается своим структурным пучком, локально изоморфным пучку $C^\infty_U \otimes \mathbb{R}^m$. Эти локальные пучки склеиваются согласно Предложению 1.3.1 заданием коцикла функций перехода, который является элементом множества когомологий $H^1(X, GL(m,\mathbb{R})_\infty)$ с коэффициентами в пучке $GL(m,\mathbb{R})_\infty$ гладких отображений X в $GL(m,\mathbb{R})$ (см. первый том [11], Приложение В). При этом слой Y_x векторного расслоения $Y \to X$ над точкой $x \in X$ изоморфен фактору $S_{Yx}/\mathcal{M}_x$ стебля S_{Yx} структурного пучка над x по подмодулю $\mathcal{M}_x \subset S_{Yx}$ ростков сечений $Y \to X$, обращающихся в 0 в точке x.

Аналогично можно определить пучок сечений произвольного расслоения $Y \to X$. Он представляет собой *пучок множеств*, который в общем случае не наделен какой-либо алгебраической структурой. □

Перейдем теперь к определению связности на пучках. Пусть $(X, \mathcal{A})$ — пространство локальных колец и P — пучок $\mathcal{A}$-модулей на X. Для произвольного открытого подмножества $U \subset X$ рассмотрим модуль струй $\mathcal{J}^1(P(U))$ модуля $P(U)$ сечений пучка P на U. Он состоит из элементов тензорного произведения модулей $\mathcal{A}(U) \otimes P(U)$ по модулю поточечных соотношений (1.15). Следовательно для произвольных открытых подмножеств $V \subset U \subset X$ существует морфизм ограничения $\mathcal{J}^1(P(U)) \to \mathcal{J}^1(P(V))$ и модули струй $\mathcal{J}^1(P(U))$ образуют предпучок. Этот предпучок порождает *пучок* $\mathcal{J}^1P$ *струй* пучка P. Аналогично вводится пучок струй $\mathcal{J}^1\mathcal{A}$ пучка локальных колец $\mathcal{A}$. Поскольку для всякого открытого подмножества $U \subset X$ соотношения (1.15) и (1.18) на кольце $\mathcal{A}(U)$ и модулях $P(U)$, $\mathcal{J}^1(P(U))$, $\mathcal{J}^1(\mathcal{A}(U))$ являются поточечными, они перестановочны с морфизмами ограничения. Поэтому существует прямой предел факторов по модулю этих соотношений [9]. В частности, мы получаем: пучок $\Omega^1\mathcal{A}$ 1-форм пучка $\mathcal{A}$, изоморфизм пучков

$$\mathcal{J}^1(P) = \left(\mathcal{A} \oplus \Omega^1\mathcal{A}\right) \otimes P,$$

а также точные последовательности пучков

$$0 \to \Omega^1\mathcal{A} \otimes P \to \mathcal{J}^1(P) \to P \to 0, \tag{1.68}$$

$$0 \to \Omega^1\mathcal{A} \otimes P \to \left(\mathcal{A} \oplus \Omega^1\mathcal{A}\right) \otimes P \to P \to 0, \tag{1.69}$$

которые аналогичны соответственно фактор-модулю (1.22), изоморфизму модулей (1.34) и точным последовательностям модулей (1.35) и (1.49).

Замечание 1.3.5. Следует подчеркнуть, что из-за неравенства (1.65) соотношение дуальности (1.38) не переносится в общем случае на пучки $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ и $\Omega^1\mathcal{A}$, если последние не являются локально свободными пучками конечного ранга. Заметим также, что, если P — локально свободный пучок конечного ранга, то таковым является и его пучок струй $\mathcal{J}^1P$ (см. Пример 1.1.4). □

Следуя Определениям 1.2.1, 1.2.2 связностей на модулях, мы приходим к следующему определению связностей на пучках.

Определение 1.3.3. Пусть $(X, \mathcal{A})$ — пространство локальных колец и P — пучок $\mathcal{A}$-модулей на топологическом пространстве X. *Связностью* на пучке P называется расщепление точной последовательности (1.68), или эквивалентно точной последовательности (1.69). □

Чтобы установить соответствие между связностями на модулях и связностями на пучках, напомним некоторые факты, касающиеся точных последовательностей пучков.

Поскольку при переходе к прямому пределу свойство точной последовательности сохраняется [9], точная последовательность предпучков индуцирует точную последовательность порождаемых этими предпучками пучков (см. первый том [11], Приложение В). Более того, если точная последовательность предпучков расщепляется, имеет

место соответствующее расщепление точной последовательности пучков, порождаемых этими предпучками. Обратное утверждение, однако, не является столь однозначным.

Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to S' \to S \to S'' \to 0 \tag{1.70}$$

на топологическом пространстве X. Как и в случае векторных расслоений, пучок S'' из этой точной последовательности является фактор-пучком S/S'. Для всякого открытого подмножества $U \subset X$ точная последовательность (1.70) порождает следующие две точные последовательности абелевых групп:

$$0 \to S'(U) \to S(U) \to S''(U) \tag{1.71}$$

и

$$0 \to S'(U) \to S(U) \to S''_U \to 0, \tag{1.72}$$

где $S''_U = S(U)/S'(U)$ в общем случае не совпадает с группой сечений $S''(U)$ на U фактор-пучка S/S'. Пучок S на топологическом пространстве X называется *вялым*, если для произвольной пары открытых множеств $U \subset U'$ в X морфизм ограничения $S(U') \to S(U)$ является сюръекцией. Это эквивалентно условию, что любое локальное сечение $s \in S(U)$ пучка S на открытом подмножестве $U \subset X$ может быть продолжено до его глобального сечения $s \in S(X)$. Тем самым справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.3.4. Если пучок S' из точной последовательности (1.70) является вялым, тогда $S''_U = S''(U)$ и имеет место точная последовательность модулей

$$0 \to S'(U) \to S(U) \to S''(U) \to 0 \tag{1.73}$$

для любого открытого подмножества $U \subset X$, а значит, существует точная последовательность

$$0 \to \{S'(U)\} \to \{S(U)\} \to \{S''(U)\} \to 0 \tag{1.74}$$

канонических предпучков пучков из точной последовательности (1.70). □

Предположим, что точная последовательность пучков (1.70) допускает расщепление, т. е.

$$S = S' \oplus S'',$$

тогда

$$\{S(U)\} = \{S'(U)\} \oplus \{S''(U)\} \tag{1.75}$$

и канонические предпучки образуют точную последовательность (1.74), а прямая сумма (1.75) является ее расщеплением.

Таким образом, связности на пучках и модулях могут быть сопоставлены между собой следующим образом.

Предложение 1.3.5. Если существует связность на пучке P из Определения 1.3.3, тогда для всякого открытого подмножества $U \subset X$ существует связность на модуле $P(U)$ локальных сечений пучка P на U. Обратно, если для любой пары открытых подмножеств $V \subset U \subset X$ существуют связности на модулях $P(U)$ и $P(V)$ его локальных сечений, связанные морфизмом ограничения, тогда пучок P допускает связность. □

Пример 1.3.6. Пусть $Y \to X$ — векторное расслоение. Всякая линейная связность Γ на $Y \to X$ индуцирует связность на структурном модуле этого расслоения $Y(X)$ так, что для любого открытого подмножества $U \subset X$ ограничение $\Gamma|_U$ является связностью на модуле локальных сечений $Y(U)$. Тем самым мы получаем связность на структурном пучке Y_X векторного расслоения $Y \to X$. Обратно, связность на структурном пучке Y_X векторного расслоения $Y \to X$ задает связность на его структурном модуле $Y(X)$ и, следовательно, связность на самом векторном расслоении $Y \to X$. □

Непосредственным следствием Предложения 1.3.5 является тот факт, что точная последовательность пучков (1.69) расщепляется тогда и только тогда, когда существует морфизм пучков

$$\nabla\colon P \to \Omega^1 \mathcal{A} \otimes P, \tag{1.76}$$

удовлетворяющий правилу Лейбница

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s), \qquad f \in \mathcal{A}(U), \qquad s \in P(U),$$

для любого открытого подмножества $U \in X$. Это приводит к следующему эквивалентному определению связности на пучках (в духе Определения 1.2.2 связности на модулях).

Определение 1.3.6. Морфизм пучков (1.76) является *связностью* на пучке P. □

Как и для связностей на модулях, *кривизна* связности (1.76) на пучке P дается выражением

$$R = \nabla^2\colon P \to \Omega^2_X \otimes P. \tag{1.77}$$

Связность на пучке существует необязательно, поскольку точная последовательность (1.69) может не расщепляться. Приведем следующий критерий существования связности на пучке, сформулированный в терминах групп когомологий. Он основывается на том факте, что точная последовательность пучков (1.70) на паракомпактном топологическом пространстве X индуцирует точную последовательность групп когомологий

$$\ldots \to H^{k-1}(X; S'') \to H^k(X; S') \to H^k(X; S) \to H^k(X; S'') \to \ldots \tag{1.78}$$

с коэффициентами в пучках S', S и S'' [14].

Замечание 1.3.7. Не повторяя определения групп когомологий со значениями в пучках (см. первый том [11], Приложение В, или, например, [14]), напомним некоторые нужные нам свойства этих групп когомологий.

Пусть, как и раньше, S — пучок на топологическом пространстве X. Группа когомологий $H^0(X; S)$ по определению изоморфна абелевой группе $S(X)$ глобальных сечений пучка S. Если S — пучок $\mathcal{K}$-модулей, группы когомологий $H^k(X; S)$ — тоже $\mathcal{K}$-модули.

Пучок S на топологическом пространстве X называется *ацикличным*, если группы когомологий $H^{k>0}(X; S)$ тривиальны. Например, вялый пучок ацикличен.

Пучок S на топологическом пространстве X называется *мягким*, если любое локальное сечение этого пучка на замкнутом подмножестве пространства X является ограничением некоторого глобального сечения пучка S. Всякий мягкий пучок на паракомпактном топологическом пространстве ацикличен, а вялый пучок является мягким.

Пучок S на паракомпактном топологическом пространстве X именуется *тонким*, если для всякого *локально конечного* открытого покрытия $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства X (т. е. любая точка X имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом элементов этого покрытия) существует система $\{h_i\}$ эндоморфизмов $h_i\colon S \to S$ таких, что:

- для каждого i найдется замкнутое подмножество $V_i \subset U_i$ такое, что $h_i(S_x) = 0$, если $x \notin V_i$;
- $\sum\limits_{i \in I} h_i$ — тождественное отображение пучка S.

Тонкий пучок является мягким и ацикличным.

В частности, пусть S — пучок модулей над пучком C^0_X непрерывных вещественных функций на паракомпактном пространстве X и $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — локально конечное покрытие X. Поскольку X паракомпактно, мы имеем ассоциированное с покрытием $\mathcal{U}$ *разбиение единицы* $\{\phi_i\}$, т. е.:

(i) ϕ_i — вещественные неотрицательные непрерывные функции на X;

(ii) $\operatorname{supp} \phi_i \subset U_i$;

(iii) $\sum\limits_{i \in I} \phi_i(x) = 1$ для всех $x \in X$.

Элементы ϕ_i этого разбиения единицы могут быть использованы для задания эндоморфизмов h_i: $S \to S$ из определения тонкого пучка. А именно, для всякого открытого подмножества $U \subset X$ положим $h_i(f) = \phi_i f$, $f \in S(U)$. Это эндоморфизм канонического предпучка $\{S(U)\}$ пучка S и, следовательно, эндоморфизм пучка S. Нетрудно убедиться, что эти эндоморфизмы удовлетворяют требуемым условиям из определения тонкого пучка, т. е. пучок S тонок. Если X — гладкое многообразие и $\mathcal{U}$ — открытое покрытие X, всегда существует ассоциированное с $\mathcal{U}$ разбиение единицы, выполняемое гладкими функциями. Отсюда, в частности, следует, что пучок C^∞_X гладких функций на многообразии X является тонким и ацикличным; то же относится к пучкам сечений дифференцируемых векторных расслоений над X.

Предложение 1.3.7. [30]. Пусть f: $X \to X'$ — непрерывное отображение и S — пучок на топологическом пространстве X. Если всякая точка $x' \in X'$ имеет базис открытых окрестностей $\{U\}$ таких, что пучки $S|_{f^{-1}(U)}$ ациклични, тогда группы когомологий $H^*(X; S)$ и $H^*(X'; f_*S)$ изоморфны. □

Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{h} S_0 \xrightarrow{h^0} S_1 \xrightarrow{h^1} \dots \tag{1.79}$$

на паракомпактном топологическом пространстве X. Она называется *резольвентой* пучка S, если группы когомологий $H^q(X; S_p)$ тривиальны для $q \geqslant 1$ и $p \geqslant 0$. Например, это имеет место, когда пучки $S_{p\geqslant 0}$ тонкие. В этом случае точная последовательность (1.79) называется *тонкой резольвентой* пучка S. Точная последовательность пучков (1.79) порождает коцепной комплекс структурных модулей этих пучков

$$0 \longrightarrow S(X) \xrightarrow{h_*} S_0(X) \xrightarrow{h^0_*} S_1(X) \xrightarrow{h^1_*} \dots, \tag{1.80}$$

который, вообще говоря, является точным только в члене $S(X)$. Имеет место известная *теорема Де Рама* (см., например, [14]).

Теорема 1.3.8. Если дана резольвента (1.79) пучка S на паракомпактном топологическом пространстве X, q-я группа когомологий коцепного комплекса (1.80) изоморфна группе когомологий $H^q(X; S)$ с коэффициентами в пучке S, т. е.

$$H^{q>0}(X; S) = \operatorname{Ker} h^q_* / \operatorname{Im} h^{q-1}_*, \qquad H^0(X; S) = \operatorname{Ker} h^0_*. \tag{1.81}$$

□

Например, пусть X — связное гладкое многообразие, $S = \mathbb{R}$ — постоянный пучок вещественных функций на X и $S_p = \Omega^p_X$ — пучки внешних p-форм на X. Существует последовательность тонких пучков

$$0 \to \mathbb{R} \to \Omega^0_X \to \Omega^1_X \to \dots . \tag{1.82}$$

Она является точной в соответствии с известной леммой Пуанкаре и, таким образом, представляет собой тонкую резольвенту постоянного пучка $\mathbb{R}$ на X. Соответствующая последовательность структурных модулей (1.80) совпадает с известным комплексом Де Рама внешних дифференциальных форм на многообразии X (см. первый том [11], формулу (3.23)). Согласно Теореме 1.3.8 имеет место изоморфизм групп когомологий $H^q(X; \mathbb{R})$ со значениями в постоянном пучке $\mathbb{R}$ на X и групп когомологий Де Рама $H^q(X)$. □

Вернемся теперь к точной последовательности (1.69). Пусть $(X, \mathcal{A})$ — пространство локальных колец и P — локально свободный пучок $\mathcal{A}$-модулей. Тогда мы имеем точную последовательность пучков

$$0 \to \operatorname{Hom}(P, \Omega^1\mathcal{A} \otimes P) \to \operatorname{Hom}\left(P, (\mathcal{A} \oplus \Omega^1\mathcal{A}) \otimes P\right) \to \operatorname{Hom}(P, P) \to 0$$

и соответствующую точную последовательность (1.78) групп когомологий

$$0 \to H^0\big(X; \operatorname{Hom}\big(P, \Omega^1\mathcal{A}\otimes P\big)\big) \to H^0\big(X; \operatorname{Hom}\big(P, (\mathcal{A}\oplus\Omega^1\mathcal{A})\otimes P\big)\big) \to$$
$$\to H^0\big(X; \operatorname{Hom}(P,P)\big) \to H^1\big(X; \operatorname{Hom}\big(P, \Omega^1\mathcal{A}\otimes P\big)\big) \to \dots .$$

Очевидно, что тождественный морфизм $\mathrm{Id}: P \to P$ принадлежит группе $H^0(X; \operatorname{Hom}(P,P))$. Его образ в $H^1(X; \operatorname{Hom}(P, \Omega^1\mathcal{A}\otimes P))$ называется *классом Атьи*. Если этот класс тривиален, существует элемент в $\operatorname{Hom}(P, (\mathcal{A}\oplus\Omega^1\mathcal{A})\otimes P))$, образом которого в $\operatorname{Hom}(P,P)$ является $\mathrm{Id}\,P$, т. е. имеет место расщепление точной последовательности (1.69).

В частности, пусть X — дифференцируемое многообразие и $\mathcal{A} = C^\infty_X$ — пучок гладких функций на X. Пучок $\operatorname{Der} C^\infty_X$ его дифференцирований изоморфен пучку векторных полей на многообразии X. Отсюда следует, что:

- для любой пары открытых множеств $V \subset U$ существует морфизм ограничения $\operatorname{Der}(C^\infty(U)) \to \operatorname{Der}(C^\infty(V))$;
- $\operatorname{Der} C^\infty_X$ — локально свободный пучок C^∞_X-модулей конечного ранга;
- пучок векторных полей $\operatorname{Der} C^\infty_X$ и пучок 1-форм Ω^1_X на многообразии X взаимно дуальны.

Пусть теперь P — локально свободный пучок C^∞_X-модулей. Тогда $\operatorname{Hom}(P, \Omega^1_X\otimes P)$ тоже локально свободный пучок C^∞_X-модулей. Он является тонким и ациклическим. Его группа когомологий $H^1\big(X; \operatorname{Hom}\big(P, \Omega^1_X\otimes P\big)\big)$ тривиальна, и точная последовательность

$$0 \to \Omega^1_X\otimes P \to \big(C^\infty_X\oplus\Omega^1_X\big)\otimes P \to P \to 0 \tag{1.83}$$

допускает расщепление.

В заключение рассмотрим еще пучок S коммутативных C^∞_X-колец на многообразии X. Отталкиваясь от Определения 1.2.8, мы приходим к следующему определению связности на этом пучке.

Определение 1.3.9. Всякий морфизм

$$\operatorname{Der} C^\infty_X \ni \tau \to \nabla_\tau \in \operatorname{Der} S,$$

который является связностью на S как пучке C^∞_X-модулей, называется *связностью* на пучке S колец. □

Кривизна этой связности дается выражением

$$R(\tau,\tau') = [\nabla_\tau, \nabla_{\tau'}] - \nabla_{[\tau,\tau']}, \tag{1.84}$$

аналогичным выражению (1.63) для кривизны связности на модулях.

Глава 2

Связности в квантовой механике

В третьем томе [13] были описаны некоторые квантовомеханические системы, в которых применялись обычные связности на расслоениях. Эта глава посвящена алгебраическим связностям в квантовой механике, которые описывают эволюцию квантовых систем.

§ 1. Эволюция квантовых систем

Во втором томе [12], § 3.2, было показано, что решения уравнений Гамильтона неавтономной классической механики являются интегральными сечениями гамильтоновой связности, т. е. эволюция в классической гамильтоновой механике описывается как параллельный перенос по времени. Такое описание эволюции можно распространить и на квантовую механику [22, 91, 113, 127].

Следует подчеркнуть, что в квантовой механике время играет роль классического параметра. Действительно, все коммутационные соотношения между операторами в квантовой механике являются одновременными, а вычисление средних значений операторов наблюдаемых не предполагает интегрирования по времени. Таким образом, в каждый момент времени мы имеем определенную квантовую систему, и для разных моментов времени эти квантовые системы различны, хотя, возможно, и изоморфны друг другу.

Напомним (см. третий том [13], а также [2, 5, 15]), что в рамках алгебраической квантовой теории квантовая система характеризуется некоторой C^*-алгеброй наблюдаемых A и положительной (следовательно непрерывной) формой ϕ на A, которая определяет представление π_ϕ алгебры A в гильбертовом пространстве E_ϕ с тотализирующим вектором ξ_ϕ такое, что

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi | \xi_\phi \rangle, \quad \forall\, a \in A.$$

Говорят, что $\phi(a)$ — среднее значение оператора a в состоянии ξ_ϕ.

Таким образом, чтобы описать эволюцию квантовомеханической системы, каждой точке оси времени $t \in \mathbb{R}$ следует сопоставить некоторую C^*-алгебру A_t, трактуя ее как алгебру наблюдаемых квантовой системы в момент времени t. В результате мы имеем дело с семейством одновременных C^*-алгебр A_t, параметризуемым осью времени $\mathbb{R}$. Предположим для простоты, что все C^*-алгебры A_t изоморфны друг другу и некоторой C^*-алгебре A с единицей. Более того, пусть они образуют локально тривиальное гладкое банахово расслоение $P \to \mathbb{R}$ с типичным слоем A, функциями перехода которого являются автоморфизмы C^*-алгебры A. Гладкие сечения α расслоения C^*-алгебр $P \to \mathbb{R}$ составляют инволютивную алгебру относительно поточечных операций. Это также бимодуль $P(\mathbb{R})$ над кольцом $C^\infty(\mathbb{R})$ гладких вещественных функций на $\mathbb{R}$.

В соответствии с Определением 1.2.8, обобщаемом на некоммутативные алгебры, связность ∇ на $C^\infty(\mathbb{R})$-алгебре $P(\mathbb{R})$ ставит в соответствие стандартному векторному полю ∂_t на $\mathbb{R}$ дифференцирование этой алгебры

$$\nabla_t \in \mathrm{Der}\,(P(\mathbb{R})), \tag{2.1}$$

которое удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla_t(f\alpha) = \partial_t f\alpha + f\nabla_t\alpha, \quad \alpha \in P(\mathbb{R}), \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Очевидно, что расслоение $P \to \mathbb{R}$ является тривиальным, хотя оно может не иметь какую-либо каноническую тривиализацию. Если его тривиализация $P = \mathbb{R} \times A$ задана, дифференцирование ∇_t (2.1) принимает вид

$$\nabla_t(\alpha) = [\partial_t - \delta(t)](\alpha), \tag{2.2}$$

где операторы $\delta(t)$, рассматриваемые в каждой точке $t \in \mathbb{R}$, представляют собой дифференцирования C^*-алгебры A такие, что

$$\delta_t(ab) = \delta_t(a)b + a\delta_t(b), \qquad \delta_t(a^*) = \delta_t(a)^*.$$

Как обычно, сечение $\alpha(t)$ расслоения $P \to \mathbb{R}$, т. е. элемент модуля $P(\mathbb{R})$, называется интегральным сечением связности (2.2), если

$$\nabla_t(\alpha) = [\partial_t - \delta(t)](\alpha) = 0. \tag{2.3}$$

Тогда уравнение (2.3) — это *уравнение Гейзенберга*, описывающее квантовую эволюцию. Интегральное сечение $\alpha(t)$ связности ∇ является решением этого уравнения, и можно сказать, что $\alpha(t)$ — геодезическая кривая в алгебре A.

В частности, пусть операторы дифференцирования $\delta(t) = \delta$ одни и те же для всех $t \in \mathbb{R}$. Если δ — генератор 1-параметрической группы g_r автоморфизмов C^*-алгебры A (см. третий том [13], § 3.2), тогда для любого элемента $a \in A$ кривая

$$\alpha(t) = g_t(a), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

в A является решением уравнения Гейзенберга (2.3).

Существуют определенные условия для того, чтобы дифференцирование C^*-алгебры с единицей определяло 1-параметрическую группу ее автоморфизмов [43, 130]. В частности, напомним Предложение 3.2.4 из третьего тома [13].

Предложение 2.1.1. Если дифференцирование δ является ограниченным оператором в C^*-алгебре A, тогда δ — генератор 1-параметрической группы

$$g_r = \exp\{r\delta\}, \qquad r \in \mathbb{R},$$

автоморфизмов A, и обратно. Эта группа непрерывна в равномерной операторной топологии на группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(A)$ C^*-алгебры A. Более того, для всякого представления π алгебры A в гильбертовом пространстве E_π существует самосопряженный ограниченный оператор $\mathcal{H}$ в E_π такой, что

$$\pi(\delta(a)) = i[\mathcal{H}, \pi(a)], \tag{2.5}$$
$$\pi(g_r(a)) = e^{ir\mathcal{H}}\pi(a)e^{-ir\mathcal{H}},$$

для всех $a \in A$ и $r \in \mathbb{R}$. □

Отметим, что, если область определения $D(\delta)$ дифференцирования δ C^*-алгебры A совпадает со всей алгеброй A, оператор дифференцирования ограничен. Таким образом, по самому своему определению дифференцирования δ_t, $t \in \mathbb{R}$, в связности ∇_t (2.2) предполагаются ограниченными. Отсюда следует, что, если квантовомеханическая система является консервативной, т. е. $\delta_t = \delta$ для всех моментов времени $t \in \mathbb{R}$, уравнение Гейзенберга (2.3) имеет решение (2.4) через любую наперед заданную точку произведения $\mathbb{R} \times A$ в соответствии с Предложением 2.1.1. Из Предложения 2.1.1 также следует, что описание эволюции консервативной квантовомеханической системы в гейзенберговской и шрёдингеровской картинах (основанных соответственно на уравнениях Гейзенберга и Шрёдингера) эквивалентны.

Проблема возникает в связи с тем, что нетривиальные ограниченные дифференцирования C^*-алгебры не всегда существуют. Более того, если кривая g_r, $r \in \mathbb{R}$, в $\mathrm{Aut}(A)$

непрерывна относительно равномерной операторной топологии на $\mathrm{Aut}\,(A)$, тогда для любого элемента $a \in A$ кривая $g_r(a)$ в C^*-алгебре A также непрерывна, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В то же время, кривая g_r, $r \in \mathbb{R}$, в $\mathrm{Aut}\,(A)$ непрерывна относительно сильной операторной топологии на $\mathrm{Aut}\,(A)$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in A$ кривая $g_r(a)$ в A непрерывна.

Поэтому при описании квантовой эволюции нас прежде всего интересуют сильно непрерывные 1-параметрические группы автоморфизмов C^*-алгебр. В третьем томе [13], § 3.2 (см. также [43, 130]), были приведены достаточные условия для того, чтобы дифференцирование C^*-алгебры A было генератором сильно непрерывной группы автоморфизмов A. Отметим только, что такое дифференцирование δ имеет плотную область определения $D(\delta)$ в A и не является ограниченным на $D(\delta)$. Если же предположить, что дифференцирование δ ограничено на своей области определения $D(\delta)$, тогда оно может быть однозначно расширено до ограниченного дифференцирования на всей алгебре A, а такие дифференцирования, как уже отмечалось, не всегда существуют. Таким образом, если эволюция квантовомеханической системы характеризуется сильно непрерывной 1-параметрической группой автоморфизмов алгебры наблюдаемых, следует допустить, что связность ∇_t (2.2) не определена на всей алгебре $P(\mathbb{R})$ сечений расслоения C^*-алгебр $P \to \mathbb{R}$. В этом случае приходится иметь дело с обобщенной связностью, задаваемой операторами параллельного переноса, генераторы которых могут не существовать [22]. Может также случиться, что представление π алгебры A в гильбертовом пространстве E_π не допускает представления сильно непрерывной 1-параметрической группы g_r автоморфизмов A унитарными операторами e^{irH} (2.5) в E_π. Поэтому шрёдингеровская картина, вообще говоря, не подходит для описания квантовой эволюции, задаваемой сильно непрерывной 1-параметрической группой автоморфизмов алгебры наблюдаемых.

Вернемся снова к неконсервативному уравнению Гейзенберга (2.3). Потребуем, чтобы во все моменты времени $t \in \mathbb{R}$ дифференцирования $\delta(t)$ были генераторами 1-параметрических групп автоморфизмов C^*-алгебры A. Тогда оператор параллельного переноса в A относительно связности ∇_t (2.2) на отрезке $[0, t]$ может быть задан T-упорядоченной операторной экспонентой

$$G_t = T \exp\left\{\int_0^t \delta(t')\,dt'\right\} \tag{2.6}$$

и для всякого элемента $a \in A$ существует решение

$$\alpha(t) = G_t(a), \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

уравнения Гейзенберга (2.3), проходящее через a.

Предположим теперь, что все одновременные C^*-алгебры наблюдаемых A_t изоморфны алгебре фон Неймана $B(E)$ ограниченных операторов в некотором гильбертовом пространстве E. В этом частном случае квантовая эволюция может быть описана уравнением Шрёдингера.

Рассмотрим локально тривиальное расслоение гильбертовых пространств $\Pi \to \mathbb{R}$ с типичным слоем E и гладкими функциями перехода (см. гильбертовы многообразия в третьем томе [13], § 1.7). Гладкие сечения расслоения $\Pi \to \mathbb{R}$ образуют бимодуль $\Pi(\mathbb{R})$ над кольцом $C^\infty(\mathbb{R})$ гладких вещественных функций на $\mathbb{R}$. Согласно Определению 1.2.7, связность ∇ на модуле $\Pi(\mathbb{R})$ ставит в соответствие стандартному векторному полю ∂_t на оси времени $\mathbb{R}$ дифференциальный оператор первого порядка

$$\nabla_t \in \mathrm{Diff}_1\big(\Pi(\mathbb{R}), \Pi(\mathbb{R})\big), \tag{2.7}$$

который удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla_t(f\psi) = \partial_t f\psi + f\nabla_t\psi, \quad \psi \in \Pi(\mathbb{R}), \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Выберем некоторую тривиализацию $\Pi = \mathbb{R} \times E$. Тогда оператор ∇_t (2.7) принимает вид

$$\nabla_t(\psi) = (\partial_t - i\mathcal{H}(t))\psi, \tag{2.8}$$

где $\mathcal{H}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, — ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве E.

Замечание 2.1.1. Следует отметить, что любой ограниченный самосопряженный оператор $\mathcal{H}$ в гильбертовом пространстве E задает ограниченное внутреннее дифференцирование

$$\delta(a) = i[\mathcal{H}, a], \qquad a \in B(E), \tag{2.9}$$

алгебры фон Неймана $B(E)$. Обратно, всякое ограниченное дифференцирование алгебры $B(E)$ является внутренним, т. е. принимает вид (2.9), где $\mathcal{H}$ — самосопряженный элемент из $B(E)$. Поэтому операторы $\mathcal{H}(t)$ в выражении (2.8) с необходимостью являются ограниченными и самосопряженными. □

Как обычно, сечение $\psi(t)$ расслоения гильбертовых пространств $\Pi \to \mathbb{R}$ называется интегральным сечением связности ∇_t (2.8), если оно удовлетворяет уравнению

$$\nabla_t(\psi) = (\partial_t - i\mathcal{H}(t))\psi = 0. \tag{2.10}$$

Оно имеет смысл *уравнения Шрёдингера* квантовой системы с гамильтонианом $\mathcal{H}(t)$.

В частности, пусть квантовая система является консервативной, т. е. гамильтониан $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}$ в уравнении Шрёдингера (2.10) не зависит от времени. Тогда для любой точки $y \in E$ существует решение

$$\psi(t) = e^{it\mathcal{H}}y, \qquad t \in \mathbb{R},$$

консервативного уравнения Шрёдингера. Если уравнение Шрёдингера (2.10) не консервативно, оператор параллельного переноса в гильбертовом пространстве E относительно связности ∇_t (2.8) на отрезке $[0, t]$ может быть задан T-упорядоченной операторной экспонентой

$$G_t = T\exp\left\{i\int_0^t \mathcal{H}(t')\,dt'\right\}. \tag{2.11}$$

Тогда для любого вектора $y \in E$ мы получаем решение

$$\psi(t) = G_t y, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.12}$$

уравнения Шрёдингера (2.10), проходящее через y.

Подчеркнем, что оператор G_t (2.11) является элементом группы $\mathrm{U}(E)$ унитарных операторов в гильбертовом пространстве E. Это вещественная бесконечномерная группа Ли относительно равномерной операторной топологии. Ее алгебра Ли — вещественная алгебра всех антисамосопряженных ограниченных операторов $i\mathcal{H}$ в E относительно коммутатора $[i\mathcal{H}, i\mathcal{H}']$. Оператор G_t (2.11) по построению удовлетворяет уравнению

$$\partial_t G_t - i\mathcal{H}G_t = 0. \tag{2.13}$$

Это уравнение инвариантно относительно правых сдвигов $G_t \mapsto G_t g$, $\forall g \in \mathrm{U}(E)$. Поэтому

$$G_t\colon (0, g) \mapsto (t, G_t g)$$

можно рассматривать как оператор параллельного переноса в тривиальном главном расслоении $\mathbb{R} \times \mathrm{U}(E)$ над $\mathbb{R}$ со структурной группой $\mathrm{U}(E)$. Соответственно оператор (2.6) представляет собой оператор параллельного переноса в тривиальном групповом расслоении $\mathbb{R} \times \mathrm{Aut}\,(A)$, где группа $\mathrm{Aut}\,(A)$ действует на себя по присоединенному представлению.

Замечание 2.1.2. В следующем параграфе задание квантовой эволюции как параллельного переноса в главном расслоении будет распространено на квантовомеханические системы с несколькими классическими параметрами, зависящими от времени. Это приводит к описанию явлений типа фазы Берри. □

Отметим, что 1-параметрическая группа G_t, $t \in \mathbb{R}$, определяемая уравнением (2.13), непрерывна в равномерной операторной топологии на группе унитарных операторов $\mathrm{U}(E)$ в гильбертовом пространстве E. Обратимся теперь к более общему случаю, когда кривая G_t, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна относительно сильной операторной топологии на $B(E)$. Тогда кривые $\psi(t) = G_t y$, $y \in E$, в E тоже непрерывны, но могут быть недифференцируемыми. Соответственно гамильтониан $\mathcal{H}(t)$ в уравнении Шрёдингера (2.10) уже не является ограниченным оператором. Поскольку группа $\mathrm{U}(E)$ не является топологической группой в сильной операторной топологии, произведение $\mathbb{R} \times \mathrm{U}(E)$ не является ни гладким, ни главным расслоением над $\mathbb{R}$. Поэтому обычное понятие связности неприменимо к этому расслоению. В то же время, как уже отмечалось, можно ввести обобщенные связности, описываемые кривыми и операторами параллельного переноса, но не их генераторами [22].

§ 2. Связности Берри

Имеется обширная литература (см., например, [20, 27, 38, 96, 119, 156]), посвященная геометрическому и топологическому анализу явления, называемого фазой Берри, в квантовомеханических системах с классическими параметрами, зависящими от времени. Во втором томе [12], § 3.9, классические механические системы с такими параметрами были описаны в терминах композиционных расслоений и композиционных связностей. Здесь это описание распространяется на квантовомеханические системы [113].

Рассмотрим квантовые системы, зависящие от конечного числа вещественных классических параметров, представляемых сечениями гладкого расслоения $\Sigma \to \mathbb{R}$. Для простоты зафиксируем тривиализацию этого расслоения $\Sigma = \mathbb{R} \times Z$ с координатами (t, σ^m). Хотя может случиться, что расслоение параметров $\Sigma \to \mathbb{R}$ не имеет какой-либо преимущественной тривиализации, например, если один из параметров — скорость системы отсчета.

В предыдущем параграфе мы охарактеризовали время с математической точки зрения как классический параметр в квантовой механике. Эта характеристика распространяется и на другие классические параметры. А именно, сопоставим каждой точке $\sigma \in \Sigma$ расслоения параметров Σ некоторую C^*-алгебру A_σ, интерпретируя ее как алгебру наблюдаемых квантовой системы при фиксированных значениях параметров (t, σ^m).

Замечание 2.2.1. Важно различать классические параметры и координаты, от которых может зависеть волновая функция протяженных систем (см. третий том [13], § 4.7). А именно, при вычислении средних значений оператора наблюдаемых интегрирование по пространству классических параметров не производится. □

Чтобы более четко выделить эффект фазы Берри, упростим рассматриваемую квантовую систему с параметрами. Предположим, что все C^*-алгебры A_σ, $\sigma \in \Sigma$, изоморфны одной и той же алгебре фон Неймана $B(E)$ ограниченных операторов в некотором гильбертовом пространстве E, и рассмотрим локально тривиальное расслоение гильбертовых пространств $\Pi \to \Sigma$ над многообразием параметров Σ с типичным слоем E и гладкими функциями перехода. Гладкие сечения расслоения $\Pi \to \Sigma$ образуют бимодуль $\Pi(\Sigma)$ над кольцом $C^\infty(\Sigma)$ гладких вещественных функций на Σ. В соответствии с Определением 1.2.7 связность $\widetilde{\nabla}$ на модуле $\Pi(\Sigma)$ сопоставляет всякому векторному полю τ на расслоении параметров Σ дифференциальный оператор первого порядка

$$\widetilde{\nabla}_\tau \in \mathrm{Diff}_1\big(\Pi(\Sigma), \Pi(\Sigma)\big), \tag{2.14}$$

который удовлетворяет правилу Лейбница

$$\widetilde{\nabla}_\tau(fs) = (\tau \lrcorner df)s + f\widetilde{\nabla}_\tau s, \quad s \in \Pi(\Sigma), \quad f \in C^\infty(\Sigma).$$

Выберем векторное поле τ на расслоении Σ таким, что $dt \lrcorner \tau = 1$. На области тривиализации расслоения гильбертовых пространств $\Pi \to \Sigma$ оператор $\widetilde{\nabla}_\tau$ (2.14) принимает вид

$$\widetilde{\nabla}_\tau(s) = \big(\partial_t - i\mathcal{H}(t, \sigma^k)\big)s + \tau^m\big(\partial_m - i\widehat{A}_m(t, \sigma^k)\big)s, \tag{2.15}$$

где $\mathcal{H}(t, \sigma^k)$, $\widehat{A}_m(t, \sigma^k)$, $\forall\, \sigma \in \Sigma$, являются ограниченными самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве E.

Рассмотрим теперь композиционное расслоение

$$\Pi \to \Sigma \to \mathbb{R}.$$

Как и в случае гладких композиционных расслоений (см. второй том [12], Предложение П.7), всякое сечение $h(t)$ расслоения параметров $\Sigma \to \mathbb{R}$ определяет подрасслоение гильбертовых пространств

$$\Pi_h = h^*\Pi \to \mathbb{R}$$

расслоения $\Pi \to \mathbb{R}$ с типичным слоем E. Соответственно, связность $\widetilde{\nabla}$ (2.15) на $C^\infty(\Sigma)$-модуле $\Pi(\Sigma)$ задает индуцированную связность

$$\nabla_h(\psi) = \big[\partial_t - i(\widehat{A}_m(t, h^k(t))\partial_t h^m + \mathcal{H}(t, h^k(t))\big]\psi \tag{2.16}$$

на $C^\infty(\mathbb{R})$-модуле $\Pi_h(\mathbb{R})$ сечений ψ расслоения гильбертовых пространств $\Pi_h \to \mathbb{R}$ (сравните с формулами (П.60), (3.111) во втором томе [12]).

Как и в предыдущем параграфе, назовем сечение ψ расслоения гильбертовых пространств $\Pi_h \to \mathbb{R}$ интегральным сечением связности (2.16), если

$$\nabla_h(\psi) = \big[\partial_t - i\big(\widehat{A}_m(t, h^k(t))\partial_t h^m + \mathcal{H}\big(t, h^k(t)\big)\big]\psi = 0. \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) представляет собой уравнение Шрёдингера квантовомеханической системы, зависящей от функций параметров $h(t)$. Его решения имеют вид (2.12), где G_t является T-упорядоченной экспонентой

$$G_t = T\exp\left\{i\int_0^t \big(\widehat{A}_m\partial_{t'}h^m + \mathcal{H}\big)\,dt'\right\}. \tag{2.18}$$

Член

$$i\widehat{A}_m(t, h^i(t))\partial_t h^m$$

в уравнении Шрёдингера (2.17) приводит к эффекту фазы Берри, тогда как $\mathcal{H}$ представляет собой обычный гамильтониан квантовой системы. Чтобы более четко выделить эффект фазы Берри, еще больше упростим рассматриваемую систему.

При заданной тривиализации расслоения $\Pi \to \mathbb{R}$ и упомянутой выше тривиализации $\Sigma = \mathbb{R} \times Z$ расслоения параметров Σ предположим, что компоненты $\widehat{A}_m$ связности $\widetilde{\nabla}$ (2.15) не зависят от времени t и что оператор $\mathcal{H}(\sigma)$ коммутирует с операторами $\widehat{A}_m(\sigma)$ во всех точках кривой $h(t) \subset \Sigma$. Тогда оператор G_t (2.18) принимает вид

$$G_t = T\exp\left\{i\int_{h([0,t])} \widehat{A}_m(\sigma^k)\,d\sigma^m\right\}\cdot T\exp\left\{i\int_0^t \mathcal{H}(t')\,dt'\right\}. \tag{2.19}$$

Первый множитель в правой части выражения (2.19) можно интерпретировать как параллельный перенос вдоль кривой $h([0,t]) \subset Z$ относительно индуцированной связности

$$\nabla = i^*\widetilde{\nabla} = d\sigma^m \otimes \left(\partial_m - i\widehat{A}_m(t,\sigma^k)\right) \tag{2.20}$$

на расслоении гильбертовых пространств $\Pi \to Z$, определяемой вложением

$$i\colon Z \hookrightarrow \{0\} \times Z \subset \Sigma.$$

Заметим, что, поскольку операторы $\widehat{A}_m$ не зависят от времени, можно использовать любое вложение $Z \to \{t\} \times Z$. Более того, связность ∇ (2.20), называемая *связностью Берри*, может быть представлена как связность на некотором главном расслоении $P \to Z$ со структурной группой $\mathrm{U}(E)$ унитарных операторов в гильбертовом пространстве E.

Пусть теперь кривая $h([0,t]) \subset Z$ замкнута, а группа голономии связности ∇ в точке $h(t) = h(0)$ нетривиальна. Тогда унитарный оператор

$$T\exp\left\{i\int\limits_{h([0,t])} \widehat{A}_m(\sigma^k)\,d\sigma^m\right\}, \tag{2.21}$$

вообще говоря, не сводится к тождественному преобразованию.

Например, если

$$i\widehat{A}_m(\sigma^k) = iA_m(\sigma^k)\mathbf{1} \tag{2.22}$$

— связность главного $U(1)$-расслоения над пространством параметров Z, тогда оператор (2.21) представляет собой известный *фазовый множитель Берри*

$$\exp\left\{i\int\limits_{h([0,t])} A_m(\sigma^k)\,d\sigma^m\right\}.$$

Если связность (2.22) является плоской, фаза Берри — это в точности эффект Аароноva—Бома на пространстве параметров Z (см. первый том, § 3.4).

Обобщая этот пример, рассмотрим случай, когда эффект фазы Берри описывается связностью на главном расслоении, структурной группой которого является обычная конечномерная группа Ли. Предположим, что E — сепарабельное гильбертово пространство, которое является гильбертовой суммой n-мерных собственных подпространств гамильтониана $\mathcal{H}(\sigma)$, т. е.

$$E = \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k, \qquad E_k = P_k(E),$$

где P_k — проекционные операторы такие, что

$$H(\sigma) \circ P_k = \lambda_k(\sigma)P_k$$

(в духе алиабатической гипотезы). Пусть операторы $\widehat{A}_m(\sigma) = \widehat{A}_m(z)$ не зависят от времени и сохраняют собственные подпространства E_k гамильтониана $\mathcal{H}$, т. е.

$$\widehat{A}_m(z) = \sum_k \widehat{A}^k_m(z) \circ P_k, \tag{2.23}$$

где $\widehat{A}^k_m(z)$, $z \in Z$, — самосопряженные операторы в E_k. Отсюда следует, что операторы $\widehat{A}_m(\sigma)$ коммутируют с операторами $\mathcal{H}(\sigma)$ во всех точках расслоения параметров $\Sigma \to \mathbb{R}$. Тогда, будучи ограниченным на подпространство E_k, оператор параллельного переноса (2.21) сводится к унитарному оператору в E_k. В этом случае связность Берри (2.20) на главном $\mathrm{U}(E)$-расслоении $P \to Z$ может быть представлена как композиционная связность на композиционном расслоении

$$P \to P/U(n) \to Z,$$

которая определяется некоторой связностью на главном $U(n)$-расслоении $P \to P/U(n)$ и тривиальной связностью на расслоении $P/U(n) \to Z$. Типичный слой расслоения $P/U(n) \to Z$ в точности совпадает с классифицирующим пространством $B(U(n))$ для главных расслоений со структурной группой $U(n)$ (см. первый том [11], § 3.5). Более того, можно рассмотреть параллельный перенос в главном расслоении $P \to P/U(n)$ вдоль кривой в $P/U(n)$. В этом случае вектор состояния $\psi(t)$ приобретает *геометрический фазовый множитель* в дополнении к динамическому фазовому множителю. В частности, если $\Sigma = \mathbb{R}$ (т. е. классические параметры отсутствуют и фаза Берри имеет только геометрическое происхождение), мы приходим к случаю связности Берри на главном $U(n)$-расслоении над классифицирующим пространством $B(U(n))$ [38]. Если $n = 1$, это вариант геометрической фазы Берри, описанный в работе [20].

Суперсвязности

Элементы супергеометрии встречаются во многих квантовополевых моделях. Поэтому мы начнем описание связностей в квантовой теории поля с градуированных связностей и суперсвязностей. Они представляют собой связности на градуированных модулях и пучках над градуированными коммутативными алгебрами. Мы неоднократно будем ссылаться на свойства модулей и пучков из Главы 1, обобщенные на случай градуированных алгебр [85].

Предполагается, что читатель знаком с основами теории суперсимметрий и супермногообразий [1, 30, 50, 58] (см. также первый том [11], § 4.3). Тем не менее § 3.1 посвящен необходимым элементам тензорного анализа на градуированных пространствах.

Ради упрощения мы опускаем категорные аспекты приводимых ниже конструкций, которые играют существенную роль в теории супермногообразий, но не столь важны для приложений.

§ 1. Алгебра градуированных пространств

В этой Главе, если специально не оговорено, под градуированной структурой понимается именно $\mathbb{Z}_2$-градуированная структура. Степень относительно $\mathbb{Z}_2$-градуировки будет обозначаться $|.|$, в отличие от $|.|$ для обозначения степени относительно $\mathbb{Z}$-градуировки дифференциальных форм.

Градуированным коммутативным кольцом $\mathcal{K}$ называется кольцо, которое имеет две аддитивные подгруппы $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$, называемые *четной* и *нечетной частями* $\mathcal{K}$ и такие, что

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1,$$
$$a_r a_s = (-1)^{rs} a_s a_r \in \mathcal{K}_{r+s}, \quad a_r \in \mathcal{K}_r, \quad a_s \in \mathcal{K}_s, \quad s, r = 0, 1.$$

Например, обычное коммутативное кольцо является частным случаем градуированного коммутативного кольца, у которого $\mathcal{K}_1 = 0$. В дальнейшем под градуированным кольцом будет пониматься именно коммутативное градуированное кольцо

Градуированным $\mathcal{K}$-модулем Q называется $\mathcal{K}$-бимодуль, который содержит две аддитивные подгруппы Q_0 и Q_1 такие, что

$$Q = Q_0 \oplus Q_1$$

и $\mathcal{K}_r Q_s \subset Q_{r+s}$. Если специально не оговорено, градуированный модуль считается *центральным*, т. е.

$$aq = (-1)^{|q||a|} qa, \quad q \in Q, \quad a \in \mathcal{K}.$$

Градуированный $\mathcal{K}$-модуль называется *свободным*, если он порождается *однородными элементами*, т. е. элементами, которые принадлежат только или Q_0, или Q_1. Всякий $\mathcal{K}$-градуированный модуль является очевидно $\mathcal{K}_0$-модулем. Говорят, что базис градуированного модуля Q конечного порядка принадлежит типу (n, m), если он состоит из n четных и m нечетных элементов.

В частности, *градуированным векторным пространством* $B = B_0 \oplus B_1$ называется градуированный $\mathbb{R}$-модуль. Говорят, что градуированное векторное пространство имеет размерность (n, m), если $\dim B_0 = n$ и $\dim B_1 = m$.

Градуированная коммутативная $\mathcal{K}$-алгебра A с единицей — это градуированное кольцо, которое является также градуированным модулем над градуированным кольцом $\mathcal{K}$. *Градуированное тензорное произведение* $A_1 \otimes A_2$ градуированных $\mathcal{K}$-алгебр A_1 и A_2 определяется как тензорное произведение $\mathcal{K}$-модулей A_1 и A_2, снабженное операцией умножения

$$(a_1 \otimes a_2) \cdot (a_1' \otimes a_2') = (-1)^{|a_2||a_1'|}(a_1 a_1' \otimes a_2 a_2').$$

Как и в случае градуированных колец, в дальнейшем под градуированной $\mathcal{K}$-алгеброй будет подразумеваться именно градуированная коммутативная $\mathcal{K}$-алгебра с единицей. Градуированная $\mathbb{R}$-алгебра будет называться просто градуированной алгеброй. Говорят, что она имеет ранг m, если это свободная градуированная алгебра, порождаемая m нечетными элементами.

Банахова градуированная алгебра — это градуированная алгебра, которая является банаховой алгеброй такой, что выполняется условие

$$\|a_0 + a_1\| = \|a_0\| + \|a_1\|.$$

Пусть V — вещественное векторное пространство. Рассмотрим алгебру

$$\Lambda = \wedge V = \mathbb{R} \bigoplus_{k=1}^{k} \bigwedge V \tag{3.1}$$

относительно операции внешнего произведения. Она называется *внешней алгеброй* векторного пространства V. Это $\mathbb{Z}$-градуированная коммутативная алгебра, наделенная $\mathbb{Z}_2$-градуированной структурой

$$\Lambda_0 = \mathbb{R} \bigoplus_{k=1} \bigwedge^{2k} V, \quad \Lambda_1 = \bigoplus_{k=1} \bigwedge^{2k-1} V.$$

Она представляет собой пример *алгебры Грассмана*. Более того, в дальнейшем, если специально не оговорено, под алгеброй Грассмана будет подразумеваться именно конечно порожденная вещественная (или комплексная) внешняя алгебра (см. ниже Замечание 3.1.1). Если дан базис $\{c^i, i \in I\}$ векторного пространства V, элементы алгебры Грассмана принимают вид

$$a = \sum_{k=0} \sum_{(i_1 \dots i_k)} a_{i_1 \dots i_k} c^{i_1} \dots c^{i_k}, \tag{3.2}$$

где первая сумма берется по всем наборам $(i_1 \dots i_k)$ индексов с точностью до перестановок. Ради простоты мы не будем писать символ $\wedge$ внешнего произведения элементов алгебры Грассмана. Непосредственно из определения следует, что алгебра Грассмана Λ допускает разложение

$$\Lambda = \mathbb{R} \oplus \mathcal{R} = \mathbb{R} \oplus \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_1, \tag{3.3}$$

где $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_1$ — идеал нильпотентных элементов Λ, т. е. $a^2 = 0$, $\forall a \in \mathcal{R}$. Соответствующие проекции σ: $\Lambda \to \mathbb{R}$ и s: $\Lambda \to \mathcal{R}$ называются *body-* и *soul-морфизмами*.

Замечание 3.1.1. Отметим, что существует другое определение алгебры Грассмана [92], которое совпадает с приведенным выше только в случае бесконечномерного векторного пространства V [50]. Алгебра Грассмана Λ (3.1) векторного пространства V является частным случаем *внешней алгебры* $\wedge_{\mathcal{K}} Q$ градуированного $\mathcal{K}$-модуля Q. Это градуированная $\mathcal{K}$-алгебра, определяемая как тензорная алгебра $\otimes Q$ по модулю соотношений

$$q \otimes q' = (-1)^{|q||q'|} q' \otimes q.$$

Если $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ и $Q_0 = 0$, $Q_1 = V$, мы получаем алгебру Грассмана (3.1). Заметим, что наиболее приемлемыми для суперанализа считаются алгебры Аренса—Михаеля типа Грассмана [46] (см. ниже Замечание 3.3.3). □

Алгебра Грассмана конечного ранга становится банаховой градуированной алгеброй, если ее элементы (3.2) наделены нормой

$$\|a\| = \sum_{k=0} \sum_{(i_1 \dots i_k)} |a_{i_1 \dots i_k}|.$$

Пусть B — градуированное векторное пространство и Λ — алгебра Грассмана ранга N. Градуированное векторное пространство B может быть расширено до градуированного Λ-модуля

$$\Lambda B = (\Lambda B)_0 \oplus (\Lambda B)_1 = (\Lambda_0 \otimes B_0 \oplus \Lambda_1 \otimes B_1) \oplus (\Lambda_1 \otimes B_0 \oplus \Lambda_0 \otimes B_1),$$

называемого *градуированной Λ-оболочкой* B. Нас будет интересовать градуированная оболочка

$$B^{n|m} = \left(\Lambda_0^n \oplus \Lambda_1^m\right) \oplus \left(\Lambda_1^n \oplus \Lambda_0^m\right) \tag{3.4}$$

(n, m)-мерного градуированного векторного пространства $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$. Она представляет собой свободный градуированный Λ-модуль типа (n, m) и называется *суперпространством* над алгеброй Грассмана Λ.

Супервекторным пространством размерности (n, m) именуется градуированный Λ_0-модуль

$$B^{n,m} = \left(\Lambda_0^n \oplus \Lambda_1^m\right).$$

Отметим, что градуированные Λ_0-модули $B^{n|m}$ и $B^{n+m,n+m}$ изоморфны. Если специально не оговорено (см. ниже топологию Де Витта), под топологией супервекторного пространства $B^{n,m}$ будет подразумеваться его евклидова топология как $2^{N-1}(n+m)$-мерного вещественного векторного пространства.

Пусть $B^{n|m}$ — суперпространство над алгеброй Грассмана Λ. Его эндоморфизм как градуированного Λ-модуля может быть представлен квадратной $(n+m) \times (n+m)$-матрицей

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

компоненты которой являются элементами алгебры Грассмана Λ. Она называется *суперматрицей*. Говорят, что суперматрица L является

- *четной*, если матрицы L_1 и L_4 имеют четные компоненты, а матрицы L_2 и L_3 — нечетные компоненты;
- *нечетной*, если L_1 и L_4 имеют нечетные компоненты, а L_2 и L_3 — четные.

Будучи наделенными такой градуировкой, суперматрицы (3.5) образуют градуированную Λ-алгебру. В дальнейшем под суперматрицами будут обычно подразумеваться однородные суперматрицы, т. е. отвечающие определенной градуировке.

Вводится понятие *суперследа* суперматрицы (3.5):

$$\operatorname{Str} L = \operatorname{Tr} L_1 - (-1)^{|L|} \operatorname{Tr} L_4.$$

Например, если $\mathbf{1}_{n|m}$ — единичная суперматрица, ее суперслед равен

$$\operatorname{Str}(\mathbf{1}_{n|m}) = n - m.$$

Операция *супертранспонирования* суперматрицы L (3.5) определяется как суперматрица

$$L^{st} = \begin{pmatrix} L_1^t & (-1)^{|L|} L_3^t \\ -(-1)^{|L|} L_2^t & L_4^t \end{pmatrix},$$

где L^t обозначает обычное транспонирование. Справедливы соотношения

$$\operatorname{Str}\left(L^{st}\right) = \operatorname{Str} L,$$

$$(LL')^{st} = (-1)^{|L||L'|} L'^{st} L^{st}, \tag{3.6}$$

$$\operatorname{Str}(LL') = (-1)^{|L||L'|} \operatorname{Str}(L'L) \quad \text{или} \quad \operatorname{Str}([L, L']) = 0. \tag{3.7}$$

Чтобы ввести понятие супердетерминанта суперматрицы, рассмотрим обратимые суперматрицы L (3.5), отвечающие четным изоморфизмам суперпространства $B^{n,m}$. Можно показать, что суперматрица L является обратимой тогда и только тогда, когда:

- матрицы L_1 и L_4 обратимы;
- матрица $\sigma(L)$ обратима, где σ — это body-морфизм.

Обратимые суперматрицы образуют группу $GL(n|m;\Lambda)$, называемую *градуированной общей линейной группой*. *Супердетерминант* суперматрицы $L \in GL(n|m;\Lambda)$ из этой группы определяется в виде

$$\operatorname{Sdet} L = \det\left(L_1 - L_2 L_4^{-1} L_3\right)\left(\det L_4^{-1}\right).$$

Он удовлетворяет соотношениям

$$\operatorname{Sdet}\left(LL'\right) = (\operatorname{Sdet} L)(\operatorname{Sdet} L'),$$

$$\operatorname{Sdet}\left(L^{st}\right) = \operatorname{Sdet} L,$$

$$\operatorname{Sdet}\left(\exp\{L\}\right) = \exp\{\operatorname{Sdet}(L)\}.$$

§ 2. Связности на градуированных многообразиях

Следует подчеркнуть, что градуированные многообразия, строго говоря, не являются супермногообразиями (см. ниже Аксиомы 1–4 из Замечания 3.3.3). В то же время всякое градуированное многообразие определяет H^∞-супермногообразие Де Витта и обратно (см. ниже Теорему 3.3.8). Градуированные главные расслоения и связности на них описываются аналогично главным суперрасслоениям (см. § 3.5). Этот параграф посвящен связностям, которые могут быть введены на градуированных многообразиях благодаря тому факту, что градуированные функции, в отличие от суперфункций, могут быть представлены сечениями некоторого дифференцируемого расслоения (см. общую теорию градуированных многообразий в [1, 30, 100, 143]).

Определение 3.2.1. *Градуированным многообразием* размерности (n, m) называется пара $(Z, \mathcal{A})$, состоящая из n-мерного гладкого многообразия Z и пучка $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ градуированных алгебр ранга m, который удовлетворяет следующим условиям [30].

(i) Существует точная последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\sigma} C_Z^\infty \longrightarrow 0, \qquad \mathcal{R} = \mathcal{A}_1 + (\mathcal{A}_1)^2, \tag{3.8}$$

где C_Z^∞ — пучок гладких функций на Z.

(ii) $\mathcal{R}/\mathcal{R}^2$ — локально свободный C_Z^∞-модуль конечного ранга, и $\mathcal{A}$ локально изоморфен внешнему произведению $\wedge_{C_Z^\infty}\left(\mathcal{R}/\mathcal{R}^2\right)$. □

Пучок $\mathcal{A}$ называется *структурным пучком* градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$, а многообразие Z — *телом* градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$. Эта терминология мотивируется упомянутым выше соответствием между градуированными многообразиями и супермногообразиями Де Витта. Сечения пучка $\mathcal{A}$ называются *градуированными функциями*.

Градуированное многообразие является пространством градуированных локальных колец. Поэтому *морфизм градуированных многообразий* $(Z, \mathcal{A}) \to (Z'\mathcal{A}')$ определяется как

морфизм $\varphi\colon Z \to Z'$, $\Phi\colon \mathcal{A}' \to \varphi_*\mathcal{A}$ пространств локальных колец, где Φ — четный морфизм.

Непосредственно из определения следует, что градуированное многообразие $(Z, \mathcal{A})$ имеет следующую локальную структуру. Для всякой точки $z \in Z$ существует открытая окрестность U такая, что

$$\mathcal{A}(U) \cong C^\infty(U) \otimes \wedge\mathbb{R}^m. \tag{3.9}$$

Это означает, что ограничение $\mathcal{A}|_U$ структурного пучка $\mathcal{A}$ на U изоморфно пучку сечений $C^\infty_U \otimes \wedge\mathbb{R}^m$ тривиального внешнего расслоения

$$\wedge E^*_U = U \times \wedge\mathbb{R}^m \to U.$$

Поэтому U называется *областью тривиализации* градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$.

Известная теорема Батчелора [30, 32] (см. ниже Теорему 3.2.2) устанавливает, что такая структура градуированного многообразия является не только локальной, но и глобальной. Структурный пучок $\mathcal{A}$ градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ получается склеиванием локальных пучков $C^\infty_U \otimes \wedge\mathbb{R}^m$ посредством функций перехода из Предложения 1.3.1, которые образуют коцикл пучка $\mathrm{Aut}\,(\wedge\mathbb{R}^m)_\infty$ гладких отображений многообразия Z в группу $\mathrm{Aut}\,(\wedge\mathbb{R}^m)$. *Теорема Батчелора* основывается на взаимно однозначном соответствии между множествами когомологий $H^1(Z; \mathrm{Aut}\,(\wedge\mathbb{R}^m)_\infty)$ и $H^1(Z; GL(m, \mathbb{R}^m)_\infty)$.

Теорема 3.2.2. Пусть $(Z, \mathcal{A})$ — градуированное многообразие размерности (n, m). Существует векторное расслоение $E \to Z$ с m-мерным типичным слоем V такое, что структурный пучок $\mathcal{A}$ этого градуированного многообразия изоморфен пучку

$$\mathcal{A}_E = C^\infty_Z \otimes \wedge V^* \tag{3.10}$$

сечений внешнего расслоения

$$\wedge E^* = \mathbb{R} \bigoplus_Z \Big(\bigoplus_{k=1}^m \bigwedge^k E^* \Big), \tag{3.11}$$

типичным слоем которого является алгебра Грассмана $\wedge V^*$. □

Следует подчеркнуть, что изоморфизм Батчелора из Теоремы 3.2.2 не является каноническим. Поэтому можно говорить только о взаимно однозначном соответствии между классами изоморфных градуированных многообразий нечетного ранга m и классами эквивалентных m-мерных векторных расслоений над гладким многообразием Z. Тем не менее этот изоморфизм позволяет установить некоторые важные свойства градуированных многообразий.

Следствие 3.2.3. Структурный пучок $\mathcal{A}$ градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ изоморфен пучку сечений 2^m-мерного вещественного векторного расслоения $\Upsilon \to Z$ с типичным слоем $\wedge\mathbb{R}^m$ и структурной группой $\mathrm{Aut}\,(\wedge\mathbb{R}^m)$ такого, что всякая область тривиализации U градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ является также областью тривиализации векторного расслоения $\Upsilon \to Z$ с $\mathrm{Aut}\,(\wedge\mathbb{R}^m)$-значными функциями перехода. Структурная группа $\mathrm{Aut}\,(\wedge\mathbb{R}^m)$ векторного расслоения $\Upsilon \to Z$ редуцирована к группе $GL(m, \mathbb{R})$, и $\Upsilon \to Z$ изоморфно внешнему расслоению $\wedge E^* \to Z$ согласно Теореме 3.2.2. □

Следствие 3.2.4. Структурный пучок $\mathcal{A}$ градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ является тонким и, следовательно, ацикличным. □

Следствие 3.2.5. *Прямое произведение* двух градуированных многообразий $(Z, \mathcal{A})$ и $(Z', \mathcal{A}')$ — это градуированное многообразие, телом которого является $Z \times Z$, а его структурный пучок $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}'$ изоморфен тензорному произведению

$$\big(C^\infty_Z \widehat{\otimes} C^\infty_{Z'}\big) \otimes \wedge(V \oplus V')^* \tag{3.12}$$

(см. изоморфизмы (1.67) и (3.10)). □

На области тривиализации U градуированного многообразия градуированные функции принимают вид

$$f = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} f_{a_1 \dots a_k}(z) c^{a_1} \dots c^{a_k}, \tag{3.13}$$

где $f_{a_1 \dots a_k}(z)$ — гладкие функции на U, $\{c^a\}$ — базис слоев расслоения E^* и опущен символ внешнего произведения элементов c. В частности, эпиморфизм пучков σ из точной последовательности (3.8) сводится в такой записи к body-морфизму. Мы будем называть $\{c^a\}$ *локальным базисом* градуированного многообразия.

