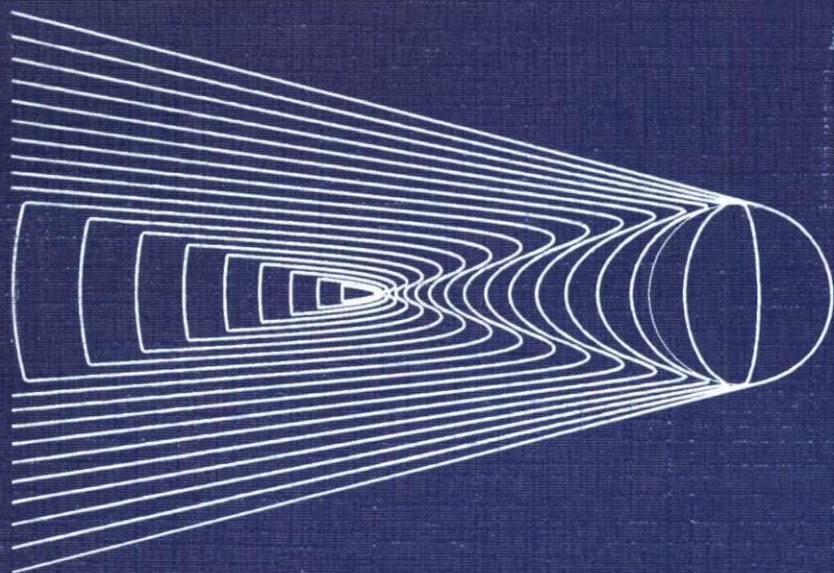


И.А.Шелаев

**Введение
в необратимую
электродинамику**



И.А. Шелаев

ВВЕДЕНИЕ
В НЕОБРАТИМУЮ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ

;

Дубна, 1999

УДК 567.891.23

Шелаев И.А. Введение в необратимую электродинамику. Дубна, 1999. — 288 с.

В книге приведена новая электродинамика, основанная на принципе Гюйгенса, расширенном определениями потенциалов. Показано, что уравнения Максвелла являются математическим следствием этого принципа, а потенциалы движущегося точечного заряда удовлетворяют нелинейным и необратимым дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка. При этом рационально описывается электромагнитное поле точечного заряда, движущегося с произвольной скоростью. Для протяженных или замкнутых систем движущихся зарядов уравнения Максвелла принимают свою обычную форму.

Книга предназначена для студентов, аспирантов, инженеров и научных работников, занимающихся физикой и радиотехникой.

Уважаемые читатели, автор просит направлять ваши замечания и пожелания по адресу: 141980, г. Дубна Московской обл., ул. Ленинградская 3А, кв. 20, Шелаеву И.А.

e-mail: shelaev@lhe.jinr.ru

Охраняется законом РФ об авторском праве. Воспроизведение всей книги или любой ее части запрещается без письменного разрешения издателя. Любые попытки нарушения закона будут преследоваться в судебном порядке.

ISBN 5-85165-525-7

© И.А. Шелаев, 1999

© ОИЯИ, 1999

Предисловие

Это
Почти неподвижности мука —
Мчаться куда-то со скоростью звука,
Зная при этом, что есть уже где-то
Некто
Летающий
Со скоростью
Света!

Л. Мартынов

Эта книга представляет собой введение в совершенно новую нелинейную и необратимую электродинамику движущегося точечного заряда, основанную на принципе Гюйгенса. Известно, что теория электромагнитного поля такого заряда в классической электродинамике приводит к преобразованиям Лоренца. Последние, как известно, составляют основу специальной теории относительности (СТО). За время своего существования иррациональность СТО вызывала критику многих поколений ученых, что свидетельствует о неадекватном описании в ней поля движущегося точечного заряда.

Высказанный Христианом Гюйгенсом 300 лет тому назад принцип положил начало волновой теории света. Этот принцип, расширенный современными понятиями потенциалов, а также формулами, связывающими потенциалы с электрическим и магнитным полями, позволяет построить новую электродинамику. При этом электродинамика строится аксиоматически, подобно тому, как построена классическая геометрия. Электромагнитное поле в ней подчиняется уравнениям Максвелла, которые теряют характер феноменологических и предстают как математическое следствие расширенного принципа Гюйгенса.

В этой гюйгенсовской электродинамике поле движущегося заряда радикально отличается от того, что предска-

зывается в СТО. Так, скалярный потенциал точечного заряда не удовлетворяет более однородному волновому уравнению, а задается нелинейным и необратимым уравнением в частных производных второго порядка. Известная сингулярность потенциалов на конусе Маха исчезает, и при любой скорости движения заряда сингулярность потенциалов сохраняется только в одной точке пространства, а именно в той, где в данный момент времени находится рассматриваемый точечный заряд.

Электрическое и магнитное поля точечного заряда подчиняются уравнениям Максвелла, в которых присутствуют дополнительные члены. Эти члены рассматриваются как токи и заряды поляризации окружающего пространства, возбуждаемые движением точечного заряда.

Такая поляризация пространства вызывает своеобразную экранизацию движущегося заряда, эффективная величина которого оказывается функцией его скорости. С ростом скорости эта величина уменьшается, приближаясь к нулю, когда скорость заряда сравнивается со скоростью света. При сверхсветовой скорости эффективная величина любого заряда оказывается равной нулю. Это обстоятельство объясняет ограниченность скорости частиц в современных ускорителях.

Значительный объем в книге занимает вычисление скалярного и векторного потенциалов равномерно заряженной по поверхности сферы, движущейся равномерно и прямолинейно с произвольной по величине скоростью. Потенциалы такой сферы с конечным радиусом, как и в электростатике, остаются конечными в любой точке пространства и при любом значении ее скорости. На значительном удалении от центра сферы ее потенциалы приближаются к потенциалам точечного заряда.

Если рассматриваются системы движущихся зарядов, бесконечные или замкнутые, то при вычислении полей используется принцип суперпозиции. Эффект поляризации окружающего пространства для таких систем исчезает благодаря взаимной компенсации действий соседних зарядов. В результате электромагнитное поле таких систем совпадает с тем, что приводится в справочниках, а уравнения Максвелла принимают свою обычную линейную и обратимую форму. Изменение формы уравнений Максвелла при переходе от одной системы движущихся зарядов

к другой указывает на многообразие электромагнитных явлений и лишней раз подчеркивает нелинейность задачи. Таким образом, необратимая электродинамика не только не противоречит классической электродинамике, по крайней мере ее рациональной части, но и органически включает ее.

Расширенный принцип Гюйгенса показывает, что в основе классического описания поля движущегося точечного заряда в форме запаздывающих потенциалов лежит лишь предположение о том, что эти потенциалы удовлетворяют однородным волновым уравнениям. Это предположение лишено рационального доказательства. Таким образом, читатель найдет в книге ответы не только на вопрос о том, почему СТО не соответствует действительности, но и на вопрос, чем можно заменить СТО, не впадая при этом в противоречие со здравым смыслом и природой электромагнитных явлений.

В основу книги положены четыре краткие работы автора, опубликованные в 1990 – 1996 гг. небольшим тиражом в серии "Сообщения ОИЯИ" и журнале "Электродинамика и техника свч и квч". Дополнительно включены также новые результаты, полученные при подготовке этой книги.

В книге довольно много математики, т.к. каждое положение высказывается на основе соответствующих выкладок, для чего из многообразия электромагнитных явлений выбирались, как правило, лишь те, для которых возможно получение аналитических решений. Однако эта математика не выходит за пределы программ технических вузов, поэтому ее содержание будет доступно инженерам, научным сотрудникам и студентам старших курсов физико-математических факультетов.

И.А. Шелаев

Алушта-Судак-Дубна, 1983–1999 гг.

Глава I

Относительная справедливость теории относительности

Все говорят: нет правды на земле,
Но правды нет — и выше.

А. Пушкин

Специальная теория относительности является, как известно, одним из результатов классической электродинамики, а именно теории поля движущегося точечного заряда, что и составило содержание первой работы Эйнштейна [1]. Почему же СТО на протяжении всей своей жизни вызывает сомнения и критику [2]?

На мой взгляд, дело в том, что теория поля движущегося заряда не отвечает эксперименту и здравому смыслу с момента ее появления. Вспомним, что еще в начале века эта теория оказалась несостоятельной в применении к планетарной модели атома: вращающийся электрон неизбежно должен упасть на ядро, непрерывно излучая электромагнитную энергию. Это утверждение классической электродинамики явно противоречило опыту и было заменено вначале постулатами Бора, а затем квантовой механикой.

В современной практике уравнений Максвелла и Лоренца достаточно для численного моделирования ускорителей заряженных частиц, электронных ламп и других подобных устройств, если ограничиваться так называемым одночастичным приближением. При этом расчетные модели с высокой точностью реализуются в эксперименте. Но как только приходится учитывать собственное поле интенсивных пучков, предсказания на основе этих уравнений оказываются явно не соответствующими действительности, а поставленные эксперименты проваливаются. В качестве примеров можно привести исследования по управляемому ядерному синтезу, так называемым коллективным методам ускорения и пр.

Разумеется, если теория поля движущегося заряда противоречит эксперименту, то порожденная этой теорией СТО имеет такую же связь с действительностью, что и вызывает критическое отношение к ней. В этой главе мы напомним, как электродинамика приводит к СТО и что в ней не отвечает здравому смыслу.

Опытный читатель может опустить первые два раздела или всю главу целиком.

1.1. Уравнения Максвелла

Задача анализа электромагнитного поля в общем случае формулируется следующим образом. В некотором объеме (конечном или бесконечном) пространства предполагаются заданными плотности тока $\mathbf{j}$ и заряда ρ как функции координат x, y, z и времени. Тогда искомые электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{H}$ поля удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{c \partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{c \partial t}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho. \quad ; \quad (1.4)$$

Здесь c — скорость света в вакууме, а рассматриваемое пространство предполагается однородным.

Для отыскания полей вводятся скалярный Φ и векторный $\mathbf{A}$ потенциалы:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.6)$$

Последние представляют собой искомые функции координат и времени. Для однозначного определения потенциалов

на $\mathbf{A}$ и Φ накладывается условие нормировки Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial \Phi}{c \partial t} = 0. \quad (1.7)$$

Подставляя поля в уравнения Максвелла, находим, что потенциалы удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка:

$$\Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{c^2 \partial t^2} = \square \Phi = -4\pi \rho, \quad (1.8)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{c^2 \partial t^2} = \square \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}, \quad (1.9)$$

где Δ — дифференциальный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а $\square$ — оператор Д'Аламбера.

1.2. Запаздывающие потенциалы

Под точечным зарядом понимается заряд, размерами которого можно пренебречь в пределах рассматриваемой задачи. В случае точечного заряда функции ρ и $\mathbf{j}$ полагают равными нулю всюду, за исключением той точки пространства, где в данный момент времени находится заряд и где величины этих функций принимают бесконечно большое значение.

Тогда скалярный потенциал движущегося точечного заряда удовлетворяет всюду (за исключением точки пространства, занимаемой зарядом в данный момент времени) однородному волновому уравнению

$$\square \Phi = 0. \quad (1.10)$$

В ряде современных изданий в правой части этого уравнения авторы пишут δ -функцию Дирака, что, во-первых, не

меняет существа дела, а, во-вторых, именно для этой формы уравнения (1.10) Лиенар и Вихерт нашли свое решение задолго до появления этой функции.

Запаздывающие потенциалы или, как их еще называют, потенциалы Лиенара — Вихерта (ПЛВ), отвечающие этому уравнению, записывают как

$$\Phi_r = \frac{e}{r' \left(1 - \frac{\beta' r'}{r'}\right)}, \quad (1.11)$$

$$A_r = \beta' \Phi_r. \quad (1.12)$$

Здесь $\beta' = v'/c$ — вектор относительной скорости заряда, r' — вектор расстояния от заряда в момент t' до точки наблюдения поля в момент t , и все величины со штрихом берутся в "запаздывающий" момент времени $t' = t - r'/c$.

Для заряда, движущегося равномерно и прямолинейно со скоростью v вдоль оси x , этот момент времени определяется уравнением

$$c^2(t - t')^2 = (x - vt')^2 + y^2 + z^2, \quad (1.13)$$

в котором x, y, z — декартовы координаты точки наблюдения поля. Это уравнение предполагает, что любое электромагнитное возмущение распространяется с постоянной скоростью c равномерно во все стороны относительно той точки в пространстве, где оно возникло. Иными словами, это уравнение представляет собой краткую математическую запись принципа Гюйгенса, высказанного им при создании волновой теории света.

При этом предполагается, что рассматриваемый заряд проходит центр координатной системы в момент $t = 0$. При $\beta < 1$ уравнение (1.13) имеет один корень, отвечающий условиям задачи:

$$ct' = ct - \frac{\beta(x - vt) + \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}}{1 - \beta^2}.$$

Подставляя это значение t' в (1.11), находим

$$\Phi_r = \frac{e}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}}. \quad (1.14)$$

Приведенный здесь вывод можно найти в любом учебнике по электродинамике или СТО, т.к. последнее выражение приводит непосредственно к преобразованиям Лоренца.

1.3. Преобразования Лоренца

В научной литературе можно найти различные выводы преобразований Лоренца, исходя из формулы (1.14), в частности, как утверждается в [5], "это уравнение становится более понятным, если его переписать в виде"

$$\Phi_r = \frac{e}{\sqrt{1-\beta^2} \sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + y^2 + z^2}}. \quad (1.15)$$

Разумеется, при таком "переписывании" следовало бы учесть, что выражение $1 - \beta^2$ может иметь разные знаки в зависимости от величины β , поэтому из-под корня можно выносить лишь величину $|1 - \beta^2|$. Когда же извлекается корень квадратный из $1 - \beta^2$, и этот корень при $\beta > 1$ оказывается мнимым, а затем на основании этого утверждается невозможность движения со сверхсветовой скоростью, то корректность такого утверждения, по меньшей мере, сомнительна.

Лоренц рассматривал только малые скорости, когда $\beta \ll 1$. Сравнивая последнее выражение со скалярным потенциалом неподвижного заряда, он пришел к заключению, что выражение (1.15) можно прочесть как

$$\Phi_r = \frac{e^*}{\sqrt{x^{*2} + y^{*2} + z^{*2}}}.$$

Последнее по форме не отличается от потенциала неподвижного заряда, если его записать в новой системе координат:

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y^* &= y, \\ z^* &= z, \end{aligned} \right\}$$

и для преобразованного заряда

$$e^* = \frac{e}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.16)$$

Если эти уравнения дополнить выражением для преобразования времени

$$ct^* = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

то получим полную группу Лоренца

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y^* &= y, \\ z^* &= z, \\ ct^* &= \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

преобразований координат и времени, сохраняющую инвариантным выражение

$$s^2 = c^2 t^{*2} - x^{*2} - y^{*2} - z^{*2} = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

для так называемого четырехмерного интервала s .

Теперь остается только модифицировать уравнения механики Ньютона так, чтобы они были инвариантны относительно преобразований (1.17), и создание СТО закончено.

1.4. Недостатки теории

О математической корректности и внутренней непротиворечивости СТО написано много, но в чем же тогда причина того, что почти столетие эта теория, как никакая другая, вызывает критику целых поколений исследователей? На мой взгляд, все дело в том, что три выражения —

(1.10), (1.11) и (1.13) — не соответствуют друг другу, что и будет показано ниже.

Но прежде отметим следующую теоретическую неувязку: как быть, если рассматриваемый заряд движется не в вакууме, а в однородной среде с относительной диэлектрической постоянной ϵ и магнитной μ . С одной стороны, формально этот вопрос решен еще Максвеллом, который утверждал, что в этом случае в волновых уравнениях (1.8) и (1.9) следует c заменить на $c' = c/\sqrt{\epsilon\mu}$. Такое решение, как известно, позволило Максвеллу связать электродинамику с оптикой. Но, принимая его, мы должны и в ПЛВ заменить c на c' , а затем проделать то же самое и в преобразованиях Лоренца; и мы приходим к парадоксу: можно построить столько же СТО, каким количеством скоростей c' природа располагает. К этому вопросу мы вернемся, рассматривая звуковой потенциал движущегося источника звука.

Парадоксальным представляется также предсказываемое СТО распределение скалярного потенциала в пространстве. Действительно, положим потенциал Φ_0 неподвижного заряда равным

$$\Phi_0 = \frac{e}{na}, \quad a = \text{const},$$

где n — целое число. Очевидно, что эквипотенциальные поверхности в этом случае представляют собой сферы с радиусами na .

Если теперь ПЛВ в форме (1.15) приравнять последнему выражению, то можно проследить, как изменяются положение и форма эквипотенциальных поверхностей со скоростью заряда. Находим, что уравнение эквипотенциалей движущегося равномерно и прямолинейно заряда суть

$$(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)\rho^2 = n^2 a^2, \quad (1.18)$$

где

$$\rho^2 = y^2 + z^2.$$

Очевидно, уравнение (1.18) при фиксированном t и $\beta < 1$ описывает эллипсоиды вращения вокруг оси x — так называемые эллипсоиды Хэвисайда.

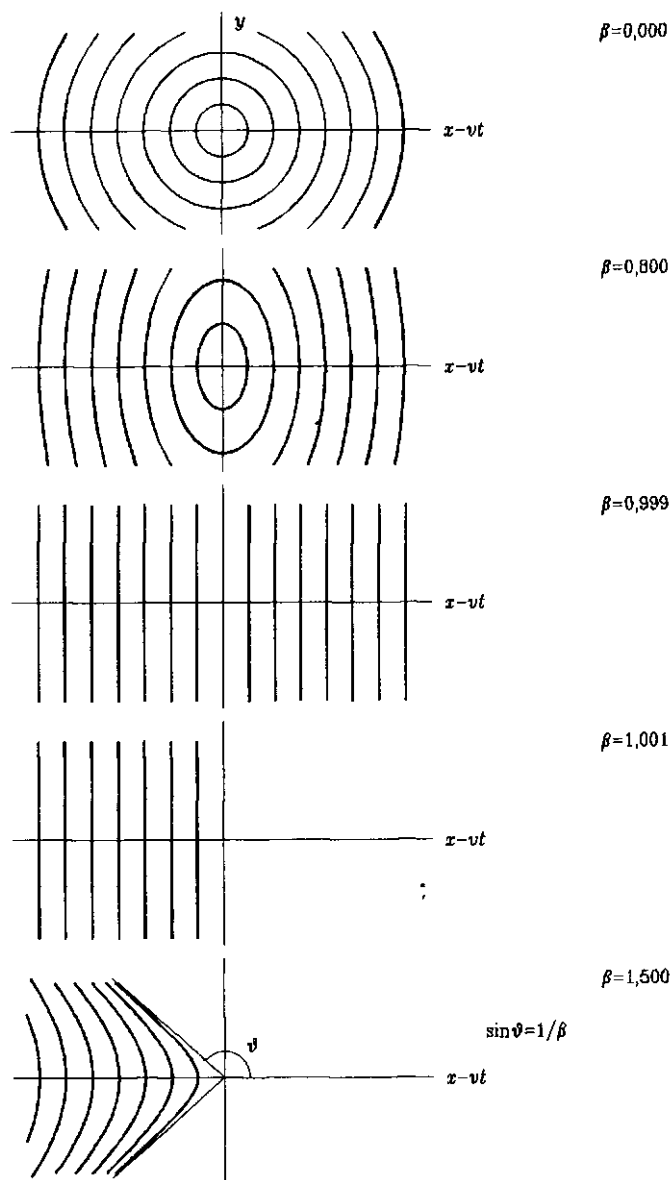


Рис. 1.1. Распределение скалярного потенциала согласно СТО; потенциал при $\beta > 1$ вычислен для заряда $e/2$

Отсюда заключаем, что, согласно СТО, любая сферическая эквипотенциальная поверхность с радиусом na покоящегося точечного заряда при его движении с постоянной относительной скоростью β превращается в эллипсоид Хэвисайда. При этом продольная (вдоль оси x) полуось такого эллипсоида равна na , а его поперечная полуось оказывается γna , т.е. в γ раз больше поперечной, где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Предоставляем читателю возможность самому найти скорость, с какой должна двигаться каждая точка сферы с радиусом na при заданной скорости заряда с тем, чтобы такая сфера, появившись в виде точки в момент t' , превратилась затем в соответствующий эллипсоид, и результат сравнить с (1.13).

При $\beta = 1$ уравнение (1.18) вырождается в уравнение двух плоскостей

$$|x - vt| = na \quad \text{или} \quad x - vt = \pm na.$$

Эти распределения потенциала представлены на рис. 1.1.

При $\beta > 1$ скалярный запаздывающий потенциал можно записать в виде

$$\Phi_r = \frac{2e}{\sqrt{(x - vt)^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)}}, \quad (1.19)$$

если $(x - vt) < 0$, но в то же время $(x - vt)^2 > (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)$. Вывод этой формулы отложим до гл. V, здесь же отметим, что соответствующее уравнение эквипотенциальных поверхностей имеет тот же вид (1.18), но поскольку выражение $1 - \beta^2$ меняет знак, оно описывает гиперболоиды вращения также вокруг оси x . При этом распределение потенциала на оси x остается таким же, как и для неподвижного заряда, если величину последнего уменьшить вдвое.

Следует особо подчеркнуть два обстоятельства. Во-первых, распределение потенциала на оси x остается постоянным при любой скорости движения заряда, т.к. при

любом значении β на оси x , т.е. при $y = z = 0$, из уравнения (1.18) имеем $|x - vt| = na$.

Во-вторых, как видно из уравнения (1.18), ось эквипотенциальной поверхности, параллельная оси движения заряда, остается неизменной по величине, а поперечные оси увеличиваются с ростом β в γ раз.

1.5. Акустика

Задача о поле движущегося источника волнового возмущения характерна не только для электромагнитных явлений, с ней приходится иметь дело в акустике и в других областях знания. Посмотрим, как же там решается подобная задача.

В обстоятельной монографии Д.И. Блохинцева [8] эта задача рассмотрена детально. В ней показано, что "полученные здесь результаты для звукового поля движущегося источника во многих отношениях сходны с известными результатами Лиенара-Вихерта для электромагнитного поля движущегося точечного заряда (электрона)".

Разумеется, результаты не только "во многих отношениях сходны", а такое сходство должно быть полным, т.к. решается одно и то же уравнение (1.10), в котором под c понималась скорость звука. Форма же уравнения (1.10) не зависит от величины скорости c , а значит, и его решения для различных значений c должны быть тождественны.

Положим, что рассматриваются точечные звуковые источники, которые издают короткие импульсы звука, например, выстрелы. Тогда для неподвижного источника такой импульс представится в виде сферической волны или короткой группы сферических волн. Под точечным источником понимается, как говорилось выше, источник, геометрическими размерами которого можно пренебречь, т.е. это понятие трехмерное. Напротив, импульсный точечный источник является четырехмерным.

Если же такой источник движется, то из СТО следует, что созданная им группа сфер трансформируется в группу эллипсоидов Хэвисайда. Предположим, что величина скорости такого источника отличается от скорости звука так же, как на ускорителе LEP в ЦЕРН скорость электронов

отличается от скорости света (а там, как принято считать, $\gamma \approx 2 \cdot 10^5$). Тогда поперечная ось эллипсоида должна быть в $2 \cdot 10^5$ раз больше его продольной. Это означает, что спустя 10 мс после выстрела эллипсоид такого источника будет иметь продольную полуось 3 м, а поперечную — 600 км. Абсурдность такого описания потенциала движущегося источника более чем очевидна. Более того, постулируемое в СТО постоянство скорости света в любой инерциальной системе координат не выполняется.

Выше говорилось о том, что, рассматривая уравнения поля в прозрачной среде, следует под c в уравнениях Максвелла понимать $c' = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, что ведет к построению множества СТО и запрету на движение с любой скоростью v больше c' , т.е. к запрету экспериментально наблюдаемого эффекта Вавилова — Черенкова. В акустике скорость света заменена скоростью звука, и результат тот же — ПЛВ. Почему же движение тел со сверхзвуковой скоростью не запрещено, хотя бы теоретически? Ответ прост — нельзя запретить, как бы этого ни хотелось, то, что существует на опыте.

Заметим, что задолго до своего экспериментального открытия эффект Вавилова — Черенкова теоретически предсказывался Зоммерфельдом [3] и еще раньше лордом Кельвином [4], которые указывали, что летящий в пустоте со сверхсветовой скоростью атом должен создавать электромагнитную волну, аналогичную волне Маха в акустике.

Совсем плохо в СТО и в акустике обстоит дело с теорией поля заряда, движущегося со скоростью больше скорости света (звука). Это не удивительно, коль скоро в ней скорость света считается максимальной скоростью, а "наличие максимальной скорости распространения взаимодействий означает в то же время, что в природе вообще невозможно движение тел со скоростью больше этой" [6]. Между тем они движутся, и скалярный потенциал для сверхсветового заряда известен еще с начала века [7]. По форме потенциал при сверхсветовой скорости (1.19) записывается так же, как и при досветовой (1.13).

Для сверхсветового потенциала, помимо перечисленных выше недостатков, характерен специфический — сингулярность потенциала имеет место не только в точке, занятой зарядом, но и на всей поверхности конуса Маха.

Если $\beta > 1$ и справедливо равенство

$$(x - vt)^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2) = 0, \quad (1.20)$$

то, согласно выражению (1.19), потенциал обращается в бесконечность. Условие (1.20) представляет собой, с одной стороны, уравнение конуса Маха, а с другой — асимптотическую поверхность гиперboloидов, представляющих эквипотенциальные поверхности сверхзвукового или сверхсветового источника.

По этому поводу Д.И. Блохинцев пишет: "Решение для точечного источника не имеет смысла в непосредственной близости к источнику (где оно обращается в бесконечность). Из наших расчетов видно, что при сверхзвуковой скорости источника существует не только сингулярная точка, но и целая поверхность (конус Маха), на которой решение обращается в бесконечность. Стало быть, если ограничиться точечным источником, то нельзя придавать смысла решению (1.13) не только вблизи самого источника, но и вблизи конуса Маха" [10]. Продолжая эту мысль, можно заключить, что если решение лишено смысла на замкнутой поверхности (на бесконечности конус замыкается сам на себя), то оно также лишено смысла в любой точке внутри этой поверхности. Но если это заключение справедливо при $\beta > 1$, то оно должно оставаться таким же и при $\beta < 1$, т.к. речь идет об одном и том же решении.

Заметим, что при строгом, но формальном подходе в современной акустике движущегося источника звука содержится запрет на движение источников со сверхзвуковой скоростью даже более жесткий, чем аналогичный запрет в СТО. Действительно, для гармонического источника звука с частотой ω при $\beta > 1$ наблюдается доплеровское "расщепление" [11] потенциала на два с частотами

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\beta + 1} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{-\omega}{\beta - 1}$$

и равными между собой амплитудами.

Энергия w акустических волн, как известно, пропорциональна $(\partial\Phi/\partial t)^2$ и, следовательно, пропорциональна квадрату частоты звуковых колебаний. Поэтому "справедливо" утверждение о том, что при $\beta \rightarrow 1$ частота $|\omega_2| \rightarrow \infty$,

а с ней обратится в бесконечность и энергия звуковых колебаний, причем как $(\beta - 1)^{-2}$. Но любой движущийся источник звука имеет конечную энергию, следовательно, любой сверхзвуковой снаряд никогда не остановится, обратившись в акустический "тахитон".

В СТО энергия частицы стремится к бесконечной всего лишь как $(1 - \beta^2)^{-1/2}$, т.е. гораздо медленнее, чем в акустике.

* * * *

Приведем вкратце те выводы, к которым может прийти каждый на основе этого или более детального анализа теории поля движущегося точечного заряда.

- Существует единственное решение в форме (1.11) однородного волнового уравнения (1.10) для движущегося точечного источника, одинаково справедливое с математической точки зрения как для электромагнитных волн, так и для звуковых или волн на поверхности жидкости.
- Предсказываемое этим единственным решением распределение волн в пространстве при $\beta < 1$ даже качественно не отвечает тому, что наблюдается в действительности, а при $\beta > 1$ полученному решению вообще "нельзя придавать смысла"; реальное же распределение волн на поверхности воды наблюдал каждый, кто хотя бы раз был у достаточно большого водоема.
- Вместе с тем решение (1.11) дает значение угла раствора конуса Маха, точно отвечающее наблюдаемому, однако это совпадение теории с экспериментом соответствует той области значений скорости заряда, которая как раз запрещена в СТО. Иными словами, предсказываемое СТО распределение потенциала движущегося заряда соответствует реальности только для неподвижных зарядов и дает правильное значение угла раствора конуса Маха для сверхсветовых скоростей, не рассматриваемых специальной теорией относительности.

Из сказанного видно, сколь близка к действительности и вместе с тем далека от нее современная теория поля движущегося заряда в форме СТО. Напрашивается общий вывод о том, что в природе волновых явлений есть нечто реальное, но не учитываемое уравнениями СТО.

Таковы лишь некоторые парадоксы современной теории поля движущегося заряда, представляющиеся автору наиболее очевидными. Другие любознательный читатель может найти в работах [2, 12], где к тому же имеются многочисленные ссылки.

Оставаясь в рамках традиционной электродинамики или СТО, не удастся найти рационального решения этих парадоксов. Как показано ниже, такое решение возможно на основе расширенного принципа Гюйгенса.

Глава II

Расширенный принцип Гюйгенса

Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.

Козьма Прутков

Как видно из предыдущей главы, предсказываемое СТО распределение потенциала движущегося точечного заряда подобно распределению звукового потенциала движущегося источника звука, и эти распределения имеют очень мало общего с действительностью. Совершенно иное, отличное от СТО распределение потенциала можно получить, опираясь на принцип Гюйгенса.

Обычно принцип Гюйгенса понимают в узком прикладном смысле как средство для определения положения фронта распространяющейся волны. Здесь мы будем понимать принцип Гюйгенса в более широком смысле, как принцип, определяющий движение электромагнитных возмущений, или более общо — любых волновых движений. Именно такая формулировка этого знаменитого принципа, высказанного более 300 лет назад, приведена ниже в первоначальном авторском виде. Затем кратко рассмотрим, как этот принцип использовался современными авторами.

Дополненный современными понятиями потенциалов и полей расширенный принцип Гюйгенса позволяет построить совершенно новую электродинамику, причем для этого не потребуются какие-либо другие предположения.

2.1. Принцип Гюйгенса

По-видимому, Гюйгенс первым принял, что свет, звук, волны на поверхности жидкости и другие подобные возмущения распространяются особым волновым движением, и

трудно удержаться от того, чтобы не привести его высказывания дословно.

Прежде всего он определяет, что такое свет.

"Нельзя сомневаться в том, что свет состоит в движении вещества.... Когда свет собран вместе, с помощью, например, вогнутых зеркал, он обладает свойством сжигать, как огонь, т.е. он разъединяет отдельные части тел, последнее обстоятельство служит убедительным признаком движения, по крайней мере, для истинной философии, в которой причину всех естественных явлений постигают при помощи соображений механического характера. По моему мнению, так и следует поступать, в противном случае приходится отказаться от всякой надежды когда-либо и что-нибудь понять в физике.

Так как, следуя этой философии, считают достоверным, что зрительное ощущение возбуждается только воздействием некоторой движущейся материи, действующей на наши нервы в глубине наших глаз, то здесь мы имеем еще одно основание полагать, что свет заключается в движении вещества, которое находится между нами и светящимся телом".

Итак, свет — это движение эфира, который наполняет всю Вселенную. Далее Гюйгенс определяет, какое движение отвечает природе света.

"Мы знаем, что звук через посредство воздуха, который представляет собой тело, невидимое и неосязаемое, распространяется вокруг места, где он был произведен, движением, которое последовательно передается от одной частицы воздуха к другой, и что движение это распространяется одинаково быстро во всех направлениях, вследствие чего должны образовываться как бы сферические поверхности, которые все расширяются и в конце концов поражают наше ухо. Несомненно, что и свет доходит от светящегося тела до нас каким-нибудь движением, сообщенным веществу, находящемуся между ним и нами, ибо мы уже видели, что это не может быть переносом вещества от этого тела к нам. Поскольку вместе с тем свет употребляет для своего прохождения некоторое время — вопрос, который мы сейчас рассмотрим, — из этого следует, что движение, сообщенное веществу, постепенно и, следовательно, распространяется так же, как и при звуке, сферическими поверхностями и волнами; я называю эти поверхности вол-

нами по сходству с волнами, которые можно наблюдать на воде, в которую брошен камень, и которые изображают собой указанное постепенное распространение кругами, хотя оно и происходит от другой причины и в плоской поверхности" [13].

Волновое движение, с помощью которого распространяется свет, присуще не только ему, но и звуку, волнам на поверхности жидкости и многим другим явлениям. Например, распространение информации в обществе — слухи, анекдоты и пр. — также осуществляется волнами. Особенно четко это было выражено раньше до изобретения телефона и радио, когда скорость распространения информации была ограничена. Во всех этих случаях волновое движение среды однотипно, хотя скорость соответствующих волн отличается на многие порядки. Но эта скорость, являясь характеристикой среды, не зависит от состояния движения источника волн.

Затем Гюйгенс показывает, опираясь на известные наблюдения Ремера по затмению спутников Юпитера, какое время "свет употребляет для своего прохождения", и дает первое определение величины его скорости — она в 100 000 раз больше скорости звука.

Приведенная формулировка вполне современна, и единственным неприемлемым для современной теории, особенно СТО, является упоминание о веществе, ответственном за перенос волнового движения света: эфир в СТО запрещен, хотя оснований для запрета не было.

2.2. Принцип Гюйгенса у других авторов

Действительно, сопоставим формулу Гюйгенса с современным определением его принципа в оптике [14]: "Каждая точка на пути заряда, движущегося равномерно и прямолинейно со скоростью v , служит источником сферической волны, испускаемой в момент прохождения через нее частицы. В том случае, когда

$$v > c/n, \quad \text{т.е.} \quad \beta n > 1,$$

эти сферы имеют огибающую — конус с вершиной, совпадающей с мгновенным положением заряда. При этом

нормали к образующей конуса, т.е. направление волновых векторов, образуют со скоростью угол

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}."$$

Видно, что в этой формулировке только эфир опущен, а в остальном речь идет о том же самом. Более того, угол при вершине конуса, а речь идет, разумеется, о конусе Маха, такой же, как и в уравнении (1.19).

