

А. А. САВЕЛОВ

ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ

СИСТЕМАТИКА, СВОЙСТВА,
ПРИМЕНЕНИЯ

(СПРАВОЧНОЕ РУКОВОДСТВО)

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. П. НОРДЕНА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

АННОТАЦИЯ

Книга является единственным в отечественной литературе пособием энциклопедического характера, посвященным плоским кривым. В книге рассматривается и общая теория кривых (главным образом алгебраических), но основное внимание уделено изучению конкретных кривых — алгебраических и трансцендентных.

Книга рассчитана на преподавателей и студентов вузов, которые найдут в ней разнообразный материал для курсовых работ, для составления задач по курсу анализа и дифференциальной геометрии, для кружковой работы, а также на инженеров, встречающихся в своей работе с различными кривыми. Книга доступна для читателя, владеющего основами математического анализа в объеме курса технических вузов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i>	7
Глава I. Общие сведения о кривых	9
§ 1. Краткие сведения из истории развития учения о кривых.	9
§ 2. Способы образования кривых.	13
§ 3. Систематика кривых. Общие теоремы.	17
1. Алгебраические и трансцендентные кривые (17). 2. Общие теоремы об алгебраических кривых (18). 3. Класс алгебраической кривой. Формулы Плюккера (20). 4. Род алгебраической кривой. Циркулярные кривые (22). 5. Фокусы, диаметры, центр. Полюсы и полярны (24). 6. Теоремы Ньютона, Котеса и Шалля (25).	
Глава II. Преобразования кривых	27
1. Точечные преобразования плоскости (27). 2. Аффинные преобразования (28). 3. Трилинейная система координат (30). 4. Проективные преобразования (33). 5. Инверсия (36). 6. Квадратичные преобразования (38). 7. Двойственные преобразования (40).	
Глава III. Общие сведения о кривых 3-го порядка	44
1. Классификация Ньютона (44). 2. Другие принципы классификации (53). 3. Основные теоремы (54). 4. Точки перегиба, кратные точки (55). 5. Полюсы и полярны (57). 6. Проективные свойства (61). 7. Циркулярные кривые (61). 8. Рациональные циркулярные кривые (68).	
Глава IV. Замечательные кривые 3-го порядка	65
§ 1. Декартов лист	65
1. Особенности формы (65). 2. Свойства (66). 3. Способ построения (67). 4. Историческая справка (68).	
§ 2. Циссоида Диоклеса	68
1. Особенности формы (68). 2. Свойства (69). 3. Применение циссоиды к решению делосской задачи (72).	
§ 3. Кривые 3-го порядка, получаемые циссоидальным преобразованием	74
1. Обобщение понятия циссоиды (74). 2. Циссоиды кривых 2-го порядка (75).	
§ 4. Строфоида	78
1. Особенности формы (78). 2. Свойства строфоиды (79). 3. Косая строфоида (82). 4. Историческая справка (84).	
§ 5. Некоторые другие кривые	84
1. Офиурида (84). 2. Трисектриса Маклорена (85). 3. Кубика Чирнгаузена (88). 4. Верзиера (89).	
Глава V. Общие сведения о кривых 4-го порядка	91
1. Классификация (91). 2. Рациональные кривые (92). 3. Эллиптические кривые (96). 4. Бидиркулярные кривые (97). 5. Кривые высших порядков (99).	

Глава VI. Замечательные кривые 4-го и высших порядков	100
§ 1. Конхоида Никомеда	100
1. Особенности формы (100), 2. Свойства (102), 3. Конхоидальный циркуль (103), 4. Историческая справка (104), 5. Конхоидальные кривые (104).	
§ 2. Улитка Паскаля	106
1. Свойства (106), 2. Применения в технике (108).	
§ 3. Циклоидальные кривые	109
1. Параметрические уравнения (109), 2. Особенности формы (111), 3. Свойства эписциклоид и гипосциклоид (113), 4. Трохоиды (118).	
§ 4. Кардиоида	121
1. Уравнение (121), 2. Свойства (122).	
§ 5. Кривая Штейнера	124
1. Свойства (124), 2. Подэры кривой Штейнера (128).	
§ 6. Астроида	130
1. Свойства (130), 2. Свойства касательных к астроиде (133), 3. Косая астроида (134).	
§ 7. Овалы Декарта	135
1. Определение овалов по Декарту и их свойства (135), 2. Другие способы образования овалов (139).	
§ 8. Каппа	140
§ 9. Кривые Персея	142
1. Способы образования (142), 2. Лемниската Бута (144).	
§ 10. Овалы Кассини	146
1. Особенности формы (146), 2. Способ построения (149).	
§ 11. Синусоидальные спирали	150
1. Особенности формы (150), 2. Общие свойства (152).	
§ 12. Лемниската Бернулли	155
1. Свойства (155), 2. Построение (161), 3. Применения лемнискаты. Историческая справка (161).	
§ 13. Розы	162
1. Порядок, особенности формы и свойства (162), 2. Четырехлепестковая и трехлепестковая розы (166), 3. Историческая справка (167), 4. «Колосья» (168).	
§ 14. Кривые скольжения	168
1. Скольжение по двум взаимно перпендикулярным прямым (169), 2. Скольжение по прямой и окружности (171), 3. Скольжение по двум окружностям (173), 4. Кривые Уатта (175).	
§ 15. Овалы Мюнстера	177
§ 16. Кривые Ламэ	179
§ 17. Параболические и гиперболические кривые	181
1. Параболические кривые $y = cx^m$, где $m = \frac{p}{q} > 0$. (182), 2. Свойства параболических кривых (183), 3. Кубическая парабола $y = cx^3$ (184), 4. Полукубическая парабола (парабола Нейля) $y = cx^{\frac{3}{2}}$ (185), 5. Гиперболические кривые $y = cx^{-m}$, $m = \frac{p}{q} > 0$ (185), 6. Политропные кривые (186).	
Глава VII. Трансцендентные кривые	189
§ 1. Общие сведения о трансцендентных кривых	189
§ 2. Спираль Архимеда	192
1. Свойства (192), 2. Спрявление окружности с помощью спирали Архимеда (194), 3. Применение в технике (195), 4. Историческая справка (196).	

§ 3. Алгебраические спирали	196
1. Гиперболическая спираль $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (197). 2. Конхоида гиперболической спирали (198). 3. Спираль Галилея $\rho = a\varphi^2 - l$ ($l \geq 0$) (199). 4. Спираль $\rho = \frac{a}{\varphi^2}$ (200). 5. Спираль Ферма $\rho = a\sqrt{\varphi}$. (200). 6. Параболическая спираль $\rho = a\sqrt{\varphi} + l$ ($l > 0$) (201). 7. Спираль $\rho = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$ («жезл») (202).	
§ 4. Логарифмическая спираль	202
1. Свойства (202). 2. Построение (207). 3. Логарифмическая спираль в технике и в природе (208). 4. Историческая справка (211).	
§ 5. Цепная линия	211
1. Вывод уравнения (211). 2. Свойства (213). 3. Применения в технике (216). 4. Цепная линия равного сопротивления (218). 5. Историческая справка (220).	
§ 6. Трактриса	220
1. Свойства (220). 2. Применение трактрисы (223). 3. Историческая справка (224). 4. Трактриса окружности (225). 5. Полярная трактриса (226).	
§ 7. Квадратриса Динострата	227
§ 8. Кохлеоида	230
§ 9. Показательная кривая	233
1. Свойства (233). 2. Кривая Гаусса (236). 3. Степенно-показательные кривые (237).	
§ 10. Кривая затухающих колебаний	237
§ 11. Циклоида	240
1. Геометрические свойства (240). 2. Механические свойства (243). 3. Трохоиды (245). 4. Историческая справка (247).	
§ 12. Кривые Штурма	248
1. Качение параболы и эллипса по прямой (248). 2. Кривые Мангейма (251).	
§ 13. Эвольвента окружности	252
1. Свойства (252). 2. Обобщенная эвольвента окружности (254)	
§ 14. Погонная линия	256
§ 15. Кривые Рибокура	259
§ 16. Клофоида	262
Глава VIII. Дополнительные сведения	266
§ 1. Эволюты и эвольвенты и их обобщения	266
1. Эволюты и эвольвенты (266). 2. Эволютоиды (270). 3. Эволюта Браудэ (271). 4. Эллиптические эволюта и эвольвента (273).	
§ 2. Параллельные кривые	274
§ 3. Катакаустики	279
§ 4. Подэры, подоиды, изооптические кривые	282
1. Подэры (282). 2. Негативные подэры (284). 3. Подоиды (284). 3. Изооптические кривые (285)	
§ 5. Радиальные кривые	287
<i>Литература</i>	<i>290</i>
<i>Указатель</i>	<i>291</i>

ПРЕДИСЛОВИЕ

На русском языке почти нет книг, посвященных систематическому обозрению арсенала кривых, имеющих важное значение в различных областях знаний и в практике.

Общие теоретические положения самой математики, задачи геометрического характера, задачи из области механики, физики, естествознания и техники — вот та почва, на которой развилось учение о кривых. Геометрические и механические свойства кривых используются в различных механизмах, деталях машин, строительных конструкциях, в оптике, в изобразительном искусстве, в архитектуре, в теории и практике геометрических построений, в черчении и т. д. Некоторые кривые непосредственно реализуются в физических явлениях, в природе и в обыденной жизни. Поэтому даже общее знакомство с отдельными кривыми и их свойствами возбуждает особый интерес, развивает математическое мышление и обогащает сознание многообразными связями математической теории с конкретным опытом.

С этой точки зрения книга, посвященная вопросам общей теории кривых и описанию замечательных свойств и особенностей формы отдельных кривых, может быть полезной и для преподавателей и для студентов. Первые найдут в ней справочный материал для составления оригинальных задач, вторые получат обильный материал для углубления своих познаний и для рефератов в математическом кружке.

При современном уровне развития технической мысли имеется также нужда в справочном материале о кривых, с которыми встречаются инженеры в своей практической и исследовательской работе. Можно полагать, что книга о кривых будет полезной и для них.

В главах I, II, III и V изложен материал, относящийся к общей теории кривых. Здесь приводится исторический очерк развития учения о кривых, рассматриваются вопросы классификации кривых, способы их преобразований, даются общие сведения об алгебраических кривых произвольного порядка и, в частности, о кривых 3-го и 4-го порядков.

Основная часть книги (главы IV, VI и VII) посвящена описанию отдельных кривых (или видов кривых), замечательных по своим

свойствам. Одни из этих кривых интересны в теоретическом отношении, другие находят практическое применение, третьи обладают оригинальными особенностями формы, четвертые играли ту или иную роль в истории математики.

При изложении материала, посвященного этим замечательным кривым, можно было многие свойства их получить сразу как отражение общих свойств кривых, например, 3-го или 4-го порядков. Автор предпочел, однако, преследуя интересы втузовского преподавания математики, не ссылаться на общие предложения теории кривых, а рассматривать свойства каждой из замечательных кривых особо.

В основу систематики кривых было положено обычное подразделение их на алгебраические и трансцендентные. Последовательность рассмотрения отдельных кривых в каждой из этих групп определялась или их конструктивными связями, или их принадлежностью к одному семейству, определяемому по тому или иному признаку. Такой принцип позволил придать изложению как бы непрерывный характер — каждая следующая кривая связывалась, по мере возможности, с рассмотренными ранее кривыми теми или иными степенями родства. Обнаруживанию таких связей между отдельными, иногда весьма различными по своей природе кривыми уделялось большое внимание на протяжении всей книги. Помимо непосредственной значимости такой систематики, она оказалась выгодной и в отношении компактности изложения. Достаточно было, например, обнаружить, что лемниската Бернулли относится к семейству синусоидальных спиралей, как тотчас появлялась возможность многие ее свойства формулировать сразу как свойства, присущие всем синусоидальным спиральям.

Последняя глава книги посвящена рассмотрению общих вопросов, относящихся к теории эволют и эвольвент, параллельных кривых, катакаустик, изооптических и радиальных кривых.

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору А. П. Нордену — редактору этой книги — за его ценные замечания и советы, которыми я воспользовался при подготовке рукописи к изданию. Ю. И. Левину выражаю большую признательность за тщательный просмотр рукописи и устранение ряда погрешностей.

А. Савелов

ГЛАВА I ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ

§ 1. Краткие сведения из истории развития учения о кривых

Понятие линии определилось в сознании человека в доисторические времена. Траектория брошенного камня, струя воды, лучи света, очертания цветов и листьев растений, извилистая линия берега реки и моря и другие явления природы привлекали внимание наших предков и, наблюдаемые многократно, послужили основой для постепенного установления понятия линии. Однако потребовалась большой исторический период, прежде чем люди стали сравнивать между собой формы кривых линий и отличать одну кривую от другой. Первые рисунки на стенах пещерного жилища, примитивные орнаменты, украшавшие домашнюю утварь, свидетельствуют о том, что люди научились уже не только отличать прямую от кривой, но и различать формы отдельных кривых и в их сочетаниях находить удовлетворение зарождающихся эстетических потребностей. Все это, однако, было еще далеко от того абстрактного понимания линии, которым располагает математика, и от сознательного исследования ее свойств.

Правда, исторические памятники глубокой древности показывают, что у всех народов на известной ступени их развития имелось понятие окружности, не говоря уже о прямой линии. Употреблялись примитивные инструменты для построения этих линий, и были попытки измерять площади, ограничиваемые прямыми и окружностью. Как видно, например, из древнейшего памятника математической культуры — «папируса Ринда», египтяне за 17—20 веков до начала нашей эры занимались квадратурой круга и получили довольно хорошее приближение для числа π , равное $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, или 3,1604. Но лишь с возникновением математики как науки стало развиваться и учение о линиях, достигшее в трудах греческих математиков высокого совершенства.

Греческие ученые создали теорию конических сечений — линий, имеющих особенно большое значение в науке и технике.

Открытие их приписывается Менехму (4 век до н. э.), ученику Евдокса Книдского и, как полагают, учителю Александра Македонского. Менехм определял эти кривые как сечения конуса плоскостью, перпендикулярной к его образующей. В зависимости от того, был ли угол при вершине конуса острым, прямым или тупым, получаемая линия представляла собой эллипс, параболу или гиперболу.

Что послужило поводом к этому открытию? Может быть, поиски решения знаменитой делосской задачи об удвоении куба, может быть, практический вопрос о том, насколько должен быть вытянут овал, находящийся в качестве архитектурного украшения на фронте здания, чтобы с известного места перед зданием он казался кругом.

Есть данные полагать, что Менехм знал свойства параболы и гиперболы, выражаемые в наши дни равенствами $y^2 = 2px$ и $xy = c$, и использовал эти свойства для решения делосской задачи удвоения куба. К сожалению, это первое сочинение по теории конических сечений было утеряно. Также не дошла до нас работа греческого геометра Аристия, написавшего пять книг «О пространственных местах», из которых много заимствовал Евклид для своей (также утраченной) работы о конических сечениях.

Архимед решил задачу о квадратуре сегмента параболы. Сравнивая фигуры, вписанные в эллипс и в окружность, построенную на большой оси эллипса как на диаметре, он определил и площадь эллипса.

Однако все это были еще разрозненные сведения о конических сечениях. Первая методическая обработка теории конических сечений принадлежит Аполлонию Пергскому (3—2 век до н. э.), трактат которого «О конических сечениях» является классическим сочинением греческой математики. В превосходном изложении Аполлоний систематизировал все, что было известно до него о конических сечениях, сам открыл ряд важных свойств этих кривых и установил их названия, употребляемые доныне.

Но не только конические сечения открыты греками. Ряд математиков в поисках решения великих проблем древности — задачи о трисекции угла, об удвоении куба и о квадратуре круга — использовал для образования кривых идею движения. Так возникли спираль Архимеда, циклоида, квадратриса Динострата. В то же время первоначальный метод — образование кривых путем рассечения поверхности плоскостью — был использован для образования кривых Персея как сечений тора.

В эпоху средневековья великие достижения греческих ученых были забыты.

К кривым математическая наука обратилась только в 17 веке, в связи с созданием аналитической геометрии.

1637 год — одна из великих дат в истории математики — год появления книги Р. Декарта «Геометрия», в которой были изложены основы метода координат. Открытие этого метода для исследования кривых было фактом первостепенного значения. Метод коор-

динат не только создал общий, единообразный способ символического задания каждой кривой в виде соответствующего ей уравнения, он давал также неограниченную возможность беспредельно увеличивать количество изучаемых кривых, поскольку каждое произвольно записанное уравнение, связывающее между собой две переменные величины, представляло теперь, вообще говоря, новую кривую.

Открытие метода координат подготовило в свою очередь открытие могущественного метода науки — исчисления бесконечно малых. Рождение дифференциального и интегрального исчисления имело особо важное значение для изучения свойств кривых. Метод координат в соединении с анализом бесконечно малых позволил от частных способов и оригинальных приемов или гениальных догадок при исследовании кривых перейти к их исследованию общим методом.

Многочисленные проблемы механики, астрономии, геодезии, оптики, возникшие в 17—18 веках, стимулировали глубокий интерес к исследованию инфинитезимальных свойств тех линий, которые были известны еще древним. Эти проблемы привели также к открытию новых линий, возникших при рассмотрении чисто практических вопросов и в теоретических исследованиях. Крупнейшие математики эпохи — Декарт, Лейбниц, Гюйгенс, братья Бернулли — с необыкновенным рвением занимались изучением кривых, открывая все новые и новые виды и свойства их.

Наряду с многочисленными предложениями о проведении касательных к кривым, об определении площадей, ограничиваемых кривыми, длин дуг, объемов тел вращения и т. п., вскрываются органические связи одних кривых с другими. Роберваль и Паскаль показывают, что дуга спирали Архимеда равна дуге параболы, выбранной определенным образом и что, следовательно, задача спрямления спирали идентична задаче спрямления параболы. Ферма обобщает это предложение на алгебраические спирали высших порядков, устанавливая, что их спрямление сводится к спрямлению парабол высших порядков. Нейль открывает алгебраическую кривую, которая спрямляется алгебраически (парабола Нейля). К этому же времени относится спрямление логарифмической спирали, выполненное Торичелли, спрямление эпи- и гипоциклоид, выполненное Де ла Гиром. Фаньяно в 1714 году, исследуя вопрос о спрямлении лемнискаты, заложил основы теории эллиптических функций.

Наряду с исследованием геометрических свойств кривых исследуются и их механические свойства. Гюйгенс открывает изохронность циклоиды. И. Бернулли показывает, что циклоида является брахистохроной в пустом пространстве. Исследуются механические свойства параболы Нейля, цепной линии, овалов Кассини, овалов Декарта и целого ряда других теперь хорошо известных кривых.

О том, насколько актуальной была задача исследования кривых в ту эпоху, свидетельствует уже само название первого учебника

по анализу — «Анализ бесконечно малых для понимания кривых линий» Лопитала.

Не только практические потребности века — запросы промышленности, конструирование машин и механизмов, постройка плотин и шлюзов — поддерживали постоянный и глубокий интерес к исследованию кривых у ~~этих~~ ученых, но и та «радость созерцания формы», которая, по словам Клейна, характеризует истинного геометра.

Увлечение аналитическим методом исследования кривых, особенно характерное для 17 века, с течением времени вызвало реакцию со стороны некоторых ученых. Как недостаток этого метода отмечалось то обстоятельство, что употребление его не раскрывает естественного происхождения кривой, так как объектом исследования фактически является не сама кривая, а соответствующее ей уравнение. Плодотворные попытки возвратиться к синтетическому методу древних породили новое направление в исследовании свойств кривых 2-го порядка. Первые достижения здесь связываются с именами Дезарга и Паскаля. Дезарг, исследуя проективные свойства фигур и используя установленное им понятие инволюции, обогатил теорию кривых 2-го порядка новыми открытиями. Паскаль открывает свою знаменитую теорему о соотношении между шестью точками конического сечения, согласно которой во всяком шестиугольнике, вписанном в кривую 2-го порядка, точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой. Де ла Гир приходит к важному предположению о том, что директриса кривой 2-го порядка является полярной ее фокуса.

Новые методы исследования свойств кривых 2-го порядка успешно развиваются в 19 столетии. Брианшон доказывает теорему, двойственную теореме Паскаля, и изучает проективные свойства гиперболы. Понселе исследует кривые 2-го порядка с помощью открытого им метода проективных соответствий. Штейнер и Шаль исследуют проективные свойства этих кривых на основе понятия двойного отношения и рассматривают их как производные от образов 1-й степени.

Критика аналитического метода исследования формы и свойств кривых была основана, как было уже сказано, на том обстоятельстве, что при пользовании этим методом отсутствует наглядный образ кривой и исчезают геометрические построения. Она дополнялась и другими соображениями. Указывалось, что система координат является посторонним элементом исследования, с которым кривая связывается искусственно.

Эти воззрения повели, с одной стороны, к созданию так называемой алгебраической геометрии, основы которой были заложены Гессе и Клебшем. Исследование свойств кривых сводилось здесь к исследованию инвариантов алгебраических форм. Эти инварианты представляли собой некоторые величины, характеризующие форму кривой и не меняющиеся при изменении координатной

системы. Крупнейшим достижением этого направления в исследовании кривых было создание общей теории алгебраических кривых. Особые достижения в развитии этой теории связываются с именем Плюккера. Однако в алгебраической геометрии полностью отрешиться от системы координат как постороннего элемента все-таки не удалось.

Другое направление привело к представлению о так называемом натуральном уравнении кривой. Натуральное уравнение уже не зависит от положения системы координат и от вида ее; точнее говоря, оно не предполагает вообще наличия системы координат. Это уравнение функционально связывает радиус кривизны кривой и длину ее дуги, т. е. те элементы, которые органически связаны с самой природой исследуемой линии. Было доказано, что натуральное уравнение полностью определяет кривую с точностью до ее положения на плоскости. Наибольших успехов это направление в исследовании кривых достигло в работах Чезаро, который присвоил ему название внутренней или натуральной геометрии.

Мы упомянем в заключение о плодотворной идее использования векторного аппарата при исследовании свойств линий, которая связывается с именем Грассмана, и о топологическом методе исследования кривых, имеющих наиболее сложные формы.

Изложенные нами исторические сведения о развитии методов исследования кривых носят самый общий характер и имеют целью определить лишь основные вехи в этом развитии. Конкретные исторические справки относительно отдельных кривых приводятся в соответствующих местах текста книги.

§ 2. Способы образования кривых

Исследование особенностей формы кривой и ее свойств средствами дифференциальной геометрии возможно лишь, если кривая выражена в аналитической форме, т. е. уравнением. Однако во многих задачах теоретического и в особенности практического характера, прежде чем исследовать уравнение кривой, необходимо его составить на основании некоторых данных, так или иначе определяющих эту кривую и выраженных в условии задачи. Эта первая часть работы выступает в качестве самостоятельной проблемы, в отдельных случаях весьма трудной, так как способы, которыми определяется кривая по условию задачи, могут быть очень разнообразными. На рассмотрении наиболее важных из них мы и хотим остановить внимание читателей.

1. Кривая определяется как линия пересечения данной поверхности плоскостью, положение которой определено. В истории развития учения о кривых этот способ является первым. Греки определяли кривые 2-го порядка как сечения кругового конуса. Таково же происхождение кривых Персея,

получаемых в результате сечений плоскостью поверхности тора. Эвольвента круга может быть определена как линия пересечения поверхности касательных к винтовой линии плоскостью, перпендикулярной к ее оси, и т. д.

2. Кривая определяется как геометрическое место точек, обладающих данным свойством. Этот способ особенно употребителен. Он широко практиковался еще греческими математиками; так, Евклид рассматривал конические сечения как геометрические места точек, сохраняющих постоянное отношение расстояний от данной точки и от данной прямой. Как геометрическое место точек была определена Диоклесом его циссоида. Таким же способом определяет Никомед конхоида. Такие линии, как овалы Декарта, овалы Кассини, улитка Паскаля, строфоида, верзиера и целый ряд других кривых, определяются обычно как геометрические места.

3. Кривая определяется как траектория точки, характер движения которой обусловлен тем или иным образом. Кинематический способ образования линий был также хорошо известен греческим ученым. Как траекторию точки, участвующей одновременно в двух равномерных движениях, одно из которых совершается по прямой, а другое — по окружности, определил Архимед свою спираль. Все циклоидальные кривые являются траекториями точки, жестко связанной с кругом, который катится без скольжения по окружности другого круга. Кинематическим путем определяется квадратриса Динострата как траектория точки пересечения вращающегося радиуса окружности с хордой, двигающейся параллельно самой себе. Леминската Бернулли может быть определена как траектория середины большого звена шарнирного антипараллелограмма, противоположное звено которого закреплено. Кинематически определяются розы, кривые скольжения и многие другие линии. Кинематический способ задания кривой полагался Декартом в основу определения кривых методом координат.

4. Образование линий по способу сопряжения проективно соответствующих элементов. Этот способ сравнительно недавнего происхождения и во всей полноте рассматривается в курсах проективной геометрии. В основу его полагается идея соответствия двух проективных рядов точек или двух проективных пучков.

Проективно соответствующими называются два прямолинейных ряда точек, если любым четырем гармоническим точкам одного из них соответствуют четыре также гармонические точки второго ряда. Аналогично определяется проективное соответствие пучков прямых. На основе этих понятий и возникает проективный способ образования линий. Так, если имеются два проективных пучка прямых, то геометрическое место точек пересечения соответствующих прямых этих пучков представляет собой кривую 2-го порядка (рис. 1, а).

Точно так же, если заданы два проективно связанных прямолинейных ряда точек, то огибающая прямых, проходящих через соответствующие точки этих рядов, будет представлять собой кривую 2-го класса и одновременно 2-го порядка (рис. 1, а).

На кривой 2-го порядка могут быть в свою очередь определены гармонические четверки точек, т. е. точки пересечения этой кривой с четырьмя гармонически сопряженными лучами пучка прямых, центр которого находится в какой-либо точке этой кривой. Так возникает понятие криволинейного проективного ряда, который в отличие от прямолинейного ряда называется *проективным рядом 2-го порядка*. Аналогично устанавливается понятие *пучка 2-го порядка*,

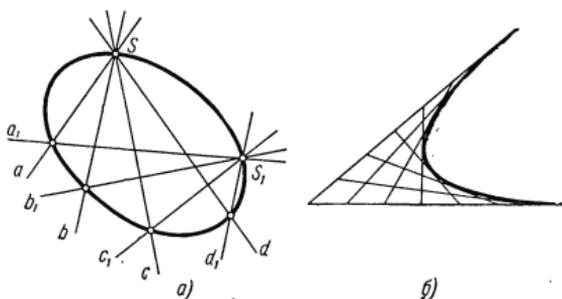


Рис. 1.

под которым понимают упомянутую выше совокупность прямых, проходящих через соответствующие точки двух прямолинейных проективных рядов и огибающих кривую 2-го порядка.

Понятие ряда 2-го порядка и пучка 2-го порядка позволяет определить проективным способом алгебраические кривые высших порядков и классов. Так, если прямолинейный ряд (т. е. ряд 1-го порядка) и ряд 2-го порядка лежат в одной плоскости и проективны между собой, то прямые, проходящие через их соответствующие точки, образуют, вообще говоря, *пучок лучей 3-го порядка*, огибающих кривую 3-го класса. Точно так же, если пучок лучей 1-го порядка и пучок лучей 2-го порядка лежат в одной плоскости, то точки пересечения их соответствующих лучей образуют *кривую 3-го порядка*. Аналогично два проективных пучка 2-го порядка определяют кривую 4-го порядка.

Частным случаем проективного соответствия является *перспективное* соответствие, которое осуществляется путем проектирования двух плоских систем из общего центра. Соответствующие точки при этом лежат на одном проектирующем луче, а соответствующие прямые принадлежат одной проектирующей плоскости.

Способом проектирования могут быть получены многие из часто встречающихся кривых. Сюда относится циклоида, являющаяся параллельной проекцией винтовой линии на плоскость, параллельную ее

оси. Спираль Архимеда может быть определена как проекция конической винтовой линии на плоскость, перпендикулярную к ее оси. Овалы Декарта могут быть определены как проекции линии пересечения двух конических поверхностей с параллельными осями на плоскость, перпендикулярную к этим осям, и т. д.

5. Кривая определяется заданием ее дифференциальных свойств. Непосредственно задаваемое по условию задачи или вытекающее из этого условия соотношение между бесконечно малыми элементами кривой выражается сначала в виде некоторого дифференциального уравнения. Последующее интегрирование этого уравнения приводит к обычному уравнению искомой кривой. Такой способ определения уравнения кривой характерен для многочисленных задач геометрии, механики, физики, техники. Так, показательная кривая может быть определена как линия, у которой подкасательная для всех точек имеет одно и то же значение. Трактриса характеризуется постоянством длины касательной. Радиoidalная спираль определяется как линия, для которой радиус кривизны обратно пропорционален длине дуги. На основании геометрических соображений и законов механики выводятся дифференциальные уравнения цепной линии, изогнутой оси балки и т. д.

6. Кривая определяется как линия, получаемая в результате того или иного геометрического преобразования уже известной кривой. Этот способ образования кривых является особенно эффективным. Он не только дает неиссякаемые средства для определения новых кривых, но и позволяет определять свойства новой кривой как отражение свойств преобразуемой кривой.

К числу основных геометрических преобразований относятся *аффинное, проективное, инверсия, квадратичное, двойственное, касательное*. Рассмотрением свойств этих преобразований мы займемся в одной из следующих глав.

7. Мы заключим обзор различных способов, дающих средства для аналитического определения кривых, еще одним, естественным по сравнению с предыдущими, в том смысле, что составлять уравнение кривой здесь уже не приходится, так как кривая задается сразу же в аналитической форме и представляет собой график той или иной функции. Выше было замечено, что метод Декарта, которым определяется соответствие между линией и уравнением, дает неограниченные возможности для определения кривых самых разнообразных форм. В арсенале замечательных кривых, используемых в науке и технике, имеется немало линий, которые исторически возникли аналитическим путем, т. е. определялись первоначально как кривые, соответствующие определенным уравнениям. К ним относятся декартов лист — график функции, определяемой уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Сюда же относятся параболы и гиперболы высших порядков — графики функций, определяемых уравнением $y = cx^m$,

кривые Ламэ — графики функции, определяемой уравнением $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$. К аналитически определяемым кривым относятся также кривые, являющиеся графиками тригонометрических функций, показательной функции и многие другие.

§ 3. Систематика кривых. Общие теоремы

1. Алгебраические и трансцендентные кривые. Бесконечному множеству уравнений, связывающих две переменные величины и отнесенных к некоторой системе координат, соответствует бесконечное множество кривых самых разнообразных форм. Отсюда ясна необходимость классификации кривых.

Так как характерные особенности формы кривой и ее свойства определяются особенностями и свойствами соответствующего ей уравнения, то естественно положить в основу классификации кривых природу их уравнений — подразделение уравнений на алгебраические и трансцендентные. Здесь, однако, возникает затруднение, заключающееся в том, что природа уравнения кривой зависит не только от природы самой кривой, но и от той системы координат, к которой отнесена кривая. Одна и та же кривая в одной системе координат может выражаться алгебраическим уравнением, а в другой — трансцендентным. Более того, иногда достаточно изменить положение системы, и уравнение кривой, которое было алгебраическим, становится трансцендентным. Так, например, в полярной системе координат уравнение окружности с центром в полюсе имеет вид $\rho = a$ и является, как видно, алгебраическим: но достаточно поместить полюс в какую-либо точку (ρ_1, φ_1) , как уравнение принимает вид $a^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$ и становится, таким образом, трансцендентным.

Указанный недостаток отсутствует, однако, у прямоугольной декартовой системы координат. Параллельное смещение и поворот осей этой системы не меняют не только природу уравнения этой кривой, но и степень этого уравнения, если оно было алгебраическим. Естественно поэтому подразделить все кривые на *алгебраические* и *трансцендентные* соответственно тому, будут ли их уравнения алгебраическими или трансцендентными в прямоугольной системе координат.

Внутри обширного семейства алгебраических линий в свою очередь производят подразделение кривых, в основу которого полагается понятие *порядка* кривой, определяемого степенью ее уравнения.

Соответственно этому *алгебраической кривой n-го порядка называется кривая, уравнение которой, после освобождения его от дробей и радикалов, записывается в декартовой системе*

Справедливость этой теоремы вытекает из известной теоремы о числе корней системы двух алгебраических уравнений, одно из которых степени m , а другое — степени n .

Если уравнения данных кривых неполные, например, если высшая степень y в уравнении первой кривой равна $m - p$, а в уравнении второй кривой $n - q$, то степень уравнения, полученного после исключения y , будет не выше $mn - pq$ и, следовательно, кривые будут пересекаться в этом случае не более чем в $mn - pq$ точках.

3. *Алгебраическая кривая n -го порядка определяется $\frac{n(n+3)}{2}$ точками.*

Действительно, в уравнении кривой n -го порядка имеется $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ коэффициентов, для определения которых потребуется такое же количество уравнений, связывающих эти коэффициенты. Однако, как это легко видеть, имеется возможность разделить все коэффициенты в уравнении кривой на один из них; тогда число подлежащих определению коэффициентов уменьшится на единицу и будет равно $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$. Отсюда следует, что, задавая $\frac{n(n+3)}{2}$ точек кривой, мы получим систему $\frac{n(n+3)}{2}$ уравнений; решая которую найдем коэффициенты уравнения заданной кривой.

Может случиться при этом, что некоторые коэффициенты не будут существовать или окажутся неопределенными, что произойдет, если коэффициент, на который были разделены все члены уравнения искомой нераспадающейся кривой, является нулем. Такое обстоятельство будет показывать, что данных точек недостаточно для определения кривой, и может иметь место в том случае, когда заданные $\frac{n(n+3)}{2}$ точек расположены так, что всякая кривая n -го порядка, проходя через некоторые из них, непременно пройдет и через все остальные. Так, например, кривая 3-го порядка, проходящая через 8 точек, расположенных известным образом, обязательно пройдет через некоторую девятую точку и, следовательно, такими девятью точками кривая 3-го порядка не может быть определена. Подобным образом, кривая 2-го порядка, состоящая из двух пересекающихся прямых, не может быть определена пятью точками, если эти точки заданы так, что четыре из них лежат на одной прямой.

В общем случае можно утверждать следующее.

4. *Каждая кривая n -го порядка, проходящая через $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ точек, проходит также еще через $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ определенных точек плоскости, положение которых зависит от положения заданных точек.*

Действительно, пусть $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ — уравнения двух каких-либо кривых n -го порядка, каждая из которых проходит через $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ заданных точек. Тогда всякую иную кривую n -го порядка, проходящую через эти заданные точки, можно выразить уравнением $f_1(x, y) - kf_2(x, y) = 0$, так как постоянный множитель k в этом уравнении можно определить для конкретной кривой из равенства $f_1(a, b) - kf_2(a, b) = 0$, где a и b — координаты точки этой кривой, которая вместе с заданными точками вполне ее определяет. Но, с другой стороны, эта кривая проходит через точки пересечения кривых $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ и, следовательно, имеет с ними n^2 общих точек. Таким образом, эта кривая, проходя через $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ заданных точек, пройдет еще через $n^2 - \left\{ \frac{n(n+3)}{2} - 1 \right\} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ точек плоскости, определенных заданными точками.

3. Класс алгебраической кривой. Формулы Пюккера. Алгебраические кривые классифицируются не только по их порядку, но и по их классу и роду (жанру).

Класс алгебраической кривой определяется степенью ее уравнения в тангенциальных координатах — так называются коэффициенты u и v в уравнениях прямых $ux + vy + 1 = 0$, касающихся данной алгебраической кривой.

Класс кривой может быть определен также числом касательных, действительных и мнимых, которые можно провести к этой кривой из произвольной точки, не лежащей на ней.

Для получения тангенциального уравнения кривой и, следовательно, для определения ее класса, представим себе, что данная кривая $f(x, y) = 0$ пересечена прямой $ux + vy + 1 = 0$. Условие того, что две точки ее пересечения с кривой совпадают между собой, записанное в форме равенства, связывающего u и v , и будет искомым тангенциальным уравнением заданной кривой.

Так, например, желая найти тангенциальное уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$, пересечем ее прямой $ux + vy + 1 = 0$. Исключая y из уравнения этой прямой и окружности, получим $(u^2 + v^2)x^2 + 2ux + (1 - v^2) = 0$. Условием касания прямой и окружности будет совпадение корней этого квадратного уравнения, что приводит к равенству $v^2(1 - u^2 - v^2) = 0$. Подобным же образом получим равенство $u^2(1 - u^2 - v^2) = 0$. Очевидно, полученные равенства будут удовлетворяться, если $1 - u^2 - v^2 = 0$. Это и есть тангенциальное уравнение заданной окружности.

Если, наоборот, необходимо перейти от тангенциального уравнения $f(u, v) = 0$ кривой к ее обычному уравнению, то следует присоединить к этому уравнению уравнение $ux + vy + 1 = 0$ пучка всех касательных к кривой, проходящих через точку $M(x, y)$. Условие

того, что эта точка будет точкой касания, выразится равенством, определяющим условие совпадения двух касательных в одну (так как в тангенциальных координатах каждая точка кривой определяется как точка пересечения двух бесконечно близких касательных). Это равенство и будет искомым уравнением кривой в прямоугольной системе.

Так, например, если дана в тангенциальных координатах кривая $u + v + uv = 0$, то, желая иметь ее обычное уравнение, рассмотрим пучок прямых $ux + vy + 1 = 0$, проходящих через произвольную точку $M(x, y)$. Найдем те прямые этого пучка, которые касаются кривой. Исключая u из заданного уравнения кривой и уравнения пучка, получим: $v^2y + v(1 + y - x) + 1 = 0$. Для того чтобы две прямые, определяемые двумя значениями v в этом равенстве, совпали в одну, необходимо, чтобы эти значения v были равны между собой, а последнее произойдет, если будет справедливо равенство $(1 + y - x)^2 - 4y = 0$, которое и представляет собой обычное уравнение заданной кривой.

Порядок и класс линии, вообще говоря, не совпадают, за исключением кривых 2-го порядка, которые одновременно являются кривыми 2-го класса. В общем случае при определении класса кривой приходится принимать во внимание не только ее порядок, но и ряд ее характерных особенностей — наличие у нее двойных точек, точек перегиба, двойных касательных и т. д. Именно, если n — порядок кривой, k — класс кривой, d — число двойных точек (узловых и изолированных), r — число точек возврата, t — число двойных касательных (т. е. прямых, касающихся кривой в двух точках), ω — число точек перегиба кривой, то между всеми этими величинами существуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} k &= n(n-1) - 2d - 3r, & n &= k(k-1) - 2t - 3\omega, \\ \omega &= 3n(n-2) - 6d - 8r, & r &= 3k(k-2) - 6t - 8\omega. \end{aligned}$$

Эти равенства называются *формулами Плюккера* и были приведены им впервые в его «Системе аналитической геометрии на плоскости» в 1834 году.

Из первой формулы следует, в частности, что если кривая n -го порядка не имеет особых точек, то она будет кривой класса $n(n-1)$, а число точек перегиба такой кривой определится равенством $\omega = 3n(n-2)$, причем в числе этих точек перегиба могут быть и мнимые. Формула для определения числа только действительных точек перегиба кривой n -го порядка была получена Ф. Клейном. Она имеет вид $\omega_1 = k + r_1 + 2d_1 - 2t_1 - n$, где n и k , как и ранее, порядок и класс кривой, r_1 — число действительных точек возврата, d_1 — число действительных двойных точек, t_1 — число изолированных двойных касательных, а ω_1 — число действительных точек перегиба этой кривой*).

*) Ф. Клейн, Лекции о развитии математики в 19 столетии, 1937, стр. 161.

4. Род алгебраической кривой. Циркулярные кривые. Известно, что нераспадающаяся кривая n -го порядка может иметь не более чем $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных точек. Действительно, если бы она имела, например, $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ двойных точек, то через эти точки и через $n-3$ других точек ее можно было бы, как легко видеть, провести кривую порядка $n-2$. Но так как каждая двойная точка первой кривой должна считаться за две точки пересечения ее со второй кривой, то получается, что эти кривые имели бы $2 \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 \right] + n - 3 = n(n-2) + 1$ общих точек. Последнее, однако, невозможно, так как нераспадающиеся кривые n -го и $(n-2)$ -го порядка могут иметь не более чем $n(n-2)$ общих точек.

Доказанное свойство нераспадающейся кривой будет справедливо и для точек высшей кратности, если точку кратности k считать за $\frac{k(k-1)}{2}$ двойных точек. Например, кривая 5-го порядка может иметь семь двойных точек и одну тройную: $7 + \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2}$. Это соглашение оправдывается тем, что через точку кратности k проходит k ветвей этой кривой. Если их представлять себе отделенными от кратной точки, то, пересекаясь попарно, они дадут $\frac{k(k-1)}{2}$ двойных точек, которые, совпадая, и образуют точку кратности k .

Теперь мы имеем возможность определить понятие рода кривой: *род, или жанр, алгебраической кривой определяется числом p , являющимся разностью между наибольшим числом двойных точек, которые может иметь кривая этого порядка, и их фактическим числом у данной кривой.* С ранее упомянутыми числовыми характеристиками алгебраической кривой эта новая характеристика p связана соотношениями

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r,$$

$$p = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - t - w.$$

Если рассматриваемая кривая имеет наибольшее число двойных точек, возможных для кривых ее порядка, то, очевидно, это будет *кривая нулевого рода*. Эти кривые обладают весьма важным свойством, а именно, *координаты точки, двигающейся по такой кривой, могут быть выражены рациональными функциями некоторого параметра.*

Для доказательства этого предложения заметим, что кривая n -го порядка и нулевого рода должна иметь $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных то-

чек. Через эти точки и через $n-3$ простых точек кривой проведем кривые $(n-2)$ -го порядка, образующие пучок. Сделать это можно, так как число выбранных нами точек, равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 3 = \frac{(n+1)(n-2)}{2} - 1$, на единицу меньше числа точек, необходимого для определения кривой $(n-2)$ -го порядка. Пусть $f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0$ — уравнение этого пучка. Если теперь искать точки пересечения данной кривой с кривыми пучка, то, исключая из уравнений одну из координат, мы получим для определения другой координаты уравнение степени $n(n-2)$. В этом уравнении нам будут известны корни, являющиеся координатами точек, через которые были проведены кривые пучка. Но так как число таких точек равно $2 \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 3 = n(n-2) - 1$, то число известных корней в упомянутом уравнении будет на единицу меньше его степени. Подставив эти корни в уравнение, мы получим для определения искомой координаты уравнение первой степени, коэффициенты которого будут рациональными функциями параметра λ , и, следовательно, искомая координата выразится через параметр λ рационально.

В силу этого свойства кривые нулевого рода называют также *рациональными кривыми*.

Более сложными по своей природе являются кривые первого рода. Правые части их параметрических уравнений могут быть выражены эллиптическими функциями параметра, в силу чего такие кривые называют *эллиптическими*, и при изучении их широко пользуются свойствами эллиптических функций.

Мы закончим рассмотрение материала, относящегося к вопросам классификации алгебраических кривых, упоминанием о так называемых *циркулярных* кривых. Известно, что уравнение окружности, записанное в однородных координатах, имеет вид $x_1^2 + x_2^2 + 2Ax_1x_3 + 2Bx_2x_3 + Cx_3^2 = 0$. Точки пересечения этой окружности с несобственной прямой $x_3 = 0$ определяются системой $\frac{x_2}{x_1} = i, x_3 = 0$ и $\frac{x_2}{x_1} = -i, x_3 = 0$. Полагая $x_1 = 1$, находим эти точки $J_1(1, i, 0)$ и $J_2(1, -i, 0)$. Так как изменение коэффициентов A, B и C в уравнении окружности не изменяет найденных координат, то можно утверждать, что всякая окружность проходит через точки J_1 и J_2 , которые являются несобственными и мнимыми точками этой окружности и называются *круговыми* или *циклическими* точками плоскости.

Упомянутые выше циркулярные кривые и являются алгебраическими кривыми, проходящими через циклические точки плоскости.

5. Фокусы, диаметры, центр. Полюсы и поляры. Мы хотим далее привести определения таких элементов алгебраических кривых, которые являются обобщениями соответствующих элементов кривых 2-го порядка.

С понятием циклических точек плоскости связано понятие *фокусов* алгебраических кривых, которое обобщает понятие фокусов кривых 2-го порядка. Кривые 2-го порядка обладают тем свойством, что касательные, проведенные, например, к эллипсу из циклических точек плоскости, пересекаются в его фокусах. Отсюда следует, что фокусы кривой 2-го порядка можно определить как *точки пересечения касательных к этой кривой, проведенных из циклических точек плоскости*. Это определение Плюккер распространил, без какого-либо изменения, и на кривые n -го порядка.

Нетрудно установить, что если класс кривой равен k , то число фокусов этой кривой будет равно k^2 , соответственно числу точек пересечения k касательных, проведенных к кривой из циклической точки J_1 , и k касательных, проведенных из точки J_2 . Однако из этих k^2 фокусов действительными будут только k , ибо в действительной точке F будут пересекаться лишь такие касательные, уравнения которых соответственно $u + vi = 0$ и $u - vi = 0$, где u и v — линейные функции x и y . Корни системы $u = 0$, $v = 0$ будут координатами действительных фокусов кривой.

Понятие *диаметра* алгебраической кривой n -го порядка также возникает как обобщение понятия диаметра кривой 2-го порядка, под которым, как известно, разумеют прямую, являющуюся геометрическим местом середин параллельных хорд.

Назовем *центром средних расстояний* некоторой системы точек точку, координаты которой равны средним арифметическим соответствующих координат точек системы. Можно показать, что *если кривую n -го порядка пересечь системой параллельных прямых и на каждой из них определить центр средних расстояний точек ее пересечения с данной кривой, то геометрическим местом этих центров будет прямая линия*, направление которой определяется направлением параллельных хорд. Эту прямую и называют *диаметром* кривой n -го порядка.

Может оказаться, что все диаметры данной кривой пересекаются в одной и той же точке, которую называют в таком случае *ньютоновым центром* этой кривой. Если кривая обладает центральной симметрией, то ньютонов центр совпадет с центром ее симметрии.

Заметим еще, что на кривые n -го порядка обобщается и понятие *поляры* точки относительно кривой 2-го порядка. При этом заданной точке плоскости ставится в соответствие $n - 1$: поляр относительно кривой n -го порядка. Первая из этих поляр является кривой порядка $n - 1$, вторая, являющаяся полярной заданной точки относительно первой поляры, имеет порядок $n - 2$ и т. д., и, наконец, $(n - 1)$ -я поляра является прямой линией.

Отдельные свойства поляр точки относительно кривой n -го порядка и в особенности свойства прямолинейной полярны своеобразно повторяют известные свойства полярны точки относительно кривой 2-го порядка, как это будет показано в дальнейшем применительно к кривым 3-го порядка.

6. Теоремы Ньютона, Котеса и Шаля. Общие сведения об алгебраических кривых произвольного порядка мы закончим рассмотрением отдельных теорем, касающихся свойств этих кривых, независимо от их порядка.

В первую очередь сюда следует отнести известную теорему Ньютона, согласно которой *если через две фиксированные точки O и O_1 провести параллельные прямые, пересекающие кривую n -го порядка в точках R_1, R_2, \dots, R_n и S_1, S_2, \dots, S_n , то отношение произведений отрезков на первой и второй прямой, т. е. отношение $\frac{OR_1 \cdot OR_2 \dots OR_n}{O_1S_1 \cdot O_1S_2 \dots O_1S_n}$, будет величиной постоянной независимо от направления секущих.*

Для доказательства этой теоремы удобно записать уравнение кривой n -го порядка в полярной системе координат. Полагая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ в приведенном в начале этой главы общем уравнении такой кривой, получим ее уравнение в виде

$$(A_0 \cos^n \varphi + A_1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi + \dots + A_n \sin^n \varphi) \rho^n + \dots + (K_0 \cos \varphi + L_0 \sin \varphi) \rho + M = 0.$$

Пусть полюс системы совпадает с первой из заданных точек — точкой O . Тогда отрезки OR_i будут радиусами-векторами ρ_i точек, в которых кривая пересекается первой прямой, составляющей с полярной осью угол φ_1 , и по известному свойству корней алгебраического уравнения мы получим:

$$OR_1 \cdot OR_2 \dots OR_n = \frac{M}{A_0 \cos^n \varphi_1 + A_1 \cos^{n-1} \varphi_1 \sin \varphi_1 + \dots}. \quad (1)$$

Произведем теперь параллельное смещение системы так, чтобы новое начало совпало со второй точкой O_1 . Очевидно, при этом вторая прямая окажется наклоненной к новой полярной оси по-прежнему под углом φ_1 . Известно, что параллельное смещение системы не изменяет коэффициента при старшей степени переменного в уравнении кривой, но изменяет свободный член M , обращая его в M_1 . Отсюда следует, что произведение радиусов-векторов точек пересечения второй прямой с данной кривой определится равенством

$$O_1S_1 \cdot O_1S_2 \dots O_1S_n = \frac{M_1}{A_0 \cos^n \varphi_1 + A_1 \cos^{n-1} \varphi_1 \sin \varphi_1 + \dots}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{OR_1 \cdot OR_2 \dots OR_n}{O_1S_1 \cdot O_1S_2 \dots O_1S_n} = \frac{M_1}{M} = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Теорему Ньютона можно сформулировать и иначе, а именно: *если через точку O провести две прямые, которые пересекают кривую n -го порядка в точках R_1, R_2, \dots, R_n и S_1, S_2, \dots, S_n , то отношение произведений отрезков на этих прямых, т. е. отношение $\frac{OR_1 \cdot OR_2 \cdot \dots \cdot OR_n}{OS_1 \cdot OS_2 \cdot \dots \cdot OS_n}$ есть величина постоянная, не зависящая от положения точки O , при условии, что направления секущих остаются неизменными.*

Обратимся теперь к так называемой теореме Котеса, согласно которой *если на каждой прямой, проходящей через данную точку O , найти точку R так, чтобы*

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \dots + \frac{1}{OR_n},$$

где R_1, R_2, \dots, R_n — точки пересечения прямой с кривой n -го порядка, то геометрическое место точек R есть прямая линия.

Для доказательства этой теоремы поместим начало координат в точку O . Тогда, переписывая приведенное выше полярное уравнение кривой n -го порядка в виде

$$M \frac{1}{\rho^n} + (K_0 \cos \varphi + L_0 \sin \varphi) \frac{1}{\rho^{n-1}} + \dots \\ \dots + (A_0 \cos^n \varphi + A_1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi + \dots + A_n \sin^n \varphi) = 0,$$

будем, на основании известных свойств корней алгебраического уравнения, иметь $\frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \dots + \frac{1}{OR_n} = -\frac{K_0 \cos \varphi + L_0 \sin \varphi}{M}$, или

$\frac{n}{OR} = -\frac{K_0 \cos \varphi + L_0 \sin \varphi}{M}$. Записывая последнее уравнение в прямоугольной системе координат, получим уравнение прямой линии $K_0 x + L_0 y + nM = 0$, что и требовалось доказать.

Эта прямая соответствует, в известном смысле, понятию поляры кривой 2-го порядка, которая, как известно, есть геометрическое место таких точек R , для которых удовлетворяется равенство $\frac{2}{R} =$

$= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, где R_1 и R_2 — радиусы-векторы точек пересечения с кривой прямой линии, проходящей через заданную точку O .

Мы упомянем в заключение о теореме Шаля, которая также справедлива для всех алгебраических кривых, независимо от их порядка. Согласно этой теореме, *если к кривой провести систему параллельных касательных, то центр средних расстояний точек касания есть постоянная точка, положение которой не зависит от направления касательных.*

Эту постоянную точку принято называть абсолютным центром алгебраической кривой.

ГЛАВА II

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРИВЫХ

1. Точечные преобразования плоскости. Как уже говорилось, одним из наиболее продуктивных способов образования кривых является получение новой кривой путем того или иного преобразования уже известной кривой.

В простейшем случае так называемого точечного преобразования каждой точке данной кривой приводится в соответствие по определенному закону определенная точка плоскости; геометрическое место таких точек и представляет собой новую кривую, соответствующую заданной.

Наглядно этот процесс точечного преобразования можно представить, полагая, что плоскость, на которой была изображена кривая, заполнена каким-либо веществом, способным деформироваться. Тогда процесс преобразования сведется к деформации такой плоскости, при которой каждая точка ее вещества переходит из своего начального положения в иное определенное положение. Соответственно этому искажается в той или иной степени форма кривой, изображенной на деформируемой плоскости.

Аналитически точечное преобразование осуществляется тем, что в уравнении $f(x, y) = 0$ заданной кривой производится замена переменных

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(x_1, y_1), \\ y &= \varphi_2(x_1, y_1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Получающееся уравнение $F(x_1, y_1) = 0$ выражает в той же системе координат новую кривую, соответствующую заданной *).

Форма и свойства этой новой кривой определяются двумя факторами: 1) формой и свойствами преобразуемой кривой и 2) свойствами самого преобразования, т. е. природой преобразующих функций φ_1 и φ_2 . Соответственно этому одной из основных задач теории кривых

*) Мыслится, таким образом, что система неподвижна, а плоскость деформируется; на это следует обратить внимание, так как формулы (1) можно понимать и как формулы преобразования координат: при таком понимании их никакой деформации кривой, разумеется, не произойдет.

является детальное исследование свойств каждого конкретного преобразования, соответствующего определенному виду функций φ_1 и φ_2 . Здесь в первую очередь следует усмотреть за свойствами преобразующих функций конструктивное, геометрическое содержание рассматриваемого преобразования. Далее важно установить, какое новое выражение получают те или иные свойства преобразуемой кривой. Это даст ключ к тому, чтобы немедленно усмотреть за свойствами преобразуемой кривой свойства новой кривой. Наконец, существенно важно при изучении каждого преобразования определить инварианты этого преобразования, т. е. такие характеристики и свойства кривой, которые сохраняются при этом преобразовании. Установить эти характеристики и свойства кривой важно уже по одному тому, что они присущи не только данной кривой, но и всему множеству кривых, получаемых из данной путем рассматриваемого преобразования. Эти свойства являются, следовательно, глубокими, внутренними свойствами, отражающими родство таких кривых, которые как по своей форме, так и по своим индивидуальным качествам могут быть весьма и весьма различными.

Из сказанного следует, что геометрические преобразования открывают не только неограниченные возможности для образования новых кривых, но и позволяют обнаружить новые свойства уже известных кривых. Вместе с тем они приводят к установлению родственных связей между кривыми, получаемыми одна из другой путем применения определенного преобразования.

В связи с этим мы и хотим далее рассмотреть в общих чертах наиболее часто встречающиеся точечные преобразования, среди которых простейшим является так называемое *аффинное* преобразование.

2. Аффинные преобразования. На плоскости эти преобразования осуществляются формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}, \\ y &= a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где x и y — декартовы координаты точки преобразуемой кривой, а x_1 и y_1 — координаты соответствующей ей точки новой кривой.

Предполагается, что $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. При этом условии преобразование будет обратимым и взаимно однозначным.

Легко видеть, что свободные члены a_{13} и a_{23} в формулах (1) вызывают лишь смещение плоскости параллельно координатным направлениям, после того как она деформирована по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_{11}x_1 + a_{12}y_1, \\ y &= a_{21}x_1 + a_{22}y_1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эти последние формулы определяют *центральное аффинное преобразование*. Если в формулах этого преобразования коэффициенты таковы, что $a_{1k}a_{1l} + a_{2k}a_{2l} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=l \\ 0 & \text{при } k \neq l \end{cases}$, то деформации плоскости также не происходит, и преобразование вызывает лишь поворот ее вокруг начала координат на некоторый угол. Если указанная зависимость между коэффициентами не имеет места, то происходит фактическая деформация плоскости, а следовательно, и кривой, изображенной на ней.

Нетрудно показать, что в этом общем случае центральное аффинное преобразование можно всегда свести к так называемому *чистому аффинному преобразованию*, осуществляемому в прямоугольной системе формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda x_1, \\ y &= \mu y_1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

в которых коэффициенты λ и μ выражаются определенным образом через коэффициенты формул (2). Наглядный смысл такого преобразования прямо усматривается из формул (3) и заключается в сжатии или растяжении плоскости в направлении осей. Если при этом λ или μ отрицательно, то дополнительно происходит зеркальное отражение деформированной плоскости относительно оси y или оси x .

Частным случаем чистого аффинного преобразования является *подобие*, которое получается, если в формулах (3) $\lambda = \mu$.

Таким образом, общее аффинное преобразование, определяемое формулами (1), сводится к движению плоскости и к преобразованию ее по формулам (3).

Свойства аффинного преобразования таковы:

1. Непосредственно из формул преобразования вытекает, что при неограниченном возрастании x будет также неограниченно возрастать x_1 (то же относится к y и y_1). Отсюда следует, что если преобразуемая кривая имеет бесконечные ветви, то и аффинно соответствующая ей кривая будет кривой с бесконечными ветвями, причем сохранится и характер ветвей — параболические, т. е. не имеющие асимптот, ветви перейдут в параболические, а гиперболические — в гиперболические. Имея это в виду, говорят, что при аффинном преобразовании *бесконечно удаленные точки кривой переходят в бесконечно удаленные точки*.

2. *Порядок и класс алгебраической кривой являются инвариантами аффинного преобразования*; в частности, прямая переходит в прямую.

3. *Простое отношение трех точек, лежащих на одной прямой, является инвариантом аффинного преобразования*.

4. *Параллельные прямые переходят в параллельные*, как это вытекает из первого свойства; но угол, под которым пересекаются прямые, вообще говоря, изменяется.

5. Если U — площадь преобразуемой фигуры, а U_1 — площадь аффинно соответствующей ей фигуры, то справедливо равенство

$$U_1 = \Delta \cdot U, \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Перечисленные свойства аффинного преобразования и определяют так называемые *аффинные свойства кривых*, т. е. свойства, присущие всем аффинно родственным кривым.

3. Трилинейная система координат. В практике применений как проективного преобразования, так и более общих рациональных преобразований, которые мы хотим далее рассмотреть, многие преимущества по сравнению с обычной декартовой системой координат имеет так называемая *проективная* система координат, которую называют также *трилинейной*.

Проективными координатами точки $M(x, y)$ на плоскости называют три числа ξ_1, ξ_2, ξ_3 , пропорциональные линейным функциям ее декартовых координат x и y , т. е., по определению,

$$\left. \begin{aligned} \rho \xi_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ \rho \xi_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2, \\ \rho \xi_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где a_i, b_i, c_i — определенные числа, удовлетворяющие условию $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, а ρ — произвольный, не равный нулю множитель.

Из этого определения следует, что одновременное уменьшение или увеличение всех трех координат точки в одно и то же число раз не изменяет положения этой точки на плоскости. Именно такая неустойчивость проективных координат и дает особые преимущества при их применении.

Разрешая формулы (1) относительно x и y , получим:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \xi_1 & b_1 & c_1 \\ \xi_2 & b_2 & c_2 \\ \xi_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \xi_1 & c_1 \\ a_2 & \xi_2 & c_2 \\ a_3 & \xi_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \quad (2)$$

По этим формулам совершается переход от декартовых координат к проективным.

Нетрудно показать*), что геометрический смысл проективных координат заключается в том, что они, вообще говоря, пропорцио-

*) См., например, Н. А. Глаголев, Проективная геометрия, 1936.

нальны расстояниям точки M от трех неподвижных прямых, определяемых уравнениями:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0, \end{aligned}$$

которые при условии $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ образуют треугольник $O_1O_2O_3$, называемый координатным треугольником проективной системы.

Из равенств (1) следует, что уравнения $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ и $\xi_3 = 0$ являются уравнениями сторон координатного треугольника. Очевидно также, что вершины координатного треугольника находятся в точках $O_1(1, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0)$ и $O_3(0, 0, 1)$.

Частным случаем проективной системы координат является *однородная* система координат, особенно употребительная в практике. Она получается, когда одна из сторон координатного треугольника является бесконечно удаленной. Если при этом две другие стороны пересекаются под прямым углом, то однородные координаты точки (мы обозначим их через x_1 , x_2 , x_3) связаны с ее декартовыми координатами очень простыми соотношениями:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

откуда следует, что для перехода от однородной системы координат к декартовой достаточно x_1 заменить через x , x_2 — через y , а x_3 — через 1. Что касается формул, связывающих однородные координаты с проективными, то их легко получить из формул (1) и (2) соответствующими подстановками, причем окажется, что

$$\begin{aligned} \rho\xi_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3, \\ \rho\xi_2 &= a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3, \\ \rho\xi_3 &= a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3; \end{aligned}$$

$$x_1 = \begin{vmatrix} \xi_1 & b_1 & c_1 \\ \xi_2 & b_2 & c_2 \\ \xi_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & \xi_1 & c_1 \\ a_2 & \xi_2 & c_2 \\ a_3 & \xi_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \xi_1 \\ a_2 & b_2 & \xi_2 \\ a_3 & b_3 & \xi_3 \end{vmatrix}.$$

Большим преимуществом проективной системы координат по сравнению с декартовой является то, что в этой системе бесконечно удаленные точки плоскости имеют конечные координаты. Это дает возможность исследовать поведение кривой на бесконечности так же, как это делается при анализе формы кривой вблизи ее обычной точки. Особенное удобство проективные координаты имеют при изучении проективных свойств кривой, так как при проективных преобразованиях проективные координаты точки переходят снова в проективные, между тем как декартовы координаты при этих преобразованиях

не переходят в декартовы, ибо бесконечно удаленная прямая, вообще говоря, не остается бесконечно удаленной. Достоинство проективных координат заключается еще и в том, что при употреблении их все алгебраические линии выражаются однородными уравнениями, что приводит к большой простоте и единообразию аналитических операций, проводимых при исследовании кривой. Наконец, их большая по сравнению с декартовыми координатами общность позволяет производить более глубокие изменения формы уравнения кривой, чтобы сделать эту форму компактной по записи и выразительной по геометрическому существу. Надо заметить, однако, что при решении вопросов метрического характера преимущество остается за декартовой системой.

Мы приведем теперь некоторые примеры уравнений линий в проективных координатах.

Чтобы получить уравнение прямой $ax + by + c = 0$ в проективных координатах, заменим x и y их выражениями по формулам (2):

$$a \begin{vmatrix} \xi_1 & b_1 & c_1 \\ \xi_2 & b_2 & c_2 \\ \xi_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a_1 & \xi_1 & c_1 \\ a_2 & \xi_2 & c_2 \\ a_3 & \xi_3 & c_3 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \xi_1 \\ a_2 & b_2 & \xi_2 \\ a_3 & b_3 & \xi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

После соответствующих преобразований получим однородное относительно проективных координат уравнение $u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 = 0$, где

$$u_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Подобным образом можно прийти к заключению, что общее уравнение кривой 2-го порядка в проективных координатах является однородным уравнением вида

$$a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2 + 2a_{13}\xi_1\xi_3 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 + a_{33}\xi_3^2 = 0.$$

Используя это уравнение, покажем, с какой простотой решаются некоторые задачи в проективных координатах. Пусть, например, требуется найти уравнение кривой 2-го порядка, проходящей через три заданные точки. Примем эти точки за вершины координатного треугольника. Так как кривая должна пройти через вершину O_1 , то, полагая $\xi_2 = 0$ и $\xi_3 = 0$ в общем уравнении кривой, приведенном выше, получим $a_{11} = 0$. Подобным образом заключим, что $a_{22} = 0$ и $a_{33} = 0$; следовательно, искомое уравнение запишется в виде $a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{13}\xi_1\xi_3 + a_{23}\xi_2\xi_3 = 0$.

В уравнении кривой 2-го порядка в проективных координатах ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 являются линейными функциями декартовых координат. Полезно усвоить взгляд на переменные ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 в уравнении этой кривой и вообще в уравнении любой линии, как на сокращенные обозначения линейных функций. Это позволяет мысленно видеть за проективным уравнением кривой структуру ее уравнения в обычной си-

стеме. Такой взгляд как раз кладется в основу так называемого «способа сокращенных обозначений», введенного Плюккером. Сущность этого способа заключается в том, что любые, вообще говоря, выражения первого или высших порядков, входящие в декартово уравнение линии, обозначают одной буквой и рассматривают эти выражения в качестве своеобразных координат, чтобы затем непосредственным рассмотрением уравнения, без дополнительных выкладок, усматривать свойства кривых — «читать уравнения», как говорил Плюккер.

Он показал, в частности, что всякое уравнение кривой 3-го порядка может быть представлено в виде $pqr - s^3 = 0$, а уравнение кривой 4-го порядка — в виде $pqr - \Omega^2 = 0$, где p, q, r и s — линейные функции декартовых координат, а Ω — их квадратичная функция. Из первого уравнения можно немедленно «прочитать», что кривая 3-го порядка имеет, вообще говоря, три точки перегиба и что эти точки лежат на одной прямой. Действительно, пересекая кривую прямой $p = 0$, мы находим три точки пересечения в силу того, что порядок кривой равен 3, но все эти три точки будут принадлежать и прямой $s = 0$, а так как прямые $p = 0$ и $s = 0$ могут иметь лишь одну общую точку, то, следовательно, все указанные точки совпадают в одну, которая будет поэтому точкой перегиба кривой. Пересекая кривую прямыми $q = 0$ и $r = 0$, мы получим еще две точки перегиба, которые, как и первая, будут лежать на той же прямой $s = 0$.

Обратимся теперь к рассмотрению преобразования, обобщающего ранее рассмотренные аффинные преобразования и называемого *проективными*.

4. Проективные преобразования. В декартовой системе координат эти преобразования определяются формулами:

$$x = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}}{a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}}, \quad y = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}}{a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}}, \quad (1)$$

где по-прежнему x и y — координаты точки преобразуемой кривой, а x_1 и y_1 — координаты соответствующей ей точки. Предполагается,

что $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$. При этом условии преобразование будет обратимым и взаимно однозначным. В проективных координатах рассматриваемое преобразование определится формулами:

$$\left. \begin{aligned} p\xi_1 &= a_1\xi'_1 + b_1\xi'_2 + c_1\xi'_3, \\ p\xi_2 &= a_2\xi'_1 + b_2\xi'_2 + c_2\xi'_3, \\ p\xi_3 &= a_3\xi'_1 + b_3\xi'_2 + c_3\xi'_3, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — проективные координаты точки преобразуемой кривой, а ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 — координаты соответствующей ей точки по отношению к тому же координатному треугольнику.

Перечислим основные свойства проективного преобразования.

Из формул (1) следует, что точкам прямой $a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 = 0$ соответствуют бесконечно удаленные точки (этим проективное преобразование существенно отличается от аффинного, при котором образами бесконечно удаленных точек могли быть только бесконечно удаленные точки).

В силу линейности формул (2) *прямая при проективном преобразовании перейдет в прямую* и вообще линия n -го порядка — в линию того же порядка, линия n -го класса — в линию того же класса. Порядок и класс кривой являются, таким образом, инвариантами проективного преобразования.

Основным свойством этого преобразования является *постоянство двойного отношения* четырех точек и четырех лучей, откуда следует, что гармоническим четверкам элементов при проективном преобразовании соответствуют также гармонические четверки элементов.

Чтобы осветить вопрос о частных случаях проективного преобразования, посмотрим, существуют ли на плоскости точки, переходящие при преобразовании в себя, и если существуют, то каково их число. Очевидно, проективные координаты таких точек должны быть связаны зависимостью $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \xi'_1 : \xi'_2 : \xi'_3$, или

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= k\xi'_1, \\ \xi_2 &= k\xi'_2, \\ \xi_3 &= k\xi'_3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставим эти значения ξ_1, ξ_2, ξ_3 в формулы (2), заменив в этих формулах произвольный коэффициент ρ единицей; мы получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (a_1 - k)\xi'_1 + b_1\xi'_2 + c_1\xi'_3 &= 0, \\ a_2\xi'_1 + (b_2 - k)\xi'_2 + c_2\xi'_3 &= 0, \\ a_3\xi'_1 + b_3\xi'_2 + (c_3 - k)\xi'_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для совместности этих уравнений необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - k & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - k \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Найдя значения k из уравнения (5) и подставив эти значения в уравнения (4), получим систему совместных уравнений, решая которую и найдем координаты неподвижных точек. Различные типы решений кубического уравнения (5) определяют различные частные случаи проективного преобразования. Рассмотрим наиболее интересные из этих случаев.

Если все три корня k_1, k_2, k_3 действительны и различны, то налицо будут три двойные точки P_1, P_2, P_3 и соответственно три двойные прямые, соединяющие эти точки и образующие так назы-

ваемый инвариантный треугольник $P_1P_2P_3$ проективного преобразования. Удобно принять его за координатный треугольник, так как при этом формулы преобразования принимают очень простой вид

$$\xi_1 = k_1 \xi'_1, \quad \xi_2 = k_2 \xi'_2, \quad \xi_3 = k_3 \xi'_3. \quad (6)$$

Если один из корней уравнений (5) действительный, а два других — мнимые, то инвариантный треугольник имеет одну действительную вершину и одну действительную сторону, противоположную этой вершине.

Если, наконец, два действительных корня равны между собою, например $k_1 = k_2$, и если при этом все три уравнения (4) сводятся к одному, то задача определения двойных точек становится неопределенной. Двойной точкой в этом случае будет любая точка, находящаяся на прямой P_1P_2 , определяемой уравнениями (4), которая будет двойной прямой. Формулы преобразования (6) принимают в этом случае вид

$$\xi_1 = k_1 \xi'_1, \quad \xi_2 = k_1 \xi'_2, \quad \xi_3 = k_3 \xi'_3. \quad (7)$$

Эти формулы определяют частный, но особенно важный вид проективного преобразования, так называемую *гомологию*. Все прямые, соединяющие соответствующие в гомологии точки плоскости, проходят через одну точку — *центр гомологии* P_3 ; соответствующие в гомологии прямые будут пересекаться на одной и той же прямой P_1P_2 , называемой *осью гомологии*. Действительно, из формул (7) следует,

что $\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$, откуда непосредственно вытекает, что если какая-либо точка $M(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ лежит на прямой $a\xi_1 + b\xi_2 = 0$, проходящей через точку P_3 , то и точка $M_1(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$ будет также лежать на этой прямой. Равным образом, если точка M пробегает какую-либо прямую $a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0$, то соответствующая ей точка M_1 будет перемещаться по прямой $k_1(a\xi'_1 + b\xi'_2) + ck_3\xi'_3 = 0$, причем обе эти прямые проходят, как видно, через точку пересечения прямой $\xi_3 = 0$ с прямой $a\xi_1 + b\xi_2 = 0$.

Добавим еще, что частным случаем гомологии является *инволюционное* преобразование, которое получается, если в формулах (7) положить $k_1 = 1$, $k_3 = -1$. Формулы инволюционного преобразования, таким образом, имеют вид:

$$\xi_1 = \xi'_1, \quad \xi_2 = \xi'_2, \quad \xi_3 = -\xi'_3.$$

Если при этом прямая $\xi_3 = 0$ бесконечно удалена, то проективные координаты обратятся в однородные, переходя от которых к декартовым x и y , мы получим формулы преобразования в виде $x = -x_1$ и $y = -y_1$, т. е. центральную симметрию.

В заключение нашего краткого обозрения сущности проективных преобразований заметим следующее. Подвергая заданную кривую различным проективным преобразованиям, мы получим целый ряд новых

кривых. У всех этих кривых будут общими те свойства их, которые не нарушаются проективным преобразованием. Такие свойства называют *проективными*. По сравнению с аффинными свойствами проективные являются более глубокими и более общими свойствами кривых. Так, эллипс, гипербола и парабола с проективной точки зрения эквивалентны.

Все нераспадающиеся кривые 3-го порядка с точки зрения их проективных свойств можно разбить на пять групп. Представителем каждой группы является одна из так называемых *дивергентных парабол* (см. стр. 51). Любая из кривых одной группы может быть получена в результате сечения плоскостью конуса 3-го порядка, направляющей которого служит соответствующая дивергентная парабола. Заметим, что каждая из этих групп содержит бесконечное множество проективно неэквивалентных между собой кривых, отличающихся значением проективного инварианта (см. стр. 61).

Мы хотим далее рассмотреть преобразования, которые имеют с аффинными и проективными преобразованиями то общее, что преобразующие функции их являются также рациональными, но это уже будут функции 2-й степени.

Частным случаем таких преобразований является *инверсия*.

5. Инверсия. Геометрический смысл этого преобразования заключается в том, что оно переводит точку $M(x, y)$, лежащую на луче OM , где O — начало координат, в точку $M_1(x_1, y_1)$, которая лежит на той же прямой, причем расстояния OM и OM_1 связаны зависимостью

$$OM \cdot OM_1 = \text{const} = r^2. \quad (1)$$

Постоянная r^2 называется *степенью инверсии*.

Из этого определения сразу же вытекает, что точки, лежащие на окружности радиуса r с центром в точке O , переходят сами в себя. Точки, лежащие внутри круга, перейдут в его внешнюю область, и наоборот, точки внешней области перейдут внутрь круга. Инверсию называют также преобразованием *обратными радиусами-векторами* относительно окружности радиуса r , называемой основной окружностью.

Формулы (1) теряют смысл, если в качестве преобразуемой точки взять центр основной окружности. Однако ясно, что когда произвольная точка M приближается к точке O , соответствующая ей точка M_1 неограниченно удаляется. Поэтому полагают, что началу координат соответствует единственная бесконечно удаленная точка плоскости. Приняв это условие, мы вправе утверждать, что инверсия является взаимно однозначным преобразованием.

Формулы инверсии можно легко получить из равенства (1), переписав его в виде

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r^2. \quad (2)$$

Присоединяя сюда соотношение $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$, которое вытекает из того, что точки M и M_1 лежат на одной прямой, получим формулы преобразования в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{r^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \\ y &= \frac{r^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Если окружность, по отношению к которой инвертируется плоскость, отнесена к полярной системе координат с полюсом в центре окружности, то формула соответствия радиусов-векторов точек M и M_1 запишется в виде

$$\rho\rho_1 = r^2.$$

Перечислим основные свойства инверсии.

Прямая, проходящая через точку O — центр инверсии, переходит в прямую, также проходящую через O , а прямая, не проходящая через точку O , перейдет в окружность, проходящую через точку O .

Окружности, проходящей через центр инверсии, соответствует прямая, не проходящая через O . Окружности, не проходящей через точку O , соответствует окружность, также не проходящая через O . Если преобразуемая окружность проходит через какие-либо две соответствующие в инверсии точки P и Q , то и соответствующая ей окружность пройдет через эти точки, так как при преобразовании они только поменяются местами. Таким образом, если считать прямую окружностью бесконечно большого радиуса, то можно утверждать, что *при инверсии всякая окружность переходит в окружность*.

Существенно важным свойством инверсии является то, что она сохраняет величину угла между двумя прямыми или кривыми и относится, таким образом, к так называемым *конформным* преобразованиям. Отсюда следует, в частности, что всякая окружность, ортогональная к основной окружности, перейдет в себя; ортогональные прямые перейдут в ортогональные окружности.

Наконец, инверсия обладает и тем свойством, что отрезок между соответствующими точками M и M_1 делится гармонически концами того диаметра основной окружности, на котором они лежат. Поэтому каждая из точек M и M_1 находится на поляре другой точки относительно основной окружности.

Мы добавим еще, что основная окружность при инверсии может быть и мнимой, тогда как преобразование и в этом случае остается действительным. Так, если в качестве основной окружности взять мнимую окружность $x^2 + y^2 = -r^2$, то формулы преобразования

запишутся в виде

$$x = -\frac{r^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2},$$

$$y = -\frac{r^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2},$$

и будут отличаться от формул (3) только знаками правых частей. Отсюда следует, что инверсия по отношению к мнимой окружности отличается от инверсии относительно действительной окружности тем, что новая кривая повернута на 180° вокруг центра инверсии по отношению к тому положению, которое она занимает при инверсии относительно действительной окружности.

Мы рассмотрим далее так называемые квадратичные преобразования, частным случаем которых является инверсия.

6. Квадратичные преобразования. В проективных координатах, в основу которых полагается специально подобранный координатный треугольник, *бirationальные квадратичные преобразования* выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \rho \xi_1 &= \xi'_2 \xi'_3, & \rho_1 \xi'_1 &= \xi_2 \xi_3, \\ \rho \xi_2 &= \xi'_1 \xi'_3, & \rho_1 \xi'_2 &= \xi_3 \xi_1, \\ \rho \xi_3 &= \xi'_1 \xi'_2, & \rho_1 \xi'_3 &= \xi_3 \xi_1, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — проективные координаты преобразуемой точки, а ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 — координаты соответствующей ей точки; ρ и ρ_1 — постоянные, неопределённые множители. Из формул (1) следует, что преобразование является рациональным в том и другом направлениях и что преобразующие функции — квадратичные, откуда и проистекает название бирационального квадратичного преобразования. В частном случае, если две стороны координатного треугольника взаимно перпендикулярны, а третья бесконечно удалена, проективные координаты обратятся в однородные и формулы преобразования запишутся в виде

$$\rho x_1 = x'_2 x'_3, \quad \rho x_2 = x'_1 x'_3, \quad \rho x_3 = x'_2 x'_1.$$

Переходя к декартовым координатам, получим формулы

$$x = \frac{1}{x_1}, \quad y = \frac{1}{y_1},$$

которые и выражают квадратичное преобразование в декартовой системе.

Из формул (1) следует, что при $\xi_1 = 0$ получим $\xi'_2 = 0$ и $\xi'_3 = 0$, следовательно, каждой точке стороны $\xi_1 = 0$ координатного треугольника соответствует его вершина, и наоборот, вершине соответствует противолежащая сторона этого треугольника. Это свойство квадратичного преобразования позволяет сразу же прийти к следующему заключению. Если уравнение прямой $a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0$ подвергнуть

преобразованию (1), то получим уравнение $a\xi_2\xi_3 + b\xi_1\xi_3 + c\xi_1\xi_2 = 0$, выражающее кривую 2-го порядка; а так как произвольная прямая пересекает каждую сторону координатного треугольника (в собственной или несобственной точке), то, очевидно, соответствующая ей кривая 2-го порядка проходит через все три вершины координатного треугольника. Некоторой особенностью отличается случай, когда преобразуемая прямая имеет уравнение $a\xi_1 + b\xi_2 = 0$ и, следовательно, проходит через одну из вершин координатного треугольника. Соответствующая ей кривая 2-го порядка будет иметь уравнение $a\xi_2\xi_3 + b\xi_1\xi_3 = 0$, которое равносильно уравнениям $\xi_2 = 0$ и $a\xi_2 + b\xi_3 = 0$, выражающим две прямые, одна из которых — $\xi_2 = 0$ — совпадает со стороной координатного треугольника.

Более общая теорема о соотношении между преобразуемой и новой кривыми утверждает, что *кривой n -го порядка при квадратичном преобразовании соответствует, вообще говоря, кривая порядка $2n$, которая в вершинах координатного треугольника имеет n -кратные точки*. Оговорка «вообще говоря» в условии этой теоремы необходима, так как в частном случае, когда преобразуемая кривая сама проходит через вершины координатного треугольника, порядок новой кривой будет ниже, чем $2n$. Действительно, пусть заданная кривая проходит через вершины этого треугольника соответственно k_1, k_2, k_3 раз. Новая кривая, которую мы получим, применив к заданной кривой квадратичное преобразование, с формальной стороны (т. е. в соответствии с формулами преобразования) должна иметь порядок $2n$. Однако нужно учесть, что если кривая проходит через какую-либо вершину k_1 раз, то по свойству квадратичного преобразования каждая ее точка, совпадающая с какой-либо вершиной треугольника, перейдет в противоположную сторону этого треугольника, и эта сторона, таким образом, войдет в качестве компоненты в новую кривую k_1 раз. То же следует сказать и о точках прохождения данной кривой через две другие вершины. Отсюда следует, что новая кривая $2n$ -го порядка будет состоять из кривой в собственном смысле и $k_1 + k_2 + k_3$ прямых, совпадающих со сторонами координатного треугольника. Не принимая во внимание эти прямолинейные компоненты новой кривой, мы приходим к заключению, что порядок ее будет равен $2n - k_1 - k_2 - k_3$.

Точно так же нуждается в уточнении и та часть приведенной выше теоремы, в которой говорится, что новая кривая имеет n -кратные точки в вершинах координатного треугольника. В случае, когда заданная кривая проходит через вершины этого треугольника, кратность точек новой кривой в вершинах треугольника понизится. Действительно, пусть снова преобразуемая кривая проходит через вершины треугольника P_1, P_2, P_3 соответственно k_1, k_2, k_3 раз; пусть, далее, эта кривая n -го порядка пересекает какую-либо из сторон треугольника, например сторону $\xi_1 = 0$, в n точках, из числа которых k_2 и k_3 совпадают с вершинами P_2 и P_3 . Образы этих $k_2 + k_3$

точек не должны быть относимы к новой кривой, так как эти точки являются прообразами противоположащих сторон координатного треугольника. Отсюда следует, что кратности k'_1 , k'_2 и k'_3 точек новой кривой в вершинах координатного треугольника определяются по формулам:

$$k'_1 = n - k_2 - k_3,$$

$$k'_2 = n - k_1 - k_3,$$

$$k'_3 = n - k_1 - k_2.$$

Так, например, кривая 2-го порядка $\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1 = 0$, проходящая через каждую вершину координатного треугольника 1 раз, перейдет не в кривую 4-го порядка, как это было бы в общем случае, а в линию порядка $4 - 1 - 1 - 1 = 1$, которая в каждой вершине треугольника будет иметь не двойную точку, а точку кратности $2 - 1 - 1 = 0$.