Если U' — другая область тривиализации градуированного многообразия и $U \cap U' \neq \varnothing$, функции перехода между локальными базисами градуированного многообразия имеют вид

$$c'^a = \rho^a(z^A, c^b), \tag{3.14}$$

где $\rho^a(z^A, c^b)$ — градуированные функции на $U \cap U'$. Это функции перехода расслоения $\Upsilon \to Z$ из Следствия 3.2.3. Из (3.14) легко получить соответствующий закон координатных преобразований градуированных функций (3.13). В частности, если U и U' — области тривиализации одного и того же внешнего расслоения из Теоремы 3.2.2, функции перехода (3.14) сводятся к линейным преобразованиям

$$c'^a = \rho^a_b(z^A) c^b, \tag{3.15}$$

где $\rho^a_b(z)$ — гладкие функции на $U \cap U'$.

Следуя § 1.3, чтобы определить связность на градуированном многообразии, нам нужно ввести пучок дифференцирований и пучок внешних форм структурного пучка градуированного многообразия.

Пусть $(Z, \mathcal{A})$ — градуированное многообразие. Пучок $\operatorname{Der}\mathcal{A}$ градуированных дифференцирований структурного пучка $\mathcal{A}$ определяется как подпучок эндоморфизмов пучка $\mathcal{A}$ таких, что всякое его сечение u на открытом подмножестве $U \subset Z$ является *градуированным дифференцированием* градуированной алгебры $\mathcal{A}(U)$, т. е.

$$u(ff') = u(f)f' + (-1)^{|u||f|} f u(f') \tag{3.16}$$

для произвольных однородных элементов $u \in (\operatorname{Der}\mathcal{A})(U)$ и $f, f' \in \mathcal{A}(U)$.

Лемма 3.2.6. [30]. Для любых открытых множеств $U' \subset U$ существует сюръекция

$$\operatorname{Der}(\mathcal{A}(U)) \to \operatorname{Der}(\mathcal{A}(U')).$$

□

Это означает, что

$$(\operatorname{Der}\mathcal{A})(U) = \operatorname{Der}(\mathcal{A}(U)),$$

т. е. канонический предпучок пучка градуированных дифференцирований $\operatorname{Der}\mathcal{A}$ изоморфен предпучку дифференцирований градуированных модулей $\mathcal{A}(U)$. Сечения пучка градуированных дифференцирований $\operatorname{Der}\mathcal{A}$ называются *градуированными векторными полями* на градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A})$ (или просто на Z, если структурный пучок фиксирован). Пусть U — область тривиализации градуированного многообразия и $E_U = U \times V$ — соответствующее тривиальное векторное расслоение. Можно показать, что градуированные векторные поля u на U представляют собой сечения векторного расслоения [30, 100]

$$\wedge E_U^* \underset{U}{\otimes} \left(E_U \underset{U}{\oplus} TU \right) \to U.$$

Они имеют вид

$$u = u^A \partial_A + u^a \partial_a, \tag{3.17}$$

где u^A, u^a — локальные градуированные функции, $\{\partial_a\}$ — базис, дуальный базису $\{c^a\}$, и (z^A) — координаты на подмножестве $U \subset Z$. Дифференцирования (3.17) действуют на градуированные функции $f \in \mathcal{A}_E(U)$ (3.13) по формуле

$$u(f_{a\dots b}c^a \dots c^b) = u^A \partial_A(f_{a\dots b})c^a \dots c^b + u^k f_{a\dots b}\partial_k \rfloor (c^a \dots c^b). \tag{3.18}$$

Замечание 3.2.1. С помощью дифференцирований (3.18) кольцо $\mathcal{A}(U)$ можно наделить топологией Фреше так, что изоморфизм (3.9) становится метрическим. □

Пусть U' — другая область тривиализации градуированного многообразия, помимо U, с функциями перехода (3.14). Тогда формула дифференцирования (3.18) предполагает следующий закон координатных преобразований градуированных векторных полей:

$$u'^A = u^A, \qquad u'^a = u^j \partial_j \rho^a + u^A \partial_A \rho^a,$$

где ради простоты координаты $z^A = z'^A$ остаются непреобразующимися. Если U и U' — области тривиализации одного и того же векторного расслоения E из Теоремы 3.2.2 с функциями перехода (3.15), закон координатных преобразований градуированных векторных полей становится аффинным

$$u'^A = u^A, \qquad u'^a = u^j \rho^a_j + u^A \partial_A(\rho^a_j)c^j.$$

Отсюда следует, что, если дан изоморфизм Батчелора из Теоремы 3.2.2 и $E \to Z$ — соответствующее векторное расслоение, градуированные векторные поля на Z могут быть представлены как сечения векторного расслоения $\mathcal{V}_E \to Z$, которое локально изоморфно векторному расслоению

$$\mathcal{V}_E|_U \approx \wedge E^* \underset{Z}{\otimes} \left(\mathrm{pr}_2 VE \underset{Z}{\oplus} TZ\right)\Big|_U \tag{3.19}$$

с функциями перехода

$$\begin{aligned} z'^A_{i_1\dots i_k} &= \rho^{-1a_1}_{\ \ i_1} \dots \rho^{-1a_k}_{\ \ i_k} z^A_{a_1\dots a_k}, \\ v'^i_{j_1\dots j_k} &= \rho^{-1b_1}_{\ \ j_1} \dots \rho^{-1b_k}_{\ \ j_k} \left[\rho^i_j v^j_{b_1\dots b_k} + \frac{k!}{(k-1)!} z^A_{b_1\dots b_{k-1}} \partial_A \rho^i_{b_k}\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

для послойных координат $\left(z^A_{a_1\dots a_k}, v^i_{b_1,\dots b_k}\right)$, $k = 0, \dots, m$, записанных относительно базисов $\{c^a\}$ слоев расслоения $E^* \to Z$ и дуальных голономных базисов $\{\partial_a\}$ вертикального касательного расслоения $VE \to E$ (напомним каноническое разложение $VE = E \times E$) [79, 113]. Легко проверить, что, как и должно быть, эти функции перехода образуют коцикл. Имеет место точная последовательность над Z векторных расслоений

$$0 \to \wedge E^* \underset{Z}{\otimes} \mathrm{pr}_2 VE \to \mathcal{V}_E \to \wedge E^* \underset{Z}{\otimes} TZ \to 0. \tag{3.21}$$

Замечание 3.2.2. Благодаря локальному изоморфизму (3.19) можно локально представить расслоение $\mathcal{V}_E$ как суперрасслоение Неемана—Куиллена (см. § 3.7). □

Согласно Предложению 1.3.1 и Лемме 3.2.6 пучок сечений векторного расслоения $\mathcal{V}_E \to Z$ изоморфен структурному пучку $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ градуированного многообразия. Глобальные сечения расслоения $\mathcal{V}_E \to Z$ образуют градуированный $\mathcal{A}(Z)$-модуль градуированных векторных полей на Z, который является также *супералгеброй Ли* относительно скобок

$$[u, u'] = uu' + (-1)^{|u||u'|+1} u'u. \tag{3.22}$$

В частности,

$$[\partial_A, \partial_B] = [\partial_A, \partial_a] = [\partial_a, \partial_b] = 0. \tag{3.23}$$

Замечание 3.2.3. Как было отмечено выше, дифференцирования пучка C^∞_X гладких функций на многообразии X являются сечениями касательного расслоения $TX \to X$. По аналогии можно было бы предположить, что градуированные дифференцирования пучка $\mathcal{A}$ градуированных функций на многообразии Z также могут быть представлены сечениями некоторого градуированного касательного расслоения [47]

$$(STZ, ST\mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{A}).$$

Однако закон координатных преобразований (3.20) свидетельствует, что проекция

$$\mathcal{V}_E|_U \to \mathrm{pr}_2 VE \bigoplus_Z TZ$$

не определена глобально, т. е. $\mathcal{V}_E$ не является внешним расслоением. Это означает, что пучок дифференцирований $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ не может быть структурным пучком какого-либо градуированного многообразия (см. ниже Пример 3.3.5). □

Хотя изоморфизм Батчелора не является каноническим, существует много физических моделей, где векторное расслоение E изначально фиксировано (см. §§ 3.6, 4.3). В этом случае достаточно рассмотреть пучок $\mathcal{A}_E$ (3.10) сечений внешнего расслоения (3.11) [77], ограничив его автоморфизмы теми, которые индуцированы изоморфизмами векторного расслоения $E \to Z$. Будем называть пару $(Z, \mathcal{A}_E)$ *простым градуированным многообразием*, а E — его *характеристическим расслоением*. Отметим, однако, что в [47] первый термин применяется ко всем градуированным многообразиям конечного ранга в свете теоремы Батчелора. Простое градуированное многообразие $(Z, \mathcal{A}_E)$ полностью характеризуется структурным модулем (алгеброй) $\mathcal{A}_E(Z) = \wedge E^*(Z)$ внешнего расслоения $\wedge E^*$. Поэтому $\mathcal{A}_E(Z)$ также называется *структурной алгеброй простого градуированного многообразия*.

Скажем несколько слов о морфизмах простых градуированных многообразий. Они индуцируются морфизмами соответствующих векторных расслоений. Пусть $(Z, \mathcal{A}_E)$ и $(Z', \mathcal{A}_{E'})$ — простые градуированные многообразия и $\zeta\colon E \to E'$ — линейный послойный морфизм над морфизмом многообразий $\varphi\colon Z \to Z'$. Тогда всякое сечение s^* дуального к E расслоения $E'^* \to Z'$ определяет индуцированное сечение $\zeta^* s^*$ дуального расслоения $E^* \to Z$ по формуле

$$v_z \rfloor \zeta^* s^*(z) = \zeta(v_z) \rfloor s^*(\varphi(z)), \quad \forall\, v_z \in E_z.$$

В результате мы получаем индуцированный пучок $\zeta^* \mathcal{A}_{E'}$ на Z, который представляет собой подпучок пучка $\mathcal{A}_E$ (отметим, что пара $(Z, \zeta^* \mathcal{A}_{E'})$ в общем случае не является градуированным многообразием). Тогда морфизм простых градуированных многообразий, порождаемый морфизмом расслоений φ, может быть определен в виде

$$S\zeta = (\varphi, \varphi_* \circ \zeta^*)\colon (Z, \mathcal{A}_E) \to (Z', \mathcal{A}_{E'}) \tag{3.24}$$

(сравните с (1.66)). Относительно локальных базисов $\{c^a\}$ и $\{c'^a\}$ простых градуированных многообразий $(Z, \mathcal{A}_E)$ и $(Z', \mathcal{A}_{E'})$, морфизм (3.24 принимает вид

$$S\zeta(c'^a) = \zeta^a_b(z) c^b.$$

Вернемся теперь к точной последовательности (3.21). Ее расщепление

$$\widetilde{\gamma}\colon \dot{z}^A \partial_A \mapsto \dot{z}^A (\partial_A + \widetilde{\gamma}^a_A \partial_a) \tag{3.25}$$

дается сечением

$$\widetilde{\gamma} = dz^A \otimes (\partial_A + \widetilde{\gamma}^a_A \partial_a) \tag{3.26}$$

векторного расслоения

$$T^*Z \underset{Z}{\otimes} \mathcal{V}_E \to Z$$

таким, что композиция

$$Z \xrightarrow{\widetilde{\gamma}} T^*Z \underset{Z}{\otimes} \mathcal{V}_E \longrightarrow T^*Z \underset{Z}{\otimes} \left(\wedge E^* \underset{Z}{\otimes} TZ\right) \xrightarrow{\sigma} T^*Z \underset{Z}{\otimes} TZ$$

является канонической тангенциально-значной формой $dz^A \otimes \partial_A$ на Z. Заметим, что форма $\widetilde{\gamma}$ (3.26) имеет нечетные коэффициенты. Расщепление (3.25) преобразует всякое векторное поле τ на многообразии Z в градуированное векторное поле

$$\tau = \tau^A \partial_A \mapsto \nabla_\tau = \tau^A \left(\partial_A + \widetilde{\gamma}^a_A \partial_a\right), \tag{3.27}$$

представляющее собой градуированное дифференцирование пучка $\mathcal{A}_E$ такое, что

$$\nabla_\tau(sf) = (\tau \rfloor ds)f + s\nabla_\tau(f), \quad f \in \mathcal{A}_E(U), \quad s \in C^\infty(U), \quad \forall U \subset Z.$$

Тогда в соответствии с Определением 1.3.9, обобщенным на градуированные кольца, градуированное дифференцирование ∇_τ (3.27) и расщепление (3.25) можно рассматривать как *градуированную связность* на простом градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A}_E)$ [113]. В частности, эта градуированная связность задает соответствующее горизонтальное разложение

$$u = u^A \partial_A + u^a \partial_a = u^A \left(\partial_A + \widetilde{\gamma}^a_A \partial_a\right) + \left(u^a - u^A \widetilde{\gamma}^a_A\right)\partial_a$$

всякого градуированного векторного поля u на Z.

Замечание 3.2.4. В силу изоморфизма (3.9) любая градуированная связность $\widetilde{\gamma}$ на градуированном многообразии (необязательно простом) $(Z, \mathcal{A})$, будучи ограниченной на область тривиализации U, имеет вид (3.25). Если U и U' — две области тривиализации $(Z, \mathcal{A})$ с функциями перехода (3.14), компоненты градуированной связности $\widetilde{\gamma}^a_A$ подчиняются закону преобразований

$$\widetilde{\gamma}'^a_A = \widetilde{\gamma}^b_A \partial_b \rho^a + \partial_A \rho^a. \tag{3.28}$$

Если U и U' — области тривиализации одного и того же векторного расслоения E из Теоремы 3.2.2 с функциями перехода (3.15), закон преобразований (3.28) принимает аффинную форму

$$\widetilde{\gamma}'^a_A = \rho^a_b(z)\widetilde{\gamma}^b + \partial_A \rho^a_b(z) c^b. \tag{3.29}$$

Поэтому, переходя от аффинного (3.29) к общему закону преобразований (3.28), градуированную связность (3.26) на простом градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A}_E)$ можно рассматривать и как градуированную связность на градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A}) \approx (Z, \mathcal{A}_E)$. □

Согласно Теореме 1.2.4 градуированная связность (3.25) всегда существует. Например, любая линейная связность

$$\gamma = dz^A \otimes \left(\partial_A + \gamma_A{}^a{}_b v^b \partial_a\right)$$

на характеристическом векторном расслоении $E \to Z$ порождает градуированную связность

$$\gamma_S = dz^A \otimes \left(\partial_A + \gamma_A{}^a{}_b c^b \partial_a\right) \tag{3.30}$$

на градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A}_E)$ такую, что для всякого векторного поля τ на Z и любой градуированной функции f градуированное дифференцирование $\nabla_\tau(f)$ относительно градуированной связности (3.30) совпадает с ковариантной производной f относительно линейной связности γ. Это неудивительно, поскольку градуированная связность (3.26) на самом деле представляет собой частный случай связности

на внешнем расслоении $\wedge E^*$ (3.11), которая задает дифференцирование структурного модуля $\wedge E^*(Z)$ этого расслоения. Согласно Замечанию 3.2.4, γ_S является также градуированной связностью на градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A}) \cong (Z, \mathcal{A}_E)$, но ее форма (3.30) не сохраняется при общих функциях перехода (3.28).

Градуированные связности $\widetilde{\gamma}$ (3.26) на простом градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A}_E)$ образуют аффинное пространство над линейным пространством сечений

$$\varphi = \varphi^a_A dz^A \otimes \partial_a \tag{3.31}$$

векторного расслоения

$$T^*Z \underset{Z}{\otimes} \wedge E^* \underset{Z}{\otimes} E \to Z.$$

В частности, всякая градуированная связность может быть представлена как сумма градуированной связности, сохраняющей $\mathbb{Z}$-градуировку, например, линейной связности (3.30) и какого-либо сечения φ (3.31).

Кривизна градуированной связности ∇_τ (3.27) дается выражением (1.84):

$$\begin{aligned} R(\tau,\tau') &= [\nabla_\tau, \nabla_{\tau'}] - \nabla_{[\tau,\tau']}, \\ R(\tau,\tau') &= \tau^A \tau'^B R^a_{AB} \partial_a \colon \mathcal{A}_E \to \mathcal{A}_E, \\ R^a_{AB} &= \partial_A \widetilde{\gamma}^a_B - \partial_B \widetilde{\gamma}^a_A + \widetilde{\gamma}^k_A \partial_k(\widetilde{\gamma}^a_B) - \widetilde{\gamma}^k_B \partial_k(\widetilde{\gamma}^a_A). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Она также может быть записана в виде (1.77):

$$\begin{aligned} R &\colon \mathcal{A}_E \to \Omega^2_X \otimes \mathcal{A}_E, \\ R &= \tfrac{1}{2} R^a_{AB} dz^A \wedge dz^B \otimes \partial_a. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Замечание 3.2.5. Предположим, что тело простого градуированного многообразия представляет собой расслоение $Z \to X$, наделенное послойными координатами (x^λ, z^i). Пусть

$$\gamma = \Gamma + \gamma_\lambda{}^a{}_b v^b dx^\lambda \otimes \partial_a$$

— связность на композиционном расслоении

$$E \to Z \to X,$$

которая представляет собой линейный морфизм над связностью Γ на расслоении $Z \to X$ (см. второй том [12], Предварительные сведения, Раздел 30, а также [78, 113]). Тогда имеет место мономорфизм расслоений

$$\gamma_S \colon \wedge E^* \underset{Z}{\otimes} TX \ni u^\lambda \partial_\lambda \mapsto u^\lambda \left(\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda \partial_i + \gamma_\lambda{}^a{}_b c^b \partial_a\right) \in \mathcal{V}_E$$

над Z, называемый *композиционной градуированной связностью* на $Z \to X$ [113]. Она представляет собой сечение

$$\gamma_S = \Gamma + \gamma_\lambda{}^a{}_b c^b dx^\lambda \otimes \partial_a \tag{3.34}$$

расслоения $T^*X \underset{Z}{\otimes} \mathcal{V}_E \to Z$ такое, что композиция

$$Z \xrightarrow{\gamma_S} T^*X \underset{Z}{\otimes} \mathcal{V}_E \longrightarrow T^*X \underset{Z}{\otimes} \left(\wedge E^* \underset{Z}{\otimes} TZ\right) \xrightarrow{\sigma} T^*X \underset{Z}{\otimes} TZ \longrightarrow T^*X \underset{Z}{\otimes} TX$$

является формой на Z, индуцированной канонической тангенциально-значной формой $dx^\lambda \otimes \partial_\lambda$ на X. □

Пусть снова $(Z, \mathcal{A})$ — произвольное градуированное многообразие. Дуальным к пучку дифференцирований $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ является пучок $\mathrm{Der}^*\mathcal{A}$, порождаемый морфизмами $\mathcal{A}$-модулей

$$\phi\colon \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}(U)) \to \mathcal{A}(U). \tag{3.35}$$

Сечения этого пучка естественно рассматривать как *градуированные 1-формы* на градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A})$ (или просто на Z).

В случае простого градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A}_E)$ градуированные 1-формы можно представить сечениями векторного расслоения $\mathcal{V}_E^* \to Z$, которое является $\wedge E^*$-дуальным к расслоению $\mathcal{V}_E$. Это векторное расслоение локально изоморфно векторному расслоению

$$\mathcal{V}_E^*\big|_U \approx \wedge E^* \underset{Z}{\otimes} \Big(\mathrm{pr}_2 VE^* \underset{Z}{\oplus} T^*Z\Big)\Big|_U \tag{3.36}$$

с функциями перехода

$$v'_{j_1\ldots j_k j} = \rho^{-1a_1}_{\ j_1}\cdots\rho^{-1a_k}_{\ j_k}\rho^{-1a}_{\ j}v_{a_1\ldots a_k a},$$
$$z'_{i_1\ldots i_k A} = \rho^{-1b_1}_{\ i_1}\cdots\rho^{-1b_k}_{\ i_k}\left[z_{b_1\ldots b_k A} + \frac{k!}{(k-1)!}v_{b_1\ldots b_{k-1}j}\partial_A\rho^j_{b_k}\right]$$

для послойных координат $(z_{a_1\ldots a_k A}, v_{b_1\ldots b_k j})$, $k = 0, \ldots, m$, записанных относительно дуальных базисов $\{dz^A\}$ кокасательного расслоения T^*Z и $\{dc^b\}$ расслоения $\mathrm{pr}_2V^*E = E^*$. Принимая во внимание локальный изоморфизм (3.36), расслоение $\mathcal{V}_E^*$, как и расслоение $\mathcal{V}_E$, можно рассматривать локально как суперрасслоение Неемана—Куиллена (см. ниже § 3.7). Пучок сечений векторного расслоения $\mathcal{V}_E^* \to Z$ изоморфен пучку $\mathrm{Der}^*\mathcal{A}_E$. Глобальные сечения расслоения $\mathcal{V}_E^* \to Z$ образуют градуированный $\mathcal{A}_E(Z)$-модуль градуированных 1-форм

$$\phi = \phi_A dz^A + \phi_a dc^a \tag{3.37}$$

на $(Z, \mathcal{A}_E)$. Тогда морфизм (3.35) можно трактовать как внутреннее произведение (свертку)

$$u \rfloor \phi = u^A\phi_A + (-1)^{|\phi_a|}u^a\phi_a \tag{3.38}$$

градуированных векторных полей и градуированных 1-форм.

На области тривиализации U градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ сечения пучка градуированных форм $\mathrm{Der}^*\mathcal{A}|_U$ имеют вид (3.37). Если U' — другая область тривиализации с функциями перехода (3.14), градуированные 1-формы подчиняются закону координатных преобразований

$$\phi'_a = \frac{\partial c^b\big(z^B, c'^j\big)}{\partial c'^a}\phi_b, \quad \phi'_A = \phi_A + \partial_A c^b\big(z^B, c'^j\big)\phi_b.$$

Если U и U' — области тривиализации одного и того же векторного расслоения E из Теоремы 3.2.2 с функциями перехода (3.15), закон координатных преобразований градуированных 1-форм становится аффинным

$$\phi'_a = \rho^{-1b}_{\ a}\phi_b, \quad \phi'_A = \phi_A + \rho^{-1b}_{\ a}\partial_A\big(\rho^a_j\big)\phi_b c^j.$$

Имеет место точная последовательность векторных расслоений

$$0 \to \wedge E^* \underset{Z}{\otimes} T^*Z \to \mathcal{V}_E^* \to \wedge E^* \underset{Z}{\otimes} \mathrm{pr}_2 VE^* \to 0 \tag{3.39}$$

над Z. Всякая градуированная связность $\widetilde{\gamma}$ (3.26) задает расщепление этой точной последовательности и определяет соответствующее горизонтальное разложение градуированных 1-форм

$$\phi = \phi_A dz^A + \phi_a dc^a = \big(\phi_A + \phi_a\widetilde{\gamma}^a_A\big)dz^A + \phi_a\big(dc^a - \widetilde{\gamma}^a_A dz^A\big).$$

В заключение напомним основные элементы теории градуированных внешних дифференциальных форм [77, 89, 100].

Градуированные k-формы ϕ определяются как сечения градуированного внешнего произведения $\bigwedge^k \mathrm{Der}^*\mathcal{A}$ пучка $\mathrm{Der}^*\mathcal{A}$ так, что

$$\phi \wedge \sigma = (-1)^{|\phi||\sigma|+|\phi||\sigma|}\sigma \wedge \phi. \tag{3.40}$$

В частности,

$$dx^\lambda \wedge dc^i = -dc^i \wedge dx^\lambda, \qquad dc^i \wedge dc^j = dc^j \wedge dc^i. \tag{3.41}$$

Внутреннее произведение (3.38) обобщается на градуированные внешние формы высших степеней, следуя соотношению

$$u \rfloor (\phi \wedge \sigma) = (u \rfloor \phi) \wedge \sigma + (-1)^{|\phi|+|\phi||u|}\phi \wedge (u \rfloor \sigma). \tag{3.42}$$

Градуированный внешний дифференциал d градуированных функций определяется равенством

$$u \rfloor df = u(f),$$

записанным для произвольного градуированного векторного поля u. Он обобщается на градуированные внешние формы, исходя из формулы

$$d(\phi \wedge \sigma) = (d\phi) \wedge \sigma + (-1)^{|\phi|}\phi \wedge (d\sigma), \qquad d \circ d = 0, \tag{3.43}$$

и дается координатным выражением

$$d\phi = dz^A \wedge \partial_A(\phi) + dc^a \wedge \partial_a(\phi), \tag{3.44}$$

где левые производные ∂_A, ∂_a действуют на коэффициенты градуированных форм по закону (3.18) и коммутируют с формами dz^A, dc^a. Лемма Пуанкаре также распространяется на градуированные внешние формы [30, 100].

Производная Ли градуированной внешней формы ϕ вдоль градуированного векторного поля u дается привычным выражением

$$\mathbf{L}_u\phi = u \rfloor d\phi + d(u \rfloor \phi) \tag{3.45}$$

и удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{L}_u(\phi \wedge \phi') = \mathbf{L}_u(\phi) \wedge \phi' + (-1)^{|u||\phi|}\phi \wedge \mathbf{L}_u(\phi').$$

Замечание 3.2.6. Градуированные формы можно представить как сечения внешних произведений векторного расслоения $\mathcal{V}_k^* \to Z$. Поэтому пучки градуированных форм $\bigwedge^k \mathrm{Der}^*\mathcal{A}$ являются тонкими. Они образуют тонкую резольвенту

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{A} \to \mathrm{Der}^*\mathcal{A} \to \bigwedge^2 \mathrm{Der}^*\mathcal{A} \to \cdots$$

постоянного пучка $\mathbb{R}$ на многообразии Z и составляют коцепной комплекс

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{A}(Z) \xrightarrow{d} \mathrm{Der}^*\mathcal{A}(Z) \xrightarrow{d} \left(\bigwedge^2 \mathrm{Der}^*\mathcal{A}\right)(Z) \xrightarrow{d} \cdots \tag{3.46}$$

градуированных внешних форм на Z, называемый *градуированным комплексом Де Рама*. Тогда как следствие Теоремы 1.3.8 существует изоморфизм

$$H^q(Z) = H^q(Z;\mathbb{R}) = H^q_{GR}(Z) \tag{3.47}$$

групп когомологий Де Рама $H^*(Z)$ гладких внешних форм на многообразии Z и групп когомологий $H^q_{GR}(Z)$ комплекса (3.46), называемых *градуированными группами когомологий Де Рама* [100]. □

§ 3. Суперрасслоения и суперсвязности

Суперсвязности вводятся на супервекторных расслоениях над так называемыми G-супермногообразиями (см. ниже Определение 3.3.4). Существуют две главные причины, почему именно G-супермногообразия выбираются в качестве базы супервекторных расслоений. Во-первых, в этом случае категория супервекторных расслоений эквивалентна категории локально свободных пучков конечного ранга, подобно тому как это имеет место для гладких векторных расслоений (и в отличие, например, от случая GH^{∞}-супермногообразий). Поэтому основные понятия дифференциальной геометрии можно распространить и на супервекторные расслоения. Во-вторых, дифференцирования структурного пучка G-супермногообразия образуют локально свободный пучок (в отличие опять же от G^{∞}-супермногообразий). Это тоже важно с дифференциально-геометрической точки зрения. Более того, этот пучок сам является структурным пучком некоторого G-супермногообразия, в отличие, например, от уже упоминавшегося случая градуированных многообразий (см. Замечание 3.2.3).

Начнем с изложения понятий суперфункции, супермногообразия и супервекторного расслоения (см. их детальное описание в [30]).

Суперфункции

Подобно многообразиям, супермногообразия получаются склеиванием открытых подмножеств супервекторных пространств $B^{n,m}$ посредством суперфункций перехода. Хотя рассматриваются различные классы суперфункций, все они могут быть введены единым образом.

Пусть

$$B^{n,m} = \Lambda_0^n \oplus \Lambda_1^m$$

— супервекторное пространство, где Λ — N-мерная алгебра Грассмана и $N \geqslant m$. В соответствии с разложением (3.3) любой элемент этого супервекторного пространства $q \in B^{n,m}$ может быть однозначно представлен в виде

$$q = x + y = \left(\sigma\left(x^i\right) + s\left(x^i\right)\right)e_i^0 + y^j e_j^1, \tag{3.48}$$

где $\left\{e_i^0, e_j^1\right\}$ — базис $B^{n,m}$ и $\sigma\left(x^i\right) \in \mathbb{R}$, $s\left(x^i\right) \in \mathcal{R}_0$, $y^j \in \mathcal{R}_1$. Обозначим

$$\sigma^{n,m}\colon B^{n,m} \to \mathbb{R}^n, \qquad s^{n,m}\colon B^{n,m} \to \mathcal{R}^{n,m}$$

— соответствующие body- и soul-морфизмы.

Пусть Λ' — еще одна алгебра Грассмана ранга N' $(0 \leqslant N' \leqslant N)$, рассматриваемая как подалгебра алгебры Грассмана Λ, т. е. базис $\{c^a\}$ алгебры Λ' представляет собой часть базиса $\left\{c^a, c^b\right\}$ алгебры Λ. На открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^n$ зададим Λ'-значную градуированную функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N'} \frac{1}{k!} f_{a_1 \ldots a_k}(z) c^{a_1} \ldots c^{a_k} \tag{3.49}$$

с гладкими коэффициентами $f_{a_1 \ldots a_k}(z)$, $z \in \mathbb{R}^n$. Ей сопоставляется градуированная функция $f(x)$, $x \in \left(\sigma^{n,0}\right)^{-1}(U) \subset B^{n,0}$, определяемая как формальный ряд Тейлора

$$f(\sigma(x) + s(x)) = f(\sigma(x)) + \sum_{k=0}^{N'} \frac{1}{k!}\left[\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p!} \frac{\partial^q f_{a_1 \ldots a_k}(\sigma(x))}{\partial r^{i_1} \ldots \partial r^{i_p}} s\left(x^{i_1}\right) \ldots s\left(x^{i_p}\right)\right] c^{a_1} \ldots c^{a_k}. \tag{3.50}$$

После этого вводится градуированная функция $F(q)$, $q \in (\sigma^{n,m})^{-1}(U) \subset B^{n,m}$, представляемая суммой

$$F(x+y) = \sum_{r=0}^{N} \frac{1}{r!} f_{j_1 \dots j_r}(x) y^{j_1} \dots y^{j_r}, \tag{3.51}$$

где $f_{j_1 \dots j_r}(x)$ — градуированные функции (3.50). Градуированные функции (3.51) называются *суперфункциями* на супервекторном пространстве $B^{n,m}$. Они задают пучок $S_{N'}$ градуированных алгебр ранга N' на $B^{n,m}$. Пусть $S^0_{N'}$ — подпучок этого пучка, сечениями которого являются суперфункции $f(x+y) = f(x)$ (3.50), независимые от нечетных переменных y^j. Выражение (3.51) предполагает, что для любого открытого подмножества U супервекторного пространства $B^{n,m}$ существует эпиморфизм

$$\lambda\colon S^0_{N'}(U) \otimes \wedge\mathbb{R}^m \to S_{N'}(U), \tag{3.52}$$

$$\lambda\colon \sum_{r=0}^{N} \frac{1}{r!} f_{j_1 \dots j_r}(x) \otimes \left(y^{j_1} \dots y^{j_r}\right) \to \sum_{r=0}^{N} \frac{1}{r!} f_{j_1 \dots j_r}(x) y^{j_1} \dots y^{j_r},$$

отождествляющий $\wedge\mathbb{R}^m$ с внешней алгеброй, порождаемой элементами $(y^1, \dots, y^m)$. Тогда имеет место эпиморфизм пучков

$$\lambda\colon S^0_{N'} \otimes \wedge\mathbb{R}^m \to S_{N'}, \tag{3.53}$$

где $\wedge\mathbb{R}^m$ — постоянный пучок на $B^{n,m}$.

Предложение 3.3.1. Эпиморфизм пучков (3.53) является изоморфизмом тогда и только тогда, когда

$$N - N' \geqslant m. \tag{3.54}$$

□

В этом случае представление суперфункции $F(x+y)$ в виде суммы (3.51) оказывается однозначным.

Используя представление (3.51), можно определить дифференцирование суперфункций. Пусть $f(x) \in S_{N'}(U)$ — градуированная функция на $U \subset B^{n,0}$. Так как f по определению является рядом Тейлора (3.50), ее частные производные по четным координатам x^i задаются естественным образом в виде

$$\partial_i f(x) = (\partial_i f)\big(\sigma(x) + s(x)\big) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r^i}(\sigma(x)) + \sum_{k=0}^{N'} \frac{1}{k!} \left[\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p!} \frac{\partial^{p+1} f_{a_1 \dots a_k}(\sigma(x))}{\partial r^i \partial r^{i_1} \dots \partial r^{i_p}} s\left(x^{i_1}\right) \dots s\left(x^{i_p}\right) \right] c^{a_1} \dots c^{a_k}. \tag{3.55}$$

Это выражение для четных частных производных распространяется и на суперфункции F на $B^{n,m}$, даже когда их представление в виде суммы (3.51) не является однозначным.

Трудность возникает с определением нечетных частных производных суперфункций. Нечетная производная вводится как образ $\mathbb{Z}$-градуированного дифференцирования порядка -1 внешней алгебры $\wedge\mathbb{R}^m$ относительно морфизма (3.52), т. е.

$$\frac{\partial}{\partial y^j}\big(\lambda(f \otimes y)\big) = \lambda\big(f \otimes \partial_j(y)\big), \quad y \in \wedge\mathbb{R}^m.$$

Это определение имеет смысл только если λ — изоморфизм, т. е. когда выполняется неравенство (3.54). В противном случае существует ненулевой элемент $f \otimes y$ такой, что

$$\lambda(f \otimes y) = 0,$$

тогда как

$$\lambda\big(f \otimes \partial_j(y)\big) \neq 0.$$

Например, если $N - N' = m - 1$, таковым является элемент $f \otimes \big(y^1 \dots y^m\big)$.

Приведем основные классы суперфункций, следуя терминологии из книги [30].

- Если $N' = 0$, пучок $S_{N'}$ совпадает с пучком $\mathcal{H}^\infty$ так называемых H^∞-*суперфункций*, введенных впервые М. Батчелором [33] и Б. Де Виттом [58]. Эти суперфункции (3.51) имеют вид

$$F(x+y) = \sum_{r=0}^{N} \frac{1}{r!}\left[\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p f_{j_1 \dots j_r}(\sigma(x))}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} s\big(x^{i_1}\big) \dots s\big(x^{i_r}\big)\right] y^{j_1} \dots y^{j_r}. \tag{3.56}$$

- Если $N' = N$, мы имеем дело с G^∞-*суперфункциями*, введенными А. Роджерс [134]. В этом случае неравенство (3.54) справедливо только для $m = 0$.
- Если условие (3.54) выполняется, суперфункции называются GH^∞-*суперфункциями*. Они включают в себя в качестве частного случая и упомянутые ранее H^∞-суперфункции.

Суперфункции всех приведенных выше типов называются *гладкими суперфункциями*.

Обозначим $\mathcal{GH}_{N'}$ пучок GH^∞-суперфункций на супервекторном пространстве $B^{n,m}$ и введем пучок градуированных Λ-алгебр

$$\mathcal{G}_{N'} = \mathcal{GH}_{N'} \otimes \Lambda, \tag{3.57}$$

где алгебра Грассмана Λ рассматривается как градуированная алгебра над алгеброй Λ'. Пучок $\mathcal{G}_{N'}$ (3.57) обладает следующими важными свойствами [30].

- Существует *оценочный морфизм*

$$\begin{aligned} &\delta\colon \mathcal{G}_{N'} \to C^\infty_{B^{n,m}}, \\ &\delta\colon F \otimes a \mapsto Fa, \quad F \in \mathcal{GH}_{N'}, \quad a \in \Lambda, \end{aligned} \tag{3.58}$$

  где $C^\infty_{B^{n,m}} \cong C^0_{B^{n,m}} \otimes \Lambda$ — пучок непрерывных Λ-значных функций на $B^{n,m}$. Этот морфизм позволяет приписать значения из алгебры Грассмана Λ росткам сечений пучка $\mathcal{G}_{N'}$. Его образ изоморфен пучку $\mathcal{G}^\infty$ G^∞-суперфункций на $B^{n,m}$.
- Для любых двух целых неотрицательных чисел N' и N'', удовлетворяющих условию (3.54), существует канонический изоморфизм пучков градуированных Λ-алгебр $\mathcal{G}_{N'}$ и $\mathcal{G}_{N''}$. Поэтому можно определить канонический пучок $\mathcal{G}_{n,m}$ градуированных Λ-алгебр на супервекторном пространстве $B^{n,m}$. Его сечения представляются в виде тензорных произведений $F \otimes a$ H^∞-суперфункций F (3.56) и элементов алгебры Грассмана $a \in \Lambda$. Они называются *G-суперфункциями*, а $\mathcal{G}_{n,m}$ — *каноническим пучком G-суперфункций*.
- Пучок $\operatorname{Der}\mathcal{G}_{n,m}$ градуированных дифференцирований пучка $\mathcal{G}_{n,m}$ является локально свободным пучком $\mathcal{G}_{n,m}$-модулей ранга (n,m) на супервекторном пространстве $B^{n,m}$. На всяком открытом подмножестве $U \subset B^{n,m}$ этого суперпространства $\mathcal{G}_{n,m}(U)$-модуль $\operatorname{Der}\mathcal{G}_{n,m}(U)$ градуированных дифференцирований порождается операторами дифференцирования $\partial/\partial x^i$, $\partial/\partial y^j$, которые действуют на G-суперфункции из $\mathcal{G}_{n,m}(U)$ по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(F \otimes a) = \frac{\partial F}{\partial x^i} \otimes a, \qquad \frac{\partial}{\partial y^j}(F \otimes a) = \frac{\partial F}{\partial y^j} \otimes a. \tag{3.59}$$

Супермногообразия

Перейдем теперь к определению супермногообразия.

Определение 3.3.2. Паракомпактное топологическое пространство M называется (n, m)-мерным *гладким супермногообразием* если оно допускает атлас

$$\Psi = \{U_\zeta, \phi_\zeta\}, \qquad \phi_\zeta \colon U_\zeta \to B^{n,m},$$

такой, что функции перехода $\phi_\zeta \circ \phi_\xi^{-1}$ — супергладкие морфизмы. □

Ясно, что гладкое супермногообразие размерности (n, m) является также гладким вещественным многообразием размерности $2^{N-1}(n+m)$.

Если суперфункции перехода являются H^∞-, G^∞- или GH^∞-суперфункциями, говорят соответственно о H^∞-, G^∞- или GH^∞-супермногообразиях. Согласно Предложению 1.3.2, распространенному на пространства градуированных локальных колец, приведенное выше определение эквивалентно следующему.

Определение 3.3.3. Гладкое супермногообразие — это пространство локальных колец (M, S), которое локально изоморфно $(B^{n,m}, \mathcal{S})$, где $\mathcal{S}$ — один из пучков гладких суперфункций на $B^{n,m}$ упомянутого выше типа. Пучок S называется *структурным пучком* супермногообразия, а гладкое многообразие M — *базовым пространством супермногообразия*. □

Под морфизмом гладких супермногообразий понимается их морфизм (φ, Φ) как пространств градуированных локальных колец, где Φ — четный градуированный морфизм. В частности, всякий морфизм $\varphi \colon M \to M'$ базовых пространств супермногообразий порождает морфизм гладких супермногообразий $(\varphi, \Phi = \varphi^*)$. Таким образом, выбор типа суперфункций на гладком супермногообразии определяет класс морфизмов этого супермногообразия.

Следует, однако, подчеркнуть, что гладкие супермногообразия обладают рядом серьезных недостатков.

Поскольку производные G^∞-суперфункций относительно нечетных переменных не определены, пучок дифференцирований пучка G^∞-суперфункций не является локально свободным и функции перехода G^∞-касательного расслоения не являются матрицами Якоби (см. ниже Пример 3.3.5). Тем не менее, любое G-супермногообразие (см. ниже Определение 3.3.4) имеет базовое G^∞-супермногообразие (см. ниже Замечание 3.3.2).

В случае GH^∞-супермногообразий мы сталкиваемся с тем фактом, что пространство значений GH^∞-функций может меняться от точки к точке, поскольку алгебра Грассмана Λ ранга N не является свободным модулем относительно своей подалгебры Λ' ранга N'. Это обстоятельство приводит к трудностям с определением GH^∞-супервекторных расслоений, если следовать конструкции гладких векторных расслоений из Примера 1.3.4. Поэтому супервекторные расслоения обычно рассматриваются в категории G-супермногообразий.

Введя канонический пучок $\mathcal{G}_{n,m}$ градуированных Λ-алгебр на супервекторном пространстве $B^{n,m}$, G-супермногообразие можно определить следующим образом.

Определение 3.3.4. *G-Супермногообразием* размерности (n, m) называется пространство градуированных локальных Λ-колец (M, G_M), удовлетворяющее следующим условиям:

- M — паракомпактное топологическое пространство;
- (M, G_M) локально изоморфно $\left(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}\right)$;
- существует морфизм пучков градуированных Λ-алгебр $\delta \colon G_M \to C_M^\Lambda$, где $C_M^\Lambda \cong C_M^0 \otimes \Lambda$ — пучок непрерывных Λ-значных функций на M и δ локально изоморфен оценочному морфизму (3.58).

□

Пример 3.3.1. Тройка $(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}, \delta)$, где δ — оценочный морфизм (3.58), называется *стандартным супермногообразием.* □

Замечание 3.3.2. Любое GH^∞-супермногообразие (M, GH^∞_M) со структурным пучком GH^∞_M естественным образом расширяется до G-супермногообразия $(M, GH^\infty_M \otimes \Lambda)$. Всякое G-супермногообразие определяет *базовое* G^∞*-супермногообразие* $(M, \delta(G_M))$, где $\delta(G_M) = G^\infty_M$ — пучок G^∞-суперфункций на M. □

Морфизмы G-супермногообразий — это морфизмы пространств градуированных локальных колец. В частности, всякий морфизм (φ, φ^*) GH^∞-супермногообразий

$$(M, GH^\infty_M) \to (M', GH^\infty_{M'})$$

естественным образом продолжается до морфизма (φ, Φ) G-супермногообразий:

$$(M, GH^\infty_M) \otimes \Lambda \to (M', GH^\infty_{M'} \otimes \Lambda),$$

где $\Phi(F \otimes a) = \varphi^*(F) \otimes a$.

Как и в случае гладких супермногообразий, базовое пространство M G-супермногообразия (M, G_M) наделено структурой вещественного гладкого многообразия размерности $2^{N-1}(n+m)$, а морфизмы G-супермногообразий — это морфизмы гладких базовых многообразий. Тем не менее, неизоморфные G-супермногообразия могут иметь диффеоморфные базовые гладкие многообразия (см. ниже).

Аналогично свойствам пучка $\operatorname{Der}\mathcal{G}_{n,m}$ градуированных дифференцирований канонического пучка G-суперфункций пучок $\operatorname{Der} G_M$ градуированных дифференцирований структурного пучка G-супермногообразия является локально свободным с локальным базисом $\{\partial/\partial x^i,\ \partial/\partial y^j\}$. *Суперкасательное пространство* $T_q(M, G_M)$ к G-супермногообразию (M, G_M) в точке $q \in M$ определяется как градуированный Λ-модуль градуированных Λ-значных дифференцирований стебля G_{Mq} пучка G_M в точке $q \in M$. Оно изоморфно фактору $\operatorname{Der} G_{Mq}/(\mathcal{M}_q \cdot \operatorname{Der} G_{Mq})$, где $\mathcal{M}_q \subset G_{Mq}$ — подмодуль ростков сечений f пучка G_M, обращающихся в 0 в точке q, т. е. $\delta(f)(q) = 0$. Базисными элементами суперкасательного пространства $T_q(M, G_M)$ являются операторы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q (s_q) = \frac{\partial s}{\partial x^i}(q), \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q (s_q) = \frac{\partial s}{\partial y^j}(q), \qquad \forall\, s \in G_{Mq}.$$

Для всякого открытого подмножества U супервекторного пространства $B^{n,m}$ пространство $\mathcal{G}_{n,m}(U)$ может быть наделено топологией, превращающей его в алгебру Фреше. При этом существуют изометрические изоморфизмы

$$\mathcal{G}_{n,m}(U) \cong \mathcal{H}^\infty(U) \otimes \Lambda \cong C^\infty\big(\sigma^{n,m}(U)\big) \otimes \Lambda \otimes \wedge\mathbb{R}^m \cong C^\infty\big(\sigma^{n,m}(U)\big) \otimes \wedge\mathbb{R}^{N+m}. \quad (3.60)$$

Замечание 3.3.3. Изложим коротко аксиоматический подход к супермногообразиям, который при различном выборе градуированных алгебр позволяет получить все известные типы супермногообразий как частный случай так называемых R^∞-супермногообразий [30, 31, 46]. Этот подход развивает теорию R-супермногообразий М. Ротштейна [135] (см. детальное обсуждение в [30, 31]). Отметим, что в общем случае R^∞-супермногообразия вводятся над уже упоминавшимися алгебрами Аренса—Михаеля типа Грассмана [46]. Мы не будем подробно останавливаться на топологических аспектах определения этих супермногообразий, хотя именно топологические свойства отличают R^∞-супермногообразия от R-супермногообразий М. Ротштейна (см. ниже).

Пусть Λ — вещественная градуированная алгебра вышеназванного типа (для простоты понимания читатель может считать, что, как и ранее, Λ — алгебра Грассмана). *Суперпространством* над Λ называется тройка $(M, \mathcal{A}, \delta)$, где M — паракомпактное топологическое пространство, $\mathcal{A}$ — пучок градуированных Λ-алгебр на M и δ: $\mathcal{A} \to C^\Lambda_M$ —

оценочный морфизм в пучок C^∞_M непрерывных Λ-значных функций на топологическом пространстве M. Сечения пучка $\mathcal{A}$ называются *R^∞-суперфункциями*. Рассмотрим градуированный идеал $\mathcal{M}_q$ стебля $\mathcal{A}_q$, $q \in M$, образованного ростками R^∞-суперфункций f, обращающихся в 0 в точке q, т. е. таких, что $\delta(f)(q) = 0$.

R^∞-Супермногообразием размерности (n, m) называется суперпространство $(M, \mathcal{A}, \delta)$, удовлетворяющее следующим четырем аксиомам [46].

Аксиома 1. Градуированный пучок $\mathrm{Der}^*\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$-дуальный к пучку дифференцирований пучка $\mathcal{A}$, является градуированным локально свободным пучком $\mathcal{A}$-модулей ранга (n, m). Всякая точка $q \in M$ имеет открытую окрестность U вместе с сечениями $x^1, \ldots, x^n \in \mathcal{A}(U)_0$, $y^1, \ldots, y^m \in \mathcal{A}(U)_1$ такими, что $\{dx^i, dy^j\}$ — градуированный базис модуля $\mathrm{Der}^*\mathcal{A}(U)$ над $\mathcal{A}(U)$.

Аксиома 2. Если такая координатная карта задана, сопоставление

$$q \to (\delta(x^i), \delta(y^j))$$

определяет гомеоморфизм U на открытое подмножество в $B^{n,m}$.

Аксиома 3. Для любой точки $q \in M$ идеал $\mathcal{M}_q$ конечно порожден.

Аксиома 4. Для всякого открытого подмножества $U \subset M$ топологическая алгебра $\mathcal{A}(U)$ является отделимой и полной.

Отметим, что *R-супермногообразие* над градуированной коммутативной банаховой алгеброй, удовлетворяющее Аксиоме 4, является R^∞-супермногообразием.

В частности, стандартное супермногообразие из Примера 3.3.1 является R^∞-супермногообразием. Более того, в случае конечной алгебры Грассмана Λ категория R^∞-супермногообразий и категория G-супермногообразий эквивалентны. □

Пусть (M, G_M) — G-супермногообразие. Как было отмечено, оно удовлетворяет Аксиомам 1–4. Сечения u пучка $\mathrm{Der}\, G_M$ градуированных дифференцирований структурного пучка G-супермногообразия называются *супервекторными полями* на G-супермногообразии (M, G_M), а сечения ϕ дуального пучка $\mathrm{Der}^* G_M$ — *1-суперформами* на (M, G_M). На координатной карте $(q^i) = (x^i, y^j)$ на $U \subset M$ супервекторные поля и 1-суперформы записываются в виде

$$u = u^i \partial_i, \qquad \phi = \phi_i dq^i,$$

где коэффициенты u^i и ϕ_i являются G-суперфункциями на U. Дифференциальное исчисление на супервекторных полях и суперформах характеризуется теми же формулами (3.22), (3.38)–(3.45), что и в случае градуированных векторных полей и градуированных форм.

Остановимся на когомологиях G-супермногообразий. Для данного G-супермногообразия (M, G_M) обозначим $\Omega^*_{\Lambda M} = \Omega^*_M \otimes \Lambda$ пучки гладких Λ-значных внешних форм на его базовом пространстве M. Эти пучки являются тонкими и образуют тонкую резольвенту

$$0 \to \Lambda \to C^\infty_M \otimes \Lambda \to \Omega^1_M \otimes \Lambda \to \ldots$$

постоянного пучка Λ на M. Рассмотрим соответствующий комплекс Де Рама Λ-значных внешних форм на M:

$$0 \to \Lambda \to C^\infty_\Lambda(M) \to \Omega^1_\Lambda(M) \to \ldots .$$

Согласно Теореме 1.3.8 группы когомологий $H^*_\Lambda(M)$ этого комплекса изоморфны группам когомологий $H^*(M; \Lambda)$ с коэффициентами в постоянном пучке Λ на M и, следовательно, связаны с группами когомологий Де Рама $H^*(M)$ вещественных внешних форм на гладком многообразии M соотношениями

$$H^*_\Lambda(M) = H^*(M; \Lambda) = H^*(M) \otimes \Lambda. \tag{3.61}$$

Таким образом, группы когомологий Λ-значных форм не несут какой-либо информации о структуре G-супермногообразия на M.

Рассмотрим теперь когомологии внешних суперформ. Пучки $\bigwedge^k \mathrm{Der}^* G_M$ внешних суперформ образуют последовательность

$$0 \to \Lambda \to G_M \to \mathrm{Der}^* G_M \to \dots . \tag{3.62}$$

Можно показать, что лемма Пуанкаре распространяется на суперформы [45], и эта последовательность точна. Однако структурный пучок G-супермногообразия в общем случае не является ациклическим. Поэтому точная последовательность (3.62) не образует резольвенту постоянного пучка Λ на M (заметим, что используемая нами терминология несколько отлична от терминологии в книге [30]). Следовательно, группы когомологий $H^*_S(M)$ комплекса Де Рама внешних суперформ не совпадают с описанными выше группами когомологий $H^*(M;\Lambda)$ и не сводятся к обычным группам когомологий Де Рама $H^*(M)$ гладкого многообразия M. В частности, группы когомологий $H^*_S(M)$ не являются топологическими инвариантами, но они инвариантны относительно G-изоморфизмов G-супермногообразий.

Предложение 3.3.5. Структурный пучок $\mathcal{G}_{n,m}$ стандартного G-супермногообразия $\left(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}\right)$ ацикличен, т.е.

$$H^{k>0}(B^{n,m}; \mathcal{G}_{n,m}) = 0.$$

□

Доказательство этого утверждения основывается на изоморфизме (3.60) и некоторых когомологических конструкциях [30, 46].

Супермногообразия Де Витта

Остановимся на особом классе супермногообразий, называемых супермногообразиями Де Витта. Их определение предполагает задание на суперпространстве $B^{n,m}$ особой топологии, называемой *топологией Де Витта*, которая слабее обычно используемой евклидовой топологии. Это слабейшая топология такая, что body-морфизм

$$\sigma^{n,m}\colon B^{n,m} \to \mathbb{R}^n$$

остается непрерывным. Открытые подмножества в топологии Де Витта имеют вид $V \times \mathcal{R}^{n,m}$, где V — открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$. Ясно, что эта топология не является отделимой.

Определение 3.3.6. Гладкое многообразие (соответственно G-супермногообразие, R^∞-супермногообразие) называется *супермногообразием Де Витта*, если оно допускает атлас такой, что локальные морфизмы $\phi_\zeta\colon U_\zeta \to B^{n,m}$ в Определении 3.3.2 (соответственно Определении 3.3.4, Аксиоме 2) являются непрерывными в топологии Де Витта, т.е. $\phi_\zeta(U_\zeta) \subset B^{n,m}$ — открытые подмножества в топологии Де Витта. □

В частности, базовое G^∞-супермногообразие для G-супермногообразия Де Витта тоже является супермногообразием Де Витта, и то же самое можно сказать про G-расширение GH^∞-супермногообразия Де Витта.

Пусть (U_ζ, ϕ_ζ) — атлас супермногообразия Де Витта из Определения 3.3.6. Нетрудно установить, что его функции перехода $\phi_\zeta \circ \phi_\xi^{-1}$ сохраняют расслоение

$$\dot{\sigma}^{n,m}\colon B^{n,m} \to \mathbb{R}^n,$$

слой которого $(\sigma^{n,m})^{-1}(z)$ над $z \in \mathbb{R}^n$ наделен наислабейшей топологией, открытыми множествами в которой являются только пустое множество $\varnothing$ и сам слой $(\sigma^{n,m})^{-1}(z)$. Это приводит к следующему утверждению.

Предложение 3.3.7. Всякое многообразие Де Витта представляет собой локально тривиальное топологическое расслоение

$$\sigma_M\colon M \to Z_M \tag{3.63}$$

над n-мерным гладким многообразием Z_M с типичным слоем $\mathcal{R}^{n,m}$. □

База Z_M расслоения (3.63) называется *телом* супермногообразия Де Витта, а проекция σ_M — *body-морфизмом* супермногообразия Де Витта.

Как уже упоминалось, имеет место важное соответствие между H^∞-супермногообразиями Де Витта и изучавшимися в предыдущем параграфе градуированными многообразиями. Это соответствие базируется на следующих фактах.

- Структурный пучок $\mathcal{A}$ градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ по определению локально изоморфен пучку $C^\infty_U \otimes \wedge\mathbb{R}^m$ на областях тривиализации $U \subset Z$ градуированного многообразия.
- Пусть $\left(M, H^\infty_M\right)$ — это H^∞-супермногообразие Де Витта и σ — body-морфизм (3.63). Из Предложения 3.3.1 следует, что образ $\sigma_*\left(H^\infty_M\right)$ на Z_M структурного пучка H^∞_M многообразия Де Витта локально изоморфен пучку $C^\infty_{Z_M} \otimes \wedge\mathbb{R}^m$. Выражение (3.56) описывает этот изоморфизм в явном виде.
- Более того, пространства $\left(M, H^\infty_M\right)$ и $\left(Z_M, \sigma\left(H^\infty_M\right)\right)$ задают один и тот же элемент в множестве когомологий $H^1\left(Z_M; \mathrm{Aut}\left(\wedge\mathbb{R}^m\right)_\infty\right)$.

Тем самым мы приходим к следующей Теореме [30, 33].

Теорема 3.3.8. Если $\left(M, H^\infty_m\right)$ — это H^∞-супермногообразие Де Витта, тогда пара $\left(Z_M, \sigma_*\left(H^\infty_M\right)\right)$ является градуированным многообразием. Обратно, для любого градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ существует H^∞-супермногообразие Де Витта, тело которого совпадает с многообразием Z, а body-морфизм $\sigma_*\left(H^\infty_M\right)$ его структурного пучка изоморфен структурному пучку $\mathcal{A}$ этого градуированного многообразия. □

Следствие 3.3.9. В силу Теоремы Батчелора 3.2.2 и Теоремы 3.3.8 существует взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных H^∞-супермногообразий Де Витта нечетного ранга m с телом Z и классами эквивалентности m-мерных векторных расслоений над Z. □

Этот результат распространяется также на GH^∞-, G^∞- и G-супермногообразия Де Витта.

Остановимся еще коротко на G-супермногообразиях Де Витта.

Предложение 3.3.10. [30, 46]. Структурный пучок G-супермногообразия Де Витта (M, G_M) является ацикличным, и то же самое можно сказать о локально свободных пучках G_M-модулей. □

Предложение 3.3.11. [132]. Группы когомологий $H^*_\Lambda(M)$ комплекса Де Рама внешних суперформ на G-супермногообразии Де Витта (M, G_M) изоморфны группам когомологий Де Рама (3.61) Λ-значных внешних форм на его теле Z_M, т. е.

$$H^*_\Lambda(M) = H^*(Z_M) \otimes \Lambda. \tag{3.64}$$

□

Эти результаты основываются на том факте, что структурный пучок G_M G-супермногообразия на его базовом пространстве M, наделенном топологией Де Витта, является тонким, хотя и необязательно ацикличным, поскольку топология Де Витта не паракомпактна. Тем не менее, можно показать, что его образ $\sigma_*(G_M)$ на теле Z_M является тонким и ацикличным. Тогда Предложения 1.3.7 и 3.3.5 ведут к Предложению 3.3.10. В частности, пучки внешних суперформ на G-супермногообразии Де Витта

ацикличны. Они образуют резольвенту постоянного пучка Λ на M, и мы получаем изоморфизмы групп когомологий

$$H^*_\Lambda(M) = H^*(M;\Lambda) = H^*(M)\otimes\Lambda.$$

Поскольку типичный слой расслоения $M \to Z_M$ является стягиваемым, тогда $H^*(M) = H^*(Z_M)$, что и приводит к изоморфизмам (3.64).

Супервекторные расслоения

Как уже отмечалось, мы будем рассматривать супервекторные расслоения в категории G-супермногообразий [30].

Начнем с определения прямого произведения двух G-супермногообразий. Пусть $\left(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}\right)$ и $\left(B^{r,s}, \mathcal{G}_{r,s}\right)$ — два стандартных супермногообразия из Примера 3.3.4. Для любых двух открытых подмножеств $U \subset B^{n,m}$ и $V \subset B^{r,s}$ рассмотрим предпучок

$$U \times V \to \mathcal{G}_{n,m}(U) \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{G}_{r,s}(V), \tag{3.65}$$

где $\widehat{\otimes}$ — топологическое тензорное произведение модулей (см. Замечание 1.1.8). Используя изоморфизм (3.60), легко установить, что структурный пучок $\mathcal{G}_{n+r,m+s}$ стандартного супермногообразия $B^{n+r,m+s}$ изоморфен пучку, порождаемому предпучком (3.65). Эта конструкция следующим образом обобщается на произвольное G-супермногообразие.

Предложение 3.3.12. Пусть (M, G_M) и $(M', G_{M'})$ — два G-супермногообразия размерностей (n, m) и (r, s) соответственно. Их *прямое произведение* $(M, G_M)\times(M', G_{M'})$ определяется как пространство локальных градуированных колец $\left(M\times M', G_M \,\widehat{\otimes}\, G_{M'}\right)$, где $G_M \,\widehat{\otimes}\, G_{M'}$ — пучок, порождаемый предпучком

$$\begin{aligned} &U \times U' \to G_M(U) \,\widehat{\otimes}\, G_{M'}(U'), \\ &\delta\colon G_M(U) \,\widehat{\otimes}\, G_{M'}(U') \to C^\infty_{\sigma(U)} \,\widehat{\otimes}\, C^\infty_{\sigma(U')} = C^\infty_{\sigma_M(U)\times\sigma_M(U')}, \end{aligned} \qquad U \subset M,\ \ U' \subset M'.$$

Это прямое произведение является G-супермногообразием размерности $(n+r, m+s)$. □

Более того, заданы эпиморфизмы

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}_1\colon (M, G_M) \times (M', G_{M'}) \to (M, G_M), \\ &\mathrm{pr}_2\colon (M, G_M) \times (M', G_{M'}) \to (M', G_{M'}). \end{aligned}$$

Соответственно, сечение, например, расслоения pr_1 на открытом подмножестве $U \subset M$ определяется как морфизм G-супермногообразий

$$s_U\colon (U, G_M|_U) \to (M, G_M) \times (M', G_{M'})$$

такой, что $\mathrm{pr}_1 \circ s_U$ — это тождественное преобразование G-супермногообразия $(U, G_M|_U)$. Сечения s_U для всех открытых подмножеств $U \subset M$ базового пространства G-супермногообразия M порождают пучок на M, который необходимо наделить соответствующей градуированной G_M-структурой. В этой связи напомним, что в случае гладкого векторного расслоения над многообразием X пучок его сечений является пучком C^∞_X-модулей (см. Пример 1.3.4).

Для этой цели рассмотрим прямое произведение

$$(M, G_M) \times \left(B^{r|s}, \mathcal{G}_{r|s}\right), \tag{3.66}$$

где $B^{r|s}$ — градуированная оболочка (3.4). Поскольку Λ_0-модули $B^{r|s}$ и $B^{r+s,r+s}$ изоморфны, суперпространство $B^{r|s}$ имеет естественную структуру $(r+s, r+s)$-мерного G-супермногообразия. Так как $B^{r|s}$ — свободный градуированный Λ-модуль ранга (r, s), пучок $S^{r|s}_M$ сечений расслоения

$$(M, G_M) \times \left(B^{r|s}, \mathcal{G}_{r|s}\right) \to (M, G_M) \tag{3.67}$$

имеет структуру пучка свободных градуированных G_M-модулей ранга (r, s). Обратно, если даны G-супермногообразие (M, G_M) и пучок S свободных градуированных G_M-модулей ранга (r, s) на M, существует прямое произведение G-супермногообразий (3.66) такое, что S изоморфен пучку сечений расслоения (3.67).

