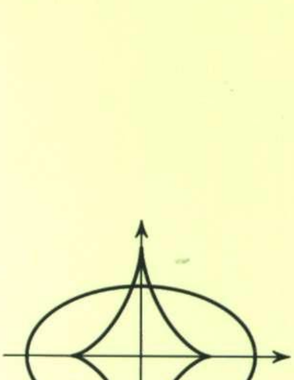
НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

О. К. ШЕЙНМАН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ



НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

О. К. Шейнман

Основы теории представлений

Москва
Издательство МЦНМО
2004

УДК 512.547.2+512.815
ББК 22.1
Ш39

Шейнман О. К.

Ш39 Основы теории представлений. — М: МЦНМО, 2004. — 64 с.

ISBN 5-94057-169-7

Книга представляет собой семестровый вводный курс теории представлений конечных и важнейших компактных групп. Предназначается для студентов математических и физических специальностей, начиная со второго курса.

ББК 22.1

Олег Карлович Шейнман

Основы теории представлений

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 27.09.2004 г.
Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 4.
Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-169-7

Предисловие автора

Настоящие лекции представляют собой записки семестрового вводного курса теории представлений, читанного мною в Независимом московском университете в 2002—2004 годах. Они предназначены для студентов начиная со второго курса.

При подготовке этих лекций я придерживался двух правил:

1) представлять общие принципы на простых конкретных примерах;

2) демонстрировать теорию представлений в действии.

Например, в соответствии с первым правилом, я формулирую теорему о существовании инвариантной меры на компактной группе, но вместо доказательства вычисляю ее на группе вращений, которая реально используется ниже. Или демонстрирую унитарный трюк Вейля на примере $\mathrm{SU}(2)$ и $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

В соответствии со вторым правилом, в лекции о представлениях симметрической группы я привожу выражение рациональных решений уравнения Кадомцева—Петвиашвили через полиномы Шура. Я показываю, что уже простейшие рассмотрения в теории представлений приводят к фундаментальным выводам о строении атома. Кульминацией курса является решение уравнения Шредингера для электрона в центральном поле и вытекающее из него объяснение строения первых периодов таблицы Менделеева.

При подготовке своих лекций я широко пользовался замечательной книгой Э. Б. Винберга «Линейные представления групп». По сравнению с ней я еще более жестко подошел к отбору доказываемых фактов. В то же время я несколько приблизил изложение к классическим книгам И. М. Гельфанда, Р. А. Минлоса и З. Я. Шапиро «Унитарные представления группы вращений и группы Лоренца» и Б. Л. Ван-дер-Вардена «Метод теории групп в квантовой механике». Имеются заимствования из «Фейнмановских лекций по физике».

Я благодарен С. Локтеву за разрешение включить в записки разработанный им цикл задач (см. приложение). Я также благодарю В. Шувалова, сделавшего макет и внесшего многочисленные предложения редакционного характера, а также других сотрудников издательства МЦНМО, внесших ряд улучшений в текст.

О. К. Шейнман. Май 2004 г.

Лекция 1. Общие свойства представлений

1. Основные определения

Пусть G — группа, V — конечномерное комплексное линейное пространство, $\mathrm{GL}(V)$ — группа обратимых операторов в V. *Представлением G в V* называется гомоморфизм $T\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Оператор, отвечающий элементу $g \in G$, называется его *оператором представления* и обозначается $T(g)$ или T_g.

Пусть V_0 — подпространство, инвариантное относительно всех операторов представления T. Тогда ограничения операторов T_g на V_0 образуют представление G в V_0, которое называется *подпредставлением* T. Представление, образованное фактороператорами в пространстве V/V_0, называется *факторпредставлением*. Представление, не имеющее нетривиальных (т. е. отличных от нулевого и от него самого) подпредставлений, называется *неприводимым*; в противном случае — *приводимым*.

Представление называется *разложимым*, если V раскладывается в прямую сумму (нетривиальных) инвариантных подпространств, и *вполне приводимым*, если каждое инвариантное подпространство имеет инвариантное дополнение.

Представление называется *унитарным* относительно заданной невырожденной эрмитовой формы в V, если эта форма инвариантна относительно всех операторов представления (иными словами, все T_g унитарны). Представление называется *унитаризуемым*, если невырожденная инвариантная эрмитова форма существует.

Теорема 1.1. *Унитарные представления вполне приводимы.*

Доказательство. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству относительно инвариантной эрмитовой формы само инвариантно. □

Теорема 1.2. *Представления конечных групп унитаризуемы и, как следствие, вполне приводимы.*

Доказательство. Пусть E — какая-либо невырожденная эрмитова форма в V. Тогда

$$(x, y) = |G|^{-1} \sum_{g\in G} E(T_g x, T_g y) \tag{1}$$

является *инвариантной* невырожденной эрмитовой формой. □

2. Эквивалентность, морфизмы (сплетающие операторы)

Морфизмом (*сплетающим оператором*) представлений $T_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ и $T_2\colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ называется такой оператор $C\colon V_1 \to V_2$, что $CT_1(g) = T_2(g)C$ для любого $g \in G$. Если C является изоморфизмом линейных пространств, то, по определению, он является и изоморфизмом представлений. Аналогично, термины *эндоморфизм, автоморфизм* переносятся из категории линейных пространств в категорию представлений. Если изоморфизм существует, представления называются *эквивалентными* (обозначение: $T_1 \cong T_2$). Множество (классов эквивалентности) неприводимых представлений группы G обозначим $\widehat{G}$.

Теорема 1.3. *Каждый морфизм неприводимых представлений — либо изоморфизм, либо нулевой оператор.*

Доказательство. Ядро и образ морфизма инвариантны. Следовательно, каждое из них либо является нулевым подпространством, либо совпадает с соответствующим представлением. □

Лемма Шура (Schur). *Каждый эндоморфизм неприводимого представления над $\mathbb{C}$ скалярен.*

Доказательство. Пусть $CT(g) = T(g)C$, и λ — характеристическое значение C. Тогда $(C - \lambda I)T(g) = T(g)(C - \lambda I)$, т. е. $C - \lambda I$ — морфизм. Но $\det(C - \lambda I) = 0$, поэтому $C - \lambda I = 0$ (теорема 1.3). □

Лемма Шура — основной критерий неприводимости в теории представлений. Напротив, основной метод разложения представлений — построение диагонального (но не скалярного) сплетающего оператора.

Следствие. *Пусть T_1 и T_2 — эквивалентные неприводимые представления. Тогда любой изоморфизм T_1 и T_2 имеет вид $\lambda\sigma$, где $\sigma: T_1 \to T_2$ — фиксированный изоморфизм, $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть $\tau: T_1 \to T_2$ — изоморфизм, тогда $\tau\sigma^{-1}$ — автоморфизм T_1, т. е. $\tau\sigma^{-1} = \lambda I$. □

Задача 1.1. *Каждое неприводимое представление абелевой группы одномерно.*

3. Основные операции: $\oplus$, $\otimes$

Пусть T_1 — представление G в U, T_2 — представление G в W и $V = U \oplus W$. Представление T в V, определенное формулой $T(g)(x \oplus y) = T_1(g)x \oplus T_2(g)y$, называется *прямой суммой* представлений T_1 и T_2 и обозначается $T_1 \oplus T_2$. Прямую сумму n экземпляров представления τ обозначим $n\tau$.

Пусть T_1 — представление G в U, T_2 — представление H в W и $V = U \otimes W$. Представление T группы $G \times H$ в V, определенное формулой $T(g \times h)(x \otimes y) = T_1(g)x \otimes T_2(h)y$ ($x \in U$, $y \in W$, $g \in G$, $h \in H$), называется *тензорным произведением* представлений T_1 и T_2 и обозначается $T_1 \otimes T_2$. Термин *тензорное произведение* применяется к еще одной аналогичной операции, в которой и U, и W — представления одной и той же группы G. При этом, по определению, $(T_1 \otimes T_2)(g)(x \otimes y) = T_1(g)x \otimes T_2(g)y$.

4. Спектр представления

Лемма 1.1. *Пусть $T\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — представление и $V = V_1 \oplus \ldots$ $\ldots \oplus V_m$ — разложение в сумму неприводимых инвариантных подпространств. Тогда T вполне приводимо и, более того, для каждого инвариантного подпространства $U \subset V$ найдутся такие $i_1, \ldots, i_p$, что $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_p}$.*

Доказательство. Номера $i_1, \ldots, i_p$ выбираем из условия, что U, $V_{i_1} \ldots, V_{i_p}$ — максимальная независимая подсистема (в крайнем случае набор $i_1, \ldots, i_p$ окажется пустым). Тогда для любого $i = 1, \ldots, m$

$$\underbrace{V_i \cap (U \oplus V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_p})}_{\text{инвариантное подпространство в } V_i} = \begin{cases} V_i, \\ \{0\}. \end{cases}$$

Случай $\{0\}$ исключен, т. к. тогда V_i линейно независимо с остальными. Следовательно, $V_i \subseteq U \oplus V_{i_1} \oplus \ldots V_{i_p}$ и $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_p}$. □

Лемма 1.2. *Если T разложено на неприводимые: $T = \bigoplus T_i$, то любое его подпредставление (факторпредставление) эквивалентно сумме некоторой части представлений T_i.*

Доказательство. По лемме 1.1 $V/U = V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_p}$, и утверждение для фактора доказано. Для подпредставления: всякое подпредставление изоморфно факторпредставлению по дополнительному подпространству, а оно в данном случае имеется — по лемме 1.1. □

Теорема единственности. *Разложение на неприводимые единственно с точностью до эквивалентности: если $T \cong T_1 \oplus \ldots \oplus T_m$ и $T \cong$ $\cong S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$, то $m = n$ и после соответствующей перенумерации $T_i \cong S_i$, $i = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. С точностью до изоморфизма можно считать, что представления T_i и S_j действуют в одном и том же пространстве V, и, соответственно, мы имеем два разложения V в прямую сумму неприводимых подпространств: $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ и $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$, так что $T_{V_i} \cong T_i$ и $T_{U_j} \cong S_j$.

Проведем доказательство индукцией по m. Применим лемму 1.1 к подпространству $U = U_1$. Это дает $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_k}$, где $V_{i_1}, \ldots, V_{i_k}$ — некоторая часть представлений $V_1, \ldots, V_m$. Тогда $T_U \cong$ $\cong T_{V/V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_k}}$. Из данного по условию разложения $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ имеем $T_{V/V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_k}} \cong V_{j_1} \oplus \ldots \oplus V_{j_l}$, где $\{j_1, \ldots, j_l\} = \{1, \ldots, m\} - \{i_1, \ldots, i_k\}$. Следовательно,

$$S_1 \cong T_U \cong T_{V/V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_k}} \cong T_{j_1} \oplus \ldots \oplus T_{j_l}.$$

Так как S_1 неприводимо, то $l = 1$. Введем новую нумерацию подпространств V_i так чтобы V_{j_1} приобрело номер 1. После этого $V_1 \cong U$ и $\{i_1, \ldots, i_k\} = \{2, \ldots, m\}$. Мы имеем, следовательно, два разложения: $V = U \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_m$ и $V = U \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$, из которых вытекает, что

$$T_2 \oplus \ldots \oplus T_m \cong T_{V/U} \cong S_2 \oplus \ldots \oplus S_n.$$

По предположению индукции $m = n$ и, после надлежащей перенумерации, $T_2 \cong S_2, \ldots, T_m \cong S_m$. □

Следствие. *Если* $T \cong \bigoplus\limits_{\tau \in \widehat{G}} m_\tau \tau \cong \bigoplus\limits_{\tau \in \widehat{G}} n_\tau \tau$, *то* $m_\tau = n_\tau$ *для любого* $\tau \in \widehat{G}$.

Набор $\{m_\tau \mid \tau \in \widehat{G}\}$ называется *спектром* представления T. Из теоремы единственности следует, что *два представления эквивалентны тогда, и только тогда, когда они имеют одинаковый спектр.*

5. Неприводимость тензорного произведения

Теорема 1.4. *Тензорное произведение двух неприводимых представлений групп G и H неприводимо (как представление $G \times H$).*

Доказательство. Пусть $T\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, $S\colon H \to \mathrm{GL}(U)$.

1) Рассмотрим случай, когда $H = \{e\}$ и $S = I$ — тождественное представление. Тогда любое неприводимое подпространство $W \subset V \otimes U$ (относительно $T \otimes I$) имеет вид $V \otimes u_0$ $(u_0 \in U)$.

Действительно, пусть $u_1 \ldots u_m$ — базис в U. Всякий элемент $V \otimes U$ единственным образом представляется в виде $x_1 \otimes u_1 + \ldots + x_m \otimes u_m$; в частности, для любого $w \in W$ имеем $w = \sigma_1(w) \otimes u_1 + \ldots + \sigma_m(w) \otimes u_m$. Очевидно, σ_i — морфизмы:

$$(T \otimes I)(g)w = \underbrace{T(g)\sigma_1(w)}_{\sigma_1(T\otimes I(g)w)} \otimes u_1 + \ldots$$

Из последнего соотношения видно, что $\sigma_i(T \otimes I)(g)w = T(g)\sigma_i(w)$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Следовательно, σ_i — морфизм $(T \otimes I)|_W$ и T — двух неприводимых представлений. По следствию из леммы Шура существуют такой фиксированный изоморфизм $\sigma\colon (T \otimes I)|_W \to T$ и такие $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, m$, что $\sigma_i = \lambda_i \sigma$. Таким образом,

$$w = \sigma(w) \otimes \underbrace{\left(\sum \lambda_i u_i\right)}_{u_0} = \sigma(w) \otimes u_0.$$

Поскольку $\sigma\colon W \to V$ — изоморфизм, имеем $\sigma(W) = V$. Окончательно $W = V \otimes u_0$.

2) Пусть теперь S неприводимо и $W \subset V \otimes U$ инвариантно относительно $T \otimes S$.

Операторы вида $T(g) \otimes S(e)$ образуют представление, изоморфное $T \otimes I$. Пусть $W' \subseteq W$ — неприводимое подпространство в W относительно $T \otimes I$. Из 1) следует, что $W' = V \otimes u_0$, $u_0 \neq 0$. Таким образом, $W \supseteq V \otimes u_0$. Будем применять к $V \otimes u_0$ операторы вида $T(e) \otimes S(h)$. Так как S неприводимо, то

$$\mathrm{Span}\{S(h)u_0 \mid h \in H\} = U,$$

где Span обозначает линейную оболочку. Таким образом, $W \supset \supset V \otimes U$. □

Решения задач к лекции 1

1.1. Если G абелева, то T_g является автоморфизмом представления T для любого g. Если T неприводимо, то $T_g = \lambda_g I$, $\lambda_g \in \mathbb{C}$ (лемма Шура); следовательно $\dim T = 1$.

Лекция 2. Разложение регулярного представления

1. Действия групп на множествах

Говорят, что задано *действие* σ группы G на множестве X, если каждому $g \in G$ сопоставлено отображение $\sigma(g)\colon X \to X$, причем $\sigma(g_1 g_2)x = \sigma(g_1)(\sigma(g_2)x)$ (*левое действие*) или $x\sigma(g_1 g_2) = (x\sigma(g_1))\sigma(g_2)$ (*правое действие*). (Как $\sigma(g)x$, так и $x\sigma(g)$ обозначают образ элемента x при отображении $\sigma(g)$.) В обоих случаях предполагается, что $\sigma(e) = 1$. Отображения $\sigma(g)$ часто называются *сдвигами* (соответственно, левыми или правыми). Как правило, мы будем писать gx вместо $\sigma(g)x$ и xg вместо $x\sigma(g)$.

Если на X задана структура топологического пространства (гладкого многообразия, аналитического многообразия, пространства с мерой), то сдвиги предполагаются непрерывными (соответственно, гладкими, аналитическими, измеримыми).

Орбитой элемента $x \in X$ называется множество $\{gx \mid g \in G\}$.

Каждому действию на множестве естественным образом соответствует представление G в пространстве функций на этом множестве:

$$(T_g f)(x) = f(g^{-1}x) \quad \text{для левого действия}$$

и

$$(S_g f)(x) = f(xg) \quad \text{для правого действия.}$$

Примером является *регулярное представление* группы G:

$$\operatorname{Reg}(g_1, g_2)f(g) = f(g_2^{-1}gg_1).$$

Тут имеет место смешение терминов, так как на самом деле Reg является представлением $G \times G$, а не G. Тем не менее мы будем придерживаться традиционной терминологии.

Ограничение Reg на подгруппы $G \times \{e\}$ и $\{e\} \times G$ дают соответственно представления

$$L(g)f(h) = f(g^{-1}h) \quad \text{и} \quad R(g)f(h) = f(hg).$$

Первое из них называется *левым регулярным*, а второе — *правым регулярным*. Они действительно являются представлениями группы G, причем L соответствует левому, а R — правому действию группы G на самой себе.

Задача 2.1. $\dim \operatorname{Reg} = |G|$.

2. Двойственное представление

Для произвольного представления T группы G положим $T'(g) = T(g^{-1})'$ (справа $'$ — сопряженный оператор, определенный канонически).

Задача 2.2. T' — *представление.*

3. Матричные элементы

Возьмем представление $T\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Если выбрать базис в V, мы получим изоморфизм $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(n)$, где $n = \dim V$. Сквозной гомоморфизм $G \to \mathrm{GL}(n)$ мы будем называть *матричной формой представления* T, имея в виду под $T(g)$ уже не сам оператор представления, а его матрицу. Элементы $T_{ij}(g)$ этой матрицы, рассматриваемые как функции на G, называются *матричными элементами* представления T.