В конце предыдущего параграфа было замечено, что инверсия является частным случаем квадратичного преобразования. Именно, если в формулах, определяющих инверсию, y заменить через $-y$, то инверсия, дополненная этим преобразованием, представляет собой квадратичное преобразование по отношению к такому координатному треугольнику, две вершины которого совпадают с циклическими точками плоскости.

Заметим в заключение, что квадратичные преобразования в свою очередь являются частным случаем *бirationальных преобразований*, осуществляемых в обоих направлениях рациональными функциями и называемых по имени выдающегося итальянского геометра Кремоны *кремоновыми преобразованиями*. Как показал Клиффорд, все кремоновы преобразования на плоскости могут быть осуществлены последовательным проведением квадратичных преобразований.

7. Двойственные преобразования. Рассмотренные нами до сих пор преобразования кривых были точечными преобразованиями, т. е. относили каждой точке заданной кривой определенную точку новой кривой. В этом параграфе мы займемся такими преобразованиями, в основу которых положена идея соответствия точки и прямой. Эта идея реализуется с помощью введенного Плюккером понятия «координат прямой», под которыми разумеют значения коэффициентов u и v в уравнении прямой

$$ux + vy + 1 = 0. \quad (1)$$

Если u и v заданы как функции x и y — координат точки, то тем самым каждой точке (x, y) ставится в соответствие определенная прямая (1). Простейший случай такого соответствия мы получим, полагая, что координаты u и v прямой определены как дробно-

линейные функции x и y по формулам

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \\ v &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Пусть на плоскости задана некоторая кривая

$$f(x, y) = 0. \quad (3)$$

Возьмем на этой кривой точку $M(x, y)$; по формулам (2) этой точке соответствует определенная прямая (1). Если заставить точку M перемещаться вдоль кривой (3), то соответствующая ей прямая, также перемещаясь, будет определять новую кривую — огибающую семейства тех прямых, с которыми она совпадает при своем перемещении. Так как производящая прямая в каждом своем положении будет играть роль касательной к новой кривой, то уравнение этой кривой в тангенциальных координатах

$$F(u, v) = 0 \quad (4)$$

мы получим исключением из (3) x и y с помощью (2).

Если в качестве преобразуемой линии (3) взять прямую, то уравнение (4) окажется линейным относительно u и v и, следовательно, выразит пучок прямых, проходящих через некоторую точку. Эта точка и будет представлять собой «оггибающую», т. е. новую «кривую», соответствующую заданной прямой линии. Таким образом, при двойственном преобразовании не только точке соответствует прямая, но и, обратно, прямой соответствует точка.

Это заключение выражает так называемый принцип двойственности, применения которого во всей полноте раскрываются в проективной геометрии. Им определяется и название рассматриваемого преобразования.

В общем случае двойственное преобразование не будет инволюционным, т. е. приведя в соответствие заданной точке определенную прямую с помощью определенного двойственного преобразования, мы, применяя к этой прямой то же самое преобразование, получим не заданную точку, а, вообще говоря, некоторую иную. Точно так же, если к новой кривой применить то же преобразование, которым она была получена, то получится не прежняя, а иная кривая. Однако если коэффициенты в формулах (2) таковы, что

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32},$$

то преобразование будет инволюционным, т. е. если точке M соответствует прямая L , то при том же преобразовании прямой L будет соответствовать та же самая точка M , а новая кривая обратится в первоначально заданную.

Этот частный случай двойственного преобразования называется *полярным преобразованием* и рассматривается в курсах аналитической геометрии. Соотношение между преобразуемой и новой кривыми заключается здесь в том, что каждая из них представляет собой геометрическое место полюсов, полярами которых относительно некоторой кривой 2-го порядка служат касательные к другой кривой.

Возвращаясь к общему случаю двойственного преобразования, заметим, что если в качестве преобразуемой линии взять кривую n -го порядка, то уравнение (4) новой кривой окажется уравнением n -й степени относительно u и v . Это показывает, что *кривая n -го порядка переходит при двойственном преобразовании в кривую n -го класса*.

Так устанавливается соответствие между двумя кривыми, для одной из которых первичными элементами служат точки, а для другой — прямые. При движении точки по первой кривой соответствующая ей прямая будет перемещаться по плоскости, касаясь второй кривой. Очевидно, характер движения точки по первой кривой определит поведение касательной ко второй кривой.

Эти соображения позволяют усмотреть особенности формы новой кривой за особенностями формы заданной кривой. Так, например, то обстоятельство, что при переходе через точку возврата преобразуемой кривой двигающаяся по ней точка меняет направление своего движения на прямо противоположное, отразится на поведении касательной к новой кривой так, что направление вращения этой касательной изменится на противоположное, а такое явление можно наблюдать в точке перегиба. Таким образом, *точке возврата заданной кривой соответствует на новой кривой точка перегиба*. Точно так же легко понять, что особой точке заданной кривой должна соответствовать «особая» касательная новой кривой, а именно, *двойной точке — двойная касательная* (т. е. прямая, касающаяся кривой в двух точках), *изолированной точке*, в которой пересекаются мнимые ветви кривой, — *изолированная касательная*. Непосредственно из свойств двойственного преобразования следует также, что если k точек заданной кривой лежат на одной прямой, то k соответствующих им касательных ко второй кривой пройдут через одну и ту же точку.

В случае полярного преобразования соотношения между особенностями форм соответствующих кривых будут взаимно двойственны.

Обобщая двойственное преобразование, в основу которого полагалась идея соответствия точки и прямой, мы приходим к преобразованиям, в которых точке ставится в соответствие кривая. Аналитически это преобразование определяется равенством

$$F(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad (5)$$

которым определенной точке $M(x_1, y_1)$ приводится в соответствие

кривая (5). Если полагать, что точка M перемещается по некоторой кривой

$$f(x_1, y_1) = 0, \quad (6)$$

то соответствующая ей кривая будет также перемещаться и при этом, вообще говоря, деформироваться. Огибающая ее отдельных положений и будет той новой кривой, которая ставится в соответствие кривой (6). При наличии равенства (6) семейство кривых (5) будет однопараметрическим и, следовательно, уравнение новой кривой может быть получено по известному правилу составления уравнения огибающей однопараметрического семейства кривых.

Основное свойство преобразования, определяемого соответствием точки и кривой, заключается в том, что двум касающимся кривым соответствуют кривые, также касающиеся между собой. В связи с этим такое преобразование называют *касательным преобразованием*.

Заканчивая эту главу, посвященную обзору основных типов преобразований кривых, мы приведем следующие слова Дедекинда: «Чрезвычайно важную и характерную особенность нашего ума представляет собою процесс, заключающийся в том, что мы относим одну вещь к другой».

Идея соответствия двух объектов пронизывает все математические дисциплины и применительно к геометрии дает могучие средства для изучения новых геометрических форм и их свойств, как только эти новые формы приведены по определенному закону в соответствие с уже известными и изученными формами.

Этот закон соответствия и определяется каждый раз, когда задано определенное преобразование, которым одна геометрическая форма переводится в другую.

Исключительное значение теории геометрических преобразований в общей теории кривых становится, с этой точки зрения, очевидным.

ГЛАВА III

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ 3-ГО ПОРЯДКА

1. Классификация Ньютона. Изложение общих сведений о кривых 3-го порядка мы начнем с вопросов классификации.

Первая классификация кривых 3-го порядка была выполнена Ньютоном, который и положил тем самым начало систематическому исследованию этих кривых.

Среди различных принципов, полагавшихся в основу классификации кривых 3-го порядка, наиболее удобным является подразделение их на группы в зависимости от количества и характера бесконечных ветвей.

Общее уравнение кривых 3-го порядка записывается в виде

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky + L = 0. \quad (1)$$

Пусть $y = kx + b$ — уравнение асимптоты кривой. Как известно, для определения параметров k и b необходимо подставить в уравнение этой кривой вместо y выражение $kx + b$ и, взяв в полученном таким образом уравнении коэффициенты двух членов со старшими степенями x , приравнять их нулю. Получаемая при этом система с неизвестными k и b и служит для их определения.

Для кривой (1) угловой коэффициент асимптоты определится равенством

$$A + 3Bk + 3Ck^2 + Dk^3 = 0. \quad (2)$$

Второй параметр асимптоты — ее начальная ордината b — определится равенством

$$(B + 2Ck + Dk^2)b = -(E + 2Fk + Gk^2), \quad (3)$$

где k имеет значение, найденное из уравнения (2).

Уравнение (2), будучи кубическим относительно k , даст нам или три действительных значения для k , или одно действительное и два комплексных. Эти значения k и будут определять направление бесконечных ветвей и, разумеется, их количество. Однако нельзя утверждать, что определяемые таким образом бесконечные ветви будут обязательно иметь асимптоты. Для того чтобы асимптота в направле-

нии k действительно существовала, необходимо, чтобы при этом значении k начальная ордината b определялась из равенства (3), чего может и не быть.

Таким образом, количество бесконечных ветвей кривой (1) зависит от числа действительных корней уравнения (2); характер ветвей определится равенством (3).

Если при $k = k_1$, где k_1 — действительный корень уравнения (2), уравнение (3) имеет решение — действительное число b_1 , то соответствующая ветвь кривой будет иметь асимптоту $y = k_1 x + b_1$, т. е. будет ветвью *гиперболического* типа. Если же решение уравнения (3) при $k = k_1$ не существует или оказывается неопределенным, то соответствующая ветвь кривой будет *параболической*, т. е. не будет иметь асимптоты. Очевидно, параметр b не определяется уравнением (3), если одновременно

$$B + 2Ck + Dk^2 = 0, \quad (4)$$

$$E + 2Fk + Gk^2 \neq 0 \quad (5)$$

или

$$B + 2Ck + Dk^2 = 0, \quad (6)$$

$$E + 2Fk + Gk^2 = 0. \quad (7)$$

В первом случае b не существует, во втором — остается неопределенным. Рассмотрим, когда эти случаи возможны.

1. Если все три корня уравнения (2) действительны и среди них нет кратных, то левая часть равенства (4), являющаяся производной от левой части уравнения (2), не может равняться нулю и следовательно, соответственно трем значениям k будут определены три значения для b ; кривая имеет три асимптоты трех гиперболических ветвей.

2. Если уравнение (2) имеет один действительный корень и два комплексных, то равенство (4) также не будет удовлетворяться и соответствующее значение для b выразится определенным числом — кривая будет иметь одну асимптоту.

3. Если уравнение (2) имеет действительный двукратный корень, то производная левой части уравнения (2) обратится в нуль и, следовательно, значение двукратного корня удовлетворит равенству (4). Если оно при этом удовлетворит также неравенству (5), то b не существует и, следовательно, кратное значение корня соответствует параболической ветви кривой, а третьему, однократному значению корня будет соответствовать гиперболическая ветвь.

4. Если двукратный действительный корень уравнения (2), обязательно удовлетворяя равенству (6), удовлетворяет и равенству (7), то значение b оказывается неопределенным, так как уравнение (3) обращается в тождество. При отыскании асимптот алгебраической кривой в подобном случае приравнивается нулю коэффициент

следующего старшего члена равенства, которое получается, если в уравнение (1) подставить вместо y выражение $kx + b$. В нашем случае это будет коэффициент при x ; уравнение, которым должно определиться значение b , окажется квадратным:

$$b^2(C + Dk) + 2b(F + Gk) + H + Kk = 0. \quad (8)$$

Обратимся теперь к рассматриваемому нами случаю. Так как мы предполагали корень уравнения (2) двукратным, то $C + Dk \neq 0$ и, значит, уравнение (8) доставит нам два значения для b , которые могут быть действительными различными, равными или комплексными. Поэтому двукратному корню уравнения (2) соответствуют две параллельные асимптоты, которые могут совпасть в одну, а могут быть мнимыми.

5. Положим теперь, что уравнение (2) имеет трехкратный корень. При этом значении корня обращается в нуль не только первая, но и вторая производная от левой части уравнения (2), т. е. имеют место равенства

$$B + 2Ck + Dk^2 = 0$$

и

$$C + Dk = 0.$$

Здесь возможны следующие подслучаи:

а) если $E + 2Fk + Gk^2 \neq 0$, то b не существует и кривая не имеет асимптот; значение трехкратного корня соответствует в этом случае параболической ветви кривой;

б) если $E + 2Fk + Gk^2 = 0$, а $F + Gk \neq 0$, то уравнение (3) для определения b уже не годится и заменяется уравнением (8), которое станет линейным, так как $C + Dk = 0$, и доставит только одно значение b ; следовательно, кривая будет иметь только одну асимптоту;

в) если $E + 2Fk + Gk^2 = 0$ и $F + Gk = 0$, но при этом $H + Kk \neq 0$, то b не существует и, следовательно, асимптот у кривой нет (заметим, что если и $H + Kk = 0$, то кривая распадается на три параллельные прямые).

На основе проведенных исследований имеется возможность, в зависимости от вида корней уравнения (2), подразделить все кривые 3-го порядка на семь групп, которые мы и приводим, сохраняя название каждой группы, данное Ньютоном, и указывая характерные формы кривых каждой группы.

1-я группа: все три корня уравнения (2) действительные и различные; кривая имеет три асимптоты и три гиперболические ветви. Кривые этой группы носят название *hyperbolae redundantes* (раскинутые гиперболы); уравнения их могут быть приведены к виду

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a > 0.$$

Основные формы кривых этой группы определяются видом корней вспомогательного уравнения

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0, \quad (9)$$

причем различаются следующие случаи:

1) все корни уравнения (9) комплексные или все действительные различные; кривая состоит из трех гиперболических ветвей и овала или из двух гиперболических ветвей и одной прямолинейной ветви (*прямолинейной* называется гиперболическая ветвь, вытянутая вдоль прямой, являющейся ее асимптотой, которую она пересекает и к которой приближается в двух прямо противоположных направлениях и с разных сторон) (рис. 2, а и б);

2) два корня уравнения (9) действительные и различные, а два других — комплексные; кривая состоит из трех гиперболических ветвей (рис. 2, в);

3) два корня уравнения (9) равны между собой, а остальные корни или комплексные, или одновременно больше или меньше равных корней; кривая состоит из трех гиперболических ветвей, две из которых пересекаются между собой, или из трех гиперболических ветвей, одна из которых имеет узловую точку (рис. 2, г и д);

4) все корни уравнения (9) действительны, причем два средних по величине равны между собой; кривая состоит из трех гиперболических ветвей и имеет изолированную точку (рис. 2, е);

5) три корня уравнения (9) равны между собой; кривая состоит из трех гиперболических ветвей, одна из которых имеет точку возврата (рис. 2, ж).

2-я группа: уравнение (2) имеет один действительный корень; кривая имеет одну асимптоту и одну бесконечную ветвь прямолинейного типа. Кривые этой группы называются *hyperbolae defectivae* (*дефективные гиперболы*); уравнения их имеют вид

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a < 0.$$

Основные формы кривых этой группы определяются видом корней того же вспомогательного уравнения (9), причем различают следующие случаи:

1) все корни уравнения (9) действительны и различны; кривая состоит из одной прямолинейной ветви и овала (рис. 3, а);

2) два корня уравнения (9) действительны и различны, два других — комплексные; кривая состоит из одной бесконечной ветви прямолинейного характера (рис. 3, б);

3) среди четырех действительных корней уравнения (9) два средних по величине равны между собой; кривая представляет бесконечную прямолинейную ветвь, имеющую узел (рис. 3, в);

4) среди четырех действительных корней уравнения (9) два больших или два меньших равны между собой. Кривая состоит из изолированной точки и бесконечной прямолинейной ветви (рис. 3, з);

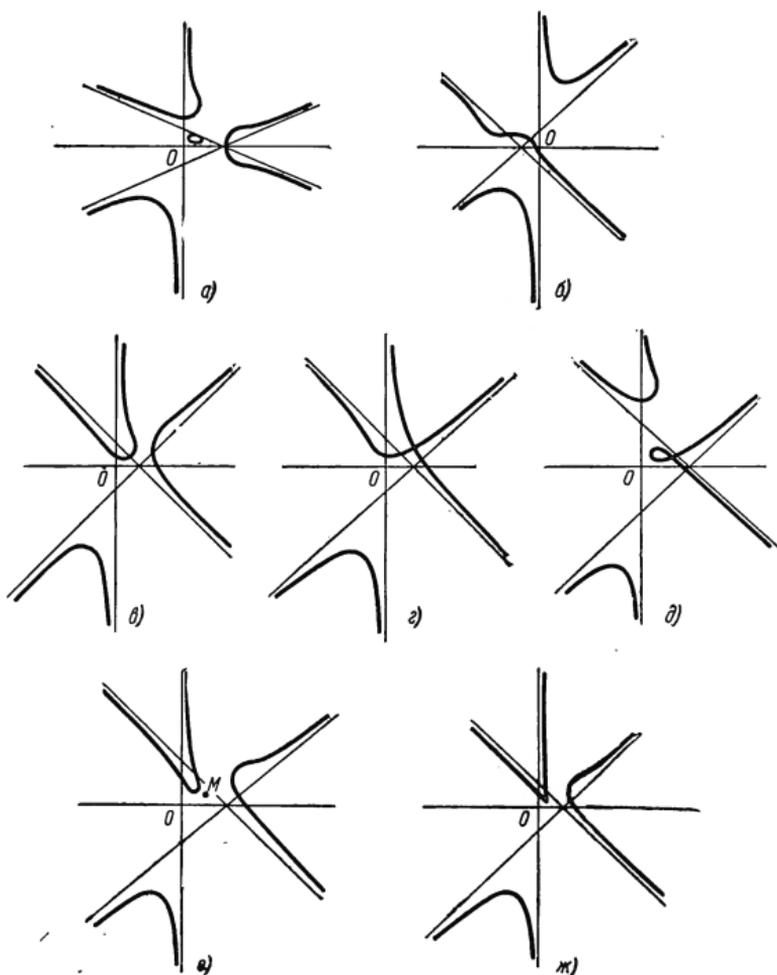


Рис. 2.

5) уравнение (9) имеет трехкратный корень. Кривая представляет собой бесконечную прямолинейную ветвь, имеющую точку возврата (рис. 3, д).

3-я группа: два корня уравнения (2) равны между собой, но не удовлетворяют равенству $E + 2Fk + Gk^2 = 0$; кривые имеют две бесконечные ветви смешанного характера, но только одну асимптоту. Кривые этой группы называются *hyperbolae parabolicae* (*параболические гиперболы*); уравнения их могут быть приведены к виду

$$xy^2 + ey = bx^2 + cx + d.$$

Основные формы кривых определяются видом корней уравнения

$$bx^2 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0. \quad (10)$$

Здесь различают следующие случаи:

1) корни уравнения (10) действительны и различны; если знаки корней одинаковые, то кривая состоит из двух бесконечных ветвей,

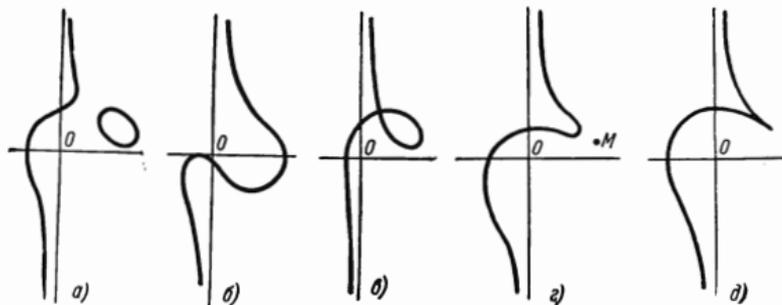


Рис. 3.

одна из которых прямолинейная, если же корни имеют разные знаки, то кривая состоит из двух бесконечных ветвей и овала (рис. 4, а и б);

2) уравнение (10) имеет один действительный корень; кривая состоит из двух бесконечных ветвей смешанного типа (рис. 4, в);

3) два больших корня уравнения (10) равны между собой по модулю; кривая состоит из двух пересекающихся ветвей, если корни имеют разные знаки, и из двух бесконечных ветвей, на одной из которых узел, если корни имеют одинаковые знаки (рис. 4, г и д);

4) два меньших корня уравнения (10) равны между собой; кривая имеет изолированную точку и состоит из двух бесконечных ветвей (рис. 4, е);

5) уравнение (10) имеет трехкратный корень; кривая состоит из двух бесконечных ветвей, на одной из которых точка возврата (рис. 4, ж).

4-я группа: два корня уравнения (2) равны между собой и удовлетворяют равенству $E + 2Fk + Gk^2 = 0$; кривая имеет одну, две или три асимптоты, причем две из этих трех асимптот

параллельны между собой и могут быть различными, совпадающими и мнимыми. Кривые этой группы называются *hyperbolicmi sectionum*

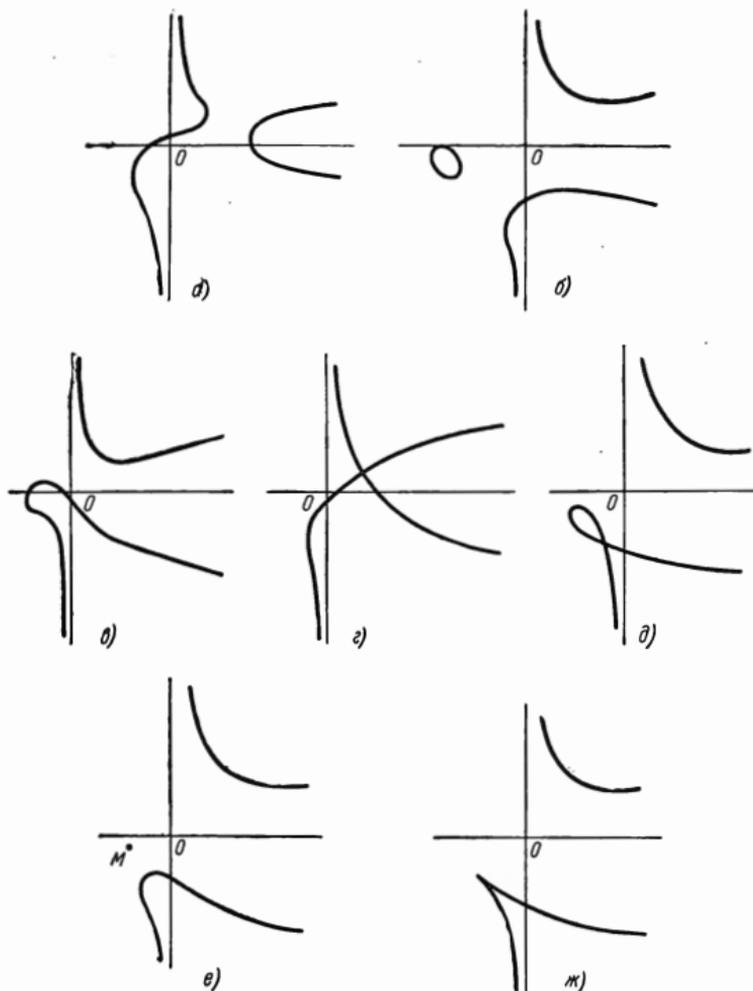


Рис. 4.

conicatum (гиперболизмы конических сечений); их уравнения приводятся к виду

$$xy^2 + ey = bx^2 + cx + d.$$

Основные формы кривых определяются знаком выражения $a^2 - ce^2$ и знаком коэффициента c . Здесь различают следующие случаи:

1) при положительном c кривая имеет две параллельные асимптоты и бесконечно удаленную узловую точку, причем если $a^2 - ce^2 > 0$, то кривая состоит из трех гиперболических ветвей, у одной из которых параллельные асимптоты, а если $a^2 - ce^2 < 0$, то кривая состоит из трех гиперболических ветвей, на одной из которых точка перегиба (рис. 5, а и б);

2) при отрицательном c кривая представляет собой бесконечную ветвь прямолинейного характера, имеющую бесконечно удаленную изолированную точку (рис. 5, в);

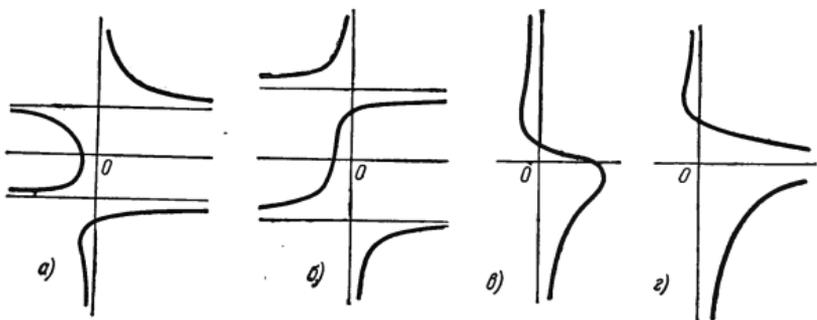


Рис. 5.

3) если $c=0$, то кривая состоит из двух бесконечных ветвей с общими асимптотами и имеет бесконечно удаленную точку возврата (рис. 5, з).

5-я группа: все три корня уравнения (2) равны между собой, но не удовлетворяют уравнению $E + 2Fk + Gk^2 = 0$; кривая имеет бесконечную ветвь параболического типа; асимптот нет. Кривые этой группы называются *parabolae divergentes* (расходящиеся параболы); их уравнения приводятся к виду

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Основные формы кривых этой группы определяются видом корней вспомогательного уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (11)$$

Здесь различают следующие случаи:

1) если уравнение (11) имеет один действительный корень, то кривая состоит из одной бесконечной ветви параболического типа (рис. 6, а);

2) если корни уравнения (11) действительны и различны, то кривая состоит из параболической ветви и овала (рис. 6, б);

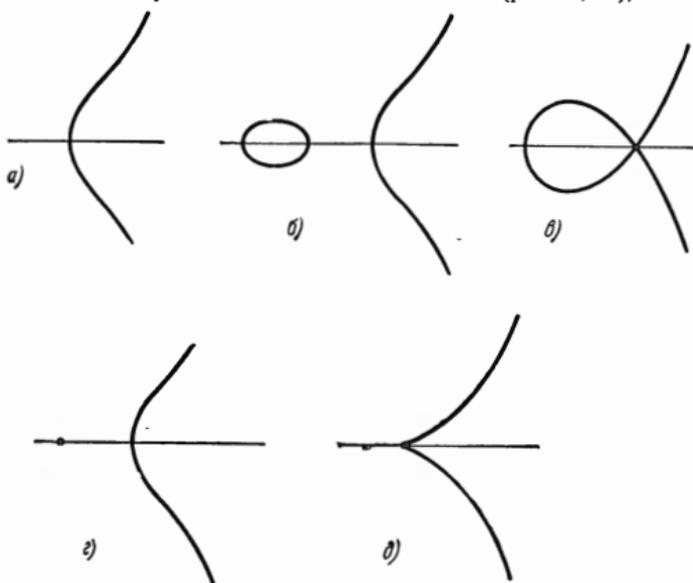


Рис. 6.

3) если все корни уравнения (11) действительны и среди них два больших корня равны между собой, то кривая состоит из параболической ветви, имеющей узловую точку (рис. 6, в);

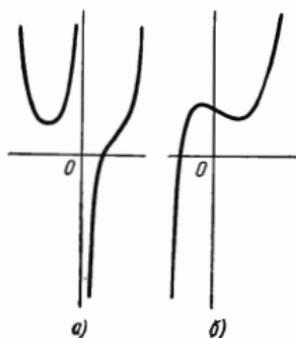


Рис. 7.

4) если все корни уравнения (11) действительны и среди них два меньших корня равны между собой, то кривая состоит из параболической ветви, имеющей изолированную точку (рис. 6, г);

5) если все корни уравнения (11) равны между собой, то кривая представляет собой параболическую ветвь, имеющую точку возврата (рис. 6, д).

6-я группа: все три корня уравнения (2) равны между собой и удовлетворяют равенству $E + 2Fk + Gk^2 = 0$, но не удовлетворяют равенству $F + Gk = 0$; кривая имеет две бесконечные ветви и только одну асимптоту (рис. 7, а); называется она *tridens* (трезубец) и имеет уравнение

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

7-я группа: все корни уравнения (2) равны между собой и удовлетворяют уравнениям $E + 2Fk + Gk^2 = 0$ и $F + Gk = 0$; кривая представляет собой параболическую ветвь (рис. 7, б), называется *parabola cubica* (кубическая парабола) и имеет уравнение

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

2. Другие принципы классификации. Особое место в классификации Ньютона занимает пятая группа так называемых дивергентных парабол и вот в связи с каким обстоятельством. Известно, что все кривые 2-го порядка могут быть получены путем проектирования одной из них. Естественно поэтому поставить вопрос о том, можно ли среди кривых 3-го порядка найти такие, проектируя которые можно было бы получить все остальные.

Ответом на этот вопрос служит замечательная теорема Ньютона, согласно которой *каждая кривая 3-го порядка может быть рассматриваема как сечение конуса, направляющей которого служит одна из пяти дивергентных парабол.*

Значение этой теоремы заключается прежде всего в том, что она позволяет свести изучение проективных свойств всех кривых 3-го порядка к изучению проективных свойств пяти дивергентных парабол.

Эта теорема дает также основу для проективной классификации кривых 3-го порядка, именно, для подразделения их на пять категорий, в каждой из которых объединяются кривые, получаемые проектированием определенной дивергентной параболы.

Помимо ньютоновской классификации кривых 3-го порядка, имеется классификация, предложенная Пюккером, полагавшим в основу подразделения кривых на группы природу их бесконечно удаленных точек *). Соотношения между группами классификаций Ньютона и Пюккера исследовал Кэли.

Среди попыток присвоить отдельным кривым 3-го порядка определенные названия на основе свободной ассоциации форм этих кривых с формами, взятыми из областей ботаники, архитектуры и обыденной жизни, любопытна попытка, предпринятая Ньюменом (1869).

В списке Ньюмена кривые 3-го порядка выступают в роли самых различных образов; здесь можно встретить розу, лилию, тюльпан, часы с маятником, качели и стул, пилястру и даже надгробный камень (всего сорок названий!).

*) Он пользовался для этой цели установленным им так называемым асимптотическим уравнением кривых 3-го порядка $C_1C_2C_3 + \lambda C = 0$, где $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$ — уравнения асимптот кривой, среди которых две могут быть мнимыми, а $C = 0$ — уравнение прямой, на которой лежат точки пересечения кривой с ее асимптотами.

3. Основные теоремы.

1. Пусть некоторая прямая, уравнение которой можно записать кратко в виде $u=0$, пересекает данную кривую 3-го порядка в точках A, A_1, A_2 (рис. 8), а другая прямая $v=0$ пересекает ее в точках B, B_1, B_2 . Проведем прямые AB, A_1B_1, A_2B_2 , уравнения которых $p=0, q=0$ и $r=0$. Так как мы знаем лишь две точки пересечения каждой из этих прямых с данной кривой, то каждая из них пересечет эту кривую еще в третьей точке; назовем эти точки C, C_1, C_2 , а уравнение прямой CC_1 выразим равенством $w=0$.

Уравнение $pqr=0$ и уравнение $uvw=0$ являются уравнениями 3-й степени и, значит, их можно рассматривать как уравнения кривых 3-го порядка (выродившихся). Таким образом, мы имеем три кри-

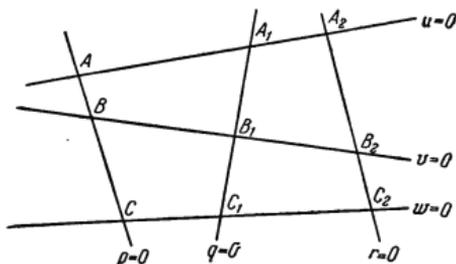


Рис. 8.

вых 3-го порядка — данную кривую и кривые $pqr=0$ и $uvw=0$. Эти три кривые проходят через восемь точек $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C$ и C_1 , но так как две кривые 3-го порядка должны иметь в общем случае девять общих точек, то, очевидно, наши кривые имеют 9-ю общую точку. Чтобы убедиться в том, что эта 9-я точка будет точкой C_2 , достаточно усмотреть, что она, находясь на кривой $uvw=0$, не может принадлежать прямой $u=0$ и прямой $v=0$ и, следовательно, находится на прямой $w=0$, т. е. на прямой CC_1 .

2. (Теорема Маклорена.) Если в трех точках пересечения кривой 3-го порядка с некоторой прямой провести к этой кривой касательные, то точки их пересечения с кривой лежат также на одной прямой.

Действительно, обращаясь к проделанному выше построению, предположим, что прямая $v=0$ неограниченно приближается к прямой $u=0$. Точки B, B_1 и B_2 будут также неограниченно приближаться к точкам A, A_1 и A_2 , и следовательно, прямые AB, A_1B_1 и A_2B_2 в пределе обратятся в касательные к кривой, а точки C, C_1 и C_2 их пересечения с кривой по-прежнему будут находиться на одной прямой.

3. Если прямая проходит через две точки перегиба кривой 3-го порядка, то она обязательно пройдет и через третью точку перегиба этой кривой.

Действительно, если точки A и A_1 прямой $u=0$ являются точками перегиба кривой, то касательные в этих точках и в точке A_2 , согласно предыдущей теореме, будут пересекать кривую в трех точках, лежащих на одной прямой; но так как в каждой точке перегиба кривая имеет с касательной три общие, совпавшие друг с другом точки, то точки C и C_1 совпадут с точками A и A_1 . Очевидно, при этом и точка C_2 должна совпасть с точкой A_2 . В точке A_2 совпадут, таким образом, три общие точки прямой $u=0$ и кривой; следовательно эта точка будет третьей точкой перегиба заданной кривой 3-го порядка.

4. Если через четыре точки кривой 3-го порядка проведена кривая 2-го порядка, пересекающая заданную кривую еще в двух точках, то прямая, проведенная через эти две точки, пересекает кривую 3-го порядка в определенной точке, общей для всех кривых 2-го порядка, проходящих через четыре заданные точки.

Действительно, представим себе, что через заданные четыре точки проведена кривая 2-го порядка, пересекающая кривую 3-го порядка еще в точках M и M_1 . Проведем через эти же четыре точки еще какую-либо кривую 2-го порядка, и пусть она пересекает кривую 3-го порядка еще в точках N и N_1 . Первая кривая 2-го порядка вместе с прямой NN_1 образует некоторую линию 3-го порядка (распадающуюся), проходящую через восемь точек, а именно, через 6 точек пересечения первой кривой 2-го порядка с данной кривой 3-го порядка и через две точки пересечения прямой NN_1 с этой кривой. Вторая кривая 2-го порядка вместе с прямой MM_1 также представляет собой линию 3-го порядка, проходящую через те же восемь точек. Таким образом, заданная кривая и две образованные нами распадается линии 3-го порядка имеют восемь общих точек. На основании сделанного в начале этого раздела построения заключаем, что все эти линии 3-го порядка пройдут через одну и ту же определенную девятую точку. Эта девятая точка является точкой пересечения с заданной кривой 3-го порядка прямой MM_1 и одновременно прямой NN_1 , которые, следовательно, будут пересекать заданную кривую в одной и той же точке. Так как эта точка уже определяется заданием первой кривой 2-го порядка, то теореме можно считать доказанной.

4. Точки перегиба, кратные точки. Согласно доказанной выше теореме, если кривая 3-го порядка имеет три точки перегиба, то они лежат на одной прямой. В связи с этим может быть поставлен вопрос о количестве точек перегиба, которые может иметь кривая 3-го порядка в общем случае.

Известно, что точки перегиба алгебраической кривой совпадают с точками пересечения этой кривой и ее гессианы*). Гессиана кривой 3-го порядка, как в этом легко убедиться, будет кривой 3-го порядка. Отсюда следует, что максимальное число точек перегиба у кривой 3-го порядка не будет превышать девяти. Однако легко сообразить, что действительными из этих девяти точек могут быть только три. В самом деле, если бы их было четыре, то эта четвертая точка, по доказанной выше теореме, лежала бы на той же прямой, что и три первые, и, значит, кривая 3-го порядка имела бы с прямой четыре общие точки, что невозможно.

У каждой кривой 3-го порядка, не имеющей двойной точки, есть по меньшей мере одна точка перегиба. Действительно, всех пар значений x и y , определяющих точки пересечения кривой 3-го порядка и ее гессианы, должно быть девять, но так как мнимые значения всегда попарно сопряжены, то хотя бы одна из этих точек будет действительной (эта действительная точка может быть и бесконечно удаленной).

Рассмотрим вопрос о кратных точках кривой 3-го порядка. *Кривая 3-го порядка не может иметь более одной двойной точки.*

Действительно, предполагая противное, мы получили бы, что прямая, соединяющая две ее двойные точки, имеет с кривой четыре общие, попарно совпадающие между собой точки, что невозможно. Такие же соображения убеждают нас в том, что кривые 3-го порядка не могут иметь тройных точек.

Нетрудно показать, что *кривые 3-го порядка, имеющие двойную точку, являются рациональными кривыми.* Действительно, помещая начало координат в двойную точку, мы будем иметь уравнение кривой в виде

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 = 0.$$

Если положить $y = tx$, то получим параметрические уравнения нашей кривой:

$$x = -\frac{3(E + 2Ft + Gt^2)}{A + 3Bt + 3Ct^2 + Dt^3},$$

$$y = -\frac{3t(E + 2Ft + Gt^2)}{A + 3Bt + 3Ct^2 + Dt^3},$$

правые части которых рациональны.

*) Гессианой алгебраической кривой $F(x, y) = 0$ называется кривая, определяемая уравнением $\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = 0$. См. Р. Уокер, Алгебраические кривые, 1952.

Можно показать также, что рациональная кривая 3-го порядка с узловой точкой или точкой возврата имеет одну действительную точку перегиба, а с изолированной точкой — три действительные точки перегиба.

Применяя к кривым 3-го порядка формулы Плюккера (стр. 21), мы приходим к следующим соотношениям между основными характеристиками этих кривых *):

n	d	r	k	t	w
3	0	0	6	0	9
3	1	0	4	0	3
3	0	1	3	0	1

Напоминаем читателю, что здесь n — порядок кривой, k — ее класс, d — число двойных точек (узловых и изолированных), r — число точек возврата, t — число двойных касательных и w — число точек перегиба.

5. Полюсы и поляры. Пусть имеется кривая, заданная в однородных координатах уравнением

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2z + 6Fxyz + 3Gy^2z + 3Hxz^2 + 3Kyz^2 + Lz^3 = 0. \quad (1)$$

Обозначая левую часть этого уравнения через u , мы можем записать его в краткой форме в виде равенства

$$u = 0.$$

Уравнение касательной к алгебраической кривой в заданной на ней точке $M(x, y, z)$ можно записать в виде

$$\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где ξ , η и ζ — текущие координаты, а значения производных вычислены для точки касания. Применительно к кривой 3-го порядка это уравнение выразится в виде

$$\xi(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Exz + 2Fyz + Hz^2) + \eta(Bx^2 + 2Cxy + Dy^2 + 2Fxz + 2Gyz + Kz^2) + \zeta(Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 + 2Hxz + 2Kyz + Lz^2) = 0. \quad (3)$$

Если касательная проходит через заданную точку плоскости

*) Не следует забывать, что формулы Плюккера связывают между собой не только действительные элементы кривой, но и мнимые; для определения только действительных точек перегиба нужно пользоваться формулой Клейна (стр. 21).

$P(x_1, y_1, z_1)$, то будет справедливо равенство

$$\begin{aligned} & x_1(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Exz + 2Fyz + Hz^2) + \\ & + y_1(Bx^2 + 2Cxy + Dy^2 + 2Fxz + 2Qyz + Kz^2) + \\ & + z_1(Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 + 2Hxz + 2Kyz + Lz^2) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Полученное равенство при фиксированных x_1, y_1 и z_1 будет выражать некоторую кривую 2-го порядка. Очевидно, точки касания касательной, проведенной из заданной точки $P(x_1, y_1, z_1)$ к кривой 3-го порядка, определяются как точки пересечения этой кривой с кривой 2-го порядка, выражаемой уравнением (4)*.

Кривая 2-го порядка, на которой лежат точки касания касательных, проведенных к кривой 3-го порядка $u=0$ из точки $P(x_1, y_1, z_1)$, называется *первой полярой* точки P относительно кривой $u=0$, а сама точка P называется *полюсом*.

Уравнение первой поляры, как это видно из (4), может быть записано в краткой форме в виде

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x} + y_1 \frac{\partial u}{\partial y} + z_1 \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Заметим далее, что точка $P(x_1, y_1, z_1)$ будет иметь также поляру относительно кривой 2-го порядка (4). Рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены выше, показывают, что уравнение этой новой поляры запишется в виде

$$\begin{aligned} & x(Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2Ex_1z_1 + 2Fy_1z_1 + Hz_1^2) + \\ & + y(Bx_1^2 + 2Cx_1y_1 + Dy_1^2 + 2Fx_1z_1 + 2Qy_1z_1 + Kz_1^2) + \\ & + z(Ex_1^2 + 2Fx_1y_1 + Gy_1^2 + 2Hx_1z_1 + 2Ky_1z_1 + Lz_1^2) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (6) при фиксированных x_1, y_1 и z_1 выражает прямую линию, которую называют *второй полярой* точки $P(x_1, y_1, z_1)$ относительно кривой 3-го порядка (1). Уравнение этой второй поляры, как это видно из (6), может быть записано в виде

$$x \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + y \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + z \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = 0, \quad (7)$$

где u_1 — левая часть уравнения (1) после замены x, y и z , на x_1, y_1 и z_1 .

Сопоставляя уравнения (5) и (7) первой и второй поляр, мы видим, что каждое из них может быть получено из другого только перенесением индексов. Это позволяет нам немедленно сделать следующие заключения:

1) *первая поляра есть геометрическое место точек, вторые поляры которых проходят через полюс;*

*) Так как кривые 3-го и 2-го порядков пересекаются, вообще говоря, в шести точках, то к кривой 3-го порядка из внешней точки может быть проведено в общем случае шесть касательных.

2) вторая поляра есть геометрическое место точек, первые поляры которых проходят через полюс.

Если полюс лежит на самой кривой 3-го порядка, то уравнение (7) переходит в уравнение (2), и следовательно, вторая поляра совпадает с касательной. Так как при этом полюс лежит на первой поляре, то вторая поляра касается первой в полюсе. Отсюда следует, что кривая 3-го порядка и ее первая поляра имеют в полюсе две общие совпавшие между собой точки, и значит, число их остальных общих точек не превышает четырех.

Выведем теперь уравнение второй поляры бесконечно удаленной точки. С этой целью переведем уравнение (6) в обычную систему координат, полагая в нем $z=1$.

Пусть полюс $P(x_1, y_1)$ устремляется в бесконечность в определенном направлении $m = \lim \frac{y_1}{x_1}$. Разделив все члены уравнения (6), после замены в нем z единицей, на x_1^3 и совершив предельный переход, мы получим уравнение второй поляры в виде равенства

$$(A + 2Bm + Cm^2)x + (B + 2Cm + Dm^2)y + (E + 2Fm + Gm^2) = 0. \quad (8)$$

С другой стороны, если записать уравнение диаметра кривой 3-го порядка, сопряженного хордам, угловой коэффициент которых равен m (что предоставляется сделать читателям, опираясь на определение диаметра, см. стр. 24), то мы обнаружим, что оно имеет точно такой же вид, как уравнение (8). Отсюда следует, что *вторая поляра бесконечно удаленной точки относительно кривой 3-го порядка является диаметром этой кривой.*

Покажем, что *каждая хорда кривой 3-го порядка гармонически делится этой кривой и первой полярой одной из точек пересечения этой хорды с кривой.*

Действительно, если хорду принять за ось абсцисс и начало системы поместить в точке пересечения хорды с кривой, рассматривая эту точку как полюс первой поляры, то уравнение этой поляры запишется в виде

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 + 2Hx + 2Ky = 0.$$

С осью абсцисс она пересекается в точках $x' = 0$ и $x'' = -\frac{2H}{E}$. Абсциссы же точек пересечения кривой 3-го порядка с осью абсцисс определяются из уравнения

$$Ax^3 + 3Ex + 3H = 0, \quad (9)$$

откуда $x_1 + x_2 = -\frac{3E}{A}$ и $x_1x_2 = \frac{3H}{A}$ (кривая проходит через начало координат, и поэтому $x_3 = 0$).

Осталось показать, что точки, определяемые уравнением (9), гармонически делят отрезок между началом координат и точ-

кой $\left(-\frac{2H}{E}, 0\right)$. Составив двойное отношение соответствующих отрезков, мы убедимся, что оно равно -1 , что и доказывает теорему.

Оригинальным свойством обладает *первая поляра точки перегиба* кривой 3-го порядка, а именно, она *распадается на две прямые*.

Заметим предварительно, что если начало координат поместить в точку перегиба кривой, то касательная к этой кривой в начале координат должна иметь с кривой три общие точки. Взяв уравнение касательной в виде $y = tx$, а уравнение кривой в виде

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky = 0,$$

мы получим после исключения y из этих уравнений уравнение

$$x^3(A + 3Bt + 3Ct^2 + Dt^3) + 3x^2(E + 2Ft + Gt^2) + 3x(H + Kt) = 0.$$

Но это уравнение должно иметь трехкратный корень, равный нулю, поэтому

$$E + 2Ft + Gt^2 = 0, \quad H + Kt = 0.$$

Исключая t , получим равенство

$$EK^2 + 2FHK + GH^2 = 0, \quad (10)$$

которое в соединении с равенством $L = 0$ выражает необходимое условие существования точки перегиба у кривой в начале координат. Чтобы убедиться в справедливости высказанной теоремы, осталось только записать уравнение первой поляры начала координат:

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 + 2Hx + 2Ky = 0.$$

Уравнение это определяет пару прямых, если дискриминант его равен нулю; но это как раз и имеет место, как показывает равенство (10).

Так как первая поляра кривой 3-го порядка должна иметь, по замеченному выше, общую касательную с кривой, то в рассматриваемом случае распада этой поляры на две прямые одна из этих прямых является касательной, а другая называется *гармонической полярой* точки перегиба кривой 3-го порядка.

Гармоническая поляра является геометрическим местом четвертых гармонических точек к трем точкам пересечения с кривой хорд, проходящих через точку перегиба. Справедливость этого прямо вытекает из доказанной выше теоремы, если только учесть, что касательную, составляющую в паре с гармонической полярой первую поляру, можно в данном случае не принимать во внимание, так как она с каждой хордой пересекается в точке перегиба.

6. Проективные свойства. Известно, что с проективной точки зрения кривые 2-го порядка можно определить как геометрические места точек пересечения соответствующих элементов двух проективных пучков 1-го порядка. Уравнения таких пучков записываются в виде

$$\begin{aligned} C_1 + \lambda C_2 &= 0, \\ C_3 + \lambda C_4 &= 0, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — линейные функции. Исключая из этих уравнений параметр λ , мы получим символическую форму уравнения кривых 2-го порядка в виде равенства

$$C_1 C_4 - C_2 C_3 = 0.$$

Подобно этому, кривые 3-го порядка могут быть определены как геометрические места точек пересечения соответствующих элементов двух проективно связанных между собой пучков: пучка прямых $C_1 + \lambda C_2 = 0$ и пучка кривых 2-го порядка $K_1 + \lambda K_2 = 0$ (C_1 и C_2 — линейные, а K_1 и K_2 — квадратичные функции). Исключая из уравнений этих пучков параметр λ , мы получим символическое уравнение кривых 3-го порядка в виде

$$C_1 K_2 - C_2 K_1 = 0.$$

Кривая 3-го порядка, выражаемая этим уравнением, проходит, очевидно, через точки пересечения кривых 2-го порядка $K_1 = 0$ и $K_2 = 0$ и через точку пересечения прямых $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, т. е. через вершину пучка.

Так как в полученное символическое уравнение кривой 3-го порядка входят 12 коэффициентов, а в общем уравнении кривой 3-го порядка таких коэффициентов только 9, то, как легко показать, таким уравнением можно выразить любую кривую 3-го порядка.

Фундаментальное значение в теории кривых 3-го порядка имеет теорема Сальмона, согласно которой *четыре касательные, проведенные к кривой 3-го порядка, не имеющей особых точек, из любой точки этой кривой, имеют двойное отношение, величина которого не зависит от выбора точки на кривой* *).

Указанное двойное отношение не меняется при проективном преобразовании кривой 3-го порядка и является ее единственным проективным инвариантом.

7. Циркулярные кривые. На основании теоремы Сальмона можно установить одно важное свойство циркулярных кривых 3-го порядка, выражаемое так называемой теоремой Харта. Проведем из двух точек, взятых на кривой 3-го порядка, по четыре касательные

*) См. Р. Уокер, Алгебраические кривые, 1952.

к данной кривой. Согласно теореме Сальмона двойное отношение этих пучков касательных одинаково; следовательно, две взятые на данной кривой точки и четыре точки пересечения соответствующих лучей пучков касательных будут находиться на одной и той же кривой 2-го порядка. Но соответствие лучей в пучках касательных можно осуществить четырьмя способами; значит, мы получим четыре различные кривые 2-го порядка, каждая из которых пройдет через точки пересечения соответствующих лучей и две заданные точки кривой 3-го порядка.

Представим себе теперь, что взятая нами кривая 3-го порядка проходит через циклические точки плоскости и является, следовательно, циркулярной кривой. Точки пересечения касательных, проведенных к циркулярной кривой из циклических точек, являются, как было замечено ранее, фокусами этой кривой*). Если из циклических точек провести к циркулярной кривой по четыре касательные, то, пересекаясь попарно, они определят 16 фокусов этой кривой**) и каждые четыре из них будут лежать, по замеченному выше, на кривой 2-го порядка, проходящей через точки кривой 3-го порядка, из которых проведены касательные. Но эти взятые нами точки являются циклическими точками, а кривая 2-го порядка, проходящая через циклические точки, может быть только окружностью, как легко проверить. Мы приходим, таким образом, к заключению, что *16 фокусов циркулярной кривой 3-го порядка располагаются на четырех окружностях, по четыре фокуса на каждой.*

Оригинальным свойством обладают циркулярные кривые, имеющие ось симметрии. Заметим предварительно, что если ось симметрии принять за ось абсцисс, а точку ее пересечения с кривой, т. е. вершину кривой, — за начало координат, то уравнение кривой запишется в виде

$$x(x^2 + y^2) + ax^2 + by^2 + cx = 0, \quad (1)$$

или, в полярных координатах,

$$\rho^2 + \frac{a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \rho + c = 0,$$

откуда следует, что $\rho_1 \rho_2 = c$. Отсюда ясно, что *если симметричную циркулярную кривую 3-го порядка (1) подвергнуть инверсии, центр которой совпадает с ее вершиной, а степень равна c , то получится та же самая кривая.* Из этого предложения вытекает, что касательные, проведенные к кривой (1) в точках пересечения ее с какой-либо прямой, проходящей через начало, образуют с этой прямой одинаковые углы.

Заметим в заключение, что с проективной точки зрения циркулярные кривые 3-го порядка определяются заданием некоторого

*) См. стр. 24.

**) Действительными будут только четыре фокуса.

пучка прямых и проективного ему пучка концентрических окружностей. Точки пересечения соответствующих элементов этих двух пучков будут принадлежать циркулярной кривой 3-го порядка.

8. Рациональные циркулярные кривые. Циркулярные кривые 3-го порядка могут быть одновременно и рациональными. Такие кривые могут быть образованы инверсией кривой 2-го порядка, если полюс инверсии лежит на этой кривой. Действительно, если кривая 2-го порядка проходит через начало и касается в начале оси ординат, то ее уравнение может быть записано в виде

$$ax^2 + bxy + cy^2 + x = 0,$$

или, в полярных координатах ρ_1 , φ , в виде

$$\rho_1 (a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi) + \cos \varphi = 0.$$

Подвергая это уравнение инверсии по формуле $\rho_1 \rho = r^2$, получим уравнение новой кривой

$$\rho \cos \varphi + r^2 (a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi) = 0,$$

или, переходя к прямоугольной системе,

$$x(x^2 + y^2) + r^2(ax^2 + bxy + cy^2) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что полученное уравнение выражает рациональную циркулярную кривую 3-го порядка.

Эта кривая имеет асимптоту, параллельную оси ординат, и двойную точку в начале. Если $b^2 - 4ac < 0$, т. е. если исходной кривой был эллипс, то двойная точка будет изолированной (рис. 9, а). При $b^2 - 4ac = 0$ инвертировалась парабола и двойная точка новой кривой будет точкой возврата (рис. 9, б). Наконец, если $b^2 - 4ac > 0$, то двойная точка новой кривой является узловой, а инвертируемая кривая была гиперболой (рис. 9, в).

Покажем, что *рациональные циркулярные кривые 3-го порядка являются подэрами параболы* *).

Действительно, уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ можно записать в виде $y = mx + \frac{p}{2m}$; уравнение перпендикуляра, опущенного на касательную из точки $P(a, b)$, имеет вид $y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$. Исключая из этих двух уравнений параметр m , получим уравнение подэры в виде

$$2(x - a)[y(y - b) + x(x - a)] + p(y - b)^2 = 0.$$

*) Подэрой данной кривой относительно какой-либо точки плоскости называется новая кривая, представляющая собой геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на касательные к заданной кривой.

Переносим начало координат в точку $P(a, b)$, мы приведем полученное уравнение к виду

$$x_1(x_1^2 + y_1^2) + ax_1^2 + bx_1y_1 + \frac{p}{2}y_1^2 = 0.$$

Легко убедиться, что полученная кривая 3-го порядка является ращи-

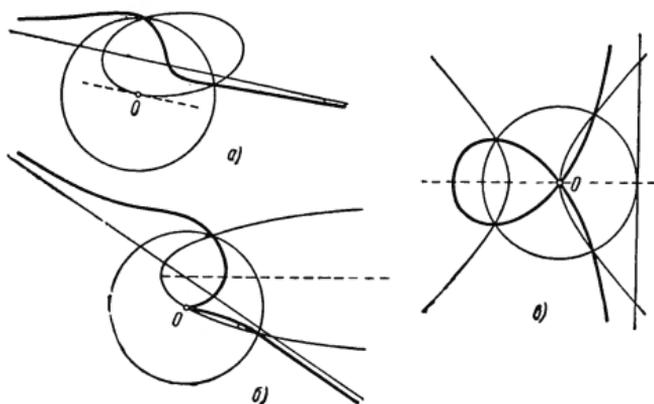


Рис. 9.

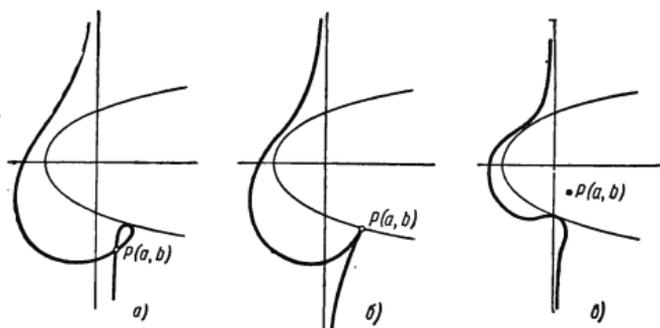


Рис. 10.

ональной циркулярной кривой с асимптотой, параллельной оси ординат, и двойной точкой в начале координат, т. е. в точке P .

В зависимости от того, находится ли полюс P вне параболы, на параболе или в ее внутренней области, новая кривая в точке P будет иметь узловую точку, точку возврата или изолированную точку (рис. 10, а, б, в).

ГЛАВА IV
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ 3-ГО ПОРЯДКА

§ 1. Декартов лист

1. Особенности формы. *Декартовым листом* называется кривая 3-го порядка, уравнение которой в прямоугольной системе имеет вид

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \quad (1)$$

Иногда удобно пользоваться параметрическими уравнениями декартова листа, которые можно получить, полагая $y = tx$, присоединяя к этому равенству равенство (1) и решая полученную систему относительно x и y ; в результате будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3at}{1+t^3}, \\ y &= \frac{3at^2}{1+t^3}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

откуда следует, что декартов лист является рациональной кривой.

Заметим еще, что полярное уравнение декартова листа имеет вид

$$\rho = \frac{2a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}. \quad (3)$$

Координаты x и y входят в уравнение декартова листа симметрично, откуда следует, что *кривая симметрична относительно биссектрисы $y = x$* . Обычное исследование на особые точки *) приводит к заключению, что начало координат является узловой точкой декартова листа. Уравнения касательных к алгебраической кривой в ее особой точке, совпадающей с началом координат, можно получить, как известно, приравняв нулю группу членов низшей степени из уравнения этой кривой. В нашем случае имеем $3axy = 0$, откуда получим $x = 0$ и $y = 0$ — искомые уравнения касательных в узловой точке. Эти касательные совпадают с координатными осями

*) См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I.

и, следовательно, в начале координат кривая пересекает сама себя под прямым углом. Легко видеть, что в первом координатном угле кривая делает петлю, которая пересекается с прямой $y = x$ в точке $N\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$. Точки этой петли, в которых касательные параллельны координатным осям, имеют координаты $M_1(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$ и $M_2(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$ (рис. 11).

Для окончательного заключения о форме кривой следует еще найти асимптоту $y = kx + b$. Заменяя в уравнении кривой y на $kx + b$, приравняем нулю в полученном уравнении коэффициенты двух членов с высшими степенями x . Получим $1 + k^3 = 0$ и $3k^2b - 3ak = 0$, откуда $k = -1$ и $b = -a$. Таким образом, декартов лист имеет асимптоту $y = -x - a$; следовательно, во 2-м и 4-м координатных углах ветви декартова листа уходят в бесконечность.

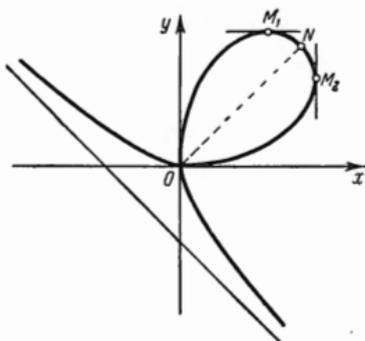


Рис. 11.

2. Свойства. Согласно теореме Маклорена (см. стр. 54), если в трех точках алгебраической кривой 3-го порядка, лежащих на одной прямой, провести касательные к этой кривой, то точки их пересечения с кривой будут лежать также на прямой

линии. Применительно к декартову листу эта теорема доказывается просто. Выведем с этой целью предварительно условие пребывания трех точек декартова листа, соответствующих значениям t_1 , t_2 и t_3 параметра, на одной прямой. Если уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, то значения параметра, соответствующие точкам пересечения этой прямой с кривой, должны удовлетворять системе

$$y = kx + b, \quad x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Система эта приводит к уравнению $t^3 - \frac{3ak}{b}t^2 + \frac{2ak}{b}t + 1 = 0$, корни которого и будут искомыми значениями t_1 , t_2 и t_3 параметра, откуда следует, что

$$t_1 t_2 t_3 = -1. \quad (4)$$

Это равенство и является условием пребывания трех точек $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$ и $M_3(t_3)$ декартова листа на одной прямой.

Располагая этим условием, покажем справедливость теоремы Маклорена для декартова листа. Действительно, касательную в точке

$M_1(t_1)$ можно рассматривать как прямую, которая пересекает декартов лист в двух совпадающих между собой точках, для которых $t_2 = t_1$, и в третьей точке, для которой соответствующее значение параметра обозначим через T_1 . Условие (4) примет вид $t_1^2 T_1 = -1$. Для касательных в точках M_2 и M_3 получим аналогичные соотношения $t_2^2 T_2 = -1$ и $t_3^2 T_3 = -1$. Перемножая эти три равенства, будем иметь $(t_1 t_2 t_3)^2 T_1 T_2 T_3 = -1$, откуда на основании (4) заключаем, что и $T_1 T_2 T_3 = -1$, т. е. точки $N_1(T_1)$, $N_2(T_2)$ и $N_3(T_3)$ лежат на одной прямой.

Определяя площадь, ограниченную петлей декартова листа, получим:

$$U = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^3} = -3a^2 \left[\frac{1}{1+t^2} \right]_0^{\infty} = \frac{3a^2}{2}.$$

3. Способ построения. Заметим предварительно, что если ось симметрии декартова листа принять за ось абсцисс, то уравнение его примет вид

$$y^2 = -\frac{1}{3} \frac{x - \frac{3a}{\sqrt{2}}}{x + \frac{a}{\sqrt{2}}} x^2. \quad (5)$$

Пусть теперь имеется окружность с радиусом r и центром в точке $M\left(\frac{r}{2}, 0\right)$ и прямая $x = -h$. Возьмем произвольную точку Q этой окружности и проведем прямую QA и прямую QN , перпендикулярную к оси абсцисс (рис. 12). Из точки пересечения R прямой QA с прямой $x = -h$ проводим прямую RO до пересечения ее в точке Q_1 с прямой QN . Таким образом, точке Q на окружности будет поставлена в соответствие точка Q_1 . Геометрическое место точек Q_1 представляет собой декартов лист.

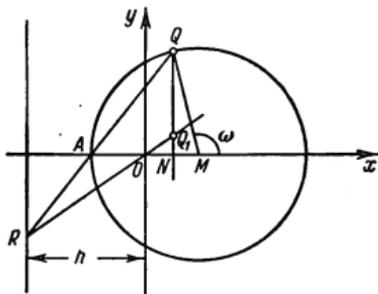


Рис. 12.

Для доказательства заметим, что координаты точки Q можно

записать в виде $x = \frac{r}{2} + r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$, где ω — угол, составляемый радиусом круга, проведенным в точку Q , с положительным направлением оси абсцисс. В соответствии с этим уравнение прямой QA может быть записано в виде $\left(x + \frac{r}{2}\right) \sin \frac{\omega}{2} + y \cos \frac{\omega}{2} = 0$. Полагая

в этом уравнении $x = -h$, находим ординату $y = \left(h - \frac{r}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ точки R . Отсюда следует, что уравнение прямой RQ_1 запишется в виде

$$y = \frac{r-2h}{2h} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} x. \quad (6)$$

В то же время уравнение прямой Q_1N имеет вид

$$x = \frac{r}{2} + r \cos \omega. \quad (7)$$

Исключая из уравнений (6) и (7) параметр ω , находим уравнение геометрического места точек Q_1 в виде

$$y^3 = -\frac{(r-2h)^3}{4h^3} \frac{x - \frac{3r}{2}}{x + \frac{r}{2}} x^3.$$

Сопоставляя его с уравнением (5), заключаем, что найденное геометрическое место точек является декартовым листом.

Преобразование точек окружности в точки декартова листа, осуществляемое при таком его построении, называется *преобразованием Маклорена* (см. стр. 87).

4. Историческая справка. Впервые в истории математики кривая, названная впоследствии декартовым листом, определяется в письме Декарта к Ферма в 1638 г. как кривая, для которой сумма объемов кубов, построенных на абсциссе и ординате каждой точки, равняется объему параллелепипеда, построенного на абсциссе, ординате и некоторой константе. Форма кривой устанавливается впервые Робервалем, который находит узловую точку кривой, однако в его представлении кривая состоит лишь из петли. Повторяя эту петлю в четырех квадрантах, он получает фигуру, напоминающую ему цветок с четырьмя лепестками. Поэтическое название кривой «лепесток жасмина», однако, не привилось. Полная форма кривой с наличием асимптоты была определена позднее (1692) Гюйгенсом и И. Бернулли. Название «декартов лист» прочно установилось только с начала 18 века.

§ 2. Циссоида Диоклеса

1. Особенности формы. Среди многих способов образования *циссоиды* — кривой, открытой древними в поисках решения знаменитой задачи об удвоении куба, мы остановимся сначала на простейшем. Возьмем окружность (называемую *производящей*) с диаметром $OA = 2a$ и касательную AB к ней. Через точку O проведем луч OB и на нем отложим отрезок $OM = BC$. Построенная таким образом точка M принадлежит циссоиде. Повернув луч OB на некоторый

угол и проделав указанное построение, мы найдем вторую точку циссоиды, и т. д. (рис. 13).

Если точку O принять за полюс, то $\rho = OM = OB - OC$; но $OB = \frac{2a}{\cos \varphi}$ и $OC = 2a \cos \varphi$, откуда получаем полярное уравнение циссоиды

$$\rho = \frac{2a \sin^3 \varphi}{\cos \varphi}. \quad (1)$$

Пользуясь формулами перехода от полярных координат к декартовым, найдем уравнение циссоиды в прямоугольной системе:

$$y^3 = \frac{x^3}{2a - x}. \quad (2)$$

Параметрические уравнения циссоиды можно получить, полагая $x = tu$; тогда, на основании уравнения (2), придем к системе

$$x = \frac{a}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{a}{t(t^2 + 1)}. \quad (3)$$

Уравнение (2) показывает, что циссоида является алгебраической кривой 3-го порядка, а из уравнений (3) следует, что она является рациональной кривой.

Циссоида симметрична относительно оси абсцисс, имеет бесконечные ветви; касательная к производящей окружности, т. е. прямая $x = 2a$, служит для нее асимптотой; начало координат является точкой возврата 1-го рода.

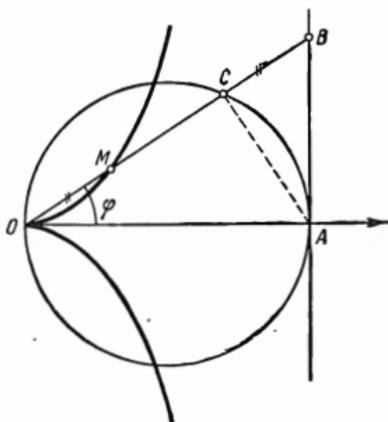


Рис. 13.

2. Свойства. Кинематически циссоида может быть получена как траектория середины M катета BC треугольника ABC , передвигающегося в плоскости чертежа так, что его вершина B скользит по оси ординат, а другой катет AC всегда проходит через неподвижную точку E на оси абсцисс (рис. 14).

Действительно, обозначив середину отрезка OE через D , замечаем, что поскольку $BC = EO$, $\triangle BCE = \triangle BEO$, откуда $\angle BEO = \angle CBE$, и, следовательно, $\triangle NBE$ — равнобедренный, а так как $ED = \frac{EO}{2} = \frac{BC}{2} = BM$, то отрезок DM параллелен отрезку BE . Пусть, далее, точка K есть точка пересечения с продолжением отрезка DM прямой, проходящей через точку B параллельно оси абсцисс. Опишем окружность с центром в начале координат и радиусом, равным OD , и проведем к ней касательную во второй точке пересечения с

смагивать как траекторию вершины другой параболы, одинаковой с данной, которая катится по данной параболы. Таким образом, возникает новый способ кинематического образования циссоиды как траектории вершины параболы, которая без скольжения катится по другой такой же параболы.

Остановимся на метрических свойствах циссоиды; при этом нам будет удобно пользоваться параметрическими уравнениями циссоиды в виде $x = 2a \sin^2 \varphi$, $y = 2a \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi}$.

Площадь, ограниченная циссоидой и ее асимптотой, равняется утроенной площади производящего круга; действительно,

$$U = 2 \int_0^{2a} y dx = 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi = 3\pi a^2.$$

Это соотношение получено было Гюйгенсом и независимо от него Ферма.

Определяя площадь криволинейного треугольника $OAMC$ (рис. 15), найдем, интегрируя в границах от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{4}$, что она равна $\frac{3\pi a^2}{4} - 2a^2$. Если теперь провести касательные в точках A и C к производящему кругу, то площадь криволинейного треугольника $CMANC$ будет равна $a^2 - \left(\frac{3\pi a^2}{4} - 2a^2\right) = 3\left(a^2 - \frac{\pi a^2}{4}\right)$. Выражение, стоя-

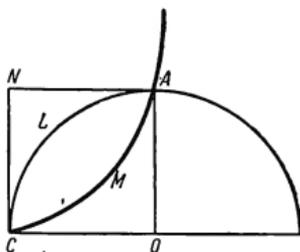


Рис. 15.

щее в правой части, определяет утроенную площадь криволинейного треугольника $CLANC$. Итак,

$$\text{пл. } CMANC = 3 \text{ пл. } CLANC.$$

Это соотношение было открыто также Гюйгенсом.

Объем тела, образованного вращением части плоскости, ограниченной циссоидой и ее асимптотой, вокруг оси ординат определится по формуле

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\infty} (4a^2 - x^2) dy = 16\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3a \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi - 2 \sin^6 \varphi) d\varphi = \\ &= 16\pi a^3 \left[3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\pi}{2} \right] = 5 \cdot 2\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

Если учесть, что объем тора, получаемого от вращения производящего круга вокруг оси ординат, равняется $2\pi^2 a^3$, то из полученного результата следует, что объем тела, получаемого вращением части

плоскости, ограниченной циссоидой и ее асимптотой, вокруг оси ординат, в пять раз больше объема тора, полученного от вращения производящего круга вокруг той же оси. Это соотношение было получено также Гюйгенсом.

Пусть теперь x_c — абсцисса центра тяжести части плоскости, ограниченной циссоидой и ее асимптотой; тогда по теореме Гюльдена будем иметь $V = U \cdot 2\pi x_c$, где V и U — соответственно объем и площадь, которые были определены выше. Подставляя их значения в соотношение Гюльдена, получим $3x_c = 5a$ или $\frac{x_c}{2a - x_c} = \frac{5}{1}$.

Таким образом, центр тяжести части плоскости, ограничиваемой циссоидой и ее асимптотой, делит отрезок между вершиной и асимптотой на две части, отношение которых равно 5.

Это соотношение позволяет в свою очередь определить объем тела, полученного вращением циссоиды вокруг ее асимптоты. По теореме Гюльдена будем иметь $V = U \cdot 2\pi(2a - x_c) = 3\pi a^2 \cdot 2\pi \left(2a - \frac{5a}{3}\right) = 2\pi^2 a^3$. Этот результат можно истолковать также как объем тора, полученного от вращения производящего круга вокруг асимптоты. Таким образом, объем тела, полученного вращением циссоиды вокруг ее асимптоты, равен объему тора, полученного от вращения производящего круга. Это соотношение установлено впервые Слюзом.

Длина дуги циссоиды от ее вершины до точки с абсциссой x определится по формуле $S = a \int_0^x \frac{1}{2a-x} \sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}} dx = a(z-2) + \frac{a\sqrt{3}}{2} \ln \frac{(z-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(z+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$, где $z = \sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}$.

3. Применение циссоиды к решению делосской задачи. Как уже говорилось, циссоида была открыта древними в поисках решения делосской задачи об удвоении куба. История возникновения этой задачи, согласно легенде, передаваемой Эратосфеном, такова: на острове Делосе жители страдали от мора, посланного им богами; по предсказанию оракула богов можно было умиротворить, удвоив объем жертвенника, имевшего форму куба. Суть задачи сводилась к определению ребра куба, объем которого был бы в два раза больше объема данного куба. Что касается самого повода постановки задачи, то справедливо полагать, что «пифия находилась скорее под влиянием математиков, нежели вдохновлялась самим богом» (Цейтен), так как задача об удвоении куба являлась естественным перенесением в пространство планиметрической задачи о построении квадрата с площадью, в два раза большей площади данного квадрата, и, следова-

тельно, могла скорее возникнуть в сознании математика, нежели в сознании оракула.

Открытие циссоиды для целей решения делосской задачи приписывается Диоклесу, жившему в 3 веке до нашей эры. Возможность найти графическим путем ребро куба с объемом, в два раза большим объема данного куба, усматривается из следующих соображений. Пусть b — ребро данного куба, а B — ребро искомого; тогда $B^3 = 2b^3$ и, следовательно, $B = b \sqrt[3]{2}$. Отсюда ясно, что графическое решение задачи должно свестись к построению $\sqrt[3]{2}$. Перепишем для этой цели уравнение циссоиды в виде $\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{y}{2a-x}$.

Заметим далее, что прямая $\frac{y}{x} = k$ отсекает от касательной отрезок

$$AD = 2ak \quad (5)$$

(рис. 16) и пересекает циссоиду в точке M , координаты которой удовлетворяют уравнению $\frac{y}{2a-x} = k^3$.

Это уравнение можно рассматривать как уравнение прямой, проходящей через точку $A(2a, 0)$ и отсекающей на оси ординат отрезок

$$OC = 2ak^3. \quad (6)$$

Если теперь принять $a = \frac{1}{2}$ и на оси ординат отложить отрезок $OC = 2$, соединить затем точку C с точкой $A(1, 0)$, а точку пересечения прямой CA с циссоидой соединить с точкой O и продолжить полученный отрезок до пересечения с касательной, то, как это следует из формул (5) и (6), отрезок AD и будет равен $\sqrt[3]{2}$.

Древние рассматривали только ту часть циссоиды, которая находится внутри производящего круга. Вместе с дугой окружности производящего круга эта часть образует фигуру, напоминающую лист плюща, откуда происходит название кривой*). Наличие бесконечных ветвей у циссоиды было установлено в 17 веке Робервалем и независимо от него Слюзом. Кинематический способ образования циссоиды с помощью треугольника приписывается Ньютону, который выполнил также спрямление циссоиды не только аналитическим путем, но и графическим.

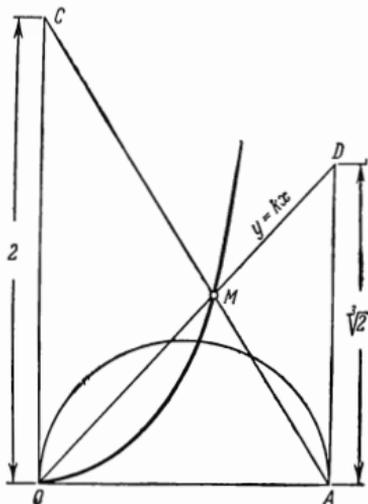


Рис. 16.

*) κισσοίς — плющ.

§ 3. Кривые 3-го порядка, получаемые циссоидальным преобразованием

1. Обобщение понятия циссоиды. Подобно тому как рассмотренная нами циссоида была получена описанным выше построением по двум заданным линиям — окружности и прямой, можно получить новые линии, взяв, например, вместо окружности эллипс, а вместо прямой — параболу или какую-либо иную линию. Эта идея приводит к понятию *циссоидального преобразования*.

Сущность этого преобразования заключается в том, что если даны две кривые, выраженные в полярной системе уравнениями $\rho_1 = f_1(\varphi)$ и $\rho_2 = f_2(\varphi)$, то можно построить новую кривую, определяемую как геометрическое место точек, являющихся концами радиусов-векторов ρ , откладываемых так, что

$$\rho = \rho_1 - \rho_2.$$

Исследованием общих свойств кривых, образуемых указанным способом, занимались многие ученые. Мы остановимся на одном из таких свойств, установленном Пеано.

Пусть $\rho_1 = f_1(\varphi)$ и $\rho_2 = f_2(\varphi)$ — уравнения производящих кривых, а $\rho = f(\varphi)$ — уравнение их циссоидальной кривой, и следовательно,

$$\rho = \rho_1 - \rho_2.$$

Определяя полярные поднормали *) этих трех кривых, будем иметь:

$$S_{n_1} = \frac{d\rho_1}{d\varphi}, \quad S_{n_2} = \frac{d\rho_2}{d\varphi}, \quad S_n = \frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Но так как

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{d\rho_1}{d\varphi} - \frac{d\rho_2}{d\varphi}, \quad \text{то} \quad S_n = S_{n_1} - S_{n_2},$$

т. е. полярная поднормаль циссоидальной кривой равняется разности соответствующих полярных поднормалей производящих кривых.

Это свойство дает простой способ построения нормали в заданной точке циссоидальной кривой. Оно открывает также возможность определить графическим путем центр кривизны в произвольно заданной точке такой кривой. Соответствующий способ основан на том факте, что центр кривизны для кривой $\rho = f(\varphi)$ можно определить графически, если только известен отрезок, выражающий ρ'' . Действительно, радиус кривизны для кривой, заданной в полярной системе, выражается, как известно, равенством

$$R = \frac{(\rho^3 + \rho'^3)^{\frac{3}{2}}}{\rho^3 + 2\rho'^3 - \rho\rho''},$$

*) См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I.

откуда

$$\rho'' = \rho + \frac{2\rho'^2}{\rho} - \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho R}. \quad (1)$$

Осуществим теперь такое построение: пусть $OM = \rho$, MP — полярная нормаль и PO — поднормаль; как известно, $PO = \rho'$ и $MP = (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}$ (рис. 17). Проводим $PB \perp PM$, тогда

$$OB = PO \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \gamma) = \frac{\rho'^2}{\rho} \quad \text{и} \quad BM = BO + OM = \frac{\rho^2 + \rho'^2}{\rho};$$

поэтому равенство (1) можно записать в виде

$$\rho'' = OB - BM \frac{MP - R}{R}.$$

Пусть теперь C — центр кривизны и, следовательно, $MC = R$; отложив от точки C отрезок $CP_1 = CP$, проводим $P_1A \parallel CB$; тогда

$$AB = \frac{BM(MP - R)}{R}$$

и, следовательно, $\rho'' = OB - AB$, или $\rho'' = OA$. Итак, зная отрезок MC , выражающий R , можно графически определить отрезок OA , выражающий ρ'' .

Возможно и обратное построение: по отрезку $OA = \rho''$ можно построить отрезок $MC = R$ и, следовательно, найти центр кривизны, что как раз мы и имели в виду. Для этой цели достаточно от точки O отложить отрезок OA , соединить точку A с точкой P , разделить отрезок PA точкой N пополам и провести через точки B и N прямую, которая пересечет MP в точке C — искомом центре кривизны.

К циссоидальным кривым этот способ можно применить, если только известны радиусы кривизны R_1 и R_2 производящих кривых. Зная R_1 и R_2 , мы сможем найти ρ_1'' и ρ_2'' , а это в свою очередь даст возможность определить ρ'' , так как $\rho'' = \rho_1'' - \rho_2''$. Зная же ρ'' , можно рассмотренным выше приемом найти R , а значит, и центр кривизны.

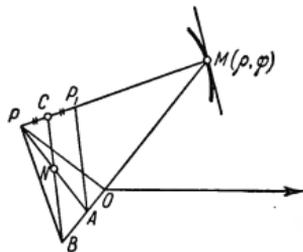


Рис. 17.

2. Циссоиды кривых 2-го порядка. Рассмотрим циссоиды кривых 2-го порядка, выражаемых уравнением

$$y^2 = 2px + qx^2, \quad (2)$$

вторую производящую кривую будем полагать прямой линией с уравнением

$$x = k. \quad (3)$$

В полярной системе уравнение кривой (2) запишется в виде

$$\rho_1 = \frac{2p \cos \varphi}{\sin^2 \varphi - q \cos^2 \varphi},$$

а уравнение прямой — в виде

$$\rho_2 = \frac{k}{\cos \varphi};$$

следовательно, уравнение их циссоиды выразится равенством

$$\rho = \rho_2 - \rho_1 = \frac{k}{\cos \varphi} - \frac{2p \cos \varphi}{\sin^2 \varphi - q \cos^2 \varphi}.$$

Переходя к декартовой системе, получим:

$$(x - k)(y^2 - qx^2) + 2px^2 = 0. \quad (4)$$

Таково общее уравнение циссоид кривых 2-го порядка.

Если кривая (2) — эллипс с полуосями $a\sqrt{2}$ и $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ($p = -\frac{\sqrt{2}a}{3}$, $q = -\frac{1}{3}$), а прямая (3) выражена уравнением $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, то уравнение (4) выразит декартов лист, ось симметрии которого совпадает с осью абсцисс.

Если кривая (2) — гипербола с полуосями $\frac{2a}{3}$ и $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ ($p = \frac{2}{9}a$, $q = \frac{1}{3}$), а прямая (3) выражена уравнением $x = -\frac{a}{3}$, то уравнение (4) запишется в виде

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)\left(y^2 - \frac{1}{3}x^2\right) + \frac{4}{9}ax^2 = 0 \quad (5)$$

и выразит кривую, называемую *трисектрисой Лоншама* (рис. 18).

Трисектриса Лоншама может быть определена также как геометрическое место точек P пересечения касательных к окружности радиуса, равного a , проведенных в точках C и B этой окружности, если эти точки являются концами дуг $AB = \omega$ и $AC = 2\omega$, где ω — любой центральный угол, а точка A фиксирована. Действительно, из рис. 18 следует, что $\varphi = \frac{\omega}{2}$, а $\angle COP = \frac{3\omega}{2} = 3\varphi$, а в таком случае из треугольника OSP получаем $\rho = \frac{a}{\cos 3\varphi}$ — полярное уравнение искомой кривой. Переходя к декартовой системе, получим приведенное выше уравнение (5). Способ трисекции угла с помощью этой кривой очевиден. Мы хотим еще обратить внимание читателя на то,

что, подвергая трисектрису $\rho = \frac{a}{\cos 3\varphi}$ инверсии, получим *трехлепестковую розу* $\rho = a \cos 3\varphi$ (стр. 166).