Как видно, оба автора говорят только о сферах, нет ни слова об эллипсах или гиперболах, которыми описываются эквипотенциальные поверхности ПЛВ.

Сферы встречаются и в акустике, и здесь особенно примечательна уже упоминавшаяся книга Д.И. Блохинцева [8], в которой, наряду с лишенными, на мой взгляд, какого-нибудь смысла эллипсами и гиперболами (рис. 14 и 24 цитируемой книги, подобные рис. 1.1) приведены вполне осмысленные сферические волны (рис. 27, [8]).

Волны на водной поверхности доступны прямому наблюдению невооруженным глазом, и там каждый может легко убедиться в отсутствии эллипсов, гипербол, а также сингулярностей на конусе Маха. Для воды, в силу заметной дисперсии, угол раствора этого конуса всегда составляет 39° , что было показано лордом Кельвином столетие назад [9].

:

2.3. Расширенный принцип Гюйгенса

Однако как приведенные, так и другие встречающиеся формулировки принципа Гюйгенса носят качественный характер и в них отсутствует количественная мера сферической волны. Поэтому автором этой книги предложена следующая формулировка [16, 17], которую можно назвать формулировкой расширенного принципа Гюйгенса, и в ней содержатся определения неизвестных во времена Гюйгенса электромагнитных потенциалов на сферических поверхностях.

Пусть точечный заряд e движется в однородном, свободном от других зарядов пространстве по траектории,

заданной вектором $\mathbf{r}_c(t)$. Тогда, согласно расширенному принципу Гюйгенса, всякая точка траектории, пройденная зарядом в предыдущий момент времени t' , в любой последующий момент

$$t \geq t' \quad (2.1)$$

остаётся центром сферической эквипотенциальной поверхности с радиусом λ , причем

$$\lambda = c(t - t'), \quad (2.2)$$

а на поверхности задается скалярный потенциал

$$\Phi = \frac{e}{\lambda} \quad (2.3)$$

и векторный

$$\mathbf{A} = \frac{e}{\lambda} \mathbf{l}. \quad (2.4)$$

Здесь единичный вектор $\mathbf{l}$ определяется уравнением

$$\mathbf{l}\lambda = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t'), \quad (2.5)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения эквипотенциальной поверхности, а c — скорость света.

Множество эквипотенциальных сфер с радиусом λ или, по терминологии Д.И. Блохинцева, элементарных возмущений с определенными на них потенциалами (2.3), (2.4) образуют электромагнитное поле заряда. Подчеркнем, что в этом определении статическое поле неподвижного заряда образовано также динамически, как поле быстро движущегося заряда, а все многообразие наблюдаемых полей определяется многообразием векторной функции $\mathbf{r}_c(t)$.

В формулировке расширенного принципа Гюйгенса отражен тот факт, что в любой точке своей траектории точечный заряд создает некоторое электромагнитное возмущение, которое затем распространяется на все пространство равномерно или, по Гюйгенсу, постепенно со скоростью c согласно (2.2) в виде сферической волны; заряд же продолжает двигаться со скоростью, определенной функцией $\mathbf{r}_c(t)$.

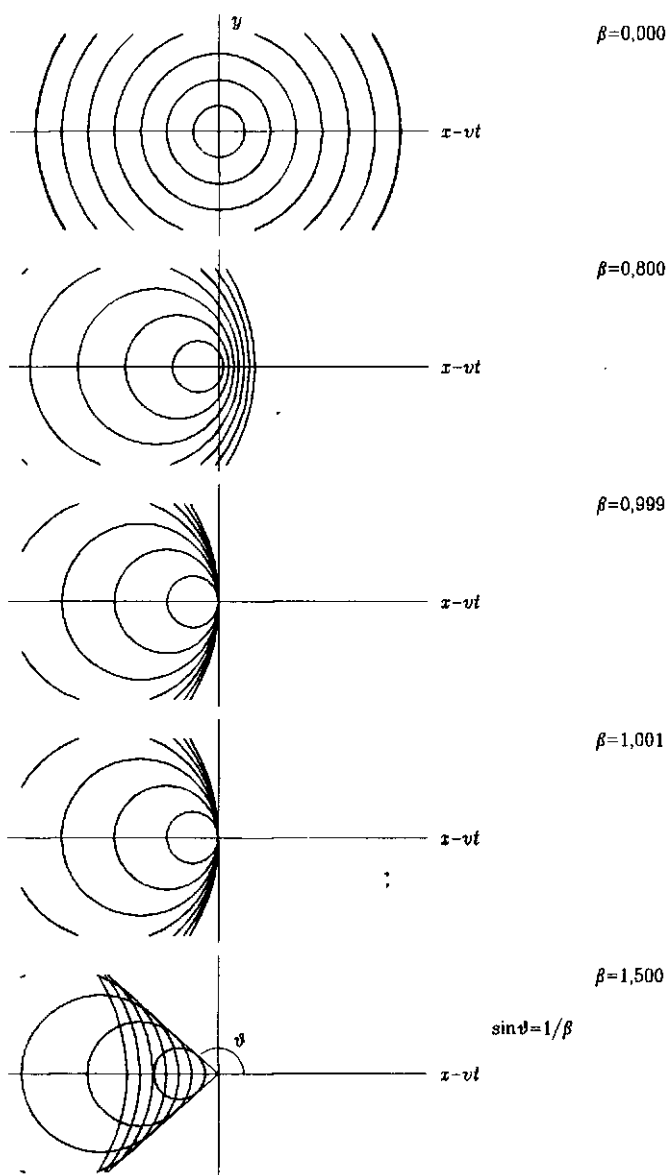


Рис. 2.1. Потенциал равномерно движущегося заряда согласно принципу Гюйгенса

Условие (2.1) гарантирует строгую причинность наблюдаемых возмущений. Выражения (2.3) и (2.4) определяют скалярный и векторный потенциалы как величины, остающиеся постоянными на одной и той же сферической поверхности, при этом вектор $\mathbf{A}$ остается постоянным в векторном смысле. Действительно, единичный вектор $\mathbf{l}$ согласно (2.5) есть вектор нормали к поверхности сферы $\lambda = \text{const.}$

Распределение скалярного потенциала заряда, движущегося равномерно и прямолинейно, можно, согласно расширенному принципу Гюйгенса, представить таким, как показано на рис. 2.1.

Сравнивая рис. 1.1 и 2.1, видим, что последний рисунок полностью отвечает тому, что можно наблюдать на поверхности жидкости, а также здравому смыслу. Действительно, в распределении потенциала отсутствуют какие-либо бесконечности при $\beta > 1$, а переход от досветовой (или дозвуковой) скорости к скорости больше скорости света (звука) происходит плавно или, как писал Гюйгенс, постепенно. В представленном распределении остается единственная "неприятность" — двузначность потенциала при $\beta > 1$. К этому вопросу мы вернемся позже в гл. V.

Необходимость принятого в расширенном принципе определения скалярного потенциала следует из опыта и подтверждается наблюдениями волн на поверхности воды. Вместе с тем справедливость принятого определения потенциалов можно доказать логически, хотя принцип Гюйгенса вряд ли нуждается в каком-то логическом доказательстве.

2.4. Доказательство принципа Гюйгенса

Рассмотрим неподвижный заряд или источник звука. Разумеется, все эквипотенциальные поверхности такого заряда представляют собой сферы, центры которых находятся всегда в одной и той же точке пространства, а именно там, где находится рассматриваемый заряд, т.е., как в электростатике, все эквипотенциальные поверхности являются концентрическими сферами.

Теперь несколько усложним задачу, предположив, что заряд (источник звука) неподвижен, но имеет импульсный

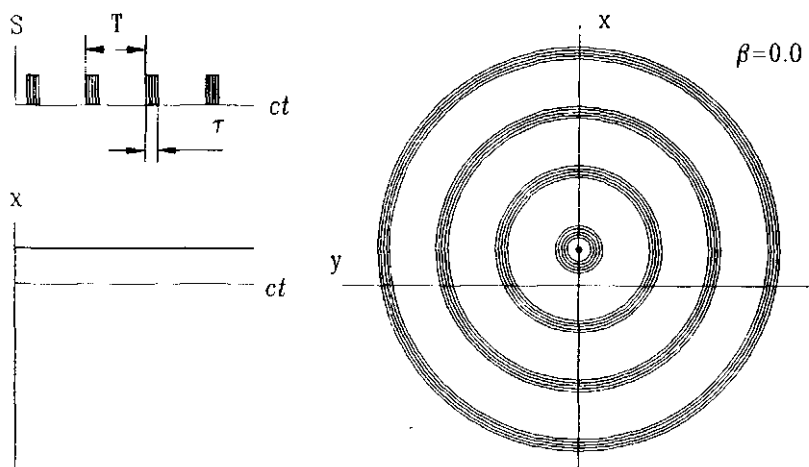


Рис. 2.2. Потенциал неподвижного импульсного заряда

характер: заряд периодически (с периодом T) появляется на время τ и исчезает на оставшийся отрезок периода $T - \tau$. Разумеется, распределение скалярного потенциала такого заряда также будет представлено концентрическими сферами, но вместо непрерывного множества таких сфер будут наблюдаться группы сфер, разделенных пустыми промежутками с радиальной протяженностью $c(T - \tau)$, где c — скорость света или звука. Такое распределение потенциала показано на рис. 2.2.

Наконец, предположим, что рассматриваемый заряд (источник звука) движется в течение промежутка $T - \tau$ и остается неподвижным в течение промежутка τ .

В природе существуют такие движущиеся источники звука, и они звучат только в те моменты времени, когда они неподвижны. Это, например, цокот копыт скакуна или скрип снега под ногами зимнего прохожего. Такие импульсные источники звука порождают звуковые колебания в течение интервала τ , оставаясь неподвижными и создавая некоторую группу волн, и молчат остальную часть периода $T > \tau$. Если рассматривать только одну группу волн, то с учетом неподвижности источника множество эквипотенциальных поверхностей в ней представляют собой концентрические сферы с единым центром. Для соседней группы волн общий центр окажется совсем в другой

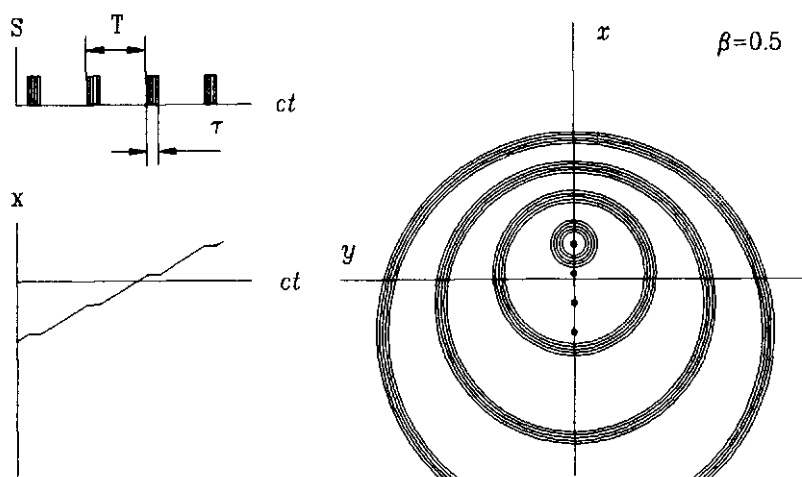


Рис. 2.3. Потенциал движущегося импульсного заряда

точке. В этом случае можно говорить о волновой "памяти": волны, порожденные в определенной точке пространства, как бы запоминают ее, сохраняя в качестве центра на время жизни волны.

Если теперь устремить τ и T к нулю, сохраняя неравенство $T > \tau$, то форма эквипотенциалей не изменится, оставаясь сферической, и каждая точка траектории станет центром своей сферы.

2.5. Векторный потенциал

Векторный и скалярный потенциалы в совокупности определяют единый объект — электромагнитное поле. Жизнь произвольного заряда или источника звука может быть столь скоротечной, что он произведет всего лишь одну эквипотенциальную поверхность. На этой поверхности должны быть постоянными оба потенциала, характеризующих электромагнитное поле. Этому требованию и отвечают потенциалы (2.3), (2.4).

Заметим, что векторный ПЛВ вообще не образует поверхности, на которой он оставался бы постоянным в векторном смысле.

Покажем, что расширенный принцип Гюйгенса позволяет полностью решить задачу нахождения поля движущегося точечного заряда.

Из определений (2.2) и (2.5) и с учетом того, что по определению

$$|l| = 1, \quad (2.6)$$

находим следующее скалярное уравнение:

$$\lambda = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t - \frac{\lambda}{c})| \quad (2.7)$$

относительно неизвестной величины λ . Решение этого уравнения дает нам функцию $\lambda(\mathbf{r}, t)$, а с ней вектор $\mathbf{l}(\mathbf{r}, t)$ и потенциалы (2.3), (2.4). Присоединяя сюда определения (1.5), (1.6) полей через потенциалы, находим электрическое $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ движущегося точечного заряда в любой точке пространства и в любой момент времени t .

Уравнение (2.7) в случае произвольной функции $\mathbf{r}_c(t)$ не имеет явного аналитического решения. Более того, такое решение удалось найти только для неподвижного заряда и заряда, движущегося равномерно и прямолинейно. Однако уравнение (2.7) можно рассматривать как неявное задание λ -функции, что позволяет установить для нее, как показано ниже, ряд дифференциальных соотношений.

Заряды более сложной формы представим как совокупность отдельных точечных зарядов, потенциалы которых затем просуммируем, опираясь на принцип суперпозиции.

Наконец, заметим, что λ -функция, которую мы будем рассматривать на протяжении оставшейся части книги, есть то же запаздывающее расстояние r' , что и в ПЛВ, точнее, расстояние между зарядом в момент создания электромагнитного возмущения и рассматриваемой волной в данный момент времени. Однако значение этого расстояния представляется таким, что оно заслуживает отдельной буквы для своего обозначения.

* * *

Принцип Гюйгенса предсказывает совершенно иное распределение потенциала, существенно отличающееся от

того, что рассматривается в СТО. Для этого достаточно сравнить рис. 2.1 и 1.1. Этот принцип можно найти в той или иной форме у многих авторов. Приведенные цитаты, разумеется, дают об этом далеко не полное представление. Однако все авторы едины в том, что используют этот принцип только качественно.

В этой книге содержание принципа Гюйгенса дополнено строгим математическим анализом в той мере, как мне это удалось сделать. Именно этот анализ позволяет построить, как увидит читатель, совершенно новую электродинамику точечного заряда. Эта электродинамика отвечает здравому смыслу и в то же время не противоречит классической электродинамике, а естественно включает ее как составную часть.

Согласно этому принципу, в задаче о поле движущегося точечного заряда следует всегда рассматривать два динамических объекта. Это прежде всего сам заряд в виде подвижной точки, траектория которой задана *a priori*.

Вторым объектом является множество, как правило, бесконечное, сферических эквипотенциальных поверхностей, относительно которых известно, что они постоянно со скоростью света увеличивают свои размеры относительно центра собственного рождения, сохраняя его неподвижным. *Инерция центра* рождения сохраняется для каждой отдельной сферы, распределение же центров множества сфер, образующих электромагнитное поле точечного заряда, формирует в пространстве пройденную им траекторию.

Эти два динамических объекта мы стремимся описать одним или несколькими уравнениями. В этом состоит основная трудность применения принципа Гюйгенса. В самом деле, задача отыскания поля состоит в том, чтобы получить поле заряда в данный момент времени и всюду в пространстве, а это значит, что необходимо рассматривать его траекторию не только в данный момент, но и за все предшествующее время.

В то же время принцип Гюйгенса допускает простое геометрическое построение распределения потенциала, по крайней мере, для плоских траекторий. Для этого достаточно пройденную в прошлом траекторию заряда, начиная с данного момента времени, разделить на "изохронные" участки, т.е. такие, которые заряд проходит за один

и тот же интервал времени. Затем в каждой точке разбиения, считая ее центром, построить сферы, начиная с нулевого радиуса в данный момент и постепенно увеличивая его. Разумеется, чем короче временной интервал разбиения траектории, тем ближе полученное дискретное распределение потенциала к непрерывному.

Ниже показано, что, несмотря на произвольность траектории, потенциалы движущегося точечного заряда отвечают определенным дифференциальным уравнениям, и эти уравнения отличаются от уравнений Максвелла.

Глава III

λ -функция

There are more things in heaven and earth,
Horatio,
Than are dreamt of in your philosophy.

W. Shakespeare

Как показано в предыдущей главе, электромагнитное поле движущегося точечного заряда определяется множеством сферических эквипотенциальных поверхностей, на которых скалярный и векторный потенциалы остаются постоянными. В свою очередь, множество центров этих сфер, оставаясь неподвижными, образуют траекторию заряда, пройденную им к моменту наблюдения поля, а радиус каждой поверхности определяется уравнением (2.7). Уже здесь проявляется необратимый характер электродинамики.

Зная распределение потенциалов Φ и A , простым дифференцированием находим поля согласно общепринятым в электродинамике определениям (1.5) и (1.6).

Прежде чем переходить к вычислению полей, сосредоточим внимание на уравнении (2.7) и определяемой им функции λ . Это уравнение имеет аналитическое решение $\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$ только в двух случаях: для неподвижного точечного заряда и заряда, движущегося равномерно и прямолинейно. Хотя строгое доказательство этого положения отсутствует, найти решение для какой-либо другой траектории не удалось, поэтому условимся рассматривать уравнение (2.7) как неявное задание функции λ .

Это предположение позволит нам установить ряд дифференциальных соотношений для функции λ и единичного вектора $\mathbf{l}$, которые задают потенциалы, они понадобятся нам в дальнейшем.

3.1. Градиент λ -функции

Предположим, что уравнение (2.7) имеет только один положительный корень $\lambda(\mathbf{r}, t)$. Очевидно, что в силу соотношения причинности (2.1) физический смысл имеют только положительные значения λ .

Условия, при которых решение уравнения (2.7) единственно, рассмотрим ниже, а сейчас перепишем его в развернутом виде в точке с координатами (x, y, z) :

$$\lambda^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xx_c + yy_c + zz_c) + x_c^2 + y_c^2 + z_c^2,$$

полагая координаты x_c, y_c, z_c заданными дифференцируемыми функциями времени. Тогда в бесконечно близкой соседней точке $(x + dx, y, z)$ функция λ будет иметь значение $\lambda + d\lambda$ и удовлетворять уравнению

$$(\lambda + d\lambda)^2 = (x + dx)^2 + y^2 + z^2 + x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 + 2[(x + dx)x_c + yy_c + zz_c],$$

где функции x_c, y_c, z_c взяты для момента времени

$$t - (\lambda + d\lambda)/c.$$

Считая $d\lambda$ бесконечно малой величиной, разлагая эти функции в ряд Тейлора по степеням $d\lambda$ и сравнивая с предыдущим уравнением, найдем, удерживая бесконечно малые первого порядка,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{x - x_c}{\lambda - \beta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)}.$$

Разумеется, здесь вектор β берется для момента $t - \lambda/c$. Поступая подобным образом с двумя другими координатами y и z , получаем

$$\text{grad } \lambda = \frac{1}{1 - \beta \mathbf{l}}.$$

Дифференцируя уравнение (2.7) частным образом по t , находим

$$\left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t}\right)(1 - \beta \mathbf{l}) = 1. \quad (3.1)$$

Опираясь на это уравнение, можем предыдущее выражение переписать как

$$\text{grad } \lambda = 1 \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right). \quad (3.2)$$

Это уравнение можем рассматривать как второе (наряду с (2.5)) определение единичного вектора $\mathbf{l}$, а именно

$$\mathbf{l} = \frac{\text{grad } \lambda}{1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t}}.$$

Для неподвижных источников волн всегда выполняется равенство

$$\frac{\partial \lambda}{c \partial t} = 0,$$

поэтому для них справедливо соотношение

$$|\text{grad } \lambda| = 1.$$

Именно такое условие использовал Умов в своей теории волн [15], поэтому выражение (3.2) следует рассматривать как расширенное условие Умова, включающее движущиеся источники волн.

3.2. Дивергенция вектора $\mathbf{l}$

Дифференцируя единичный вектор $\mathbf{l}$ из первого его определения (уравнение (2.5)) по координатам, находим

$$\text{div } \mathbf{l} = \text{div } \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t - \lambda/c)}{\lambda}.$$

В этом выражении вычислим вначале дивергенцию первой дроби, тогда

$$\text{div } \frac{\mathbf{r}}{\lambda} = \frac{\text{div } \mathbf{r}}{\lambda} + \mathbf{r} \nabla \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{3}{\lambda} - \frac{\mathbf{r} \mathbf{l}}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right),$$

где для дифференциального оператора¹ $\nabla \lambda$ воспользовались выражением (3.2).

Поступая аналогично со второй дробью, заметим, что

$$\operatorname{div} \mathbf{r}_c = -\beta_x \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \beta_y \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \beta_z \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{\partial \lambda}{c \partial t},$$

поэтому

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}_c}{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{c \partial t} - \frac{\mathbf{r}_c \mathbf{l}}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right).$$

Суммируя эти выражения, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{l} = \frac{1}{\lambda} \left(3 + \frac{\partial \lambda}{c \partial t} - 1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right),$$

или окончательно

$$\operatorname{div} \mathbf{l} = \frac{2}{\lambda}. \quad (3.3)$$

Как видно из (3.3), функции $\mathbf{l}$ и λ имеют тот же характер, что и величины $\mathbf{r}$ и r в любом центральном поле, т.к. там всегда выполняется равенство

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{2}{r}.$$

3.3. Волновое уравнение для λ -функции

Применим теперь операцию div к вектору $\mathbf{l}$ из второго определения — (3.2). В результате имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{l} = \frac{\operatorname{div} (\nabla \lambda)}{1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t}} + \frac{(\nabla \lambda) \left(\nabla \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right)}{\left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right)^2}.$$

В первом члене числителя используем равенство

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \lambda = \Delta \lambda,$$

¹ ∇ — дифференциальный оператор $\nabla f \equiv \operatorname{grad} f$, где f — произвольная скалярная функция.

а во втором — вновь воспользуемся равенством (3.2) и изменим порядок дифференцирования по пространственным координатам и времени:

$$(\nabla \lambda) \left(\nabla \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right) = (\nabla \lambda) \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{c \partial t} \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right) - \mathbf{l} \frac{\partial^2 \lambda}{c^2 \partial t^2} \right].$$

В первом члене этого выражения учтем, что в силу ортогональности векторов $\partial \mathbf{l} / c \partial t$ и $\mathbf{l}$ их скалярное произведение всегда равно нулю. Тогда искомое выражение примет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{l} = \frac{\square \lambda}{1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t}}.$$

Сравнивая эту формулу с (3.3), находим окончательно следующее дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, содержащее только искомую λ -функцию:

$$\square \lambda = \frac{2}{\lambda} \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right). \quad (3.4)$$

Таким образом, для произвольно движущегося заряда λ -функция, если только она имеет единственное значение, далеко не произвольна, а удовлетворяет уравнению (3.4), которое, как видно, *нелинейно и необратимо*.

В самом деле, *нелинейность* этого уравнения определяется тем обстоятельством, что единственная входящая в него функция $\lambda(\mathbf{r}, t)$ содержится в степени выше первой, а его *необратимость* — присутствием в нем первой частной производной искомой функции по времени.

3.4. Еще раз о запаздывающих потенциалах

Вернемся к запаздывающим потенциалам. С учетом выражений (2.5) и (3.1) скалярный потенциал из (1.10) можно переписать как

$$\Phi_r = \frac{e}{\lambda} \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right). \quad (3.5)$$

Отсюда видно, почему на протяжении почти столетия ПЛВ вызывали дискуссию.

Согласно определению Гаусса потенциал есть некоторая функция положения заряда. Из последнего же выражения следует, что запаздывающий потенциал представляет собой не только функцию положения (λ -функция есть расстояние между точкой наблюдения поля в данный момент времени и зарядом в предшествующий момент, которое проходит световая волна), но и его производной.

Сравнивая последнее выражение с (3.4), видим, что правая часть в нем отличается от запаздывающего потенциала только постоянным множителем $2/e$. Запаздывающий потенциал удовлетворяет однородному волновому уравнению, следовательно, λ -функция всегда удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\square(\square \lambda) = 0, \quad (3.6)$$

которое, по-видимому, справедливо назвать однородным волновым уравнением четвертого порядка.

3.5. Сопровождающий трехгранник

Продифференцируем теперь уравнение (2.5) частным образом по времени, найдем

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = \frac{\mathbf{l} \times [\mathbf{l} \times \boldsymbol{\beta}]}{\lambda} \left(1 - \frac{\partial \lambda}{\partial t}\right), \quad (3.7)$$

откуда видна упоминавшаяся выше ортогональность векторов $\mathbf{l}$ и $\partial \mathbf{l} / \partial t$.

Если вектор $\mathbf{l}$ — единичный вектор нормали к эквипотенциальной поверхности, то ортогональный ему вектор $\partial \mathbf{l} / \partial t$ является, очевидно, вектором, касательным к сфере $\lambda = \text{const}$ или просто к λ -сфере.

Если через α обозначить угол между векторами $\mathbf{l}$ и $\boldsymbol{\beta}$, то можно записать

$$\left| \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right| = \frac{\beta \sin \alpha}{\lambda(1 - \beta \cos \alpha)} = \kappa.$$

Здесь функция κ имеет размерность обратной длины.

Полагая λ и β постоянными, т.е. оставаясь на λ -сфере, нетрудно найти максимум этой функции

$$\kappa_{\max} = \frac{\beta}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{если} \quad \cos \alpha = \beta. \quad (3.8)$$

Это выражение справедливо только при $\beta < 1$ и представляет собой уравнение некоторого конуса, который следовало бы назвать *доволновым* конусом Маха. Это определение дополняет обычное определение конуса при $\beta > 1$, таким образом, конус Маха имеет место при любой скорости заряда.

Образуем rot выражения (3.2):

$$\text{rot } l = \frac{\text{rot grad } \lambda}{1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t}} - \text{grad } \lambda \times \text{grad } \frac{1}{1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t}}.$$

Отсюда с учетом всегда выполняющегося соотношения

$$\text{rot grad } \lambda = 0$$

после несложных преобразований находим

$$\text{rot } l = -l \times \frac{\partial l}{c \partial t}, \quad (3.9)$$

где символ $\times$ между векторами означает их векторное произведение.

Из этого уравнения и ортогональности векторов l и $\partial l / c \partial t$ следует, во-первых, равенство

$$|\text{rot } l| = \left| \frac{\partial l}{c \partial t} \right| = \kappa. \quad (3.10)$$

Во-вторых, устанавливаем, что три вектора — l , $\text{rot } l$ и $\partial l / c \partial t$ — образуют на поверхности λ -сферы взаимно ортогональную тройку векторов. Из них первый ортогонален к поверхности сферы, а два других касательны к ней.

Введем теперь два единичных вектора: вектор $\mathbf{n}$, параллельный вектору $\partial l / c \partial t$:

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial l}{c \partial t}, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad (3.11)$$

и вектор

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\kappa} \operatorname{rot} \mathbf{l}, \quad |\mathbf{b}| = 1. \quad (3.12)$$

Из этих определений следует, что между векторами $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ всегда выполняются соотношения

$$\mathbf{b} = \mathbf{l} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}. \quad (3.13)$$

Отсюда заключаем, что движение заряда порождает в каждой точке поверхности λ -сферы ориентированный взаимно ортогональный единичный репер, задающий ориентацию данной λ -сферы. Ее полюсы находятся в двух точках пересечения со сферой прямой, проходящей через заряд в момент $t - \lambda/c$ по направлению его скорости в тот же момент времени. Это обстоятельство позволяет установить некоторую аналогию между движением волны и движением материальной точки по пространственной кривой. Как известно, в каждой точке последней дифференциальная геометрия определяет аналогичный сопровождающий трехгранник [22]. Но если для материальной точки единичные векторы сопровождающего трехгранника являются функциями одной переменной — длины пройденного пути, то такие же векторы для волны определяются координатами точки наблюдения и временем, т.е. представляют собой функции 4 переменных.

Для вектора $\mathbf{n}$ нетрудно установить следующее соотношение, исходя из определения (3.11):

$$\operatorname{div} (\kappa \mathbf{n}) = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{l}}{c \partial t}.$$

Поменяем порядок дифференцирования по t и координатам, тогда справа с учетом (3.2) имеем

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{l}}{c \partial t} = -\frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{c \partial t}.$$

Окончательно можем записать

$$\operatorname{div} \left(\frac{\kappa \mathbf{n}}{\lambda} - \frac{\mathbf{l}}{\lambda^2} \right) = 0. \quad (3.14)$$

Для вектора $\mathbf{b}$ из определения (3.12) имеем

$$\operatorname{div}(\kappa \mathbf{b}) = 0, \quad (3.15)$$

в силу того, что для любого вектора $\mathbf{u}$ дифференциальный оператор $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$.

Прямым дифференцированием с учетом ряда полученных здесь соотношений находим дифференциальное уравнение второго порядка для вектора $\mathbf{l}$:

$$\square \mathbf{l} = -\frac{2}{\lambda^2} \mathbf{l}. \quad (3.16)$$

В самом деле, из определения (2.5) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x} = \frac{\mathbf{i}}{\lambda} + \frac{\beta - 1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}.$$

Дифференцируя по x еще раз, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial x^2} = & -2 \frac{\mathbf{i}}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} - 2 \frac{\beta - 1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 - \\ & - \frac{\mathbf{w}}{\lambda c^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta - 1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{w}$ — ускорение заряда, взятое, разумеется, в момент t' . Выполнив такие же операции по y и z , получим

$$\Delta \mathbf{l} = \frac{\beta - 1}{\lambda} \Delta \lambda - 2 \frac{\nabla \lambda}{\lambda^2} - 2 \frac{\beta - 1}{\lambda^2} |\nabla \lambda|^2 - \frac{\mathbf{w}}{\lambda^2} |\nabla \lambda|^2.$$

Дифференцируя (2.5) дважды по t , найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{c^2 \partial t^2} = & \frac{\beta - 1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{c^2 \partial t^2} + 2 \frac{\beta}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right) \frac{\partial \lambda}{c \partial t} + \\ & + 2 \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right)^2 - \frac{\mathbf{w}}{\lambda c^2} \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right)^2. \end{aligned}$$

Суммируя два последних выражения, приходим, наконец, к уравнению (3.16).

Это уравнение в отличие от уравнения (3.4) помимо единичного вектора $\mathbf{l}$ содержит функцию λ . В то же время из него следует, что на больших расстояниях от заряда, когда λ принимает достаточно большие значения, стоящий справа в (3.16) вектор приближается к нуль-вектору, а само уравнение — к однородному волновому.

Заметим, что в процессе вывода уравнения (3.16) появляются члены, пропорциональные ускорению заряда $\mathbf{w}$, однако в такой комбинации, что в результате такие члены взаимно уничтожаются.

3.6. Число корней уравнения (2.7)

При выводе уравнений в этом разделе предполагалось, что величина $1 - \beta l$ не обращается в нуль. Рассматривая уравнение (2.7) как параметрическое уравнение сфер $\lambda = \text{const}$, можно найти уравнение огибающей этого семейства. Для этого, как известно, следует исключить λ из (2.7) и равенства нулю частной производной этого же уравнения по λ . Последнее сводится к условию

$$1 - \beta l = 0$$

или

$$\cos \alpha = \frac{1}{\beta}; \quad (3.17)$$

Появление действительной огибающей λ -сфер означает, что принятое в начале этой главы допущение о единственности решения уравнения (2.7) более не выполняется. Заметим, что угол $\alpha = \vartheta - \pi/2$, где ϑ — угол, показанный на рис. 1.1 и 2.1.

Разумеется, уравнение (3.17) имеет смысл только при $\beta > 1$ и определяет конус Маха для сверхсветового заряда или сверхзвукового источника. На этом конусе согласно (3.1) величина $1 - \partial\lambda/c\partial t$ обращается в бесконечность, что и приводит к сингулярности запаздывающих потенциалов

²Очевидно также, что угол $\alpha = \theta$, введенному в разд. 2.3.

здесь. Напротив, потенциалы (2.3) и (2.4) имеют на конусе Маха конечную величину.

Уравнения (3.8) и (3.17) непрерывно определяют конус Маха при любом значении β .

* * *

Заканчивая на этом изучение общих свойств функции λ и переходя к рассмотрению того, как установленные свойства отражаются на потенциалах и полях точечного заряда, следует подчеркнуть то обстоятельство, что эти свойства относятся не только к движущимся зарядам, но и к любым другим движущимся источникам волновых процессов. Действительно, при анализе свойств λ -функции мы пользовались понятием заряда лишь для предметности изложения. Проявляются ли эти свойства в других волновых явлениях и в какой мере, определяют соответствующие специалисты.

Важно отметить, что при $\beta < 1$ уравнение (2.7) имеет единственное решение $\lambda(\mathbf{r}, t)$, отвечающее условию причинности (2.1). Только в этом случае удастся установить приведенные здесь дифференциальные соотношения, которые будут нужны в дальнейшем при анализе поля движущегося заряда.

Среди этих соотношений, на мой взгляд, важнейшим являются уравнения (3.4) и (3.6), содержащие только искомую функцию λ . В самом деле, несмотря на произвольность траектории заряда, эта функция всегда удовлетворяет уравнению (3.4), т.е. является в некотором смысле "упорядоченной".

В свое время (1872 г.) Ф. Клейн установил точку зрения на геометрию как на учение об инвариантах той или иной группы преобразований: "В частности, с этой точки зрения, метрическая геометрия представляет собою учение о тех связанных с пространственными образами величинах и соотношениях, которые остаются неизменными при движении этих образов, — инвариантными по отношению к группе движений" [22]. Именно эта формула реализуется в СТО, правда, как будет показано в следующей главе, для уравнения, не связанного с полем точечного заряда.

С этой точки зрения представляет интерес разыскать группу движений нелинейного уравнения (3.4) или линейного уравнения четвертого порядка (3.6). Оставив это на будущее, перейдем к вычислению электромагнитного поля точечного заряда и посмотрим, как установленные свойства λ -функции отражаются на свойствах поля.

Поле движущегося заряда

The aim of Physical Science is to observe
and interpret natural phenomena.