Обратно, пусть мы имеем гомоморфизм $G \to \mathrm{GL}(n)$. Выбирая базис в V и используя возникающий при этом изоморфизм $\mathrm{GL}(n) \to \mathrm{GL}(V)$, получим представление G в V. При выборе другого базиса получится эквивалентное представление. Таким образом, с точки зрения теории представлений нет различия между операторной и матричной формой представления. Как правило, мы будем переходить от одной к другой без особых оговорок.

Также без оговорок мы будем переходить от пространства $\mathrm{End}(V)$ эндоморфизмов (операторов) в пространстве V к соответствующему пространству матриц $\mathrm{Matr}(n \times n)$, если это приводит к эквивалентным представлениям.

В качестве примера обращения с терминологией сформулируем следующую задачу (существенно используемую в излагаемой ниже теории).

Задача 2.3. *$T \otimes S$ изоморфно представлению в пространстве матриц:*

$$(T \otimes S)(g_1, g_2)\xi = T(g_1)\xi S(g_2)', \quad \xi \in \mathrm{Matr}(n \times m).$$

В левой части $(T \otimes S)(g_1, g_2)$ — оператор. В правой части $T(g_1) \in \mathrm{Matr}(n \times n)$, $S(g_2) \in \mathrm{Matr}(m \times m)$. Задача подразумевает установление соответствия между пространством представления $T \otimes S$ и пространством $\mathrm{Matr}(n \times m)$.

Линейная оболочка функций T_{ij} называется *пространством матричных элементов представления* T:

$$M(T) = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij} T_{ji}(g) \,\middle|\, \xi_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Организуя числа ξ_{ij} в матрицу ξ, имеем

$$M(T) = \{\operatorname{tr} \xi T(g) \mid \xi = (\xi_{ij}) \in \mathrm{Matr}(n \times n)\}.$$

Задача 2.4 (следствие). *$M(T)$ не зависит от выбора базиса.*

Поскольку $M(T)$ является пространством функций, то оно, очевидно, вложено в Reg. Будет ли это вложение морфизмом представлений?

Лемма 2.1. *$M(T)$ является подпредставлением в* Reg.

Доказательство. Мы должны доказать, что $M(T)$ инвариантно относительно операторов представления Reg. Если $f \in M(T)$, то $f(g) = \operatorname{tr} \xi T(g)$ для некоторого ξ. Поэтому

$$\begin{aligned}(\mathrm{Reg}(g_1, g_2)f)(g) = f(g_2^{-1} g g_1) = \operatorname{tr} \xi T(g_2^{-1})T(g)T(g_1) = \\ = \operatorname{tr}(T(g_1)\xi T(g_2^{-1})T(g)) = \operatorname{tr}(\eta T(g)) \in M(t),\end{aligned}$$

где $\eta = T(g_1)\xi T(g_2^{-1})$. □

Задача 2.5. *$T \otimes T' \cong M(T)$.*

Следствие 2.1. *$M(T)$ — неприводимое представление $G \times G$.*

Следствие 2.2. *T вложено в R (R — правое регулярное представление).*

Доказательство. $T \otimes T'|_{G\times\{e\}}$ кратно T и вложено в R вместе с $M(T) \cong T \otimes T'$. □

Итак, каждое неприводимое представление группы G вложено в (правое или левое) регулярное, причем с кратностью, равной размерности этого неприводимого представления.

4. Разложение Reg

Лемма 2.2. *Если T и S — неизоморфные неприводимые представления G, то $T \otimes T'$ и $S \otimes S'$ не изоморфны как представления $G \times G$.*

Доказательство. Если бы эти представления были изоморфны, то изоморфны были бы также $TI = T \otimes T'|_{G\times\{e\}}$ и $SI = S \otimes S'|_{G\times\{e\}}$. Но $TI \cong mT$, $SI = nS$. Лемма следует из единственности разложения на неприводимые. □

Принимая во внимание результат задачи 2.5, получаем

Следствие 2.3. *Если T и S — неизоморфные неприводимые представления G, то $M(T)$ и $M(S)$ не изоморфны как представления $G \times G$.*

Пусть $\widehat{G}$ — полный набор классов эквивалентности неприводимых представлений группы G ($|\widehat{G}| < \infty$, т. к. любое неприводимое представление вкладывается в R).

Лемма 2.3. $\bigoplus\limits_{T\in\widehat{G}} M(T) \subseteq \mathrm{Reg}$.

Доказательство. Для любого неприводимого T, по лемме 2.1, $M(T) \subseteq \mathrm{Reg}$. Представления $M(T)$ неприводимы (следствие 2.1) и попарно неизоморфны (задача 2.5 и лемма 2.2). Отсюда следует, что пространства $M(T)$, $T \in \widehat{G}$, линейно независимы. Действительно, предположим противное. Тогда существуют такие $T_1, \ldots, T_k, T_{k+1} \in \widehat{G}$, что $M(T_1), \ldots, M(T_k)$ линейно независимы и $M(T_{k+1}) \cap \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M(T_i) \neq \{0\}$. Поскольку пересечение инвариантных подпространств инвариантно, а $M(T_{k+1})$ неприводимо, то рассматриваемое пересечение должно совпадать с $M(T_{k+1})$, т.е. $M(T_{k+1}) \subseteq \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M(T_i)$. Тогда по лемме 1.2 $M(T_{k+1})$ эквивалентно одному из представлений $M(T_1), \ldots, M(T_k)$, что противоречит следствию 2.3.

Лемма немедленно следует из доказанной линейной независимости подпространств $M(T)$ в Reg. □

Теорема 2.1 (о разложении Reg). $\mathrm{Reg} = \bigoplus\limits_{T\in\widehat{G}} M(T)$.

Доказательство. Ввиду леммы 2.3 осталось доказать, что $\mathrm{Reg} \subseteq \bigoplus\limits_{T\in\widehat{G}} M(T)$.

Пусть $f_1, \ldots, f_N$ — базис в Reg, а $R_{ij}(g)$ — матричные элементы правого регулярного представления R в этом базисе.

Для произвольного $j = 1, \ldots, N$ разложим $f_j(g)$ по $R_{ij}(g)$:

$$f_j(g) = f_j(e \cdot g) = (R(g)f_j)(e) = \left(\sum_{i=1}^{N} R_{ij}(g) f_i\right)(e) = \sum_{i=1}^{N} f_i(e) R_{ij}(g),$$

т. е. $f_j = \sum\limits_i f_i(e) R_{ij} \in M(R)$. Но R имеет разложение на неприводимые с некоторыми кратностями: $R = \bigoplus\limits_{T \in \widehat{G}} m_T T$. Поэтому $M(R) \subseteq \bigoplus\limits_{T \in \widehat{G}} M(T)$ (т. к. в подходящем базисе матрица R — блочно-диагональная с $T \in \widehat{G}$ по диагонали).

Таким образом, $f_j \in \bigoplus\limits_{T \in \widehat{G}} M(T)$ для всех $j = 1, \ldots, N$. Это и означает, что $\operatorname{Reg} \subseteq \bigoplus\limits_{T \in \widehat{G}} M(T)$. □

Следствие 2.4 (теорема Бернсайда (Burnside)).

$$|G| = \sum_{T \in \widehat{G}} (\dim T)^2.$$

Следствие 2.5.

$$L \cong R \cong \bigoplus_{T \in \widehat{G}} (\dim T) \cdot T.$$

Задача 2.6. *Найдите все неприводимые представления циклической группы $\mathbb{Z}_m$ ($\cong \{\sqrt[m]{1}\}$).*

Задача 2.7. *Если группа конечна и все ее неприводимые представления одномерны, то она абелева.*

Задача 2.8. *Найти все неприводимые представления S_3 и их геометрическое описание.*

Решения задач к лекции 2

2.3. $T \otimes S = \left\{\sum \xi_{ij} t_i \otimes s_j\right\}$, где t_i, s_j — базисные элементы. Этому сопоставляется $\xi = (\xi_{ij})$. Формула для действия проверяется простым вычислением.

2.4. Если $T(g) \to CT(g)C^{-1}$, то $\operatorname{tr}(\xi C T(g) C^{-1}) = \operatorname{tr}(C^{-1} \xi C T(g)) = \operatorname{tr}(\eta t(g))$ — элемент того же самого пространства.

2.5. $T \otimes T' \cong M(T)$ (T неприводимо).

а) Воспользуемся матричной интерпретацией $T \otimes T'$ (задача 2.3) и построим отображение $\mu\colon T \otimes T' \to M(T)$ по формуле $\xi \xrightarrow{\mu} \operatorname{tr}(\xi T(g))$.

б) μ — морфизм представлений. Действительно

$$(T \otimes T')(g_1, g_2)\xi = T(g_1)\xi(T'(g_2))' \text{ (задача 2.3)} = T(g_1)\xi(T(g_2^{-1})')' = \\ = T(g_1)\xi(T(g_2^{-1}),$$

$$(\mathrm{Reg}(g_1,g_2)(\mathrm{tr}\,\xi T))(g) = \mathrm{tr}\,\xi T(g_2^{-1}gg_1) = \mathrm{tr}(T(g_1)\xi T(g_2^{-1})\cdot T(g)),$$

т. е. μ коммутирует с действием группы.

в) μ — изоморфизм.

$T\otimes T'$ неприводимо по теореме 1.2.

Поскольку μ — нетривиальный морфизм, то $\mu(T\otimes T')\cong T\otimes T'$.

Итак, $T\otimes T'\subseteq M(T)$. Но $\dim T\otimes T' = (\dim T)^2$, а $M(T)$ порождается функциями вида $T_{ij}(g)$, $i,j=1,\dots,\dim T$, т. е. $\dim M(T)\leqslant(\dim T)^2$. Следовательно $T\otimes T'\cong M(t)$.

2.6. Пусть $T_k(1) = e^{2\pi ik/m} = \omega^k$ $(\omega = e^{2\pi i/m})$, $\dim T_k = 1$. Очевидно, они не изоморфны, их m штук, и по теореме Бернсайда это все представления.

Замечание. Можно непосредственно доказать, что матричные элементы представлений T_k линейно независимы. Это приводит к детерминанту Вандермонда:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{m-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(m-1)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & \omega^{m-1} & \omega^{2(m-1)} & \dots & \omega^{(m-1)^2}\end{pmatrix}.$$

2.7. Все $M(T)$ одномерны. Следовательно, $f(g^{-1}hg) = f(h)$ для любых g,h. Действительно,

$$\mathrm{Reg}(g,g)|_{M(T)}\xi = \underbrace{T(g)\xi T(g^{-1})}_{\text{все одномерно}} = \xi,$$

т. е. $\mathrm{Reg}(g,g)\equiv\mathrm{id}$.

Итак, $f(g^{-1}hg) = f(h)$ для любых f,g,h.

Но если $f(g_1) = f(g_2)$ для любого f, то $g_1 = g_2$. Действительно, возьмем $f = \delta_{g_1}$, т. е. $f(g_1) = 1$, $f(g) = 0$ $(g\neq g_1)$. Если $\delta_{g_1}(g_1) = \delta_{g_1}(g_2)$, то $g_1 = g_2$. Мы доказали, что $g^{-1}hg = h$ для любых g,h, т. е. $gh = hg$.

2.8. $6 = 1^2+1^2+2^2 = 1^2+\ldots+1^2$ (6 раз). Второй случай отпадает, так как группа неабелева. Итак, имеется два одномерных представления и одно двумерное. Вот эти представления:

1) тривиальное представление;

2) перестановка $\to(-1)^{\text{четность}}$;

3) двумерное представление: преобразования плоскости соответствуют перестановкам вершин правильного треугольника $A_1A_2A_3\to A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}A_{\sigma(3)}$ (это повороты на $2\pi/3$ и отражения в высотах).

Лекция 3. Характеры и групповая алгебра

1. Характеры: основные факты

Характером представления T называется функция

$$\chi_T(g) := \operatorname{tr} T(g).$$

По определению $\chi_T(g) \in M(T)$.

Пример. Характеры одномерных представлений S_3 таковы.

1) $\chi(\sigma) \equiv 1$ для тривиального представления;

2) $\chi(\sigma) = (-1)^\sigma$ для представления $\sigma \to (-1)^\sigma$;

3) характер двумерного представления:

$$\chi(\sigma) = \begin{cases} 2, & \sigma = I, \\ 0, & \sigma \text{ — транспозиция}, \\ -1, & \sigma = (123). \end{cases}$$

Это следует из того, что в подходящем базисе матрицы $T(\sigma)$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Характеры обладают следующими свойствами по отношению к операциям над представлениями. Для произвольного представления

$$\chi_{T'}(g) = \chi_T(g^{-1})$$

(для доказательства достаточно взять след от обеих частей равенства $T'(g) = T(g^{-1})'$). Для унитарных представлений

$$\chi_{T'}(g) = \overline{\chi_T(g)}.$$

Для характеров прямой суммы и тензорного произведения представлений

$$\chi_{T\oplus S} = \chi_T + \chi_S, \quad \chi_{T\otimes S} = \chi_T \cdot \chi_S.$$

Докажем второе из этих соотношений. Базис в тензорном произведении имеет вид $\{x_i \otimes y_j\}$, где $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ — базисы в пространствах исходных представлений. Тогда (i,j)-й диагональный элемент оператора $T(g) \otimes S(h)$ в этом базисе равен $T_{ii}(g)S_{jj}(h)$. Независимое суммирование диагональных элементов по i и j дает требуемое произведение характеров.

2. Центральные функции

Пусть $C(G)$ — пространство всех функций на G, $Z(G) \subseteq C(G)$ – подпространство функций, постоянных на классах сопряженных элементов. Такие функции называются *центральными*.

Характер любого представления T является центральной функцией: $\chi_T(g) \in Z(G)$. Действительно,

$$\chi_T(hgh^{-1}) = \operatorname{tr}(T(h)T(g)T(h^{-1})) = \operatorname{tr} T(g) = \chi(g).$$

Теорема 3.1. $\{\chi_\tau \mid \tau \in \widehat{G}\}$ *— базис пространства* $Z(G)$.

Доказательство. 1) Центральные функции — это функции, неподвижные относительно регулярного представления в следующем смысле:

$$f \in Z(G) \Longleftrightarrow \operatorname{Reg}(g, g)f = f \quad \forall g \in G.$$

Для каждого $f \in C(G)$ имеем разложение $f = \sum_{\tau\in\widehat{G}} f_\tau$, $f_\tau \in M(\tau)$, причем это разложение однозначно. Для $f \in Z(G)$ получаем отсюда разложение

$$f = \sum_{\tau\in\widehat{G}} \operatorname{Reg}(g, g)f_\tau.$$

Ввиду инвариантности $M(\tau)$ функции $\operatorname{Reg}(g, g)f_\tau$ также являются элементами $M(\tau)$. Сравнивая два разложения для f, находим $\operatorname{Reg}(g, g)f_\tau = f_\tau$. Таким образом, $f_\tau \in Z(G)$. Мы показали, что

$$f \in Z(G) \Longrightarrow f_\tau \in Z(G) \cap M(\tau) \quad \forall\tau.$$

2) Покажем, что

$$f \in Z(G) \cap M(\tau) \Longrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{C}\colon f = \lambda\chi_\tau.$$

Воспользуемся изоморфизмом $\tau \otimes \tau' \overset{\mu}{\cong} M(\tau)$ и матричной интерпретацией $\tau \otimes \tau'$. Этот изоморфизм имеет вид $\mu\colon \xi \to f = \operatorname{tr}(\xi\tau(g))$. Так как f неподвижна относительно действия G, то и ξ неподвижно, т. е. $\tau(g)\xi\tau(g^{-1}) = \xi$. Тогда $\tau(g)\xi = \xi\tau(g)$, т. е. ξ — эндоморфизм представления τ. По лемме Шура $\xi = \lambda I$. Тогда $f(g) = \operatorname{tr}(\lambda I)\tau(g) = \lambda\chi_\tau(g)$.

Таким образом, мы доказали полноту характеров неприводимых представлений в пространстве $Z(G)$. Их линейная независимость вытекает из независимости пространств $M(\tau)$. □

Следствие 3.1. *Число классов неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов группы.*

Доказательство. $\#\{\chi_\tau \mid \tau \in \widehat{G}\} = \dim Z(G) =$ число классов сопряженности. □

Как показывает следующая теорема, характер является важнейшим инвариантом представления.

Теорема 3.2. *Любое представление определяется своим характером с точностью до эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $T = \bigoplus_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau \tau$. Тогда $\chi_T = \bigoplus_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau \chi_\tau$. Так как χ_τ линейно независимы, то числа m_τ определяются однозначно, то есть по характеру определяется спектр представления. □

3. Групповая алгебра

Элементы пространства $C(G)$ — это функции, и как таковые их можно перемножать. Однако в этом пространстве существует еще одно, некоммутативное, умножение, называемое сверткой (и обозначаемое символом $*$). По определению,

$$(\varphi * \psi)(g) = \sum_{hk=g} \varphi(h)\psi(k).$$

Пространство $C(G)$ с такой операцией умножения называют *групповой алгеброй* группы G.