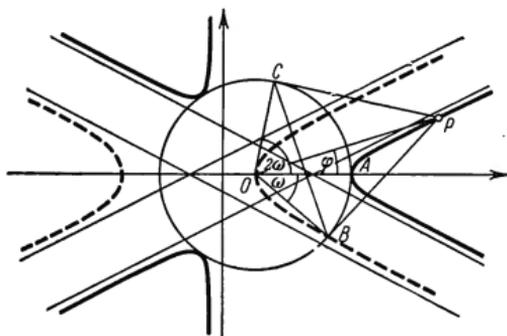


Рис. 18.

Нам осталось рассмотреть циссоиду параболы. Здесь удобно радиусы-векторы точек этой кривой определить не как разности, а как суммы соответствующих радиусов-векторов точек прямой и параболы. При этом условии общее уравнение (4) циссоид кривых 2-го порядка примет вид

$$(x - k)(y^2 - qx^2) - 2px^2 = 0. \quad (6)$$

Чтобы получить циссоиду параболы $y^2 = 2px$ и прямой $x = \frac{p}{2}$, положим в уравнении $q = 0$, $k = \frac{p}{2}$. Получаемое при этом уравнение искомой циссоиды будет иметь вид

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)y^2 - 2px^2 = 0 \quad (7)$$

и выразит кривую, называемую *смешанной кубикой* (рис. 19).

Как показал Генкель, смешанную кубикой можно получить следующим образом. Пусть имеется парабола $y^2 = 8p\left(x - \frac{p}{2}\right)$. Проведем в произвольной точке A касательную к этой параболе; проведем,

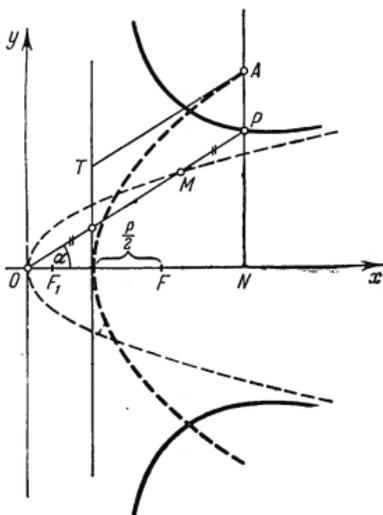


Рис. 19.

кроме того, прямую OP параллельно касательной AT . Тогда геометрическое место точек P пересечения касательной с ординатой точки A будет смешанной кубикой. Действительно,

$$y_P = PN = x \operatorname{tg} \alpha = xy'_A;$$

но из уравнения параболы имеем

$$y'_A = \frac{4p}{y} = \frac{4p}{\sqrt{8p\left(x - \frac{p}{2}\right)}};$$

следовательно, уравнение искомой кривой запишется в виде

$$y = \frac{4px}{\sqrt{8p\left(x - \frac{p}{2}\right)}}, \quad \text{или} \quad y^2\left(x - \frac{p}{2}\right) - 2px^2 = 0$$

и выразит, согласно (7), смешанную кубикой. Составляя разность радиусов-векторов OP и OM , можно убедиться, что при $x \rightarrow \infty$ эта разность стремится к нулю, следовательно, парабола $y^2 = 2px$ будет служить для кубики (7) криволинейной асимптотой.

Лоншам назвал рассмотренную кривую «смешанной кубикой» в силу того, что ее ветвь имеет с одной стороны гиперболический характер, а с другой — параболический.

§ 4. Строфоида

1. Особенности формы. Кривая, называемая *строфоидой*, представляет собой геометрическое место точек, построенных следующим

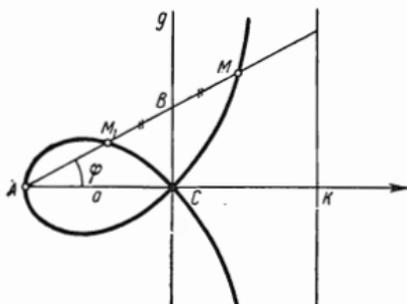


Рис. 20.

образом: дана фиксированная точка A и фиксированная прямая g , причем $AC = a$ — перпендикуляр, опущенный из точки A на эту прямую; вокруг точки A вращается луч, на котором откладываются отрезки BM и BM_1 от точки его пересечения с данной прямой, причем так, что $BM = BM_1 = CB$; геометрическое место точек M и M_1 и будет строфоидой (рис. 20). Точки M и M_1 мы будем называть *сопряженными*.

Принимая точку A за полюс, а прямую AC за полярную ось, получим

$$\rho = AB \pm BC; \quad \text{но} \quad AB = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad BC = a \operatorname{tg} \varphi,$$

следовательно, полярное уравнение строфоиды будет иметь вид

$$\rho = a \frac{1 \pm \sin \varphi}{\cos \varphi}. \quad (1)$$

Переходя к прямоугольным координатам, получим:

$$y = \pm (x - a) \sqrt{\frac{x}{2a - x}}. \quad (2)$$

Параметрические уравнения строфоиды могут быть записаны в виде

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2}. \quad (3)$$

Кривая симметрична относительно оси абсцисс, как это видно из уравнения (2); из этого уравнения следует также, что прямая $x = 2a$ является асимптотой строфоиды. Точка $C(a, 0)$ является узловой точкой строфоиды. Действительно, из уравнения (2) имеем:

$$y' = \pm \left[(x - a) \frac{2a}{2(2a - x)^2 \sqrt{\frac{x}{2a - x}}} + \sqrt{\frac{x}{2a - x}} \right],$$

т. е. в точке $(a, 0)$ $y' = \pm 1$, откуда следует, что в этой точке строфоиды имеет узел с касательными $y = x$ и $y = -x$, и значит, ветви строфоиды пересекаются в узловой точке под прямым углом.

2. Свойства строфоиды.

1. *Строфоида является подэрой параболы относительно точки пересечения оси параболы с ее директрисой.* Действительно, уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M(x_1, y_1)$ можно записать в виде $y_1 y = p(x + x_1)$, а уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $(-\frac{p}{2}, 0)$ на эту касательную, запишется в виде $py + y_1 x = -\frac{py_1}{2}$. Решая эти уравнения совместно, найдем:

$$x = -\frac{py_1^2}{p^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{y_1^3 - p^2 y_1}{2(p^2 + y_1^2)},$$

или

$$x = -\frac{pt^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{pt^3 - pt}{2(1+t^2)}, \quad \text{где } t = \frac{y_1}{p}.$$

Полученная система выражает, как видно, строфоиду в параметрической форме.

2. *Геометрическое место точек пересечения двух касательных, проведенных в сопряженных точках M и M_1 строфоиды, является циссоидой Диоклеса.* При доказательстве этого свойства

удобно пользоваться параметрическими уравнениями строфоиды, отличными от (3), именно:

$$x = 1 \pm \sin \varphi, \quad y = \frac{\sin \varphi (1 \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi}.$$

3. Инверсия строфоиды дает ту же самую строфоиду, если полюс инверсии совпадает с точкой A , а степень инверсии равна a^2 . Действительно, из уравнения строфоиды следует, что

$$AM_1 = \frac{a(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi} \quad \text{и} \quad AM = \frac{a(1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Перемножая эти равенства, получим

$$AM_1 \cdot AM = a^2.$$

4. Определяя полярную подкасательную и полярную поднормаль в произвольной точке строфоиды, получим:

$$S_t = \frac{\rho^2}{\rho'} = \pm a(1 \pm \sin \varphi), \quad S_n = \rho' = \pm a \frac{1 \pm \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad (4)$$

откуда следует, что геометрические места точек, являющихся концами S_t и S_n , будут иметь уравнения $\rho = \pm a(1 \pm \sin \varphi)$, что дает кардиоиду (стр. 121), и $\rho = \pm a \frac{1 \pm \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$, что дает параболу. Если через S_t и S_t^* обозначить подкасательные в сопряженных точках M и M_1 строфоиды, то на основании (4) получим соотношение

$$S_t + S_t^* = 2a.$$

5. Чтобы доказать следующее оригинальное свойство строфоиды, найдем предварительно условие, при котором три точки строфоиды, соответствующие значениям параметра t_1 , t_2 и t_3 , лежат на одной прямой. Определение точек пересечения прямой и строфоиды сводится к решению системы

$$y = kx + b; \quad x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2},$$

которая приводит к уравнению $t^3 - 2kt^2 - \frac{b}{a}t^2 - t - \frac{b}{a} = 0$, откуда получаем искомое условие

$$t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = -1. \quad (5)$$

Найдем теперь соотношение между значениями параметра t_1 , t_2 , t_3 и t_4 четырех точек строфоиды, лежащих на одной окружности. Определение точек пересечения строфоиды и ок-

ружности сведется к решению системы

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + Ax + By + C &= 0; \\ x &= \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2},\end{aligned}$$

которая приводит к уравнению

$$t^4 + \frac{B}{A}t^3 + \frac{a^2 + 2aA + C}{a^2}t^2 - \frac{B}{A}t + \frac{C}{A} = 0,$$

откуда на основании соотношения между коэффициентами и корнями уравнения получаем: $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -\frac{B}{A}$ и $t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = \frac{B}{A}$, откуда

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = 0.$$

Исходя из последнего равенства, заметим, что условие, при котором три точки строфоиды, соответствующие значениям параметра t_1 , t_2 и t_3 , лежат на окружности круга, проходящего через начало координат, будет выражаться равенством

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_1t_2t_3 = 0. \quad (6)$$

Теперь без труда можно доказать следующее свойство строфоиды: *если из какой-либо точки M , лежащей на строфоиде, провести к ней две касательные, касающиеся кривой в точках P и Q , то точки M , P и Q будут лежать на окружности, проходящей через начало координат* (рис. 21).

Доказательство этого свойства сводится к тому, чтобы показать, что значения параметра t_1 , t_2 и t_3 , соответствующие точкам M , P и Q , удовлетворяют равенству (6). Так как в точке касания совпадают две точки пересечения прямой с окружностью, то для них $t_3 = t_2$. Согласно этому условию пребывания этих двух совпавших точек и точки M на одной прямой выразится, в силу (5), равенством $t_1t_2 + t_1t_2 + t_2t_2 = -1$, откуда $t_2 = -t_1 \pm \sqrt{t_1^2 - 1}$. Одно из этих значений соответствует точке P , другое — точке Q . Подставляя эти значения в равенство (6), убедимся, что оно удовлетворится.

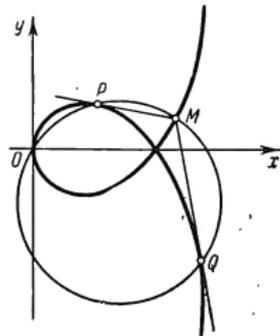


Рис. 21.

6. Площадь, ограниченная петлей строфоиды, определится равенством

$$U = 2 \int_0^a (x-a) \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2}.$$

Вычисляя этот же интеграл, но в границах от a до $2a$, получим $2a^2 + \frac{\pi a^2}{2}$ — площадь между строфоидой и ее асимптотой. Сумма найденных площадей равна площади квадрата со стороной $2a$.

Спрямление строфоиды выполняется в эллиптических интегралах.

3. Косая строфоида. Рассмотренная нами строфоида представляет собой частный случай так называемой косой строфоиды, на стереометрическом способе образования которой мы и хотим остановиться.

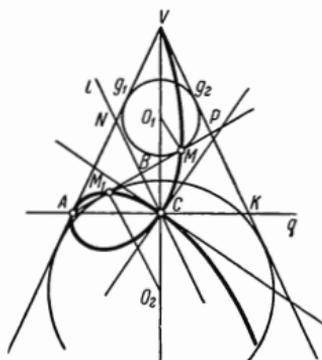


Рис. 22.

Представим себе конус с вершиной в точке V , образующими g_1 и g_2 и касательной к нему, проходящей через точку A перпендикулярно к g_1 (рис. 22). Проведем секущую плоскость через эту касательную, и пусть точки M и M_1 будут фокусами полученного сечения. Представим теперь, что секущая плоскость поворачивается вокруг касательной, тогда точки M и M_1 опишут кривую, называемую *косой строфоидой*, которая будет лежать в плоскости,

перпендикулярной к нашей касательной. Для определения положения образующих точек M и M_1 на прямой AP , являющейся линией пересечения секущей плоскости с плоскостью чертежа, достаточно, как известно, вписать в конус два шара, касающихся секущей плоскости; точки касания и будут фокусами конического сечения, т. е. точками M и M_1 . Построение кривой может быть однако упрощено и целиком переведено на плоскость чертежа на основании нижеследующих соображений. Обозначив середину отрезка AP через B замечаем, что точки, аналогичные B , будут лежать на прямой l , параллельной образующей g_2 . Очевидно, эта прямая пройдет также через точки N и C , являющиеся серединами отрезков AV и AK , причем точка K выбрана так, что $AV = AK$. Если обозначить теперь $VA = a$, $VP = b$ и $AP = c$, то будем иметь $AM = \frac{a-b+c}{2}$, $PM = \frac{-a+b+c}{2}$,

и так как $AB = \frac{c}{2}$, то $BM = BM_1 = \frac{a-b}{2}$, но $BC = \frac{1}{2} PK = \frac{a-b}{2}$, и следовательно, $BM = BM_1 = BC$.

Полученное соотношение определяет планиметрический способ построения кривой строфоиды: пусть дан угол с вершиной в точке C ; берем на одной из его сторон точку A и проводим через нее произвольный луч, который пересечет другую сторону в точке B ; тогда точки M и M_1 этого луча, построенные так, что $BM = BM_1 = BC$, принадлежат строфоиде.

Рассмотренная нами прежде строфоида, в отличие от кривой строфоиды, называется прямой. Она может быть получена, если вместо конуса взять цилиндр; именно, надо взять две параллели g_1 и g_2 , на первой из них — точку A ; провести затем прямую AP и на ней найти точки касания двух кругов, касающихся параллелей g_1 и g_2 .

Найденные точки будут принадлежать строфоиде (рис. 23). Построение можно упростить: пусть B — середина AP , геометрическое место точек B будет, очевидно, осью p цилиндра; если провести теперь через точку A прямую AK , перпендикулярную к g_2 , то треугольники BMO_1 , BM_1O_2 и BCA окажутся равными между собой, следовательно,

$$BM_1 = BM = BC.$$

Способ построения прямой строфоиды на основании полученного равенства очевиден. Справедливость этого равенства убеждает нас также в том, что полученная кривая действительно является строфоидой, так как оно соответствует исходному определению этой кривой.

Убедиться в том, что косая строфоида является обобщением прямой, можно также, составив уравнение кривой строфоиды. Обозначим с этой целью угол ACN через α , точку A будем считать полюсом, а прямую AK — полярной осью; тогда из треугольника ABC (рис. 22) получим:

$$\frac{AC}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \varphi},$$

откуда $AB = \frac{AC \sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}$, $BC = \frac{AC \sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}$, а так как радиусы-векторы

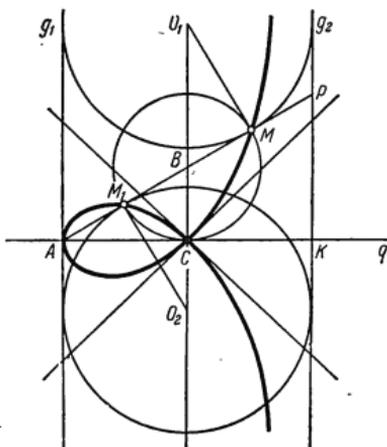


Рис. 23.

Офиурида имеет в начале координат узловую точку с касательными $y=0$ и $y=\frac{b}{c}x$; прямая $x=c$, т. е. директриса параболы, является асимптотой офиуриды.

Полагая в уравнении (4) $b=0$, получим уравнение циссоиды, которую можно рассматривать, следовательно, как частный вид офиуриды.

2. Трисектриса Маклорена. Трисектрису Маклорена можно определить как кривую, являющуюся подэрой параболы относительно такой точки ее оси, которая удалена от директрисы на расстояние, равное расстоянию директрисы от фокуса (рис. 25).

Определим подэру параболы

$$\eta^2 = -4a(\xi + 3a) \quad (5)$$

относительно начала координат, что как раз и будет удовлетворять приведенному выше определению. Уравнение касательной в произвольной точке $D(\xi, \eta)$ данной параболы запишется в виде

$$y - \eta = -\frac{2a}{\eta}(x - \xi), \quad (6)$$

а уравнение перпендикуляра, опущенного на эту касательную из начала координат — в виде

$$y = \frac{\eta}{2a}x. \quad (7)$$

Исключая ξ и η из уравнений (5), (6) и (7), получим уравнение искомой подэры в виде

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 - 3x^2). \quad (8)$$

Как видно, трисектриса Маклорена является кривой 3-го порядка; ось абсцисс она пересекает в двух точках $(-3a, 0)$ и $(0, 0)$; в начале координат имеет узел с касательными $y = \pm\sqrt{3}x$.

Полярное уравнение трисектрисы Маклорена удобно записать, принимая за полюс точку $B(-2a, 0)$ пересечения директрисы параболы с ее осью. Переносим начало координат в точку $B(-2a, 0)$, мы получим уравнение трисектрисы в виде

$$(x - 3a)(x^2 + y^2) + 4a^3 = 0.$$

Если теперь изменить направление оси абсцисс на противоположное

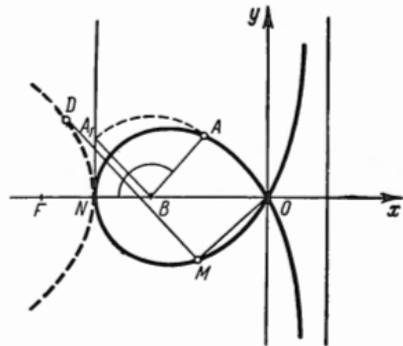


Рис. 25.

то соответствующее полярное уравнение трисектрисы Маклорена запишется в виде

$$\rho^3 \cos \varphi + 3a\rho^2 - 4a^3 = 0. \quad (9)$$

Пользуясь известной тригонометрической формулой $\cos \varphi = 4 \cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3 \cos \frac{\varphi}{3}$, можно привести уравнение (9) к виду

$$\rho = \frac{a}{\cos \frac{\varphi}{3}}. \quad (10)$$

Полученное уравнение трисектрисы Маклорена определяет способ трисекции угла с помощью этой кривой. Пусть вершина данного угла находится в точке B (рис. 25), одна из его сторон проходит через точку N , а другая пересекает трисектрису в точке A . Восставим в точке N перпендикуляр к полярной оси и найдем на нем точку A_1 так, чтобы $BA_1 = BA = \rho$. Тогда $BN = a$, $BA_1 = \rho = \frac{a}{\cos \angle NBA_1}$, и, следовательно, $\angle NBA_1 = \frac{1}{3} \angle NBA$.

Из уравнения (10) следует также, что *трисектриса Маклорена может быть получена в результате инверсии розы $\rho = a \cos \frac{\varphi}{3}$ относительно полюса.*

Обращаясь к иным способам определения трисектрисы Маклорена, заметим, что она может быть отнесена к семейству так называемых *кривых Крамера*, получаемых следующим построением: дан круг

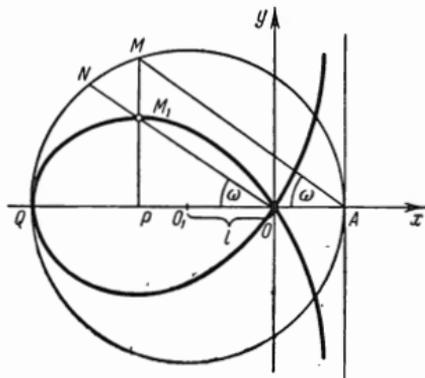


Рис. 26.

с центром в точке O_1 и радиусом r (рис. 26); центр этого круга отстоит от начала координат на расстоянии, равном l ; проводим под произвольным углом ω хорду AM , опускаем из точки M перпендикуляр MP на AQ , а через начало проводим луч ON параллельно AM , который пересечет MP в точке M_1 ; геометрическое место точек $M_1(x, y)$ и будет кривой Крамера.

Из рис. 26 имеем $x = OP = -l - PO_1 = -l - (PA - r)$; но так как по известной геометрической теореме $AM^2 = 2rPA$, а с другой стороны, из треугольника MPA , имеем $AM = \frac{PA}{\cos \omega}$, $AM^2 = \frac{PA^2}{\cos^2 \omega}$ и, следовательно, $PA = 2r \cos^2 \omega$, откуда $x = -l - (2r \cos^2 \omega - r) = -l - r \cos 2\omega$; кроме того, $y = -x \operatorname{tg} \omega$.

Исключая из последних двух уравнений параметр ω , получим уравнение кривых Крамера в виде

$$x(x^2 + y^2) = -(r + l)x^2 - (l - r)y^2.$$

Полагая в этом уравнении $r = 2a$ и $l = a$, получим $x(x^2 + y^2) = -a(y^2 - 3x^2)$ — уравнение (8) трисектрисы Маклорена.

Трисектриса Маклорена может быть построена также с помощью особого преобразования окружности, которое называется *преобразованием Маклорена* *).

Пусть в плоскости задана прямая q и три точки A , B и C (рис. 27). Возьмем произвольную точку M плоскости и поставим в соответствие ей точку M_1 , которую определим так, чтобы она лежала на прямой MC , а прямые MA и M_1B пересекались бы в точке R , принадлежащей данной прямой q . Подвергая такому преобразованию точки, принадлежащие окружности, можно получить, в зависимости от положения точек A , B и C и прямой q , ряд известных кривых и, в частности, трисектрису Маклорена.

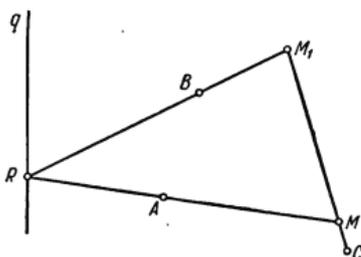


Рис. 27.

Пусть точка M лежит на окружности, точка B есть середина радиуса O_1A (рис. 26; точке B соответствует точка O_1), а третья точка C является бесконечно удаленной в направлении, перпендикулярном к O_1A . Прямую q будем считать также бесконечно удаленной. Чтобы найти для произвольной точки M окружности соответствующую ей по правилу Маклорена точку M_1 , достаточно выполнить такое же построение, которое мы рассматривали выше, определяя трисектрису Маклорена как частный случай кривых Крамера. Это обстоятельство и показывает, что рассмотренный частный вид преобразования Маклорена переводит окружность в трисектрису Маклорена.

Мы отметим в заключение некоторые иные случаи преобразования окружности по Маклорену:

1) если фиксированные точки A , B и C расположены так, что A лежит на преобразуемой окружности, B является бесконечно удаленной точкой диаметра, проходящего через A , фиксированная прямая q совпадает с диаметром, перпендикулярным к первому, а точка C является бесконечно удаленной точкой прямой q , то окружность преобразуется в псевдоверзиеру (см. стр. 90);

* Мы уже пользовались этим преобразованием для построения декартова листа (стр. 67).

2) если точка A лежит на преобразуемой окружности, точка B является серединой радиуса AM , прямая q перпендикулярна к AM , а C — ее бесконечно удаленная точка, то окружность преобразуется в декартов лист (см. стр. 67);

3) если точки A и B являются концами диаметра преобразуемой окружности, C — бесконечно удаленная точка в направлении, перпендикулярном к AB , а прямая q бесконечно удалена, то окружность преобразуется в циссоиду Диоклеса (см. стр. 68);

4) если точка A лежит на окружности, B является центром этой окружности, точка C бесконечно удалена в направлении, перпендикулярном к AB , а q — бесконечно удаленная прямая, то окружность преобразуется в строфоиду (см. стр. 78).

3. Кубика Чирнгаузена. Рассмотренные выше офигирида и трисектриса Маклорена были определены как подэры параболы. Мы хотим теперь рассмотреть кривую, для которой сама парабола служит подэрой. Эта *негативная подэра* параболы называется *кубикой Чирнгаузена* или *трисектрисой Каталана*.

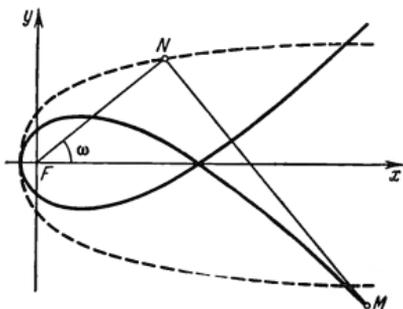


Рис. 28.

Подставим перед собою задачу найти кривую, для которой парабола $y^2 = 2px + p^2$, или, в полярной системе, $\rho = \frac{p}{1 - \cos \omega}$ служит подэрой относительно точки F — фокуса этой параболы (рис. 28).

Проведем из фокуса F радиус-вектор FN , восставим к нему в точке N перпендикуляр NM и найдем огибающую

таких перпендикуляров. Уравнение перпендикуляра NM может быть записано в виде

$$x \cos \omega + y \sin \omega = \frac{p}{1 - \cos \omega}. \quad (1)$$

Для нахождения огибающей продифференцируем уравнение (1) по параметру ω :

$$-x \sin \omega + y \cos \omega = -\frac{p \sin \omega}{(1 - \cos \omega)^2}. \quad (2)$$

Исключая из равенств (1) и (2) x и y , получим параметрические уравнения искомой кривой в виде

$$x = \frac{p \sin \frac{3\omega}{2}}{2 \sin^3 \frac{\omega}{2}}, \quad y = -\frac{p \cos \frac{3\omega}{2}}{2 \sin^3 \frac{\omega}{2}}.$$

Переходя к полярной системе, будем иметь:

$$\rho = \frac{p}{2 \sin^3 \frac{\omega}{2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{ctg} \frac{3\omega}{2}.$$

Исключая параметр ω , получим полярное уравнение кубики Чирнгаузена в виде $\rho \cos^3 \frac{\pi - \varphi}{3} = \frac{p}{2}$, или, в декартовой системе,

$$2(2p + x)^3 = 27p(x^2 + y^2).$$

Кривая является, как видно, линией 3-го порядка, симметричной относительно оси абсцисс, с которой она пересекается в точках $(-\frac{p}{2}, 0)$ и $(4p, 0)$. Вторая из точек пересечения является узловой с касательными, образующими угол в 60° .

Элементарные соображения позволят читателю убедиться, что кубика Чирнгаузена является огибающей отраженных от параболы световых лучей, перпендикулярных к ее оси, т. е. катакаустикой параболы. Поверхность вращения этой кривой можно наблюдать при надлежащем освещении в стакане чая, быстро мешая чай металлической ложкой.

4. Верзиера. Обзор замечательных кривых 3-го порядка мы закончим рассмотрением кривой, исследование которой связывается с именем Марии Анъези (1718—1799).

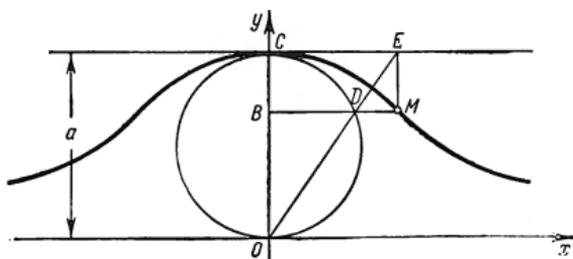


Рис. 29.

Пусть имеется круг с диаметром $OC = a$ (рис. 29) и отрезок BDM , построенный так, что $OB : BD = OC : BM$; геометрическое место точек M представляет собой кривую, называемую *верзиерой*.

Из рис. 29 видно, что заданная пропорция может быть переписана в виде $\frac{y}{BD} = \frac{a}{x}$; но $BD = \sqrt{y(a-y)}$, следовательно, уравнение верзиеры запишется в виде $\frac{y}{\sqrt{y(a-y)}} = \frac{a}{x}$, или

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}. \quad (1)$$

Из полученного уравнения следует, что верзиера является кривой 3-го порядка, симметричной относительно оси ординат; ось абсцисс служит для нее асимптотой; в точке C верзиера и окружность имеют общую касательную, параллельную оси абсцисс.

Параметрические уравнения верзиеры могут быть записаны в виде

$$x = t, \quad y = \frac{a^3}{t^3 + a^3}.$$

Пользуясь этими уравнениями и известным из аналитической геометрии соотношением между координатами трех точек, лежащих на одной прямой, приходим к заключению, что значения t_1 , t_2 и t_3 параметра t , определяющие три точки верзиеры, лежащие на одной прямой, связаны соотношением $t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = a^3$. Полагая $t_1 = t_2 = t_3$, получим значение параметра, соответствующее точкам перегиба верзиеры и определим координаты этих точек $x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{3a}{4}$.

Площадь между верзиерой и ее асимптотой равняется учетверенной площади производящего круга.

Объем тела вращения верзиеры вокруг ее асимптоты в два раза больше объема тора, полученного от вращения производящего круга.

Обобщением верзиеры является геометрическое место точек, которые определяются таким же построением, как и для верзиеры, но ось абсцисс уже не является касательной к производящей окружности, а смещена параллельно самой себе на некоторое расстояние. Получаемая в этом случае кривая известна под названием *агвиней Ньютона*.

Ближайшей родственницей верзиеры является *псевдоверзиера*, которую можно получить, удвоив все ординаты верзиеры. Уравнение ее может быть получено, следовательно, непосредственно из (1) и запишется в виде $y = \frac{2a^3}{x^3 + a^3}$.

Конструктивно псевдоверзиера может быть определена маклоровым преобразованием окружности (стр. 87).

ГЛАВА V

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ 4-ГО ПОРЯДКА

1. Классификация. Общая теория кривых 4-го порядка и вопросы, относящиеся к их классификации, слабо развиты по сравнению с теорией кривых 3-го порядка.

Одна из ранних попыток классификации этих кривых связывается с именем Варинга (1792), который подразделил их на 12 классов, объединяющих 84 551 кривых частного вида.

Эйлер и Крамер, полагая в основу классификации поведение кривых в бесконечности, подразделили кривые 4-го порядка на 9 категорий, соответствующих следующему распределению их бесконечно удаленных точек:

- 1) четыре мнимые точки, попарно сопряженные;
- 2) две действительные различные и две мнимые сопряженные;
- 3) четыре действительные различные;
- 4) две мнимые сопряженные и две действительные совпавшие;
- 5) две действительные различные и две действительные совпавшие;
- 6) две действительные двойные;
- 7) две сопряженные мнимые двойные;
- 8) одна однократная и одна трехкратная;
- 9) одна четырехкратная.

Плюккер подразделил кривые этих групп на 152 вида и для каждого из этих видов указал форму канонического уравнения.

В более позднее время классификация Эйлера и Крамера была заменена классификацией, основанной на рассмотрении природы и числа особых точек кривой.

В этой классификации все кривые 4-го порядка подразделяются на 4 большие группы со следующими характеристиками:

- 1) кривые, не имеющие особых точек;
- 2) кривые с одной двойной точкой*);

*) К этой группе относятся, в частности, так называемые «кривые дьявола»; их уравнение $y^4 - x^4 + ay^2 + bx^2 = 0$; в начале координат двойная или изолированная точка, в зависимости от сравнительной величины a и b .

3) кривые с двумя двойными точками, называемые *эллиптическими*, так как координаты точки таких кривых выражаются эллиптическими функциями параметра;

4) кривые с тремя двойными точками или одной трехкратной, являющиеся рациональными кривыми 4-го порядка.

Плюккеровские характеристики кривых 4-го порядка, не имеющих точек кратности выше двух, таковы:

Род	Класс	Число двойных точек	Число точек возврата	Число двойных касательных	Число точек перегиба
3	12	0	0	28	24
2	10	1	0	16	18
2	9	0	1	10	16
1	8	2	0	8	12
1	7	1	1	4	10
1	6	0	2	1	8
0	6	3	0	4	6
0	5	2	1	2	4
0	4	1	2	1	2
0	3	0	3	1	0

Заметим еще, что в конце 19 столетия Кэли, Цейтен и Крон произвели классификацию кривых 4-го порядка, отправляясь от данных топологии. Они выделили 36 типов этих кривых, распределяемых в 13 групп.

Мы приведем далее некоторые свойства наиболее изученных кривых 4-го порядка, а именно рациональных, эллиптических и бициркулярных.

2. Рациональные кривые. Рациональными являются кривые 4-го порядка, имеющие три двойные точки (см. стр. 23). Координаты точки таких кривых являются целыми рациональными функциями 4-й степени от параметра.

Укажем два способа конструктивного образования рациональных кривых 4-го порядка.

С проективной точки зрения рациональная кривая 4-го порядка определяется пересечением прямых, принадлежащих некоторому пучку, с прямыми проективно соответствующего ему пучка касательных к некоторой кривой 2-го порядка.

Рациональные кривые 4-го порядка могут быть получены также квадратичным преобразованием кривой 2-го порядка. Действительно, если рациональную кривую 4-го порядка отнести к координатному треугольнику, вершины которого совпадают с тремя двойными точками этой кривой, то уравнение ее запишется в виде

$$ax_2^2x_3^2 + bx_3^2x_1^2 + cx_1^2x_2^2 + 2dx_1x_2x_3 + 2ex_2x_3x_1 + 2gx_3x_1x_2 = 0.$$

Пользуясь формулами квадратичного преобразования

$$x_1 = \rho x'_1 x'_2,$$

$$x_2 = \rho x'_1 x'_3,$$

$$x_3 = \rho x'_1 x'_3,$$

получим уравнение

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx'_1 x'_2 + 2ex'_2 x'_3 + 2gx'_1 x'_3 = 0,$$

которое выражает кривую 2-го порядка. Подвергая эту кривую обратному квадратичному преобразованию, мы получим исходную рациональную кривую 4-го порядка.

Если преобразуемая кривая 2-го порядка, например окружность, пересекает какую-либо сторону координатного треугольника в двух точках, то соответствующая кривая 4-го порядка должна иметь, по свойству квадратичного преобразования, в противоположной вершине этого треугольника две касательные и, значит, узловую точку. Если указанные две точки совпадают в одну, то совпадают в одну и соответствующие им касательные, и следовательно, кривая 4-го порядка будет иметь в вершине треугольника точку возврата. Если, наконец, точки пересечения кривой 2-го порядка со стороной треугольника будут мнимыми, то противоположная вершина треугольника является изолированной точкой кривой 4-го порядка.

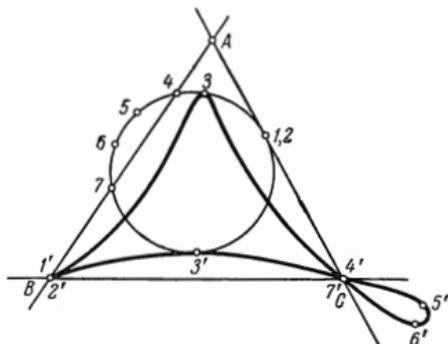


Рис. 30.

На рис. 30 все эти случаи предусмотрены, причем соответствующие элементы помечены одинаковыми цифрами.

Из сказанного следует, что если преобразуемая кривая 2-го порядка пересекает стороны координатного треугольника в шести точках, то кривая 4-го порядка будет иметь три узловые точки; если эти шесть точек мнимые, то им будут соответствовать три изолированные точки; если они попарно совпадают, то соответствующая кривая 4-го порядка будет иметь три точки возврата.

Особенности формы этой кривой зависят также от того, пересекает ли кривая 2-го порядка стороны координатного треугольника или их продолжения. Частные формы кривых, зависящие от этого обстоятельства, представлены на рис. 31—34, где в качестве преобразуемой кривой 2-го порядка взята окружность.

Проследить особенности формы получающихся при квадратичном преобразовании кривых 4-го порядка можно, осуществляя преобразование заданной кривой 2-го порядка аналитически, но можно воспользоваться и графическим способом осуществления такого преобразования. На описании этого способа мы и хотим остано-

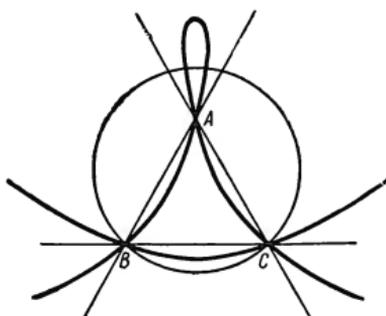


Рис. 31.

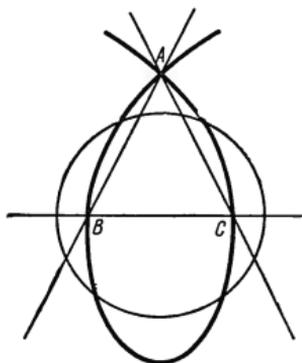


Рис. 32.

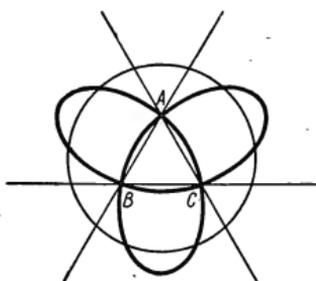


Рис. 33.

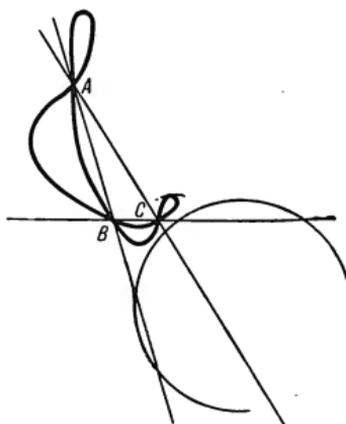


Рис. 34.

виться. Заметим предварительно, что если прямая s_1 проходит через вершину координатного треугольника, то при преобразовании ей будут соответствовать две прямые — прямая s_2 , проходящая через ту же вершину, и противоположная сторона треугольника (кривая 2-го порядка, которая должна соответствовать прямой в общем случае, здесь распадается). Определив углы, составляемые прямой s_1 и соответствующей ей прямой s_2 , с биссектрисой угла A , мы убедимся,

что эти углы равны (рис. 35). Это обстоятельство и определяет графический способ осуществления квадратичного преобразования; а именно, чтобы найти точку P_2 , соответствующую заданной точке P_1 , соединяем данную точку P_1 с какой-либо вершиной треугольника, например с A , и проводим через вершину A прямую c_2 , симметричную прямой P_1A относительно биссектрисы угла A (рис. 36). Проводя аналогичное построение относительно вершины B , получим искомую точку P_2 как точку пересечения найденных прямых.

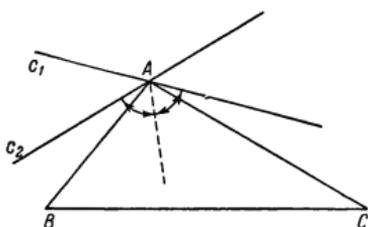


Рис. 35.

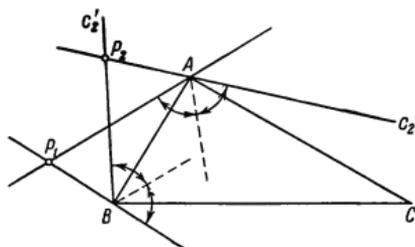


Рис. 36.

Осуществляя графическим путем квадратичное преобразование для ряда точек преобразуемой кривой, мы получим соответствующие точки новой кривой.

Графический способ дает возможность определить наличие бесконечно удаленных точек кривой 4-го порядка, получаемой в результате квадратичного преобразования некоторой кривой 2-го порядка.

Для этой цели нам потребуется уравнение бесконечно удаленной прямой в трилинейных координатах.

Чтобы получить такое уравнение, напомним, что трилинейные координаты точки $M(x_1, x_2, x_3)$ пропорциональны расстояниям p_1, p_2, p_3 этой точки от сторон координатного треугольника, т. е.

$$x_1 = \rho p_1, \quad x_2 = \rho p_2, \quad x_3 = \rho p_3. \quad (1)$$

Заметим, далее, что если a_1, a_2, a_3 — длины сторон координатного треугольника, то, соединив какую-либо внутреннюю точку M треугольника с его вершинами, мы получим три треугольника с основаниями a_1, a_2, a_3 и высотами p_1, p_2, p_3 . Площадь U координатного треугольника может быть выражена, таким образом, равенством

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 2U. \quad (2)$$

Равенство это будет справедливым и в том случае, когда точка M лежит вне треугольника. Правда, в этом случае высота одного из трех упомянутых выше треугольников выразится числом отрицательным, но при этом и площадь координатного треугольника будет равняться сумме площадей двух треугольников, имеющих вершину

в точке M без площади треугольника с отрицательным значением высоты. Таким образом, равенство (2) имеет место при любом положении точки M на координатной плоскости.

Теперь рассмотрим уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0. \quad (3)$$

Будучи уравнением первой степени, оно выражает прямую. Заменяя в этом уравнении x_1, x_2, x_3 их выражениями из (1), получим:

$$(a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3)\rho = 0.$$

Так как, согласно (2), первый множитель не может равняться нулю, то последнее равенство возможно лишь при $\rho = 0$. Но тогда, имея в виду соотношения (1), можно заключить, что хотя бы одно из расстояний p_1, p_2, p_3 будет бесконечно большим, так как в противном случае мы имели бы $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, что невозможно.

Это заключение показывает, что любая точка прямой (3) будет бесконечно удаленной, а уравнение (3) будет уравнением бесконечно удаленной прямой в трилинейных координатах. Так как $a_1 : a_2 : a_3 = \sin A : \sin B : \sin C$, то уравнение (3) можно записать также в виде

$$x_1 \sin A + x_2 \sin B + x_3 \sin C = 0.$$

Подвергая это уравнение бесконечно удаленной прямой квадратичному преобразованию, получим:

$$x'_3x'_2 \sin A + x'_3x'_1 \sin B + x'_2x'_1 \sin C = 0.$$

Нетрудно убедиться, что это уравнение выражает окружность, описанную около координатного треугольника.

Таким образом, *квадратичное преобразование устанавливает соответствие между точками описанной около координатного треугольника окружности и точками бесконечно удаленной прямой.*

Отсюда следует, что кривая 4-го порядка, получаемая в результате квадратичного преобразования кривой 2-го порядка, будет иметь бесконечно удаленные точки лишь в том случае, если преобразуемая кривая пересекает окружность, описанную около координатного треугольника.

Чтобы определить направление, в котором удалена точка кривой в бесконечность, достаточно построить указанным выше графическим путем образ точки пересечения кривой с описанной около координатного треугольника окружностью.

3. Эллиптические кривые. *Эллиптическими*, как уже сказано выше, называются кривые 4-го порядка с двумя двойными точками. Подобно тому как рациональные кривые 4-го порядка могут быть получены квадратичным преобразованием кривых 2-го порядка, эллип-

тические кривые 4-го порядка получаются квадратичным преобразованием кривых 3-го порядка, не имеющих двойных точек и проходящих через две вершины координатного треугольника.

4. Бициркулярные кривые. Обратимся к группе *бициркулярных* кривых 4-го порядка, характеризующихся тем, что две их двойные точки совпадают с циклическими точками плоскости.

Эти кривые получаются в результате стереографической проекции линии пересечения поверхности шара с поверхностью 2-го порядка, не проходящей через центр проекции.

Они могут быть получены также с помощью инверсии циркулярной кривой 3-го порядка, причем фокусы этой кривой будут соответствовать фокусам полученной кривой 4-го порядка*), откуда, по теореме Харта (см. стр. 62), имеем: *16 фокусов бициркулярной кривой 4-го порядка лежат на четырех окружностях, по четыре фокуса на каждой.*

Интересными свойствами обладают бициркулярные кривые 4-го порядка, если они одновременно являются рациональными кривыми. Будучи рациональными, эти кривые должны иметь три двойные точки, но две двойные точки их должны совпадать с циклическими точками плоскости, и следовательно, они будут иметь только одну двойную точку, не являющуюся бесконечно удаленной.

Общее уравнение таких кривых может быть записано в виде

$$(x^2 + y^2)^2 + (dx + ey)(x^2 + y^2) + ax^2 + bxy + cy^2 = 0. \quad (1)$$

Уравнение касательных в двойной точке имеет вид

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

В зависимости от знака (или равенства нулю) дискриминанта $b^2 - 4ac$ двойная точка кривой окажется изолированной, точкой возврата или узловой.

В разделе, посвященном кривым 3-го порядка, мы показали, что рациональные циркулярные кривые 3-го порядка могут быть получены инверсией кривой 2-го порядка, если полюс инверсии лежит на этой кривой. Подобно этому, бициркулярные рациональные кривые 4-го порядка могут быть образованы инверсией кривой 2-го порядка, но уже при условии, что полюс инверсии не лежит на этой кривой.

Чтобы убедиться в этом, запишем уравнение (1) в полярных координатах ρ, φ :

$$\rho_1^2 + (d \cos \varphi + e \sin \varphi) \rho_1 + (a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi) = 0.$$

Подвергая это уравнение инверсии $\rho_1 \rho = r^2$, получим:

$$\frac{r^4}{\rho^2} + (d \cos \varphi + e \sin \varphi) \frac{r^2}{\rho} + (a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi) = 0,$$

*) См. Beutel, Algebraische Kurven, 1911.

или

$$\rho^3 (a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi) + r^2 \rho (d \cos \varphi + e \sin \varphi) + r^4 = 0.$$

Возвращаясь к прямоугольной системе, будем иметь:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + r^2(dx + ey) + r^4 = 0 \quad (2)$$

— уравнение, выражающее, как видно, кривую 2-го порядка, которая,

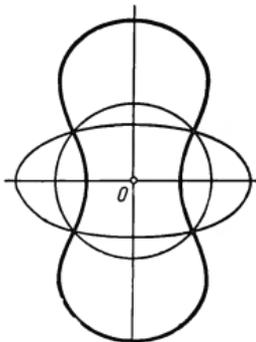


Рис. 37.

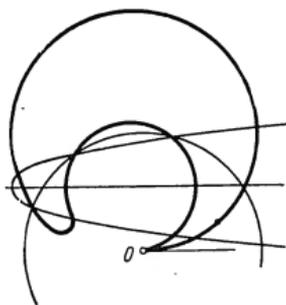


Рис. 38.

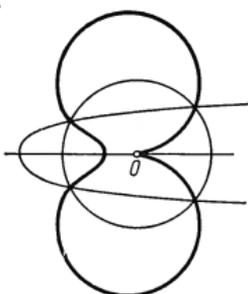


Рис. 39.

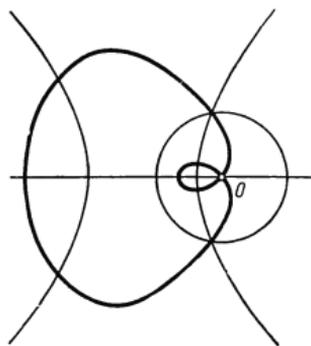


Рис. 40.

будучи инвертирована в обратном порядке, перейдет в кривую (1). Из уравнения (2) видно, что знак (или равенство нулю) дискриминанта $b^2 - 4ac$ указывает и на то, какая кривая 2-го порядка — эллипс, парабола или гипербола — инвертировалась.

На рис. 37 представлена инверсия эллипса, причем полюс инверсии находится в центре эллипса, который является изолированной точкой кривой. На рис. 38 и 39 приведена инверсия параболы, а на рис. 40 — инверсия гиперболы, причем полюс инверсии находится в фокусе гиперболы.

По поводу бициркулярных рациональных кривых 4-го порядка следует заметить еще, что они, подобно рациональным и циркулярным кривым 3-го порядка, могут быть образованы как подэры, но уже не параболы, а эллипса или гиперболы.

К замечательным бициркулярным рациональным кривым 4-го порядка относятся:

1) улитка Паскаля, получаемая инверсией эллипса или гиперболы при условии, что полюс инверсии находится в одном из фокусов; она же является подэрой окружности относительно какой-либо точки, не совпадающей с центром окружности (стр. 106);

2) кардиоида, получаемая инверсией параболы при условии, что полюс инверсии находится в фокусе параболы; она же является подэрой окружности относительно точки, принадлежащей ей (стр. 121);

3) эллиптическая и гиперболическая лемнискаты Бута, получаемые инверсией эллипса и гиперболы при условии, что полюс инверсии лежит в центре этих кривых; кроме того, эллиптическая лемниската является подэрой эллипса, а гиперболическая — подэрой гиперболы относительно центра этих кривых (стр. 144);

4) лемниската Бернулли, получаемая инверсией равносторонней гиперболы при условии, что полюс инверсии совпадает с центром гиперболы; она же является подэрой равносторонней гиперболы относительно ее центра (стр. 155).

Мы добавим еще, что к бициркулярным кривым 4-го порядка общего типа (не рациональным) относятся такие замечательные кривые, как овалы Декарта, овалы Кассини и кривые Персея. Этими кривыми мы займемся в дальнейшем.

5. Кривые высших порядков. Первые исследования по классификации кривых 5-го порядка принадлежат Крамеру, который, полагая в основу этой классификации природу бесконечно удаленных точек таких кривых, разбил их на 12 категорий со многими подразделениями (1750).

Кривые 6-го и высших порядков исследованы лишь по их отдельным представителям. Предложений общего характера о таких кривых почти нет, равным образом не существует сколько-нибудь законченной классификации их.

В последующих параграфах мы обратимся к рассмотрению отдельных видов кривых 4-го и высших порядков, замечательных по своим свойствам и применениям.

ГЛАВА VI
 ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ 4-ГО И ВЫСШИХ
 ПОРЯДКОВ

§ 1. Конхоида Никомеда

1. Особенности формы. Первое исследование *конхоиды* приписывается Никомеду (3 век до н. э.), который и применил ее для решения задачи о трисекции угла.

Кривая определяется следующим образом: из точки O , называемой *полюсом* конхоиды и отстоящей от прямой LL_1 , называемой ее *базисом*, на расстоянии $OE = a$, проводят луч OM , который вращают вокруг точки O и в каждом его положении откладывают от точки его пересечения с прямой LL_1 отрезок $KM = l$ (рис. 41).

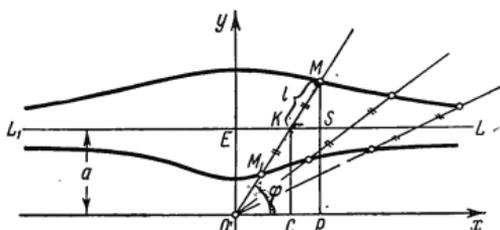


Рис. 41.

При повороте луча от 0° до 180° мы получим таким построением геометрическое место точек M — первую ветвь кривой; при дальнейшем повороте мы, откладывая отрезок по-прежнему по направлению луча, будем откладывать его фактически в сторону, обратную прежней, и получим таким построением геометрическое место точек M_1 — вторую ветвь кривой.

Чтобы вывести полярное уравнение конхоиды, принимаем полюс конхоиды за полюс полярной системы, а перпендикулярную к отрезку OE прямую — за полярную ось. Из рисунка, который предполагает, что $l < a$, имеем $\rho = OK + l$, и следовательно, полярное уравнение

конхоиды будет иметь вид

$$\rho = \frac{a}{\sin \varphi} + l. \quad (1)$$

Уравнение ее в декартовой системе можно получить или по формулам перехода, или непосредственно из тех соображений, что

$\triangle OMP \sim \triangle KMS$ и, значит, $\frac{OM}{OK} = \frac{MP}{MS}$, или $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l} = \frac{y}{y-a}$, откуда

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 - l^2 y^2 = 0. \quad (2)$$

Так как исходная пропорция останется в силе и в том случае, если вместо точки M взять точку M_1 , то уравнение (2) выражает конхоиду в целом, с двумя ее ветвями.

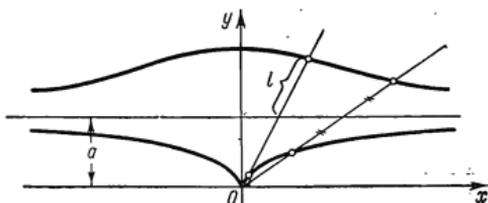


Рис. 42.

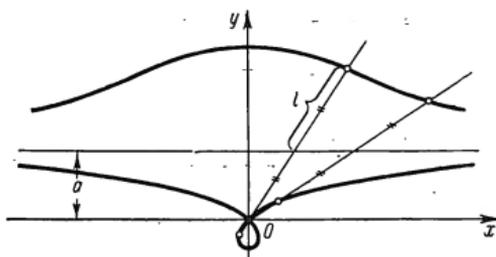


Рис. 43.

Из уравнения (2) следует, что конхоида является алгебраической кривой 4-го порядка.

Форма конхоиды зависит от величины параметров a и l . Заметим, что кривая пересекает ось ординат в точках $(0, a + l)$ и $(0, a - l)$, однако уравнение (2) удовлетворяется также значениями $x = 0, y = 0$; следовательно, точка $(0, 0)$ также принадлежит конхоиде и является ее особой точкой.

Известно, что уравнения касательных к алгебраической кривой в ее особой точке, совпадающей с началом координат, можно получить, приравняв нулю группу членов с. низшей степенью

переменных, входящих в уравнение этой кривой. Соответственно этому уравнения касательных к конхоиде в начале координат будут иметь вид $a^2x^2 + a^2y^2 - l^2y^2 = 0$, или $y = \pm \frac{a}{\sqrt{l^2 - a^2}}x$. Отсюда следует, что при $l < a$ особая точка конхоиды будет изолированной (рис. 41), при $l = a$ конхоида имеет в начале точку возврата с касательной $x = 0$ (рис. 42); при $l > a$ кривая имеет в начале узел (рис. 43).

Конхоида имеет асимптоту, роль которой играет базисная прямая LL_1 , как это следует из того, что

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} MP = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \sin \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{a}{\sin \varphi} + l \right) \sin \varphi = a.$$

2. Свойства. Координаты точки перегиба для кривой, заданной в полярной системе, должны, как известно, удовлетворять равенству $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$. В нашем случае получим $\rho = \frac{2a \cos^2 \varphi}{\sin^3 \varphi}$, или, переходя к прямоугольным координатам, $y^3 = 2ax^2$. Отсюда следует, что *точки перегиба всех конхоид с одним и тем же параметром a , но с разными значениями параметра l , лежат на параболе Нейля $y^3 = 2ax^2$.*

Исключительно просто могут быть построены нормаль и касательная в заданной точке конхоиды на основании того, что полярная поднормаль S_n кривой определяется равенством $S_n = \rho'$, но ρ' для конхоиды $\rho = \frac{a}{\sin \varphi} + l$ и для ее базисной прямой $\rho = \frac{a}{\sin \varphi}$ имеют одно и то же значение $-\frac{a \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$; следовательно, поднормаль конхоиды в точке M и поднормаль базисной прямой в соответствующей точке K выражаются одним и тем же отрезком (рис. 41). Способ построения нормали и касательной к конхоиде на основании этого обстоятельства очевиден.

Площадь, ограниченная прямой, проходящей через полюс конхоиды перпендикулярно к ее базису, дугами верхней и нижней ветвей ее и радиусом-вектором OM , соответствующим углу φ (рис. 41), определяется по формуле

$$U = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \left[\left(\frac{a}{\sin \varphi} + l \right)^2 - \left(\frac{a}{\sin \varphi} - l \right)^2 \right] d\varphi = 2al \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = 2al \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда следует, в частности, что вся площадь, заключенная между ветвями конхоиды, является величиной бесконечно большой.

Отметим, что *циссоидой двух ветвей конхоиды является окружность с центром в полюсе конхоиды и радиусом $2l$.*

Определение центра кривизны в заданной точке конхоиды можно осуществить графически, пользуясь ранее рассмотрен-

ным приемом (см. стр. 74). Этим приемом можно воспользоваться, так как в точке M конхоиды ρ'' имеет такую же величину, как и ρ'' для базисной прямой в точке K ; но для базисной прямой ρ'' можно определить графически, так как радиус кривизны этой прямой известен ($=\infty$). Применяя здесь графический способ определения ρ'' , найдем, что для базисной прямой в точке K , а значит, и для конхоиды в соответствующей точке M ρ'' выражается отрезком BK (рис. 44). Отложив, далее, отрезок $BA = BK$, мы определим точку A , соединим ее с точкой P , и отрезок AP разделим точкой N пополам. Проведем теперь $PB_1 \perp MP$. Прямая, проходящая через точки B_1 и N , пересечет MP в точке C , которая и будет искомым центром.

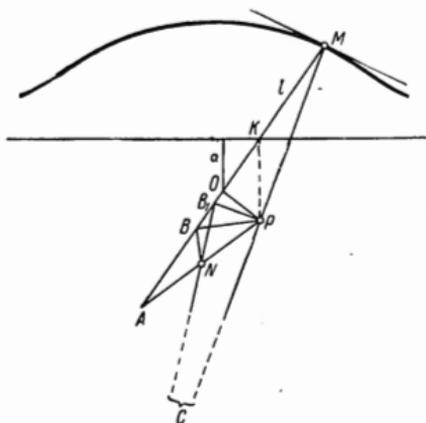


Рис. 44.

3. Конхоидальный циркуль. Основанием прибора служит рама $ABCD$ (рис. 45).

Между боковыми планками этой рамы натянута проволока MN . В точке O , являющейся серединой AD , укреплена рейка OL , которая может вращаться вокруг O . На проволоку MN надета свободно двигающаяся муфта, снабженная стерженьком. На рейку OL надевается цилиндр, который может свободно двигаться вдоль этой рейки. По краям цилиндра закреплены чертящие острия, а посередине — шайбочка, при помощи которой цилиндр надевается на стерженек муфты. При вращении рейки OL вокруг точки O цилиндр будет двигаться посту-

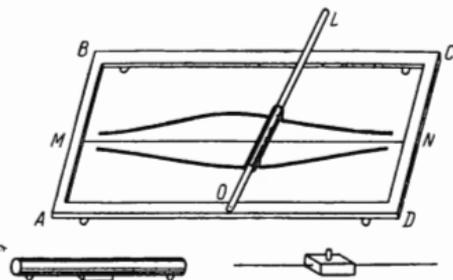


Рис. 45.

пательно вдоль рейки и в то же время поворачиваться в горизонтальной плоскости вокруг стерженька муфты. Проволока MN играет роль базиса конхоиды. Длина цилиндра равна $2l$. Если цилиндр сделать раздвижным, то при помощи этого прибора удастся вычертить конхоиды всех трёх основных форм.

4. Историческая справка. Поводом к определению конхоиды послужили, как уже было сказано, попытки древних решить задачу о трисекции угла. Пусть угол α необходимо разделить на три равных части (рис. 46). Отложим для этой цели на одной из сторон данного угла α отрезок $OC=l$. Из точки C радиусом, равным l , описываем окружность. Проводим, далее, через точку C прямую, параллельную другой стороне данного угла. Принимая эту прямую за базис, а точку O — вершину данного угла — за полюс, строим конхоиду. Соединяем, наконец, точку O с точкой M пересечения конхоиды с окружностью. Тогда угол MOx будет равен $\frac{1}{3}\alpha$. Действительно, продолжая OM до пересечения с базисом конхоиды в

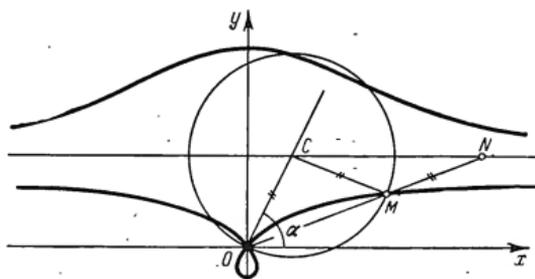


Рис. 46.

точке N , получим $MN=l$ (по основному свойству конхоиды), и, следовательно, $\triangle CMN$ — равнобедренный; равнобедренным является и $\triangle OCM$. Соотношение величин углов этих треугольников показывает, что $\angle MOx = \frac{1}{3}\alpha$.

В истории математики конхоида замечательна еще и тем, что на ней демонстрировал Декарт свой способ построения нормалей и касательных к кривым *).

Способ нахождения точек перегиба конхоиды был найден Гюйгенсом и Ферма. Гюйгенс установил также тот факт, что площадь, заключенная между конхоидой и ее базисом, является величиной бесконечно большой.

5. Конхоидальные кривые. Базисом конхоиды Никомеда, рассмотренной нами, являлась прямая. В общем случае роль базиса может играть любая кривая. К еще более общему пониманию конхоиды можно прийти, если рассматривать базис в виде произвольной кривой, а отрезок постоянной длины l откладывать от точки

*) Декарт, Геометрия. 1938.

пересечения луча с базисом уже не по направлению луча, а по прямой, составляющей с лучом угол ω .

Рассмотрим частный случай, когда базис, как и в случае конхоиды Никомеда, прямолинейный. Если за начало координат принять основание перпендикуляра, опущенного из полюса C на базис, а длину этого перпендикуляра полагать равной a , то параметрические уравнения соответствующей конхоиды будут иметь вид

$$x = a \operatorname{ctg} \gamma - l \cos(\omega + \gamma),$$

$$y = -l \sin(\omega + \gamma),$$

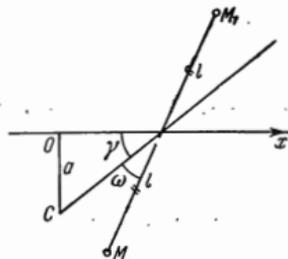


Рис. 47.

как это можно усмотреть из рис. 47.

Угол γ здесь играет роль параметра, а заданный постоянный угол ω имеет для одной ветви значение ω , а для другой $\omega + \pi$. Исключая из приведенных уравнений параметр γ , получим уравнение

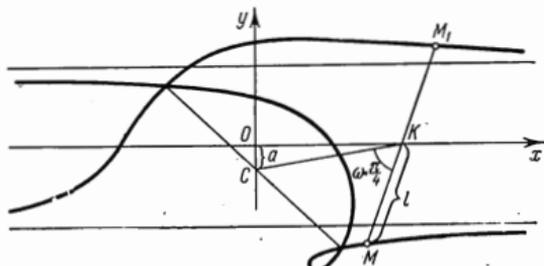


Рис. 48.

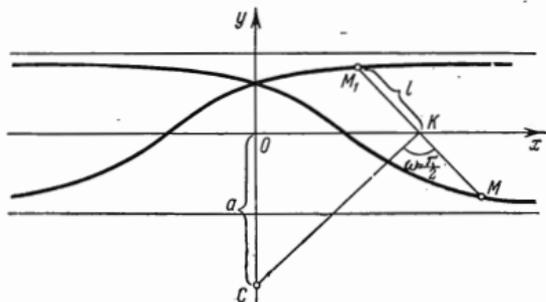


Рис. 49.

$[x \cos \omega - (y^2 + ay - l^2) \sin \omega]^2 = (x \sin \omega + y \cos \omega + a \cos \omega)(l^2 - y^2)$,
выражающее *косую конхоиду*, называемую так в отличие от обыкновенной конхоиды Никомеда, соответствующей $\omega = 0$ и $\omega = \pi$.

В зависимости от задаваемой величины угла ω косая конхоида будет иметь различные формы, которые могут быть достаточно сложными и отличными одна от другой. На рис. 48 и 49 приведены косые конхоиды, причем первая соответствует $\omega = \frac{\pi}{4}$, а вторая, называемая *ортоконхойдой*, — значению $\omega = \frac{\pi}{2}$.

§ 2. Улитка Паскаля

1. Свойства. Улитку Паскаля можно определить как конхоиду, базисом которой является окружность.

Пусть имеется окружность с радиусом r , которая проходит через полюс O и имеет центр на полярной оси (рис. 50). Представим себе,

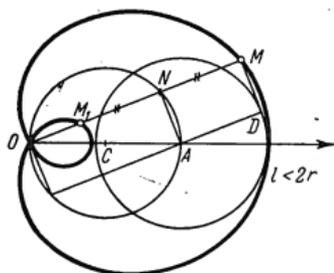


Рис. 50

что вокруг полюса O вращается луч OM , и в каждом его положении от точки N пересечения его с окружностью откладывается отрезок $NM = l$. При повороте луча от 0° до 180° мы получим геометрическое место точек M . При дальнейшем повороте луча, откладывая отрезок l , как и в первом случае, по направлению луча, мы фактически будем откладывать его в сторону, противоположную прежней, и получим геометрическое место точек M_1 . Геометрическое место точек M и M_1 и будет улиткой Паскаля.

Полярное уравнение улитки имеет вид

$$\rho = 2r \cos \varphi + l. \quad (1)$$

Переходя к прямоугольным координатам, получим:

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0. \quad (2)$$

Итак, улитка Паскаля является алгебраической линией 4-го порядка, форма которой зависит от двух параметров r и l . Вычисляя производные левой части формулы (2) в точке $(0, 0)$, мы получим нули, откуда следует, что начало координат является для улитки особой точкой. Приравнявая нулю группу членов с низшей степенью из уравнения кривой, получим уравнение касательных в особой точке в виде $4r^2x^2 - l^2x^2 - l^2y^2 = 0$, или $y = \pm \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{l}x$. Следовательно, если $l < 2r$, то касательные будут действительными, и особая точка — узловое (рис. 50); если $l > 2r$, то касательные окажутся мнимыми, а особая точка — изолированной (рис. 51);

если $l=2r$, то обе касательные совпадут с осью абсцисс, и особая точка будет точкой возврата (рис. 52).

Следует заметить, что в последнем случае уравнение улитки запишется в виде $\rho = 2r(1 + \cos \varphi)$ и выразит кардиоиду, которая принадлежит, таким образом, к семейству улиток.

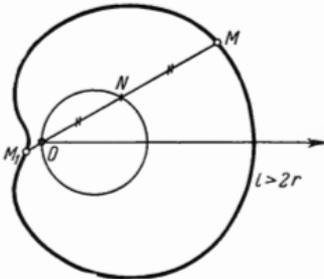


Рис. 51.

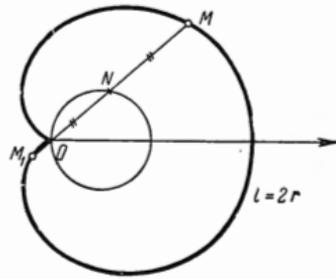


Рис. 52.

Улитка Паскаля представляет собой подэру окружности относительно произвольно выбранной точки плоскости. В самом деле, проведем из точки A как из центра окружность радиусом l (рис. 50) и построим четырехугольник $ANMD$, который будет как видно, прямоугольником, и, следовательно, точка M улитки является основанием перпендикуляра, опущенного из полюса O на касательную в точке D к окружности. Ясно, что геометрическое место таких точек, т. е. улитка, и будет подэрой окружности относительно полюса O .

Улитка Паскаля получается в результате инверсии кривой 2-го порядка относительно фокуса. В самом деле, подвергнув указанному преобразованию

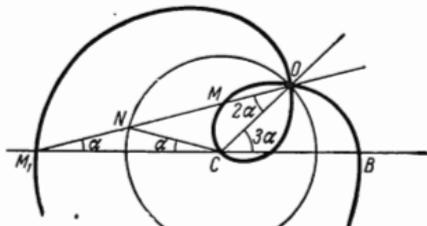


Рис. 53.

преобразованию $\rho\rho_1 = k^2$ кривую $\rho = \frac{k^2}{2r \cos \varphi + l}$, получим улитку $\rho_1 = 2r \cos \varphi + l$.

Если $l > 2r$, то преобразуемая кривая — эллипс, ему соответствует улитка с изолированной точкой; при $l = 2r$ инвертировалась парабола, ей соответствует улитка-кардиоида; если же $l < 2r$, то инвертировалась гипербола, соответствующая ей улитка имеет узловую точку.

Улитка Паскаля может быть отнесена также к числу трисектрис, т. е. кривых, позволяющих осуществить трисекцию угла.

Действительно, если взять улитку с петлей, проходящей через центр круга (для этого следует положить $l=r$), то, как это следует из рис. 53, треугольники M_1NC и NCO будут равнобедренными, и следовательно, $\angle OM_1B = \frac{1}{3} \angle OCB$.

Следует заметить еще, что улитка Паскаля является одним из членов семейства овалов Декарта (стр. 135); она является также эпитрохоидой (стр. 118) и может быть, таким образом, отнесена к циклоидальным кривым.

Площадь, ограничиваемая улиткой для случая $l > 2r$, определяется по формуле $U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2r \cos \varphi + l)^2 d\varphi = \pi(2r^2 + l^2)$.

Длина дуги выражается эллиптическим интегралом 2-го рода.

2. Применения в технике. Улитка Паскаля используется как линия для вычерчивания профиля эксцентрика, если требуется, чтобы скользящий по профилю стержень совершал гармонические колебания.

Действительно, поступательное перемещение S точки M (рис. 54) определится по формуле $S = r = 2r \cos \omega t + l = 2r \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + l$,

где ω — угловая скорость эксцентрика. Скорость $v = S' = -2r\omega \sin \omega t$ возвратно поступательного движения стержня будет изменяться без скачков. Этим свойством эксцентрики, очерченные по улитке Паскаля, выгодно отличаются от эксцентриков, очерченных по спирали Архимеда, у которых, благодаря постоянству скорости v , в конце каждого хода стержня происходят удары (скорость скачком меняет значение v на $-v$), что вызывает быстрое изнашивание механизма.

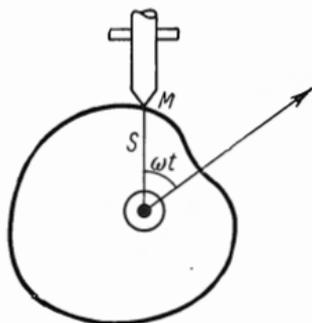


Рис. 54.

Одна из составных частей в механизме для поднятия и опускания семафора очерчена по улитке Паскаля. Свойство эксцентрика, очерченного по улитке, оказывается здесь весьма полезным,

так как скорость поднятия или опускания плеча семафора, являясь минимальной в начале поднятия или опускания, достигает максимального значения в середине хода семафора. Этим обеспечивается плавный перевод плеча семафора с незначительным начальным и конечным толчками, а также облегчается преодоление сил инерции и трения, особенно сказывающихся в начальный момент работы привода.

§ 3. Циклоидальные кривые

1. Параметрические уравнения. Один из способов кинематического образования кривых заключается в следующем: полагают, что некоторая кривая катится без скольжения по другой кривой; какая-либо точка, неизменно связанная с первой кривой, будет описывать при этом новую линию. Так, можно представить себе эллипс, катящийся по другому эллипсу, и исследовать линию, по которой будет перемещаться его центр, или определить траекторию фокуса параболы, катящейся по прямой, и т. д.

Среди кривых, образуемых указанным способом, выделяются кривые, являющиеся траекториями точки, неизменно связанной с кругом, который катится без скольжения по другому кругу. Получаемые при этом линии называются *циклоидальными*.

Циклоидальные кривые могут быть как трансцендентными, так и алгебраическими. Последние представляют особый интерес, к ним относятся такие известные кривые, как кардиоида, астроида, кривая Штейнера и т. д.

При образовании циклоидальных кривых вычерчивающая точка отстоит от центра производящего (подвижного) круга на определенном расстоянии. В частном случае, к которому мы и обратимся в первую очередь, она находится на окружности производящего круга. Заметим, что при этом условии получаемые кривые подразделяются на *эпициклоиды* и *гипоциклоиды* в зависимости от того, располагается ли производящий круг с наружной или с внутренней стороны неподвижного круга.

Вывод уравнений как тех, так и других кривых одинаков, они имеют целый ряд общих свойств, поэтому в дальнейших рассуждениях мы будем рассматривать оба эти вида кривых одновременно.

Пусть r и R — радиусы катящегося и неподвижного кругов. Поместим начало координат в центр неподвижного круга; будем считать, кроме того, что в исходном положении вычерчивающая точка M совпала с точкой A , в которой производящий круг касался неподвижного, и ось абсцисс направим через точку A (рис. 55 и 56). Угол MO_1N между радиусами, проведенными в вычерчивающую точку производящего круга и в точку касания его с неподвижным кругом, обозначим через t . Введем еще характерный для рассматриваемых кривых параметр $m = \frac{r}{R}$, который называется их *модулем*. Так как качение производящего круга предполагается совершающимся без скольжения, то $\overline{AN} = \overline{M\tilde{N}}$, или $R \cdot \angle NOA = rt$, откуда $\angle NOA = \frac{r}{R} t = mt$.

Теперь без труда могут быть получены параметрические уравнения эпициклоид (рис. 55). Имеем:

$$\begin{aligned} x &= OP = OD + ME = (R + r) \cos mt + r \sin \angle MO_1E, \\ y &= MP = O_1D + O_1E = (R + r) \sin mt - r \cos \angle MO_1E; \end{aligned}$$

но $\sin \angle MO_1E = \sin(t - \angle OO_1D) = \sin\left[t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right] = -\cos(t + mt)$,
 $\cos \angle MO_1E = \sin(t + mt)$, и так как, кроме того, $r = mR$, то

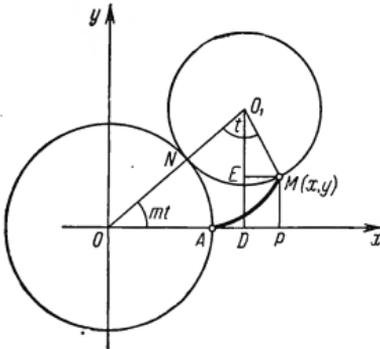


Рис. 55.

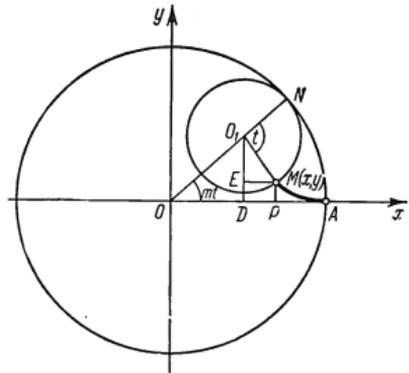


Рис. 56.

параметрические уравнения эпициклоид можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= (R + mR) \cos mt - mR \cos(t + mt), \\ y &= (R + mR) \sin mt - mR \sin(t + mt). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Подобным образом, для гипоциклоид (рис. 56) получим:

$$\begin{aligned} x &= OP = OD + ME = (R - r) \cos mt + r \sin \angle MO_1E, \\ y &= MP = O_1D - O_1E = (R - r) \sin mt - r \cos \angle MO_1E; \end{aligned}$$

но $\sin \angle MO_1E = \sin\left[\pi - t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right] = \cos(t - mt)$ и
 $\cos \angle MO_1E = \sin(t - mt)$,

и параметрические уравнения гипоциклоид будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} x &= (R - mR) \cos mt + mR \cos(t - mt), \\ y &= (R - mR) \sin mt - mR \sin(t - mt). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Заменим в параметрических уравнениях (1) эпициклоиды модуль m числом $-m$; мы получим систему

$$\left. \begin{aligned} x &= (R - mR) \cos mt + mR \cos(t - mt), \\ y &= -[(R - mR) \sin mt - mR \sin(t - mt)]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Сопоставляя эти уравнения с параметрическими уравнениями (2) гипоциклоиды, замечаем, что первые уравнения в том и другом случае одинаковы, а вторые отличаются только знаком правой части. Это

показывает, что уравнения (3) выразят также гипоциклоиду, расположенную симметрично гипоциклоиде (2) относительно оси абсцисс.

Это обстоятельство дает возможность выразить эпициклоиды и гипоциклоиды одними и теми же уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= (R + mR) \cos mt - mR \cos (t + mt), \\ y &= (R + mR) \sin mt - mR \sin (t + mt), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

если только условиться считать, что в этих уравнениях модуль m может быть как положительным, так и отрицательным числом, полагая, следовательно, что при отрицательном значении модуля радиус производящего круга $r = mR$ выразится также числом отрицательным. При таком условии уравнения (4) будут общими параметрическими уравнениями эпициклоид и гипоциклоид; при $m > 0$ эти уравнения выразят эпициклоиду, при $m < 0$ — гипоциклоиду. Во втором случае предполагается, что $|m| < 1$, так как для гипоциклоид $|r| < R$. Если модуль m , будучи отрицательным числом, превысит по абсолютному значению единицу, то производящий круг будет охватывать неподвижный; получаемая при этом кривая расположится вне неподвижного круга и относится, следовательно, к семейству эпициклоид. Такие, частного вида, эпициклоиды называются *перициклоидами*.

2. Особенности формы. Форма эпициклоид и гипоциклоид определяется в каждом частном случае величиной модуля m (рис. 57 и 58). Если m — рациональное число и, следовательно, может быть представлено в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, то как эпициклоида, так и гипоциклоида будут замкнутыми кривыми, так как после того как производящий круг сделает q полных оборотов, вычерчивающая точка M совпадет с исходной точкой A ; на протяжении такого пути она q раз будет находиться на окружности неподвижного круга, соответственно этому кривая будет состоять из q ветвей и иметь q точек возврата

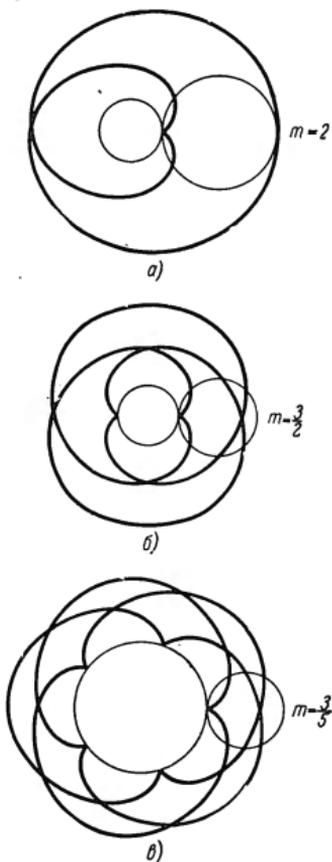


Рис. 57.

(для гипоциклоиды это последнее заключение будет иметь место только при $m < \frac{1}{2}$; при $m > \frac{1}{2}$ вместо q точек возврата гипоциклоида имеет q узловых точек). Если $p=1$, то точки возврата будут

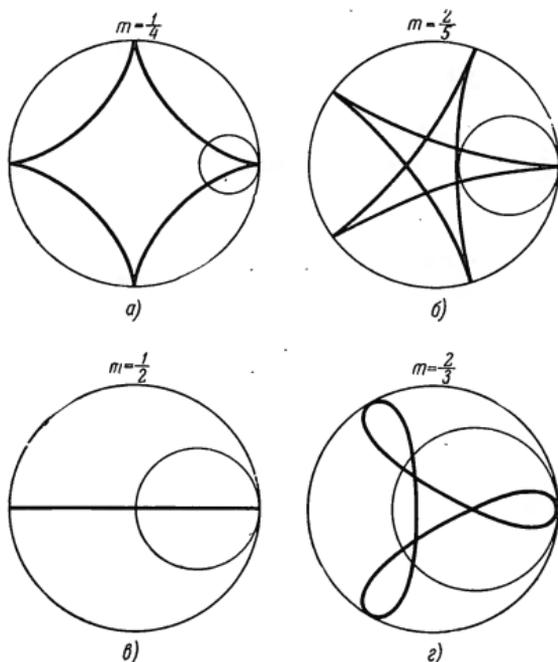


Рис. 58.

следовать одна за другой в таком же порядке, в каком одна ветвь следует за другой; при $p \neq 1$ между началом и концом каждой ветви находятся $p-1$ точек возврата, отдельные ветви будут при этом пересекаться, и на кривой появятся узловые точки.

Мы хотим еще обратить внимание читателя на особый вид формы гипоциклоиды, у которой $m = \frac{1}{2}$. Вычерчивающая точка в этом случае будет совершать возвратно поступательное движение вдоль диаметра неподвижного круга, и гипоциклоида обратится в отрезок прямой (рис. 58, в).

Если модуль эпициклоиды или гипоциклоиды является числом иррациональным, то какое бы количество оборотов ни сделал производящий круг, вычерчивающая точка M не придет в начальное положение; кривая в этом случае не замкнется и будет состоять из бесчисленного количества ветвей.

3. Свойства эпициклоид и гипоциклоид.

1. Эпициклоиды и гипоциклоиды с рациональным модулем являются алгебраическими кривыми.

Для доказательства этого предложения умножим второе из уравнений (4) на i , а затем, складывая и вычитая эти уравнения, получим, используя известные формулы Эйлера:

$$x \pm yi = (R + mR) e^{\pm mt} - mR e^{\pm (m+1)t}. \quad (5)$$

Если положить $e^{it} = \theta$, $x + yi = \xi$, $x - yi = \eta$, то равенство (5) сведется к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \xi &= (R + mR) \theta^m - mR \theta^{m+1}, \\ \eta &= (R + mR) \theta^{-m} - mR \theta^{-m-1}. \end{aligned}$$

При рациональном значении m оба эти равенства, являющиеся новыми параметрическими уравнениями эпициклоид и гипоциклоид, будут алгебраическими, и следовательно, выражаемые ими кривые также являются алгебраическими.

2. Определим теперь направление касательной к кривым (4). Дифференцируя уравнения (4) по параметру t , получим:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2Rm(1+m) \sin \frac{t}{2} \cos \left(mt + \frac{t}{2} \right), \\ \dot{y} &= 2Rm(1+m) \sin \frac{t}{2} \sin \left(mt + \frac{t}{2} \right). \end{aligned}$$

Поэтому $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \operatorname{tg} \left(mt + \frac{t}{2} \right)$, и, следовательно,

$$\alpha = mt + \frac{t}{2}. \quad (6)$$

Такова формула, по которой определяется угол между касательной к кривым (4) и осью абсцисс. Пользуясь этой формулой, нетрудно установить, что касательная в произвольной точке эпициклоиды и гипоциклоиды проходит через точку производящего круга, диаметрально противоположную точке касания его с неподвижным кругом, а нормаль — через точку касания этих кругов.