J. Maxwell

В этой главе рассмотрим электромагнитное поле точечного заряда, движущегося произвольно, но со скоростью, не превышающей скорость света. Необходимость в таком ограничении связана с тем, что только при $|\beta| \leq 1$ λ -функция однозначна. В следующей главе это ограничение будет снято, и там мы вычислим поле заряда, движущегося равномерно и прямолинейно с любой скоростью. Такое движение, как уже отмечалось выше, допускает аналитическое решение уравнения (2.7), благодаря чему удастся выполнить анализ поля и для случая, когда λ -функция имеет одновременно два действительных и положительных значения в рассматриваемой точке пространства.

Затем рассмотрим, как такое электромагнитное поле, полученное на основе расширенного принципа Гюйгенса, соотносится с уравнениями Максвелла. Мы обнаружим, что предсказываемое расширенным принципом Гюйгенса электромагнитное поле уже удовлетворяет уравнениям Максвелла. Более того, последние оказываются математическим следствием определений (2.3), (2.4) и (1.5), (1.6). Вместе с тем существенно обогащается содержание уравнений Максвелла: обнаруживается, что движение и только движение точечного заряда возбуждает в каждой точке окружающего пространства непрерывные заряды и токи, т.е. приводит к поляризации пространства. Этот новый эффект определяется первой производной координат заряда по времени и потому имеет необратимый характер. Его появление существенно отличает рассматриваемую электродинамику точечного заряда от стандартной.

4.1. Уравнение для скалярного потенциала

Дифференциальное уравнение (3.4), которому удовлетворяет однозначная λ -функция, позволяет получить подобное уравнение для скалярного потенциала, наглядно показывающее различие между потенциалами в СТО и в необратимой электродинамике.

Произвольная функция $f(\lambda)$ единственного аргумента λ , который, в свою очередь, является функцией $\mathbf{r}$ и t , удовлетворяет соотношению

$$\square f = \frac{df}{d\lambda} \square \lambda + \frac{d^2 f}{d\lambda^2} [(\text{grad } \lambda)^2 - \left(\frac{\partial \lambda}{c \partial t}\right)^2].$$

Подставляя сюда вместо функции $f(\lambda)$ скалярный потенциал Φ из (2.3) и учитывая выражения (3.2) и (3.4), найдем следующее волновое уравнение:

$$\square \Phi = -\frac{2e}{\lambda^3} \frac{\partial \lambda}{c \partial t}.$$

Нетрудно установить, что последнее уравнение может быть записано как

$$\square \Phi = \frac{\partial \Phi^2}{ec \partial t}. \quad (4.1)$$

Отсюда видна нелинейность (искомая функция Φ входит в уравнение (4.1) в первой и второй степени) и необратимость (уравнение (4.1) содержит первую частную производную искомой функции по времени [18]) уравнения для потенциала Φ .

Следовательно, определенный выше согласно расширенному принципу Гюйгенса скалярный потенциал (2.3) удовлетворяет волновому уравнению с не равной нулю правой частью. Напомним, что запаздывающий потенциал в СТО, напротив, удовлетворяет однородному волновому уравнению.

Заметим, что если

$$\frac{\partial \Phi^2}{ec \partial t} \rightarrow 0,$$

то уравнение (4.1) приближается к однородному. Это условие выполняется или на очень больших расстояниях от заряда, или при очень малых скоростях его движения (электростатика). В двух этих случаях потенциал Φ и запаздывающий оказываются неразличимыми, но на очень больших расстояниях значение потенциала близко к нулю, так что им можно пренебречь, а статический случай не представляет интереса.

Введем некоторую поверхностную плотность заряда

$$\sigma = \frac{e}{\lambda^2}. \quad (4.2)$$

Тогда уравнение (4.1) можно записать также в виде

$$\square \Phi = \frac{\partial \sigma}{c \partial t}. \quad (4.3)$$

4.2. Уравнения для векторного потенциала

Между векторным и скалярным потенциалами согласно определениям (2.3), (2.4) справедливо соотношение

$$\mathbf{A}^2 = \Phi^2, \quad (4.4)$$

подобное соотношению между радиусом-вектором точки и расстоянием до нее.

Пользуясь формулами (3.2), (3.3) и (4.3), находим

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \sigma \left(1 + \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right). \quad (4.5)$$

Отсюда следует, что между потенциалами $\mathbf{A}$ и Φ выполняется следующее соотношение, аналогичное условию нормировки Лоренца:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial \Phi}{c \partial t} = \sigma. \quad (4.6)$$

Пользуясь уравнениями (3.2)–(3.4) и (4.4) и произведя некоторые опускаемые здесь вычисления, можно для

вектора $\mathbf{A}$ найти следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\square \mathbf{A} = \text{grad } \sigma + 2 \frac{\partial \sigma}{c \partial t}, \quad (4.7)$$

где введено обозначение

$$\sigma = \sigma l. \quad (4.8)$$

Заметим, что при выводе уравнения (4.7) появляются члены, пропорциональные ускорению заряда, как и в разд. 3.5. Но эти члены входят в такой комбинации, что в конечном счете они взаимно уничтожаются.

4.3. Поле движущегося заряда

Для вычисления электромагнитного поля точечного заряда воспользуемся определениями (1.5), (1.6).

С учетом изложенных в предыдущей главе свойств λ -функции и единичного вектора $\mathbf{l}$ находим электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t} = \frac{e}{\lambda^2} \mathbf{l} - \frac{e}{\lambda} \frac{\partial \mathbf{l}}{c \partial t}. \quad (4.9)$$

Далее, из ортогональности векторов $\mathbf{l}$ и $\partial \mathbf{l} / c \partial t$ находим абсолютную величину электрического поля

$$E = \frac{e}{\lambda^2} \frac{\sqrt{1 - 2\beta \cos \alpha + \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha},$$

где α определено в разд. 3.6.

Аналогично находим магнитное поле $\mathbf{H}$ произвольно движущегося точечного заряда

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{e}{\lambda} \text{rot } \mathbf{l}. \quad (4.10)$$

Его абсолютное значение равно:

$$H = \frac{e}{\lambda^2} \frac{\beta \sin \alpha}{1 - \beta \cos \alpha}.$$

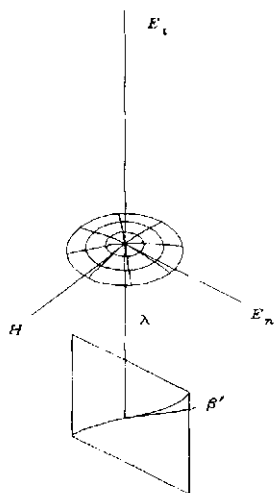


Рис. 4.1. Поле движущегося заряда

Из этих выражений видно, что электрическое поле имеет две взаимно ортогональные компоненты — нормальную к λ -сфере

$$E_l = \frac{e}{\lambda^2}$$

и тангенциальную

$$E_n = -\frac{e}{\lambda} \left| \frac{\partial \mathbf{l}}{c \partial t} \right|.$$

При этом нормальная компонента электрического поля остается постоянной на λ -сфере, как и для неподвижного заряда, и по величине равна полю заряда e , как если бы последний все время продолжал оставаться в центре λ -сферы.

Тангенциальная же компонента электрического поля всегда лежит в плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{l}$ и β в предыдущий момент времени t' , и пропорциональна скорости заряда. Она равна нулю в тех точках λ -сферы, где векторы $\mathbf{l}$ и β параллельны между собой, и достигает, согласно выражению (3.8), максимального значения на досветовом конусе Маха, где ее величина равна

$$E_{t, \max} = \frac{\beta e}{\lambda^2 \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Магнитное поле также тангенциально λ -сфере и в силу равенств (4.9), (4.10) в любой точке равно тангенциальной компоненте электрического поля и ортогонально ей. Компоненты поля движущегося точечного заряда показаны на рис. 4.1.

Наконец, заметим, что для поля точечного заряда всегда выполняется равенство

$$\mathbf{E}\mathbf{H} = 0, \quad (4.11)$$

т.е. электрическое и магнитное поля всегда взаимно ортогональны, а две компоненты электрического поля и единственная магнитного составляют взаимно ортогональную тройку векторов.

В общем случае шестимерное электромагнитное поле (три компоненты электрического поля и три — магнитного) точечного заряда всегда может быть представлено тремя взаимно ортогональными векторами, параллельными единичным векторам сопровождающего трехгранника (см. разд. 3.6) произвольной λ -сферы.

Таким образом, для определения в любой точке пространства потенциалов движущегося точечного заряда необходимо отыскать функцию $\lambda(\mathbf{r}, t)$ и единичный вектор $\mathbf{l}(\mathbf{r}, t)$, а полей — знать еще и вектор $\beta(t - \lambda/c)$.

4.4. Уравнения Максвелла

Рассмотрим теперь, как соотносятся вычисленные выше поля с уравнениями Максвелла.

Известно, что два уравнения Максвелла содержатся непосредственно в определениях полей (1.5), (1.6) через потенциалы. Так, из (1.5) находим

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\text{rot grad } \Phi - \frac{\partial \text{rot } \mathbf{A}}{c \partial t}.$$

Так как rot градиента любой скалярной функции равен нулю, то окончательно имеем

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{c \partial t}, \quad (4.12)$$

или уравнение (1.2), выражающее закон электромагнитной индукции.

Далее, из определения (1.6) следует

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4.13)$$

т.е. уравнение (1.3) или теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля.

Образуем теперь rot выражения (4.10):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}.$$

Подставим сюда $\operatorname{div} \mathbf{A}$ из равенства (4.6) и преобразуем первый член справа в последнем выражении

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \left(\sigma - \frac{\partial \Phi}{c \partial t} \right) = \frac{\partial}{c \partial t} (-\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t}) + \nabla \sigma + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{c^2 \partial t^2},$$

где ∇ — векторный дифференциальный оператор. Тогда, возвращаясь к предыдущему выражению и учитывая (1.5), находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{c \partial t} + \operatorname{grad} \sigma - \square \mathbf{A}.$$

Учитывая уравнение (4.7), получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{c \partial t} - 2 \frac{\partial \sigma}{c \partial t}.$$

Последнее выражение формально можно переписать как

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{c \partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_h, \quad (4.14)$$

т.е. в полном соответствии с уравнением (1.1). Оно, как известно, представляет собой обобщенный закон полного тока Максвелла, если под плотностью тока $\mathbf{j}_h$ понимать величину

$$\mathbf{j}_h = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (4.15)$$

Образуем div выражения (4.9) и вновь воспользуемся равенством (4.6):

$$\text{div } \mathbf{E} = -\text{div grad } \Phi - \frac{\partial}{c\partial t} \text{div } \mathbf{A} = -\square \Phi - \frac{\partial \sigma}{c\partial t}.$$

Далее, учитывая уравнение (4.3), находим

$$\text{div } \mathbf{E} = -2 \frac{\partial \sigma}{c\partial t}.$$

Условившись понимать под величиной

$$\rho_h = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \sigma}{c\partial t} \quad (4.16)$$

некоторую плотность заряда, можем предпоследнее выражение прочесть

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho_h, \quad (4.17)$$

или как уравнение (1.4), представляющее собой теорему Остроградского — Гаусса для электрического поля.

В уравнение (4.16) подставим σ из (4.2), тогда с учетом (2.6) получаем

$$\rho_h = -\frac{e(\beta \mathbf{l})}{\pi \lambda^3 [1 - (\beta \mathbf{l})]}.$$

Отсюда следует, что наведенный пространственный заряд всегда имеет противоположный знак впереди движущегося заряда и тот же — позади.

Таким же образом из (4.15) и (4.8) находим

$$\mathbf{j}_h = -\frac{e[3\mathbf{l}(\beta \mathbf{l}) - \beta]}{2\pi \lambda^3 [1 - (\beta \mathbf{l})]}.$$

Из последних выражений видно, что гюйгенсовские плотности заряда и тока отличны от нуля вблизи точечного заряда и определяются его скоростью.

Выше величины ρ_h и $\mathbf{j}_h$ были введены формально только для того, чтобы соответствующие уравнения приняли

надлежащий вид. Однако с помощью прямого дифференцирования определений (4.2) и (4.8) с использованием формул (3.2) и (3.3) нетрудно установить, что функции σ и σ удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{div} \sigma + \frac{\partial \sigma}{c \partial t} = 0,$$

а поэтому ρ_h и $\mathbf{j}_h$ удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_h + \frac{\partial \rho_h}{\partial t} = 0. \quad (4.18)$$

Последнее выражение представляет собой закон сохранения заряда, чем и доказывается справедливость введения этих величин.

Отсюда приходим к заключению, что движение точечного заряда вызывает поляризацию окружающего пространства, создавая в нем распределенные плотность тока $\mathbf{j}_h$ (4.15) и заряда ρ_h (4.16). Очевидно, что эта поляризация необратима, т.к. она определяется только первой частной производной по времени, и изменяет знак при отражении времени $t \rightarrow -t$.

Известно, что уравнения Максвелла допускают "разделение" уравнений для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Переходя от уравнений первого порядка к уравнениям второго, получаем

$$\square \mathbf{E} = 4\pi \left(\operatorname{grad} \rho_h + \frac{\partial \mathbf{j}_h}{c^2 \partial t} \right), \quad (4.19)$$

$$\square \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}_h. \quad (4.20)$$

Таким образом, принятые здесь в соответствии с расширенным принципом Гюйгенса определения скалярного (2.3) и векторного (2.4) потенциалов не только не противоречат уравнениям Максвелла, но последние предстают как математическое следствие принципа Гюйгенса. Новым здесь оказывается необходимость признать поляризацию окружающего пространства и ее необратимость, а с ней — необратимость всей электродинамики движущегося точечного заряда.

4.5. Сопровождающий репер

Запишем электромагнитное поле точечного заряда в "локальных" координатах на λ -сфере. Обратившись к определениям единичных векторов сопровождающего трехгранника в предыдущей главе, можем формулы (4.9) и (4.10) переписать в следующем виде:

$$\mathbf{E} = e \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\kappa \mathbf{n}}{\lambda} \right), \quad \mathbf{H} = e \frac{\kappa \mathbf{b}}{\lambda}. \quad (4.21)$$

Подставим поочередно определенные таким образом поля в полученные выше уравнения Максвелла, тогда из (4.12) получаем

$$\operatorname{div} \left(\frac{\kappa \mathbf{b}}{\lambda} \right) = 0, \quad (4.22)$$

т.е. уравнение (3.14).

Аналогично, пользуясь уравнением (4.17) и определением (4.16), находим

$$\operatorname{div} \left(\frac{\kappa \mathbf{n}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right) = 0, \quad (4.23)$$

т.е. уравнение (3.15). Здесь мы воспользовались тождеством

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{\operatorname{div} 1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3} \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right) = \frac{2}{\lambda^3} \frac{\partial \lambda}{c \partial t}.$$

Подставляя поля в (4.12), находим

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\kappa \mathbf{n}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right) = -\operatorname{rot} \left(\frac{\kappa \mathbf{b}}{\lambda} \right) - 2 \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (4.24)$$

Здесь выражение слева дополнено дробью $1\lambda^{-2}$, с тем чтобы дивергенция суммарного вектора удовлетворяла соотношению (4.23).

Наконец, из (4.17) имеем

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\kappa \mathbf{b}}{\lambda} \right) = -\frac{\partial}{c \partial t} \left(\frac{\kappa \mathbf{n}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (4.25)$$

Казалось бы, уравнения (4.22) – (4.25) представляют собой лишь запись известных уравнений электромагнитного поля движущегося заряда в несколько иной форме. Однако дело не ограничивается только этим. Прежде всего, как эти уравнения, так и последующие в этом разделе оказываются вообще не зависящими от величины заряда и содержат только геометрические объекты. Далее, применив "разделение" неизвестных, подобно тому, как это было сделано для полей, мы найдем уравнения, в определенном смысле аналогичные формулам Сьерре — Френе для векторов сопровождающего трехгранника.

С этой целью образуем rot выражения (4.25), изменив справа порядок дифференцирования по координатам и времени:

$$\text{rot rot} \left(\frac{\kappa \mathbf{b}}{\lambda} \right) = \frac{\partial}{c \partial t} \text{rot} \left(\frac{\kappa \mathbf{n}}{\lambda} - \frac{\mathbf{l}}{\lambda} \right).$$

В правую часть последнего выражения подставим уравнение (4.24), а слева воспользуемся известным равенством

$$\text{rot rot } \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}.$$

Тогда это выражение принимает вид

$$\square \left(\frac{\kappa \mathbf{b}}{\lambda} \right) = 2 \frac{\partial}{c \partial t} \left(\frac{\kappa \mathbf{b}}{\lambda} \right). \quad (4.26)$$

При выводе этого уравнения использовалось тождество

$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{l}}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda^2} \text{rot } \mathbf{l} - \mathbf{l} \times \text{grad} \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{\kappa \mathbf{b}}{\lambda^2},$$

где второй член в первом равенстве равен нулю в силу параллельности векторов $\mathbf{l}$ и $\text{grad } \lambda$.

Поступая подобным образом, найдем аналогичное уравнение

$$\square \left(\frac{\kappa \mathbf{n}}{\lambda} - \frac{\mathbf{l}}{\lambda^2} \right) = \frac{2 \partial}{\lambda c \partial t} \left(\frac{\kappa \mathbf{n}}{\lambda} - \frac{\mathbf{l}}{\lambda^2} \right). \quad (4.27)$$

Введем два других вектора

$$\mathbf{B} = \frac{\kappa \mathbf{b}}{\lambda} \quad \text{и} \quad \mathbf{N} = \frac{\kappa \mathbf{n}}{\lambda} - \frac{\mathbf{l}}{\lambda^2}.$$

Тогда два последних уравнения примут особенно простой и наглядный вид:

$$\square \mathbf{B} = 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B}}{\lambda} \right), \quad \square N = 2 \frac{\partial N}{\lambda c \partial t}.$$

Эти два уравнения также являются необратимыми дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка и отличаются лишь тем, что в одном $1/\lambda$ находится под оператором частной производной по времени, а во втором — вне его.

* * *

Если скорость заряда меньше скорости света, то уравнение (2.7) дает для λ -функции единственное действительное и положительное решение. В остальном движение заряда может быть произвольным. В этом случае расширенный принцип Гюйгенса позволяет найти в любой точке пространства скалярный и векторный потенциалы, вполне отвечающие здравому смыслу. При этом скалярный потенциал удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$\square \Phi = \frac{\partial \Phi^2}{c \partial t}.$$

В обычной электродинамике предполагается, что скалярный потенциал удовлетворяет однородному волновому уравнению. Именно на этом предположении, не имеющем доказательства и не следующем из уравнений Максвелла, как это обычно представляют, строится СТО. Отсюда и происходят все те абсурдные положения специальной теории относительности, которые обсуждаются до сих пор.

Вместе с потенциалами находим поля, используя стандартные выражения полей через потенциалы и установленные в предыдущей главе дифференциальные свойства λ -функции и единичного вектора $\mathbf{l}$.

Полученные таким образом электрическое и магнитное поля движущегося точечного заряда отвечают всем уравнениям Максвелла, если признать, что движение заряда

поляризует окружающее его пространство, создавая в нем распределенные заряды и токи с плотностями

$$\rho_h = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \sigma}{c \partial t}, \quad j_h = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \sigma}{c \partial t}, \quad \sigma = \frac{e}{\lambda^2}, \quad \sigma = \sigma_1.$$

В свою очередь, последние удовлетворяют закону сохранения заряда. В этом свете уравнения Максвелла предстают как выводимое математически следствие принципа Гюйгенса. Справедливо считать, что Гюйгенс своим принципом предсказал уравнения Максвелла за 200 лет до их появления.

Но так обстоит дело только с точечным зарядом. Ниже мы увидим, что заряды и токи поляризации, взаимно компенсируясь, исчезают в случае протяженных систем движущихся зарядов или систем, замкнутых на себя. Поля таких систем, вычисленные в полном соответствии с принципом Гюйгенса, удовлетворяют обычным уравнениям Максвелла.

Равномерное и прямолинейное движение

... — Любезный Фагот, покажи нам
для начала что-нибудь простенькое.

М. Булгаков

Как видно из предыдущего изложения, в формировании поля точечного заряда участвуют два движущихся "объекта" — множество электромагнитных возмущений и сам заряд как "прародитель" этого множества. Следующее из расширенного принципа Гюйгенса описание первого объекта гласит, что он включает набор элементарных эквипотенциальных сфер, центры которых упорядочены пройденными к моменту наблюдения поля точками траектории заряда, а радиусы — временным интервалом, прошедшим с момента образования данной сферы до момента ее наблюдения. В течение этого интервала элементарная сфера расширялась с постоянной скоростью с равномерно во все стороны от места своего рождения. Траекторию же заряда этот принцип не ограничивает; и уже из математики следует, что только при $\beta < 1$ сферы не имеют общих точек и потому потенциал в каждой точке пространства определяется только одной из них. Электромагнитные поля такого заряда, как мы видели выше, подчиняются уравнениям Максвелла.

Равномерное и прямолинейное движение точечного заряда, которое рассматривается в этой главе, представляет собой простейшую траекторию. Для нее возможно точное аналитическое решение всей задачи отыскания полей такого заряда без ограничений на его скорость, а потому подробный анализ такого движения имеет познавательное значение и для других траекторий.

Вместе с тем очевидно, что применение принципа относительности классической механики в задаче со столь

многочисленными движущимися объектами, участвующими в формировании поля, требует определенной осмотрительности.

5.1. Уравнение (2.7)

Полагаем, что заряд e движется вдоль оси x с постоянной скоростью v произвольной величины, и его положение в любой момент времени t задается радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_c = i vt + j 0 + k 0, \quad (5.1)$$

где i, j, k — единичные орты декартовой системы координат. Радиус-вектор точки наблюдения поля $\mathbf{r}$ представим как

$$\mathbf{r} = i x + j y + k z, \quad (5.2)$$

тогда уравнение (2.5) примет вид

$$l \lambda = i(x - vt') + j y + k z.$$

Подставим сюда t' из (2.2) и учтем единичность вектора l , тогда уравнение (2.7) запишем как

$$\lambda^2 = (\tilde{x} + \beta \lambda)^2 + y^2 + z^2, \quad (5.3)$$

где

$$\tilde{x} = x - vt, \quad (5.4)$$

а знак "тильда" над x означает, что эта переменная преобразована по Галилею.

Разрешив уравнение (5.3) относительно неизвестной λ , можем единичный вектор l представить в виде

$$l = i \left(\frac{\tilde{x}}{\lambda} + \beta \right) + j \frac{y}{\lambda} + k \frac{z}{\lambda}. \quad (5.5)$$

На плоскости $(\tilde{x}, \lambda)$ уравнение (5.3) при фиксированном значении выражения $y^2 + z^2$ представляет собой уравнение

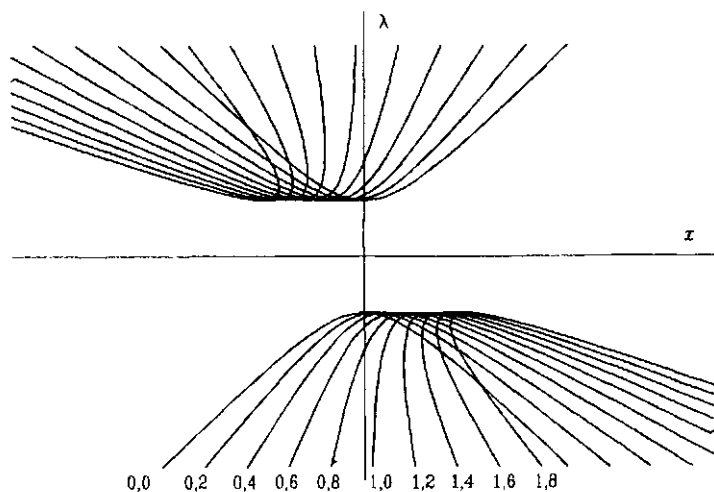


Рис. 5.1. Уравнение (5.3) на плоскости (λ, x) при фиксированных $y^2 + z^2$

гиперболы. Действительно, это уравнение имеет следующие инварианты [19] относительно линейных преобразований координат:

$$\Delta = -(y^2 + z^2), \quad \delta = -1, \quad S = \beta^2.$$

Видно, что инварианты уравнения (5.3) при любом значении β сохраняют знаки, и поэтому оно всегда описывает гиперболу, как показано на рис. 5.1.

Переходя к новым координатам x', λ' путем поворота осей на угол α

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\beta}{2 - \beta^2},$$

придадим этому уравнению каноническую форму

$$\frac{\lambda'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = y^2 + z^2.$$

Здесь

$$a^2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\beta^2}{2}\right)^2} - \frac{\beta^2}{2}, \quad b^2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\beta^2}{2}\right)^2} + \frac{\beta^2}{2}.$$

При этом, к сожалению, утрачивается основная информация, отвечающая условиям задачи, — одновременное существование двух корней уравнения (5.3). Это замечание показывает, что математически верные преобразования не всегда адекватны содержанию задачи.

5.2. Корни уравнения (5.3)

Уравнение (5.3) имеет следующие действительные и положительные корни:

$$\lambda = \frac{R + \beta \tilde{x}}{1 - \beta^2}, \quad \text{если } \beta < 1, \quad (5.6)$$

$$\lambda = -\frac{r^2}{2\tilde{x}}, \quad \text{если } \beta = 1, \quad \tilde{x} < 0, \quad (5.7)$$

$$\lambda_1 = \frac{-\beta \tilde{x} - R}{\beta^2 - 1}, \quad \text{если } \beta > 1, \quad \tilde{x} < 0, \quad (5.8)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\beta \tilde{x} + R}{\beta^2 - 1}, \quad \text{если } \beta > 1, \quad \tilde{x} < 0, \quad (5.9)$$

где r — расстояние в сферической системе координат,

$$r^2 = (x - vt)^2 + y^2 + z^2,$$

а через R обозначен радикал

$$R = \sqrt{(x - vt)^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)}. \quad (5.10)$$

Соответствующие условия, обеспечивающие действительные и положительные значения корней, выписаны рядом в приведенных выше формулах; разумеется, помимо них должно всегда выполняться условие

$$\text{Im } R = 0,$$

или

$$(x - vt)^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2) \geq 0.$$

Остановимся подробнее на корнях уравнения (5.3), не смотря на элементарность этого вопроса.

При $\beta < 1$ уравнение (5.3) имеет один положительный корень (5.6), соответствующий верхней ветви гиперболы на плоскости $(\tilde{x}, \lambda)$. Второй отрицательный корень, связываемый иногда с так называемыми "опережающими" потенциалами, не имеет, очевидно, физического смысла в силу условия (2.1).

Когда $\beta \rightarrow 1$ со стороны $\beta < 1$, корень (5.6) становится бесконечно большим, если $\tilde{x} > 0$, и соответствующие потенциалы в этой области значений координат $\tilde{x}$ становятся равными нулю.

Если же $\tilde{x} < 0$, то значение этого корня становится неопределенным вида $0/0$. Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталя, находим, что предельное значение корня (5.6) при $\beta \rightarrow 1$ и отрицательных $\tilde{x}$ равно корню (5.7). Последний можно получить проще, положив $1 - \beta^2 = 0$, тогда (5.3) примет вид

$$2\tilde{x}\lambda + \tilde{x}^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

При $\beta > 1$ уравнение (5.3) не имеет действительных корней, если

$$\tilde{x}^2 \leq (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2). \quad (5.11)$$

На плоскости $(\tilde{x}, \lambda)$ это отвечает случаю, когда поворот действительной оси гиперболы таков, что между ее ветвями вдоль оси $\tilde{x}$ образуется "зазор", равный

$$2\sqrt{(\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)}.$$

Вне этого зазора при $\tilde{x} > 0$ имеется два отрицательных корня, а при $\tilde{x} < 0$ — два положительных.

Таким образом, при $\beta < 1$ уравнение (5.3) имеет один корень, действительный и положительный во всем пространстве; при $\beta = 1$ такой корень существует только в той части пространства, где $\tilde{x}$ отрицателен, а при $\beta > 1$ имеется один корень, соответствующий равенству в (5.11), и два в случае неравенства.

Очевидно, что уравнение

$$\tilde{x}^2 = (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2) \quad (5.12)$$

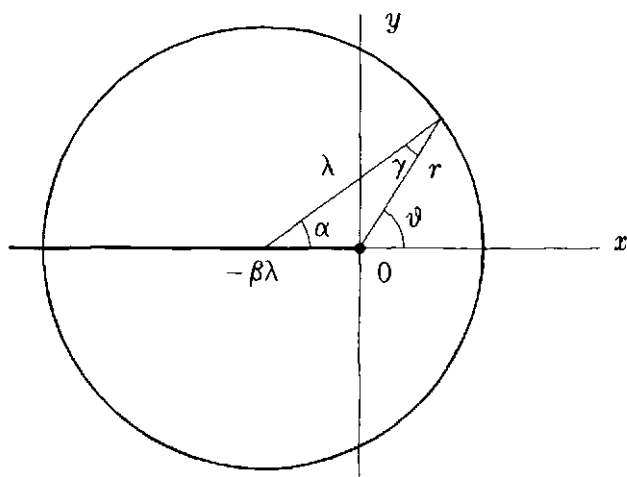


Рис. 5.2. Треугольник "встречи"

описывает конус Маха, на границе которого уравнение (5.3) имеет один корень, а внутри — два, и оба корня имеют физический смысл.

5.3. Треугольник "встречи"

С целью упрощения записи последующих формул введем сферические координаты. Исторически сложилось так, что движение заряда предполагается вдоль оси x , хотя рассматриваемая задача имеет вращательную симметрию относительно именно этой оси, поэтому полярную ось сферической системы направим по оси $\tilde{x}$ вопреки традиционной оси z :

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x - vt = r \cos \vartheta, \\ y &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = r \sin \vartheta \sin \varphi,\end{aligned}$$

где

$$r^2 = (x - vt)^2 + y^2 + z^2.$$

Далее, три точки — точка наблюдения электромагнитного поля $(\tilde{x}, y, z)$, центр координатной системы, в которой находится заряд в данный момент $(0, 0, 0)$, и точка, где заряд был в предшествующий момент времени

$(-\beta\lambda, 0, 0)$ — образуют треугольник со сторонами $r, \beta\lambda$ и λ . Назовем его треугольником встречи. Углы в нем обозначим, соответственно, α, γ и $\pi - \vartheta$, как показано на рис. 5.2. При этом, разумеется, выполняется равенство:

$$\alpha + \gamma = \vartheta. \quad (5.13)$$

Введенные углы треугольника встречи связаны с его сторонами теоремой синусов:

$$\frac{\sin \alpha}{r} = \frac{\sin \vartheta}{\lambda} = \frac{\sin \gamma}{\beta\lambda}.$$

Отсюда находим

$$\sin \gamma = \beta \sin \vartheta, \quad (5.14)$$

что совместно с уравнением (5.13) позволяет любую пару углов рассматриваемого треугольника выразить через третий; например, найдем явные выражения углов α и γ через угол ϑ .

С этой целью запишем очевидные соотношения из треугольника встречи

$$\tilde{x} = \lambda(\cos \alpha - \beta), \quad \rho = \lambda \sin \alpha,$$

откуда получаем

$$\frac{\rho}{\tilde{x}} = \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \beta}.$$

В последней дроби перейдем к тригонометрическим функциям половинного угла

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{(1 - \beta) \cos^2 \frac{\alpha}{2} - (1 + \beta) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Разделив справа числитель и знаменатель на $(1 - \beta)$ и умножив затем левую и правую части последнего соотношения на $\sqrt{1 - \beta^2}$,

$$\sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{tg} \vartheta = \frac{2 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

найдем, что функция справа представляет собой тангенс двойного угла. Это позволяет переписать последнее выражение в виде

$$\sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \left[2 \operatorname{artg} \left(\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right].$$

Отсюда следует

$$\alpha = 2 \operatorname{artg} \left\{ \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \operatorname{artg} \left(\sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{tg} \vartheta \right) \right] \right\},$$

где α является функцией только угла ϑ и относительной скорости β . Из соотношения (5.13) заключаем, что и угол γ является такой же функцией.

Если $\beta < 1$, то $\sin \gamma$ всегда меньше 1, и потому верно также

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta}, \quad (5.15)$$

и $\cos \gamma$ — положителен; в противном случае знак $\cos \gamma$ может быть и отрицательным.

5.4. Поле движущегося заряда при $\beta \leq 1$

Используя эти обозначения, находим, что при $\beta < 1$

$$\lambda = \frac{r}{\cos \gamma - \beta \cos \vartheta}. \quad (5.6a)$$

Подставляя это выражение для λ в (5.5) и пользуясь соотношениями (5.13) – (5.15), находим компоненты единичного вектора $\mathbf{l}$:

$$\begin{aligned} l_x &= \cos \vartheta (\cos \gamma - \beta \cos \vartheta) + \beta = \cos \alpha, \\ l_y &= (\cos \gamma - \beta \cos \vartheta) \sin \vartheta \cos \varphi = \sin \alpha \cos \varphi, \\ l_x &= (\cos \gamma - \beta \cos \vartheta) \sin \vartheta \sin \varphi = \sin \alpha \sin \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, в декартовой системе координат вектор $\mathbf{l}$ можно представить в виде следующей одностолбцовой матрицы:

$$\mathbf{l} = \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \varphi \\ \sin \alpha \sin \varphi \end{vmatrix}. \quad (5.16)$$

В дальнейшем при вычислении полей нам потребуется частная производная вектора $\mathbf{l}$ по времени, которую найдем в этой же системе координат прямым дифференцированием выражения (5.16):

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{c \partial t} = \frac{\partial \alpha}{c \partial t} \begin{vmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \sin \varphi \end{vmatrix}. \quad (5.17)$$

При этом учитывается, что угол φ не зависит от времени, и зависимость компонент вектора $\mathbf{l}$ от времени определяется только углом α .