Элементы групповой алгебры очень удобно записывать в виде формальных линейных комбинаций элементов группы: $\varphi \rightsquigarrow \sum_{g\in G}\varphi(g)\cdot g$. Например, g будет символизировать функцию, равную 1 на элементе группы g и нулю на прочих элементах. Свертка получится, если умножение групповых элементов естественным образом продолжить на такие формальные комбинации, т. е. положить $g * h = gh$ и продолжить по линейности.

Непосредственно из определений вытекают формулы

$$R_{g^{-1}} f = f * g, \quad L_g f = g * f.$$

Ввиду R- и L-инвариантности, подпространства $\{M(\tau) | \tau \in \widehat{G}\}$ оказываются идеалами групповой алгебры.

Лемма 3.1. *$Z(G)$ — центр $C(g)$, т. е. центр $C(g)$ совпадает с алгеброй функций, постоянных на классах сопряженных элементов (центральных функций).*

Доказательство. $f \in Z(G) \iff f * h = h * f \ \forall h \in G$. Здесь $f * h = \sum f(g)\cdot gh$, $h * f = \sum f(g)\cdot hg$. Условие $f * h = h * f$ означает, что при $gh = hg'$ $(g' = h^{-1}gh)$ $f(g') = f(g)$. □

4. Центральные характеры

Каждое представление группы продолжается на групповую алгебру:

$$T(f) = \sum_{g\in G} f(g)T(g), \quad f \in C(G).$$

Пусть $Z'(G)$ обозначает двойственное пространство к $Z(G)$. *Центральным характером* представления T называется $\lambda_T \in Z'(G)$, где

$$\lambda_T(\chi) = \operatorname{tr} T(\chi) = \sum_{g\in G} \chi(g)\chi_{T'}(g), \quad \chi \in Z(G).$$

Если T неприводимо, то $T(\chi)$ — скаляр, т. е. $T(\chi) = \dfrac{\lambda_T(\chi)}{\dim T} I$.

Теорема 3.3. *$\{\lambda_\tau \mid \tau \in \widehat{G}\}$ — базис в $Z'(G)$.*

Доказательство. 1) Пусть, как и выше, σ' — представление, двойственное к σ. Когда σ пробегает $\widehat{G}$, σ' также пробегает $\widehat{G}$. Покажем, что

$$\sigma, \tau \in \widehat{G},\ \sigma' \not\cong \tau \Longrightarrow \lambda_\tau(\chi_\sigma) = 0.$$

Вычислим $\tau(\chi_\sigma)$ через правое регулярное представление.

$$R|_{M(\tau)} \doteq (\dim\tau)\tau \Longrightarrow R(\chi_\sigma)|_{M(\tau)} = (\dim\tau)\tau(\chi_\sigma).$$

Далее, $R(\chi_\sigma) = *\chi_{\sigma'}$ (свертка с $\chi_{\sigma'}$). Действительно, по определению $R(\chi_\sigma) = \sum \chi_\sigma(g^{-1})R_{g^{-1}}$. Но $R_{g^{-1}} = *g$, а $\chi_\sigma(g^{-1}) = \chi_{\sigma'}(g)$, поэтому $R(\chi_\sigma) = *\sum \chi_{\sigma'}(g)g$.

Если $f \in M(\tau)$, то $f * \chi_{\sigma'} = 0$; иными словами, $(*\chi_{\sigma'})|_{M(\tau)} = 0$. Действительно, $M(\tau)$ и $M(\sigma')$ — двусторонние идеалы, поэтому $f * \chi_{\sigma'} \in M(\tau) \cap M(\sigma')$. Так как $\sigma' \not\cong \tau$, то $M(\tau) \cap M(\sigma') = \{0\}$.

Таким образом, $R(\chi_\sigma)|_{M(\tau)} = 0$, т. е. $(\dim\tau)\tau(\chi_\sigma) = 0$, откуда $\lambda_\tau(\chi_\sigma) = 0$.

2) Теперь покажем, что $\lambda_\tau(\chi_{\tau'}) \neq 0$, т. е. λ_τ — базисный элемент в $Z(G)'$, двойственный к базисному элементу $\chi_{\tau'}$ в $Z(G)$. По определению

$$\tau(\chi_{\tau'}) = \sum_g \chi_{\tau'}(g)\tau(g).$$

Следовательно,

$$\lambda_\tau(\chi_{\tau'}) = \operatorname{tr}\tau(\chi_{\tau'}) = \sum_g \chi_{\tau'}(g)\chi_\tau(g).$$

Воспользуемся унитаризуемостью представления τ и перейдем к эквивалентному представлению унитарными матрицами. Тогда находим $\tau'(g) = \tau(g^{-1})' = \overline{\tau(g)}$, т. е. $\tau' = \overline{\tau}$. Следовательно, $\chi_{\tau'} = \overline{\chi_\tau}$. Окончательно имеем

$$\lambda_\tau(\chi_{\tau'}) = \sum_g \overline{\chi_\tau(g)}\chi_\tau(g) \neq 0. \quad \square$$

Теорема 3.4. *Представление конечной группы с точностью до эквивалентности определяется своим центральным характером.*

Доказательство. $T \cong \bigoplus_{\tau \in \widehat{G}} m_\tau \tau \Longrightarrow T(\chi) = \sum m_\tau \tau(\chi) \Longrightarrow \lambda_T = \sum m_\tau \lambda_\tau$.
Но λ_τ линейно независимы, поэтому числа m_τ определяются по λ_T однозначно. □

5. Разложение представлений

Пусть дано представление T группы G. Соответствующее представление $Z(G)$ дает большой запас коммутирующих между собой эндоморфизмов исходного представления, которые весьма полезны для его разложения на неприводимые. Например, в случае представлений с простым спектром неприводимые компоненты совпадают с общими собственными подпространствами этих эндоморфизмов.

Лекция 4. Соотношения ортогональности

1. Инвариантное скалярное произведение в $C(G)$

Рассмотрим на $C(G)$ следующую эрмитову форму:

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}. \qquad (*)$$

Лемма 4.1. Reg — *унитарное представление в* $C(G)$ *относительно формы* $(*)$.

2. Единственность инвариантного скалярного произведения

Лемма 4.2. *Для неприводимого представления инвариантное скалярное произведение единственно с точностью до пропорциональности.*

Доказательство. Пусть $(\cdot\,,\cdot)$ временно обозначает заданное скалярное произведение в пространстве представления. Всякое другое скалярное произведение имеет вид (Ax, y), где A — матрица. Если оба произведения инвариантны, то

$$(T_g^{-1} A T_g x, y) = (A T_g x, T_g y) = (Ax, y).$$

Из невырожденности формы $(\cdot\,,\cdot)$ вытекает, что $T_g^{-1} A T_g = A$ для всех $g \in G$, откуда $A T_g = T_g A$ также для всех $g \in G$. По лемме Шура $A = \lambda I$. □

3. Соотношения ортогональности

В ходе доказательства теоремы 3.3 мы показали, что $\lambda_\tau(\chi_{\sigma'}) = 0 \Longleftrightarrow \tau \not\cong \sigma$. С другой стороны, для унитарных представлений $\lambda_\tau(\chi_{\sigma'}) = \sum_g \chi_\tau(g) \overline{\chi_\sigma(g)}$, откуда немедленно получаем, что $(\chi_\tau, \chi_\sigma) = 0 \Longleftrightarrow \tau \not\cong \sigma$, т. е. характеры неприводимых представлений образуют ортогональную систему. Здесь мы докажем более точную теорему, из которой, в частности, следует, что система характеров ортонормирована.

Теорема 4.1. *Матричные элементы неприводимых представлений (взятые относительно ортонормированных базисов инвариантных эрмитовых форм в своих представлениях) образуют ортогональный базис в $C(G)$ с нормировкой $(\tau_{ij}, \tau_{ij}) = 1/\dim\tau$ $(i, j = 1, \ldots, \dim\tau)$.*

Доказательство.

1) Ортогональность пространств $M(\tau)$.

Пусть $\sigma, \tau \in \widehat{G}$, $\sigma \not\cong \tau$. Рассмотрим ортогональный проектор p_σ на пространство $M(\sigma)$. По определению для любого $\varphi \in C(G)$ имеем $p_\sigma\varphi = \varphi_\sigma$, где $\varphi = \varphi_\sigma + \varphi_\sigma^\perp$ $(\varphi_\sigma \in M(\sigma),\ \varphi_\sigma^\perp \in M(\sigma)^\perp)$. Тогда $\operatorname{Reg}\varphi = \operatorname{Reg}\varphi_\sigma + \operatorname{Reg}\varphi_\sigma^\perp$, причем ввиду инвариантности $M(\sigma)$ и $M(\sigma)^\perp$ относительно регулярного представления $\operatorname{Reg}\varphi_\sigma \in M(\sigma)$ и $\operatorname{Reg}\varphi_\sigma^\perp \in M(\sigma)^\perp$. Из этого вытекает, что $p_\sigma \operatorname{Reg}\varphi = \operatorname{Reg} p_\sigma\varphi$, то есть p_σ — эпиморфизм регулярного представления на представление $M(\sigma)$. Ограничивая его на $M(\tau)$, получаем морфизм $p_\sigma\colon M(\tau) \to M(\sigma)$. Так как $M(\tau) \not\cong M(\sigma)$, то $p_\sigma|_{M(\tau)} = 0$, т. е. по определению ортогонального проектора $M(\tau) \subseteq M(\sigma)^\perp$.

2) Ортогональность внутри $M(\tau)$ и нормировка.

Воспользуемся изоморфизмом $\mu\colon \operatorname{Matr}(V_\tau) \leftrightarrow M(\tau)$, $\mu(\xi) = \operatorname{tr}\xi\tau(g)$ (см задачи 2.3, 2.5). При этом предполагается, что в V_τ выбран базис, причем именно такой как указано в условии теоремы: ортонормированный относительно инвариантной эрмитовой формы представления τ. В таком базисе матрицы операторов $\tau(g)$ унитарны.

В $\operatorname{Matr}(V_\tau)$ определим скалярное произведение $\operatorname{tr}(\xi\eta^*)$ (где $\eta^* = \overline{\eta}'$). Оно инвариантно относительно действия τ в Matr, при котором $\xi \to \tau(g_1)\xi\tau(g_2^{-1})$ (т. е. перенесенного из регулярного представления).

Мы можем и будем рассматривать $\operatorname{tr}(\xi\eta^*)$ и $(\mu(\xi), \mu(\eta))$ как два инвариантных скалярных произведения для одного и того же неприводимого представления. Они, следовательно, пропорциональны с некоторой константой c_τ, т. е. $(\mu(\xi), \mu(\eta)) = c_\tau \operatorname{tr}(\xi\eta^*)$.

Заметим, что $\tau_{ij}(g) = \mu(E_{ji})$. Действительно,

$$\mu(E_{ji}) = \operatorname{tr}(E_{ji}\tau) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \tau_{i1} & \ldots & \tau_{in_\tau} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \tau_{ij}$$

(в матрице заполнена только j-я строка). Таким образом, $(\tau_{ij}, \tau_{kl}) = c_\tau \operatorname{tr}(E_{ji}E'_{lk}) = c_\tau \operatorname{tr}(E_{ji}E_{kl}) = c_\tau \operatorname{tr}(\delta_{ik}E_{jl}) = c_\tau\delta_{ik}\delta_{jl}$. В частности, $(\tau_{ij}, \tau_{kl}) = 0$ при $i \neq k$ или $j \neq l$, и $(\tau_{ij}, \tau_{ij}) = c_\tau$ для всех $i, j = 1, \ldots, \dim\tau$.

Вычислим c_τ. Ввиду унитарности матриц $\tau(g)$

$$\sum_{j=1}^{\dim\tau} \tau_{ij}(g)\overline{\tau_{ij}(g)} = 1.$$

Просуммируем это по g и разделим на $|G|$:

$$\sum_{j=1}^{\dim\tau} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \tau_{ij}(g)\overline{\tau_{ij}(g)} = 1 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{\dim\tau} (\tau_{ij}, \tau_{ij}) = 1.$$

Но $(\tau_{ij}, \tau_{ij}) = c_\tau$, при любых i, j (см. выше), поэтому $c_\tau \dim\tau = 1$. □

Следствие 4.1. *$\{\chi_\tau \mid \tau \in \widehat{G}\}$ — ортонормированный базис в $Z(C)$.*

Доказательство. 1) $\sigma \not\cong \tau \Longrightarrow (\chi_\tau, \chi_\sigma) = 0$.

2) $(\chi_\tau, \chi_\tau) = \sum\limits_{i=1}^{\dim\tau} (\tau_{ii}, \tau_{ii}) = (\dim\tau)c_\tau = 1$. □

Следствие 4.2. *Если $T = \bigoplus\limits_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau \tau$, то $m_\tau = (\chi_T, \chi_\tau)$.*

Доказательство. $\chi_T = \sum\limits_{\sigma\in\widehat{G}} m_\sigma \chi_\sigma$, дальше используем ортонормированность. □

Следствие 4.3. *$T \in \widehat{G} \Longleftrightarrow (\chi_T, \chi_T) = 1$.*

Доказательство. $T = \bigoplus\limits_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau \tau \Longrightarrow (\chi_T, \chi_T) = \sum\limits_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau^2$. Следовательно, $(\chi_T, \chi_T) = 1 \Longleftrightarrow$ все $m_\tau = 0$ кроме одного, равного 1. □

Следствие 4.2 — инструмент вычисления кратностей спектра, следствие 4.3 является критерием неприводимости.

Задачи к лекциям 3, 4

1. Диаграммы Юнга взаимно однозначно соответствуют классам сопряженных элементов в S_n.

Указания. Берем числа от 1 до n и бросаем произвольным образом в таблицу Юнга. Строки интерпретируем как коммутирующие между собой циклы. Подстановка получается их перемножением. Подстановки, возникающие таким образом из одной диаграммы Юнга, образуют класс сопряженности. Доказательство основано на формуле $\sigma(i_1, \ldots, i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k))$, где $(i_1, \ldots, i_k)$, $(\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k))$ — циклы.

2. Выписать диаграммы Юнга S_3, S_4, S_5. Найти число неприводимых представлений каждой из этих групп. Найти размерности неприводимых представлений S_4 (указание: воспользоваться теоремой Бернсайда.) Построить неприводимые представления S_4 геометрически (указание: использовать изоморфизм S_4 с группой тетраэдра).

3. Найти все неприводимые представления группы четных подстановок A_4.

Решение. $|A_4| = \frac{1}{2}|S_4| = 12$. Группа A_4 изоморфна группе собственных движений тетраэдра. Действительно, рассмотрим в тетраэдре три отрезка, соединяющие середины противоположных сторон и выберем на них направления. Любое собственное движение определяется либо подстановкой этих трех векторов (S_3, $|S_3| = 6$), либо подстановкой с изменением направления двух из них. Итого — двенадцать элементов.

A_4 имеет трехмерное представление, возникающее из движений тетраэдра. Таким образом $12 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, то есть имеется еще три одномерных представления. Любое одномерное представление тривиально на коммутанте, т. е. пропускается через фактор по нему: $A_4/[A_4, A_4] \cong \mathbb{Z}_3$. Эта группа $\mathbb{Z}_3$ образована циклическими перестановками отмеченных трех векторов, по-другому — циклическими вращениями тетраэдра при одной неподвижной вершине.

4. Найти представления группы диэдра $D_n = \{a, b \mid a^n = b^2 = e, aba = b\}$ ($a = e^{2\pi i/n}$, b — осевая симметрия).

Решение. Ограничение на подгруппу $\mathbb{Z}_n$ (порожденную элементом a) дает собственные подпространства с $\lambda = e^{2\pi ik/n}$. Если $T_a v = \lambda v$, то $T_a(T_b v) = \lambda^{-1}(T_b v)$, т. е. при $\lambda \neq \lambda^{-1}$ пары $\langle v, T_b v\rangle$ образуют двумерные неприводимые пространства, а при $\lambda = \lambda^{-1}$ — одномерные. При четном n $\lambda = \lambda^{-1}$ при $\lambda = \pm 1$. При нечетном n — только при $\lambda = 1$; в этом случае из $(T_b)^2 = 1$ имеем $T_b = \pm 1$, что дает два одномерных представления. При четном n имеем $\lambda = \pm 1$ и $T_b = \pm 1$, что дает четыре одномерных представления. Также при любом n имеется $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ двумерных неприводимых представлений.

Геометрическое решение. $|D_n| = 2n$. Одномерные и двумерные представления легко строятся явно. Одномерные — при помощи факторизации по коммутанту (в факторе возникает группа $\mathbb{Z}_2$, порожденная элементом b, при нечетном n, и группа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, порожденная элементами b и $a^{n/2}$, при четном). Двумерные представления соответствуют движениям диэдра (можно посчитать их число и число классов сопряженных элементов).

5. Разложить в сумму неприводимых:

а) представление группы вращений куба в пространстве функций на множестве его вершин;

б) представление полной группы симметрий правильного тетраэдра в пространстве функций на множестве его ребер.

Указания. Группа тетраэдра изоморфна группе S_4. В самом деле, любая симметрия тетраэдра порождает подстановку вершин. Любая транспозиция вершин порождена отражением в плоскости, проходящей через ребро и середину противоположной стороны.

Связь между кубом и тетраэдром такова: в куб вписано два тетраэдра, симметричных относительно плоскости, перпендикулярной диагонали куба и проходящей через ее середину.

Таким образом, $\#\{\text{симметрий куба}\} = 2 \cdot \#\{\text{симметрий тетраэдра}\} = 2 \cdot 24 = 48$.