Действительно, из рис. 59 следует, что угол, составленный радиусом-вектором, проходящим через точку K , диаметрально противоположную точке N , с прямой KM , проходящей через точку K и вычерчивающую точку M , равен $\frac{t}{2}$, а следовательно, угол, составленный этой прямой с осью абсцисс,

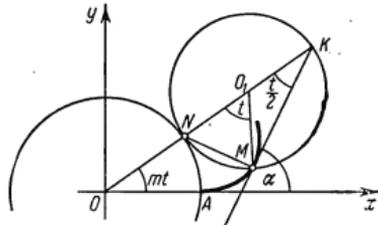


Рис. 59.

равняется $mt + \frac{t}{2}$, т. е. углу α , что и подтверждает высказанное выше предложение.

3. Определяя дифференциал дуги кривых (4), получим:

$$dS = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 2Rm(1+m) \sin \frac{t}{2} dt. \quad (7)$$

Отсюда, заметив, что $d\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right) dt$, как это следует из (6), получим формулу для определения радиуса кривизны в произвольной точке эпициклоид и гипоциклоид:

$$R_k = \frac{dS}{d\alpha} = \frac{4Rm(1+m)}{2m+1} \sin \frac{t}{2}. \quad (8)$$

Используя равенство (7), получим выражение длины дуги кривых (4) $S = \int 2Rm(1+m) \sin \frac{t}{2} dt + C$. Если дугу отсчитывать от исходной точки A , то будем иметь начальное условие $S=0$ при $t=0$, откуда $C=0$ и, следовательно,

$$S = 8Rm(1+m) \sin^2 \frac{t}{4}. \quad (9)$$

Если же дугу отсчитывать не от исходной точки A , а от точки, соответствующей значению параметра $t=\pi$, т. е. от точки, являющейся серединой ветви кривой, то формула для определения длины дуги принимает вид

$$S = -4Rm(1+m) \cos \frac{t}{2}. \quad (10)$$

Исключая из равенств (8) и (10) параметр t , получим натуральное уравнение эпициклоид и гипоциклоид

$$S^2 + (2m+1)^2 R_k^2 = 16R^2 m^2 (1+m)^2. \quad (11)$$

По отношению к переменным S и R_k это уравнение выражает, как видно, эллипс или гиперболу, в зависимости от значения модуля m . В связи с этим можно утверждать, что *если эпициклоида или гипоциклоида катятся по прямой, то геометрическое место центров их кривизны, соответствующих точкам касания, будет эллипсом или гиперболой* (см. стр. 251).

4. Для определения эволюты кривой (4) воспользуемся известными уравнениями эволюты для кривой, заданной в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}} \dot{y}, \\ \eta &= y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}} \dot{x}. \end{aligned}$$

В нашем случае получим:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{R(1+m)}{1+2m} \cos mt + \frac{Rm}{1+2m} \cos(t+mt), \\ \eta &= \frac{R(1+m)}{1+2m} \sin mt + \frac{Rm}{1+2m} \sin(t+mt). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Уравнения эти своим видом напоминают уравнения (4), но отличаются от них знаками вторых членов правой части. Однако отличие это можно устранить. Повернем с этой целью систему на некоторый угол θ , оставив за собой право распорядиться величиной этого угла. Пользуясь формулами перехода при повороте системы, получим:

$$\bar{x} = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta = \frac{R+mR}{1+2m} \cos(mt+\theta) + \frac{Rm}{1+2m} \cos(t+mt+\theta),$$

$$\bar{y} = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta = \frac{R+mR}{1+2m} \sin(mt+\theta) + \frac{Rm}{1+2m} \sin(t+mt+\theta).$$

Пусть теперь $\theta = m\pi$. Если при этом угол $mt+\theta$ обозначить через $m\tau$, то $t+mt+\theta = m\tau + \tau - \pi$ и, следовательно, уравнения искомой эволюты запишутся в виде

$$\bar{x} = \frac{R+mR}{1+2m} \cos m\tau - \frac{Rm}{1+2m} \cos(\tau+m\tau),$$

$$\bar{y} = \frac{R+mR}{1+2m} \sin m\tau - \frac{Rm}{1+2m} \sin(\tau+m\tau).$$

Из этих уравнений следует, что эволюта эпициклоиды (гипоциклоиды) представляет собой снова эпициклоиду (гипоциклоиду), подобную данной кривой (4), с коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{1+2m}$, и повернутую относительно данной кривой на угол $m\pi$ *) (рис. 60).

5. Используя формулу (9), определим длину S одной ветви эпициклоиды и гипоциклоиды. Полагая, что начало дуги соответствует значению $t=0$ параметра, а конец — значению $t=2\pi$, получим $S=8Rm(1+m)$.

Определим площадь U сектора, ограниченного одной ветвью кривой и двумя радиусами неподвижного круга, проведенными в начало и конец этой ветви. Как известно, дифференциал площади сектора, ограниченного двумя радиусами-векторами и дугой кривой, можно выразить равенством

$$dU = \frac{x dy - y dx}{2}.$$

*) Не следует забывать, что для гипоциклоиды модуль $m < 0$.

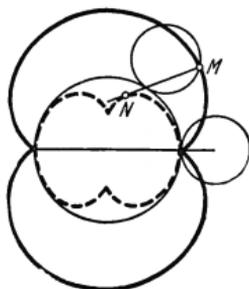


Рис. 60.

Для нашего случая после соответствующих преобразований получим

$$dU = m(R + mR)(R + 2mR) \sin^2 \frac{t}{2} dt,$$

откуда

$$U = \int_0^{2\pi} dU = m\pi(R + mR)(R + 2mR).$$

6. Оригинальный способ образования эпициклоид и гипоциклоид был установлен Франсуа в 1871 г. Он показал, что если две стороны OA и OB шарнирного параллелограмма вращаются равномерно, но с разными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 , то четвертая вершина M описывает эпициклоиду или гипоциклоиду. Действительно, если в начальный момент обе прямые OA и OB располагаются вдоль одной прямой, то, принимая эту прямую за ось абсцисс и полагая $OA = l_1$, $OB = l_2$, заметим, что через промежуток времени, равный t , будем иметь $\angle OAx = t\omega_1$ и $\angle OBx = t\omega_2$ и, следовательно, точки A , B и M можно определить комплексными числами z_1 , z_2 и z :

$$z_1 = l_1 e^{i\omega_1 t}, \quad z_2 = l_2 e^{i\omega_2 t}, \quad z = z_1 + z_2$$

и, следовательно,

$$z = l_1 e^{i\omega_1 t} + l_2 e^{i\omega_2 t}, \quad (13)$$

или, на основании формулы Эйлера,

$$z = (l_1 \cos \omega_1 t + l_2 \cos \omega_2 t) + i(l_1 \sin \omega_1 t + l_2 \sin \omega_2 t),$$

откуда, если $z = x + iy$, будем иметь:

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos \omega_1 t + l_2 \cos \omega_2 t, \\ y &= l_1 \sin \omega_1 t + l_2 \sin \omega_2 t. \end{aligned}$$

В зависимости от значений l_1 и l_2 полученные уравнения выразят, как видно, эпициклоиду или гипоциклоиду.

Уравнение (13) является частным случаем уравнения

$$z = l_0 + l_1 e^{i\omega_1 t} + l_2 e^{i\omega_2 t} + \dots + l_n e^{i\omega_n t},$$

выражающего так называемые *циклоиды высших порядков*, рассмотренные Беллерманом (1890). Кривые эти представляют собой траектории полигона, аналогичного параллелограмму Франсуа.

7. Эпициклоида является катакаустикой окружности (см. стр. 279). Пусть на дугу окружности радиуса a падает пучок параллельных лучей. Найдем огибающую отраженных лучей, которая, как известно, и будет катакаустикой окружности. Отразившись в точке M (рис. 61), луч будет иметь уравнение $y - a \sin \alpha = \operatorname{tg} 2\alpha (x - a \cos \alpha)$, или

$$x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha = a \sin \alpha. \quad (14)$$

Дифференцируя последнее уравнение по параметру α , получим:

$$2x \cos 2\alpha + 2y \sin 2\alpha = a \cos \alpha. \quad (15)$$

Решая систему уравнений (14) и (15) относительно x и y , получим параметрические уравнения огибающей отраженных лучей

$$x = \frac{a}{2} (2 \sin \alpha \sin 2\alpha + \cos \alpha \cos 2\alpha),$$

$$y = \frac{a}{2} (\sin 2\alpha \cos \alpha - 2 \cos 2\alpha \sin \alpha).$$

Путем несложных преобразований эти уравнения можно привести к виду

$$x = \frac{3a}{4} \cos \alpha - \frac{a}{4} \cos 3\alpha,$$

$$y = \frac{3a}{4} \sin \alpha - \frac{a}{4} \sin 3\alpha.$$

Отсюда следует, что искомая катакаустика представляет собой эпициклоиду, модуль которой равняется $\frac{1}{2}$; радиус неподвижного круга

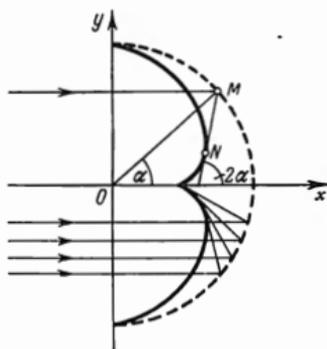


Рис. 61.

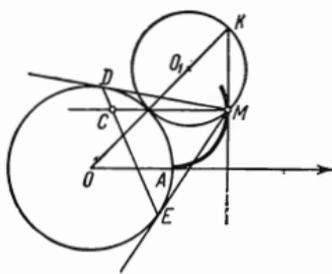


Рис. 62.

равен половине радиуса сферического зеркала, а радиус производящего круга — четверти радиуса этого зеркала.

Если светящаяся точка помещена на окружности, то, с помощью аналогичных выкладок, получим параметрические уравнения кардиоиды, представляющей собой эпициклоиду с модулем, равным единице. Одинаковые радиусы производящего и неподвижного кругов составляют в этом случае одну треть радиуса сферического зеркала.

8. Не останавливаясь на доказательстве, отметим еще некоторые свойства эпициклоид и гипоциклоид *).

Центр кривизны, соответствующий произвольно заданной точке M эпициклоиды или гипоциклоиды, определяется пересечением нормали MC в этой точке с полярной точки M относительно неподвижного круга (рис. 62).

*) См. Logia, Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, B. II, 1911.

Эпициклоида является огибающей прямых, проходящих через две точки,двигающиеся по окружности круга с угловыми скоростями, отношение которых постоянно.

Подэра эпициклоиды относительно центра неподвижного круга является розой.

4. Трохоиды. Рассмотренные нами эпициклоиды и гипоциклоиды являются, как было замечено, частными случаями циклоидальных кривых. В общем случае предполагается, что вычерчивающая точка находится не на окружности производящего круга, а отстоит от его центра на том или ином расстоянии, которое мы обозначим через h . Получаемые при этом кривые называются *трохоидами*.

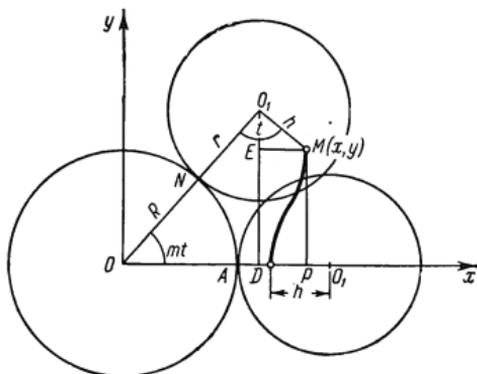


Рис. 63.

Трохоиды подразделяются на *эпитрохоиды* и *гипотрохоиды* в зависимости от того, будет производящий круг катиться по внешней или по внутренней стороне неподвижного круга.

Если $h > r$, то трохойду называют *удлиненной*, при $h < r$ — *укороченной*, при $h = r$ трохойда становится эпициклоидой или гипоциклоидой.

Параметрические уравнения трохойд можно получить на основании тех же рассуждений, которые проводились при выводе уравнений эпициклоид и гипоциклоид. В соответствии с рис. 63 имеем:

$$x = OP = OD + ME = (R + mR) \cos mt + h \sin \angle MO_1E,$$

$$y = MP = O_1D + O_1E = (R + mR) \sin mt - h \cos \angle MO_1E;$$

но

$$\sin \angle MO_1E = \sin \left[t - \left(\frac{\pi}{2} - mt \right) \right] = -\cos(t + mt),$$

$$\cos \angle MO_1E = \sin(t + mt);$$

следовательно, параметрические уравнения эпитрохоид имеют вид

$$\begin{aligned}x &= (R + mR) \cos mt - h \cos (t + mt), \\y &= (R + mR) \sin mt - h \sin (t + mt).\end{aligned}$$

Подобные рассуждения приводят к заключению, что уравнения гипотрохоид имеют вид

$$\begin{aligned}x &= (R - mR) \cos mt + h \cos (t - mt), \\y &= (R - mR) \sin mt - h \sin (t - mt).\end{aligned}$$

Сопоставляя уравнения эпитрохоид и гипотрохоид, замечаем, что вторые из них получаются из первых, если m заменить на $-m$ и h — на $-h$, а направление оси ординат заменить на противоположное. Замечаем также, что если положить $h = r$, то получатся, как и следовало ожидать, уравнения эпициклоид или соответственно гипоциклоид.

Эти обстоятельства приводят к мысли записать общие параметрические уравнения циклоидальных кривых

$$\begin{aligned}x &= (R + mR) \cos mt - h \cos (t + mt), \\y &= (R + mR) \sin mt - h \sin (t + mt),\end{aligned} \quad (1)$$

считая, что в этих уравнениях параметры m и h могут быть любыми положительными и отрицательными числами.

На рис. 64, а и 64, б приведены укороченная и удлиненная эпитрохоиды. Характерной особенностью второй из них является наличие петель, а первой — наличие точек перегиба, лежащих на одной окружности.

Среди трохоид особенно интересны так называемые *трохоидальные розы*, для которых $h = R + r = R + mR$. Уравнения их запишутся в виде

$$\begin{aligned}x &= (R + mR) \cos mt - (R + mR) \cos (t + mt), \\y &= (R + mR) \sin mt - (R + mR) \sin (t + mt),\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}x &= (R + mR) \cdot 2 \sin \left(mt + \frac{t}{2} \right) \sin \frac{t}{2}, \\y &= -(R + mR) \cdot 2 \cos \left(m + \frac{t}{2} \right) \sin \frac{t}{2},\end{aligned}$$

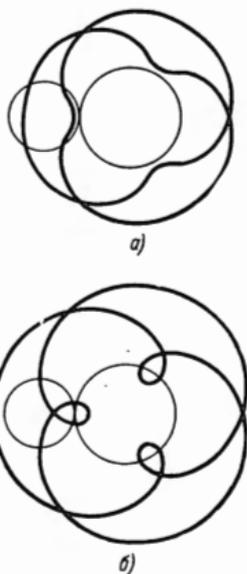


Рис. 64.

откуда $x^2 + y^2 = 4(R + mR)^2 \sin^2 \frac{t}{2}$ и $\frac{y}{x} = -\operatorname{ctg}\left(mt + \frac{t}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} - \left(mt + \frac{t}{2}\right)\right]$. Переходя к полярным координатам, получим:

$$\rho = 2(R + mR) \sin \frac{1}{2m+1} \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Если полярную ось повернуть на угол, равный $\frac{\pi}{2}$, то последнее уравнение запишется в виде

$$\rho = 2(R + mR) \sin \frac{1}{2m+1} \varphi.$$

Полагая $\frac{1}{2m+1} = \mu$ и $2(R + mR) = a$, будем иметь:

$$\rho = a \sin \mu \varphi.$$

Таково общее уравнение трохоидалных роз, которые при рациональном значении μ будут линиями алгебраическими (см. стр. 162).

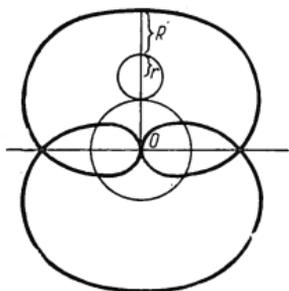


Рис. 65.

Из равенства $\frac{1}{2m+1} = \mu$ следует $m = \frac{1-\mu}{2\mu}$; следовательно, роза с параметром $\mu < 1$ является эпитрохойдой, при $\mu > 1$ роза будет представлять собой гипотрохойду.

На рис. 65 приведена эпитрохойдальная роза с параметром $\mu = \frac{1}{2}$.

Среди замечательных кривых, являющихся трохоидами, мы отметим еще улитку Паскаля, которая представляет собой эпитрохойду для случая, когда $R = r$ при любом h . Действительно, уравнение (1) запишется для указанного случая в виде

$$x = 2r \cos t - h \cos 2t, \quad y = 2r \sin t - h \sin 2t,$$

откуда

$$x - h = 2 \cos t (r - h \cos t), \quad y = 2 \sin t (r - h \cos t).$$

Если теперь перейти к полярным координатам, полагая $x - h = \rho \cos \varphi$ и $y = \rho \sin \varphi$, то будем иметь:

$$\rho = 2(r - h \cos t), \quad t = \varphi,$$

и, следовательно, $\rho = 2(r - h \cos \varphi)$ — уравнение улитки Паскаля.

Отметим в заключение, что если в уравнениях гипотрохида положить $R = 2r$, то получим уравнения

$$\begin{aligned}x &= \frac{R}{2} \cos \frac{t}{2} + h \cos \frac{t}{2} = \left(\frac{R}{2} + h\right) \cos \frac{t}{2}, \\y &= \frac{R}{2} \sin \frac{t}{2} - h \sin \frac{t}{2} = \left(\frac{R}{2} - h\right) \sin \frac{t}{2},\end{aligned}$$

выражающие, как видно, эллипс. Это обстоятельство используется в конструкции эллиптического циркуля.

§ 4. Кардиоида

1. Уравнение. Кардиоиду можно определить как траекторию точки, лежащей на окружности круга радиуса r , который катится по окружности неподвижного круга с таким же радиусом. Она будет представлять собой, таким образом, эпициклоиду с модулем m , равным 1.

Это обстоятельство позволяет сразу же записать параметрические уравнения кардиоиды, заменяя в ранее приведенных параметрических уравнениях эпициклоид модуль m единицей (см. стр. 110, уравнения (1)). Будем иметь:

$$\left. \begin{aligned}x &= 2r \cos t - r \cos 2t, \\y &= 2r \sin t - r \sin 2t.\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Чтобы получить полярное уравнение кардиоиды, удобно принять за полюс точку A (рис. 66), а полярную ось направить по оси абсцисс. Так как четырехугольник AOO_1M будет равнобедренной трапецией, то полярный угол φ точки M окажется равным углу поворота производящего круга, т. е. параметру t . Учитывая это обстоятельство, заменим во втором уравнении системы (1) y через $\rho \sin t$. Сокращая полученное таким образом равенство на $\sin t$, получим полярное уравнение кардиоиды

$$\rho = 2r(1 - \cos \varphi). \quad (2)$$

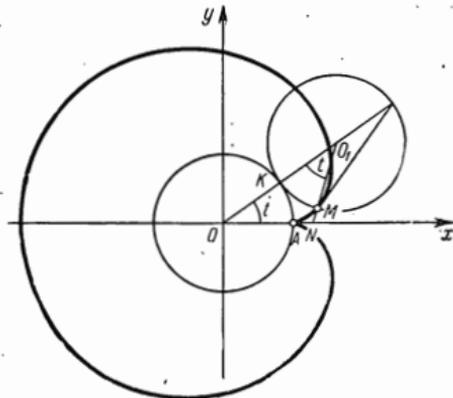


Рис. 66.

По виду этого уравнения можно заключить, что кардиоида является одной из улиток Паскаля. Она может быть определена, следовательно, как конхоида круга.

Переводя уравнение (2) в прямоугольную систему координат, получим:

$$(x^2 + y^2 + 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2). \quad (3)$$

Из этого уравнения следует, что кардиоида является алгебраической кривой 4-го порядка.

2. Свойства. Прежде всего, поскольку кардиоида является эпициклоидой с $m=1$, на нее можно перенести все свойства рассмотренных нами в предыдущем параграфе эпициклоид.

Вот эти свойства и характеристики.

1. Касательная в произвольной точке кардиоиды проходит через точку окружности производящего круга, диаметрально противоположную точке касания кругов, а нормаль — через точку их касания.

2. Угол μ , составляемый касательной к кардиоиде с радиусом-вектором точки касания, равен половине угла, образуемого этим радиусом-вектором с полярной осью. Действительно, $\operatorname{tg} \mu = \frac{p}{p'} = \frac{2r(1 - \cos \varphi)}{2r \sin \varphi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, откуда $\mu = \frac{\varphi}{2}$. Из этого соотношения непосредственно вытекает, что угол, составляемый касательной к кардиоиде с осью абсцисс, равняется $\frac{3}{2}\varphi$ (как внешний угол треугольника AMN , рис. 66).

Располагая формулой $\mu = \frac{\varphi}{2}$, можно доказать, что касательные к кардиоиде, проведенные в концах хорды, проходящей через полюс, взаимно перпендикулярны.

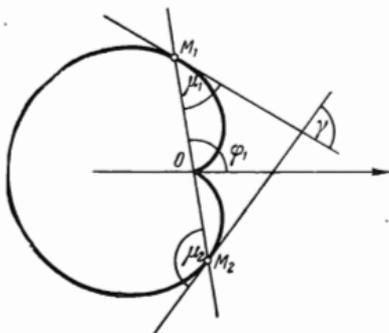


Рис. 67.

Действительно, так как $\mu_1 = \frac{1}{2}\varphi_1$ и $\mu_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \pi)$, то $\gamma = \mu_2 - \mu_1 = \frac{\pi}{2}$ (рис. 67).

Заметим еще, что геометрическое место точек пересечения этих касательных есть окружность $x^2 + y^2 = 9r^2$. Действительно, уравнение первой касательной на основании уравнений (1) кардиоиды, будет иметь

$$\text{вид } x \sin \frac{3\varphi}{2} - y \cos \frac{3\varphi}{2} =$$

$= 3r \sin \frac{\varphi}{2}$, а второй касательной $x \cos \frac{3\varphi}{2} + y \sin \frac{3\varphi}{2} = 3r \cos \frac{\varphi}{2}$. Исключая из этих уравнений параметр, получим уравнение указанной окружности.

3. Радиус кривизны в произвольной точке кардиоиды определяется по формуле

$$R_k = \frac{8r}{3} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (4)$$

Можно показать также, что радиус кривизны равняется $\frac{2}{3}$ полярной нормали N в заданной точке.

Действительно, $N = \sqrt{\rho^3 + \rho'^3} = 4r \sin \frac{\varphi}{2}$, откуда на основании (4) получаем $R_k = \frac{2}{3} N$. Соотношение это может быть использовано для построения центра кривизны кардиоиды.

4. Эволюта кардиоиды, согласно общему свойству эволют эписклоид, будет также кардиоидой, подобной данной, с коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{3}$, и повернутой относительно данной на угол 180° .

5. Длина дуги кардиоиды от точки A до произвольной точки M определится по формуле

$$S = 16r \sin^2 \frac{\varphi}{4}. \quad (5)$$

Если длину дуги отсчитывать от точки A_1 , диаметрально противоположной точке A , то формула для определения длины дуги может быть записана в виде

$$S = -8r \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (6)$$

6. Натуральное уравнение кардиоиды получится, если из равенств (4) и (6) исключить параметр. Оно будет иметь вид

$$9R_k^2 + S^2 = 64r^2. \quad (7)$$

7. Площадь, ограниченная кардиоидой, определится по формуле

$$U = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho^2 d\varphi = 4r^2 \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = 6\pi r^2$$

и, как видно, равна ушестеренной площади производящего круга.

Длина всей кардиоиды определится по формуле

$$S = 2 \int_0^\pi \sqrt{\rho^3 + \rho'^3} d\varphi = 2 \int_0^\pi 4r \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 16r$$

и, как видно, равна восьми диаметрам производящего круга. Объем тела, полученного от вращения кардиоиды вокруг ее оси,

равен $\frac{64}{3} \pi r^3$. Поверхность тела, полученного от вращения кардиоиды вокруг ее оси, равняется $\frac{128}{5} \pi r^3$.

Мы видели, что кардиоиды органически связана с окружностью. Она является конхойдой круга и эпициклоидой. Она имеет с окружностью и иной характер родства — *кардиоиды является подэрой окружности относительно точки, принадлежащей этой окружности.*

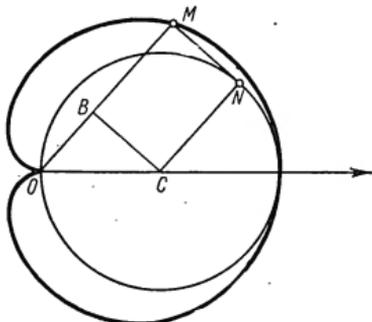


Рис. 68.

Действительно, пусть OM есть перпендикуляр, опущенный на касательную к окружности с радиусом, равным $2r$, проведенную в точке N (рис. 68). Так как $OM = OB + BM$, или $\rho = 2r \cos \varphi + 2r$, то геометрическим местом точек M будет кардиоиды с уравнением $\rho = 2r(1 + \cos \varphi)$.

Заметим в заключение, что кардиоиды относится также к семейству *синусоидальных спиралей* (см. стр. 150), и отдельные свойства ее повторяют общие свойства этих кривых. Из этих свойств следует, в частности, что *инверсия кардиоиды относительно точки возврата дает параболу.*

§ 5. Кривая Штейнера

1. Свойства. *Кривую Штейнера* можно определить как гипоциклоиду, получаемую в том случае, когда радиус r производящего круга в три раза меньше радиуса R неподвижного круга, т. е. когда модуль равен $\frac{1}{3}$.

Полагая в приведенных ранее общих параметрических уравнениях гипоциклоид (см. стр. 110, уравнения (2)) $m = \frac{1}{3}$, получим уравнения кривой Штейнера

$$\left. \begin{aligned} x &= 2r \cos \frac{t}{3} + r \cos \frac{2t}{3}, \\ y &= 2r \sin \frac{t}{3} - r \sin \frac{2t}{3}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где t , как и прежде, угол поворота производящего круга.

Исключая из уравнений (1) параметр t , будем иметь:

$$(x^2 + y^2)^3 + 8rx(3y^2 - x^2) + 18r^2(x^2 + y^2) - 27r^3 = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) показывает, что кривая Штейнера является алгебраической линией 4-го порядка. Общий вид кривой приводится на рис. 69 и 70.

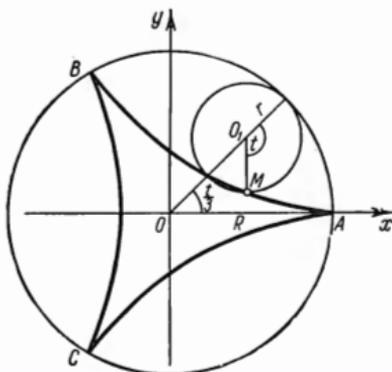


Рис. 69.

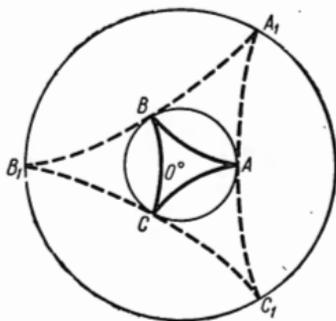


Рис. 70.

Свойства кривой Штейнера, присущие ей как гипоциклоиде, таковы:

- 1) радиус кривизны в произвольной точке $R_k = 8r \sin \frac{t}{2}$;
- 2) длина дуги от начальной точки A до некоторой точки $M(t)$ определится равенством $S = \frac{16}{3} r \sin^2 \frac{t}{4}$; соответственно этому длина одной ветви равняется $\frac{16}{3} r$, а длина всей кривой $16r$;
- 3) площадь, ограничиваемая кривой, равняется $2\pi r^2$;
- 4) эволюта кривой Штейнера представляет собой также кривую Штейнера, подобную данной, с коэффициентом подобия, равным 3, и повернутую относительно данной кривой на угол $\frac{\pi}{3}$ (рис. 70);
- 5) натуральное уравнение кривой Штейнера при условии, что длина дуги отсчитывается от точки, для которой $t = \pi$, запишется в виде

$$R_k^2 + 9S^2 = 64r^2.$$

Все приведенные соотношения получаются из общих, ранее установленных соотношений для циклоидальных кривых при замене в этих общих соотношениях модуля m числом $-\frac{1}{3}$.

Обратимся теперь к рассмотрению индивидуальных свойств кривой Штейнера, среди которых особенно интересны свойства ее касательных.

Уравнение касательной к этой кривой в точке M , соответствующей значению параметра $t = \tau$, имеет вид

$$x \sin \frac{\tau}{6} + y \cos \frac{\tau}{6} = r \sin \frac{\tau}{2}. \quad (3)$$

Кроме точки M , касательная (3) имеет с кривой еще две общие точки: M_1 и M_2 (рис. 71). Для

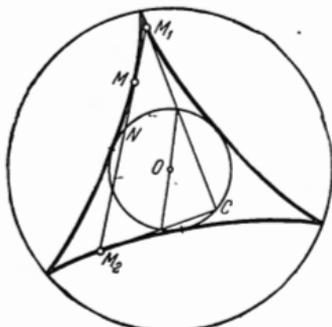


Рис. 71.

определения значений параметра t , соответствующих этим двум точкам, присоединяем к уравнению (3) уравнения (1) и исключим x и y ; приходим к заключению, что искомые значения t должны удовлетворять уравнению

$$\sin \left(\frac{t}{3} + \frac{\tau}{6} \right) \sin^2 \frac{\tau - t}{12} = 0.$$

Приравнявая нулю второй множитель, получим двукратный корень, определяющий точку касания M , для которой $t = \tau$. Приравнявая нулю

первый множитель, получим для t два значения:

$$\frac{t_1}{3} = \pi - \frac{\tau}{6} \quad \text{и} \quad \frac{t_2}{3} = 2\pi - \frac{\tau}{6}.$$

Эти значения и определяют точки M_1 и M_2 , которые мы будем называть *связанными* точками касательной. Определяя координаты связанных точек, получим:

$$x_1 = r \left(\cos \frac{\tau}{3} - 2 \cos \frac{\tau}{6} \right), \quad y_1 = r \left(\sin \frac{\tau}{3} + 2 \sin \frac{\tau}{6} \right)$$

и

$$x_2 = r \left(\cos \frac{\tau}{3} + 2 \cos \frac{\tau}{6} \right), \quad y_2 = r \left(\sin \frac{\tau}{3} - 2 \sin \frac{\tau}{6} \right).$$

Найдем теперь длину отрезка M_1M_2 . Имеем $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 4r$, откуда следует, что *расстояние между связанными точками касательной в произвольной точке кривой Штейнера является для каждой данной кривой величиной постоянной, равной удвоенному диаметру производящего круга (или круга, вписанного в эту кривую).*

Определяя координаты точки N — середины отрезка M_1M_2 , получим:

$$x_N = \frac{x_1 + x_2}{2} = r \cos \frac{\tau}{3}, \quad y_N = \frac{y_1 + y_2}{2} = r \sin \frac{\tau}{3};$$

отсюда следует, что точка N принадлежит окружности с центром в начале координат и радиусом r . Итак, точка, делящая отрезок между связанными точками касательной к кривой Штейнера пополам, лежит на окружности вписанного в эту кривую круга.

Заметим, далее, что уравнения касательных в связанных точках M_1 и M_2 запишутся в виде

$$x \cos \frac{\tau}{12} + y \sin \frac{\tau}{12} = -r \cos \frac{\tau}{4},$$

$$x \sin \frac{\tau}{12} - y \cos \frac{\tau}{12} = -r \sin \frac{\tau}{4},$$

откуда ясно, что касательные в связанных точках кривой Штейнера взаимно перпендикулярны. Координаты точки C их пересечения определяются по формулам

$$x_C = -r \cos \frac{\tau}{3},$$

$$y_C = -r \sin \frac{\tau}{3}.$$

По виду этих равенств заключаем, что точка пересечения взаимно перпендикулярных касательных к кривой Штейнера лежит на окружности вписанного в эту кривую круга.

Оригинальный способ образования рассматриваемой кривой, открытый Штейнером, заключается в следующем. Пусть дан треугольник, около которого описана окружность. Если из любой точки E этой окружности опустить перпендикуляры на стороны треугольника, то их основания будут лежать на одной и той же прямой, которую называют *прямой Симсона*. *Огибающей прямых Симсона, соответствующих различным положениям точки E , будет кривая Штейнера* *).

Чтобы показать еще один способ образования кривой Штейнера, заметим предварительно следующее: если полагать, что вычерчивающая точка в начальный момент находилась по-прежнему на оси абсцисс, но уже не в точке касания кругов, а в диаметрально противоположной точке, то кривая по сравнению со своим прежним положением окажется повернутой на угол 60° , и параметрические уравнения ее запишутся в виде

$$x = 2r \cos \frac{t}{3} - r \cos \frac{2t}{3},$$

$$y = 2r \sin \frac{t}{3} + r \sin \frac{2t}{3}.$$

Находя из этих уравнений угловой коэффициент касательной в произвольно заданной точке кривой, мы сможем записать уравнение

*) См. Logia, Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, 1911, В. II.

касательной в этой точке в виде

$$x \cos \frac{t}{6} + y \sin \frac{t}{6} = r \cos \frac{t}{2}. \quad (4)$$

Заметив это, покажем, что если две точки M_1 и M_2 , совпадающие с некоторой точкой A окружности, начнут двигаться по окружности в противоположных направлениях и так, что угловая скорость одной из них будет в два раза больше угловой скорости другой, то огибающей прямых M_1M_2 будет кривая Штейнера.

Чтобы показать справедливость этого предложения, будем полагать радиус окружности равным r , центр окружности считаем началом координат, а ось абсцисс направим через точку A . Обозначим угол $АОМ_1$ через α , тогда $\angle АОМ_2 = 2\alpha$. Записав по этим данным уравнение прямой $ММ_1$, получим:

$$x \cos \frac{\alpha}{2} + y \sin \frac{\alpha}{2} = r \cos \frac{3\alpha}{2}. \quad (5)$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением (4), заключаем, что прямую M_1M_2 можно рассматривать как касательную к кривой Штейнера. Огибающей таких прямых и будет некоторая кривая Штейнера.

2. Подэры кривой Штейнера. Кривая Штейнера интересна, в частности, формами своих подэров, рассмотрением которых мы и хотим закончить этот параграф.

Уравнение касательной (5), принимая во внимание, что $\cos \frac{3\alpha}{2} = \cos^3 \frac{\alpha}{2} - 3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, можно переписать в виде

$$x \cos \frac{\alpha}{2} + y \sin \frac{\alpha}{2} = r \left(\cos^3 \frac{\alpha}{2} - 3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right). \quad (6)$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $S(a, 0)$, относительно которой мы хотим найти подэру кривой Штейнера, на касательную, будет иметь вид

$$(x - a) \sin \frac{\alpha}{2} - y \cos \frac{\alpha}{2} = 0. \quad (7)$$

Определяя $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$ из уравнения (7) и подставляя их выражения в уравнение (6), мы исключим параметр α и получим (заменяя, кроме того, $x - a$ на x , т. е. перенося начало в точку S) уравнение подэры кривой Штейнера относительно точки $S(a, 0)$ в виде

$$(x^2 + y^2)^2 + [(a + 3r)y^2 + (a - r)x^2]x = 0, \quad (8)$$

или, если перейти к полярной системе, в виде

$$\rho = 4r \cos^3 \varphi - (a + 3r) \cos \varphi. \quad (9)$$

Из уравнения (8) следует, что подэра кривой Штейнера является алгебраической линией 4-го порядка, имеющей в начале трехкратную точку.

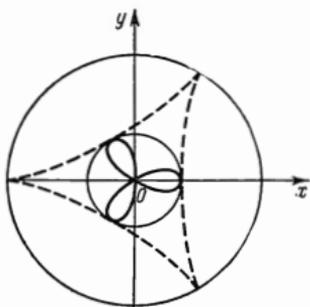


Рис. 72.

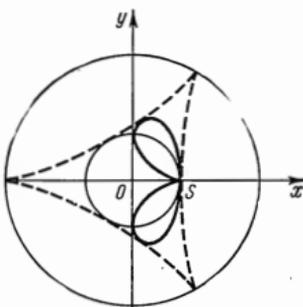


Рис. 73.

Интересны отдельные формы подэра, соответствующие частным случаям уравнения (8) и соответственно уравнения (9):

1) если $a = 0$, то уравнение $(x^2 + y^2)^2 + rx(3y^2 - x^2) = 0$, или $\rho = r \cos 3\varphi$ выразит *трехлепестковую розу* — подэру кривой Штейнера относительно начала координат (рис. 72);

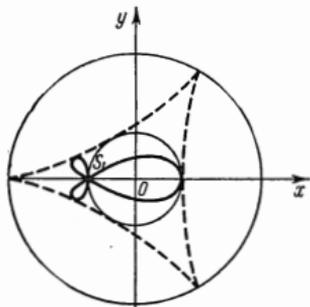


Рис. 74.

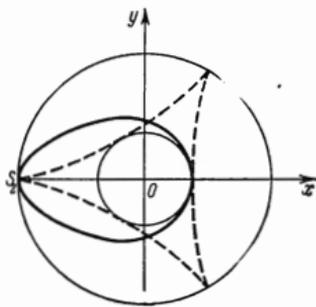


Рис. 75.

2) если $a = r$, то уравнение $(x^2 + y^2)^2 + 4ry^2x = 0$, или $\rho = -4r \cos \varphi \sin^3 \varphi$ выразит *прямой двулистник* — подэру кривой Штейнера относительно точки S (рис. 73);

3) если $a = -r$, то уравнение $(x^2 + y^2)^2 + 2rx(y^2 - x^2) = 0$, или $\rho = 2r \cos \varphi \cos 2\varphi$ выразит *прямой трехлисточник*, подэру кривой Штейнера относительно точки S_1 (рис. 74);

4) если $a = -3r$, то уравнение $(x^2 + y^2)^2 = 4rx^3$, или $\rho = 4r \cos^3 \varphi$ выразит *однолистник* — подэру кривой Штейнера относительно точки S_2 (рис. 75).

Мы заметим еще, что площадь одного лепестка двулистника равна $\frac{1}{4} \pi r^2$; площадь большого лепестка трехлистника равна $\frac{1}{12} r^2 (3\pi + 8)$, а малого $\frac{1}{24} r^2 (3\pi - 8)$; вся площадь равна $\frac{1}{2} \pi r^2$; площадь однолистника равна $\frac{5}{2} \pi r^2$.

§ 6. Астроида

1. Свойства. Астроида, как и рассмотренная выше кривая Штейнера, является частным случаем гипоциклоид, а именно, гипоциклоидой с модулем m , равным $\frac{1}{4}$. Она представляет собой, следовательно, траекторию точки, лежащей на окружности круга радиуса r , который катится по внутренней стороне другого, неподвижного круга, радиус R которого в четыре раза больше.

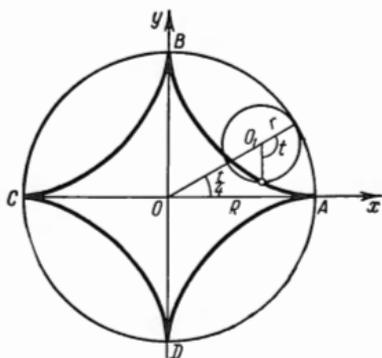


Рис. 76.

Параметрические уравнения астроида можно получить, полагая в уравнениях гипоциклоиды (см. стр. 110, уравнения (2)) $m = \frac{1}{4}$.

Вот эти уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3}{4} R \cos \frac{t}{4} + \frac{1}{4} R \cos \frac{3t}{4}, \\ y &= \frac{3}{4} R \sin \frac{t}{4} - \frac{1}{4} R \sin \frac{3t}{4}, \end{aligned} \right\} (1)$$

где t , как и ранее, угол поворота производящего круга (рис. 76). Исключая из уравнений (1) параметр t , получим:

$$(x^2 + y^2 - R^2)^3 + 27R^2 x^2 y^2 = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что астроида является алгебраической кривой 6-го порядка.

Параметрические уравнения (1) астроида можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos^3 \frac{t}{4}, \\ y &= R \sin^3 \frac{t}{4}. \end{aligned} \right\} (3)$$

Исключая из этих уравнений параметр t , получим часто употребляемый вид уравнения астроида

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}. \quad (4)$$

Полагая в ранее выведенных общих соотношениях для циклоидальных кривых модуль $m = -\frac{1}{4}$, получим соответствующие соотношения для астроида:

1) радиус кривизны в произвольной точке астроида определяется по формуле

$$R_{\kappa} = \frac{3}{2} R \sin \frac{t}{2}; \quad (5)$$

2) длина дуги астроида от точки A до произвольной точки $M(t)$ определится по формуле $S = \frac{3}{2} R \sin^3 \frac{t}{4}$; длина одной ветви равна $\frac{3}{2}R$, а длина всей кривой $6R$;

3) для получения натурального уравнения астроида заметим предварительно, что если началом отсчета длины дуги полагать не точку A , для которой $t = 0$, а точку, для которой $t = \pi$, то длина дуги определится формулой

$$S = \frac{3R}{2} \left(\sin^3 \frac{t}{4} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{3R}{4} \cos \frac{t}{2}; \quad (6)$$

исключая параметр t из уравнений (5) и (6), получим натуральное уравнение астроида

$$R_{\kappa}^2 + 4S^2 = \left(\frac{3R}{2} \right)^2;$$

4) эволюта астроида есть также астроида, подобная данной, с коэффициентом подобия, равным 2, повернутая относительно данной на угол $\frac{\pi}{4}$ (рис. 77);

5) площадь, ограниченная всей астроидой, равна $\frac{3}{8} \pi R^2$; объем тела, полученного от вращения астроида, равняется $\frac{32}{105} \pi R^3$; поверхность тела, образованного вращением астроида, равна $\frac{12}{5} \pi R^2$.

Обратимся теперь к рассмотрению некоторых частных свойств астроида.

Астроида является огибающей отрезка постоянной длины, концы которого скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым.

Принимаем эти прямые за оси координат и, обозначая угол наклона скользящего отрезка $ND=R$ через α (рис. 78), будем иметь уравнение прямой ND в виде

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha + R \sin \alpha \cos \alpha = 0. \quad (7)$$

Дифференцируя это уравнение по параметру α , получим:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - R \sin^2 \alpha + R \cos^2 \alpha = 0.$$

Исключая из последнего уравнения и уравнения (7) параметр α , будем иметь уравнение огибающей в виде $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$, т. е. астроида.

Практически перемещение отрезка ND можно осуществить с помощью так называемых кардановых кругов. Один из этих кругов

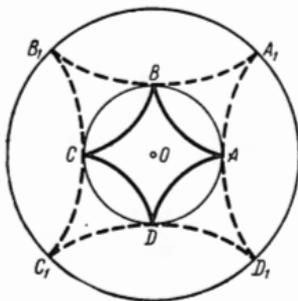


Рис. 77.

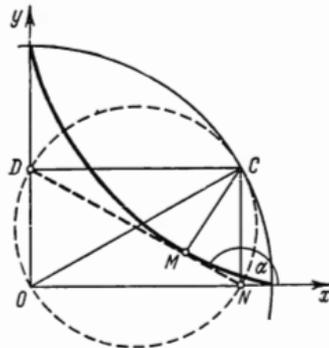


Рис. 78.

с радиусом R неподвижен, а другой, с радиусом r , в два раза меньшим, катится по внутренней стороне неподвижного круга. Любые две диаметрально противоположные точки N и D катящегося круга будут перемещаться по двум взаимно перпендикулярным диаметрам Ox и Oy неподвижного круга (см. рис. 58, в). Ясно, что огибающей диаметра катящегося круга и будет астроида.

Рассмотренный способ образования астоиды можно истолковать также следующим образом. Прямоугольник $ODCN$, две стороны которого лежат на двух взаимно перпендикулярных прямых, деформируется так, что диагональ его сохраняет длину, равную R ; огибающая диагонали и будет астроида. Так как при этом перпендикуляр, опущенный из вершины C на диагональ DN , служит нормалью к огибающей, то астроида представляет собой геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из вершины C прямоугольника на его диагональ.

2. Свойства касательных к астроиде. Уравнение (7) выражает прямую ND , т. е. касательную к астроиде в некоторой точке M , причем параметр α представляет собой угол, составляемый этой касательной с осью абсцисс. Уравнение другой касательной, перпендикулярной к первой, будет иметь вид

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + R \sin \alpha \cos \alpha = 0. \quad (8)$$

Исключая из уравнений (7) и (8) параметр α , получим уравнение $R^2(x^2 - y^2)^2 = 2(x^2 + y^2)^3$, или, в полярной системе, $\rho = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos 2\varphi$, которое выражает четырехлепестковую розу. Итак, *геометрическое место вершин прямого угла, стороны которого касаются астроиды, есть четырехлепестковая роза.*

Другое свойство касательных к астроиде таково: *каждая касательная пересекает астроиду в двух точках, касательные в которых пересекаются в точке, лежащей на окружности описанного около астроиды круга.* Доказательство этого предложения предоставляем читателю.

Определим подэру астроиды относительно точки P , лежащей на биссектрисе 1-го координатного угла на расстоянии $OP = c$ от начала координат. Выше было показано, что астроиду можно рассматривать как огибающую отрезка $ND = R$, скользящего своими концами по координатным осям. Отсюда следует, что искомую подэру можно определить как геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки P на прямую ND (рис. 79). Проведем $OE \perp ND$, и OQ , где Q — середина отрезка ND . Точку P посчитаем полюсом, а прямую PK полярную ось. Полярный угол KPM точки M подэры обозначим через φ , а радиус-вектор PM — через ρ . Тогда, как легко видеть, угол $QOE = 2\varphi$. Так как $OQ = \frac{1}{2}ND = \frac{R}{2}$, то $OE = \frac{R}{2} \cos 2\varphi$. Но, с другой стороны, $OE \leq OB + PM = c \cos \varphi + \rho$. На основании последних двух равенств, полярное уравнение подэры запишется в виде

$$\rho = \frac{R}{2} \cos 2\varphi - c \cos \varphi,$$

а в прямоугольной системе с началом в точке P в виде

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + cx)^2 = \frac{R^2}{4}(x^2 - y^2)^2.$$

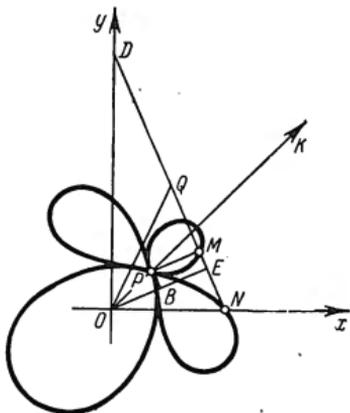


Рис. 79.

Полученная таким образом кривая 6-го порядка имеет в начале координат четырехкратную точку и называется «жуком». В частном случае, при $c=0$, жук становится розой (см. стр. 162).

3. Косая астроида. Обобщением рассмотренной астроиды является так называемая *косая астроида*, которая представляет собой огибающую отрезка ND постоянной длины R , скользящего своими концами по двум прямым, пересекающимся под произвольным углом γ .

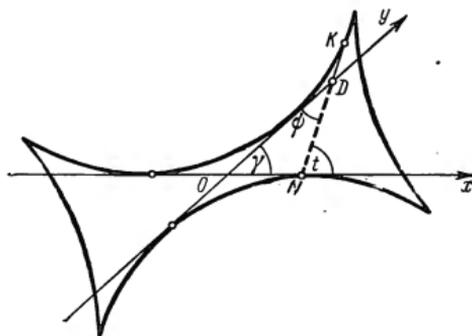


Рис. 80.

Полагая эти пересекающиеся прямые координатными осями, обозначим угол, составляемый прямой ND с осью абсцисс, через t . Тогда из треугольника OND (рис. 80) будем иметь:

$$\frac{ON}{\sin(t-\gamma)} = \frac{OD}{\sin t} = \frac{R}{\sin \gamma},$$

откуда

$$ON = \frac{\sin(t-\gamma)}{\sin \gamma} R, \quad OD = \frac{\sin t}{\sin \gamma} R,$$

и следовательно, уравнение прямой ND в отрезках на осях запишется в виде $\frac{x}{\sin(t-\gamma)} + \frac{y}{\sin t} = \frac{R}{\sin \gamma}$. Дифференцируя это уравнение по t и исключая из полученного после дифференцирования равенства и уравнения прямой параметр t , получим параметрические уравнения косой астроиды в виде

$$x = \frac{R}{\sin^2 \gamma} \cos t \sin^2(t-\gamma), \quad y = \frac{R}{\sin^2 \gamma} \cos(t-\gamma) \sin^2 t;$$

при $\gamma = \frac{\pi}{2}$ эти уравнения выражают рассмотренную ранее прямую астроиду.

§ 7. Овалы Декарта

1. Определение овалов по Декарту и их свойства. Кривые, называемые *овалами Декарта*, могут быть определены различно. Мы остановимся на том определении их, которое употреблял сам Декарт.

Пусть две прямые пересекаются в точке A . На одной из них фиксированы две точки F и F_1 . Из точки F как из центра описываем окружность произвольным радиусом, точку пересечения этой окружности с прямой FF_1 обозначим через B . Определим теперь на второй из двух данных прямых точку C так, чтобы $AC = kAB$, где k — заданная постоянная. На этой же прямой отложим от точки A отрезок $AN = AF_1$. Опишем, наконец, из точки F_1 как из центра вторую окружность радиусом CN , которая пересечет первую окружность в точке M . Геометрическое место точек M и будет овалом Декарта (рис. 81).

Приведенное определение может быть сведено к более простому. Из рисунка усматриваем, что $MF = FB = FA + AB = FA + \frac{1}{k}AC$, $MF_1 = NC = AC - AN = AC - F_1A$. Из этих равенств получаем: $kMF -$

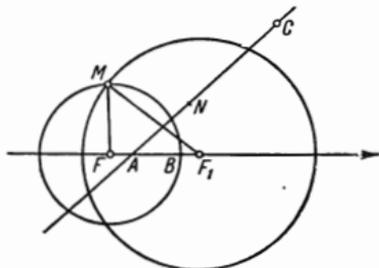


Рис. 81.

$MF_1 = kFA - AF_1$. Если $k = -\frac{m}{n}$, то полученное равенство переписывается в виде $mMF + nMF_1 = mFA + nF_1A$, и так как правая часть последнего равенства является величиной постоянной, то, обозначив ее через c , получим основное равенство, которым определяются овалы Декарта, в виде

$$mMF + nMF_1 = c. \quad (1)$$

Итак, овалы Декарта представляют собой геометрические места точек, расстояния каждой из которых от двух фиксированных точек, называемых фокусами, умноженные на данные числа, имеют постоянную сумму.

На основе этого определения легко получить полярное уравнение овалов. Будем полагать точку F полюсом системы, прямую FF_1 — полярной осью, а расстояние FF_1 обозначим через d . Тогда $MF = \rho$, $MF_1 = \sqrt{\rho^2 + d^2} - 2\rho d \cos \varphi$, и следовательно, равенство (1) переписывается в виде $m\rho + n\sqrt{\rho^2 + d^2} - 2\rho d \cos \varphi = c$ или

$$(n^2 - m^2)\rho^2 + 2\rho(mc - n^2d \cos \varphi) + n^2d^2 - c^2 = 0. \quad (2)$$

Заметим, что если $n = \frac{c}{d}$, то уравнение (2) принимает вид $\rho = \frac{2dn^2}{n^2 - m^2} \cos \varphi - \frac{2mc}{n^2 - m^2}$ и будет выражать, как видно, улитку Паскаля, которая входит, следовательно, в семейство овалов, причем особая точка ее совпадает с точкой F .

Уравнение овалов Декарта в прямоугольной системе запишется в виде $m\sqrt{x^2 + y^2} + n\sqrt{(x-d)^2 + y^2} = c$.

Путем соответствующих преобразований это уравнение может быть приведено к виду

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - l^2(x^2 + y^2) - k = 0, \quad (3)$$

где r , l и k — некоторые постоянные, связанные определенными соотношениями с параметрами m , n и d .

Приведем еще уравнение овалов Декарта в биполярной системе, которое оказывается очень простым и будет полезным в дальнейшем. Принимая точки F и F_1 за полюсы системы, будем иметь это уравнение в виде

$$m\rho + n\rho_1 = c. \quad (4)$$

Декарт построил свои овалы в связи с исследованиями по оптике. Подобные исследования, предпринятые многими учеными, имели в 17 столетии большое практическое значение и вызывались необходимостью усовершенствовать оптические инструменты, употребляемые в практике навигации. Одной из возникших на этой почве задач была задача об определении такой кривой, которая преломляла бы лучи, выходящие из одной точки так, чтобы преломленные лучи проходили через другую заданную точку. Геометрически эта задача сводилась к разысканию кривой, нормаль к которой в любой ее точке обладает тем свойством, что *отношение между синусами углов, образуемых ею с прямыми, соединяющими эту точку с двумя данными точками, имеет наперед заданное значение.*

Овалы Декарта и удовлетворяют как раз указанному требованию. Для доказательства этого замечательного свойства их продифференцируем биполярное уравнение (4) по длине дуги s . Будем иметь $m \frac{d\rho}{ds} + n \frac{d\rho_1}{ds} = 0$. Но, как известно, $\frac{d\rho}{ds} = \cos \psi$, $\frac{d\rho_1}{ds} = \cos \psi_1$, где ψ и ψ_1 — углы между касательной и радиусами-векторами ρ и ρ_1 (рис. 82). Следовательно, предыдущее равенство можно переписать в виде

$$m \cos \psi + n \cos \psi_1 = 0. \quad (5)$$

Отложим теперь на радиусах-векторах FM и F_1M соответственно отрезки $MD = m$ и $MD_1 = n$ и построим на них параллелограмм. Тогда $\overline{MC} = \overline{MD} + \overline{MD_1}$, и следовательно, $\text{пр. } \overline{MC} = \text{пр. } \overline{MD} +$

+ пр., $\overline{MD}_1 = m \cos \psi + n \cos \psi_1$, откуда, на основании (5), пр., $\overline{MC} = 0$ и, значит, $MC \perp t$.

Мы пришли к заключению, что диагональ построенного параллелограмма определяет направление нормали к овалу в точке M .

Если, далее, угол FMC обозначить через γ , а угол F_1MC через γ_1 , то

$$\frac{MD}{\sin \gamma_1} = \frac{DC}{\sin \gamma}, \text{ или } \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_1} = \frac{DC}{MD} = \frac{n}{m} = \text{const.}$$

Таким образом, если овал Декарта разделяет две среды с отношением показателей преломления $\frac{n}{m}$, то лучи света, выходящие из

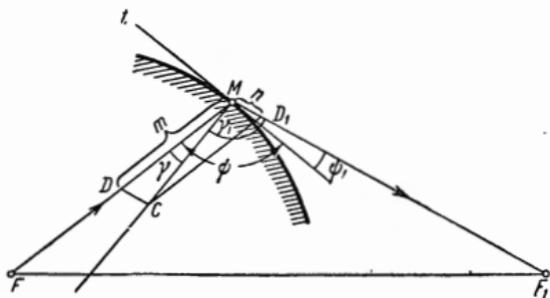


Рис. 82.

точки F — фокуса овала, после преломления в любой точке овала встретятся в точке F_1 — другом его фокусе.

В силу этого свойства овалы Декарта называют также апланетическими, т. е. не отклоняющими, линиями.

Помимо двух фокусов F и F_1 , овалы Декарта имеют еще и третий фокус F_2 , как это показал Шаль, и этот третий фокус равноправен относительно основного свойства овалов с двумя первыми, а именно, справедливы равенства

$$\begin{aligned} mMF + nMF_1 &= c, \\ m_1MF + n_1MF_2 &= c_1, \\ m_2MF_1 + n_2MF_2 &= c_2. \end{aligned}$$

Умножая правые части первого и второго из этих равенств соответственно на c_1 и c и вычитая из первого равенства второе, получим $(mc_1 - m_1c)MF + nc_1MF_1 - n_1cMF_2 = 0$; обозначая постоянные коэффициенты через α , β и γ , получим:

$$\alpha MF + \beta MF_1 + \gamma MF_2 = 0.$$

Таким образом, овалы Декарта являются геометрическими местами точек, расстояния каждой из которых от трех фиксированных точек, умноженные на некоторые числа, имеют сумму, равную нулю.

Вопрос о том, знал ли Декарт о существовании 3-го фокуса своих овалов, остается открытым. Следует заметить еще, что, помимо трех фокусов, лежащих на одной прямой, овалы Декарта имеют бесчисленное множество фокусов, расположенных в плоскости, перпендику-

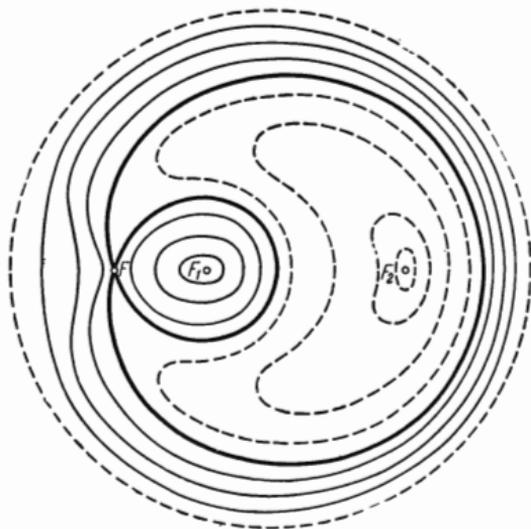


Рис. 83.

лярной к плоскости этих овалов и проходящей через прямую FF_1F_2 . Фокусы эти располагаются, как это показал Дарбу, на некоторой кривой 3-го порядка.

Детальное исследование особенностей формы овалов Декарта приводит к заключению, что каждый из них состоит из двух замкнутых линий, одна из которых объемлет другую. На рис. 83 приведены формы овалов, соответствующие определенным значениям параметров r и l уравнения (3) при меняющемся значении параметра k .

При $k=0$ получается частный случай овала — улитка Паскаля, узловая точка которой совпадает с одним из фокусов овала. При $k>0$ овал состоит из двух замкнутых линий, одна из которых находится внутри петли улитки, а другая — вне ее. При возрастании k внутренний овал стягивается к точке F_1 — другому фокусу. Внешний овал, имея для значений k , близких к нулю, сердцевидную форму, переходит затем в выпуклый овал. При $k<0$ внутренний

овал располагается внутри улитки, но уже вне ее петли и, имея для малых значений модуля k форму, напоминающую форму ущербленной луны, переходит затем, при возрастании модуля k , в выпуклый овал, стягивающийся постепенно в точку, совпадающую с третьим фокусом овала.

2. Другие способы образования овалов. Первый из них принадлежит Ньютону. Он показал, что овал Декарта можно определить как геометрическое место точек, *отношение расстояний которых от двух заданных окружностей является постоянным.*

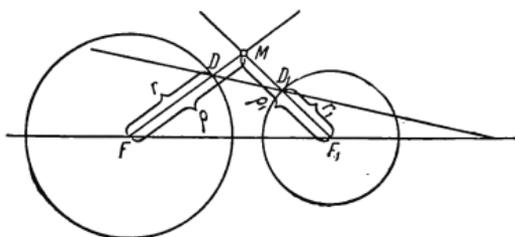


Рис. 84.

Центры этих окружностей будут фокусами овала. Действительно, пусть имеются две окружности с центрами в точках F и F_1 и радиусами r и r_1 (рис. 84); тогда искомое геометрическое место точек будет характеризоваться равенством

$\frac{\rho - r}{\rho_1 - r_1} = \frac{n}{m}$, или $m\rho - nr_1 = mr - nr_1 = \text{const}$, т. е. будет овалом Декарта.

Используя определение овалов Декарта по Ньютону, можно получить еще один способ их образования, открытый Шалем.

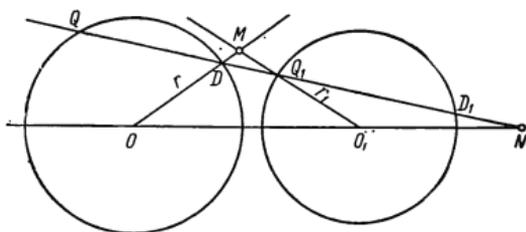


Рис. 85.

Пусть имеются две окружности с центрами в точках O и O_1 , радиусами r и r_1 (рис. 85). Направим из точки N прямую, пересекающую окружности в точках D_1 , Q_1 и D , Q . Если теперь провести

в эти точки радиусы окружностей, то они пересекутся в четырех точках M, M_1, M_2, M_3 , которые принадлежат овалу Декарта и при вращении секущей вокруг точки N будут перемещаться по этому овалу.

Действительно, применяя известную теорему Менелая, например, к треугольнику OMO_1 , получим $\frac{ON}{NO_1} \frac{O_1Q_1}{Q_1M} \frac{MD}{DO} = -1$, откуда $\frac{MD}{MQ_1} = \frac{NO_1}{ON} \frac{DO}{O_1Q_1} = \frac{NO_1}{ON} \frac{r}{r_1} = \text{const}$, и следовательно, точка M удовлетворяет приведенному выше определению овалов по Ньютону.

Шаль показал также, что касательная в точке M овала и касательные к окружностям в соответствующих точках пересекаются в одной и той же точке. Это обстоятельство определяет простой способ построения касательной в заданной точке овала.

Приведем в заключение стереометрический способ образования овалов Декарта, основанный на том, что линия пересечения поверхностей двух круговых конусов с параллельными осями проектируется на плоскость, перпендикулярную к этим осям, в овал Декарта. В самом деле, пусть заданы уравнения двух конусов

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 &= k^2(z-c)^2, \\ (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 &= k_1^2(z-c_1)^2.\end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений z , получим уравнение

$$k_1 \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - k \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2} = (c-c_1)kk_1,$$

выражающее, как видно, овалы Декарта.

§ 8. Каппа

Эту кривую, сходную по своей форме с греческой буквой κ (каппа), можно определить как геометрическое место точек касания касательных, проведенных из начала координат к окружности радиуса a , центр которой перемещается по оси абсцисс.

Из треугольника OMC (рис. 86) имеем $\rho = l \cos \varphi$, $l = \sqrt{\rho^2 + a^2}$. Исключая из этих равенств параметр l , получим полярное уравнение каппы в виде

$$\rho = a \operatorname{ctg} \varphi. \quad (1)$$

Переходя к прямоугольной системе, получим уравнение

$$(x^2 + y^2)y^3 = a^2x^2. \quad (2)$$

Каппа является алгебраической кривой 4-го порядка, симметричной относительно осей. В начале имеет узел с совпавшими касательными $x=0$. Прямые $y = \pm a$ служат для кривой асимптотами.

Исследование каппы связывается в истории математики с решением задачи, предложенной в 1662 г. Слюзу одним из учеников Декарта. В задаче требовалось найти кривую, обладающую тем свойством, что отрезок MC , перпендикулярный к любому ее радиусу-

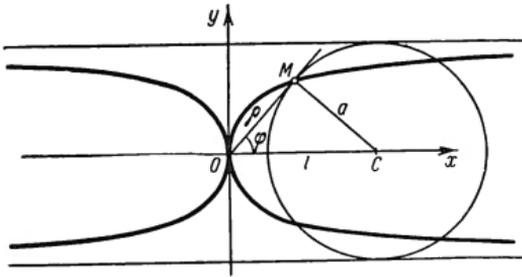


Рис. 86.

вектору OM , имеет одну и ту же длину. Определение это, как видно, эквивалентно первому, сформулированному Слюзом.

Барроу показал, что каппу можно определить следующим образом: откладываем на полярной оси отрезок $OA = a$ и в точке A восстанавливаем перпендикуляр к этой оси. Проведем из полюса произвольный луч; пусть он пересекает этот перпендикуляр в точке B . Отложим на луче отрезок $OM = BA$; геометрическое место точек M при вращении луча вокруг полюса и будет каппой.

Каппа может быть определена еще и так: из начала координат радиусом, равным a , строим окружность (рис. 87), проводим произвольный радиус OA и перпендикулярный к нему луч ON ; проводим, наконец, прямую AM параллельно полярной оси; геометрическое место точек M будет каппой. Действительно, из рисунка получаем $\rho = OM = a \operatorname{ctg} \varphi$ — уравнение каппы.

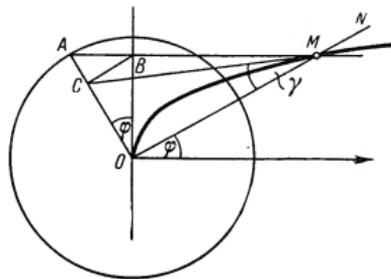


Рис. 87.

Определяя полярную подкасательную S_t , получим $S_t = OC = \frac{\rho^2}{a} = -a \cos^2 \varphi$. Теперь легко убедиться, что отрезок OC может быть получен непосредственно, если из точки B опустить на OA перпендикуляр BC . В самом деле, $OC = OA - AC = a - a \sin^2 \varphi = a \cos^2 \varphi$. Мы нашли графический способ построения подкасательной, а значит, и касательной в произвольной точке каппы.

Квадратуру каппы выполнил впервые Гюйгенс, показав, что площадь, заключенная между осью ординат, ветвью каппы и ее асимптотой равна половине площади производящего круга.

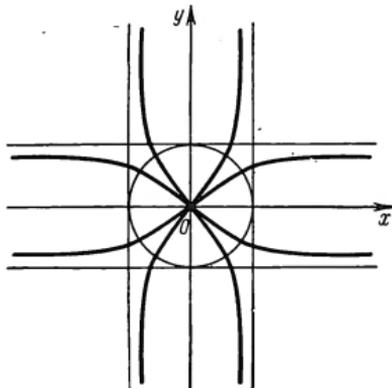


Рис. 88.

Заметим в заключение, что каппа является членом семейства кривых, выражаемых уравнением $\rho = a \operatorname{ctg} k\varphi$ и называемых узлами. Все эти кривые имеют в начале координат узловую точку и асимптоты, параллельные координатным осям. Отличительным свойством узлов является то, что, подвергая инверсии относительно начала координат узел $\rho = a \operatorname{ctg} k\varphi$, получим также узел $\rho = a \operatorname{tg} k\varphi$, конгруэнтный данному, но повернутый на 90° .

Членами семейства узлов, помимо каппы, являются, в частности,

строфоида, для которой $k = \frac{1}{2}$, и так называемая «ветряная мельница», получаемая при $k = 2$ (рис. 88).

§ 9. Кривые Персея

1. Способы образования. Кривые Персея, названные так по имени греческого геометра Персея, являются линиями пересечения поверхности тора параллельными его оси. Их называют также спирическими линиями (от латинского *spira* — тор).

Пусть тор произведен вращением окружности радиуса R , лежащей в плоскости $x_1O_1z_1$ координатной системы (x_1, y_1, z_1) (рис. 89). Расстояние центра производящей окружности от начала координат обозначим через d . Уравнение поверхности тора запишется в виде

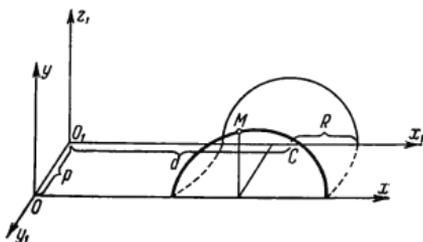


Рис. 89.

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + d^2 - R^2)^2 = 4d^2(x_1^2 + y_1^2). \quad (1)$$

Уравнение секущей плоскости возьмем в виде

$$y_1 = p.$$

Расположим теперь в этой секущей плоскости координатную систему xOy , начало которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на секущую плоскость. Возьмем некоторую точку $M(x, y)$, принадлежащую линии пересечения поверхности тора с секущей плоскостью, т. е. кривой Персея. Тогда, как это следует из рисунка, $x_1 = x$, $y_1 = p$, $z_1 = y$. Исключая из этих равенств и

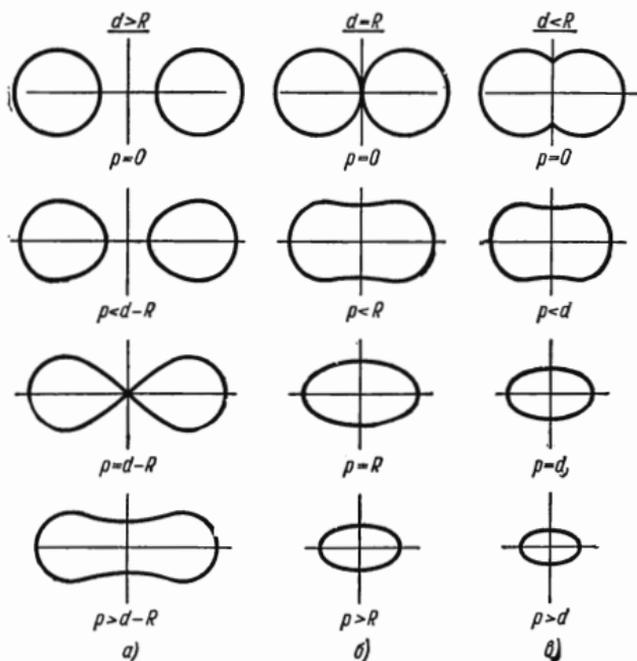


Рис. 90.

уравнения (1) x_1 , y_1 и z_1 , получим уравнение кривых Персея в виде

$$(x^2 + y^2 + p^2 + d^2 - R^2)^2 = 4d^2(x^2 + p^2). \quad (2)$$

По виду полученного уравнения заключаем, что кривые Персея являются алгебраическими линиями 4-го порядка, для которых оси координат служат осями симметрии.

На рис. 90, а, б, в представлены характерные формы кривых Персея для случаев $d > R$ — открытый тор, $d = R$ — замкнутый тор и $d < R$ — самопересекающийся тор.

Помимо рассмотренного стереометрического способа образования кривых Персея, они могут быть получены также и планиметрическими способами. Остановимся на одном из них.

Пусть даны две фиксированные точки $F(m, 0)$ и $F_1(-m, 0)$. Требуется найти геометрическое место точек M таких, что

$$MF^2 \cdot MF_1^2 = c OM^2 + c_1, \quad (3)$$

где c и c_1 — заданные константы. Нетрудно убедиться, что искомые линии являются кривыми Персея.

Действительно, равенство (3) можно переписать в виде

$$[(x-m)^2 + y^2][(x+m)^2 + y^2] = c(x^2 + y^2) + c_1,$$

или, после соответствующих преобразований, в виде

$$(x^2 + y^2)^2 - (2m^2 + c)x^2 + (2m^2 - c)y^2 + m^4 - c_1 = 0. \quad (4)$$

Но приведенное выше уравнение (2) кривых Персея может быть записано также в виде

$$(x^2 + y^2)^2 + (2p^2 - 2d^2 - 2R^2)x^2 + (2p^2 + 2d^2 - 2R^2)y^2 + [(p+d)^2 - R^2](p-d)^2 - R^2 = 0. \quad (5)$$

Сопоставляя уравнения (4) и (5), видим, что они совпадают с точностью до обозначения постоянных.

Полагая в равенстве (3) $c=0$, мы получим *овалы Кассини* (стр. 146); если еще и $c_1 = m^4$, то получается *лемниската Бернулли* (стр. 155); наконец, при $c_1 = m^4$ получаем *лемнискату Бута*.

2. Лемниската Бута. Уравнение этой кривой, исходя из (4), мы получим в виде

$$(x^2 + y^2)^2 - (2m^2 + c)x^2 + (2m^2 - c)y^2 = 0. \quad (6)$$

Форма кривой зависит от соотношения между параметрами m и c . Если $c > 2m^2$, то, полагая $2m^2 + c = a^2$ и $c - 2m^2 = b^2$, будем иметь уравнение лемнискаты Бута в виде

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2. \quad (7)$$

Если $c < 2m^2$, то, полагая $2m^2 + c = a^2$ и $2m^2 - c = b^2$, будем иметь уравнение лемнискаты Бута в виде

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2. \quad (8)$$

Легко показать, что в первом случае лемниската Бута является *подэрой эллипса относительно его центра*, а во втором — *подэрой гиперболы относительно ее центра*.

Действительно, пусть $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ — уравнение эллипса или гиперболы, $\frac{x_1 x}{a^2} \pm \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ — уравнение касательной в точке (x_1, y_1) ; тогда уравнение перпендикуляра, опущенного на касательную из центра, запишется в виде $\frac{y_1}{b^2} x \mp \frac{x_1}{a^2} y = 0$. Исключая x_1 и y_1 , получим

уравнение подэры в виде уравнения (7) (подэра эллипса) или в виде уравнения (8) (подэра гиперболы). В соответствии с этим различают *эллиптическую* лемнискату Бута, выражаемую уравнением (7) и имеющую изолированную точку в начале (рис. 91), и *гиперболическую*, выражаемую уравнением (8) (рис. 92). Гиперболическая лемниската Бута имеет в начале координат узловую точку. Приравнивая нулю члены с низшими степенями переменных в уравнении (8), получим уравнения касательных в этой точке в виде $y = \pm \frac{a}{b} x$.

Нам осталось отметить еще два частных случая значений параметров m и c в уравнении (6). В первом из них, когда $c = 2m^2$, лемниската Бута вырождается в пару окружностей $x^2 + y^2 \pm 2mx = 0$, во втором, когда $c = 0$, она становится лемнискатой Бернулли.

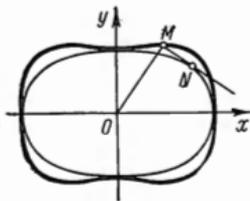


Рис. 91.

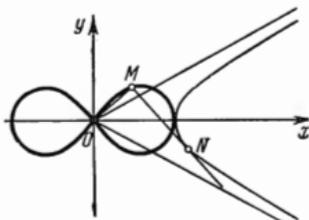


Рис. 92.

Заметим еще, что точки F и F_1 , которые фигурировали при планиметрическом определении кривых Персея, называют *фокусами* этих кривых. Они имели абсциссы m и $-m$. В случае лемнискаты Бута эти абсциссы определяются на основании введенных соотношений, согласно которым

$$2m^2 + c = a^2, \quad c - 2m^2 = b^2,$$

или

$$2m^2 + c = a^2, \quad 2m^2 - c = b^2.$$

Решая эти системы относительно m , получим $m = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}$ для эллиптической лемнискаты и $m = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$ для гиперболической. Как видно, эти абсциссы в два раза меньше абсцисс фокусов эллипса и гиперболы с полуосями a и b .

Лемнискату Бута можно получить также следующим образом: дан круг с радиусом R и центром C на полярной оси, удаленным от полюса на расстояние k ; проводим из полюса луч, пересекающий окружность в точках P и P_1 , и на этом луче откладываем отрезок $OM = PP_1$; геометрическое место точек M будет лемнискатой Бута эллиптического типа, если полюс находится внутри круга, и гиперболического, если полюс находится вне круга.

Предоставляя читателю получить уравнение лемнискаты Бута, исходя из этого определения, заметим, что указанный способ ее образования дает возможность графического построения этой кривой.

В заключение укажем еще некоторые свойства лемнискаты Бута.

Лемниската Бута является ортогональной проекцией на плоскость xOy линии пересечения поверхности параболоида $x^2 + y^2 = cz$ с поверхностью конуса $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2z^2$. Для доказательства этого предложения достаточно исключить z из уравнений указанных поверхностей.

Лемниската Бута получается в результате инверсии кривой 2-го порядка $a^2x^2 \pm b^2y^2 = k^4$ с центром в начале координат и степенью k^4 . Для доказательства этого предложения удобно уравнение лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 \pm b^2y^2$ записать в полярной форме в виде $\rho^2 = a^2 \cos^2 \varphi \pm b^2 \sin^2 \varphi$.

Пользуясь указанным полярным уравнением лемнискаты Бута, получим формулы для определения площади, ограничиваемой ею:

$$\text{для эллиптической лемнискаты } U = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \\ = \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2), \text{ для гиперболической}$$

$$U = \int_0^{\arctg \frac{a}{b}} (a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{a^2 - b^2}{2} \arctg \frac{a}{b} + \frac{ab}{2}.$$

Длина дуги ее выражается в эллиптических интегралах.

Мы исследовали лемнискату Бута как частный случай кривых Персея. Уместно заметить, что эллиптическая лемниската получается в результате сечения самопересекающегося тора ($d < R$), причем

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad d = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2} \quad \text{и} \quad p = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Гиперболическая лемниската получается в результате сечения открытого тора ($d > R$), причем параметры определяются равенствами

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \quad \text{и} \quad p = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

§ 10. Овалы Кассини

1. Особенности формы. Выше были рассмотрены кривые Персея, которые были определены, в частности, как геометрическое место точек M , удовлетворяющих условию

$$MF^2 \cdot M\Gamma^2 = c \cdot OM^2 + c_1,$$

где F и F_1 — фиксированные точки, O — точка, являющаяся серединой отрезка FF_1 , а c и c_1 — постоянные. Овалы Кассини являются частным случаем кривых Персея, когда $c=0$, т. е. когда $MF \cdot MF_1 = \sqrt{c_1} = \text{const}$. Они могут быть определены, следовательно, как *геометрические места точек, произведение расстояний каждой из которых от двух фиксированных точек является величиной постоянной*.

Пусть фиксированные точки F и F_1 , называемые *фокусами* овалов, лежат на оси абсцисс и имеют абсциссы, равные c и $-c$, а постоянная величина произведения $MF \cdot MF_1$, равна a^2 . Тогда равенство, определяющее овалы Кассини, запишется в виде

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2.$$

После преобразований получим уравнение овалов

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4. \quad (1)$$

Переходя к полярной системе, будем иметь:

$$\rho = c \sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}}. \quad (2)$$

Из уравнения (1) следует, что овалы Кассини являются алгебраическими линиями 4-го порядка, симметричными относительно координатных осей.

В зависимости от величины параметров a и c различают три основные формы овалов Кассини, соответствующие трем соотношениям $a > c$, $a = c$, $a < c$.

1. $a > c$. Для этого случая в уравнении (2) из двух знаков перед внутренним корнем следует брать только плюс, так как для отрицательных значений этого корня соответствующие значения ρ будут мнимыми. При изменении φ от нуля до $\frac{\pi}{2}$ радиус-вектор ρ будет изменяться от $\rho_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$ до $\rho_2 = \sqrt{a^2 - c^2}$. Как легко подсчитать, при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ производная ρ' остается отрицательной, следовательно, радиус-вектор в указанных выше границах будет монотонно убывать. Кривая имеет в этом случае форму замкнутой, симметричной относительно координатных осей линии.

2. $a = c$. При таком соотношении параметров уравнение (2) принимает вид

$$\rho = c \sqrt{2 \cos 2\varphi}$$

и выражает лемнискату Бернулли, являющуюся, таким образом, частным случаем овалов Кассини.

3. $a < c$. Для удобства исследования будем полагать $\frac{a^2}{c^2} = \sin 2\alpha$. Уравнение (2) можно будет записать тогда в виде

$$\rho = c \sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi - \cos^2 2\alpha}}. \quad (3)$$

Заметим при этом, что так как $a < c$, то $\sin 2\alpha < 1$ и, значит, $\alpha < 45^\circ$. Из уравнения (3) следует, что при изменении полярного угла φ от 0 до α каждому значению его будет соответствовать два действительных значения ρ , причем при $\varphi = 0$ этими значениями будут $\rho_1 = \sqrt{c^2 + a^2}$ и $\rho_2 = \sqrt{c^2 - a^2}$. При возрастании φ от 0 до α ρ_1 будет убывать, а ρ_2 — возрастать. При $\varphi = \alpha$ эти значения окажутся равными между собой. При дальнейшем возрастании угла φ от α до $\frac{\pi}{2}$ соответствующие значения ρ будут уже мнимыми. Овал будет состоять в этом случае из двух замкнутых линий.

Для уточнения особенностей формы овалов следует отметить еще один важный факт. Из уравнения (1) получим: $y' = -\frac{x(x^2 + y^2 - c^2)}{y(x^2 + y^2 + c^2)}$, откуда следует, что производная обращается в нуль при $x = 0$; следовательно, касательная в точке пересечения овала с осью ординат параллельна оси абсцисс (если только при этом $y \neq 0$). Далее, производная y' обращается в нуль также для таких точек овала, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 - c^2 = 0$, т. е. для точек пересечения овала с окружностью $x^2 + y^2 = c^2$.

Координаты этих точек $x = \pm \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}$, $y = \pm \frac{a^2}{2c}$, откуда следует, что абсциссы их являются действительными лишь при условии $a < c\sqrt{2}$. Итак, *овалы, параметр a которых таков, что $a < c\sqrt{2}$, пересекаются с окружностью $x^2 + y^2 = c^2$ в четырех точках, касательные в которых параллельны оси абсцисс.*

Овалы, для которых $a > c\sqrt{2}$, не будут иметь общих точек с окружностью. Точки, в которых касательная параллельна оси абсцисс, являются здесь точками пересечения кривой с осью ординат.

Овалы, для которых $a = c\sqrt{2}$, отличаются тем, что точки их пересечения с окружностью $x^2 + y^2 = c^2$ совпадают в одну, находящуюся на оси ординат и являющуюся для овала точкой сплюснутости.