Пользуясь определениями координат точки наблюдения поля

$$r = \sqrt{(x - vt)^2 + \rho^2}, \quad \sin \vartheta = \frac{\rho}{r},$$

находим

$$\frac{\partial r}{c \partial t} = -\beta \cos \vartheta, \quad \frac{\partial \vartheta}{c \partial t} = \beta \frac{\sin \vartheta}{r}. \quad (5.18)$$

Отсюда с учетом (5.13) и (5.14) получаем

$$\frac{\partial \alpha}{c \partial t} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\lambda}. \quad (5.18a)$$

Теперь вектор $\mathbf{l}$ и его частную производную преобразуем в выбранную сферическую систему координат, в которой ее полярная ось ($\vartheta = 0$) совпадает с осью $\tilde{x}$ декартовой системы, с помощью матрицы σ поворота осей координат:

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi, & \sin \vartheta \sin \varphi, & \cos \vartheta \\ -\sin \varphi, & \cos \varphi, & 0 \\ \cos \vartheta \cos \varphi, & \cos \vartheta \sin \varphi, & -\sin \vartheta \end{vmatrix}.$$

При умножении вектора $\mathbf{l}$ его декартовы компоненты представим в порядке y, z и x , с тем чтобы ось x совпала с полярной осью сферической системы. Тогда для этого вектора найдем

$$\mathbf{l} = \sigma \begin{vmatrix} \sin \alpha \cos \phi \\ \sin \alpha \sin \phi \\ \cos \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \gamma \\ 0 \\ -\sin \gamma \end{vmatrix}. \quad (5.16a)$$

Условимся записывать компоненты вектора в виде одно-столбцовой матрицы в обычном порядке r , φ и ϑ .

Произведя такую же циклическую перестановку в выражении (5.17), найдем компоненты частной производной вектора $\mathbf{l}$:

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{c \partial t} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\lambda} \begin{vmatrix} \sin \gamma \\ 0 \\ \cos \gamma \end{vmatrix}. \quad (5.17a)$$

С учетом принятых выше обозначений получаем, что скалярный потенциал¹ и компоненты векторного равны

$$\Phi_1 = \frac{e}{r} (\cos \gamma - \beta \cos \vartheta), \quad (5.19)$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{e}{r} (\cos \gamma - \beta \cos \vartheta) \begin{vmatrix} \cos \gamma \\ 0 \\ -\sin \gamma \end{vmatrix}. \quad (5.20)$$

Заметим, что здесь между потенциалами выполняется равенство (4.4), а эквипотенциальная поверхность представляет собой сферу с радиусом λ и со смещенным на $\beta \lambda$ центром.

Теперь найдем электрическое поле движущегося равномерно и прямолинейно точечного заряда, исходя из общей формулы (4.9):

$$\mathbf{E}_1 = \frac{e}{\lambda^2} \left(1 - \lambda \frac{\partial \mathbf{l}}{c \partial t} \right).$$

Подставляя сюда выражения (5.16a) и (5.17a), находим напряженность электрического поля в сферической системе координат

$$\mathbf{E}_1 = \frac{e}{\lambda^2 \cos \gamma} \begin{vmatrix} \cos 2\gamma \\ 0 \\ -\sin 2\gamma \end{vmatrix}. \quad (5.21)$$

¹ Потенциалы и поля при $\beta < 1$ снабдим индексом 1, а при $\beta > 1$ — индексом 2.

Замечаем, что в первом приближении компонента E_ϑ пропорциональна относительной скорости заряда в первой степени, а у E_r появляется поправка, пропорциональная β^2 . Компонента E_r пропорциональна

$$\cos 2\gamma = 1 - 2\beta^2 \sin^2 \vartheta$$

и при $\beta^2 > 1/2$ переходит через нуль.

Из выражения (5.21) получаем

$$|\mathbf{E}_1| = \frac{e}{\lambda^2 \cos \gamma},$$

т.е. уровни постоянного значения абсолютной величины напряженности электрического поля представляют собой замкнутые поверхности, которые при малой величине β практически совпадают с эквипотенциальными поверхностями.

Для вычисления магнитного поля воспользуемся формулой (4.10)

$$\mathbf{H}_1 = \frac{e}{\lambda} \text{rot } \mathbf{l},$$

а величину $\text{rot } \mathbf{l}$ найдем из соотношения (3.9):

$$\text{rot } \mathbf{l} = -\mathbf{l} \times \frac{\partial \mathbf{l}}{c \partial t}.$$

Перемножив соответствующие векторы из выражений (5.16a) и (5.17a), получим

$$\mathbf{H}_1 = \frac{e}{\lambda^2} \begin{vmatrix} 0 \\ \text{tg } \gamma \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (5.22)$$

Компоненты полей проще представить, если записать их в сопровождающем репере $\mathbf{l}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$ (см. разд. 3.6):

$$\mathbf{E}_1 = \frac{e}{\lambda^2} [1, 0, \text{tg } \gamma],$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{e}{\lambda^2} [0, \text{tg } \gamma, 0].$$

Видно, что в соответствии с общим случаем нормальная к λ -сфере компонента электрического поля равна полю заряда e , если бы последний неподвижно находился в ее центре. Его движение порождает две другие тангенциальные компоненты — равные между собой электрическое и магнитное поля.

Довольной конус Маха (разд. 3.6) представляет собой, очевидно, плоскость $\hat{x} = 0$, остающуюся неизменной при $\beta < 1$.

5.5. Поле движущегося заряда при $\beta \geq 1$

При $\beta > 1$ остаются справедливыми соотношения (5.13) и (5.14) в треугольнике встречи, и в силу очевидного условия $\sin \gamma \leq 1$ здесь должно выполняться неравенство

$$\sin \vartheta \leq \frac{1}{\beta},$$

равносильное условиям $R^2 > 0$ в (5.8), (5.9). Выполнение этого неравенства совместно с условием $\hat{x} < 0$ означает, что действительные и положительные значения λ -функции существуют только внутри конуса Маха

$$\sin \vartheta_M = \frac{1}{\beta} \quad \text{и} \quad \cos \vartheta_M = -\frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}, \quad (5.23)$$

в вершине которого в данный момент находится рассматриваемый заряд, а сам конус расположен позади заряда ($\hat{x} \leq 0$).

В любой точке внутри конуса λ имеет два действительных и положительных значения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-\beta x - R}{\beta^2 - 1}, \\ \lambda_2 &= \frac{-\beta x + R}{\beta_1^2}. \end{aligned}$$

В то же время уравнение (5.14) внутри конуса Маха также имеет два решения

$$\sin \gamma_1 = \beta \sin \vartheta, \quad \cos \gamma_1 = \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta},$$

$$\sin \gamma_2 = \beta \sin \vartheta, \quad \cos \gamma_2 = -\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta},$$

что равносильно равенству

$$\gamma_2 = \pi - \gamma_1. \quad (5.24)$$

В силу последнего равенства можем оба значения λ записать в единообразной форме:

$$\lambda_1 = r \frac{-\cos \gamma_1 - \beta \cos \vartheta}{\beta^2 - 1},$$

$$\lambda_2 = r \frac{-\cos \gamma_2 - \beta \cos \vartheta}{\beta^2 - 1}.$$

В соответствии с этим и определением (2.3) при $\beta > 1$ в любой точке внутри конуса будет два значения скалярного потенциала Φ'_2 и Φ''_2 . Для вычисления результирующего значения потенциала воспользуемся принципом суперпозиции:

$$\Phi_2 = \Phi'_2 + \Phi''_2 = \frac{e}{\lambda_1} + \frac{e}{\lambda_2} = \frac{e}{\lambda_e}.$$

Справедливость последнего в силу нелинейности уравнения (4.1) не следует из общих уравнений подобно тому, как этот принцип обосновывается в обычной электродинамике. Возможность применения принципа суперпозиции следует только из опыта.

Найдем значение λ_e :

$$\frac{1}{\lambda_e} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = -\frac{2\beta \cos \vartheta}{r},$$

или

$$-2\beta \lambda_e \cos \vartheta = r. \quad (5.25)$$

Это уравнение при $\lambda_e = \text{const}$ представляет собой на плоскости (r, ϑ) уравнение окружности радиуса $\beta \lambda_e$ с центром, лежащим на полярной оси, при этом окружность проходит через центр системы координат. Разумеется, в пространстве это уравнение определяет соответствующие сферы.

Теперь скалярный потенциал Φ_2 при $\beta > 1$ запишем как

$$\Phi_2 = -2\beta \frac{e}{r} \cos \vartheta. \quad (5.26)$$

Из сказанного выше следует, что этот потенциал остается постоянным на любой сфере, проходящей через начало системы координат и имеющей центр на оси $\hat{x} < 0$. Конус Маха ограничивает только ту часть эквипотенциальной сферы, которая расположена внутри него, в то же время вершина конуса включает еще по одной точке от каждой эквипотенциальной сферы, поэтому каждая такая сфера замыкается частью конуса, включая его вершину.

Назовем такую замкнутую поверхность парашютом, чтобы отличить ее от шарового сектора, от которого названная поверхность отличается тем, что ее коническая вершина находится на сфере, в то время как вершина сектора совпадает с центром сферы.

Общая поверхность парашюта

$$S_n = 4\pi\lambda_e^2 \left(2 - \frac{1}{\beta^2}\right).$$

На всей этой поверхности скалярный потенциал равен e/λ_e и постоянен. Заменяя ее сферой с радиусом λ_s , найдем, что этот радиус равен

$$\lambda_s = \lambda_e \sqrt{2 - \frac{1}{\beta^2}}.$$

Отсюда видно, что усредненная по поверхности парашюта сфера имеет радиус, равный эффективной величине λ_e ($\lambda_s = \lambda_e$) только при $\beta = 1$, и превосходит ее при $\beta > 1$, а в пределе, когда $\beta \gg 1$, равен $\sqrt{2}\lambda_e$.

Объем парашюта

$$V_n = \frac{4}{3}\pi \frac{3\beta^2 - 2}{\beta^3} \lambda_e^3.$$

Отсюда находим, что усредненная по объему сфера имеет радиус

$$\lambda_v = \lambda_e \sqrt[3]{\frac{3}{\beta} - \frac{2}{\beta^3}}.$$

Здесь также $\lambda_v = \lambda_e$ только при $\beta = 1$, а затем с ростом β уменьшается, хотя и медленно, как $\lambda_e \sqrt[3]{3/\beta}$, когда $\beta \rightarrow \infty$.

Заметим, что равенства $\lambda_s = \lambda_v = \lambda_e$ при $\beta = 1$ не случайны, т.к. в этом случае эквипотенциальные поверхности представляет собой сферы именно радиуса λ_e .

Таким образом, для сверхсветовых скоростей эквипотенциальные поверхности имеют форму парашюта, и все их вершины находятся в общей точке, в которой находится рассматриваемый заряд. Доказательство этого отложим до гл. VII, здесь же подчеркнем, что "невидимость" замыкания эквипотенциальных поверхностей есть следствие принятой в рассматриваемой задаче точечности заряда.

Распределение скалярного потенциала показано на рис. 5.3, откуда видно, что, получив его, всегда есть возможность указать, куда движется заряд в данный момент. Полезно сравнить между собой рисунки 1.1, 2.1 и 5.3.

Теперь займемся вычислением векторного потенциала, который в соответствии с принципом суперпозиции положим равным

$$\mathbf{A}_2 = \frac{e}{\lambda_1} \mathbf{l}_1 + \frac{e}{\lambda_2} \mathbf{l}_2.$$

Воспользовавшись дважды (для λ_1 и λ_2) определением (5.5) и сложив результаты, получаем

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_x A_x,$$

где

$$\begin{aligned} A_\rho &= 2e \left[\frac{\rho}{r^2} + \beta^2 \frac{\rho(\tilde{x}^2 - \rho^2)}{r^4} \right], \\ A_\varphi &= 0, \\ A_x &= 2e \left[\frac{\tilde{x}}{r^2} - 2\beta^2 \frac{\tilde{x}\rho^2}{r^4} \right]. \end{aligned} \quad (5.27a)$$

Здесь компоненты вектора $\mathbf{A}_2$ для сокращения записи представлены в цилиндрической системе координат, в которой ось z направлена по оси x .

В сферической системе координат векторный потенци-

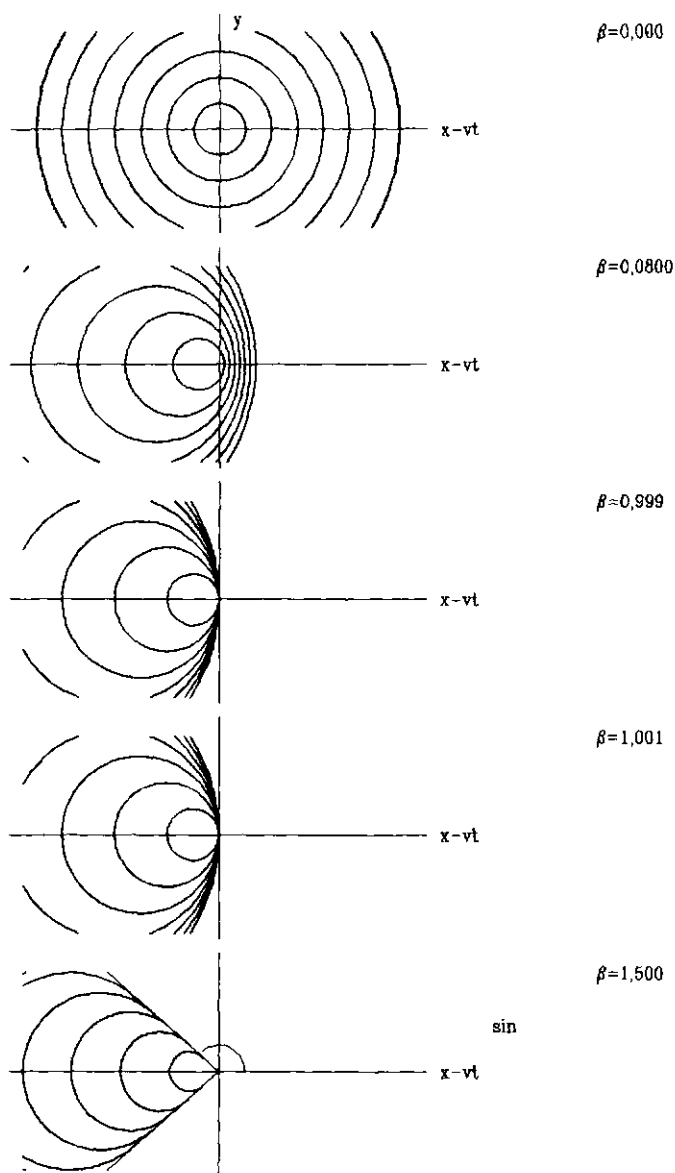


Рис. 5.3. Распределение скалярного потенциала при различных значениях β

ал имеет вид

$$\mathbf{A}_2 = 2\frac{e}{r} \begin{vmatrix} 1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta \\ 0 \\ \beta^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{vmatrix}. \quad (5.27)$$

Как видим, здесь между потенциалами уже не выполняется соотношение

$$\Phi = |\mathbf{A}|,$$

что, разумеется, обусловлено нелинейностью задачи.

На границе конуса Маха эти потенциалы остаются конечными, принимая следующие значения:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= 2\frac{e}{r}\sqrt{\beta^2 - 1}, \\ \mathbf{A}_2 &= 2\frac{e}{r}\sqrt{\beta^2 - 1} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим, что при $\beta > 1$ соотношение (4.4) выполняется только на границе конуса Маха, т.к. только здесь λ имеет одно значение.

Для вычисления электрического поля $\mathbf{E}$ воспользуемся определением

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t},$$

и с этой целью найдем частную производную векторного потенциала по времени. Исходя из выражения (5.27а), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\rho}{c \partial t} &= \frac{\partial A_\rho}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{c \partial t} = 4\frac{\beta e}{r^2} \left(\frac{\tilde{x}\rho}{r^2} + \beta^2 \tilde{x}\rho \frac{\tilde{x}^2 - 3\rho^2}{r^6} \right), \\ \frac{\partial A_x}{c \partial t} &= 2\frac{\beta e}{r^2} \left(\frac{\tilde{x}^2 - \rho^2}{r^2} - 2\beta^2 \rho^2 \frac{3\tilde{x}^2 - \rho^2}{r^4} \right). \end{aligned}$$

Появление в частных производных векторного потенциала множителя β связано с тем, что

$$\frac{\partial \tilde{x}}{c \partial t} = -\beta.$$

В этой системе координат градиент скалярного потенциала, очевидно, равен

$$\nabla\Phi = -2\frac{\beta e}{r^2}\left(\mathbf{e}_\rho 2\frac{\tilde{x}\rho}{r^2} + \mathbf{e}_x \frac{\tilde{x}^2 - \rho^2}{r^2}\right).$$

Подставляя приведенные выше равенства в общее выражение для напряженности электрического поля, находим его компоненты

$$E_\rho = -4\frac{\beta e}{r^2} \frac{\tilde{x}\rho}{dsr^2} \left(2 + \beta^2 \frac{\tilde{x}^2 - 3\rho^2}{r^2}\right),$$

$$E_\varphi = 0,$$

$$E_x = -4\frac{\beta e}{r^2} \left(\frac{\tilde{x}^2 - \rho^2}{r^2} - \beta^2 \rho^2 \frac{3\tilde{x}^2 - \rho^2}{r^4}\right).$$

Преобразуя эти выражения в сферическую систему координат, получаем

$$\mathbf{E}_2 = -4\frac{\beta e}{r^2} \begin{vmatrix} (1 - 2\beta^2 \sin^2 \vartheta) \cos \vartheta \\ 0 \\ (1 + \beta^2 \cos 2\vartheta) \sin \vartheta \end{vmatrix}. \quad (5.28)$$

Магнитное поле рассматриваемого заряда найдем, воспользовавшись общей формулой:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Как видно из (5.27), векторный потенциал $\mathbf{A}_2$ имеет только две компоненты, и они не зависят от координаты φ , поэтому вихрь вектора $\mathbf{A}_2$ имеет только одну компоненту

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi \left[\frac{\partial(rA_\vartheta)}{r \partial r} - \frac{\partial A_r}{r \partial \vartheta} \right].$$

Стоящая справа величина rA_ϑ вообще не зависит от r , поэтому имеем

$$H_\varphi = -\frac{\partial A_r}{r \partial \vartheta} = 2\frac{\beta^2 e}{r^2} \sin 2\vartheta.$$

Следовательно, компоненты магнитного поля сверхсветового заряда можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{H}_2 = 2\beta^2 \frac{e}{r^2} \sin 2\vartheta \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (5.29)$$

Вычисление компонент электромагнитного поля заряда, движущегося со сверхсветовой скоростью, дает следующие значения для полей на конусе Маха:

$$\mathbf{E} = 4 \frac{e}{r^2} \sqrt{\beta^2 - 1} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{\beta^2 - 1} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{H} = 4 \frac{e}{r^2} \sqrt{\beta^2 - 1} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Отсюда видно, что поля, как и потенциалы, остаются конечными во всем конусе, включая его границы, и вопреки СТО при любой скорости равномерного и прямолинейного движения всюду конечны.

5.6. Пределы

Как видно из содержания двух предыдущих разделов, потенциалы и поля равномерно и прямолинейно движущегося точечного заряда описываются различными функциями, если значение его относительной скорости находится в интервале $[0, 1]$ или $[1, \infty]$. Здесь рассмотрим, как эти функции соотносятся между собой на границе этих интервалов.

Начнем со скалярного потенциала Φ_1 из (5.19); если $\beta \rightarrow 1$ со стороны $\beta \leq 1$, то из треугольника встречи следуют пределы

$$\sin \gamma = \beta \sin \vartheta \rightarrow \sin \vartheta, \quad \cos \gamma \rightarrow |\cos \vartheta|,$$

а сам треугольник становится равнобедренным. В этом случае равными становятся и углы треугольника встречи, противолежащие равным сторонам — λ и $\beta\lambda$. Следовательно, угол γ приближается к $\pi - \vartheta$ по мере того, как β приближается к 1. При этом действительный и положительный корень уравнения (5.3) существует только при отрицательном значении $\tilde{x}$, поэтому

$$\vartheta > \frac{\pi}{2},$$

откуда следует неравенство

$$\gamma = \pi - \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда предел обратного значения λ

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1}{\lambda} = -2 \frac{\cos \vartheta}{r}, \quad \text{если} \quad \cos \vartheta < 0.$$

Отсюда заключаем, что

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \Phi_1 = -2 \frac{e}{r} \cos \vartheta.$$

Из выражения (5.26) для потенциала Φ_2 получаем такое же выражение при $\beta \rightarrow 1$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \Phi_2 = -2 \frac{e}{r} \cos \vartheta,$$

для чего достаточно в (5.26) просто положить $\beta = 1$.

Нетрудно установить также, что когда $\beta \rightarrow 1$ со стороны $\beta < 1$, то формулы (5.20) – (5.22) дают в пределе те же значения, что и формулы (5.27) – (5.29), если устремить β к единице со стороны $\beta > 1$, а именно

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \mathbf{A}_1 = \lim_{\beta \rightarrow 1} \mathbf{A}_2 = 2 \frac{e}{r} \cos \vartheta \begin{vmatrix} \cos \vartheta \\ 0 \\ \sin \vartheta \end{vmatrix},$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \mathbf{E}_1 = \lim_{\beta \rightarrow 1} \mathbf{E}_2 = 4 \frac{e}{r^2} \cos \vartheta \begin{vmatrix} \cos 2\vartheta \\ 0 \\ -\sin 2\vartheta \end{vmatrix},$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \mathbf{H}_1 = \lim_{\beta \rightarrow 1} \mathbf{H}_2 = -2 \frac{e}{r^2} \sin 2\vartheta \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

При $\beta = 1$ между скалярным и векторным потенциалами вновь выполняется соотношение (4.4) благодаря единственности решения уравнения (5.3).

Таким образом, скалярный и векторный потенциалы, а с ними и электромагнитное поле, описываются непрерывными функциями при изменении относительной скорости заряда во всем диапазоне значений от нуля до бесконечности. При этом значения потенциалов и полей, как и следовало ожидать, остаются конечными всюду, где эти величины имеют физический смысл, за исключением единственной точки $r = 0$, т.е. той точки пространства, где в данный момент времени находится точечный заряд.

Распределение потенциалов и полей задается скоростью заряда, но при данной скорости это распределение остается неизменным, если расстояния отсчитывать относительно заряда. Если следить за определенной эквипотенциальной поверхностью, то можно сказать, что поле движется вместе с зарядом с той же скоростью. Поэтому можно различить две скорости движения поля: внутреннее движение элементарных возмущений происходит со скоростью света, но скорость движения установившегося распределения электромагнитного поля точечного заряда, движущегося по прямой с постоянной скоростью, равна скорости заряда.

5.7. Дифференциальное уравнение для Φ

Скалярный потенциал Φ при $\beta < 1$ создается, как уже неоднократно подчеркивалось, в любой точке пространства одним и тем же точечным зарядом. В этом случае,

как показано в гл. IV, потенциал удовлетворяет необратимому и нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка (4.1):

$$e\Box\Phi = \frac{\partial\Phi^2}{c\partial t}.$$

Разумеется, для рассматриваемого равномерного и прямолинейного движения заряда это уравнение строго выполняется вплоть до $\beta = 1$, в чем читатель может убедиться, выполнив соответствующие вычисления.

При $\beta > 1$ в некоторые точки пространства одновременно приходят два электромагнитных возмущения, созданных одним зарядом в разных точках его траектории, а в другие — ни одного. В этом случае мы находили результирующий потенциал как сумму таких возмущений. В силу нелинейности уравнения (4.1) такое суммирование должно изменить форму этого уравнения, поэтому представляется интересным найти, какому дифференциальному уравнению отвечает скалярный потенциал при $\beta > 1$ и чем оно отличается от (4.1).

С этой целью будем исходить из выражения (5.26) для потенциала Φ_2 :

$$\Phi_2 = -2\beta e \frac{\cos\vartheta}{r},$$

для которого найдем соответствующие производные. Последовательно дифференцируя это выражение по координате r , находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_2}{\partial r} &= 2\beta e \frac{\cos\vartheta}{r^2}, \\ r^2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial r} &= 2\beta e \cos\vartheta, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial r} \right) &= 0.\end{aligned}$$

Аналогичное дифференцирование потенциала Φ_2 по координате ϑ приводит к следующим результатам:

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta} = 2\beta e \frac{\sin\vartheta}{r},$$

$$\begin{aligned}\sin \vartheta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta} &= 2\beta e \frac{\sin^2 \vartheta}{r}, \\ \frac{\partial}{r^2 \sin \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta} \right) &= 4\beta e \frac{\cos \vartheta}{r^3}.\end{aligned}$$

Согласно выражению (5.26) потенциал Φ_2 не зависит от координаты φ , поэтому окончательно его лапласиан можем представить как

$$\Delta \Phi_2 = 4\beta e \frac{\cos \vartheta}{r^3}. \quad (5.30)$$

Для вычисления частных производных потенциала Φ_2 по времени перепишем (5.26) в цилиндрической системе координат, направив ось z вдоль оси x :

$$\Phi_2 = -2\beta e \frac{x - vt}{(x - vt)^2 + \rho^2}, \quad \rho^2 = y^2 + z^2. \quad (5.26a)$$

Разумеется, формы (5.26) и (5.26a) абсолютно идентичны, но в последней четко представлена зависимость Φ_2 от координаты t .

Затем, последовательно дифференцируя по t выражение (5.26a), находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_2}{c \partial t} &= -2\beta^2 e \frac{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{r^2}, \\ \frac{\partial^2 \Phi_2}{c^2 \partial t^2} &= 4\beta^3 e \frac{3 - 4 \cos^2 \vartheta}{r^3} \cos \vartheta.\end{aligned}$$

В первой формуле разделим левую и правую части на β , а во второй — на β^2 , и перепишем их в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\beta c \partial t} = -2\beta e \frac{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{r^2}, \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\beta^2 c^2 \partial t^2} = 4\beta e \frac{3 - 4 \cos^2 \vartheta}{r^3} \cos \vartheta. \quad (5.32)$$

Вычитая теперь из лапласиана Φ_2 (формула (5.30)) вторую частную производную Φ_2 по t , т.е. формулу (5.32), находим

$$\square' \Phi_2 = 8\beta e \frac{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{r^3} \cos \vartheta.$$

Здесь через $\square'$ введен дифференциальный оператор

$$\square' = \Delta - \frac{\partial^2}{\beta^2 c^2 \partial t^2} = \Delta - \frac{\partial^2}{c'^2 \partial t^2},$$

чтобы отличить его от привычного оператора Д'Аламбера $\square$, содержащего c , а не $c' = \beta c$.

Правую часть последнего уравнения можно представить как

$$8\beta e \frac{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{r^3} \cos \vartheta = 2\Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\beta^2 e c \partial t}.$$

В результате это уравнение можно переписать в виде

$$e' \square' \Phi_2 = \frac{\partial \Phi_2}{c' \partial t}, \quad (5.33)$$

где

$$e' = \beta e, \quad c' = \beta c = v.$$

Сравнивая это уравнение с (4.1), замечаем, что форма уравнений одна и та же, т.е. оба уравнения необратимы и нелинейны. Имея одинаковую форму, эти уравнения отличаются тем, что (4.1) описывает скалярный потенциал при $\beta < 1$ с помощью волнового уравнения, в котором создаваемые точечным зарядом e волны распространяются сферически со скоростью света.

Согласно (5.33), скалярный потенциал сверхсветового заряда, представляющий в каждой точке конуса Маха сумму двух электромагнитных возмущений, можно рассматривать как потенциал одного заряда e' , создающего в той же точке только одно возмущение, но каждое такое возмущение движется со скоростью v , которая в β раз больше скорости света. Это следует из того, что уравнение (5.33)

задает суммарный потенциал сверхсветового заряда таким же волновым уравнением с не равной нулю правой частью, как и уравнение (4.1), в котором скорость распространения волн в β раз выше скорости света, т.е. равна скорости заряда.

К тому же волны (5.33) представляют собой только части сфер, ограниченные конусом Маха, и взаимно гасятся вне конуса.

5.8. Ортогональные кривые

Как видим, эквипотенциальные поверхности точечного заряда при равномерном и прямолинейном движении всегда представляют собой множество сфер различного радиуса. Но эти множества различны. При $\beta < 1$ радиус произвольной сферы равен λ , а смещение ее центра — $\beta\lambda$; когда же $\beta \geq 1$, радиус сферы равен ее смещению $\beta\lambda$.

Отыщем кривые, которые были бы ортогональны найденным множествам сфер. Для этого уравнение (5.3) представим в общем виде

$$F(\tilde{x}, \rho, \lambda) = 0, \quad \rho^2 = y^2 + z^2,$$

рассматривая его как одно параметрическое уравнение семейства кривых на плоскости $(\tilde{x}, \rho)$.

Известно, что этому семейству можно сопоставить другое, все кривые которого пересекают кривые данного семейства под одним и тем же углом — так называемые изогональные траектории [27]. Последние определяются следующим дифференциальным уравнением:

$$\left(\cos \chi \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}} - \sin \chi \frac{\partial F}{\partial \rho}\right) d\tilde{x} + \left(\sin \chi \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}} + \cos \chi \frac{\partial F}{\partial \rho}\right) d\rho = 0,$$

где χ — угол пересечения данных кривых с искомыми. Для ортогональных кривых

$$\chi = \frac{\pi}{2},$$

тогда после вычисления частных производных функции F искомые кривые определяются дифференциальным уравнением

$$\rho d\tilde{x} - (\tilde{x} + \beta\lambda)d\rho = 0.$$

Из треугольника встречи находим

$$\lambda \cos \alpha = \tilde{x} + \beta\lambda, \quad \lambda \sin \alpha = \rho.$$

Эти выражения примем за новые определения координат $\tilde{x}(\lambda, \alpha)$ и $\rho(\lambda, \alpha)$. Тогда, дифференцируя их и подставляя в предыдущее уравнение, находим

$$-\beta \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\alpha}{\sin \alpha}.$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$\left(\frac{\lambda}{a}\right)^\beta = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad (5.34)$$

где a — постоянная интегрирования. В это уравнение остается подставить λ и α , выраженные в декартовых координатах, и поставленная задача решена.

Уравнение (5.34) можно записать в следующем виде:

$$\alpha = 2\operatorname{arcctg} e^\xi, \quad \xi = \beta \ln \left(\frac{\lambda}{a}\right),$$

по форме совпадающем с определением угла "параллельности" Лобачевского $\Pi(\xi)$. Последний, как известно, определяется выражением [28]:

$$\Pi(\xi) = 2\operatorname{arcctg} \xi.$$

Таким образом, приходим к заключению, что гюйгенсовское семейство эквипотенциальных поверхностей при $\beta < 1$ имеет ортогональные поверхности, отвечающие геометрии Лобачевского.

Вычисление кривизны κ плоской кривой (5.34) дает следующую величину:

$$\kappa = \frac{\beta \sin \alpha}{\lambda(1 - \beta \cos \alpha)}.$$

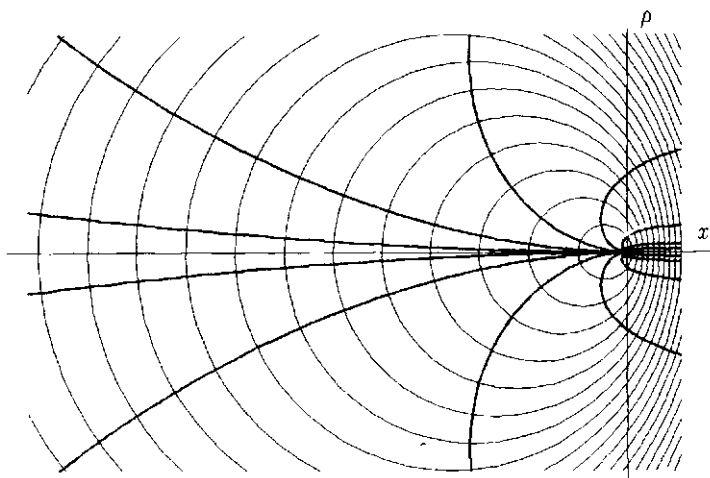


Рис. 5.4. Множество сфер $\lambda = \text{const}$ и ортогональные им кривые при $\beta = 0,8$

Видно, что кривизна ортогональной кривой равна абсолютной величине частной производной вектора $\mathbf{l}$ по времени

$$\sigma = \left| \frac{\partial \mathbf{l}}{c \partial t} \right|.$$

Поэтому вектор $\partial \mathbf{l} / c \partial t$ можем переписать как

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{c \partial t} = \kappa \mathbf{n}.$$

На рис. 5.4 показано множество λ -сфер и ортогональные им кривые.

При $\beta > 1$ множество эквипотенциальных сфер в плоскости $(\tilde{x}, \rho)$ представляет собой пучок окружностей, проходящих через одну общую точку — движущийся заряд. Такие пучки называют параболическими, и ортогональные им кривые представляют собой также пучок параболических окружностей. Но если центры окружностей $\lambda = \text{const}$ находятся на оси x , то центры ортогональных окружностей находятся на оси ρ , и эти окружности задаются уравнением

$$\tilde{x}^2 + (\rho - b)^2 = b^2, \quad (5.35)$$

где b — некоторая постоянная. Разумеется, эти окружности имеют смысл только в пределах области, общей для конусов Маха двух зарядов.

5.9. Еще раз о запаздывающих потенциалах

Вычислим теперь скалярный запаздывающий потенциал при сверхсветовой скорости заряда.

При $\beta > 1$ внутри конуса Маха для двух имеющих смысл значений λ находим

$$1 - \frac{\partial \lambda_1}{c \partial t} = \frac{\lambda_1}{R} \quad \text{и} \quad 1 - \frac{\partial \lambda_2}{c \partial t} = -\frac{\lambda_2}{R},$$

где R обозначено в (5.10). Относительно последнего выражения говорят, что в этом случае время как бы идет в обратном направлении. На деле это сигналы столь сильно запаздывают, что наблюдаются в обратном порядке.

Подставив эти значения в выражение (3.6), получим два запаздывающих потенциала

$$\Phi_{r1} = \frac{e}{R} \quad \text{и} \quad \Phi_{r2} = -\frac{e}{R}.$$

Также отрицательным оказывается второе значение потенциала, если пользоваться методами теории вычетов [7].

Следовательно, при $\beta > 1$ результирующий запаздывающий потенциал, или потенциал Лиенара — Вихерта, равен

$$\Phi_r = \Phi_{r1} + \Phi_{r2} = 0.$$

Отсюда заключаем, что в электродинамике Лоренца при $\beta > 1$ решение сводится к нулю даже внутри конуса Маха, и потому такому решению вообще "нельзя придавать смысла" [10]. Удивительно, как долго такой абсурд ($1 - 1 = 2$) оставался высшим научным достижением.