Группа собственных симметрий куба изоморфна группе симметрий тетраэдра.

Другой подход к связи S_4 с собственными вращениями куба таков. S_4 переставляет четыре больших диагонали. Это то же, что действие на вершины тетраэдра: любой вершине соответствует большая диагональ.

Для решения задачи предлагается найти характеры соответствующих представлений S_4 и путем решения систем линейных уравнений разложить их по характерам неприводимых представлений. Таблица последних такова (проверить!):

S_4	1 1	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
Тривиальное U	1	1	1	1	1
Знакопеременное U'	1	-1	1	-1	1
Стандартное $V(\dim = 3)$	3	1	0	-1	-1
$V \otimes U'$	3	-1	0	1	-1
Двумерное W	2	0	-1	0	2

(первая строка содержит число элементов в классах сопряженности).

Лекция 5. Представления симметрической группы $\mathfrak{S}_d$

Эта лекция преследует двоякую цель. Первое — продемонстрировать эффективные методы решения основных задач теории представлений симметрической группы, и второе — дать представление о том как эта «седая» классика работает в современной физике. В этой лекции ничего не доказывается, даются лишь ссылки на соответствующую литературу (W. Fulton and J. Harris. Representation theory (a first course), Springer-Verlag New-York Inc., 1991; V. Kac and A. Raina. Bombay Lectures on Highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras, World Scientific Publ. Co. Pte. Ltd., 1987).

1. Классификация неприводимых представлений

Число неприводимых представлений = число диаграмм Юнга = число разбиений $p(d)$ (имеются в виду разбиения числа d в сумму целых положительных слагаемых), которое может быть задано производящей функцией

$$\sum_{d=0}^{\infty} p(d)t^d = \prod_{1}^{\infty} \frac{1}{1-t^n}.$$

2. Идентификация неприводимых представлений в регулярном

Дано разбиение λ: $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k \geqslant 1$, $\sum \lambda_i = d$ и соответствующая диаграмма Юнга. Занумеруем клетки диаграммы в произвольном порядке. Каждая такая нумерация позволяет задать действие $\mathfrak{S}_d$ на клетках. Определим в $\mathfrak{S}_d$ две подгруппы P и Q:

$$P_\lambda = \{g \in \mathfrak{S}_d \mid g \text{ сохраняет все строки разбиения } \lambda\},$$
$$Q_\lambda = \{g \in \mathfrak{S}_d \mid g \text{ сохраняет все столбцы разбиения } \lambda\}.$$

Имеется в виду, что элементы первой подгруппы переставляют клетки внутри строк, а второй — внутри столбцов. Поставим этим группам в соответствие следующие элементы групповой алгебры $C(\mathfrak{S}_d)$:

$$a_\lambda = \sum_{g\in P_\lambda} g, \quad b_\lambda = \sum_{g\in Q_\lambda} (-1)^g g.$$

Произведение этих элементов

$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda \in C(\mathfrak{S}_d).$$

называется *симметризатором Юнга.*

Теорема 5.1. *Справедливо соотношение $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$. Образ c_λ (при правом действии в $C(\mathfrak{S}_d)$) есть неприводимое представление V_λ, и любое неприводимое представление группы $\mathfrak{S}_d$ получается таким образом.*

Таким образом, $(c_\lambda/n_\lambda)^2 = c_\lambda/n_\lambda$ (такие элементы называются *идемпотентами* кольца $C(\mathfrak{S}_d)$). Элемент c_λ/n_λ задает проектор $C(\mathfrak{S}_d) \to \to V_\lambda$.

3. Характеры: формула Фробениуса

Диаграмму Юнга можно задать набором $\boldsymbol{i} = (i_1 \ldots i_d)$, где i_α — число строк диаграммы, имеющих длину α $(\alpha = 1, \ldots, d)$. Очевидно,

$$\sum_{\alpha=1}^{d} \alpha i_\alpha = d.$$

Пусть $k = i_1 + \ldots + i_d$ (число строк диаграммы). Введем переменные $x_1, \ldots, x_k$, и каждой строке диаграммы сопоставим переменную из этого набора. Определим полиномы Ньютона

$$P_j(x) = x_1^j + \ldots + x_k^j \quad (j = 1, \ldots, d)$$

и кососимметрический полином минимальной степени от k переменных (определитель Вандермонда)

$$\Delta(x) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (x_i - x_j).$$

Если $f(x)$ — полином, то через $[f]_{l_1 \ldots l_k}$ будем обозначать его коэффициенты: $f(x) = \sum [f]_{l_1 \ldots l_k} x_1^{l_1} \ldots x_k^{l_k}$.

В этих терминах мы можем сформулировать следующую эффективную формулу для характеров, принадлежащую Фробениусу (см. Fulton and Harris).

Возьмем две (вообще говоря, различных) диаграммы Юнга. Зададим первую, как и в пункте 2, разбиением λ, а вторую — набором $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_d)$. Пусть χ_λ — характер неприводимого представления, отвечающего первой диаграмме, $C_{\boldsymbol{i}}$ — класс сопряженности, заданный набором $\boldsymbol{i}$. Тогда

$$\chi_\lambda(C_{\boldsymbol{i}}) = \left[\Delta \prod_{j=1}^{d} P_j^{i_j}\right]_{l_1 \ldots l_k},$$

где $l_n = \lambda_n + k - n$ $(n = 1, \ldots, k)$, Δ и P_j — полиномы, определенные выше.

4. Размерности: формула крюков

Назовем крюком диаграмму в форме буквы Г. Имеет место формула

$$\dim V_\lambda = \frac{d!}{\prod(\text{длин крюков})}$$

(произведение берется по всем крюкам, вложенным в диаграмму Юнга λ).

5. Полиномы Шура

Полиномы Шура S_λ можно определить из соотношения

$$S_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)}(x) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i + k - i})}{\Delta(x)}.$$

(Fulton and Harris, Appendix A). Из формулы характеров можно вывести, что

$$\prod_{j=1}^{d} P_j(x)^{i_j} = \sum \chi_\lambda(C_i) S_\lambda(x).$$

Полиномы Шура играют фундаментальную роль в теории симметрических функций, теории представлений симметрической группы и комбинаторике. Оказывается, они играют важную роль и в математической физике. Ниже мы коротко описываем два приложения такого рода.

6. Уравнение Кадомцева—Петвиашвили (KP):

$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)}_{\text{оператор } KdV}.$$

Это уравнение описывает нелинейные волны в плазме. Полиномы Шура позволяют получить класс явных решений этого уравнения.

Теорема 5.2. *Следующие функции являются рациональными решениями KP:*

$$2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log S_\lambda(x, y, t, c_4, c_5, \ldots),$$

где $c_4, c_5, \ldots$ — произвольные константы.

Уравнение Кадомцева—Петвиашвили относится к классу *вполне интегрируемых систем*, теория которых является одним из крупнейших достижений второй половины XX века. В 50—60-х годах XX столетия, в численных экспериментах, Ферми, Паста и Уламом была обнаружена аномально медленная стохастизация *цепочки Тода*, а Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой — солитонные решения *уравнения Кортевега—де Фриза* (KdV). Выяснилось, что эти явления объясняются наличием у таких систем бесконечного числа законов сохранения (П. Лакс). Решающую роль в развитии теории сыграли Московская школа (конечнозонные решения) и Ленинградская школа (гамильтонова теория).

7. Квантовая теория поля

Полиномы Шура образуют базис в фоковском пространстве в бозонном представлении. Они соответствуют полубесконечным мономам при бозон-фермионном соответствии (см. Kac—Raina), которое с точки зрения теории представлений является не чем иным, как изоморфизмом двух типов конкретных представлений *алгебр Каца—Муди.*

Лекция 6. Группы SU(2) и SO(3) — геометрия, топология, инвариантная мера

1. Определение SU(2) и SO(3)

Определим *специальную унитарную группу* SU(2) и *группу вращений* SO(3) следующим образом:

$$u \in \mathrm{SU}(2) \iff u \in \mathrm{Matr}(2\times 2), \quad u^*u = 1, \quad \text{где} \quad u^* = \overline{u'}, \quad \text{и} \quad \det u = 1,$$
$$u \in \mathrm{SO}(3) \iff u \in \mathrm{Matr}(3\times 3), \quad u'u = 1 \quad \text{и} \quad \det u = 1.$$

Задача 6.1. *Докажите, что*

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \,\middle|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}.$$

Следствие 6.1. $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$.

2. Углы Эйлера

Введем локальные (на самом деле — квазиглобальные, т. е. покрывающие все, кроме 1-мерного подмногообразия) координаты в SO(3).

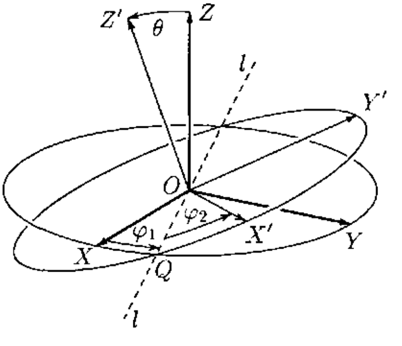


Рис. 1.

Выберем ортогональную систему координат $OXYZ$. Тогда любое собственное вращение g задается другой (так же ориентированной) системой координат $OX'Y'Z'$. Пусть l — прямая пересечения плоскостей $OXYZ$ и $OX'Y'Z'$.

Проделаем следующие операции:

— переведем ось OX в прямую l вращением плоскости OXY в положительном направлении (при неподвижной OZ). Пусть φ_1 — угол поворота;

— переведем OZ в OZ' вращением плоскости OYZ при неподвижной OX; пусть θ — угол поворота;

— переведем OX в OX' при неподвижной OZ; пусть φ_2 — угол поворота.

В результате система координат $OXYZ$ перейдет в $OX'Y'Z'$. Матрица соответствующего преобразования (в системе координат $OXYZ$)

есть $g = g_{\varphi_1} g_\theta g_{\varphi_2}$ [1], где

$$g_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad g_\theta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Задача 6.2. а) *Проверьте, что*

$$g = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \sin\varphi_2 \cdot \sin\theta & \cos\varphi_2 \cdot \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

б) *Вычислите всю матрицу* g.

в) *Докажите, что в последней строке стоят декартовы координаты точки* P*, переходящей при вращении* g *в точку* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (*Указание*: *таково свойство последней строки любой ортогональной матрицы*).

Пусть Q — точка пересечения единичной сферы с прямой l, точнее — образ точки $(1, 0, 0)$ при вращении g_{φ_1}. Точки P и Q вполне задают систему координат $OX'Y'Z'$, а следовательно, и вращение g. По ним восстанавливаются его углы Эйлера: φ_2 и θ — как сферические координаты точки P, а φ_1 — как положительный угол между OX и l.

3. Накрытие SU(2) → SO(3)

Пусть

$$E = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

— пространство эрмитовых матриц с нулевым следом. Для $u \in \mathrm{SU}(2)$ рассмотрим отображение $P(u)\colon X \mapsto uXu^{-1}$. Получим действие $\mathrm{SU}(2)$ на E, при котором форма $(X, X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -\det X$ сохраняется. Следовательно, $P(u) \in \mathrm{SO}(3)$, то есть P — гомоморфизм $\mathrm{SU}(2)$ в $\mathrm{SO}(3)$.

Задача 6.3. *Докажите, что*

$$P\colon \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

[1] Обратный порядок сомножителей в этом произведении обусловлен тем, что матрицы берутся не в исходной системе координат, а в преобразованных.

Следствие 6.2. *Гомоморфизм* $P\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ *сюръективен.*

Из определения P следует, что $P(u) = P(-u)$. Это видно и из задачи 6.3: если к φ и θ прибавить 2π, то слева все умножится на (-1), а справа не изменится.

Лемма 6.1. $\ker P = \{\pm\mathrm{id}\}$.

Доказательство. $u \in \ker P \Longleftrightarrow P(u)X = X\ \forall X \in E \Longleftrightarrow uXu^{-1} = X\ \forall X \in E \Longleftrightarrow uX = Xu\ \forall X \in E$.

Теперь достаточно записать это условие для базисных X. Для $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$ получаем, что u коммутирует с $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; следовательно, u — диагональная матрица. Остается представить ее в виде $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$, $|z|^2 = 1$, и прокоммутировать с $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$. $\square$

Лемма в точности означает, что прообраз любой точки при отображении P состоит из двух точек. Это выражают словами P *является двулистным накрытием* или $\mathrm{SU}(2)$ — *двулистное накрытие* $\mathrm{SO}(3)$.

4. Инвариантная мера на SO(3)

Задача 6.4. *Инвариантная мера на сфере* S^2 *есть* $\sin\theta\, d\varphi\, d\theta$.

Инвариантная мера на $\mathrm{SO}(3)$ в терминах углов Эйлера строится чисто геометрически. Берем в качестве параметров точки P и Q (см. п. 3). P пробегает сферу, и ей соответствует мера на сфере $\sin\theta\, d\varphi_2\, d\theta$. Q пробегает большой круг, и ей соответствует $d\varphi_1$. Получаем $\sin\theta\, d\varphi_1\, d\varphi_2\, d\theta$. Вращения сохраняют как меру на сфере, так и длину дуги, поэтому построенная мера инвариантна.

5. Подъем инвариантной меры с SO(3) на SU(2)

Инвариантную на $\mathrm{SU}(2)$ можно построить, подняв меру с $\mathrm{SO}(3)$ с помощью накрытия P (см. п. 4). Элементарными измеримыми множествами надо считать прообразы элементарных измеримых множеств на $\mathrm{SO}(3)$, лежащие на одном листе (или связные). При этом для элементарного множества $X \subset \mathrm{SU}(2)$ по определению $\mu_{\mathrm{SU}(2)}(X) = \mu_{\mathrm{SO}(3)}(P(X))$.

Лекция 7. Представления компактных групп

1. Вводные замечания

На каждой компактной группе существует инвариантная мера, и притом только одна с точностью до нормировки. Мы будем пользоваться этой теоремой без доказательства. На рассматриваемых нами группах SO(3) и SU(2) мы построили инвариантную меру явно. В общем случае мы будем обозначать интеграл по инвариантной мере $\int f(g)\,d\mu(g)$, имея в виду, что он берется по всей группе.

Для компактных групп верны теоремы об унитаризуемости (теорема 1.2) конечномерных представлений (существовании инвариантных эрмитовых произведений в представлениях). Для доказательства вместо суммирования по группе надо пользоваться инвариантным интегрированием: если $E(x,y)$ — произвольная невырожденная эрмитова форма, то $(x,y)=\int E(T_g x, T_g y)\,d\mu(g)$ — инвариантная невырожденная эрмитова форма (ср. с формулой (1) из лекции 1). В качестве $C(G)$ берется пространство непрерывных функций на группе. В нем рассматривается инвариантное скалярное произведение $(\varphi,\psi)=\int \varphi(g)\overline{\psi(g)}\,d\mu(g)$. Свертка двух функций вводится с помощью формулы $(\varphi*\psi)(g)=\int \varphi(h)\psi(h^{-1}g)\,d\mu(h)$. С учетом этих замечаний теория представлений компактных групп полностью повторяет теорию представлений конечных групп с одним отличием: число классов неприводимых представлений у них бесконечно. Мы будем рассматривать компактные *группы Ли*, у которых число классов неприводимых представлений счетно.

2. Теорема Петера—Вейля

Теорема 7.1 (Петер—Вейль). *Матричные элементы конечномерных неприводимых представлений образуют ортогональную полную систему в $C(G)$ с нормировкой* $\|\tau_{ij}\|^2=\dfrac{1}{\dim\tau}$.

Полнота бесконечной системы матричных элементов означает, что каждая функция из $C(G)$ может быть аппроксимирована конечными линейными комбинациями матричных элементов.

Доказательство. 1) Ортогональность и нормировка доказываются точно так же как в теореме 4.1 (соответствующей теореме для конечных групп).

2) Доказательство полноты мы дадим только для *линейных* компактных групп (т.е. групп, вложенных в полную линейную группу достаточно большой размерности). Это позволяет снова использовать аналогию с теорией представлений конечных групп. Именно, пусть элемент $g\in G$ представлено матрицей $g=(g_{ij})$. Рассмотрим класс функций на G, представимых в виде полиномов от $\{g_{ij},\overline{g_{ij}}\}$. Пусть $R_m(G)$ — пространство таких полиномов степени не выше m. Это пространство G-инвариантно и, в отличие от $C(G)$, конечномерно. Теперь точно так же, как в доказательстве теоремы о разложении регулярного

представления конечной группы (теорема 2.1) получаем, что любой элемент из $R_m(G)$ представим в виде линейной комбинации матричных элементов конечного числа неприводимых представлений. По теореме Вейерштрасса об аппроксимации пространство полиномов всюду плотно в $C(G)$ в равномерной метрике. Следовательно, матричные элементы неприводимых конечномерных представлений образуют полную систему. □

Пример. Пусть $G = S^1$. Все неприводимые представления S^1 одномерны и имеют вид $\varphi \mapsto e^{in\varphi}$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$, а n — произвольное целое число. Любая непрерывная функция на окружности может быть представлена как непрерывная периодическая функция на прямой; мы не будем их различать. Следовательно, по теореме Петера—Вейля, любая периодическая функция на прямой может быть представлена как предел при $m \to \infty$ линейных комбинаций вида $f_m(\varphi) = \sum\limits_{n=-m}^{m} a_n(m)e^{in\varphi}$. Мы даже доказали, что этот предел — равномерный. Из этого вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_m(\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. В левой части этого равенства выражение под знаком предела равно $a_n(m)$. Правая часть (обозначим ее a_n) называется коэффициентом Фурье функции f. Теперь уже легко доказать, что $f(\varphi) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\varphi}$. Этот ряд называется *рядом Фурье* функции f. Таким образом, для $G = S^1$ мы получаем с помощью теоремы Петера—Вейля классическую теорему о разложении непрерывной периодической функции в ряд Фурье.