Исследование особенностей форм овалов Кассини нельзя закончить, не указав на особый характер расположения их точек перегиба. Исходя из полярного уравнения (2), можно убедиться, что радиус кривизны в произвольной точке овала определится по формуле $R = \frac{a^2 \rho}{\rho^2 + c^2 \cos 2\varphi}$. Из этого равенства следует, что в точках овала, для которых $\rho^2 + c^2 \cos 2\varphi = 0$, радиус кривизны обращается в бесконечность. Это и будут точки перегиба овала, которые располагаются, как видно, на лемнискате Бернулли $\rho^2 = -c^2 \cos 2\varphi$.

Заметим, что как окружность $x^2 + y^2 = c^2$, на которой лежат точки овалов с касательными, параллельными оси абсцисс, так и лемниската $\rho^2 = -c^2 \cos 2\varphi$, на которой лежат точки перегиба, не зависят от величины параметра a и, следовательно, у всех конфокальных овалов точки, касательные в которых параллельны оси

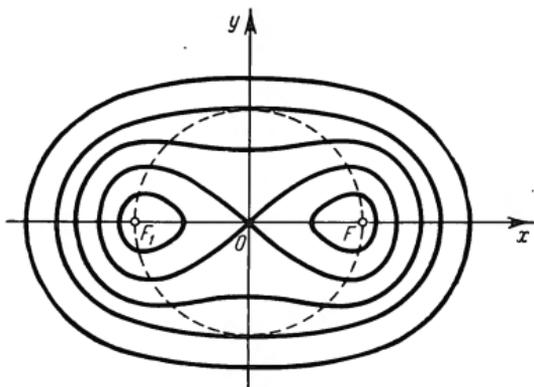


Рис. 93.

абсцисс, лежат на одной и той же окружности $x^2 + y^2 = c^2$, а точки перегиба — на одной и той же лемнискате $\rho^2 = -c^2 \cos 2\varphi$.

Проведенное исследование позволяет представить эволюцию форм конфокальных овалов Кассини при изменении параметра a . При $a=0$ овал вырождается в две точки F и F_1 ; при возрастании a от 0 до c около точек F и F_1 появятся замкнутые линии, которые, увеличиваясь в размерах, сомкнутся при $a=c$, образовав лемнискату. При дальнейшем увеличении a овал будет представлять собой замкнутую линию, имеющую вогнутости в положительном и отрицательном направлениях оси ординат и соответственно четыре точки перегиба. При $a=c\sqrt{2}$ вогнутости исчезают. При дальнейшем увеличении параметра a кривые будут иметь форму «чистых» овалов (рис. 93).

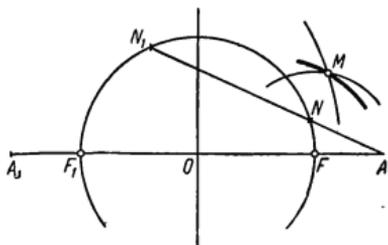


Рис. 94.

2. Способ построения. Способ построения овалов Кассини очень прост. Зная параметры a и c , находим положение фокусов F и F_1 и вершин A и A_1 (рис. 94). Проводим из точки A луч, который

пересечет окружность, описанную из начала координат радиусом, равным c , в точках N и N_1 . Если теперь из фокусов F и F_1 описать окружности радиусами, равными AN и AN_1 , то точка M их пересечения будет принадлежать овалу. Действительно, $MF_1 \cdot MF = AN_1 \cdot AN = \text{const}$ в силу известной теоремы о произведении секущей на ее внешнюю часть. Меняя направление луча ANN_1 , можно построить сколь угодно много точек овала.

Укажем в качестве примера одно явление, при исследовании которого имеют дело с овалами Кассини.

Два параллельных тока, текущие по бесконечно длинным прямолинейным проводникам, создают в плоскости, перпендикулярной к этим проводникам, потенциальное поле, эквипотенциальные линии которого представляют собой семейство овалов Кассини. Фокусы этого семейства находятся в точках пересечения проводников с плоскостью потенциального поля.

Семейство овалов Кассини можно наблюдать, рассматривая арагонитовую или селитрянную пластинку в поляризованном свете.

Известный интерес с точки зрения истории науки представляет тот факт, что овалы Кассини были открыты астрономом 17 века Доминикусом Кассини при его попытках определить орбиту Земли, которая, по его мнению, не была эллипсом, как это полагал Кеплер.

§ 11. Синусоидальные спирали

1. Особенности формы. Синусоидальными спиралями называют обширное семейство кривых, выражаемых в полярной системе уравнением $\rho^m = a^m \sin m\varphi$ или уравнением

$$\rho^m = a^m \cos m\varphi. \quad (1)$$

При рациональном m эти кривые являются алгебраическими линиями того или иного порядка, в зависимости от значения m . Но и при этом ограничении синусоидальные спирали отличаются большим разнообразием форм. В частности:

- 1) при $m = 1$ получим $\rho = a \cos \varphi$ — окружность;
- 2) при $m = -1$ имеем $\rho = \frac{a}{\cos \varphi}$ — прямую;
- 3) при $m = 2$ получим $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ — лемнискату Бернулли;
- 4) при $m = -2$ имеем $\rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$ — равностороннюю гиперболу;
- 5) при $m = \frac{1}{2}$ имеем $\rho = a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ — кардииду;
- 6) при $m = -\frac{1}{2}$ получим $\rho^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\varphi}{2}$, или $\rho = \frac{2a}{1 + \cos \varphi}$ — параболу.

Приведенные частные случаи синусоидальных спиралей показывают, насколько различными по своей природе могут быть кривые, относящиеся к их семейству. Ясно поэтому, что исследование этого семейства в целом представляет значительные трудности. Однако относительная простота уравнения (1) позволяет без особого труда обнаружить целый ряд общих свойств синусоидальных спиралей, а также сделать некоторые общие замечания относительно особенностей формы этих кривых.

Обратимся к исследованию этих свойств.

Непосредственно из уравнения (1) следует, что при положительном значении индекса m кривая проходит через полюс и полностью помещается внутри круга с радиусом, равным a . При отрицательном значении индекса m радиус-вектор может принимать сколь угодно большие значения, следовательно, кривая в этом случае будет иметь бесконечные ветви и, кроме того, уже не пройдет через полюс.

Далее, так как уравнение $\rho^m = a^m \cos m\varphi$ не меняется при замене φ на $-\varphi$, то все синусоидальные спирали симметричны относительно полярной оси. Заметим еще, что если полярную ось повернуть на угол $\frac{2\pi}{m}$, то, заменяя в уравнении (1) φ через $\varphi_1 + \frac{2\pi}{m}$, получим:

$$\rho^m = a^m \cos \left[m \left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{m} \right) \right] \quad \text{или} \quad \rho^m = a^m \cos m\varphi_1,$$

откуда следует, что по отношению к новой полярной оси кривая будет также симметрична. Это обстоятельство позволяет утверждать, что *синусоидальные спирали с индексом $m = \frac{p}{q}$* , где p и q — взаимно простые числа, *имеют p осей симметрии*, проходящих через полюс.

При целом положительном индексе m радиус-вектор является периодической функцией с периодом $\frac{2\pi}{m}$. При изменении полярного угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ он m раз пройдет через максимум; поэтому кривая будет состоять из m лепестков, каждый из которых располагается внутри угла, равного $\frac{\pi}{m}$. В полюсе такая спираль будет иметь кратную точку.

Заметим еще, что синусоидальная спираль с положительным дробным индексом $m = \frac{p}{q}$ также состоит из p лепестков, которые могут пересекаться, и, таким образом, кривая будет обладать кратными точками, помимо кратной точки в полюсе.

Несколько ниже мы покажем, что инверсия синусоидальной спирали относительно полюса дает синусоидальную спираль с индексом обратного знака по отношению к данной. Поэтому можно утверждать,

что синусоидальные спирали с целым отрицательным индексом состоят из m бесконечных ветвей, получаемых инвертированием лепестков соответствующей синусоидальной спирали

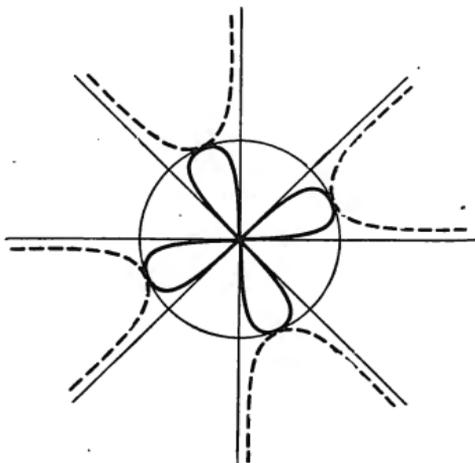


Рис. 95.

с положительным индексом. Каждая из этих ветвей касается базисной окружности и асимптотически приближается к лучам, угол между которыми равен $\frac{\pi}{m}$.

На рис. 95 изображена синусоидальная спираль с индексом $m=4$ (сплошной линией) и с индексом $m=-4$ (пунктирной линией).

2. Общие свойства.

1. Угол μ , составляемый касательной в произвольной точке спирали с радиусом-вектором точки касания, равен $m\varphi + \frac{\pi}{2}$, где φ — полярный угол точки касания.

Действительно, по известной формуле

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'} = \operatorname{tg} \left(m\varphi + \frac{\pi}{2} \right)$$

и, следовательно,

$$\mu = m\varphi + \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Для спиралей $\rho^m = a^m \sin m\varphi$ получим соответственно $\mu = m\varphi$; для кардиоиды $\mu = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}$; для лемнискаты $\mu = 2\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Простой способ построения касательной к синусоидальной спирали на основании полученных формул очевиден.

2. Угол γ между двумя касательными, проведенными в концах хорды, проходящей через полюс системы, является для каждой спирали величиной постоянной (рис. 96). В самом деле, на основании (2) имеем $\mu_1 = m\varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, $\mu_2 = m\varphi_2 + \frac{\pi}{2} = m(\pi + \varphi_1) + \frac{\pi}{2}$, откуда $\gamma = \mu_1 - \mu_2 = m\varphi_1 + \frac{\pi}{2} - m\pi - m\varphi_1 - \frac{\pi}{2} = -m\pi = \text{const.}$

3. Определяя радиус кривизны в произвольной точке спирали, получим:

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{m+1}, \quad (3)$$

но $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{\rho}{\cos m\varphi}$, следовательно,

$$R = \frac{\rho}{(m+1) \cos m\varphi}. \quad (4)$$

Замечая, что в равенстве (3) числитель $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$ есть величина полярной нормали N , будем иметь $R:N = \frac{1}{m+1} = \text{const}$, т. е. отношение радиуса кривизны к длине полярной нормали является для каждой синусоидальной спирали величиной постоянной, равной $\frac{1}{m+1}$.

Для кардиоиды это отношение равно $\frac{2}{3}$, для лемнискаты $\frac{1}{3}$.

4. Перепишем равенство (4) в виде $\frac{R \cos m\varphi}{\rho} = \frac{1}{m+1}$; замечая, что

$R \cos m\varphi$ есть проекция радиуса кривизны на радиус-вектор точки касания, приходим к заключению, что отношение проекции радиуса кривизны на радиус-вектор точки касания к этому радиусу-вектору является для всех точек синусоидальной спирали величиной постоянной, равной $\frac{1}{m+1}$.

5. Если радиусы-векторы точек, являющихся проекциями центров кривизны на соответствующие радиусы-векторы спирали обозначить через r , то $\rho - r$ и будет представлять проекцию радиуса кривизны, о которой мы только что говорили. Таким образом, $\rho - r = \frac{\rho}{m+1}$, от-

куда $r = \rho \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = \frac{m}{m+1} a \cos^{\frac{1}{m}} m\varphi$, или $r^m = \frac{m^m a^m}{(m+1)^m} \cos m\varphi$.

Полученное уравнение показывает, что геометрическое место проекций центров кривизны синусоидальной спирали на соответ-

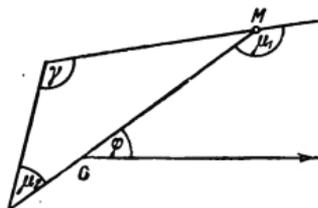


Рис. 96.

ствующие радиусы-векторы есть снова синусоидальная спираль с тем же полюсом и тем же индексом, что и данная.

6. Получим теперь натуральное уравнение синусоидальных спиралей. Так как $dS = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = a \cos^{\frac{1}{m}-1} m\varphi d\varphi$, то

$$S = a \int \cos^{\frac{1}{m}-1} m\varphi d\varphi. \quad (5)$$

С другой стороны, заменяя в равенстве (4) ρ через $a \cos^{\frac{1}{m}} m\varphi$, будем иметь:

$$R = \frac{a}{m+1} \cos^{\frac{1}{m}-1} m\varphi, \quad (6)$$

откуда

$$dR = \frac{m-1}{m+1} a \cos^{\frac{1}{m}-2} m\varphi \sin m\varphi d\varphi. \quad (7)$$

Комбинируя равенства (5), (6) и (7), исключим переменную φ и получим искомое уравнение в виде

$$S = \frac{m+1}{m-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{m+1}{a} R\right)^{\frac{2m}{m-1}} - 1}}.$$

7. Инверсия синусоидальной спирали относительно полюса дает снова синусоидальную спираль с индексом, противоположным по знаку индексу данной спирали.

Действительно, подвергая спираль $\rho^m = a^m \cos m\varphi$ инверсии $\rho\rho_1 = 1$, получим $\rho_1^{-m} = a^m \cos m\varphi$. Отсюда следует, в частности, что инверсия окружности $\rho = a \cos \varphi$ дает прямую $\rho = \frac{a}{\cos \varphi}$, инверсия лемнискаты дает равностороннюю гиперболу, инверсия кардиоиды дает параболу и т. д.

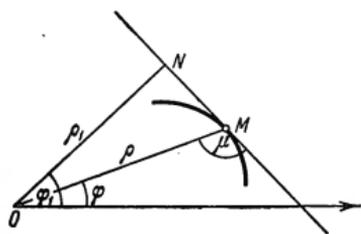


Рис. 97.

8. Подэра синусоидальной спирали с индексом m относительно полюса системы является также синусоидальной спиралью с индексом $\frac{m}{m+1}$.

Действительно, пусть ρ и φ — координаты точки касания M , а ρ_1 и φ_1 — координаты основания N перпендикуляра, опущенного из полюса на касательную. Тогда из треугольника OMN (рис. 97)

получим $ON = \rho_1 = \rho \cos(\varphi_1 - \varphi)$, или $\rho_1 = a \cos^{\frac{1}{m}} m\varphi \cos(\varphi_1 - \varphi)$. Заметим теперь, что согласно равенству (2) $\varphi_1 - \varphi = \mu - \frac{\pi}{2} = m\varphi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = m\varphi$, откуда $\varphi = \frac{\varphi_1}{m+1}$. На основании последнего равенства уравнение подэры запишется в виде

$$\rho_1^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}} \cos \frac{m}{m+1} \varphi.$$

Отсюда немедленно заключаем, что подэрой окружности является кардиоид, подэрой равносторонней гиперболы является лемниската, подэрой параболы — прямая и т. д.

§ 12. Лемниската Бернулли

1. Свойства. Одной из самых замечательных алгебраических линий 4-го порядка является *лемниската Бернулли*. Кривая эта обладает целым рядом оригинальных геометрических и механических свойств. С нею связывается в истории математики ряд важных теоретических открытий.

Как и другие овалы Кассини, *лемниската представляет собою геометрическое место точек M, произведение расстояний каждой из которых от двух фиксированных точек F и F₁ есть постоянная величина*. Эта постоянная может выражаться любым положительным числом, заданием которого определяется квадрат половины расстояния между фиксированными точками.

Располагая фиксированные точки F и F₁ — фокусы лемнискаты — на оси абсцисс и обозначая их абсциссы через a и -a, будем иметь $MF \cdot MF_1 = a^2$, или $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = a^2$, или

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0. \quad (1)$$

Переходя к полярным координатам, получим:

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi. \quad (2)$$

По виду полярного уравнения лемнискаты заключаем, что эта кривая, будучи членом семейства овалов Кассини, относится также и к семейству синусоидальных спиралей, представляя собою спираль с индексом $m=2$.

Пользуясь ранее проведенными исследованиями формы и свойств синусоидальных спиралей (стр. 151), заключаем, что лемниската состоит из двух лепестков и что начало будет для нее двойной точкой с касательными $y = \pm x$. По виду этих уравнений заключаем, что *касательные в двойной точке взаимно перпендикулярны*. Из уравнения (2) следует также, что при $\varphi = 0$ $\rho = a\sqrt{2}$,

т. е. ось абсцисс пересекается лемнискатой в точках $A(a\sqrt{2}, 0)$ и $A_1(-a\sqrt{2}, 0)$.

Свойства лемнискаты многочисленны и разнообразны. Мы остановимся сначала на тех из них, которые повторяют рассмотренные ранее общие свойства синусоидальных спиралей и не нуждаются поэтому в особых доказательствах.

1. Угол μ , составляемый касательной в произвольной точке синусоидальной спирали с радиусом-вектором точки касания, равен $m\varphi + \frac{\pi}{2}$; следовательно, для лемнискаты он равен $2\varphi + \frac{\pi}{2}$.

2. Угол γ между двумя касательными, проведенными в концах хорды, проходящей через полюс системы, является для каждой

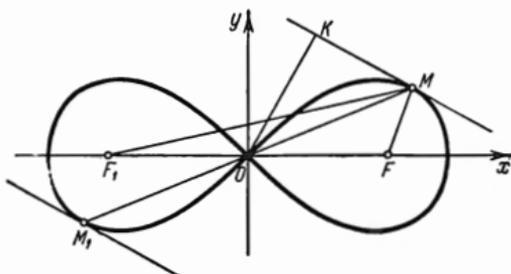


Рис. 98.

синусоидальной спирали величиной постоянной, равной $-m\pi$, значит, для лемнискаты он равен -2π , откуда следует, что касательные к лемнискате, проведенные в концах хорды, проходящей через полюс системы, параллельны между собой.

Из рис. 98 видно, что угол, составленный перпендикуляром, опущенным на касательную из начала координат, с полярной осью, в три раза больше полярного угла точки касания. Это обстоятельство показывает, что лемниската может быть употреблена для трисекции угла.

3. Радиус кривизны синусоидальных спиралей определяется по формуле $R = \frac{\rho}{(m+1)\cos m\varphi}$; следовательно, для лемнискаты он определится по формуле $R = \frac{\rho}{3\cos 2\varphi}$, и так как полярная нормаль лемнискаты определяется равенством $N = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{\rho}{\cos 2\varphi}$, то $R = \frac{1}{3}N$, т. е. радиус кривизны лемнискаты в произвольной ее точке в три раза меньше полярной нормали в этой точке. Отсюда вытекает простой способ построения центра кривизны в произвольной точке лемнискаты.

Заметим еще, что, согласно общему свойству синусоидальных спиралей, геометрическое место проекций центров кривизны лемнискаты на соответствующие радиусы-векторы есть также лемниската с уравнением $\rho^3 = \frac{4a^3}{9} \cos 2\varphi$.

4. Натуральное уравнение лемнискаты имеет вид

$$S = 3 \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{3}{a}R\right)^4 - 1}}.$$

5. Инверсия лемнискаты $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ дает синусоидальную спираль $\rho^{-2} = 2a^2 \cos 2\varphi$, т. е. равностороннюю гиперболу.

6. Подэрой синусоидальной спирали $\rho^m = a^m \cos m\varphi$

является спираль $\rho^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}} \cos \frac{m}{m+1}\varphi$; следова-

тельно, подэрой лемнискаты является синусоидальная спираль $\rho^{\frac{2}{3}} = (\sqrt{2}a)^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2}{3}\varphi$. Лемниската в свою очередь является подэрой равносторонней гиперболы.

Действительно, равносторонняя гипербола является синусоидальной спиралью с уравнением $\rho^{-2} = a^{-2} \cos 2\varphi$, следовательно, подэра ее имеет уравнение $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, выражающее, как видно, лемнискату.

Далее следуют свойства лемнискаты, не являющиеся общими свойствами синусоидальных спиралей.

7. Лемниската является геометрическим местом точек, симметричных с центром равносторонней гиперболы по отношению к ее касательным.

В самом деле, пусть $\rho^{-2} = a^{-2} \cos 2\varphi$ — уравнение гиперболы, $K(x_1, y_1)$ — точка касания, $M(x_0, y_0)$ — точка искомого геометрического места, а $N\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ — точка пересечения касательной с прямой MO (рис. 99). Уравнение касательной запишется в виде $x x_1 - y y_1 = a^2$, а уравнение прямой MO — в виде $y x_1 + x y_1 = 0$. Так как точка N лежит и на касательной и на прямой MO , то ее координаты должны удовлетворять как первому, так и второму уравнению. Следовательно, будут справедливы равенства $x_0 x_1 - y_0 y_1 = a^2$, $y_0 x_1 + x_0 y_1 = 0$. Кроме того, $x_1^2 - y_1^2 = a^2$, так как точка K лежит

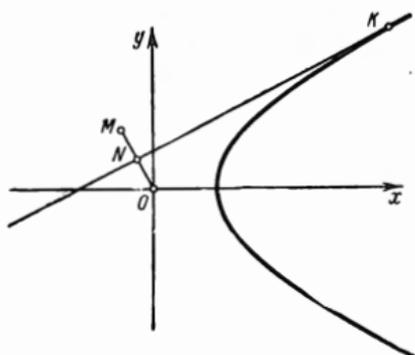


Рис. 99.

на гиперболе. Исключая из этих трех равенств параметры x_1 и y_1 , получим уравнение $(x_0^2 + y_0^2)^2 = a^2(x_0^2 - y_0^2)$, выражающее лемнискату.

8. Кинематически лемниската может быть получена как траектория середины большого звена шарнирного антипараллелограмма, противоположное звено которого закреплено. Действительно, пусть длина меньшего звена равна $2a$, а большего $2a\sqrt{2}$ (рис. 100). Так как при движении антипараллелограмма разность расстояний точки E от точек A и B будет оставаться постоянной, то точка E

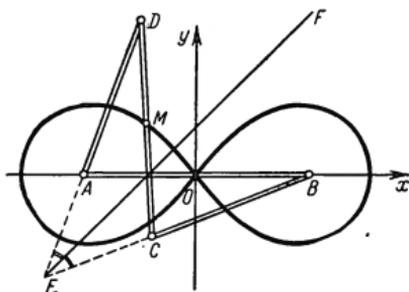


Рис. 100.

будет перемещаться по гиперболе, которая при выбранной нами длине большого и малого звеньев окажется равносторонней. Прямая EF — ось симметрии антипараллелограмма — делит угол между фокальными радиусами-векторами EB и EA пополам и, следовательно, по известному свойству гиперболы, будет играть роль касательной к гиперболе. Остается заметить, что середина M звена DC является точкой, сим-

метричной с точкой O по отношению к EF , т. е. к касательной к гиперболе. Поэтому на основании свойства 7 заключаем, что точка M описывает лемнискату.

9. Отрезок биссектрисы угла между фокальными радиусами-векторами точки лемнискаты равен отрезку от центра лемнискаты до пересечения ее оси с этой биссектрисой.

Это свойство легко доказать, пользуясь биполярным уравнением лемнискаты. Если фокусы ее принять за полюсы системы, то уравнение это запишется в виде $\rho_1 \rho_2 = a^2$, откуда следует, что лемнискату можно выразить параметрическими уравнениями $\rho_1 = ae^u$, $\rho_2 = ae^{-u}$, или, если воспользоваться гиперболическими функциями, в виде

$$\rho_1 = a(\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u), \quad \rho_2 = a(\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u). \quad (3)$$

Если теперь принять во внимание, что $F_1D + F_2D = 2a$ (рис. 101) и $F_1D : F_2D = \rho_1 : \rho_2$, и выразить F_1D и F_2D через ρ_1 и ρ_2 , то на основании (3) будем иметь: $F_1D = a(1 + \operatorname{th} u)$, $F_2D = a(1 - \operatorname{th} u)$ и $OD = F_2D - F_2O = -a \operatorname{th} u$. Подставляя значения F_1D и F_2D в известное соотношение между элементами треугольника $F_1M_1 \cdot F_2M_1 = M_1D^2 + F_1D \cdot F_2D$, получим $M_1D^2 = (a \operatorname{th} u)^2$ и, следовательно, $M_1D = OD$, что и требовалось доказать.

10. Ряд интересных свойств лемнискаты связывается с ее квадратурой.

Определим площадь сектора между ее осью и радиусом-вектором, соответствующим углу φ :

$$U_{\varphi} = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \rho^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\varphi} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi. \quad (4)$$

При $\varphi = \frac{\pi}{4}$ получим:

$$U_{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4} (a\sqrt{2})^2, \quad (5)$$

т. е. площадь, ограниченная лемнискатой, равняется площади квадрата со стороной $a\sqrt{2}$.

Квадратура лемнискаты, выполненная Фаньяно в 1750 г., была в то время фактом принципиального значения, так как показывала

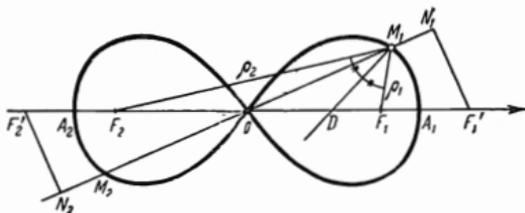


Рис. 101.

ошибочность утверждения Чирнгаузена о том, что квадратура кривых, состоящих из нескольких лепестков, невозможна.

Из соотношений (4) и (5) следует

$$U_{\varphi} = U_{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi. \quad (6)$$

Эта формула позволяет определить радиус-вектор, делящий в первом квадранте площадь половины лепестка лемнискаты в заданном отношении $m:n$. Действительно, если требуется, чтобы $\frac{U_{\varphi}}{U_{\frac{\pi}{4}} - U_{\varphi}} = \frac{m}{n}$,

то на основании (6) $\frac{\sin 2\varphi}{1 - \sin 2\varphi} = \frac{m}{n}$ и, следовательно, $\sin 2\varphi = \frac{m}{m+n}$. Полученное уравнение позволяет определить угол φ , соответствующий искомому радиусу-вектору. Если положить $m=n$, то $\sin 2\varphi = \frac{1}{2}$

и $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

На основании элементарных соображений можно показать, что перпендикуляр, опущенный из фокуса лемнискаты на радиус-вектор какой-либо ее точки, делит площадь соответствующего сектора пополам.

Интересное свойство лемнискаты было обнаружено в 1835 г. Штейнером. Пусть точки F'_1 и F'_2 являются точками, гармонически сопряженными с точками F_1 и F_2 относительно точек A_1 и A_2 (рис. 101). Имеем $OF_1 = OF_2 = a$ и $OA_1 = OA_2 = a\sqrt{2}$. С другой стороны, как известно из проективной геометрии, $OF_1 \cdot OF'_1 = OA_1^2$ и $OF_2 \cdot OF'_2 = OA_2^2$, откуда $OF'_1 = OF'_2 = 2a$. Проведем теперь через точку O прямую, составляющую с осью абсцисс угол φ ($\varphi < \frac{\pi}{4}$), и пусть M_1 и M_2 — точки пересечения ее с лемнискатой. Основания перпендикуляров, опущенных на эту прямую из точек F'_1 и F'_2 обозначим через N_1 и N_2 . Тогда

$$N_1M_1 = ON_1 - OM_1 = 2a \cos \varphi - a\sqrt{2 \cos 2\varphi},$$

$$N_1M_2 = ON_1 + OM_2 = 2a \cos \varphi + a\sqrt{2 \cos 2\varphi},$$

откуда $N_1M_1 \cdot N_1M_2 = 4a^2 \cos^2 \varphi - 2a^2 \cos 2\varphi = 2a^2$ и, следовательно, *площадь прямоугольника, построенного на отрезках N_1M_1 и N_1M_2 является величиной постоянной, равной площади, ограничиваемой лемнискатой.*

11. Определяя длину дуги лемнискаты между точками, для которых $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \varphi$, будем иметь:

$$S = \int_0^{\varphi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = a \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = a \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \varphi}}. \quad (7)$$

Как видно, длина дуги лемнискаты выражается эллиптическим интегралом 1-го рода. Учитывая, что таблицы эллиптических интегралов вида

$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ составлены в предположении, что $k^2 < 1$, можно

интеграл (7) подстановкой $2 \sin^2 \varphi = \sin^2 \theta$ привести к нормальному виду. Подстановка эта возможна, так как $\varphi < \frac{\pi}{4}$. После соответствующих преобразований получим формулу

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \theta\right).$$

Для определения длины всей лемнискаты полагаем $\varphi = \frac{\pi}{4}$; тогда $2 \sin^2 \varphi = 1$ и, следовательно, соответствующее значение θ равно $\frac{\pi}{2}$.

Тогда длина четверти лемнискаты выразится полным эллиптическим интегралом 1-го рода

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} = \frac{a}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

2. Построение. Построение лемнискаты можно осуществить на основании того, что радиус-вектор произвольной точки является катетом треугольника, гипотенуза которого равна $a\sqrt{2} \cos \varphi$, а другой катет равен a ; это становится очевидным, если уравнение лемнискаты записать в виде $\rho^2 = a^2(2\cos^2 \varphi - 1)$.

Это обстоятельство позволяет осуществить построение точек лемнискаты следующим образом: откладываем на оси абсцисс от точки O отрезки $OA = OA_1 = a$ (рис. 102); на оси ординат откладываем отрезок $OB = a$; радиусом, равным $AB = a\sqrt{2}$, описываем окружность с центром в начале; под произвольным углом φ (но меньшим $\frac{\pi}{4}$) проводим прямую N_1ON ; из точки N опускаем на ось абсцисс перпендикуляр ND ; из точки A радиусом, равным OD , засекаем на OB точку C . Тогда $OC^2 = AC^2 - OA^2 = OD^2 - OA^2 = (ON \cos \varphi)^2 - OA^2 = (a\sqrt{2} \cos \varphi)^2 - a^2$, откуда следует, что катет OC и будет определять длину радиуса-вектора точки лемнискаты, соответствующей углу φ . Теперь остается радиусом, равным OC , сделать засечки на прямой N_1ON в точках M_1 и M_2 . Эти точки будут принадлежать лемнискате. Повернув прямую N_1ON на некоторый угол и повторив указанное построение, получим вторую пару точек кривой и т. д.

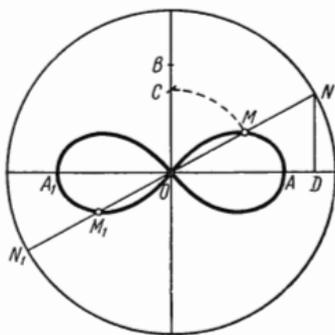


Рис. 102.

3. Применения лемнискаты. Историческая справка. В технике лемниската используется, в частности, в качестве переходной кривой на закруглениях малого радиуса, как это имеет место на железнодорожных линиях в горной местности и на трамвайных путях.

В качестве примера применения лемнискаты в области физики можно указать, что эквипотенциальные линии поля, создаваемого двумя параллельными токами, текущими по бесконечно длинным проводникам, в плоскости, к ним перпендикулярной, в частном случае являются лемнисками.

Как показал Бонати, лемниската является кривой, обладающей тем свойством, что тяжелая материальная точка, выходя из состояния покоя, пробегает под действием силы тяжести дугу этой кривой в такое же время, как и соответствующую хорду. Центр лемнискаты при этом совпадает с исходным положением двигающейся точки, а ось ее образует с вертикалью угол в 45° *).

Уравнение лемнискаты встречается впервые в математической литературе в статье Я. Бернулли в «Acta eruditorum» в 1694 г.

Особое внимание математиков к изучению свойств лемнискаты было привлечено в связи с исследованиями Фаньяно, который, как уже упоминалось, впервые выполнил квадратуру лемнискаты и, занимаясь ее спрямлением, положил начало теории эллиптических функций.

Название кривой происходит от греческого слова λημνίσκος — повязка.

§ 13. Розы

1. Порядок, особенности формы и свойства. Розами, или кривыми Гвидо Гранди, называют семейство кривых, полярное уравнение которых записывается в виде

$$\rho = a \sin k\varphi \quad (1)$$

или в виде $\rho = a \cos k\varphi$, где a и k — постоянные; в дальнейшем мы будем считать их положительными числами.

Если модуль $k = \frac{m}{n}$, т. е. число рациональное, то розы будут алгебраическими линиями, причем всегда четного порядка. Для доказательства перейдем к декартовой системе. Воспользуемся известной тригонометрической формулой

$$\begin{aligned} \sin A\varphi = & \binom{A}{1} \cos^{A-1} \varphi \sin \varphi - \binom{A}{3} \cos^{A-3} \varphi \sin^3 \varphi + \\ & + \binom{A}{5} \cos^{A-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots, \end{aligned}$$

где A — любое положительное число. Применяя эту формулу к левой и правой частям тождества $\sin m\varphi = \sin n \frac{m}{n} \varphi$, получим:

$$\begin{aligned} \binom{m}{1} \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi - \binom{m}{3} \cos^{m-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{m}{5} \cos^{m-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots = \\ = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \frac{m}{n} \varphi \sin \frac{m}{n} \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \frac{m}{n} \varphi \sin^3 \frac{m}{n} \varphi + \\ + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \frac{m}{n} \varphi \sin^5 \frac{m}{n} \varphi - \dots \quad (2) \end{aligned}$$

*) См. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, 1911, В. I.

Заметим, что, по формулам перехода,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

кроме того, из уравнения роз следует, что

$$\sin \frac{m}{n} \varphi = \frac{\rho}{a} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}, \quad \cos \frac{m}{n} \varphi = \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}{a}.$$

Подставляя эти значения в тождество (2), мы и найдем уравнение роз в декартовой системе:

$$\begin{aligned} a^n \left[\binom{m}{1} x^{m-1} y - \binom{m}{3} x^{m-3} y^3 + \binom{m}{5} x^{m-5} y^5 - \dots \right] = \\ = \binom{n}{1} (x^2 + y^2)^{\frac{m+1}{2}} [a^2 - (x^2 + y^2)]^{\frac{n-1}{2}} - \\ - \binom{n}{3} (x^2 + y^2)^{\frac{m-1}{2}} [a^2 - (x^2 + y^2)]^{\frac{n-3}{2}} + \dots \end{aligned}$$

Полученное уравнение будет рациональным, если m и n являются числами нечетными. Если же одно из них будет четным, то уравнение может быть сделано рациональным только после возвышения обеих частей его в квадрат. В первом случае его степень окажется равной $m+n$, а во втором — $2(m+n)$. Таким образом, *если числа m и n являются нечетными, то порядок розы равен $m+n$, если одно из этих чисел четное, то роза будет алгебраической линией порядка $2(m+n)$.*

Обратимся к исследованию формы роз.

На основании того, что правая часть уравнения не может превышать величины a , заключаем, что вся кривая уместается внутри круга с радиусом, равным a . Далее, так как $\sin k\varphi$ является функцией периодической, то роза состоит из конгруэнтных лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен a . Количество этих лепестков зависит от величины модуля k .

Простые соображения приводят к следующим заключениям:

1) если модуль k — целое число, то роза состоит из k лепестков при k нечетном и из $2k$ лепестков при k четном (рис. 103, а, б);

2) если модуль k — рациональное число, равное $\frac{m}{n}$ ($n > 1$), то роза состоит из m лепестков в случае, когда оба числа m и n нечетные, и из $2m$ лепестков, если одно из этих чисел является четным; при этом, в отличие от первого случая, каждый следующий лепесток будет частично покрывать предыдущий (рис. 103, в, г, д, е);

3) если модуль k — число иррациональное, то роза состоит из бесчисленного множества лепестков, частично накладывающихся друг на друга.

Добавим еще, что количество различных роз одного и того же порядка p в случае, если p является числом, кратным 4, равняется значению известной функции $\pi(p)$, выражающей число простых чисел, меньших p . Если же p не делится на 4, а только

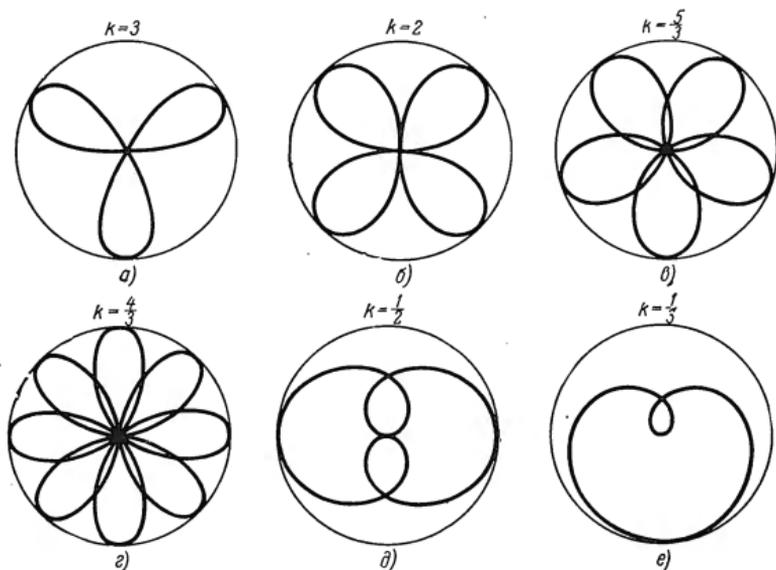


Рис. 103.

на 2, то количество роз одного и того же порядка p равно $\pi(p) + \pi\left(\frac{p}{2}\right)$. Так, в частности, число роз 4-го порядка равно $\pi(4) = 2$ ($k=3$, $k=\frac{1}{3}$), число различных роз 6-го порядка равно $\pi(6) + \pi(3) = 4$ ($k=2$, $k=\frac{1}{2}$, $k=5$ и $k=\frac{1}{5}$)*).

Розы относятся к семейству циклоидальных кривых. Они являются трохоидами, точнее, гипотрохидами, если $k < 1$, и эпитрохидами, если $k > 1$, как это было показано выше (стр. 120).

С семейством циклоидальных кривых розы связаны и тем, что они являются подэрами эпи- и гипоциклоид относительно центра их неподвижного круга. Доказательство этого предложения мы предоставим читателю.

Покажем, что если два равных между собой отрезка OA и AM длины a (рис. 104) вращаются вокруг точек O и A со скоро-

*) См. Loria, Algebraische und transcendente ebene Kurven, В. I.

стями, отношение которых равно m , то траекторией точки M будет роза.

Пусть в начальный момент отрезки OA и AM совпадали с полярной осью. Если угол поворота отрезка OA через некоторый промежуток времени обозначить через α , то $\angle AOP = \alpha$, $\angle MAB = m\alpha$ и, значит, $\rho = 2a \cos \frac{m\alpha}{2}$. Но так как $\varphi = \alpha + \frac{m\alpha}{2}$, то $\alpha = \frac{2\varphi}{m+2}$ и, следовательно, $\rho = 2a \cos \frac{m}{m+2} \varphi$.

Представим себе теперь, что радиусы OA и OB некоторой окружности вращаются вокруг центра со скоростями, отношение

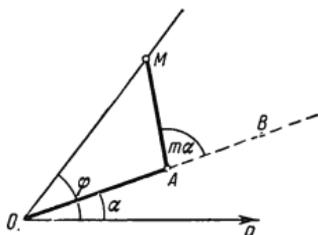


Рис. 104.

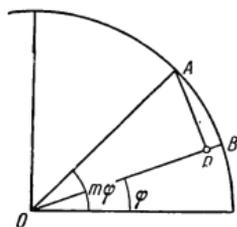


Рис. 105.

которых равно m . Покажем, что геометрическое место оснований перпендикуляров P , опущенных из точки A на OB , является розой (рис. 105).

Полагаем, что в начальный момент радиусы совпадали с положительным направлением оси абсцисс. Длину каждого из них обозначим a . Через некоторый промежуток времени координаты точек A , B и P определяются равенствами

$$x_A = a \cos m\varphi, \quad x_B = a \cos \varphi, \quad x_P = \rho \cos \varphi,$$

$$y_A = a \sin m\varphi, \quad y_B = a \sin \varphi, \quad y_P = \rho \sin \varphi,$$

где ρ и φ — полярные координаты точки P . Из условия перпендикулярности прямых OB и AP следует, что

$$\frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = -\frac{x_B}{y_B},$$

или, на основании предыдущих равенств,

$$\rho \sin \varphi - a \sin m\varphi = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} (\rho \cos \varphi - a \cos m\varphi),$$

откуда $\rho = a \cos (m-1)\varphi$.

Мы предоставим читателю убедиться в том, что если некоторая точка совершает гармоническое колебание вдоль прямой, вращающейся с постоянной скоростью вокруг неподвижной точки — центра колебаний, то траектория этой точки будет розой.

Площадь одного лепестка розы определяется по формуле

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{k}} \rho^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{k}} \sin^2 k\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4k} \left[k\varphi - \frac{1}{2} \sin 2k\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{k}} = \frac{\pi a^2}{4k}.$$

Длина дуги розы выражается эллиптическим интегралом 2-го рода.

2. Четырехлепестковая и трехлепестковая розы. Четырехлепестковая роза выражается уравнением $\rho = a \sin 2\varphi$, или, в декартовой системе, $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2 x^2 y^2 = 0$.

Трехлепестковая роза имеет уравнение $\rho = a \sin 3\varphi$, или, в декартовой системе, $(x^2 + y^2)^3 = a(3x^2 y - y^3)$.

Первая из них является алгебраической линией 6-го порядка; начало координат служит для нее четырехкратной точкой с касательными, совпадающими с осями координат (рис. 103, б). Четырехлепестковая роза является эпитрохоидой для случая, когда $r = \frac{1}{4} R$ и, следовательно, когда $h = R + r = \frac{5}{4} R$ (см. стр. 118); подобным образом, трехлепестковая роза есть эпитрохоида для случая, когда $r = \frac{1}{3} R$ и, следовательно, когда $h = R + r = \frac{4}{3} R$ (рис. 103, а).

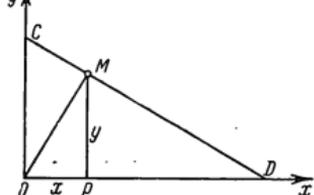


Рис. 106.

Четырехлепестковая роза есть подэра астроида, а трехлепестковая является подэрой кривой Штейнера (см. стр. 133 и 128).

Отметим еще следующие свойства четырехлепестковой розы.

1. *Четырехлепестковая роза есть геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на отрезок постоянной длины, концы которого скользят по координатным осям.*

Действительно, из рис. 106 имеем $PD = \frac{y^2}{x}$, откуда $MD = \sqrt{y^2 + \frac{y^4}{x^2}}$; кроме того, $\frac{CD}{MD} = \frac{OD}{PD}$. Заменяя члены пропорции соответствующими выражениями, получим уравнение $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2 x^2 y^2 = 0$, выражающее розу.

2. Четырехлепестковая роза является геометрическим местом вершин прямых углов, стороны которых касаются астроиды (см. стр. 133).

3. Четырехлепестковая роза получается в результате инверсии относительно начала координат, так называемой крестообразной кривой, имеющей уравнение $\frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{y^2} = 1$, или, в полярной системе, $\rho = \frac{2a}{\sin 2\varphi}$ (рис. 107).

Площадь, ограничиваемая четырехлепестковой розой, равна $\frac{1}{2} \pi a^2$; площадь, ограничиваемая трехлепестковой розой, равна $\frac{1}{4} \pi a^2$.

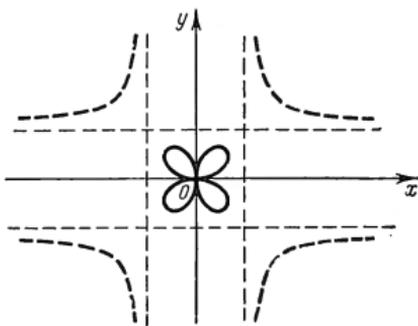


Рис. 107.

3. Историческая справка.

Исследованием роз занимался впервые итальянский геометр Гвидо Гранди. Полная теория этих кривых была изложена им в сочинении «Flores geometrici ex rhodaneorum et claelarum descriptione resultantes», изданном в 1728 г. Математическим исследованием формы цветов и листьев занимался также Хабеннихт — геометр 19 столетия, результаты которого были изложены им в сочинении «Die analitische Form der Blätter», изданном в 1896 г. Свои суждения он основывал на том, что в подавляющем большинстве случаев абрис листа или лепестка представляет собой кривую, симметричную относительно оси, и так как расстояние между двумя любыми точками ее будет величиной конечной, то в полярной системе уравнение такой кривой можно записать в виде $\rho = F(\varphi)$, где правая часть является функцией однозначной, непрерывной и периодической функцией с периодом 2π . Характеристика этой функции дополняется еще и тем соображением, что равным по абсолютной величине значениям φ должны соответствовать равные значения ρ и, следовательно, искомую функцию можно выразить, например, как $F(\varphi) = f(\cos \varphi)$. В первом приближении ее можно представить равенством

$$\rho = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos^2 \varphi + a_3 \cos^3 \varphi + \dots + a_n \cos^n \varphi.$$

Выражая здесь $\cos^k \varphi$ по известной формуле через $\cos \varphi$, $\cos 2\varphi$, ..., $\cos k\varphi$, можно записать искомое уравнение абриса листа или цветочного лепестка в виде $\rho = b_0 + b_1 \cos \varphi + b_2 \cos 2\varphi + \dots + b_n \cos n\varphi$, где коэффициенты определяются в конкретном случае на основании соответствующих измерений. Хабеннихт получил целый ряд уравнений, которые с весьма хорошим приближением выражали аналитически формы листьев клена, шавеля, ивы и т. д. Вот некоторые из этих

уравнений:

$$\rho = 4(1 + \cos 3\varphi) + 4 \sin^2 3\varphi \text{ — лист щавеля;}$$

$$\rho = 4(1 + \cos 3\varphi) - 4 \sin^2 3\varphi \text{ — лист трилистника;}$$

$$\rho = 3(1 + \cos^3 \varphi) + 2 \cos \varphi + \sin^2 \varphi - 2 \sin^2 3\varphi \cos^4 \frac{\varphi}{2} \text{ — лист плюща.}$$

4. «Колосья». Ближайшими родственниками роз являются кривые, имеющие уравнение вида $\rho = \frac{a}{\sin k\varphi}$ или $\rho = \frac{a}{\cos k\varphi}$, где k — любое рациональное число.

Нетрудно видеть, что эти кривые возникают, если подвергнуть инверсии относительно круга с радиусом, равным a , розу $\rho = a \sin k\varphi$ или $\rho = a \cos k\varphi$.

При целом и нечетном значении модуля k число лепестков розы, как было замечено выше, равно k . Соответственно этому кривые $\rho = \frac{a}{\sin k\varphi}$ будут состоять из k конгруэнтных гиперболических ветвей, получаемых инвертированием каждого лепестка розы. В случае, если k целое и четное число, число ветвей будет равно $2k$.

Ввиду сходства каждой ветви с абрисом колоса ячменя, эти кривые называют «колосьями» (Ährenkurve).

К «колосьям» относятся некоторые известные кривые:

$$\rho = \frac{a}{\sin 2\varphi} \text{ — крестообразная кривая (стр. 166);}$$

$$\rho = \frac{a}{\cos \frac{\varphi}{3}} \text{ — трисектриса Маклорена (стр. 85);}$$

$$\rho = \frac{a}{\cos 3\varphi} \text{ — трисектриса Лоншама (стр. 76).}$$

§ 14. Кривые скольжения

Мы рассмотрим в этом разделе кривые, которые образуются кинематически следующим образом. На плоскости P заданы две кривые k и k_1 , на другой плоскости P_1 задан треугольник ABC . Пусть плоскость P_1 скользит по плоскости P таким образом, что две вершины A и B треугольника ABC перемещаются при этом скольжении по кривым k и k_1 неподвижной плоскости P (рис. 108). Тогда третья вершина C треугольника будет опи-

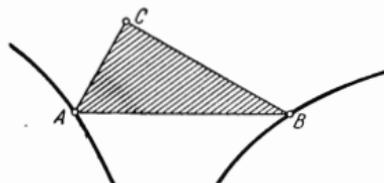


Рис. 108.

сывать на плоскости P кривую той или иной формы, в зависимости от вида и взаимного расположения кривых k и k_1 .

Назовем кривые k и k_1 направляющими, а траекторию вершины *кривой скольжения* и исследуем ее форму для наиболее простых случаев.

1. Скольжение по двум взаимно перпендикулярным прямым.

Чтобы получить уравнение кривой скольжения для этого случая, принимаем прямые k и k_1 за координатные оси, стороны треугольника ABC обозначим через a , b и c , углы его через α , β и γ , а отрезки BD и DA , на которые делится сторона AB перпендикуляром $CD = h$, опущенным на нее из вершины C , будем полагать равным m и n (рис. 109).

Обозначая угол, составленный прямой AB с отрицательным направлением оси абсцисс, через φ , будем иметь:

$$\begin{aligned}x &= ED + DN = m \cos \varphi + h \sin \varphi, \\y &= CN + DQ = h \cos \varphi + n \sin \varphi.\end{aligned}$$

Таковы параметрические уравнения определяемой кривой. Находя из этих уравнений $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ и пользуясь соотношением $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, получим уравнение кривой скольжения для рассматриваемого случая в виде

$$(nx - hy)^2 + (hx - my)^2 = (mn - h^2)^2,$$

или, как это следует из рисунка,

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2chxy = (mn - h^2)^2. \quad (1)$$

По виду этого уравнения заключаем, что оно выражает эллипс. Заметим, что вершиной C может быть любая точка плоскости P_1 , и следовательно, каждая точка этой плоскости будет описывать, вообще говоря, эллипс. В связи с этим обстоятельством рассматриваемый тип скольжения плоскости P_1 по плоскости P называют *эллиптическим*.

Отметим два частных случая кривой скольжения при эллиптическом движении плоскости:

1) если производящая точка C лежит на AB , то треугольник ABC обратится в отрезок AB и кривой скольжения будет эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

2) если точка C лежит на окружности круга с диаметром AB , т. е. треугольник ABC прямоугольный, то $h^2 = mn$, и уравнение (1)

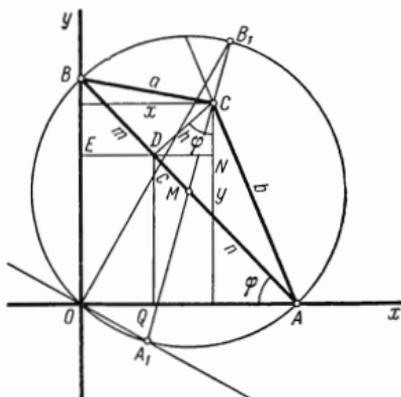


Рис. 109.

примет вид $b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy = 0$, откуда следует, что кривая скольжения вырождается в этом случае в прямую $y = \frac{b}{a}x$.

Этот последний факт позволяет установить простой способ определения величины и направления осей эллипса, описываемого в общем случае производящей точкой C . Построим окружность на стороне AB треугольника ABC как на диаметре, проведем через центр M этой окружности и точку C диаметр A_1B_1 . Каждая точка этого диаметра будет двигаться по тому или иному эллипсу, а концы его — точки A_1 и B_1 — по прямым OA_1 и OB_1 . Точка C , также принадлежащая этому диаметру, будет описывать эллипс (1). Отсюда следует, что прямые OA_1 и OB_1 будут играть по отношению к эллипсу (1) такую же роль, какую играли координатные оси по отношению к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, и значит, направления осей эллипса (1) будут совпадать с прямыми OA_1 и OB_1 , а самые оси будут равны $2A_1C$ и $2B_1C$.

Заканчивая на этом рассмотрение первого вида кривых скольжения, уместно упомянуть об обращении эллиптического движения. Именно, если точку C перемещать по эллипсу, то точки A и B будут перемещаться по прямым OA и OB . Это обстоятельство используется в устройстве так называемых эллиптических прямил, причем, поскольку движение по эллипсу практически трудно осуществить, заменяют дугу эллипса дугой окружности, пересекающей дугу эллипса в четырех точках C, C_1, C_2 и C_3 (рис. 110).

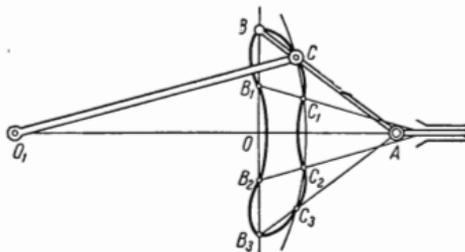


Рис. 110.

При вращении стержня O_1C вокруг точки O_1 , точка B другого стержня AB , один конец которого скользит по прямой O_1O , а другой шарнирно связан в точке C со стержнем O_1C , будет перемещаться при этом, но уже не по прямой BB_3 , а по некоторой кривой 4-го порядка, пересекающей прямую BB_3 в четырех точках. Прямоило будет точным, если точку C взять посередине стержня AB .

2. Скольжение по прямой и окружности. Здесь кривая будет траекторией вершины C треугольника ABC , одна из вершин которого A является концом вращающегося радиуса OA , а другая вершина B перемещается поступательно вдоль некоторой прямой. В технических терминах OA — кривошип, AB — шатун.

Располагая координатную систему, как представлено на рис. 111, будем иметь:

$$OP = x - b \cos(\alpha + \varphi), \quad (1)$$

$$ON = y - b \sin(\alpha + \varphi), \quad (2)$$

$$OD = k = x - b \cos(\alpha + \varphi) + c \cos \varphi. \quad (3)$$

Так как $OP^2 + ON^2 = r^2$, то на основании равенств (1) и (2) получаем

$$\frac{x^2 + y^2 + b^2 - r^2}{2} = b(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \cos \varphi + b(y \cos \alpha - x \sin \alpha) \times \\ \times \sin \varphi, \text{ а из равенства (3) следует: } x - k = (b \cos \alpha - c) \cos \varphi - \\ - b \sin \alpha \sin \varphi.$$

Определяя из двух последних равенств $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, подставим их выражения в соотношение $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$. Принимая при этом во внимание то, что $b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2$, $c \sin \alpha = a \sin \gamma$ и $b - c \cos \alpha = a \cos \gamma$, получим уравнение кривой скольжения в виде

$$4a^2b^2(x \sin \gamma + y \cos \gamma)^2 = \\ = a^2(x^2 + y^2 + b^2 - r^2)^2 + 4b^2(x^2 + y^2)(x - k)^2 + \\ + 4ab(x - k)(x^2 + y^2 + b^2 - r^2)(y \sin \gamma - x \cos \gamma),$$

или, после соответствующих преобразований, в виде

$$[a \cos \gamma(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) - 2bx(x - k)]^2 + \\ + [a \sin \gamma(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) + 2by(x - k)]^2 = \\ = 4a^2b^2(x \sin \gamma + y \cos \gamma)^2. \quad (4)$$

Из полученного уравнения следует, что кривая скольжения является в рассматриваемом случае алгебраической линией 4-го порядка.

Уравнение (4) может быть записано в условной форме в виде

$$u^2 + v^2 = w^2, \quad (5)$$

где

$$u = a \cos \gamma(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) - 2bx(x - k), \\ v = a \sin \gamma(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) + 2by(x - k), \\ w = 2ab(x \sin \gamma + y \cos \gamma).$$

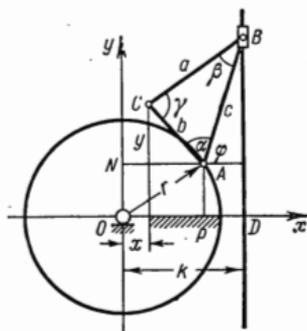


Рис. 111.

Так как при $u=0$, $v=0$, очевидно, и $w=0$, то кривая (4) пройдет через точки пересечения кривых 2-го порядка:

$$a \cos \gamma (x^2 + y^2 + b^2 - r^2) - 2bx(x - k) = 0, \quad (6)$$

$$a \sin \gamma (x^2 + y^2 + b^2 - r^2) + 2by(x - k) = 0, \quad (7)$$

лежащие на прямой

$$2ab(x \sin \gamma + y \cos \gamma) = 0. \quad (8)$$

Можно убедиться, что эти точки будут особыми точками кривой (4). Действительно, если $F(x, y) = u^2 + v^2 - w^2$, то $F_x(x, y) = 2uu'_x + 2vv'_x - 2ww'_x$ и $F_y(x, y) = 2uu'_y + 2vv'_y - 2ww'_y$, откуда ясно, что при $u=0$ и $v=0$, и, следовательно, при $w=0$, производные обращаются в нуль. Для определения координат этих особых точек достаточно решить совместно уравнение прямой (8) с уравнением одной из кривых (6) или (7), в результате чего можно прийти к заключению, что эти особые точки будут действительными или мнимыми, в зависимости от того, больше или меньше нуля величина $\Delta = b^2k^2 - (b^2 - r^2)(b^2 - c^2)$. Число этих особых точек равно, очевидно, двум. Итак, две особые точки кривой (4) лежат на прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью абсцисс угол $180^\circ - \gamma$.

Частный и практически важный случай рассматриваемой кривой будем иметь, полагая $\gamma = 180^\circ$, т. е. полагая, что производящая точка С

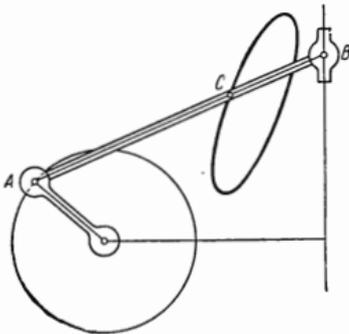


Рис. 112.

лежит на отрезке AB. Из уравнения (4) получим уравнение кривой скольжения для этого случая в виде

$$[a(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) + 2bx(x - k)]^2 + 4b^2y^2(x - k)^2 = 4a^2b^2y^2. \quad (9)$$

Очевидно, эти кривые симметричны относительно оси абсцисс; на этой же оси расположатся особые точки кривых, действительные или мнимые.

Практически эти кривые реализуются как траектории движения какой-либо точки шатуна в эксцентрической криволинейной передаче (рис. 112). Соответствующее этому случаю уравнение (9) будет выражать кривую скольжения в виде двух овалов, симметрично расположенных относительно оси абсцисс. Фактически, однако, в силу самого устройства передачи будет осуществляться только один из этих овалов.

Следует отметить, наконец, и такой частный случай, когда направляющая прямая проходит через центр направляющей окружности,

т. е. когда $k = 0$. В уравнении (9) останутся тогда только члены с квадратами переменных и, следовательно, кривая симметрична относительно обеих координатных осей.

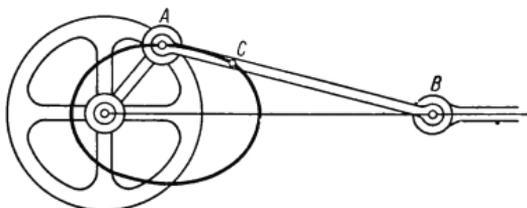


Рис. 113.

Практически эта кривая осуществляется как траектория какой-либо точки шатуна в центральной криволинейной передаче (рис. 113). Здесь также кривая в целом представляет собой не один, а два овала.

3. Скольжение по двум окружностям. Кривая скольжения является траекторией вершины C треугольника ABC , две другие вершины которого скользят по окружностям с радиусами r и R .

Эту кривую можно также рассматривать как траекторию вершины C треугольника ABC , построенного на стороне AB четырехсторонника $OABO_1$, стороны которого шарнирно связаны между собой в его вершинах, причем сторона OO_1 неподвижна, а две другие вращаются около точек O и O_1 (в технической терминологии звено AB называется шатуном, а звенья OA и O_1B — кривошипами).

Обозначим по-прежнему стороны треугольника через a , b и c , углы его через α , β и γ , расстояние между центрами направляющих окружностей через k , координаты точек C , A и B соответственно через (x, y) , (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , а угол, составленный стороной AC с отрезком OO_1 , через φ (рис. 114). Тогда, как это следует из рисунка, будем иметь следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - b \cos \varphi, & x_2 &= x - a \cos (\varphi + \gamma), \\ y_1 &= y - b \sin \varphi, & y_2 &= y - a \sin (\varphi + \gamma). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнения направляющих окружностей $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ и $(x_2 - k)^2 + y_2^2 = R^2$, получим:

$$\begin{aligned} [(x - k) \cos \gamma + y \sin \gamma] \cos \varphi - [(x - k) \sin \gamma - y \cos \gamma] \sin \varphi = \\ = \frac{(x - k)^2 + y^2 + a^2 - R^2}{2a} \quad \text{и} \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{x^2 + y^2 + b^2 - r^2}{2b}. \end{aligned}$$

Определяя из этих уравнений $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ и подставляя их значения в соотношение $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, получим уравнение искомой

кривой в условной записи в виде

$$u^2 + v^2 = w^2, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} u &= a [(x - k) \cos \gamma + y \sin \gamma] (x^2 + y^2 + b^2 - r^2) - \\ &\quad - bx [(x - k)^2 + y^2 + a^2 - R^2], \\ v &= a [(x - k) \sin \gamma - y \cos \gamma] (x^2 + y^2 + b^2 - r^2) + \\ &\quad + by [(x - k)^2 + y^2 + a^2 - R^2], \\ w &= 2ab \sin \gamma [x(x - k) + y^2 + ky \operatorname{ctg} \gamma]. \end{aligned}$$

Как видно, кривая скольжения будет здесь алгебраической линией 6-го порядка. Так как при $u=0$ и $v=0$ имеем $w=0$, то

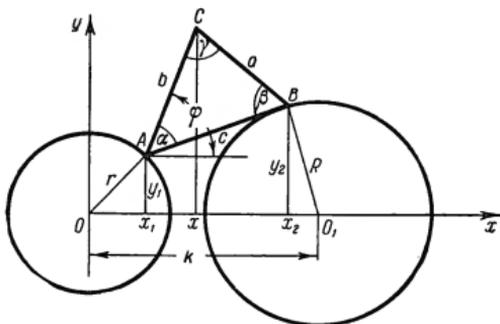


Рис. 114.

кривая проходит через точки пересечения кривых 3-го порядка $u=0$ и $v=0$, причем точки эти будут лежать на окружности $w=0$. Как и в предыдущем случае, эти точки будут особыми точками рассматриваемой кривой скольжения. Таким образом, особые точки рассматриваемой кривой скольжения лежат на окружности $w=0$. Эта окружность, как можно видеть из ее уравнения, проходит через центры $O(0, 0)$ и $O_1(k, 0)$ направляющих окружностей. Она будет проходить также через вершину O_2 треугольника OO_2O_1 , построенного на отрезке OO_1 и подобного производящему треугольнику ABC (рис. 115); в этом можно убедиться путем несложных выкладок.

Более детальное исследование показывает, что число особых точек кривой, лежащих на этой окружности, равно трем*).

Все сказанное об особых точках резюмируется в следующем предложении: *если на неподвижном звене OO_1 четырехсторонника построить треугольник OO_1O_2 , подобный производящему треугольнику ABC , и описать около него окружность, то на*

*). См. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, 1908.

этой окружности лежат три особые точки кривой скольжения (две из которых могут быть мнимыми).

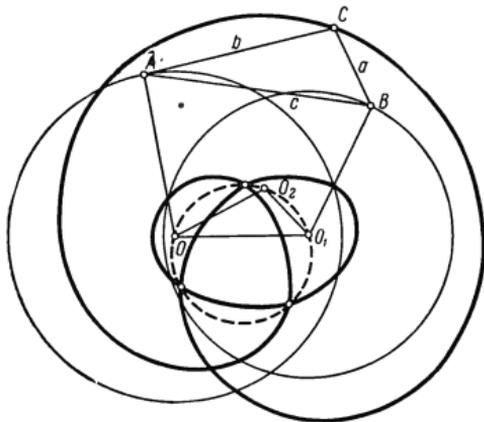


Рис. 115. -

Вершины треугольника OO_1O_2 называют *фокусами* кривой скольжения.

4. Кривые Уатта. Частным и практически важным случаем только что рассмотренных кривых скольжения является случай, когда вычерчивающая точка C лежит на отрезке AB ; треугольник ABC вырождается в отрезок AB и соответственно треугольник OO_1O_2 — в отрезок OO_1 . Если при этом точка C делит отрезок AB в отношении $m:n$, то и точка O_2 делит отрезок OO_1 также в отношении $m:n$. Окружность, описанная около треугольника OO_1O_2 , вырождается в прямую, проходящую через точки O и O_1 , поэтому здесь *фокусы кривой скольжения и ее особые точки расположены на прямой, проходящей через точки O и O_1 .*

Еще более частным случаем будет случай, когда $R=r$ и $m=n$, т. е. когда направляющие окружности одинаковы, а вычерчивающая точка C находится в середине отрезка AB . Исследование этих кривых связывается с теорией параллелограмма Уатта, в силу чего их называют *кривыми Уатта*. Своеобразная форма этих кривых дает повод называть их также *лемнискатоидами*. Полагая в уравнении (1) стр. 174. $R=r$, $a = \frac{c}{2}$, $b = \frac{c}{2}$ и $\gamma = 180^\circ$, получим общее уравнение лемнискатоид в виде

$$4 \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 \left[\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{c^2}{4} + r^2 - \frac{k^2}{4} \right]^2 + 4y^2 \left[\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{c^2}{4} - r^2 + \frac{k^2}{4} \right]^2 = c^2 k^2 y^2.$$

Если начало координат поместить в середину отрезка OO_1 , то, переходя к новой системе и заменяя для удобства дальнейших выкладок c через $2c$ и k через $2k$, получим:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + c^2 - r^2 - k^2)^2 + 4k^2y^2(x^2 + y^2 - r^2) = 0. \quad (1)$$

Кривая симметрична относительно координатных осей; один из фокусов ее совпадает с началом координат, два других имеют абсциссы $\pm k$, одна из двойных точек кривой совпадает с началом координат, две другие имеют абсциссы $\pm \sqrt{k^2 + r^2 - c^2}$ и, как видно, будут действительными лишь если $k^2 + r^2 > c^2$. Чтобы определить вид особой точки в начале координат, найдем касательные к кривой в этой точке. Их уравнение имеет вид

$$y = \pm \frac{c^2 - k^2 - r^2}{\sqrt{4k^2r^2 - (c^2 - k^2 - r^2)^2}}. \quad (2)$$

Следовательно, особая точка в начале координат будет узловой, если $4k^2r^2 > (c^2 - k^2 - r^2)^2$, и изолированной, если $4k^2r^2 < (c^2 - k^2 - r^2)^2$.

Заметим, что k , r и c должны удовлетворять соотношениям $|k - r| < c < k + r$, которые служат условиями существования четырехсторонника $OABO_1$. Для осуществления первого неравенства требуется еще, чтобы $k + c > r$, а для осуществления второго — чтобы $k + c < r$.

Таким образом, если $k + c > r$, то лемнискатоида будет иметь в начале узловую точку, если $k + c < r$ — изолированную. Частные случаи лемнискатоид с узловой и изолированной точками в начале координат представлены на рис. 116 и 117.

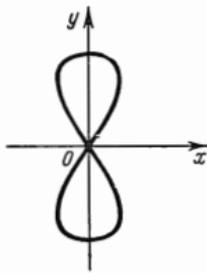


Рис. 116.

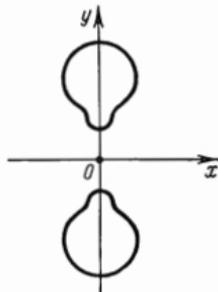


Рис. 117.

Для определения вида особых точек лемнискатоиды $(-\sqrt{k^2 + r^2 - c^2}, 0)$ и $(+\sqrt{k^2 + r^2 - c^2}, 0)$ следует перенести начало координат в испытываемую точку, например в первую; приравняв нулю члены с низшими степенями переменных в уравнении (1), полу-

чим уравнение касательных к исследуемой кривой в этой точке в виде

$$x^2(r^2 + k^2 - c^2)^2 + k^2y^2(k^2 - c^2) = 0.$$

Из этого уравнения следует, что при $c > k$ касательные действительны и, следовательно, кривая имеет узловую точку (рис. 118); при $c < k$ особая точка будет изолированной (рис. 119).

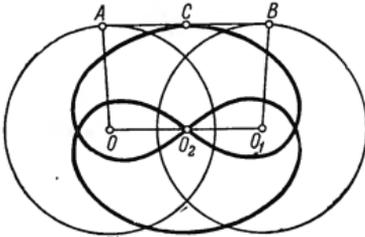


Рис. 118.

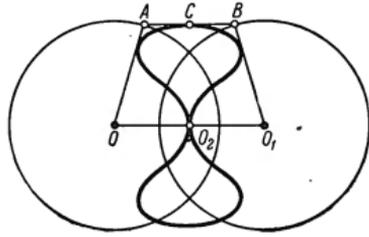


Рис. 119.

Заметим еще, что в последнем случае лемнискатоида, помимо точки перегиба в начале координат, будет иметь еще четыре точки перегиба. Это обстоятельство позволяет, подбирая надлежащим образом параметры k , r и c , добиться того, чтобы дуга кривой между точками перегиба весьма мало отличалась от прямой. Технически этим обеспечивается прямолинейность хода поршня паровой машины.

Особый случай получим при $c = k$. Уравнение (1) распадается при этом на два: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ и $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - r^2) + 4k^2y^2 = 0$. Исследуемая кривая распадается, следовательно, на окружность и лемнискату Бута.

В случае, если $r = k\sqrt{2}$, эта последняя обращается в лемнискату Бернулли.

§ 15. Овалы Мюнстера

Рассмотрим круг с центром в точке C и радиусом r и точку O в его плоскости (рис. 120). Проведем через точку O луч t , и пусть P — точка пересечения этого луча с окружностью и лемнискатой Бута. Спроектируем точку P ортогонально на диаметр M и обозначим ее проекцию через Q . Полученную таким образом точку Q снова проектируем на луч t , ее проекцию обозначим через P_1 . Повторяя такой процесс, мы получим на луче t точки P_1, P_2, \dots, P_n . Геометрическое место

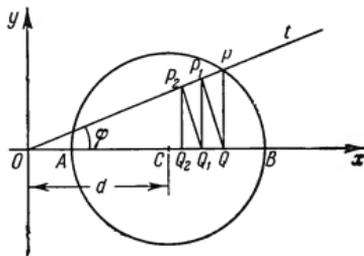


Рис. 120.

точек P_n , которое образуется, если изменять положение луча t , представляет собой кривую, называемую *овалом Мюнстера*.

Чтобы найти уравнение овалов Мюнстера, принимаем точку O за полюс, а прямую OB — за полярную ось. Если теперь длину отрезка OC обозначить через d , то уравнение заданного круга можно записать в виде

$$\rho^2 - 2d\rho \cos \varphi + d^2 - r^2 = 0. \quad (1)$$

Обозначим теперь радиусы-векторы точек P_1, P_2, \dots, P_n через $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$; тогда, как это видно из чертежа,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= r \cos^2 \varphi, & \rho_2 &= r \cos^4 \varphi, \dots \\ \dots, \rho_n &= r \cos^{2n} \varphi. \end{aligned}$$

Подставляя выражение $\rho = \frac{r_n}{\cos^{2n} \varphi}$ в уравнение (1), получим уравнение овалов Мюнстера

$$\rho_n^2 - 2d\rho_n \cos^{2n+1} \varphi + (d^2 - r^2) \cos^{4n} \varphi = 0.$$

Переходя к прямоугольным координатам, будем иметь:

$$(x^2 + y^2)^{2n+1} - 2dx^{2n+1}(x^2 + y^2)^n + (d^2 - r^2)x^{4n} = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что овалы Мюнстера являются алгебраическими линиями порядка $2(2n+1)$. В начале координат они имеют точку кратности $4n$ с касательными, совпавшими с осью ординат. Кроме этой точки, они пересекают ось абсцисс еще в двух точках, с абсциссами $d \pm r$, т. е. в точках A и B . Из уравнения (2) следует также, что кривые Мюнстера симметричны относительно оси абсцисс. В точке B они касаются окружности.

Если в уравнении (2) положить $n=0$, то получится окружность. При $n=1$ уравнение (2) принимает вид

$$(x^2 + y^2)^3 - 2dx^3(x^2 + y^2) + (d^2 - r^2)x^4 = 0 \quad (3)$$

и выражает кривую 6-го порядка. В зависимости от того, будет ли точка O лежать вне круга, на его окружности или внутри круга, кривые (3) будут иметь одну из характерных форм, представленных на рис. 121, а, б, в.

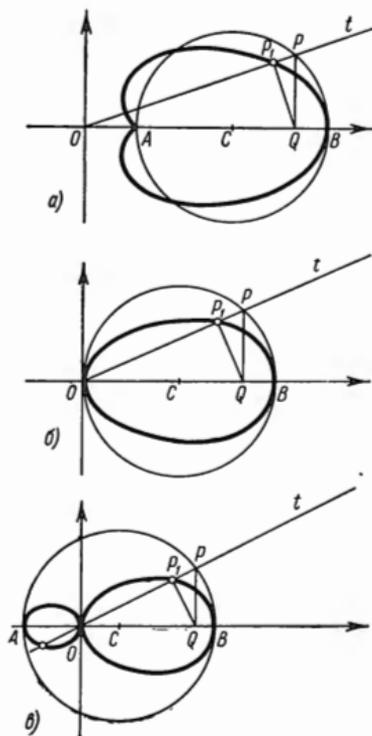


Рис. 121.

Особый интерес представляет при этом случай, когда $d=0$. Соответствующая кривая симметрична относительно оси ординат. Она состоит из двух одинаковых овалов и была названа Мюнгером *двойной линией*. Уравнение двойной линии в полярной системе выражается равенством $\rho=r \cos^2 \varphi$; в прямоугольной системе оно имеет вид $(x^2+y^2)^2-r^2x^2=0$. Полярное уравнение ее можно записать в виде $\rho=\frac{r}{2} \cos 2\varphi + \frac{r}{2}$, откуда следует, что *двойная линия является конхойдой розы*.

§ 16. Кривые Ламэ

Уравнение *кривых Ламэ* имеет вид

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1, \quad (1)$$

где показатель m может быть любым рациональным числом, а постоянные a и b — положительные числа.

Пусть сначала m является положительным рациональным числом, выражающимся дробью $\frac{p}{q}$.

Первый случай: $\frac{p}{q} > 1$.

а) p — четное, q — нечетное; кривая симметрична относительно осей координат, которые пересекает в точках $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$ (рис. 122, а);

б) p — нечетное, q — четное; кривая располагается в первом координатном угле, состоит из трех дуг, одна из которых проходит через точки $(a, 0)$ и $(0, b)$, а две другие уходят в бесконечность, асимптотически приближаясь к прямой $y = \frac{b}{a}x$; касательная в точке $(a, 0)$ параллельна оси y , в точке $(0, b)$ — оси x (рис. 122, б);

в) p — нечетное, q — нечетное; кривая располагается в 1-м, 2-м и 4-м координатных углах, имеет асимптоту $y = -\frac{b}{a}x$; касательные в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$ параллельны осям (рис. 122, в).

Второй случай: $\frac{p}{q} < 1$.

а) p — четное, q — нечетное; кривая симметрична относительно координатных осей; в точках $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$ имеет заострения (рис. 123, а); частным случаем является эволюта эллипса (см. стр. 267);

б) p — нечетное, q — четное; кривая располагается в первом координатном угле и напоминает параболу; в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$ касается осей координат (рис. 123, б);

в) p — нечетное, q — нечетное; кривая располагается в 1-м, 2-м и 4-м координатных углах, простирается в бесконечность,

в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$ касательные совпадают с осями координат (рис. 123, в).

Будем считать теперь m числом рациональным и отрицательным, выражающимся дробью $-\frac{p}{q}$. Различают следующие случаи:

а) p — четное, q — нечетное; кривая симметрична относительно координатных осей и состоит из четырех ветвей, асимптотически

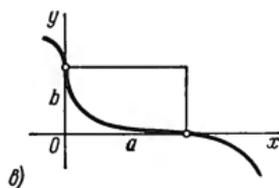
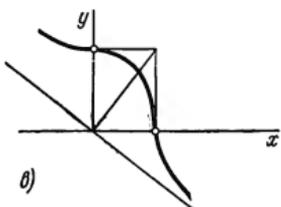
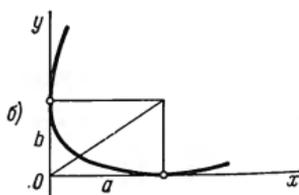
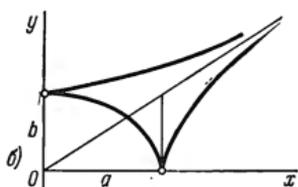
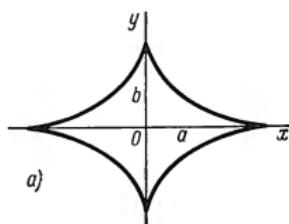
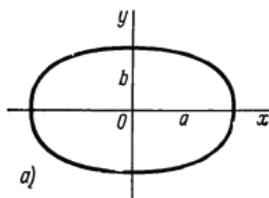


Рис. 122.

Рис. 123.

приближающихся к прямым $x = \pm a$ и $y = \pm b$; в начале изолированная точка (рис. 124, а); частным случаем является крестообразная кривая $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$;

б) p — нечетное, q — четное; кривая располагается в первом координатном угле, состоит из трех ветвей, асимптотически приближающихся к прямым $x = a$ и $y = b$; в начале координат имеет точку заострения с касательной $y = \frac{b}{a}x$ (рис. 124, б);

в) p — нечетное, q — нечетное; кривая состоит из двух ветвей гиперболического типа, одна из которых проходит через начало; прямые $x = a$ и $y = b$ являются асимптотами (рис. 124, в).

Одно из оригинальных свойств рассматриваемых кривых заключается в том, что *огibaющая кривых Ламэ* $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$ с одним и тем же показателем m , параметры a и b которых связаны соотношением $\left(\frac{a}{c_1}\right)^n + \left(\frac{b}{c_2}\right)^n = 1$, где c_1 и c_2 — заданные постоянные, представляет собой кривую Ламэ, выражаемую уравнением $\left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{y}{c_2}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1$.

Доказательство этого предложения удобно провести, пользуясь известным для нахождения огibaющих методом неопределенных коэффициентов *).

В частном случае, если семейство кривых Ламэ будет семейством эллипсов $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, полуоси a и b которых связаны соотношением $\frac{a}{c_1} + \frac{b}{c_1} = 1$, то огibaющая выразится уравнением $\left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{2}{3}} +$

$+\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ или $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c_1^{\frac{2}{3}}$. Отсюда следует, что *астроида является огibaющей коаксиальных эллипсов*, т. е. эллипсов, имеющих общий центр и одинаковое направление осей.

Заметим в заключение, что, как легко проверить, кривые Ламэ, для которых $m = \frac{p}{q} > 0$, будут алгебраическими линиями порядка pq , если же $m = -\frac{p}{q} < 0$, то порядок кривой равен $2pq$.

§ 17. Параболические и гиперболические кривые

К этому семейству относятся кривые, выражаемые уравнением

$$y = cx^m,$$

где c есть некоторая постоянная, которую мы будем предполагать положительной, а m — любое рациональное число. В зависимости от

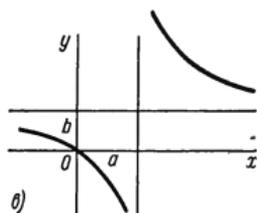
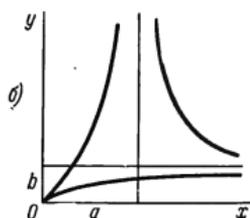
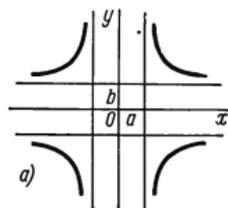


Рис. 124.

*) См. В. И. Милинский, Дифференциальная геометрия, 1934.

знака показателя m различают два семейства рассматриваемых кривых: *параболические* кривые, если $m > 0$, и *гиперболические*, если $m < 0$.

1. Параболические кривые $y = cx^m$, где $m = \frac{p}{q} > 0$.

Непосредственно из уравнения следует, что каждая параболическая кривая должна состоять из одной ветви, простирающейся в бесконечность и проходящей через начало координат; кроме того, все параболические кривые, соответствующие одному и тому же зна-

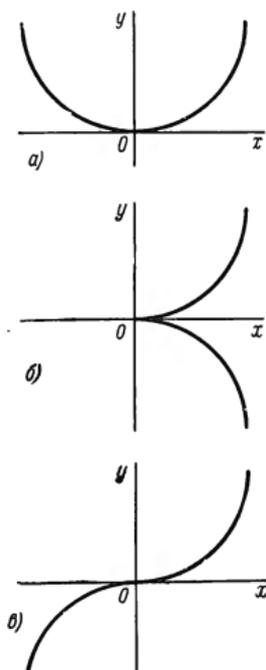


Рис. 125.

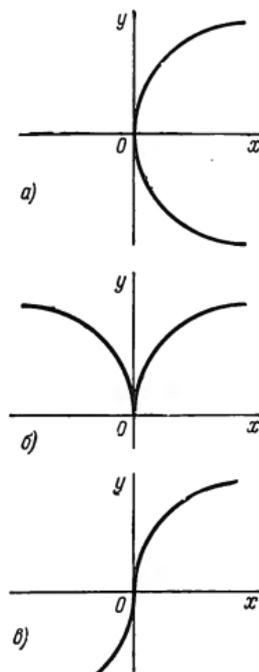


Рис. 126.