Перейдем теперь непосредственно к определению супервекторного расслоения над G-супермногообразием. Подобно случаю гладких векторных расслоений (см. Пример 1.3.4), можно потребовать, чтобы категория супервекторных расслоений над G-супермногообразиями была эквивалентна категории локально свободных градуированных пучков на G-супермногообразиях. Поэтому мы ограничимся рассмотрением локально тривиальных *G-суперрасслоений* с типичным слоем $B^{r|s}$.

Определение 3.3.13. *Супервекторным расслоением* над G-супермногообразием (M, G_M) с типичным слоем $(B^{r|s}, \mathcal{G}_{r|s})$ называется пара $((Y, G_Y), \pi)$, состоящая из G-супермногообразия (Y, G_Y) и эпиморфизма G-супермногообразий

$$\pi\colon (Y, G_Y) \to (M, G_M) \tag{3.68}$$

таких, что M допускает открытое покрытие $\{U_\zeta\}$ вместе с множеством локальных изоморфизмов G-супермногообразий

$$\psi_\zeta\colon \left(\pi^{-1}(U_\zeta), G_Y|_{\pi^{-1}(U_\zeta)}\right) \to \left(U_\zeta, G_M|_{U_\zeta}\right) \times \left(B^{r|s}, \mathcal{G}_{r|s}\right).$$

□

Ясно, что сечения супервекторного расслоения (3.68) порождают пучок локально свободных градуированных G_M-модулей. Обратно, справедливо следующее утверждение [30].

Предложение 3.3.14. Для любого пучка S локально свободных градуированных G_M-модулей ранга (r, s) на G-супермногообразии (M, G_M) существует супервекторное расслоение над (M, G_M) такое, что S изоморфен пучку его сечений. □

Пучок S из Предложения 3.3.14 называется *структурным пучком* супервекторного расслоения. Слоем Y_q, $q \in M$, этого супервекторного расслоения является фактор

$$S_q/\mathcal{M}_q \cong S^{r|s}_{Mq}/\left(\mathcal{M}_q \cdot S^{r|s}_{Mq}\right) \cong B^{r|s}$$

стебля S_q по подмодулю $\mathcal{M}_q$ ростков $s \in S_q$ таких, что $\delta(f)(q) = 0$. Этот слой представляет собой градуированный Λ-модуль, изоморфный $B^{r|s}$. Он наделен структурой стандартного супермногообразия.

Замечание 3.3.4. Доказательство Предложения 3.3.14 основывается на том факте, что, если $\rho_{\zeta\xi}$ — функции перехода пучка S, их оценки

$$g_{\zeta\xi} = \delta(\rho_{\zeta\xi}) \tag{3.69}$$

задают морфизмы $U_\zeta \cap U_\xi \to GL(r|s; \Lambda)$ и образуют коцикл пучка G^∞-морфизмов M в градуированную общую линейную группу $GL(r|s; \Lambda)$. Таким образом, мы приходим к понятию *G^∞-супервекторного расслоения*. Его определение повторяет Определение 3.3.13, если заменить G-супермногообразия и их морфизмы на G^∞-супермногообразия и их морфизмы. Более того, базовое G^∞-супермногообразие супервекторного расслоения (см. Замечание 3.3.2) является G^∞-супервекторным расслоением, функции перехода которого $g_{\zeta\xi}$ связаны с функциями перехода супервекторного расслоения посредством оценочных морфизмов (3.69) и представляют собой $GL(r|s; \Lambda)$-значные функции перехода. □

Поскольку категория супервекторных расслоений над G-супермногообразием (M, G_M) эквивалентна категории локально свободных пучков градуированных G_M-модулей, можно ввести стандартные операции прямой суммы, тензорного произведения и т. д. супервекторных расслоений.

Как и векторные расслоения, супервекторные расслоения имеют глобальное нулевое сечение. Всякое сечение супервекторного расслоения π (3.68), ограниченное на область тривиализации

$$(U, G_M|_U) \times \left(B^{r|s}, \mathcal{G}_{r|s}\right), \tag{3.70}$$

имеет вид $s = s^a(q)\epsilon_a$, где $\{\epsilon_a\}$ — базис Λ-модуля $B^{r|s}$, а $s^a(q)$ — G-суперфункции на U. Если U' — другая область тривиализации этого супервекторного расслоения, функции перехода

$$s'^b(q)\epsilon'_b = s^a(q)h^b{}_a(q)\epsilon_b, \qquad q \in U \cap U', \tag{3.71}$$

задаются $(r+s)\times(r+s)$-матрицами h, компоненты которых $h^b{}_a(q)$ являются G-суперфункциями на $U \cap U'$. Эти матрицы можно интерпретировать как сечения супервекторного расслоения над $U \cap U'$ с типичным слоем — градуированной общей линейной группой $GL(r|s;\Lambda)$.

Пример 3.3.5. Пусть дано G-супермногообразие (M, G_M). Рассмотрим локально свободный градуированный пучок $\mathrm{Der}\, G_M$ градуированных дифференцирований его структурного пучка G_M. В соответствии с Предложением 3.3.14 существует супервекторное расслоение $T(M, G_M)$, называемое *суперкасательным расслоением*, пучок сечений которого изоморфен пучку дифференцирований $\mathrm{Der}\, G_M$. Причем слой суперкасательного расслоения $T(M, G_M)$ в точке $q \in M$ совпадает с введенным выше суперкасательным пространством $T_q(M, G_M)$. Если $\left(q^1, \ldots, q^{m+n}\right)$ и $\left(q'^1, \ldots, q'^{m+n}\right)$ — две координатные карты на базовом пространстве M, матрица Якоби

$$h^i_j = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n+m,$$

(см. выражения (3.59)) задает морфизмы перехода суперкасательного расслоения $T(M, G_M)$.

Отметим, что базовое G^∞-супервекторное расслоение суперкасательного расслоения $T(M, G_M)$, называемое *G^∞-суперкасательным расслоением*, имеет функции перехода $\delta(h^i_j)$, которые не могут быть представлены матрицами Якобы, поскольку производные G^∞-суперфункций по нечетным переменным плохо определены и пучок $\mathrm{Der}\, G^\infty_M$ не является локально свободным. □

Суперсвязности

Если дано супервекторное расслоение π (3.68) со структурным пучком S его сечений, связность на этом супервекторном расслоении определяется так же, как в Определении 1.3.6. Разница только в том, что S — пучок градуированных локально свободных G_M-модулей.

Как и в случае точной последовательности (1.69) в § 1.3, можно построить точную последовательность пучков

$$0 \to \mathrm{Der}^* G_M \otimes S \to \left(G_M \oplus \mathrm{Der}^* G_M\right) \otimes S \to S \to 0 \tag{3.72}$$

как прямой предел точной последовательности (1.35) для градуированных $G_M(U)$-модулей $S(U)$, где $\mathrm{mod}\mu^2$ — это фактор по градуированным соотношениям

$$1 \otimes (abp) = (-1)^{|a||b|} b \otimes (ap) + a \otimes (bp) - ab \otimes p,$$
$$1 \otimes ab = (-1)^{|a||b|} b \otimes a + a \otimes b - ab \otimes 1$$

(сравните с (1.15) и (1.18)). Точная последовательность (3.72) в общем случае не расщепляется. Она допускает расщепление тогда и только тогда, когда существует четный морфизм пучков

$$\nabla\colon S \to \mathrm{Der}^* G_M \otimes S, \tag{3.73}$$

удовлетворяющий правилу Лейбница

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s), \quad f \in G_M(U), \quad s \in S(U), \tag{3.74}$$

для произвольного открытого подмножества $U \in M$.

Определение 3.3.15. Морфизм пучков (3.73) называется *суперсвязностью* на супервекторном расслоении π (3.68). □

Кривизна суперсвязности (3.73) дается выражением

$$R = \nabla^2 \colon S \to \bigwedge^2 \mathrm{Der}^*_M \otimes S, \tag{3.75}$$

аналогичным выражению (1.77).

Как и в случае пучков C^∞_X-модулей, точная последовательность (3.72) ведет к точной последовательности пучков

$$0 \to \mathrm{Hom}\left(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S\right) \to \mathrm{Hom}\left(S, \left(G_M \oplus \mathrm{Der}^* G_M\right) \otimes S\right) \to \mathrm{Hom}\,(S, S) \to 0$$

и к соответствующей точной последовательности когомологических групп

$$0 \to H^0\big(M; \mathrm{Hom}\left(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S\right)\big) \to H^0\big(M; \mathrm{Hom}\left(S, \left(G_M \oplus \mathrm{Der}^* G_M\right) \otimes S\right)\big) \to$$
$$\to H^0\big(M; \mathrm{Hom}\,(S, S)\big) \to H^1\big(M\colon \mathrm{Hom}\left(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S\right)\big) \to \ldots .$$

Точная последовательность (3.72) определяет класс Атьи

$$\mathrm{At}(\pi) \in H^1\big(M; \mathrm{Hom}\left(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S\right)\big)$$

супервекторного расслоения π (3.68). Если $\mathrm{At}(\pi) = 0$, суперсвязность на этом супервекторном расслоении существует (см. § 1.3). В частности, суперсвязность существует, если множество когомологий

$$H^1\big(M; \mathrm{Hom}\left(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S\right)\big)$$

тривиально. В отличие от случая гладких векторных расслоений, структурный пучок G_M G-супермногообразия, вообще говоря, не является ацикличным, пучок $\mathrm{Hom}\left(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S\right)$ имеет нетривиальные когомологии и супервекторное расслоение может не иметь связности.

Пример 3.3.6. Структурный пучок стандартного супермногообразия $\left(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}\right)$ ацикличен (см. Предложение 3.3.5), и супервекторное расслоение

$$\left(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}\right) \times \left(B^{r|s}, \mathcal{G}_{r|s}\right) \to \left(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}\right) \tag{3.76}$$

допускает суперсвязность, например, тривиальную суперсвязность. □

Пример 3.3.7. Если (M, G_M) — G-супермногообразие Де Витта, его структурный пучок G_M ацикличен, и таким же является локально свободный пучок $\mathrm{Hom}\,(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S)$ (см. Предложение 3.3.10). Отсюда следует, что супервекторное расслоение над G-супермногообразием Де Витта всегда может быть наделено суперсвязностью. □

Пример 3.3.6 позволяет получить локальное координатное выражение для суперсвязности на супервекторном расслоении π (3.68) с типичным слоем $B^{r|s}$ и базой, которая является G-супермногообразием, локально изоморфным стандартному супермногообразию $\left(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}\right)$. Пусть $U \subset M$ — область тривиализации (3.70) этого супервекторного расслоения такая, что всякое сечение $\pi|_U$ представимо суммой $s = s^a(q)\epsilon_a$, а пучок суперформ $\mathrm{Der}^* G_M|_U$ имеет локальный базис $\{dq^i\}$. Тогда суперсвязность ∇ (3.73), ограниченная на эту область тривиализации, задается семейством коэффициентов

$$\nabla(\epsilon_a) = dq^i \otimes \left(\nabla_i{}^b{}_a \epsilon_b\right), \tag{3.77}$$

где $\nabla_i{}^a{}_b$ — G-суперфункции на U. Принимая во внимание правило Лейбница (3.74), можно также вычислить компоненты формы кривизны (3.75) суперсвязности (3.77):

$$R(\epsilon_a) = \tfrac{1}{2} dq^i \wedge dq^j \otimes R_{ij}{}^b{}_a \epsilon_b,$$

$$R_{ij}{}^a{}_b = (-1)^{|i||j|}\partial_i \nabla_j{}^a{}_b - \partial_j \nabla_i{}^a{}_b + (-1)^{|i|(|j|+|a|+|k|)} \nabla_j{}^a{}_k \nabla_i{}^k{}_b - (-1)^{|j|(|a|+|k|)} \nabla_i{}^a{}_k \nabla_j{}^k{}_b.$$

Аналогично можно получить закон преобразований компонент суперсвязности (3.77) относительно функций перехода (3.71). В частности, любое тривиальное супервекторное расслоение имеет тривиальную суперсвязность $\nabla_i{}^b{}_a = 0$.

§ 4. Суперсвязности на главных суперрасслоениях

В отличие от супервекторных расслоений, структурный пучок G_P главного суперрасслоения $(P, G_P) \to (M, G_M)$ в общем случае не является пучком локально свободных G_M-модулей. Поэтому использовавшаяся до сих пор техника алгебраических связностей на модулях и пучках неприменима непосредственным образом к суперсвязностям на главных суперрасслоениях. Суперсвязности на главных суперрасслоениях вводятся по аналогии со связностями на гладких главных расслоениях [30] (сравните, например, точную последовательность (1.85) в первом томе [11] с приведенной ниже точной последовательностью (3.83)). Для простоты будем обозначать G-супермногообразия (M, G_M) и их морфизмы

$$\varphi\colon M \to N, \quad \Phi\colon G_N \to \varphi_*(M)$$

как соответственно $\widehat{M}$ и $\widehat{\varphi}$. Для данной точки $q \in M$ символом $\widehat{q} = (q, \Lambda)$ будет обозначаться тривиальное G-супермногообразие размерности $(0, 0)$.

Мы начнем с понятия G-супергруппы Ли $\widehat{H}$. Связь между G-, GH^∞- и G^∞-супергруппами Ли вытекает из того, как связаны между собой соответствующие типы суперфункций.

Определение 3.4.1. G-супермногообразие $\widehat{H} = (H, \mathcal{H})$ называется *G-супергруппой Ли*, если заданы следующие морфизмы G-супермногообразий:

- умножение $\widehat{m}\colon \widehat{H} \times \widehat{H} \to \widehat{H}$;
- единица $\widehat{\varepsilon}\colon \widehat{e} \to \widehat{H}$;
- взятие обратного $\widehat{S}\colon \widehat{H} \to \widehat{H}$;

вместе с естественным отождествлением

$$\widehat{e} \times \widehat{H} = \widehat{H} \times \widehat{e} = \widehat{H}.$$

Они должны удовлетворять

- условию ассоциативности

$$\widehat{m} \circ (\mathrm{Id} \times \widehat{m}) = \widehat{m} \circ (\widehat{m} \times \mathrm{Id})\colon \widehat{H} \times \widehat{H} \times \widehat{H} \to \widehat{H} \times \widehat{H} \to \widehat{H};$$

- свойству единицы

$$(\widehat{m} \circ (\widehat{\varepsilon} \times \mathrm{Id}))(\widehat{e} \times \widehat{H}) = (\widehat{m} \circ (\mathrm{Id} \times \widehat{\varepsilon}))(\widehat{H} \times \widehat{e}) = \mathrm{Id}\, H;$$

- свойству обратного

$$(\widehat{m} \circ (\widehat{S}, \mathrm{Id}))(\widehat{H}) = (\widehat{m} \circ (\mathrm{Id}, \widehat{S}))(\widehat{H}) = \widehat{\varepsilon}(\widehat{e}).$$

□

Для точки $g \in H$ обозначим $\widehat{g}\colon \widehat{e} \to \widehat{H}$ морфизм G-супермногообразий, образом которого в H является точка g. Тогда можно ввести операции левого $\widehat{L}_g$ и правого $\widehat{R}_g$ сдвигов в G-супергруппе Ли вдоль морфизма $\widehat{g}$ как морфизмов G-супермногообразий

$$\widehat{L}_g\colon \widehat{H} = \widehat{e} \times \widehat{H} \xrightarrow{\widehat{g}\times \mathrm{Id}} \widehat{H} \times \widehat{H} \xrightarrow{\widehat{m}} \widehat{H},$$
$$\widehat{R}_g\colon \widehat{H} = \widehat{H} \times \widehat{e} \xrightarrow{\mathrm{Id}\times \widehat{g}} \widehat{H} \times \widehat{H} \xrightarrow{\widehat{m}} \widehat{H}.$$

Замечание 3.4.1. Если $\widehat{H}$ — G-супергруппа Ли ранга (m,n), ее базовое гладкое многообразие H наделено структурой вещественной группы Ли размерности $2^{N-1}(n+m)$, называемой *базовой группой Ли*. В частности, левым и правым сдвигам в G-супергруппе Ли вдоль морфизма $\widehat{g}$ отвечают обычные левый и правый сдвиги в базовой группе Ли на элемент g. □

Переформулируем теперь аксиомы группы в Определении 3.4.1 в терминах структурного пучка $\mathcal{H}$ G-супергруппы Ли $(H,\mathcal{H})$. Мы увидим, что $\mathcal{H}$ обладает свойствами пучка градуированных алгебр Хопфа.

Замечание 3.4.2. Напомним (см. [13], § 4.9, а также, например, [16]), что вещественное (или комплексное) векторное пространство A называется коалгеброй, если существуют морфизмы:

- копроизведения $\Delta\colon A \to A \otimes A$;
- коединицы $\epsilon\colon A \to \mathbb{R}$;

которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta(a) &= (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta(a),\\ (\epsilon \otimes \mathrm{Id})\Delta(a) &= (\mathrm{Id} \otimes \epsilon)\Delta(a) = a,\end{aligned} \qquad a \in A.$$

Пусть A — ассоциативная $\mathbb{R}$-алгебра с единицей e, т. е. это $\mathbb{R}$-кольцо, где умножение m записано как морфизм

$$m\colon A \otimes A \ni a \otimes b \mapsto ab \in A, \quad a, b \in A.$$

Отметим, что $A \otimes A$ — это тоже $\mathbb{R}$-кольцо относительно операций

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \otimes (a' \otimes b') &\mapsto (aa') \otimes (bb'),\\ \lambda(a \otimes b) &= (\lambda a) \otimes b = a \otimes (\lambda b),\end{aligned} \qquad a, b \in A, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Биалгебра (A, m, Δ, ϵ) определяется как коалгебра A, которая является еще и $\mathbb{R}$-кольцом так, что

$$\Delta(e) = e \otimes e, \qquad \epsilon(e) = 1.$$

Тогда алгебра Хопфа $(A, m, \Delta, \epsilon, S)$ — это биалгебра, наделенная операцией *кообратного* $S\colon A \to A$ такой, что

$$m\big((S \otimes \mathrm{Id})\Delta(a)\big) = m\big((\mathrm{Id} \otimes S)\Delta(a)\big) = \epsilon(a)e.$$

□

Если $(H,\mathcal{H})$ — G-супергруппа Ли, ее структурный пучок $\mathcal{H}$ допускает следующие морфизмы:

- коумножения $\widehat{m}^*\colon \mathcal{H} \to m_*\big(\mathcal{H} \widehat{\otimes} \mathcal{H}\big)$;
- коединицы $\widehat{\epsilon}^*\colon \mathcal{H} \to e_*(\Lambda)$;
- кообратного $\widehat{S}\colon \mathcal{H} \to s_*\mathcal{H}$.

Обозначим

$$k = m \circ (\mathrm{Id} \times m) = m \circ (m \times \mathrm{Id})\colon H \times H \times H \to H.$$

Тогда аксиомы супергруппы Ли в Определении 3.4.1 эквивалентны соотношениям

$$\big((\mathrm{Id} \otimes \widehat{m}^*) \circ \widehat{m}^*\big)(\mathcal{H}) = \big((\widehat{m}^* \otimes \mathrm{Id}) \circ \widehat{m}^*\big)(\mathcal{H}) = k_*(\mathcal{H} \widehat{\otimes} \mathcal{H} \widehat{\otimes} \mathcal{H}),$$

$$\big(\widehat{m}^* \circ (\mathrm{Id} \otimes \widehat{\varepsilon}^*)\big)\big(\mathcal{H} \widehat{\otimes} e_*(\Lambda)\big) = \big(\widehat{m}^* \circ (\widehat{\varepsilon}^* \otimes \mathrm{Id})\big)\big(e_*(\Lambda) \widehat{\otimes} \mathcal{H}\big) = \mathrm{Id}\,\mathcal{H},$$

$$\big(\mathrm{Id} \cdot \widehat{S}^*\big) \circ \widehat{m}^* = \big(\widehat{S}^* \cdot \mathrm{Id}\big) \circ \widehat{m}^* = \widehat{\varepsilon}^*.$$

Сравнивая эти соотношения с аксиомами алгебры Хопфа в Замечании 3.4.2, можно говорить о структурном пучке G-супергруппы Ли как о пучке градуированных топологических алгебр Хопфа.

Пример 3.4.3. Градуированная общая линейная группа $GL(n|m; \Lambda)$ наделена естественной структурой H^∞-супермногообразия размерности $(n^2 + m^2, 2nm)$. Произведение суперматриц порождает H^∞-морфизм

$$m\colon GL(n|m; \Lambda) \times GL(n|m; \Lambda) \to GL(n|m; \Lambda)$$

такой, что $m(g, g') \mapsto m(gg')$. Отсюда следует, что $GL(n|m; \Lambda)$ — это H^∞-супергруппа Ли. Она очевидным образом расширяется до G-супергруппы Ли $\widehat{GL}(n|m; \Lambda)$, называемой *общей линейной супергруппой*. □

Супералгебра Ли $\mathbf{h}$ G-супергруппы Ли $\widehat{H}$ определяется как алгебра левоинваринтных супервекторных полей на $\widehat{H}$. Напомним, что супервекторное поле u на G-супермногообразии $\widehat{H}$ — это градуированное дифференцирование его структурного пучка $\mathcal{H}$. Оно называется *левоинвариантным*, если

$$(\mathrm{Id} \otimes u) \circ \widehat{m}^* = \widehat{m}^* \circ u.$$

Если u и u' — два левоинвариантных супервекторных поля, то таковыми же являются их коммутатор $[u, u']$ и линейная комбинация $au + a'u'$, $a, a' \in \Lambda$. Следовательно левоинвариантные супервекторные поля образуют супералгебру Ли. Супералгебра Ли $\mathbf{h}$ может быть отождествлена с суперкасательным пространством $T_e(\widehat{H})$. Более того, существует изоморфизм пучков

$$\mathcal{H} \otimes \mathbf{h} = \mathrm{Der}\,\mathcal{H}, \tag{3.78}$$

т.е пучок супервекторных полей на G-супергруппе Ли $\widehat{H}$ является глобально свободным пучком градуированных $\mathcal{H}$-модулей ранга (n, m), порождаемым левоинвариантными супервекторными полями. Супералгебра Ли правоинвариантных супервекторных полей на G-супергруппе Ли $\widehat{H}$ вводится аналогичным образом.

Рассмотрим теперь правое действие G-супергруппы Ли $\widehat{H}$ на G-супермногообразие $\widehat{P}$. Это морфизм G-супермногообразий

$$\widehat{\rho}\colon \widehat{P} \times \widehat{H} \to \widehat{P}$$

такой, что

$$\widehat{\rho} \circ (\widehat{\rho} \times \mathrm{Id}) = \widehat{\rho} \circ (\mathrm{Id} \times \widehat{m})\colon \widehat{P} \times \widehat{H} \times \widehat{H} \to \widehat{P},$$

$$\widehat{\rho} \circ (\mathrm{Id} \times \widehat{\varepsilon})(\widehat{P} \times \widehat{e}) = \mathrm{Id}\,\widehat{P}.$$

Левое действие $\widehat{H}$ на $\widehat{P}$ определяется аналогично.

Пример 3.4.4. Ясно, что G-супергруппа Ли действует на себя слева и справа посредством морфизма умножения $\widehat{m}$.

Общая линейная супергруппа $\widehat{GL}(n|m;\Lambda)$ действует линейно на стандартное супермногообразие $B^{n|n}$ слева посредством суперматриц, и это действие является морфизмом G-супермногообразий. □

Пусть $\widehat{P}$ и $\widehat{P}'$ — два G-супермногообразия, на которые действует G-супергруппа Ли $\widehat{H}$. Морфизм G-супермногообразий $\widehat{\varphi}\colon \widehat{P} \to \widehat{P}'$ называется $\widehat{H}$-инвариантным, если

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{\rho} = \widehat{\rho}' \circ (\widehat{\varphi} \times \mathrm{Id})\colon \widehat{P} \times \widehat{H} \to \widehat{P}'.$$

Определение 3.4.2. Фактором действия G-супергруппы Ли на G-супермногообразие $\widehat{P}$ называется пара $(\widehat{M}, \widehat{\pi})$, состоящая из G-супермногообразия $\widehat{M}$ и морфизма G-супермногообразий $\widehat{\pi}\colon \widehat{P} \to \widehat{M}$ таких, что:

(i) имеет место равенство

$$\widehat{\pi} \circ \widehat{\rho} = \widehat{\pi} \circ \widehat{\mathrm{pr}}_1\colon \widehat{P} \times \widehat{H} \to \widehat{M}; \tag{3.79}$$

(ii) для всякого морфизма G-супермногообразий $\widehat{\varphi}\colon \widehat{P} \to \widehat{M}'$ такого, что $\widehat{\varphi} \circ \widehat{\rho} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\mathrm{pr}}_1$, существует единственный морфизм G-супермногообразий $\widehat{g}\colon \widehat{M} \to \widehat{M}'$ такой, что $\widehat{\varphi} = \widehat{g} \circ \widehat{\pi}$.

□

Совсем необязательно, чтобы фактор $(\widehat{M}, \widehat{\pi})$ существовал. Если он все-таки существует, имеется мономорфизм его структурного пучка G_M в образ $\pi_* G_P$. Поскольку G-супергруппа Ли $\widehat{H}$ действует на G-супермногообразие $\widehat{M}$ тривиальным образом, образ упомянутого выше мономорфизма является подпучком $\pi_* G_P$, инвариантным относительно действия $\widehat{H}$. Более того, существует изоморфизм

$$G_M \cong (\pi_* G_P)^H \tag{3.80}$$

между G_M и подпучком $\widehat{H}$-инвариантных сечений пучка G_P. Этот подпучок порождается локальными сечениями пучка G_P на $\pi^{-1}(U)$, $U \subset M$, которые являются $\widehat{H}$-инвариантными как морфизмы G-супермногообразий $\widehat{U} \to \Lambda$, где предполагается тривиальное действие $\widehat{H}$ на Λ.

Обозначим морфизм в равенстве (3.79) как ϑ. Легко убедиться, что инвариантные сечения пучка $G_P(\pi^{-1}(U))$ являются в точности элементами, которые имеют один и тот же образ относительно морфизмов

$$\widehat{\rho}^*\colon G_P\big(\pi^{-1}(U)\big) \to \big(\mathcal{H} \widehat{\otimes} G_P\big)\big(\vartheta^{-1}(U)\big),$$
$$\widehat{\mathrm{pr}}_1^*\colon G_P\big(\pi^{-1}(U)\big) \to \big(\mathcal{H} \widehat{\otimes} G_P\big)\big(\vartheta^{-1}(U)\big).$$

Тогда изоморфизм (3.80) приводит к точной последовательности пучков градуированных Λ-модулей на базовом пространстве M:

$$0 \longrightarrow G_M \xrightarrow{\widehat{\pi}^*} \pi_* G_P \xrightarrow{\widehat{\rho}^* - \widehat{\mathrm{pr}}_1^*} \vartheta_*\big(G_M \widehat{\otimes} \mathcal{H}\big). \tag{3.81}$$

Определение 3.4.3. *Главным суперрасслоением* со структурной G-супергруппой Ли $\widehat{H}$ называется локально тривиальный фактор $\pi\colon \widehat{P} \to \widehat{M}$, т. е. базовое пространство M G-супермногообразия $\widehat{M}$ допускает открытое покрытие $\{U_\zeta\}$ вместе с $\widehat{H}$-инвариантными изоморфизмами

$$\widehat{\psi}_\zeta\colon \widehat{P}|_{\widehat{U}_\zeta} \to \widehat{U}_\zeta \times \widehat{H},$$

где $\widehat{H}$ действует на

$$\widehat{U}_\zeta \times \widehat{H} \to \widehat{U}_\zeta \tag{3.82}$$

правыми умножениями. □

Замечание 3.4.5. В действительности нам необходимо только условие (i) в Определении 3.4.2 действия G-супергруппы Ли $\widehat{H}$ на G-супермногообразии $\widehat{P}$ и условие локальной тривиальности фактора $\widehat{P}$. □

Эквивалентно главное суперрасслоение можно рассматривать как склеенное из тривиальных главных суперрасслоений (3.82) посредством $\widehat{H}$-инвариантных функций перехода

$$\widehat{\phi}_{\zeta\xi}\colon \widehat{U}_{\zeta\xi} \times \widehat{H} \to \widehat{U}_{\zeta\xi} \times \widehat{H}, \qquad U_{\zeta\xi} = U_\zeta \cap U_\xi,$$

которые образуют коцикл.

Как и в случае гладких главных расслоений, на главном суперрасслоении вводятся супервекторные поля следующих двух типов.

Определение 3.4.4. Супервекторное поле u на главном суперрасслоении $\pi\colon \widehat{P} \to \widehat{M}$ называется *инвариантным*, если

$$\widehat{\rho}^* \circ u = (u \otimes \mathrm{Id}) \circ u\colon G_P \to \rho_*\big(G_P \widehat{\otimes} \mathcal{H}\big).$$

□

Каждому открытому подмножеству $V \subset M$ можно сопоставить градуированный $G_M(V)$-модуль всех $\widehat{H}$-инвариантных супервекторных полей на $\pi^{-1}(V)$, задавая таким образом пучок $\mathrm{Der}^{\,H}(\pi_* G_P)$ градуированных G_M-модулей на базовом пространстве M.

Определение 3.4.5. *Фундаментальное* супервекторное поле $\widetilde{v}$, отвечающее элементу $v \in \mathfrak{h}$ супералгебры Ли $\mathfrak{h}$, определяется условием

$$\widetilde{v} = (\mathrm{Id} \otimes v) \circ \widehat{\rho}^*\colon G_P \to G_P \widehat{\otimes} e_*(\Lambda) = G_P.$$

□

Фундаментальные супервекторные поля порождают пучок $\mathcal{V}G_P$ градуированных G_P-модулей вертикальных супервекторных полей на главном суперрасслоении $\widehat{P}$, т. е. $u \circ \pi^* = 0$. Более того, существует изоморфизм пучков градуированных G_P-модулей

$$G_P \otimes \mathfrak{h} \ni F \otimes v \mapsto F\widetilde{v} \in \mathcal{V}G_P,$$

аналогичный изоморфизму (3.78).

Рассмотрим пучок

$$(\pi_* \mathcal{V}G_P)^H = \pi_*(\mathcal{V}G_P) \cap \mathrm{Der}^{\,H}(\pi_* G_P)$$

на базовом пространстве M, сечениями которого являются вертикальные $\widehat{H}$-инвариантные супервекторные поля.

Предложение 3.4.6. [30]. Существует точная последовательность пучков градуированных G_M-модулей

$$0 \to (\pi_* \mathcal{V}G_P)^H \to \mathrm{Der}^{\,H}(\pi_* G_P) \to \mathrm{Der}\, G_M \to 0. \tag{3.83}$$

□

Точная последовательность (3.83) аналогична точной последовательности (1.85) в первом томе [11] и соответствующей точной последовательности C^∞-модулей

$$0 \to (V_G P)_X \to (T_G P)_X \to \mathrm{Der}\, C^\infty_X \to 0,$$

которые имеют место в случае главных гладких расслоений. Поэтому мы приходим к следующему определению суперсвязности на главном суперрасслоении.

Определение 3.4.7. *Суперсвязностью* на главном суперрасслоении $\pi\colon \widehat{P} \to \widehat{M}$ называется расщепление

$$\nabla\colon \operatorname{Der} G_M \to \operatorname{Der}^H(\pi_* G_P) \tag{3.84}$$

точной последовательности (3.83). □

В отличие от связностей на гладких главных расслоениях, суперсвязности на главных суперрасслоениях не всегда существуют.

Суперсвязность на главном суперрасслоении $\widehat{P}$ может быть описана в терминах $\mathbf{h}$-значной 1-суперформы

$$\omega\colon \operatorname{Der} G_P \to G_P \otimes \mathbf{h} \cong \mathcal{V}G_P$$

на $\widehat{P}$, называемой *суперформой связности*. В самом деле, всякое расщепление ∇ (3.84) определяет морфизм градуированных G_P-модулей

$$\widehat{\pi}^*(\operatorname{Der} G_M) \to \widehat{\pi}^*\big(\operatorname{Der}^H(\pi_* G_P)\big) \cong \operatorname{Der} G_P,$$

который расщепляет точную последовательность

$$0 \to \mathcal{V}G_P \to \operatorname{Der} G_P \to \widehat{\pi}^*(\operatorname{Der} G_M) \to 0.$$

Поэтому существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow \widehat{\pi}^*(\operatorname{Der} G_M)\mathcal{V}G_P \longrightarrow \operatorname{Der} G_P \xrightarrow{\omega} \mathcal{V}G_P \longrightarrow 0.$$

Заметим, что по аналогии с ассоциированными гладкими расслоениями определяются ассоциированные суперрасслоения и суперсвязности на этих суперрасслоениях. В частности, всякое супервекторное расслоение с типичным слоем размерности (r, s) является суперрасслоением, ассоциированным с главным суперрасслоением со структурной супергруппой Ли $\widehat{GL}(r|s; \Lambda)$ [30].

§ 5. Главные градуированные расслоения

Главные градуированные расслоения и связности на них описываются аналогично главным суперрасслоениям и суперсвязностям на этих суперрасслоениях. Следует, однако, заметить, что аппарат главных градуированных расслоений предшествовал теории главных суперрасслоений [18, 100]. Поэтому мы остановимся здесь только на некоторых специфических элементах теории главных градуированных расслоений (см. ее детальное изложение, например, в [143]).

Пусть $(Z, \mathcal{A})$ — градуированное многообразие размерности (n, m). Важным элементом теории градуированных многообразий, который ранее не упоминался, является *конечное сопряженное* $\mathcal{A}(Z)^\circ$ алгебры $\mathcal{A}(Z)$, состоящее из элементов a дуального модуля $\mathcal{A}(Z)^*$, которые обращаются в 0 на идеале $\mathcal{A}(Z)$ конечной коразмерности. Это градуированная коалгебра, наделенная копроизведением

$$(\Delta^\circ(a))(f \otimes f') \stackrel{\text{def}}{=} a(ff'), \quad \forall\, f, f' \in \mathcal{A}(Z),$$

и коединицей

$$\epsilon^\circ(a) \stackrel{\text{def}}{=} a(1_{\mathcal{A}}).$$

В частности, $\mathcal{A}(Z)^\circ$ включает *оценочные элементы* δ_z такие, что

$$\delta_z(f) = (\sigma(f))(z).$$

Для данного оценочного элемента δ_z элементы $u \in \mathcal{A}(Z)^\circ$ называются *примитивными* относительно δ_z, если они удовлетворяют соотношению

$$\Delta^\circ(v) = u \otimes \delta_z + \delta_z \otimes u. \tag{3.85}$$

Эти элементы представляют собой дифференцирования $\mathcal{A}(Z)$ в z, т. е.

$$u(ff') = (uf)(\delta_z f') + (-1)^{|u||f|}(\delta_z f)(uf').$$

Определение 3.5.1. *Градуированной группой Ли* $(G, \mathcal{G})$ называется градуированное многообразие такое, что его тело G — это обычная группа Ли, структурная алгебра $\mathcal{G}(G)$ является градуированной алгеброй Хопфа (Δ, ϵ, S), а эпиморфизм алгебр

$$\sigma\colon \mathcal{G}(G) \to C^\infty(G)$$

— это морфизм градуированных алгебр Хопфа. □

Можно показать, что конечный сопряженный $\mathcal{G}(G)^\circ$ алгебры $\mathcal{G}(G)$ наделен структурой алгебры Хопфа с операцией умножения

$$a \star b \stackrel{\text{def}}{=} (a \otimes b) \circ \Delta, \quad \forall\, a, b \in \mathcal{G}(G)^\circ. \tag{3.86}$$

Относительно этой операции умножения оценочные элементы δ_g, $g \in G$, образуют группу $\delta_g \star \delta_{g'} = \delta_{gg'}$, изоморфную группе Ли G. Поэтому они называются также *группоподобными элементами*. Нетрудно установить, что множество примитивных элементов $\mathcal{G}(G)^\circ$ относительно оценочного элемента δ_e, т. е. касательное пространство $T_e(G, \mathcal{G})$ является супералгеброй Ли относительно операции умножения (3.86). Она называется *супералгеброй Ли* $\mathbf{g}$ *градуированной группы Ли* $(G, \mathcal{G})$.

Говорят, что градуированная группа Ли $(G, \mathcal{G})$ действует на градуированное многообразие $(Z, \mathcal{A})$ справа, если существует морфизм градуированных многообразий

$$(\varphi, \Phi)\colon (Z, \mathcal{A}) \times (G, \mathcal{G}) \to (Z, \mathcal{A})$$

такой, что соответствующий морфизм градуированных алгебр

$$\Phi\colon \mathcal{A}(Z) \to \mathcal{A}(Z) \otimes \mathcal{G}(G)$$

задает структуру правого $\mathcal{G}(G)$-*комодуля* на $\mathcal{A}(Z)$, т. е.

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Phi = (\Phi \otimes \mathrm{Id}) \circ \Phi, \qquad (\mathrm{Id} \otimes \epsilon) \circ \Phi = \mathrm{Id}\,.$$

Правое действие (φ, Φ) вместе с произвольным элементом $a \in \mathcal{G}(G)^\circ$ определяют линейное отображение

$$\Phi_a = (\mathrm{Id} \otimes a) \circ \Phi\colon \mathcal{A}(Z) \to \mathcal{A}(Z). \tag{3.87}$$

В частности, если a — примитивный элемент относительно оценочного элемента δ_e, тогда $\Phi_a \in \mathrm{Der}\,\mathcal{A}(Z)$.

Рассмотрим правое действие градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ на себя. Пусть $\Phi = \Delta$ и $a = \delta_g$ — группоподобные элементы. Тогда Φ_a (3.87) представляет собой однородный изоморфизм градуированных алгебр ранга 0, соответствующий правым сдвигам в группе Ли $G \to Gg$. Если $a \in \mathbf{g}$, то Φ_a — дифференцирование структурной алгебры $\mathcal{G}(G)$. Пусть $\{u_i\}$ — базис $\mathbf{g}$. Дифференцирования Φ_{u_i} образуют глобальный базис модуля дифференцирований $\mathrm{Der}\,\mathcal{G}(G)$ структурной алгебры $\mathcal{G}(G)$, т. е. $\mathrm{Der}\,\mathcal{G}(G)$ является свободным левым $\mathcal{G}(G)$-модулем. В частности, имеет место разложение

$$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}'(G) \bigoplus_R \mathcal{G}''(G),$$

$$\mathcal{G}'(G) = \{f \in \mathcal{G}(G)\colon \Phi_u(f) = 0,\ \forall\, u \in \mathbf{g}_0\},$$

$$\mathcal{G}''(G) = \{f \in \mathcal{G}(G)\colon \Phi_u(f) = 0,\ \forall\, u \in \mathbf{g}_1\}.$$

Поскольку $\mathcal{G}'(G) \cong C^\infty(G)$, можно показать, что всякая градуированная группа Ли $(G, \mathcal{G})$ представляет собой пучок сечений некоторого внешнего тривиального расслоения $G \times \mathbf{g}_1^* \to G$ [18, 41, 100].

Перейдем теперь к определению главного градуированного расслоения. Правое действие (φ, Φ) градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ на градуированное многообразие $(Z, \mathcal{A})$ называется *свободным*, если для каждой точки $z \in Z$ и морфизма Φ_z: $\mathcal{A}(Z) \to \mathcal{G}(G)$ дуальный морфизм Φ_{z*}: $\mathcal{G}(G)^\circ \to \mathcal{A}(Z)^\circ$ является инъекцией.

Правое действие (φ, Φ) градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ на градуированное многообразие $(Z, \mathcal{A})$ называется *регулярным*, если морфизм градуированных многообразий

$$(\varphi \times \mathrm{pr}_1) \circ \Delta\colon (Z, \mathcal{A}) \times (G, \mathcal{G}) \to (Z, \mathcal{A}) \times (Z, \mathcal{A})$$

определяет замкнутое градуированное подмногообразие прямого произведения $(Z, \mathcal{A}) \times (Z, \mathcal{A})$.

Замечание 3.5.1. Отметим, что градуированное многообразие $(Z', \mathcal{A}')$ называется *градуированным подмногообразием* градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$, если существует морфизм градуированных многообразий $(Z', \mathcal{A}') \to (Z, \mathcal{A})$ такой, что соответствующий морфизм $\mathcal{A}'(Z')^\circ \to \mathcal{A}(Z)^\circ$ — включение. Градуированное подмногообразие называется *замкнутым*, если $\dim(Z', \mathcal{A}') < \dim(Z, \mathcal{A})$. □

Таким образом, мы приходим к следующему варианту известной теоремы о факторе градуированного многообразия [18, 143].

Теорема 3.5.2. Правое действие (φ, Φ) градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ на градуированное многообразие $(Z, \mathcal{A})$ является регулярным тогда и только тогда, когда фактор $(Z/G, \mathcal{A}/\mathcal{G})$ представляет собой градуированное многообразие, т. е. существует эпиморфизм градуированных многообразий

$$(Z, \mathcal{A}) \to (Z/G, \mathcal{A}/\mathcal{G}),$$

согласующийся с проекцией $Z \to Z/G$. □

Ввиду этой теоремы *главное градуированное расслоение* $(P, \mathcal{A})$ может быть определено как локально тривиальная субмерсия

$$(P, \mathcal{A}) \to (P/G, \mathcal{A}/\mathcal{G})$$

относительно правого регулярного свободного действия градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ на градуированное многообразие $(P, \mathcal{A})$. Эквивалентным образом можно сказать, что главное градуированное расслоение — это градуированное многообразие $(P, \mathcal{A})$, наделенное свободным правым действием градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ таким, что фактор $(P/G, \mathcal{A}/\mathcal{G})$ — это градуированное многообразие и сюръекция $(P, \mathcal{A}) \to (P/G, \mathcal{A}/\mathcal{G})$ является субмерсией. При этом ясно, что $P \to P/G$ — это обычное главное расслоение со структурной группой Ли G.

Градуированная связность на главном градуированном $(G, \mathcal{G})$-расслоении $(P, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B})$ вводится аналогично суперсвязности на главном G-суперрасслоении. Она определяется как $(G, \mathcal{G})$-инвариантное расщепление пучка $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ и представима $\mathbf{g}$-значной градуированной формой связности на $(P, \mathcal{A})$ [143].

Замечание 3.5.2. Более общим является подход, когда *градуированная связность* на *градуированном расслоении* $(Z, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B})$ определяется как сечение Γ *градуированного расслоения струй* $J^1(Z/X) \to (Z, \mathcal{A})$ сечений этого градуированного расслоения $(Z, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B})$ [18], которое также является градуированным многообразием [136]. В случае главного градуированного $(G, \mathcal{G})$-расслоения такое сечение Γ предполагается эквивариантным относительно действия градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ (сравните с Определением 1.7.5 в первом томе [11]). □

§ 6. Суперсимметричная теория поля

Математический формализм, изложенный в предыдущих параграфах, дает возможность строить суперсимметричные полевые модели. В этом параграфе мы покажем, что любая теория поля на расслоений $Y \to X$ может быть стандартным образом расширена до суперсимметричной теории поля, которая в случае аффинного расслоения $Y \to X$ инвариантна относительно супергруппы Ли $\mathrm{Sp}(2)$ [79, 113, 138]. В сравнении с суперсимметричной теорией поля в [44, 51], это расширение формулируется в терминах простых градуированных многообразий и является непосредственным обобщением БРС-механики в работах [81, 82, 83, 112].

Предварительным шагом для построения суперсимметричной теории поля является так называемое вертикальное расширение лагранжева и гамильтонова формализмов на расслоении $Y \to X$ [78, 113] (см. подробное изложение лагранжева и гамильтонова формализмов теории поля на расслоениях в первом томе [11], а также в [78, 113, 137]). Это расширение состоит в переходе от теории поля на расслоении $Y \to X$ с послойными координатами (x^λ, y^i) к теории поля на вертикальном касательном расслоении $VY \to X$ с послойными координатами $(x^\lambda, y^i, \dot{y}^i)$.

Начнем с вертикального расширения лагранжева формализма. Мы следуем обозначениям в первом томе [11]. Конфигурационным пространством теории поля на расслоении $VY \to X$ является многообразие струй J^1VY. Благодаря каноническому изоморфизму $J^1VY = VJ^1Y$ оно наделено послойными координатами

$$(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, \dot{y}^i, \dot{y}^i_\lambda).$$

Отсюда следует, что лагранжев формализм на конфигурационном пространстве J^1VY может быть построен как вертикальное расширение лагранжева формализма на многообразии струй J^1Y путем перехода к вертикальным касательным морфизмам.

Пусть

$$L = \mathcal{L}\omega\colon J^1Y \to \bigwedge^n T^*X \tag{3.88}$$

— исходный лагранжиан полевой модели на конфигурационном пространстве J^1Y. Его продолжение на *вертикальное конфигурационное пространство* J^1VY определяется как вертикальный касательный морфизм

$$\begin{aligned} L_V &= \mathrm{pr}_2 \circ VL\colon VJ^1Y \to \bigwedge^n T^*X, \\ \mathcal{L}_V &= \partial_V\mathcal{L} = \left(\dot{y}^i\partial_i + \dot{y}^i_\lambda\partial^\lambda_i\right)\mathcal{L}, \end{aligned} \tag{3.89}$$

к морфизму L (3.88). Соответствующие уравнения Эйлера—Лагранжа имеют вид

$$\dot{\delta}_i\mathcal{L}_V = \delta_i\mathcal{L} = 0, \tag{3.90а}$$

$$\delta_i\mathcal{L}_V = \partial_V\delta_i\mathcal{L} = 0, \tag{3.90б}$$

$$\partial_V = \dot{y}^i\partial_i + \dot{y}^i_\lambda\partial^\lambda_i + \dot{y}^i_{\mu\lambda}\partial^{\mu\lambda}_i.$$

Уравнения (3.90а) — это в точности уравнения Эйлера—Лагранжа для исходного лагранжиана L.

Замечание 3.6.1. Чтобы прояснить физический смысл уравнений (3.90б), предположим, что $Y \to X$ — векторное расслоение. Пусть s — решение уравнений Эйлера—Лагранжа (3.90а) и δs — его *поле Якоби*, т.е. $s + \varepsilon\delta s$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, — тоже решение уравнений Эйлера—Лагранжа (3.90а) с точностью до членов степени > 1 по малому параметру ε. Легко убедиться, что поле Якоби удовлетворяет уравнениям Эйлера—Лагранжа (3.90б). □

Фазовым пространством в теории поля на вертикальном касательном расслоении VY является *вертикальное расслоение Лежандра*

$$\Pi_{VY} = V^*VY \underset{VY}{\wedge} \Big(\overset{n-1}{\wedge} T^*X \Big).$$

Лемма 3.6.1. Существует изоморфизм расслоений

$$\Pi_{VY} \underset{VY}{\cong} V\Pi, \qquad p_i^\lambda \leftrightarrow \dot{p}_i^\lambda, \qquad q_i^\lambda \leftrightarrow p_i^\lambda, \tag{3.91}$$

записанный относительно голономных координат

$$(x^\lambda, y^i, \dot{y}^i, p_i^\lambda, q_i^\lambda)$$

на Π_{VY} и голономных координат

$$(x^\lambda, y^i, p_i^\lambda, \dot{y}^i, \dot{p}_i^\lambda)$$

на $V\Pi$. □

Доказательство. Аналогично известному изоморфизму расслоений TT^*X и T^*TX, изоморфизм

$$VV^*Y \underset{VY}{\cong} V^*VY, \quad p_i \leftrightarrow \dot{v}_i, \quad \dot{p}_i \leftrightarrow \dot{y}_i,$$

устанавливается проверкой законов преобразования голономных координат (x^λ, y^i, p_i) на V^*Y и (x^λ, y^i, v^i) на VY. □

Отсюда следует, что, как и лагранжев формализм, ковариантный гамильтонов формализм на вертикальном расслоении Лежандра $\Pi_{VY} = V\Pi$ может быть построен как вертикальное расширение на $V\Pi$ ковариантного гамильтонова формализма на Π, когда сопряженными парами канонических переменных являются $(y^i, \dot{p}_i^\lambda)$ и $(\dot{y}^i, p_i^\lambda)$.

В частности, всякий лагранжиан (3.89) порождает вертикальное отображение Лежандра

$$\widehat{L}_V = V\widehat{L}\colon VJ^1Y \underset{VY}{\longrightarrow} V\Pi, \tag{3.92}$$

$$p_i^\lambda = \dot{\partial}_i^\lambda \mathcal{L}_V = \pi_i^\lambda, \qquad \dot{p}_i^\lambda = \partial_V \pi_i^\lambda, \quad \partial_V = \dot{y}^i\partial_i + \dot{p}_i^\lambda \dot{\partial}_\lambda^i. \tag{3.93}$$

Благодаря изоморфизму (3.91) вертикальное расслоение Лежандра $V\Pi$ наделено канонической полисимплектической формой

$$\Omega_{VY} = \big[d\dot{p}_i^\lambda \wedge dy^i + dp_i^\lambda \wedge d\dot{y}^i\big] \wedge \omega \otimes \partial_\lambda. \tag{3.94}$$

Соответственно всякая гамильтонова форма

$$H = p_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - \mathcal{H}\omega$$

на расслоении Лежандра Π (см. первый том [11], §2.3) определяет гамильтонову форму

$$H_V = (Vh)^*\Xi_V = \big(\dot{p}_i^\lambda dy^i + p_i^\lambda d\dot{y}^i\big) \wedge \omega_\lambda - \mathcal{H}_V\omega, \tag{3.95}$$

$$\mathcal{H}_V = \partial_V\mathcal{H} = \big(\dot{y}^i\partial_i + \dot{p}_i^\lambda\dot{\partial}_\lambda^i\big)\mathcal{H},$$

на вертикальном расслоении Лежандра $V\Pi$, называемую *вертикальным расширением* H.

Предложение 3.6.2. Пусть

$$\gamma = dx^\lambda \otimes \big(\partial_\lambda + \gamma_\lambda^i + \gamma_{\lambda i}^\mu \dot{\partial}_\mu^i\big), \tag{3.96}$$

$$\gamma_\lambda^i = \dot{\partial}_\lambda^i \mathcal{H}, \quad \gamma^\lambda{}_{\lambda i} = -\partial_i \mathcal{H}, \tag{3.97}$$

— гамильтонова связность на $\Pi \to X$ для гамильтоновой формы H. Тогда ее вертикальное продолжение

$$V\gamma = \gamma + dx^\mu \otimes \left[\partial_V \gamma^i_\mu \dot\partial_i + \partial_V \gamma^\lambda_{\mu i} \dot\partial^i_\lambda\right] \tag{3.98}$$

на $V\Pi \to X$ (см. формулу (П. 61) во втором томе [12]) является гамильтоновой связностью для вертикальной гамильтоновой формы H_V (3.95), а ее компоненты удовлетворяют исходным уравнениям Гамильтона (3.97) и уравнениям

$$\dot\gamma^i_\mu = \partial^i_\mu \mathcal{H}_V = \partial_V \partial^i_\mu \mathcal{H}, \qquad \dot\gamma^\lambda_{\lambda i} = -\partial_i \mathcal{H}_V = -\partial_V \partial_i \mathcal{H}. \tag{3.99}$$

□

Этот факт устанавливается непосредственной проверкой. Как и в случае уравнений Эйлера—Лагранжа, уравнения Гамильтона (3.99) являются уравнениями для полей Якоби решений уравнений Гамильтона (3.97).

Перейдем теперь к заявленному выше суперсимметричному расширению теории поля на расслоении $Y \to X$. Оно строится как БРС-инвариантное обобщение теории поля на вертикальном касательном расслоении $VY \to X$ [79, 113, 138].

Рассмотрим вертикальное касательное расслоение VVY к касательному расслоению $VY \to X$ и простое градуированное многообразие $(VY, \mathcal{A}_{VVY})$, телом которого служит вертикальное касательное расслоение VY, а характеристическим расслоением — векторное расслоение $VVY \to VY$. Локальным базисом этого градуированного многообразия является $(c^i, \bar c^i)$, где $\{c^i, \bar c^i\}$ — базисы слоев расслоения V^*VY, дуальные голономным базисам $\{\partial_i, \dot\partial_i\}$ расслоения $VVY \to VY$. Градуированные векторные поля и градуированные 1-формы вводятся на VY как сечения векторных расслоений $\mathcal{V}_{VVY}$ и $\mathcal{V}^*_{VVY}$ соответственно. Комплексифицируем эти расслоения как $\mathbb{C} \bigotimes_X \mathcal{V}_{VVY}$ и $\mathbb{C} \bigotimes_X \mathcal{V}^*_{VVY}$. *БРС-оператором* на градуированных функциях на VY называется комплексное градуированное векторное поле

$$u_Q = c^i \partial_i + i\dot y^i \frac{\partial}{\partial \bar c^i}. \tag{3.100}$$

Оно является нильпотентным, т. е. $u_Q^2 = 0$.

Конфигурационным пространством суперсимметричной теории поля служит простое градуированное многообразие $(VJ^1Y, \mathcal{A}_{VVJ^1Y})$, чьим характеристическим векторным расслоением является вертикальное касательное расслоение $VVJ^1Y \to VJ^1Y$ к расслоению $VJ^1Y \to X$. Его локальный базис $(c^i, \bar c^i, c^i_\lambda, \bar c^i_\lambda)$ — это послойный базис расслоения V^*VJ^1Y, дуальный голономному базису $\{\partial_i, \dot\partial_i, \partial^\lambda_i, \dot\partial^\lambda_i\}$ слоев расслоения $VVJ^1Y \to VJ^1Y$. Аффинное расслоение

$$\pi^1_0 \colon VJ^1Y \to VY$$

и соответствующий вертикальный касательный морфизм

$$V\pi^1_0 \colon VVJ^1Y \to VVY$$

порождают соответствующий морфизм (3.24) градуированных многообразий

$$(VJ^1Y, \mathcal{A}_{VVJ^1Y}) \to (VY, \mathcal{A}_{VVY}).$$

Введем оператор полной производной

$$d_\lambda = \partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + \dot y^i_\lambda \dot\partial_i + c^i_\lambda \frac{\partial}{\partial c^i} + \bar c^i_\lambda \frac{\partial}{\partial \bar c^i}.$$

Тогда закон координатных преобразований базисных элементов c^i_λ и $\bar c^i_\lambda$ принимает вид

$$c'^i_\lambda = d_\lambda c'^i, \quad \bar c'^i_\lambda = d_\lambda \bar c'^i. \tag{3.101}$$

Поэтому c^i_λ и $\bar c^i_\lambda$ можно условно интерпретировать как струи базисных элементов c^i и $\bar c^i$. Подчеркнем, что это не определение струй градуированных расслоений [136]. Закон координатных преобразований (3.101) позволяет обобщить БРС-оператор u_Q (3.100) на комплексные градуированные векторные поля

$$J^1 u_Q = u_Q + c^i_\lambda \partial^\lambda_i + i\dot y^i_\lambda \frac{\partial}{\partial \bar c^i_\lambda} \tag{3.102}$$

на VJ^1Y (сравните с формулой (1.52) в первом томе [11]).

Аналогичным образом может быть введено простое градуированное многообразие с характеристическим векторным расслоением $VVJ^kY \to VJ^kY$. Его локальным базисом является

$$\left(c^i, \bar c^i, c^i_\Lambda, \bar c^i_\Lambda\right), \quad 0 < |\Lambda| \leqslant k.$$

Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} \partial_c &= c^i \partial_i + c^i_\lambda \partial^\lambda_i + c^i_{\lambda\mu} \partial^\lambda_i + \dots, \\ \partial_{\bar c} &= \bar c^i \partial_i + \bar c^i_\lambda \partial^\lambda_i + \bar c^i_{\lambda\mu} \partial^\lambda_i + \dots, \\ d_\lambda &= \partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + c^i_\lambda \frac{\partial}{\partial c^i} + \bar c^i_\lambda \frac{\partial}{\partial \bar c^i} + \dots . \end{aligned} \tag{3.103}$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$d_\lambda \partial_c = \partial_c d_\lambda, \qquad d_\lambda \partial_{\bar c} = \partial_{\bar c} d_\lambda. \tag{3.104}$$

Главным принципом суперсимметричного расширения лагранжева формализма является инвариантность относительно БРС-преобразований (3.102). БРС-инвариантным обобщением лагранжиана L_V (3.89) является градуированная n-форма

$$L_S = L_V + i\partial_c \partial_{\bar c} \mathcal{L}\omega \tag{3.105}$$

на VJ^1Y такая, что $\mathbf{L}_{Ju_Q} L_S = 0$. Соответствующие уравнения Эйлера—Лагранжа определяются как ядро оператора Эйлера—Лагранжа

$$\mathcal{E}_{L_S} = \left(dy^i \delta_i + d\dot y^i \dot\delta_i + dc^i \frac{\delta}{\delta c^i} + d\bar c^i \frac{\delta}{\delta \bar c^i} \right) \mathcal{L}_S \wedge \omega$$

и имеют вид

$$\dot\delta_i \mathcal{L}_S = \delta_i \mathcal{L} = 0, \tag{3.106а}$$

$$\delta_i \mathcal{L}_S = \delta_i \mathcal{L}_V + i\partial_{\bar c}\, \partial_c \delta_i \mathcal{L} = 0, \tag{3.106б}$$

$$\frac{\delta}{\delta c^i} \mathcal{L}_S = -i\partial_{\bar c}\, \delta_i \mathcal{L} = 0, \tag{3.106в}$$

$$\frac{\delta}{\delta \bar c^i} \mathcal{L}_S = i\partial_c \delta_i \mathcal{L} = 0, \tag{3.106г}$$

где использованы соотношения (3.104). Уравнения (3.106а) — это уравнения Эйлера—Лагранжа для первоначального лагранжиана L полевой модели, тогда как (3.106б)–(3.106г) представляют собой уравнения для поля Якоби

$$\delta y^i = \bar\varepsilon c^i + \bar c^i \varepsilon + i\,\bar\varepsilon \varepsilon \dot y^i$$

с точностью до членов степени > 2 по нечетным параметрам ε и $\bar\varepsilon$.

Фазовым пространством суперсимметричного расширения теории поля является комплексифицированное простое градуированное многообразие $(V\Pi, \mathcal{A}_{VV\Pi})$, телом которого служит вертикальное касательное расслоение $V\Pi$, а характеристическим расслоением — векторное расслоение $VV\Pi \to V\Pi$. Оно имеет локальный базис $(c^i, \bar{c}^i, c^\lambda_i, \bar{c}^\lambda_i)$, элементы которого c^λ_i и $\bar{c}^\lambda_i$ преобразуются по тем же законам, что и координаты импульсов p^λ_i и $\dot{p}^\lambda_i$. Градуированные векторные поля и градуированные 1-формы на $V\Pi$ вводятся как сечения векторных расслоений $\mathbb{C} \bigotimes\limits_X \mathcal{V}_{VV\Pi}$ и $\mathbb{C} \bigotimes\limits_X \mathcal{V}^*_{VV\Pi}$ соответственно.