5.10. Заряды и токи поляризации

Найдем теперь те функции, которые описывают распределение плотности заряда и тока поляризации пространства, окружающего движущийся точечный заряд.

Согласно определениям (4.15) и (4.16), плотности заряда ρ_h и тока $\mathbf{j}_h$ поляризации равны

$$\rho_h = -\frac{e}{2\pi} \frac{\partial \sigma}{c \partial t}, \quad \mathbf{j}_h = -\frac{e}{2\pi} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{c \partial t},$$

где σ и $\boldsymbol{\sigma}$ определены в (4.2) и (4.8).

Подставив сюда λ из (5.6a), найдем следующее выражение для плотности заряда поляризации:

$$\rho_h = -\frac{\beta e}{\pi r^3} \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} (\cos \gamma - \beta \cos \vartheta)^2, \quad (5.36)$$

где $\alpha, \gamma, \vartheta$ — углы треугольника встречи.

Круглая скобка в последнем выражении никогда при $\beta < 1$ не обращается в нуль, поэтому плотность заряда поляризации равна нулю, если

$$\cos \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \vartheta = -\frac{1}{\beta}.$$

Плотность тока поляризации

$$\mathbf{j}_h = -\rho_h \mathbf{l} + \frac{e}{2\pi \lambda^3} \frac{\partial \mathbf{l}}{c \partial t}. \quad (5.37)$$

В это выражение следует подставить вектор $\mathbf{l}$ из (5.16) и вектор $\partial \mathbf{l} / (c \partial t)$ из (5.17a).

Из распределения плотности заряда ρ_h , показанного на рис. 5.5, видно, что перед зарядом появляется плотность, имеющая противоположный знак.

5.11. Величина движущегося заряда

Появление в пространстве, окружающем движущийся точечный заряд, индуцированных зарядов ρ_h и токов $\mathbf{j}_h$ вызывает, в свою очередь, своеобразное экранирование последнего, что изменяет его эффективную величину.

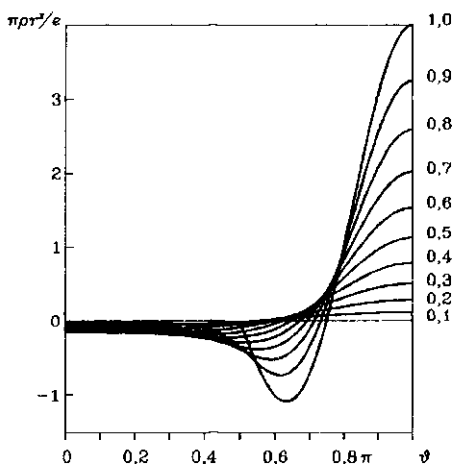


Рис. 5.5. Распределение плотности заряда поляризации

Под эффективной величиной движущегося заряда условимся понимать значение e , вычисленное согласно теореме Остроградского — Гаусса:

$$e = \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S},$$

где интеграл берется по замкнутой поверхности S , окружающей заряд в данный момент времени, а $\mathbf{S}$ — вектор, нормальный к этой поверхности.

Рассматривая выше точечный заряд, имеющий величину в покое e_0 и движущийся равномерно и прямолинейно вдоль оси x , мы видели, что нормальная к λ -сфере компонента электрического поля при $\beta < 1$ остается на эквипотенциальной поверхности $\lambda = \text{const}$ такой, как если бы заряд e_0 был неподвижным и находился в ее центре (разд. 5.5). Тогда, интегрируя последнее выражение по поверхности λ -сферы, найдем, что величина заряда равна e_0 .

Но в данный момент времени в центре λ -сферы заряда нет, поэтому в качестве замкнутой поверхности интегрирования выберем сферу с радиусом r , в центре которой находится заряд в данный момент времени. Очевидно, в этом случае мы получим величину заряда как меру его

реакции на действие внешних полей, присутствующих в данной точке в рассматриваемый момент, и эту меру примем за эффективную величину движущегося заряда.

Бесконечно малый элемент dS поверхности сферы с радиусом r во введенных ранее сферических координатах имеет вид

$$dS = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi.$$

Радиальная компонента электрического поля при $\beta < 1$ не зависит от угла ϕ , как видно из выражения (5.21), откуда

$$E_r = \frac{e}{r^2} (\cos \gamma - \beta \cos \vartheta)^2 \frac{\cos 2\gamma}{\cos \gamma},$$

и искомая величина ϵ определится интегралом

$$\epsilon = \frac{c_0}{2} \int_0^\pi (\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} - \beta \cos \vartheta)^2 \frac{\sin \vartheta}{\cos \gamma} \cos 2\gamma d\vartheta,$$

т.к. тривиальное интегрирование по φ даст множитель 2π перед интегралом.

Этот интеграл подстановкой $\eta = \cos \vartheta$ сводится к следующему интегралу от алгебраических функций:

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{\beta c_0}{2} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{a^2 + \eta^2} - 2\eta + \right. \\ & \left. + \frac{\eta^2}{\sqrt{a^2 + \eta^2}} \right) (1 - 2\beta^2 + 2\beta^2 \eta^2) d\eta, \end{aligned}$$

где

$$a^2 = \frac{1 - \beta^2}{\beta}.$$

Очевидно, что здесь второй член, умноженный на малую круглую скобку, представляет собой нечетную степенную функцию, которая после интегрирования превратится в четную и в результате даст нуль, поэтому эффективный заряд можно записать как сумму двух интегралов

$$e = \beta \frac{c_0}{2} \left[(1 - 2\beta^2) I_1 + 2\beta^2 I_2 \right], \quad (5.38)$$

где

$$I_1 = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{a^2 + \eta^2} + \frac{\eta^2}{\sqrt{a^2 + \eta^2}} \right) d\eta,$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \left(\eta^2 \sqrt{a^2 + \eta^2} + \frac{\eta^4}{\sqrt{a^2 + \eta^2}} \right) d\eta.$$

Нетрудно проверить прямым дифференцированием, что эти интегралы (в неопределенном виде) равны

$$I_1 = \eta \sqrt{a^2 + \eta^2},$$

$$I_2 = \frac{\eta^3}{2} \sqrt{a^2 + \eta^2} - \frac{\eta}{2} \sqrt{a^2 + \eta^2}^3 +$$

$$+ \frac{a^2}{4} \left(\eta \sqrt{a^2 + \eta^2} + a^2 \operatorname{Arsh} \frac{\eta}{a} \right).$$

Подставив сюда пределы, получим

$$I_1 = \frac{2}{\beta},$$

$$I_2 = \frac{2}{\beta} - \frac{1 + \beta^2}{2\beta^3} + \frac{(1 - \beta^2)^2}{2\beta^4} \operatorname{Arsh} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

В последнем выражении преобразуем гиперболический арксинус:

$$\operatorname{Arsh} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \operatorname{Arth} \beta.$$

Подставляя это выражение в I_2 и возвращая интегралы I_1 и I_2 в (5.38), получим для эффективной величины заряда e при $\beta < 1$ следующее выражение:

$$e = e_0 \frac{1 - \beta^2}{2} \left(1 + \frac{1 - \beta^2}{\beta} \operatorname{Arth} \beta \right). \quad (5.39)$$

Если $\beta > 1$, то радиальную компоненту электрического поля возьмем из (5.28), и тогда потребуется вычислить интеграл

$$e = 2\beta e_0 \int_{\pi - \operatorname{arctg} \beta}^{\pi} (1 - 2\beta^2 \sin^2 \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta.$$

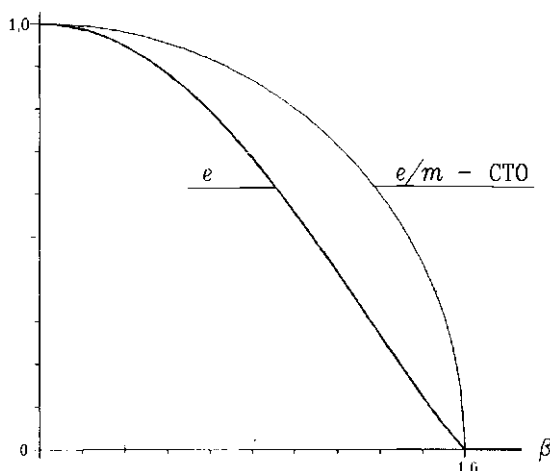


Рис. 5.6. Зависимость эффективной величины движущегося заряда от скорости

Этот интеграл после такой же подстановки, как и выше, сводится к табличным, но в результате интегрирования находим, что при $\beta > 1$

$$e = 0. \quad (5.40)$$

Из выражения (5.39) находим, что если $\beta \rightarrow 1$, то $e \rightarrow 0$. Отсюда заключаем, что эффективная величина движущегося равномерно и прямолинейно заряда зависит от его скорости и описывается, как и электромагнитное поле, непрерывной функцией $e(\beta)$, а при $\beta \geq 1$ эта функция тождественно равна нулю, как видно из рис. 5.6. Повидимому, именно это обстоятельство является основным препятствием в преодолении светового барьера в ускорителях заряженных частиц.

В теории ускорителей заряженных частиц считается:

$$e(\beta) = e_0, \quad m(\beta) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

или

$$\frac{e}{m} = \frac{e_0}{m_0} \sqrt{1 - \beta^2},$$

где m_0 и e_0 — масса и заряд покоящейся частицы. Отсюда следует, что $e/m \rightarrow 0$, если $\beta \rightarrow 1$. Но если в первом случае предполагается, что масса частицы растет по мере ускорения, то из выражения (5.39) следует, что ее заряд приближается к нулю.

Оставим на время заряд и посмотрим, что нового привносит расширенный принцип Гюйгенса в акустику звукового источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью, но прежде рассмотрим свойства одной интересной функции, полученной выше.

5.12. Функция Гюйгенса

В этой главе нам впервые встретилась функция

$$\mathcal{H}(\beta) = \frac{1 - \beta^2}{\beta} \text{Arth } \beta,$$

которую назовем функцией Гюйгенса. Такая функция будет встречаться и далее, если у читателя достанет терпения прочитать эту книгу до конца.

Рассмотрим основные свойства этой функции и покажем, что она ограничена в промежутке $\beta = [0, 1]$. Это можно сделать разными способами, но мы воспользуемся известным разложением $\text{Arth } \beta$ в степенной ряд:

$$\text{Arth } \beta = \beta + \frac{\beta^3}{3} + \frac{\beta^5}{5} + \dots + \frac{\beta^{2n+1}}{2n+1} \dots$$

Теперь перепишем функцию $\mathcal{H}(\beta)$ как

$$\mathcal{H}(\beta) = \frac{1}{\beta} \text{Arth } \beta - \beta \text{Arth } \beta.$$

Подставим сюда дважды вместо $\text{Arth } \beta$ приведенный выше ряд, умноженный и разделенный на β ; в результате получим два ряда:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\beta) = & 1 + \frac{\beta^2}{3} + \frac{\beta^4}{5} + \dots + \frac{\beta^{2n}}{2n+1} - \dots \\ & - \beta^2 - \frac{\beta^4}{3} - \frac{\beta^6}{5} - \dots - \frac{\beta^{2n}}{2n-1} + \dots \end{aligned}$$

Суммируя эти ряды, находим степенной ряд для функции Гюйгенса

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\beta) &= 1 - 2 \left(\frac{\beta^2}{3} + \frac{\beta^4}{15} + \cdots + \frac{\beta^{2n}}{4n^2 - 1} + \cdots \right) = \\ &= 1 - 2\beta^2 R.\end{aligned}$$

Из последнего выражения следует, что $\mathcal{H}(\beta)$ является четной функцией β . Далее, оно же с очевидностью показывает, что при $\beta = 0$

$$\mathcal{H}(0) = 1.$$

Положим теперь $\beta = 1$, тогда R сводится к следующему числовому ряду [29]:

$$R = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{4n^2 - 1} + \cdots = \frac{1}{2}.$$

Отсюда заключаем, что при $\beta = 1$ функция Гюйгенса

$$\mathcal{H}(1) = 0.$$

По-видимому, интеграл функции Гюйгенса не выражается в виде конечной комбинации элементарных функций. Однако с помощью рядов можно найти общую площадь σ под кривой, описываемой этой функцией.

Пользуясь разложением функции Гюйгенса в ряд по степеням β , нетрудно найти неопределенный интеграл

$$\begin{aligned}I &= \int \mathcal{H}(\beta) d\beta = \int \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{4n^2 - 1} \right) d\beta = \\ &= \beta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(4n^2 - 1)}.\end{aligned}$$

Полученный ряд можно представить в виде разности следующих двух:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(4n^2 - 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n+1}}{4n^2 - 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

В последнем ряду заменим n на $k = n - 2$, т.е. запишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{2k-1}}{(2k-1)^2} - \beta.$$

Тогда искомый неопределенный интеграл запишется как

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{2k-1}}{(2k-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n+1}}{4n^2 - 1}.$$

Теперь искомая площадь равна

$$\sigma = I(\beta = 1) - I(\beta = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Второй из рядов нам встречался выше, и он равен $1/2$, а первый, как показано в [29], равен

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

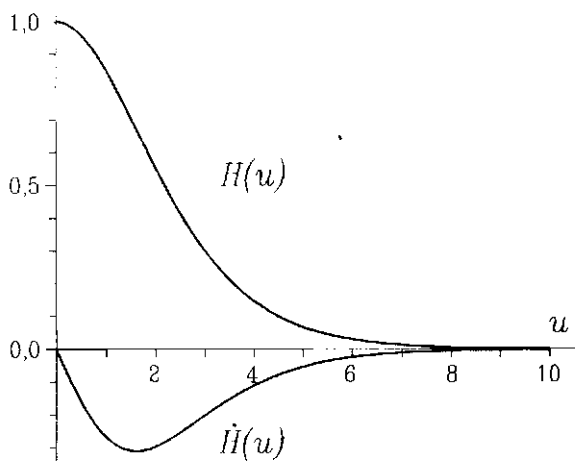
Отсюда заключаем, что площадь под кривой, описываемой функцией Гюйгенса, равна

$$\sigma = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}.$$

Функцию Гюйгенса можно представить в другом виде. Для этого сделаем замену переменной:

$$\beta = \operatorname{th} \frac{u}{2}.$$

Разумеется, здесь возможны прежние спекуляции об ограниченности скорости всех тел величиной $\beta < 1$, т.к. гиперболический тангенс любого конечного аргумента всегда удовлетворяет такому соотношению и лишь для бесконечно большого аргумента приближается к 1. Но далее нам встретятся функции Гюйгенса не только для β ,

Рис. 5.7. Функция $\mathcal{H}(u)$ и ее первая производная

но и для отношения r/a , в котором r есть расстояние от центра сферы с радиусом a до некоторой точки пространства, равно как и функции отношения a/r (и $1/\beta$). Эти функции будут оставаться действительными, если a/r или $1/\beta$ будут меньше 1. Последнее же соотношение есть всего лишь удобная форма записи, преобразующая взаимно однозначно ограниченный промежуток задания переменной $\beta = [0, 1]$ в неограниченный для переменной $u = [0, \infty]$.

Подставляя тогда β в выражение для $\mathcal{H}$, находим

$$\mathcal{H}(u) = \frac{u}{\operatorname{sh} u}. \quad (5.41)$$

В такой форме функция Гюйгенса представляется монотонной и ограниченной функцией, равной 1 при $u = 0$ и 0 при $u = \infty$.

Первая производная функции $\mathcal{H}$ равна

$$\frac{d\mathcal{H}}{du} = \frac{1}{\operatorname{sh} u} - \frac{u \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh}^2 u}.$$

Величина первой производной, как нетрудно установить, равна нулю на границах промежутка $[0, \infty]$. Следовательно, где-то внутри промежутка $d\mathcal{H}/du$ имеет минимум. Для

отыскания этого минимума найдем вторую производную

$$\frac{d^2 \mathcal{H}}{du^2} = \frac{u(1 + \operatorname{ch}^2 u) - \operatorname{sh} 2u}{\operatorname{sh}^3 u}$$

и положим ее равной нулю. Тогда

$$u = \frac{2 \operatorname{th} u}{2 - \operatorname{th}^2 u}.$$

Это трансцендентное уравнение имеет единственное решение при $u \approx 1,6061$.

По форме функция $\mathcal{H}$ напоминает часто используемую в радиотехнике функцию

$$\operatorname{sinc} u = \frac{\sin u}{u},$$

если ее записать для гиперболического синуса. Действительно, обратимся к известному соотношению между синусами действительного и мнимого аргументов

$$\sin x = -\operatorname{sh} ix.$$

Разделив левую и правую части этого соотношения на x , находим

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x} = \frac{\operatorname{sh} ix}{ix} = \frac{1}{\mathcal{H}}(ix).$$

Отсюда заключаем, что всегда выполняется равенство

$$\operatorname{sinc} x \mathcal{H}(ix) = 1. \quad (5.42)$$

5.13. Эффект Доплера

Выше говорилось о том, что при $\beta > 1$ в звуковом поле гармонического источника возникает доплеровское расщепление на две частоты, одна из которых принимает бесконечное значение, когда $\beta \rightarrow 1$, а вторая вдвое снижается

(см. разд. 1.6). Коль скоро амплитуды потенциалов, соответствующих этим частотам, остаются равными и конечными, энергия звукового излучения на бесконечной частоте должна также принимать бесконечно большое значение, и теоретически такой источник не сможет остановиться.

Посмотрим, как этот парадокс разрешается на основе расширенного принципа Гюйгенса.

Потенциал Φ_s звукового источника с обильностью $q = q_0 \sin \omega t$ (термин Д. И. Блохинцева) и частотой ω_0 при $\beta < 1$ имеет одно значение

$$\Phi_s = \frac{q_0}{\lambda} \sin \omega(t - \lambda/c) = \frac{q_0}{\lambda} \sin \alpha.$$

Под мгновенной частотой ω' сигнала, воспринимаемого неподвижным наблюдателем, понимаем [20]

$$\omega' = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t}.$$

Отсюда для дозвукового источника, движущегося равномерно и прямолинейно, находим:

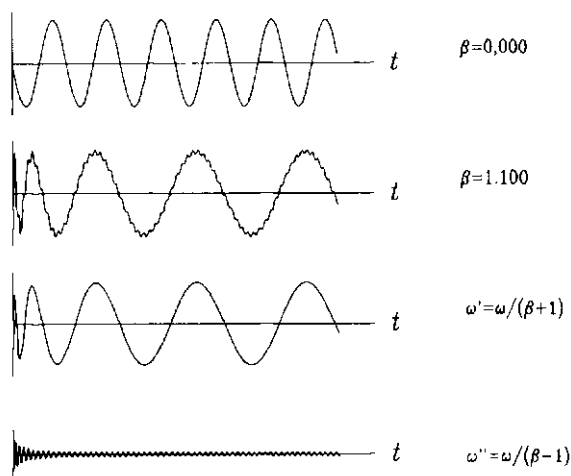
$$\omega'_s = \frac{\omega}{1 - \beta^2} \left[1 + \frac{\beta \cos \vartheta}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta}} \right], \quad (5.43)$$

взяв λ из (5.6).

При $\beta = 1$ уравнение (5.3) имеет один действительный и положительный корень только при выполнении условия $\cos \vartheta < 0$, поэтому в формуле (5.43) при $\beta \rightarrow 1$ появляется неопределенность вида $0/0$: числитель обращается в нуль, так как $(1 + \cos \vartheta / |\cos \vartheta|) \rightarrow 0$, и такой же предел имеет знаменатель: $(1 - \beta^2) \rightarrow 0$. Раскрывая ее по правилу Лопиталя, находим для этого случая

$$\omega'_{\beta=1} = \frac{\omega}{2 \cos^2 \vartheta}. \quad (5.44)$$

Из этой формулы следует, что наблюдаемая частота становится бесконечно большой, когда ϑ приближается к $\pi/2$. Но при этом, как мы видели выше, величина потенциала,

Рис. 5.8. Звуковой сигнал вблизи $\beta = 1$

в свою очередь, обращается в нуль, поэтому при $\beta \rightarrow 1$ величина мощности звукового сигнала остается конечной.

Для сверхзвукового источника полагаем, как и в случае заряда, что потенциалы двух возможных в конусе Маха сигналов суммируются, и общий потенциал при $\beta > 1$ определится как

$$\Phi_s = \frac{q_0}{\lambda_1} \sin \omega \left(t - \frac{\lambda_1}{c} \right) + \frac{q_0}{\lambda_2} \sin \omega \left(t - \frac{\lambda_2}{c} \right).$$

Перепишем это выражение:

$$\Phi_s = \frac{q_0}{\lambda_e} \text{Si}, \quad (5.45)$$

а эффективное значение λ_e -функции определяется как

$$\frac{1}{\lambda_e} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}.$$

Тогда для функции Si получим выражение

$$\text{Si} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \sin \omega \left(t - \frac{\lambda_1}{c} \right) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \sin \omega \left(t - \frac{\lambda_2}{c} \right). \quad (5.46)$$

Из последнего определения следуют неравенства

$$-1 \leq S_i \leq 1, \quad (5.47)$$

т.е. функция S_i по области значений подобна синусу некоторого угла. Если рассматривать сигнал вблизи оси x и позади источника, то здесь $x < 0$, и приближенные значения λ_1 и λ_2 из (5.8), (5.9) имеют следующие величины:

$$\lambda_1 \simeq \frac{\beta ct + |x|}{\beta + 1}, \quad \lambda_2 \simeq \frac{\beta ct + |x|}{\beta - 1}.$$

В этом приближении

$$S_i = \frac{\beta + 1}{2\beta} \sin \omega \frac{t - |x|/c}{\beta + 1} - \frac{\beta - 1}{2\beta} \sin \omega \frac{t + |x|/c}{\beta - 1}. \quad (5.48)$$

Отсюда заключаем, что, действительно, звуковые частоты доплеровского расщепления определяются выражением (1.21), но амплитуды расщепленных сигналов различны, и бесконечно большой частоте при приближении β к 1 соответствует бесконечно малая амплитуда потенциала, поэтому мощность сигнала остается конечной, когда $\beta \rightarrow 1$ со стороны $\beta > 1$. В этом случае функция S_i представляет собой почти периодическую функцию с частотой $\omega_1 \simeq \omega/2$, слабо модулированную высокой частотой $\omega_2 = -\omega/(\beta - 1)$, как показано на рис. 5.8. Именно поэтому сверхзвуковые снаряды, например самолеты, проходят звуковой барьер в обоих направлениях по скорости с конечным расходом энергии.

Что же касается светового барьера, то его преодоление связано, по-видимому, с рассмотренной выше эффективной величиной движущегося заряда.

5.14. Движущийся диполь

Вернемся вновь к зарядам и остановимся на диполе, состоящем из двух точечных зарядов разного знака и движущихся вдоль оси x с постоянной скоростью. Для такого диполя найдем, как со скоростью движения изменяется плоскость нулевого потенциала.

Пусть $\beta < 1$. Если расстояние между зарядами обозначить через $2d$, а угол (в плоскости xy) между соединяющей заряды прямой и осью x — через α , то λ -функции зарядов определяются уравнениями

$$\lambda_1^2 = (\tilde{x} - d \cos \alpha + \beta \lambda_1)^2 + (y - d \sin \alpha)^2 + z^2, \quad (5.49)$$

$$\lambda_2^2 = (\tilde{x} + d \cos \alpha + \beta \lambda_2)^2 + (y + d \sin \alpha)^2 + z^2. \quad (5.50)$$

Очевидно, что суммарный скалярный потенциал диполя равен нулю, если

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.$$

Из этого условия находим

$$\beta \lambda = -\tilde{x} - y \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.51)$$

Подставляя последнее равенство в любое из двух предыдущих уравнений, получаем уравнение поверхности нулевого потенциала досветового диполя

$$\frac{(\tilde{x} + y \operatorname{tg} \alpha)^2}{\beta^2 d^2} = \frac{y^2}{d^2 \cos^2 \alpha} + \frac{z^2}{d^2} + 1. \quad (5.52)$$

Это уравнение описывает двулопастный гиперboloид с действительной осью, направленной вдоль прямой

$$y = -\tilde{x} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (5.53)$$

как показано на рис. 5.9. Эта прямая, очевидно, ортогональна прямой, соединяющей заряды рассматриваемого диполя — $y = \tilde{x} \operatorname{tg} \alpha$.

При этом условиям задачи отвечает только одна из полостей гиперboloида, а именно та, что находится при отрицательных значениях $\tilde{x}$, точнее, когда сумма $\tilde{x} + y \operatorname{tg} \alpha$ в (5.51) имеет отрицательное значение, чтобы λ оставалось положительным.

Если $\beta > 1$, то для отыскания поверхности нулевого потенциала рационально сначала найти эффективные значения λ для каждого заряда, а затем найти условия, при которых эти значения равны между собой. Следуя этой процедуре и опуская промежуточные выкладки, находим

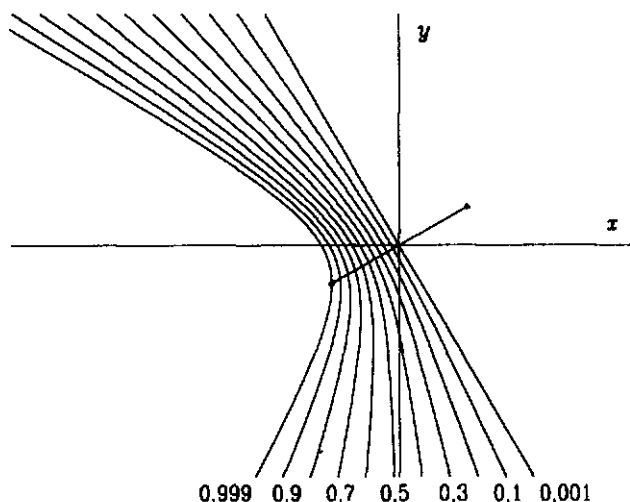


Рис. 5.9. Поверхность нулевого потенциала движущегося диполя при $\beta < 1$

уравнение поверхности нулевого потенциала сверхсветового диполя

$$\frac{(x + ytg\alpha)^2}{d^2} = \frac{y^2}{d^2 \cos^2 \alpha} + \frac{z^2}{d^2} + 1. \quad (5.54)$$

Здесь имеем также гиперboloид, и условиям задачи отвечает только одна его полость, из которой к тому же конусами Маха вырезается только часть.

Заметим, что оси гиперboloида; сверхсветового диполя не зависят от скорости движения последнего. В целом же поверхность нулевого потенциала движущегося диполя при любой скорости позволяет определить, по крайней мере, направление его движения.

Сравним результаты этого раздела с тем, что следует из СТО, где соответствующая поверхность представляет собой плоскость, как и для покоящегося диполя.

* * *

Заканчивая на этом изучение поля точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно, приходим к следующим выводам.

- Потенциалы и поля такого заряда, согласно расширенному принципу Гюйгенса, описываются непрерывными функциями, имеющими при любой скорости конечное значение в любой точке пространства за исключением той, что занята зарядом в момент наблюдения поля.
- Эти функции различны в различных областях значений скорости заряда, однако на границах областей они переходят одна в другую.
- Вызванная движением точечного заряда поляризация окружающего пространства приводит к тому, что величина заряда зависит от его скорости и при $\beta \geq 1$ ее эффективное значение оказывается равным нулю.
- Движение диполя изменяет поверхность нулевого потенциала, которая из плоскости для статического диполя трансформируется в одну из полостей двуполостного гиперboloида. Причем для случая $\beta < 1$ оси гиперboloида изменяются со скоростью диполя, а при $\beta > 1$ — остаются неизменными.

Как уже, наверное, заметил читатель, среди непрерывных функций β , описывающих поле точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно, встречаются такие, которые изменяются с изменением β , если последнее находится в диапазоне $0 \div 1$, и остаются постоянными при $\beta > 1$, или, напротив, остаются постоянными при $\beta < 1$ и изменяются при $\beta > 1$.

Вращающийся заряд

С того и мучаюсь, что не пойму,
Куда несет нас рок событий.

С. Есенин

Наряду с равномерным и прямолинейным движением вращение с постоянной скоростью по окружности фиксированного радиуса, которое будет рассмотрено в этой главе, является одним из широко распространенных видов движения в природе. Отметим, что в СТО этот вид движения практически не рассматривается, и причина этого в том, что для него не существует аналитического решения.

Несмотря на то, что точное решение этой задачи не удается выполнить аналитически, рассмотрение электромагнитного поля вращающегося точечного заряда в свете расширенного принципа Гюйгенса показывает, что для него характерно появление ряда новых эффектов первого порядка относительно β , которые существенно меняют содержание многих задач. Например, электромагнитное поле вращающегося заряда, согласно расширенному принципу Гюйгенса, всегда остается кулоновским, т.е. такой заряд не излучает энергию вопреки общепринятому мнению, что в электродинамике вращение обязательно сопровождается излучением.

Для вращающегося заряда также появляется конус Маха, если скорость заряда выше скорости света, но форма конуса существенно отличается от того, что имеет место при прямолинейном движении. Вызвано это тем, что при прямолинейном движении с $\beta > 1$ пространство делится на две части, в одной из которых уравнение (2.5) имеет два рациональных корня, а в другой — ни одного. Здесь же в любой точке пространства и при любой скорости заряда всегда имеется один такой корень или более.

6.1. Уравнение (2.5)

Рассмотрим точечный заряд, вращающийся равномерно по окружности с радиусом a или a -окружности с постоянной скоростью v произвольной величины.

Пусть положение заряда e в любой момент времени t' задается вектором $\mathbf{r}_e$:

$$\mathbf{r}_e = a(\mathbf{i} \cos \omega t' + \mathbf{j} \sin \omega t' + \mathbf{k} 0). \quad (6.1)$$

Здесь ω — угловая скорость, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные орты декартовой системы координат.

Если радиус-вектор точки наблюдения поля есть

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z,$$

то уравнение (2.5) для λ -функции вращающегося заряда принимает вид

$$\lambda^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2a(x \cos \omega t' + y \sin \omega t') + a^2,$$

где k — волновое число:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{v}{ac} = \frac{\beta}{a}. \quad (6.2)$$

Введем сферическую систему координат с центром, совпадающим с центром окружности, на которой вращается заряд, и осью z , ортогональной плоскости a -окружности:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta.$$

Тогда предыдущее выражение примет вид

$$\lambda^2 = a^2 + r^2 - 2ar \sin \vartheta \cos \psi, \quad (6.3)$$

где

$$\psi = \varphi - \omega t + k\lambda. \quad (6.4)$$

Если бы можно было записать аналитически решение этого уравнения, то в каждой точке пространства мы имели бы функцию

$$\lambda = \lambda(r, \varphi - \omega t, \vartheta),$$

подобную той, что рассматривалась при равномерном и прямолинейном движении.

Очевидно, что в общем случае это трансцендентное уравнение для λ -функции не имеет аналитического решения, поэтому будем рассматривать уравнение (6.3) как не-явное задание λ -функции.

Отметим единственный частный случай, когда (6.3) решается точно. Этот случай соответствует положению точки наблюдения на оси z , т.е. при $\vartheta = 0$ или π , где всегда выполняется равенство

$$\lambda^2 = a^2 + r^2$$

независимо от скорости движения заряда.

В плоскости же a -окружности (при $\vartheta = \pi/2$) находим, что λ всегда ограничена, а именно

$$|a - r| \leq \lambda \leq a + r. \quad (6.5)$$

В расчетах на компьютере удобно, на мой взгляд, применять следующий алгоритм. Если задана точка наблюдения, т.е. известны $(r, \varphi, \vartheta, t)$, то можно поступить так. Полагаем, что в "нулевом" приближении

$$\lambda_0 = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \sin \vartheta \cos(\varphi - \omega t)}.$$

Тогда в следующем приближении найдем

$$\lambda_1 = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \omega t + k\lambda_0)},$$

а в i -м приближении

$$\lambda_i = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \omega t + k\lambda_{i-1})}.$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока не окажется справедливым неравенство

$$|\lambda_i - \lambda_{i-1}| < \delta,$$

где δ — заданная точность вычислений. Например, можно задать $\delta = 10^{-12}\lambda_i$ или иное малое число. Однако сходимость этого процесса довольно плохая, и необходимо 15 -

20 итераций для достижения относительной точности порядка $10^{-14} - 10^{-16}$, и только при $\beta < 1$.

Тем не менее для уравнения (6.3) в некоторых случаях можно найти аналитическое решение, и конус Маха тому примером.

6.2. Конус Маха

Уравнение (6.3) представим теперь как параметрическое уравнение семейства λ -сфер и продифференцируем его частным образом по λ , тогда найдем равенство

$$\lambda = kar \sin \vartheta \sin \psi. \quad (6.6)$$

Исключая затем ψ из уравнений (6.3) и (6.6), получаем следующее биквадратное уравнение для λ :

$$\lambda^4 - 2(a^2 + r^2 - \frac{2}{k^2})\lambda^2 + (a^2 + r^2)^2 - 4a^2r^2 \sin^2 \vartheta = 0. \quad (6.7)$$

Решение этого уравнения позволит найти λ и ψ :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\lambda}{k(a^2 + r^2 - \lambda^2)}. \quad (6.8)$$

Это равенство также следует из уравнений (6.3) и (6.6).

Введем новые обозначения для переменных

$$a_1^2 = a^2 - k^{-2}, \quad r_1^2 = r^2 - k^{-2}. \quad (6.9)$$

Тогда уравнение (6.7) можно переписать как

$$\lambda^4 - 2(a_1^2 + r_1^2)\lambda^2 + (a_1^2 - r_1^2)^2 + 4a^2r^2 \cos^2 \vartheta = 0.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2}^2 = a_1^2 + r_1^2 \pm 2\sqrt{a_1^2r_1^2 - a^2r^2 \cos^2 \vartheta}. \quad (6.10)$$

Видно, что в (6.10) выражение под радикалом останется положительным, а с ним и λ^2 — действительным, если

a_1^2 и r_1^2 имеют одинаковые знаки и их произведение удовлетворяет условию

$$a_1^2 r_1^2 \geq a^2 r^2 \cos^2 \vartheta. \quad (6.11)$$

Но λ^2 будет положительным, если a_1^2 и r_1^2 в (6.9) также будут больше нуля, что приведет к следующим условиям:

$$\beta > 1, \quad (6.12)$$

$$\beta r > a. \quad (6.13)$$

Таким образом, находим, что, как и при равномерном прямолинейном движении, действительная огибающая семейства λ -сфер существует только при сверхсветовых скоростях. Эта огибающая начинается тем ближе к центру a -окружности, чем больше скорость заряда, что следует из неравенства (6.13).