чению c , проходят при $x = 1$ через одну и ту же точку; далее, $y' = mcx^{m-1}$, и, значит, при $x = 0$ $y' = 0$, если $m > 1$, и $y' = \infty$, если $m < 1$, т. е. касательная к параболической кривой в начале координат совпадает с осью абсцисс, если $m > 1$ и с осью ординат, если $m < 1$.

Частные особенности форм параболических кривых определяются конкретным значением показателя m .

1-й случай: $m = \frac{p}{q} > 1$.

а) p — четное, q — нечетное; кривая симметрична относительно оси ординат, располагается над осью абсцисс (рис. 125, а);

б) p — нечетное, q — четное; кривая симметрична относительно оси абсцисс, располагается справа от оси ординат, в начале имеет точку возврата 1-го рода (рис. 125, б);

в) p — нечетное, q — нечетное; кривая располагается в первом и третьем координатных углах, в начале перегиб с касательной $y=0$ (рис. 125, в).

2-й случай: $m = \frac{p}{q} < 1$.

а) p — четное, q — нечетное; кривая симметрична относительно оси абсцисс, располагается справа от оси ординат (рис. 126, а);

б) p — нечетное, q — четное; кривая симметрична относительно оси ординат, располагается над осью абсцисс, в начале имеет точку возврата 1-го рода (рис. 126, б);

в) p — нечетное, q — нечетное; кривая располагается в первом и третьем координатных углах, в начале имеет точку перегиба с касательной $x=0$ (рис. 126, в).

По поводу эволюции форм параболических кривых при изменении параметра m следует заметить, что близость их к координатным осям в окрестности начала и к прямым $x=1$ и $y=c$ в окрестности точки M (рис. 127) будет тем большей, чем больше m , если $m > 1$,

и чем меньше m , если $m < 1$. Таким образом, предельной формой ветви кривой, расположенной в первом координатном угле, при неограниченном приближении m к нулю будет ломаная OBM . Если же $m > 1$ и неограниченно возрастает, то соответствующей предельной формой ветви кривой будет ломаная OAM .

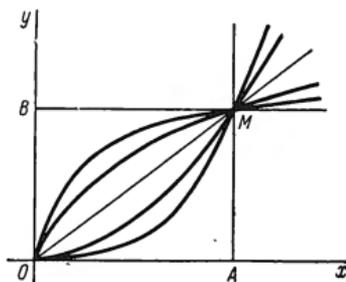


Рис. 127.

2. Свойства параболических кривых.

1. Определяя подкасательную S_t для произвольной точки параболической кривой, получим: $S_t = \frac{y}{y'} = \frac{cx^m}{cmx^{m-1}} = \frac{x}{m}$. Отсюда вытекает простой способ построения касательной в произвольно заданной точке параболической кривой.

2. Если $M(x_1, y_1)$ — некоторая точка кривой, то дуга OM делит площадь прямоугольника $MAOB$ на две части U_1 и U_2 , отношение которых равно m (рис. 128).

3. Отношение объемов тел вращения вокруг оси абсцисс криволинейных треугольников OAM и OMB равняется $2m$.

4. Определение длины дуги параболической кривой от точки O до некоторой точки $M(x, y)$ сводится к нахождению интеграла

$S = \int_0^x \sqrt{1 + c^2 m^2 x^{2(m-1)}} dx$. В силу условий интегрируемости дифференциальных биномов, этот интеграл выражается через элементарные функции лишь для таких кривых, значение показателя m которых обращает в целое число дробь $\frac{1}{2m-2}$ или дробь $\frac{1}{2m-2} + \frac{1}{2}$.

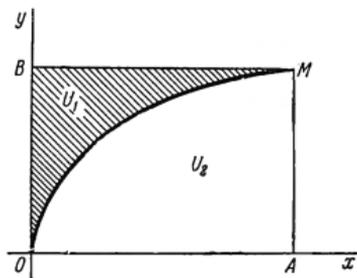


Рис. 128.

Наиболее известными членами семейства параболических кривых, помимо, разумеется, квадратичной параболы, являются *кубическая парабола* и *полукубическая парабола*, или *парабола Нейля*.

3. Кубическая парабола $y = cx^3$ (рис. 125, в). Одним из важных применений кубической параболы в

технике является использование ее в качестве переходной кривой на железнодорожных линиях. Как известно, дуга переходной кривой является вставкой между прямолинейным и круговым участками пути. В точке сопряжения с прямолинейным участком радиус кривизны переходной кривой должен равняться бесконечности, а затем, по мере продвижения поезда по переходной кривой, должен убывать с тем, чтобы в точке сопряжения переходной кривой с окружностью принять значение, равное значению радиуса R этой окружности. Этим обстоятельством обеспечивается постепенное нарастание центробежной силы от 0 до $\frac{mv^3}{R}$.

Идеальной переходной кривой является радиоидальная спираль, из натурального уравнения которой $R = \frac{a}{S}$ следует, что величина R изменяется обратно пропорционально величине S , т. е. расстоянию, проходимому поездом по переходной кривой. Для закруглений небольшого радиуса роль переходной кривой играет часто лемниската Бернулли, радиус кривизны которой можно приближенно определить равенством $R = \frac{a}{\rho}$, где ρ — полярный радиус-вектор точки.

Однако наиболее удобной переходной кривой с точки зрения простоты технических формул является кубическая парабола. Ее радиус кривизны может быть выражен приближенно равенством $R = \frac{c}{x}$. Действительно, для параболы $y = \frac{1}{6c}x^3$ имеем: $R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{c \sqrt{\left(1 + \frac{x^4}{4c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{x}$. Для небольших по сравнению со значением

параметра c значений x , членом $\frac{x^4}{4c^2}$ можно пренебречь и получить указанное приближенное равенство, которое широко используется в технике переходных кривых на железнодорожном транспорте.

4. Полукубическая парабола (парабола Нейля) $y = cx^{\frac{3}{2}}$ (рис. 125, б). Эта кривая привлекла внимание математиков 17 столетия в связи с постановкой Лейбницем задачи о нахождении кривой, обладающей тем свойством, что тяжелая материальная точка, двигаясь под действием силы тяжести вдоль дуги этой кривой, имеет постоянную скорость удаления от начального горизонта (т. е. скорость падения). Задача была решена Гюйгенсом в 1687 г., искомая кривая оказалась полукубической параболой.

Одним из геометрических свойств полукубической параболы является то, что она служит эволютой обычной квадратичной параболы.

Спрявление параболы Нейля выполняется в конечном виде.

Объем тела, полученного от вращения около оси абсцисс криволинейного треугольника OMP , сторонами которого являются отрезок OP оси абсцисс, дуга OM параболы Нейля и ордината MP точки M , определяется по формуле

$$V = \pi \int_0^x c^2 x^3 dx = \frac{c^2 \pi x^4}{4} = \frac{\pi y^2 x}{4}.$$

Так как πy^2 есть площадь основания полученного тела, так называемого *нейлоида*, то *объем нейлоида равен четверти произведения площади его основания на высоту*.

Среди других параболических кривых заслуживает упоминания еще парабола 4-го порядка $y = cx^{\frac{4}{3}}$. Кривая эта интересна тем, что, как было показано Торичелли, она является образующей поверхности жидкости, находящейся во вращающемся сосуде и истекающей через небольшое отверстие в дне этого сосуда.

5. Гиперболические кривые $y = cx^{-m}$, $m = \frac{p}{q} > 0$. Подобно тому как уравнение параболических кривых является обобщением уравнения квадратичной параболы, уравнение гиперболических кривых обобщает уравнение гиперболы $xy = c$ и имеет вид $x^p y^q = c$, где c — постоянная, которую мы будем считать положительной.

Непосредственно из уравнения видно, что при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ ордината $y = cx^{-m}$ меняется монотонно и при $x = 0$ имеет разрыв. Заметим также, что при $x \rightarrow \infty$ $y \rightarrow 0$. Это обстоятельство позволяет утверждать, что гиперболические кривые состоят из ветвей гиперболического типа, для которых оси координат служат асимптотами. Далее, все кривые с одним и тем же

значением параметра c , но с различными показателями m , имеют общую точку $(1, c)$.

Особенности в расположении ветвей относительно системы координат определяются значением показателя $m = \frac{p}{q}$. На рис. 129, а, б, в представлены все три случая такого расположения.

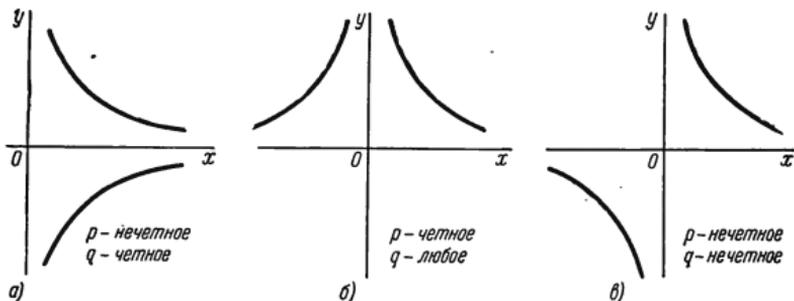


Рис. 129.

Определяя подкасательную S_t гиперболической кривой для произвольной точки, получим: $S_t = \frac{y}{y'} = -\frac{cx^{-m}}{ctx^{-m-1}} = -\frac{x}{m}$. Способ построения касательной на основании этой формулы очевиден.

Согласно условию интегрируемости дифференциальных биномов, спрямление гиперболических кривых в элементарных функциях в конечном виде невыполнимо.

6. Политропные кривые. Рассмотренные нами параболические и гиперболические кривые объединяются иногда в общем семействе так называемых *политропных кривых*, уравнение которых записывается в виде $y = cx^m$.

Политропные кривые интересны, в частности, своими применениями в термодинамике, где они выступают в роли так называемых адиабатических и изотермических кривых. Если изменение объема и давления газа происходит без потери и приобретения тепла, то изменение называется адиабатическим. При адиабатическом изменении между объемом v и давлением p газа имеет место зависимость $pv^\alpha = c$, полученная впервые Пуассоном, где c и α — некоторые постоянные, причем $\alpha = \frac{c_p}{c_v}$, где c_p — теплоемкость данного газа при постоянном давлении, а c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме. Очевидно, $\alpha > 1$, так как при постоянном объеме теплота, получаемая газом, целиком идет на повышение температуры, а при постоянном давлении часть этого тепла тратится

на преодоление давления при расширении газа. Параметр c политропы определяется величинами начального объема и начального давления. Кривые, соответствующие уравнению $p v^m = c$, называют адиабатами. Из этого уравнения и тех замечаний, которые мы сделали выше, следует, что *адиабаты являются политропами гиперболического типа.*

При изотермическом изменении состояния газа соотношение между его объемом v и давлением p определяется формулой Мариотта $p v = c$. Соответствующая изотерма будет равносторонней гиперболой.

Политропные кривые имеют важное значение в прикладной математике в качестве интерполяционных кривых. Суть дела здесь такова: из уравнения политроп следует, что $\lg y - m \lg x - \lg c = 0$; полагая $\lg x = \xi$, $\lg y = \eta$, $\lg c = c_1$, получим $\eta - m\xi - c_1 = 0$. Это уравнение в системе $\xi O \eta$ выражает прямую. Таким образом, если в системе координат $\xi O \eta$ нанести точки, координатами которых являются логарифмы координат x , y точек, принадлежащих политропе, то точки эти будут лежать на прямой, угловой коэффициент которой равен показателю m при x в уравнении политропы. Этим свойством политропных кривых и пользуются, употребляя их в качестве интерполяционных кривых.

Пусть известно, например, что некоторая эмпирическая кривая проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$. Если эта кривая относится к семейству политроп, то достаточно в системе $\xi O \eta$ построить соответствующую ей прямую, чтобы показатель m этой политропы, как угловой коэффициент полученной прямой, был определен. В случае, когда эмпирическая кривая не является политропой, в системе $\xi O \eta$ ей будет соответствовать уже не прямая, а ломаная. Может оказаться, однако, что отклонение этой ломаной от прямой незначительно. Тогда по известным способам определяют наиболее подходящие значения параметров этой прямой и тем самым получают возможность найти ее угловой коэффициент, т. е. значение показателя m в уравнении соответствующей политропы. Так для данной эмпирической кривой получается более или менее близкое к истине аналитическое выражение в виде уравнения некоторой политропы.

Укажем в заключение способ построения политропных кривых. Заметим предварительно, что если числа x_1, y_1 и x_2, y_2 удовлетво-

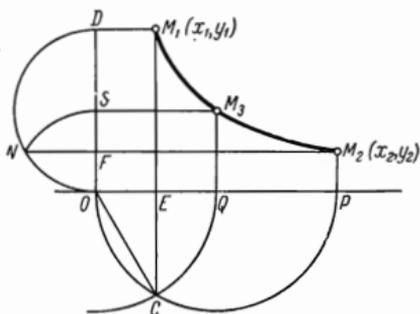


Рис. 130.

ряют уравнению политропы $y = cx^m$, то среднее геометрическое $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ и $y_3 = \sqrt{y_1 y_2}$ этих чисел будут также удовлетворять ему. Основываясь на этом, можно получить как угодно много точек политропы, находящихся между двумя ее известными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Построим с этой целью полуокружности на $OP = x_2$ и $OD = y_1$ как на диаметрах (рис. 130). Проведем $M_2N \perp OD$ и $M_1C \perp OP$. На оси абсцисс и оси ординат радиусами, равными соответственно OC и ON , сделаем засечки в точках S и Q . Тогда прямые SM_3 и OM_3 , проведенные параллельно осям координат, пересекутся в точке M_3 , принадлежащей политропе. Действительно, $x_3 = OQ = OC = \sqrt{OP \cdot OE} = \sqrt{x_1 x_2}$, $y_3 = OS = ON = \sqrt{OD \cdot OF} = \sqrt{y_1 y_2}$, но такие числа, как было замечено выше, удовлетворяют уравнению политропы.

ГЛАВА VII

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ КРИВЫЕ

§ 1. Общие сведения о трансцендентных кривых

Трансцендентными называются кривые, уравнения которых, будучи записаны в прямоугольной системе координат, не являются алгебраическими.

Разлагая в ряд правую часть уравнения такой, например, трансцендентной кривой, как $y = \sin x$, мы получим уравнение, содержащее алгебраические функции, однако число членов в нем будет неограниченным, а степень бесконечно большой. Это дает основание рассматривать трансцендентные кривые как алгебраические линии бесконечно высокого порядка. Соответственно этому можно полагать, что характерные точки алгебраических кривых (точки пересечения с прямой, точки перегиба, особые точки и т. д.) у трансцендентных кривых могут встречаться в бесконечном количестве. И это на самом деле так: трансцендентная кривая может пересекать прямую в бесконечном числе точек, у нее может быть бесконечное множество вершин даже на сколь угодно малом интервале (например, у кривой $y = \sin \frac{1}{x}$ вблизи начала координат), бесконечное количество точек перегиба, асимптот и т. д.

Но помимо этой особенности, у трансцендентных кривых могут быть характерные точки особой природы, которые не существуют у алгебраических кривых. К ним относятся *точки прекращения*, обладающие той особенностью, что окружность достаточно малого радиуса, проведенная из такой точки как из центра, пересекает кривую только в одной точке (например, кривая $y = x \ln x$, имеющая точку прекращения в начале координат). Сюда относятся также *угловые точки*, в которых прекращаются две ветви кривой, причем каждая из них имеет в этой точке свою касательную (например, кривая $y = x \arctg x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$, имеющая угловую точку в начале координат).

Трансцендентная кривая может иметь также *асимптотическую точку*, к которой неограниченно приближается ветвь кривой, делая

вокруг этой точки бесконечное количество оборотов (например, логарифмическая спираль $\rho = a^{\varphi}$, для которой асимптотической точкой является полюс).

Помимо указанных характерных точек, трансцендентные кривые могут обладать весьма своеобразными особенностями формы. Кривая может иметь, например, *пунктирную ветвь*, состоящую из бесконечного множества изолированных точек (например, кривая $y = \sqrt{x} \sin x$ имеет пунктирную ветвь, располагающуюся вдоль отрицательной части оси абсцисс и состоящую из множества изолированных точек с абсциссами $-\pi$, -2π , -3π и т. д.).

Собойным свойством трансцендентных кривых является и то, что для некоторых из них длина дуги, отсчитываемая от какой-либо точки кривой до ее асимптотической точки, является величиной конечной, у других же эта длина неограниченно велика.

Своеобразными являются кривые, в уравнения которых переменные входят в иррациональной степени, например, кривая $y = x^{\sqrt{2}}$. Если брать для $\sqrt{2}$ его приближенные значения с возрастающей степенью точности, то получится ряд алгебраических кривых, которые все более и более уподобляются кривой $y = x^{\sqrt{2}}$ никогда, однако, не воспроизводя ее точно. Лейбниц назвал такого рода кривые *интерсцендентными* *).

Сложность природы трансцендентных кривых затрудняет их изучение, и если в вопросах метрического характера (кривизна, квадратура, спрямление) многие из этих кривых изучены основательно, то в области исследования их проективных свойств сделано пока очень мало.

Нет также до сих пор удовлетворительной классификации трансцендентных кривых. Попытки определить основы теории трансцендентных кривых были мало состоятельны и сводились главным образом к тому, чтобы создать общую теорию, охватывающую своими предложениями одновременно и алгебраические и трансцендентные кривые.

Одна из таких попыток заключалась в следующем. Было замечено, что у подавляющего большинства известных трансцендентных кривых, так же как и у всех алгебраических кривых, *угловой коэффициент y' касательной в каждой точке кривой является корнем алгебраического уравнения, коэффициенты которого представляют собой полиномы от x и y* . Иными словами, дифференциальные уравнения подавляющего большинства известных в науке трансцендентных кривых являются уравнениями первого порядка а вида

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) y'^{n-r} = 0,$$

*) interscindo (лат.) — разрывать.

где $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ — полиномы без общих множителей. Указанное свойство углового коэффициента касательной присуще также, как уже сказано, всем алгебраическим кривым.

Это обстоятельство дало повод Д. Лориа объединить как все алгебраические кривые, так и почти все известные трансцендентные кривые в одну общую группу так называемых *паналгебраических кривых*, различающихся *степенью*, равной числу n , т. е. степени дифференциального уравнения кривой, и *рангом*, равным, числу ν — высшей степени полинома среди полиномов $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$.

Приводим эти характеристики для некоторых кривых:

Кривая	Ранг	Степень
Прямая	0	1
Кривые 2-го порядка	1	1
Кривые 3-го порядка	2	1
Логарифмическая спираль	1	1
Показательная кривая	1	1
Квадратриса	2	1
Кохлеоида	2	1
Трактриса	2	2
Цепная линия	2	2
Гиперболическая спираль	2	2
Циклоидальные кривые	2	2
Спираль Архимеда	4	2

Паналгебраические кривые обладают, как это показал Лориа*), многими свойствами, присущими алгебраическим кривым. Известные в теории алгебраических кривых понятия гессианы и поляры он обобщает своеобразно и на паналгебраические кривые.

Он показывает далее, что *точки касания касательных, проведенных из данной точки плоскости к паналгебраической кривой степени n и ранга ν , лежат на алгебраической кривой порядка $n + \nu$, для которой данная точка является n -кратной**).*

Это свойство дало Лориа повод наметить общую классификацию кривых по следующей схеме:

1) кривые, у которых точки касания прямых, проведенных из любой точки плоскости, лежат на алгебраической кривой, называются *кривыми первого класса* (паналгебраическими кривыми);

2) кривые, у которых указанные выше точки лежат на паналгебраической кривой, называются *кривыми второго класса*;

3) кривые, у которых эти точки лежат на кривой второго класса, называются *кривыми третьего класса* и т. д.

*) Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, 1911, В. II.

**) Предложение остается в силе и в том случае, когда число точек происхождения бесконечно.

Мы заметили, что свойство трансцендентных кривых, которое дало Лориа повод ввести понятие паналгебраических кривых, справедливо для подавляющего большинства известных трансцендентных кривых, но не для всех. Исключением являются, например, цепная линия равного сопротивления, клофоида и др. Наличие этих исключений в значительной степени умалает значение принципа Лориа, и создание общей теории кривых по-прежнему остается делом будущего.

§ 2. Спираль Архимеда

1. Свойства. *Спираль Архимеда* может быть определена как траектория точки, участвующей одновременно в двух равномерных движениях, одно из которых совершается вдоль прямой, а другое — по окружности.

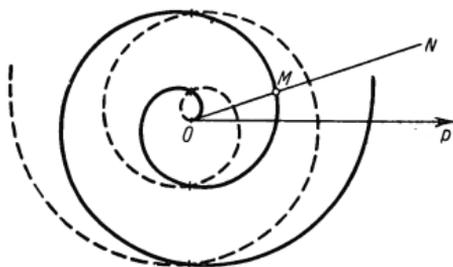


Рис. 131.

Предположим, что некоторая точка равномерно движется по прямой ON , а прямая ON равномерно вращается вокруг точки O за полюс системы, начальное положение OP прямой ON за полярную ось и считая, что в начальный момент движения точка M была в полюсе, замечаем, что расстояние OM , пройденное ею вдоль прямой ON и полярный угол φ возрастают, в силу равномерности движения, пропорционально времени и, следовательно, пропорциональны друг другу. Поэтому полярное уравнение спирали Архимеда запишется в виде

$$\rho = a\varphi, \quad (1)$$

где a — коэффициент пропорциональности. Переходя к декартовой системе, получим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Из уравнения (1) следует, что двум одинаковым по абсолютной величине, но противоположным по знаку значениям φ соответствуют также одинаковые по модулю, но противоположные по знаку значения ρ . В силу этого обстоятельства кривая будет состоять из двух ветвей, одна из которых раскручивается против хода часовой стрелки и соответствует положительным значениям φ , другая — по ходу часовой стрелки и соответствует отрицательным значениям φ . В целом кривая симметрична относительно перпендикуляра к полярной оси, на котором лежат точки пересечения двух ее ветвей (двойные точки спирали).

Расстояние l между двумя последовательными витками n -м и $n+1$ -м определится по формуле $l = a(\varphi + 2\pi) - a\varphi = 2a\pi$ и является, как видно, величиной постоянной. В силу этой особенности в расположении витков реальный образ спирали Архимеда можно видеть, например, наблюдая туго завернутый рулон бумаги с его торцевой стороны.

Определяя угол μ между радиусом-вектором произвольной точки кривой и касательной к ней в этой точке, получим $\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a\varphi}{a} = \varphi$ и, следовательно, $\mu = \operatorname{arctg} \varphi$. Если $\varphi \rightarrow \infty$, то $\mu \rightarrow \frac{\pi}{2}$, т. е. по мере развертывания спирали она стремится стать нормальной к своим радиусам-векторам. Нужно обратить внимание и на то обстоятельство, что величина угла μ не зависит от параметра a , и значит, все спирали Архимеда пересекают радиусы-векторы, соответствующие одному и тому же значению угла φ , под одним и тем же углом.

Определяя полярную поднормаль S_n , получим $S_n = \rho' = a$, т. е. полярная поднормаль для всех точек заданной спирали Архимеда является величиной постоянной, равной параметру этой спирали. Из этого свойства следует, что концы всех поднормалей будут лежать на окружности радиуса a с центром в начале. Отсюда вытекает простой способ построения касательной в любой точке заданной спирали.

Площадь сектора, ограниченного дугой спирали Архимеда и двумя радиусами-векторами ρ_1 и ρ_2 , соответствующими углам φ_1 и φ_2 , определится по формуле

$$U = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 d\varphi = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{6a}. \quad (2)$$

Если $\varphi_1 = 0$ и, следовательно, $\rho_1 = 0$, то $U = \frac{1}{6a} \rho^3$.

Из формулы (2) следует, что площадь, ограниченная полярной осью и n -м витком спирали, определится равенством

$$U_n = \frac{(a \cdot 2\pi n)^3 - [a \cdot 2\pi(n-1)]^3}{6a} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 [n^3 - (n-1)^3]. \quad (3)$$

Аналогично получим:

$$U_{n+1} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 [(n+1)^3 - n^3]. \quad (4)$$

Из равенств (3) и (4) следует, что площадь, ограниченная n -м и $n+1$ -м витками, равняется

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 [(n+1)^3 - n^3 - n^3 + (n-1)^3] = 8\pi^3 a^2 n,$$

откуда следует, что площади, заключенные между последовательными витками спирали Архимеда, растут в арифметической прогрессии, разность которой равняется $8\pi^3 a^2$.

Длина дуги спирали Архимеда между точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ определится по формуле

$$\begin{aligned} S &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = \\ &= \frac{a}{2} [\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2})]_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \end{aligned}$$

Отметим еще некоторые свойства исследуемой кривой.

Спираль Архимеда является ортогональной проекцией на плоскость xOy линии пересечения винтовой поверхности $z = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ с поверхностью конуса $x^2 + y^2 = a^2 z^2$. Действительно, исключая z из уравнений винтовой поверхности и поверхности конуса, получим $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; переходя к полярным координатам, будем иметь $\rho = ak\varphi$ — уравнение спирали Архимеда.

Спираль Архимеда есть подэра эвольвенты окружности относительно центра основной окружности (см. стр. 254).

Спираль Архимеда есть частный случай обобщенной эвольвенты окружности (см. стр. 255).

Ближайшим обобщением спирали Архимеда является кривая $\rho = a\varphi + l$, представляющая собой конхоиду этой спирали и называемая *неоидой*. Она находит применение в конструкции прядильной машины.

2. Спрямление окружности с помощью спирали Архимеда.

Как уже было замечено выше, угол μ между радиусом-вектором произвольной точки спирали Архимеда и касательной к ней в этой точке определяется равенством $\operatorname{tg} \mu = \varphi$, откуда следует, что $\operatorname{tg} \mu_A = 2\pi$ и, значит, $OC = OA \operatorname{tg} \mu_A = OA \cdot 2\pi$ (рис. 132). Таким образом, отрезок OC выражает длину окружности с радиусом, равным OA . Зная отрезки OC и OA , выражающие длину окружности и радиус круга, нетрудно построить, располагая только циркулем и линейкой, треугольник, равновеликий кругу и, преобразовав этот треугольник в равновеликий ему квадрат, осуществить квадратуру круга.

Спираль Архимеда может служить также в качестве линии, позволяющей разделить заданный угол на любое число равных частей. В самом деле, так как изменение радиуса-вектора спирали пропорционально изменению угла, то для деления угла BAC (рис. 133) на n равных частей достаточно разделить радиус-вектор AB на n равных частей $AN_1, N_1N_2, \dots, N_{n-1}B$ и сделать радиусами, равными $AN_1, AN_2, \dots, AN_{n-1}$, засечки M_1, M_2, \dots, M_{n-1} на дуге

спирали. Проведя радиусы-векторы $AM_1, AM_2, \dots, AM_{n-1}$, мы разделим угол BAC на n равных частей. В некоторых готвальнях старого образца в состав принадлежностей входила металлическая пла-

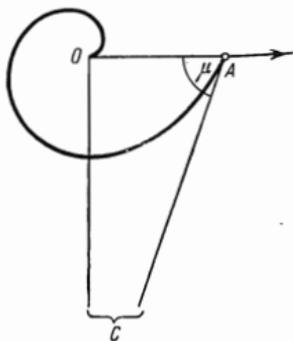


Рис. 132.

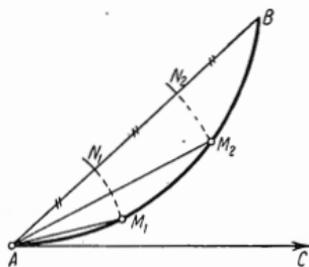


Рис. 133.

стинка с тщательно выгравированной на ней спиралью Архимеда в качестве прибора для деления угла на равные части.

3. Применение в технике. В области техники спираль Архимеда находит, в частности, применение в так называемых кулачковых механизмах, которые представляют собой насаженную на ось шайбу; профиль которой очерчен по некоторой кривой. Вращательное движение этой шайбы преобразуется в возвратно-поступательное движение стержня MN , скользящего своим концом по ее профилю (рис. 134).

Закон, по которому движется стержень MN , определяется видом кривой профиля эксцентрика. В некоторых механизмах требуется, чтобы равномерное вращение эксцентрика вызывало равномерное же движение стержня, т. е. требуется, чтобы поступательное перемещение

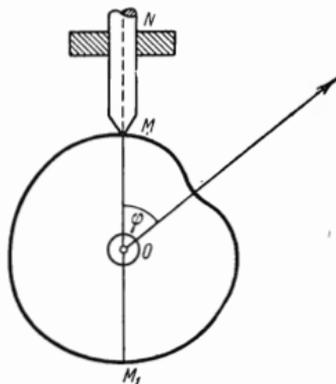


Рис. 134.

OM точки M было пропорционально углу поворота эксцентрика. Обеспечить это требование можно, очертив профиль эксцентрика по спирали Архимеда. Возвратно-поступательное движение стержня MN достигается тем, что эксцентрик очерчивается двумя дугами спирали. Профиль сердцевидного эксцентрика, получаемого при этом, представляет собой кривую постоянной ширины. В самом деле, $OM = a\varphi$,

$OM_1 = a(\pi - \varphi)$, откуда $MM_1 = a\pi = \text{const.}$ Технически это свойство используют, связывая с профилем эксцентрика не один, а два

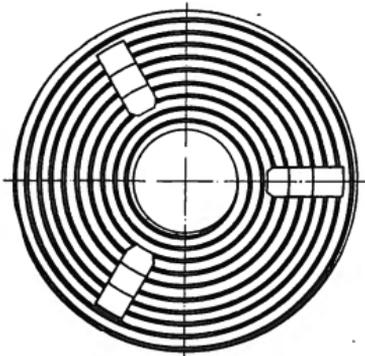


Рис. 135.

стержня, касающиеся его в диаметрально противоположных точках M и M_1 .

В качестве второго объекта применения спирали Архимеда в технике можно привести самоцентрирующий патрон, направляющие канавки которого выполнены по спирали Архимеда (рис. 135). При одном повороте диска этого патрона кулачки перемещаются на величину радиального расстояния смежных канавок.

4. Историческая справка. Изобретение спирали Архимеда приписывается по некоторым источникам (Папп) Конону Самосскому, однако свойства ее были изучены Архимедом, который не только определил способ построения касательной к этой кривой, но и выполнил ее квадратуру. Он показал также, что спираль может быть использована для квадратуры круга. Спрямление спирали Архимеда было выполнено лишь в 17 веке Кавальери, Робервалем, Ферма и Паскалем. Стереометрический способ образования спирали приписывается Паппу.

§ 3. Алгебраические спирали

Рассмотренная нами в предыдущем параграфе спираль Архимеда является одним из членов семейства так называемых *алгебраических спиралей*. Под этим именем в общем смысле понимают линии, полярные уравнения $f(\rho, \varphi) = 0$ которых являются алгебраическими относительно ρ и φ .

Родство этих линий определяется и общим стереометрическим способом их образования, а именно *все они являются ортогональными проекциями на плоскость xOy линии пересечения винтовой поверхности $z = k \arctg \frac{y}{x}$ с поверхностью вращения $f(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$, где f — алгебраическая функция.* Действительно, проектируя линию пересечения указанных поверхностей на плоскость xOy , получим кривую $f(k \arctg \frac{y}{x}, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$ или, в полярной системе, $f(k\varphi, \rho) = 0$, являющуюся алгебраической спиралью.

Мы рассмотрим в этом параграфе алгебраические спирали, обладающие наиболее простыми уравнениями.

1. **Гиперболическая спираль** $\rho = \frac{a}{\varphi}$. Из уравнения видно, что двум одинаковым по модулю, но противоположным по знаку значениям φ соответствуют два также одинаковые по модулю, но противоположные по знаку значения радиуса-вектора ρ , т. е. кривая будет состоять из двух ветвей, симметрично располагающихся относительно перпендикуляра к полярной оси, восстановленного в полюсе*).

Так как при $\varphi \rightarrow \infty$ $\rho \rightarrow 0$, то полюс является асимптотической точкой спирали. Далее, $MP = \rho \sin \varphi = \frac{a \sin \varphi}{\varphi}$, следовательно, $\lim_{\varphi \rightarrow 0} MP = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{a \sin \varphi}{\varphi} = a$; поэтому прямая, параллельная полярной оси и отстоящая от нее на расстоянии, равном a , является асимптотой гиперболической спирали (рис. 136). Таким образом, при

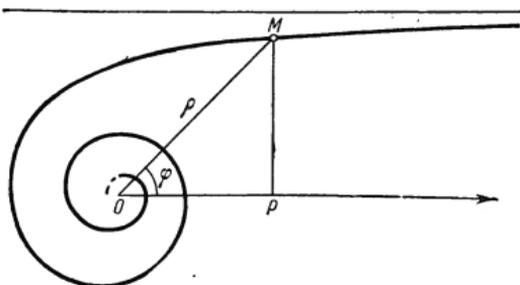


Рис. 136.

возрастании φ от 0 до ∞ точка M пробегает асимптотический участок кривой и, пересекая полярную ось, устремляется к полюсу, делая вокруг него бесчисленное множество витков, расстояние между которыми быстро убывает.

Если одним из характерных признаков спирали Архимеда было постоянство величины ее поднормали, то аналогичным свойством гиперболической спирали является *постоянство величины ее подкасательных*, ибо $S_t = \frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{a^2}{\varphi^3} : \left(-\frac{a}{\varphi^2}\right) = -a$. Из этого свойства следует, что концы подкасательных для всех точек заданной гиперболической спирали будут лежать на окружности круга с радиусом, равным a , и центром в полюсе. Вытекающий отсюда простой способ построения касательной в заданной точке гиперболической спирали очевиден.

Определяя площадь сектора, ограниченного дугой гиперболической спирали и двумя радиусами-векторами ρ_1 и ρ_2 , соответ-

*) На рис. 136 изображена только одна ветвь.

связующими углами φ_1 и φ_2 , будем иметь:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\varphi^2} = \frac{a^2}{2} (\rho_1 - \rho_2).$$

Длина дуги гиперболической спирали между точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} S &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{1 + \varphi^2}}{\varphi^2} d\varphi = \\ &= a \left[-\frac{\sqrt{1 + \varphi^2}}{\varphi} + \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}) \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \end{aligned}$$

Стереометрически гиперболическая спираль может быть определена как проекция на плоскость xOy винтовой линии из точки, лежащей на оси цилиндра, несущего эту винтовую линию.

Согласно общему свойству алгебраических спиралей она может быть определена также как проекция на плоскость xOy линии пересечения винтовой поверхности $z = \arctg \frac{y}{x}$ и поверхности вращения $z\sqrt{x^2 + y^2} = c$ *).

Сопоставляя уравнения спирали Архимеда и гиперболической спирали, замечаем, что любая из них может быть получена из другой преобразованием инверсии относительно полюса.

2. Конхоида гиперболической спирали. Кривая эта является ближайшим обобщением гиперболической спирали и получается в результате увеличения радиусов-векторов последней на величину l ($l > 0$). Следовательно, она выражается уравнением $\rho = \frac{a}{\varphi} + l$ (рис. 137).

В качестве асимптоты она имеет ту же прямую, что и гиперболическая спираль, так как по-прежнему $\lim_{\varphi \rightarrow 0} MP = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \sin \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{a}{\varphi} + l \right) \sin \varphi = a$. Координаты точек перегиба для кривой, заданной в полярной системе, являются, как известно, корнями нечетной кратности уравнения $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$. Применительно к рассматриваемой кривой это уравнение запишется в виде $\varphi(l\varphi + a)^2 - 2al = 0$. При $\varphi = 0$ левая часть его отрицательна; при возрастании φ она будет возрастать и сможет принять значение, равное нулю, только один раз; при отрицательных значениях φ она всегда отри-

*) Поверхность образована вращением равнобедренной гиперболы вокруг ее асимптоты.

цательна; следовательно, кривая будет иметь одну точку перегиба при $\varphi = \varphi_1$, где $0 < \varphi_1 < 1$.

При возрастании φ от 0 до $+\infty$ $\rho \rightarrow l$, т. е. кривая, закручиваясь против хода часовой стрелки, асимптотически приближается

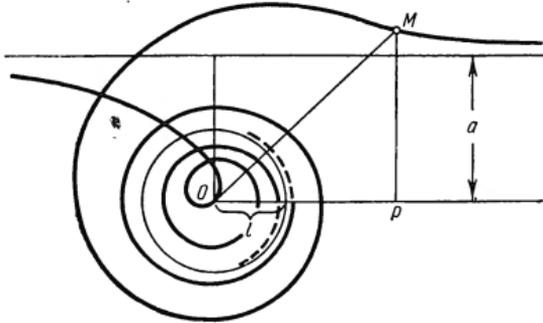


Рис. 137.

к окружности $\rho = l$. При изменении φ от 0 до $-\infty$ ρ изменяется от $-\infty$, при $\varphi = -\frac{l}{a}$ обращается в нуль, после чего будет откладываться в противоположном направлении. Поэтому вторая ветвь кривой пересечет сама себя и далее будет асимптотически приближаться к той же окружности, что и первая ветвь, но уже с внутренней стороны.

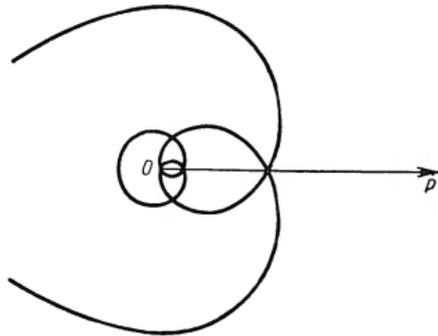


Рис. 138.

3. Спираль Галилея $\rho = a\varphi^3 - l$ ($l \geq 0$). Общее уравнение этой кривой имеет вид $\rho = c_1\varphi^3 + c_2\varphi + c_3$, однако надлежащим поворотом полярной оси его всегда можно привести к виду $\rho = a\varphi^3 - l$. Кривая симметрична относительно полярной оси, имеет двойную точку в полюсе системы с касательными, образующими с полярной осью углы, равные $\pm \sqrt{\frac{l}{a}}$. Она имеет также бесконечно много двойных точек на полярной оси, для которых $\rho = ak^2\pi^2 - l$, где $k = 1, 2, 3, \dots$ (рис. 138).

При $l = 0$ получаем спираль $\rho = a\varphi^3$, которая в полюсе имеет острие с касательными, совпавшими с полярной осью (рис. 139).

Спираль Галилея вошла в историю математики в 17 столетии в связи с постановкой проблемы определения формы линии, по которой должна двигаться свободно падающая в области экватора

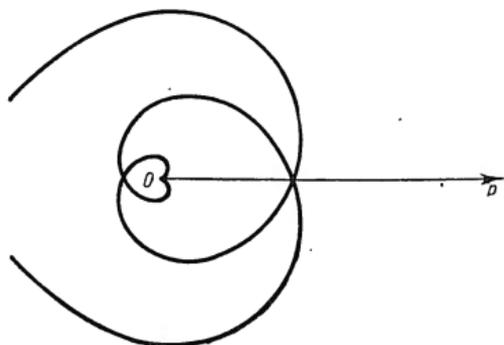


Рис. 139.

точка, если бы она не обладала начальной скоростью, сообщаемой ей вращением земного шара.

4. Спираль $\rho = \frac{a}{\varphi^2}$. Эта кривая получается, если спираль Галилея подвергнуть инверсии $\rho\rho_1 = a^2$; она состоит из двух бесконечных ветвей, напоминающих ветви параболы, и в начале имеет двойную асимптотическую точку (рис. 140).

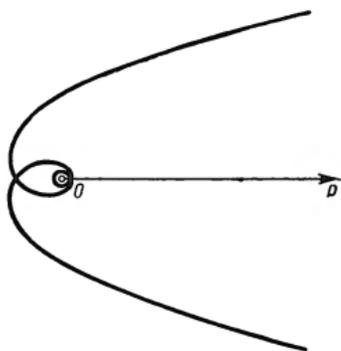


Рис. 140.

5. Спираль Ферма $\rho = a\sqrt{\varphi}$. Так как каждому положительному значению φ соответствуют два значения ρ , противоположные по знаку, то кривая будет обладать центральной симметрией. Ее можно считать состоящей из двух ветвей, одна из которых соответствует положительным значениям ρ , другая — отрицательным. Обе эти ветви начинаются в полюсе, где кривая имеет точку перегиба. И та и другая

ветви, делая бесчисленное количество оборотов вокруг полюса, удаляются в бесконечность. Обозначив расстояние между двумя соседними витками через d , получим

$$d = a(\sqrt{\varphi + 2\pi} - \sqrt{\varphi})$$

и, следовательно, $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} d = a \lim_{\varphi \rightarrow \infty} (\sqrt{\varphi + 2\pi} - \sqrt{\varphi}) = 0$. Последнее равенство показывает, что по мере удаления от полюса расстояние между витками неограниченно убывает. Эта любопытная особенность в расположении витков спирали Ферма отличает ее от других спиралей, например от спирали Архимеда, у которой расстояние между соседними витками было постоянным, или от логарифмической спирали, у которой расстояние это неограниченно возрастает (рис. 141).

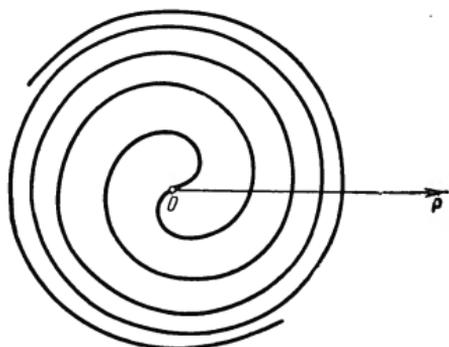


Рис. 141.

6. Параболическая спираль

$\rho = a\sqrt{\varphi + l}$ ($l > 0$).

Параболическая спираль получается из спирали Ферма путем удлинения всех радиусов последней на величину l . Она является, следовательно, конхондой спирали Ферма. Кривая состоит из двух ветвей $\rho = +a\sqrt{\varphi + l}$ и $\rho = -a\sqrt{\varphi + l}$. Вторая из этих ветвей

образует сама с собой и с первой ветвью бесчисленное множество двойных точек; она имеет также одну точку перегиба (рис. 142).

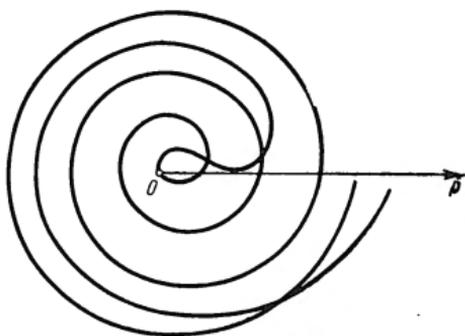


Рис. 142.

образует сама с собой и с первой ветвью бесчисленное множество двойных точек; она имеет также одну точку перегиба (рис. 142).

В истории математики эта кривая замечательна тем, что на ней именно иллюстрировал Я. Бернулли применение лейбницевского метода исчисления бесконечно малых к исследованию свойств кривых.

7. Спираль $\rho = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$ («жезл»). Здесь снова каждому значению φ соответствуют два значения ρ — положительное и отрицательное. Кривая состоит из двух ветвей, каждая из которых асимптотически приближается к полюсу (рис. 143).

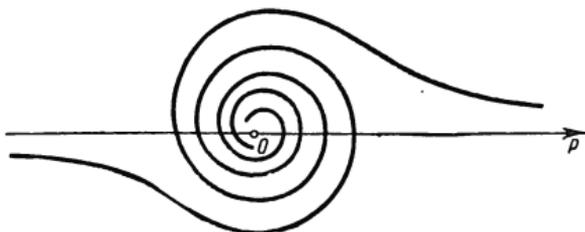


Рис. 143.

При $\varphi = 0$ $\rho = \pm \infty$, и так как $\lim_{\varphi \rightarrow 0} S_t = \lim_{\varphi \rightarrow 0} (-2a\varphi^{\frac{1}{2}}) = 0$, то полярная ось служит асимптотой. Точки

$$\left(\frac{1}{2}, a\sqrt{2}\right) \text{ и } \left(-\frac{1}{2}, -a\sqrt{2}\right)$$

являются точками перегиба.

Жезл есть геометрическое место концов поднормалей спирали Ферма; с другой стороны, спираль Ферма есть геометрическое место концов подкасательных жезла. В справедливости этих утверждений читатель легко может убедиться.

§ 4. Логарифмическая спираль

1. Свойства. *Логарифмической спиралью* называется кривая, выражаемая в полярной системе уравнением

$$\rho = a^{\varphi},$$

где a — произвольное положительное число.

Непосредственно из уравнения следует, что если $a > 1$, то при $\varphi = 0$ $\rho = 1$, а при $\varphi \rightarrow +\infty$ ρ неограниченно возрастает, и спираль развертывается против хода часовой стрелки; при $\varphi \rightarrow -\infty$ ρ неограниченно убывает и спираль закручивается по ходу часовой стрелки, делая около полюса бесконечное количество оборотов, стремясь к нему как к своей асимптотической точке. Расстояния между витками логарифмической спирали возрастают по закону геометрической прогрессии (рис. 144). Если постоянная $a < 1$, спираль закручивается вокруг полюса против хода часовой стрелки.

Если логарифмическая спираль задана уравнением $\rho = Ca^\varphi$, то, повернув полярную ось на некоторый угол, всегда можно коэффициент C привести к единице; действительно, после поворота оси на произвольный угол φ_1 будем иметь $\rho = Ca^{\varphi+\varphi_1}$, или $\rho = Ca^{\varphi_1}a^\varphi$. Если теперь положить $\varphi_1 = -\frac{\ln C}{\ln a}$, то уравнение спирали примет простейший вид $\rho = a^\varphi$, который мы и будем иметь в виду в дальнейшем.

Покажем, что угол μ , составляемый касательной в произвольной точке логарифмической спирали с радиусом-вектором точки касания зависит лишь от параметра a и, следовательно, для каждой спирали является величиной постоянной.

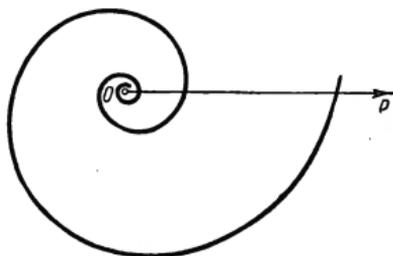


Рис. 144.

Действительно, как известно, $\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'}$; в нашем случае

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a^\varphi}{a^\varphi \ln a} = \frac{1}{\ln a}. \quad (1)$$

Таким образом, каждая логарифмическая спираль пересекает все свои радиусы-векторы под одним и тем же углом. В силу этого замечательного свойства логарифмическую спираль называют также равноугольной. Из всех кривых подобным свойством обладает, кроме логарифмической спирали, только окружность, которая пересекает свои радиусы-векторы под прямым углом.

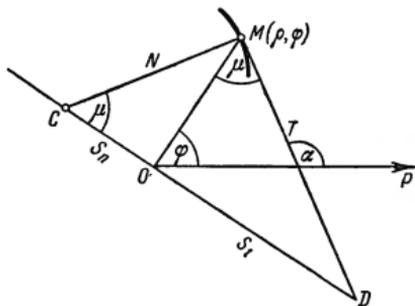


Рис. 145.

Заметим, что так как величина угла μ зависит от величины параметра a , то всегда можно определить этот параметр так, чтобы соответствующая спираль пересекала свои радиусы-векторы под наперед заданным углом μ_1 . Для определения нужного значения параметра a достаточно решить уравнение $\operatorname{tg} \mu_1 = \frac{1}{\ln a}$, откуда $a = e^{\operatorname{ctg} \mu_1}$. Из этой формулы следует, в частности, что спираль $\rho = e^\varphi$ пересекает свои радиусы-векторы под углом в 45° .

Получим, далее, формулы для определения длины полярной касательной MD , полярной нормали MC , подка-

сательной OD и поднормали OC для логарифмической спирали (рис. 145):

$$\left. \begin{aligned} S_t = OD &= \frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{a^{2\varphi}}{a^\varphi \ln a} = \frac{1}{\ln a} \rho, \\ S_n = OC &= \rho' = a^\varphi \ln a = \ln a \cdot \rho, \\ T = MD &= \sqrt{\rho^2 + S_t^2} = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^2}{\ln^2 a}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\ln^2 a}} \rho, \\ N = MC &= \sqrt{\rho^2 + S_n^2} = \sqrt{\rho^2 + \ln^2 a \cdot \rho^2} = \sqrt{1 + \ln^2 a} \rho. \end{aligned} \right\} (2)$$

Таким образом, *полярная касательная, полярная нормаль, подкасательная и поднормаль пропорциональны радиусу-вектору точки касания.*

Из полученных формул следует также, что для спирали $\rho = e^\varphi$ полярная касательная равна полярной нормали, а подкасательная — поднормали.

Найдем радиус кривизны спирали

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} = \frac{(a^{2\varphi} + a^{2\varphi} \ln^2 a)^{\frac{3}{2}}}{a^{2\varphi} + 2a^{2\varphi} \ln^2 a - a^{2\varphi} \ln^2 a} = \rho \sqrt{1 + \ln^2 a}; \quad (3)$$

таким образом, *радиус кривизны в произвольной точке логарифмической спирали пропорционален радиусу-вектору этой точки.*

Сопоставляя равенства (2) и (3), приходим к заключению, что *радиус кривизны в произвольной точке логарифмической спирали равен полярной нормали для этой точки.* На основе этого свойства можно простым построением найти центр кривизны в произвольно заданной точке логарифмической спирали. Проводим для этой цели касательную MD в заданной точке, затем нормаль MC ; тогда точка C и будет искомым центром (рис. 145).

Определим длину дуги логарифмической спирали между точками (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2) . Имеем:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^{2\varphi} + a^{2\varphi} \ln^2 a} d\varphi = \\ &= \frac{\sqrt{1 + \ln^2 a}}{\ln a} (a^{\varphi_2} - a^{\varphi_1}) = \frac{\sqrt{1 + \ln^2 a}}{\ln a} (\rho_2 - \rho_1). \end{aligned}$$

Записав полученную формулу в виде

$$S = \rho_2 \frac{\sqrt{1 + \ln^2 a}}{\ln a} - \rho_1 \frac{\sqrt{1 + \ln^2 a}}{\ln a} \quad (4)$$

и сопоставляя ее с полученной выше формулой для определения длины T полярной касательной, получим $S = T_2 - T_1$, т. е. *длина*

дуги логарифмической спирали равняется разности полярных касательных, проведенных в конце и начале дуги.

Если в формуле (4) положить $\rho_1 = 0$, то, обозначая ρ_2 через ρ , получим:

$$S = \rho \frac{\sqrt{1 + \ln^2 a}}{\ln a} = T; \quad (5)$$

таким образом, длина дуги логарифмической спирали от полюса до произвольной точки ее равна длине полярной касательной, проведенной к спирали в этой точке.

Это свойство логарифмической спирали, открытое Торичелли, дало ему возможность осуществить спрямление спирали графическим путем. Последнее было замечательным достижением для той эпохи не только само по себе, но еще и потому, что полюс является асимптотической точкой для спирали.

Отметим еще одно важное свойство логарифмической спирали, а именно, длина дуги логарифмической спирали, отсчитываемая от полюса до некоторой точки, пропорциональна радиусу-вектору этой точки, как это следует из (5).

Натуральное уравнение логарифмической спирали имеет вид $S = kR$, где $k = \frac{1}{\ln a}$, как это следует из равенств (3) и (5). Таким образом, длина дуги логарифмической спирали, отсчитываемая от полюса, пропорциональна радиусу кривизны конца этой дуги.

По виду натурального уравнения заключаем также (см. стр. 251), что если логарифмическая спираль катится по прямой MD (рис. 145), то геометрическое место центров кривизны, соответствующих точкам касания, является прямой линией, проходящей через полюс (рис. 145 — прямая CD). Заметим еще, что так как при указанном качении спирали угол $MDO = \frac{\pi}{2} - \mu$ не меняет своей величины, то, очевидно, и полюс спирали перемещается также по прямой CD .

Среди многочисленных и оригинальных свойств логарифмической спирали особый интерес представляет ее способность не изменять своей природы при различного рода преобразованиях, к которым так чувствительны другие кривые. Так, эволюта логарифмической спирали, ее подэра, катакаустика снова являются логарифмическими спиралями. Преобразование подобия, инверсия логарифмической спирали дают опять-таки логарифмическую спираль. К доказательству некоторых фактов, относящихся к этому свойству логарифмической спирали, мы и хотим обратиться.

Найдем эволюту логарифмической спирали $\rho = a^\varphi$. Пусть ρ_1 и φ_1 — полярные координаты центра кривизны, соответствующего произвольной точке (ρ, φ) спирали. Тогда $\rho_1 = S_\kappa = \rho \ln a$, $\varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}$

(рис. 145); присоединяя к этим уравнениям уравнение $\rho = a^\varphi$ самой спирали и исключая ρ и φ , получим уравнение эволюты в виде

$\frac{\rho_1}{\ln a} = a^{\varphi_1 - \frac{\pi}{2}}$, или $\rho_1 = C a^{\varphi_1}$, где $C = a^{-\frac{\pi}{2}} \ln a$. Полученное уравнение показывает, что эволютой логарифмической спирали является логарифмическая спираль, конгруэнтная данной, но повернутая относительно нее на некоторый угол. Если взять спираль, пара-

метр a которой удовлетворяет уравнению $a^{-\frac{\pi}{2}} \ln a = 1$, то такая спираль будет служить сама для себя эволютой.

Посмотрим, далее, как ведет себя спираль $\rho = a^\varphi$ по отношению к преобразованию подобия. Пусть все ее радиусы-векторы умножены на некоторый множитель C ; получится кривая с уравнением $\rho = C a^\varphi$, т. е. снова логарифмическая спираль, конгруэнтная данной, но повернутая относительно нее на угол $\varphi_1 = -\frac{\ln C}{\ln a}$.

Неизменяемость спирали при преобразовании подобия является основой любопытного явления, состоящего в том, что если лист бумаги с изображенной на нем логарифмической спиралью быстро поворачивать вокруг полюса по ходу часовой стрелки

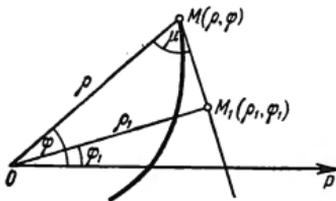


Рис. 146.

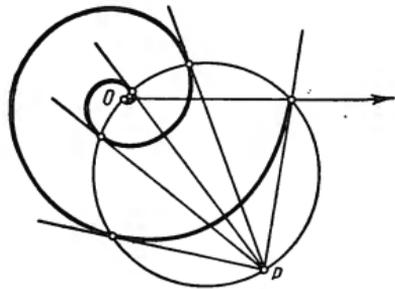


Рис. 147.

и против, то можно наблюдать кажущееся увеличение и уменьшение спирали.

Покажем теперь, что и инверсия с центром в полюсе вызывает только поворот логарифмической спирали на некоторый угол, но не изменяет ее формы. В самом деле, пусть $\rho \rho_1 = k^2$, $\varphi_1 = -\varphi$; тогда уравнение $\rho = a^\varphi$ перейдет в уравнение $\rho_1 = k^2 a^{-\varphi_1}$, которое выражает ту же спираль, но повернутую на угол, равный $-\frac{\ln k^2}{\ln a}$.

Подэра логарифмической спирали относительно полюса является также логарифмической спиралью. Действительно, пусть $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ — точка подэры, соответствующая точке $M(\rho, \varphi)$ данной спирали (рис. 146). Тогда $\rho = \frac{\rho_1}{\sin \mu}$ и $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 - \mu$. Подставляя

эти выражения ρ и φ в уравнение спирали, получим $\frac{\rho_1}{\sin \mu} = a^{\frac{\pi}{2} + \varphi - \mu}$,

или $\rho_1 = \sin \mu \cdot a^{\frac{\pi}{2} - \mu} a^{\varphi_1}$, или $\rho_1 = \text{const} \cdot a^{\varphi_1}$, так как $\mu = \text{const}$.

Покажем, что *точки касания касательных к логарифмической спирали, проходящих через некоторую точку P плоскости, лежат на окружности, проходящей через точку P и через полюс спирали* (рис. 147).

В справедливости этого легко убедиться, приняв во внимание, что углы, составляемые каждой касательной к спирали с радиусами-векторами точек касания, имеют для данной спирали одну и ту же величину. Отсюда следует, что вершины этих углов должны лежать на окружности круга, проходящего через данную точку P и через полюс спирали, так как при этом условии, опираясь на одну и ту же дугу окружности, эти углы будут иметь одинаковую меру. Что касается размеров этой окружности, то можно показать аналитически, что диаметр ее равен нормали для той точки логарифмической спирали, радиус-вектор которой равен OP .

Заметим в заключение, что логарифмическая спираль находится в интересном соотношении с локсодромой — кривой на поверхности шара, которая пересекает все меридианы под одним и тем же углом и определяет, таким образом, наиболее удобную ориентацию движения судна в открытом океане*). При стереографической проекции полушария меридианы переходят в радиально расположенные прямые, а так как в этой проекции равные углы переходят в равные, то локсодрома спроектируется в линию, которая будет пересекать радиальные прямые под одним и тем же углом, т. е. в логарифмическую спираль.

2. Построение. Построение логарифмической спирали может быть осуществлено по точкам и с помощью специального прибора.

Построение по точкам. Проводим из полюса лучи под углом, равным, например, $\frac{\pi}{8}$ друг к другу (рис. 148). Тогда значения радиусов-векторов нашей спирали, которые придется откладывать на этих лучах, начиная от радиуса-вектора $OA = 1$, направленного по полярной оси, будут $a^{\frac{\pi}{8}}$, $(a^{\frac{\pi}{8}})^2$, $(a^{\frac{\pi}{8}})^3$, ... Выразив число $a^{\frac{\pi}{8}}$ соответствующим масштабу отрезком OB , откладываем этот отрезок на луче ON и получаем точку B нашей спирали. Величину $(a^{\frac{\pi}{8}})^2 = OB^2$ радиуса-вектора, который нужно отложить на следующем луче, найдем графическим путем, построив треугольник OBC , подобный треугольнику OAB , в результате чего будем иметь $OB^2 = OC$; величину радиуса-вектора, который нужно отложить на следующем луче, получим, построив треугольник ODC , подобный треугольнику OAB , и т. д.

*) В силу постоянства угла между курсом корабля и магнитной стрелкой.

Для определения точек спирали, расположенных по ходу часовой стрелки от точки A , придется строить систему уменьшающихся подобных треугольников, как это показано на рис. 148.

Прибор для вычерчивания логарифмической спирали состоит из стержня AB , к одному из концов которого прикрепляется рама в виде окружности (рис. 149). Один из диаметров этой окружности является осью диска с заостренными краями, плоскость которого перпендикулярна к плоскости рамы. Другим концом стержень AB может свободно проходить через шайбу O , а эта последняя может свободно вращаться вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка, и закрепленной на нем в некоторой точке. Если взять рукой за раму и перемещать ее, прижимая к плоскости чертежа, то диск, вращаясь, будет оставлять на бумаге след в виде линии, составляющей с направлением стержня один и тот же угол. Так реализуется

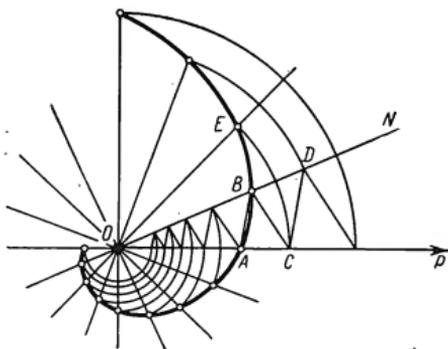


Рис. 148.

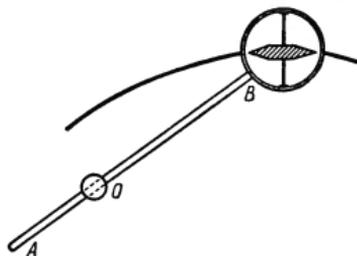


Рис. 149.

основное свойство логарифмической спирали. Если в приборе обеспечить возможность изменять угол между осью диска и стержнем, то можно вычерчивать спирали $\rho = a^{\varphi}$, соответствующие различным значениям a .

3. Логарифмическая спираль в технике и в природе. Применения логарифмической спирали в технике основаны на свойстве этой кривой пересекать все свои радиусы-векторы под одним и тем же углом. Так, например, вращающиеся ножи в различных режущих машинах имеют профиль, очерченный по дуге спирали, благодаря чему угол резания, т. е. угол θ между лезвием ножа и направлением скорости его вращения, остается равным $\frac{\pi}{2} - \mu$ и, следовательно, неизменным в силу постоянства угла μ . В зависимости от обрабатываемого материала требуется тот или иной угол резания, что обеспечивается выбором параметра соответствующей спирали. На рис. 150 представлен нож соломорезки.

В гидротехнике по логарифмической спирали закручивают трубу, подводющую ток воды к лопастям турбинного колеса. Постоянство угла μ обеспечивает здесь то, что потери энергии на изменение направления течения в трубе оказываются минимальными, и следовательно, напор воды используется с максимальной производительностью.

В теории механизмов логарифмическая спираль применяется при проектировании зубчатых колес с переменным передаточным числом. Суть дела здесь такова: пусть два квадрата расположены так, как показано на рис. 151; через середину и конец каждой стороны этих квадратов проведены дуги одинаковых логарифмических спиралей с полюсами в центрах квадратов, одна из которых закручивается по ходу часовой стрелки, а другая — против; в точке P спирали касаются между собой. Нетрудно показать, что при вращении квадратов вокруг их центров дуги спиралей будут катиться одна по другой без скольжения. Действительно,

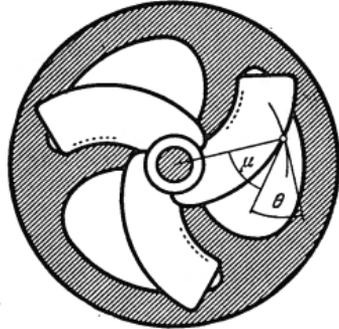


Рис. 150.

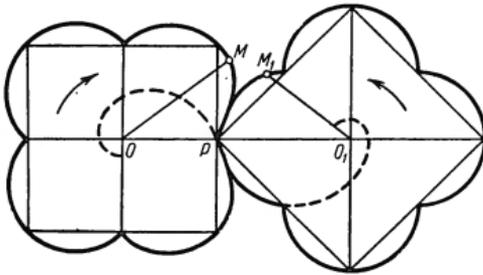


Рис. 151.

пусть M и M_1 — две точки спиралей, взятые так, что $OM + O_1M_1 = OP + O_1P$, или в иных обозначениях

$$\rho' + \rho'_1 = \rho + \rho_1. \quad (1)$$

Очевидно, для качения без скольжения необходимо, чтобы

$$\overline{PM} = \overline{PM}_1; \quad (2)$$

но $\overline{PM} = \frac{\sqrt{1 + \ln^2 a}}{\ln a} (\rho' - \rho)$, а $\overline{PM}_1 = \frac{\sqrt{1 + \ln^2 a}}{\ln a} (\rho_1 - \rho'_1)$, из равенства же (1) следует $\rho' - \rho = \rho_1 - \rho'_1$, и, значит, равенство (2) действительно имеет место. Передаточное число, т. е. отношение угло-

вых скоростей логарифмических колес, будет непрерывно меняться, достигая в течение каждого оборота колеса четыре раза максимального значения и четыре раза минимального.

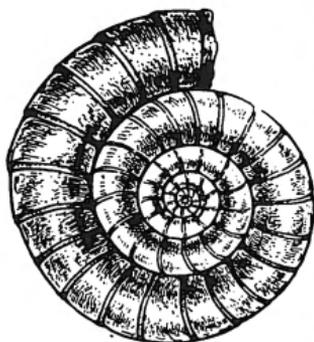


Рис. 152.

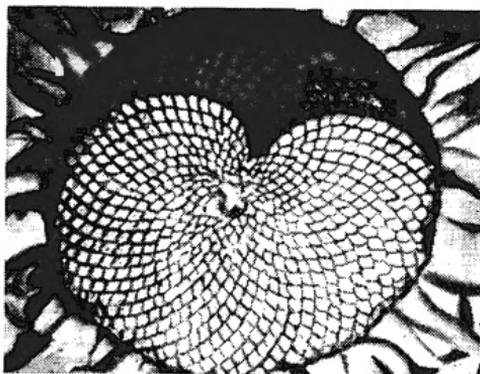


Рис. 153.

Вприроде по логарифмической спирали очерчены некоторые раковины (например, *haliotis splendens*, рис. 152). В подсолнухе семечки расположены по характерным дугам, близким, как показывают соответ-

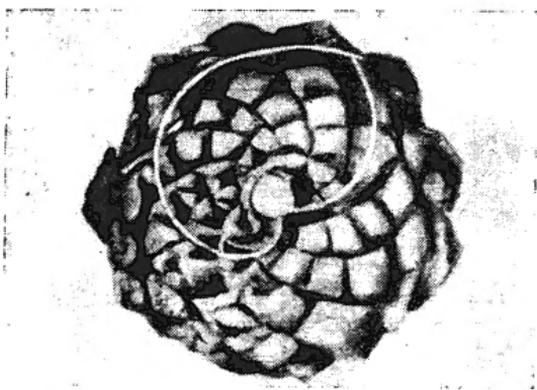


Рис. 154.

ствующие измерения, к дугам логарифмической спирали. В связи с подобными фактами некоторые исследователи считают логарифмическую спираль кривой, являющейся одним из выражений законов органического роста (рис. 153 и 154).

Значительное место занимает логарифмическая спираль и в теории эстетики (см. об этом М. Гика, Эстетика пропорций в природе и искусстве, 1936).

4. Историческая справка. В истории математики логарифмическая спираль упоминается впервые в письме Декарта к Мерсену в 1638 г., в котором Декарт определяет новую спираль как линию, отношение длины дуги которой к радиусу-вектору является постоянным. Независимо от Декарта логарифмическая спираль была открыта Торичелли, который выполнил также ее спрямление и квадратуру. Особенно много внимания логарифмической спирали уделил Я. Бернулли, называвший ее *spira mirabilis* — дивная спираль. Открытые им свойства логарифмической спирали оставаться неизменной при различных преобразованиях настолько поразили его, что он был склонен придать им мистический смысл и пожелал иметь на своей могильной плите изображение *spira mirabilis* с надписью: «*Eadem mutata resurgo*» — «измененная, воскресая прежней». Только в 19 веке было показано, что в основе замечательного свойства логарифмической спирали оставаться неизменной при преобразованиях лежит тот факт, что логарифмическая спираль переходит в себя при линейных преобразованиях плоскости, образующих группу (см. Ф. Клейн, Высшая геометрия, 1939, стр. 169).

Заметим в заключение, что название логарифмической спирали было предложено Вариньоном.

§ 5. Цепная линия

1. Вывод уравнения. *Цепной линией* называется кривая, форму которой принимает под действием силы тяжести однородная гибкая нерастяжимая тяжелая нить с закрепленными концами.

Для вывода уравнения этой кривой принимаем ось ее симметрии за ось ординат, а ось абсцисс проведем на расстоянии OA от вершины, оставив за собой право назначить величину этого отрезка в

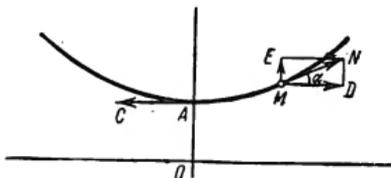


Рис. 155.

дальнейшем (рис. 155). Выделим дугу AM от вершины A до некоторой точки $M(x, y)$ цепной линии. Так как нить находится в состоянии равновесия, то на дугу AM можно смотреть как на твердое

тело, подверженное действию трех сил: силы T натяжения нити в точке A , направленной по касательной AC , силы t натяжения нити в точке M , направленной по касательной MN , и, наконец, силы P , равной весу куска AM нити. Если длину дуги AM обозначить через S , а линейную плотность ее через γ , то $P = \gamma S$.

Раскладывая силу t на составляющие ME и MD , имеем:

$$ME = t \sin \alpha,$$

$$MD = t \cos \alpha.$$

Так как нить находится в состоянии равновесия, то, очевидно,

$$t \sin \alpha = \gamma S,$$

$$t \cos \alpha = T.$$

Разделив первое из этих равенств на второе, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\gamma}{T} S.$$

Заменяя $\operatorname{tg} \alpha$ через $\frac{dy}{dx}$ и обозначая $\frac{T}{\gamma}$ через a , имеем:

$$S = a \frac{dy}{dx}. \quad (1)$$

Полученное соотношение позволяет дать геометрическое определение цепной линии как кривой, у которой длина дуги, отсчитываемая от вершины до произвольной точки, пропорциональна угловому коэффициенту касательной, проведенной в конце дуги.

Дифференцируя равенство (1) по x , будем иметь:

$$\frac{dS}{dx} = a \frac{d^2y}{dx^2},$$

откуда, в силу того, что $\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, получаем дифференциальное уравнение цепной линии в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (2)$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = p$ и $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, получим $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + p^2}$. Интегрируя это уравнение, будем иметь: $\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C$. Но система координат выбрана так, что при $x = 0$ $p = 0$, поэтому $C = 0$.

Потенцируя, получим $p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{x}{a}}$, откуда

$$p = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Заменяя p через $\frac{dy}{dx}$ и снова интегрируя, получим:

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) + C_1.$$

Пользуясь теперь правом назначить величину начальной ординаты OA по нашему усмотрению, положим $OA = a$; тем самым мы введем начальное условие $y = a$ при $x = 0$, благодаря которому получим $C_1 = 0$.

Итак, уравнение цепной линии может быть записано в виде

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}), \quad (3)$$

иными словами,

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \quad (4)$$

2. Свойства. Определяя угловой коэффициент касательной, будем на основании (4) иметь $\operatorname{tg} \alpha = y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ и, значит,

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} = \frac{a}{y},$$

откуда

$$y \cos \alpha = a. \quad (5)$$

Чтобы раскрыть смысл этого соотношения, заметим предварительно, что им определяется простой способ построения касательной в любой точке M цепной линии. Действительно, если на ординате MP как на диаметре построить окружность (рис. 156), а затем радиусом, равным a , сделать на окружности засечку в точке N , то $\cos \angle MPN = \frac{a}{y}$ и, следовательно, $\angle MPN = \alpha$, а так как $\angle MKP = \angle MPN$, то значит, и $\angle MKP = \alpha$, а отсюда следует, что прямая MK и будет касательной.

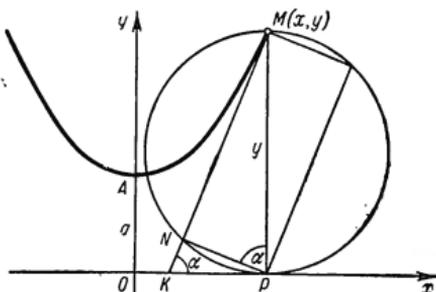


Рис. 156.

Одновременно раскрывается и смысл соотношения (5): оно показывает, что *проекция ординаты произвольной точки цепной линии*

на нормаль в этой точке является величиной постоянной, равной параметру a цепной линии.

Оригинальные свойства цепной линии связываются с понятием ее радиуса кривизны. Так как для цепной линии $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ и $y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, то

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}} = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}, \quad (6)$$

откуда следует, что ордината любой точки цепной линии есть средняя пропорциональная между параметром a и радиусом кривизны в этой точке.

Определяя, далее, длину нормали в произвольной точке цепной линии, получим:

$$N = y \sqrt{1+y'^2} = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}.$$

Сопоставляя полученный результат с (6), приходим к заключению, что радиус кривизны в произвольной точке цепной линии равен длине нормали в этой точке.

Это соотношение позволяет быстро находить центр кривизны для любой точки цепной линии. Подобным соотношением между R и N обладает, кроме цепной линии, окружность, с тем лишь отличием, что для окружности эти отрезки совпадают, в то время как для цепной линии они располагаются по разные стороны от точки касания.

Определяя длину дуги цепной линии от ее вершины до произвольной точки $M(x, y)$, имеем:

$$S = \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2}. \quad (7)$$

Из полученного результата следует, что длину дуги AM можно рассматривать как катет прямоугольного треугольника MNP (рис. 156), гипотенуза которого равна y , а другой катет равен параметру a цепной линии. Отсюда вытекает изящный способ спрямления дуги AM , согласно которому длина дуги цепной линии от ее вершины до некоторой точки равна проекции ординаты этой точки на касательную, проведенную в этой точке.

Если из найденных выше равенств (6) и (7) исключить y , то получится соотношение

$$R = \frac{S^2}{a} + a, \quad (8)$$

являющееся натуральным уравнением цепной линии.

Из этого уравнения следует, что если цепная линия катится по прямой, то центр кривизны, соответствующий точке касания, перемещается по параболе.

Определяя площадь, ограниченную цепной линией, двумя ее ординатами и осью абсцисс, будем иметь:

$$\begin{aligned} U &= a \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a^2 \left[\operatorname{sh} \frac{x}{a} \right]_{x_1}^{x_2} = \\ &= a^2 \operatorname{sh} \frac{x_2}{a} - a^2 \operatorname{sh} \frac{x_1}{a} = a \sqrt{y_2^2 - a^2} - a \sqrt{y_1^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Полученное выражение для площади U открывает возможность осуществить определение этой площади графическим путем. Действительно, если из вершины A радиусом $AB = y_1$ и $AC = y_2$ сделать засечки B и C (рис. 157), то $OB = \sqrt{y_1^2 - a^2}$, $OC = \sqrt{y_2^2 - a^2}$, и следовательно, прямоугольник со сторонами BC и a будет равновелик криволинейной трапеции BM_1M_2C .

Отметим соотношение между площадью U и соответствующей ей дугой S цепной линии. Ввиду того, что $S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \operatorname{sh} \frac{x_2}{a} - a \operatorname{sh} \frac{x_1}{a}$, имеем $U = aS$, т. е. площадь, ограниченная цепной линией, двумя ординатами и осью абсцисс, пропорциональна длине соответствующей дуги.

Одна из классических задач вариационного исчисления, рассмотренная Эйлером в 1744 г., заключалась в отыскании кривой, проходящей через две данные точки и обладающей тем свойством, что поверхность вращения этой кривой вокруг данной прямой имеет наименьшую площадь по сравнению с площадями поверхностей вращения всех иных кривых, проходящих через эти две данные точки. Решение задачи показало, что искомой кривой является цепная линия. Соответствующая поверхность была названа катеноидом.

Если два металлических кольца приложить одно к другому и в таком состоянии погрузить в мыльную пену, а затем вынуть и развести,

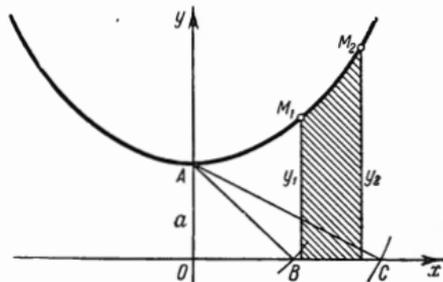


Рис. 157.

то поверхность пленки, стремясь обладать наименьшей площадью, примет форму катеноида (рис. 158).

Отметим в заключение еще одно интересное свойство цепной линии. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — точки цепной линии, касательные в которых взаимно перпендикулярны. Определяя их угловые коэффициенты, имеем

$$y'_1 = \operatorname{sh} \frac{x_1}{a} \quad \text{и} \quad y'_2 = \operatorname{sh} \frac{x_2}{a}.$$

В силу перпендикулярности касательных $y'_1 y'_2 + 1 = 0$, или

$$\operatorname{sh} \frac{x_1}{a} \operatorname{sh} \frac{x_2}{a} + 1 = 0; \quad (10)$$

но, согласно (7), $\operatorname{sh} \frac{x_1}{a} = \frac{S_1}{a}$ и

$\operatorname{sh} \frac{x_2}{a} = \frac{S_2}{a}$, где S_1 и S_2 — длины дуг, отсчитываемые от вершины цепной линии до точек M_1 и M_2 . Подставляя эти выражения в равенство (10), получаем $S_1 S_2 = -a^2$. Таким образом, если прямой угол перемещается по плоскости так,

что его стороны скользят по цепной линии, то произведение длин дуг, отсчитываемых от вершины цепной линии до точек касания, является величиной постоянной.

Далее, если равенство (10) привести к виду

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{x_1}{a}} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{x_2}{a}} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{a^2}{y_1^2} + \frac{a^2}{y_2^2} = 1,$$

то на основании (6) будем иметь $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{a}$. Таким образом, сумма кривизн цепной линии в точках, касательные в которых взаимно перпендикулярны, является для каждой цепной линии величиной постоянной.

3. Применения в технике. В области техники цепная линия используется в расчетах, связанных с провисанием нитей — проводов, тросов и т. п. Вот некоторые соотношения, используемые в этих расчетах.

1. Соотношение между параметром a , длиной $2S$ цепной линии и стрелой провисания h (рис. 159). Согласно формуле (7) имеем

$S = \sqrt{(h+a)^2 - a^2}$, откуда

$$a = \frac{S^2 - h^2}{2h}. \quad (11)$$

2. Соотношение между параметром a , длиной $2S$ и ординатой d . Согласно формуле (7) имеем $S = \sqrt{d^2 - a^2}$.

3. Соотношение между длиной $2S$, параметром a и шириной пролета $2b$. Согласно формуле (7) имеем $S = a \operatorname{sh} \frac{b}{a}$.

4. Соотношение между параметром a , стрелой провисания h и шириной пролета $2b$. Непосредственно из уравнения цепной линии получаем $h = a \operatorname{ch} \frac{b}{a} - a$. Если правую часть того равенства раз-

ложить в бесконечный ряд, то $h = \frac{1}{2!} \frac{b^2}{a} + \frac{1}{4!} \frac{b^4}{a^3} + \dots$. Ограничиваясь в правой части одним членом, получим простую приближенную формулу: $a \approx \frac{b^2}{2h}$.

При выводе уравнения цепной линии было замечено, что $a = \frac{T}{\gamma}$, где T — натяжение нити в вершине, а γ — удельная плотность материала, из которого сделана нить. Далее, горизонтальная составляющая силы натяжения t в произвольной точке цепной линии опреде-

лялась выражением $t \cos \alpha$, и в силу равновесия нити оправдывалось равенство $t \cos \alpha = T$. Исключая T из этого равенства и предыдущего, получаем

$$t = \frac{a\gamma}{\cos \alpha} = a\gamma \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = a\gamma \sqrt{1 + y'^2} = a\gamma \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \gamma y,$$

т. е. сила натяжения t в произвольной точке цепной линии равна весу куска нити, длина которого равна ординате этой точки.

В некоторых технических расчетах цепная линия заменяется параболой. Делается это на основании следующих соображений: если в уравнении цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ правую часть представить в виде бесконечного ряда, то оно примет вид

$$y = a \left(1 + \frac{1}{2!} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4!} \frac{x^4}{a^4} + \dots \right);$$

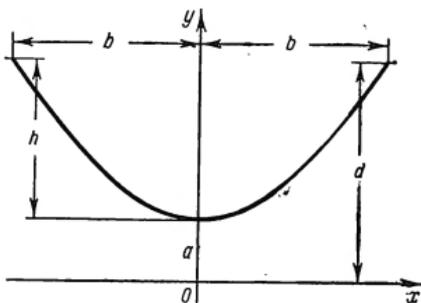


Рис. 159.

в случае, когда стрела провисания h незначительна, параметр a будет достаточно большим (как это следует из формулы (11)), и для малых значений x члены ряда будут быстро убывать. Это обстоятельство дает иногда возможность ограничиться в правой части только двумя членами ряда и заменить тем самым цепную линию параболой $y = a + \frac{1}{2a} x^2$.

В качестве реальной, а не аппроксимирующей кривой провисания парабола выступает, если, пренебрегая весом нити, полагать, что эта нить несет нагрузку, равномерно распределенную по ее горизонтальной проекции. Примером подобной нити может служить цепь висащего моста, поддерживающая настил моста с помощью ряда вертикальных стержней. Условия равновесия нити выразятся в этом случае равенствами $t \cos \alpha = T$, $t \sin \alpha = qx$, где q — нагрузка, приходящаяся на единицу длины проекции дуги $2S$.

Разделив второе из этих равенств на первое, получим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{q}{T} x$, или $\frac{dy}{dx} = \frac{q}{T} x$. Интегрируя последнее уравнение, будем иметь $y = \frac{q}{2T} x^2 + c$ — уравнение параболы.

Говоря о применениях цепной линии в технике, следует упомянуть, наконец, о так называемой *линии свода*, имеющей уравнение

$$y = c \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Как видно из уравнения, кривую эту можно получить аффинным преобразованием обыкновенной цепной линии.

Она находит применение в строительной технике при проектировании сводов.

4. Цепная линия равного сопротивления. Эта кривая является своеобразной вариацией рассмотренной нами цепной линии; она выражается уравнением

$$e^{\frac{y}{a}} \left| \cos \frac{x}{a} \right| = 1. \quad (1)$$

Это кривая, форму которой принимает гибкая тяжелая нить с переменным поперечным сечением, площадь которого меняется пропорционально меняющейся силе натяжения нити при переходе от одного сечения к другому. Такая нить во всех сечениях имеет одинаковую прочность и, следовательно, одинаковую вероятность разрыва. Этим обстоятельством и объясняется ее название.