Принимая во внимание закон координатных преобразований элементов c^λ_i и $\bar{c}^\lambda_i$, БРС-оператор u_Q (3.100) на VY расширяется до комплексного градуированного векторного поля

$$\widetilde{u}_Q = \partial_c + i\dot{y}^i \frac{\partial}{\partial \bar{c}^i} + i\dot{p}^\lambda_i \frac{\partial}{\partial \bar{c}^\lambda_i} \tag{3.107}$$

на $V\Pi$. БРС-инвариантным расширением полисимплектической формы Ω_{VY} (3.94) является TX-значная градуированная форма

$$\Omega_S = \left[d\dot{p}^\lambda_i \wedge dy^i + dp^\lambda_i \wedge d\dot{y}^i + i\left(d\,\bar{c}^\lambda_i \wedge dc^i - d\bar{c}^i \wedge dc^\lambda_i\right)\right] \wedge \omega \otimes \partial_\lambda,$$

где $\left(c^i, -i\,\bar{c}^\lambda_i\right)$ и $\left(\bar{c}^i, ic^\lambda_i\right)$ — сопряженные пары канонических переменных. Пусть γ — гамильтонова связность для исходной гамильтоновой формы H полевой модели на фазовом пространстве Π. Ее двойное вертикальное продолжение $VV\gamma$ на $VV\Pi \to X$ (см. формулу (П.61) во втором томе [12]) является линейным морфизмом над связностью $V\gamma$ на $V\Pi \to X$ и, таким образом, определяет композиционную градуированную связность (3.34)

$$(VV\gamma)_S = V\gamma + dx^\mu \otimes \left[\bar{g}^i_\mu \frac{\partial}{\partial \bar{c}^i} + \bar{g}^\lambda_{\mu i} \frac{\partial}{\partial \bar{c}^\lambda_i} + g^i_\mu \frac{\partial}{\partial c^i} + g^\lambda_{\mu i} \frac{\partial}{\partial c^\lambda_i}\right]$$

на $V\Pi \to X$, компоненты которой g и $\bar{g}$ имеют вид

$$\bar{g}^i_\lambda = \partial_{\bar{c}} \partial^i_\lambda \mathcal{H}, \quad \bar{g}^\lambda_{\lambda i} = -\partial_{\bar{c}} \partial_i \mathcal{H}, \quad g^i_\lambda = \partial_c \partial^i_\lambda \mathcal{H}, \quad g^\lambda_{\lambda i} = -\partial_c \partial_i \mathcal{H},$$
$$\partial_c = c^i \partial_i + c^\lambda_i \partial^i_\lambda, \quad \partial_{\bar{c}} = \bar{c}^i \partial_i + \bar{c}^\lambda_i \partial^i_\lambda.$$

Эта композиционная градуированная связность удовлетворяет уравнению

$$(VV\gamma)_S \rfloor \Omega_S = -dH_S,$$

и поэтому может рассматриваться как *гамильтонова градуированная связность* для *гамильтоновой градуированной формы*

$$H_S = \left[\dot{p}^\lambda_i dy^i + p^\lambda_i d\dot{y}^i + i\left(\bar{c}^\lambda_i dc^i + d\bar{c}^i c^\lambda_i\right)\right]\omega_\lambda - \mathcal{H}_S \omega, \tag{3.108}$$
$$\mathcal{H}_S = (\partial_V + i\partial_{\bar{c}}\,\partial_c)\mathcal{H},$$

на $V\Pi$. Нетрудно убедиться, что эта градуированная форма БРС-инвариантна, т. е.

$$\mathbf{L}_{\widetilde{u}_Q} H_S = 0.$$

Таким образом, H_S (3.108) является искомым суперсимметричным расширением гамильтоновой формы H. Соответствующие уравнения Гамильтона для H_S имеют вид

$$y^i_\lambda = \dot{\partial}^i_\lambda \mathcal{H}_S = \partial^i_\lambda \mathcal{H}, \qquad p^\lambda_{\lambda i} = -\dot{\partial}_i \mathcal{H}_S = -\partial_i \mathcal{H}, \tag{3.109а}$$

$$\dot{y}^i_\lambda = \partial^i_\lambda \mathcal{H} = \left(\partial_V + i\partial_{\bar{c}}\,\partial_c\right)\partial^i_\lambda \mathcal{H}, \qquad \dot{p}^\lambda_{\lambda i} = -\partial_i \mathcal{H}_S = -\left(\partial_V + i\partial_{\bar{c}}\,\partial_c\right)\partial_i \mathcal{H}, \tag{3.109б}$$

$$c^i_\lambda = i\frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial \bar{c}^\lambda_i} = -\partial_c \partial^i_\lambda \mathcal{H}, \qquad c^\lambda_{\lambda i} = i\frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial \bar{c}^i} = -\partial_c \partial_i \mathcal{H}, \tag{3.109в}$$

$$\bar{c}^i_\lambda = -i\frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial \bar{c}^\lambda_i} = -\partial_{\bar{c}}\,\partial^i_\lambda \mathcal{H}, \qquad \bar{c}^\lambda_{\lambda i} = -i\frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial \bar{c}^i} = -\partial_{\bar{c}}\,\partial_i \mathcal{H}. \tag{3.109г}$$

При этом уравнения (3.109а) — это уравнения Гамильтона для исходной гамильтоновой формы H, тогда как уравнения (3.109б)–(3.109г) описывают поля Якоби

$$\delta y^i = \bar{\varepsilon}\bar{c}^i + \bar{c}^i\varepsilon + i\,\bar{\varepsilon}\varepsilon\dot{y}^i, \qquad \delta p_i^\lambda = \bar{\varepsilon}\bar{c}_i^\lambda + \bar{c}_i^\lambda\varepsilon + i\,\bar{\varepsilon}\varepsilon\dot{p}_i^\lambda.$$

БРС-инвариантность построенной суперсимметричной теории поля автоматически расширяется до инвариантности относительно супергруппы Ли $ISp(2)$, если расслоение $Y \to X$ имеет аффинные функции перехода (в частности, является аффинным расслоением). Почти все известные полевые модели относятся к этому типу. В этом случае вертикальное касательное расслоение VY допускает вертикальное расщепление (см. (1.27) в первом томе [11]) относительно голономных послойных координат $\dot{y}^i$ на VY, функции перехода которых не зависят от координат y^i. Поэтому реперы $\{\partial_i\}$ и $\{\dot{\partial}_i\}$ имеют одни и те же функции перехода, и соответственно одни и те же функции перехода имеют дуальный к ним кореперы $\{c^i\}$ и $\{\bar{c}^i\}$. Тогда градуированные векторные поля

$$\begin{gathered} u_{\bar{Q}} = \bar{c}^i\partial_i - i\dot{y}^i\frac{\partial}{\partial\bar{c}^i}, \\ u_K = c^i\frac{\partial}{\partial\bar{c}^i}, \quad u_{\bar{K}} = \bar{c}^i\frac{\partial}{\partial c^i}, \\ u_C = c^i\frac{\partial}{\partial c^i} - \bar{c}^i\frac{\partial}{\partial\bar{c}^i} \end{gathered} \tag{3.110}$$

определены на теле VY. Легко проверить, что градуированные векторные поля (3.100) и (3.110) образуют супералгебру Ли супергруппы Ли ISp(2):

$$\begin{gathered} [u_Q, u_Q] = [u_{\bar{Q}}, u_{\bar{Q}}] = [u_{\bar{Q}}, u_Q] = [u_K, u_Q] = [u_{\bar{K}}, u_{\bar{Q}}] = 0, \\ [u_K, u_{\bar{Q}}] = u_Q, \quad [u_{\bar{K}}, u_Q] = u_{\bar{Q}}, \quad [u_K, u_{\bar{K}}] = u_C, \\ [u_C, u_K] = 2u_K, \quad [u_C, u_{\bar{K}}] = -2u_{\bar{K}}. \end{gathered} \tag{3.111}$$

Подобно (3.102), рассмотрим струйные продолжения градуированных векторных полей (3.110) на VJ^1Y. Используем компактное обозначение $u = u^a\partial_a$. Тогда справедлива формула

$$J^1u = u + d_\lambda u^a\partial_a^\lambda.$$

В результате получаем

$$\begin{gathered} J^1u_{\bar{Q}} = u_{\bar{Q}} + \bar{c}_\lambda^i\partial_i^\lambda - i\dot{y}_\lambda^i\frac{\partial}{\partial\bar{c}_\lambda^i}, \\ J^1u_K = u_K + c_\lambda^i\frac{\partial}{\partial\bar{c}_\lambda^i}, \quad J^1u_{\bar{K}} = u_{\bar{K}} + \bar{c}_\lambda^i\frac{\partial}{\partial c_\lambda^i}, \\ J^1u_C = u_C = c_\lambda^i\frac{\partial}{\partial c_\lambda^i} - \bar{c}_\lambda^i\frac{\partial}{\partial\bar{c}_\lambda^i}. \end{gathered} \tag{3.112}$$

Нетрудно установить, что лагранжиан L_S (3.105) суперсимметричной теории поля инвариантен относительно преобразований с генераторами (3.112) и что градуированные векторные поля (3.102) и (3.112) образуют супералгебру Ли (3.111).

Аналогично градуированные векторные поля (3.110) могут быть подняты на VII по формуле

$$\widetilde{u} = u - (-1)^{[y^a]([p_b]+[u^b])}\partial_a u^b p_b^\lambda\frac{\partial}{\partial p_a^\lambda}.$$

В результате получаем

$$\begin{gathered} \widetilde{u}_{\bar{Q}} = \partial_{\bar{c}} - i\dot{y}^i\frac{\partial}{\partial\bar{c}^i} - i\dot{p}_i^\lambda\frac{\partial}{\partial\bar{c}_i^\lambda}, \\ \widetilde{u}_K = c^i\frac{\partial}{\partial\bar{c}^i} + c_i^\lambda\frac{\partial}{\partial\bar{c}_i^\lambda}, \qquad \widetilde{u}_{\bar{K}} = \bar{c}^i\frac{\partial}{\partial c^i} + \bar{c}_i^\lambda\frac{\partial}{\partial c_i^\lambda}, \\ \widetilde{u}_C = c^i\frac{\partial}{\partial c^i} + c_i^\lambda\frac{\partial}{\partial c_i^\lambda} - \bar{c}^i\frac{\partial}{\partial\bar{c}^i} - \bar{c}_i^\lambda\frac{\partial}{\partial\bar{c}_i^\lambda}. \end{gathered} \tag{3.113}$$

Прямые вычисления показывают что гамильтонова градуированная форма H_S (3.108) суперсимметричной теории поля инвариантна относительно преобразований с генераторами (3.113). Как и в предыдущем случае, градуированные векторные поля (3.107) и (3.113) тоже образуют супералгебру Ли (3.111).

§ 7. Суперсвязности Неемана—Куилена

В этом параграфе мы рассмотрим особый класс суперсвязностей, введенных Ю. Нееманом в физической литературе [123, 124, 125] и Д. Куиленом в математической литературе [115, 131]. Соответствующие расслоения, однако, не принадлежат ни к классу градуированных многообразий и расслоений, ни к классу суперрасслоений. Суперсвязности Неемана—Куилена применяются для вычисления характера Чженя в K-теории (см. ниже в этом параграфе), в некоммутативной геометрии [126], БРСТ-формализме [104] и в некоторых объединенных моделях физики высоких энергий (см. ниже в этом параграфе).

Пусть X — N-мерное гладкое многообразие и $\wedge T^*X$ — внешнее расслоение над X. Пусть E_0 и E_1 — два векторных расслоения над X размерности соответственно n и m. Построим векторное расслоение

$$Q = \wedge T^*X \underset{X}{\otimes} E = \wedge T^*X \underset{X}{\otimes}\left(E_0 \underset{X}{\oplus} E_1\right), \tag{3.114}$$

называемое в дальнейшем *телом* НК-суперрасслоения (см. ниже Определение 3.7.1) или просто НК-суперрасслоением.

Типичным слоем НК-суперрасслоения Q является векторное пространство

$$V = \wedge\mathbb{R}^N \otimes (B_0 \oplus B_1), \tag{3.115}$$

где B_0 и B_1 — типичные слои соответственно векторных расслоений E_0 и E_1. Типичный слой V (3.115) может быть наделен структурой суперпространства $B^{n|m}$ над алгеброй Грассмана $\Lambda = \wedge\mathbb{R}^N$. Это градуированная оболочка градуированного векторного пространства $B = B_0 \oplus B_1$, где B_0 и B_1 рассматриваются соответственно как четное и нечетное подпространства B. НК-суперрасслоение Q наследует эту градуировку, поскольку функции переходов векторных расслоений E_0 и E_1 взаимно независимы, тогда как функции перехода кокасательного расслоения T^*X сохраняют $\mathbb{Z}$-градуировку алгебры Грассмана $\wedge\mathbb{R}^N$.

В то же время НК-суперрасслоение (3.114) не является супервекторным расслоением над X, поскольку его функции перехода — не морфизмы Λ-модулей. Очевидно, что НК-суперрасслоение Q можно рассматривать как тензорное произведение векторного расслоения E и внешнего расслоения $\wedge T^*X$, определяющего простое градуированное многообразие (X, Ω^*_X), где Ω^*_X — пучок внешних форм на X. Как уже отмечалось, векторное расслоение $\mathcal{V}_E$ градуированных векторных полей и векторное расслоение $\mathcal{V}^*_E$ градуированных 1-форм (см. § 3.2) имеют локальную структуру НК-расслоения (см. локальные изоморфизмы (3.19) и (3.36)).

Обозначим $Q(X)$ и Q_X соответственно пространство глобальных сечений НК-суперрасслоения Q и пучок его сечений. При этом ясно, что $Q(X) = Q_X(X)$. Пространство $Q(X)$ имеет естественную структуру локально свободного $C^\infty(X)$-модуля, тогда как Q_X — это локально свободный пучок C^∞_X-модулей ранга $2^N(n+m)$. В то же время, имея в виду, что (X, Ω^*_X) — пространство локальных градуированных колец, можно снабдить пространство

$$Q(X) = \Omega^*(X) \otimes E(X)$$

структурой градуированного локально свободного $\Omega^*(X)$-модуля, а

$$Q_X = C^\infty_X \otimes \wedge\mathbb{R}^N \otimes B = \Omega^*_X \otimes B$$

— структурой локально свободного пучка Ω^*_X-модулей ранга $(n+m)$. Обозначим $Q(X)$ и Q_X, наделенные упомянутыми выше структурами, соответственно как $\bar{Q}(X)$ и $\bar{Q}_X$.

Определение 3.7.1. Пара $\hat{Q} = (Q, \bar{Q}(X))$ (или пара $(Q, \bar{Q}_X)$) называется *суперрасслоением Неемана—Куилена* или *НК-суперрасслоением*. □

Пусть $U \subset X$ — область тривиализации векторного расслоения $E \to X$ и $\{c_A\}$ и $\{c_i\}$ — послойные базисы соответственно векторных расслоений E_0 и E_1 над U. Тогда всякий элемент $q \in \bar{Q}(X)$ имеет вид

$$q = q^A c_A + q^i c_i,$$

где q^A, q^i — локальные внешние формы на U. Элемент q является однородным, если его грассманова степень удовлетворяет соотношениям

$$|q| = [q^A] = [q^i] + 1, \quad [q^A] = |q^A| \bmod 2, \quad [q^i] = |q^i| \bmod 2.$$

При выборе другой области тривиализации $U' \subset X$ расслоения E соответствующие функции перехода имеют вид

$$q'^A = \rho^A_B q^B, \qquad q'^i = \rho^i_j q^j, \tag{3.116}$$

где ρ^A_B, ρ^i_j — локальные гладкие функции на $U \cap U'$. Мы будем называть тройку $(U; q^A, q^i)$ вместе с функциями перехода (3.116) *областью тривиализации* НК-суперрасслоения $\hat{Q}$.

Связность на НК-суперрасслоении $(Q, \bar{Q}(X))$ может быть введена в соответствии с Определением (1.2.2). Легко видно, что в случае кольца $\Omega^*(X)$ дифференцирование d^1 в Предложении 1.1.6 — это в точности внешний дифференциал d.

Определение 3.7.2. Связность на НК-суперрасслоении $(Q, \bar{Q}(X))$, называемая *НК-суперсвязностью*, определяется как морфизм

$$\nabla\colon \bar{Q}(X) \to \bar{Q}(X),$$

который удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla(\phi q) = (d\phi)q + (-1)^{|f|} f \nabla(q), \quad \forall\, q \in \bar{Q}(X), \quad \forall\, \phi \in \Omega^*(X). \tag{3.117}$$

□

Следует подчеркнуть, что НК-суперсвязность определяется как связность на $\Omega^*(X)$-модуле $\bar{Q}(X)$, а не $C^\infty(X)$-модуле $Q(X)$. Поэтому она не является обычной связностью на гладком векторном расслоении $Q \to X$.

Правило Лейбница (3.117) предполагает, что НК-суперсвязность представляет собой нечетный морфизм. Например, на тривиальном расслоении $E \to X$ существует тривиальная НК-суперсвязность $\nabla = d$. Пусть Γ_0 и Γ_1 будут линейные связности соответственно на векторных расслоениях E_0 и E_1, а $\Gamma_0 \oplus \Gamma_1$ — линейная связность на расслоении $E \to X$. Тогда ковариантный дифференциал ∇^Γ относительно связности Γ является НК-суперсвязностью

$$\nabla^\Gamma(q) = (dx^\lambda \wedge \partial_\lambda - \Gamma)(q). \tag{3.118}$$

На области тривиализации U НК-суперрасслоения НК-суперсвязность (3.118) имеет вид

$$\nabla^\Gamma(q) = \left(dq^A - dx^\lambda \wedge \Gamma_{0\lambda}{}^A{}_B q^B\right) c_A + \left(dq^i - dx^\lambda \wedge \Gamma_{1\lambda}{}^i{}_j q^j\right) c_i, \tag{3.119}$$

где $\Gamma_{0\lambda}{}^A{}_B$, $\Gamma_{1\lambda}{}^i{}_j$ — локальные компоненты связностей на U с обычными законами преобразований относительно функций перехода ρ^A_B и ρ^i_j векторных расслоений E_0 и E_1 соответственно.

Как следствие правила Лейбница (3.117) НК-суперсвязности на НК-суперрасслоении образуют аффинное пространство, моделируемое над $\Omega^*(X)_0$-модулем $\mathrm{End}\,(\overline{Q}(X))_1$ нечетных эндоморфизмов $\overline{Q}(X)$, т.е.

$$\nabla' = \nabla + L, \tag{3.120}$$

где L — нечетный элемент из $\mathrm{End}\,(\overline{Q}(X))$.

Легко видно, что $\Omega^*(X)$-модуль $\mathrm{End}\,(\overline{Q}(X))$ является $C^\infty(X)$-модулем сечений векторного расслоения

$$\wedge T^*X \underset{X}{\otimes} E \underset{X}{\otimes} E^* \to X.$$

На области тривиализации U НК-суперрасслоения $\widehat{Q}$ всякий элемент из $\mathrm{End}\,(\overline{Q}(X))$ представим суперматрицей

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix}, \tag{3.121}$$

компоненты которой являются локальными внешними формами на U. Закон преобразования этой суперматрицы при морфизмах перехода (3.116) имеет вид

$$L' = \widehat{\rho} L \widehat{\rho}^{-1},$$

где $\widehat{\rho}$ — это $(n+m)\times(n+m)$-матрицы

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho^A_B & 0 \\ 0 & \rho^i_j \end{pmatrix}, \tag{3.122}$$

компонентами которых служат функции перехода ρ^A_B и ρ^i_j.

В соответствии с выражением (3.120) всякая НК-суперсвязность на области тривиализации НК-суперрасслоения $\widehat{Q}$ может быть записана в виде

$$\nabla = d + \vartheta, \tag{3.123}$$

где ϑ — локальная нечетная суперматрица (3.121), т.е. ее компоненты ϑ_1, ϑ_4 являются нечетными внешними формами, а компоненты ϑ_2, ϑ_3 — четными внешними формами. Ясно, что разложение в сумму (3.123) не сохраняется при морфизмах перехода (3.116), и мы имеем закон преобразований

$$\vartheta' = \widehat{\rho}\vartheta\widehat{\rho}^{-1} - d\widehat{\rho}\rho^{-1},$$

где $d\widehat{\rho}$ — суперматрицы, компонентами которых являются 1-формы $d\rho^A_B$ и $d\rho^i_j$.

В соответствии с Определением 1.2.5 *кривизной* НК-суперсвязности ∇ является морфизм

$$R = \nabla^2 \colon \overline{Q}(X) \to \overline{Q}(X). \tag{3.124}$$

Естественно, что кривизна тривиальной НК-суперсвязности $\nabla = d$ равна 0. Кривизна НК-суперсвязности ∇^Γ (3.119) имеет вид

$$R(q) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R_{\lambda\mu}{}^A{}_B dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge q^B c_A & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}R_{\lambda\mu}{}^i{}_j dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge q^j c_i, \end{pmatrix}, \tag{3.125}$$

где $R_{\lambda\mu}{}^A{}_B$, $R_{\lambda\mu}{}^i{}_j$ — компоненты кривизны линейных связностей Γ_0 и Γ_1 соответственно. Если задано локальное разложение (3.123) НК-суперсвязности ∇, ее кривизна (3.124) представима в виде суммы

$$R = d(\vartheta) + \vartheta^2 \tag{3.126}$$

и имеет закон преобразований $R' = \widehat{\rho} R \widehat{\rho}^{-1}$ при морфизмах перехода (3.116). Отсюда следует, что кривизна НК-суперсвязности является четным эндоморфизмом $\Omega^*(X)$-модуля $\bar{Q}(X)$.

Замечание 3.7.1. Понятия НК-суперрасслоения и НК-суперсвязности естественным образом распространяются на случай комплексного векторного расслоения $E \to X$ и внешней алгебры $\mathbb{C} \otimes \Omega^*(X)$ комплексных внешних форм на X. □

Теперь остановимся коротко на следующих двух приложениях НК-суперсвязностей.

Первое касается объединенных моделей в физике высоких энергий (см. [104, 123, 124, 133]). Пусть E_0 — векторное расслоение со структурной группой G, интерпретируемой в качестве группы внутренних симметрий в теории частиц (например, $SU(2)$), а $E_1 \to X$ — линейное расслоение. Тогда типичным слоем НК-суперрасслоения Q (3.114) является суперпространство $B^{n|1}$. Пусть A — ассоциированная связность на расслоении $E_0 \to X$, т. е. ее компоненты A_λ^p — калибровочные потенциалы, отвечающие группе Ли G. Рассмотрим НК-суперсвязность, являющуюся суммой

$$\nabla = \nabla^A + L$$

НК-суперсвязности $\nabla^A(q)$ (3.118) и нечетного эндоморфизма

$$L = \begin{pmatrix} 0 & i\phi^* \\ i\phi & 0 \end{pmatrix},$$

где ϕ является скалярным полем, интерпретируемым как хиггсовское поле. Физическая идея этой модели состоит в том, что калибровочные потенциалы и хиггсовское поле рассматриваются вместе как компоненты одной и той же НК-суперсвязности.

Замечание 3.7.2. Следует подчеркнуть, что авторы [104, 123, 124] следуют правилу умножения суперматриц

$$\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & C' \\ D' & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \wedge A' + (-1)^{|D'|} C \wedge D' & A \wedge C' + (-1)^{|B'|} C \wedge B' \\ (-1)^{|A'|} D \wedge A' + B \wedge D' & (-1)^{|C'|} D \wedge C' + B \wedge B' \end{pmatrix}.$$

Это умножение не удовлетворяет соотношениям (3.6), (3.7). □

Второе применение НК-суперсвязностей, которые мы здесь упомянем, связано с вычислением характера Чженя [105, 115, 131]. На НК-суперрасслоении Q (3.114) рассмотрим НК-суперсвязность

$$\nabla = \nabla^\Gamma + tL, \tag{3.127}$$

где ∇^Γ — НК-суперсвязность (3.119), L — нечетный элемент $\mathrm{End}\left(\bar{Q}(X)\right)$ и t — вещественный параметр. Кривизна (3.124) НК-суперсвязности (3.127) имеет вид

$$R = t^2 L^2 + t\left[\nabla^\Gamma, L\right] + \left(\nabla^\Gamma\right)^2,$$

где $\left(\nabla^\Gamma\right)^2$ — кривизна (3.125) НК-суперсвязности ∇^Γ (3.119). Запишем

$$\mathrm{ch}_t = \mathrm{Str}\left(\exp\{R\}\right) = \sum_{k=0} \mathrm{Str}\left(\left(\nabla^\Gamma + L\right)^{2k}\right). \tag{3.128}$$

Этот ряд сходится, поскольку R является сечением расслоения конечномерных алгебр над X. Нетрудно убедиться, что

$$\mathrm{ch}_{t=0} = \mathrm{ch}\,(E_0) - \mathrm{ch}\,(E_1), \tag{3.129}$$

где $\mathrm{ch}\,(E_0)$, $\mathrm{ch}\,(E_1)$ — характеры Чженя (см. формулу (3.57) в первом томе [11]) комплексных векторных расслоений E_0 и E_1 (с точностью до нормировочного множителя $i/2\pi$). Выражение (3.129) — это характер Чженя разности векторных расслоений $E_0 \ominus E_1$ в K-теории комплексных векторных расслоений на многообразии X [6, 23]

(см. соотношение (A.2) в Приложении A). Ключевым является тот факт, что когомологии Де Рама внешних форм ch_t (3.128) и $\mathrm{ch}_{t=0}$ (3.129) совпадают. Это вытекает из следующих двух утверждений.

Предложение 3.7.3. Для произвольных НК-суперсвязности ∇ и нечетного эндоморфизма $T \in \mathrm{End}\left(\bar{Q}(X)\right)$ справедливо равенство

$$d\big(\mathrm{Str}\,(T)\big) = \mathrm{Str}\,\big([\nabla, T]\big). \tag{3.130}$$

□

Доказательство. Так как равенство (3.130) локально, можно предположить, что ∇ имеет разложение (3.123) и T является суммой суперматриц вида $\phi_k T_k$, где ϕ_k — внешние формы, а T_k — постоянные суперматрицы. Принимая во внимание соотношение (3.7), получаем

$$\mathrm{Str}\,\big([d+\vartheta, \phi_k T_k]\big) = \mathrm{Str}\,\big(d\phi_k T_k\big) = d\big(\mathrm{Str}\,(\phi_k T_k)\big).$$

□

Пусть $T = R^k$, где R — кривизна НК-суперсвязности ∇. Поскольку

$$\mathrm{Str}\,\big([\nabla, R^k]\big) = 0,$$

из равенства (3.130) следует, что форма $\mathrm{Str}\big(R^k\big)$ замкнута.

Предложение 3.7.4. [131]. Для кривизны R НК-суперсвязности ∇ класс когомологий Де Рама внешней формы $\mathrm{Str}\,\big(R^k\big)$ не зависит от выбора НК-суперсвязности ∇. □

Совпадение классов когомологий Де Рама форм ch_t (3.128) и $\mathrm{ch}_{t=0}$ (3.129) позволяет анализировать характер Чженя при различном выборе суперматриц и параметра t в выражении (3.127).

Глава 4

Связности в БРСТ-формализме

Существуют различные подходы к построению БРСТ-формализма. Мы здесь коснемся только тех его элементов, где используются многообразия струй и связности. В частности, это техника так называемых локальных форм и когомологий, а также БРСТ-тензорных полей, действие на которые БРСТ-оператора выражается в терминах БРСТ-связностей. Мы начнем изложение с аппарата струй бесконечного порядка, распространяемого на нечетные духовые поля, так называемые духи для духов и антиполя.

§ 1. Связность на струях бесконечного порядка

В первом томе [11], § 1.5 были приведены канонические горизонтальные расщепления (1.55) и (1.56) над многообразием струй J^1Y касательного и кокасательного расслоений к расслоению $Y \to X$. Выбором связности $\Gamma\colon Y \to J^1Y$ на расслоении $Y \to X$ эти канонические расщепления превращаются в обычные горизонтальные расщепления над Y, которые уже не являются каноническими. Аналогично касательное и кокасательное расслоения к многообразию k-струй J^kY тоже допускают канонические горизонтальные расщепления (см. ниже выражения (4.21) и (4.22)), но эти расщепления осуществляются над многообразием $(k+1)$-струй $J^{k+1}Y$. Поэтому конструкция канонических горизонтальных расщеплений для многообразий струй конечного порядка не является замкнутой. Можно, однако, надеяться, что в случае пространства струй бесконечного порядка $J^\infty Y$ соответствующие канонические горизонтальные расщепления над $J^\infty Y$ являются истинными горизонтальными расщеплениями, отвечающими некоторой канонической связности на $J^\infty Y$. Эта связность задает каноническое разложение внешних форм на многообразиях струй и соответствующее разбиение внешнего дифференциала

$$d = d_H + d_V$$

на горизонтальную и вертикальную части. Эти разложения приводят к так называемому вариационному бикомплексу (см. ниже (4.38)) и алгебраическому подходу к вариационному исчислению (см. § 4.2). Этот бикомплекс обобщается на градуированные алгебры и играет важную роль в БРСТ-моделях, формулируемых в терминах струй (см. § 4.4).

Начнем с краткого изложения аппарата струй высшего порядка сечений расслоения $Y \to X$ [78, 98, 137, 139]. Это прямое обобщение понятия струй первого и второго порядков. Мы следуем обозначениям первого тома [11], § 1.5.

Пусть $Y \to X$ — гладкое расслоение с послойными координатами (x^λ, y^i). Обозначим Λ, $|\Lambda| = r$, набор индексов $(\lambda_r \dots \lambda_1)$ по модулю их перестановок. Назовем его мультииндексом. Соответственно пусть $\Lambda + \Sigma$ — мультииндекс

$$\Lambda + \Sigma = (\lambda_r \dots \lambda_1 \sigma_k \dots \sigma_1)$$

по модулю перестановок, а $\Lambda\Sigma$ — объединение мультииндексов

$$\Lambda\Sigma = (\lambda_r \dots \lambda_1 \sigma_k \dots \sigma_1),$$

где индексы λ_i и σ_j не переставляются между собой.

Вводится оператор *полной производной*

$$d_\lambda^{(k)} = \partial_\lambda + \sum_{|\Lambda|=0}^{k} y^i_{\Lambda+\lambda}\partial_i^\Lambda. \tag{4.1}$$

Мы обычно будем опускать индекс (k) в этом выражении, если понятно о чем идет речь. Используем компактные обозначения

$$\partial_\Lambda = \partial_{\lambda_r} \circ \ldots \circ \partial_{\lambda_1}, \qquad d_\Lambda = d_{\lambda_r} \circ \ldots \circ d_{\lambda_1}, \qquad \Lambda = (\lambda_r \ldots \lambda_1).$$

Многообразие струй порядка r сечений расслоения $Y \to X$ (или просто многообразие r-струй расслоения $Y \to X$) определяется как объединение

$$J^rY = \bigcup_{x\in X} j^r_x s \tag{4.2}$$

классов эквивалентности $j^r_x s$ сечений s расслоения $Y \to X$ таких, что различные сечения s и s' принадлежат одному и тому же классу эквивалентности $j^r_x s$ тогда и только тогда, когда

$$s^i(x) = s'^i(x), \qquad \partial_\Lambda s^i(x) = \partial_\Lambda s'^i(x), \qquad 0 < |\Lambda| \leqslant r.$$

Короче говоря, сечения расслоения $Y \to X$ отождествляются по $r+1$ первым членам их рядов Тейлора в точке $x \in X$. Ясно, что это определение не зависит от выбора координатного атласа (x^λ, y^i) расслоения $Y \to X$. При этом само множество (4.2) может быть наделено координатами

$$\left(x^\lambda, y^i_\Lambda\right), \quad 0 \leqslant |\Lambda| \leqslant r, \quad \left(x^\lambda, y^i_\Lambda\right) \circ s = \left(x^\lambda, \partial_\Lambda s^i(x)\right), \tag{4.3}$$

вместе с функциями перехода

$$y'^i_{\lambda+\Lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial' x^\lambda} d_\mu y'^i_\Lambda. \tag{4.4}$$

Координаты (4.3) превращают множество r-струй J^rY в гладкое многообразие конечной размерности

$$\dim J^rY = n + m\sum_{i=0}^{r} \frac{(n+i-1)!}{i!(n-1)!}.$$

Координаты (4.3) согласуются с естественными сюръекциями

$$\pi^r_l\colon J^rY \to J^lY, \quad r > l,$$

которые образуют цепочку композиционных расслоений

$$\pi^r\colon J^rY \xrightarrow{\pi^r_{r-1}} J^{r-1}Y \xrightarrow{\pi^{r-1}_{r-2}} \cdots \xrightarrow{\pi^1_0} Y \xrightarrow{\pi} X,$$
$$\pi^k_h \circ \pi^r_k = \pi^r_h, \qquad \pi^h \circ \pi^r_h = \pi^r.$$

Вид функций перехода (4.4), когда $|\Lambda| = r$, показывает, что расслоение

$$\pi^r_{r-1}\colon J^rY \to J^{r-1}Y$$

является аффинным расслоением, моделируемым над векторным расслоением

$$\overset{r}{\vee} T^*X \underset{J^{r-1}Y}{\otimes} VY \to J^{r-1}Y. \tag{4.5}$$

Замечание 4.1.1. Чтобы ввести многообразия струй высшего порядка, можно использовать конструкцию повторного многообразия струй. Рассмотрим многообразие r-струй J^rJ^kY расслоения k-струй $J^kY \to X$. Оно наделено координатами

$$\left(x^\mu, y^i_{\Sigma\Lambda}\right), \qquad |\Lambda| \leqslant k, \qquad |\Sigma| \leqslant r.$$

Существует канонический мономорфизм расслоений

$$\sigma_{rk}\colon J^{r+k}Y \hookrightarrow J^rJ^kY,$$

задаваемый координатными соотношениями

$$y^i_{\Sigma\Lambda} \circ \sigma_{rk} = y^i_{\Sigma+\Lambda}.$$

□

В исчислении струй высшего порядка определен функтор струйного продолжения порядка r. Если даны расслоения $Y \to X$ и $Y' \to X$ над одной и той же базой X, всякий послойный морфизм

$$\Phi\colon Y \underset{f}{\longrightarrow} Y'$$

над диффеоморфизмом f многообразия X допускает *струйное продолжение порядка* r до морфизма многообразий r-струй

$$J^r\Phi\colon J^rY \ni j^r_x s \mapsto j^r_{f(x)}\left(\Phi \circ s \circ f^{-1}\right) \in J^rY.' \tag{4.6}$$

Функтор струйного продолжения является точным. Если послойный морфизм Φ — инъекция (соответственно сюръекция), то его струйное продолжение $J^r\Phi$ тоже является инъекцией (соответственно сюръекцией). Функтор струйного продолжения также сохраняет алгебраическую структуру. В частности, если $Y \to X$ — векторное расслоение, таковым же является и расслоение r-струй $J^rY \to X$. Если $Y \to X$ — аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $\overline{Y} \to X$, тогда $J^rY \to X$ — аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $J^r\overline{Y} \to X$.

Всякое сечение s расслоения $Y \to X$ допускает *r-струйное продолжение* до сечения

$$(J^rs)(x) = j^r_x s,$$

расслоения струй $J^rY \to X$. Оно называется голономным сечением.

Всякая внешняя форма ϕ на многообразии струй J^kY задает индуцированную форму $\pi^{k+i*}_k\phi$ на многообразии струй $J^{k+i}Y$. Обозначим для краткости

$$\Omega^*_k = \Omega^*(J^kY)$$

внешнюю алгебру внешних форм на многообразии струй J^kY. Имеет место прямая система $\mathbb{R}$-алгебр

$$\Omega^*(X) \xrightarrow{\pi^*} \Omega^*(Y) \xrightarrow{\pi^{1*}_0} \Omega^*_1 \xrightarrow{\pi^{2*}_1} \cdots \xrightarrow{\pi^{r*}_{r-1}} \Omega^*_r \longrightarrow \cdots. \tag{4.7}$$

Иногда удобно обозначить

$$\Omega^*_{-1} = \Omega^*(X), \qquad \Omega^*_0 = \Omega^*(Y).$$

Подсистемой системы (4.7) является система

$$C^\infty(X) \xrightarrow{\pi^*} C^\infty(Y) \xrightarrow{\pi^{1*}_0} \Omega^0_1 \xrightarrow{\pi^{2*}_1} \cdots \xrightarrow{\pi^{r*}_{r-1}} \Omega^0_r \longrightarrow \cdots \tag{4.8}$$

$\mathbb{R}$-колец вещественных гладких функций $\Omega^0_k = C^\infty(J^kY)$ на многообразиях струй J^kY. Поэтому можно рассматривать (4.7) и (4.8) как прямые системы $C^\infty(X)$-модулей.

Для многообразия k-струй J^kY расслоения $Y \to X$ определен канонический послойный морфизм

$$r_{(k)}\colon J^kTY \to TJ^kY$$

над морфизмом

$$J^kY \underset{X}{\times} J^kTX \to J^kY \underset{X}{\times} TX,$$

имеющий координатный вид

$$(x^\lambda, y^i_\Lambda, \dot x^\lambda, \dot y^i_\Lambda) \circ r_{(k)} = (x^\lambda, y^i_\Lambda, \dot x^\lambda, (\dot y^i)_\Lambda - \sum (\dot y^i)_{\mu+\Sigma}(\dot x^\mu)_\Xi), \quad 0 \leqslant |\Lambda| \leqslant k,$$

где сумма взята по всем разбиениям $\Sigma + \Xi = \Lambda$, $0 < |\Xi|$, мультииндекса Λ. В частности, имеет место канонический изоморфизм

$$r_{(k)}\colon J^kVY \to VJ^kY, \qquad (\dot y^i)_\Lambda = \dot y^i_\Lambda \circ r_{(k)} \tag{4.9}$$

над J^kY. Как следствие, любое проектируемое векторное поле

$$u = u^\mu \partial_\mu + u^i \partial_i$$

на расслоении $Y \to X$ допускает *k-струйное продолжение*

$$J^ku = r_{(k)} \circ J^ku\colon J^kY \to TJ^kY, \tag{4.10}$$
$$J^ku = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + u^i_\Lambda \partial^\Lambda_i, \qquad 0 < |\Lambda| \leqslant k,$$
$$u^i_{\lambda+\Lambda} = d_\lambda u^i_\Lambda - y^i_{\mu+\Lambda}\partial_\lambda u^\mu, \qquad 0 < |\Lambda| < k,$$

до векторного поля на многообразии k-струй J^kY (сравните с формулой (1.52) в первом томе [11] для $k = 1$). Например, k-струйное продолжение (4.10) вертикального векторного поля на расслоении $Y \to X$ является вертикальным векторным полем на расслоении струй $J^kY \to X$ благодаря изоморфизму (4.9).

Векторное поле u_r на многообразии r-струй J^rY называется *проектируемым*, если для любого $0 \leqslant k < r$ существует проектируемое векторное поле u_k на многообразии k-струй J^kY такое, что

$$u_k \circ \pi^r_k = T\pi^r_k \circ u_r.$$

Проектируемое векторное поле на многообразии струй J^rY дается координатным выражением

$$u_r = u^\lambda \partial_\lambda + u^i_\Lambda \partial^\Lambda_i, \qquad 0 \leqslant |\Lambda| \leqslant r,$$

где коэффициенты u_λ зависят только от координат x^μ на базе X, а коэффициенты u^i_Λ не зависят от координат y^i_Ξ с мультииндексами Ξ такими, что $|\Xi| > |\Lambda|$.

Обозначим $\mathcal{P}^r$ векторное пространство проектируемых векторных полей на многообразии r-струй J^rY. Нетрудно установить, что $\mathcal{P}^r$ представляет собой вещественную алгебру Ли и что морфизмы $T\pi^r_k$, $k < r$, составляют обратную систему

$$\mathcal{P}^0 \xleftarrow{T\pi^1_0} \mathcal{P}^1 \xleftarrow{T\pi^2_1} \cdots \xleftarrow{T\pi^{r-1}_{r-2}} \mathcal{P}^{r-1} \xleftarrow{T\pi^r_{r-1}} \mathcal{P}^r \longleftarrow \cdots \tag{4.11}$$

алгебр Ли.

Предложение 4.1.1. [35, 145]. Струйное продолжение векторных полей (4.10) представляет собой мономорфизм алгебры Ли $\mathcal{P}^0$ проектируемых векторных полей на расслоении $Y \to X$ в алгебру Ли $\mathcal{P}^k$ проектируемых векторных полей на многообразии струй J^kY такой, что

$$T\pi^r_k(J^ru) = J^ku \circ \pi^r_k. \tag{4.12}$$

□

Струйное продолжение $J^k u$ (4.10) называется *интегрируемым* векторным полем на $J^k Y$. Всякое проектируемое векторное поле u_k на $J^k Y$ раскладывается в сумму

$$u_k = J^k\big(T\pi_0^k(u_k)\big) + v_k \tag{4.13}$$

интегрируемого векторного поля $J^k(T\pi_0^k(u_k))$ и проектируемого векторного поля v_r, которое является вертикальным относительно некоторого расслоения $J^r Y \to Y$.

Аналогично точным последовательностям (1.28а)–(1.28б) в первом томе [11] имеют место точные последовательности

$$0 \to VJ^k Y \hookrightarrow TJ^k Y \to TX \underset{X}{\times} J^k Y \to 0, \tag{4.14}$$

$$0 \to J^k Y \underset{X}{\times} T^*X \hookrightarrow TJ^k Y \to V^*J^k Y \to 0 \tag{4.15}$$

векторных расслоений над $J^k Y$. Они не обладают каноническим расщеплением. В то же время, будучи индуцированными на $J^{k+1}Y$, они расщепляются канонически следующим образом. Существуют послойные мономорфизмы над $J^k Y$

$$\lambda_{(k)}\colon\ J^{k+1}Y \hookrightarrow T^*X \underset{J^kY}{\otimes} TJ^k Y, \qquad \lambda_{(k)} = dx^\lambda \otimes d_\lambda^{(k)}, \tag{4.16}$$

$$\theta_{(k)}\colon\ J^{k+1}Y \hookrightarrow T^*J^k Y \underset{J^kY}{\otimes} VJ^k Y, \qquad \theta_{(k)} = \sum \big(dy_\Lambda^i - y_{\lambda+\Lambda}^i dx^\lambda\big) \otimes \partial_i^\Lambda, \tag{4.17}$$

где сумма берется по всем мультииндексам Λ, $|\Lambda| \leqslant k$ (сравните с формулами (1.53) и (1.54) в первом томе [11] для $k = 1$). Формы

$$\theta_\Lambda^i = dy_\Lambda^i - y_{\Lambda+\lambda}^i dx^\lambda \tag{4.18}$$

называются *контактными формами*. Мономорфизмы (4.16) и (4.17) порождают мономорфизмы над $J^{k+1}Y$

$$\widehat{\lambda}_{(k)}\colon\ TX \underset{X}{\times} J^{k+1}Y \hookrightarrow TJ^k Y \underset{J^kY}{\times} J^{k+1}Y, \tag{4.19}$$

$$\widehat{\theta}_{(k)}\colon\ V^*J^k Y \underset{J^kY}{\times} \hookrightarrow T^*J^k Y \underset{J^kY}{\times} J^{k+1}Y. \tag{4.20}$$

Эти мономорфизмы расщепляют точные последовательности (4.14) и (4.15) над $J^{k+1}Y$ и определяют *канонические горизонтальные расщепления* индуцированных расслоений

$$\pi_k^{k+1*}TJ^k Y = \widehat{\lambda}_{(k)}\Big(TX \underset{X}{\times} J^{k+1}Y\Big) \underset{J^{k+1}Y}{\oplus} VJ^k Y, \tag{4.21}$$

$$\dot{x}^\lambda \partial_\lambda + \sum \dot{y}_\Lambda^i \partial_i^\Lambda = \dot{x}^\lambda d_\lambda^{(k)} + \sum \big(\dot{y}_\Lambda^i - \dot{x}^\lambda y_{\lambda+\Lambda}^i\big)\partial_i^\Lambda,$$

$$\pi_k^{k+1*}T^*J^k Y = T^*X \underset{J^{k+1}Y}{\oplus} \widehat{\theta}_{(k)}\Big(V^*J^k Y \underset{J^kY}{\times} J^{k+1}Y\Big), \tag{4.22}$$

$$\dot{x}_\lambda dx^\lambda + \sum \dot{y}_i^\Lambda dy_\Lambda^i = \Big(\dot{x}_\lambda + \sum \dot{y}_i^\Lambda y_{\lambda+\Lambda}^i\Big)dx^\lambda + \sum \dot{y}_i^\Lambda \theta_\Lambda^i,$$

где суммы берутся по всем мультииндексам $|\Lambda| \leqslant k$.

В соответствии с каноническим горизонтальным расщеплением (4.21) векторное поле

$$\tilde{u}_k\colon\ J^{k+1}Y \xrightarrow{\pi_k^{k+1}\times \mathrm{Id}} J^kY \times J^{k+1} \xrightarrow{u_k\times \mathrm{Id}} TJ^k Y \underset{J^kY}{\times} J^{k+1}$$

на многообразии $(k+1)$-струй $J^{k+1}Y$, индуцированное векторным полем u_k на многообразии k-струй J^kY, допускает каноническое горизонтальное расщепление

$$\overline{u} = u_H + u_V = \left(u^\lambda d_\lambda^{(k)} + \sum y^i_{\lambda+\Lambda}\partial_i^\Lambda\right) + \sum (u^i_\Lambda - u^\lambda y^i_{\lambda+\Lambda})\partial_i^\Lambda, \tag{4.23}$$

где суммы берутся по всем мультииндексам $|\Lambda| \leqslant k$.

Согласно каноническому горизонтальному расщеплению (4.22) всякая внешняя 1-форма ϕ на многообразии k-струй J^kY, будучи индуцированной на многообразие $(k+1)$-струй J^{k+1}, допускает каноническое горизонтальное расщепление

$$\pi_k^{k+1*}\phi = \left(\phi_\lambda + \sum y^i_{\Lambda+\lambda}\phi_i^\Lambda\right)dx^\lambda + \sum \phi_i^\Lambda \theta^i_\Lambda, \tag{4.24}$$

где суммы берутся по всем мультииндексам $|\Lambda| \leqslant k$.

Как уже отмечалось, канонические горизонтальные расщепления (4.21)–(4.24) не являются истинными горизонтальными расщеплениями на J^kY, поскольку они определены для расслоений, индуцированных с J^kY на $J^{k+1}Y$. Можно надеяться преодолеть эту трудность в случае струй бесконечного порядка.

Прямая система (4.7) вещественных алгебр внешних форм и обратная система (4.11) вещественных алгебр Ли проектируемых векторных полей на многообразиях струй определены для любого конечного порядка r. Эти последовательности имеют пределы при $r \to \infty$ соответственно в категории модулей и алгебр Ли. Интуитивно можно представить себе элементы этих пределов как объекты на проективном пределе обратной системы

$$X \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{\pi_0^1} \cdots \longrightarrow J^{r-1}Y \xrightarrow{\pi_{r-1}^r} J^rY \longrightarrow \cdots \tag{4.25}$$

многообразий струй конечного порядка J^rY.

Замечание 4.1.2. Напомним, что *проективным пределом* обратной системы (4.25) называется множество $J^\infty Y$ такое, что для любого k существуют сюръекции

$$\pi^\infty\colon J^\infty Y \to X, \quad \pi_0^\infty\colon J^\infty Y \to Y, \qquad \pi_k^\infty\colon J^\infty Y \to J^kY, \tag{4.26}$$

которые образуют коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & J^\infty Y & \\ {\scriptstyle \pi_k^\infty}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \pi_r^\infty} \\ J^kY & \xrightarrow[\pi_r^k]{} & J^rY \end{array}$$

для всех k и $r < k$ [7, 9]. □

Проективный предел $J^\infty Y$ обратной системы (4.25) существует. Он называется *пространством струй бесконечного порядка*. Этот предел состоит из элементов

$$(\ldots, q_i, \ldots, q_j, \ldots), \qquad q_i \in J^iY, \qquad q_j \in J^jY,$$

декартова произведения $\prod_k J^kY$, которые удовлетворяют соотношениям $q_i = \pi_i^j(q_j)$ для всех $j > i$. Таким образом, пространства струй бесконечного порядка $J^\infty Y$ действительно представляют собой ∞-струи $j_x^\infty s$ локальных сечений расслоения $Y \to X$. Различные сечения принадлежат одной и той же струе $j_x^\infty s$ тогда и только тогда, когда их ряды Тейлора в точке $x \in X$ совпадают друг с другом во всех членах.

Замечание 4.1.3. Отметим, что существует естественная сюръекция пучка Y_X гладких сечений расслоения $Y \to X$ на пространство струй бесконечного порядка $J^\infty Y$,

поскольку все сечения s с одним и тем же ростком s_x в точке $x \in X$ принадлежат одной и той же струе $j_x^\infty s$, но обратное утверждение неверно. □

Замечание 4.1.4. Пространство ∞-струй $J^\infty Y$ является также проективным пределом подсистемы обратной системы (4.25), которая начинается с пространства струй $J^r Y$ любого конечного порядка r. □

Как проективный предел пространство ∞-струй $J^\infty Y$ наделяется слабейшей топологией такой, что все сюръекции (4.26) непрерывны. База открытых подмножеств этой топологии в $J^\infty Y$ состоит из прообразов всевозможных открытых подмножеств в многообразиях струй конечного порядка $J^k Y$, $k = 0, \ldots$, относительно морфизмов (4.26). Эта топология паракомпактна и допускает разбиение единицы, реализуемое гладкими функциями. Пространство ∞-струй $J^\infty Y$ может быть наделено также некоторой структурой многообразия, но эта структура имеет целый ряд недостатков [35, 145, 146]. Тем не менее широкий класс дифференциальных объектов может быть определен на $J^\infty Y$ в терминах дифференциального исчисления на модулях, изложенного в § 1.1.

Процедура следующая. Сначала на пространстве ∞-струй $J^\infty Y$ вводятся вещественные гладкие функции. Вещественная функция

$$f\colon J^\infty Y \to \mathbb{R}$$

называется гладкой, если для любой точки $q \in J^\infty Y$ существует открытая окрестность U этой точки q и гладкая функция $f^{(k)}$ на $J^k Y$ для некоторого k такая, что

$$f|_U = f^{(k)} \circ \pi_k^\infty|_U.$$

Тогда такое же равенство имеет место для любого $r > k$. В частности, функция $\pi_r^{\infty *} f$, индуцированная гладкой функцией на $J^r Y$, является гладкой функцией на $J^\infty Y$. Гладкие функции на $J^\infty Y$ образуют вещественное кольцо $C^\infty(J^\infty Y)$. Векторные поля на пространстве ∞-струй $J^\infty Y$ вводятся как дифференцирования этого кольца. Они образуют локально свободный левый $C^\infty(J^\infty Y)$-модуль $\mathrm{Der}\,(C^\infty(J^\infty Y))$. В свою очередь, $C^\infty(J^\infty Y)$-модуль $\mathrm{Der}^*(C^\infty(J^\infty Y))$ внешних 1-форм на $J^\infty Y$ определяется как дуальный к модулю векторных полей.

Однако обычно класс рассматриваемых дифференциальных объектов на $J^\infty Y$ ограничивают алгебраическими пределами обратной системы (4.11) алгебр Ли проектируемых векторных полей и прямой системы (4.7) модулей внешних форм на многообразиях струй конечного порядка. Эти пределы образуют подмножества вышеупомянутых $C^\infty(J^\infty Y)$-модулей векторных полей и внешних форм на пространстве струй бесконечного порядка.

Начнем с прямой системы (4.7) вещественных модулей

$$\Omega_k^* = \Omega^*(J^k Y)$$

внешних форм на многообразиях струй конечного порядка $J^k Y$. Предел Ω_∞^* этой прямой системы по определению удовлетворяет следующим условиям [7, 9]:

- для любого r существует мономорфизм модулей $\Omega_r^* \to \Omega_\infty^*$;
- диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Omega_k^* & \xrightarrow{\pi_k^r} & \Omega_r^* \\ & {\scriptstyle \pi_k^\infty}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi_r^\infty} & \\ & \Omega_\infty^* & \end{array},$$

коммутативны для всех r и $k < r$.

Такой *прямой предел* существует. Это $\mathbb{R}$-модуль, который является фактором прямой суммы $\bigoplus_k \Omega_k^*$ при отождествлении индуцированных форм, т. е.

$$\pi_r^{\infty *}\phi = \pi_k^{\infty *}\sigma, \quad \phi \in \Omega_r^*, \quad \sigma \in \Omega_k^*,$$

если $\phi = \pi_k^{r*}\sigma$. Другими словами, при условии указанной идентификации прямой предел Ω_∞^* состоит из всех внешних форм на многообразиях струй конечного порядка (включая расслоение Y и его базу X). Поэтому мы будем обозначать образ внешней алгебры Ω_r^* в Ω_∞^* тем же символом Ω_r^*, а элементы $\pi_r^{\infty *}\phi$ из Ω_∞^* просто как ϕ.

Замечание 4.1.5. Очевидно, что Ω_∞^* — прямой предел подсистемы прямой системы (4.7), которая начинается с любого конечного порядка r. □

Будучи $\mathbb{R}$-модулем, прямой предел Ω_∞^* имеет также структуру так называемого фильтрованного Ω_∞^0-модуля [4]. Рассмотрим прямую систему (4.8) коммутативных $\mathbb{R}$-колец гладких функций на многообразиях струй J^rY. Ее прямой предел Ω_∞^0 состоит из функций на многообразиях струй конечного порядка при условии идентификации индуцированных функций. Поэтому Ω_∞^0 является подмножеством кольца $C^\infty(J^\infty Y)$ всех гладких функций на $J^\infty Y$. Это $\mathbb{R}$-кольцо, *фильтрованное* $\mathbb{R}$-кольцами $\Omega_k^0 \subset \Omega_{k+i}^0$ (см. ниже Определение 4.1.2). Тогда $\mathbb{R}$-модуль Ω_∞^* наделен структурой *фильтрованного* Ω_∞^0*-модуля*, задаваемой Ω_k^0-подмодулями Ω_k^* модуля Ω_∞^*.

Определение 4.1.2. Эндоморфизм Δ вещественного модуля Ω_∞^* называется *фильтрованным морфизмом*, если существует число $i \in \mathbb{N}$ такое, что ограничение Δ на Ω_k^* является гомоморфизмом Ω_k^* в Ω_{k+i}^* над мономорфизмом $\Omega_k^0 \hookrightarrow \Omega_{k+i}^0$ для всех k. □

Теорема 4.1.3. [9]. Всякая *прямая система эндоморфизмов* $\{\gamma_k\}$ модулей Ω_k^* такая, что

$$\pi_i^{j*} \circ \gamma_i = \gamma_j \circ \pi_i^{j*}$$

для всех $j > i$, имеет *прямой предел* γ_∞ в фильтрованных эндоморфизмах модуля Ω_∞^*. Если все γ_k являются мономорфизмами (соответственно эпиморфизмами), тогда γ_∞ — тоже мономорфизм (соответственно эпиморфизм). Этот результат остается справедливым также в общем случае морфизмов между двумя разными прямыми системами. □

Следствие 4.1.4. [9]. Операция взятия групп когомологий цепного и коцепного комплексов коммутирует с переходом к прямому пределу. □

Операция умножения

$$\phi \to f\phi, \qquad f \in C^\infty(X), \qquad \phi \in \Omega_r^*,$$

имеет прямой предел. Поэтому Ω_∞^* наделено структурой $C^\infty(X)$-модуля. Операции внешнего произведения $\wedge$ и внешнего дифференцирования d также имеют прямые пределы на Ω_∞^*, обозначаемые для простоты теми же символами $\wedge$ и d. Они наделяют Ω_∞^* структурой $\mathbb{Z}$-градуированной внешней алгебры:

$$\Omega_\infty^* = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Omega_\infty^m,$$

где Ω_∞^m — прямые пределы прямых систем

$$\Omega^m(X) \xrightarrow{\pi^*} \Omega_0^m \xrightarrow{\pi_0^{1*}} \Omega_1^m \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_r^m \xrightarrow{\pi_r^{r+1*}} \Omega_{r+1}^m \longrightarrow \cdots$$

$\mathbb{R}$-модулей Ω_r^m внешних m-форм на многообразиях струй J^rY конечного порядка. Элементы Ω_∞^m называются внешними m-формами на пространстве струй бесконечного порядка. При этом выполняются обычные соотношения внешней алгебры:

$$\Omega_\infty^i \wedge \Omega_\infty^j \subset \Omega_\infty^{i+j}, \quad d\colon \Omega_\infty^i \to \Omega_\infty^{i+1}, \quad d \circ d = 0.$$

В частности, можно построить *комплекс Де Рама* внешних форм на пространстве струй бесконечного порядка

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega_\infty^0 \xrightarrow{d} \Omega_\infty^1 \xrightarrow{d} \cdots. \tag{4.27}$$

Рассмотрим группу когомологий $H^m(\Omega^*_\infty)$ этого комплекса. Согласно Следствию 4.1.4 она изоморфна прямому пределу прямой системы гомоморфизмов

$$H^m(\Omega^*_r) \longrightarrow H^m(\Omega^*_{r+1}) \longrightarrow \cdots$$

групп когомологий $H^m(\Omega^*_r)$ коцепных комплексов

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0_r \xrightarrow{d} \Omega^1_r \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^l_r \longrightarrow 0, \qquad l = \dim J^r Y,$$

т. е. групп когомологий Де Рама

$$H^m(\Omega^*_r) = H^m(J^r Y)$$

многообразий струй $J^r Y$. При этом следует принять во внимание следующий факт.

Предложение 4.1.5. Когомологии Де Рама $H^*(J^r Y)$ многообразий струй $J^r Y$ конечного порядка совпадают с когомологиями Де Рама $H^*(Y)$ расслоенного пространства Y [35]. □

Доказательство основывается на том, что расслоение струй $J^r Y \to J^{r-1} Y$ является аффинным, и поэтому когомологии Де Рама $J^r Y$ совпадают с когомологиями Де Рама базы $J^{r-1} Y$ этого расслоения. Отсюда следует, что группы когомологий $H^m(\Omega^*_\infty)$, $m > 0$, коцепного комплекса (4.27) изоморфны группам когомологий Де Рама $H^m(Y)$ расслоения Y.

Хотя мы не обсуждаем структуру многообразия на пространстве струй бесконечного порядка, элементы прямого предела Ω^*_∞ могут быть следующим образом записаны в координатной форме. Пусть $(U; x^\lambda, y^i)$ — координатная карта расслоения $Y \to X$ на области $U \subset Y$. Рассмотрим соответствующие области

$$U_r = \left(\pi^r_0\right)^{-1}(U)$$

в многообразиях струй $J^r Y \to Y$. Повторяя изложенную выше процедуру для модулей $\Omega^*(U_r)$ внешних форм на областях U_r, мы получим их прямой предел $\Omega^*_\infty(U)$. Для каждого r определен гомоморфизм $\mathbb{R}$-модулей

$$i_{U_r}{}^*\colon \Omega^*_r \to \Omega^*(U_r),$$

который сопоставляет всякой внешней форме на $J^r Y$ ее ограничение на U_r. Тогда существует гомоморфизм $\mathbb{R}$-модулей

$$i_U{}^*\colon \Omega^*_\infty \to \Omega^*_\infty(U)$$

такой, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*_r & \xrightarrow{\pi^{r\infty *}} & \Omega^*_\infty \\ {\scriptstyle i_{U_r}{}^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_U{}^*} \\ \Omega^*(U_r) & \xrightarrow{\pi^{r}_{U}{}^*} & \Omega^*_\infty(U) \end{array}$$

коммутативны для любого r [9]. Элементы $\Omega^*_\infty(U)$ могут быть представлены в обычной координатной форме.

Для данного атласа $\{(U; x^\lambda, y^i)\}$ послойных координат на $Y \to X$ рассмотрим векторное пространство $\Omega^*_\infty(U)$ внешних форм на струях бесконечного порядка для каждой координатной карты $(U; x^\lambda, y^i)$ этого атласа. Всякий элемент ϕ пространства Ω^*_∞ однозначно определяется набором элементов $\{\phi_U\}$ из пространств $\Omega^*_\infty(U)$ вместе с соответствующими координатными законами преобразований. В дальнейшем мы будем использовать координатные выражения внешних форм на струях бесконечного порядка без упоминания координатной области U. Можно считать, что если тот или

иной объект задан в координатной форме как элемент каждого пространства $\Omega^*_\infty(U)$ с соответствующими преобразованиями перехода, то он глобально определен.

В частности, горизонтальные 1-формы dx^λ и контактные 1-формы θ^i_Λ (4.18) образуют локальный базис фильтрованного Ω^0_∞-модуля Ω^1_∞ 1-форм на пространстве струй бесконечного порядка $J^\infty Y$. Более того, горизонтальные 1-формы dx^λ и контактные 1-формы θ^i_Λ имеют независимые законы координатных преобразований. Поэтому существует каноническое расщепление

$$\Omega^1_\infty = \Omega^{0,1}_\infty \oplus \Omega^{1,0}_\infty \tag{4.28}$$

модуля 1-форм Ω^1_∞ на фильтрованные Ω^0_∞-подмодули $\Omega^{0,1}_\infty$ и $\Omega^{1,0}_\infty$, раздельно порождаемые горизонтальными и контактными формами. Это расщепление можно интерпретировать как каноническое горизонтальное расщепление. Оно аналогично как горизонтальному расщеплению кокасательного расслоения к расслоению $Y \to X$ посредством связности (см. (1.68) в первом томе [11]), так и каноническому горизонтальному расщеплению (4.24) 1-форм на многообразиях струй конечного порядка. Поэтому можно считать, что расщепление (4.28) представляет собой *каноническую связность* на пространстве струй бесконечного порядка $J^\infty Y$.

Каноническое горизонтальное расщепление (4.28) порождает соответствующее расщепление модулей m-форм

$$\Omega^m_\infty = \Omega^{0,m}_\infty \oplus \Omega^{1,m-1}_\infty \oplus \ldots \oplus \Omega^{m,0}_\infty, \tag{4.29}$$

где элементы $\Omega^{k,s-k}$ называются *k-контактными формами*. Обозначим h_k *k-контактную проекцию*

$$h_k\colon \Omega^m_\infty \to \Omega^{k,m-k}_\infty, \quad k \leqslant m. \tag{4.30}$$

В частности, мы имеем каноническую проекцию

$$h_0\colon \Omega^m_\infty \to \Omega^{0,m}_\infty, \quad \forall\, m > 0, \tag{4.31}$$
$$h_0(dx^\lambda) = dx^\lambda, \quad h_0\bigl(dy^i_{\lambda_k\ldots\lambda_1}\bigr) = y^i_{\mu\lambda_k\ldots\lambda_1} dx^\mu,$$

называемую *горизонтальной проекцией*.