Заменяя неравенство (6.11) равенством, найдем с учетом (6.12)

$$\cos^2 \vartheta = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \left(1 - \frac{a^2}{\beta^2 r^2}\right). \quad (6.14)$$

Если в последнем выражении устремить r к бесконечности, то найдем

$$\sin \vartheta_{r \rightarrow \infty} = \frac{1}{\beta}, \quad (6.15)$$

т.е. выражение, соответствующее выражению для угла конуса Маха при прямолинейном движении. Заметим, что здесь угол ϑ отсчитывается от другой оси, а именно от оси z , ортогональной скорости заряда, а при прямолинейном движении — от оси, вдоль которой движется заряд.

В цилиндрической системе координат

$$z = r \cos \vartheta, \quad \rho = r \sin \vartheta$$

уравнение (6.14) принимает вид

$$k^2 \rho^2 - \frac{k^2 z^2}{k^2 a^2 - 1} = 1 \quad (6.16)$$

и определяет гиперболу, в которой находится, как показано ниже, свернутый в спираль конус Маха.

В плоскости вращения заряда $\vartheta = \pi/2$, и решения (6.10) уравнения (6.7) принимают особенно простой вид:

$$\lambda = |a_1 \pm r_1|,$$

или, с учетом условия причинности (2.1):

$$\lambda = \begin{cases} \frac{1}{\beta}(a\sqrt{\beta^2 - 1} + \sqrt{\beta^2 r^2 - a^2}), & r > \frac{a}{\beta} \\ \frac{1}{\beta}(a\sqrt{\beta^2 - 1} - \sqrt{\beta^2 r^2 - a^2}), & \frac{a}{\beta} < r < a \\ \frac{1}{\beta}(\sqrt{\beta^2 r^2 - a^2} - a\sqrt{\beta^2 - 1}), & r > a. \end{cases} \quad (6.17)$$

Подставляя поочередно последние выражения в уравнение (6.3), получим три уравнения вида

$$r = r(\varphi - \omega t),$$

которые задают три спиральные кривые, ограничивающие в плоскости a -окружности конус Маха вращающегося заряда.

Например, возьмем $\lambda = a_1 + r_1$ и подставим это значение в (6.8), находим

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{ka_1 + kr_1}{1 - k^2 a_1 r_1}.$$

Стоящая справа дробь в этом выражении представляет собой, очевидно, тангенс суммы двух углов

$$\operatorname{arctg} ka_1 \quad \text{и} \quad \operatorname{arctg} kr_1,$$

поэтому можно записать окончательно

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \omega t = & \operatorname{arctg} \sqrt{\beta^2 - 1} - \sqrt{\beta^2 - 1} + \\ & + \operatorname{arctg} \sqrt{k^2 r^2 - 1} - \sqrt{k^2 r^2 - 1}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

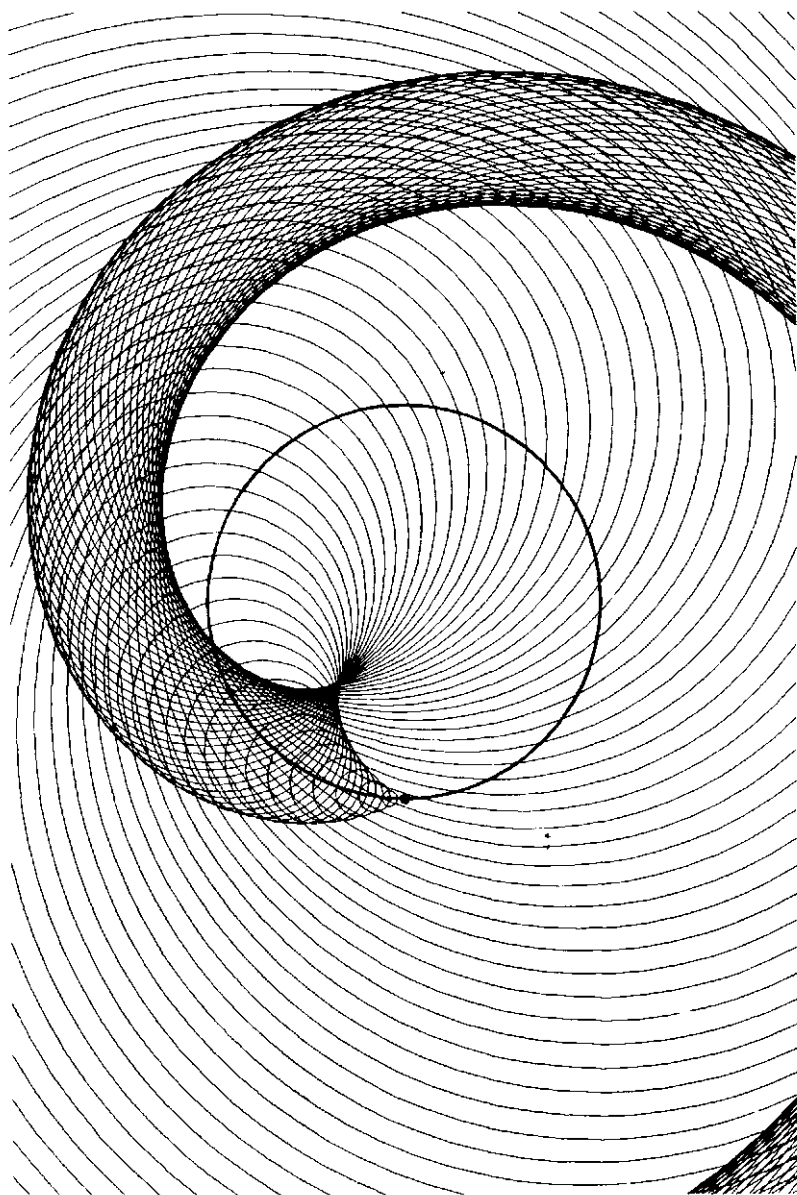


Рис. 6.1. Конус Маха вращающегося заряда

Здесь индекс 1 при ψ и φ означает первую спираль, имеющую смысл при любом значении $r > a/\beta$.

Также найдем две другие спирали: при $a/\beta < r < a$

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \omega t = & \operatorname{arctg} \sqrt{\beta^2 - 1} - \sqrt{\beta^2 - 1} - \\ & - \operatorname{arctg} \sqrt{k^2 r^2 - 1} + \sqrt{k^2 r^2 - 1} \end{aligned} \quad (6.19)$$

и при $r > a$

$$\begin{aligned} \varphi_3 - \omega t = & -\operatorname{arctg} \sqrt{\beta^2 - 1} + \sqrt{\beta^2 - 1} - \\ & + \operatorname{arctg} \sqrt{k^2 r^2 - 1} - \sqrt{k^2 r^2 - 1}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

На очень больших расстояниях от центра окружности, когда $kr \gg 1$, значимыми остаются две спирали (6.18) и (6.20). В первом приближении их можно записать как

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \omega t &= \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{\beta^2 - 1} - \sqrt{\beta^2 - 1} - kr, \\ \varphi_3 - \omega t &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\beta^2 - 1} + \sqrt{\beta^2 - 1} - kr. \end{aligned}$$

В этом приближении эти спирали представляют собой спираль Архимеда. Последней называют, как известно, кривую, описываемую точкой, равномерно вращающейся по окружности и движущейся по радиусу с постоянной скоростью. В данном случае несложно показать, что фронт конуса Маха движется со скоростью c в радиальном направлении.

Отметим характерные черты конуса Маха при вращении, отличающие его от конуса прямолинейно движущегося заряда.

Во-первых, здесь конус Маха ограничивает ту область пространства, в которой существуют два действительных решения уравнения (6.3), от той, где решение единственно. При прямолинейном движении вне конуса Маха вообще нет действительных решений аналогичного уравнения, а внутри — два.

Во-вторых, на радиусе $r = a$ внутренняя граница конуса испытывает характерный излом. Вблизи же вращающегося заряда конус Маха подобен конусу при равномерном прямолинейном движении.

На больших расстояниях конус Маха сворачивается в спираль, и угол раствора "оггибающей" спирального конуса Маха увеличивается с ростом β , в то время как при прямолинейном движении — падает.

Конус Маха при вращении показан на рис. 6.1. Экспериментально наблюдать конус Маха вращающегося источника проще всего, если проследить за волнами, создаваемыми вращающимся по кругу быстроходным катером или лодкой, что порой непроизвольно демонстрируют любители на реке или в море.

6.3. Поле вращающегося заряда

Вернемся к уравнению (6.3). Рассматривая его как неявное представление функции $\lambda = \lambda(r, \varphi, \vartheta)$ и полагая $\beta < 1$, что обеспечит однозначность λ -функции, можем записать компоненты ее градиента:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial r} &= \frac{r - a \sin \vartheta \cos \psi}{\lambda - \beta r \sin \vartheta \sin \psi}, \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} &= \frac{a \sin \psi}{\lambda - \beta r \sin \vartheta \sin \psi}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} &= \frac{-a \cos \vartheta \cos \psi}{\lambda - \beta r \sin \vartheta \sin \psi}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

К производным по пространственным координатам добавим производную по времени :

$$\frac{\partial \lambda}{c \partial t} = - \frac{\beta r \sin \vartheta \sin \psi}{\lambda - \beta r \sin \vartheta \sin \psi}. \quad (6.22)$$

Пользуясь выражением

$$\text{grad } \lambda = l \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right),$$

находим компоненты вектора l :

$$l = \frac{1}{\lambda} [r - a \sin \vartheta \cos \psi, a \sin \psi, -a \cos \vartheta \cos \psi]. \quad (6.23)$$

В выбранной системе координат вектор относительной скорости β имеет компоненты:

$$\beta = \beta[\sin \vartheta \sin \psi, \cos \psi, \cos \vartheta \sin \psi].$$

Исходя из общих выражений для полей (4.18) и (4.19), находим вначале компоненты электрического поля:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{e}{\lambda^2} \frac{\lambda(r - a \cos \psi) + \beta(a^2 - r^2) \sin \vartheta \sin \psi}{\lambda(\lambda - \beta r \sin \vartheta \sin \psi)}, \\ E_\varphi &= \frac{e}{\lambda^2} \frac{a\lambda \sin \psi + \beta[(a^2 + r^2) \cos \psi - 2ar \sin \vartheta]}{\lambda(\lambda - \beta r \sin \vartheta \sin \psi)}, \\ E_\vartheta &= \frac{e}{\lambda^2} \frac{-a\lambda \cos \psi + \beta(a^2 + r^2) \sin \psi}{\lambda(\lambda - \beta r \sin \vartheta \sin \psi)} \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (6.24)$$

а затем и магнитного:

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{\beta e}{\lambda^2} \frac{a \cos \vartheta}{\lambda - \beta r \sin \vartheta \sin \psi}, \\ H_\varphi &= \frac{\beta e}{\lambda^2} \frac{-r \cos \vartheta \sin \psi}{\lambda - \beta r \sin \vartheta \sin \psi}, \\ H_\vartheta &= \frac{\beta e}{\lambda^2} \frac{r \cos \psi - a \sin \vartheta}{\lambda - \beta r \sin \vartheta \sin \psi}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Проверкой можно убедиться, что электрическое поле и магнитное взаимно ортогональны.

В плоскости a -окружности только две компоненты электрического поля имеют отличное от нуля значение:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{e}{\lambda^2} \frac{\lambda(r - a \cos \psi) + \beta(a^2 - r^2) \sin \psi}{\lambda(\lambda - \beta r \sin \psi)}, \\ E_\varphi &= \frac{e}{\lambda^2} \frac{a\lambda \sin \psi + \beta[(a^2 + r^2) \cos \psi - 2ar]}{\lambda(\lambda - \beta r \sin \psi)}, \\ E_\vartheta &= 0, \end{aligned} \quad (6.26)$$

а магнитного — одна:

$$H_r = H_\varphi = 0, \quad H_\vartheta = \frac{\beta e}{\lambda^2} \frac{r \cos \psi - a}{\lambda - \beta r \sin \psi}. \quad (6.27)$$

6.4. Точка равновесия

В задаче Кеплера о движении двух взаимно притягивающихся масс показано, что в любой момент времени массы лежат на прямой, проходящей через общий центр инерции, и вращаются относительно него по окружностям или эллипсам, лежащим в одной плоскости. Из последних формул видим, что в плоскости a -окружности $E_\vartheta = 0$, что обеспечивает равновесность плоского орбитального движения. Однако при этом E_φ в общем случае не равна нулю на прямой, проходящей через центр a -окружности и вращающийся заряд.

Определим точки пространства, в которых азимутальная компонента электрического поля равна нулю. Для этого достаточно, чтобы выполнялось условие

$$a\lambda \sin \psi_0 + \beta[(a^2 + r^2) \cos \psi_0 - 2ar] = 0.$$

Видно, что это условие выполняется вблизи $\psi_0 \approx \pi$, когда $\psi < \pi$. В этом случае отрицательная квадратная скобка "уравновешивается" положительным значением $\sin \psi_0$.

С помощью уравнения (6.3) исключим $\cos \psi_0$ в последнем выражении, тогда получаем систему уравнений

$$\sin \psi_0 = k \frac{(a^2 + r^2)\lambda^2 - (a^2 - r^2)^2}{2ar\lambda}, \quad (6.28)$$

$$\cos \psi_0 = \frac{a^2 + r^2 - \lambda^2}{2ar}. \quad (6.29)$$

Исключая отсюда тригонометрические функции, находим следующее уравнение для λ -функции в искомой точке:

$$\lambda^4 - 2(a^2 + r^2)\lambda^2 + (a^2 - r^2)^2 + \frac{k^2}{\lambda^2} [(a^2 + r^2)^2 \lambda^4 - 2(a^2 + r^2)(a^2 - r^2)^2 \lambda^2 + (a^2 - r^2)^4] = 0. \quad (6.30)$$

Умножив это уравнение на λ^2 и приведя подобные члены, находим, что λ -функция определяется бикубическим уравнением:

$$\lambda^6 - (a^2 + r^2)[2 - k^2(a^2 + r^2)]\lambda^4 +$$

$$+ (a^2 - r^2)^2 [1 - 2k^2(a^2 + r^2)]\lambda^2 + k^2(a^2 - r^2)^4 = 0. \quad (6.31)$$

В общем виде корни такого уравнения записываются слишком громоздко, поэтому найдем приближенное решение этого уравнения.

С этой целью положим, что в точке равновесия

$$\psi_0 = \pi - \delta, \quad \delta \ll 1.$$

Тогда из (6.3) находим

$$\lambda^2 \approx a^2 + r^2 + 2ar(1 - \frac{\delta^2}{2}) = (a + r)^2 - ar\delta^2.$$

Это приблизительное выражение для λ подставим теперь в уравнение (6.30) и найдем

$$\delta^2 = \frac{k^2(a + r)^2}{1 + k^2(a^2 + r^2)}. \quad (6.32)$$

Отсюда видно, что точка равновесия, действительно, не лежит на прямой, соединяющей ее с центром a -окружности и зарядом в прошедший момент t' , а тем более в настоящий.

Уравнению (6.30) можно придать иной, физически более значимый вид. Для этого заметим, что, согласно формуле Герона, площадь S треугольника со сторонами a , r , λ равна

$$16S^2 = \lambda^4 - 2(a^2 + r^2)\lambda^2 + (a^2 - r^2)^2.$$

Тогда выражение (6.30) можно переписать в виде

$$-16S^2 + \frac{k^2}{\lambda^2} [4a^2r^2\lambda^4 - 16S^2(a^2 - r^2)^2] = 0$$

или окончательно

$$16S^2 = \frac{4k^2a^2r^2\lambda^2}{1 + \frac{k^2(a^2 - r^2)^2}{\lambda^2}}. \quad (6.33)$$

Из этой формулы видно, что три точки — центр O окружности, по которой вращается заряд, точка равновесия E и

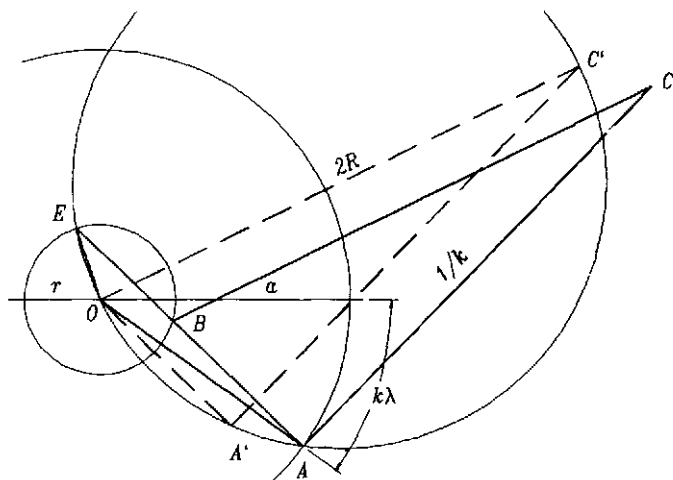


Рис. 6.2. Точка равновесия на окружности с радиусом r

положение заряда в прошлом A — всегда образуют треугольник OEA (см. рис. 6.2), площадь которого в первом приближении пропорциональна скорости заряда.

В то же время если известен радиус R окружности, описанной вокруг треугольника со сторонами a , r , λ , то

$$S = \frac{ar\lambda}{4R}.$$

Сравнивая это выражение с равенством (6.33), заключаем

$$4R^2 = \frac{1}{k^2} + \frac{(a^2 - r^2)^2}{\lambda^2}. \quad (6.34)$$

Из элементарной геометрии известно, что секущая AE делится окружностью с радиусом r в точке B так, что

$$AB \cdot AE = a^2 - r^2.$$

Но $AE = \lambda$, следовательно,

$$AB = \frac{a^2 - r^2}{\lambda}.$$

Теперь уравнение (6.34) можем переписать как

$$4R^2 = \frac{1}{k^2} + AB^2 = AC^2 + AB^2.$$

Геометрически это выражение означает, что диаметр окружности, описанной вокруг треугольника AOE , есть гипотенуза прямоугольного треугольника, одним из катетов которого является расстояние AB , а вторым

$$AC = \frac{1}{k} \equiv \frac{a}{\beta}. \quad (6.35)$$

Построив в точке A перпендикуляр к AB и отложив на нем $AC = k^{-1}$, получим треугольник ABC . Перенеся его вершину B в точку O и сохраняя параллельными соответствующие стороны, получим равный ему треугольник $A'OC'$, как показано на рис. 6.2.

6.5. Вращающийся диполь

Предположим, что два одинаковых заряда противоположного знака вращаются с постоянной угловой скоростью ω по круговым орбитам с радиусами a_1 и $a_2 > a_1$, как показано на рис 6.3. Для этих зарядов λ -функции определяются уравнениями

$$\lambda_1^2 = a_1^2 + r^2 - 2a_1 r \sin \vartheta \cos \psi_1, \quad (6.36)$$

$$\lambda_2^2 = a_2^2 + r^2 - 2a_2 r \sin \vartheta \cos \psi_2. \quad (6.37)$$

Если диполь вращается под действием сил электромагнитного притяжения и инерции, то точки равновесия, очевидно, не совпадают с положением зарядов, и движение по φ будет более сложным, чем предполагалось в уравнениях (6.36), (6.37). Эту задачу еще предстоит решить.

В случае статического диполя известно, что его потенциал равен нулю на плоскости, ортогональной прямой, соединяющей два заряда, и делящей эту прямую пополам. Определим, какой вид примет эта плоскость для вращающегося диполя.

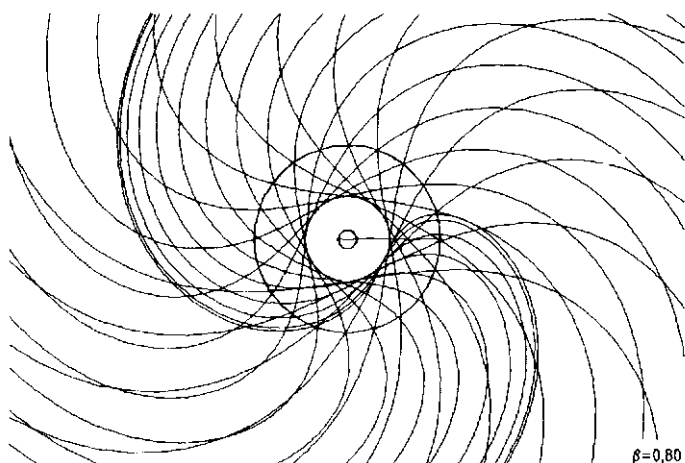


Рис. 6.3. Вращающийся диполь

Для этого в двух последних уравнениях положим

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \psi_1 = \psi, \quad \psi_2 = \psi + \pi.$$

Тогда, вычитая одно из другого уравнения (6.36) и (6.37), находим

$$2r \sin \vartheta \cos \psi = a_2 - a_1. \quad (6.38)$$

Отсюда заключаем, что должно всегда выполняться неравенство

$$r \geq \frac{|a_2 - a_1|}{2 \sin \vartheta}.$$

Выражение (6.38) позволяет "исключить" тригонометрические функции из уравнений (6.36) и (6.37), при этом из них находим

$$\lambda^2 = a_1 a_2 + r^2. \quad (6.39)$$

Теперь выражение (6.38) можем записать как

$$\varphi = \omega t \pm \arccos \frac{a_2 - a_1}{2r \sin \vartheta} - k \sqrt{r^2 + a_1 a_2}. \quad (6.40)$$

Последнее уравнение определяет две спирали, которые разделяют положительное и отрицательное значения скалярного потенциала.

Уравнение (6.40) при $r \gg a_1, a_2$ с хорошим приближением описывает, очевидно, две спирали Архимеда, сливающиеся в точке

$$2\rho \sin \vartheta = a_2 - a_1, \quad \varphi = \omega t - k\sqrt{\rho^2 + z^2 + a_1 a_2},$$

записанной в цилиндрической системе координат.

При $\vartheta = \pi/2$ или $z = 0$ минимальный радиус, для которого выполняется уравнение (6.37), равен

$$r_0 = a_2 - a_1.$$

При этом

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

и

$$\varphi - \omega t = -k \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Видно, что вращающийся диполь представляет собой довольно изолированную систему зарядов, потенциал которой на расстояниях от центра вращения $\rho \geq r_0$ в среднем равен нулю. Однако при значениях $\rho < r_0$ скалярный потенциал сохраняет знак на сколь угодно больших расстояниях по z .

6.6. Вектор Умова — Пойнтинга

Как известно, мощность излучения электромагнитной энергии определяется интегралом по сфере с достаточно большим радиусом r нормальной к поверхности сферы компоненты вектора Умова — Пойнтинга

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (6.41)$$

Из общих выражений для электрического и магнитного полей движущегося заряда (4.9), (4.10) после несложных преобразований находим

$$\mathbf{P} = \frac{ce^2}{4\pi\lambda^4} \left\{ \left[\left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right)^2 \beta^2 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \left(1 + \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right) \right] \mathbf{1} - \beta \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \right) \right\}. \quad (6.42)$$

Видно, что вектор $\mathbf{P}$ имеет две компоненты: нормальную к поверхности λ -сферы и параллельную скорости заряда, взятой, разумеется, в момент $t - \lambda/c$. Однако величина вектора $\mathbf{P}$ пропорциональна λ^{-4} , поэтому если траектория заряда ограничена, т.е. $|\mathbf{r}_c(t)| \leq r_m$, и точка наблюдения поля находится достаточно далеко, т.е. $r_m \ll r$, то $\lambda \approx r$ и согласно (7.2) мощность излучения движущегося заряда всегда равна нулю.

Иными словами, распределение собственного поля точечного заряда таково, что в нем отсутствуют так называемые волновые поля, амплитуда которых уменьшается с расстоянием как r^{-1} , уносящие электромагнитную энергию на сколь угодно большие расстояния от заряда.

Этот вывод диаметрально отличается от классического, где вектор $\mathbf{P}$ на достаточно больших расстояниях r (в волновой зоне) пропорционален r^{-2} и квадрату ускорения заряда, и потому движущийся с ускорением заряд всегда излучает энергию. Если это электрон, вращающийся в атоме, то он в конце концов падает на ядро — известная неустойчивость планетарной модели атома.

С другой стороны, этот вывод отвечает первому постулату Бора о том, что существуют некоторые стационарные состояния атома, находясь в которых, атом не излучает энергии. Следовательно, для излучающего заряда следует искать нестационарное состояние.

Отметим некоторые особенности светового излучения.

Прежде всего, угловая частота ω_l излучаемого атомом света равна, как известно,

$$\omega_l = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{N^2} - \frac{1}{M^2} \right),$$

где N, M — квантовые числа, а ω — угловая частота вращения электрона. Как видно из изложенного выше, частоты, равные ω , в поле вращающегося заряда отсутствуют.

Из оптики известно, что длительность излучения составляет примерно 10^{-8} с, т.е. линейная протяженность фотона порядка нескольких метров. Но из опытов по фотоэффекту следует, что фотон поглощается одним единственным электроном. Это заставляет предполагать, что пространственное распределение энергии фотона имеет очень узкую диаграмму направленности. Иными словами,

фотон полностью сосредоточен на линии, вдоль которой он движется. К таким объектам макромира относятся дымовые кольца. Существуют ли макроаналоги таких объектов и как они порождаются движущимся диполем — это вопросы, на которые сейчас нет ответа.

* * *

Как видно из предыдущего изложения, распределение потенциалов и полей вращающегося заряда радикально отличается от того, что имеет место в случае заряда, движущегося равномерно и прямолинейно.

При сверхсветовой линейной скорости одиночного вращающегося заряда скалярный потенциал наблюдается во всем пространстве, и конус Маха отделяет ту часть пространства, где потенциал однозначен, от той, в которой заряд создает два значения потенциала. Напомним, что при прямолинейном движении пространство также делится на две области, но в одной области потенциал вообще не создается рассматриваемым зарядом, и там мы полагали его равным нулю, а в другой имеет два значения.

Далее, скалярный потенциал досветового диполя также делит все пространство на две области: в одной значение скалярного потенциала положительно, а в другой — отрицательно. При этом граница между областями имеет вид спиральной поверхности, вращающейся синхронно с вращением диполя. В результате в большей части пространства потенциал в среднем равен нулю, однако в бесконечном цилиндре диаметром $|a_1 - a_2|$ скалярный потенциал сохраняет знак того из зарядов диполя, который вращается по окружности меньшего радиуса.

Показано, что потенциалы вращающегося досветового диполя на больших расстояниях r от центра вращения убывают как r^{-2} , а поля еще быстрее — как r^{-3} . Поэтому такая система движущихся зарядов не имеет волновых полей, убывающих как r^{-1} , и ожидать от нее обычного дипольного излучения не приходится.

В то же время форма распределения скалярного потенциала вращающегося диполя и особенно эксперименты по фотоэффекту позволяют высказать предположение, что излучение электромагнитной энергии диполем происходит в форме колец (или спиралей) с диаметром порядка

диаметра орбиты электрона. При этом излучение сохраняет свои поперечные размеры, распространяясь на сколько угодно большие расстояния: только это предположение позволит объяснить, почему фотон на любом расстоянии поглощается одним электроном.

Заряженная сфера

Пушки к бою едут задом . . .

А. Твардовский

Перейдем от точечного заряда к распределенным зарядам конечных размеров. При вычислении полей распределенных зарядов полагаем, что последние состоят из совокупности точечных зарядов, каждый из которых создает в точке наблюдения элементарный потенциал в виде сферической волны. Результирующий потенциал в этой точке находим, суммируя элементарные согласно принципу суперпозиции. Справедливость принципа суперпозиции для такой нелинейной задачи, как уже говорилось выше, нельзя обосновать, исходя из самой задачи. Только опыт является основанием для применения этого принципа.

Разумеется, в результате суммирования изменяется правая часть дифференциальных уравнений (4.3) и (4.5), которым будут отвечать найденные потенциалы. Проследить за этим изменением и является одной из задач изучения полей распределенных зарядов.

Ниже рассмотрено поле движущейся равномерно и прямолинейно сферы с постоянной поверхностной плотностью заряда. [23] Такая сфера представляет, по-видимому, простейший пример заряда конечных размеров, имеющий аналитическое решение, по крайней мере, для случая $\beta \leq 1$.

Показано, что ее скалярный и векторный потенциалы остаются конечными в любой точке пространства и при любой скорости движения. На расстояниях от центра сферы, значительно превышающих ее радиус, ее поле приближается к полю точечного заряда. Это позволяет, с одной стороны, сверить полученные формулы с соответствующими формулами для точечного заряда, а с другой — показать, что единственная оставшаяся в гл. V сингулярность потенциалов связана именно с предположением о точеч-

ности заряда. При сверхсветовых скоростях такая сфера позволяет изучить "микроструктуру" конуса Маха, хотя в этом случае потребуются расчеты на компьютере.

Существо задачи не изменится, если взять сферу с постоянной объемной плотностью заряда, но при этом значительно усложнятся и без того громоздкие формулы.

7.1. Алгоритм решения задачи

В произвольной точке N с координатами (x, y, z) в момент времени t ищем потенциалы, созданные зарядом e сферы с радиусом a , или a -сферы, с постоянной поверхностной плотностью заряда

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a^2}, \quad (7.1)$$

движущейся равномерно и прямолинейно со скоростью v вдоль оси x . Полагаем, что плотность заряда на сфере не изменится даже в том случае, если на ее поверхности появится разность потенциалов, т.е. рассматриваем *диэлектрическую* заряженную сферу.

Очевидно, что произвольная точка, имеющая координаты (ξ, η, ζ) и находящаяся на поверхности a -сферы, в любой момент времени t' удовлетворяет уравнению

$$a^2 = (\xi - vt')^2 + \eta^2 + \zeta^2. \quad (7.2)$$

Разумеется, координаты (ξ, η, ζ) откладываются на тех же декартовых осях, что и (x, y, z) , но они принадлежат поверхности a -сферы, и, чтобы подчеркнуть это, для них выбраны буквы греческого алфавита.

Поверхность a -сферы разобьем на отдельные бесконечно малые участки, и скалярный потенциал в точке N будем искать как сумму потенциалов, созданных этими участками.

Как видно из предыдущего, такое суммирование возможно лишь при условии, что возмущения от этих участков приходят в точку N *одновременно*. Это условие означает, что в каждом из бесконечно малых участков поверхности движущейся сферы электромагнитные возмущения

создаются, вообще говоря, в различные моменты времени t' , однако эти моменты должны быть такими, чтобы обеспечивали синхронный приход всех создаваемых сферой возмущений в точку N в момент t . Поэтому первой задачей является отыскание синхронных моментов t' для каждого участка поверхности a -сферы.

Для этого представим, что в точке N в момент t создана короткая световая вспышка, "направленная" в прошлое. Тогда эта вспышка, падая на поверхность a -сферы, последовательно осветит на ней группы участков, на которые падает свет в один и тот же определенный момент t' . В следующий момент времени вспышка, переместившись, осветит уже другую, соседнюю синхронную группу бесконечно малых участков поверхности a -сферы.

Верно и обратное утверждение, что электромагнитные возмущения, созданные отдельными точками такой синхронной группы в момент t' , придут в точку N точно в момент t . Суммируя в точке N возмущения отдельных участков синхронной группы на поверхности a -сферы, а затем суммируя по группам полученные суммы, найдем результирующее возмущение в точке N в момент t . Последнее представится в виде двойного интеграла по поверхности a -сферы.

С этой целью вокруг точки N строим сферу с радиусом λ , или λ -сферу, причем

$$\lambda = c(t - t'),$$

а t и t' удовлетворяют условию причинности (2.1), означающему, что всегда $t > t'$. Произвольная точка на λ -сфере задается уравнением

$$\lambda^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2. \quad (7.3)$$

Решив совместно (7.2) и (7.3), найдем множество значений λ , таких, что любое λ из этого множества удовлетворяет неравенствам

$$\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2. \quad (7.4)$$

Возьмем две λ -сферы с радиусами, отличающимися на бесконечно малую величину $d\lambda$, и обозначим через $dS(\lambda)$ бесконечно малую площадку на a -сфере, заключенную между выбранными λ -сферами. Находящийся на этой

площадке бесконечно малый заряд $\sigma dS(\lambda)$ будем считать точечным, так что каждая его часть создает эквипотенциальные поверхности, синхронно приходящие в точку наблюдения N и создающие в ней, согласно расширенному принципу Гюйгенса, бесконечно малый скалярный потенциал

$$d\Phi = \frac{\sigma dS(\lambda)}{\lambda}.$$

Тогда, воспользовавшись, как и в разд. 5.5, принципом суперпозиции, найдем, что весь заряд e , находящийся на a -сфере, создает в точке N потенциал

$$\Phi = \int_{S_e} d\Phi = \int_{S_e} \frac{\sigma}{\lambda} dS(\lambda). \quad (7.5)$$

Под площадью S_e понимается та часть площади a -сферы, которая покрывается множеством (7.4). Условимся называть ее видимой частью поверхности a -сферы.

Таким образом, изложенный выше алгоритм вычисления скалярного потенциала a -сферы сводится к следующим операциям:

- поверхность a -сферы разбивается на бесконечно малые участки;
- из участков формируются синхронные группы, такие, что электромагнитное возмущение от каждого участка данной группы приходит в точку N в одно и то же время;
- интегрируются потенциалы, созданные участками синхронной группы при $\lambda = \text{const}$;
- интегрируются потенциалы, созданные в точке N синхронными группами при $\lambda = \text{var}$.

При отыскании векторного потенциала $\mathbf{A}$ необходимо также учитывать то обстоятельство, что единичный вектор $\mathbf{l}(\lambda)$ имеет различную ориентацию от участка к участку внутри каждой синхронной группы, поэтому для векторного потенциала вычисляем следующий интеграл:

$$\mathbf{A} = \int_{S_e} \frac{\sigma \mathbf{l}(\lambda)}{\lambda} dS(\lambda). \quad (7.6)$$

Здесь как dS , так и $\mathbf{l}$, помимо λ , определяются также и другими координатами на поверхности α -сферы.