Из уравнения (1) видно, что кривая проходит через начало; в силу периодичности косинуса она состоит из бесчисленного количества одинаковых ветвей, симметричных относительно прямых $x = k\pi a$, где k — целое (рис. 160).

Определяя из уравнения (1) угловой коэффициент касательной в произвольной точке, получим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{x}{a}$, и, значит, $\alpha = \frac{x}{a}$. Характерное свойство рассматриваемой кривой заключается, таким образом, в том, что *угол наклона касательной к этой кривой*

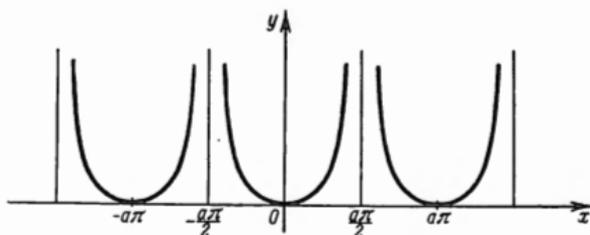


Рис. 160.

пропорционален абсциссе точки касания. Отсюда следует, что значениям $x = k\pi$ соответствуют вершины кривой, лежащие на оси абсцисс, а прямые $x = (2k + 1)\frac{a\pi}{2}$ являются ее асимптотами.

Определяя дифференциал дуги цепной линии равного сопротивления, получим $\frac{dS}{dx} = \frac{1}{\cos \frac{x}{a}}$, откуда

$$S = \int \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}} = a \operatorname{Intg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2a} \right). \quad (2)$$

Радиус кривизны, как в этом легко убедиться, выразится равенством

$$R = \frac{a}{\cos \frac{x}{a}}. \quad (3)$$

Исключая из уравнений (2) и (3) переменную x , получим:

$$R = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{S}{a}} + e^{-\frac{S}{a}} \right)$$

— натуральное уравнение цепной линии равного сопротивления. По виду этого уравнения заключаем, что *если цепная линия равного сопротивления катится без скольжения по прямой, то геометрическим местом ее центров кривизны, соответствующих точкам касания, будет обыкновенная цепная линия.*

Из равенства (3) и из того, что $\frac{x}{a} = \alpha$, вытекает, что $R \cos \alpha = a$, т. е. *проекция радиуса кривизны цепной линии равного сопротив-*

ления на нормаль в ее вершине является величиной постоянной. Этим определяется простой способ построения центра кривизны в любой ее точке.

Б. Историческая справка. Вопрос о форме кривой провисания впервые рассматривался Галилеем (1638), который полагал, что эта кривая будет обычной параболой 2-го порядка. Гюйгенс опроверг это утверждение, показав, что форму параболы кривая провисания может иметь лишь в том случае, если нагрузка на каждый отрезок нити будет пропорциональна не длине этого отрезка, а длине его горизонтальной проекции. В 1669 г. утверждение Галилея было опровергнуто также чисто экспериментальным путем. Законченное решение вопроса о форме кривой провисания было достигнуто Лейбницем, Гюйгенсом и И. Бернулли с помощью метода бесконечно малых.

§ 6. Трактриса

1. Свойства. Трактриса представляет собой кривую, у которой длина касательной является величиной постоянной, которую мы обозначим через a . Дифференциальное уравнение трактрисы поэтому имеет вид $\sqrt{y^2 + S_t^2} = a$, или $y^2 + y^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = a^2$, откуда $x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy$. Положим $y = a \sin t$, тогда $x = a \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = a \int \frac{dt}{\sin t} - a \int \sin t dt$, или $x = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t + C$. Положим начальную ординату равной a ; тогда значение параметра t , соответствующее ей, будет равно $\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $C = 0$.

Таким образом, параметрические уравнения трактрисы могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t, \\ y &= a \sin t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Исключая параметр t из этих уравнений, получаем уравнение трактрисы

$$x = a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}. \quad (2)$$

Форму трактрисы удобно определить, пользуясь ее параметрическими уравнениями (1). Из этих уравнений следует, что параметр t может изменяться лишь в интервале $0 < t < \pi$. Поэтому всегда будет $y > 0$; при $t \rightarrow 0$ $x \rightarrow -\infty$ и $y \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \pi$ $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow 0$, при $t = \frac{\pi}{2}$ $x = 0$ и $y = a$. Ясно, что ось абсцисс является асимптотой трактрисы.

Нетрудно убедиться, что каждой паре значений t и $\pi - t$ параметра соответствуют одинаковые значения y , а значения x отличаются только знаком; отсюда следует, что трактриса симметрична относительно оси ординат.

Для определения формы кривой в точке $A(0, a)$ найдем предварительно угловой коэффициент касательной в произвольной точке трактрисы. Это позволит нам попутно выяснить геометрический смысл параметра t . Дифференцируя параметрические уравнения трактрисы, имеем $dx = \frac{a \cos^3 t}{\sin t} dt$ и $dy = a \cos t dt$, откуда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$, и следовательно, $\alpha = t$. Таким образом, параметр t представляет собой угол, составляемый касательной к трактрисе с положительным направлением оси абсцисс.

В точке $A(0, a)$, т. е. при $t = \frac{\pi}{2}$, имеем $\alpha = \frac{\pi}{2}$; следовательно, $A(0, a)$ будет для трактрисы точкой возврата (рис. 161).

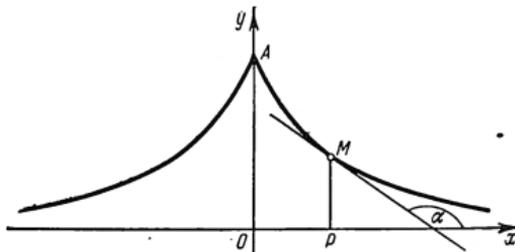


Рис. 161.

Остановимся на рассмотрении некоторых свойств трактрисы.

Площадь, ограниченная трактрисой и ее асимптотой, определяется по формуле

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} y dx = \int_0^{\pi} a \sin t \frac{a \cos^3 t}{\sin t} dt = \frac{\pi a^2}{2};$$

как видно, она равняется половине площади круга, радиус которого равен параметру трактрисы.

Объем тела, полученного от вращения трактрисы вокруг ее асимптоты, определяется по формуле

$$V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} a^2 \sin^2 t \frac{a \cos^3 t}{\sin t} dt = \frac{2}{3} \pi a^3;$$

как видно, этот объем равен половине объема шара с радиусом, равным параметру трактрисы.

Длина дуги трактрисы, отсчитываемая от точки $A(0, a)$ до точки, соответствующей произвольному значению переменной t , определится по формуле

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sqrt{\left(\frac{a \cos^2 t}{\sin t}\right)^2 + (a \cos t)^2} dt = \\ = -a \ln \sin t. \quad (3)$$

Поверхность тела, полученного от вращения трактрисы вокруг ее асимптоты, определится по формуле

$$P = 4\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a \sin t \frac{a \cos t}{\sin t} dt = 4\pi a^2,$$

и, как видно, эта поверхность равняется *поверхности шара с радиусом, равным параметру трактрисы.*

Определим радиус кривизны в произвольной точке трактрисы:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}} \cos^4 t}{a \sin t} = a \operatorname{ctg} t. \quad (4)$$

Полученное выражение определяет простой способ построения центра кривизны для произвольной точки трактрисы. Делаем с этой целью из заданной точки M радиусом, равным $OA = a$, засечку

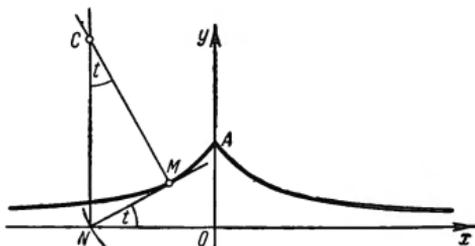


Рис. 162.

в точке N на оси абсцисс и проводим нормаль до пересечения с NC в точке C (рис. 162). Тогда $CM = a \operatorname{ctg} t = R$ и, следовательно, точка C является искомым центром кривизны. Отсюда следует, что *центр кривизны для произвольной точки трактрисы есть точка пересечения нормали с перпендикуляром к оси абсцисс, восставленным в точке пересечения касательной к трактрисе в заданной точке с этой осью.*

Чтобы найти натуральное уравнение трактрисы, достаточно из полученных ранее формул (3) и (4) исключить параметр t . Сделав

это, находим искомое уравнение

$$R = a \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}.$$

Найдем теперь эволюту трактрисы. Известно, что параметрические уравнения эволюты кривой $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$ могут быть записаны в виде $X = x - R \sin \alpha$, $Y = y + R \cos \alpha$; в нашем случае получим:

$$X = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad Y = \frac{a}{2} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}$$

— параметрические уравнения эволюты трактрисы. Исключая параметр t , приходим к уравнению $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, по которому узнаем цепную линию. Таким образом, *эволютой трактрисы является цепная линия*, и соответственно *трактриса представляет собой эвольвенту цепной линии*.

В заключение приведем оригинальный способ построения трактрисы с помощью перочинного ножа. Если нож с двумя лезвиями раскрыть, как показано на рис. 163, и вести концом одного лезвия по пря-

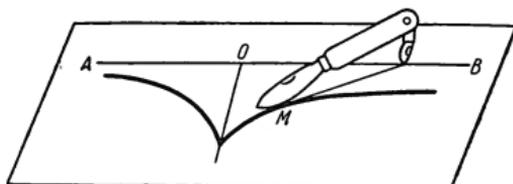


Рис. 163.

мой AB , играющей роль асимптоты для вычерчиваемой трактрисы, то направление второго лезвия в каждой точке траектории его движения будет касательным к этой траектории и, так как длина отрезка касательной окажется при этом постоянной, то след, оставляемый лезвием на бумаге, является трактрисой.

2. Применение трактрисы. Одной из частей в механизме карусельного токарного станка является так называемая антифрикционная пята. Кривая, по которой очерчен профиль вертикального сечения этой пяты, должна удовлетворять условию $\frac{x}{\cos \varphi} = r = \text{const}$ (рис. 164). Условие это выражает техническое требование, согласно которому снашивание пяты во время работы станка должно быть равномерным. Ясно, что левая часть этого равенства определяет

длину касательной, считаемую от точки касания M до точки N пересечения касательной с осью y . Таким образом, кривая вертикального профиля антифрикционной пяты обладает тем свойством, что длина ее касательной постоянна и, следовательно, является трактрисой.

3. Историческая справка. Происхождение трактрисы связывается в истории математики с именем ученого врача Перро, жившего в 17 веке в Париже, который предложил математикам и, в частности, Лейбницу найти кривую, по которой должна перемещаться в горизонтальной плоскости тяжелая материальная точка M , прикрепленная к концу нити, если другой конец этой нити перемещать по некоторой прямой, лежащей в той же плоскости. Как сразу же было подмечено, траектория точки M , представляя собой огибающую натянутой нити в различных ее положениях, будет характеризоваться постоянством отрезка касательной, равного длине этой нити. Об этом способе образования трактрисы напоминает и само ее название: *traho* — тащить (лат.). Кривая была исследована Лейбницем и Гюйгенсом.

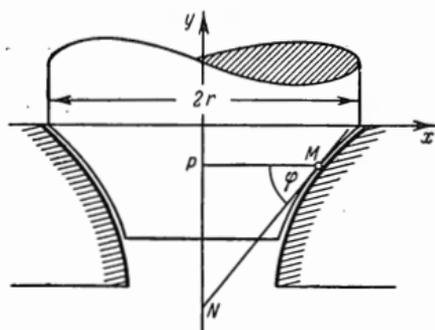


Рис. 164.

Последний обобщил задачу Перро, предполагая, что свободный конец нити перемещают не по прямой, а по произвольной кривой. Так, наряду с обыкновенной трактрисой — трактрисой прямой линии — возникло понятие трактрисы окружности, трактрисы параболы и т. д. По терминологии Гюйгенса, эти кривые назывались тракториями. Сама кривая по отношению к своей трактрисе называется *эквитангенциальной кривой*. Ясно, что эквитангенциальная кривая произвольно заданной кривой представляет собой геометрическое место концов отрезка постоянной длины, откладываемого от точки касания вдоль каждой касательной заданной кривой. Этим обстоятельством определяется способ построения эквитангенциальной кривой, как только задана соответствующая ей трактриса.

Мы заметим еще, что в истории математики трактрисе было суждено сыграть выдающуюся роль в связи с открытием Н. И. Лобачевского его геометрии и последующим развитием учения о неевклидовых геометриях. Было показано, что гиперболическая геометрия Лобачевского и эллиптическая геометрия Римана реализуются на поверхностях постоянной кривизны. Такие поверхности могут быть получены, если вращать вокруг оси абсцисс кривую, обладающую тем свойством, что произведение радиуса кривизны R в любой ее точке

на нормаль N в этой точке является величиной постоянной, т. е. $RN = C$. Если $C > 0$, то соответствующая поверхность имеет постоянную положительную кривизну (например, поверхность шара). На ней будет осуществляться геометрия Римана. Если $C < 0$, то получится поверхность постоянной отрицательной кривизны, на которой локально осуществляется геометрия Лобачевского.

Нам остается показать, что трактриса обладает свойством $RN = \text{const}$. Действительно, поскольку для трактрисы $|R| = a \operatorname{ctg} t$, $|N| = a \operatorname{tg} t$, а направления R и N противоположны, то $RN = -a^2$.

Полученная при вращении трактрисы поверхность постоянной отрицательной кривизны названа Бельтрами *псевдосферой* (рис. 165).

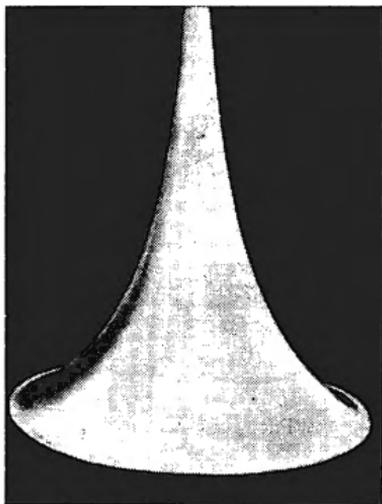


Рис. 165.

4. Трактриса окружности.

Уравнение этой трактрисы выводится сравнительно просто, если полагать ее константу равной радиусу данной окружности.

Пусть $M(x, y)$ — точка трактрисы, а N — ведущая точка, движущаяся по окружности с радиусом, равным a (рис. 166).
Имеем

$$OC^2 + NC^2 = a^2,$$

но

$$\begin{aligned} OC &= OP - ND = x - a \cos \alpha = \\ &= x - a \frac{dx}{dS} = x - \frac{a}{S'}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NC &= MP - MD = y - a \sin \alpha = \\ &= y - a \frac{dy}{dS} = y - \frac{ay'}{S'}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в первое равенство, получаем дифференциальное уравнение искомой трактрисы в виде

$$\left(x - \frac{a}{S'}\right)^2 + \left(y - \frac{ay'}{S'}\right)^2 = a^2.$$

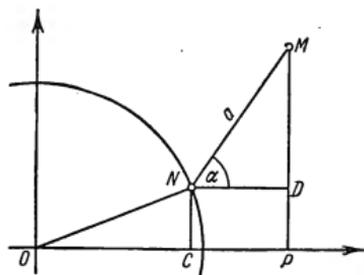


Рис. 166.

Для интегрирования полученного уравнения перейдем к полярным координатам; уравнение примет вид $\rho^2 - \frac{2a\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = 0$, откуда $\varphi =$

$= \int \frac{\sqrt{4a^2 - \rho^2}}{\rho^2} d\rho$, и следовательно, полярное уравнение трактрисы окружности будет иметь вид

$$\varphi = -\arcsin \frac{\rho}{2a} + \frac{\sqrt{4a^2 - \rho^2}}{\rho}.$$

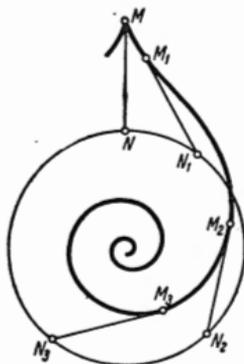


Рис. 167.

Кривая состоит из двух ветвей, симметричных относительно полярной оси. Центр круга является для нее асимптотической точкой (рис. 167).

5. Полярная трактриса. Полярная трактриса, названная Котесом *traktrix complicata* (свернутая трактриса), является кривой, имеющей для всех своих точек одну и ту же величину отрезка полярной касательной.

Из этого определения следует, что дифференциальное уравнение полярной трактрисы запишется в виде $\rho \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2} = a$, или $d\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2} d\rho$. Полагая $\rho = a \cos t$, получим $\varphi = t - \operatorname{tg} t + C$, и так как $t = \arccos \frac{\rho}{a}$, то

$$\varphi = \arccos \frac{\rho}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} + C.$$

Надлежащим поворотом полярной оси постоянную C можно обратить в нуль. Изменив, кроме того, направление отсчета полярного угла на противоположное, мы получим уравнение полярной трактрисы

$$\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} - \arccos \frac{\rho}{a},$$

и так как $\arccos \frac{\rho}{a} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\rho}{a}$, то, повернув дополнительно полярную ось на угол $\frac{\pi}{2}$, мы сможем записать уравнение в виде

$$\varphi = -\arcsin \frac{\rho}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho}.$$

Сопоставляя это уравнение с полученным выше уравнением трактрисы окружности, мы видим, что они одинаковы. Отсюда следует

что полярная трактриса является одновременно трактрисой окружности (рис. 167).

Предоставляем читателю убедиться в том, что полярная трактриса является подэрой гиперболической спирали относительно полюса.

§ 7. Квадратриса Динострата

Квадратриса Динострата является одной из многих кривых, открытых древними в поисках решения задачи о делении угла в заданном отношении и о квадратуре круга. Изобретение ее приписывается знаменитому софисту Гиппию из Элиды (420 г. до н. э.), занимавшемуся первой из указанных задач. Возможность решения задачи о квадратуре круга с помощью этой кривой показал впервые Динострат (2-я половина 4-го века до н. э.).

Квадратриса Динострата получается следующим образом. Пусть радиус $OA = a$ начинает равномерно вращаться с угловой скоростью $\frac{\pi}{2T}$ вокруг центра, а прямая, перпендикулярная к AD , одновременно

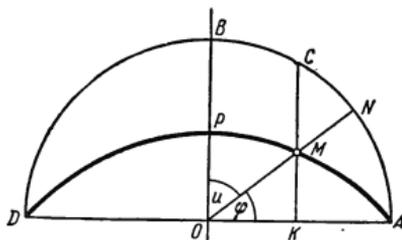


Рис. 168.

начинает равномерно передвигаться от точки A к точке D со скоростью $\frac{a}{T}$ (рис. 168). Тогда точка M их пересечения будет описывать квадратрису.

Исходя из этого определения, нетрудно получить параметрические уравнения квадратрисы. Пусть положение точки M на чертеже соответствует моменту t времени, прошедшему от начала движения. Тогда

$$x = OK = a - \frac{a}{T}t = a\left(1 - \frac{t}{T}\right),$$

$$y = MK = OK \operatorname{ctg} \angle NOB = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

Если теперь угол $\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)$ обозначить через u , то параметри-

ческие уравнения квадратрисы запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2a}{\pi} u, \\ y &= \frac{2a}{\pi} u \operatorname{ctg} u \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(следует заметить, что параметр u равен углу NOB). Исключая из уравнений (1) параметр u , получим уравнение квадратрисы в виде

$$y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}. \quad (2)$$

Чтобы получить соответствующее полярное уравнение, заметим предварительно, что согласно (1) $x = \frac{2a}{\pi} u$, но, с другой стороны, как это видно из рисунка, $u = \frac{\pi}{2} - \varphi$, следовательно, $x = \frac{2a}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$, а так как $\rho = \frac{x}{\cos \varphi}$, то искомое полярное уравнение квадратрисы запишется в виде

$$\rho = \frac{a(\pi - 2\varphi)}{\pi \cos \varphi}. \quad (3)$$

Исследуя форму квадратрисы Динострата по уравнению (2), приходим к следующим заключениям:

1) так как $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}} = \frac{2a}{\pi} \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 \frac{\pi x}{2a} = \frac{2a}{\pi}$ *)), то начальная ордината кривой равна $\frac{2a}{\pi}$;

2) так как $\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a} = 0$ при $x = \pm a, \pm 3a, \pm 5a, \dots$, то кривая пересекает ось абсцисс бесконечное число раз;

3) так как $y = \infty$ при $x = \pm 2a, \pm 4a, \pm 6a, \dots$, то кривая имеет бесконечно много асимптот, параллельных оси ординат.

Нетрудно убедиться, наконец, в том, что точки пересечения кривой с прямой $y = \frac{2a}{\pi}$ являются точками перегиба.

Форма кривой соответственно проведенному анализу представлена на рис. 169.

Следует заметить, что древние, не располагая уравнением квадратрисы и определяя эту кривую лишь кинематическим путем, имели представление только о той части ее, которая соответствует интервалу $-a \leq x \leq +a$.

Как уже упоминалось, с помощью квадратрисы можно графически находить длину окружности и площадь круга, а также делить угол в заданном отношении.

*) По правилу Лопиталю.

Способ решения первых двух задач вытекает непосредственно из того, что начальная ордината квадратрисы определяется равенством $OP = \frac{2a}{\pi}$. Это соотношение позволяет, как только известны отрезки OP и $2a$, найти построением с помощью циркуля и линейки отрезок, равный длине окружности. Действительно, соотношение это

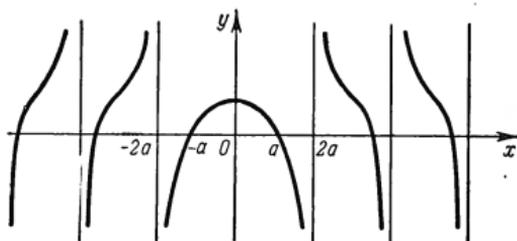


Рис. 169.

можно переписать в виде пропорции $\frac{2\pi a}{2a} = \frac{2a}{OP}$, и следовательно, отрезок $2\pi a$, выражающий длину окружности, может быть построен как четвертый пропорциональный отрезок по отношению к известным отрезкам $2a$ и OP . А так как площадь круга равна $2\pi a \frac{a}{2}$, т. е. равна площади треугольника с основанием, равным длине окружности, и высотой, равной ее радиусу, то, построив такой треугольник и преобразовав его по известным планиметрическим правилам в равновеликий квадрат, мы осуществим квадратуру круга.

Применение квадратрисы для деления угла в заданном отношении осуществляется следующим образом. Пусть угол COD требуется разделить на три равные части. Накладываем с этой целью на рисунок шаблон (из жести или целлулоида) квадратрисы так, чтобы основание ее совпало с одной из сторон данного угла, а середина ее основания — с вершиной этого угла (рис. 170).

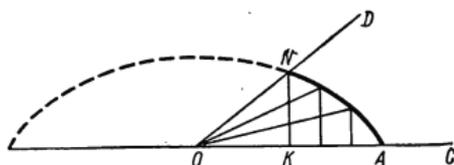


Рис. 170.

Вычертив по ребру шаблона дугу AN квадратрисы, убираем его и из точки N опускаем перпендикуляр NK на OA . Теперь достаточно разделить отрезок KA на три равные части, в точках деления восставить перпендикуляры к OA ; тогда, соединив с вершиной угла точки пересечения этих перпендикуляров, мы и осуществим трисекцию угла COD .

Определяя площадь, ограниченную дугой квадратрисы для интервала $-a \leq x \leq +a$, получаем, пользуясь формулой интегрирования по частям:
$$U = 2 \int_0^a x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a} dx = \frac{4a^2 \ln 2}{\pi}.$$

Укажем в заключение стереометрический способ образования квадратрисы: *если обыкновенную винтовую поверхность пересечь плоскостью, проходящей через ее образующую, то проекция линии пересечения на плоскость, перпендикулярную к оси этой винтовой поверхности, будет квадратрисой Динострата **).

Квадратриса Динострата не является единственной кривой, с помощью которой осуществляется квадратура круга. Для этой цели могут служить также *квадратриса Чирнгаузена*, имеющая уравнение $y = a \sin \frac{\pi x}{2a}$, *кривая Оцанама* с уравнением $x = 2a \sin^3 \frac{y}{2a}$ и, наконец, так называемая *кохлеоида*. Все эти кривые были известны уже в 17 веке. Наиболее интересной из них является кохлеоида, которой мы и посвящаем следующий параграф.

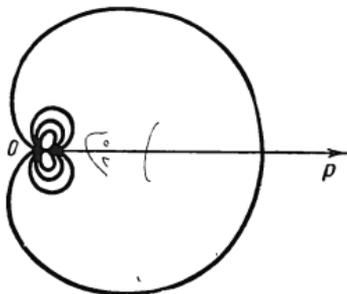


Рис. 171.

§ 8. Кохлеоида

Кривая, называемая *кохлеоидой*, относится к числу квадратрис, известных еще в 17 столетии. Ее уравнение имеет вид

$$\rho = a \frac{\sin \varphi}{\varphi}. \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что при $\varphi = 0$ $\rho = a$. При неограниченном возрастании φ радиус-вектор ρ будет неограниченно приближаться к нулю, причем в силу колебаний значений синуса значения ρ будут также колебаться, обращаясь в нуль при $\varphi = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, и проходя через затухающие максимумы при значениях φ , являющихся корнями уравнения $\operatorname{tg} \varphi - \varphi = 0$ (рис. 171).

Использование кохлеоиды как квадратрисы основывается на том обстоятельстве, что при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\rho = \frac{2a}{\pi}$, откуда $\frac{2\pi a}{2a} = \frac{2a}{\rho}$, и следовательно, отрезок $2\pi a$, выражающий длину окружности, может быть построен как четвертый пропорциональный по отношению к отрезкам $2a$ и ρ . Располагая же отрезком, равным $2\pi a$, нетрудно квадрировать круг с радиусом a .

*) См. Loria, Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, 1911, B. II.

Кохлеоида обладает рядом интересных свойств, открытых в 18—19 веках. Вот одна из задач, при решении которой искомая кривая оказывается кохлеоидой. На прямой PQ дана точка O и вне прямой — точка A , причем $OA = a$ и $\angle AOQ = \alpha$ (рис. 172). Из точки A проводим $AB \perp OA$ и биссектрису OB угла AOQ . Далее проводим $BC \perp OB$ и биссектрису OC угла BOQ и т. д. Требуется найти кривую, на которой будут лежать точки A, B, C, \dots , если указанный процесс будет продолжен неограниченно.

Если точку O принять за полюс, а прямую PQ за полярную ось, то точки B, C, D, \dots будут иметь полярные углы, равные

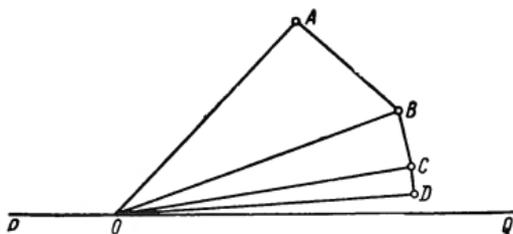


Рис. 172.

$\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2^2}, \frac{\alpha}{2^3}, \dots, \frac{\alpha}{2^n}$, а соответствующие радиусы-векторы их определяются по формулам

$$\rho_1 = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \rho_2 = \frac{\rho_1}{\cos \frac{\alpha}{2^2}}, \rho_3 = \frac{\rho_2}{\cos \frac{\alpha}{2^3}}, \dots, \rho_n = \frac{\rho_{n-1}}{\cos \frac{\alpha}{2^n}}.$$

Перемножая эти равенства, получим:

$$\rho_n = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cos \frac{\alpha}{2^3} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n}}. \quad (2)$$

Если теперь заметить, что

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2^2 \sin \frac{\alpha}{2^2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} = \dots \\ &\dots = 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \dots \cos \frac{\alpha}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

то равенство (2) можно переписать в виде $\rho_n = \frac{a \alpha}{\sin \alpha} \frac{\sin \frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}}$. Пола-

гая $\frac{\alpha}{2^n} = \varphi$, имеем $\rho_n = \frac{a \alpha}{\sin \alpha} \frac{\sin \varphi}{\varphi}$. Так будет выглядеть уравнение кривой, на которой располагаются точки A, B, C, D, \dots . По

виду этого уравнения заключаем, что искомая кривая является кохлеоидой.

Другая задача, при решении которой искомая кривая оказывается также кохлеоидой, такова: требуется найти *геометрическое место точек, являющихся центрами тяжести дуг данной окружности, имеющих начало в одной и той же точке A*.

Принимаем центр данной окружности за полюс, а прямую OA за полярную ось. Возьмем произвольную дугу $AA_1 = 2a\varphi$, где a — радиус данной окружности (рис. 173). Полярный угол центра тяжести этой дуги равен φ , а соответствующий радиус-вектор, будучи определен по известным формулам, окажется равным $a \frac{\sin \varphi}{\varphi}$. Отсюда следует, что искомое геометрическое место выражается уравнением $\rho = a \frac{\sin \varphi}{\varphi}$ и, значит, представляет собой кохлеоиду.

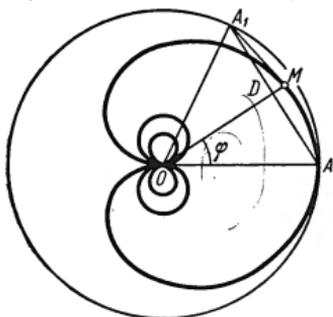


Рис. 173.

В связи с только что рассмотренной задачей удобно установить следующее свойство касательной к кохлеоиде: *касательная в произвольной точке M кохлеоиды проходит через точку A1, симметричную точке A относительно радиуса-вектора точки касания*. Действительно, определяя угол μ между касательной к кохлеоиде и радиусом-вектором точки касания, имеем по известной формуле

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'} = a \frac{\sin \varphi}{\varphi} : \frac{a(\varphi \cos \varphi - \sin \varphi)}{\varphi^2} = \frac{\varphi \sin \varphi}{\varphi \cos \varphi - \sin \varphi}. \quad (3)$$

Но, с другой стороны, если точку пересечения радиуса-вектора точки M с прямой AA_1 обозначить через D (рис. 173), то $MD = OM - OD = a \frac{\sin \varphi}{\varphi} - a \cos \varphi$, откуда

$$\operatorname{tg} \angle A_1MD = \frac{A_1D}{MD} = \frac{\varphi \sin \varphi}{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}. \quad (4)$$

Сопоставляя равенства (3) и (4), заключаем, что правые части их отличаются только знаком; следовательно, прямая A_1M совпадает с касательной к кохлеоиде в точке M .

Заметим еще, что так как положение точки A_1 зависит только от положения точек A и M , то каждая прямая, проведенная через полюс кохлеоиды, пересекает ее в бесконечном множестве точек, касательные в которых проходят через одну и ту же точку A . Геометрическое место точек A_1 есть окружность с центром в полюсе кохлеоиды и радиусом OA .

Отсюда следует также, что *точки касания касательных, проведенных из любой точки A_1 окружности с центром в полюсе кохлеонды, лежат на биссектрисе угла AOA_1 .*

Кохлеонду можно получить также, решая следующую задачу: дано бесконечное множество окружностей, касающихся данной прямой в одной и той же точке; от этой точки отложены на данных окружностях дуги одинаковой длины. Требуется найти геометрическое место концов этих дуг.

Принимая данную точку A за полюс, данную прямую — за полярную ось и взяв окружность произвольного радиуса a с центром в точке O , будем иметь $\widehat{AM} = 2a\varphi = S$, где $S = \text{const}$ — заданная длина дуг, откладываемых от точки A (рис. 174). Из $\triangle AOM$ получаем: $\rho = 2a \sin \varphi$.

Исключая a из последнего и предыдущего равенств, будем иметь уравнение искомого геометрического места в виде $\rho = S \frac{\sin \varphi}{\varphi}$, т. е. кохлеонду.

Не останавливаясь на доказательстве, заметим еще, что *кохлеоида может быть получена как проекция винтовой линии на плоскость, перпендикулярную к ее оси, из какой-либо точки этой винтовой линии* *).

Название кривой ввиду сходства ее с профилем раковины**) предложено Юнгом (1883).

§ 9. Показательная кривая

1. Свойства. *Показательной кривой* называется кривая, являющаяся графиком показательной функции $y = a^x$.

Полагая $a > 1$, замечаем, что при изменении x от 0 до $+\infty$ y монотонно возрастает от 1 до $+\infty$, а при изменении x от 0 до $-\infty$ y монотонно убывает от 1 до 0. Отсюда следует, что вся кривая располагается над осью абсцисс. В отрицательном направлении оси абсцисс она асимптотически приближается к ней, а в положительном — неограниченно удаляется от нее (рис. 175, сплошная линия).

Если $a < 1$, то кривая, как это прямо следует из ее уравнения, будет асимптотически приближаться к оси абсцисс справа

*) См. Logia, Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, 1911, В. II.

**) *κόχλος* — улитка,

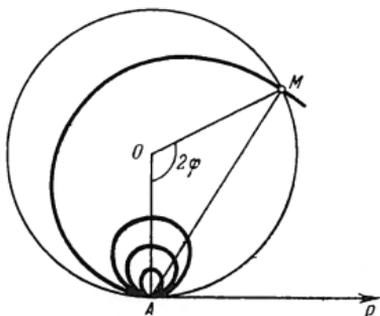


Рис. 174.

и неограниченно отходить от нее слева от оси ординат (рис. 175, пунктирная линия).

Все кривые семейства $y = a^x$ пройдут через точку $(0, 1)$; чем больше a , тем круче поднимается соответствующая кривая по отношению к оси абсцисс.

Обратная по отношению к показательной, т. е. логарифмическая функция $y = \lg_a x$ графически выражается той же линией, что и показательная. Ее положение относительно системы определяется по общему правилу, т. е. путем зеркального отражения графика прямой функции относительно биссектрисы 1-го координатного угла (рис. 176).

Логарифмическая кривая представляет собой графическую запись таблицы логарифмов по основанию a , в которой числа выражаются абсциссами, а логарифмы этих чисел — соответствующими ординатами точек кривой. Известные общие свойства логарифмов отражаются здесь в особенностях расположения кривой относительно системы координат.

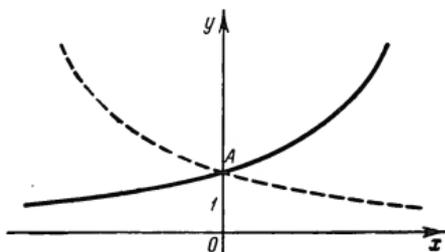


Рис. 175.

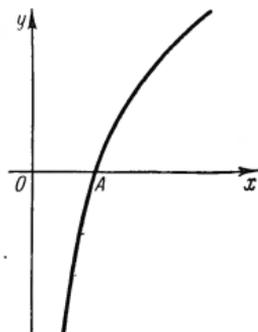


Рис. 176.

Характерное свойство рассматриваемой кривой заключается в том, что *подкасательная показательной кривой относительно ее асимптоты является величиной постоянной*. Действительно, $S_t =$

$$= \frac{y}{y'} = \frac{a^x}{a^x \ln a} = \frac{1}{\ln a}.$$

Это основное свойство ее было замечено впервые Торичелли и Гюйгенсом. Декарт доказал его оригинальным путем, не прибегая к методу бесконечно малых. На языке дифференциального исчисления доказательство сводится к решению дифференциального уравнения $S_t = \text{const}$, или $\frac{y}{y'} = k$, откуда $\frac{dy}{y} = k dx$ и $y = Ae^{kx}$.

Определяя площадь, ограниченную показательной кривой, ее асимптотой и двумя ординатами y_1 и y_2 , получим:

$$U = \int_{x_1}^{x_2} a^x dx = \frac{1}{\ln a} (a^{x_2} - a^{x_1}) = S_t (y_2 - y_1); \quad (1)$$

площадь, ограниченная показательной кривой, ее асимптотой и двумя ординатами, равна произведению подкасательной на разность этих ординат (Торичелли).

Определяя объем тела, полученного от вращения вокруг асимптоты вышеуказанной фигуры, будем иметь:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} a^{2x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{a^{2x_2} - a^{2x_1}}{\ln a} = \frac{\pi}{2} \frac{y_2^2 - y_1^2}{\ln a}. \quad (2)$$

Если в формуле (1) положить $x_1 = -\infty$, то $U = S_t y_2$, т. е. площадь, ограниченная показательной кривой, ее асимптотой и ординатой y , равна площади прямоугольника со сторонами, равными подкасательной и данной ординате.

Если в формуле (2) положить $x_1 = -\infty$, то $V = \frac{\pi}{2} \frac{y_2^2}{\ln a} = \frac{3}{2} \frac{\pi S_t y_2^2}{3}$, т. е. объем тела, полученного от вращения вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной показательной кривой, ее асимптотой и ординатой y , равен $\frac{3}{2}$ объема конуса, высота которого равна подкасательной, а радиус основания равен данной ординате y .

Спрямление показательной кривой, осуществленное впервые Лопиталем в 1692 г., выполняется в логарифмических функциях. Действительно,

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \ln^2 a \cdot a^{2x}} dx; \text{ пользуясь}$$

подстановкой $\sqrt{1 + \ln^2 a \cdot a^{2x}} = z$, получим:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\ln a} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^2 dz}{z^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2 \ln a} \left[\ln \frac{z-1}{z+1} \right]_{z_1}^{z_2} + \frac{1}{\ln a} (z_2 - z_1). \end{aligned}$$

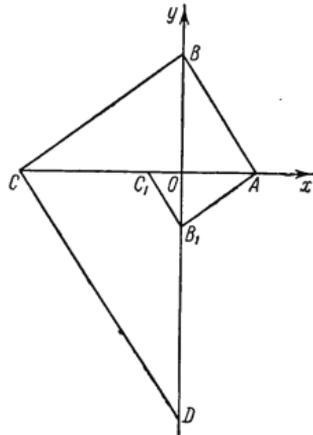


Рис. 177.

Мы отметим в заключение один из способов построения показательной кривой.

Откладываем на оси абсцисс отрезок $OA = 1$, а на оси ординат — отрезок $OB = a$ (рис. 177); если $BC \perp AB$, то $OC = a^2$; если, далее, $CD \perp BC$, то $OD = a^3$ и т. д. Таким путем будут получены ординаты для абсцисс, равных 1, 2, 3, ... Для построения точек с отрицательными абсциссами проводим $AB_1 \perp AB$, тогда $OB_1 = a^{-1}$; проводим, далее, $B_1C_1 \perp AB_1$, тогда $OC_1 = a^{-3}$ и т. д. Таким образом, будут получены ординаты для значений абсцисс, равных $-1, -2, \dots$

2. Кривая Гаусса. Среди кривых, родственных показательной кривой, особенно большое значение в естествознании имеет так называемая *кривая нормального распределения вероятностей*, или *кривая Гаусса*, выражаемая уравнением

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

Из уравнения следует, что кривая симметрична относительно оси ординат и что ось абсцисс является для нее асимптотой (рис. 178).

Для определения характерных точек находим y' и y'' . Имеем $y' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} x e^{-h^2 x^2}$ и $y'' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} (-2h^2 x^2 + 1) e^{-h^2 x^2}$. Корнем первой производной является $x=0$, и так как при этом $y'' < 0$, то в

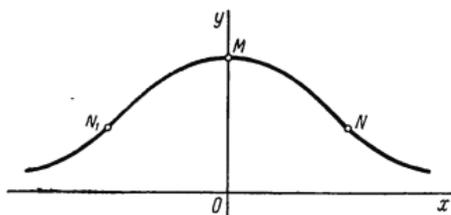


Рис. 178.

точке $M \left(0, \frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)$ кривая имеет максимум. Корни второй производной $x = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}}$ определяют две точки перегиба $N_1 \left(\frac{1}{h\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{\pi e}} \right)$ и $N_2 \left(-\frac{1}{h\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{\pi e}} \right)$.

В теории ошибок кривая Гаусса графически выражает закон распределения случайных ошибок, допущенных при многократном измерении какой-либо величины. Закон этот дает зависимость между вероятностью допустить ошибку известной величины и величиной самой ошибки. По оси абсцисс откладывается величина ошибки, а по оси ординат — вероятность появления такой ошибки. В теории ошибок устанавливается, что величина площади, ограниченной кривой Гаусса, осью абсцисс и двумя ординатами, соответствующими абсциссам x_1 и x_2 , выражает вероятность того, что ошибка заключается между числами x_1 и x_2 . Поэтому можно предполагать, что *площадь, ограниченная кривой Гаусса и ее асимптотой, равняется единице*, так как достоверно, что ошибка лежит в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Действительно, определяя эту площадь, получим:

$$U = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz, \text{ где } z = hx.$$

Интеграл, стоящий в правой части, так называемый интеграл Пуассона, равняется, как это доказывается в курсах анализа, $\sqrt{\pi}$, откуда следует, что $U = 1$.

3. **Степенно-показательные кривые.** В заключение этого параграфа приводим примеры кривых, которые можно было бы назвать *степенно-показательными*.

1. $y = x^x$. Кривая состоит из одной ветви; в точке $\left[\frac{1}{e}, \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\right]$ — вершина; $(0, 1)$ — точка прекращения (рис. 179).

2. $x^y = y^x$. Кривая состоит из двух ветвей — прямой $y = x$ и второй ветви, расположенной в первом координатном угле и имеющей

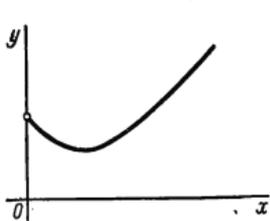


Рис. 179.

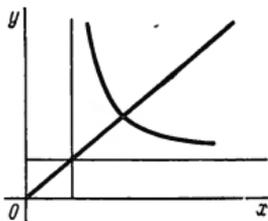


Рис. 180.

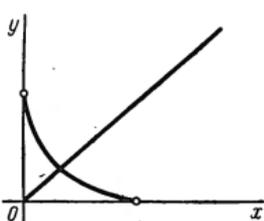


Рис. 181.

асимптоты $x = 1$ и $y = 1$; ветви пересекаются в точке $x = y = e$ (рис. 180).

3. $x^x = y^y$. Кривая состоит из прямой $y = x$ и конечной ветви, обрывающейся в точках $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Ветви пересекаются под прямым углом в точке $x = y = \frac{1}{e}$ (рис. 181).

§ 10. Кривая затухающих колебаний

При изучении некоторых вопросов в области физики и техники приходится иметь дело с колебаниями, амплитуды которых уменьшаются с течением времени благодаря сопротивлению, оказываемому этому колебанию той или иной силой (например, колебание упругой пластинки в сопротивляющейся среде, колебательные процессы при замыкании и размыкании электрического тока, при разряде конденсаторов и т. п.).

Закон изменения амплитуд такого колебания выражается формулой $y = Ae^{-kt} \sin(\omega t + \alpha)$, где y — величина амплитуды, t — время и A , k , ω , α — положительные постоянные, имеющие тот или иной физический смысл в зависимости от рассматриваемого явления.

Графически этот закон выражается кривой

$$y = Ae^{-kx} \sin(\omega x + \alpha), \quad (1)$$

называемой *кривой затухающих синусоидальных колебаний*.

Обратимся к исследованию особенностей ее формы.

Очевидно, ординаты кривой не превосходят по абсолютной величине соответствующих ординат кривых $y = Ae^{-kx}$ и $y = -Ae^{-kx}$. Это означает, что исследуемая кривая будет помещаться между этими двумя показательными кривыми, касаясь их в тех точках, для которых $\sin(\omega x + \alpha) = 1$.

Определяя точки пересечения кривой с осью абсцисс, получим $\omega x + \alpha = n\pi$, откуда

$$x = (n\pi - \alpha) \frac{1}{\omega}. \quad (2)$$

Таким образом, кривая пересекает ось абсцисс в бесконечном числе

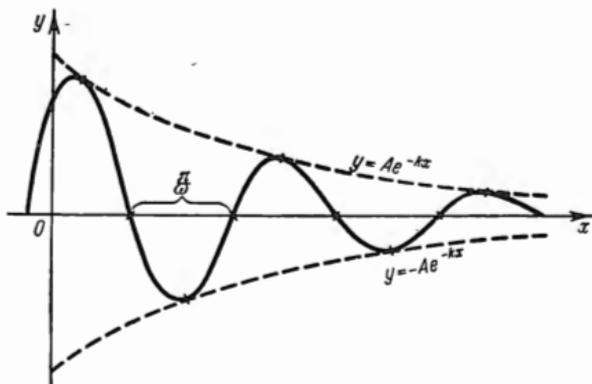


Рис. 182.

точек, причем расстояние между двумя соседними точками, как это видно из (2), является величиной постоянной, равной $\frac{\pi}{\omega}$ (рис. 182).

Найдем теперь вершины и точки перегиба кривой. Имеем

$$y' = Ae^{-kx} [\omega \cos(\omega x + \alpha) - k \sin(\omega x + \alpha)].$$

Полученное выражение первой производной для удобства дальнейших выкладок полезно преобразовать. Умножив и разделив его на $\sqrt{k^2 + \omega^2}$, получим:

$$y' = Ae^{-kx} \sqrt{\omega^2 + k^2} \left[\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \cos(\omega x + \alpha) - \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \sin(\omega x + \alpha) \right].$$

Полагая $\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = \cos \varphi$ и, следовательно, $\frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = \sin \varphi$, будем иметь $y' = Ae^{-kx} \sqrt{\omega^2 + k^2} [\cos \varphi \cos(\omega x + \alpha) - \sin \varphi \sin(\omega x + \alpha)]$, или, окончательно, $y' = Ae^{-kx} \sqrt{\omega^2 + k^2} \cos(\omega x + \alpha + \varphi)$.

Корни первой производной являются корнями уравнения $\cos(\omega x + \alpha + \varphi) = 0$, которое удовлетворится, если $\omega x + \alpha + \varphi = \frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$, ..., $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, ..., и следовательно,

$$x = \left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \alpha - \varphi \right] \frac{1}{\omega}. \quad (3)$$

Таковы значения абсцисс, соответствующих вершинам кривой. Для определения точек перегиба находим вторую производную:

$$y'' = -Ae^{-kx}(\omega^2 + k^2)[\cos \varphi \sin(\omega x + \alpha + \varphi) + \sin \varphi \cos(\omega x + \alpha + \varphi)] = Ae^{-kx}(\omega^2 + k^2) \sin(\omega x + \alpha + 2\varphi).$$

Корни второй производной и, значит, абсциссы точек перегиба определяются равенством

$$x = [n\pi - \alpha - 2\varphi] \frac{1}{\omega}. \quad (4)$$

Сопоставляя выражения (2) и (4), замечаем, что точки перегиба смещены влево от точек пересечения кривой с осью абсцисс на расстояние, равное $\frac{2\varphi}{\omega}$.

Следует определить еще точки, в которых кривая затухающих колебаний касается показательных кривых $y = Ae^{-kx}$ и $y = -Ae^{-kx}$. В этих точках, как было уже замечено, $\sin(\omega x + \alpha) = \pm 1$ и, следовательно, $\omega x + \alpha = \frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$, ..., $(2n+1)\frac{\pi}{2}$. Таким образом, абсциссы искомых точек определяются равенством

$$x = \left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \alpha \right] \frac{1}{\omega}. \quad (5)$$

Сопоставляя (5) с (3), заключаем, что точки, в которых кривая затухающих колебаний $y = Ae^{-kx} \sin(\omega x + \alpha)$ касается показательных кривых $y = Ae^{-kx}$ и $y = -Ae^{-kx}$, сдвинуты по сравнению с ее вершинами вправо на расстояние $\frac{\varphi}{\omega}$.

Найдем амплитуды, соответствующие двум соседним вершинам кривой. Имеем $y_n = Ae^{-kx_n} \sin(\omega x_n + \alpha)$, $y_{n+1} = Ae^{-kx_{n+1}} \sin(\omega x_{n+1} + \alpha)$. Так как $\omega x_{n+1} - \omega x_n = \pi$, как это следует из (3), то $|\sin(\omega x_n + \alpha)| = |\sin(\omega x_{n+1} + \alpha)|$. Взяв отношение найденных амплитуд, получим $\left| \frac{y_n}{y_{n+1}} \right| = e^{-k(x_n - x_{n+1})} = e^{\frac{k\pi}{\omega}} = \text{const}$, откуда следует, что амплитуды затухающих колебаний убывают по закону геометрической прогрессии. Величина $\frac{k\pi}{\omega}$, являющаяся натуральным логарифмом отношения соседних амплитуд, характеризует быстроту затухания колебания и называется логарифмическим декрементом затухания.

Существует интересная связь между кривой затухающих колебаний и логарифмической спиралью. Пусть точка M движется с постоянной угловой скоростью ω по логарифмической спирали $\rho = Ae^{-k\varphi}$ по направлению к ее полюсу; тогда проекция P этой точки на ось ординат будет совершать затухающие колебания (рис. 183).

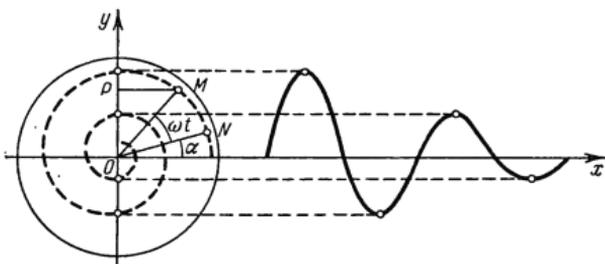


Рис. 183.

Действительно, если за начало пути точки M принять точку N , то расстояние ее проекции — точки P — от начала координат в момент t определится равенством

$$S = OP = OM \sin(\omega t + \alpha).$$

Но OM — радиус-вектор логарифмической спирали, равный $Ae^{-k\varphi}$, а $\omega t + \alpha = \varphi$; следовательно, $S = Ae^{-k\varphi} \sin \varphi$. Полученное выражение показывает, что расстояние S будет меняться по закону затухающих колебаний.

§ 11. Циклоида

1. Геометрические свойства. Кривую, называемую *циклоидой*, можно определить как *траекторию точки, лежащей на окружности круга, который без скольжения катится по прямой*.

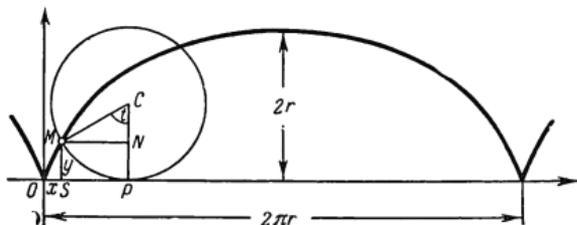


Рис. 184.

Принимаем прямую, по которой катится круг с радиусом r , за ось абсцисс. Полагаем, что в исходном положении вычерчивающая точка находилась в начале координат, а после того как круг повернулся на угол t , заняла положение M (рис. 184).

Имеем: $x = OS = OP - SP$, $y = MS = CP - CN$; но $OP = \overset{\frown}{MP} = rt$, $SP = MN = r \sin t$, $CP = r$, $CN = r \cos t$; следовательно, параметрические уравнения циклоиды запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= rt - r \sin t, \\ y &= r - r \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Исключая параметр t , получим уравнение циклоиды в прямоугольной системе

$$x = r \arccos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Из самого способа образования циклоиды заключаем, что она должна состоять из конгруэнтных арок, каждая из которых соответствует полному обороту производящего круга. Расстояние между началом и концом каждой такой арки равно $2\pi r$ — длине окружности производящего круга, а наибольшая ордината — диаметру этого круга. Точки сопряжения арок, для которых $x = 0, \pm 2\pi r, \pm 4\pi r, \dots$, являются особыми. Для уяснения их природы найдем угловой коэффициент касательной в произвольной

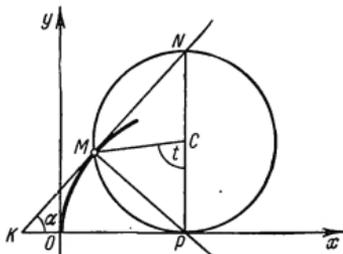


Рис. 185.

точке циклоиды. Имеем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} =$

$= \frac{r \sin t}{r - r \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$. В точке сопряжения арок, например при $t = 0$, получим $\alpha = \frac{\pi}{2}$; следовательно, в точках сопряжения арок касательные к ним совпадают в одну, перпендикулярную к оси абсцисс, и значит, эти точки будут точками возврата.

Рассмотрим далее ряд свойств циклоиды и прежде всего свойства ее касательных и нормалей.

Обращаясь к рис. 185, видим, что прямая NK , проходящая через точку M и высшую точку N производящего круга, составляет с осью абсцисс угол, равный $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$; она, следовательно, и будет касательной к циклоиде в заданной точке M .

Далее, так как угол $NMP = \frac{\pi}{2}$, то прямая MP будет нормалью циклоиды в точке M . Таким образом, касательная к циклоиде в произвольной ее точке проходит через высшую точку производящего круга, а нормаль — через его низшую точку.

Это свойство определяет простой способ построения касательной и нормали в любой точке заданной циклоиды.

Радиус кривизны в произвольной точке циклоиды определяется равенством

$$R = 4r \sin \frac{t}{2}. \quad (2)$$

Важное свойство радиуса кривизны циклоиды можно обнаружить, определив длину нормали в соответствующей точке. Имеем:

$$N = y \sqrt{1 + y'^2} = r(1 - \cos t) \sqrt{1 + \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right)^2} = 2r \sin \frac{t}{2}. \quad (3)$$

Сопоставляя равенства (2) и (3), получим соотношение $R = 2N$, т. е. радиус кривизны в произвольной точке циклоиды равен удвоенной длине соответствующей нормали.

Определяя длину дуги циклоиды от исходной точки, где $t = 0$, до некоторой точки $M(t)$, будем иметь:

$$S = \int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^t 2r \sin \frac{t}{2} dt = 4r \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right) = 8r \sin^2 \frac{t}{4}. \quad (4)$$

Полагая $t = 2\pi$, приходим к заключению, что длина одной арки циклоиды равна $8r$, т. е. четырем диаметрам производящего круга.

Исключая из равенств (2) и (4) параметр t , получим натуральное уравнение циклоиды в виде

$$R^2 + (S - 4r)^2 = 16r^2.$$

По виду полученного уравнения заключаем, что если циклоида катится по прямой, то геометрическое место ее центров кривизны, соответствующих точкам касания, представляет собой окружность, радиус которой в четыре раза больше радиуса производящего круга.

Уравнения эволюты циклоиды имеют вид: $\xi = rt + r \sin t$, $\eta = -r + r \cos t$. Если произвести параллельное смещение системы, поместив начало координат в точку $O_1(-r\pi, -2r)$, то, пользуясь формулами перехода, согласно которым $\xi = x_1 - r\pi$, $\eta = y_1 - 2r$, $t = t_1 - \pi$, получим параметрические уравнения искомой эволюты в системе $x_1 O_1 y_1$ в виде $x_1 = rt_1 - r \sin t_1$, $y_1 = r - r \cos t_1$, т. е. эволюта циклоиды представляет собой также циклоиду, конгруэнтную данной, но смещенную относительно данной параллельным перенесением вниз на расстояние, равное $2r$, и влево — на расстояние, равное πr (рис. 186).

Площадь, ограниченная одной аркой циклоиды и ее базисом, в три раза больше площади производящего круга:

$$U = \int_0^{2\pi r} y dx = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi r^2.$$

Объем V и поверхность P тела вращения арки циклоиды вокруг оси абсцисс определяются равенствами

$$V = \pi \int_0^{2\pi r} y^2 dx = \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 5\pi^2 r^3,$$

$$P = 2\pi \int_0^{2\pi r} y dS = 2\pi r \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) 2r \sin \frac{t}{2} dt = \frac{64}{3} \pi r^2.$$

Объем и поверхность тела вращения арки циклоиды вокруг оси ординат равны соответственно $6\pi^3 r^3$ и $\frac{32}{3} \pi r^2$.

Объем и поверхность тела вращения арки циклоиды вокруг ее оси симметрии равны соответственно $\frac{\pi r^3}{6} (9\pi^2 - 16)$ и $8\pi \left(\pi - \frac{4}{3}\right) r^2$.

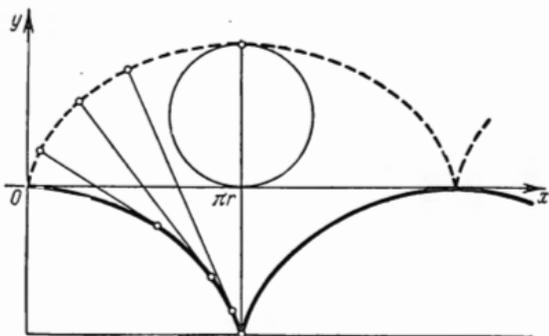


Рис. 186.

Заметим еще, что центр тяжести арки циклоиды находится в точке $\left(\pi r, \frac{4}{3} r\right)$, а центр тяжести фигуры, ограниченной аркой циклоиды и ее базисом — в точке $\left(\pi r, \frac{5}{6} r\right)$.

2. Механические свойства. Одной из замечательных задач, поставленных и решенных в 17 столетии, была следующая задача: в вертикальной плоскости найти такую кривую, что время, потребное для того, чтобы тяжелая материальная точка, двигаясь по этой кривой, спустилась до определенного горизонта, не зависело от исходного положения этой материальной точки на кривой.

Искомой так называемой таухронной или изохронной кривой оказалась циклоида.

В конкретной постановке решение этой задачи может быть оформлено следующим образом. Предположим, что на торцевой стороне

вертикально поставленной доски вырезан желобок в форме циклоиды (рис. 187). Определим, не учитывая трения, время, в течение которого металлический шарик из точки $M(t_0)$ скатится до нижней точки K нашего желобка.

Располагая систему координат, как указано на рисунке, будем иметь параметрические уравнения циклоиды в виде

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t).$$

Пусть x_0, y_0 — координаты исходного положения шарика, т. е. точки M , а t_0 — соответствующее ей значение параметра. Скатившись из положения M в некоторое положение $N(t)$, шарик снизится по вертикали на расстояние h , причем

$$h = y - y_0 = r(1 - \cos t) - r(1 - \cos t_0) = r(\cos t_0 - \cos t).$$

Как известно, скорость падающего тела определяется по формуле $v = \sqrt{2gh}$. Применительно к нашему случаю, получим $v = \sqrt{2gr(\cos t_0 - \cos t)}$. Но так как, с другой стороны, скорость

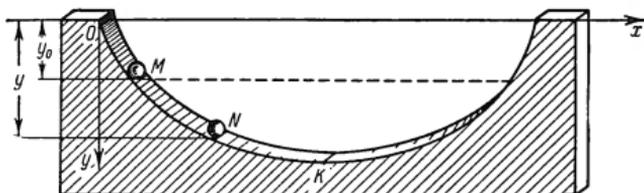


Рис. 187.

есть первая производная пути S по времени T , то последнее равенство можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dS}{dT} = \sqrt{2gr(\cos t_0 - \cos t)}.$$

Для циклоиды $dS = 2r \sin \frac{t}{2} dt$; следовательно, полученное дифференциальное уравнение переписывается в виде $dT = \frac{2r \sin \frac{t}{2} dt}{\sqrt{2gr(\cos t_0 - \cos t)}}$,

откуда

$$T = \int_{t_0}^{\pi} \frac{2r \sin \frac{t}{2} dt}{\sqrt{2gr(\cos t_0 - \cos t)}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{d \cos \frac{t}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{t_0}{2} - \cos^2 \frac{t}{2}}} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Итак, время T , в течение которого шарик из положения M скатится в положение K , определится по формуле $T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$. Полу-

ченное выражение показывает, что период T не зависит от t_0 , т. е. от исходного положения M шарика, и, очевидно, два шарика, один из которых скатывается из точки M , а другой из точки N , окажутся в точке K в один и тот же момент. Скатившись в точку K , шарик, двигаясь по инерции, продолжит движение, и если предполагать отсутствие трения, то через такой же промежуток времени, который ему понадобился, чтобы скатиться из M в K , он поднимется до точки M_1 , находящейся на одной высоте с точкой M . Затем он снова скатится вниз и поднимется опять до положения M . Таким образом, будет осуществлено движение так называемого циклоидального маятника с периодом колебания $T_0 = 4\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Отличительным свойством этого маятника, по сравнению с обычным, является то, что *период его колебания не зависит от амплитуды* (свойство изохронности).

Для обычного маятника, движущегося по дуге окружности, свойство изохронности оправдывается приближенно лишь для небольших амплитуд, когда дуга окружности незначительно отклоняется от дуги циклоиды.

Для уменьшения влияния трения циклоидальный маятник удобно устроить, как указано на рис. 188. Движение шарика, подвешенного на нити, осуществляется здесь по циклоиде, являющейся эвольвентой циклоиды, по которой очерчена доска, направляющая нить во время качания маятника.

Впервые циклоидальный маятник построил Гюйгенс в 1673 г., он же показал в своей работе «О маятниковых часах», что циклоида является единственной кривой, по которой точка совершает изохронные колебания. Исследования эти были связаны с работой Гюйгенса по изобретению маятниковых часов.

Вторая замечательная задача, которая привлекла внимание математиков 17 века, была поставлена И. Бернулли в 1696 г. и заключалась в следующем: среди всех линий, соединяющих две данные точки M и N , не лежащие на одной вертикали, найти ту, двигаясь по которой под действием силы тяжести материальная точка перейдет из положения M в положение N в кратчайшее время.

Искомая кривая оказалась циклоидой, которую в силу этого ее свойства назвали брахистохроной.

3. Трохоиды. Обобщением циклоиды являются *трохоиды* — траектории точки, жестко связанной с кругом, катящимся по прямой, но

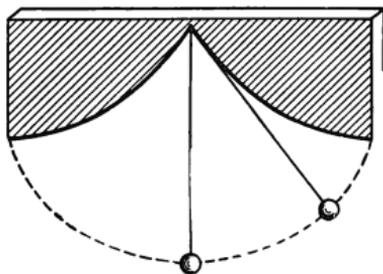


Рис. 188.

находящейся уже не на окружности производящего круга, а на произвольном расстоянии d от его центра.

Мы предоставляем читателю получить параметрические уравнения трохоид, которые имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= rt - d \sin t, \\ y &= r - d \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если $d < r$, то кривая называется *укороченной циклоидой*. Каждая ветвь ее имеет две точки перегиба (рис. 189, а). Если $d > r$,

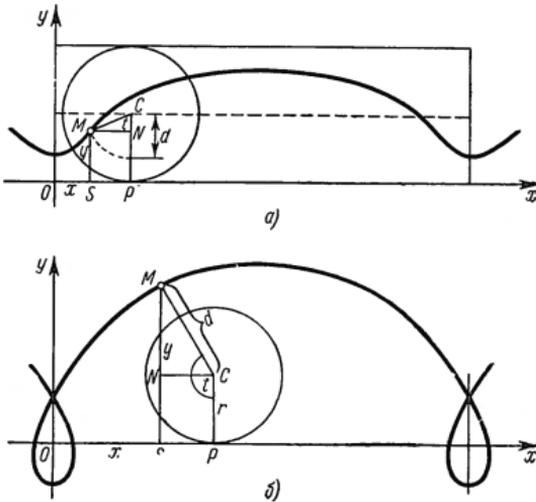


Рис. 189.

кривая называется *удлиненной циклоидой*; она имеет узловые точки (рис. 189, б).

Обыкновенная, укороченная и удлиненная циклоиды являются родственными кривыми не только по общему способу их кинематического образования, но и по образованию их стереометрическим путем, а именно, все они могут быть определены как *параллельные проекции винтовой линии на плоскость, перпендикулярную к ее оси*. В зависимости от того, будут ли углы, составляемые проектирующими лучами с образующей цилиндра, несущего винтовую линию, равны, больше или меньше угла подъема μ винтовой линии*), получатся обыкновенная, удлиненная или укороченная циклоиды.

Для доказательства этого предложения необходимо предварительно видоизменить систему (1), повернув координатные оси на некоторый

*) μ — угол между касательной к винтовой линии и осью z .

угол λ и поменяв местами ось абсцисс и ось ординат. После соответствующих преобразований параметрические уравнения трохоид в новой системе запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= d \cos \theta - r \sin \lambda \cdot \theta, \\ y &= d \sin \theta - r \cos \lambda \cdot \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Пусть теперь $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = a \operatorname{ctg} \mu \cdot t$ — уравнения винтовой линии; уравнения проектирующего луча, составляющего с координатными осями углы α , β и γ , запишутся в виде

$$\frac{x - a \cos t}{\cos \alpha} = \frac{y - a \sin t}{\cos \beta} = \frac{z - a \operatorname{ctg} \mu \cdot t}{\cos \gamma}.$$

Полагая $z = 0$, получим уравнения проекции в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t - a \operatorname{ctg} \mu \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} t, \\ y &= a \sin t - a \operatorname{ctg} \mu \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} t. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Сопоставляя системы (3) и (2), заключаем, что система (3) выражает трохоиду, для которой радиус r производящего круга равняется $a \operatorname{ctg} \mu \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{\cos^2 \gamma}} = a \operatorname{ctg} \mu \operatorname{tg} \gamma$. Так как a представляет собой здесь расстояние вычерчивающей точки от центра производящего круга, то при $\gamma = \mu$ $a = r$ и, следовательно, проекция будет обыкновенной циклоидой, при $\gamma < \mu$ $a < r$ и получим укороченную циклоиду, и наконец, при $\gamma > \mu$ $a > r$ и, следовательно, проекция будет удлинённой циклоидой.

4. Историческая справка. В истории математики циклоида занимает особое место. Благодаря простоте образования этой кривой, многие ее геометрические и механические свойства были открыты еще в 16 веке, т. е. до создания метода бесконечно малых. Свойства эти устанавливались или чисто эмпирическим путем, или на основе тех остроумных геометрических построений, разработка которых и подготовила почву для уяснения идей новой математики. Первым обратился к циклоиде как к объекту математического исследования Галилей. Он дал название кривой и остроумным путем установил одно из свойств циклоиды, именно то, что площадь ее в три раза больше площади производящего круга, сравнивая вес двух металлических пластинок одинаковой толщины, одна из которых была очерчена по циклоиде, а другая — по окружности производящего круга. Ученик Галилея Торичелли определил площадь циклоиды, используя кинематические соображения. Оригинальное доказательство теоремы Галилея дал в 1634 г. Роберваль и независимо от него Декарт и Ферма. В то же время Паскаль определил объем

и поверхность тела вращения циклоиды, а также центры их тяжести. Способы построения касательной к циклоиде устанавливаются Декартом, Ферма и Робервалем. В 1658 г. Рен определяет длину дуги циклоиды. Все эти исследования производились с помощью частных приемов геометрического или механического характера.

Дальнейшее изучение циклоиды относится уже к эпохе могучего движения в истории математики, связанного с открытием лейбницевского метода исчисления бесконечно малых. Среди ряда замечательных кривых циклоида была особенно привлекательна для испытания общности и силы нового метода как потому, что многие ее свойства были уже известны, так и потому, что применение нового метода к исследованию циклоиды оказывалось очень удобным в силу простоты ее инфинитезимальных свойств.

Среди свойств циклоиды, открытых к эту эпоху такими учеными как Лейбниц, братья Бернулли, особое значение, выходящее за пределы самой математики, имело открытие Гюйгенсом в 1673 г. свойства изохронности циклоидального маятника как одной из закономерностей природы. Исследования Гюйгенса в связи с этим открытием имели еще и то значение, что они привели к установлению таких важных понятий дифференциальной геометрии, как понятия эволюты и эвольвенты.

Глубокий научный интерес имело также открытие в 1696 г. Д. Бернулли и другими математиками свойства циклоиды быть брахистохроной. И здесь следует отметить, что, помимо значимости этого свойства с естественнонаучной точки зрения, его открытие представляло собой крупную веху в истории математики, так как при установлении этого свойства в работах Бернулли были заложены основные идеи вариационного исчисления.

§ 12. Кривые Штурма

1. Качение параболы и эллипса по прямой. Рассмотренные нами в предыдущем параграфе циклоида и трохоида определялись как траектории точки, находящейся в плоскости круга, который катится без скольжения вдоль прямой; можно рассматривать кривые, образуемые аналогичным путем, но вместо круга взять катящийся по прямой эллипс, гиперболу или параболу. Получаемые при этом кривые были исследованы Штурмом.

Прежде чем обратиться к выводу уравнений *кривых Штурма*, напомним читателю известное из кинематики предложение, согласно которому бесконечно малое перемещение производящей точки F (рис. 190), находящейся в плоскости катящейся кривой, например параболы, можно рассматривать как дугу окружности, центр которой находится в точке касания K параболы с прямой, по которой она катится (так называемый мгновенный центр). Ясно, что при этом касательная к траектории точки F в любой момент движения является

одновременно касательной к окружности с центром в точке K , а отсюда следует, что *нормаль* FK к траектории точки F в любой момент движения проходит через соответствующую этому моменту точку касания K .

Заметив это, обратимся к исследованию кривой, являющейся траекторией фокуса параболы, параметр которой равен p , предполагая, что параболы катятся по оси абсцисс.

Пусть FA — касательная в точке $F(x, y)$ к траектории, описываемой фокусом параболы. Прямая FK , соединяющая точку F с точкой касания K , будет, как замечено выше, нормалью к этой траектории в точке F . Обозначая угол, составленный касательной FA с осью абсцисс, через α , имеем:

$$y = FN = FK \sin(90^\circ - \alpha) = FK \cos \alpha. \quad (1)$$

Для определения FK учтем предварительно два известных свойства параболы: во-первых, то, что касательная к ней в любой ее точке составляет равные углы с фокальным радиусом-вектором и с осью параболы и, во вторых, то, что поднормаль PE для всех точек данной параболы является величиной постоянной, равной ее параметру p .

Используя первое из этих свойств, имеем $\angle FCA = \angle DKQ = \angle FKA = 90^\circ - \alpha$; отсюда следует, что $\angle EFK = 180^\circ - 2\alpha$. Это же свойство приводит к заключению, что $\angle EPK = \alpha$. Теперь имеется возможность определить FK :

$$FK = \frac{KE}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{KE}{\sin 2\alpha}, \text{ но } KE = PE \operatorname{tg} \alpha = p \operatorname{tg} \alpha,$$

следовательно, $FK = \frac{p \operatorname{tg} \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{p}{2 \cos^2 \alpha}$. Подставляя найденное значение FK в уравнение (1), получим:

$$y = \frac{p}{2 \cos \alpha},$$

и так как $\cos \alpha = \frac{dx}{dS}$, то $y = \frac{p}{2} \frac{dS}{dx} = \frac{p}{2} \sqrt{1 + y'^2}$, или $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{p} \sqrt{y^2 - \frac{p^2}{4}}$. Это и есть дифференциальное уравнение искомой траектории. Интегрируя его, получим

$$\ln \left(y + \sqrt{y^2 - \frac{p^2}{4}} \right) = \ln e^{\frac{2}{p} x} + \ln C.$$

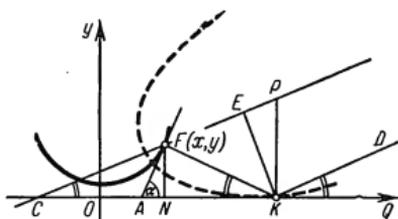


Рис. 190.

прямой. Оно имеет вид

$$dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}}.$$

Траектории точек, лежащих в плоскости эллипса, катящегося уже не по прямой, а по другому эллипсу, были исследованы Бирманом, который назвал их *эпиэллипсидами*.

2. Кривые Мангейма. Мы рассматривали в этом параграфе траектории точки, положение которой в плоскости катящейся кривой было фиксировано. Можно, однако, рассматривать траектории точки, находящейся в плоскости катящейся кривой, предполагая, что при этом сама производящая точка меняет положение относительно этой кривой, оставаясь с ней конструктивно связанной некоторым определенным образом.

Так, например, можно рассматривать траекторию центра кривизны, соответствующего точке касания заданной кривой с прямой линией, по которой катится кривая. Получаемая таким образом линия называется по отношению к катящейся кривой *кривой Мангейма*.

Если катящаяся кривая выражена натуральным уравнением

$$R = f(S), \quad (5)$$

то уравнение соответствующей ей кривой Мангейма получается очень просто, как это впервые и подметил Мангейм. Если прямую, по которой катится данная кривая, принять за ось абсцисс, а отсчет длины дуги этой кривой проводить от такой ее точки, которая совпадала с началом координат в исходном положении кривой, то S будет играть роль абсциссы точки кривой Мангейма, а R — роль соответствующей ординаты. Следовательно, уравнение кривой Мангейма, соответствующей заданной кривой (5), получится, если в этом уравнении S заменить через x , а R — через y , и значит, такое уравнение запишется в виде

$$y = f(x).$$

Так, например, для логарифмической спирали, имеющей натуральное уравнение $R = kS$, кривой Мангейма будет прямая $y = kx$; для цепной линии $R = \frac{S^2}{a} + a$ кривой Мангейма является парабола $y = \frac{x^2}{a} + a$; для эвольвенты окружности $R^2 = 2aS$ кривой Мангейма является парабола $y^2 = 2ax$ и т. д.

В предыдущих параграфах для многих рассматриваемых кривых были указаны соответствующие им кривые Мангейма.

§ 13. Эвольвента окружности

1. Свойства. Как и циклоида, *эвольвента окружности* является предельной формой эпициклоид. Однако, если циклоиду можно представить себе как эпициклоиду для случая, когда радиус R неподвижного круга бесконечно велик, то эвольвента представляет собой эпициклоиду, полученную в предположении, что радиус R неподвижного круга конечен, а радиус r производящего круга бесконечно велик. Подобное представление равносильно представлению об эвольвенте как о траектории точки, лежащей на прямой, которая без скольжения катится по окружности круга радиуса R .

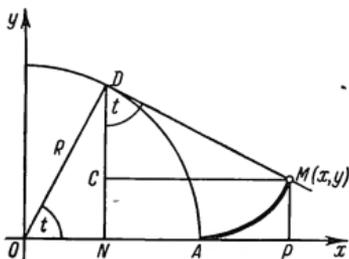


Рис. 192.

Принимаем центр круга за начало координат и полагаем, что в начальный момент производящая прямая l была перпендикулярна к оси абсцисс, а вычерчивающая точка занимала положение A (рис. 192), затем прямая l повернулась на некоторый угол t и вычерчивающая точка заняла положение M . Тогда, согласно рисунку, будем иметь следующие соотношения:

$$\begin{aligned}x &= OP = ON + CM = R \cos t + MD \sin t, \\y &= MP = DN - DC = R \sin t - MD \cos t.\end{aligned}$$

Но так как $MD = \widehat{AD} = Rt$, то окончательно параметрические уравнения эвольвенты можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned}x &= R \cos t + Rt \sin t, \\y &= R \sin t - Rt \cos t.\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Полагая, что прямая, катясь по окружности, последовательно описывает один оборот за другим, мы представляем себе эвольвенту в виде спирали, выходящей из точки A и состоящей из бесчисленного множества витков.

Определяя угловой коэффициент касательной в произвольной точке кривой, получим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{Rt \sin t}{Rt \cos t} = \operatorname{tg} t$, откуда $\alpha = t$ (рис. 193), т. е. касательная к эвольвенте в любой ее точке параллельна радиусу окружности, проведенному в точку касания.

Это свойство эвольвенты окружности является следствием известного свойства касательной к эволюте быть нормалью эвольвенты. И так как эволюта, в нашем случае окружность, является геометрическим местом центров кривизны эвольвенты, то, очевидно, радиус кривизны

для эвольвенты окружности определится по формуле

$$R_k = MD = Rt. \quad (2)$$

Таким образом, радиус кривизны в произвольной точке эвольвенты окружности пропорционален углу поворота производящей прямой.

Определяя, далее, длину дуги S эвольвенты, будем иметь:

$$S = \int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^t Rt \, dt = \\ = \frac{1}{2} Rt^2. \quad (3)$$

Исключая из равенств (2) и (3) параметр t , получим натуральное уравнение эвольвенты в виде $R_k^2 = 2RS$. По виду этого уравнения заключаем, что если эвольвента окружности катится по прямой, то геометрическое место ее центров кривизны, соответствующих точкам касания, является параболой.

Площадь сектора OMA , ограниченного дугой эвольвенты, осью абсцисс и радиусом-вектором OM , определится по формуле

$$U = \frac{1}{2} \int_0^t (x \, dy - y \, dx) = \\ = \frac{1}{2} \int_0^t R^2 t^3 \, dt = \frac{1}{6} R^2 t^3. \quad (4)$$

Если принять во внимание формулы (2) и (3), то последнее равенство можно записать в виде

$$U = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} Rt^2 \cdot Rt = \frac{1}{3} SR_k,$$

т. е. площадь сектора OMA эвольвенты равна одной трети произведения длины дуги эвольвенты на радиус кривизны в конце этой дуги.

Заметим еще, что площадь сектора OMA может быть выражена также равенством

$$U = \frac{1}{3} SR_k = \frac{1}{3} \bar{AD} \cdot \bar{AM}.$$

Подэрой эвольвенты окружности относительно начала координат является спираль Архимеда. Действительно, опустив на касательную к эвольвенте в произвольной точке M перпендикуляр OS (рис. 194), замечаем, что полярные координаты ρ и φ его основания

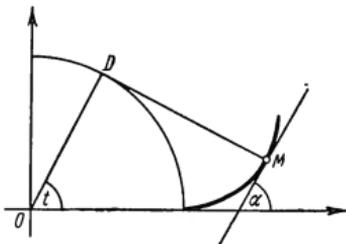


Рис. 193.

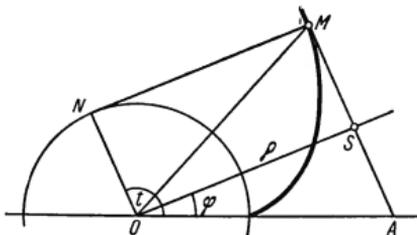


Рис. 194.

S выразятся равенствами $\rho = OS = NM = Rt$, $\varphi = t - \frac{\pi}{2}$. Исключая параметр t , получим уравнение $\rho = R\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, выражающее спираль Архимеда, повернутую относительно ее обычного положения на угол, равный $\frac{\pi}{2}$.

Стереометрически эвольвента окружности может быть определена как линия пересечения поверхности касательных к винтовой линии плоскостью, перпендикулярной к ее оси.

Действительно, пусть винтовая линия задана уравнениями $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$. Уравнения касательной в произвольной точке этой винтовой линии запишутся в виде

$$\frac{x - a \cos t}{-a \sin t} = \frac{y - a \sin t}{a \cos t} = \frac{z - bt}{b}.$$

Полагая $z = 0$, получим систему

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t),$$

которая выражает, как видно, эвольвенту окружности.

В области техники эвольвента окружности находит применение, как и все циклоидальные кривые, прежде всего при профилировании зубчатых колес. По эвольвенте окружности очерчивается профиль шайбы, являющейся деталью подъемного механизма разводного моста. Лопасти турбинного колеса также иногда очерчиваются по эвольвенте.

2. Обобщенная эвольвента окружности. Подобно тому как трохоиды являются обобщением эпи- и гипоциклоид и представляют собой

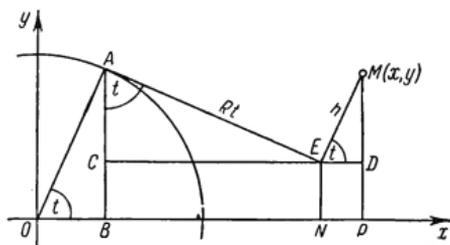


Рис. 195.

траектории точки, жестко связанной с производящим кругом и находящейся на произвольном расстоянии от его центра, так к понятию *обобщенной эвольвенты* можно прийти, предполагая, что вычерчивающая точка M лежит не на производящей прямой, а удалена от нее на расстояние h .

Обращаясь к рис. 195, получим параметрические уравнения обобщенной эвольвенты. Имеем:

$$x = OP = OB + CE + ED = R \cos t + Rt \sin t + h \cos t,$$

$$y = MP = MD + DP = MD + AB - AC = h \sin t + R \sin t - Rt \cos t,$$

или

$$x = (R + h) \cos t + Rt \sin t,$$

$$y = (R + h) \sin t - Rt \cos t.$$

Частные случаи:

1) $h > 0$ — *удлиненная* эвольвента окружности; если $h < R$, то кривая имеет две точки перегиба, если $h = R$, то на оси абсцисс — точка сплюснутости, при $h > R$ кривая вогнута по направлению к центру;

2) $h < 0$ — *укороченная* эвольвента окружности; имеет двойную точку; интересен случай, когда $h = -R$; уравнения обобщенной

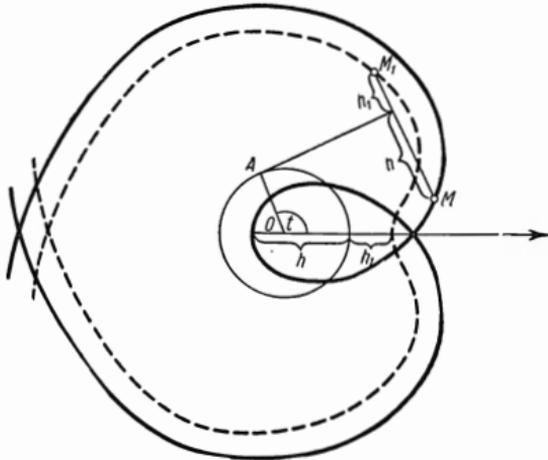


Рис. 196.