Соответственно внешний дифференциал d на внешней алгебре Ω^*_∞ раскладывается в сумму

$$d = d_H + d_V \tag{4.32}$$

горизонтального дифференциала d_H и *вертикального дифференциала* d_V, которые определяются следующим образом:

$$d\colon \Omega^{k,s}_\infty \to \Omega^{k+1,s}_\infty \oplus \Omega^{k,s+1}_\infty,$$
$$d_H\colon \Omega^{k,s}_\infty \to \Omega^{k,s+1}_\infty, \quad d_H\big|\Omega^{k,s}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_2 \circ d\big|\Omega^{k,s}_\infty,$$
$$d_V\colon \Omega^{k,s}_\infty \to \Omega^{k+1,s}_\infty, \quad d_V\big|\Omega^{k,s}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_1 \circ d\big|\Omega^{k,s}_\infty,$$

для всех $s < n$ и всех k. Дифференциалы d_H и d_V удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &d_H(\phi\wedge\sigma) = d_H(\phi)\wedge\sigma + (-1)^{|\phi|}\phi\wedge d_H(\sigma),\\ &d_V(\phi\wedge\sigma) = d_V(\phi)\wedge\sigma + (-1)^{|\phi|}\phi\wedge d_V(\sigma), \end{aligned} \qquad \phi,\sigma\in\Omega^*_\infty,$$

и являются нильпотентными:

$$d_H\circ d_H = 0, \quad d_V\circ d_V = 0, \quad d_V\circ d_H + d_H\circ d_V = 0. \tag{4.33}$$

Приведем важное равенство

$$h_0\circ d = d_H\circ h_0.$$

Горизонтальный дифференциал может быть записан в виде

$$d_H\phi = dx^\lambda \wedge d_\lambda(\phi), \tag{4.34}$$

где

$$d_\lambda = d_\lambda^\infty = \partial_\lambda + \sum_{0\leqslant|\Lambda|} y^i_{\Lambda+\lambda}\partial_i^\Lambda = \partial_\lambda + y^i_\lambda\partial_i + y^i_{\lambda\mu}\partial_i^\mu + \dots \tag{4.35}$$

— *полная производная* на струях бесконечного порядка. Следует подчеркнуть, что, хотя сумма в выражении (4.35) берется по бесконечному семейству мультииндексов Λ, оператор (4.35) хорошо определен, поскольку для любой внешней формы $\phi \in \Omega^*_\infty$ выражение $d_\lambda(\phi)$ содержит только конечное число ненулевых членов ∂_i^λ. Полные производные удовлетворяют соотношениям

$$d_\lambda(\phi\wedge\sigma) = d_\lambda(\phi)\wedge\sigma + \phi\wedge d_\lambda(\sigma), \quad d_\lambda(d\phi) = d(d_\lambda(\phi)), \quad [d_\lambda, d_\alpha] = 0.$$

В частности,

$$d_\lambda(f) = \partial_\lambda f + y^i_\lambda\partial_i f + y^i_{\lambda\mu}\partial_i^\mu f + \dots, \quad f\in C^\infty(J^\infty Y),$$
$$d_\lambda(dx^\mu) = 0, \quad d_\lambda(dy^i_{\lambda_1\dots\lambda_l}) = dy^i_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_l}.$$

В отличие от частных производных ∂_λ, полные производные имеют линейный закон координатных преобразований

$$d'_\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} d_\mu.$$

Приведем некоторые полезные соотношения для операторов d_H и d_V:

$$\begin{aligned} &d_H f = d_\lambda f dx^\lambda, && d_V f = \partial_i^\Lambda f\theta^i_\Lambda, && f\in\Omega^0_\infty,\\ &d_H(dx^\mu) = 0, && d_V(dx^i) = 0, &&\\ &d_H(\theta^i_\Lambda) = dx^\lambda\wedge\theta^i_{\lambda+\Lambda}, && d_V(\theta^i_\Lambda) = 0, && 0\leqslant|\Lambda|. \end{aligned}$$

Обратимся теперь к понятию канонической связности на пространстве струй бесконечного порядка $J^\infty Y$. Для произвольного векторного поля τ на многообразии X определим морфизм

$$\nabla_\tau\colon \Omega^0_\infty \ni f \to \tau \lrcorner (d_H f) \in \Omega^0_\infty. \tag{4.36}$$

Легко убедиться, что он представляет собой дифференцирование кольца функций Ω^0_∞. Более того, если Ω^0_∞ рассматривается как $C^\infty(X)$-кольцо, дифференцирование (4.36) удовлетворяет правилу Лейбница. Таким образом, сопоставление

$$\nabla\colon \tau\mapsto \tau\lrcorner d_H = \tau^\lambda d_\lambda \tag{4.37}$$

является *канонической связностью* на $C^\infty(X)$-кольце Ω^0_∞ в соответствии с Определением 1.2.8 [116]. Поскольку дифференцирование является локальной операцией и $J^\infty Y$ допускает гладкое разбиение единицы, дифференцирование (4.36) может быть расширено на кольцо $C^\infty(J^\infty Y)$ всех гладких функций на пространстве струй бесконечного порядка $J^\infty Y$. Соответственно связность ∇ (4.37) расширяется до канонической связности на $C^\infty(X)$-кольце $C^\infty(J^\infty Y)$. Будучи распространенными на $C^\infty(J^\infty Y)$, дифференцирования (4.36) по определению являются векторными полями на пространстве струй бесконечного порядка $J^\infty Y$. Такое векторное поле ∇_τ можно интерпретировать как горизонтальный лифт

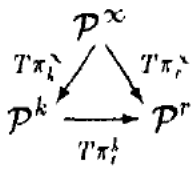
$$\tau^\lambda\partial_\lambda \mapsto \tau^\lambda d_\lambda$$

на $J^\infty Y$ векторного поля τ на базе X посредством канонической связности на (топологическом) расслоении $J^\infty Y\to X$.

Векторные поля ∇_τ на $J^\infty Y$ не являются проектируемыми, хотя они проектируются на векторные поля на X. Проектируемые векторные поля на $J^\infty Y$ (их определение повторяет определение проектируемых векторных полей на многообразиях струй конечного порядка) представляют собой элементы проективного предела $\mathcal{P}^\infty$ обратной системы алгебр Ли (4.11). Такой проективный предел существует. Его определение повторяет определение проективного предела $J^\infty Y$ многообразий струй. Это алгебра Ли такая, что сюръекции

$$T\pi_k^\infty\colon \mathcal{P}^\infty \to \mathcal{P}^k$$

являются морфизмами алгебр Ли, которые образуют коммутативные диаграммы



для любых k и $r < k$. Ради простоты мы будем называть все элементы $\mathcal{P}^\infty$ *векторными полями* на пространстве струй бесконечного порядка $J^\infty Y$.

В частности, пусть u — проектируемое векторное поле на расслоении $Y \to X$. Существует элемент $J^\infty u \in \mathcal{P}^\infty$ такой, что

$$T\pi_k^\infty(J^\infty u) = J^k u, \quad \forall\, k \geqslant 0.$$

Можно рассматривать $J^\infty u$ как струйное продолжение бесконечного порядка векторного поля u на Y. Оно задается рекурентной формулой (4.10), где $0 \leqslant |\Lambda|$. Тогда всякий элемент $\mathcal{P}^\infty$ раскладывается в сумму, аналогичную (4.13), где $k = \infty$. Конечно это не является горизонтальным расщеплением. Для данного векторного поля v на $J^\infty Y$, проектируемого на векторное поле τ на X, мы имеем его горизонтальное расщепление

$$v = v_H + v_V = \tau^\lambda d_\lambda + \left(v - \tau^\lambda d_\lambda\right)$$

посредством канонической связности ∇ (4.37) (сравните с (4.23)). Заметим, что компонента v_V этого расщепления не является проектируемым векторным полем на $J^\infty Y$, хотя это вертикальное векторное поле относительно расслоения $J^\infty Y \to X$.

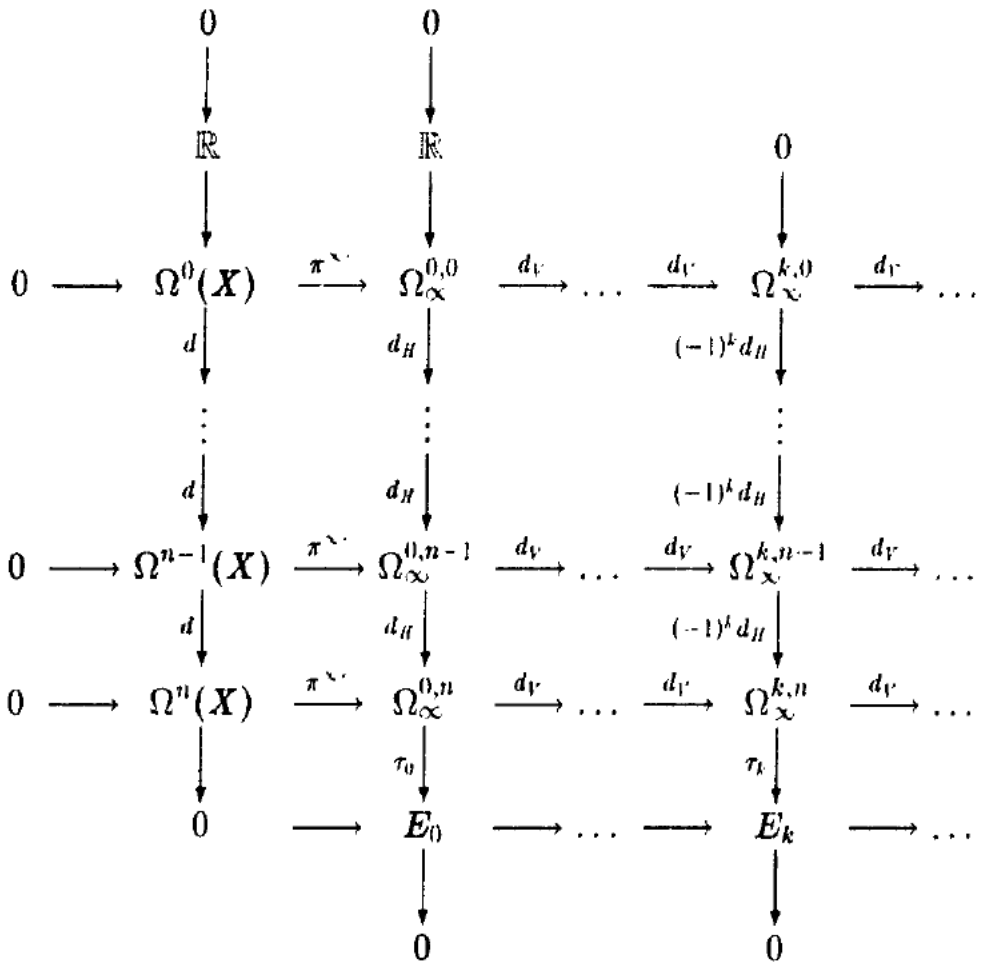
§ 2. Вариационный бикомплекс

Горизонтальный дифференциал d_H играет важную роль в БРСТ-формализме. Наряду с БРСТ-оператором $\mathbf{s}$ вводится полный БРСТ-оператор $\mathbf{s} + d_H$ и рассматриваются БРСТ-когомологии по модулю d_H [28, 29, 42, 87] (см. § 4.4).

Этот параграф посвящен когомологиям вариационного комплекса, порождаемого горизонтальным дифференциалом d_H (см. ниже Теорему 4.2.2). Эти когомологии лежат также в основе алгебраического подхода к вариационному исчислению (см. ниже формулу (4.52)).

Замечание 4.2.1. Мы рассматриваем вариационный комплекс в исчислении струй бесконечного порядка [21, 57, 78, 146, 149]. В сравнении с вариационной последовательностью на струях конечного порядка [102, 152], существенное упрощение состоит в том, что если порядок струй не ограничен, тогда существует разложение (4.29) внешних форм на многообразиях струй по контактным и горизонтальным формам. □

Используя свойства нильпотентности (4.33) горизонтального и вертикального дифференциалов d_H и d_V, можно построить коммутативную диаграмму



(4.38)

где

$$E_k = \tau_k\left(\Omega_\infty^{k,n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_\infty^{k,n}/d_H\left(\Omega_\infty^{k,n-1}\right). \tag{4.39}$$

Поскольку столбцы и строки этой диаграммы представляют собой комплексы, она называется *комплексом комплексов*.

Замечание 4.2.2. Операторы d_H и d_V, удовлетворяющие соотношениям нильпотентности (4.33), определяют так называемый *бикомплекс*, но они не коммутируют между собой. Операторы же $(-1)^k d_H$ и d_V в диаграмме (4.38) взаимно коммутируют, и об этой диаграмме говорят как о комплексе комплексов (см. детали терминологии в [8]). □

Лемма 4.2.1. [78, 149]. Фактор E_k, $k > 0$, (4.39) в нижней строке диаграммы (4.38) изоморфен дополнению $\tau_k\left(\Omega_\infty^{k,n}\right)$ подпространства $d_H\left(\Omega_\infty^{k,n-1}\right) \subset \Omega^{k,n}$. □

Отсюда следует, что морфизмы τ_k, $k > 0$, являются проекторами со свойствами

$$\tau_k \circ \tau_k = \tau_k, \qquad \tau_k \circ d_H = 0.$$

Этот факт приводит к короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} e_k \hookrightarrow \Omega_\infty^{n+k} \xrightarrow{e_k} E_k \longrightarrow 0,$$

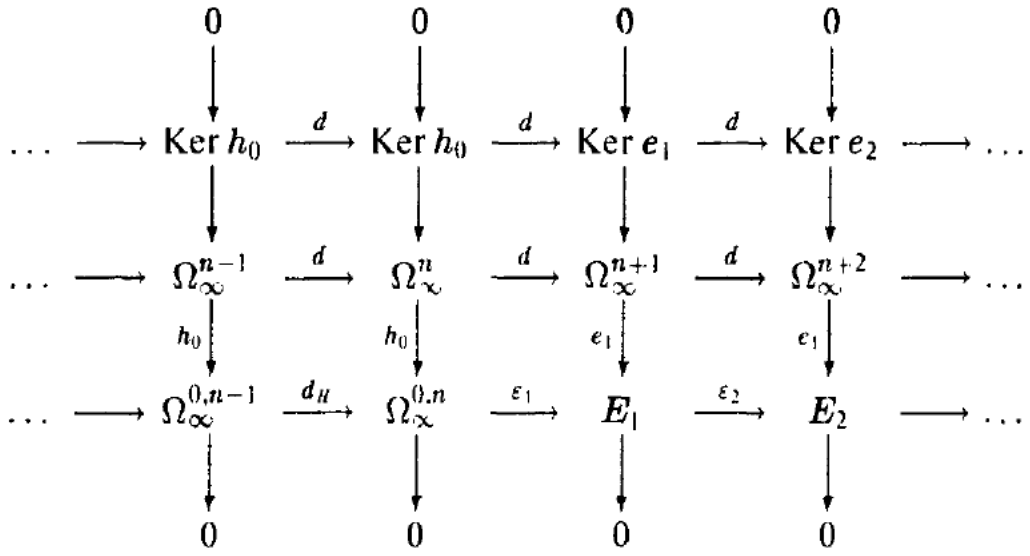
где $e_k = \tau_k \circ h_k$. Это *простая точная последовательность*, поскольку

$$\Omega_\infty^{n+k} = \operatorname{Ker} e_k \oplus E_k.$$

Нетрудно показать, что $d(\operatorname{Ker} e_k) \subset \operatorname{Ker} e_{k+1}$.

Вследствие вышесказанного можно заменить объекты $\Omega_\infty^{k,n}$, d_V и τ_k, $k > 0$, в предпоследней строке диаграммы (4.38) соответственно на Ω_∞^{n+k}, d и e_k. В результате

мы приходим к коммутативной диаграмме



(4.40)

Ее вторая строка представляет собой комплекс Де Рама, а ее первая строка — подкомплекс этого комплекса. Поэтому последняя строка диаграммы (4.40)

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0_\infty \xrightarrow{d_H} \Omega^{0,1}_\infty \xrightarrow{d_H} \cdots \xrightarrow{d_H} \Omega^{0,n}_\infty \xrightarrow{\varepsilon_1} E_1 \xrightarrow{\varepsilon_2} E_2 \longrightarrow \cdots \tag{4.41}$$

— тоже коцепной комплекс, т. е.

$$\varepsilon_1 \circ d_H = 0, \qquad \varepsilon_{k+1} \circ \varepsilon_k = 0. \tag{4.42}$$

Он называется *спектральной последовательностью*. Поскольку $E_k \subset \Omega^{k,n}_\infty$, коцепные морфизмы ε_k комплекса (4.41) имеют вид $\varepsilon_k = \tau_k \circ d$.

Построим морфизмы ε_k в явном виде [34, 78, 149]. Положим

$$\tau_k = \frac{1}{k}\tau|\Omega^{k,n}_\infty,$$

где τ — оператор, задаваемый координатным выражением

$$\tau(\phi) = (-1)^{|\Lambda|}\theta^i \wedge \left[d_\Lambda\left(\partial^\Lambda_i \lrcorner \phi\right)\right], \qquad 0 \leqslant |\Lambda|,$$

и действующий на контактные плотности $\phi \in \Omega^{*,n}_\infty$. Тогда получаем

$$\varepsilon_k = \tau_k \circ d = \frac{1}{k}\delta, \tag{4.43}$$

где

$$\delta = \tau \circ d \tag{4.44}$$

— *вариационный оператор* [34, 78], являющийся нильпотентным:

$$\delta \circ \delta = 0, \qquad \delta \circ d_H = 0. \tag{4.45}$$

Поскольку столбцы диаграммы (4.40) — простые точные последовательности, можно рассматривать спектральную последовательность (4.41) как подкомплекс коцепного комплекса

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0_\infty \xrightarrow{d_H} \cdots \Omega^{0,n-1}_\infty \xrightarrow{d_H} \Omega^{0,n}_\infty \xrightarrow{\delta} \Omega^{1,n}_\infty \xrightarrow{\delta} \Omega^{2,n}_\infty \longrightarrow \cdots, \tag{4.46}$$

который называется *вариационной последовательностью*.

В частности, пусть

$$\phi = \phi^\Lambda_i \theta^i_\Lambda \wedge \omega \in \Omega^{1,n}_\infty$$

— 1-контактная плотность. Получаем

$$\tau_1(\phi) = (-1)^{|\Lambda|} d_\Lambda\left(\phi^\Lambda_i\right)\theta^i \wedge \omega. \tag{4.47}$$

Это выражение показывает, что подпространство $E_1 \subset \Omega^{1,n}_\infty$ состоит из 1-контактных плотностей $\mathcal{E} = \mathcal{E}_i\theta^i \wedge \omega$, которые принимают значения в тензорном расслоении

$$T^*Y \wedge \left(\bigwedge^n T^*X\right). \tag{4.48}$$

Пусть

$$L = \mathcal{L}\omega \in \Omega^{0,n}_\infty$$

— горизонтальная плотность. Тогда коцепные морфизмы ε_1 и ε_2 принимают вид

$$\varepsilon_1(\mathcal{L}\omega) = (-1)^{|\Lambda|} d_\Lambda\left(\partial_i^\Lambda \mathcal{L}\right)\theta^i \wedge \omega, \tag{4.49}$$

$$\varepsilon_2(\mathcal{E}_i\theta^i \wedge \omega) = \frac{1}{2}\left[\partial_j^\Lambda \mathcal{E}_i \theta^j_\Lambda \wedge \theta^i + (-1)^{|\Lambda|}\theta^j \wedge d_\Lambda\left(\partial_j^\Lambda \mathcal{E}_i\theta^i\right)\right] \wedge \omega,$$

где суммирование ведется по всем мультииндексам $0 \leqslant |\Lambda|$. Они называются соответственно *оператором Эйлера—Лагранжа* и оператором *Гельмгольца—Сонина*. Напомним, что L является фактически горизонтальной плотностью на многообразии струй J^rY некоторого конечного порядка r. Поэтому можно рассматривать L как лагранжиан порядка r. Внешняя форма

$$\mathcal{E}_L = \varepsilon_1(L) = \delta(L), \tag{4.50}$$

$$\mathcal{E}_L = (-1)^{|\Lambda|} d_\Lambda\left(\partial_i^\Lambda \mathcal{L}\right)\theta^i \wedge \omega, \qquad 0 \leqslant |\Lambda| \leqslant r,$$

именуется *формой Эйлера—Лагранжа*, ассоциированной с лагранжианом L. Эта форма представляет собой дифференциальный оператор порядка $2r$

$$\mathcal{E}_L\colon J^{2r}Y \to T^*Y \wedge \left(\bigwedge^n T^*X\right), \tag{4.51}$$

также называемый оператором Эйлера—Лагранжа для лагранжиана L. В частности, если L — лагранжиан первого порядка на многообразии струй J^1Y, оператор (4.51) — это привычный оператор Эйлера—Лагранжа второго порядка (A.15) из первого тома [11].

Более того, в силу Леммы 4.2.1 имеет место каноническое разложение

$$dL = \tau_1(dL) + (\mathrm{Id} - \tau_1)(dL) = \delta(L) + d_H(\phi), \qquad \phi \in \Omega^{1,n_1}_\infty, \tag{4.52}$$

которое представляет собой *первую вариационную формулу* для лагранжианов высших порядков. В частности, если $r = 1$, получаем первую вариационную формулу (A.14) из первого тома [11] в случае вертикального векторного поля u на расслоении $Y \to X$.

Спектральная последовательность (4.41) приводит к следующему варианту известной обратной задачи вариационного исчисления. Дифференциальные операторы, принимающие значения в тензорном расслоении (4.48), называются *операторами типа Эйлера—Лагранжа*. Это элементы подпространства $E_1 \subset \Omega^{1,n}_\infty$. Оператор типа Эйлера—Лагранжа $\mathcal{E}$ именуется *локально вариационным оператором*, если

$$\varepsilon_2(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}\delta(\mathcal{E}) = 0.$$

Из равенств (4.42) следует, что любой d_H-точный лагранжиан (т. е. $L = d_H\phi$) является вариационно тривиальным и что всякий оператор Эйлера—Лагранжа — это локально вариационный оператор.

Препятствия для того чтобы локально вариационный оператор был бы оператором Эйлера—Лагранжа, характеризуются нетривиальной группой когомологий

$$H^{n+1} = \operatorname{Ker}\varepsilon_2 / \operatorname{Im}\varepsilon_1$$

комплекса (4.41) в элементе E_1. Поскольку столбцы диаграммы (4.40) — это точные последовательности, имеет место следующая точная последовательность групп когомологий строк этой диаграммы, обозначаемых соответственно r_1, r_2 и r_3 [8]:

$$\ldots \longrightarrow H^k(r_3) \longrightarrow H^k(r_2) \longrightarrow H^k(r_1) \longrightarrow H^{k+1}(r_3) \longrightarrow \ldots .$$

Теорема 4.2.2. [57, 149]. Если

$$Y = \mathbb{R}^{l+n} \to \mathbb{R}^n,$$

спектральная последовательность (4.41) является точной, т. е.

$$\operatorname{Ker} d_H = \operatorname{Im} d_H, \qquad \operatorname{Ker} \varepsilon_1 = \operatorname{Im} d_H, \qquad \operatorname{Im} \varepsilon_k = \operatorname{Ker} \varepsilon_{k+1}.$$

□

Эта теорема показывает что комплекс (4.41) и, следовательно, комплекс (4.46) являются локально точными.

Следствие 4.2.3. Поскольку вариационная последовательность (4.46) локально точная, горизонтальная плотность $L \in \Omega^*_\infty$ вариационно тривиальна тогда и только тогда, когда она является d_H-точной. Отсюда следует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности локальных горизонтальных плотностей L по модулю d_H-точных форм и элементами множества $\operatorname{Im} \varepsilon_1 = \operatorname{Ker} \varepsilon_1$. □

Следствие 4.2.4. Рассмотрим коцепной комплекс

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0_\infty \xrightarrow{d_H} \Omega^{0,1}_\infty \xrightarrow{d_H} \ldots \xrightarrow{d_H} \Omega^{0,n}_\infty \xrightarrow{d_H} 0. \tag{4.53}$$

Он является локально точным во всех элементах, кроме последнего. Его группа когомологий в этом элементе равна

$$\Omega^{0,n}_\infty / d_H\left(\Omega^{0,n}_\infty\right) = E_1. \tag{4.54}$$

□

§ 3. Струи духов и антиполей

Помимо физических полей, БРСТ-теория включает духовые поля (или просто духи), духи для духов и антиполя, которые являются четными и нечетными алгебраическими объектами. Поэтому, чтобы применить формализм струй к БРСТ-теории, следует дать геометрическое описание нечетных обектов в этой теории, в том числе определить струи этих обектов. Важно отметить, что при формулировке БРСТ-теории в терминах струй антиполя вводятся в той же манере, что и поля (см. ниже Замечание 4.3.3).

Начнем с духовых полей. В лагранжевом БРСТ-формализме (см., например, в качестве обзора [80]) духи ассоциированы с параметрами калибровочных преобразований. Мы ограничимся рассмотрением случая бозонных полей и четных калибровочных преобразований с конечным набором генераторов. Тогда духи являются нечетными алгебраическими обектами. Аналогичная картина наблюдается и в гамильтоновом БРСТ-формализме, где духи соответствуют связям (см., например, [88]).

Были предложены различные геометрические модели духовых полей, чтобы получить желаемый закон БРСТ-преобразований. Например, в калибровочной модели Янга—Миллса на главном расслоении со структурной группой G духи могут быть описаны как формы на групповом многообразии калибровочной группы $\mathrm{Gau}(P)$ (см., например, [39, 93, 140]). Однако такое описание не распространяется на другие калибровочные теории (см. в [80] основные примеры калибровочных моделей).

Пример 4.3.1. Рассмотрим упомянутую выше калибровочную теорию на главном расслоении $P \to X$ над компактным многообразием X, структурная группа которого G

является компактной полупростой матричной группой Ли. Соответствующее пополнение Соболева превращает *калибровочную группу* $\mathrm{Gau}(P)$ (см. ее определение в первом томе [11] на стр. 78) в банахову группу Ли (см. § 5.1). Генераторы 1-параметрических групп калибровочных преобразований представляют собой G-инвариантные векторные поля на главном расслоении P, отождествляемые с сечениями ξ расслоения Ли алгебр

$$V_G P = VP/G. \tag{4.55}$$

Типичным слоем этого расслоения служит правая алгебра Ли $\mathbf{g}$ группы Ли G с базисом $\{e_r\}$, на которую структурная группа G действует по присоединенному представлению. Пополнение Соболева множества сечений расслоения $V_G P \to X$ совпадает с алгеброй Ли калибровочной группы $\mathrm{Gau}(P)$. Типичным слоем дуального расслоения $V_G^* P$ к $V_G P$ является коалгебра Ли $\mathbf{g}^*$. Для данного генератора калибровочных преобразований $\xi = \xi^r(x) e_r$ соответствующий генератор ξ_C калибровочных преобразований на расслоении связностей

$$C = J^1 P/G \to X \tag{4.56}$$

с координатами (x^λ, a^p_λ) (см. том первый [11], § 1.7) имеет вид

$$\xi_C = u^r_\lambda \partial^\lambda_r, \qquad u^r_\lambda = \partial_\lambda \xi^r + c^r_{pq} a^p_\lambda \xi^q \tag{4.57}$$

(см. выражение (A.26) в первом томе [11]). Если A — сечение расслоения связностей $C \to X$ (т. е. калибровочный потенциал), генератор калибровочных преобразований ξ_C действует на A по закону

$$\xi\colon A = A^q_\lambda dx^\lambda \otimes e_q \mapsto dx^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda \xi^r + c^r_{pq} A^p_\lambda \xi^q\right) e_r = d\xi + [A, \xi] = \nabla^A \xi. \tag{4.58}$$

Соответственно сами калибровочные параметры преобразуются по коприсоединенному представлению

$$\xi'\colon \xi^p \mapsto -c^p_{rq} \xi'^r \xi^q. \tag{4.59}$$

Тогда классическое БРСТ-преобразование можно получить, просто заменив калибровочные параметры в выражениях (4.58) и (4.59) духовыми полями. А именно, рассмотрим формальный генератор

$$C = C^r e_r \tag{4.60}$$

калибровочных преобразований и подставим его в вышеупомянутые выражения. Получим

$$\mathbf{s} A = dC + [A, C], \qquad \mathbf{s}\, C = -\frac{1}{2}[C, C], \tag{4.61}$$

$$\mathbf{s} A^p_\lambda = \partial_\lambda C^r + c^r_{pq} A^p_\lambda C^q, \qquad \mathbf{s}\, C^p = -\frac{1}{2} c^p_{rq} C^r C^q. \tag{4.62}$$

Это в точности известный классический БРСТ-оператор в калибровочной модели Янга—Миллса. Например, пусть $\{C^r\}$ — локальный послойный базис расслоения $V_G^* P$, дуальный к $\{e_r\}$. Тогда C (4.60) является каноническим сечением тензорного расслоения $V_G^* P \otimes V_G P$, которое определяет тождественный морфизм $V_G P \to V_G^* P$ (см. первый том [11], Пример 1.4.3). Оно также совпадает с духовым полем η, определяемым как форма Маурера—Картана на калибровочной группе $\mathrm{Gau}(P)$ такая, что $\eta(\xi) = \xi$, $\xi \in V_G P(X)$. Тогда БРСТ-оператор $\mathbf{s}$ (4.61) может быть введен как оператор кограницы когомологий Шевалле—Эйленберга (см. § 7.2) коцепного комплекса, элементами которого являются q-коцепи на $V_G P(X)$, принимающие значения во внешней алгебре эквивариантных $\mathbf{g}$-значных форм на главном расслоении P [39, 140, 148]. □

Укажем на следующие две особенности духовых полей.

- Поскольку духи представляют собой нечетные поля на обычном гладком многообразии X и характеризуются духовым числом 1, с математической точки зрения они могут быть описаны как производящие элементы градуированной алгебры.
- Пример 4.3.1 показывает, что следует рассмотреть струи духовых полей.

Приводимая ниже геометрическая конструкция удовлетворяет этим условиям [113].

Пусть $E \to X$ — m-мерное векторное расслоение. Ассоциированное с ним многообразие k-струй J^kE также является векторным расслоением над X. Как и выше, положим $J^0E = E$. Рассмотрим простое градуированное многообразие $(X, \mathcal{A}_{J^kE})$, характеристическим расслоением которого служит расслоение k-струй $J^kE \to X$. Для простоты будем обозначать это градуированное многообразие $\widehat{J^kE}$. Оно имеет локальный базис $\{C^r_\Lambda\}$, $0 \leqslant |\Lambda| \leqslant k$, с функциями перехода

$$C^{rr}_{\lambda+\Lambda} = d_\lambda\left(\rho^r_q C^q_\Lambda\right), \tag{4.63}$$

где

$$d_\lambda = \partial_\lambda + C^r_\lambda \frac{\partial}{\partial C^r} + C^r_{\lambda\mu}\frac{\partial}{\partial C^r_\mu} + \dots$$

— *градуированные полные производные* (сравните с (3.103)). Вид функций перехода (4.63) позволяет интерпретировать базисные элементы C^r_Λ этого градуированного многообразия как *струи духовых полей*. Однако еще раз напомним, что C^r_Λ не являются струями градуированных расслоений, описанными в [136].

Пусть

$$E \xleftarrow{\pi^1_0} J^1E \longleftarrow \dots \longleftarrow J^{r-1}E \xleftarrow{\pi^r_{r-1}} J^rE \longleftarrow \dots \tag{4.64}$$

— обратная система многообразий струй и $J^\infty E$ — ее проективный предел. Естественная проекция

$$\pi^r_{r-1}\colon J^rE \to J^{r-1}E$$

порождает соответствующий мономорфизм внешних $\mathbb{R}$-алгебр

$$\pi^{r*}_{r-1}\colon \wedge J^{r-1}E^* \to \wedge J^rE^* \tag{4.65}$$

и эпиморфизм (3.24)

$$S\pi^r_{r-1}\colon \widehat{J^rE} \to \widehat{J^{r-1}E}, \quad r > 0, \tag{4.66}$$

градуированных многообразий. Морфизмы (4.65) и (4.66) определяют соответственно прямую систему внешних алгебр

$$\wedge E^* \longrightarrow \dots \xrightarrow{\pi^{r-1}_{r-2}} \wedge J^rE^* \longrightarrow \dots \tag{4.67}$$

и обратную систему градуированных многообразий

$$\widehat{E} \longleftarrow \widehat{J^1E} \longleftarrow \dots \longleftarrow \widehat{J^{r-1}E} \xleftarrow{(\pi^r_{r-1},\pi^r_{r-1})} \dots . \tag{4.68}$$

Прямая система (4.67) имеет прямой предел $\wedge J^\infty E^*$ в фильтрованных эндоморфизмах. Он состоит из элементов, индуцированных на $J^\infty E$ элементами внешних алгебр $\wedge J^kE^*$, $k = 0, 1, \dots$. Этот прямой предел определяет проективный предел $\widehat{J^\infty E}$ обратной системы градуированных многообразий (4.68). Пара $\widehat{J^\infty E} = \left(X, \wedge J^\infty E^*(X)\right)$ может рассматриваться как градуированное многообразие, а элементы его структурного модуля $\wedge J^\infty E^*(X)$ — как градуированные функции на X. Их коэффициенты — гладкие функции на X.

Чтобы ввести внешние формы на этом градуированном многообразии, возьмем прямой предел прямой системы фильтрованных $\wedge J^kE^*(X)$-алгебр $\wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^kE^*\right)(X)$ градуированных внешних форм на градуированных многообразиях $\widehat{J^kE}$ относительно естественных мономорфизмов

$$\wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge E^*\right)(X) \longrightarrow \dots \longrightarrow \wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^kE^*\right)(X) \longrightarrow \dots .$$

Этот прямой предел $\wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*\right)(X)$ состоит из градуированных внешних форм на градуированных многообразиях $\widehat{J^k E}$ по модулю указанных мономорфизмов. Это локально свободная фильтрованная $\wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^k E^*\right)(X)$-алгебра, порождаемая элементами

$$\left(1, dx^\lambda, \theta^\tau_\Lambda = dC^\tau_\Lambda - C^\tau_{\lambda+\Lambda} dx^\lambda\right), \qquad 0 \leqslant |\Lambda|,$$

которые удовлетворяют обычным правилам действия с градуированными внешними формами (см. § 3.2). Аналогично разложению (4.29), пространство

$$\bigwedge^k \mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*\right)(X)$$

градуированных k-форм раскладывается в прямую сумму подпространств

$$\wedge^{k-i,i}\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*\right)(X)$$

$(k-i)$-контактных форм. Соответственно градуированный внешний дифференциал d на алгебре $\bigwedge^k \mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*\right)(X)$ допускает разложение $d = d_H + d_V$, где *градуированный горизонтальный дифференциал* d_H имеет координатный вид

$$d_H(\phi) = dx^\lambda \wedge d_\lambda(\phi), \qquad \phi \in \wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*\right)(X).$$

Градуированные дифференциалы d_H и d_V удовлетворяют условиям нильпотентности (4.33). Поскольку всякий элемент $\phi \in \wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*\right)(X)$ является градуированной формой на некотором градуированном многообразии $\widehat{J^k E}$ конечного ранга, выражение для $d_\lambda(\phi)$ содержит конечное число членов.

Подобно тому как это было в предыдущем параграфе, мы можем интерпретировать горизонтальный дифференциал d_H как каноническую связность на алгебре $\wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*\right)(X)$.

Алгебра $\wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*\right)(X)$ дает нам все, что необходимо для дифференциального исчисления на духовых полях. Градуированные формы $\phi \in \wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*\right)(X)$ характеризуются:

- $\mathbb{Z}$-градуированным *духовым числом* $\mathrm{gh}\,(\phi)$ таким, что

$$\mathrm{gh}\left(C^i_\Lambda\right) = 1, \quad \mathrm{gh}\left(dC^i_\Lambda\right) = 1, \quad \mathrm{gh}\left(dx^\lambda\right) = 0, \quad \mathrm{gh}\,(f) = 0, \quad f \in C^\infty(X);$$

- *духовой грассмановой четностью* $[\phi] = \mathrm{gh}\,(\phi) \bmod 2$;
- обычной степенью внешних форм $|\phi|$ и соответствующей грассмановой четностью $|\phi| \bmod 2$;
- *полным духовым числом*

$$\mathrm{gh}_T(\phi) = \mathrm{gh}\,(\phi) + |\phi|.$$

Обратимся теперь к когомологиям алгебры $\wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*\right)(X)$. В соответствии с Замечанием 3.2.6 группы градуированных когомологий Де Рама градуированных многообразий $\wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^k E^*\right)(X)$ конечного ранга совпадают с группами когомологий Де Рама многообразия X, и то же самое относится к их прямому пределу. Согласно Теореме 4.1.4 этот предел представляет собой группы градуированных когомологий Де Рама алгебры $\wedge\mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*\right)(X)$. На эту алгебру также может быть распространена Теорема 4.2.2 (см. работу [42] и цитируемую в ней литературу).

Теорема 4.3.1. Если градуированная горизонтальная $(0 < k < n)$-форма ϕ является локально d_H-замкнутой, т. е. $d_H\phi = 0$, тогда она — локально d_H-точная, т. е. существует градуированная горизонтальная $(k-1)$-форма σ такая, что $\phi = d_H\sigma$. Градуированная горизонтальная n-форма ϕ является локально точной тогда и только

тогда, когда $\delta = \varepsilon_1(\phi) = 0$, где ε_1 — оператор Эйлера—Лагранжа (4.49), обобщенный на градуированную внешнюю алгебру. □

Как уже отмечалось, помимо физических полей φ^i с нулевым духовым числом и духов C^r, БРСТ-теория содержит духи для духов и антиполя (см. [80] в качестве обзора). В общем случае L-уровневая приводимая теория включает L поколений *духов для духов* C^r_l, $l = 1, \ldots, L$, характеризуемых следующими духовыми числами и духовыми грассмановыми четностями:

$$\mathrm{gh}\left(C^r_l\right) = \mathrm{gh}\left(C^r\right) + l, \quad \left[C^r_l\right] = \left(\left[C^r\right] + l\right) \bmod 2.$$

Нечетные духи для духов могут быть введены в той же манере, что и духи выбором соответствующего векторного расслоения E. Обозначим поля, духи и духи для духов общим символом Φ^A, $A = 1, \ldots, N$. *Антиполя* Φ^*_A имеют следующие духовые числа и духовые грассмановы четности:

$$\mathrm{gh}\left(\Phi^*_A\right) = -\mathrm{gh}\left(\Phi^A\right) - 1, \quad \left[\Phi^*_A\right] = \left(\left[\Phi^A\right] + 1\right) \bmod 2.$$

В формализме струй антиполя Φ^*_A могут быть введены так же, как и поля Φ^A выбором векторного расслоения $E = Y^*$, дуального к расслоению Y, сечения которого характеризуют поля Φ^A. Отметим, что калибровочные потенциалы представляют собой сечения аффинного расслоения $C \to X$ (4.56), моделируемого над векторным расслоением $T^*X \otimes V_G P$. Их нечетные антиполя моделируются над векторным расслоением $E = TX \otimes V^*_G P$.

Полная система полей и антиполей $\{\zeta^a\}$, называемая *классическим базисом* БРСТ-теории, описывается поточечным внешним произведением над X

$$\mathcal{G}^* = \Omega^*\left(J^\infty E_0\right) \bigwedge_X \left(\wedge \mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*_1\right)(X)\right) \tag{4.69}$$

$C^\infty(X)$-алгебры $\Omega^*(J^\infty E_0)$ четных элементов классического базиса и $C^\infty(X)$-алгебры $\wedge \mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*_1\right)(X)$ его нечетных элементов. Внешняя алгебра $\mathcal{G}^*$ (4.69) наделена внешним дифференциалом d, который является суммой над X внешних дифференциалов на $\Omega^*\left(J^\infty E_0\right)$ и $\wedge \mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E^*_1\right)(X)$. Соответствующий горизонтальный дифференциал d_H можно интерпретировать как каноническую связность на алгебре $\mathcal{G}^*$. Ее подмодуль $\mathcal{G}^k$ k-форм расщепляется на подпространства $\mathcal{G}^{k-i,i}$ $(k-i)$-контактных форм. Следуя принятой в физической литературе терминологии, мы будем называть элементы $\mathcal{G}^{0,*}$ *локальными формами*.

Существенно, что Теоремы 4.2.2 и 4.3.1 справедливы для локальных форм $f \in \mathcal{G}^{0,*}$. Следовательно коцепной комплекс

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_H} \mathcal{G}^{0,1} \xrightarrow{d_H} \cdots \xrightarrow{d_H} \mathcal{G}^{0,n} \xrightarrow{\delta} \mathcal{G}^{1,n} \xrightarrow{\delta} \cdots \tag{4.70}$$

имеет группы когомологий

$$H^0(\mathcal{G}^*) = \mathbb{R}, \quad H^{0<k<n}(\mathcal{G}^*) = 0, \quad H^n(\mathcal{G}^*) \neq 0. \tag{4.71}$$

Замечание 4.3.2. Следуя принятой практике, мы будем в дальнейшем применять операторы *правых производных*

$$\frac{\partial_r f}{\partial \zeta} = (-1)^{|\zeta|(|f|+1)} \frac{\partial_l f}{\partial \zeta}, \qquad f \in \mathcal{G}^0,$$

такие, что

$$df(\zeta) = d\zeta \frac{\partial_l f}{\partial \zeta} = \frac{\partial_r f}{\partial \zeta} d\zeta.$$

Левые производные $\partial_l/\partial\zeta$ — это те производные, которые использовались до сих пор. Символами δ_l и δ_r обозначаются левые и правые вариационные производные, задаваемые коэффициентами оператора Эйлера—Лагранжа (4.49). □

Пусть $f, f' \in \mathcal{G}^0$ — градуированные функции. Благодаря локальному изоморфизму

$$\mathcal{G}^0 \ni f \mapsto f\omega \in \mathcal{G}^{0,n}$$

их *антискобки* определяются как

$$(f, f')_{\mathrm{AB}} = \frac{\delta_r f}{\delta\Phi^A}\frac{\delta_l f'}{\delta\Phi^*_A} - \frac{\delta_r f}{\delta\Phi^*_A}\frac{\delta_l f'}{\delta\Phi^A}. \tag{4.72}$$

При этом

$$\mathrm{gh}\left((f, f')_{\mathrm{AB}}\right) = \mathrm{gh}\,(f) + \mathrm{gh}\,(f') + 1, \quad \left[(f, f')_{\mathrm{AB}}\right] = \left([f] + [f'] + 1\right) \bmod 2.$$

Замечание 4.3.3. Легко видно, что фактически антискобки (4.72) задаются на элементах групп когомологий $H^n(\mathcal{G}^*)$ (4.71) комплекса (4.70). Они соответствуют локальным функционалам

$$\int f\omega$$

с точностью до поверхностных интегралов. В то же время антискобки, определяемые на локальных функционалах, предполагают более изощренную геометрическую интерпретацию антиполей [97, 155]. □

Антискобки (4.72) обладают свойствами градуированных скобок Пуассона

$$(f, f')_{\mathrm{AB}} = -(-1)^{([f]+1)([f']+1)}(f', f)_{\mathrm{AB}},$$

$$(f, (f', f'')_{\mathrm{AB}})_{\mathrm{AB}} + (-1)^{([f]+1)([f']+[f''])}((f', f'')_{\mathrm{AB}}, f)_{\mathrm{AB}} + \\ + (-1)^{([f'']+1)([f]+[f'])}((f'', f)_{\mathrm{AB}}, f')_{\mathrm{AB}} = 0,$$

где градуировкой f, f' и f'' считается их грассманова четность плюс 1. В частности, $(f, f)_{\mathrm{AB}} = 0$, если f нечетно, и

$$(f, f)_{\mathrm{AB}} = 2\frac{\delta_r f}{\delta\Phi^A}\frac{\delta_l f}{\delta\Phi^*_A},$$

если f четно. Можно написать

$$(f, f')_{\mathrm{AB}} = \frac{\delta_r f}{\delta\zeta^a} w^{ab} \frac{\delta_l f'}{\delta\zeta^b}, \tag{4.73}$$

где w^{ab} является градуированным пуассоновым бивектором. Легко видеть, что базис $\left\{\Phi^A, \Phi^*_A\right\}$ является каноническим для пуассоновой структуры (4.72). В этом базисе градуированный пуассонов бивектор w имеет вид

$$w = \begin{pmatrix} 0 & \delta^A_B \\ -\delta^A_B & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $S \in \mathcal{G}^{0,n}$ — локальная плотность с нулевым духовым числом. Уравнение

$$(S, S)_{\mathrm{AB}} = 2\frac{\delta_r S}{\delta\Phi^A}\frac{\delta_l S}{\delta\Phi^*_A} = 0 \tag{4.74}$$

называется *классическим основным уравнением*. Если интерпретировать S в качестве лагранжиана классического базиса $\{\zeta^a\}$ полей и антиполей, уравнения

$$\frac{\delta_r S}{\delta \zeta^a} = 0 \tag{4.75}$$

имеют смысл уравнений движения. Уравнения (4.75) не являются независимыми, а удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\delta_r S}{\delta \zeta^a} \mathcal{R}^a_b = 0, \qquad \mathcal{R}^a_b = w^{ac} \frac{\delta_l \delta_r S}{\delta \zeta^c \delta \zeta^b}, \tag{4.76}$$

которые показывают, что решение S основного уравнения (4.74) обладает калибровочной свободой.

Решение S основного уравнения (4.74) называется *приемлемым решением*, если ранг хессиана

$$\frac{\partial_l \partial_r S}{\partial \zeta^a \partial \zeta^b}$$

в стационарной точке $\mathcal{G}^0$, где выполняются уравнения движения (4.75), равен N. Объяснение простое. Если S — приемлемое решение, можно использовать вышеупомянутую калибровочную свободу для того, чтобы исключить все антиполя.

Мы сошлемся на работы [68, 69, 80] и приведенную в них литературу по проблеме существования и единственности приемлемого решения основного уравнения. Отметим только два его свойства.

(i) Приемлемое решение S может быть разложено в степенной ряд по антиполям так, что

$$S|_{\Phi^* = 0} = L_{\mathrm{cl}}$$

является лагранжианом классических полей φ^i. Это разложение может быть представлено как разложение по *антидуховым числам*, определяемым как

$$\mathrm{antigh}\left(\Phi^*_A\right) = -\,\mathrm{gh}\left(\Phi^*_A\right) = \mathrm{gh}\left(\Phi^A\right) + 1, \quad \mathrm{antigh}\left(\Phi^A\right) = 0.$$

(ii) Пусть S — приемлемое решение для классического базиса $\left(\Phi^A, \Phi^*_A\right)$. Рассмотрим два новых поля Ψ_1 и Ψ_2 с духовыми числами

$$\mathrm{gh}\left(\Psi_2\right) = \mathrm{gh}\left(\Psi_1\right) + 1,$$

и пусть Ψ^*_1 и Ψ^*_2 — соответствующие антиполя. Тогда $S + \Psi^*_1 \Psi_2$ является приемлемым решением для классического базиса $\left(\Phi^A, \Psi_1, \Psi_2, \Phi^*_A, \Psi^*_1, \Psi^*_2\right)$. Говорят, что (Ψ_1, Ψ_2) — *тривиальная пара*. Тривиальные пары могут быть добавлены к классическому базису при сохранении классического основного уравнения и его свойств. Они возникают при фиксации калибровки и квантовании методом функционального интегрирования.

Пусть S — приемлемое решение основного уравнения (4.74). *БРСТ-оператор* определяется как

$$\mathbf{s} f = (f, S)_{\mathrm{AB}}, \qquad f \in \mathcal{G}^0. \tag{4.77}$$

Тогда, исходя из свойств антискобок, получаем что:

- $\mathbf{s}$ — нильпотентный оператор ($\mathbf{s}^2 = 0$);
- он является антидифференцированием

$$\mathbf{s}\left(f f'\right) = f \mathbf{s} f' + (-1)^{|f'|} (\mathbf{s} f) f';$$

- $\mathrm{gh}(\mathbf{s} f) = \mathrm{gh}\,(f) + 1$.

Пример 4.3.4. Рассмотрим калибровочную модель Янга—Миллса на расслоении связностей C (4.56) с координатами (x^λ, a^m_λ). Она приводима. Поэтому ее классический базис включает калибровочные потенциалы и духовые поля $\Phi^A = (a^m_\lambda, C^m)$ вместе с антиполями $\Phi^*_A = (a^{\lambda *}_m, C^*_m)$. Приемлемым решением основного уравнения является

$$S = L_{\text{YM}} + a^{\lambda *}_r (C^r_\lambda + c^r_{pq} a^p_\lambda C^q) + \frac{1}{2} C^*_p c^p_{rq} C^r C^q,$$

где L_{YM} — лагранжиан Янга—Миллса (см. выражение (2.21) в первом томе [11]). Соответствующий БРСТ-оператор на A^r_λ и C^p имеет вид

$$\mathbf{s}\, a^r_\lambda = C^r_\lambda + c^r_{pq} a^p_\lambda C^q, \qquad \mathbf{s}\, C^p = -\frac{1}{2} c^p_{rq} C^r C^q, \tag{4.78}$$
$$\mathbf{s}\, a^{\lambda *}_r = \delta^\lambda_r (L_{\text{YM}}) + a^{\lambda *}_p c^p_{rq} C^q, \qquad \mathbf{s}\, C^*_r = a^{\lambda *}_{\lambda r} - c^p_{qr} a^q_\lambda a^{\lambda *}_p + c^p_{rq} C^*_p C^q,$$

где $\delta^\lambda_r (L_{\text{YM}})$ — вариационная производная лагранжиана Янга—Миллса L_{YM}. □

Замечание 4.3.5. Отметим, что БРСТ-оператор иногда определяется как

$$\mathbf{s} f = (-1)^{|f|} (f, S)_{\text{AB}}. \tag{4.79}$$

В отличие от $\mathbf{s}$ (4.77) он является дифференцированием

$$\mathbf{s}(ff') = (\mathbf{s} f) f' + (-1)^{|f|} f \mathbf{s} f'.$$

□

§ 4. БРСТ-связность

Чтобы сделать выражение (4.77) для БРСТ-оператора $\mathbf{s}$ замкнутым, необходимо определить действие этого оператора на струи элементов классического базиса. Определение $\mathbf{s}$ предполагает, что $\mathbf{s}(x^\lambda) = 0$. Поэтому положим

$$\mathbf{s}\, \zeta^a_\Lambda = d_\Lambda (\mathbf{s}\, \zeta^a).$$

Тогда БРСТ-оператор $\mathbf{s}$ может быть расширен на подалгебру локальных форм $\mathcal{G}^{0,*}$ так, что

$$\mathbf{s}\, d_H = -d_H \mathbf{s},$$

т. е.

$$\mathbf{s}\left(\frac{1}{r!} \phi_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_r}\right) = \frac{1}{r!} (-1)^r (\mathbf{s}\, \phi_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}) dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_r}. \tag{4.80}$$

В частности, посредством оператора $\mathbf{s}$ (4.80) формула (4.78) переписывается в виде

$$\mathbf{s}\, a = -d_H C - [a, C], \quad \mathbf{s}\, C = -\frac{1}{2}[C, C], \tag{4.81}$$

где $a = a^r_\lambda dx^\lambda \otimes e_r$.

Операторы $\mathbf{s}$ и d_H определяют бикомплекс на алгебре локальных форм, который градуирован по степеням локальных форм и духовому числу так, что

$$\phi \wedge \phi' = (-1)^{|\phi||\phi'| + |\phi||\phi'|} \phi' \wedge \phi, \quad \phi, \phi' \in \mathcal{G}^{0,*}. \tag{4.82}$$

Следуя стандартной процедуре [8], из этого бикомплекса можно получить комплекс, характеризуемый коцепным оператором

$$\widetilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s} + d_H. \tag{4.83}$$

Он градуирован по полному духовому числу. Оператор (4.83) нильпотентен ($\widetilde{\mathbf{s}}^2 = 0$) и увеличивает полное духовое число на 1, т. е.

$$\mathrm{gh}_T(\widetilde{\mathbf{s}}\,\phi) = \mathrm{gh}_T(\phi) + 1.$$

Он называется *полным БРСТ-оператором*

Рассмотрим когомологии полного БРСТ-оператора (4.83). В случае калибровочной модели Янга—Миллса это так называемые локальные когомологии [39, 111], описываемые в терминах струй [28, 42].

Пусть $\phi_n \in \mathcal{G}^{0,n}$ — локальная плотность, т. е. лагранжиан. Он называется *локально БРСТ-замкнутым*, если $\mathbf{s}\,\phi_n$ — d_H-точная форма, т. е. удовлетворяет равенству

$$\mathbf{s}\,\phi_n + d_H\phi_{n-1} = 0, \tag{4.84}$$

где $\phi_{n-1} \in \mathcal{G}^{0,n-1}$ — локальная $(n-1)$-форма. Ясно, что локальная форма ϕ_n является локально БРСТ-замкнутой, если функционал действия

$$\int \phi_n$$

БРСТ-инвариантен с точностью до поверхностных интегралов. Говорят, что локальная плотность ϕ_n *локально БРСТ-точна*, если

$$\phi_n = \mathbf{s}\sigma_n + d_H\sigma_{n-1}.$$

Множество $H(\mathbf{s}|d_H)$ классов эквивалентности локально БРСТ-замкнутых локальных плотностей по модулю локально БРСТ-точных точных локальных плотностей называется *локальными БРСТ-когомологиями* [28, 29, 42, 87].

Установим теперь связь между локальными БРСТ-когомологиями и когомологиями полного БРСТ-оператора $\widetilde{\mathbf{s}}$. Применяя оператор $\mathbf{s}$ к равенству (4.84), получаем

$$d_H(\mathbf{s}\phi_{n-1}) = 0.$$

Следовательно $\mathbf{s}\phi_{n-1}$ является d_H-замкнутой локальной формой, а значит d_H-точной в соответствии с Теоремой 4.3.1. Поэтому существует (возможно нулевая) локальная $(n-2)$-форма ϕ_{n-2}, удовлетворяющая уравнению

$$\mathbf{s}\,\phi_{n-1} + d_H\phi_{n-2} = 0.$$

По индукции можно сделать заключение о существовании семейства локальных форм ϕ_k, $k = k_0, \ldots, n$, подчиняющихся соотношениям

$$d_H\phi_n = 0, \tag{4.85а}$$

$$\mathbf{s}\,\phi_k + d_H\phi_{k-1} = 0, \quad n \geqslant k > k_0, \tag{4.85б}$$

$$\mathbf{s}\,\phi_{k_0} = 0 \tag{4.85в}$$

для некоторого k_0. Эти уравнения называются *уравнениями спуска* [42]. Если $k_0 = 0$, уравнение (4.85в) принимает общий вид $\mathbf{s}\,\phi_0 = \mathrm{const}$. Уравнения спуска (4.85а)–(4.85в) могут быть переписаны в компактной форме

$$\widetilde{\mathbf{s}}\,\widetilde{\phi} = 0, \qquad \widetilde{\phi} = \sum_{k=k_0}^{n} \phi_k. \tag{4.86}$$

Отсюда следует, что любое решение уравнения (4.84) соответствует $\widetilde{\mathbf{s}}$-замкнутой форме, и обратно. В частности, решение ϕ_n уравнения (4.84) является локально БРСТ-точным тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{\phi} = \widetilde{\mathbf{s}}\,\widetilde{\sigma} + \mathrm{const},$$

т. е. всякая локально БРСТ-точная локальная форма соответствует $\widetilde{\mathbf{s}}$-точной локальной форме по модулю постоянных функций. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.4.1. Локальные БРСТ-когомологии локальных плотностей ϕ_n с данным полным духовым числом

$$\mathrm{gh}_T(\phi) = \mathrm{gh}\,(\phi) + n$$

изоморфны $\widetilde{\mathbf{s}}$-когомологиям локальных форм $\widetilde{\phi}$, обладающих тем же полным духовым числом $\mathrm{gh}_T(\phi)$. □

Поскольку приемлемое решение S основного уравнения раскладывается в ряд по степеням антиполей, БРСТ-оператор может быть разложен в сумму

$$\mathbf{s} = \delta + \gamma + \sum_{k\geqslant 1} s_k, \tag{4.87}$$

где δ, γ и s_k — операторы с антидуховыми числами -1, 0 и k соответственно. Так как горизонтальный дифференциал d_H имеет нулевое антидуховое число, соответствующее разложение полного БРСТ-оператора имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{s}} = \delta + \widetilde{\gamma} + \sum_{k\geqslant 1} s_k, \quad \widetilde{\gamma} = \gamma + d_H.$$

Оператор δ, называемый *дифференциалом Косзула—Тейта*, нильпотентен. Он отличен от нуля только на антиполях:

$$\delta\Phi^A = 0, \quad \delta\varphi_i^* = \frac{\delta_r L_{\mathrm{cl}}}{\partial\varphi^i}, \quad \ldots .$$

Оператор γ задает калибровочные преобразования, параметрами которых служат духовые поля:

$$\gamma\varphi^i = R_r^i C^r, \qquad R_r^i = \sum_{k\geqslant 0} R_r^{i\Lambda} d_\Lambda. \tag{4.88}$$

Смысл разложения (4.87) состоит в ацикличности дифференциала Косзула—Тейта δ на локальных функциях с положительными антидуховыми числами, т. е. равенство $\delta\widetilde{\phi}_k = 0$ $\left(\mathrm{antigh}\left(\widetilde{\phi}_k\right) = k\right)$ предполагает, что $\widetilde{\phi}_k = \delta\widetilde{\sigma}_{k+1}$ (см. подробности в [68, 69]). Отсюда можно сделать вывод, что $\widetilde{\mathbf{s}}$-неточное решение $\widetilde{\phi}$ уравнения $\widetilde{\mathbf{s}}\widetilde{\phi} = 0$ с необходимостью содержит не зависящую от антиполей компоненту $\widetilde{\phi}_0$ такую, что

$$\widetilde{\gamma}\widetilde{\phi}_0 \approx 0, \quad \widetilde{\phi}_0 \not\approx \widetilde{\gamma}\,\widetilde{\sigma} + \mathrm{const}, \quad \mathrm{antigh}\left(\widetilde{\phi}_0\right) = 0. \tag{4.89}$$

Здесь $\approx$ обозначает слабое равенство, т. е. $a_0 \approx 0$ $(\mathrm{antigh}\,(a_0) = 0)$ тогда и только тогда, когда существует a_1 $(\mathrm{antigh}\,(a_1) = 1)$ такое, что $a_0 = \delta a_1$. Более того, любое решение $\widetilde{\phi}_0$ уравнения (4.89) может быть пополнено до $\widetilde{\mathbf{s}}$-замкнутой неточной локальной формы $\widetilde{\phi}$ такой, что различные пополнения с одной и той же не зависящей от антиполей составляющей принадлежат одному и тому же элементу $\widetilde{\mathbf{s}}$-когомологий. Отметим, что

$$\delta\widetilde{\gamma} + \widetilde{\gamma}\delta = 0, \qquad \widetilde{\gamma}^2 = -(\delta s_1 + s_1\delta),$$

т. е. оператор $\widetilde{\gamma}$ слабо нильпотентен. Тем самым мы пришли к следующему результату.

Предложение 4.4.2. [42]. Когомологии полного БРСТ-оператора $\widetilde{\mathbf{s}}$ на локальных формах изоморфны слабым когомологиям оператора $\widetilde{\gamma}$ на не зависящих от антиполей локальных формах. □

Поэтому, говоря о когомологиях, можно ограничиться рассмотрением локальных форм, свободных от антиполей. Предположим, что существует локально обратимое преобразование координат от классического базиса (Φ^A), не зависящего от антиполей, к базису (U^l, V^l, W^i) с неотрицательным духовым числом такому, что

$$\widetilde{\gamma}U^l = V^l, \quad \widetilde{\gamma}W^i = R^i(W).$$

Пара (U^l, V^l) называется тривиальной. Не ограничивая общности, можно также предположить, что все элементы U^l, V^l, W^i имеют определенное полное духовое число. Обычно U^l представляют собой компоненты калибровочных потенциалов и их струй, тогда как $V^l = \widetilde{\gamma}U^l$ (см. ниже Примеры 4.4.1 и 4.4.2).

Предложение 4.4.3. [42]. Если

$$\widetilde{\gamma}\widetilde{\phi}_0(U, V, W) \approx 0,$$

тогда

$$\widetilde{\gamma}\widetilde{\phi}_0(U, V, W) \approx \phi(W) + \widetilde{\gamma}\widetilde{\sigma}(U, V, W),$$

т. е. тривиальные пары могут быть исключены из слабых $\widetilde{\gamma}$-когомологий. □

Обозначим T^ι, $\widetilde{C}^L$ и Q^{L_k} те элементы W^i, которые характеризуются полными духовыми числами 0, 1 и $k > 1$ соответственно. Элементы T^ι, называемые *БРСТ-тензорными полями*, представляют собой локальные 0-формы, тогда как $\widetilde{C}^L$ и $\widetilde{Q}^{L_k}$ в общем случае раскладываются в сумму локальных форм с ненулевыми степенями

$$\widetilde{C}^L = \widehat{C}^L + \mathcal{A}^L, \tag{4.90}$$

$$\widehat{C}^L \in \mathcal{G}^0, \ \mathrm{gh}\,(\widehat{C}^L) = 1, \quad \mathcal{A}^L \in \mathcal{G}^{0,1}, \ \mathrm{gh}\,(\mathcal{A}^L) = 0,$$

$$\widetilde{Q}^{L_k} = \sum_{r=0}^{k} \widehat{Q}_r^{L_k}, \tag{4.91}$$

$$\widehat{Q}_r^{L_k} \in \mathcal{G}^{0,r}, \quad \mathrm{gh}\,(\widehat{Q}_r^{L_k}) = k - r.$$

Поскольку оператор $\widetilde{\gamma}$ повышает полное духовое число на 1, мы можем написать

$$\widetilde{\gamma}T^\iota = \widetilde{C}^L \Delta_L T^\iota, \quad \Delta_L = R_L^\iota \frac{\partial}{\partial T^\iota}, \tag{4.92}$$

$$\widetilde{\gamma}\widetilde{C}^L = \frac{(-1)^{|\widetilde{C}^N|}}{2} \widetilde{C}^N \widetilde{C}^M f_{MN}^L(T) + \widetilde{Q}^{M_2} Z_{M_2}^L \tag{4.93}$$

для некоторых функций R, f и Z тензорных полей T.

Благодаря разложениям $\widetilde{\gamma} = \gamma + d_H$ и (4.90), равенство (4.92) распадается на равенства

$$\gamma T^\iota = \widehat{C}^L \Delta_L T^\iota, \tag{4.94}$$

$$d_\lambda T^\iota = \mathcal{A}_\lambda^L \Delta_L T^\iota, \qquad \mathcal{A}^L = dx^\lambda \mathcal{A}_\lambda^L. \tag{4.95}$$

Поскольку соотношение (4.95) выполняется тождественно, оно предполагает расщепление оператора полной производной

$$d_\lambda = v_\lambda^m V_m^\mu (d_\mu - \mathcal{A}_\mu^r \Delta_r) + \mathcal{A}_\lambda^r \Delta_r \tag{4.96}$$

и соответствующее расщепление наборов

$$\{\mathcal{A}_\lambda^L\} = \{v_\lambda^m; \mathcal{A}_\lambda^r\}, \quad \{\Delta_L\} = \{D_m; \Delta_r\},$$

где $v_\lambda^m V_m^\mu = \delta_\lambda^\mu$ и

$$D_m = V_m^\mu \left(d_\mu - \mathcal{A}_\mu^r \Delta_r\right).$$

Тогда равенство (4.94) приводится к виду

$$\gamma T^\iota = \left[\widehat{C}^r \Delta_r + \widehat{C}^m V_m^\mu \left(d_\mu - \mathcal{A}_\mu^r \Delta_r\right)\right] T^\iota. \tag{4.97}$$

Соответственно оператор $\widetilde{\gamma}$ (4.92) принимает форму

$$\widetilde{\gamma} T^\iota = \left(\widetilde{C}^m D_m + \widetilde{C}^r \Delta_r\right) T^\iota. \tag{4.98}$$

Из-за этой формы величины $\{\widetilde{C}^N\}$ называются обобщенными связностями, или *БРСТ-связностями* [42, 111].

Следующие два примера показывают, что такое название связано с обычным понятием связностей, используемых в физических моделях.