7.2. Общие точки α - и λ -сфер

Для реализации изложенного выше алгоритма найдем прежде всего общие точки α - и λ -сфер. Для этого перепишем первый член уравнения (7.2) как

$$\xi - vt' = \xi_1.$$

В уравнении (7.3) также сделаем замену переменных

$$\xi - x = \xi_1 + vt' - x = \xi_1 - \tilde{x} - \beta\lambda,$$

т.е. выполним параллельный перенос начала системы координат. В последнем соотношении через $\tilde{x}$ обозначено

$$\tilde{x} = x - vt.$$

После этого уравнения (7.2), (7.3) примут вид

$$a^2 = \xi_1^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad (7.7)$$

$$\lambda^2 = (\xi_1 - \tilde{x} - \beta\lambda)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2. \quad (7.8)$$

Теперь центр α -сферы находится в начале координат и остается неподвижным, а центр λ -сферы — в точке $(\tilde{x} + \beta\lambda, y, z)$ и с ростом λ движется со скоростью β . Расстояние¹ c между этими центрами равно

$$c = \sqrt{(\tilde{x} + \beta\lambda)^2 + y^2 + z^2}. \quad (7.9)$$

Прежние координаты (ξ_1, η, ζ) выразим теперь через новые (ξ_2, η_2, ζ_2) с помощью матрицы поворота осей координат

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\tilde{x} + \beta\lambda}{c} & -\frac{\rho}{c} & 0 \\ \frac{y}{c} & y\frac{\tilde{x} + \beta\lambda}{\rho c} & -\frac{z}{\rho} \\ \frac{z}{c} & z\frac{\tilde{x} + \beta\lambda}{\rho c} & \frac{y}{\rho} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{vmatrix}, \quad (7.10)$$

¹Здесь и далее на протяжении всей этой главы под c понимается расстояние между центрами сфер, а не скорость света, как в остальной части книги.

где $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$. Покажем, что эта матрица (обозначим ее σ) действительно представляет собой матрицу, осуществляющую ортогональное преобразование системы координат. Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x} + \beta\lambda}{c} &= \cos \alpha, & \frac{\rho}{c} &= \sin \alpha, \\ \frac{y}{\rho} &= \cos \varphi, & \frac{z}{\rho} &= \sin \varphi. \end{aligned}$$

Тогда матрица σ принимает вид

$$\sigma = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha \cos \varphi & \cos \alpha \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \alpha \sin \varphi & \cos \alpha \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

При этой форме нетрудно установить, что

$$\sigma = \sigma_{\varphi} \sigma_{\alpha},$$

где

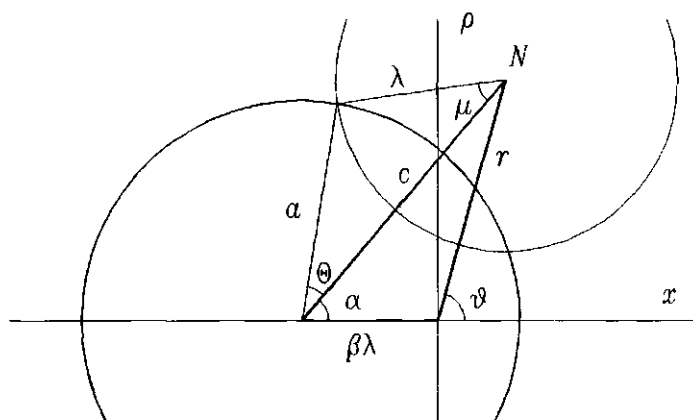
$$\sigma_{\varphi} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}, \quad \sigma_{\alpha} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подставляя поочередно в уравнения (7.7) и (7.8) прежние координаты (ξ_1, η, ζ) , выраженные через новые (ξ_2, η_2, ζ_2) , приводим эти уравнения к виду

$$\begin{aligned} a^2 &= \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2, \\ \lambda^2 &= \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 + c^2 - 2c\xi_2. \end{aligned}$$

Общие координаты рассматриваемых сфер обозначим индексом 0, тогда из последних равенств находим

$$\xi_0 = \frac{a^2 + c^2 - \lambda^2}{2c}, \quad (7.11)$$

Рис. 7.1. Треугольник встречи a - и λ -сфер

$$\eta_0^2 + \zeta_0^2 = \frac{2(a^2c^2 + a^2\lambda^2 + c^2\lambda^2) - a^4 - c^4 - \lambda^4}{4c^2}. \quad (7.12)$$

Отсюда следует известный из элементарной геометрии факт, что точки пересечения двух сфер лежат в одной плоскости ($\xi_0 = \text{const}$) и образуют окружность с радиусом, квадрат которого определяется равенством (7.12).

7.3. Область существования треугольника встречи

В числителе (7.12) нетрудно узнать формулу Герона для площади треугольника со сторонами (a, c, λ) , который, как и выше, назовем треугольником встречи a - и λ -сфер. Этот треугольник показан на рис. 7.1.

Разумеется, его стороны должны удовлетворять очевидным неравенствам

$$-a + c + \lambda \geq 0, \quad a - c + \lambda \geq 0, \quad a + c - \lambda \geq 0,$$

определяющим область существования общих точек a - и λ -сфер или область существования треугольника встречи (ОСТВ).

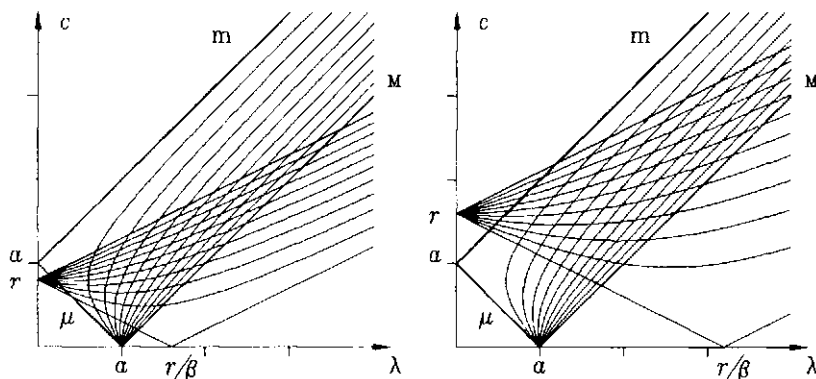


Рис. 7.2. Область существования треугольника встречи a - и λ -сфер при $\beta < 1$

Обратив приведенные выше неравенства в равенства, найдем границы этой области

$$c_m = a + \lambda_m, \quad c_\mu = -\lambda_\mu + a, \quad c_m = \lambda_m - a. \quad (7.13)$$

На плоскости (λ, c) эти границы, совместно с очевидными условиями

$$c > 0, \quad \lambda > 0,$$

определяют полубесконечную полосу шириной $a\sqrt{2}$ с m -, μ - и m -границами или вырожденный треугольник с двумя прямыми углами при вершинах. Две его вершины при прямых углах имеют координаты $(0, a)$ и $(a, 0)$, а третья находится в бесконечно удаленной точке, как видно из рис. 7.2.

Подставляя в (7.13) поочередно $c(\lambda)$ из (7.9), получим квадратные уравнения, определяющие граничные значения λ .

Запишем координаты точки наблюдения N в сферической системе координат:

$$\tilde{x} = x - vt = r \cos \vartheta,$$

$$y = r \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$z = r \sin \vartheta \sin \varphi.$$

После чего уравнение (7.9) можем представить в виде

$$c^2 - (\beta\lambda + r \cos \vartheta)^2 = r^2 \sin^2 \vartheta. \quad (7.14)$$

В этом уравнении условимся считать $r = \text{const}$ и ϑ — параметр. Тогда на плоскости (λ, c) (7.14) задает пучок ϑ -гипербол, также заполняющий полубесконечную полосу или вырожденный косоугольный треугольник. Такая полоса представлена на рис. 7.2 для случая $r < a$ и $\beta < 1$. Одна из вершин этого треугольника находится в точке $(0, r)$, и угол при ней равен $2 \arctg \beta$, вторая, соответственно, в точке $(r/\beta, 0)$ и $(\pi - 2 \arctg \beta)$, а третья — на бесконечности. Эта полоса покрывается "траекториями" λ -сферы на плоскости (λ, c) , представляющими собой ϑ -гиперболаы. Пересечение каждой из ϑ -гипербол с границами ОСТВ определяет граничные значения λ в (7.4) для точки наблюдения с координатами r и ϑ .

7.4. Видимая площадь поверхности сферы

Полученные выше общие точки a - и λ -сфер запишем также в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= a \cos \theta, \\ \eta_0 &= a \sin \theta \cos \phi, \\ \zeta_0 &= a \sin \theta \sin \phi. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Тогда из (7.11) находим

$$\cos \theta = \frac{a^2 + c^2 - \lambda^2}{2ac}. \quad (7.16)$$

Подставив в (7.10) вместо (ξ_2, η_2, ζ_2) соответствующие значения из (7.15), получим

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta \cos \phi), \\ \eta &= a[(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta \cos \phi) \cos \varphi - \\ &\quad - \sin \theta \sin \phi \sin \varphi], \\ \zeta &= a[(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta \cos \phi) \sin \varphi + \\ &\quad + \sin \theta \cos \phi \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Здесь введены обозначения

$$\cos \alpha = \frac{\tilde{x} + \beta \lambda}{c}, \quad (7.18)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{y}. \quad (7.19)$$

Таким образом, мы получили параметрическое представление любой точки на a -сфере, общей с точками λ -сферы. Независимыми параметрами в этом представлении являются λ и ϕ , так как угол φ определяется только координатами y и z точки наблюдения поля N , а углы α и θ являются функциями λ .

Для вычисления площади поверхности, заданной параметрически, необходимо, как известно, найти коэффициенты так называемой первой квадратичной формы поверхности в таком представлении:

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \right)^2, \\ F &= \frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \xi_1}{\partial \phi} + \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi}, \\ G &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \right)^2. \end{aligned}$$

Выполнив соответствующие довольно громоздкие, но простые вычисления, находим искомые коэффициенты

$$\begin{aligned} E &= a^2 [\alpha'^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + (\theta' + \alpha' \cos \phi)^2], \\ F &= -a^2 \alpha' \sin \theta \cos \theta \sin \phi, \\ G &= a^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (7.20)$$

где

$$\theta' = \theta'(\lambda) = \frac{d\theta}{d\lambda}, \quad \alpha' = \alpha'(\lambda) = \frac{d\alpha}{d\lambda}.$$

Отсюда находим общее выражение для дифференциального элемента площади a -сферы

$$dS(\lambda, \phi) = \sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin \theta (\theta' + \alpha' \cos \phi) d\lambda d\phi. \quad (7.21)$$

Обозначим через μ угол треугольника встречи, противолежащий стороне a . Тогда, дифференцируя по λ выражения (7.16) и (7.18), определяющее $\cos \alpha$, находим

$$\theta' = \frac{1 - \beta \cos \alpha \cos \mu}{c \sin \mu}, \quad \alpha' = -\frac{\beta \sin \alpha}{c}.$$

Пользуясь этими выражениями, найдем, что круглая скобка в (7.21) обращается в нуль, если выполняется соотношение

$$\cos \phi = -\frac{\theta'}{\alpha'} = \frac{1 - \beta \cos \alpha \cos \mu}{\beta \sin \alpha \sin \mu}. \quad (7.22)$$

Пусть здесь $\cos \phi = \pm 1$, тогда из выражения (7.22) находим

$$\cos(\alpha \pm \mu) = \frac{1}{\beta}.$$

Следовательно, дифференциальный элемент площади поверхности a -сферы в (7.21) всегда сохраняет знак, если $\beta < 1$, и проходит через нуль, меняя знак, только при сверхсветовой скорости.

Пусть $\beta < 1$, тогда ϕ изменяется в пределах от 0 до 2π , и, интегрируя (7.21), находим

$$\begin{aligned} S_e &= a^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \int_0^{2\pi} \sin \theta (\theta' + \alpha' \cos \phi) d\phi = \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{\theta(\lambda)} \sin \theta \theta' d\lambda = 2\pi a^2 \cos \theta(\lambda) \Big|_{\lambda_2}^{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Если граничные λ таковы, что

$$\cos \theta(\lambda_1) = 0,$$

то

$$S_e = 2\pi a^2 (1 - \cos \theta(\lambda_2)),$$

т.е. получили формулу площади шарового сегмента из элементарной геометрии.

Вводя нормированную площадь $s = S_e/(2\pi a^2)$, перепишем последнее выражение как

$$\lambda^2 - [c - a(1 - s)]^2 = a^2 s(2 - s). \quad (7.23)$$

Рассматривая в этом уравнении s как фиксированный параметр, находим, что на плоскости (λ, c) оно представляет уравнение пучка равнобоковых гипербол, заполняющих полосу существования треугольника встречи, при этом на m - и μ -границах $s = 0$, а на m -границе $s = 2$ (см. рис. 7.2.).

Если ϑ -гиперболы, задаваемые уравнением (7.14), пересекают ОСТВ через μ -границу, как показано на рис. 7.2, то выполняется равенство

$$\lambda_1 = \lambda_\mu = a - c_\mu,$$

и приведенная выше формула дает $S_e = 0$. К такому же результату придем, если в качестве λ_1 возьмем λ_m . Но для

$$\lambda_2 = \lambda_m = c_m + a$$

из той же формулы следует, что $S_e = 4\pi a^2$. Таким образом, при $\beta < 1$ видимой оказывается вся площадь поверхности a -сферы, при больших значениях β дело обстоит иначе, но об этом речь ниже.

7.5. Общие формулы для потенциалов

Займемся теперь вычислением искомых потенциалов движущейся заряженной сферы.

7.5.1. Скалярный потенциал

Подставим (7.1) и (7.21) в (7.5) и найдем общее выражение для двойного интеграла, которым определяется скалярный потенциал:

$$\Phi = \frac{e}{4\pi} \int_{S_e} \frac{\theta' + \alpha' \cos \phi}{\lambda} \sin \theta \, d\lambda \, d\phi.$$

Полагая, что $\phi = 0 \div 2\pi$, что равносильно условию $\beta < 1$, после интегрирования по ϕ в пределах "синхронной" группы бесконечно малых элементов поверхности a -сферы сведем этот двойной интеграл к однократному

$$\Phi = \frac{e}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sin \theta}{\lambda} \theta' d\lambda = -\frac{e}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d \cos \theta}{\lambda}.$$

Интегрируя далее "по частям", имеем

$$\Phi = -\frac{e}{2} \left(\frac{\cos \theta}{\lambda} \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\cos \theta}{\lambda^2} d\lambda \right).$$

Подставив сюда $\cos \theta$ из (7.16) и s из (7.9) и проинтегрировав, находим общую формулу для скалярного потенциала при $\beta < 1$:

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{e}{4a} \left[\lambda \frac{r^2 + \beta^2 a^2}{cr^2} + 2\beta \tilde{x} \frac{a^2}{cr^2} + \right. \\ \left. + \frac{1 - \beta^2}{\beta} \tilde{\alpha} + \beta \tilde{x} \frac{r^2 - a^2}{r^3} \tilde{\gamma} \right] \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{\alpha} = \text{Arsh} \frac{\tilde{x} + \beta \lambda}{\rho} = \ln \left(\text{ctg} \frac{\alpha}{2} \right), \quad \Pi(\tilde{\alpha}) = \alpha,$$

$$\tilde{\gamma} = \text{Arsh} \frac{r^2 + \beta \lambda \tilde{x}}{\beta \lambda \rho} = \ln \left(\text{ctg} \frac{\gamma}{2} \right), \quad \Pi(\tilde{\gamma}) = \gamma,$$

где $\Pi(x)$ — угол параллельности Лобачевского [24].

Углы α и γ — углы в треугольнике со сторонами $(r, c, \beta \lambda)$ (см. рис. 7.1), противолежащие сторонам r и $\beta \lambda$ соответственно, и между ними всегда выполняется равенство

$$\alpha + \gamma = \vartheta,$$

следовательно,

$$\Pi(\tilde{\alpha}) + \Pi(\tilde{\gamma}) = \vartheta.$$

Значения $\lambda_1(\tilde{x}, y, z)$ и $\lambda_2(\tilde{x}, y, z)$ еще подлежат определению; подстановка же их в (7.24) даст нам искомое решение $\Phi(x - vt, y, z)$.

7.5.2. Векторный потенциал

Общая формула, аналогичная (7.24), для векторного потенциала несколько сложнее, т.к. интегрируется векторная величина, однако вывод ее остается таким же.

Прежде всего, следует заметить, что в силу единичности вектора $\mathbf{l}$ в любой точке N справедливо следующее соотношение:

$$A_{x,y,z} \leq \Phi$$

для любой компоненты вектора $\mathbf{A}$. Поэтому векторный потенциал остается конечным, если конечность потенциала Φ доказана.

Скалярным уравнениям (7.7), (7.8) и (7.9) соответствуют векторные

$$\mathbf{a} = i\xi_1 + j\eta + k\zeta, \quad (7.25)$$

$$\mathbf{l} = i \frac{\tilde{x} + \beta\lambda - \xi_1}{\lambda} + j \frac{y - \eta}{\lambda} + k \frac{z - \zeta}{\lambda}, \quad (7.26)$$

$$\mathbf{c} = i(\tilde{x} + \beta\lambda) + jy + kz. \quad ; \quad (7.27)$$

Здесь вектор $\mathbf{a}$ строится из центра a -сферы в произвольную точку на ее поверхности, вектор $\mathbf{c}$ — из центра a -сферы в точку наблюдения N , а единичный вектор $\mathbf{l}$ — ортогонально λ -сфере (с центром в точке N) в точке a -сферы, общей с λ -сферой.

Между этими векторами всегда выполняется равенство

$$\lambda \mathbf{l} = \mathbf{c} - \mathbf{a}.$$

В результате векторный потенциал определится интегралом

$$\mathbf{A} = \int_{S_c} \frac{\sigma \mathbf{l}}{\lambda} dS(\lambda, \phi). \quad (7.28)$$

Подставим сюда ξ_1 , η , ζ из (7.17) и dS — из (7.21), тогда

$$A_x = \int \frac{e \sin \theta d\lambda}{4\pi\lambda^2} \int [\tilde{x} + \beta\lambda - a(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta \cos \phi)](\theta' + \alpha' \cos \phi) d\phi,$$

$$A_y = \int \frac{e \sin \theta d\lambda}{4\pi\lambda^2} \int [y - a(\sin \alpha \cos \varphi \cos \theta + \cos \alpha \cos \varphi \sin \theta \cos \phi - \sin \varphi \sin \theta \sin \phi)](\theta' + \alpha' \cos \phi) d\phi,$$

$$A_z = \int \frac{e \sin \theta d\lambda}{4\pi\lambda^2} \int [z - a(\sin \alpha \sin \varphi \cos \theta + \cos \alpha \cos \varphi \sin \theta \cos \phi - \sin \varphi \sin \theta \sin \phi)](\theta' + \alpha' \cos \phi) d\phi.$$

Выполняя умножение в подынтегральном выражении для A_x и интегрируя затем его по $\phi = 0 \div 2\pi$, т.е. полагая, что $\beta < 1$, получаем

$$A_x = \frac{e}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[(\tilde{x} + \beta\lambda) \theta' \sin \theta - a \theta' \cos \alpha \cos \theta \sin \theta + \right. \\ \left. + \frac{a}{2} \alpha' \sin \alpha \sin^2 \theta \right] \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Два последних члена в квадратной скобке этого выражения допускают дальнейшее интегрирование. Действительно, очевидное равенство

$$\frac{a}{\lambda^2} (-\theta' \cos \alpha \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{2} \alpha' \sin \alpha \sin^2 \theta) d\lambda = \\ = -\frac{a}{2\lambda^2} d(\cos \alpha \sin^2 \theta)$$

позволяет выполнить интегрирование "по частям". Поэтому с учетом граничных условий

$$\sin \theta(\lambda_1) = \sin \theta(\lambda_2) = 0,$$

справедливость которых при $\beta < 1$ показана ниже, получаем

$$A_x = \frac{e}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [(\tilde{x} + \beta\lambda)\theta' - \frac{a}{\lambda} \cos \alpha \sin \theta] \sin \theta \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Выполнив аналогичные операции в двух других интегралах, имеем

$$A_y = \frac{e}{2} \cos \varphi \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\rho\theta' - \frac{a}{\lambda} \sin \alpha \sin \theta) \sin \theta \frac{d\lambda}{\lambda^2},$$

$$A_z = \frac{e}{2} \sin \varphi \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\rho\theta' - \frac{a}{\lambda} \sin \alpha \sin \theta) \sin \theta \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Отсюда видно, что векторный потенциал имеет вращательную симметрию относительно оси $\tilde{x}$, что позволяет вместо двух декартовых компонент A_y и A_z ввести одну — A_ρ в цилиндрической системе координат² (ось ρ ортогональна оси x , выполняющей роль оси z в стандартной цилиндрической системе координат):

$$A_\rho = \frac{e}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\rho\theta' - \frac{a}{\lambda} \sin \alpha \sin \theta) \sin \theta \frac{d\lambda}{\lambda^2},$$

$$A_x = \frac{e}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [(\tilde{x} + \beta\lambda)\theta' - \frac{a}{\lambda} \cos \alpha \sin \theta] \sin \theta \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Заменив здесь

$$\tilde{x} + \beta\lambda = c \cos \theta, \quad \rho = c \sin \theta,$$

²В этой главе в цилиндрической системе координат наряду со стандартными координатами ρ , ϕ и $z = \tilde{x}$ используется также координата $r = \sqrt{\tilde{x}^2 + \rho^2}$, что позволяет записать формулы более компактно.

дважды воспользовавшись теоремой синусов

$$\frac{\sin \theta}{\lambda} = \frac{\sin \mu}{a}$$

и учитывая также выражение (7.22) для производной θ' (см. разд. 7.5), находим

$$A_\rho = \frac{e}{2a} \int \sin \alpha \cos \mu (\cos \mu - \beta \cos \alpha) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$A_x = \frac{e}{2a} \int \cos \alpha \cos \mu (\cos \mu - \beta \cos \alpha) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Подставляя сюда выражения соответствующих функций через λ и $c(\lambda)$ из (7.9), получаем

$$\begin{aligned} A_\rho &= \frac{e\rho}{8a} \int (c^2 + \lambda^2 - a^2) [(1 - \beta^2)\lambda^2 + r^2 - a^2] \frac{d\lambda}{c^3\lambda^3}, \\ A_x &= \frac{e}{8a} \int (\tilde{x} + \beta\lambda)(c^2 + \lambda^2 - a^2) [(1 - \beta^2)\lambda^2 + \\ &\quad + r^2 - a^2] \frac{d\lambda}{c^3\lambda^3}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Из предыдущего видно, что для нахождения векторного потенциала необходимо вычислить интегралы (7.29), что и завершит решение задачи этого раздела. Формулы (7.29) можно представить как суммы пяти интегралов от функций вида λ^n/c^3 ; так, для компоненты A_ρ имеем

$$\begin{aligned} A_\rho &= \frac{e\rho}{8a} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\lambda \frac{1 - \beta^4}{c^3} + 2\beta\tilde{x} \frac{1 - \beta^2}{c^3} + 2 \frac{r^2 - a^2}{\lambda c^3} + \right. \\ &\quad \left. + 2\beta\tilde{x} \frac{r^2 - a^2}{\lambda^2 c^3} + \frac{(a^2 - r^2)^2}{\lambda^3 c^3} \right] d\lambda. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Подставив сюда из приложения 1 соответствующие интегралы и приведя подобные члены, находим

$$A_\rho = \frac{e\rho}{8a} \sum_{i=1}^6 p_i \delta_i. \quad (7.31)$$

Здесь коэффициенты p_i — приведенные ниже функции координат точки наблюдения поля, радиуса и скорости a -сферы, а δ_i — разности записанных ниже граничных функций λ и c . Хотя A_p определяется суммой пяти различных функций λ и c , формула (7.30) записана для шести членов, с тем чтобы сохранить однотипные обозначения граничных δ_i для обеих компонент векторного потенциала.

После приведения подобных членов коэффициенты p_i примут вид:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \beta \tilde{x} \left(\frac{m}{r^2} - \frac{n}{\rho^2} \right) = \beta \tilde{x} p_0, \\
 p_2 &= \tilde{x}^2 \left(\frac{m}{r^2} - \frac{n}{\rho^2} \right) + p'_2 = \tilde{x}^2 p_0 + p'_2, \\
 p'_2 &= -\frac{1 - \beta^4}{\beta^2} - r p_6, \\
 p_3 &= \frac{\beta \tilde{x}}{2r^4} (r^2 - 5a^2), \\
 p_4 &= -\frac{1}{2r^2}, \\
 p_5 &= 0, \\
 p_6 &= -\frac{r^2 - a^2}{r^3} \left[2 - 6\beta^2 \frac{\tilde{x}^2}{r^2} + 3\beta^2 (r^2 - a^2) \frac{4\tilde{x}^2 - \rho^2}{2r^4} \right].
 \end{aligned} \tag{7.31a}$$

Разумеется, эти коэффициенты-функции сохраняют свой вид при переходе из одной области пространства в другую, хотя их значения при этом изменяются.

Граничные функции δ_i имеют вид

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \frac{\lambda_2}{c_2} - \frac{\lambda_1}{c_1}, \\
 \delta_2 &= \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}, \\
 \delta_3 &= \frac{r^2 - a^2}{\lambda_2 c_2} - \frac{r^2 - a^2}{\lambda_1 c_1}, \\
 \delta_4 &= \frac{(r^2 - a^2)^2}{\lambda_2^2 c_2} - \frac{(r^2 - a^2)^2}{\lambda_1^2 c_1},
 \end{aligned} \tag{7.31b}$$

$$\begin{aligned}\delta_5 &= \tilde{\alpha}(\lambda_2) - \tilde{\alpha}(\lambda_1), \\ \delta_6 &= \tilde{\gamma}(\lambda_2) - \tilde{\gamma}(\lambda_1).\end{aligned}$$

Эти функции вычисляются отдельно для каждой области как приведенные выше разности при соответствующих граничных значениях λ .

В (7.31a) под величинами m и n понимаются

$$\begin{aligned}m &= \frac{3}{2}\beta^2(1-\alpha^2)(1-5\alpha^2), \\ n &= \frac{(1-\beta^2a\alpha^2)^2}{\beta^2}, \quad \alpha = \frac{a}{r}.\end{aligned}\tag{7.31c}$$

Компонента A_x векторного потенциала представляется формулой, подобной формуле (7.30), так же, как сумма пяти интегралов:

$$\begin{aligned}A_x &= \frac{\tilde{x}}{\rho}A_\rho + \frac{\beta e}{8a} \int \left[\lambda^2 \frac{1-\beta^4}{c^3} + 2\beta\tilde{x}\lambda \frac{1-\beta^2}{c^3} + \right. \\ &\quad \left. + 2\beta \frac{r^2-a^2}{c^3} - 2\beta\tilde{x} \frac{r^2-a^2}{\lambda c^3} + \frac{(r^2-a^2)^2}{\lambda^2 c^3} \right] d\lambda.\end{aligned}$$

Подставив сюда соответствующие интегралы из приложения 1 и приведя подобные члены, получим следующее общее выражение для компоненты A_x :

$$A_x = \frac{\tilde{x}}{\rho}A_\rho + \frac{\beta e}{8a} \sum_{i=1}^6 q_i \delta_i.\tag{7.32}$$

Коэффициенты-функции q_i в этом выражении для компоненты A_x имеют вид

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{\beta\tilde{x}^2}{\rho^2}n - \frac{1-\beta^4}{\beta} + 2\beta \frac{r^2-a^2}{r^2} \left(1 - \beta^2 \frac{r^2-a^2}{r^2} \right), \\ q_2 &= \frac{\tilde{x}r^2}{\rho^2}n - 2rq_6, \\ q_3 &= -\beta \frac{r^2-a^2}{r^2},\end{aligned}$$

$$q_4 = 0, \quad (7.32a)$$

$$q_5 = \frac{1 - \beta^4}{\beta^2},$$

$$q_6 = \frac{\beta^2 \tilde{x}}{r^5} (r^2 - a^2)(r^2 - 3a^2).$$

Здесь n то же, что и выше для коэффициентов p_i , и для A_x все функции δ_i те же, что и для компоненты A_ρ .

В эти общие формулы остается подставить граничные значения λ , чтобы найти окончательные формулы для потенциалов движущейся сферы. Следует отметить, что в таком общем виде коэффициенты-функции p_i и q_i имеют особенности в нуле по таким переменным, как ρ , r и β . Но так обстоит дело только на первый взгляд, в дальнейшем все эти особенности, как увидит читатель, исключаются по тем или иным причинам.

Общую формулу (7.24) для скалярного потенциала можно также записать в виде, подобном виду формул для компонент векторного потенциала:

$$\Phi = \frac{e}{4a} \sum_{i=1}^6 f_i \delta_i, \quad (7.33)$$

где коэффициенты f_i суть следующие функции:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{r^2 + \beta^2 a^2}{r^2}, & ; \\ f_2 &= 2\beta \tilde{x} \frac{a^2}{r^2}, \\ f_3 &= 0, \\ f_4 &= 0, & (7.33a) \\ f_5 &= \frac{1 - \beta^2}{\beta}, \\ f_6 &= \beta \tilde{x} \frac{r^2 - a^2}{r^3}, \end{aligned}$$

и граничные функции δ_i те же, что и для компонент векторного потенциала.

Таким образом, в общем виде скалярный потенциал Φ определяется формулой (7.24) или (7.33), а компоненты векторного потенциала — формулами (7.31) и (7.32) с определениями (7.31a), (7.31b), (7.31c), (7.32a) и (7.33a).

7.5.3. Векторный потенциал при $\beta = 0$

Скалярный потенциал неподвижной заряженной равномерно по поверхности сферы с радиусом a известен из электростатики, а именно

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_{01} = \frac{e}{a}, & \text{если } r \leq a, \\ \Phi_{02} = \frac{e}{r}, & \text{если } r \geq a. \end{cases} \quad (7.34)$$

Условимся обозначать потенциал двумя цифровыми индексами, из которых первый указывает на величину скорости (в данном случае для неподвижной сферы этот индекс равен нулю), а второй — на область пространства, в которой определен потенциал (1 — внутри a -сферы и 2 — вне ее). Если $r = a$, то

$$\Phi_{01} = \Phi_{02}.$$

Следовательно, скалярный потенциал описывается непрерывным образом во всем пространстве. При $r \geq a$ скалярный потенциал покоящейся сферы совпадает с потенциалом неподвижного точечного заряда. Ниже будет показано (см. разд. 7.7.2), что общая формула (7.24) приводит именно к такому результату.

Векторный потенциал неподвижного точечного заряда, как мы видели, не равен нулю в отличие от ПЛВ. Для дальнейшего полезно получить выражения для векторного потенциала неподвижной сферы, чтобы было с чем сравнивать формулы, которые мы получим для движущейся сферы.

С этой целью в выражении для интеграла I положим $\beta = 0$, тогда компоненты векторного потенциала принимают особенно простой вид:

$$A_\rho = \frac{e\rho}{8a} \int (r^2 + \lambda^2 - a^2)^2 \frac{d\lambda}{r^3 \lambda^3}, \quad A_{\tilde{x}} = \frac{e\tilde{x}}{8a} \int (r^2 + \lambda^2 - a^2)^2 \frac{d\lambda}{r^3 \lambda^3}.$$

Заметим, что при $\beta = 0$ расстояние s между центром a -сферы и точкой наблюдения всегда равно r , что следует из (7.9), поэтому на плоскости (λ, c) все ϑ -гиперболы сливаются в одну прямую, параллельную оси λ .

Из последних выражений видно, что в этом случае векторный потенциал имеет только одну радиальную (в сферической системе координат) компоненту

$$A_r = \frac{e}{8ar^2} \left[\frac{\lambda^2}{2} - 2(a^2 - r^2) \ln \lambda - \frac{(a^2 - r^2)^2}{2\lambda^2} \right] \Bigg|_{\lambda_1}^{\lambda_2}.$$

В первой области пространства при $r < a$ или внутри сферы имеем следующие граничные значения³ λ :

$$\lambda_1 = a - r, \quad \lambda_2 = a + r.$$

Тогда для векторного потенциала внутри сферы находим

$$\mathbf{A}_{01} = \frac{e\mathbf{r}}{2r^2} \left(1 - \frac{a^2 - r^2}{ar} \operatorname{Arth} \frac{r}{a} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r} A_{01}. \quad (7.35)$$

Заметим, что при $r = 0$ $\mathbf{A}_{01}$ также равно нулю.

Вне a -сферы или во второй части пространства при $r > a$ граничные значения λ суть

$$\lambda_1 = r - a, \quad \lambda_2 = r + a,$$

и потому здесь векторный потенциал равен

$$\mathbf{A}_{02} = \frac{e\mathbf{r}}{2r^2} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{ar} \operatorname{Arth} \frac{a}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r} A_{02}. \quad (7.35a)$$

Из формул (7.35) и (7.35a) следует, что на поверхности a -сферы выполняется равенство

$$\mathbf{A}_{01} = \mathbf{A}_{02} = \frac{e\mathbf{r}}{2ar},$$

³Формально следовало бы обозначать граничные значения λ тремя индексами, из которых первый — это номер значения, а два другие те же, что и у потенциала. Однако обилие индексов затруднит чтение, области же значений β и пространства будут ясны из текста.

т.е. векторы $\mathbf{A}_{01}$ и $\mathbf{A}_{02}$ описывают векторный потенциал непрерывно во всем пространстве.

Введенная в гл. V функция Гюйгенса $\mathcal{H}$ позволяет записать формулы (7.35) и (7.35a) более компактно:

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{A}_{01} = \frac{e\mathbf{r}}{2r^2} \left[1 - \mathcal{H}\left(\frac{r}{a}\right) \right], & \text{если } r \leq a, \\ \mathbf{A}_{02} = \frac{e\mathbf{r}}{2r^2} \left[1 + \mathcal{H}\left(\frac{a}{r}\right) \right], & \text{если } r \geq a. \end{cases} \quad (7.35b)$$

Очевидно, что структурно последняя формула идентична (7.34). Выше было показано, что функция Гюйгенса $\mathcal{H}$ определяется степенным рядом

$$\mathcal{H}(\xi) = 1 - 2 \sum_0^{\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{4n^2 - 1},$$

поэтому при $r \rightarrow 0$ имеем предел

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left[1 - \mathcal{H}\left(\frac{r}{a}\right) \right] = 0.$$

Функция $\mathcal{H}$ была введена для аргумента β , представляющего собой отношение скорости точечного заряда, которая может быть произвольной по величине, к постоянной скорости света. Здесь же при вычислении потенциала внутри сферы в роли аргумента выступает отношение расстояния r , вообще говоря, произвольного, к постоянному радиусу сферы a . Вне сферы аргументом функции Гюйгенса является отношение постоянного по величине радиуса a к расстоянию r произвольной величины.