В общем случае ряды по бесконечным ортонормированным системам также принято называть *рядами Фурье*. Применяя те же соображения, что и в случае группы S^1, можно показать (по крайней мере, для *линейных* компактных групп), что *всякая непрерывная функция на G раскладывается, и притом единственным образом, в ряд Фурье по матричным элементам ее неприводимых представлений*:

$$f = \sum_{\tau\in\hat{G}} \sum_{i,j=1}^{\dim\tau} c_{\tau,i,j}\tau_{i,j}$$

Иными словами,

$$C(G) = \bigoplus_{\tau\in\hat{G}} M(\tau),$$

где, как и выше, $M(\tau)$ — пространство матричных элементов неприводимого представления τ, но здесь мы имеем дело со счетной прямой суммой.

3. Гармонический анализ на S^2 — постановка задачи

Следующим шагом в сторону обобщения является получение рядов Фурье на S^2 — единичной сфере пространства $\mathbb{R}^3$ (будем обозначать ее просто S). Эквивалентная формулировка этой задачи такова. Пусть $C(S)$ — пространство непрерывных функций на S. Его элементы называются *сферическими функциями*. Группа SO(3) действует на S; следовательно, имеется естественное представление SO(3) в $C(S)$. Назовем его *сферическим представлением*. Задача заключается в том, чтобы разложить это представление на неприводимые.

Лекция 8. Сферические функции Лапласа

Теория сферических функций Лапласа решает задачи о разложении сферического представления SO(3) на неприводимые компоненты, о разложении функций на сфере в ряды Фурье. Ее роль этим не исчерпывается. Сферические функции Лапласа — один из наиболее распространенных видов *специальных функций*. В математической физике они возникают во всех задачах с симметрией относительно вращений (например, в задачах с кулоновским потенциалом).

1. Гармонические полиномы в $\mathbb{R}^3$

Пусть A — пространство полиномов от x_1, x_2, x_3, а A_m — подпространство однородных полиномов степени m. Тогда $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \ldots$

Мономы $\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}\}$ образуют базис в A. Введем в A эрмитово произведение:

$$\langle x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}, x_1^{k_1'} x_2^{k_2'} x_3^{k_3'} \rangle = k_1!\, k_2!\, k_3!\, \delta^{k_1 k_1'} \delta^{k_2 k_2'} \delta^{k_3 k_3'}.$$

Лемма 8.1. *Оператор умножения на функцию* $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ *и оператор* $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ *сопряжены.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\dfrac{\partial}{\partial x_1} = (x_1)^*$, т.е. $\langle x_1 u, v \rangle = \left\langle u, \dfrac{\partial}{\partial x_1} v \right\rangle$ для всех $u, v \in A$. Проверим последнее равенство для базисных u, v. Пусть $u = x_1^{k_1-1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$, $v = x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$. Тогда с обеих сторон получим $k_1!\, k_2!\, k_3!$. В остальных случаях с обеих сторон нули. □

Элементы пространства $H \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \Delta a = 0\} = \ker \Delta$ называются *гармоническими полиномами*. Положим $H_m = H \cap A_m$.

Лемма 8.2. $A_m = H_m \oplus r^2 A_{m-2}$ (*ортогональная прямая сумма*).

Доказательство. Доказательство сводится к утверждению о том, что $\ker\Delta = (\operatorname{im}\Delta^*)^\perp$, что верно для любого оператора. Имеем $A_m = (\ker\Delta \oplus \ker\Delta^\perp) \cap A_m$. Далее, $\ker\Delta \cap A_m = H_m$, а $(\ker\Delta)^\perp \cap A_m = (\operatorname{im} r^2) \cap A_m = r^2 A_{m-2}$. □

Следствие 8.1. $A_m = H_m \oplus r^2 H_{m-2} \oplus r^4 H_{m-4} \oplus \ldots$ (*всего* $\left[\frac{m}{2}+1\right]$ *членов*).

2. Сферические функции

Определим отображение $\rho\colon A \to C(S)$, сопоставляя каждому полиному его ограничение на сферу $S = S^2$.

Лемма 8.3. $\ker\rho \cap A_m = \{0\}$.

Доказательство. Если однородный многочлен равен нулю на сфере, то он нулевой. □

Пространство $U_m = \rho(H_m)$ называется *пространством сферических функций веса* m.

Следствие 8.2. $\rho(A_m) \cong U_m \oplus U_{m-2} \oplus \ldots$

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 8.1 с учетом того, что на сфере $r^2 = 1$. □

3. Собственные полиномы группы SO(2) ⊂ SO(3)

Рассмотрим в SO(3) стационарную подгруппу точки $(0,0,1)$. Обозначим ее G_0. Ясно, что $G_0 \cong \mathrm{SO}(2)$.

Лемма 8.4. *Вращения из G_0 имеют в пространстве A_m базис общих собственных функций. Собственные значения имеют вид $e^{2\pi i k\varphi}$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$, где φ — угол поворота, определяющий элемент из G_0. Кратность собственного значения $e^{2\pi i k\varphi}$ равна* $\left[\frac{m-|k|}{2}+1\right]$.

Доказательство. Положим $u = x_1 - ix_2$, $\overline{u} = x_1 + ix_2$, $z = e^{i\varphi}$, $h(z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in G_0$. Тогда $h(z)u = zu$, $h(z)\overline{u} = z^{-1}\overline{u}$.

Перейдем в A_m к базису $u^p\overline{u}^q x_3^l$ $(p+q+l=m)$. Относительно $h(z)$ моном $u^p\overline{u}^q x_3^l$ имеет собственное значение z^{p-q}. Имеем $|p-q| \leqslant p+q = m-l \leqslant m$. При фиксированном $p-q=k$ $p+q$ может меняться только на четное число, а вместе с ним и l. При этом $l \leqslant m-|k|$. Поэтому l может принимать значения $m-|k|, m-|k|-2, m-|k|-4, \ldots$, всего $\left[\frac{m-|k|}{2}+1\right]$ значений. □

Вычислим $\dim H_m$. Для кратности собственного значения z^k в этом пространстве имеем в силу лемм 8.4 и 8.2

$$\mathrm{mult}_k\, H_m = \mathrm{mult}_k\, A_m - \mathrm{mult}_k\, A_{m-2} = \left[\frac{m-|k|}{2}+1\right] - \left[\frac{m-2-|k|}{2}+1\right] = 1.$$

Таким образом, H_m содержит каждое собственное значение z^k, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$ с единичной кратностью, поэтому $\dim H_m = 2m+1$ (число собственных значений).

4. Основная теорема гармонического анализа на S^2

Теорема 8.1. 1) $C(S) = \bigoplus\limits_{m=0}^{\infty} U_m$ (*ортогональная сумма*).

2) U_m *инвариантно относительно* $\mathrm{SO}(3)$, *неприводимо и* $\dim U_m = 2m+1$.

3) *В* U_m *имеется ортогональный собственный относительно* G_0 *базис* $Y_{m,0}, Y_{m,\pm 1}, \ldots, Y_{m,\pm m}$, *причем* $Y_{m,k}$ *соответствует собственному значению* z^k.

Лемма 8.5. *Любое ненулевое конечномерное* $\mathrm{SO}(3)$*-подпредставление в* $C(S)$ *имеет хотя бы одномерное подпространство* G_0*-инвариантов.*

Доказательство. Пусть $U \subset C(S)$ — подпредставление, $U_0 = \{f \in U \mid f(0,0,1) = 0\}$. Условие $f(0,0,1) = 0$ — это одно линейное условие на f. Следовательно, либо $U_0 = U$, либо U_0 — гиперплоскость в U.

Так как $U \neq \{0\}$, существуют $\tilde{f} \in U$ и $x \in S$, для которых $\tilde{f}(x) \neq 0$. Пусть $g \in \mathrm{SO}(3)$ — такой элемент, что $gx = (0,0,1)$. Тогда $(g\tilde{f})(0,0,1) = \tilde{f}(x) \neq 0$. Но $g\tilde{f} \in U$, поэтому $U_0 \neq U$, и в действительности U_0 — гиперплоскость. Следовательно, $\dim U_0^{\perp} = 1$.

Ввиду того, что $G_0(0,0,1) = (0,0,1)$, подпространство U_0, а следовательно и $U_0^{\perp}$, инвариантно относительно G_0. Пусть $\tilde{f} \in U_0^{\perp}$. Тогда для любого $g \in G_0$ $g\tilde{f} = \lambda\tilde{f}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Но $(g\tilde{f})(0,0,1) = \tilde{f}(g^{-1}(0,0,1)) = \tilde{f}(0,0,1)$, т.е. $\lambda = 1$. □

Доказательство основной теоремы. 1) Разложение в прямую сумму вытекает из следствия 8.2 и теоремы Вейерштрасса об аппроксимации (см. доказательство теоремы Петера—Вейля). Попарная ортогональность пространств U_m требует отдельного доказательства (см. ниже), так как у нас нет сведений об изометричности отображения ρ (в $C(S)$, по определению, $(\varphi, \psi) = \int_S \varphi(s)\overline{\psi(s)}\, d\mu(s)$).

2) Инвариантность U_m следует из перестановочности ρ с действием $\mathrm{SO}(3)$ и инвариантности H_m, а последняя — из перестановочности Δ с действием $\mathrm{SO}(3)$ (проверяется непосредственно).

Неприводимость U_m доказывается так. Размерность G_0-инвариантных векторов в H_m, а следовательно, и в U_m, равна 1. По лемме 8.5 в U_m может быть не более одного нетривиального подпредставления.

Ввиду леммы 8.3 $\dim U_m = \dim H_m = 2m + 1$.

3) В качестве $Y_{m,k}$ возьмем образ вектора с собственным значением z^k в H_m. Ввиду простоты собственных значений, при данном m и различных k полученные векторы попарно ортогональны.

Пусть p — ортогональный проектор $U_m \to U_{m'}$. При инвариантном скалярном произведении p является морфизмом представлений. Если $m \neq m'$, то U_m и $U_{m'}$ не изоморфны ($\dim U_m \neq \dim U_{m'}$). Но они неприводимы, поэтому $p = 0$, т. е. $U_m \perp U_{m'}$. □

$Y_{m,0}, Y_{m,\pm 1}, \ldots, Y_{m,\pm m}$ называются *сферическими функциями Лапласа* веса m: $Y_{m,0}$ — *зональной* сферической функцией, а остальные — *присоединенными* сферическими функциями.

Лекция 9. Элементы теории Ли

1. Линейные группы Ли

(*Линейной*) *группой Ли* мы называем любую замкнутую подгруппу полной линейной группы $\mathrm{GL}(n)$ с топологией, задаваемой евклидовой метрикой в пространстве $\mathrm{Matr}(n \times n)$.

Отображение $\varphi\colon G \to H$ двух групп Ли называется *гомоморфизмом*, если φ — гомоморфизм групп, и для произвольной области U евклидова пространства и ее гладкого отображения $\psi\colon U \to G$ композиция $\varphi \circ \psi\colon U \to \mathrm{Matr}(n \times n)$ является гладким отображением.

Свойства группы Ли во многом определяются свойствами гораздо более простого объекта — касательного пространства к ней в одной-единственной точке. Как это происходит — изучает теория Ли.

Пусть T_eG — касательное пространство в единице группы G.

Теорема 9.1. *Гомоморфизм связной группы Ли G в группу Ли H определяется своим касательным отображением в единице.*

Доказательство. 1) Пусть $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм, $d\varphi\colon TG \to TH$ — касательное отображение (в произвольной точке), $l(g)$ — левый сдвиг на g в G, $l(h)$ — левый сдвиг на h в H, $l(g)_*\colon T_eG \to T_gG$ и $l(h)_*\colon T_eH \to T_hH$ — соответствующие касательные отображения.

Следующая диаграмма коммутативна в силу того, что φ — гомоморфизм:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "l(g)"] \arrow[d, "\varphi"'] & G \arrow[d, "\varphi"] \\ H \arrow[r, "l(\varphi(g))"'] & H. \end{tikzcd}$$

Из нее вытекает коммутативность такой диаграммы:

$$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "l(g)_*"] \arrow[d, "d\varphi"'] & T_gG \arrow[d, "d\varphi"] \\ T_eH \arrow[r, "l(\varphi(g))_*"'] & T_{\varphi(g)}H. \end{tikzcd}$$

Пусть $\xi \in T_eG$. Тогда из второй диаграммы вытекает, что

$$d\varphi(l(g)_*\xi) = l(\varphi(g))_* d\varphi(\xi). \tag{1}$$

2) Пусть теперь $g \in G$. Мы хотим восстановить $\varphi(g)$, зная $d\varphi$. Соединим e и g гладкой кривой $g(t)$, лежащей в группе: $g(0) = e$, $g(1) = g$. Определим $\xi(t)$ из условия $g'(t) = l(g(t))_*\xi(t)$ и покажем, что $\xi(t) \in T_eG$. Применим соотношение (1):

$$d\varphi(g'(t)) = d\varphi(l(g(t))_*\xi(t)) = l(\varphi(g(t)))_* d\varphi(\xi(t)).$$

По определению $d\varphi(g'(t)) = \varphi(g(t))'$, т. е.

$$\varphi(g(t))' = l(\varphi(g(t)))_* d\varphi(\xi(t)).$$

Введем обозначения $h(t) = \varphi(g(t))$, $\eta(t) = d\varphi(\xi(t))$. Получим $h'(t) = l(h(t))_*\eta(t)$, т. е. дифференциальное уравнение на $h(t)$ первого порядка (здесь $l(h(t))_*$ — *линейный оператор*, зависящий от $h(t)$, $\eta(t)$ — известная величина). Для линейных групп получается просто $h' = h\eta$. Поскольку $h(0) = e$, по теореме единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений $h(t)$ определено однозначно, т. е. $\varphi(g(1)) = \varphi(g)$ определено однозначно. □

2. Скобка на T_eG

Касательное пространство в единице группы Ли является векторным пространством. Если $x, y \in T_eG$, то существуют кривые $g = g(t)$ и $h = h(s)$, лежащие в группе, такие что $g(0) = h(0) = e$, $g'(0) = x$, $h'(0) = y$. Тогда $x + y$ является касательным к $g(t)h(t)$, а λx — к $g(\lambda t)$.

Кроме того, на T_eG канонически определена еще одна операция, называемая *скобкой*, или *коммутатором*:

$$[x, y] := \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(ghg^{-1}h^{-1})_{s=t=0}. \tag{2}$$

Дифференцируя в (2) по s и полагая $s = 0$, получим касательный вектор $gh'(0)g^{-1} - h'(0)$. Он принадлежит T_eG при всех t.

Затем, дифференцируя его по t, при $t = 0$ получим

$$\dot g(0)h'(0) - h'(0)\dot g(0) = [x, y]$$

(здесь мы используем точку для обозначения производной по t и штрих для обозначения производной по s).

Следствие 9.1. *Для линейных групп Ли* $[x, y] = xy - yx$.

Задача 9.1. а) $T_e\mathrm{SU}(2) = \{X \in \mathrm{Matr}(2, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0,\ \mathrm{tr}\, X = 0\}$.

б) $T_e\mathrm{SO}(3) = \{X \in \mathrm{Matr}(3, \mathbb{R}) \mid X + X' = 0\}$.

Задача 9.2. *Проверьте для линейных групп, что*

- $[X, Y]$ — *билинейная операция*;
- $[X, Y] = -[Y, X]$ (*антисимметричность*);
- $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ (*тождество Якоби*).

Векторное пространство, в котором определена скобка, обладающая свойствами, сформулированными в задаче 9.2, называется *алгеброй Ли*.

Выше мы показали, что T_eG наделено структурой алгебры Ли.

Алгебра Ли T_eG называется *алгеброй Ли группы* G и обозначается $\mathrm{Lie}(G)$.

Обозначения: $\mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(2)) = \mathfrak{su}(2)$, $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3)) = \mathfrak{so}(3)$, $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}(2)) = \mathfrak{sl}(2)$, $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V)) = \mathfrak{gl}(V)$.

Теорема 9.2. *Если* $\varphi\colon G \to H$ — *гомоморфизм групп Ли, то* $d\varphi\colon \mathrm{Lie}\, G \to \mathrm{Lie}\, H$ — *гомоморфизм алгебр Ли.*

Доказательство. Пусть $g = g(t)$, $h = h(s)$, $g(0) = h(0) = e$. Имеем:

$$d\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial s}(ghg^{-1}h^{-1})_{s=0}\Big) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial}{\partial s}\varphi(ghg^{-1}h^{-1})_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}(\varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1})_{s=0}.$$

Продифференцируем обе части по t и внесем слева дифференцирование по t в аргумент $d\varphi$ (это можно сделать, так как $d\varphi$ — линейное отображение):

$$d\varphi\Big(\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}(ghg^{-1}h^{-1})_{s=t=0}\Big) = \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\big(\varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1}\big)_{s=t=0},$$

т. е. $d\varphi([x, y]) = [d\varphi(x), d\varphi(y)]$. □

3. Соответствие между представлениями групп Ли и их алгебр Ли

По определению представление группы G — это гомоморфизм $T\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Для групп Ли к этому гомоморфизму предъявляется требование гладкости.

Представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ее гомоморфизм в $\mathfrak{gl}(V)$, т. е. такое линейное отображение $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, что $\varphi([x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)$.

В силу теоремы 9.2 каждому представлению T группы Ли сопоставляется представление ее алгебры Ли, которое мы обозначаем $\dot{T}$ или dT. По теореме 9.1 для связных групп представление алгебры Ли вполне определяет представление группы. Для односвязных групп между ними существует взаимно однозначное соответствие, но здесь мы этого не доказываем.

Следствие 9.2. *Для связных линейных групп Ли и их алгебр Ли каждый эндоморфизм представления алгебры Ли является и эндоморфизмом соответствующего представления группы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ и $\dot{T}(\xi)u = u\dot{T}(\xi)$, для любого $\xi \in \mathfrak{g}$. Надо показать, что $T(g)u = uT(g)$ для любого $g \in G$. Полагая $H = \mathrm{GL}(V)$, рассмотрим уравнение $h'(t) = h(t)\eta(t)$, полученное в теореме 9.1. Имеем:

$$h'(t)u = h(t)\eta(t)u = (h(t)u)\eta(t),$$
$$uh'(t) = (uh(t))\eta(t),$$

т. е. $h(t)u$ и $uh(t)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению. Так как $h(0) = e$, то $uh(0) = h(0)u = u$, т. е. и начальное условие одно и то же. По теореме единственности $h(t)u = uh(t)$ для всех t. □

Следствие 9.3. *В условиях следствия* 9.2 *и в предположении компактности группы представления T и $\dot{T}$ приводимы или неприводимы одновременно.*

Доказательство. Нетривиально только, что если $\dot{T}$ приводимо, то и T приводимо. Для компактной группы $T(g)$ можно считать унитарным, а $\dot{T}(\xi)$ — кососимметрическим. Поэтому если $\dot{T}(\xi)V_0 \subset V_0$ для любого $\xi \in \mathfrak{g}$ то и $\dot{T}(\xi)V_0^{\perp} \subset V_0^{\perp}$ для любого $\xi \in \mathfrak{g}$. Но тогда $\dot{T}(\xi)$ коммутирует с ортогональным проектором на V_0. По предыдущему следствию и $T(g)$ с ним коммутирует. Таким образом, V_0 инвариантно относительно $T(g)$. □

Лекция 10. Представления $\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SO}(3)$ и $\mathfrak{sl}(2)$

1. От $\mathfrak{su}(2)$ к $\mathfrak{sl}(2)$: комплексификация

Пусть $E = \{X \in \mathrm{Matr}(2 \times 2) \mid X = X^*,\ \mathrm{tr}\, X = 0\} \cong \mathbb{R}^3$. В п. 4 лекции 6 дан общий вид матриц пространства E, из которого видно, что в E можно выбрать базис

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 10.1. *Докажите, что* а) $E_{\pm} = \frac{1}{2}(E_1 \mp iE_2)$, $H = -E_3$ — *базис в* $\mathfrak{sl}(2)$; б) $H_1 = \frac{1}{2i}E_1$, $H_2 = \frac{1}{2i}E_2$, $H_3 = \frac{1}{2i}E_3$ — *базис в* $\mathfrak{su}(2)$. (*Указание: см. задачу* 9.1).

Следствие 10.1. *Базисные элементы* $\mathfrak{sl}(2)$ *и* $\mathfrak{su}(2)$ *связаны следующим образом:*

$$E_{\pm} = H_2 \pm iH_1, \quad H = -2iH_3.$$

Следствие 10.2. 1) *Имеется взаимно однозначное соответствие между конечномерными представлениями* $\mathfrak{su}(2)$ *и* $\mathfrak{sl}(2)$. *Именно, всякое комплексное представление* $\mathfrak{su}(2)$ *продолжается до представления* $\mathfrak{sl}(2)$ *в том же пространстве; обратное соответствие задается операцией ограничения представлений* $\mathfrak{sl}(2)$ *на* $\mathfrak{su}(2)$.

2) *Соответствующие представления* $\mathfrak{su}(2)$ *и* $\mathfrak{sl}(2)$ *приводимы или неприводимы одновременно.*

Таким образом, классификация неприводимых представлений $\mathfrak{su}(2)$ сведена к классификации неприводимых конечномерных представлений $\mathfrak{sl}(2)$ (и наоборот). Эта идея фундаментальна. В ситуации общей комплексной (простой) алгебры Ли (у нас — $\mathfrak{sl}(2)$) и ее *компактной формы* (у нас — $\mathfrak{su}(2)$) она носит название *унитарного трюка Вейля.*

Базис E_+, E_-, H в $\mathfrak{sl}(2)$ называется *каноническим.* Для его элементов имеются стандартные обозначения $E_+ = E$, $E_- = F$, H.

Задача 10.2. *Проверьте, что*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$, $[E, F] = H$.

2. Неприводимые конечномерные представления $\mathfrak{sl}(2)$

Теорема 10.1. *Пусть* τ — *неприводимое конечномерное представление* $\mathfrak{sl}(2)$ *в* V. *Тогда существует такой базис* $v_0, \ldots, v_n$, *что*

1) $\tau(H)v_k = (n - 2k)v_k$,

2) $\tau(F)v_k = v_{k+1}$,

3) $\tau(E)v_k = k(n - k + 1)v_{k-1}$

(*считается, что* $v_{-1} = v_{n+1} = 0$).

Доказательство. 1) Пусть c — какое-нибудь собственное значение $\tau(H)$ в V, т.е. $\tau(H)v = cv$. Тогда $\tau(E)v$ — собственный вектор с собственным значением $c + 2$, а $\tau(F)$ — с собственным значением $c - 2$. Действительно,

$$\tau(H)\tau(E)v = \tau(E)\tau(H)v + 2\tau(E)v = c\tau(E)v + 2\tau(E)v = (c+2)\tau(E)v.$$
$$\tau(H)\tau(F)v = \tau(F)\tau(H)v - 2\tau(F)v = (c-2)\tau(F)v.$$

2) Применяя к v оператор $\tau(E)$ в разных степенях, мы будем получать линейно независимые векторы. Так как $\dim \tau < \infty$, то найдется вектор $v_0 \neq 0$ со следующими свойствами: $\tau(H)v_0 = c_0v_0$, $\tau(E)v_0 = 0$.

3) Пусть $v_k = \tau(F)^k v_0$. В силу тех же соображений конечномерности существует такое n, что $v_0, v_1, \ldots, v_n \neq 0$, $v_{n+1} = 0$.

4) Соотношения 1) и 2) очевидны по построению, но пока с c_0 вместо n, т. е. $\tau(H)v_k = (c_0 - 2k)v_k$.

Покажем, что для любого k существует такое $a_k \in \mathbb{C}$, что

$$\tau(E)v_k = a_k v_{k-1}. \tag{1}$$

Применим индукцию по k. При $k = 0$ имеем $\tau(E)v_0 = 0$, т. е. можно взять $a_0 = 0$.

Предположим, что $\tau(E)v_{k-1} = a_{k-1}v_{k-2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\tau(E)v_k = \tau(E)\tau(F)v_{k-1} &= \tau(F)\tau(E)v_{k-1} + \tau(H)v_{k-1} = \\ &= a_{k-1}\tau(F)v_{k-2} + (c_0 - 2(k-1))v_{k-1} = \\ &= (a_{k-1} + (c_0 - 2(k-1))v_{k-1}.\end{aligned}$$

Итак, $a_k = a_{k-1} + c_0 - 2(k-1)$. Таким образом,

$$a_k = \underbrace{[c_0 - 2(k-1)] + \ldots + c_0}_{k \text{ членов}} + a_0,$$

причем $a_0 = 0$. Следовательно,

$$a_k = c_0 k - 2(1 + \ldots + (k-1)) = c_0 k - k(k-1) = k(c_0 - k + 1). \tag{2}$$

5) Для $k = n + 1$ все предыдущее тоже верно, поэтому $\tau(E)v_{n+1} = a_{n+1}v_n$. Но $a_{n+1} = 0$, так как $v_{n+1} = 0$. Теперь из (2) следует, что $(n+1)(c_0 - n) = 0$, откуда $c_0 = n$.

Все соотношения 1), 2), 3) доказаны. □

Следствие 10.3. *Число n определяет неприводимое представление $\mathfrak{sl}(2)$ с точностью до изоморфизма.*

Это число называется *старшим весом* представления.

3. Представления SU(2) — классификация

Каждому неприводимому представлению SU(2) соответствует неприводимое представление $\mathfrak{su}(2)$ (его касательное представление, см. лекцию 9), а тому, в свою очередь, представление $\mathfrak{sl}(2)$. Последние только что классифицированы. Осталось показать, что любое представление $\mathfrak{su}(2)$ может быть поднято на SU(2).

Задача 10.3. а) *Естественному представлению* SL(2) *в пространстве однородных полиномов степени n от двух переменных отвечает неприводимое представление $\mathfrak{sl}(2)$ старшего веса n.*

б) *Каждое неприводимое представление $\mathfrak{su}(2)$ является касательным к представлению* SU(2) *в пространстве однородных полиномов от двух переменных.*

Таким образом, соответствие между представлениями SU(2) и $\mathfrak{su}(2)$ является взаимно однозначным.

Следствие 10.4. *Представления группы* SU(2) *в пространствах однородных полиномов всевозможных степеней от двух переменных дают полный список ее неприводимых представлений.*

4. Представления SO(3) — классификация

Ввиду накрытия $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ каждому неприводимому представлению SO(3) соответствует неприводимое представление SU(2) в том же пространстве. Следовательно, все неприводимые представления SO(3) содержатся среди построенных выше представлений SU(2). В однородных полиномах степени n $\tau(-E) = (-1)^n \cdot \mathrm{id}$. Такие представления спускаются на SO(3) только при четных n. Таким образом неприводимые представления SO(3) находятся во взаимно однозначном соответствии с представлениями SU(2) четного веса.

Лекция 11. Полиномы Лежандра

Владея информацией о неприводимых представлениях SU(2), SO(3) и $\mathfrak{sl}(2)$, мы можем вычислить в явном виде сферические функции Лапласа.

1. Зональная сферическая функция $Y_{m,0}$

$Y_{m,0}$ имеет вес 0, поэтому раскладывается по мономам вида $u^p\overline{u}^p x_3^l = (x_1^2 + x_2^2)^p x_3^l$ $(2p + l = m)$. Пусть $\xi_{1,2,3} = \rho(x_{1,2,3})$ — функции, получающиеся ограничением евклидовых координат на сферу. Для них $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1 - \xi_3^2$, поэтому $Y_{m,0}$ оказывается полиномом от ξ_3: $Y_{m,0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = P_m(\xi_3)$. P_m называется полиномом Лежандра. Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$ (область изменения ξ_3 на сфере): $\int_{-1}^{1} P_m P_n \, d\xi_3 = 0$, $m \neq n$. Это связано с тем, что $Y_{m,0}$ при разных m ортогональны по сферической мере, а последняя имеет вид $\sin\theta \, d\theta \, d\varphi = -d\xi_3 \, d\varphi$ (в наших обозначениях $\xi_3 = \cos\theta$, см. лекцию 6), и от φ подынтегральное выражение не зависит. Полиномы Лежандра можно найти явно (например, с помощью процесса ортогонализации). Первые полиномы таковы: $P_0 = 1$, $P_1 = \xi_3$, $P_2 = 3\xi_3^2 - 1$.

2. Присоединенные сферические функции

Неприводимое представление $\mathfrak{sl}(2)$ (а значит, и SU(2), и SO(3)) однозначно определяется своей размерностью (равной 1 + вес).

Сферическое представление U_m неприводимо относительно $\mathrm{SO}(3)$. Его размерность была найдена в лекции 8 с помощью непосредственного рассмотрения гармонических полиномов, и оказалась равной $2m+1$. Таким образом, это представление соответствует неприводимому представлению $\mathfrak{sl}(2)$ веса $2m$ (лекция 10).

Сферические функции $Y_{m,k}$ введены в лекции 8 как собственные векторы подгруппы

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{SO}(3)$$

с собственным значением z^k, $z = e^{i\varphi}$, в пространстве U_m. Легко показать, что это то же самое, что собственные векторы оператора представления элемента H. Действительно, $Y_{m,k}$ является собственным вектором с тем же собственным значением относительно подгруппы $\widetilde{G}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{SU}(2)$, накрывающей G_0 (задача 6.3). Дифференцируя по φ равенство

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} v = e^{ik\varphi} v \tag{3}$$

в точке $\varphi = 0$, убеждаемся, что собственному вектору с собственным значением z^k относительно $\widetilde{G}_0$ соответствует вектор веса $2k$ относительно H. Ввиду простоты спектра H в неприводимом представлении алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ функции $Y_{m,k}$ с точностью до нормировки совпадают с элементами канонического базиса представления U_m, введенного в теореме 10.1. В частности, $Y_{m,m}$ имеет вес $2m$, т. е. является вектором старшего веса в U_m.

В равенстве (3) мы опустили для простоты обозначение сферического представления. Сейчас нам будет удобнее его ввести. Пусть τ — сферическое представление алгебры $\mathfrak{sl}(2)$. По теореме 10.1

$$Y_{m,\pm k} = \tau(E_\pm)^k Y_{m,0} \tag{4}$$

(тем самым мы определили нормировку $Y_{m,\pm k}$, отличную от нормировки канонического базиса).

Задача 11.1. *Рассмотрим представление* $\mathrm{SO}(3)$ *в пространстве функций на* $\mathbb{R}^3$ *и ассоциированные представления* $\mathfrak{su}(2)$ *и* $\mathfrak{sl}(2)$. *В этом представлении*

$$\tau(E_+) = (x_1 - ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Решение. Как обычно, реализуем $\mathbb{R}^3$ как пространство самосопряженных матриц с нулевым следом:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

и базисом

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

так что

$$E = \{x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Покажем, что для любого $U \in \mathfrak{su}(2)$

$$\tau(U) = \langle [U, X], \partial_X \rangle, \tag{5}$$

где ∂_X — градиент по x_1, x_2, x_3, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, ассоциированное с базисом E_1, E_2, E_3.

Рассмотрим кривую $u = u(t)$, для которой $u(0) = \mathrm{id}$, $u'(0) = U$. Тогда

$$\tau(U)f(X) = \frac{d}{dt} f(X(t))_{t=0}, \quad \text{где} \;\; X(t) = u(t)Xu(t)^{-1}. \tag{6}$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{dt}\frac{\partial}{\partial x_3} = \langle X'(t), \partial_X \rangle.$$

Теперь положим $t = 0$. Остается заметить, что $X'(0) = [U, X]$, и убедиться в справедливости (5).

Поскольку $\mathfrak{sl}(2)$ является линейной оболочкой $\mathfrak{su}(2)$ над $\mathbb{C}$, а правая часть соотношения (5) линейна по U, заключаем, что соотношение (5) выполняется для всех $U \in \mathfrak{sl}(2)$. В частности, для вычисления $\tau(E_+)$ достаточно заметить, что

$$[E_+, X] = \begin{pmatrix} -x_1 + ix_2 & -2x_3 \\ 0 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} = (x_1 - ix_2)E_3 - x_3(E_1 - iE_2).$$

Отсюда и получаем искомое выражение для $\tau(E_+)$. □

3. Вычисление $Y_{m,\pm k}$

Пусть $\widetilde{Y}_{m,\pm k}$ — любой прообраз $Y_{m,\pm k}$ в $C(\mathbb{R}^3)$. Ввиду перестановочности ограничения на сферу $S = S^2$ с действием $\mathrm{SO}(3)$,

$$\tau(E_+)Y_{m,\pm k} = (\tau(E_+)\widetilde{Y}_{m,\pm k})\big|_S.$$

В частности, можно взять $\widetilde{Y}_{m,0} = P_m(x_3)$ (это не однородный полином, поэтому $P_m(x_3) \notin H_m$).

Можно взять $\widetilde{Y}_{m,\pm k} = \tau(E_\pm)^k \widetilde{Y}_{m,0}$ (тогда после ограничения условие (4) будет соблюдено).

Используя задачу 11.1, найдем $\widetilde{Y}_{m,1} = \tau(E_+)P_m(x_3) = (x_1 - ix_2)P'_m(x_3)$.

Когда будем искать $\widetilde{Y}_{m,2} = \tau(E_+)\widetilde{Y}_{m,1}$, надо учесть, что

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)(x_1 - ix_2) = 0,$$

поэтому и

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)((x_1 - ix_2)P'_m(x_3)) = 0,$$

так что только член $(x_1 - ix_2)\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ оператора $\tau(E_+)$ внесет свой вклад, и мы получим

$$\widetilde{Y}_{m,2} = (x_1 - ix_2)P''_m(x_3).$$

Аналогично

$$\widetilde{Y}_{m,\pm k} = (x_1 \mp ix_2)^k P_m^{(k)}(x_3).$$

Ограничивая на сферу, имеем:

$$Y_{m,\pm k} = (\xi_1 \mp \xi_2)^k P_m^{(k)}(\xi_3).$$

Лекция 12. Атом водорода. Периодическая система Менделеева

1. Стационарное уравнение Шредингера

Для одного электрона в центральном поле это уравнение имеет вид

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(r)\Big)\psi = E\psi,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, μ — масса электрона, E — его энергия, ψ — волновая функция или состояние электрона, $V = V(r)$ — потенциал. Оператор Δ введен в лекции 8 и называется *оператором Лапласа.* Уравнение описывает состояние электрона с энергией E. Для кулонова потенциала $V(r) = -\dfrac{e^2}{r}$ единичного заряда e (равного заряду электрона)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi = \Big(E + \frac{e^2}{r}\Big)\psi. \tag{1}$$

Потенциал зависит только от радиуса. Поэтому перейдем к сферическим координатам.