Пример 4.4.1. Рассмотрим снова калибровочную модель Янга—Миллса на главном расслоении со структурной группой G. Тривиальными парами в ней являются

$$\{U^l\} = \{a_{\Lambda+\lambda}^r,\ 0 \leqslant |\Lambda|\}, \qquad \{V^l\} = \{\widetilde{\gamma} U^l\}.$$

БРСТ-связности имеют вид

$$\{\widetilde{C}^L\} = \{dx^\lambda;\ \widetilde{C}^r = C^r + dx^\lambda a_\lambda^r\}.$$

Получаем следующие операторы Δ (4.92), отвечающие этим БРСТ-связностям:

$$\{\Delta_L\} = \{D_\lambda = d_\lambda - a_\lambda^r \epsilon_r;\ \epsilon_r\},$$

где $\{\epsilon_r\}$ — базис алгебры Ли $\mathbf{g}_l$ группы Ли G. Полное семейство БРСТ-тензорных полей T^ι состоит из алгебраически независимых компонент напряженности $\mathcal{F}_{\lambda\mu}^r$ и ее ковариантных производных $D_\Lambda \mathcal{F}_{\lambda\mu}^r$. □

Пример 4.4.2. В метрической теории гравитации БРСТ-преобразованиями метрики $g_{\mu\nu}$ служат общие ковариантные преобразования, параметрами которых являются духовые поля ξ^μ:

$$\mathbf{s}\, g_{\mu\nu} = \xi^\lambda d_\lambda g_{\mu\nu} + \left(d_\mu \xi^\lambda\right) g_{\lambda\nu} + \left(d_\nu \xi^\lambda\right) g_{\mu\lambda}.$$

БРСТ-преобразования самих духовых полей имеют вид

$$\mathbf{s}\xi^\mu = \xi^\nu d_\nu \xi^\mu.$$

Тривиальные пары $\{U^l, V^l\}$ состоят из струй $d_\Lambda \{\lambda^\nu{}_\mu\}$ символов Кристоффеля и $\widetilde{\gamma} d_\Lambda \{\lambda^\nu{}_\mu\}$. БРСТ-связностями являются

$$\{\widetilde{C}^L\} = \{\widetilde{\xi}^\lambda = \xi^\lambda + dx^\lambda;\ \widetilde{C}_\lambda^\nu = d_\lambda \xi^\nu + \{\lambda^\nu{}_\mu\} \widetilde{\xi}^\mu\}.$$

Получаем операторы Δ, отвечающие БРСТ-связностям:

$$\{\Delta_L\} = \{D_\lambda = d_\lambda - \{\lambda^\nu{}_\mu\} \Delta_\mu^\nu;\ \Delta_\mu^\nu\},$$

где Δ_μ^ν — генераторы группы $GL(n, \mathbb{R})$, действующие на мировые индексы по закону

$$\Delta_\mu^\nu T_\lambda = \delta_\lambda^\nu T_\mu, \qquad \Delta_\mu^\nu T^\lambda = -\delta_\mu^\lambda T^\nu.$$

Множество БРСТ-тензорных полей состоит из метрики $g_{\mu\nu}$, алгебраически независимых компонент тензора кривизны $R_{\lambda\mu}{}^\alpha{}_\beta$ и его ковариантных производных $D_\Lambda R_{\lambda\mu}{}^\alpha{}_\beta$. БРСТ-преобразования БРСТ-тензорных полей имеют вид

$$\gamma T_\mu = \xi^\nu D_\nu T_\mu + \left(d_\mu \xi^\nu + \{\mu^\nu{}_\alpha\} \xi^\alpha\right) T_\nu = \xi^\nu d_\nu T_\mu + \left(d_\mu \xi^\nu\right) T_\nu,$$

т. е. это общие ковариантные преобразования T_μ, параметрами которых являются духовые поля ξ^ν. □

Глава 5

Топологические теории поля

Топологическая теория поля обычно характеризуется:

- набором полей на римановом многообразии X, градуированных по грассмановой четности и духовому числу;
- нечетным нильпотентным БРСТ-оператором Q;
- физическими состояниями, определяемыми Q-когомологическими классами;
- Q-точным метрическим тензором энергии-импульса

(см. в качестве обзора работу [37] и цитируемую в ней литературу). Топологические теории поля подразделяются на теории типа Уиттена и типа Шварца. Примером первых служит теория Дональдсона, тогда как вторые включают модели, функционал действия которых не зависит от метрики на X, например, теорию Чженя—Саймонса.

Здесь мы сосредоточим внимание на том примечательном факте, что выражение для кривизны связности на пространстве калибровочных полей в точности совпадает с БРСТ-преобразованием в геометрическом секторе вышеупомянутой теории Дональдсона. Как следствие инварианты Дональдсона играют роль наблюдаемых в топологической теории поля.

§ 1. Пространство калибровочных полей

Как уже отмечалось (см. первый том [11], § 2.2), связности на главном расслоении $P \to X$ со структурной группой G, т. е. калибровочные потенциалы, представляются сечениями аффинного расслоения $C \to X$ (4.56). Они образуют аффинное пространство $\mathbf{A}$, моделируемое над векторным пространством сечений векторного расслоения

$$\bar{C} = T^*X \otimes V_G P \tag{5.1}$$

и называемое *пространством калибровочных полей*. Калибровочные потенциалы считаются физически эквивалентными, если они переводятся друг в друга вертикальными автоморфизмами главного расслоения P. Поэтому конфигурационным пространством квантовой калибровочной теории является фактор-пространство $\mathbf{A}/\mathcal{G}$, где $\mathcal{G} = \mathrm{Gau}(P)$ — уже упоминавшаяся выше калибровочная группа (см. первый том [11], § 2.2). Чтобы наделить конфигурационное пространство гладкой структурой, рассмотрим его пополнение Соболева.

Приведем коротко основные сведения о пространствах Соболева [17, 114, 122]. Рассмотрим на области $U \subset \mathbb{R}^n$ векторное пространство $L^p(U)$, $1 \leqslant p < \infty$, всех интегрируемых вещественных функций на U таких, что

$$\int\limits_U |f(x)|^p \, d^n x < \infty.$$

Это банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_p = \left\{ \int\limits_U |f(x)|^p \, d^n x \right\}^{1/p}$$

(см. выражение (A.5) в третьем томе [13]). Ясно, что функции отождествляются, если равны друг другу почти всюду на U. Пространства Соболева определяются на произвольной области $U \subset \mathbb{R}^n$ и являются векторными подпространствами пространств $L^p(U)$.

Мы будем использовать стандартное обозначение

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где α — упорядоченный набор натуральных чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ и

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r.$$

Определим функционал

$$\|f\|_{k,p} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha f\|_p^p \right\}^{1/p}, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{5.2}$$

на вещественных функциях f на U, для которых правая сторона выражения (5.2) имеет смысл. Функционал (5.2) является нормой на любом векторном подпространстве таких функций.

Определение 5.1.1. *Пространство Соболева* $\mathcal{H}^{k,p}(U)$ определяется как пополнение множества

$$\{ f \in C^k(U) \colon \|f\|_{k,p} < \infty \}$$

относительно нормы (5.2). □

Под пространством Соболева понимается также другое пространство $W^{k,p}(U)$, которое, как можно показать, изоморфно $\mathcal{H}^{k,p}(U)$ (см. детальное изложение в работе [17]). Существенно, что множество гладких функций

$$\{ f \in C^\infty(U) \colon \|f\|_{k,p} < \infty \}$$

плотно в $\mathcal{H}^{k,p}(U)$. Поэтому пространством Соболева называют еще замыкание $W_0^{k,p}(U)$ множества гладких функций с компактным носителем в $\mathcal{H}^{k,p}(U)$.

Понятие пространства Соболева может быть расширено на комплексные функции и произвольное вещественное число k. Такое пространство Соболева $\mathcal{H}^{k,p}(U)$, $k \in \mathbb{R}$, состоит из тех комплексных функций и распределений Шварца f (см. третий том [13], Приложение Б), для которых норма

$$\|f\|_{k,p} = \left\{ \int \left| \hat{f}(\xi) \left(1 + \xi^2\right)^{k/2} \right|^p d\xi \right\}^{1/p}, \tag{5.3}$$

где $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f, является конечной. Если k является целым неотрицательным числом, это определение эквивалентно первоначальному Определению 5.1.1, обобщенному на комплексные функции [122]. Мы ограничимся случаем $p = 2$ и обозначим

$$\mathcal{H}^{k,2}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^k.$$

Это гильбертово пространство. В частности, можно показать, что пространство $\mathcal{H}^{-k}$, $k > 0$, дуально $\mathcal{H}^k$ и его элементами являются обобщенные функции. Действительно, пусть $\mathcal{D}$ — пространство гладких комплексных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$. Оно наделено топологией, определяемой семейством преднорм

$$p_{\{\phi_\alpha\}}(f) = \sup_{x \in Q} \left| \sum_\alpha \phi_\alpha(x) \partial^\alpha f(x) \right|,$$

где $\{\phi_a\}$ — набор гладких функций такой, что на любом компактном подмножестве $K \subset \mathbb{R}^n$ только конечное число этих функций отлично от нуля (см. третий том [13], Приложение Б). Пространство $\mathcal{D}$ известно как пространство *пробных функций*. Его топологическим сопряженным $\mathcal{D}'$ является пространство уже упоминавшихся *распределений Шварца*. Пусть $\mathcal{S}$ — ядерное *пространство Шварца* гладких функций, быстро убывающих на бесконечности (см. третий том [13], Приложение Б). Его топологическим сопряженным $\mathcal{S}'$ является пространство *распределений умеренного роста* (или *обобщенных функций*). Имеет место цепочка вложений

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \ldots \mathcal{H}^k \subset \ldots \mathcal{H}^0 = L^0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}^{-1} \subset \ldots \mathcal{H}^{-k} \subset \ldots \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'.$$

Можно определить пространство Соболева функций на произвольном многообразии X (которое, напомним, предполагается паракомпактным), выбрав его открытое покрытие и соответствующее разбиение единицы. Известна следующая *теорема вложения Соболева* [122].

Теорема 5.1.2. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, или пусть многообразие X компактно. Тогда $\mathcal{H}^{k,p}(X) \subset C^l(X)$, если $k - n/p > l$, где $C^l(X)$ — пространство l-кратно непрерывно дифференцируемых функций на X. В частности, $\mathcal{H}^k \subset C^n(X)$, если $k > n/2$. □

Понятие пространства Соболева может быть также распространено на сечения векторного расслоения $Y \to X$, имеющие компактный носитель. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением векторных расслоений $Y \to X$ над компактным ориентируемым n-мерным римановым многообразием X. Это случай большинства представляющих физический интерес евклидовых калибровочных теорий. Пусть $Y(X)$ — структурный модуль глобальных сечений s такого векторного расслоения. Рассмотрим его пополнение $Y(X)_k$, называемое *пополнением Соболева*, для неотрицательного k относительно нормы

$$\|s\|_k = \left(\sum_i \int_{U_i} d\,\mathrm{vol} \sum_{|\alpha| \leqslant k} \left| \partial^\alpha (\mathrm{pr}_2 \circ \psi_i \circ s) \right|_\varrho^2 \right)^{1/2}, \tag{5.4}$$

где $\Psi = \{U_i, \psi_i\}$ — атлас расслоения $Y \to X$ над конечным открытым покрытием $\{U_i\}$ базы X и $|.|_\varrho$ — норма относительно некоторой послойной метрики ϱ в Y. Различный выбор атласа Ψ и римановой метрики на X дает одно и то же пополнение Соболева. Отметим также, что частные производные в выражении (5.4) могут быть заменены на ковариантные производные относительно некоторой связности на Y.

Пусть теперь $P \to X$ — главное расслоение, структурная группа которого G является компактной полупростой матричной группой Ли. Начнем с пополнения Соболева калибровочной группы $\mathcal{G}$ вертикальных автоморфизмов главного расслоения $P \to X$. Элементами этой группы являются матричные функции g, которые действует на пространство калибровочных полей $\mathbf{A}$ по известному закону

$$\mathcal{G} \ni g\colon A \mapsto g^{-1} A\, g + g^{-1} dg.$$

Выделяют нормальную подгруппу калибровочной группы, которая является стабилизатором

$$\mathcal{G}^0 = \{\Phi \in \mathcal{G}\colon \Phi(x_0) = \mathbf{1}\}$$

в некоторой фиксированной точке $x_0 \in X$. Она называется *отмеченной калибровочной группой*. Эта группа действует свободно на пространстве калибровочных полей $\mathbf{A}$. Отметим, что $\mathcal{G}/\mathcal{G}^0 = G$.

Вводят также *эффективную калибровочную группу* $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/\mathcal{Z}$, где $\mathcal{Z}$ — центр калибровочной группы $\mathcal{G}$. Центр $\mathcal{Z}$ изоморфен центру $Z(G)$ группы G.

Определение 5.1.3. Связность A на главном расслоении $P \to X$ называется *неприводимой*, если ее стабилизатор $\mathcal{G}_A$ (т. е. $\Phi(A) = A$, $\forall \Phi \in \mathcal{G}_A$) принадлежит центру калибровочной группы $\mathcal{Z}$, и это является общим случаем связностей на главном расслоении. □

Обозначим $\overline{\mathbf{A}}$ пространство неприводимых связностей (калибровочных полей). Эффективная калибровочная группа $\overline{\mathcal{G}}$ действует свободно на $\overline{\mathbf{A}}$.

Замечание 5.1.1. Приведем некоторые добавочные сведения к тому, что было изложено в первом томе о связностях на главных расслоениях. Они потребуются нам в дальнейшем.

Пусть $P \to X$ — главное расслоение со структурной группой G. Связность A на главном расслоении $P \to X$ представляется $T_G P$-значной формой

$$A = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + A^q_\lambda e_q) \tag{5.5}$$

(см. формулу (1.86) в первом томе [11]). Напомним, что

$$T_G P = TP/G.$$

Связность A (5.5) порождает ассоциированную линейную связность на расслоении алгебр Ли $V_G P \to X$. Соответствующий ковариантный дифференциал $\nabla^A \xi$ сечения $\xi = \xi^p e_p$ этого расслоения имеет вид

$$\nabla^A \xi \colon X \to T^*X \otimes V_G P,$$
$$\nabla^A \xi = (\partial_\lambda \xi^r + c^r_{pq} A^p_\lambda \xi^q) dx^\lambda \otimes e_r. \tag{5.6}$$

Если u — векторное поле на X, ковариантная производная $\nabla^A_u \xi$ сечения ξ вдоль u дается выражением

$$\nabla^A_u \xi = u \rfloor \nabla^A \xi = [u \rfloor A, \xi].$$

В частности,

$$\nabla^A_\lambda e_q = c^r_{pq} A^p_\lambda e_r. \tag{5.7}$$

Ковариантная производная ∇^A_u согласуется со скобками Ли сечений расслоения $V_G P \to X$, т. е.

$$\nabla^A_u [\xi, \eta] = [\nabla^A_u \xi, \eta] + [\xi, \nabla^A_u \eta]$$

для любого векторного поля u на X и любых сечений

$$\xi, \eta \colon X \to V_G P.$$

Пусть $P \to X$ — главное расслоение со структурной группой G. Тогда (F-N)-скобки (см. первый том [11], § 1.4) на пространстве тангенциально-значных форм $\Omega^*(P) \otimes \mathcal{T}(P)$ на главном расслоении P согласованы с каноническим действием группы G на P, и мы получаем индуцированные (F-N)-скобки на пространстве $T_G P$-значных форм $\Omega^*(X) \otimes T_G P(X)$ на X, где, следуя принятым обозначениям, $T_G P(X)$ — векторное пространство глобальных сечений векторного расслоения $T_G P \to X$. Напомним, что $T_G P(X)$ естественным образом проектируется на пространство $\mathcal{T}(X)$ векторных полей на базе X.

Если $A \in \Omega^1(X) \otimes T_G P(X)$ — связность (5.5) на главном расслоении P, соответствующий (F-N)-дифференциал (см. формулу (1.39) в первом томе [11]) имеет вид

$$d_A \colon \Omega^r(X) \otimes T_G P(X) \to \Omega^{r+1}(X) \otimes V_G P(X),$$
$$d_A \phi = [A, \phi]_{\mathrm{FN}}, \quad \phi \in \Omega^r(X) \otimes T_G P(X). \tag{5.8}$$

На пространстве $V_G P(X)$ дифференциал d_A совпадает с ковариантным дифференциалом ∇^A (5.6), т. е.

$$d_A \xi = \nabla^A \xi.$$

Имеет место локальное выражение

$$\nabla^A \xi = d\xi + [A, \xi], \tag{5.9}$$

где

$$A = A_\lambda^q dx^\lambda \otimes e_q \tag{5.10}$$

— локальная форма связности. Если

$$\phi = \alpha \otimes \xi \in \Omega^r(X) \otimes V_G P(X),$$

где $\alpha \in \Omega^r(X)$ и $\xi \in V_G P(X)$, получаем формулу

$$d_A \phi = d\alpha \otimes \xi + (-1)^r \alpha \wedge \nabla^A \xi. \tag{5.11}$$

Используя (F-N)-дифференциал (5.8), напряженность F_A связности A можно задать в виде

$$F_A = \frac{1}{2} d_A A = \frac{1}{2}[A, A]_{\mathrm{FN}} = dA + \frac{1}{2}[A, A] \in \Omega^2(X) \otimes V_G P(X). \tag{5.12}$$

Пусть d_A — (F-N)-дифференциал (5.11) и $*$ — оператор Ходжа относительно римановой метрики на X, обобщенный на $\mathbf{g}$-значные формы $\phi \in \Omega^r(X) \otimes V_G(P)$. Впоследствии мы будем использовать тот факт, что, если $A \in \overline{\mathbf{A}}$ — неприводимая связность, существует функция Грина

$$G_A = (*d_A * d_A)^{-1} \tag{5.13}$$

ковариантного лапласиана

$$\Delta_A = *d_A * d_A,$$

поскольку уравнение

$$d_A \xi = \nabla^A \xi = 0, \quad \xi \in V_G P(X)$$

не допускает нетривиального решения (см. выражение (5.6)). □

Напомним, что калибровочная группа представляет собой группу глобальных сечений группового расслоения $\widetilde{P}$ (см. первый том [11], Пример 1.7.6). Хотя $\widetilde{P} \to X$ не является векторным расслоением, пополнение Соболева калибровочной группы может быть получено следующим образом [118]. Будучи матричной группой Ли, G является подмножеством алгебры $l \times l$ комплексных матриц $M(l, \mathbb{C})$ для некоторого натурального числа l. Введем ассоциированное с P расслоение

$$P^M = \left(P \times M(l, \mathbb{C})\right)/G$$

$l \times l$ матриц, где G действует на $M(l, \mathbb{C})$ по присоединенному представлению. Это векторное расслоение, слои которого наделены нормой

$$|L|^2 = \mathrm{Tr}\, LL^*, \quad L \in M(l, \mathbb{C}).$$

Пусть $P^M(X)_k$ — пополнение Соболева векторного пространства сечений $P^M(X)$ расслоения P^M. Поскольку $\mathcal{G}$ принадлежит $P^M(X)$, пополнение Соболева $\mathcal{G}_k$ калибровочной группы $\mathcal{G}$ определяется как ее пополнение относительно индуцированной на $\mathcal{G}$ метрики. Если $k > n/2$, тогда $\mathcal{G}_k$ замкнуто в $P^M(X)_k$ и групповые операции в $\mathcal{G}_k$ непрерывны в соответствии с Теоремой (5.1.2). Таким образом, $\mathcal{G}_k$, а также определяемые аналогично пополнения Соболева $\mathcal{G}_k^0$ и $\bar{\mathcal{G}}_k$ групп $\mathcal{G}^0$ и $\bar{\mathcal{G}}$ являются топологическими группами. Более того, это группы Ли. Будем называть их *калибровочными группами Ли*. При этом, как уже отмечалось, алгебра Ли калибровочной группы Ли $\mathcal{G}_k$ представляет

собой пополнение Соболева пространства сечений расслоения алгебр Ли $V_G P$ (4.55), тоже рассматриваемого как подрасслоение расслоения матриц P^M [118].

Пополнение Соболева $\mathbf{A}_k$ пространства калибровочных полей определяется как аффинное пространство, моделируемое над пополнением Соболева $\overline{C}(X)_k$ пространства сечений векторного расслоения $\overline{C}$ (5.1). Поэтому это гильбертово многообразие (см. третий том [13], § 1.7), касательным пространством $T_A\mathbf{A}_k$ к которому в точке $A \in \mathbf{A}_k$ является $\overline{C}(X)_k$. Пополнение Соболева $\overline{\mathbf{A}}_k$ пространства неприводимых связностей является плотным открытым множеством в $\mathbf{A}_k$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $k > 1 + n/2$. Ключевым является тот факт, что действие калибровочной группы Ли

$$\mathcal{G}_{k+1} \times \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_k$$

является гладким, как и свободные действия групп

$$\mathcal{G}^0_{k+1} \times \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_k,$$
$$\bar{\mathcal{G}}_{k+1} \times \overline{\mathbf{A}}_k \to \overline{\mathbf{A}}_k.$$

Более того, фактор-пространство

$$\mathcal{O}_k = \overline{\mathbf{A}}_k/\bar{\mathcal{G}}_{k+1},$$

называемое *пространством орбит*, представляет собой гладкое гильбертово многообразие, а каноническая сюръекция $\overline{\mathbf{A}}_k \to \mathcal{O}_k$ — это гладкое расслоение (т. е. она локально тривиальна). Это главное расслоение со структурной группой $\bar{\mathcal{G}}_{k+1}$ [118]. Отметим, что фактор-пространство $\mathbf{A}_k/\mathcal{G}^0_{k+1}$ — это тоже гладкое гильбертово многообразие, а топологическое пространство $\mathbf{A}_k/\mathcal{G}_{k+1}$ стратифицировано на гладкие гильбертовы многообразия [99] (см. также [75, 76, 86]).

В квантовой калибровочной теории пространство орбит $\mathcal{O}$, как известно, играет роль конфигурационного пространства. Однако структура этого пространства плохо поддается описанию. В частности, важной проблемой является существование глобального сечения главного расслоения $\overline{\mathbf{A}}_k \to \mathcal{O}_k$. Если его глобальное сечение s существует, интегрирование по $\mathcal{O}$ может быть заменено интегрированием по его образу $s(\mathcal{O}) \subset \overline{\mathbf{A}}$ с соответствующим весом, например, детерминантом Фаддеева—Попова. При этом глобальное сечение s можно интерпретировать как *глобальную калибровку*. Отсутствие глобального сечения расслоения $\overline{\mathbf{A}}_k \to \mathcal{O}_k$ приводит к так называемой неопределенности Грибова, которая имеет место в целом ряде калибровочных моделей, где главное расслоение $\overline{\mathbf{A}}_k \to \mathcal{O}_k$ нетривиально (см., например, [49, 84, 121, 141]).

§ 2. Связности на калибровочных полях

В дальнейшем мы будем предполагать, что все объекты, требующие пополнения Соболева, пополнены относительно соответствующих норм, опуская индекс k.

Пространство орбит $\mathcal{O}$ является гильбертовым многообразием, моделируемым над гильбертовым пространством, изоморфным ядру $\operatorname{Ker} * d_A *$ оператора $*d_A*$, действующего на пространство сечений $\overline{C}(X)$ векторного расслоения (5.1), для любого $A \in \overline{\mathbf{A}}$. Рассмотрим главное расслоение

$$\overline{\mathbf{A}} \to \mathcal{O} \tag{5.14}$$

со структурной группой $\bar{\mathcal{G}}$. Имеет место каноническое расщепление касательных пространств

$$T_A\overline{\mathbf{A}} = V_A\overline{\mathbf{A}} \oplus \operatorname{Ker} * d_A *, \tag{5.15}$$
$$\sigma = d_A G_A * d_A * \sigma + (\sigma - d_A G_A * d_A * \sigma),$$

где, напомним, G_A — функция Грина (5.13). Это расщепление определяет каноническую связность $\bar{A}$ на главном расслоении (5.14).

Возьмем прямое произведение $P \times \bar{\mathbf{A}}$ главного расслоения P и пространства неприводимых связностей $\bar{\mathbf{A}}$. Это гильбертово многообразие, касательным пространством к которому в точке (p, A) является прямое произведение векторных пространств $T_pP \times \bar{C}(X)$. Нетрудно заметить, что определено естественное действие эффективной калибровочной группы Ли $\bar{\mathcal{G}}$ на $P \times \bar{\mathbf{A}}$, которое не имеет неподвижных точек. Поэтому каноническая проекция

$$P \times \bar{\mathbf{A}} \to (P \times \bar{\mathbf{A}})/\bar{\mathcal{G}} = Q \tag{5.16}$$

представляет собой главное расслоение со структурной группой $\bar{\mathcal{G}}$. Поскольку действие структурной группы G главного расслоения P на $P \times \bar{\mathbf{A}}$ коммутирует с действием эффективной калибровочной группы Ли $\bar{\mathcal{G}}$, определено действие группы G на базе Q расслоения (5.16), и мы получаем главное расслоение со структурной группой G

$$Q \to Q/G = X \times \mathcal{O}, \tag{5.17}$$

называемое *универсальным расслоением* [26, 37, 142].

Расслоения (5.14), (5.16) и (5.17) приводят к коммутативной диаграмме расслоений

$$\begin{array}{ccc} P \times \bar{\mathbf{A}} & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times \bar{\mathbf{A}} & \longrightarrow & X \times \mathcal{O} \end{array} . \tag{5.18}$$

Левый морфизм в этой диаграмме

$$P \times \bar{\mathbf{A}} \to X \times \bar{\mathbf{A}} \tag{5.19}$$

является главным расслоением со структурной группой G. Оно наделено канонической связностью $\hat{A}$, задаваемой расщеплением

$$\dot{x}^\mu \partial_\mu + \sigma + v^q e_q = \dot{x}^\mu \left(\partial_\mu + A^q_\mu(x) e_q\right) + \sigma + \left(v^q - \dot{x}^\mu A^q_\mu(x)\right) e_q \tag{5.20}$$

точной последовательности

$$0 \to V_G(P \times \bar{\mathbf{A}}) \hookrightarrow T_G(P \times \bar{\mathbf{A}}) \to (P \times \bar{\mathbf{A}}) \underset{X \times \bar{\mathbf{A}}}{\times} T(X \times \bar{\mathbf{A}})$$

в точке $(x, A) \in X \times \bar{\mathbf{A}}$. Другая связность $\hat{A}$ на главном расслоении (5.19) дается расщеплением

$$\dot{x}^\mu \partial_\mu + \sigma + v^q e_q =$$
$$= \dot{x}^\mu \left(\partial_\mu + A^q_\mu(x) e_q\right) + \left(\sigma - (*d_A * \sigma)(x)\right) + \left(v^q - \dot{x}^\mu A^q_\mu(x)\right) e_q + (*d_A * \sigma)(x). \tag{5.21}$$

Комбинация связности $\bar{A}$ на главном расслоении (5.14) и связности $\hat{A}$ на главном расслоении (5.19) задает композиционную связность $\hat{A} \circ (\mathrm{Id}\, X, \bar{A})$ на композиционном расслоении

$$P \times \bar{\mathbf{A}} \to X \times \bar{\mathbf{A}} \to X \times \mathcal{O}. \tag{5.22}$$

В частности, обе связности $\hat{A}$ (5.20) и (5.21) на главном расслоении (5.19) определяют одну и ту же композиционную связность на композиционном расслоении (5.22).

Запишем связность $\hat{A}$ на главном G-расслоении (5.19) как $T_G(P \times \bar{\mathbf{A}})$-значную форму

$$\hat{A} = A + c, \tag{5.23}$$

где A и c — $T_G(P\times\overline{\mathbf{A}})$-значные формы соответственно на многообразиях X и $\overline{\mathbf{A}}$. Назовем их для краткости $(1,0)$-, $(0,1)$-формами. Соответственно внешний дифференциал $\widehat{d}$ на произведении $X\times\overline{\mathbf{A}}$ расщепляется как

$$\widehat{d}=d+\delta, \tag{5.24}$$
$$\delta^2=0,\quad d\circ\delta+\delta\circ d=0.$$

Тогда напряженность связности $\widehat{A}$ (5.23) (см. (5.12)) имеет вид

$$\widehat{F}=\frac{1}{2}d_{\widehat{A}}\widehat{A}=\widehat{F}_{(2,0)}+\widehat{F}_{(1,1)}+\widehat{F}_{(0,2)}, \tag{5.25}$$

где

$$\widehat{F}_{(2,0)}=\frac{1}{2}d_AA=F_A,$$
$$\widehat{F}_{(1,1)}=\frac{1}{2}(\delta_cA+d_Ac),$$
$$\widehat{F}_{(0,2)}=\frac{1}{2}\delta_cc.$$

Приведем локальные выражения для компонент

$$\widehat{F}_{(1,1)}=\delta A+d_Ac, \tag{5.26}$$
$$\widehat{F}_{(0,2)}=\delta c+\frac{1}{2}[c,c], \tag{5.27}$$

где A и c — локальные формы связности. Поскольку $\delta^2=0$, из равенств (5.26) и (5.27) следует, что

$$\delta\widehat{F}_{(1,1)}=-[c,\widehat{F}_{(1,1)}]-d_A\widehat{F}_{(0,2)}, \tag{5.28}$$
$$\delta\widehat{F}_{(0,2)}=-[c,\widehat{F}_{(0,2)}]. \tag{5.29}$$

Обозначим

$$\psi=\widehat{F}_{(1,1)},\quad \phi=\widehat{F}_{(0,2)}.$$

Тогда соотношения (5.26)–(5.29) выглядят в точности как БРСТ-преобразования

$$\delta A=\psi-d_Ac, \tag{5.30}$$
$$\delta c=\phi-\frac{1}{2}[c,c], \tag{5.31}$$
$$\delta\psi=-[c,\psi]-d_A\phi, \tag{5.32}$$
$$\delta\phi=-[c,\phi] \tag{5.33}$$

полей (A,c,ψ,ϕ) в геометрическом секторе топологической теории поля Доналдсона. Эти поля характеризуются значениями духового числа 0, 1, 1 и 2 соответственно, которые совпадают со значениями их степени как $(0,k)$-форм [37].

Если компоненты напряженности $\widehat{F}_{(1,1)}$ и $\widehat{F}_{(2,2)}$ обращаются в 0, уравнения (5.30)–(5.33) сводятся к

$$\delta A=-d_Ac,\quad \delta c=-\frac{1}{2}[c,c]. \tag{5.34}$$

Эти уравнения выглядят как БРСТ-преобразования (4.81) в калибровочной модели Янга—Миллса (см. § 6.3). Если $\widehat{A}$ — каноническая связность, задаваемая расщеплением (5.20), где $c=0$, тогда уравнения (5.30)–(5.33) принимают форму

$$\delta A=\psi,\quad \delta\psi=-d_A\phi,\quad \delta\phi=0.$$

Они совпадают с БРСТ-преобразованиями, используемые Уиттеном [154].

Уравнения (5.30)–(5.33) предполагают, что

$$\widehat{d}\,\mathrm{Tr}\left(\widehat{F}\wedge\widehat{F}\right)=(d+\delta)\,\mathrm{Tr}\left(\bigwedge^{2}(F_A+\psi+\phi)\right)=0 \tag{5.35}$$

как следствие тождества Бианки

$$\widehat{d}_{\widehat{A}}\widehat{F}=(d+\delta)(F_A+\psi+\phi)+[A+c,F_A+\psi+\phi]=0. \tag{5.36}$$

С геометрической точки зрения уравнение (5.35) отражает тот факт, что калибровочно инвариантные полиномы являются замкнутыми формами (см. первый том [11], § 3.5, а также ниже § 6.1). Запишем

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\bigwedge^{2}(F_A+\psi+\phi)\right)=\sum_{i=0}^{4}w_i, \tag{5.37}$$

где w_i — внешние i-формы на многообразии X с духовыми числами $4-i$, задаваемые выражениями

$$\begin{aligned}
w_0&=\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\phi\wedge\phi),\\
w_1&=\mathrm{Tr}\,(\psi\wedge\phi),\\
w_2&=\mathrm{Tr}\left(F_A\wedge\phi+\frac{1}{2}\psi\wedge\psi\right),\\
w_3&=\mathrm{Tr}\,(F_A\wedge\psi),\\
w_4&=\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(F_A\wedge F_A).
\end{aligned}$$

Тогда уравнение (5.35) может быть разложено в систему *уравнений спуска* для членов с определенным духовым числом и определенной степенью внешней формы на X:

$$dw_4=0, \tag{5.38а}$$

$$\delta w_k+dw_{k-1}=0,\quad k=1,2,3,4, \tag{5.38б}$$

$$\delta w_0=0. \tag{5.38в}$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям спуска (4.85а)–(4.85в), тогда как равенство (5.35) — это аналог равенства (4.86). Поэтому можно сказать, что формы w_k, $k=1,2,3,4$, локально БРСТ-замкнуты.

Данному k-циклу γ в многообразии X можно сопоставить внешнюю $(4-k)$-форму

$$w_k(\gamma)=\int\limits_{\gamma}w_k,\quad k=1,2,3,4, \tag{5.39}$$

на многообразии неприводимых связностей $\overline{\mathbf{A}}$. Эта форма не зависит от метрики на X и калибровочно инвариантна. Благодаря равенству (5.38б) она *БРСТ-замкнута*, т. е.

$$\delta w_k(\gamma)=-\int\limits_{\gamma}dw_{k-1}=-\int\limits_{\partial\gamma}w_{k-1}=0$$

и, следовательно, играет роль наблюдаемой величины в топологической теории поля. Более того, поскольку гильбертово многообразие $\overline{\mathbf{A}}$ стягиваемо, формы $w_k(\gamma)$ являются *БРСТ-точными*. Имеет место локальная формула

$$\mathrm{Tr}\bigwedge^{2}\widehat{F}=\widehat{d}\,\mathrm{Tr}\left(\widehat{A}\wedge\widehat{F}-\frac{1}{3}\bigwedge^{3}\widehat{A}\right),$$

где $\widehat{A}$ — локальная форма связности. Отсюда следует, что формы $w_k(\gamma)$ являются гомологическими в том смысле, что они зависят только от гомологического класса k-цикла γ, поскольку

$$w_k(\partial\lambda) = \int\limits_{\lambda} dw_k = -\delta \int\limits_{\lambda} w_{k+1} = 0.$$

Пусть теперь дано семейство $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ k_i-циклов в пространстве неприводимых связностей $\overline{\mathbf{A}}$, и пусть M — компактное подмногообразие $\overline{\mathbf{A}}$ размерности

$$m = \sum_{i=1}^{r}(4 - k_i).$$

Тогда получаем инвариант

$$Z\colon H_{k_1}(X;\mathbb{Z}) \times \ldots \times H_{k_r}(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{R},$$

$$Z(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) = \int\limits_{M} w_{k_1}(\gamma_1) \wedge \ldots \wedge w_{k_r}(\gamma_r).$$

Проблема заключается в том, что не существует конечномерного компактного подмногообразия $M \subset \overline{\mathbf{A}}$, представлявшего бы физический интерес. Поэтому вернемся к пространству орбит $\mathcal{O}$.

Поскольку связности (5.15) и (5.20) являются связностями на главных расслоениях, а группы G и $\overline{\mathcal{G}}$, действующие на $P \times \overline{\mathbf{A}}$, взаимно коммутируют, касательный морфизм

$$T(P \times \overline{\mathbf{A}}) \to T\mathcal{Q}$$

к проекции (5.16) порождает расщепление касательного расслоения $T\mathcal{Q}$, которое определяет связность $\widetilde{A}$ на универсальном расслоении $\mathcal{Q} \to X \times \mathcal{O}$ (5.17). Эта связность характеризуется следующим свойством. Пусть

$$s\colon \mathcal{O} \supset \mathcal{U} \to \overline{\mathbf{A}}$$

— локальная калибровка. Тогда ограничение $i_{\mathcal{U}}^*\mathcal{Q}$ расслоения $\mathcal{Q}$ на $\mathcal{U}$ изоморфно индуцированному расслоению $(\mathrm{Id}\, X, s)^*(P \times \overline{\mathbf{A}})$, а связность $\widetilde{A}$ локально совпадает с индуцированной связностью $(\mathrm{Id}\, X, s)^*\widehat{A}$.

Естественной калибровкой является задание фонового калибровочного поля A_0 и условия

$$d_{A_0} * (A - A_0) = 0. \tag{5.40}$$

Будем называть ее *фоновой калибровкой*. Эта калибровка вместе с условием

$$d_A * \psi = 0 \tag{5.41}$$

проектирует топологическую теорию поля с многообразия неприводимых связностей $\overline{\mathbf{A}}$ на пространство орбит $\mathcal{O}$. Внешний дифференциал δ уравнения (5.40) приводит к уравнению

$$d_{A_0} * (\psi - d_A c) = 0,$$

решением которого является связность

$$c = (*d_{A_0} * d_A)^{-1} d_{A_0}\psi.$$

Внешний дифференциал δ уравнения (5.41) дает уравнение

$$[\psi, *\psi] + d_A * d_A \phi = 0,$$

которое предполагает, что

$$\phi = -G_A[\psi, *\psi].$$

Это выражение выглядит как напряженность *связности Атьи—Зингера* на универсальном расслоении (5.17) [26].

В топологической теории поля также вводится условие

$$\Delta(A) = 0, \tag{5.42}$$

где Δ — некоторый калибровочно инвариантный дифференциальный оператор на A. Это условие выделяет *фазовое подпространство* $\mathcal{M} \subset \mathcal{O}$ пространства орбит $\mathcal{O}$. Пусть X — 4-мерное компактное многообразие. Приведем некоторые стандартные варианты выбора дифференциального оператора Δ:

$$\Delta(A) = F_A^+ = \frac{1}{2}(F_A - *F_A), \tag{5.43}$$

$$\Delta(A) = F_A, \tag{5.44}$$

$$\Delta(A) = d_A * F_A. \tag{5.45}$$

Соответствующие фазовые пространства — это фазовые пространства инстантонов, плоских связностей и решений уравнений Янга—Миллса.

§ 3. Инварианты Доналдсона

В этом параграфе X — это 4-мерное компактное ориентируемое гладкое, или топологическое, многообразие а $P \to X$ — главное расслоение со структурной группой $SU(2)$.

Замечание 5.3.1. Инварианты Доналдсона являются дифференциальными, а не топологическими инвариантами многообразия X [60]. Поэтому имеет смысл напомнить известные особенности 4-мерных многообразий [61, 72].

- Всякое топологическое многообразие размерности меньше четырех допускает единственную гладкую структуру.
- Для многообразий размерности больше четырех гомотопический тип и классы Понтрягина определяют гладкую структуру (если она существует) с точностью до конечного числа этих структур.
- Существуют гладкие 4-мерные многообразия со счетным семейством неэквивалентных гладких структур.
- Существует несчетное множество неэквивалентных гладких структур на $\mathbb{R}^4$, тогда как $\mathbb{R}^{n\neq 4}$ имеет единственную гладкую структуру.
- Существуют рациональные когомологические инварианты (примером которых служат приводимые ниже инварианты Доналдсона), которые различают неэквивалентные гладкие структуры, в отличие, например, от рациональных классов Понтрягина, которые представляют собой гомотопические инварианты.

Не существует алгоритма классификации гладких структур на 4-мерном топологическом многообразии из-за фундаментальной группы $\pi_1(X)$ [70]. Поэтому основное внимание обычно уделяют односвязным многообразиям, для которых $\pi_1(X) = 0$. Фундаментальным инвариантом односвязного 4-мерного топологического многообразия является *форма пересечения* ω_X. Это симметричная билинейная форма на группе когомологий $H^2(X; \mathbb{Z})$, определяемая как

$$\omega_X\colon H^2(X;\mathbb{Z}) \times H^2(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z},$$
$$\omega_X\colon ([a],[b]) \mapsto ([a] \smile [b])[X], \tag{5.46}$$

где $[a] \smile [b]$ — это так называемое $\smile$-произведение, а $([a] \smile [b])[X]$ — это его значение на *фундаментальном цикле* в ориентируемом многообразии X, являющемся порождающим элементом группы сингулярных гомологий

$$H_4(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Если X — гладкое многообразие, $\smile$-произведение — это обычное внешнее произведение форм, а форма пересечения (5.46) имеет вид

$$\omega_X([a], [b]) = \int_X a \wedge b.$$

Форма пересечения (5.46) невырождена и унимодулярна. Она характеризуется рангом $\dim H^2(X; \mathbb{Z})$, который совпадает со вторым *числом Бетти* $b_2(X)$ многообразия X, и индексом

$$\tau(\omega_X) = b_2^+ - b_2^-,$$

который равен разности числа положительных и числа отрицательных собственных значений формы ω_X. Он называется *индексом многообразия* [14]. Форма пересечения ω_X называется *четной*, если все ее диагональные элементы $\omega_X([a], [a])$ четные. Если X — гладкое многообразие, известная *теорема об индексе* Хирцебруха [14] выражает индекс многообразия $\tau(\omega_X)$ через классы Понтрягина:

$$\tau(\omega_X) = \frac{1}{3} p_1(X)$$

(см. Приложение Б).

Форма пересечения является топологическим, а не только гомотопическим инвариантом. А именно, класс гомеоморфных топологических многообразий X однозначно определяется формой пересечения ω_X, если она четна, и существует в точности два различных класса гомеоморфных топологических многообразий с данной нечетной формой пересечения ω_X [71]. В частности, существуют формы пересечения 4-мерного топологического многообразия, которые не являются формами пересечения гладкого многообразия. Согласно известной *теореме Доналдсона* [59], если форма пересечения ω_X гладкого компактного (но необязательно односвязного) многообразия X отрицательно определена, тогда

$$\omega_X \simeq (-1) \oplus \ldots \oplus (-1).$$

□

Вернемся к инвариантам Доналдсона. Главным элементом их конструкции является морфизм

$$\mu\colon H_i(X; \mathbb{Z}) \to H^{4-i}(\mathcal{O}). \tag{5.47}$$

Он может быть описан следующим образом. Рассмотрим универсальное расслоение $\mathcal{Q} \to X \times \mathcal{O}$ (5.17). Пусть E — ассоциированное с ним комплексное векторное расслоение со структурной группой $SU(2)$ и $c_2(E) \in H^4(\mathcal{O})$ — его второй класс Чженя. Напомним *формулу Кюннета*

$$H^m(X \times X') = \sum_{k+l=m} H^k(X) \otimes H^l(X')$$

для групп когомологий Де Рама произведения многообразий. В соответствии с этой формулой класс Чженя $c_2(E)$ раскладывается на составляющие

$$c_{i,4-i} \in H^i(X) \otimes H^{4-i}(\mathcal{O}), \qquad i = 0, \ldots, 4.$$

Эти составляющие определяют морфизм (5.47) как композицию гомоморфизма групп сингулярных гомологий

$$H_k(X;\mathbb{Z}) \to H_k(X;\mathbb{R})$$

и билинейной формы двойственности де Рама

$$H^p(X) \otimes H_p(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

(см. первый том [11], § 3.3). Пусть $\widetilde{A}$ — связность на универсальном расслоении (5.17), $\widetilde{F}$ — ее напряженность и $c_2(\widetilde{F})$ — вторая форма Чженя (см. выражение (3.48) в первом томе [11]). Вышеупомянутые составляющие $c_{i,4-i}$ класса Чженя $c_2(E)$ — это когомологии Де Рама $(i, 4-i)$-форм $\widetilde{w}_i$ на произведении $X \times \mathcal{O}$, которые образуют разложение формы Чженя $c_2(\widetilde{F})$, аналогичное разложению (5.37). Тогда морфизм (5.47) задается интегрированием

$$\widetilde{w}_i(\gamma) = \int_\gamma \widetilde{w}_i,$$

где γ — i-циклы в X.

Отметим, что рациональные когомологии пространства орбит $\mathcal{O}$ имеют четные когомологические размерности и порождаются когомологическими классами размерностей 2 и 4. Поэтому мы ограничим в дальнейшем наше рассмотрение морфизмом (5.47), где $i = 0, 2$, и расширим его до морфизма

$$\mu\colon \overset{m}{\times} H_2(X;\mathbb{Z}) \to H^{2m}(\mathcal{O};\mathbb{Q}),$$

используя $\smile$-произведение в $H^{2m}(\mathcal{O};\mathbb{Q})$. Этот морфизм задает вложение

$$q(|\gamma_1|,\ldots,|\gamma_m|) \mapsto \mu(|\gamma_1|) \cup \ldots \cup \mu(|\gamma_m|) \tag{5.48}$$

полиномиальной алгебры на $H_2(X;\mathbb{Z})$ в рациональные когомологии $H^{\text{even}}(\mathcal{O};\mathbb{Q})$ пространства орбит.

Пусть $\mathcal{M}$ — фазовое пространство неприводимых инстантонов с инстантонным числом

$$k = \int_X c_2(F_A).$$

Его формальная размерность равна

$$\dim \mathcal{M} = 8k - 3\left(1 + b_2^+\right).$$

Нетрудно видеть, что $\dim \mathcal{M}$ является четной тогда и только тогда, когда b_2^+ нечетно. Записывая $b_2^+ = 2p + 1$, получаем

$$\dim \mathcal{M} = 2m, \qquad m = 4k - 3(1+p).$$

Полиномы (5.48), взятые на гомологическом цикле $|\mathcal{M}| \in H_*(\mathcal{O},\mathbb{Q})$ в пространстве орбит $\mathcal{O}$, называются *полиномами Дональдсона*. Они выражаются через напряженность $\widetilde{F}$ связности $\widetilde{A}$ на пространстве орбит $\mathcal{O}$. Рассматривая связность $\widetilde{A}$ локально как индуцированную связностью на $\overline{\mathbf{A}}$ и используя соотношения (5.40) и (5.41), мы приходим к *инвариантам Дональдсона* в топологической теории поля, хотя получить их в явном виде весьма затруднительно.

Аномалии

Проблема аномалий заключается в нарушении законов сохранения для квантованных полей и в калибровочной неинвариантности эффективного функционала действия и меры при квантовании методом функционального интегрирования (см., например, [36] в качестве подробного обзора). Здесь мы коснемся только геометрической природы аномалий, основываясь на геометрии и топологии пространства калибровочных полей.

§ 1. Калибровочные аномалии

Этот параграф посвящен аномалиям, связанным с калибровочной неинвариантностью форм Чженя—Саймонса.

Пусть $P \to X$ — главное $GL(N, \mathbb{C})$-расслоение. Характеристические формы в первом томе [11], § 3.5, служат примером *калибровочно инвариантных полиномов* $\mathcal{P}(F)$ от напряженности F связности на главном расслоении $P \to X$ (см. формулу (1.93) в первом томе [11]), т. е.

$$\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(g(F)), \quad g \in \mathcal{G},$$

где $\mathcal{G}$ — калибровочная группа вертикальных автоморфизмов P. Калибровочно инвариантные полиномы представляют собой комплексные внешние формы четной степени на многообразии X. Они обладают следующими, уже упоминавшимися в первом томе, свойствами:

- $\mathcal{P}(F)$ — замкнутая форма;
- $\mathcal{P}(F) - \mathcal{P}(F')$ — точная форма, где F и F' — напряженности двух различных связностей на главном расслоении $P \to X$.

Можно, однако, сказать и больше. Любой калибровочно инвариантный полином является суммой произведений калибровочно инвариантных полиномов $\mathcal{P}_m(F)$ определенной степени m по напряженности F. Тогда имеет место следующая *формула трансгрессии* [19, 36, 67]:

$$\mathcal{P}_m(F) - \mathcal{P}_m(F') = dQ_{2m-1}(A, A'), \tag{6.1}$$

$$Q_{2m-1}(A, A') = m \int_0^1 dt P(A - A', F_t), \tag{6.2}$$

где A и A' — две связности на главном расслоении $P \to X$ и F_t — напряженность *гомотопической связности*

$$A_t = A' + t(A - A'), \quad t \in [0, 1]. \tag{6.3}$$

В частности, пусть $A' = 0$ на области тривиализации расслоения $P \to X$, т. е., будучи записанной как $T_G P$-значная форма, она имеет вид

$$A' = \theta_X = dx^\lambda \otimes \partial_\lambda.$$

Тогда получаем *локальную формулу трансгрессии*

$$\mathcal{P}_m(F) = dQ_{2m-1}(A, F) \tag{6.4}$$

вместе с *формами Чженя–Саймонса*

$$Q_{2m-1}(A, F) = m \int_0^1 dt\, P(A, F_t), \tag{6.5}$$

где A — локальная форма связности (5.10) и

$$A_t = tA, \quad F_t = tF + \left(t^2 - t\right)A^2.$$

Для упрощения записи мы в дальнейшем будем опускать символ $\wedge$ внешнего произведения.

Пример 6.1.1. Если

$$\mathcal{P}(F) = c_2(F)$$

— вторая форма Чженя для главного $SU(N)$-расслоения (см. формулу (3.48) в первом томе [11]), находим

$$\operatorname{Tr}(F^2) = \frac{1}{8\pi^2} dQ_3, \qquad Q_3 = \operatorname{Tr}\left(AF - \frac{1}{3}A^3\right) = \operatorname{Tr}\left(A\, dA + \frac{2}{3}A^3\right). \tag{6.6}$$

□

Получим теперь формулу трансгрессии (6.1) в терминах гомотопических производных [19, 36, 111]. Для данной гомотопической связности A_t (6.3) и ее напряженности F_t *гомотопической производной* называется оператор

$$\begin{aligned} l_t A_t &= 0, \\ l_t F_t &= d_t A_t = dt\left(A - A'\right), \end{aligned} \tag{6.7}$$

который действует на полиномы $S(A_t, F_t)$ от связности A_t и напряженности F_t и который обладает свойством антидифференцирования

$$l_t\left(SS'\right) = l_t(S)S' + (-1)^{|S|} S l_t\left(S'\right).$$

Прямыми вычислениями можно проверить, что

$$l_t \circ d + d \circ l_t = d_t = dt \otimes \partial_t. \tag{6.8}$$

Замечание 6.1.2. Следует подчеркнуть, что полиномы $S(A_t, F_t)$, вообще говоря, не являются глобально определенными, если только это не калибровочно инвариантные полиномы. Поэтому под аргументом A_t этих полиномов подразумевается локальная форма связности (5.10). □

Введем оператор

$$\mathbf{k} = \int_0^1 l_t. \tag{6.9}$$

Он называется *гомотопическим оператором*. Имеет место *гомотопическая формула Картана*

$$S(A, F) - S\left(A', F'\right) = (\mathbf{k} \circ d + d \circ \mathbf{k}) S(A_t, F_t). \tag{6.10}$$

Будучи примененным к калибровочно инвариантным полиномам $\mathcal{P}_m(F)$, гомотопический оператор (6.9) принимает вид

$$\mathbf{k}\mathcal{P}_m(F_t) = Q_{2m-1}\left(A, A'\right),$$

где полином $P(A-A', F_t)$ в выражении (6.2) для форм $Q_{2m-1}(A, A')$ определяется как

$$mP(A-A', F_t) =$$
$$= \mathcal{P}_m(A-A', F_t, \ldots, F_t) + \mathcal{P}_m(F_t, A-A', \ldots, F_t) + \ldots + \mathcal{P}_m(F_t, \ldots, A-A'). \quad (6.11)$$

Поскольку калибровочно инвариантные полиномы — замкнутые формы, гомотопическая формула Картана (6.10) приводит к формуле трансгрессии (6.1). Полагая локально $A'=0$, мы получаем форму Чженя—Саймонса (6.5) в виде

$$Q_{2m-1}(A, F) = \mathrm{k}\mathcal{P}_m(F_t). \quad (6.12)$$

Рассмотрим калибровочные преобразования формы Чженя—Саймонса (6.12). Напомним, что в случае матричной структурной группы $G \subset GL(N, \mathbb{C})$ главного расслоения $P \to X$ калибровочные преобразования локальной формы связности A и напряженности F имеют вид

$$A^g = g^{-1}Ag + g^{-1}dg = g^{-1}(A+\sigma^g)g, \quad (6.13)$$
$$F^g = g^{-1}Fg.$$

Возьмем гомотопическую связность $A_t = tA$, $t \in [0, 1]$. Тогда калибровочно преобразованная гомотопическая связность и ее напряженность

$$A_t^g = (A_t)^g,$$
$$F_t^g = (F_t)^g$$

являются гомотопиями, связывающими непрерывным образом калибровочные поля

$$A^g_{t=0} = g^{-1}dg = g^{-1}\sigma^g g,$$
$$F^g_{t=0} = 0$$

и

$$A^g_{t=1} = A^g,$$
$$F^g_{t=1} = F^g.$$

Рассмотрим формы Чженя—Саймонса $Q_{2m-1}(A_t^g, F_t^g)$ от этих гомотопий. Примененная к ним гомотопическая формула Картана (6.10) принимает вид

$$Q_{2m-1}(A^g, F^g) - Q_{2m-1}(g^{-1}dg) = (\mathbf{k}\circ d + d\circ\mathbf{k})Q_{2m-1}(A_t^g, F_t^g). \quad (6.14)$$

Калибровочно преобразованная форма Чженя—Саймонса $Q_{2m-1}(A^g, F^g)$ дается выражением

$$Q_{2m-1}(A^g, F^g) = m\int_0^1 dtP(A^g, \widehat{F}_t^g),$$

где

$$\widehat{F}_t^g = (F^g)_t = g^{-1}\widehat{F}_t g, \quad \widehat{F}_t = tF + (t^2-t)(A+\sigma^g)^2.$$

Поскольку полином $P(A^g, \widehat{F}_t^g)$ выражается через калибровочно инвариантные полиномы $\mathcal{P}_m$, согласно формуле (6.11) получаем

$$P(A^g, \widehat{F}_t^g) = P(A, \widehat{F}_t).$$

Отсюда следует, что

$$Q_{2m-1}(A^g, F^g) = Q_{2m-1}(A+\sigma^g, F) \quad (6.15)$$

и аналогично

$$Q_{2m-1}\left(A_t^g, F_t^g\right) = Q_{2m-1}\left(A_t + \sigma^g, F_t\right). \tag{6.16}$$

С другой стороны, соотношения (6.4) и (6.12) дают

$$\mathbf{k} \circ dQ_{2m-1}\left(A_t^g, F_t^g\right) = \mathbf{k}P_m(F_t) = Q_{2m-1}(A, F).$$

Если обозначить

$$\alpha_{2m-2} = \mathbf{k}Q_{2m-1}\left(A_t^g, F_t^g\right) = \mathbf{k}Q_{2m-1}\left(A_t + \sigma^g, F_t\right),$$

гомотопическая формула Картана (6.14) принимает вид

$$Q_{2m-1}\left(A^g, F^g\right) = Q_{2m-1}(A, F) + Q_{2m-1}\left(g^{-1}dg, 0\right) + d\alpha_{2m-2}, \tag{6.17}$$

или с учетом равенства (6.15)

$$Q_{2m-1}\left(A + \sigma^g, F\right) = Q_{2m-1}(A, F) + Q_{2m-1}(\sigma^g, 0) + d\alpha_{2m-2}. \tag{6.18}$$

Например, пусть Q_3 — форма Чженя—Саймонса (6.6) в Примере 6.1.1. Для $m = 2$ находим

$$\alpha_2 = \mathbf{k}Q_3\left(A_t + \sigma^g, F_t\right) = \int_0^1 l_t \operatorname{Tr}\left[\left(A_t + \sigma^g\right)F_t - \frac{1}{3}\left(A_t + \sigma^g\right)^3\right] =$$

$$= \int_0^1 dt \operatorname{Tr}\left[-tA^2 - \sigma^g A\right] = -\operatorname{Tr}\left[\sigma^g A\right],$$

поскольку $\operatorname{Tr} A^2 = 0$. Тогда, сохраняя только линейные по σ^g члены, получаем

$$d\alpha_2 = \operatorname{Tr}\left[\sigma^g dA\right]. \tag{6.19}$$

Это уравнение представляет собой известную неабелеву *аномалию* в размерности 2 с точностью до нормировки [36].

Аномалия (6.19) характеризует неинвариантность формы Чженя—Саймонса (6.6) при инфинитезимальных калибровочных преобразованиях. Поэтому она может быть подсчитана также следующим образом. Представим форму Чженя—Саймонса Q_3 как $V_G P$-значную форму на многообразии струй первого порядка J^1C расслоения связностей C (4.56). Она имеет вид

$$Q_3 = a_{pr}^G a_\alpha^p \left(\mathcal{F}_{\lambda\mu}^r - \frac{1}{3}c_{lq}^r a_\lambda^l a_\mu^q\right) dx^\alpha \wedge dx^\lambda \wedge dx^\mu, \tag{6.20}$$

где

$$a_{pr}^G = \operatorname{Tr}\left(e_p e_r\right)$$

— инвариантная метрика на алгебре Ли $su(N)$. Пусть ξ_C — векторное поле (4.57) на расслоении связностей C. Оно представляет собой генератор 1-параметрической группы калибровочных преобразований расслоения C. Запишем производную Ли

$$\mathbf{L}_{J^1\xi_C} Q_3 = \operatorname{Tr}\left(d\xi \wedge d_H a\right), \quad \xi = \xi^p \varepsilon_p, \quad a = a_\mu^r dx^\mu \otimes \varepsilon_r.$$

Нетрудно видеть, что если $\sigma^g = d\xi$, тогда

$$d\alpha_2 = A^*\left(\mathbf{L}_{J^1\xi_C} Q_3\right)$$

для любого сечения A расслоения $C \to X$.

Замечание 6.1.3. Если $\dim X = 3$, форма Чженя—Саймонса Q_3 (6.20) играет роль лагранжиана модели Чженя—Саймонса топологической теории поля. Будучи калибровочно неинвариантным, этот лагранжиан не является глобально определенным. Поскольку

$$\mathbf{L}_{J^1\xi_C} Q_3 \neq 0,$$

ни нетеровский ток (см. формулу (A.24) в первом томе [11]), ни тензор энергии-импульса (см. там же формулу (A.36)) не сохраняются в модели Чженя—Саймонса [78]. □

§ 2. Глобальные аномалии

В сравнении с калибровочными аномалиями в предыдущем параграфе, глобальные аномалии связаны с калибровочными преобразованиями, которые не принадлежат связной компоненте единицы калибровочной группы.

Мы начнем с понятия когомологий групп (см. детальное изложение в [8]). Пусть G — мультипликативная группа, B — правый G-модуль и B^p, $p = 1, \ldots,$ — абелева группа морфизмов

$$B^p \ni b^p\colon \overset{p}{\times} G \to B. \tag{6.21}$$

Можно ввести оператор взятия кограницы

$$\delta^p\colon B^p \to B^{p+1},$$

$$\begin{aligned}\left(\delta^p b^p\right)(g_1, \ldots, g_{p+1}) = \\ = b^p(g_2, \ldots, g_{p+1})g_1 + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i b^p(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots g_{p+1}) + (-1)^{p+1} b^p(g_1, \ldots, g_p).\end{aligned} \tag{6.22}$$

Такие операторы образуют коцепной комплекс

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\delta^0} B^1 \xrightarrow{\delta^1} B^2 \longrightarrow \ldots. \tag{6.23}$$

Под B в (6.23) понимается группа постоянных морфизмов

$$B \ni b\colon G \to b$$

и

$$\left(\delta^0 b\right)(g) = bg - b.$$

Отсюда следует, что 0-коциклами в B являются G-инвариантные элементы B. Обозначим множество таких элементов как B^G. Когомологии $H^*(G; B)$ комплекса (6.23) называются *когомологиями группы* G с коэффициентами в модуле B. Например,

$$H^0(G; B) = B^G.$$

Заметим, что абелева группа B^p p-коцепей (6.21) является правым G-модулем относительно действия группы G по закону

$$g\colon b^p(g_1, \ldots, g_p) \mapsto b^p\left(g^{-1}g_1 g, \ldots, g^{-1}g_p g\right).$$

Это действие тривиально на $H^*(G; B)$.

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Имеет место точная последовательность групп когомологий

$$0 \longrightarrow H^1\left(G/H; B^H\right) \xrightarrow{j} H^1(G; B) \xrightarrow{i} H^1(H; B)^G \longrightarrow H^2\left(G/H; B^H\right) \xrightarrow{j} H^2(G; B). \tag{6.24}$$

Стрелки j в этой точной последовательности являются композицией естественной проекции $G \to G/H$ с коциклами группы G/H, тогда как стрелка i в (6.24) — это ограничение коциклов группы G на подгруппу H [48].

Если G/H — конечная группа порядка r, существуют гомоморфизмы

$$\varrho^*\colon H^*(H;B)\to H^*(G;B). \tag{6.25}$$

Например, гомоморфизм $\varrho^0\colon B^H\to B^G$ имеет вид

$$\varrho^0 b=\sum_{c\in G/H} b\bar{c},$$

где $\bar{c}$ — представитель класса сопряженности $c\in G/H$ такой, что $\bar{c}=e\in G$, если $c=e\in G/H$, где e обозначает единичные элементы групп. Мы также получаем

$$\left(\varrho^l b^l\right)(g)=\sum_{c\in G/H} b^l\left(\bar{c}g\overline{cg}^{-1}\right)\bar{c}.$$

Напомним, что $\bar{c}g\overline{cg}^{-1}\in H$ для любого элемента $g\in G$. Важным свойством гомоморфизмов (6.25) является то, что как $i\circ\varrho$, так и $\varrho\circ i$ представляют собой умножения на целое число r. Отсюда следует, что $ra=0$ для любого $a\in H^{k>0}\left(G/H;B^H\right)$, т. е. группы когомологий $H^{k>0}\left(G/H;B^H\right)$ состоят из циклических элементов.

Обратимся теперь к аномалиям в квантовой теории поля. Пусть $P\to X$ — главное $SU(N)$-расслоение над ориентируемым компактным римановым многообразием X, $\mathcal{G}$ — калибровочная группа Ли и $\mathbf{A}$ — пространство связностей на $P\to X$. Как и в предыдущей главе, мы будем полагать, что все пространства, требующие пополнения Соболева, пополнены соответствующим образом. Тогда эффективный функционал действия квантовой теории поля можно рассматривать как комплексную функцию $S(A)$ на пространстве калибровочных полей $\mathbf{A}$, где для простоты мы опускаем его зависимость от других полей. Если функционал $S(A)$ не является калибровочно инвариантным, мы получаем

$$S\left(A^g\right)=iW^1(A,g)+S(A),\quad g\in\mathcal{G}, \tag{6.26}$$

$$W^1\left(A^g,g'\right)-W^1\left(A,g'g\right)+W^1(A,g)=0, \tag{6.27}$$

(см. обозначения (6.13)).