эвольвенты принимают при этом вид $x = Rt \sin t$, $y = -Rt \cos t$.

Полагая $x = y_1$ и $y = -x_1$, получим $\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{tg} t$, и следовательно, угол t можно рассматривать как полярный угол φ по отношению к новой системе координат. Так как, кроме того, $x^2 + y^2 = R^2 t^2$, или $\rho^2 = R^2 \varphi^2$, то уравнение обобщенной эвольвенты в рассматриваемом случае может быть записано в виде $\rho = R\varphi$ и выразит спираль Архимеда, которая является, таким образом, частным видом обобщенной эвольвенты окружности. На основе этого обстоятельства конструируют прибор для вычерчивания спирали Архимеда.

На рис. 196 представлены удлиненная и укороченная эвольвенты окружности.

§ 14. Погонная линия

Представим себе, что на некоторой кривой

$$F(\xi, \eta) = 0 \quad (1)$$

задана точка $M(\xi_1, \eta_1)$ и, кроме того, на плоскости указана точка $N(x_1, y_1)$ (рис. 197).

Пусть точка M начинает равномерно двигаться по кривой (1). Поставим перед собой задачу найти ту кривую, по которой должна также равномерно двигаться точка N так, чтобы в любой момент движения касательная, проведенная к траектории точки N , проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки M .



Рис. 197.

Так формулируется известная задача о погонной линии.

Название кривой определяется тем обстоятельством, что по ней должна двигаться точка N , «преследующая» другую точку M . Погонная линия будет наиболее выгодной траекторией преследования в том смысле, что преследующая точка N , перемещаясь по погонной линии, в любой момент времени стремится двигаться к точке M по касательной к своей траектории, т. е. по кратчайшему пути, соединяющему точки N и M в этот момент. Именно по такой кривой должна бежать собака, догоняющая охотника или преследующая зайца, если предполагать, что охотник и заяц будут двигаться по наперед заданной кривой (1).

Задача о погонной линии была поставлена Леонардо да Винчи. Решена Бужо в 1732 г.

Чтобы вывести уравнение погонной линии, примем прямую, проходящую через начальные положения точек M и N , за ось абсцисс. Начальное положение точки N посчитаем началом координат. Отношение постоянных скоростей точек N и M обозначим через k .

Если полагать, что за бесконечно малый промежуток времени точка N прошла расстояние dS , а точка M — расстояние dS_1 , то, согласно условию, получим соотношение $dS = k dS_1$, или

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = k \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}. \quad (2)$$

Теперь следует выразить $d\xi$ и $d\eta$ через x, y и их дифференциалы. Это можно сделать следующим образом. Согласно условию задачи координаты точки M должны удовлетворять уравнению касательной к искомой кривой, т. е. уравнению

$$\eta - y = \frac{dy}{dx} (\xi - x).$$

Присоединяя к этому уравнению уравнение $F(\xi, \eta) = 0$ данной кривой, определим из полученной таким образом системы ξ и η и подставим их значения в уравнение (2), в результате чего дифференциальное уравнение погонной линии запишется в виде

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Две произвольные константы интегрирования найдутся из начальных условий, согласно которым $y = 0$ и $y' = 0$ при $x = 0$.

В общем случае для произвольно заданной «кривой охотника» $F(\xi, \eta) = 0$ решение полученного уравнения является достаточно трудным. Задача значительно упрощается, если исследовать простейший случай, когда кривой охотника является прямая линия.

Пусть в начальный момент точка M находилась на оси абсцисс на расстоянии, равном a , от начала координат, а затем стала двигаться по прямой $\xi = a$ в положительном направлении. Определяя ξ и η из системы $\xi = a$, $\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$, получаем $\xi = a$ и $\eta = y + \frac{dy}{dx}(a - x)$, откуда $d\xi = 0$ и $d\eta = (a - x) \frac{d^2y}{dx^2} dx$ и, следовательно, уравнение (2) примет вид $\sqrt{dx^2 + dy^2} = k(a - x) \frac{d^2y}{dx^2} dx$, или $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k(a - x) \frac{d^2y}{dx^2}$.

Для интегрирования полагаем $\frac{dy}{dx} = p$; тогда $\sqrt{1 + p^2} = k(a - x) \frac{dp}{dx}$, или $\frac{dx}{k(a - x)} = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}$; следовательно,

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \ln C - \ln(a - x)^{\frac{1}{k}}, \text{ или } p + \sqrt{1 + p^2} = \frac{C}{(a - x)^{\frac{1}{k}}}.$$

Так как, согласно условию, в начальный момент при $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = p = 0$,

то $C = a^{\frac{1}{k}}$ и, значит, $p + \sqrt{1 + p^2} = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{k}}$; с другой стороны, $\sqrt{1 + p^2} - p = \frac{1}{p + \sqrt{1 + p^2}} = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{k}}$. Исключая p из полученной системы, находим:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{k}} - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{k}} \right]. \quad (3)$$

Интегрируя полученное уравнение, будем иметь:

$$y = \frac{ak}{2} \left[\frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1 + \frac{1}{k}}}{1 + k} + \frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1 - \frac{1}{k}}}{1 - k} \right] + C.$$

Так как $y=0$ при $x=0$, то $C = \frac{ak}{k^2-1}$ и окончательно уравнение погонной линии запишется в виде

$$y = \frac{ak}{2} \left[\frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1 + \frac{1}{k}}}{1+k} + \frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1 - \frac{1}{k}}}{1-k} \right] + \frac{ak}{k^2-1};$$

при этом предполагается, что $k \neq 1$.

Если $k=1$, то после интегрирования уравнения (3) получим уравнение погонной линии в виде

$$y = \frac{a}{2} \left[\frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2}{2} - \ln \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right] + C.$$

Требую, чтобы кривая проходила через начало, получим $C = -\frac{a}{4}$.

Исследуя форму кривой на основании полученных уравнений, приходим к следующим заключениям:

1. Касательная в начале совпадает с осью абсцисс.
2. В интервале $0 < x < a$ производная y' положительна, как это следует из равенства (3), следовательно, кривая поднимается над осью абсцисс.
3. При $x \rightarrow a$ $y' \rightarrow \infty$, т. е. касательная к кривой стремится стать перпендикулярной к оси абсцисс.
4. При $x=a$ и $k > 1$ получаем $y = \frac{ak}{k^2-1}$; при $x \rightarrow a$ и $k < 1$ имеем $y \rightarrow \infty$; при $x \rightarrow a$ и $k=1$ имеем $y \rightarrow \infty$, как это видно из уравнения погонной линии, соответствующего этому случаю.

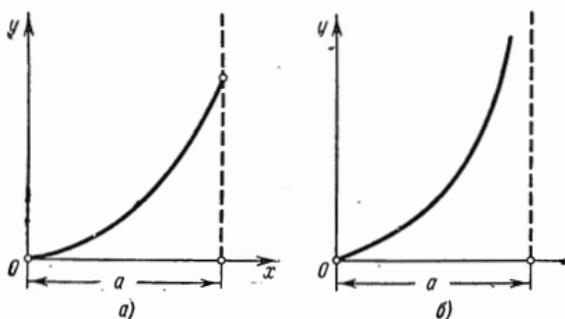


Рис. 198.

Таким образом, при $k > 1$ погонная линия пересечет прямую $\xi = a$ и, следовательно, точка N действительно догонит точку M (рис. 198, а).

При $k \leq 1$ погонная линия асимптотически приближается к прямой $x = a$ и, следовательно, на конечном расстоянии точка N не сможет догнать точку M (рис. 198, б).

Следует заметить в заключение, что при рациональном значении k , не равном единице, погонная линия является алгебраической, в частности, при k целом — кривой параболического типа (если $k = 2$, т. е. скорость собаки в два раза больше скорости охотника, погонная линия является кубикой Чирнгаузена (стр. 88)). При $k = 1$ и при k иррациональном погонная линия является трансцендентной кривой.

Мы хотим привести еще один способ образования погонной линии, предложенный Гауссом. Пусть требуется найти кривую, обладающую тем свойством, что любые две касательные ее отсекают на

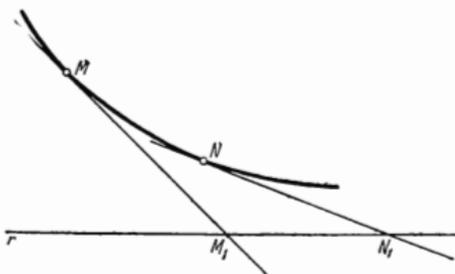


Рис. 199.

данной прямой отрезок, отношение которого к длине дуги между точками касания является величиной постоянной.

Пусть r — данная прямая, M и N — точки касания, а M_1 и N_1 — соответствующие точки прямой r (рис. 199). Представим себе, что точка M_1 движется равномерно по прямой r , тогда, очевидно, соответствующая ей точка M должна также равномерно перемещаться по кривой, так как только при этом условии будет сохраняться постоянно отношение длины дуги MN и отрезка M_1N_1 . Отсюда следует, что условия, определяющие искомую кривую, совпадают с условиями, определяющими погонную линию.

§ 15. Кривые Рибокура

Рассмотренная нами ранее (стр. 220) трактриса имела свойство постоянства произведения радиуса кривизны R в произвольной ее точке на нормаль N в этой точке. Это свойство выражалось равенством

$$RN = c.$$

Мы займемся теперь кривыми, обладающими свойством, выражаемым равенством

$$\frac{R}{N} = k = \text{const.} \quad (1)$$

Определяя R и N по известным формулам, получим дифференциальное уравнение кривых Рибокура в виде

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{1}{n} y (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{где } \frac{1}{n} = k,$$

иначе $y'' = \frac{n}{y} (1+y'^2)$; но $y'' = y' \frac{dy'}{dy}$, следовательно, $\frac{y' dy'}{1+y'^2} = n \frac{dy}{y}$,

откуда, после интегрирования, $\frac{1}{2} \ln(1+y'^2) = n \ln y - n \ln C$, или

$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{2n} - 1}$ и окончательно

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{2n} - 1}} + C_1.$$

Выбирая надлежащим образом начало системы координат, можно C_1 обратить в нуль и искомое уравнение кривых Рибокура записать в виде

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{2n} - 1}}. \quad (2)$$

Согласно условиям интегрирования дифференциальных биномов интеграл, стоящий в правой части, может быть выражен в элементарных функциях в конечном виде, если $\frac{1}{2n} = k$ или $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2} = k$, где k — целое число, иначе, если $n = \frac{1}{2k}$ или $n = \frac{1}{2k+1}$. Таким образом, если $n = \frac{1}{h}$, где h — любое целое число, то из (2) будем

иметь (полагая $n = -\frac{1}{m+1}$) $dx = \frac{y^{\frac{1}{m+1}} dy}{\sqrt{C^{\frac{2}{m+1}} - y^{\frac{2}{m+1}}}}$. Заменяя те-

перь $y^{\frac{1}{m+1}}$ через u и $C^{\frac{1}{m+1}}$ через a , получим $dx = \frac{(m+1)u^{m+1} du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$.

Если положить $u = a \sin t$, то

$$x = (m+1)C \int_0^t \sin^{m+1} t dt, \quad y = C \sin^{m+1} t. \quad (3)$$

Равенства (3) служат параметрическими уравнениями кривых Рибокура для случая, когда $n = \frac{1}{h}$, где h — любое целое число.

К этому семейству относятся некоторые хорошо известные кривые:

1) при $m=0$ имеем $x = -C \cos \varphi$, $y = C \sin \varphi$ — окружность;

2) при $m=1$ имеем $x = \frac{C}{2}(2t - \sin 2t)$, $y = \frac{C}{2}(1 - \cos 2t)$ —

циклоида;

3) при $m=-2$ имеем $y = \frac{C}{2}(e^{\frac{x}{C}} + e^{-\frac{x}{C}})$ — цепная линия;

4) при $m=-3$ имеем $x^2 = 2C(y - C)$ — парабола.

В общем случае, соответственно этим четырем кривым, Рибокур выделяет четыре группы: 1) *окружности высших порядков*, если $m+1$ — положительное нечетное число, 2) *кривые циклоидального типа*, если $m+1$ — положительное четное число, 3) *кривые типа цепной линии*, если $m+1$ — отрицательное нечетное число и 4) *параболы высших порядков*, если $m+1$ — отрицательное четное число.

Не приводя детальных выкладок, заметим, что длина дуги кривой Рибокура $S = (m+1)C \int_0^t \sin^m t dt$, а ее радиус кривизны $R = -(m+1)C \sin^m t$. Исключая из этих двух равенств параметр t , получим натуральное уравнение кривой Рибокура

$$S = -\frac{1}{m} \int \frac{dR}{\sqrt{\left[\frac{R}{(m+1)C}\right]^{\frac{2}{m}} - 1}}.$$

Полагая здесь $(m+1)C = a$ и $m = \frac{1-n}{1+n}$, получим:

$$S = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}.$$

Сопоставляя это уравнение с натуральным уравнением синусоидальных спиралей (см. стр. 154), можно прийти к заключению, что кривые Рибокура и синусоидальные спирали объединяются в общем семействе кривых, натуральное уравнение которых записывается в

виде $S = \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^m - 1}}$. Это семейство так называемых *кривых Чезаро*.

Кривые Чезаро определяются также как линии, у которых радиус кривизны в произвольной точке P пропорционален

соответствующему отрезку нормали, отсекаемому на этой нормали полярной точки P относительно некоторой окружности.

Следует заметить, что проблема нахождения кривых, удовлетворяющих равенству $\frac{R}{N} = \text{const}$, была поставлена еще И. Бернулли в 1716 г. при исследовании вопроса о том, как найти в вертикальной плоскости кривую, обладающую тем свойством, что материальная точка, перемещаясь под действием силы тяжести по этой кривой, оказывала бы на эту кривую во всех своих положениях одинаковое давление, равное весу этой материальной точки.

Задача Бернулли была решена Лейбницем и рядом других ученых. Детальное исследование этих кривых было осуществлено в 1880 г. Рибокуром в связи с его работами по теории минимальных поверхностей.

§ 16. Клофоида

Если логарифмическая спираль, рассмотренная нами в одном из предыдущих параграфов, являлась кривой, у которой кривизна меняется обратно пропорционально длине дуги, то *клофоида* *) определяется как *кривая, кривизна которой меняется прямо пропорционально длине дуги*.

Согласно этому определению натуральное уравнение клофоиды можно записать в виде

$$R = \frac{a}{S}, \quad a = \text{const}, \quad (1)$$

и так как $R = \frac{dS}{d\alpha}$, то $\frac{d\alpha}{dS} = \frac{S}{a}$ и, следовательно, $d\alpha = \frac{S}{a} dS$, откуда

$$\alpha = \frac{S^2}{2a} + C. \quad (2)$$

Если систему прямоугольных координат выбрать так, чтобы кривая касалась оси абсцисс в начале и полагать, что отсчет длины дуги ведется от начала координат, то постоянная C обратится в нуль и уравнение (2) запишется в виде

$$\alpha = \frac{S^2}{2a}. \quad (3)$$

Используя это равенство и известные соотношения, согласно которым $\frac{dx}{dS} = \cos \alpha$, $\frac{dy}{dS} = \sin \alpha$, будем иметь:

$$dx = \cos \frac{S^2}{2a} dS, \quad dy = \sin \frac{S^2}{2a} dS.$$

*) κλωθώ — прясть.

Интегрируя последние равенства, получим параметрические уравнения клофоиды

$$x = \int_0^S \cos \frac{S^2}{2a} dS, \quad y = \int_0^S \sin \frac{S^2}{2a} dS. \quad (4)$$

Постоянная интегрирования равна нулю, так как при нашем выборе системы координат при $S=0$ должно быть $x=0$ и $y=0$.

Интегралы, стоящие в правых частях полученных уравнений, не выражаются, как известно, в конечном виде и могут быть заменены лишь соответствующими бесконечными рядами.

Клофоида касается оси абсцисс в начале координат, имея при этом кривизну, равную нулю. При возрастании длины дуги кривизна кривой пропорционально возрастает и клофоида закручивается, делая бесконечное количество оборотов вокруг точки M_1 (рис. 200). Координаты этой точки определяются по формулам

$$x_1 = \int_0^{\infty} \cos \frac{S^2}{2a} dS,$$

$$y_1 = \int_0^{\infty} \sin \frac{S^2}{2a} dS.$$

Известно, что каждый из этих интегралов равняется $\frac{\sqrt{\pi a}}{2}$. Та-

ким образом, точка $M_1 \left(\frac{\sqrt{\pi a}}{2}, \frac{\sqrt{\pi a}}{2} \right)$ является асимптотической точкой клофоиды. Изменяя S от 0 до $-\infty$, получим вторую ветвь кривой, расположенную в третьем координатном угле и имеющую асимптотическую точку $M_2 \left(-\frac{\sqrt{\pi a}}{2}, -\frac{\sqrt{\pi a}}{2} \right)$.

Клофоида имеет применение в железнодорожной технике, где она известна под названием *радиоидальной спирали*, будучи идеальной переходной кривой (см. стр. 184).

Первое исследование клофоиды произведено в 1874 г. физиком Корню при изучении им вопросов, связанных с явлением дифракции света. В связи с этим клофоиду называют также *спиралью Корню*.

Мы хотим обратить внимание читателя на то, что натуральные уравнения как логарифмической спирали, так и клофоиды являются

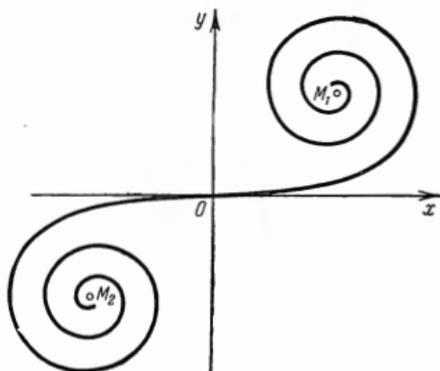


Рис. 200.

частными случаями уравнения

$$R = aS^m, \quad (5)$$

выражающего кривые, называемые *псевдоспиральями*.

Среди известных кривых к ним относятся, кроме логарифмической спирали ($m=1$) и клофоиды ($m=-1$), также эвольвента окружности, для которой $m=\frac{1}{2}$.

Характерное свойство псевдоспиралей заключается в том, что их *эволюты являются также псевдоспиральями*. Убедиться в этом можно, используя способ определения эволюты для кривых, заданных натуральными уравнениями (см. стр. 268). Согласно этому способу, если через R и S обозначить длину дуги и радиус кривизны заданной кривой, а через R_1 и S_1 — длину дуги и радиус кривизны соответствующей ей эволюты, то $R_1 = R \frac{dR}{dS}$ и $S_1 = R$. Применительно к уравнению (5) получим $R_1 = a^2 m S^{2m-1}$, $S_1 = aS^m$, или, исключая S ,

$$R_1 = ma^{\frac{1}{m}} S_1^{\frac{2m-1}{m}} \quad (6)$$

— натуральное уравнение эволюты псевдоспирали, являющейся, как видно, также псевдоспиралью.

Полагая в уравнении (6) $m=-1$, получим натуральное уравнение эволюты клофоиды $R_1 = -\frac{1}{a} S_1^3$ (рис. 201).

Заметим в заключение этого параграфа следующее.

Зависимость между углом α , составляемым касательной к клофоиде с осью абсцисс, и длиной ее дуги S выражается, как мы видели, равенством (3)

$$\alpha = \frac{1}{2a} S^2.$$

Обобщая, можно рассматривать зависимость

$$\alpha = f(S), \quad (7)$$

где $f(S)$, вообще говоря, произвольная функция.

Исследованием кривых, в предположении, что они заданы уравнением (7), занимался Краузе. Среди этих кривых специфическую форму имеют кривые, выражаемые уравнением

$$\alpha = k \sin S. \quad (8)$$

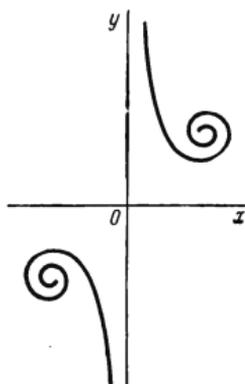


Рис. 201.

Чтобы получить их натуральное уравнение, продифференцируем уравнение (8) по S . Получим $\frac{d\alpha}{dS} = k \cos S$, или $\frac{1}{R} = k \cos S$, откуда

$$R = k \sec S. \quad (9)$$

Кривые, натуральные уравнения которых имеют вид (9), называются *узорными кривыми*.

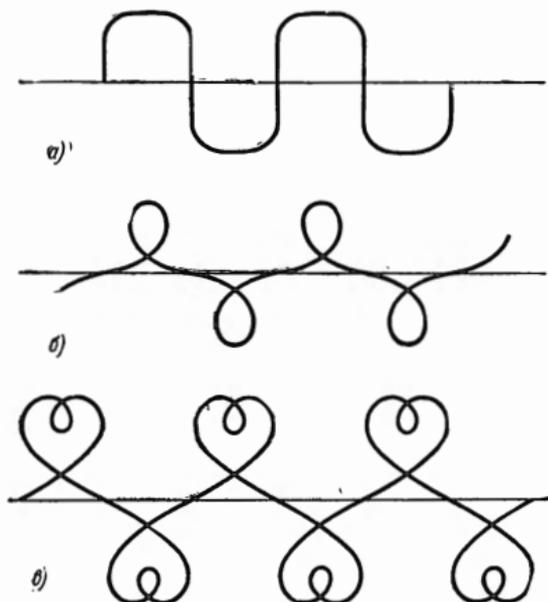


Рис. 202.

На рис. 202, *а, б, в* представлены формы узорных кривых для случаев $k = \frac{\pi}{2}$, $k = \pi$, $k = 2\pi$.

ГЛАВА VIII ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Эволюты и эвольвенты и их обобщения

1. Эволюты и эвольвенты. Понятие *эволюты* данной кривой как *геометрического места центров ее кривизны* и, одновременно, как *огibaющей нормали данной кривой*, установлено Гюйгенсом в 1665 г. Сама данная кривая по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой* и определяется как *ортогональная траектория касательных к эволюте*.

В силу того, что *нормали к эвольвенте являются касательными к эволюте*, эвольвенту заданной кривой можно вычертить непрерывным движением. Для этой цели изготавливается шаблон заданной кривой. В какой-либо точке ее закрепляется конец нерастяжимой нити, которую обертывают вокруг кривой, а на другом его конце закрепляют чертящее острие. Если теперь развертывать нить, оставляя ее всегда в натянутом состоянии, то острие вычертит эвольвенту.

Наиболее общие соотношения между эволютой и соответствующей ей эвольвентой, помимо уже упомянутых, таковы:

1) при монотонном изменении радиуса кривизны R эвольвенты приращение его при перемещении центра кривизны из начала какой-либо дуги S_1 эволюты в конец ее равняется длине этой дуги; если за положительное направление на эволюте выбрать то, которое соответствует возрастанию радиуса кривизны эвольвенты, то указанное свойство приводит к равенству $dR = dS_1$, согласно которому дифференциал дуги эволюты равен дифференциалу радиуса кривизны эвольвенты;

2) точке экстремума радиуса-кривизны эвольвенты соответствует на эволюте, вообще говоря, точка возврата;

3) точке эвольвенты, в которой кривизна ее равна нулю, соответствует бесконечно удаленная точка эволюты и соответственно ее бесконечная ветвь, асимптотой которой служит нормаль к эвольвенте в точке ее нулевой кривизны.

Приведенные выше определения эволюты дают возможность выразить ее аналитически.

В общем случае, когда заданная кривая имеет уравнение

$$f(x, y) = 0, \quad (1)$$

соответствующая ей эволюта определится уравнениями

$$\xi = x + \rho \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \eta = y + \rho \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (2)$$

где ξ и η — координаты точки эволюты, соответствующие точке с координатами x и y заданной кривой, и, кроме того,

$$\rho = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\delta}, \quad \delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

Уравнения (2) выражают координаты ξ и η точки эволюты кривой (1) как функции параметров x и y , связанных между собой равенством (1).

Значительно проще находится эволюта в случае, когда заданная кривая выражена параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \quad (3)$$

Если координаты точки эволюты обозначать по-прежнему через ξ и η , то параметрические уравнения ее будут иметь вид

$$\xi = x - y \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{xy - y\dot{x}}, \quad \eta = y + x \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{xy - y\dot{x}}. \quad (4)$$

Пользуясь этими уравнениями, легко найти, например, эволюту эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, параметрические уравнения которой имеют вид

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t.$$

Исключая параметр t , получим уравнение

$$\left(\frac{\xi}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

по виду которого приходим к заключению, что эволюта эллипса является частным случаем кривых Ламэ (рис. 123, а).

Особенно удобно определяется эволюта кривой, если последняя задана натуральным уравнением

$$R = \varphi(S). \quad (5)$$

Употребляемый здесь способ выгоден и в том отношении, что дает возможность просто решать и обратную задачу, т. е. определять эвольвенту по заданной эволюте.

Суть этого способа такова. Пусть R и S — радиус кривизны и длина дуги эвольвенты, а R_1 и S_1 — радиус кривизны и длина дуги соответствующей эволюты. Обозначим, кроме того, через α и α_1 углы, составляемые с осью абсцисс касательными в соответствующих точках эвольвенты и эволюты. Тогда $\frac{d\alpha}{dS} = \frac{1}{R}$, $\frac{d\alpha_1}{dS_1} = \frac{1}{R_1}$, и так как $dS_1 = dR$ и $d\alpha_1 = d\alpha$ ($\alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$), то $\frac{dS}{R} = \frac{dS_1}{R_1}$ и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R \frac{dR}{dS}, \\ S_1 &= R + c, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где c — постоянная, которую, выбрав надлежащим образом начало отсчета длины дуги эволюты, можно обратить в нуль. Уравнения (6) выражают эволюту кривой (5).

Определяя из этих уравнений R и S , получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} R &= S_1, \\ S &= \int \frac{S_1 dS_1}{R_1}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

выражающие эвольвенту кривой, заданной натуральным уравнением.

Применим этот способ к определению эволюты эпициклоиды, натуральное уравнение которой имеет вид

$$\frac{R^2}{a^2} + \frac{S^2}{b^2} = 1.$$

Для простоты дальнейших выкладок, выразим это уравнение в параметрической форме, полагая $R = a \cos t$ и $S = b \sin t$. Пользуясь уравнениями (6), получим:

$$R_1 = R \frac{dR}{dS} = a \cos t \frac{-a \sin t}{b \cos t} = -\frac{a^2}{b} \sin t,$$

$$S_1 = R = a \cos t.$$

Исключая параметр, будем иметь $\frac{R_1^2}{a^2} + \frac{S_1^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, т. е., как видно, снова эпициклоиду.

В качестве второго примера найдем эвольвенту окружности, натуральное уравнение которой $R_1 = a$, где a — радиус этой окружности. На основании уравнений (7) имеем:

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{S_1 dS_1}{R_1} = \int \frac{S_1 dS_1}{a} = \frac{S_1^2}{2a}, \\ R &= S_1. \end{aligned}$$

Исключая S_1 , получим $R^2 = 2aS$ — натуральное уравнение эвольвенты окружности.

Определяя эвольвенту эвольвенты, мы получим *вторую эвольвенту* заданной кривой. Для окружности, например, натуральное уравнение второй эвольвенты имеет вид

$$R^3 = \frac{9}{2} aS^2.$$

Кривая, выражаемая таким уравнением, названа *спиралью Штурма*. Штурм определял ее как кривую, для которой *радиус кривизны в любой ее точке равен радиусу-вектору этой точки*.

Мы остановимся еще на одном способе определения эволют и эвольвент.

Если α — угол, составляемый с осью абсцисс касательной к некоторой кривой, а $p = \varphi(\alpha)$ — расстояние этой касательной от начала координат, то касательная выразится уравнением

$$x \cos(90^\circ - \alpha) + y \sin(90^\circ + \alpha) - p = 0,$$

или

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha - \varphi(\alpha) = 0. \quad (8)$$

При различных значениях α , меняющихся от $-\infty$, до $+\infty$, уравнение (8) выразит множество касательных к заданной кривой, следовательно, можно считать, что оно определяет заданную кривую как огибающую ее касательных.

Если теперь продифференцировать уравнение (8) по параметру α , то получится уравнение

$$-x \cos \alpha - y \sin \alpha - \varphi'(\alpha) = 0, \quad (9)$$

которому, как нетрудно видеть, соответствует прямая, перпендикулярная к прямой (8). При меняющихся значениях α уравнение (9) выразит семейство нормалей к заданной кривой и одновременно семейство касательных к новой кривой, которая является огибающей прямых (9). Очевидно, что кривая (9) будет эволютой кривой, заданной уравнением (8), а эта последняя в свою очередь есть эвольвента кривой (9).

Чтобы от уравнения (9) перейти к обычному уравнению эволюты, достаточно, согласно общему способу нахождения огибающей, продифференцировать уравнение (9) по параметру α и, присоединяя к полученному уравнению уравнение (9), параметр α исключить.

Наоборот, если требуется найти эвольвенту кривой, заданной уравнением (8), достаточно умножить обе части этого уравнения на $d\alpha$ и проинтегрировать его. Чтобы от полученного таким путем уравнения эвольвенты перейти к ее уравнению в точечных координатах, достаточно обычным путем исключить параметр α .

Так, например, для эвольвенты окружности имеем $p = a\alpha$ (рис. 193), следовательно, согласно (8), она выразится уравнением

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha - a\alpha = 0,$$

а ее эволюта, согласно (9), уравнением $-x \cos \alpha - y \sin \alpha - a = 0$, которое представляет, как видно, окружность.

Для логарифмической спирали величина p определится равенством $p = e^\varphi \sin \mu$, или, в силу того, что $\mu = \text{const} = c$, равенством $p = ce^\varphi$, где $\varphi = \alpha - \mu$ (рис. 145). Следовательно, согласно (8), эта спираль может быть выражена уравнением $-x \sin \alpha + y \cos \alpha - ce^{\alpha-\mu} = 0$, а ее эволюта — уравнением $-x \cos \alpha - y \sin \alpha - ce^{\alpha-\mu} = 0$, которое выразит также логарифмическую спираль, как в этом легко убедиться, если указанным выше путем привести это уравнение к уравнению в точечных координатах.

2. Эволютоиды. Рассмотрим некоторые обобщения понятий эволюты и эвольвенты. Первым из них являются линии, исследованные еще Реомюром и названные *эволютоидами*.

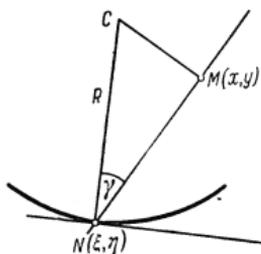


Рис. 203.

Эволютоида заданной кривой представляет собой огибающую, но уже не нормаль этой кривой, как ее эволюта, а прямых, отклоняющихся от нормалей на некоторый угол, величина которого постоянна.

Ясно, что при этом сама данная кривая будет изогональной траекторией касательных к эволютоиде, подобно тому как эвольвента была ортогональной траекторией касательных к эволюте.

Простейшим примером является эволютоида окружности, представляющая собой также окружность меньшего радиуса и концентрическую с данной.

Аналитически эволютоиду можно выразить следующим образом. Пусть

$$f(\xi, \eta) = 0 \quad (10)$$

— уравнение заданной кривой, для которой должна быть найдена эволютоида. Постоянный угол, составляемый прямыми, огибающей которых будет эволютоида, с нормальными заданной кривой, обозначим через γ .

Пусть $M(x, y)$ — точка эволютоиды, соответствующая точке $N(\xi, \eta)$ заданной кривой (10) (рис. 203). Определяя угловой коэффициент прямой NM и подставляя его в уравнение пучка прямых, проходящих через точку N , получим уравнение прямой NM в виде

$$(x - \xi) \left(1 - \frac{d\eta}{d\xi} \operatorname{tg} \gamma \right) + (y - \eta) \left(\operatorname{tg} \gamma + \frac{d\eta}{d\xi} \right) = 0. \quad (11)$$

Искомая эволютоида и будет огибающей прямых (11), следовательно, для аналитического выражения ее нужно продифференцировать уравнение (11) по параметру ξ , что приведет к равенству

$$-(x - \xi) \operatorname{tg} \gamma + y - \eta = \frac{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}. \quad (12)$$

Решая систему уравнений (11) и (12) относительно разностей $x - \xi$ и $y - \eta$, получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} x - \xi &= \cos^2 \gamma \frac{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}} \left(\operatorname{tg} \gamma + \frac{d\eta}{d\xi} \right), \\ y - \eta &= \cos^2 \gamma \frac{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \operatorname{tg} \gamma - 1 \right), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

которые и определяют координаты точки $M(x, y)$ эволютоиды как функции координат точки $N(\xi, \eta)$ заданной кривой. Присоединяя к этим уравнениям уравнение (10) и исключая ξ и η , мы получим уравнение эволютоиды в прямоугольной системе:

Пользуясь уравнениями (13), можно получить интересное соотношение, определяющее простой способ построения эволютоиды по точкам. Возведем с этой целью в квадрат обе части каждого из уравнений (13) и сложим полученные равенства, получим

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \cos^2 \gamma \frac{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)^2}.$$

Выражение, стоящее слева, есть квадрат расстояния MN , а дробь в правой части является квадратом радиуса кривизны заданной кривой (10); отсюда следует, что

$$MN = R \cos \gamma.$$

Таким образом, точка M эволютоиды, соответствующая точке N заданной кривой, может быть получена, если радиус кривизны NC заданной кривой в точке N спроектировать на прямую NM , проходящую через точку N и составляющую с нормалью угол γ . Отсюда и вытекает, как это было замечено еще Реомюром, простой способ построения эволютоиды по точкам, если нормали к заданной кривой известны.

3. Эволюта Браудэ. Другим обобщением эволюты является так называемая *эволюта Браудэ*, определяемая следующим образом: на

нормали заданной кривой в какой-либо ее точке N откладывают отрезок $NM = kR$, где R — радиус кривизны этой кривой в точке N , а k — некоторое число; геометрическое место концов M таких отрезков и будет эволютой Браудэ для заданной кривой.

Пусть заданная кривая выражена уравнением $y = f(x)$. Возьмем на этой кривой некоторую точку $N(x, y)$ и пусть точка $C(\xi, \eta)$ — центр кривизны, соответствующий точке N , а $M(\xi_1, \eta_1)$ — соответствующая точка эволюты Браудэ (рис. 204). Применяя формулы для определения координат точки, делящей отрезок в заданном отношении, получим:

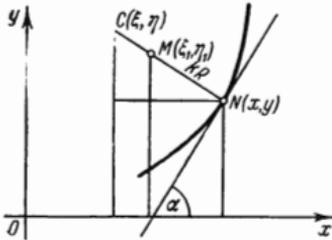


Рис. 204.

$$\xi_1 = \frac{\xi + \lambda x}{1 + \lambda}, \quad \eta_1 = \frac{\eta + \lambda y}{1 + \lambda}, \quad (14)$$

причем $\lambda = \frac{1 - k}{k}$, $\xi = x - \frac{y(1 + y^2)}{y}$,

$$\eta = y + \frac{1 + y^2}{y}.$$

Таким образом, эволюта Браудэ выражается уравнениями (14).

Присоединяя к этим уравнениям уравнение заданной кривой и исключая параметры x и y , получим уравнение эволюты Браудэ для заданной кривой в декартовой системе.

Применяя указанный способ к определению эволюты Браудэ для параболы $y = x^2$, получим:

$$\xi_1 = \frac{x(\lambda - 4x^2)}{1 + \lambda}, \quad \eta_1 = \frac{1 + 2x^2(\lambda + 3)}{2(1 + \lambda)},$$

что дает в общем случае рациональную кривую 3-го порядка.

Если полагать $\lambda = -3$, т. е. считать, что $k = -\frac{1}{2}$, то эволюта Браудэ будет директрисой заданной параболы. Отсюда следует, что центр кривизны в любой точке параболы отстоит от заданной на ней точки на расстояние, в два раза большее, чем расстояние этой точки от директрисы, считаемое по нормали. Этим обстоятельством указывается способ построения центра кривизны для произвольной точки параболы.

Для астроида, заданной уравнениями $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, эволюта Браудэ выразится уравнениями

$$\xi_1 = \frac{(\lambda - 2) \cos^3 t + 3 \cos t}{1 + \lambda}, \quad \eta_1 = \frac{(\lambda - 2) \sin^3 t + 3 \sin t}{1 + \lambda},$$

что дает кривую 6-го порядка.

В частном случае, когда $\lambda = 2$ и, следовательно, при $k = \frac{1}{3}$, эволюта Браудэ для астроида обращается в окружность с радиусом,

равным $\frac{3}{2}$; при $\lambda = -2$ и, следовательно, при $k = -1$ получается также окружность. Интересен случай, когда $\lambda = -4$; эволюта Браудэ обращается здесь в четырехлепестковую розу.

Заметим еще, что эволюта Браудэ для синусоидальных спиралей является также синусоидальной спиралью. Определяя, например, эволюту Браудэ для лемнискаты и полагая при этом $k = \frac{3}{2}$, мы получим равностороннюю гиперболу, что можно использовать для построения центра кривизны в произвольной точке лемнискаты, если известно направление ее нормали в рассматриваемой точке.

4. Эллиптические эволюта и эвольвента. Мы обратимся теперь к наиболее интересному обобщению понятий эволюты и эвольвенты.

Пусть имеем нить длиной l , заданную кривую K и точку O , совпадающую с началом координат. Представим себе, что один конец нити закреплен в какой-либо точке A заданной кривой, а другой ее конец — в точке O (рис. 205). Чертящим острием M натянем нить и будем перемещать его так, чтобы нить оставалась в натянутом состоянии и при движении его огибала бы заданную кривую.

Кривая, вычерчиваемая при этом острием, будет, очевидно, своеобразным обобщением понятия эвольвенты.

Чтобы получить ее аналитическое выражение, условимся в следующем: пусть заданная кривая имеет уравнение $y = f(x)$, точка $M(\xi, \eta)$ есть некоторое положение чертящего острия, а в точке $B(x, y)$ нить касается заданной кривой. Так как длина нити предполагается равной l , то $OM + MB + S = l$, где $S = \widehat{BA}$, или

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} = l - S. \quad (15)$$

Уравнение прямой MB , как касательной к данной кривой в точке $B(x, y)$, запишется в виде

$$\eta - y = y'(\xi - x). \quad (16)$$

Определяя из уравнений (15) и (16) текущие координаты ξ и η точки M , мы получим уравнения, которые и будут выражать искомую кривую K_1 в функциях x и y .

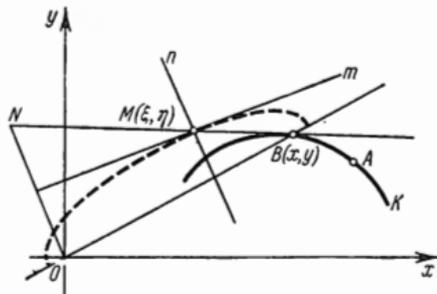


Рис. 205.

Важное свойство этой кривой заключается в следующем. Если на продолжении прямой BM отложить отрезок $MN=ON$ и определить координаты точки N , то отношение их даст угловой коэффициент прямой ON . Если, с другой стороны, определить угловой коэффициент касательной к исследуемой кривой в точке M , то можно обнаружить, что произведение найденных угловых коэффициентов будет равняться -1 , т. е. касательная перпендикулярна к прямой ON и, значит, совпадает с высотой треугольника OMN , а так как этот треугольник равнобедренный, то она будет одновременно и биссектрисой угла OMN . Отсюда следует, что *касательная t к исследуемой кривой K_1 образует с прямолинейными частями нити равные углы*. Вследствие этого нормаль n будет образовывать равные углы с прямыми BM и MO .

Это последнее обстоятельство приводит к интересным выводам, а именно, если полагать, что точка O является светящейся, а исследуемую кривую считать способной отражать лучи, то первоначально заданная кривая будет огибающей этих лучей, т. е. будет кататикой заданной кривой.

Если построить эллипс с фокусами в точках O и B , проходящий через точку M , то касательная t к исследуемой кривой K_1 будет одновременно касательной к эллипсу. Это дает повод рассматривать кривую K_1 как огибающую эллипсов с фокусами в точках O и B и большой осью, равной $l-S$. В силу этого обстоятельства исследуемую кривую K_1 называют *эллиптической эвольвентой* кривой K ; кривую K в свою очередь называют *эллиптической эвольвентой* кривой K_1 .

§ 2. Параллельные кривые

В предыдущем параграфе мы уже пользовались уравнением вида

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha - \varphi(\alpha) = 0. \quad (1)$$

При постоянном значении α это уравнение выразит прямую, отстоящую от начала координат на расстоянии, равном $\varphi(\alpha)$; при меняющихся значениях α — множество прямых, касательных к некоторой кривой, являющейся огибающей этих прямых. Это последнее обстоятельство дало нам возможность считать, что уравнением (1) определяется некоторая кривая K .

Если уравнение (1) продифференцировать по параметру α , то получится уравнение

$$-y \sin \alpha - x \cos \alpha - \varphi'(\alpha) = 0. \quad (2)$$

При фиксированном значении α это уравнение выражает прямую, перпендикулярную к прямой (1), как это видно из соотношения коэффициентов при x и y в уравнениях (1) и (2). Кроме того, согласно общей теории огибающих, уравнению (2) должны удовлетворять координаты точки, в которой прямая (1) касается огибающей (1).

Таким образом, прямая (2), проходя через точку касания и будучи перпендикулярной к касательной, является нормалью кривой K .

После этих предварительных замечаний рассмотрим уравнение

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha - [\varphi(\alpha) + c] = 0, \quad (3)$$

в котором c предполагается постоянным.

По аналогии с уравнением (1) это уравнение при меняющихся значениях α выразит огибающую прямых (3), которые мы будем получать, фиксируя α . Назовем эту огибающую кривой K_1 . Между первой кривой K и второй кривой K_1 существуют определенные соотношения, а именно, в точках, соответствующих одному и тому же значению α , прямые (1) и (3), т. е. касательные к кривым K и K_1 , параллельны между собой; назовем такие точки соответствующими точками кривых K и K_1 и обозначим их через N и M . Кроме того, если уравнение (3) продифференцировать по параметру α , то полученное после дифференцирования уравнение не будет отличаться от уравнения (2), а отсюда следует, что нормаль к кривой K в ее точке N совпадает с нормалью к кривой K_1 в соответствующей точке M . Таким образом, *кривая K и кривая K_1 имеют в соответствующих точках параллельные касательные и общую нормаль.*

Кривые, обладающие таким свойством, называются *параллельными*, и так как расстояние между ними, считаемое по общей нормали (именно в этом смысле и будет употребляться термин «расстояние» в этом параграфе), остается постоянным, равным c , то кривые эти называют также *эквилистантными*.

Так как постоянной c можно приписывать различные значения, то каждой кривой будет соответствовать множество ей параллельных кривых.

Эквилистантными для прямой будут все прямые, ей параллельные, для окружности — окружности, концентрические с данной.

Примером параллельных кривых являются также эвольвенты, соответствующие заданной кривой.

Кривую, параллельную заданной, можно построить, откладывая на нормалях заданной кривой отрезки одной и той же длины.

Параллельная кривая может быть определена также как *траектория центра круга, который катится вдоль заданной кривой*, или как *огибающая окружностей неизменного радиуса, центры которых лежат на заданной кривой.*

Рассмотрим в качестве примера кривую, параллельную эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4)$$

рассматривая ее как огибающую окружностей

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - c^2 = 0, \quad (5)$$

центры которых находятся на заданном эллипсе; следовательно, параметры α и β удовлетворяют соотношению

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (6)$$

Для определения параллельной, согласно общему способу нахождения огибающей, мы должны продифференцировать уравнение (5) по одному из параметров, считая другой параметр функцией первого, определяемой равенством (6). Это приводит здесь, как, впрочем, и в иных случаях, к громоздким выкладкам. Имея это в виду, мы воспользуемся часто употребляемым искусственным приемом.

Умножим обе части уравнения (6) на неопределенный множитель λ и сложим полученное уравнение с уравнением (5):

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - c^2 + \lambda \left[\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 \right] = 0. \quad (7)$$

Дифференцируя уравнение (7) по α и β , получим:

$$x - \alpha - \frac{\alpha\lambda}{a^2} = 0, \quad y - \beta - \frac{\beta\lambda}{b^2} = 0. \quad (8)$$

Исключая теперь из уравнений (5), (6) и (8) параметры α , β и λ , мы и найдем уравнение огибающей окружностей (5). Определим с этой целью сначала параметры α и β из уравнения (8); получим:

$$\alpha = \frac{a^2 x}{a^2 + \lambda}, \quad \beta = \frac{b^2 y}{b^2 + \lambda}.$$

Подставляя эти значения в (5) и (6), будем иметь систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda^2 x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{\lambda^2 y^2}{(b^2 + \lambda)^2} &= c^2, \\ \frac{a^2 x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 + \lambda)^2} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из полученных двух уравнений нужно исключить, наконец, параметр λ , в результате чего уравнение параллельной к эллипсу будет найдено. По виду его можно заключить, что эта кривая является алгебраической кривой 8-го порядка. Уравнение ее громоздко, проще выглядят параметрические уравнения этой кривой, которые можно получить, решая относительно x и y уравнения (9):

$$\begin{aligned} x &= \left(1 + \frac{a^2}{\lambda}\right) \sqrt{\frac{\lambda^3 - b^2 c^2}{a^2 - b^2}}, \\ y &= \left(1 + \frac{b^2}{\lambda}\right) \sqrt{\frac{a^2 c^2 - \lambda^3}{a^2 - b^2}}, \end{aligned}$$

где λ играет роль параметра.

Исследование этих уравнений показывает, что параллельная к эллипсу состоит из двух замкнутых ветвей — наружной, напоминающей

овал, и внутренней, форма которой уже зависит от соотношения между полуосями заданного эллипса и расстоянием c между ним и его параллельной.

На рис. 206, *a* приведена форма внутренней ветви для случая $a > c > b$; при $c = b$ приведенная форма растягивается вдоль большой оси эллипса так, что верхняя и нижняя дуги приходят в соприкосновение; при $c = a$ происходит растяжение вдоль малой оси эллипса до соприкосновения левой и правой дуг.

На рис. 206, *б* приведена форма внутренней ветви для случая $b > c > \frac{b^2}{a}$; при $a < c < \frac{a^2}{b}$ форма такая же, но ветвь вытянута вдоль малой оси эллипса.

На рис. 206, *в* приводится форма внутренней ветви для случая $c \leq \frac{b^2}{a}$; при $c \geq \frac{a^2}{b}$ овал вытягивается вдоль малой оси заданного эллипса и пересекает его в четырех точках.

Заметим еще, что параллельная к эллипсу называется *тороидой*. Название это связано со следующим обстоятельством: представим себе тор как поверхность, являющуюся огибающей шаров одного и того же радиуса, центры которых лежат на его осевой окружности; параллельно проектируя такой тор на плоскость, мы заметим, что его осевая окружность спроектируется в эллипс, а шары — в окружности, огибающей которых и будет тороида (ее частный случай).

Читатель заметил, что выкладки, произведенные при определении тороиды, были достаточно громоздкими. Они становятся несравнимо проще, если кривая, для которой ищется параллельная, задана натуральным уравнением.

Действительно, пусть R и S — радиус кривизны и длина дуги заданной кривой, а R_1 и S_1 — соответствующий радиус кривизны и длина дуги искомой параллельной. Очевидно,

$$R_1 = R + l, \quad (10)$$

где $l = \text{const.}$ С другой стороны, в силу того, что эволютой как

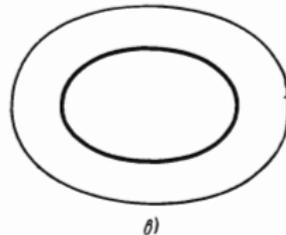
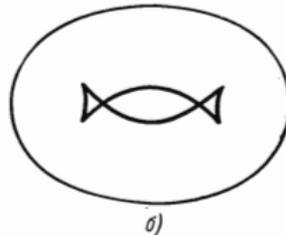
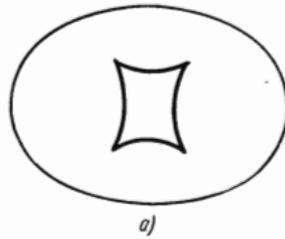


Рис. 206.

первой, так и второй из этих двух параллельных является одна и та же кривая, мы имеем возможность, на основании формулы (6) предыдущего параграфа (стр. 268), записать соотношение $R \frac{dR}{dS} = R_1 \frac{dR_1}{dS_1}$, или $R \frac{dR}{dS} = (R + l) \frac{dR_1}{dS_1} = (R + l) \frac{dR}{dS} \frac{dS}{dS_1}$, откуда

$$dS_1 = \left(1 + \frac{l}{R}\right) dS, \quad (11)$$

и следовательно,

$$S_1 = S + l \int \frac{dS}{R}. \quad (12)$$

Система уравнений (10) и (12) и определяет искомую параллельную.

Применим этот способ для определения параллельной к астроиде. Радиус кривизны R и длина дуги S астроиды вы-

ражаются равенствами $R = \frac{3}{2} a \sin \frac{t}{2}$,

$S = -\frac{3}{4} a \cos \frac{t}{2}$, где a — радиус описанного круга. Обозначая через R_1 и S_1 радиус кривизны и длину дуги искомой параллельной, имеем:

$$R_1 = R + l = \frac{3}{2} a \sin \frac{t}{2} + l,$$

$$S_1 = S + l \int \frac{dS}{R} = -\frac{3}{4} a \cos \frac{t}{2} + \frac{l}{2}.$$

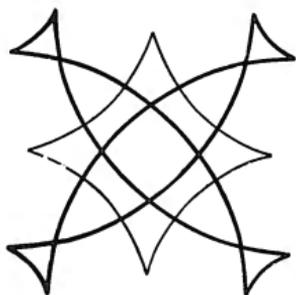


Рис. 207.

Форма параллельной к астроиде приводится на рис. 207.

Рассмотрим в заключение два интересных соотношения из теории параллельных кривых.

Пусть имеются две замкнутые параллельные линии. Выше мы имели равенство (11), согласно которому между дифференциалами дуг двух параллельных кривых имеется соотношение $dS_1 = \left(1 + \frac{l}{R}\right) dS$, откуда, учитывая, что $R = \frac{dS}{d\alpha}$, получим $dS_1 = dS + l d\alpha$ и, следовательно,

$$S_1 = S + l \int_0^{2\pi} d\alpha, \text{ но } \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi;$$

таким образом, $S_1 = S + 2l\pi$, т. е. разность между периметрами двух замкнутых гладких параллельных линий равняется длине окружности, диаметр которой равен расстоянию между этими параллельными.

Представим себе, далее, две выпуклые гладкие и замкнутые параллельные линии и поставим перед собой задачу определить площадь, заключенную между ними.

Пусть MN и M_1N_1 — дуги, заключенные между соответствующими точками этих параллельных (рис. 208). Будем считать эти дуги бесконечно малыми, т. е. положим $MN = dS$. Если, кроме того, угол, составляемый нормалью MM_1 с каким-либо постоянным направлением, обозначить через γ , то угол, составляемый нормалью NN_1 с тем же направлением, будет $\gamma + d\gamma$ и, значит, $\angle DNN_1 = d\gamma$. Площадь $MM_1N_1N =$ площадь MM_1DN + площадь DNN_1 ; полагая эту площадь дифференциалом dU площади, заключенной между нашими замкнутыми параллельными линиями, и рассматривая площадь DNN_1 , как площадь кругового сектора с радиусом l и центральным углом $d\gamma$, а площадь MM_1DN — как площадь прямоугольника со сторонами l и dS , получим $dU = l dS + \frac{1}{2} l^2 d\gamma$, откуда $U = l \int dS + \frac{1}{2} l^2 \int d\gamma$. Первый из этих интегралов по замкнутому контуру даст S , а второй — 2π ; следовательно,

$$U = lS + \pi l^2;$$

таким образом, площадь, заключенная между двумя выпуклыми замкнутыми параллельными линиями, равняется сумме площади прямоугольника со сторонами, равными расстоянию между этими кривыми и длине периметра внутренней параллельной, и площади круга, радиус которого равен расстоянию между этими параллельными.

Соотношение это дает возможность быстро определить, например, площадь между эллипсом и тороидой.

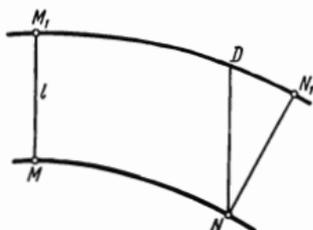


Рис. 208.

§ 3. Катакаустики

Катакаустикой данной кривой называется огибающая лучей, отраженных этой кривой.

Исследование катакаустик, начатое еще в 17 столетии, представляло практический интерес в связи с проблемами оптики и привлекло внимание ряда крупных ученых. Особенно много в разработке теории этих кривых сделал И. Бернулли.

Мы будем рассматривать катакаустики кривых для частного случая, когда падающие лучи параллельны между собой.

Пусть

$$f(\xi, \eta) = 0 \quad (1)$$

— уравнение отражающей кривой, для которой нужно найти катакаусту. Будем полагать, что падающие лучи параллельны

оси ординат, тогда уравнение любого из этих лучей имеет вид $x - \xi = 0$.

Уравнение нормали к кривой (1) в точке $M(\xi, \eta)$ (рис. 209) запишется в виде $x - \xi + (y - \eta) \frac{d\eta}{d\xi} = 0$. Если угол, составленный нормалью с осью абсцисс, обозначить через θ , а угол, составляемый отраженным лучом с той же осью, — через γ , то, как это видно из рисунка, $\gamma = 2\theta - 90^\circ$, откуда $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(2\theta - 90^\circ) = -\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}{2 \operatorname{tg} \theta}$, и

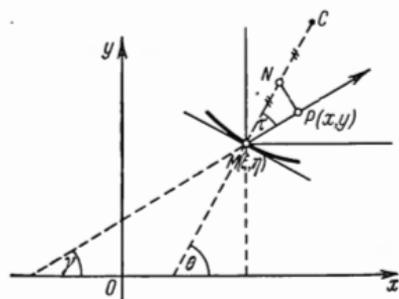


Рис. 209.

так как $\operatorname{tg} \theta = -\frac{d\xi}{d\eta}$, то $\operatorname{tg} \gamma =$

$$= -\frac{1 - \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{2 \frac{d\eta}{d\xi}}$$
, и следовательно,

отраженный луч выразится уравнением

$$(x - \xi) \left[1 - \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 \right] + 2(y - \eta) \frac{d\eta}{d\xi} = 0. \quad (2)$$

Так как катакаустика является огибающей лучей (2), то для определения ее достаточно продифференцировать уравнение (2) по ξ , а затем из полученного уравнения и уравнения (2) выразить x и y — координаты точки P катакаустики, соответствующей точке M заданной кривой.

Дифференцируя (2) по ξ , получим:

$$-(x - \xi) \frac{d\eta}{d\xi} + (y - \eta) = \frac{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2}}. \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) имеем:

$$x = \xi - \frac{\frac{d\eta}{d\xi}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}; \quad y = \eta + \frac{1 - \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2}}. \quad (4)$$

Уравнения (4) выражают координаты x и y точки P катакаустики в функциях ξ и η — координат точки M заданной кривой.

Присоединяя к этим уравнениям уравнение (1) отражающей кривой и исключая параметры ξ и η , получим уравнение катакаустики.

Используя уравнение (3), можно получить важное свойство катакаустики, которым указывается способ ее построения по точкам. Определим для этой цели длину l отраженного луча, под которой мы понимаем длину отрезка от точки $M(\xi, \eta)$ отраженного луча до

точки $P(x, y)$ касания его с огибающей. На основании уравнения (4) имеем

$$l = MP = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = \frac{1}{2} \frac{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}.$$

Если учесть, что радиус кривизны R и угол отражения τ определяются равенствами

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}, \quad \cos \tau = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

то приходим к заключению, что $l = \frac{1}{2} R \cos \tau$.

Таким образом, если $M(\xi, \eta)$ — точка отражающей кривой, а C — центр кривизны этой кривой в точке M , то точку P катакаустики параллельных лучей можно получить, проектируя середину N отрезка MC на отраженный луч (рис. 209).

В качестве примера рассмотрим катакаустiku параболы $\eta^2 = 2p\xi$, когда падающие лучи параллельны оси ординат.

Пользуясь уравнениями (4), получим:

$$x = 3\xi, \quad y = \frac{\eta(3p - 2\xi)}{2p}.$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнение параболы и исключая ξ и η , получим уравнение

$$54py^2 = x(2x - 9p)^2,$$

которое и выражает катакаустiku параболы.

Если из этого уравнения найти дифференциал дуги и радиус кривизны кривой, то будем иметь:

$$dS = \frac{2x + 3p}{2\sqrt{6px}}, \quad R = \frac{(2x + 3p)^3}{12p}.$$

Исключая x , мы выразим катакаустiku параболы натуральным уравнением

$$S = -\frac{1}{2} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{\frac{3}{4}p}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}}.$$

По виду этого уравнения заключаем, что эта кривая является синусоидальной спиралью с индексом, равным $-\frac{1}{3}$.

Следовательно, она может быть выражена в полярной системе уравнением $\rho^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}$. Кривая с таким уравнением называется кубикой Чирнгаузена (см. стр. 88).

Для циклоиды $\xi = a \operatorname{arccos} \frac{a-\eta}{a} - \sqrt{2a\eta - \eta^2}$ уравнения катакаустики имеют вид

$$x = \xi + \sqrt{2a\eta} - \sqrt{a\eta - \eta^2}, \quad y = a - \frac{(a-\eta)^2}{a}.$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнение самой циклоиды и исключая ξ и η , получим уравнение

$$x = \frac{a}{2} \operatorname{arccos} \frac{a-2y}{a} - \sqrt{ay - y^2},$$

по которому узнаем, что катакаустика циклоиды является также циклоидой, радиус производящего круга которой равен половине радиуса производящего круга данной циклоиды.

Предоставляем читателю убедиться в том, что катакаустикой логарифмической кривой $y = a \ln \frac{x}{a}$ для лучей, параллельных оси абсцисс, является цепная линия $x = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{y+a}{2}} + e^{-\frac{y+a}{2}} \right)$, а катакаустикой кривой Штейнера является астроида.

Что касается катакаустики окружности, то она была рассмотрена в разделе, посвященном эпициклоидам.

§ 4. Подэры, подоиды, изооптические кривые

1. Подэры. Подэрой данной кривой K относительно какой-либо точки плоскости называется новая кривая, являющаяся геометрическим местом оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на касательные к заданной кривой.

Будем полагать, что точка, относительно которой нужно найти подэру заданной кривой, совпадает с началом координат.

Пусть заданная кривая выражена в плюккерových координатах уравнением $f(u, v) = 0$, т. е. является огибающей прямых

$$ix + vy + 1 = 0, \quad (1)$$

и, следовательно, любая из прямых (1) есть касательная к этой кривой. Перпендикуляр к такой касательной, проходящий через начало координат и точку $M(x, y)$ (рис. 210) выразится уравнением

$$-vx + uy = 0. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) находим:

$$u = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (3)$$

Эти формулы определяют соотношение между плюккеровыми координатами заданной кривой и точечными координатами ее подэры.

Соответствие, устанавливаемое формулами (3) между прямыми и точками плоскости определяют так называемое *подэрное преобразование*. Оно складывается из полярного преобразования и инверсии заданной кривой. Действительно, подвергнем заданную кривую $f(u, v) = 0$ сначала полярному преобразованию относительно окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Такое преобразование определяется, как известно, формулами

$$u = -\xi, \quad v = -\eta. \quad (4)$$

Оно приводит в соответствие прямой $ux + vy + 1 = 0$, т. е. прямой $-\xi x - \eta y + 1 = 0$, точку $P(\xi, \eta)$ плоскости, являющуюся полюсом этой прямой относительно окружности $x^2 + y^2 = 1$. Таким образом, возникает новая кривая, «полярная» заданной, с уравнением $F(\xi, \eta) = 0$ в точечных координатах.

Подвергнем теперь эту кривую инверсии относительно того же круга с центром в начале и радиусом, равным единице. Это последнее преобразование осуществляется формулами (см. стр. 37)

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

Так возникает новая кривая, которая и будет подэрой кривой (1), так как последовательное применение формул (4) и (5) равносильно, как это легко видеть, применению формул (3) подэрного преобразования.

Пусть задана кривая

$$f(x, y) = 0 \quad (6)$$

и точка $C(a, b)$. Чтобы найти уравнение подэры кривой (6) относительно точки C , заметим, что уравнение касательной к этой кривой запишется в виде

$$(\xi - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

а уравнение прямой, проходящей через точку C и перпендикулярной к этой касательной, имеет вид

$$(\xi - a) \frac{\partial f}{\partial y} - (\eta - b) \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Исключая из уравнений (6), (7) и (8) x и y , получим уравнение подэры кривой (6).

В главах VI и VII мы уже рассматривали подэры ряда кривых. В частности, было показано, что

подэра окружности относительно какой-либо точки, не совпадающей с ее центром, есть улитка Паскаля (см. стр. 107);

подэра параболы относительно ее вершины является циссоидой (стр. 70);

подэра параболы $y^2 = 2px$ относительно точки $(0, b)$, лежащей на касательной в вершине этой параболы, есть офиурида (стр. 84); подэра астроида относительно ее центра симметрии является четырехлепестковой розой (стр. 133).

Добавим дополнительно, что

подэра параболы относительно фокуса есть касательная в вершине этой параболы;

подэра параболы относительно любой точки $(a, 0)$ плоскости, за исключением уже упомянутых, является конхойдой Слюза; для параболы $y^2 = 2px$ эта кривая выразится уравнением $2y^2(x-a) + 2(x-a)^2x + py^2 = 0$;

подэра эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно его центра выражается уравнением $a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$;

подэра гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно ее фокуса выражается уравнением $[x(x-a) + y^2]^2 = a^2(x-c)^2 - b^2y^2$.

2. Негативные подэры. Задачу об определении подэры заданной кривой можно обратить, т. е. определять кривую, для которой заданная кривая является подэрой. Эта искомая кривая называется *негативной подэрой* заданной кривой.

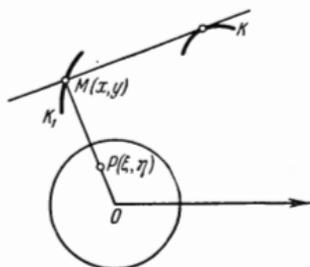


Рис. 210.

Ясно, что негативная подэра данной кривой K_1 (рис. 210) относительно какой-либо точки O является огибающей тех прямых, которые перпендикулярны к прямым, соединяющим точки кривой K_1 с точкой O . Это обстоятельство определяет простой способ для нахождения негативной подэры в случае, когда кривая K_1 выражена полярным уравнением, а точка O совпадает с началом координат.

Прямые, огибающей которых является негативная подэра, могут быть выражены при этом уравнением

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \rho(\varphi) = 0. \quad (9)$$

Дифференцируя это уравнение по φ , будем иметь:

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi - \rho'(\varphi) = 0. \quad (10)$$

Исключая из уравнений (9), (10) и уравнения заданной кривой x и y , мы и получим искомое уравнение негативной подэры.

3. Подоиды. В простом отношении к подэре заданной кривой K находится кривая, являющаяся геометрическим местом точек P , с и м-

Эта кривая является, следовательно, геометрическим местом точек, из которых заданная кривая видна под одним и тем же углом, что и определяет ее название.

Если $\gamma = \frac{\pi}{2}$, то кривую называют *ортооптической*.

Для аналитического выражения изооптической кривой удобно предполагать кривую K заданной уравнением

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha - f(\alpha) = 0, \quad (15)$$

т. е. принять ее за огибающую прямых (15), как это мы уже делали не один раз в предыдущих параграфах (стр. 269). Угол α в уравнении (15) представляет собой, как мы знаем, угол, составленный касательной к кривой (15) с осью абсцисс; если этот угол фиксировать, то уравнение (15) выразит одну из касательных к данной кривой K .

Вторая касательная, составляя с первой угол γ , будет составлять с осью абсцисс угол $\alpha + \gamma$ и, значит, по аналогии с уравнением (15), может быть выражена уравнением

$$-x \sin(\alpha + \gamma) + y \cos(\alpha + \gamma) - f(\alpha + \gamma) = 0. \quad (16)$$

Из уравнений (15) и (16) следует

$$x \sin \gamma = \cos(\alpha + \gamma) \cdot f(\alpha) - \cos \alpha \cdot f(\alpha + \gamma),$$

$$y \sin \gamma = \sin(\alpha + \gamma) \cdot f(\alpha) - \sin \alpha \cdot f(\alpha + \gamma).$$

Этими уравнениями определяются x и y — координаты точки пересечения касательных к заданной кривой K , составляющих между собой угол γ , т. е. координаты точки изооптической кривой.

Если $\gamma = \frac{\pi}{2}$, то соответствующие параметрические уравнения ортооптической кривой запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= -\sin \alpha \cdot f(\alpha) - \cos \alpha \cdot f\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \\ y &= \cos \alpha \cdot f(\alpha) - \sin \alpha \cdot f\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для логарифмической спирали $\rho = e^\varphi$, например, имеем $f(\alpha) = ON = \rho \sin \mu = ke^\varphi$ (рис. 212), где $k = \sin \mu = \text{const}$. Тогда, согласно (17) и принимая во внимание, что $\alpha = \varphi + \mu$, получим:

$$x = -\sin(\varphi + \mu) ke^\varphi - \cos(\varphi + \mu) ke^{\varphi + \mu},$$

$$y = \cos(\varphi + \mu) ke^\varphi - \sin(\varphi + \mu) ke^{\varphi + \mu},$$

откуда $x^2 + y^2 = (k^2 + k^2 e^{2\mu}) e^{2\varphi}$. Обозначая постоянный коэффициент в правой части через C^2 , будем иметь $\rho = Ce^\varphi$, откуда следует, что

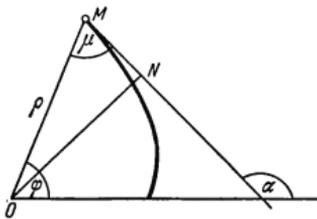


Рис. 212.

ортооптическая кривая для логарифмической спирали является также логарифмической спиралью.

Подобным образом можно было бы убедиться в том, что ортооптическая кривая для эллипса и гиперболы $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ является окружностью $x^2 + y^2 = a^2 \pm b^2$, а для параболы — ее директрисой.

Изооптические линии этих кривых будут уже кривыми 4-го порядка; для эллипса и гиперболы, в частности, они будут кривыми Персея.

Понятие изооптической линии можно обобщить, рассматривая кривую, являющуюся геометрическим местом вершин постоянного угла, который перемещается в плоскости так, что одна из его сторон касается одной из двух заданных кривых, а вторая касается другой кривой.

В случае, когда этот постоянный угол прямой, траекторию его вершины называют *подэрой одной из заданных кривых относительно другой заданной кривой*. Это и есть то обобщение понятия подэры, о котором упоминалось выше.

§ 5. Радиальные кривые

При движении точки по кривой меняется величина радиуса кривизны этой кривой и его направление.

Возьмем фиксированную точку и от нее будем откладывать отрезки, равные по длине радиусам кривизны заданной кривой и одинаковые с ними по направлению. Геометрическое место концов таких отрезков представляет собой своеобразный годограф радиуса кривизны этой кривой и называется *радиальной кривой*, соответствующей заданной кривой.

Определим радиальную кривую, предполагая, что заданная кривая выражена натуральным уравнением

$$S = \psi(R). \quad (1)$$

Пусть фиксированная точка, от которой мы должны откладывать указанные выше отрезки для построения радиальной кривой, совпадает с полюсом полярной системы. Полярную ось этой системы направим параллельно тому радиусу кривизны заданной кривой, с откладывания которого вдоль полярной оси мы начнем построение радиальной кривой.

Угол φ между полярной осью и радиусом-вектором ρ какой-либо точки P радиальной кривой будет, очевидно, равен углу γ между нормальными заданной кривой, одна из которых параллельна полярной оси, а другая параллельна радиусу-вектору точки P .

Если S и R — длина дуги и радиус кривизны заданной кривой (1), то $\frac{dS}{d\gamma} = R$, или

$$d\gamma = \frac{dS}{R}. \quad (2)$$

Так как при нашем выборе системы координат $\gamma = \varphi$ и $R = \rho$, а из уравнения (1) заданной кривой следует $dS = \psi'(R) dR$, или $dS = \psi'(\rho) d\rho$, то равенство (2) принимает вид $d\varphi = \frac{\psi'(\rho)}{\rho} d\rho$, откуда

$$\varphi = \int \frac{\psi'(\rho)}{\rho} d\rho; \quad (3)$$

это и есть полярное уравнение радиальной кривой, соответствующей кривой (1).

Применим указанный способ определения радиальной кривой для кривых, выраженных натуральным уравнением вида

$$S = \int \frac{\lambda dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^\mu - 1}}. \quad (4)$$

Так как при этом $dS = \frac{\lambda dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^\mu - 1}}$, то уравнение (3) принимает вид

$$\varphi = \int \frac{\lambda d\rho}{\rho \sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu - 1}}. \quad (5)$$

Полагая $\left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu - 1 = z^2$, получим $\rho = a(z^2 + 1)^{\frac{1}{\mu}}$, откуда $d\rho = \frac{a}{\mu} (z^2 + 1)^{\frac{1}{\mu} - 1} \cdot 2z dz$, и уравнение (5) запишется в виде

$$\varphi = \frac{2\lambda}{\mu} \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{2\lambda}{\mu} \operatorname{arctg} z.$$

Возвращая z его прежнее значение, получим:

$$\rho = \frac{a}{\cos^{\frac{\mu}{2}} \frac{\mu\varphi}{2\lambda}}. \quad (6)$$

Это и есть уравнение радиальной кривой для кривых, выражаемых уравнением (4).

Отметим, в частности, следующие случаи: если $\mu = -2$ и $\lambda = 1$, то уравнение (4) выразит циклоиду, а уравнение (6) принимает вид $\rho = a \cos \varphi$; таким образом, радиальной кривой для циклоиды является окружность; если $\mu = 2$ и $\lambda = 1$, то уравнение (4) выразит цепную линию равного сопротивления, а уравнение (6) принимает вид $\rho = \frac{a}{\cos \varphi}$; таким образом, радиальная кривая для цепной линии равного сопротивления есть прямая.

Исследование иных частных случаев предоставляем читателю.

Заметим еще, что радиальная кривая для трактрисы, натуральное уравнение которой $R = a \sqrt{e^{\frac{2S}{a}} - 1}$, выразится уравнением $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$ и представляет собой кривую, называемую каппой (стр. 140).

Задачу о разыскании радиальной кривой, соответствующей некоторой заданной кривой, можно обратить, т. е. определять кривую, для которой заданная кривая является радиальной. Искомую кривую называют в этом случае *антирадиальной* по отношению к заданной кривой.

Если заданная кривая выражена в полярной системе уравнением $\varphi = f(\rho)$, то, заменяя φ через γ и ρ — через R , получим $\gamma = f(R)$, откуда $d\gamma = f'(R) dR$, и так как $d\gamma = \frac{dS}{R}$, то $S = \int R f'(R) dR$; это и есть натуральное уравнение искомой антирадиальной кривой.

ЛИТЕРАТУРА

Основными пособиями при написании настоящей книги были известные монографии о кривых:

1. G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, B. I, II, Leipzig, 1911.
2. H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Leipzig, 1908.
3. Ebner, Leitfaden der wichtigen technische Kurven, 1906.

При изложении отдельных вопросов были использованы книги:

1. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, Leipzig, 1910.
2. E. Beutel, Algebraische Kurven, Leipzig, 1911.
3. Ф. Клейн, Высшая геометрия, М. — Л., 1939.
4. Ф. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей, ч. 2, М. — Л., 1934.
5. А. П. Норден, Краткий курс дифференциальной геометрии, М., 1958.
6. Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, М. — Л., 1949.
7. Р. Уокер, Алгебраические кривые, М., 1951.
8. О. К. Житомирский, В. Д. Львовский, В. Н. Милинский, Задачи по высшей геометрии, ч. 1 и 2, М. — Л., 1937.
9. В. П. Вельмин, Кривые 3-го порядка, Киев, 1911.
10. Ф. Клейн, Лекции о развитии математики в 19 столетии, М. — Л., 1937.

Отдельные сведения о кривых были почерпнуты из журнальной литературы и из книг по истории математики.

Автор использовал также материал своей ранее изданной книги о кривых,

УКАЗАТЕЛЬ

- Агвинья Ньютона 90
Аньези Мария 89
Аполлоний 10
Архимед 10, 196
Астроида 130—134, 181
— косая 134
- Барроу* 141
Бернулли Д. 248
Бернулли И. 11, 68, 262
Бернулли Я. 162, 201, 211
Бонати 162
Брахистохрона 245
Брианшон 12
Бужо 256
- Варинг* 91
Верзиера 89—90
Ветвь кривой гиперболическая 45
— — параболическая 45
— — пунктирная 190
«Ветряная мельница» 142
- Галилей* 220, 247
Гессе 12
Гессиана 56
Гиперболизмы конических сечений 50
Гиперболы дефективные 47
— параболические 49
— раскнутые 46
Гипотрохоида 118—121
Гипоциклоида 109—118
Гиппий 227
Гир, де ла 11, 12
Гомология 35
Гранди 167
Грассман 13
Гюйгенс 11, 68, 104, 142, 185, 220, 224, 245, 248
- Двулистник прямой 129
Дезарг 12
Декарт 10, 68, 211
Диаметр кривой 24
— — третьего порядка 59
- Динострат* 227
Диоклес 73
- Евклид* 14
- Жанр кривой 22
«Жезл» 202
«Жук» 134
- Задача делосская (удвоение куба) 72
- Инверсия 36
- Каппа 140—142, 289
Кардиоида 80, 99, 107, 121—124, 150, 155
Кассини 150
Катакаустика 274, 279—282
— параболы 89, 281
Катеноид 215
Квадратриса Динострата 227—230
— Чирнгаузена 230
Квадратура круга 229
Класс алгебраической кривой 20
Клебш 12
Клофоида 262—264
«Колосья» 168
Конон Самосский 196
Конхоида гиперболической спирали 198—199
— косая 105—106
— Никомеда 100—104
— Слюза 284
Координаты однородные 31
— трилинейные (проективные) 30
Кохлеоида 230—233
Крамер 91, 99
Кривая Гаусса 236
— затухающих колебаний 237—240
— изохронная 243
— крестообразная 167, 168, 180
— логарифмическая 234
— Оцанама 230
— показательная 233—235

- Кривая приводимая (распадающаяся) 18
 — Штейнера 124—130
 — эквипотенциальная 224
 Кривые адиабатические 186—187
 — алгебраические 17
 — антирадиальные 289
 — Гвидо Гранди 162
 — гиперболические 181—188
 — дьявола 91
 — изооптические 285—287
 — изотермические 186—187
 — интерсцендентные 190
 — конхональные 104—106
 — Крамера 86
 — Ламэ 179—181
 — Мангейма 251
 — ортооптические 286
 — паналгебраические 191
 — параболические 181—188
 — параллельные 274—279
 — Персея 142—144
 — политропные 186—188
 — пятого порядка 99
 — радиальные 287—289
 — рациональные 23
 — Рибокура 259—262
 — скольжения 168—177
 — степенно-показательные 237
 — трансцендентные 17, 189—192
 — третьего порядка рациональные 56—57
 — — — — циркулярные 63
 — — — — циркулярные 62
 — Уатта 175—177
 — узорные 265
 — циклоидальные 109—121
 — циркулярные 23
 — циссоидальные 74—78
 — Чезаро 261
 — четвертого порядка бициркулярные 97
 — — — — рациональные 97—99
 — — — — рациональные 92—96
 — — — — эллиптические 96—97
 — Штурма 248—251
 — эквидистантные 275
 — эллиптические 23
 Кубика смешанная 77—78
 — Чирнгаузена 88—89, 259, 282

Лейбниц 185, 262
 Лемниската Бернулли 99, 145, 147, 155—162, 184
 — Бута 99, 144—146
 Лемнискатаоида 175
 Линии апланетические 137
 — спирические 142
 Линия двойная 179

 Линия погонная 256—259
 — свода 218
 — цепная 211—220, 223, 250, 261
 — — — — равного сопротивления 218—220
 Лист Декарта 65—68, 76
 Лобачевский 224
 Локсодрома 207
 Лориа 191

Менхем 10

 Нейлоид 185
 Нейль 11
 Неоида 194
 Ньюмен 53
 Ньютон 44, 73, 139

 Овалы Декарта 135—140
 — Кассини 146—150
 — Мюнстера 177—179
 Однолистник 130
 Ортоконхоида 106
 Офиурида 84—85

 Парабола кубическая 53, 184—185
 — Нейля (полукубическая) 185
 Параболы дивергентные (расходящиеся) 36, 51, 53
 Паскаль 11, 12
 Перидиклоида 111
 Перро 224
 Плюккер 13, 53, 91
 Подоида 284—285
 Подэра 63, 282—284
 — астроиды 133
 — кривой Штейнера 128—130
 — лемнискаты 157
 — негативная 284
 — окружности 107, 124
 — параболы 63, 70, 79, 84, 85, 284
 — эвольвенты окружности 194
 — эпициклоиды 118
 Полюс 58
 Поляра 24
 — гармоническая 60
 — кривой третьего порядка 58—59
 Понселе 12
 Порядок кривой 17
 Преобразование Маклорена 87
 — подэрное 283
 — циссоидальное 74
 Преобразования аффинные 28
 — двойственные 40
 — инволюционные 35
 — касательные 43
 — квадратичные 38

- Преобразования кремоновы (бирацио-
 нальные) 40
 — полярные 42
 — проективные 33
 Прямая Симсона 127
 Псевдоверзиера 87, 90
 Псевдоспирали 264
 Псевдосфера 225
 Ранг кривой 191
Рибокур 262
Роберваль 11, 68, 73
 Род кривой 22
 Роза трехлепестковая 77, 129, 166—167
 Роза четырехлепестковая 133, 166—167
 Розы 162—167
 — трохоидальные 119—120
 Свойства кривых аффинные 30
 — — проективные 36, 61
Слюз 73, 141
 Спирали алгебраические 196—202
 — синусоидальные 150—155
 Спираль Архимеда 192—196
 — Галилея 199—200
 — гиперболическая 197—198, 227
 — Корню 263
 — логарифмическая 202—211
 — параболическая 201
 — радиоидальная 263
 — Ферма 200—201, 202
 — Штурма 269
 — $\rho = \frac{a}{\varphi^3}$ 200
 Степень кривой 191
 Строфоида 78—84, 88, 142
 — косая 82—84
 Теорема Котеса 26
 — Маклорена 54
 — Ньютона 25, 53
 — Сальмона 61
 — Харта 62
 — Шаля 26
Торичелли 11, 84, 185, 205, 211, 247
 Тороида 277
 Точка асимптотическая 189
 — прекращения 189
 — угловая 189
 Точки кратные кривой третьего по-
 рядка 56
 — перегиба кривой третьего по-
 рядка 55—57
 Точки циклические 23
 Трактриса 220—225
 — окружности 225—227
 — полярная 226—227
 Трезубец 52
 Трехлистник прямой 129
 Трисектриса Каталана 88—89
 — Лоншама 76, 168
 — Маклорена 85—87, 168
 Трисекция угла 76, 86, 104, 107, 156
 Трохоиды 118—121, 245—247
 «Узлы» 142
 Улитка Паскаля 99, 106—108, 120, 136
Фаньяно 11, 159, 162
Ферма 11, 104
 Фокусы кривой 24
 Формула Клейна 21
 Формулы Плюккера 21
Хабеннихт 167
 Центр абсолютный 26
 — Ньютона 24
 — средних расстояний 24
 Циклоида 240—248, 261
 — удлиненная 246—247
 — укороченная 246—247
 Циклоиды высших порядков 116
 Циссоида Диоклеса 68—73, 79, 88
 Циссоиды кривых второго порядка
 75—78
Чезаро 13
Шаль 12, 139
Штейнер 12, 160
 Эвольвента 266—270
 — вторая 269
 — окружности 252—254, 268
 — — обобщенная 194, 254—255
 — эллиптическая 274
 Эволюта 266—270
 — Браудэ 271—273
 — эллипса 267
 — эллиптическая 273—274
 Эволютоида 270—271
Эйлер 91, 215
 Эпитрохоиды 118—121
 Эпициклоиды 109—118
 Эпиэллипсиды 251

Алексей Александрович Савелов.

Плоские кривые. Систематика, свойства,
применения.
(Справочное руководство)

Редактор *Ю. И. Левин.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*

Корректор *О. А. Сигал.*

* * *

Сдано в набор 1/XII 1959 г. Подписано к печати
13/IV 1960 г. Бумага $60 \times 92^{1/16}$. Физ. п. л. 18,5.
Условн. печ. л. 18,5. Уч.-изд. л. 18,47. Тираж
10 000 экз. Т-01080. Цена 9 р. 40 к. Заказ № 109.

* * *

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

* * *

Ленинградский Совет народного хозяйства. Управ-
ление полиграфической промышленности. Типогра-
фия № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького,
Ленинград, Гатчинская, 26.