Задача 12.1. *В сферических координатах уравнение* (1) *имеет вид*

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\varphi,\theta}\psi = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\Big(E + \frac{e^2}{r^2}\Big)\psi, \tag{2}$$

где

$$\Delta_{\varphi,\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

(*«радиальная часть» оператора Лапласа*).

2. Разделение переменных

По основной теореме гармонического анализа на S^2

$$\psi(\varphi,\theta,r) = \sum_{m,l} F_{m,l}(r)Y_{m,l}(\varphi,\theta),$$

где $Y_{m,l}$ — сферические функции. Преобразуем (2) к виду

$$H_r\psi + \Delta_{\varphi,\theta}\psi = 0,$$

где

$$H_r\psi = r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\Big(E + \frac{e^2}{r}\Big)\psi.$$

Подставим сюда ряд для ψ:

$$\sum_{m,l}(H_rF_{m,l}(r))Y_{m,l} + \sum_{m,l}F_{m,l}(r)\Delta_{\varphi,\theta}Y_{m,l} = 0.$$

Лемма 12.1. $\Delta_{\varphi,\theta}Y_{m,l} = -m(m+1)Y_{m,l}$.

Доказательству этой леммы посвящен пункт 3 настоящей лекции.

Таким образом,

$$\sum(H_rF_{m,l}(r))Y_{m,l} = \sum m(m+1)F_{m,l}(r)Y_{m,l},$$

откуда $H_rF_{m,l} = m(m+1)F_{m,l}$. Следовательно, $F_{m,l}$ является решением уравнения

$$r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rF) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\Big(E + \frac{e^2}{r}\Big)F = m(m+1)F \tag{3}$$

(заметим, что l не входит в уравнение, т. е. F не зависит от l).

Замечание. Можно было бы провести разделение переменных без всякого гармонического анализа, сказав: «будем искать решения уравнения (2) в виде $\psi(\varphi,\theta,r) = F(r)Y(\varphi,\theta)$». Основная теорема гармонического анализа на S^2 вместе с леммой 12.1 показывают, что полученные таким образом решения образуют полную систему.

3. Оператор Лапласа в сферическом представлении

Ниже мы не будем делать различия между обозначением элемента алгебры Ли и соответствующего ему оператора представления.

Задача 12.2. *Найдите действие H_1, H_2 и H_3 в сферическом представлении и проверить, что*

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = \Delta_{\varphi,\theta}.$$

Ответ.

$$H_1 = -\Big(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big),$$

$$H_2 = -\Big(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big), \qquad H_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Указания. 1) Пусть τ — сферическое представление. Тогда

$$(\tau(H_1)f)(x) = \frac{d}{dt}f(uXu^{-1})_{t=0} = (\varphi'(0)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \theta'(0)\frac{\partial}{\partial\theta})f(X),$$

где $u(t) \in \mathrm{SU}(2)$, $u(0) = 1$, $u_1'(0) = H_1$, $X = X(\varphi,\theta) \in S \subseteq E$, $X(t) = u(t)Xu(t)^{-1} = X(\varphi(t), \theta(t))$.

2) Сферические и евклидовы координаты X связаны соотношением $x_1 = \sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = \sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = \cos\theta$. Отсюда

$$x_1' = \cos\theta\cos\varphi\cdot\theta' - \sin\theta\sin\varphi\cdot\varphi',$$
$$x_2' = \cos\theta\sin\varphi\cdot\theta' + \sin\theta\cos\varphi\cdot\varphi',$$
$$x_3' = -\sin\theta\cdot\theta'.$$

3) С другой стороны, x_i' $(i = 1,2,3)$ — это координаты X как элемента пространства E: $X = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$. По определению

$$X'(0) = (u(t)Xu(t)^{-1})'_{t=0} = [H_1, X] = \left[\frac{1}{2i}E_1, x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3\right] = -x_2E_3 + x_3E_2.$$

Таким образом, $x_1'(0) = 0$, $x_2'(0) = x_3 = \cos\theta$, $x_3'(0) = -x_2 = -\sin\theta\sin\varphi$. Подставляя это в предыдущую группу соотношений (между x_i', $i = 1,2,3$, и φ', θ'), выразим $\varphi'(0)$, $\theta'(0)$ через тригонометрические функции φ и θ.

Задача 12.3. *В любом представлении $H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$ коммутирует с E_1, E_2 и E_3.*

Указание: используйте соотношения между $H_{1,2,3}$ и $E_{1,2,3}$ (лекция 10) и коммутационные соотношения $[E_1, E_2] = 2iE_3$, $[E_2, E_3] = 2iE_1$, $[E_3, E_1] = 2iE_2$.

Задача 12.4. *$\Delta_{\varphi,\theta}$ коммутирует с вращениями.*

Решение 1. Вывести утверждение из задачи 12.1. Оператор Δ инвариантен относительно SO(3), а $\Delta_{\varphi,\theta}$ есть ограничение Δ на S^2.

Решение 2. Вывести утверждение из задач 12.2, 12.3 и следствия 9.2.

Задача 12.5. $E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 = E_- E_+ + 2H + H^2$.

Следствие 12.1. $\Delta_{\varphi,\theta} = -\frac{1}{4}(E_- E_+ + 2H + H^2)$.

Доказательство леммы 12.1. Нам надо доказать, что $\Delta_{\varphi,\theta}\big|_{U_m} = -m(m+1)\cdot \mathrm{id}$. Согласно задаче 12.4, $\Delta_{\varphi,\theta}$ на неприводимом представлении скалярен. Поэтому достаточно вычислить его на каком-то одном векторе. Возьмем $Y_{m,m}$. Это старший вектор, т.е. $E_+ Y_{m,m} = 0$. Воспользуемся следствием 12.1:

$$\Delta_{\varphi,\theta} Y_{m,m} = -\frac{1}{4}(2H + H^2) Y_{m,m}.$$

Но $HY_{m,m} = 2mY_{m,m}$, поэтому $\Delta_{\varphi,\theta} Y_{m,m} = -m(m+1)$. □

4. Радиальное уравнение Шредингера

Так называется уравнение (3). Теория представлений не дает ничего для этого уравнения. Его исследование — область уравнений в частных производных. Сформулируем готовый результат (см., например, Фейнмановские лекции по физике, том 9).

Лемма 12.2. *Уравнение* (3) *имеет дискретное множество решений F_n, $n \geqslant m+1$, убывающих на бесконечности, причем решению F_n соответствует значение энергии*

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar}\cdot\frac{1}{n^2}. \qquad (\textit{формула Н. Бора})$$

Для нееединичного заряда ядра z в числитель вошло бы z^2. Отрицательность энергии вызвана тем, что потенциал $V(r)$ равен 0 на бесконечности, так что на конечном расстоянии энергия отрицательна. Убывание на бесконечности соответствует связанному электрону (т.е. электрону атома).

Номер энергетического уровня n называется *главным квантовым числом*.

5. Вырождение главного квантового числа и длина периодов таблицы Менделеева

По лемме 12.2 собственные функции оператора Шредингера, отвечающие собственному значению E_n, имеют вид $F_n J_{m,e}$, где $m < n$. Для данного m число таких функций равно $\dim U_m = 2m+1$. Следовательно, размерность соответствующего собственного подпространства (*вы-*

рождение уровня энергии E_n, как говорят физики) равна

$$\sum_{m=0}^{n-1}(2m+1)=n^2.$$

С учетом спина получаем $2n^2$ состояний с данной энергией.

Для числа состояний на первых уровнях энергии имеем

$$n=1,2,3,4,\dots$$
$$2n^2=2,8,18,32,\dots$$

Это в точности длины периодов таблицы Менделеева. Оно и не удивительно, так как химические свойства в основном определяются внешней электронной оболочкой, а $2n^2$ — это число различных состояний электронов в оболочке уровня E_n.

Однако, в таблице Менделеева имеется два периода длины 8 — второй и третий — и два длины 18. Объясним это.

6. Заполнение электронных оболочек

Итак, каждому значению главного квантового число отвечает n^2 функций $Y_{m,l}$ с $m<n$. Физики называют m *азимутальным квантовым числом*, или *квантовым числом полного момента*. Состояния с $m=0$ называются *s-состояниями*, с $m=1$ — *p*-состояниями, с $m=2$ — *d*-состояниями, с $m=3$ — *f*-состояниями, и т. д. Например, состояние $2p$ — это состояние с $n=2$ и $m=1$. Оказывается, *s*-состояния «энергетически выгоднее» *p*-состояний, так как вероятность нахождения вблизи ядра у них больше (см. рис. 2, заимствованный из «Фейнмановских лекций по физике»). Аналогично, *p* выгоднее *d*, и так далее.

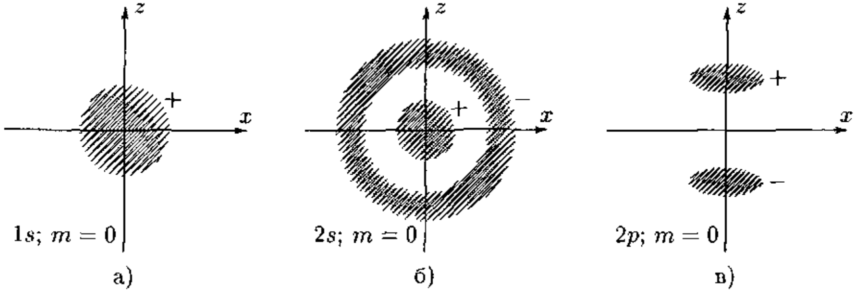


Рис. 2.

Электронные конфигурации первых 30 элементов
(число электронов в разных состояниях)

Z	Элемент	W, эВ	Электронная конфигурация										
			$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$	
1	H водород	13,6	1										
2	He гелий	24,6	2										инертный газ
3	Li литий	5,4	Заполнены (2)	1									щелочной металл
4	Be бериллий	9,3		2									
5	B бор	8,3		2	1								
6	C углерод	11,3		2	2								
7	N азот	14,5		2	3								
8	O кислород	13,6		2	4								
9	F фтор	17,4		2	5								
10	Ne неон	21,6		2	6								инертный газ
11	Na натрий	5,1	Заполнены (2)	Заполнены (8)		1							щелочной металл
12	Mg магний	7,6				2							
13	Al алюминий	6,0				2	1						
14	Si кремний	8,1				2	2						
15	P фосфор	10,5				2	3						
16	S сера	10,4				2	4						
17	Cl хлор	13,0				2	5						
18	Ar аргон	15,8				2	6						инертный газ
19	K калий	4,3	Заполнены (2)	Заполнены (8)		Заполнены (8)			1				щелочной металл
20	Ca кальций	6,1							2				
21	Sc скандий	6,5						1	2				
22	Ti титан	6,8						2	2				
23	V ванадий	6,7						3	2				
24	Cr хром	6,8						5	1				
25	Mn марганец	7,4						5	2				
26	Fe железо	7,9						6	2				
27	Co кобальт	7,9						7	2				группа железа
28	Ni никель	7,6						8	2				
29	Cu медь	7,7						10	1				
30	Zn цинк	9,4						10	2				

Поэтому с ростом атомного номера s-состояния, как правило, заполняются раньше p-состояний, p-состояния раньше d-состояний, и так далее.

Если пренебречь межэлектронным взаимодействием или учитывать его в теории возмущений, то теория одноэлектронного атома до какой-то степени объясняет свойства многоэлектронных атомов. Рассмотрим начало таблицы Менделеева (см. таблицу на с. 48, также заимствованную из Фейнмановских лекций).

Первый период имеет длину 2, так как единственная энергетически выгодная оболочка $1s$ заполняется 2 электронами. Второй период в согласии с вышесказанным имеет длину 8.

Следующий, третий период должен был бы иметь длину 18. Однако на практике оболочки $3d$ и $4s$ расположены настолько близко, что $4s$ оказывается энергетически выгоднее, чем $3d$, и заполняется раньше. Поэтому заполнение третьей оболочки на время прерывается, и все выглядит так, как будто третий период также имеет длину 8, а затем начинается четвертый.

Во втором и третьем периодах строение внешних оболочек повторяется буквально, поэтому соответствующие элементы этих периодов идентичны по химическим свойствам и периодический закон Менделеева выполняется идеально («химические свойства вещества находятся в периодической зависимости от атомного веса»).

Мы указали в таблице только первые 12 из 18 элементов четвертого периода. Для остальных оболочки $3d$ и $4s$ заполнены (как у последнего в таблице элемента — цинка) и происходит заполнение оболочки $4p$, что и дает недостающие 6 элементов.

В конечном счете, как мы видим, химические свойства элементов объясняются в терминах старших весов представлений $\mathfrak{su}(2)$ $(s, p, d, \ldots)$.

Приложение. Задачи к курсу «Введение в теорию представлений» (С. А. Локтев)

Семинар 1

Задача 1. Задают ли матрицы $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ представление *аддитивной* группы $\mathbb{Z}$:

$$\text{a) } \varphi(n) = \begin{pmatrix} an & 0 \\ 0 & bn \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \varphi(n) = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \varphi(n) = \begin{pmatrix} 1 & an \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \varphi(n) = \begin{pmatrix} 1 & a^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \varphi(n) = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & \sin(n\alpha) \\ -\sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}?$$

где a, b, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Задача 2. Для представлений из задачи 1 найдите все подпредставления и опишите все факторпредставления.

Задача 3. Найдите все эндоморфизмы представлений из задачи 1.

Задача 4. Найти все 1-мерные представления циклической группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

a) над $\mathbb{R}$; b) над $\mathbb{C}$; c)* над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

Задача 5. Пусть G — группа. Через $k[G]$ обозначим линейное пространство всех функций на G. Образуют ли операторы $\varphi(g)$ в пространстве $k[G]$ представление группы G?

a) $(\varphi(g)f)(x) = f(g \cdot x)$; b) $(\varphi(g)f)(x) = f(x \cdot g)$;
c) $(\varphi(g)f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$; d) $(\varphi(g)f)(x) = f(x \cdot g^{-1})$

где $f \in k[G]$, $x \in G$.

Задача 6. Определим представление *симметрической* группы (группы перестановок) S_n в $\mathbb{R}^n$ соотношением

$$\varphi(\sigma)((x_1, \ldots, x_n)) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

где $\sigma \in S_n$.

a) Докажите, что элементы $(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $x_1 + \ldots + x_n = 0$, образуют подпредставление.

b)* Докажите, что это подпредставление неприводимо.

c) Найдите другие подпредставления того же представления.

Задача 7*.

a) Докажите, что в конечномерном комплексном векторном пространстве не существует таких операторов X, Y, что $[X, Y] = \mathrm{id}$.

b) Найдите такие операторы в конечномерном векторном пространстве над $\mathbb{F}_q$.

Семинар 2

Здесь мы рассматриваем конечномерные векторные пространства над произвольным полем k.

Оператор $P\colon V \to V$ называется *проектором* на подпространство $U \subset V$, если $\mathrm{Im}\,(P) = U$ и $P|_U = \mathrm{id}$.

Задача 1. Докажите, что P является проектором тогда и только тогда, когда $P^2 = P$.

Теперь рассмотрим представление $\pi\colon G \to \mathrm{End}(V)$ конечной группы G. Пусть $U \subset V$ — его подпредставление, $P\colon V \to V$ — проектор на U. Определим оператор

$$P^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(g^{-1}) \circ P \circ \pi(g).$$

Задача 2. Покажите, что P^G является проектором на U.

Задача 3. Покажите, что P^G — морфизм представлений. Выведите разложение в прямую сумму представлений группы G: $V \cong U \oplus \mathrm{Ker}\,(P^G)$.

Задача 4. Покажите, что если $\mathrm{char}(k)$ не является делителем $|G|$, то всякое представление вполне приводимо.

Задача 5*. Найдите не вполне приводимое представление группы $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ над $\mathbb{F}_q$.

Семинар 3

Для многогранника $M \subset \mathbb{R}^3$ обозначим через $\mathrm{O}(M)$ группу движений пространства $\mathbb{R}^3$, сохраняющих M, а через $\mathrm{SO}(M) \subset \mathrm{O}(M)$ — ее подгруппу, состоящую из операторов с определителем, равным единице.

Тройка $F \supset E \supset V$, где F — грань многогранника M, E — содержащееся в ней ребро, а V — содержащаяся в нем вершина, называется *флагом* многогранника M. Многогранник M называется *регулярным*, если $\mathrm{O}(M)$ транзитивно действует на его флагах.

Задача 0*. Покажите, что все регулярные многогранники содержатся в следующем списке:

тетраэдр (T), куб (C), октаэдр (O), икосаэдр (I), додекаэдр (D).

Задача 1. Покажите, что для любого регулярного многогранника M порядок $|\mathrm{O}(M)|$ группы $\mathrm{O}(M)$ равен числу флагов на M и $|\mathrm{SO}(M)| = |\mathrm{O}(M)|/2$.