Замечание 6.2.1. Стандартным примером калибровочно неинвариантного эффективного действия служит

$$\operatorname{Tr}\ln\widehat{\mathcal{D}}_+=\ln\det\widehat{\mathcal{D}}_+=\ln\det\mathcal{D}_+,$$

где $\mathcal{D}_+$ — оператор Вейля и

$$\widehat{\mathcal{D}}_+=i\gamma^\mu\left[\partial_\mu+\frac{1}{2}A_\mu(1+\gamma_5)\right] \tag{6.28}$$

— *киральный оператор Дирака*, пертурбативно эквивалентный $\mathcal{D}_+$. □

Легко заметить, что выражение (6.27) в точности является условием коцикла

$$\delta^1 W^1=0$$

для когомологий калибровочной группы $\mathcal{G}$ с коэффициентами в модуле $\mathbb{C}(\mathbf{A})$ комплексных функций на пространстве калибровочных полей $\mathbf{A}$. Калибровочная группа Ли $\mathcal{G}$ действует на эти функции по закону

$$\left(W^0 g\right)(A)=W^0\left(A^g\right).$$

Таким образом, величину $W^1(A,g)$ в (6.26) можно интерпретировать как 1-коцикл

$$W^1\colon \mathcal{G}\ni g\mapsto W^1(A,g)\in C^*(\mathbf{A})$$

в вышеуказанных когомологиях. Если этот коцикл является кограницей

$$W^1(A, g) = W^0(A^g) - W^0(A),$$

тогда к эффективному действию $S(A)$ всегда можно добавить контрчлен $-W^0(A)$ так, что перенормированное эффективное действие $S(A) - W^0(A)$ становится калибровочно инвариантным. Отсюда следует, что аномалии функционала действия в пертурбативной квантовой теории поля характеризуются элементами группы когомологий $H^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}(\mathbf{A}))$, называемой *группой аномалий*. Если калибровочная группа Ли $\mathcal{G}$ не является связной и $\mathcal{G}_e$ — компонента связности ее единицы e, можно исследовать *глобальные аномалии*, т. е. тривиальные $\mathcal{G}_e$-коциклы, которые имеют расширения до нетривиальных $\mathcal{G}$-коциклов [48, 141]. Нетривиальные и $\mathcal{G}$-инвариантные $\mathcal{G}_e$-коциклы характеризуют *локальные аномалии*.

Как уже говорилось, действие калибровочной группы Ли $\mathcal{G}$ на пространстве калибровочных полей $\mathcal{A}$ не является свободным. Поэтому обычно берут или эффективную калибровочную группу Ли $\bar{\mathcal{G}}$, действующую на пространстве неприводимых связностей $\bar{\mathbf{A}}$, или отмеченную калибровочную группу Ли $\mathcal{G}^0$, действующую на пространстве калибровочных полей $\mathbf{A}$. Мы остановимся здесь на первом варианте.

Имеет место композиционное расслоение

$$\bar{\mathbf{A}} \to \bar{\mathbf{A}}/\bar{\mathcal{G}}_e = \bar{\mathbf{A}}_e \to \bar{\mathbf{A}}_e/\pi_0(\bar{\mathcal{G}}) = \mathcal{O}, \tag{6.29}$$

где

$$\pi_0(\bar{\mathcal{G}}) = \bar{\mathcal{G}}/\bar{\mathcal{G}}_e.$$

Применяя точную последовательность (6.24) к случаю

$$G = \bar{\mathcal{G}}, \quad H = \bar{\mathcal{G}}_e, \quad B = \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}})$$

и принимая во внимание, что

$$\mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}})^{\bar{\mathcal{G}}_e} = \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}_e),$$

мы получаем *точную последовательность аномалий*

$$0 \longrightarrow H^1(\pi_0(\bar{\mathcal{G}}); \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}_e)) \xrightarrow{j} H^1(\bar{\mathcal{G}}; \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}})) \xrightarrow{i} H^1(\bar{\mathcal{G}}_e; \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}))^{\bar{\mathcal{G}}} \longrightarrow H^2(\pi_0(\bar{\mathcal{G}}); \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}_e)). \tag{6.30}$$

Элементы группы когомологий $H^1(\pi_0(\bar{\mathcal{G}}); \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}_e))$ в этой точной последовательности характеризуют глобальные аномалии, тогда как элементы $H^1(\bar{\mathcal{G}}_e; \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}))^{\bar{\mathcal{G}}}$ соответствуют локальным аномалиям. Стрелка j в точной последовательности аномалий (6.30) является мономорфизмом. Если группа когомологий $H^2(\pi_0(\bar{\mathcal{G}}); \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}_e))$ тривиальна, стрелка i в (6.30) является эпиморфизмом. В этом случае группа аномалий $H^1(\bar{\mathcal{G}}; \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}))$ представляет собой прямое произведение групп глобальных и локальных аномалий. Если гомотопическое множество $\pi_0(\bar{\mathcal{G}})$ конечно, только циклические элементы в группе аномалий могут быть глобальными аномалиями.

Чтобы сказать больше, заметим, что группу когомологий $H^1(\bar{\mathcal{G}}; \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}))$ можно представить как группу классов $\bar{\mathcal{G}}$-изоморфных тривиальных комплексных линейных расслоений $L(\bar{\mathbf{A}})$ над $\bar{\mathbf{A}}$, называемых *линейными расслоениями детерминантов* кирального оператора Дирака (6.28). Эта геометрическая интерпретация группы когомологий $H^1(\bar{\mathcal{G}}; \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}))$ в применении к расслоению $\bar{\mathbf{A}} \to \mathcal{O}$ приводит к точной последовательности групп когомологий [48]

$$0 \to H^1(\bar{\mathcal{G}}; \mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}})) \to H^2(\mathcal{O}; \mathbb{Z}) \to H^2(\bar{\mathbf{A}}; \mathbb{Z}). \tag{6.31}$$

Вторая стрелка в этой точной последовательности является мономорфизмом группы когомологий $H^1(\bar{\mathcal{G}};\mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}))$ в группу классов эквивалентности комплексных линейных расслоений над пространством орбит $\mathcal{O}$ путем отождествления элементов (A,c) и $(A^g, c+iW^1(A,g))$ для всех $g\in\bar{\mathcal{G}}$. Последняя стрелка в точной последовательности (6.31) сопоставляет каждому комплексному линейному расслоению над $\mathcal{O}$ индуцированное им расслоение над $\bar{\mathbf{A}}$. Поскольку $\bar{\mathbf{A}}$ — аффинное пространство, когомологии $\bar{\mathbf{A}}$ тривиальны и мы получаем равенство

$$H^1(\bar{\mathcal{G}};\mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}))=H^2(\mathcal{O};\mathbb{Z}).$$

Аналогично точной последовательности (6.31) можно построить точные последовательности когомологических групп, отвечающие расслоениям $\bar{\mathbf{A}}\to\bar{\mathbf{A}}_e$ и $\bar{\mathbf{A}}_e\to\mathcal{O}$ в композиционном расслоении (6.29). Они имеют вид

$$0\longrightarrow H^1(\bar{\mathcal{G}}_e;\mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}))\longrightarrow H^2(\bar{\mathbf{A}}_e;\mathbb{Z})\longrightarrow H^2(\bar{\mathbf{A}};\mathbb{Z}), \tag{6.32}$$

$$0\longrightarrow H^1(\pi_0(\bar{\mathcal{G}});\mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}_e))\longrightarrow H^2(\mathcal{O};\mathbb{Z})\longrightarrow H^2(\bar{\mathbf{A}}_e;\mathbb{Z}). \tag{6.33}$$

Можно также использовать точную последовательность когомологий низких размерностей расслоения $\bar{\mathbf{A}}\to\bar{\mathbf{A}}_e$. Так как группа $\mathcal{G}_e$ по определению связна, спектральная последовательность Лере [3] дает точную последовательность групп когомологий

$$0\longrightarrow H^1(\bar{\mathbf{A}}_e;\mathbb{Z})\longrightarrow H^1(\bar{\mathbf{A}};\mathbb{Z})\longrightarrow H^1(\mathcal{G}_e;\mathbb{Z})\longrightarrow H^2(\bar{\mathbf{A}}_e;\mathbb{Z})\longrightarrow H^2(\bar{\mathbf{A}};\mathbb{Z}). \tag{6.34}$$

Поскольку $H^2(\bar{\mathbf{A}};\mathbb{Z})=0$, точные последовательности (6.32) и (6.34) приводят к равенствам групп когомологий

$$H^1(\mathcal{G}_e;\mathbb{C}(\bar{\mathbf{A}}))=H^1(\mathcal{G}_e;\mathbb{Z})=H^2(\bar{\mathbf{A}}_e;\mathbb{Z}).$$

В частности, линейное расслоение детерминантов тривиально и локальные аномалии отсутствуют, если соответствующее комплексное линейное расслоение над $\bar{\mathbf{A}}_e$ характеризуется нулевым классом Чженя. Этот класс Чженя вычисляется в соответствии с известной теоремой об индексе (см. Приложение Б). Мы сошлемся еще на работу [48], в которой дан детальный анализ случая $G=SU(2)$.

§ 3. БРСТ-аномалии

В § 6.1 мы рассматривали аномалии, вызванные калибровочной неинвариантностью формы Чженя—Саймонса. Этот параграф посвящен аномалиям, связанным с БРСТ-неинвариантностью этой формы (см., например, [36]). Мы следуем геометрической интерпретации духов Фаддеева—Попова как локальных $(0,1)$-форм связности c, отвечающих связности $\hat{A}$ на главном расслоении (5.19) над $X\times\bar{\mathbf{A}}$.

Пусть $P\to X$ — главное $SU(N)$-расслоение над ориентируемым компактным римановым многообразием X и $\bar{\mathbf{A}}$ — пространство неприводимых связностей на $P\to X$. Рассмотрим главное $SU(N)$-расслоение (5.19) над $X\times\bar{\mathbf{A}}$ и связность $\hat{A}=A+c$ (5.23) на этом главном расслоении, где $A(x)$ — локальная $(1,0)$-форма связности и c — локальная $(0,1)$-форма связности в точке (x,A) (см. § 5.2). Предположим, что компоненты $\hat{F}_{1,1}$ и $\hat{F}_{0,2}$ напряженности $\hat{F}$ (5.25) этой связности обращаются в 0, т. е.

$$\hat{F}=(d+\delta)(A+c)+(A+c)^2=F_A. \tag{6.35}$$

Тогда мы имеем соотношения (5.34):

$$\delta A=-d_A c,\quad \delta c=-c^2. \tag{6.36}$$

Как уже отмечалось, эти соотношения могут интерпретироваться как геометрическая модель БРСТ-преобразований калибровочной теории, когда оператор δ играет роль БРСТ-оператора s (4.81), ассоциированного с духовым полем c, а внешний дифференциал $\widehat{d}$ (5.24) отождествляется с полным БРСТ-оператором $\widetilde{s}$ (4.83). БРСТ-оператор δ действует на внешние формы ϕ на $X \times \bar{\mathbf{A}}$, (0, 1)-степень которых соответствует духовому числу. Однако внешнее произведение этих форм, в отличие от внешнего произведения (4.82), подчиняется условию

$$\phi \wedge \phi' = (-1)^{(|\phi|+|\phi|)(|\phi'|+|\phi'|)} \phi' \wedge \phi,$$

и δ является дифференцированием форм ϕ аналогично БРСТ-оператору (4.79), а не антидифференцированием, как БРСТ-оператор (4.77). В БРСТ-теории равенство (6.35), будучи полученным из соотношений (6.36), называется *русской формулой* [111]. Подставляя равенство (6.35) в тождество Бианки (5.36), мы также получаем

$$\delta F_A = [F_A, c]. \tag{6.37}$$

Как и в § 6.1, пусть $\mathcal{P}_m$ обозначает калибровочно инвариантный полином степени m от напряженности $\widehat{F}$. Мы имеем соответствующую локальную формулу трансгрессии (6.4):

$$\mathcal{P}_m(\widehat{F}) = \widehat{d} Q_{2m-1}(\widehat{A}, \widehat{F}_A), \tag{6.38}$$

вместе с равенствами

$$Q_{2m-1}(\widehat{A}, \widehat{F}) = m \int_0^1 dt P(\widehat{A}, \widehat{F}_t), \tag{6.39}$$

$$\widehat{F}_t = t\widehat{F}_A + (t^2 - t)\widehat{A}^2.$$

Формула (6.38) называется *смещенной формулой трансгрессии*.

С учетом русской формулы (6.35) можно приравнять формулы трансгрессии (6.4) и смещенной трансгрессии (6.38). В результате получаем

$$\widehat{d} Q_{2m-1}(A + c, F_A) = d Q_{2m-1}(A, F_A) \tag{6.40}$$

(сравните с формулой (6.18)). Разложим форму Чженя—Саймонса $Q_{2m-1}(A + c, F_A)$ в ряд по локальной форме связности c как

$$Q_{2m-1}(A + c, F_A) = Q^0_{2m-1}(c, A, F_A) + Q^1_{2m-2}(c, A, F_A) + \ldots + Q^{2m-1}_0(c), \tag{6.41}$$

где верхние индексы обозначают $(1, 0)$-степень и нижние индексы — $(0, 1)$-степень. Подстановка разложения (6.41) в уравнение (6.40) дает цепочку *уравнений спуска*

$$\mathcal{P}_m(F_A) - d Q^0_{2m-1} = 0, \tag{6.42а}$$

$$\delta Q^i_{2m-1-i} + d Q^{i+1}_{2m-2-i} = 0, \quad i = 0, \ldots, 2m-2, \tag{6.42б}$$

$$\delta Q^{2m-1}_0 = 0. \tag{6.42в}$$

Элементы Q^i_{2m-1-i} в этой цепочке уравнений интерпретируются как *БРСТ-аномалии*. Мы сошлемся на книгу [36], где перечислены такие аномалии для $i = 0, \ldots, 3$. Следует при этом отметить, что аномалии высших степеней Q^i_{2m-1-i}, $i \geqslant 4$, не получили какой-либо определенной физической интерпретации.

Ясно видно, что уравнения спуска (6.42б)–(6.42в) аналогичны как уравнениям спуска (4.85б)–(4.85в), записанным для произвольной локальной формы в БРСТ-формализме полей-антиполей, так и уравнениям спуска (5.38б)–(5.38в) для формы Чженя $\mathcal{P}_2(\widehat{F}) = c_2(\widehat{F})$ произвольной связности $\widehat{A}$. В частности, нетрудно установить, что

БРСТ-аномалии Q^i_{2m-1-i} представляют собой локально БРСТ-замкнутые формы, и поэтому можно рассмотреть их БРСТ-когомологии. В то же время уравнение спуска (6.42а) отличается от уравнений спуска (4.85а) и (5.38а), поскольку в силу соотношения (6.40) $Q_{2m-1}\left(A+c, F_A\right)$ не является $\widehat{d}$-замкнутой формой. Отсюда следует, что локальные БРСТ-когомологии аномалий Q^i_{2m-1-i} в общем случае нельзя связать с когомологиями полного БРСТ-оператора $\widehat{d}$.

В заключение следует подчеркнуть, что рассмотренная выше локальная формула трансгрессии (6.38) пригодна для тривиальных гладких расслоений $P \to X$. В случае нетривиального расслоения $P \to X$ можно применить формулу трансгрессии (6.1) и положить $\delta A' = 0$ [36, 111].

Связности в некоммутативной геометрии

По некоммутативной геометрии и ее физическим приложениям имеется обширная литература (см., например, монографии [53, 106, 129]). В некоммутативной геометрии коммутативные алгебры гладких функций заменяются на ассоциативные алгебры, которые необязательно являются коммутативными. Это, как правило, комплексные инволютивные алгебры. Эта глава посвящена связностям в некоммутативной геометрии. Мы следуем алгебраическому понятию связности из Главы 1, обобщенному на модули над некоммутативными кольцами [53, 63, 64]. Следует иметь в виду, что такое обобщение делает разные определения алгебраических связностей неэквивалентными.

В то же время отметим, что в некоммутативной геометрии над квантовыми группами [66, 128, 129] связности на квантовых главных расслоениях определяются в терминах псевдотензорных форм, аналогичных формам связности на гладких расслоениях и суперсвязностям [65]. Здесь мы эти связности не рассматриваем.

§ 1. Некоммутативная алгебра

В этом параграфе собраны необходимые сведения о модулях над алгебрами, которые необязательно предполагаются коммутативными.

Пусть $\mathcal{K}$ — коммутативное кольцо (т. е. коммутативная $\mathbb{Z}$-алгебра с единицей) и $\mathcal{A}$ — $\mathcal{K}$-алгебра с единицей, называемая также $\mathcal{K}$-кольцом. Рассматривают правые и левые $\mathcal{A}$-модули и $\mathcal{A}$-бимодули (или $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}$-бимодули в терминологии [8]). Бимодуль P над алгеброй $\mathcal{A}$ именуется *центральным*, если

$$pa = ap, \quad \forall\, p \in P, \quad \forall\, a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}), \tag{7.1}$$

где $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ — центр алгебры $\mathcal{A}$. Напомним, что *центром* $\mathcal{A}$-бимодуля P называется его $\mathcal{K}$-подмодуль $\mathcal{Z}(P)$ такой, что

$$pa = ap, \quad \forall\, p \in \mathcal{Z}(P), \quad \forall\, a \in \mathcal{A}.$$

Отметим, что, когда $\mathcal{A}$ — коммутативная алгебра, любой правый (или левый) модуль P над $\mathcal{A}$ можно всегда превратить в соответствующий центральный бимодуль, положив

$$pa \stackrel{\text{def}}{=} ap, \quad \forall\, p \in P, \quad \forall\, a \in \mathcal{A}.$$

Поэтому в дальнейшем модуль над коммутативной алгеброй автоматически рассматривается как центральный бимодуль (напомним, что в § 1.1 мы имели дело с бимодулями над коммутативным кольцом, которые не являлись центральными). Если $\mathcal{A}$ — некоммутативная алгебра, всякий правый (соответственно левый) $\mathcal{A}$-модуль P является также $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$–$\mathcal{A}$-бимодулем (соответственно $\mathcal{A}$–$\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодулем), так что выполняется равенство (7.1) и P — $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодуль.

Удобно ввести следующую терминологию. Правые и левые $\mathcal{A}$-модули, центральные $\mathcal{A}$-бимодули и $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-модули будем называть $\mathcal{A}$-модулями типа $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ и $(0,0)$

соответственно, где $A_0 = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ и $A_1 = \mathcal{A}$. Используя эту терминологию, напомним некоторые основные операции с модулям.

- Если P и P' — $\mathcal{A}$-модули одного и того же типа (i, j), тогда их прямая сумма $P \oplus P'$ тоже $\mathcal{A}$-модуль того же типа.
- Пусть P и P' — $\mathcal{A}$-модули типа (i, k) и (k, j) соответственно. Их тензорное произведение $P \otimes P'$ (см. [8]) определяет $\mathcal{A}$-модуль типа (i, j).
- Для данного $\mathcal{A}$-модуля P типа (i, j) обозначим

$$P^* = \mathrm{Hom}_{A_i - A_j}(P, \mathcal{A})$$

— *дуальный модуль*. Можно показать, что P^* является модулем типа $(i + 1, j + 1) \bmod 2$ [63]. В частности, P и P^{**} — $\mathcal{A}$-модули одного и того же типа. Существует естественный гомоморфизм $P \to P^{**}$. Например, если P — проективный модуль конечного ранга, таковым же является дуальный модуль P^* и $P \to P^{**}$ — изоморфизм [8].

Можно встретить несколько эквивалентных определений проективного модуля. Говорят, что правый (соответственно левый) модуль P является *проективным*, если P представляет собой прямое слагаемое правого (соответственно левого) свободного модуля, т. е. существует модуль Q такой, что $P \oplus Q$ — свободный модуль [8]. Соответственно модуль P является проективным тогда и только тогда, когда

$$P = \mathbf{p}S,$$

где S — свободный модуль и $\mathbf{p}$ — проектор, т. е. эндоморфизм S такой, что $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}$. Мы уже упоминали проективные $\mathbb{C}^\infty(X)$-модули конечного ранга в связи с теоремой Серре—Свана (см. ниже Теорему 7.1.1). Напомним, что модуль называется модулем конечного ранга или просто *конечным*, если он является фактором конечно порожденного свободного модуля.

Как уже отмечалось, некоммутативная геометрия, как правило, имеет дело с комплексными инволютивными алгебрами (т. е. $*$-алгебрами) с единицей. Пусть $\mathcal{A}$ — такая алгебра (см. третий том [13]). Следует подчеркнуть, что в этом случае мы не можем рассматривать отдельно правые и левые $\mathcal{A}$-модули, а только модули типа $(1, 1)$ и $(0, 0)$, поскольку операция инволюции переставляет сомножители в произведениях в $\mathcal{A}$. Центральный $\mathcal{A}$-бимодуль P над $\mathcal{A}$ называется *$*$-модулем* над $*$-алгеброй $\mathcal{A}$, если он наделен антилинейной инволюцией $p \mapsto p^*$ такой, что

$$(apb)^* = b^* p^* a^*, \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}, \quad p \in P.$$

Говорят, что $*$-модуль является конечным проективным модулем, если он представляет собой конечный проективный правый или левый модуль.

Некоммутативная геометрия строится главным образом как обобщение дифференциального исчисления в коммутативных кольцах гладких функций.

Пусть X — локально компактное топологическое пространство и $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра $\mathbb{C}_0^0(X)$ непрерывных комплексных функций на X, стремящихся к нулю на бесконечности в X. Наделенная нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f|, \quad f \in \mathcal{A},$$

эта алгебра становится C^*-алгеброй (см. третий том [13], § 2.7). Ее спектр $\widehat{\mathcal{A}}$ гомеоморфен топологическому пространству X. Обратно, всякая коммутативная C^*-алгебра $\mathcal{A}$ имеет локально компактный спектр $\widehat{\mathcal{A}}$ и в соответствии с известной теоремой Гельфанда—Наймарка (см. Теорему 2.7.2 в третьем томе [13]) изоморфна алгебре $\mathbb{C}_0^0(\widehat{\mathcal{A}})$ непрерывных комплексных функций на $\widehat{\mathcal{A}}$, стремящихся к нулю на бесконечности в $\widehat{\mathcal{A}}$. Если $\mathcal{A}$ — коммутативная C^*-алгебра с единицей, ее спектр $\widehat{\mathcal{A}}$ компактен. Пусть теперь

X — компактное гладкое многообразие. Тогда $*$-алгебра $\mathbb{C}^\infty(X)$ гладких комплексных функций на X является плотной подалгеброй C^*-алгебры с единицей $\mathbb{C}^0(X)$ непрерывных комплексных функций на X. Это не C^*-алгебра, но она является алгеброй Фреше в естественной локально выпуклой топологии компактной сходимости по всем производным (см. третий том [13], Пример 1.1.7). В некоммутативной геометрии алгебры с локально выпуклой топологией не используются (см. [117]), а в чисто алгебраическом аспекте рассматриваются плотные подалгебры с единицей C^*-алгебр.

Алгебра $C^\infty(X)$ гладких вещественных функций на гладком многообразии X является вещественной подалгеброй алгебры $\mathbb{C}^\infty(X)$, которая состоит из всех эрмитовых элементов $\mathbb{C}^\infty(X)$. Она характеризует многообразие X в соответствии с Замечанием 1.1.8 (см. также [151]). В некоммутативной геометрии алгебра вещественных функций заменяется йордановой алгеброй эрмитовых элементов $*$-алгебры $\mathcal{A}$ с единицей.

Обратимся теперь к $*$-модулям. Пусть $E \to X$ — гладкое m-мерное комплексное векторное расслоение над компактным многообразием X. Структурный модуль $E(X)$ его глобальных сечений является $*$-модулем над кольцом $\mathbb{C}^\infty(X)$ гладких комплексных функций на X. Это проективный модуль конечного ранга. Действительно, пусть $(\phi_1, \ldots, \phi_q)$ — гладкое разбиение единицы на многообразии X такое, что расслоение E тривиально над множествами $U_\zeta \supset \operatorname{supp} \phi_\zeta$, и имеет функции перехода $\rho_{\zeta\xi}$. Тогда

$$p_{\zeta\xi} = \phi_\zeta \rho_{\zeta\xi} \phi_\xi$$

— гладкие $(m \times m)$-матрично-значные функции на X. Они удовлетворяют соотношениям

$$\sum_\kappa p_{\zeta\kappa} p_{\kappa\xi} = p_{\zeta\xi} \tag{7.2}$$

и, таким образом, группируются в $(mq \times mq)$-матрицу $\mathbf{p}$, компоненты которой являются гладкими комплексными функциями на X. При этом из соотношений (7.2) следует, что

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}.$$

Тогда всякое сечение s векторного расслоения $E \to X$ представимо в виде столбца $(\phi_\zeta s^i)$ гладких комплексных функций на базе X таких, что $\mathbf{p}s = s$. Отсюда следует, что $s \in \mathbf{p}\mathbb{C}(X)^{mq}$, т. е. $E(X)$ является проективным модулем конечного ранга. Обратное утверждение составляет содержание упоминавшейся выше *теоремы Серре—Свана* [144, 151].

Теорема 7.1.1. Пусть P — конечный проективный $*$-модуль над кольцом $\mathbb{C}^\infty(X)$ гладких комплексных функций на многообразии X. Тогда существует гладкое комплексное векторное расслоение E над X такое, что модуль P изоморфен структурному модулю $E(X)$ глобальных сечений расслоения E. □

В некоммутативной геометрии, основываясь на этой теореме, о конечном проективном $*$-модуле над плотной $*$-подалгеброй C^*-алгебры с единицей говорят как о *некоммутативном векторном расслоении*.

В некоммутативной геометрии $*$-модуль P обычно наделяется эрмитовой структурой. Правой *эрмитовой формой* на P называется полулинейный морфизм

$$(.|.)\colon P \times P \to \mathcal{A}$$

такой, что [63]:

(i) $(pa|p'b) = a^*(p|p')b$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$ и $p, p' \in P$;

(ii) $(p|p') = (p'|p)^*$;

(iii) $(ap|p') = (p|a^*p')$ для всех $a \in \mathcal{A}$ и $p, p' \in P$;

(iv) $(p|p)$, $\forall p \in P$, является положительным элементом в $\mathcal{A}$ (т. е. $(p|p) = qq^*$ для некоторого элемента $q \in \mathcal{A}$);

(v) из $(p|p) = 0$ следует $p = 0$.

Это определение правой эрмитовой формы, исключая условие (iii), совпадает с определением эрмитовой формы на правом $\mathcal{A}$-модуле над $*$-алгеброй $\mathcal{A}$ [151].

§ 2. Некоммутативное дифференциальное исчисление

Некоммутативное обобщение дифференциальной геометрии основано на том, что внешняя алгебра дифференциальных форм заменяется на $\mathbb{Z}$-градуированную дифференциальную алгебру [110]. Всюду в этой главе под градуировкой подразумевается именно $\mathbb{Z}$-градуировка.

Напомним, что *градуированная алгебра* Ω^* над коммутативным кольцом $\mathcal{K}$ определяется как прямая сумма

$$\Omega^* = \bigoplus_{k=0} \Omega^k$$

$\mathcal{K}$-модулей Ω^k, наделенная ассоциативной операцией умножения такой, что $\alpha \cdot \beta \in \Omega^{|\alpha|+|\beta|}$, где $|\alpha|$ обозначает степень элемента $\alpha \in \Omega^{|\alpha|}$. В частности, Ω^0 представляет собой некоторую $\mathcal{K}$-алгебру $\mathcal{A}$ с единицей 1, а $\Omega^{k>0}$ являются $\mathcal{A}$-бимодулями. Градуированная алгебра Ω^* называется *градуированной дифференциальной алгеброй*, если она — коцепной комплекс $\mathcal{K}$-модулей

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\delta} \Omega^1 \xrightarrow{\delta} \dots$$

относительно оператора кограницы δ такого, что

$$\delta(\alpha \cdot \beta) = \delta\alpha \cdot \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \cdot \delta\beta.$$

Определение 7.2.1. Градуированная дифференциальная алгебра (Ω^*, δ) называется *дифференциальным исчислением* над $\mathcal{K}$-алгеброй $\mathcal{A} = \Omega^0$. □

Если $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра, предполагаются дополнительные условия

$$(\alpha \cdot \beta)^* = (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta^*\alpha^*, \quad (\delta\alpha)^* = \delta(\alpha^*).$$

Замечание 7.2.1. Комплекс Де Рама (1.42) служит примером дифференциального исчисления над коммутативным кольцом. Чтобы обобщить его на некоммутативное кольцо $\mathcal{A}$, от оператора кограницы δ следует потребовать дополнительные свойства:

- $\Omega^{k>0}$ — центральные $\mathcal{A}$-бимодули;
- элементы $\delta a_1 \dots \delta a_k$, $a_i \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, принадлежат центру $\mathcal{Z}(\Omega^k)$ модуля Ω^k; тогда, если $\mathcal{A}$ — коммутативное кольцо, выполняется условие коммутативности (1.27).

□

Пусть $\Omega^*\mathcal{A}$ — минимальная градуированная дифференциальная подалгебра алгебры Ω^*, которая содержит $\mathcal{A}$. Как $\mathcal{A}$-алгебра она порождается элементами δa, $a \in \mathcal{A}$, и состоит из конечных линейных комбинаций моноидов вида

$$\alpha = a_0\delta a_1 \dots \delta a_k, \qquad a_i \in \mathcal{A}. \tag{7.3}$$

Произведение моноидов (7.3) определяется по правилу

$$(a_0\delta a_1) \cdot (b_0\delta b_1) = a_0\delta(a_1b_0) \cdot \delta b_1 - a_0a_1\delta b_0 \cdot \delta b_1.$$

В частности, $\Omega^1\mathcal{A}$ представляет собой $\mathcal{A}$-бимодуль, порождаемый элементами δa, $a \in \mathcal{A}$. Поскольку

$$(\delta a)b = \delta(ab) - a\delta b,$$

бимодуль $\Omega^1\mathcal{A}$ можно также рассматривать как левый (или правый) $\mathcal{A}$-модуль, порождаемый элементами δa, $a \in \mathcal{A}$. Отметим, что $\delta(\mathbf{1}) = 0$. Соответственно

$$\Omega^k\mathcal{A} = \underbrace{\Omega^1\mathcal{A} \ldots \Omega^1\mathcal{A}}_{k}$$

— это $\mathcal{A}$-бимодули и одновременно левые (или правые) $\mathcal{A}$-модули, порождаемые моноидами (7.3).

Таким образом, градуированная дифференциальная подалгебра $(\Omega^*\mathcal{A}, \delta)$ является дифференциальным исчислением над $\mathcal{A}$. Она называется *универсальным дифференциальным исчислением*, поскольку обладает следующим свойством [52, 95, 103]. Пусть (Ω'^*, δ') — другое дифференциальное исчисление над $\mathcal{K}$-алгеброй $\mathcal{A}'$ с единицей, и пусть

$$\rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$$

— морфизм алгебр. Существует единственное расширение этого морфизма до морфизма градуированных дифференциальных алгебр

$$\rho^k\colon \Omega^k\mathcal{A} \to \Omega'^k$$

такое, что $\rho^{k+1} \circ \delta = \delta' \circ \rho^k$.

Наш интерес к дифференциальным исчислениям над алгеброй $\mathcal{A}$ вызван тем фактом, что в коммутативной геометрии Определение 1.2.2 алгебраической связности на $\mathcal{A}$-модуле использует модуль Ω^1 (1.22). Если $\mathcal{A} = C^\infty(X)$, это модуль 1-форм на многообразии X. Поэтому, чтобы ввести связность в некоммутативной геометрии, нужно сначала построить некоммутативный аналог модуля Ω^1. При этом можно следовать определению модуля Ω^1 в § 1.1, но не брать фактор по $\mathrm{mod}\,\mu^2$, поскольку это предполагает условие коммутативности (1.27).

Пусть $\mathcal{A}$ — $\mathcal{K}$-алгебра с единицей. Рассмотрим тензорное произведение $\mathcal{A} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{A}$ $\mathcal{K}$-модулей и морфизм $\mathcal{K}$-модулей

$$\mu^1\colon \mathcal{A} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{A} \ni a \otimes b \mapsto ab \in \mathcal{A}.$$

Следуя (1.22), определим $\mathcal{K}$-модуль

$$\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}] = \mathrm{Ker}\,\mu^1. \tag{7.4}$$

Существует морфизм $\mathcal{K}$-модулей

$$d\colon \mathcal{A} \ni a \mapsto (\mathbf{1} \otimes a - a \otimes \mathbf{1}) \in \overline{\Omega}^1[\mathcal{A}] \tag{7.5}$$

(сравните с морфизмом (1.26)). Более того, $\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ является $\mathcal{A}$-бимодулем, порождаемым элементами da, $a \in \mathcal{A}$, с законом умножения

$$b(da)c = b \otimes ac - ba \otimes c, \quad a, b, c \in \mathcal{A}.$$

Морфизм d (7.5) обладает свойством

$$d(ab) = (\mathbf{1} \otimes ab - ab \otimes \mathbf{1} + a \otimes b - a \otimes b) = (da)b + adb \tag{7.6}$$

(сравните с формулой (1.28)), т. е. d является $\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$-значным дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$. Благодаря указанному свойству, $\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ может рассматриваться как левый $\mathcal{A}$-модуль, порождаемый элементами da, $a \in \mathcal{A}$. В то же время, если $\mathcal{A}$ — коммутативной кольцо, $\mathcal{A}$-бимодуль $\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ не совпадает с бимодулем Ω^1 (1.22), поскольку $\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ не является центральным бимодулем (см. Замечание 7.2.1).

Чтобы преодолеть эту трудность, рассмотрим дифференцирования алгебры $\mathcal{A}$. Они удовлетворяют правилу

$$u(ab) = u(a)b + au(b), \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}. \tag{7.7}$$

Следует подчеркнуть, что правило (7.7) отличается от правила дифференцирования (3.16) градуированной алгебры и от правила дифференцирования

$$u(ab) = u(a)b + u(b)a$$

общих алгебр [7]. В силу (7.7) дифференцирования алгебры $\mathcal{A}$ составляют $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодуль $\operatorname{Der}\mathcal{A}$, но не левый $\mathcal{A}$-модуль.

Этот $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодуль является также алгеброй Ли над коммутативным кольцом K относительно скобок Ли

$$[u, u'] = u \circ u' - u' \circ u. \tag{7.8}$$

Центр $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ сохраняется при дифференцированиях из $\operatorname{Der}\mathcal{A}$, т. е.

$$u(a)b = bu(a), \quad \forall\, a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}), \quad b \in \mathcal{A}, \quad u \in \operatorname{Der}\mathcal{A},$$

и имеет место равенство

$$[u, au'] = u(a)u' + a[u, u'], \quad \forall\, a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}), \quad u, u' \in \operatorname{Der}\mathcal{A}. \tag{7.9}$$

Если $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра с единицей, модуль $\operatorname{Der}\mathcal{A}$ дифференцирований $\mathcal{A}$ наделен инволюцией $u \mapsto u^*$, определяемой как

$$u^*(a) = \big(u(a^*)\big)^*.$$

Тогда скобки Ли (7.8) удовлетворяют условию вещественности

$$[u, u']^* = [u^*, u'^*].$$

Рассмотрим *когомологии Шевалле–Эйленберга* (см. [150]) алгебры Ли $\operatorname{Der}\mathcal{A}$ относительно ее естественного представления в алгебре $\mathcal{A}$. Соответствующее пространство k-коцепей $\underline{\Omega}^k[\mathcal{A}]$, $k = 1, \ldots$, представляет собой $\mathcal{A}$-бимодуль $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-мультилинейных антисимметричных отображений $(\operatorname{Der}\mathcal{A})^k$ в $\mathcal{A}$. В частности, $\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ — это бимодуль

$$\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}] = \operatorname{Der}\mathcal{A}^*, \tag{7.10}$$

$\mathcal{A}$-дуальный к модулю дифференцирований $\operatorname{Der}\mathcal{A}$ (сравните с изоморфизмом (1.59)). Положим по определению $\underline{\Omega}^0[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$. *Оператор кограницы Шевалле–Эйленберга*

$$d\colon \underline{\Omega}^k[\mathcal{A}] \to \underline{\Omega}^{k+1}[\mathcal{A}]$$

задается в виде

$$(d\phi)(u_0, \ldots, u_k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i u_i\big(\phi(u_0, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_k)\big) + \tag{7.11}$$

$$+ \frac{1}{k+1}\sum_{0 \leqslant r < s \leqslant k}(-1)^{r+s}\phi\big([u_r, u_s], u_0, \ldots, \widehat{u_r}, \ldots, \widehat{u_s}, \ldots, u_k\big),$$

где $\widehat{u_i}$ означает, что элемент u_i опущен. Например,

$$(da)(u) = u(a), \quad a \in \mathcal{A}, \tag{7.12}$$

$$(d\phi)(u_0, u_1) = \frac{1}{2}\big(u_0\big(\phi(u_1)\big) - u_1\big(\phi(u_0)\big) - \phi\big([u_0, u_1]\big)\big), \quad \phi \in \Omega^1[\mathcal{A}]. \tag{7.13}$$

Нетрудно установить, что $d^2 = 0$. В результате мы имеем *коцепной комплекс Шевалле—Эйленберга* для $\mathcal{K}$-модулей

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{d} \underline{\Omega}^1[\mathcal{A}] \xrightarrow{d} \dots . \tag{7.14}$$

Более того, $\mathbb{Z}$-градуированное пространство

$$\underline{\Omega}^*[\mathcal{A}] = \bigoplus_{k=0} \underline{\Omega}^k[\mathcal{A}] \tag{7.15}$$

наделено структурой градуированной алгебры относительно произведения $\wedge$, являющегося композицией операции произведения в алгебре $\mathcal{A}$ с антисимметризацией по аргументам. Заметим, что, если алгебра $\mathcal{A}$ не коммутативна, свойства этого произведения не имеют ничего общего со свойствами градуированной коммутативности внешних форм, т. е. в общем случае

$$\phi \wedge \phi' \neq (-1)^{|\phi||\phi'|} \phi' \wedge \phi.$$

Если $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра, градуированная алгебра $\underline{\Omega}^*[\mathcal{A}]$ тоже наделена инволюцией

$$\phi^*(a_1, \dots, a_k) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\phi(a_1^*, \dots, a_k^*)\big)^* .$$

Таким образом, построенная нами градуированная алгебра $(\underline{\Omega}^*[\mathcal{A}], d)$ является дифференциальным исчислением над $\mathcal{A}$, называемым *дифференциальным исчислением Шевалле—Эйленберга*.

Легко заметить, что, если $\mathcal{A} = \mathbb{C}^\infty(X)$ — коммутативное кольцо гладких комплексных функций на компактном многообразии X, градуированная алгебра $\underline{\Omega}^*[\mathbb{C}^\infty(X)]$ — это в точности комплексифицированная внешняя алгебра $\mathbb{C} \otimes \Omega^*(X)$ внешних форм на X. В этом случае оператор кограницы Шевалле—Эйленберга (7.11) совпадает с внешним дифференциалом, а комплекс Шевалле—Эйленберга (7.14) — это комплекс Де Рама комплексных внешних форм на многообразии X. В частности, операции

$$\begin{aligned} (u \lrcorner \phi)(a_1, \dots, a_{k-1}) &= k\phi(u, a_1, \dots, a_{k-1}), \\ \mathbf{L}_u(\phi) &= d(u \lrcorner \phi) + u \lrcorner f(\phi), \end{aligned} \qquad u \in \operatorname{Der} \mathcal{A},$$

на градуированной алгебре $\underline{\Omega}^*[\mathcal{A}]$ представляют собой некоммутативные обобщения внутреннего произведения и производной Ли внешних форм. Поэтому мы имеем все основания интерпретировать элементы модуля $\Omega^1[\mathcal{A}]$ как некоммутативное обобщение дифференциальных 1-форм, хотя это обобщение не является единственным.

Пусть $\Omega^*[\mathcal{A}]$ — наименьшая дифференциальная подалгебра градуированной дифференциальной алгебры $\underline{\Omega}^*[\mathcal{A}]$, которая содержит $\mathcal{A}$. Она порождается элементами da, $a \in \mathcal{A}$, и состоит из конечных линейных комбинаций моноидов вида

$$\phi = a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_k, \quad a_i \in \mathcal{A},$$

(сравните с (7.3)). В частности, $\Omega^1[\mathcal{A}]$ является $\mathcal{A}$-бимодулем (7.4), порождаемым элементами da, $a \in \mathcal{A}$. Поскольку центр $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ стабилен относительно дифференцирований кольца $\mathcal{A}$, получаем

$$\begin{gathered} bda = (da)b, \quad adb = (db)a, \quad a \in \mathcal{A}, \quad b \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}), \\ da \wedge db = -db \wedge da, \quad \forall\, a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}). \end{gathered}$$

Отсюда видно, что $\Omega^{|1|}[\mathcal{A}]$ является центральным бимодулем в отличие от бимодуля $\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ (7.4). В силу соотношения (7.12) имеет место изоморфизм

$$\operatorname{Der} \mathcal{A} = \Omega^1[\mathcal{A}]^* \tag{7.16}$$

$\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-модуля $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$-дуального модуля к модулю $\Omega^1[\mathcal{A}]$ (сравните с соотношением дуальности (1.38)). Комбинация соотношений дуальности (7.10) и (7.16) приводит к изоморфизму

$$\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}] = \Omega^1[\mathcal{A}]^{**}.$$

Дифференциальная подалгебра $(\Omega^*[\mathcal{A}], d)$ является универсальным дифференциальным исчислением над $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ — коммутативное кольцо, тогда $\Omega^*[\mathcal{A}]$ — комплекс Де Рама (1.42).

§ 3. Универсальные связности

Пусть (Ω^*, δ) — дифференциальное исчисление над $\mathcal{K}$-алгеброй $\mathcal{A}$ с единицей и P — левый (соответственно правый) $\mathcal{A}$-модуль. По аналогии с Определением 1.2.2 рассмотрим тензорное произведение $\Omega^1 \otimes P$ (соответственно $P \otimes \Omega^1$) и определим связность на модуле P следующим образом [103, 151].

Определение 7.3.1. *Некоммутативной связностью* на левом $\mathcal{A}$-бимодуле P относительно дифференциального исчисления (Ω^*, δ) называется морфизм $\mathcal{K}$-модулей

$$\nabla\colon P \to \Omega^1 \otimes P, \tag{7.17}$$

который удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla(ap) = \delta a \otimes p + a\nabla(p).$$

□

Если $\Omega^* = \Omega^*\mathcal{A}$ — универсальное дифференциальное исчисление, связность (7.17) именуется *универсальной некоммутативной связностью* [103, 151].

Кривизна некоммутативной связности (7.17) определяется как морфизм $\mathcal{A}$-модулей

$$\nabla^2\colon P \to \Omega^2[\mathcal{A}] \otimes P$$

(сравните с (1.58)) [103]. Отметим также, что морфизм (7.17) допускает естественное расширение [64, 103]

$$\nabla\colon \Omega^k \otimes P \to \Omega^{k+1} \otimes P,$$

$$\nabla(\alpha \otimes p) = \delta\alpha \otimes p + (-1)^{|\alpha|}\alpha \otimes \nabla(p), \quad \alpha \in \Omega^*.$$

Аналогично некоммутативная связность определяется на правом $\mathcal{A}$-модуле. Однако некоммутативные связности на левых (правых) модулях не всегда существуют. В этой связи приведем следующую теорему (см. § 7.6).

Теорема 7.3.2. Универсальная связность на левом (правом) модуле P конечного ранга существует тогда и только тогда, когда P — проективный модуль [55, 103]. □

Трудность возникает, когда P — $\mathcal{A}$-бимодуль. Если $\mathcal{A}$ — коммутативное кольцо, левая и правая структуры $\mathcal{A}$-бимодуля эквивалентны и вводится или левая, или правая связность на P (см. Определение 1.2.2). Если P — это $\mathcal{A}$-бимодуль над некоммутативным кольцом, *левая* и *правая* некоммутативные связности ∇^L и ∇^R на P должны быть введены одновременно. Однако пара (∇^L, ∇^R) никаким образом не является некоммутативной связностью на бимодуле, поскольку $\nabla^L(P) \in \Omega^1 \otimes P$, тогда как $\nabla^R(P) \in P \otimes \Omega^1$. Как паллиатив, обычно предполагают, что существует изоморфизм бимодулей

$$\varrho\colon \Omega^1 \otimes P \to P \otimes \Omega^1. \tag{7.18}$$

Тогда пара (∇^L, ∇^R) левых и правых некоммутативных связностей на P называется ϱ-согласованной, если [64, 103, 120]

$$\varrho \circ \nabla^L = \nabla^R$$

(см. более слабое условие в работе [56]). Тем не менее, это не является истинной некоммутативной связностью на бимодуле (см. ниже условие (7.22)).

Замечание 7.3.1. Если $\mathcal{A}$ — коммутативное кольцо, изоморфизм ϱ (7.1) — это, естественно, перестановка

$$\varrho\colon \alpha \otimes p \mapsto p \otimes \alpha, \quad \forall\, \alpha \in \Omega^1, \quad p \in P.$$

□

Упомянутая выше проблема некоммутативной связности на бимодуле существенно не упрощается, если даже $P = \Omega^1$ вместе с очевидной перестановкой [63, 120]

$$\phi \otimes \phi' \mapsto \phi' \otimes \phi, \quad \phi, \phi' \in \Omega^1.$$

Пусть теперь $(\Omega^*|\mathcal{A}|, d)$ — универсальное дифференциальное исчисление над некоммутативным $\mathcal{K}$-кольцом $\mathcal{A}$ и пусть

$$\nabla^L\colon P \to \Omega^1|\mathcal{A}| \otimes P, \quad \nabla^L(ap) = da \otimes p + a\nabla^L(p) \tag{7.19}$$

— левая универсальная некоммутативная связность на левом $\mathcal{A}$-модуле P (сравните с Определением 1.2.2). Благодаря условию дуальности (7.16), для всякого дифференцирования $u \in \operatorname{Der}\mathcal{A}$ существует эндоморфизм $\mathcal{K}$-модуля P

$$\nabla^L_u\colon P \ni p \to u \lrcorner \nabla^L(p) \in P. \tag{7.20}$$

Если ∇^R — правая универсальная некоммутативная связность на правом $\mathcal{A}$-модуле P, аналогичный эндоморфизм

$$\nabla^R_u\colon P \ni p \to \nabla^L(p) \llcorner u \in P \tag{7.21}$$

определен для любого дифференцирования $u \in \operatorname{Der}\mathcal{A}$. Пусть (∇^L, ∇^R) — ϱ-согласованная пара левых и правых универсальных некоммутативных связностей на $\mathcal{A}$-бимодуле P. Естественно считать эту пару универсальной некоммутативной связностью на бимодуле P, если

$$u \lrcorner \nabla^L(p) = \nabla^R(p) \llcorner u \tag{7.22}$$

для всех $p \in P$ и $u \in \operatorname{Der}\mathcal{A}$.

В то же время, основываясь на эндоморфизмах (7.20)–(7.21), можно предложить другое определение некоммутативной связности на бимодуле в духе Определения 1.2.7.

§ 4. Связности Дюбуа—Виолетта

Пусть $\mathcal{A}$ — $\mathcal{K}$-кольцо и P — A-модуль типа (i, j) в соответствии с терминологией § 7.1.

Определение 7.4.1. По аналогии с Определением 1.2.7, *связностью Дюбуа—Виолетта* на A-модуле P типа (i, j) называется морфизм $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодулей

$$\nabla\colon \operatorname{Der}\mathcal{A} \ni u \mapsto \nabla_u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(P, P) \tag{7.23}$$

из $\operatorname{Der}\mathcal{A}$ в $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодуль эндоморфизмов $\mathcal{K}$-модуля P, который удовлетворяет правилу Лейбница [63, 120]

$$\nabla_u(a_i p a_j) = u(a_i)pa_j + a_i\nabla_u(p)a_j + a_i p u(a_j), \quad \forall\, p \in P, \quad \forall\, a_k \in A_k. \tag{7.24}$$

□

Согласно соотношению дуальности (7.16) и выражениям (7.20)–(7.21) всякая левая (соответственно правая) универсальная некоммутативная связность порождает связность (7.23) на левом (соответственно правом) $\mathcal{A}$-модуле P. В дальнейшем под связностью в некоммутативной геометрии будет подразумеваться именно связность Дюбуа—Виолетта из Определения 7.4.1.

Выражение (7.24) показывает, что, если некоммутативные связности на A-модуле P типа (i,j) существуют, они образуют аффинное пространство, моделируемое над линейным пространством морфизмов $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодулей

$$\sigma\colon \operatorname{Der}\mathcal{A} \ni u \mapsto \sigma_u \in \operatorname{Hom}_{A_i-A_j}(P,P)$$

из $\operatorname{Der}\mathcal{A}$ в $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодуль эндоморфизмов

$$\sigma_u(a_i p a_j) = a_i \sigma(p) a_j, \quad \forall\, p \in P, \quad \forall\, a_k \in A_k,$$

$\mathcal{A}$-модуля P.

Пример 7.4.1. Если $P = \mathcal{A}$, морфизмы

$$\nabla_u(a) = u(a), \quad \forall\, u \in \operatorname{Der}\mathcal{A}, \quad \forall\, a \in \mathcal{A}, \tag{7.25}$$

задают каноническую связность на некоммутативной алгебре $\mathcal{A}$ согласно Определению 7.4.1. Тогда из правила Лейбница (7.24) следует, что всякая некоммутативная связность на центральном $\mathcal{A}$-бимодуле P является также связностью на P, рассматриваемом как $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодуль. □

Пример 7.4.2. Если P — $\mathcal{A}$-бимодуль и алгебра $\mathcal{A}$ допускает только внутренние дифференцирования

$$\operatorname{ad} b(a) = ba - ab,$$

морфизмы

$$\nabla_{\operatorname{ad} b}(p) = bp - pb, \quad \forall\, b \in \mathcal{A}, \quad \forall\, p \in P, \tag{7.26}$$

определяют каноническую связность на P. □

Кривизна R некоммутативной связности ∇ (7.23) на A-модуле P определяется как морфизм $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-модулей

$$R\colon \operatorname{Der}\mathcal{A} \times \operatorname{Der}\mathcal{A} \ni (u,u') \to R_{u,u'} \in \operatorname{Hom}_{A_i-A_j}(P,P), \tag{7.27}$$
$$R_{u,u'}(p) = \nabla_u\big(\nabla_{u'}(p)\big) - \nabla_{u'}\big(\nabla_u(p)\big) - \nabla_{|u,u'|}(p), \quad p \in P,$$

(сравните с (1.63)) [63]. Справедливы соотношения

$$R_{au,a'u'} = aa' R_{u,u'}, \quad a, a' \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}),$$
$$R_{u,u'}(a_i p b_j) = a_i R_{u,u'}(p) b_j, \quad a_i \in A_j, \quad b_j \in A_j.$$

Например, кривизна некоммутативных связностей (7.25) и (7.26) обращается в 0.

Приведем некоторые стандартные операции с некоммутативными связностями (7.23).

(i) Для двух модулей P и P' одного и того же типа (i,j) и некоммутативных связностей ∇ и ∇' на них естественным образом определена некоммутативная связность $\nabla \oplus \nabla'$ на $P \oplus P'$.

(ii) Пусть P — модуль типа (i,j) и P^* — $\mathcal{A}$-дуальный к нему модуль. Для всякой некоммутативной связности ∇ на P существует единственная дуальная некоммутативная связность ∇' на P^* такая, что

$$u(\langle p, p'\rangle) = \langle \nabla_u(p), p'\rangle + \langle p, \nabla'(p')\rangle, \quad p \in P, \quad p' \in P^*, \quad u \in \operatorname{Der}\mathcal{A}.$$

(iii) Пусть P_1 и P_2 — A-модули типов (i,k) и (k,j) соответственно, и пусть ∇^1 и ∇^2 — некоммутативные связности на этих модулях. Для произвольного дифференцирования $u \in \operatorname{Der}\mathcal{A}$ рассмотрим эндоморфизм

$$\left(\nabla^1 \otimes \nabla^2\right)_u = \nabla^1_u \otimes \operatorname{Id} P_1 + \operatorname{Id} P_2 \otimes \nabla^2_u \tag{7.28}$$

тензорного произведения $P_1 \otimes P_2$ K-модулей P_1 и P_2. Этот эндоморфизм сохраняет подмножество $P_1 \otimes P_2$, порождаемое элементами

$$p_1 a \otimes p_2 - p_1 \otimes a p_2,$$

где $p_1 \in P_1$, $p_2 \in P_2$ и $a \in A_k$. Благодаря этому факту, эндоморфизмы (7.28) определяют некоммутативную связность на тензорном произведении $P_1 \otimes P_2$ модулей P_1 и P_2.

(iv) Как уже отмечалось, если $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра с единицей, мы имеем дело только с модулями типа $(1,1)$ и $(0,0)$, т. е. $*$-модулями и $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодулями. Пусть P — модуль одного из этих типов. Если ∇ — некоммутативная связность на P, существует *сопряженная некоммутативная связность* ∇^* на P, задаваемая соотношением

$$\nabla^*_u(p) = \left(\nabla_{u^*}(p^*)\right)^*. \tag{7.29}$$

Некоммутативная связность ∇ на P называется *вещественной*, если $\nabla = \nabla^*$.

Пусть $*$-модуль P наделен эрмитовой формой $(.|.)$. Некоммутативная связность ∇ на P называется *эрмитовой*, если

$$d(p|p') = \left(\nabla_u(p)|p'\right) + \left(p|\nabla_u(p')\right), \quad \forall\, u \in \operatorname{Der}\mathcal{A}, \quad p, p' \in P.$$

Аналогично определяется эрмитова универсальная некоммутативная связность на правом $\mathcal{A}$-модуле P над $*$-алгеброй $\mathcal{A}$. Такая эрмитова некоммутативная связность всегда существует, если P — проективный модуль конечного ранга [151].

Пусть теперь $P = \underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$. Всякая некоммутативная связность на $\mathcal{A}$-бимодуле $\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ называется *линейной* [63, 120]. Следует подчеркнуть, что этот термин не применяется для произвольной левой (правой) некоммутативной связности на $\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ [64]. Если $\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ — $*$-модуль, линейная некоммутативная связность на нем предполагается вещественной. Имея линейную некоммутативную связность ∇ на $\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$, можно определить гомоморфизм $\mathcal{A}$-бимодулей

$$T\colon \underline{\Omega}^1[\mathcal{A}] \to \underline{\Omega}^2[\mathcal{A}], \quad (T\phi)(u,u') = (d\phi)(u,u') - \nabla_u(\phi)(u') + \nabla_{u'}(\phi)(u), \tag{7.30}$$

для всех $u, u' \in \operatorname{Der}\mathcal{A}$ и $\phi \in \underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$. Он называется *кручением* линейной некоммутативной связности ∇.

§ 5. Матричная геометрия

Этот параграф посвящен линейным некоммутативным связностям в матричной геометрии, когда $\mathcal{A} = M_n$ — алгебра комплексных $(n \times n)$-матриц [62, 107, 108].

Пусть $\{\varepsilon_r\}$, $1 \leqslant r \leqslant n^2 - 1$, — антиэрмитов базис алгебры Ли $su(n)$. Элементы ε_r порождают алгебру M_n, тогда как $u_r = \operatorname{ad}\varepsilon_r$ образуют базис правой алгебры Ли $\operatorname{Der} M_n$ дифференцирований алгебры M_n вместе с коммутационными соотношениями

$$[u_r, u_q] = c^s_{rq} u_s,$$

где c^s_{rq} — структурные константы алгебры Ли $su(n)$. Поскольку центр $\mathcal{Z}(M_n)$ алгебры M_n состоит из матриц $\lambda\mathbf{1}$, алгебра дифференцирований $\operatorname{Der} M_n$ является комплексным свободным модулем ранга $n^2 - 1$.

Рассмотрим универсальное дифференциальное исчисление $(\Omega^*[M_n], d)$ над алгеброй M_n, где d — оператор кограницы Шевалле—Эленберга (7.11). Существует

удобная система базисных элементов $\{\theta^r\}$ модуля $\Omega^1[M_n]$, рассматриваемого как левый M_n-модуль. Они даются соотношениями

$$\theta^r(u_q) = \delta^r_q \mathbf{1}.$$

Следовательно $\Omega^1[M_n]$ является свободным левым M_n-модулем ранга $n^2 - 1$. Нетрудно заметить, что элементы θ^r принадлежат центру M_n-бимодуля $\Omega^1[M_n]$, т. е.

$$a\theta^r = \theta^r a, \quad \forall\, a \in M_n. \tag{7.31}$$

Также получаем, что

$$\theta^r \wedge \theta^q = -\theta^q \wedge \theta^r. \tag{7.32}$$

Морфизм

$$d\colon M_n \to \Omega^1[M_n]$$

дается выражением (7.12) и имеет вид

$$d\varepsilon_r(u_q) = \operatorname{ad} \varepsilon_q(\varepsilon_r) = c^s_{qr}\varepsilon_s,$$

т. е.

$$d\varepsilon_r = c^s_{qr}\varepsilon_s\theta^q. \tag{7.33}$$

В свою очередь, выражение (7.13) приводит к уравнениям Маурера—Картана

$$d\theta^r = -\frac{1}{2}c^r_{qs}\theta^q \wedge \theta^s. \tag{7.34}$$

Обозначим $\theta = \varepsilon_r\theta^r$. Тогда равенство (7.33) переписывается в виде

$$da = a\theta - \theta a, \quad \forall\, a \in M_n.$$

Отсюда следует, что M_n-бимодуль $\Omega^1[M_n]$ порождается одним элементом θ. Поскольку $\operatorname{Der} M_n$ является конечным свободным модулем, можно показать, что M_n-бимодуль $\Omega^1[M_n]$ изоморфен M_n-дуальному модулю $\underline{\Omega}^1[M_n]$ к $\operatorname{Der} M_n$.

Обратимся теперь к некоммутативным связностям на M_n-бимодуле $\Omega^1[M_n]$. Такая некоммутативная связность ∇ дается выражениями

$$\nabla_{u=c^r u_r} = c^r\nabla_r, \quad \nabla_r(\theta^p) = \omega^p_{rq}\theta^q, \quad \omega^p_{rq} \in M_n. \tag{7.35}$$

Принимая во внимание равенства (7.31)–(7.32), мы получаем из правила Лейбница (7.24), что

$$a\nabla_r(\theta^p) = \nabla_r(\theta^p)a, \quad \forall\, a \in M_n.$$

Отсюда следует, что элементы ω^p_{rq} в выражении (7.35) пропорциональны единичной матрице $\mathbf{1} \in M_n$, т. е. являются комплексными числами. Тогда соотношения

$$\nabla_r(\theta^p) = \omega^p_{rq}\theta^q, \quad \omega^p_{rq} \in \mathbb{C}, \tag{7.36}$$

задают линейную некоммутативную связность на M_n-бимодуле $\Omega^1[M_n]$.

Приведем два примера линейной некоммутативной связности.

(i) Поскольку все дифференцирования алгебры M_n являются внутренними, существует плоская некоммутативная связность (7.26), задаваемая соотношениями

$$\nabla_r(\theta^p) = 0.$$

Однако эта связность имеет ненулевое кручение. Выражения (7.30) и (7.34) приводят к

$$(T\theta^p)(u_r, u_q) = -c^p_{rq}.$$

(ii) Можно показать, что в матричной геометрии существует единственная линейная некоммутативная связность с нулевым кручением

$$\nabla_r(\theta^p) = -c^p_{rq}\theta^q.$$

§ 6. Некоммутативная геометрия Кона

Дифференциальное исчисление Кона основывается на понятии спектральной тройки [53, 103, 106, 151].

Определение 7.6.1. *Спектральная тройка* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ состоит из $*$-алгебры $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ вместе с самосопряженным (неограниченным в общем случае) оператором $D = D^*$ в $\mathcal{H}$, обладающим следующими свойствами:

- резольвента $(D - \lambda)^{-1}$, $\lambda \notin \mathbb{R}$, является компактным оператором в $\mathcal{H}$;
- $[D, \mathcal{A}] \in B(\mathcal{H})$.

□

Пара $(\mathcal{A}, D)$ называется также *K-циклом* над $\mathcal{A}$. Во многих случаях $\mathcal{H}$ является $\mathbb{Z}_2$-градуированным гильбертовым пространством, снабженным проектором Γ таким, что

$$\Gamma D + D\Gamma = 0, \quad [a, \Gamma] = 0, \quad \forall\, a \in \mathcal{A},$$

т. е. $\mathcal{A}$ действует на $\mathcal{H}$ четными операторами, тогда как D является нечетным оператором. Спектральная тройка называется *четной*, если такая градуировка существует, и *нечетной* в противном случае.

Замечание 7.6.1. Стандартным примером спектральной тройки является случай оператора Дирака D на компактном спин- или спин^c-многообразии [54, 73, 74, 94] (см. работу [109] и цитируемую в ней литературу по геометрии спин^c-многообразий). □

Пусть дана спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$. Рассмотрим универсальное дифференциальное исчисление $(\Omega^*\mathcal{A}, \delta)$ над алгеброй $\mathcal{A}$. Построим представление градуированной дифференциальной алгебры $\Omega^*\mathcal{A}$ ограниченными операторами в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, когда дифференцирование Шевалле—Эйленберга δ (7.11) алгебры $\mathcal{A}$ заменено коммутатором $[D, a]$, $a \in \mathcal{A}$:

$$\pi\colon \Omega^*\mathcal{A} \to B(\mathcal{H}),$$

$$\pi(a_0 \delta a_1 \dots \delta a_k) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 [D, a_1] \dots [D, a_k]. \tag{7.37}$$

Поскольку

$$[D, a]^* = -[D, a^*],$$

мы получаем

$$\pi(\phi)^* = \pi(\phi^*), \quad \phi \in \Omega^*\mathcal{A}.$$

Однако π (7.37) не является представлением градуированной дифференциальной алгебры $\Omega^*\mathcal{A}$, так как $\pi(\phi) = 0$ не предполагает, что $\pi(\delta\phi) = 0$. Поэтому нужно построить соответствующий фактор, чтобы получить градуированную дифференциальную алгебру операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Обозначим J_0 двусторонний градуированный идеал $\Omega^*\mathcal{A}$, где

$$J_0^k = \{\phi \in \Omega^k\mathcal{A}\colon \pi(\phi) = 0\}.$$

Тогда нетрудно установить, что $J = J_0 + \delta J_0$ — градуированный дифференциальный двусторонний идеал $\Omega^*\mathcal{A}$. *Дифференциальным исчислением Кона* называется пара $(\Omega_D^*\mathcal{A}, d)$ такая, что

$$\Omega_D^*\mathcal{A} = \Omega^*\mathcal{A}/J, \quad d[\phi] = [\delta\phi],$$

где $[\phi]$ обозначает класс элемента $\phi \in \Omega^*\mathcal{A}$ в $\Omega_D^*\mathcal{A}$. Это дифференциальное исчисление над алгеброй $\Omega_D^0\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Его k-коцепной подмодуль $\Omega_D^*\mathcal{A}$ состоит из классов операторов

$$\sum_j a_0^j [D, a_1^j] \dots [D, a_k^j], \quad a_i^j \in \mathcal{A},$$

по модулю подмодуля операторов

$$\left\{\sum_j [D, b_0^j]\,[D, b_1^j] \dots [D, b_{k-1}^j] \colon \sum_j b_0^j [D, b_1^j] \dots [D, b_{k-1}^j] = 0\right\}.$$

Пусть теперь P — правый конечный проективный модуль над $*$-алгеброй $\mathcal{A}$. Рассмотрим правую некоммутативную связность на P относительно дифференциального исчисления Кона $(\Omega_D^*\mathcal{A}, d)$. Согласно Теореме 7.3.2 правый конечный проективный модуль допускает некоммутативную связность. Построим эту связность в явном виде.

Имея правый конечный проективный модуль P над комплексным кольцом $\mathcal{A}$, рассмотрим соответствующие мономорфизм и эпиморфизм

$$\mathbf{p}\colon \mathbb{C}^N \bigotimes_C \mathcal{A} \to P, \qquad i_P\colon P \to \mathbb{C}^N \bigotimes_C \mathcal{A},$$

где символ $\bigotimes_C$ обозначает тензорное произведение над полем $\mathbb{C}$. Существует цепочка морфизмов

$$P \xrightarrow{i_P} \mathbb{C}^N \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\delta} \mathbb{C}^N \otimes \Omega^1\mathcal{A} \xrightarrow{\mathbf{p}} P \otimes \Omega^1\mathcal{A}, \tag{7.38}$$

где использован канонический изоморфизм модулей

$$\mathbb{C}^N \bigotimes_C \Omega^1\mathcal{A} = \left(\mathbb{C}^N \bigotimes_C \mathcal{A}\right) \otimes \Omega^1\mathcal{A}.$$

Нетрудно заметить, что композиция морфизмов (7.38), обозначаемая для краткости $\mathbf{p}\circ\delta$, является правой универсальной некоммутативной связностью на модуле P.

Имея универсальную некоммутативную связность $\mathbf{p}\circ\delta$ на правом конечном проективном модуле P над $*$-алгеброй $\mathcal{A}$, рассмотрим морфизм

$$P \xrightarrow{\mathbf{p}\circ\delta} P \otimes \Omega^1\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\pi} P \otimes \Omega_D^1\mathcal{A}.$$

Это правая некоммутативная связность ∇_0 на модуле P относительно дифференциального исчисления Кона. Любая другая правая некоммутативная связность ∇ на P относительно дифференциального исчисления Кона имеет вид

$$\nabla = \nabla_0 + \sigma = (\mathrm{Id} \otimes \pi) \circ \mathbf{p} \circ \delta + \sigma, \tag{7.39}$$

где σ — морфизм $\mathcal{A}$-модулей

$$\sigma\colon P \to P \otimes \Omega_D^1\mathcal{A}.$$

Компоненты σ некоммутативной связности ∇ (7.39) называются *некоммутативными калибровочными полями*.

Приложение А

К-теория

Характеристические классы, представленные в первом томе [11], § 3.5, позволяют описать классы эквивалентности вещественных или комплексных векторных расслоений данной размерности как расслоений с соответствующей структурной группой. Рассмотрим теперь множество $C(X)$ классов эквивалентности всех векторных расслоений над гладким многообразием X. Это коммутативный моноид относительно суммы Уитни $\oplus$, где 0-мерное векторное расслоение играет роль нулевого элемента. Чтобы превратить его в группу, необходимо определить операцию $\ominus$.

Напомним следующую алгебраическую конструкцию. Пусть задан коммутативный моноид A. Рассмотрим фактор $K(A)$ прямого произведения $A \times A$ по отношению эквивалентности: $(a, b) \approx (a', b')$, если существует элемент $p \in A$ такой, что

$$a + b' + p = b + a' + p.$$

Он наделен структурой группы, называемой *группой Гротендика* моноида A. Существует гомоморфизм

$$k\colon A \to K(A)$$

такой, что $k(a)$, $a \in A$, совпадает с классом эквивалентности пары $(a, 0) \in A \times A$. Обратный элемент $-k(a)$ к элементу $k(a)$ в группе Гротендика — это класс эквивалентности пары $(0, a)$. Тогда любой элемент (a, b) группы $K(A)$ может быть представлен как разность $k(a) - k(b)$, $a, b \in A$. Нетрудно установить, что $k(a) = k(b)$ тогда и только тогда, когда существует элемент $p \in A$ такой, что $a + p = b + p$.

Построим теперь группу Гротендика $K(X)$ моноида $C(X)$ классов эквивалентности векторных расслоений над гладким компактным многообразием X [6, 14, 23]. Обозначим элемент группы Гротендика $k(E)$, $E \in C(X)$, просто $[E]$. Тогда $[E] = [E']$ тогда и только тогда, когда существует векторное расслоение $F \to X$ такое, что

$$E \oplus F \approx E' \oplus F.$$

Теорема А.1. Для любого векторного расслоения E на компактном многообразии X существует векторное расслоение $E' \to X$ такое, что сумма Уитни $E \oplus E'$ является тривиальным векторным расслоением. □

Следствие А.2. Равенство $[E] = [E']$ в группе Гротендика $K(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$E \oplus I^m \approx E' \oplus I^m$$

для некоторого тривиального векторного расслоения I^m над X. □

Отсюда следует, что векторные расслоения E и E' принадлежат одному и тому же классу в группе Гротендика $K(X)$ только если они одинаковой размерности, хотя могут и не быть изоморфны друг другу. Например,

$$[TS^2] = [I^2] = 0 \in K(S^2),$$

хотя касательное расслоение $TS^2 \to S^2$ к 2-мерной сфере S^2 нетривиально. Этот пример показывает, что морфизм

$$k\colon C(X) \to K(X)$$

не является мономорфизмом. Это мономорфизм на классах эквивалентности вещественных векторных расслоений размерности $m > \dim X$ и на классах эквивалентности комплексных расслоений размерности $m > \dim X/2$.

Существует другое отношение эквивалентности $\{E\}$ на моноиде $C(X)$ классов эквивалентности векторных расслоений над многообразием X. Положим $\{E\} = \{E'\}$ тогда и только тогда, когда существуют тривиальные векторные расслоения I^k и I^p такие, что

$$E \oplus I^k \approx E' \oplus I^p.$$

Эти классы эквивалентности образуют группу $\tilde{K}(X)$, нулевой элемент которой включает все тривиальные векторные расслоения. Имеет место изоморфизм

$$K(X) = \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}(X).$$

Например, если X — точка, тогда $K(X) = \mathbb{Z}$, а $\tilde{K}(X) = 0$.

Теорема А.3. Пусть X и X' — компактные многообразия и морфизмы $f_1\colon X \to X'$ и $f_2\colon X \to X'$ гомотопны. Тогда f_1 и f_2 порождают одни и те же изоморфизмы $K(X) \to K(X')$ и $\tilde{K}(X) \to \tilde{K}(X')$. □

Пусть $K_C(X)$ — группа Гротендика комплексных векторных расслоений над компактным многообразием X. Упоминавшейся в § 3.7 характер Чженя этих векторных расслоений определяет отображение

$$\mathrm{ch}\colon K_C(X) \to \bigoplus_{i \geqslant 0} H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \tag{A.1}$$

такое, что

$$\mathrm{ch}\left([E] - [E']\right) = \mathrm{ch}\,(E) - \mathrm{ch}\,(E'). \tag{A.2}$$

Морфизм (A.1) приводит к изоморфизму

$$\tilde{K}_C(X) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{i>0} H^{2i}(X, \mathbb{Q})$$

для комплексных векторных расслоений и к изоморфизму

$$\tilde{K}_R(X) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{i>0} H^{4i}(X, \mathbb{Q})$$

для вещественных векторных расслоений.

Теорема об индексе

Теорема об индексе Атьи—Зингера устанавливает связь между аналитическими свойствами эллиптических дифференциальных операторов на расслоениях и топологическими свойствами самих этих расслоений (см., например, [14, 24, 40, 122]).

Пусть $(x^1, \dots x^n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$. Для всякого набора

$$t = (t_1, \dots, t_n)$$

целых неотрицательных чисел положим, как обычно,

$$|t| = t_1 + \dots t_n, \quad D^t = (-i)^{|t|} \frac{\partial^{|t|}}{\partial_1^{t_1} \dots \partial_n^{t_n}}.$$

Пусть A и B — конечномерные комплексные векторные пространства и U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $C^\infty(U, A)$ — пространство гладких A-значных функций на U. Линейное отображение

$$\mathcal{D}\colon C^\infty(U, A) \to C^\infty(U, B)$$

является дифференциальным оператором порядка r, если существуют матричные функции $a_t \in C^\infty(U, \operatorname{Hom}(A, B))$ такие, что

$$\mathcal{D} = \sum_{|t| \leqslant r} a_t D^t. \tag{Б.1}$$

Оператор

$$\overline{\mathcal{D}} = \sum_{|t|=r} a_t D^t$$

называется *главной частью* линейного дифференциального оператора D (Б.1).

Пример Б.1. Линейный дифференциальный оператор первого порядка (Б.1) имеет вид

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{n} (-i) a^j(x) \partial_j + b(x). \tag{Б.2}$$

□

Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ (Б.1) порядка r определяет гомоморфизм

$$\sigma(\mathcal{D})(x, p)\colon A \to B$$

для всех

$$(x, p) = (x; p_1, \dots, p_n) \in U \times \mathbb{R}_n$$

(см. обозначения в третьем томе [13], Приложение Б) по формуле

$$\sigma(\mathcal{D})(x,p)=\sum_{|t|=r}a_t(x)p_1^{t_1}\dots p_n^{t_n}. \qquad (Б.3)$$

Определение Б.1. Дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ (Б.1) называется *эллиптическим*, если для всех $x\in U$ и всех ненулевых $p\in\mathbb{R}_n$ гомоморфизм $\sigma(\mathcal{D})(x,p)$ обратим. □

Гомоморфизм $\sigma(\mathcal{D})$ называется *символом* дифференциального оператора $\mathcal{D}$. Легко убедиться, что символ $\sigma(\mathcal{D})$ дифференциального оператора $\mathcal{D}$ является образом Фурье

$$\overline{\mathcal{D}}f(x)=\int\sigma(\mathcal{D})(x,p)f^F(p)e^{ipx}d_np$$

его главной части.

Пример Б.2. Оператор Лапласа

$$\Delta\colon C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$$

является эллиптическим оператором второго порядка. □

Пусть теперь X — гладкое n-мерное многообразие (без границы), E и F — гладкие комплексные векторные расслоения над X, а $\Gamma(E)$ и $\Gamma(F)$ — векторные пространства их глобальных сечений. Пусть

$$\mathcal{D}\colon\Gamma(E)\to\Gamma(F) \qquad (Б.4)$$

— линейный дифференциальный оператор порядка r. В атласах Ψ_E и Ψ_F расслоений E и F над одним и тем же покрытием базы X он представляется операторами (Б.1).

Обозначим $\pi\colon D(X)\to X$ и $S(X)\to X$ гладкие расслоения на n-мерные единичные шары и $(n-1)$-мерные сферы над многообразием X, ассоциированные с касательным расслоением TX. Рассмотрим индуцированное векторное расслоение π^*E над $D(X)$. Определим символ дифференциального оператора $\mathcal{D}$ (Б.4) как послойный морфизм

$$\sigma(\mathcal{D})\colon\pi^*E\to\pi^*F,$$

представимый в виде

$$\sigma(\mathcal{D})\colon(y,V_E)\to\big(y,\sigma(\mathcal{D})\big(\pi(y),y\big)V_E\big), \qquad (Б.5)$$

где $y\in D(X)$, V_E — типичный слой векторного расслоения E, а морфизм $\sigma(\mathcal{D})(x=\pi(y),y)$ дается локальным выражением (Б.3). Можно убедиться, что морфизм (Б.5) глобально определен.

Если E, F, G — комплексные векторные расслоения над многообразием X и

$$\mathcal{D}_1\colon\Gamma(E)\to\Gamma(F),\quad \mathcal{D}_2\colon\Gamma(F)\to\Gamma(G)$$

— линейные дифференциальные операторы порядка r_1 и r_2 соответственно, тогда композиция $\mathcal{D}_2\circ\mathcal{D}_1$ является естественно дифференциальным оператором порядка r_1+r_2 с символом

$$\sigma(\mathcal{D}_2\circ\mathcal{D}_1)=\sigma(\mathcal{D}_2)\circ\sigma(\mathcal{D}_1).$$

Определение Б.2. Дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ (Б.4) называется эллиптическим порядка r, если морфизм $\sigma(\mathcal{D})|_{S(X)}$ — изоморфизм расслоений $\pi^*E|_{S(X)}$ и $\pi^*F|_{S(X)}$. □

Отсюда, в частности, следует, что если оператор $\mathcal{D}$ эллиптический, то векторные расслоения E и F имеют одинаковую размерность.

Предположим в дальнейшем, что многообразие X компактно, а векторные расслоения $E\to X$ и $F\to X$ наделены послойными эрмитовыми метриками $(.,.)$. Соответственно определены эрмитовы метрики

$$\langle .|.\rangle=\int_X(.,.)dx$$

на комплексных векторных пространствах сечений $\Gamma(E)$ и $\Gamma(F)$. Дифференциальный оператор

$$\mathcal{D}^*\colon \Gamma(F) \to \Gamma(E)$$

называется *сопряженным* к дифференциальному оператору $\mathcal{D}$ (Б.4), если для всех сечений $s \in \Gamma(E)$, $s' \in \Gamma(F)$ выполняется равенство

$$\langle \mathcal{D}s | s' \rangle = \langle s | \mathcal{D}^* s' \rangle.$$

Послойные эрмитовы метрики на векторных расслоениях $E \to X$ и $F \to X$ определяют послойные эрмитовы метрики на индуцированных векторных расслоениях $\pi^*E \to D(X)$ и $\pi^*F \to D(X)$. Следовательно определен морфизм

$$\sigma(\mathcal{D})^*\colon \pi^*F \to \pi^*E,$$

сопряженный символу $\sigma(\mathcal{D})$.

Теорема Б.3. Если многообразие X компактно и векторные расслоения $E \to X$ и $F \to X$ наделены эрмитовыми метриками, тогда для всякого дифференциального оператора $\mathcal{D}$ (Б.4) существует единственный сопряженный оператор $\mathcal{D}^*$, и

$$\sigma(\mathcal{D})^* = \sigma(\mathcal{D}^*).$$

Более того, если дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ эллиптический, то сопряженный ему оператор $\mathcal{D}^*$ тоже эллиптический. □

Напомним, что *коядром* $\operatorname{Coker}\phi$ гомоморфизма $\phi\colon A \to B$ называется факторпространство

$$\operatorname{Coker}\phi = B/\operatorname{Im}\phi.$$

Ядро эллиптического дифференциального оператора $\mathcal{D}$ конечномерно и

$$\dim \operatorname{Ker}\mathcal{D}^* = \dim \operatorname{Coker}\mathcal{D}.$$

Определение Б.4. *Индексом* $\tau(\mathcal{D})$ эллиптического оператора $\mathcal{D}$ называется

$$\tau(\mathcal{D}) = \dim \operatorname{Ker}\mathcal{D} - \dim \operatorname{Coker}\mathcal{D} = \dim \operatorname{Ker}\mathcal{D} - \dim \operatorname{Ker}\mathcal{D}^*. \qquad (Б.6)$$

□

Теорема об индексе Атьи—Зингера (см. ниже Теорему Б.7) устанавливает, что индекс дифференциального оператора $\tau(\mathcal{D})$ (Б.6) может быть выражен через топологические инварианты.

Рассмотрим теперь конечный набор $\{E_k; \mathcal{D}_k, \mathcal{D}_k^*\}$ векторных расслоений E_k над компактным многообразием X дифференциальных операторов

$$\mathcal{D}_k\colon \Gamma(E_k) \to \Gamma(E_{k+1})$$

и сопряженных дифференциальных операторов

$$\mathcal{D}_k^*\colon \Gamma(E_{k+1}) \to \Gamma(E_k).$$

Предположим, что

$$\mathcal{D}_{k+1} \circ \mathcal{D}_k = 0$$

для всех k. Нетрудно показать, что в этом случае

$$\mathcal{D}_k^* \circ \mathcal{D}_{k+1}^* = 0.$$

Тогда набор $\{\Gamma(E_k); \mathcal{D}_k, \mathcal{D}^*\}$ определяет комплекс

$$\ldots \xrightarrow{\mathcal{D}_{k-1}} \Gamma(E_k) \xrightarrow{\mathcal{D}_k} \Gamma(E_{k+1}) \xrightarrow{\mathcal{D}_{k+1}} \ldots,$$

который мы будем для краткости обозначать $(E, \mathcal{D})$.

Пусть $(E, \mathcal{D})$ — такой комплекс. Определим операторы Лапласа

$$\Delta_k = \mathcal{D}_k^* \circ \mathcal{D}_k + \mathcal{D}_{k-1} \circ \mathcal{D}_{k-1}^* \colon \Gamma(E_k) \to \Gamma(E_k).$$

Комплекс $(E, \mathcal{D})$ называется *эллиптическим*, если все операторы Лапласа Δ_k эллиптические.

Пример Б.3. Комплекс Де Рама внешних дифференциальных форм на римановом n-мерном многообразии X с операторами

$$\mathcal{D}_k = d, \quad \mathcal{D}_k^* = \delta = (-1)^{nk+1} * d *$$

и оператором Лапласа

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

является аналитическим. □

Для эллиптического комплекса на компактном многообразии имеет место обобщение *теоремы Ходжа*.

Теорема Б.5. Если дан эллиптический комплекс $(E, \mathcal{D})$ и $f_k \in \Gamma(E_k)$ — сечение расслоения E_k, то f_k может быть однозначно разложено в сумму

$$f_k = \mathcal{D}_{k-1} f_{k-1} + \mathcal{D}_k^* f_{k+1} + h_k, \tag{Б.7}$$

где h_k — гармоническое сечение расслоения E_k, т. е.

$$\Delta_k h_k = 0.$$

□

Отсюда, в частности, следует, что сечение f_k является гармоническим тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{D}_k f_k = 0, \quad \mathcal{D}_{k-1}^* f_k = 0.$$

Построим группы когомологий $H^*(E, \mathcal{D})$ комплекса $(E, \mathcal{D})$.

Исходя из теоремы Ходжа, нетрудно показать, что k-я группа когомологий $H^k(E, \mathcal{D})$ эллиптического комплекса изоморфна $\operatorname{Ker} \Delta_k$, т. е. что всякий класс когомологий замкнутых сечений f_k содержит одно и только одно гармоническое сечение. Отсюда следует, что группы когомологий эллиптического комплекса конечномерны.

Индексом комплекса $(E, \mathcal{D})$ называется сумма

$$\tau(E, \mathcal{D}) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(E, \mathcal{D}), \tag{Б.8}$$

если она конечна. Это имеет место в случае эллиптического комплекса, и

$$\tau(E, \mathcal{D}) = \sum_k (-1)^k \dim \operatorname{Ker} \Delta_k. \tag{Б.9}$$

Пример Б.4. Пусть $(E, \mathcal{D}) = (\Omega^*, d)$ — комплекс Де Рама. Как уже отмечалось, это эллиптический комплекс, и его когомологии совпадают с когомологиями Де Рама

$$H^k(\Omega, d) = H^k(X; \mathbb{R}) = H^k(X)$$

многообразия X. Тогда индекс этого комплекса совпадает с эйлеровой характеристикой многообразия X:

$$\tau(\Omega, d) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(X) = \sum_k b_k = \chi(X).$$

□

Пример Б.5. Пусть $\mathcal{D}$ (Б.4) — эллиптический оператор. Его индекс совпадает с индексом 2-членного комплекса

$$0 \longrightarrow \Gamma(E) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Gamma(F) \longrightarrow 0. \tag{Б.10}$$

Действительно, лапласианами этого комплекса являются

$$\Delta_0 = \mathcal{D}^* \circ \mathcal{D}, \quad \Delta_1 = \mathcal{D} \circ \mathcal{D}^*,$$

а его группами когомологий — группы

$$H^0 = \operatorname{Ker} \mathcal{D}, \quad H^1 = \operatorname{Coker} \mathcal{D}.$$

Комплекс (Б.10) эллиптический, и его индекс равен

$$\tau = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{D} - \dim \operatorname{Coker} \mathcal{D},$$

что совпадает с выражением (Б.6) для индекса оператора $\mathcal{D}$. □

Можно построить аналогичный 2-членный комплекс, индекс которого будет совпадать с индексом данного комплекса $(E, \mathcal{D})$. Пусть

$$\widetilde{E} = \bigoplus_k E_{2k}, \quad \widetilde{F} = \bigoplus_k E_{2k+1}, \quad \widetilde{\mathcal{D}} = \bigoplus_k \left(\mathcal{D}_{2k} + \mathcal{D}^*_{2k-1}\right), \quad \widetilde{\mathcal{D}}^* = \bigoplus_k \left(\mathcal{D}^*_{2k} + \mathcal{D}_{2k-1}\right).$$

Легко проверить, что

$$\widetilde{\mathcal{D}}\colon \Gamma\left(\widetilde{E}\right) \to \Gamma\left(\widetilde{F}\right), \quad \widetilde{\mathcal{D}}^*\colon \Gamma\left(\widetilde{F}\right) \to \Gamma\left(\widetilde{E}\right)$$

и последовательность

$$0 \longrightarrow \widetilde{E} \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{D}}} \widetilde{F} \longrightarrow 0 \tag{Б.11}$$

образует комплекс. Его лапласианами являются эллиптические операторы

$$\square_0 = \widetilde{\mathcal{D}}^* \circ \widetilde{\mathcal{D}} = \bigoplus_k \Delta_{2k},$$

$$\square_1 = \widetilde{\mathcal{D}} \circ \widetilde{\mathcal{D}}^* = \bigoplus_k \Delta_{2k+1}.$$

Следовательно комплекс (Б.11) эллиптический и его индекс равен

$$\tau = \dim \operatorname{Ker} \square_0 - \dim \operatorname{Ker} \square_1 = \sum_k (-1)^k \dim \operatorname{Ker} \Delta_k = \tau(E, \mathcal{D}).$$

Более того, можно показать, что оператор $\widetilde{\mathcal{D}}$ комплекса (Б.11) эллиптический.

Перейдем теперь непосредственно к теореме об индексе для комплексов (Б.10) и (Б.11).

Возьмем два экземпляра расслоений на n-мерные единичные шары $D_1(X)$ и $D_2(X)$ с типичным слоем D^n и склеим их в каждой точке $x \in X$ по сферам S^{n-1} — границам шаров D^n. Полученное расслоение на сферы S^n называется *компактифицированным касательным расслоением*

$$\rho\colon C(X) \to X,$$

и его ориентация выбирается как у $D_1(X)$. Пусть ρ_1 и ρ_2 — ограничения расслоения ρ соответственно на подрасслоения $D_1(X)$ и $D_2(X)$. Рассмотрим индуцированные расслоения $\rho_1^* E$ и $\rho_2^* F$. Склеим их тоже в каждой точке $x \in X$ по границе шаров D_1^n и D_2^n, используя в качестве функций перехода изоморфизм $\sigma(\mathcal{D})|_{S(X)}$ (Б.5). Полученное расслоение Σ именуется *разностным расслоением*.

Определение Б.6. *Топологическим индексом* дифференциального оператора $\mathcal{D}$ (Б.4) называется величина

$$\gamma(\mathcal{D}) = \int_{C(X)} \operatorname{ch}(\Sigma) \wedge \rho^*\big(\operatorname{td}(TX)\big),$$

где $\operatorname{ch}(\Sigma)$ — характеристическая форма характера Чженя разностного расслоения Σ и $\operatorname{td}(TX)$ — характеристическая форма класса Тодда почти комплексного многообразия TX (см. первый том [11], § 3.5). □

Приведем теперь известную *теорему Атьи—Зингера* об индексе.

Теорема Б.7. Если $\mathcal{D}$ — эллиптический оператор (Б.4), его индекс и топологический индекс равны:

$$\tau(\mathcal{D}) = \gamma(\mathcal{D}). \tag{Б.12}$$

□

Отсюда, в частности, следует, что топологический индекс эллиптического оператора — целое число. Другое следствие теоремы Атьи—Зингера состоит в том, что

$$\tau(\mathcal{D}) = \gamma(\mathcal{D}) = 0,$$

если многообразие X имеет нечетную размерность.

Если многообразие X имеет размерность $2m$ и ориентируемо (напомним, что оно предполагается компактным), равенство (Б.12) можно переписать в виде

$$\tau(\mathcal{D}) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \int_X \operatorname{ch}(E \ominus F) \frac{\operatorname{td}(X)}{\operatorname{e}(X)}, \tag{Б.13}$$

где $\operatorname{e}(X)$ — характеристическая форма класса Эйлера многообразия X.

Если комплекс (Б.11) образован из комплекса $(E, \mathcal{D})$, из (Б.13) получаем следующее выражение для индекса последнего:

$$\tau(E, \mathcal{D}) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \int_X \sum_k (-1)^k \operatorname{ch}(E_k) \frac{\operatorname{td}(X)}{\operatorname{e}(X)}.$$

Выше было показано, что индексом комплекса Де Рама на компактном ориентируемом многообразии является эйлерова характеристика этого многообразия. Приведем еще примеры применения теоремы об индексе для описания индекса многообразия (см. § 5.3) и индекса спинорного комплекса.

Пусть X — $4m$-мерное ориентируемое компактное римановой многообразие. Индекс этого многообразия $\tau(\omega_X)$ определяется аналогично тому, как это было сделано для 4-мерного многообразия в § 5.3 (см. [14]). Вычислим этот индекс как индекс некоторого эллиптического комплекса.

Определим оператор ω, действующий на внешние k-формы на X как $i^{k(k-1)+2m}*$. Нетрудно убедиться, что $\omega^2 = 1$ и

$$\omega(d + \delta) = -(d + \delta)\omega. \tag{Б.14}$$

Обозначим $\Omega^{\pm}$ пространства $2k$-форм с собственными значениями ± 1 относительно оператора ω. В силу соотношения (Б.14), можно определить эллиптический комплекс

$$d + \delta\colon \Omega^+ \to \Omega^-, \tag{Б.15}$$

индекс которого равен

$$\tau\big(\Omega^{\pm}, d + \delta\big) = \dim \operatorname{Ker} \Delta|_{\Omega^+} - \dim \operatorname{Ker} \Delta|_{\Omega^-} = \dim H_+^{2k}(X) - \dim H_-^{2k}(X),$$

где символы $H_{\pm}^{2k}(X)$ обозначают пространства гармонических $2k$-форм, имеющих собственные значения ± 1 относительно оператора ω. Применяя теперь теорему об индексе, получим выражение для индекса многообразия

$$\tau(\omega_X) = \int_X L(X)$$

через *полином Хирцебруха*

$$L(X) = \prod_j \frac{a_j}{\tanh a_j} = 1 + \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2) + \dots .$$

Пример Б.6. Если $\dim X = 4$, получаем приводившийся в § 5.3 результат

$$\tau(\omega_X) = \frac{1}{3}p_1(X) = -\frac{1}{24\pi^2}\int_X \operatorname{Tr}(R \wedge R),$$

где R — форма кривизны некоторой римановой метрики на X. □

Рассмотрим теперь комплекс (Б.15), когда формы на многообразии X принимают значения в слоях некоторого комплексного векторного расслоения $V \to X$. Тогда оператор $d + \delta$ можно обобщить до оператора

$$(d+\delta)_V \colon \Omega_V^+ \to \Omega_V^-,$$

и теорема об индексе в применении к комплексу $(\Omega_V^{\pm}, (d+\delta)_V)$ дает

$$\tau\left(\Omega_V^{\pm}, (d+\delta)_V\right) = \int_X L(X) \wedge \widehat{\operatorname{ch}}(V),$$

где $\widehat{\operatorname{ch}}$ обозначает характер Чженя, но взятый не от формы напряженности F связности на V, а от $2F$, т. е.

$$\widehat{\operatorname{ch}}(V) = \sum_k \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \frac{2^k}{k!} \operatorname{Tr} F^k.$$

В частности, для $\dim X = 4$ получаем

$$\tau = \frac{1}{3}\dim V \int_X p_1 + \int_X 2\left(c_1^2(V) - 4c_2(V)\right) = -\frac{\dim V}{24\pi^2}\int_X \operatorname{Tr} R \wedge R - \frac{1}{2\pi^2}\int_X \operatorname{Tr} F^2,$$

что существенно отличается от значения индекса многообразия в Примере Б.6.

Заметим, что если построить комплекс Де Рама для V-значных форм Ω_V^*, то его индекс будет равен $\dim V \cdot \chi(X)$, т. е. оказывается малочувствительным к изменению расслоения V.

Пусть теперь $E \to X$ — расслоение на римановы дираковские спиноры. Введем евклидов оператор Дирака, задаваемый в координатном виде

$$\mathcal{D} = \gamma^a h_a^\mu \mathcal{D}_\mu = \gamma^a h_a^\mu \left(\partial_\mu - A_\mu^{ab} I_{ab}\right),$$

где γ — евклидовы матрицы Дирака, удовлетворяющие условию

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = -2\delta^{ab},$$

h_μ^a — тетрадные функции некоторой римановой метрики g на X,

$$I_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]$$

— генераторы группы $SO(4)$ и A_μ — связность на E. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^+ + \mathcal{D}^+\mathcal{D} = -g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu + R^{abcd}I_{ab}I_{cd} = -g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \ldots . \qquad (Б.16)$$

Поскольку g — риманова метрика, оператор (Б.16) эллиптический. Образуем комплекс

$$\Gamma_+(E) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Gamma_-(E), \qquad (Б.17)$$

где $\Gamma_\pm(E)$ — пространства сечений спинорного расслоения E, имеющие собственные значения ± 1 относительно оператора γ_5. Индексом спинорного комплекса (Б.17) является

$$\tau = \dim\ \mathrm{Ker}\,\mathcal{D} - \dim\ \mathrm{Ker}\,\mathcal{D}^+ = n_+ - n_-,$$

где $h_\pm$ — число линейно независимых решений уравнений Дирака

$$\mathcal{D}\psi = 0$$

со спиральностями $\pm 1/2$. Применяя теорему об индексе, получим

$$n_+ - n_- = \int_X \widehat{A},$$

где

$$\widehat{A} = \prod_{i=1}^{2m} \frac{a_i/2}{\sinh(a_i/2)} = 1 - \frac{1}{24}p_1 + \frac{1}{5760}(7p_1^2 - 4p_2) + \ldots .$$

В случае $\dim X = 4m = 4$ получаем

$$n_+ - n_- = -\frac{1}{24}p_1.$$

В случае, когда спиноры снабжены внутренними индексами, т. е. являются сечениями расслоения

$$E \underset{X}{\times} V \to X,$$

где $V \to X$ — векторное расслоение со структурной группой $SU(q)$, получаем

$$\tau = \int_X \widehat{A} \wedge \mathrm{ch}\,(V).$$

В частности, для $q = 2$ находим

$$n_+ - n_- = c_1(V),$$

а для $q = 4$

$$n_+ - n_- = -\frac{\dim V}{2q}p_1 + \frac{1}{2}\left(c_1(V)^2 - 2c_2(V)\right).$$

Библиография

1. Ф. Березин, *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*. М.: Изд. МГУ, 1983.
2. У. Брателли, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*. М.: Мир, 1982.
3. Г. Бредон, *Теория пучков*. М.: Наука, 1988.
4. А. Виноградов, И. Красильщик, В. Лычагин, *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1986.
5. Ж. Диксмье, *C^*-Алгебры и их представления*. М.: Наука, 1974.
6. М. Каруби, *K-теория*. М.: Мир, 1981.
7. С. Ленг, *Алгебра*. М.: Мир, 1968.
8. С. Маклейн, *Гомология*. М.: Мир, 1966.
9. У. Масси, *Теория гомологий и когомологий*. М.: Мир, 1981.
10. А. Робертсон, В. Робертсон, *Топологические векторные пространства*. М.: Мир, 1967.
11. Г. Сарданашвили, *Современные методы теории поля. 1. Геометрия и классические поля*. М.: УРСС, 1996.
12. Г. Сарданашвили, *Современные методы теории поля. 2. Геометрия и классическая механика*. М.: УРСС, 1998.
13. Г. Сарданашвили, *Современные методы теории поля. 3. Алгебраическая квантовая теория*. М.: УРСС, 1999.
14. Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*. М.: Мир, 1973.
15. Ж. Эмх, *Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля*. М.: Мир, 1976.
16. E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge Tracts in Mathematics, **74** (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980).
17. R. Adams, *Sobolev Spaces* (Academic Press, N. Y., 1975).
18. A. Almorox, Supergauge theories in graded manifolds, in *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, Lect. Notes in Mathematics, **1251** (Springer-Verlag, Berlin, 1987), p. 114.
19. L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, The structure of gauge and gravitational anomalies, *Ann. Phys.* **161** (1985) 423.
20. J. Anandan and Y. Aharonov, Geometric quantum phase and angles, *Phys. Rev. D* **38** (1988) 1863.
21. I. Anderson, *The Variational Bicomplex* (Academic Press, Boston, 1994).
22. M. Asorey, J. Cariñena and M. Paramion, Quantum evolution as a parallel transport, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 1451.
23. M. Atiyah, *K-Theory* (Benjamin, N. Y., 1967).
24. M. Atiyah and I. Singer, The index of elliptic operators, *Ann. Math.* **87** (1968) 485.
25. M. Atiyah and I. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, London, 1969).
26. M. Atiyah and I. Singer, Dirac operators coupled to vector potentials, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **81** (1984) 2597.
27. P. Bandyopadhyay, Area preserving diffeomorphism, quantum group and Berry phase, *Int. J. Mod. Phys. A* **14** (1998) 409.
28. G. Barnish, F. Brandt and M. Henneaux, Local BRST cohomology in the antifield formalism. I. General theorems, *Commun. Math. Phys.* **174** (1995) 57.
29. G. Barnish and M. Henneaux, Isomorphism between the Batalin—Vilkovisky antibracket and the Poisson bracket, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 5273.

30. C. Bartocci, U. Bruzzo and D. Hernández Ruipérez, *The Geometry of Supermanifolds* (Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1991).
31. C. Bartocci, U. Bruzzo, D. Hernández Ruipérez and V. Pestov, Foundations of supermanifold theory: the axiomatic approach, *Diff. Geom. Appl.* **3** (1993) 135.
32. M. Batchelor, The structure of supermanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **253** (1979) 329.
33. M. Batchelor, Two approaches to supermanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **258** (1980) 257.
34. M. Bauderon, Le problème inverse du calcul des variations, *Ann. l'Inst. Henri Poincaré*, **36** (1982) 159.
35. M. Bauderon, Differential geometry and Lagrangian formalism in the calculus of variations, in *Differential Geometry, Calculus of Variations, and their Applications*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **100** (Marcel Dekker, Inc., N. Y., 1985), p. 67.
36. R. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory* (Clarendon Press, Oxford, 1996).
37. D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski and G. Thompson, Topological field theory, *Phys. Rep.* **209** (1991) 129.
38. A. Bohm and A. Mostafazadeh, The realtion between the Berry and the Anandan—Ahoronov connections for $U(\mathcal{N})$ bundles, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 1463.
39. L. Bonora and P. Cotta-Ramusino, Some remarks on BRS transformations, anomalies and the cohomology of the Lie algebra of the group of gauge transformations, *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 589.
40. R. Bott and L. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology* (Springer-Verlag, Berlin, 1982).
41. C. Boyer and O. Sánchez Valenzuela, Lie supergroup action on supermanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **323**, (1991) 151.
42. F. Brandt, Local BRST cohomology and covariance, *Commun. Math. Phys.* **190** (1997) 459.
43. O. Bratelli and D. Robinson, Unbounded derivations of C^*-algebras, *Commun. Math. Phys.* **42** (1975) 253; **46** (1976) 11.
44. U. Bruzzo and R. Cianci, Variational calculus on supermanifolds and invariance properties of superspace field theories, *J. Math. Phys.* **28** (1987) 786.
45. U. Bruzzo, Supermanifolds, supermanifold cohomology, and super vector bundles, in *Differential Geometric Methods in Theoretical Physics*, ed. K. Bleuler and M. Werner (Kluwer, Dordrecht, 1988), p. 417.
46. U. Bruzzo and V. Pestov, On the structure of DeWitt supermanifolds, *J. Geom. Phys.* **30** (1999) 147.
47. J. Cariñena and H. Figueroa, Hamiltonian versus Lagrangian formulations of supermechanics, *J. Phys. A* **30** (1997) 2705.
48. R. Catenacci and A. Lena, A note on global gauge anomalies, *J. Geom. Phys.* **30** (1999) 48.
49. A. Chodos and V. Moncrief, Geometric gauge conditions in Yang—Mills theory: Some nonexistence results, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 364.
50. R. Cianci, *Introduction to Supermaniifolds* (Bibliopolis, Naples, 1990).
51. R. Cianci, M. Francaviglia and I. Volovich, Variational calculus and Poincaré—Cartan formalism in supermanifolds, *J. Phys. A* **28** (1995) 723.
52. A. Connes, Non-commutative differential geometry, *Publ. I.H.E.S* **62** (1986) 257.
53. A. Connes, *Noncommutative Geometry* (Academic Press, N. Y., 1994).
54. A. Connes, Gravity coupled with matter and the foundations of non-commutative geometry, *Commun. Math. Phys.* **182** (1996) 155.
55. J. Cuntz and D. Quillen, Algebra extension and nonsingularity, *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995) 251.
56. L. Dabrowski, P. Hajac, G. Lanfi and P. Siniscalco, Metrics and pairs of left and right connections on bimodules, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 4635.
57. P. Dedecker and W. Tulczyjew, Spectral sequences and the inverse problem of the calculus of variations, in *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, Lect. Notes in Mathematics, **836** (Springer-Verlag, Berlin, 1980), p. 498.
58. B. DeWitt, *Supermanifolds* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984).
59. S. Donaldson, The orientation of Yang—Mills moduli space and 4-manifold topology, *J. Diff. Geom.* **26** (1987) 397.
60. S. Donaldson, Polynomial invariants for smooth four-manifolds, *Topology* **29** (1990) 257.
61. S. Donaldson and P. Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds* (Claredon, Oxford, 1990).

62. M. Dubois-Violette, R. Kerner and J. Madore, Noncommutative differential geometry of matrix algebras, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 316.
63. M. Dubois-Violette and P. Michor, Connections on central bimodules in noncommutative differential geometry, *J. Geom. Phys.* **20** (1996) 218.
64. M. Dubois-Violette, J. Madore, T. Masson and J. Morad, On curvature in noncommutative geometry, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 4089.
65. M. Durdević, Geometry of quantum principal bundles, *Commun. Math. Phys.* **175** (1996) 457.
66. M. Durdević, Quantum principal bundles and corresponding gauge theories, *J. Phys. A* **30** (1997) 2027.
67. T. Eguchi, P. Gilkey and A. Hanson, Gravitation, gauge theories and differential geometry, *Phys. Rep.* **66** (1980) 5553.
68. J. Fisch, M. Henneaux, J. Stasheff and S. Teitelboim, Existence, uniqueness and cohomology of the classical BRST charge with ghosts of ghosts, *Commun. Math. Phys.* **120** (1989) 379.
69. J. Fisch and M. Henneaux, Homological perturbation theory and the algebraic structure of the antifield-antibracket formalism for gauge theories, *Commun. Math. Phys.* **128** (1990) 627.
70. A. Fomenko, *Differential Geometry and Topology* (Plenum Press, N. Y., 1987).
71. M. Freedman, The topology of four-dimensional manifold, *J. Diff. Geom.* **17** (1982) 357.
72. M. Freedman and F. Quinn, *Topology of 4-Manifolds* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1990).
73. J. Fröhlich, O. Grandjean and A. Recknagel, Supersymmetric quantum theory and differential geometry, *Commun. Math. Phys.* **193** (1998) 527.
74. J. Fröhlich, O. Grandjean and A. Recknagel, Supersymmetric quantum theory and noncommutative geometry, *Commun. Math. Phys.* **203** (1999) 117.
75. J. Fuchs, M. Schmidt and S. Schweigert, On the configuration space of gauge theories, *Nucl. Phys. B* **426** (1994) 107.
76. G. Gaeta and P. Morando, Michel theory of symmetry breaking and gauge theories, *Ann. Phys.* **260** (1997) 149.
77. K. Gawedski, Supersymmetries-mathematics of supergeometry, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **XXVII** (1977) 335.
78. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory* (World Scientific, Singapore, 1997).
79. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, BRST-extended polysymplectic Hamiltonian formalism, *Nuovo Cimento B* **114** (1999) 939.
80. J. Gomis, J. Paris and S. Samuel, Antibracket, antifields and gauge theory quantization, *Phys. Rep.* **259** (1995) 1.
81. E. Gozzi, M. Reuter and W. Thacker, Hidden BRS invariance in classical mechanics, *Phys. Rev.* **D40** (1989) 3363.
82. E. Gozzi, M. Reuter and W. Thacker, Symmetries of the classical path integral on a generalized phase-space manifold, *Phys. Rev.* **D46** (1992) 757.
83. E. Gozzi and M. Reuter, A proposal for a differential calculus in quantum mechanics, *Int. J. Mod. Phys.* **9** (1994) 2191.
84. V. Gribov, Quantization of non-abelian gauge theories, *Nucl. Phys. B* **139** (1978) 1.
85. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52** (Springer-Verlag, Berlin, 1977).
86. A. Heil, A. Kersch, N. Papadopoulos, B. Reifenhäuser and F. Scheck, Structure of the space of reducible connections for Yang—Mills theories, *J. Geom. Phys.* **7** (1990) 489.
87. M. Henneaux, Space-time locality of the BRST formalism, *Commun. Math. Phys.* **140** (1991) 1.
88. M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Prinston Univ. Press, Prinston, 1992).
89. D. Hernández Ruipérez and J. Muñoz Masqué, Global variational calculus on graded manifolds, *J. Math. Pures Appl.* **63** (1984) 283.
90. D. Husemoller, *Fiber Bundles*, Graduate Texts in Mathematics, **20** (Springer-Verlag, Berlin, 1966).
91. B. Iliev, Quantum mechanics from a geometric-observer's viewpoint, *J. Phys. A* **31** (1997) 1297.
92. A. Jadczyk and K. Pilch, Superspaces and Supersymmetries, *Commun. Math. Phys.* **78** (1981) 391.

93. M. Kachkachi, A. Lamine and M. Sarih, Gauge theories: geometry and cohomological invariants, *Int. J. Theor. Phys.* **37** (1998) 1681.
94. W. Kalau and M. Walze, Supersymmetry and noncommutative geometry, *J. Geom. Phys.* **22** (1997) 77.
95. M. Karoubi, Connexion, courbures et classes caracteristique en K-theorie algebrique, *Can. Nath. Soc. Conf. Proc.* **2** (1982) 19.
96. E. Kiritsis, A topological investigation of the quantum adiabatc phase, *Commun. Math. Phys.* **111** (1987) 417.
97. O. Khudaverdian, Geometry of superspace with even and odd brackets, *J. Math. Phys.* **32** (1991) 1934.
98. I. Kolář, P. Michor and J. Slovăk, *Natural Operations in Differential Geometry* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
99. W. Kondracki and P. Sadowski, Geometric structure on the orbit space of gauge connections, *J. Geom. Phys.* **3** (1986) 421.
100. B. Kostant, Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization, in *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, Lecture Notes in Mathematics, **570** (Springer-Verlag, Berlin, 1977) p. 177.
101. J. Koszul, *Lectures on Fibre Bundles and Differential Geometry* (Tata University, Bombay, 1960).
102. D. Krupka, The contact ideal, *Diff. Geom. Appl.* **5** (1995) 257.
103. G. Landi, *An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometries*, Springer Lecture Notes in Physics (Springer-Verlag, Berlin, 1997).
104. C.-Y. Lee, D. S. Hwang and Y. Ne'eman, BRST quantization of gauge theory in noncommutative geometry, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 3725.
105. J. Lott, Superconnections and higher index theorem, *Geom. Funct. Anal.* **2** (1992) 421.
106. J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).
107. J. Madore, T. Masson and J. Mourad, Linear connections on matrix geometries, *Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 1429.
108. J. Madore, Linear connections on fuzzy manifolds, *Class. Quant. Grav.* **13** (1996) 2109.
109. S. Maier, Generic metrics and connections on spin- and spin^c-manifolds, *Commun. Math. Phys.* **188** (1997) 407.
110. G. Maltsiniotis, Le langage des espaces et des groupes quantiques, *Commun. Math. Phys.* **151** (1993) 275.
111. J. Mañes, R. Stora and B. Zumino, Algebraic study of chiral anomalies, *Commun. Math. Phys.* **102** (1985) 157.
112. L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *Gauge Mechanics* (World Scientific, Singapore, 1998).
113. L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *Connections in Classical and Quantum Field Theory* (Singapore, World Scientific, 2000).
114. K. Marathe and G. Martucci, *The Mathematical Foundations of Gauge Theories* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
115. V. Mathai and D. Quillen, Superconnections, Thom classes, end equivariant differential forms, *Topology* **25** (1986) 85.
116. P. McCloud, Jet bundles in quantum field theory: the BRST-BV method, *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 567.
117. E. Michael, *Locally Multiplicatively Convex Topological Algebras* (Am. Math. Soc., Providence, 1974).
118. P. Mitter and C. Viallet, On the bundle of connections and the gauge orbit manifold in Yang—Mills theory, *Commun. Math. Phys.* **79** (1981) 457.
119. R. Montgomery, The connection whose holonomy is the classical adiabatic angles of Hannay and Berry and its generalization to the non-integrable case, *Commun. Math. Phys.* **120** (1988) 269.
120. J. Mourad, Linear connections in noncommutative geometry, *Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 965.
121. M. Narasimhan and T. Ramadas, Geometry of $SU(2)$ gauge fields, *Commun. Math. Phys.* **67** (1979) 121.
122. C. Nash, *Differential Topology and Quantum Field Theory* (Academic Press, London, 1991).

123. Y. Ne'eman, Irreducible gauge theory of a consolidated Weinberg-Salam model, *Phys. Lett.* **B81** (1979) 190.
124. Y. Ne'eman and S. Sternberg, Internal supersymmetry and superconnections, in *Symplectic Geometry and Mathematical Physics*, eds. P. Donato *et al.* (Birkhäuser, Berlin, 1991), p. 326.
125. Y. Ne'eman, Noncommutative geometry, superconnections and Riemannian gravity as low-energy theory, *Gen. Rel. Grav.* **31** (1999) 725.
126. V. Nistor, Higher McKean—Singer index formula and non-commutative geometry, *Contemporary Mathematics* **145** (1993) 439.
127. P. Pereshogin and P. Pronin, Geometrical treatment of nonholonomic phase in quantum mechanics and applications, *Int. J. Theor. Phys.* **32** (1993) 219.
128. M. Pflaum, Quantum groups on fibre bundles, *Commun. Math. Phys.* **166** (1994) 279.
129. L. Pittner, *Algebraic Foundations of Non-Commutative Differential Geometry and Quantum Groups* (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
130. R. Powers and S. Sakai, Unbounded derivations in operator algebras, *J. Funct. Anal.* **19** (1975) 81.
131. D. Quillen, Superconnections and the Chern character, *Topology* **24** (1985) 89.
132. J. Rabin, Supermanifold cohomology and the Wess—Zumino term of the covariant superstring action, *Commun. Math. Phys.* **108** (1987) 375.
133. G. Roepstorff, Superconnections and the Higgs field, *J. Math. Phys.* **40** (1999) 2698.
134. A. Rogers, A global theory of supermanifolds, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 1352.
135. M. Rothstein, The axioms of supermanifolds and a new structure arising from them, *Trans. Amer. Math. Soc.* **297** (1986) 159.
136. D. Ruipérez and J. Masqué, Global variational calculus on graded manifolds, *J. Math. Pures et Appl.* **63** (1984) 283; **64** (1985) 87.
137. G. Sardanashvily, *Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory. Constraint Systems.* (World Scientific, Singapore, 1995).
138. G. Sardanashvily, SUSY-extended field theory, *Int. J. Mod. Phys. A* (2000) (will appear).
139. D. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989).
140. R. Schmid, Local cohomology in gauge theories, BRST transformations and anomalies, *Diff. Geom. Appl.* **4** (1994) 107.
141. I. Singer, Some remarks on the Gribov ambiguity, *Commun. Math. Phys.* **60** (1978) 7.
142. J. Sonnenschein, Topological quantum field theories, moduli spaces and flat gauge connections, *Phys. Rev. D* **42** (1990) 2080.
143. T. Stavracou, Theory of connections on graded principal bundles, *Rev. Math. Phys.* **10** (1998) 47.
144. R. Swan, Vector bundles and projective modules, *Trans. Am. Math. Soc.* **105** (1962) 264.
145. F. Takens, Symmetries, conservation laws and variational principles, in *Geometry and Topology*, Lect. Notes in Mathematics, **597** (Springer-Verlag, Berlin, 1977), p. 581.
146. F. Takens, A global version of the inverse problem of the calculus of variations, *J. Diff. Geom.* **14** (1979) 543.
147. B. Tennison, *Sheaf Theory* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975).
148. J. Thierry-Mieg, Geometrical reinterpretation of Faddeev—Popov ghost particles and BRS transformations, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 2834.
149. W. Tulczyjew, The Euler—Lagrange resolution, in *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, Lect. Notes in Mathematics, **836** (Springer-Verlag, Berlin, 1980), p. 22.
150. I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds* (Birkhäuser Verlag, Basel, 1994).
151. J. Várilly amd J. Grasia-Bondia, Conne's noncommutative differential geometry and the Standard Model, *J. Geom. Phys.* **12** (1993) 223.
152. R. Vitolo, Finite order variational bicomplex, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **125** (1999) 321.
153. R. O. Jr. Wells, Differential Analysis on Complex Manifolds, Graduate Texts in Mathematics, **65** (Springer-Verlag, Berlin, 1980).
154. E. Witten, Topological quantum field theory, *Commun. Math. Phys.* **117** (1988) 353.
155. E. Witten, A note on the antibracket formalism, *Mod. Phys. Lett.* **A5** (1990) 487.
156. Y. Wu, Classical non-abelian Berry's phase, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 294.

Предметный указатель

А

аномалий группа 121
— точная последовательность 121
аномалия 118
— глобальная 121
— локальная 121
антидуховое число 96
антиполе 94
антискобки 95
Атьи—Зингера связность 112
Атьи класс 23

Б

базис градуированного многообразия 37
базовая группа Ли 57
базовое пространство супермногообразия 47
Берри связность 30
— фазовый множитель 30
Бетти число 113
биалгебра 57
бикомплекс 87
бимодуль центральный 125
БРС-оператор 66
БРСТ-аномалия 123
БРСТ-замкнутая форма 110
— — локальная 98
БРСТ-когомологии 98
БРСТ-оператор 96
— полный 98
БРСТ-связность 101
БРСТ-тензорное поле 100
БРСТ-точная форма 110
— — локальная 98

В

вариационная последовательность 88
вариационный оператор 88
векторное поле на пространстве струй бесконечного порядка 86
вертикальное конфигурационное пространство 64
— расслоение Лежандра 65
— расширение гамильтоновой формы 65
вертикальный дифференциал 84
вещественный спектр 11
внешняя алгебра 33
— — градуированного модуля 33

Г

Гейзенберга уравнение 25
Гельмгольца—Сонина оператор 89
геометрический модуль 12
— фазовый множитель 31
главная часть дифференциального оператора 141
главное градуированное расслоение 63
— суперрасслоение 59
глобальная калибровка 107
гомотопическая производная 116
— связность 115
— формула Картана 116
гомотопический оператор 116
горизонтальная проекция 84
горизонтальный дифференциал 84
градуированная алгебра 33
— — банахова 33
— — дифференциальная 128
— оболочка 34
— общая линейная группа 35
— полная производная 92
— связность 40
— — композиционная 41
— — на градуированном расслоении 63
— форма 42
— — гамильтонова 68
— функция 35
$\mathbb{Z}$-градуированная алгебра 128
градуированное векторное поле 37
— — пространство 33
— дифференцирование 37
— кольцо 32
— многообразие 35
— — простое 39
— подмногообразие 63
— — замкнутое 63
— расслоение 63
— — струй 63
— тензорное произведение 33
градуированные когомологии Де Рама 43
градуированный внешний дифференциал 43
— горизонтальный дифференциал 93
— комплекс Де Рама 43
— модуль 32
— — свободный 32
— — центральный 32
Грассмана алгебра 33
группа Гротендика 139
группоподобные элементы 62

Д
Де Рама комплекс на струях бесконечного порядка 82
детерминантов расслоение 121
дифференциальное исчисление 128
— — Кона 137
— — универсальное 129
— — Шевалле—Эйленберга 131
дифференциальный оператор сопряженный 143
— — эллиптический 142
дифференцирование 5
Доналдсона инвариант 114
— полином 114
духи для духов 94
духовая грассманова четность 93
духовое число 93
— — полное 93

И
индекс дифференциального оператора топологический 146
— комплекса 144
— многообразия 113
— эллиптического оператора 143
интегрируемое векторное поле 79

К
калибровочная группа 91
— — Ли 106
— — отмеченная 104
— — эффективная 104
калибровочно инвариантный полином 115
каноническая связность на струях бесконечного порядка 85
канонический пучок G-суперфункций 46
каноническое горизонтальное расщепление 79
киральный оператор Дирака 120
классический базис 94
ковариантный дифференциал на модуле 13
— лапласиан 106
когомологии группы 119
кольцо Фреше 11
$\mathcal{K}$-кольцо 4
комодуль 62
компактифицированное касательное расслоение 145
комплекс комплексов 87
— эллиптический 144
конечное сопряженное 61
контактная проекция 84
— форма 79, 84
кообратный 57
Косзула—Тейта дифференциал 99
коцикл 18
коядро 143
кривизна градуированной связности 41
— некоммутативной связности 132
— — — Дюбуа—Виолетта 134
— НК-суперсвязности 72
— связности на модуле 15
— — — пучке 21
— суперсвязности 55
кручение некоммутативной связности 135

Л
левая производная 95
$*$-левый модуль 7
Лейбница правило 13
— — для дифференцирования 5
линейный дифференциальный оператор 4
локальная форма 94
локально вариационный оператор 89
— конечное открытое покрытие 21
локальное кольцо 17

М
многообразие струй высшего порядка 76
модуль дуальный 126
— конечный 126
— локально свободный 12
— проективный 126
— струй 7
$*$-модуль 126
морфизм градуированных многообразий 35
body-морфизм 33
— супермногообразия Де Витта 51
soul-морфизм 33

Н
некоммутативная связность 132
— — вещественная 135
— — Дюбуа—Виолетта 133
— — левая 132
— — линейная 135
— — правая 132
— — сопряженная 135
— — универсальная 132
— — эрмитова 135
некоммутативное векторное расслоение 127
— калибровочное поле 138
НК-суперрасслоение 71

О
область тривиализации градуированного многообразия 36
— — НК-суперрасслоения 71
обобщенная функция 104
образ пучка 17
общая линейная супергруппа 58
ограничения гомоморфизм 16
оператор типа Эйлера—Лагранжа 89
основное уравнение 96
оценочный морфизм 46
— элемент 61

П

первая вариационная формула 89
полином Хирцебруха 147
полная производная 76, 85
пополнение Соболева 104
правая производная 94
предпучок 16
— канонический 16
приемлемое решение 96
примитивный элемент 62
пробная функция 104
проективный предел 80
проектируемое векторное поле 78
произведение G-супермногообразий 52
прообраз пучка 17
простая точная последовательность 87
пространство калибровочных полей 102
— локальных колец 17
— орбит 107
прямая система эндоморфизмов 82
прямое произведение градуированных многообразий 36
прямой предел 16
— — эндоморфизмов 82
пучок 16
— ацикличный 21
— вялый 20
— гладких функций 16
— дифференцирований 17
— локально свободный 18
— — — постоянного ранга 18
— множеств 19
— модулей 17
— мягкий 21
— непрерывных функций 16
— постоянный 16
— струй 19
— структурный 18
— тонкий 21

Р

разбиение единицы 21
разностное расслоение 145
распределение умеренного роста 104
резольвента 22
— тонкая 22
росток 16
русская формула 123

С

связность каноническая на струях бесконечного порядка 84
— на главном градуированном расслоении 63
— — кольце 15
— — модуле 12
— — пучке 19
— — — колец 23
— неприводимая 105
символ дифференциального оператора 142
Соболева пространство 103
спектральная последовательность 88
— тройка 137
— — нечетная 137
— — четная 137
стебель 16
струйное продолжение 77
— — векторного поля 78
— — сечения 77
структурная алгебра простого градуированного многообразия 39
структурный модуль 12
— пучок градуированного многообразия 35
— — супервекторного расслоения 53
— — супермногообразия 47
струя бесконечного порядка 80
— духового поля 92
— модуля 7
супералгебра Ли 38, 58
— — градуированной группы Ли 62
супервекторное поле 49
— — инвариантное 60
— — левоинвариантное 58
— — фундаментальное 60
— пространство 34
— расслоение 53
G^∞-супервекторное расслоение 53
супергруппа Ли 56
супердетерминант 35
суперкасательное пространство 48
— расслоение 54
G^∞-суперкасательное расслоение 54
суперматрица 34
— нечетная 34
— четная 34
супермногообразие 47
— Де Витта 50
— стандартное 48
G-супермногообразие 47
G^∞-супермногообразие базовое 48
R-супермногообразие 49
R^∞-супермногообразие 49
суперпространство 34, 48
суперрасслоение Неемана—Куилена 71
G-суперрасслоение 53
суперсвязность 55
— на главном суперрасслоении 61
— Неемана—Куилена 71
суперслед 34
супертранспонирование 34
суперформа 49
— связности 61
суперфункция 45
— гладкая 46
G-суперфункция 46
G^∞-суперфункция 46
GH^∞-суперфункция 46
H^∞-суперфункция 46
R^∞-суперфункция 49

Т
тело градуированного многообразия 35
— НК-суперрасслоения 70
— супермногообразия Де Витта 51
теорема Атьи—Зингера 146
— Батчелора 36
— вложения Соболева 104
— Де Рама 22
— Дональдсона 113
— об индексе Хирцебруха 113
— Серре—Свана 127
— Ходжа 144
топологическое тензорное произведение 12
топология Гротендика 12
— Де Витта 50
трансгрессии формула 115
— — смещенная 123
тривиальная пара 96

У
универсальное расслоение 108
уравнения спуска 98, 110, 123

Ф
фазовое пространство связностей 112
фильтрованное кольцо 82
фильтрованный модуль 82
— морфизм 82
фоновая калибровка 111
форма пересечения 112
— — четная 113
формула Кюннета 113
— трансгрессии локальная 116
фундаментальный цикл 113

Х
характеристическое расслоение градуированного многообразия 39

Ц
центр бимодуля 125
K-цикл 137

Ч
Чженя—Саймонса форма 116

Ш
Шварца пространство 104
— распределение 104
Шевалле—Эйленберга когомологии 130
— комплекс 131
— оператор кограницы 130
Шрёдингера уравнение 27

Э
Эйлера—Лагранжа оператор 89
— форма 89
эрмитова форма на $*$-модуле 127

Я
Якоби поле 64

Содержание

Введение 3

Глава 1. Алгебраические связности 4
§ 1. Дифференциальное исчисление на модулях 4
§ 2. Связности на модулях 12
§ 3. Связности на пучках 16

Глава 2. Связности в квантовой механике 24
§ 1. Эволюция квантовых систем 24
§ 2. Связности Берри 28

Глава 3. Суперсвязности 32
§ 1. Алгебра градуированных пространств 32
§ 2. Связности на градуированных многообразиях 35
§ 3. Суперрасслоения и суперсвязности 44
§ 4. Суперсвязности на главных суперрасслоениях 56
§ 5. Главные градуированные расслоения 61
§ 6. Суперсимметричная теория поля 64
§ 7. Суперсвязности Неемана—Куилена 70

Глава 4. Связности в БРСТ-формализме 75
§ 1. Связность на струях бесконечного порядка 75
§ 2. Вариационный бикомплекс 86
§ 3. Струи духов и антиполей 90
§ 4. БРСТ-связность 97

Глава 5. Топологические теории поля 102
§ 1. Пространство калибровочных полей 102
§ 2. Связности на калибровочных полях 107
§ 3. Инварианты Доналдсона 112

Глава 6. Аномалии 115
§ 1. Калибровочные аномалии 115
§ 2. Глобальные аномалии 119
§ 3. БРСТ-аномалии 122

Глава 7. Связности в некоммутативной геометрии 125
§ 1. Некоммутативная алгебра 125
§ 2. Некоммутативное дифференциальное исчисление 128
§ 3. Универсальные связности 132
§ 4. Связности Дюбуа—Виолетта 133
§ 5. Матричная геометрия 135
§ 6. Некоммутативная геометрия Кона 137

Приложение А. К-теория 139

Приложение Б. Теорема об индексе 141

Библиография 149

Предметный указатель 154