Задача 2. *Докажите, что* $SO(T) \cong A_4$ *и* $O(T) \cong S_4$.

Задача 3. Докажите, что $\mathrm{SO}(C) \cong \mathrm{SO}(O) \cong S_4$ и $\mathrm{O}(C) \cong \mathrm{O}(O) \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 4*. Докажите, что $\mathrm{SO}(I) \cong \mathrm{SO}(D) \cong A_5$ и $\mathrm{O}(I) \cong \mathrm{O}(D) \cong A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 5. Докажите, что для любого регулярного многогранника M тавтологическое представление групп $\mathrm{O}(M)$ и $\mathrm{SO}(M)$ движениями многогранника M неприводимо.

Задача 6. Изоморфны ли следующие представления:

a) S_4 движениями тетраэдра и куба;

b) $A_4 \subset S_4$ движениями тетраэдра и куба?

Семинар 4

Пусть G — конечная группа, через Reg обозначим ее левое регулярное представление над произвольным полем k. Определим элементы $\delta_g \in \mathrm{Reg}$ следующим образом:

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1, & \text{если } g = h, \\ 0, & \text{если } g \neq h. \end{cases}$$

Задача 1. Покажите, что множество $\{\delta_g\}_{g \in G}$ образует базис в Reg. Запишите левое и правое действие группы G в этом базисе.

Для двух представлений V_1, V_2 обозначим через $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ линейное пространство гомоморфизмов из V_1 в V_2.

Задача 2. Покажите, что для любого представления V имеется изоморфизм линейных пространств

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Reg}, V) \cong V,$$

при котором гомоморфизму сопоставляется образ элемента δ_e.

Пусть $\mathrm{Aut}_G(V) = \mathrm{Hom}_G(V, V)$. Лемма Шура утверждает, что для $k = \mathbb{C}$ и неприводимого представления V мы имеем $\mathrm{Aut}_G(V) = \mathbb{C}$.

Задача 3. Предположим, что $\mathrm{char}(k)$ не делит $|G|$. Покажите, что кратность неприводимого представления V в Reg равна $\dim V / \dim \mathrm{Aut}_G(V)$. Докажите, что

$$|G| = \sum_{T \in \widehat{G}} \frac{(\dim T)^2}{\dim \mathrm{Aut}_G(T)}.$$

Для $k \in \mathbb{Z}$ определим 2-мерное представление ρ_k группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ вращениями плоскости

$$\rho_k(l) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi kl}{n} & \sin\dfrac{2\pi kl}{n} \\ -\sin\dfrac{2\pi kl}{n} & \cos\dfrac{2\pi kl}{n} \end{pmatrix}$$

для $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Задача 4. Найдите размерность пространства $\mathrm{Aut}_G(\rho_k)$

Задача 5. Разложите ρ_k на неприводимые представления и найдите условия того, что $\rho_k \cong \rho_{k'}$

a) над $\mathbb{C}$; b) над $\mathbb{R}$.

Задача 6. Найдите все неприводимые представления группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ над $\mathbb{R}$ с точностью до изоморфизма.

Задача 7*. Найдите все неприводимые представления группы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ над $\mathbb{F}_5$ с точностью до изоморфизма.

Семинар 5

Задача 1. Найдите характер регулярного представления (левого или правого). Разложите его на неприводимые. Получите отсюда еще раз теорему Бернсайда.

Напомним, что группа диэдра D_n порождена вращением s и отражением T, так что $s^n = T^2 = e$, $TsT = s^{-1}$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Определим 2-мерное представление ρ_k группы D_n следующим образом:

$$\rho_k(s) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi k}{n} & \sin\dfrac{2\pi k}{n} \\ -\sin\dfrac{2\pi k}{n} & \cos\dfrac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \qquad \rho_k(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Проверьте, что ρ_k корректно определено и найдите его характер.

Задача 3. Разложите ρ_k на неприводимые представления

a) над $\mathbb{C}$; b) над $\mathbb{R}$.

Задача 4. Найдите условия, при которых $\rho_k \cong \rho_{k'}$

a) над $\mathbb{C}$; b) над $\mathbb{R}$.

Задача 5. Найдите все неприводимые представления группы D_n

a) над $\mathbb{C}$; b) над $\mathbb{R}$.

Задача 6. Разложите тензорные произведения неприводимых комплексных представлений группы D_n.

Семинар 6

Пусть $[G,G]$ — подгруппа группы G, порожденная всеми коммутаторами (элементами вида $aba^{-1}b^{-1}$ для a, $b \in G$).

Задача 1. Покажите, что $[G,G]$ является нормальной подгруппой, фактор $G/[G,G]$ является абелевой группой и всякое одномерное представление группы G является и представлением факторгруппы $G/[G,G]$.

Задача 2. Найдите одномерные представления следующих групп:

a) S_n; b) A_4; c)* A_n.

Задача 3. Опишите классы сопряженных элементов следующих групп:

a) S_n; b) A_4; c)* A_n.

Итак, мы знаем все неприводимые представления группы A_4 (а именно, представления вращениями тетраэдра и одномерные представления), и все неприводимые представления S_4, кроме одного (а именно, представления вращениями тетраэдра, представления вращениями куба и одномерные).

Задача 4. Найдите размерность и характер оставшегося представления группы S_4.

Задача 5*. Постройте это представление.

Задача 6. Разложите тензорные произведения неприводимых представлений группы

a) A_4; b)* S_4

на неприводимые представления.

Семинар 7

Пусть H — группа, порожденная элементами i, j и ε (последний играет роль «-1»), такими что $\varepsilon i = i\varepsilon$, $\varepsilon j = j\varepsilon$, $i^2 = j^2 = \varepsilon$, $ij = \varepsilon ji$.

Задача 1. Найдите $|H|$ и $[H, H]$.

Задача 2. Найдите число неприводимых комплексных представлений группы H.

Задача 3. Найдите одномерные комплексные представления группы H.

Задача 4. Найдите размерность и характер оставшегося представления группы H.

Задача 5*. Постройте это представление.

Задача 6. Разложите тензорные произведения неприводимых комплексных представлений группы H на неприводимые.

Контрольные задачи по представлениям конечных групп

Пусть G — группа, порожденная элементами τ и σ, такими что $\tau^5 = 1$, $\sigma^4 = 1$, $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^2$.

Задача 1. Найдите $|G|$, $[G, G]$ и число неприводимых комплексных представлений группы G.

Задача 2. Найдите размерности и характеры комплексных неприводимых представлений группы G.

Задача 3. Разложите тензорные произведения комплексных неприводимых представлений группы G на неприводимые представления.

Задача 4. Постройте неприводимые комплексные представления группы G.

Семинар 8

Пусть V — векторное пространство полиномов $P(x,y)$ от переменных x и y. Определим отображение $T\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(V)$ следующим образом

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) P(x,y) = P(ax+cy, bx+dy).$$

Пусть $V_n \subset V$ — подпространство однородных полиномов степени n.

Задача 1. Покажите, что T является представлением группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ в пространстве V и пространства V_n, $n \geqslant 0$ являются подпредставлениями. Найдите размерность пространства V_n.

Пусть $H \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ — подгруппа матриц вида $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$ для $|z| = 1$.

Задача 2. Покажите, что $H \cong S^1$ и разложите V_n на неприводимые представления.

Задача 3. Когда V_n в действительности является представлением группы $\mathrm{SO}_3 = \mathrm{SU}_2/\pm 1$?

Задача 4. Покажите, что V_n является неприводимым представлением группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, а также группы $\mathrm{SU}_2 \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Задача 5. Найдите характер представления V_n.

Задача 6*. Используя вычисление характеров, разложите тензорные произведения

a) $V_1 \otimes V_1$; b) $V_1 \otimes V_2$; c) $V_1 \otimes V_n$; d) $V_2 \otimes V_n$; e) $V_m \otimes V_n$ на неприводимые представления группы SU_2 (то есть на представления вида V_i).

Семинар 9

Задача 1. Образует ли следующее множество матриц группу Ли? Если да, найдите соответствующую алгебру Ли:

a) верхние треугольные обратимые матрицы; b) диагональные обратимые матрицы; c) верхние треугольные матрицы с единицами на диагонали; d) обратимые матрицы вида $\left(\begin{array}{c|c} \star & \star \\ \hline \star & 0 \end{array}\right)$; e) обратимые матрицы вида $\left(\begin{array}{c|c} \star & \star \\ \hline 0 & \star \end{array}\right)$.

Задача 2. Найдите алгебру Ли группы a) O_n ортогональных операторов; b) U_n унитарных операторов;

c) $\mathrm{O}(B)$ обратимых операторов, сохраняющих данную билинейную форму B;

d) $\mathrm{U}(E)$ обратимых операторов, сохраняющих данную эрмитову форму E .

Задача 3. Найдите алгебру Ли группы a) SL_n операторов с определителем 1; b) SO_n и SU_n — соответственно ортогональных и унитарных операторов с определителем 1.

Задача 4. Найдите все с точностью до изоморфизма алгебры Ли размерности 2.

Задача 5*. Покажите, что $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ как комплексные алгебры Ли.

Семинар 10

Пусть ρ — представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Оператор

$$K_\rho = \rho(E)\rho(F) + \rho(F)\rho(E) + \rho(H)^2/2$$

называется *оператором Казимира.*

Задача 1. Покажите, что K_ρ коммутирует с действием $\mathfrak{sl}_2$.

Задача 2.

a) Докажите, что если ρ неприводимо, то K_ρ — скалярный оператор.

b)* Докажите, что если ρ неразложимо, то K_ρ имеет единственное собственное значение.

Задача 3. Найдите K_ρ, когда ρ — неприводимое n-мерное представление.

Задача 4. Выведите формулу для K_ρ используя генераторы алгебры Ли $\mathfrak{su}_2$.

Задача 5*. Сколько есть подгрупп в $\mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ (с точностью до сопряжения), изоморфных группе a) SO_3; b) SU_2 ?

Семинар 11

Задача 1. Найдите стандартный базис представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ в однородных полиномах степени n от двух переменных. Последнее можно получить как касательное к соответствующему представлению группы SL_2.

Задача 2. В следующих представлениях запишите оператор Казимира как дифференциальный оператор:

a) представление группы $\mathfrak{su}_2 \subset \mathfrak{gl}_2$ в полиномах от двух переменных;

b) представление группы $\mathfrak{su}_2 \cong \mathfrak{so}_3 \subset \mathfrak{gl}_3$ в полиномах от трех переменных.

Задача 3. Найдите действие генераторов H_1, H_2 и H_3 алгебры $\mathfrak{su}_2$ в сферическом представлении (см. указания в лекции 12).

Задача 4. Запишите оператор Казимира как дифференциальный оператор в сферическом представлении алгебры Ли $\mathfrak{su}_2$ и сравните результат с радиальной частью оператора Лапласа.

Задача 5*. Как определить тензорное произведение представлений алгебры Ли, так чтобы касательное представление к тензорному произведению равнялось тензорному произведению касательных представлений?

Контрольные задачи по представлениям алгебр Ли

Присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это представление в пространстве $\mathfrak{g}$, обозначаемое символом ad и задаваемое следующей формулой: $(\operatorname{ad} x)y = [x, y]$, $x, y \in \mathfrak{g}$.

Задача 1. Разложите на неприводимые присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$.

Задача 2. Для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ найдите

a) одномерные комплексные представления; b) все неприводимые конечномерные комплексные представления.

Задача 3. Найдите разложение на неприводимые тензорного произведения двух неприводимых представлений весов m и n алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Оглавление

О НЕЗАВИСИМОМ МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

НМУ — высшее негосударственное учебное заведение для подготовки профессиональных математиков.

Занятия в НМУ проводятся в вечернее время (обычно с 17.30). Это связано с тем, что многие наши студенты совмещают обучение в НМУ с занятиями в другом вузе (как правило — но не исключительно! — на мехмате МГУ). Наши занятия по физике и математике может посещать любой желающий (не обязательно студент или аспирант НМУ).

Обучение в НМУ бесплатное. Студентам выплачивается стипендия.

Наш адрес: 119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11.
Телефон: (095) 241-4086.
Факс: (095) 291-6501.
E-mail: `ium@mccme.ru`

Подробности см. на сайте `http://ium.mccme.ru/`

КУРСЫ И СЕМИНАРЫ В НМУ В ВЕСЕННЕМ СЕМЕСТРЕ 2004 ГОДА

М. С. Агранович
Эллиптические псевдодифференциальные операторы (часть 2)

И. В. Аржанцев
Представления классических групп

И. А. Богаевский
Критические точки и группы, порожденные отражениями

Ю. М. Бурман
Геометрия многообразий и расслоений

А. М. Вербовецкий
Геометрия и алгебра дифференциальных уравнений в частных производных

А. А. Глуцюк
Квазиконформные отображения и некоторые их применения в динамике

В. А. Гордин
Прикладная математика

П. Г. Гриневич
Введение в гамильтонову механику

В. С. Жгун, Д. В. Миронов
Геометрическая теория инвариантов

М. Э. Казарян
Дифференциальная геометрия, 2 курс

П. И. Кацыло
Локальные формулы в дифференциальной геометрии

А. М. Левин
Алгебра, 1 курс

С. М. Натанзон, О. В. Шварцман, О. К. Шейнман
Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика (семинар)

Г. И. Ольшанский
Введение в алгебраическую комбинаторику, 2 курс

С. Ю. Оревков
Практические работы по компьютерной алгебре

Е. И. Пантелеева, М. Ю. Розенблюм
Введение в теорию чисел (2)

А. Ю. Пирковский
Совместный спектр Тэйлора и пучковые модели линейных операторов

Л. Е. Посицельский
Обратная задача теории Галуа

А. В. Савватеев
Теория игр для математиков

Д. И. Савельев, В. Б. Шехтман
Аксиоматическая теория множеств

В. М. Тихомиров
Математический анализ, 1 курс

Б. Л. Фейгин, В. В. Доценко
Алгебры Ли

А. М. Филимонов
Уравнения с частными производными (вводный курс)

Г. Б. Шабат
Алгебраическая динамика (семинар)

О. В. Шварцман
Комплексный анализ, 2 курс

О. К. Шейнман
Алгебры Кричевера—Новикова и их представления

КУРСЫ И СЕМИНАРЫ В НМУ В ОСЕННЕМ СЕМЕСТРЕ 2003 ГОДА

М. С. Агранович
Эллиптические псевдодифференциальные операторы

О. Ю. Аристов
Алгебра Фурье и квантовый функциональный анализ

А. А. Белавин
Введение в квантовую теорию поля

М. Л. Бланк
Введение в эргодическую теорию динамических систем

И. А. Богаевский
Особенности гладких функций

Ю. М. Бурман
Топология, 2 курс

А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик
Геометрия и алгебра дифференциальных уравнений в частных производных

В. А. Гордин
Прикладная математика

А. Л. Городенцев
Алгебраическая геометрия

Ф. Л. Зак
Грассманова и проективная геометрия

В. Я. Иврий
Что такое микролокальный анализ?

Г. С. Ирошников
Path Integral and Coherent States in Quantum Mechanics and Field Theory

Г. А. Кабатянский
Теория кодирования и элементы криптографии

А. М. Красносельский, Д. И. Рачинский
Топологические методы и краевые задачи

И. М. Кричевер
Голоморфные векторные расслоения и интегрируемые системы

А. Г. Кузнецов
Алгебра, 2 курс

А. М. Левин
Алгебра, 1 курс

С. М. Натанзон, О. В. Шварцман, О. К. Шейнман
Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика (семинар)

С. Ю. Немировский
Многомерный комплексный анализ

Е. И. Пантелеева, М. Ю. Розенблюм
Введение в теорию чисел

Д. И. Панюшев
Комбинаторные аспекты теории ad-нильпотентных идеалов в борелевских подалгебрах

О. Н. Попов
Коммутативная алгебра на многообразиях

Л. Е. Посицельский
Обратная задача теории Галуа

А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин
K-теория и теорема Атьи—Зингера

А. Б. Скопенков
Введение в топологию маломерных многообразий

А. Б. Сосинский
Геометрия, 1 курс

В. М. Тихомиров
Математический анализ, 1 курс

Б. Л. Фейгин, В. В. Доценко
Группы и алгебры Ли

А. М. Филимонов
Уравнения с частными производными (вводный курс)

Г. Б. Шабат
Алгебраическая динамика (семинар)

О. В. Шварцман
Римановы поверхности и тэта-функции

В. Б. Шехтман, Д. И. Савельев
Аксиоматическая теория множеств

М. Ямпольский
Динамика квадратичных полиномов

Настоящие лекции представляют собой записки семестрового вводного курса теории представлений, читанного в Независимом московском университете в 2002–2004 годах. Они предназначены для студентов начиная со второго курса.

Лекции содержат классические общие теоремы теории представлений конечных групп, такие как теорема о разложении регулярного представления и вытекающие из нее теорема Бернсайда и классификация неприводимых представлений. Изложение в случае компактных групп ведется на примере SU(2) и SO(3), что позволяет дать классическую теорию сферических функций, полиномов Лежандра и, в качестве приложения, решение уравнения Шредингера для электрона в центральном поле и вытекающее из него объяснение строения первых периодов таблицы Менделеева. Одна из лекций посвящена элементам теории Ли.

ISBN 5-94057-169-7
9 785940 571698 >