Если в выражении (7.35a) положить $r \gg a$, то оно примет вид

$$\mathbf{A}_{02} = \frac{e\mathbf{r}}{r^2} = \frac{\mathbf{r}}{r} \Phi_{02}.$$

Отсюда заключаем, что для статической сферы условие (4.4) выполняется лишь на очень больших (по сравнению с радиусом сферы) расстояниях от нее.

Хотя векторный потенциал статической заряженной сферы не равен нулю, он не изменяет ее электромагнитное поле, т.к. в силу статики всегда выполняется равенство

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t} = 0,$$

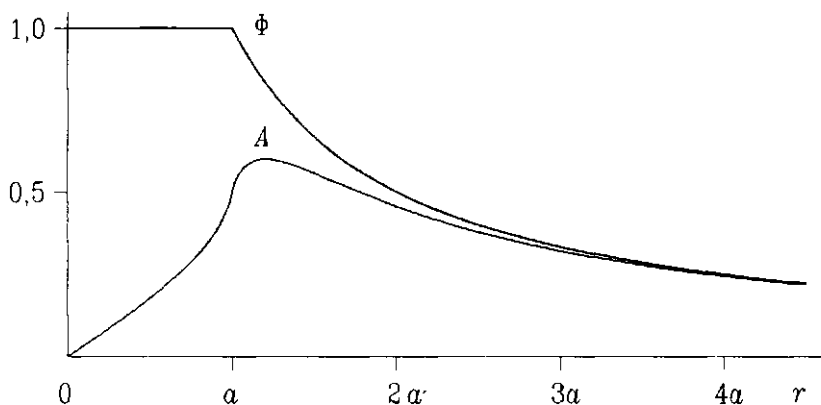


Рис. 7.3. Скалярный потенциал и модуль векторного для неподвижной сферы

а также

$$\text{rot } \mathbf{A} = 0,$$

благодаря тому, что единственная радиальная компонента вектора $\mathbf{A}$ зависит только от r . График скалярного потенциала Φ и модуля векторного для неподвижной сферы с условным зарядом $e/a = 1$ показаны на рис. 7.3.

Опираясь на эти формулы, можно прийти к следующим заключениям.

- Векторный потенциал неподвижной заряженной сферы не равен нулю в отличие от запаздывающего векторного потенциала, равного нулю для неподвижных зарядов.
- Подобно скалярному векторный потенциал в случае неподвижной сферы непрерывен и задается двумя функциями, одна внутри a -сферы, другая вне ее. Эти функции переходят одна в другую на границе сферы.
- На границе a -сферы абсолютная величина векторного потенциала в два раза меньше величины скалярного потенциала.

- При $r \gg a$ векторный потенциал сферы стремится по величине к потенциалу точечного заряда, при этом по мере удаления от центра a -сферы все точнее выполняется соотношение (4.4) ($|\mathbf{A}| = \Phi$).

Следует ожидать, что такими же свойствами будут обладать функции, описывающие компоненты векторного потенциала движущейся заряженной сферы, вычисление которых продолжим ниже.

7.6. Потенциалы при $\beta < 1$ внутри сферы

Как и для точечного заряда, вычисление потенциалов a -сферы начнем со случая $\beta < 1$ и потенциалов внутри сферы. Для этого прежде всего найдем граничные значения λ , затем вычислим разности соответствующих функций и в результате подстановки их в общие формулы найдем искомые потенциалы в явном виде как функции координат точки наблюдения.

7.6.1. Граничные значения λ

Для определения граничных значений λ воспользуемся рис. 7.2. Как видно, при $r < a$ весь пучок $\mathcal{V}$ -гипербол с ростом λ вначале пересекает μ -границу области существования треугольника встречи, где видимая площадь S_e поверхности a -сферы равна нулю, а затем m -границу, на которой $S_e = 4\pi a^2$. В результате видимой здесь оказывается вся a -сфера.

Граничное значение λ_1 определяется здесь одним из равенств (7.13), а именно

$$\lambda_1 = \lambda_\mu = a - c_\mu = a - c_1.$$

Второе граничное значение получим из равенства

$$\lambda_2 = \lambda_m = c_m + a = c_2 + a.$$

Оба эти равенства после подстановки c из (7.9) приводят к одному и тому же квадратному уравнению для λ :

$$(1 - \beta^2)\lambda^2 - 2(a + \beta\tilde{x})\lambda - r^2 + a^2 = 0. \quad (7.36)$$

Прежде всего, дискриминант этого уравнения

$$\begin{aligned} D &= 4[(1 - \beta^2)(a^2 - r^2) - (a + \beta\tilde{x})^2] = \\ &= -(\tilde{x} + \beta a)^2 - (1 - \beta^2)\rho^2 \end{aligned}$$

всегда отрицателен, поэтому корни уравнения действительны. Можно также показать, что оба корня этого уравнения положительны, и первое граничное значение

$$\lambda_1 = \frac{a + \beta\tilde{x} - \sqrt{(\tilde{x} + \beta a)^2 + (1 - \beta^2)\rho^2}}{1 - \beta^2}.$$

Вводя обозначение

$$r'' = \sqrt{(x + \beta a)^2 + (1 - \beta^2)\rho^2}$$

запишем оба корня

$$\lambda_1 = \frac{a + \beta\tilde{x} - r''}{1 - \beta^2}, \quad \lambda_2 = \frac{a + \beta\tilde{x} + r''}{1 - \beta^2}. \quad (7.37)$$

В самом деле, пусть $\lambda_1 > 0$, тогда должно выполняться неравенство:

$$a + \beta\tilde{x} > \sqrt{(\tilde{x} + \beta a)^2 + (1 - \beta^2)\rho^2}.$$

Возводя его в квадрат, находим после приведения подобных членов

$$a^2 - r^2 > 0 \quad \text{или} \quad r < a.$$

Но это условие как раз и означает, что потенциалы ищутся внутри a -сферы. Второе граничное значение λ представляет собой сумму двух положительных величин, а потому всегда положительно.

Отношение граничных значений λ в этой области пространства равно

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a + \beta\tilde{x} - r''}{a + \beta\tilde{x} + r''}.$$

Сравнивая его с аналогичным отношением для неподвижной сферы

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a-r}{a+r},$$

замечаем, что для движущейся сферы оно имеет ту же самую структуру, если под ее радиусом понимать $a + \beta \tilde{x}$, а за расстояние от центра принять r'' . Разложение отношения граничных значений λ при малых значениях β в степенной ряд показывает, что он содержит β в первой и более высоких степенях.

В то же время произведение граничных λ

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{a^2 - r^2}{1 - \beta^2}$$

отличается от соответствующего произведения для неподвижной a -сферы

$$\lambda_1 \lambda_2 = a^2 - r^2$$

множителем $(1 - \beta^2)^{-1}$.

Полагая в выражениях для λ_1 и λ_2 $\beta \rightarrow 0$, находим

$$\lambda_1 \rightarrow a - r, \quad \lambda_2 \rightarrow a + r,$$

т.е. именно те значения, что использовались выше в разд. 7.5.3. При этом сумма $\lambda_1 + \lambda_2$ равна, очевидно, диаметру неподвижной сферы, диаметр же движущейся сферы несколько иной — $2(a + \beta \tilde{x})/(1 - \beta^2)$.

Если же $\beta \neq 0$, то такую сумму можно принять за "видимый" диаметр d_e рассматриваемой сферы

$$d_e = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \frac{a + \beta \tilde{x}}{1 - \beta^2}.$$

Этот диаметр зависит только от x -координаты точки наблюдения и скорости сферы.

Несложно проверить, что здесь видимой оказывается вся поверхность a -сферы. Действительно, вычисления по формуле (7.16) дают

$$\cos \theta(\lambda_1) = 1, \quad \cos \theta(\lambda_2) = -1,$$

т.е. угол θ изменяется в пределах $0 \div \pi$, а потому и

$$S_e = 4\pi a^2.$$

Одновременно доказывается справедливость предположения о равенстве нулю синусов граничных углов θ при $\beta < 1$, которым пользовались в разд. 7.5.1 и 7.5.2.

Располагая граничными значениями λ , найдем промежуток времени τ , в течение которого все синхронные группы поверхностного заряда a -сферы создают возмущения, приходящие одновременно в точку наблюдения. Этот промежуток согласно определению λ равен

$$\tau_{11} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{c} = 2 \frac{r''}{c(1 - \beta^2)}.$$

Несложно установить, что τ_{11} в точке M с координатами ($\hat{x} = -\beta a, \rho = 0$) имеет минимальное значение, и это значение равно нулю. Эту точку назовем изохронной. В ней выполняются следующие равенства:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a, \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Физически это означает, что если все точки на поверхности a -сферы, центр которой в момент t находится в центре системы координат, в некоторый предшествующий момент времени

$$t' = t - \lambda/c, \quad ;$$

когда центр a -сферы был как раз в точке M , "высветятся" в течение очень короткого интервала времени, то все вспышки придут в точку M точно в момент t , хотя центр a -сферы в это время будет уже в центре координатной системы.

По мере удаления от точки M τ все более и более отличается от нуля, и поверхность равновеликих значений τ_{11} представляет собой эллипсоид вращения вокруг оси x с "вытянутыми" в поперечном направлении осями. Этот эллипсоид в точности совпадает с эллипсоидом Хэвисайда, который обсуждался в гл. I, но если в СТО все эллипсоиды имеют общий центр, совпадающий с центром системы координат, то здесь центр смещен на величину $(-\beta a)$.

7.6.2. Граничные δ_i -функции

Располагая граничными λ и c , найдем явные выражения для функций δ_i , когда точка наблюдения поля находится внутри движущейся a -сферы.

По определению функция δ_1 есть

$$\delta_1 = \frac{\lambda_2}{c_2} - \frac{\lambda_1}{c_1},$$

и для ее вычисления заменим λ через a и c согласно уравнениям границ ОСТВ. Тогда получим

$$\delta_1 = \frac{c_2 + a}{c_2} - \frac{a - c_1}{c_1} = 2 + a \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right).$$

Вторая функция δ_2 задается разностью

$$\delta_2 = \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} = \delta,$$

в которой определена и величина δ . Прямое вычисление функции δ дает

$$\delta = \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} = -2\beta \frac{\beta a + \tilde{x}}{r_0^2}, \quad (7.38)$$

где введено новое "расстояние" r_0 :

$$r_0^2 = (\beta a + \tilde{x})^2 + \rho^2. \quad (7.38a)$$

Условие $r_0 = \text{const}$ означает геометрически сферу с радиусом r_0 и центром, смещенным относительно центра a -сферы на $-\beta a$.

Теперь первую граничную функцию δ_1 можно переписать как

$$\delta_1 = 2 + a\delta_2 = 2 \frac{r^2 + \beta a \tilde{x}}{r_0^2}.$$

Более того, функции δ_1 и δ_2 можно представить в довольно симметричном виде

$$\delta_1 = \frac{r^2 - \beta^2 a^2}{r_0^2} + 1, \quad a\delta_2 = \frac{r^2 - \beta^2 a^2}{r_0^2} - 1.$$

Далее, функция δ_3 равна

$$\begin{aligned}\delta_3 &= -\frac{a^2 - r^2}{\lambda_2 c_2} + \frac{a^2 - r^2}{\lambda_1 c_1} = \\ &= 2(1 - \beta^2) - \left(1 + \frac{r_0^2 - r^2}{a^2}\right) a\delta.\end{aligned}$$

Знак минус в первой строке взят потому, что $r < a$, а для получения последней формулы использовались обратные значения граничных λ :

$$\frac{a^2 - r^2}{\lambda_1} = a + \beta\tilde{x} + r'', \quad \frac{a^2 - r^2}{\lambda_2} = a + \beta\tilde{x} - r''.$$

Аналогично находим четвертую δ -функцию

$$\begin{aligned}\delta_4 &= \frac{(a^2 - r^2)^2}{\lambda_2^2 c_2} - \frac{(a^2 - r^2)^2}{\lambda_1^2 c_1} = \\ &= -4(1 - \beta^2)(a + \beta\tilde{x}) + \left[\left(a + \frac{r_0^2 - r^2}{a}\right)^2 + (1 - \beta^2)r_0^2\right]\delta.\end{aligned}$$

Следует отметить, что здесь первые четыре "рациональные" граничные функции не содержат радикал r'' и выражаются линейным образом через разность обратных граничных s .

Следующие две граничные функции трансцендентны и определяются разностью углов α и γ . По определению функция δ_5 равна следующей разности:

$$\delta_5 = \operatorname{Arsh} \frac{\beta\lambda_2 + \tilde{x}}{\rho} - \operatorname{Arsh} \frac{\beta\lambda_1 + \tilde{x}}{\rho}.$$

Для вычисления этой разности воспользуемся известной формулой гиперболической тригонометрии, связывающей $\operatorname{Arsh} x$ с натуральным логарифмом, и найдем

$$\operatorname{Arsh} \frac{\beta\lambda_2 + \tilde{x}}{\rho} = \ln \frac{\beta\lambda_2 + \tilde{x} + c_2}{\rho}$$

и такую же формулу для λ_1 . В этих формулах заменим расстояние s на линейную комбинацию a и соответствующую λ согласно уравнениям границ ОСТВ, тогда получим

$$\delta_5 = \ln \frac{(1 + \beta)\lambda_2 - a + \tilde{x}}{a + \tilde{x} - (1 - \beta)\lambda_1}.$$

Подставим сюда выражения для λ_1 и λ_2 через координаты и радикал r'' и получим

$$\delta_5 = \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \cdot \frac{a + \beta\tilde{x} + r'' - (1 - \beta)(a - \tilde{x})}{(1 + \beta)(a + \tilde{x}) - a - \beta\tilde{x} + r''}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, найдем, что вторая дробь в этом выражении равна 1. В результате получаем очень простую формулу:

$$\delta_5 = \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = 2\text{Arth } \beta.$$

По определению шестая граничная функция равна

$$\delta_6 = \text{Arsh } \frac{r^2 + \beta\lambda_2\tilde{x}}{\beta\rho\lambda_2} - \text{Arsh } \frac{r^2 + \beta\lambda_1\tilde{x}}{\beta\rho\lambda_1}.$$

Заменяя гиперболические арксинусы логарифмами, получим

$$\delta_6 = \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{r^2 + \beta\lambda_2\tilde{x} + rc_2}{r^2 + \beta\lambda_1\tilde{x} + rc_1}.$$

С последним выражением поступаем так же, как и при выводе формулы для δ_5 , т.е. вначале заменяем s на a и соответствующие λ согласно уравнениям границ ОСТВ. Затем избавляемся от дроби λ_1/λ_2 , получая во второй обратные граничные λ . В полученное выражение подставим выражения для обратных λ и в результате найдем

$$\delta_6 = -2\text{Arth } \frac{r}{a}.$$

Здесь следует отметить два необычных обстоятельства. Во-первых, разность $\tilde{\alpha}(\lambda_2) - \tilde{\alpha}(\lambda_1) = \text{Arth } \beta$ и не зависит от координат. По определению она равна логарифму

отношения тангенсов половин углов $\alpha(\lambda_2)$ и $\alpha(\lambda_1)$. На оси x эти углы в треугольниках встречи равны нулю, однако отношение их тангенсов отлично от нуля — это уже, разумеется, чудеса геометрии Лобачевского.

То же самое относится и к разности $\tilde{\gamma}(\lambda_2) - \tilde{\gamma}(\lambda_1)$. Сравнивая эти разности между собой, видим, что для угла γ отношение r/a точки наблюдения играет такую же роль, как и β для угла α .

В заключение запишем все функции δ вместе, чтобы в дальнейшем была возможность пользоваться этими формулами для справки:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= 2 + a\delta, \\ \delta_2 &= \delta, \\ \delta_3 &= 2(1 - \beta^2) - U\delta, \\ \delta_4 &= -2(1 - \beta^2)[2(a + \beta\tilde{x}) + \\ &\quad + \beta(\tilde{x} + \beta a)] + U^2\delta, \\ \delta_5 &= 2\text{Arth } \beta, \\ \delta_6 &= -2\text{Arth } \frac{r}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (7.38b)$$

где

$$U = (1 + \beta^2)a + 2\beta x.$$

7.6.3. Скалярный потенциал

Ранее [23] потенциал Φ_{11} находился подстановкой граничных значений $\lambda_{1,2}$ и $c_{1,2}$ в формулу (7.24). Сейчас мы получим такой же результат, исходя из формулы (7.33), чтобы познакомить читателя с процедурой, которая будет неоднократно использоваться ниже.

Прежде всего найдем сумму s_{12} алгебраических членов в (7.33). Под такими будем понимать те члены, которые имеют алгебраические δ -функции, и для них найдем

$$s_{12} = f_1\delta_1 + f_2\delta_2,$$

т.к. остальные коэффициенты-функции при алгебраических δ_i равны нулю.

Подставляя сюда δ_1 и δ_2 из (7.38b), получаем

$$s_{12} = 2f_1 + (af_1 + f_2)\delta.$$

Круглая скобка в этом выражении равна

$$af_1 + f_2 = \frac{r^2 + \beta^2 a + 2\beta a \tilde{x}}{r^2} = \frac{r_0^2}{r^2}.$$

Но такой же r_0^2 входит в выражение (7.38) для функции δ , поэтому, подставляя ее и сокращая на r_0^2 , имеем

$$s_{12} = 2 \left(1 - \beta \frac{a \tilde{x}}{r^2} \right).$$

Подставляя теперь в выражение (7.33) трансцендентные δ_i -функции, находим после несложных преобразований скалярный потенциал внутри a -сферы

$$\Phi_{11} = \frac{e}{2a} \left\{ 1 + \mathcal{H}(\beta) - \frac{\beta a \tilde{x}}{r^2} [1 - \mathcal{H}(\frac{r}{a})] \right\}, \quad (7.39)$$

где $\mathcal{H}$ — определенная в гл. V функция Гюйгенса для аргументов, указанных в круглых скобках.

Потенциал из (7.39) можно представить как сумму трех слагаемых:

$$\Phi_{11} = \Phi'_{11} + \Phi''_{11} + \Phi'''_{11},$$

где

$$\Phi'_{11} = \frac{e}{a} = \Phi_{01},$$

$$\Phi''_{11} = -\frac{e}{2a} [1 - \mathcal{H}(\beta)],$$

$$\Phi'''_{11} = -\frac{e}{2r} \beta \cos \vartheta [1 - \mathcal{H}(\frac{r}{a})].$$

Видим, что первое слагаемое скалярного потенциала равно потенциалу неподвижной сферы и не зависит от ее скорости. Второе слагаемое зависит только от относительной скорости сферы и по мере роста β снижает потенциал внутри сферы ($\mathcal{H} \leq 1$) на некоторую величину, остающуюся

постоянной во всем объеме сферы. Наконец, третье слагаемое зависит как от β , так и от положения точки внутри сферы.

Положим, что рассматривается точка M на оси $\tilde{x}$ с координатами

$$r = \beta a, \quad \cos \vartheta = -1.$$

В этой точке потенциал

$$\Phi''' = \frac{e}{\beta r} \left[1 - \mathcal{H}\left(\frac{\beta a}{a}\right) \right] = -\Phi''.$$

Откуда находим, что

$$\Phi_{11}(\beta a, \pi) = \frac{e}{a} = \Phi_{01}.$$

Следовательно, в этой точке при любой скорости движения заряженной сферы (разумеется, при $\beta \leq 1$) потенциал равен потенциалу неподвижной сферы. Этим оправдывается название точки M — изохронная (см. разд. 7.7.1).

Выражение (7.39) особенно подчеркивает абсурдность существующего в СТО запрета на движение с $\beta = 1$, т.к. оно содержит две функции $\mathcal{H}$, из которых одна задается аргументом β , аргумент же второй — r/a . Запретив для одного аргумента принимать значение 1, мы должны, оставаясь последовательными, подтвердить его и для другого аргумента. Но тогда должны принять, что потенциал Φ_{11} определен лишь для $r < a$ и не определен для $r = a$.

Потенциал Φ_{11} можно в общем виде представить как

$$\Phi_{11} = \Phi_{11}(r, t; \beta, a),$$

т.е. как функцию двух переменных r, t и двух параметров — β и a . Покажем, что эта функция остается конечной, когда значения β находятся в замкнутом промежутке $[0, 1]$, а радиуса — $[0, a]$.

Если $\beta \ll 1$, то, очевидно, слагаемым Φ''' , пропорциональным β , можно пренебречь. Величина же Φ'' также стремится к нулю в силу соотношения

$$1 - \mathcal{H}(\beta) \approx \frac{2}{3}\beta^2,$$

показанного в разд. 5.9. Поэтому можем записать

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Phi_{11} = \frac{e}{a} = \Phi_{01}. \quad (7.39_1)$$

Условимся нумеровать предельные значения потенциалов номером соответствующей формулы, снабженным индексом, означающим номер предела. Из формулы (7.39₁) видно, что при малых β скалярный потенциал внутри сферы равен потенциалу такой же, но неподвижной сферы с поправками порядка β в первой и более высокой степени.

Если $0 < \beta < 1$, то при $r \rightarrow 0$ скалярный потенциал остается конечным. Действительно, в этом случае зависящее от r слагаемое Φ''' при малых $r \ll a$ можно представить как

$$\Phi''' = \frac{\beta e}{3a^2} r \cos \vartheta,$$

поэтому в центре сферы потенциал

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_{11} = \frac{e}{2a} [1 + \mathcal{H}(\beta)]. \quad (7.39_2)$$

Нетрудно также установить, что на самой сфере, т.е. при $r \rightarrow a$, скалярный потенциал равен

$$\lim_{r \rightarrow a} \Phi_{11} = \frac{e}{2a} [1 + \mathcal{H}(\beta) - \beta \cos \vartheta]. \quad (7.39_3)$$

Из последней формулы следует, что на поверхности движущейся равномерно заряженной сферы всегда возникает разность потенциалов, вызванная ее движением, и между носовой точкой сферы и кормовой разность потенциалов ΔV составляет

$$\Delta V = \beta \frac{e}{a}.$$

Например, если представить электрон, заряд которого $e = 1,6022 \cdot 10^{-19}$ Кл, в виде равномерно заряженной сферы с радиусом $a_e = 2,8179 \cdot 10^{-13}$ см, то на ней эта разность составит $511,4\beta$ кВ.

Наконец, найдем скалярный потенциал при $\beta \rightarrow 1$:

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \Phi_{11} = \frac{e}{2a} \left\{ 1 - \frac{a\tilde{x}}{r^2} \left[1 - \mathcal{H}\left(\frac{r}{a}\right) \right] \right\}. \quad (7.39_4)$$

Этот предел нам потребуется ниже.

Таким образом, доказывается, что в общем случае скалярный потенциал Φ_{11} внутри сферы, движущейся равномерно и прямолинейно, остается конечным при любом значении $0 \leq r \leq a$ и $0 \leq \beta \leq 1$.

7.6.4. Векторный потенциал $A_{\rho 11}$

Компоненты векторного потенциала, как уже говорилось выше, определяются общими формулами (7.31) и (7.32) совместно с определениями (7.31a, b, c), (7.32a) и граничными δ_i -функциями (7.38b) для рассматриваемой области пространства. Однако эти общие формулы лишены наглядности, а при компьютерном счете с ними следует избегать особых точек ($\rho = 0$, $\beta = 0$ и $r = 0$), упоминавшихся в разд. 7.5.2. Поэтому займемся выводом более компактных формул и начнем с ρ -компоненты векторного потенциала.

Как следует из (7.31), эту компоненту можно представить как

$$A_{\rho 11} = \frac{e}{8a} (s_a + p_6 \delta_6),$$

где s_a — сумма членов (7.31), имеющих алгебраические δ -функции, а $p_6 \delta_6$ — единственный член с трансцендентной функцией δ_6 .

Вычисление компоненты $A_{\rho 11}$ поэтому начнем с вычисления суммы s_a , которую разложим на две суммы

$$s_a = \sum_{i=1}^4 p_i \delta_i = s_{12} + s_{34}.$$

Алгебраическая сумма. В этом разделе для сокращения записи условимся для обозначения тригонометрических функций угла ϑ использовать сокращения

$$c = \cos \vartheta, \quad s = \sin \vartheta.$$

Частная сумма s_{12} двух первых членов имеет особенности как при $\beta \rightarrow 0$, так и на оси $\tilde{x}$:

$$\begin{aligned} s_{12} &= p_1 \delta_1 + p_2 \delta_2 = \tilde{x} p_0 [2\beta + (\beta a + \tilde{x})\delta] + p'_2 \delta = \\ &= 2p_0 \frac{\beta \tilde{x} \rho^2}{r_0^2} + p'_2 \delta. \end{aligned}$$

Как видим, это преобразование устраняет особенность коэффициента-функции p_0 при $\rho \rightarrow 0$, т.е. на оси $\tilde{x}$.

Затем сложим коэффициент n , умноженный на ρ^2 , и часть p'_2 , содержащую β^{-2} :

$$\begin{aligned} s_{12} &= 2ms^2 \frac{\beta \tilde{x}}{r_0^2} - 2 \frac{\beta \tilde{x}}{r_0^2} \frac{(1 - \beta^2 \alpha^2)^2}{\beta^2} + 2 \frac{\beta \tilde{x} + \beta^2 a}{r_0^2} \frac{1 - \beta^4}{\beta^2} - rp_6 \delta = \\ &= 2(1 - \beta^4) \frac{a}{r_0^2} - 2 \frac{\beta \tilde{x}}{\beta^2 r_0^2} (\beta^4 - 2\beta^2 \alpha^2 + \beta^4 \alpha^4) + 2ms^2 \frac{\beta \tilde{x}}{r_0^2} - rp_6 \delta. \end{aligned}$$

Приведя подобные члены в круглой скобке второй строки этого выражения, замечаем, что также устранилась особенность коэффициента-функции p_0 при $\beta = 0$:

$$\begin{aligned} s_{12} &= 2 \left\{ (1 - \beta^4) \frac{a}{r_0^2} + [2\alpha^2(1 - \beta^2) - \right. \\ &\quad \left. - \beta^2(1 - \alpha^2)^2] \frac{\beta \tilde{x}}{r_0^2} + ms^2 \frac{\beta \tilde{x}}{r_0^2} - rp_6 \frac{\delta}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Теперь обозначим временно сумму двух первых членов в последнем выражении s_{12} как $\underline{s}$, тогда для нее найдем

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \frac{1 - \beta^2}{r_0^2} [(1 + \beta^2)a + 2\alpha^2 \beta \tilde{x}] = \\ &= (1 - \beta^2) \frac{a}{r_0^2} + \beta^2(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2) \frac{a}{r_0^2}. \end{aligned}$$

⁴Значком $\underline{s}$ будем часто пользоваться для временного обозначения сумм, как правило, в пределах одного абзаца.

Возвращая сумму $\underline{s}$ после этого преобразования в предыдущее выражение для суммы s_{12} , перепишем ее в следующем виде:

$$s_{12} = 2(1 - \beta^2) \frac{a}{r^2} + 2ms^2 \frac{\beta \tilde{x}}{r_0^2} - rp_6 \delta + \\ + 2\beta^2(1 - \alpha^2) \frac{(1 - \beta^2)a - (1 - \alpha^2)\beta \tilde{x}}{r_0^2}.$$

В последнем выражении числитель второй дроби (обозначим его $\underline{s}$) можно записать как

$$\underline{s} = (1 - \beta^2)a - (1 - \alpha^2)\beta \tilde{x} = a \frac{r^2 + \beta a \tilde{x}}{r^2} - \beta(\tilde{x} + \beta a) = \\ = r_0^2 \frac{a}{r^2} - (1 + \alpha^2)\beta(\tilde{x} + \beta a).$$

Тогда сумма s_{12} примет вид

$$s_{12} = \left[(1 - \beta^2 \alpha^2) \frac{a}{r^2} - \beta^3(1 - \alpha^4) \frac{\tilde{x} + \beta a}{r_0^2} + ms^2 \frac{\beta \tilde{x}}{r_0^2} \right] - rp_6 \delta.$$

Сравнивая второй член этого выражения с величиной δ из (7.38), можем сумму s_{12} переписать в следующем довольно компактном виде:

$$s_{12} = 2(1 - \beta^2 \alpha^2) \frac{a}{r^2} + 2ms^2 \frac{\beta \tilde{x}}{r_0^2} + [\beta^2(1 - \alpha^4) - rp_6] \delta.$$

Теперь через $\underline{s}$ обозначим (временно) сумму, заключенную в квадратные скобки в последнем выражении:

$$\underline{s} = \beta^2(1 - \alpha^4) - rp_6 = \beta^2(1 - \alpha^4) + \\ + (1 - \alpha^2) \left[2 - 3\beta^2 \left(2\alpha^2 c^2 + \frac{1 - \alpha^2}{2} s^2 \right) \right] = \\ = (1 - \alpha^2) \left\{ 2 + \beta^2 \left[1 + \alpha^2 - 6\alpha^2 c^2 - \frac{3}{2}(1 - \alpha^2)s^2 \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2(1 - \alpha^2) + \beta^2(1 - \alpha^2) \left[\frac{2 - 3s^2}{2} - 5\alpha^2 c^2 + \frac{5}{2} \alpha^2 s^2 \right] = \\
&= (1 - \alpha^2) \left[2 + \beta^2(1 - 5\alpha^2)(c^2 - \frac{1}{2}s^2) \right].
\end{aligned}$$

Эти преобразования позволяют записать s_{12} в следующем виде:

$$s_{12} = 2(1 - \beta^2 \alpha^2) \frac{a}{r^2} + 3\beta^2(1 - \alpha^2)(1 - 5\alpha^2) \frac{\beta \tilde{x}}{r_0^2} + \underline{s} \delta,$$

где выражение для $\underline{s}$ найдено выше. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
s_{12} &= 2(1 - \beta^2 \alpha^2) \frac{a}{r^2} - \\
&- (1 - \alpha^2) \left[4 + \beta^2(1 - 5\alpha^2)(2c^2 - s^2) \right] \frac{\beta^2 a}{r_0^2} - \\
&- (1 - \alpha^2) \left[4 + \beta^2(1 - 5\alpha^2)(2c^2 - 4s^2) \right] \frac{\beta \tilde{x}}{r_0^2}.
\end{aligned}$$

Запишем теперь частную сумму s_{34} двух оставшихся алгебраических членов компоненты $A_{\rho 11}$:

$$\begin{aligned}
s_{34} &= p_3 \delta_3 + p_4 \delta_4 = \frac{\beta \tilde{x}}{2r^2} (1 - 5\alpha^2) \delta_3 - \frac{1}{2r^2} \delta_4 = \\
&= [2 - \beta^2(1 + \beta^2)] \frac{a}{r^2} + (1 - \beta^2)(4 - 5\alpha^2) \frac{\beta \tilde{x}}{r^2} - \\
&- U[U + (1 - 5\alpha^2)\beta \tilde{x}] \frac{\delta}{2r^2} = \\
&= [2 - \beta^2(1 + \beta^2)] \frac{a}{r^2} + (1 - \beta^2)(4 - 5\alpha^2) \frac{\beta \tilde{x}}{r^2} + \underline{s}.
\end{aligned}$$

В этом выражении временно через $\underline{s}$ обозначено произведение

$$\begin{aligned}
\underline{s} &= -U[U + (1 - 5\alpha^2)\beta \tilde{x}] \frac{\delta}{2r^2} = \\
&= -[(1 + \beta^2)(aU) + (3 - 5\alpha^2)U\beta \tilde{x}] \frac{\delta}{2r^2}.
\end{aligned}$$

Произведение (aU) сохраним, т.к. его можно представить в виде, не содержащем первые степени a и $\beta\tilde{x}$:

$$(aU) = a[(1 + \beta^2)a + 2\beta\tilde{x}] = r_0^2 - r^2(1 - \alpha^2).$$

Теперь запишем

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \left\{ (1 + \beta^2)\beta^2 a + [1 + \beta^2(4 - 5\alpha^2)]\beta\tilde{x} \right\} \frac{aU}{r^2 r_0^2} + \\ &+ \beta^2(3 - 5\alpha^2)c^2 \frac{U}{r_0^2} = \\ &= \left\{ (1 + \beta^2)\beta^2 a + [1 + \beta^2(4 - 5\alpha^2)]\beta\tilde{x} \right\} \left(\frac{1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - \alpha^2}{r_0^2} \right) + \beta^2(3 - 5\alpha^2)c^2 \frac{(1 + \beta^2)a + 2\beta\tilde{x}}{r_0^2}. \end{aligned}$$

Приведя подобные члены, находим

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \beta^2(1 + \beta^2)\frac{a}{r^2} + [1 + \beta^2(4 - 5\alpha^2)]\frac{\beta\tilde{x}}{r^2} + \\ &+ (1 + \beta^2)\left[(3 - 5\alpha^2)c^2 - (1 - \alpha^2)\right]\frac{\beta^2 a}{r_0^2} - \\ &- \left\{ 1 - \alpha^2 - \beta^2[2(3 - 5\alpha^2)c^2 - (1 - \alpha^2)(4 - 5\alpha^2)] \right\} \frac{\beta\tilde{x}}{r_0^2}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в сумму s_{34} , получаем

$$\begin{aligned} s_{34} &= 2\frac{a}{r^2} + 5(1 - \alpha^2)\frac{\beta\tilde{x}}{r^2} + (1 + \beta^2)\left[(3 - 5\alpha^2)c^2 - (1 - \alpha^2)\right]\frac{a}{r_0^2} - \\ &- \left\{ (1 - \alpha^2) - \beta^2[2(3 - 5\alpha^2)c^2 - (1 - \alpha^2)(4 - 5\alpha^2)] \right\} \frac{\beta\tilde{x}}{r_0^2}. \end{aligned}$$

Теперь можем записать сумму s_a всех четырех алгебраических членов компоненты $A_{\rho 11}$:

$$s_a = (4 - 2\beta^2\alpha^2)\frac{a}{r^2} + 5(1 - \alpha^2)\frac{\beta\tilde{x}}{r^2} +$$

$$+ \left[(3 - 5\alpha^2)c^2 - 5(1 - \alpha^2)(1 + \beta^2\alpha^2s^2) + 2\beta^2\alpha^2(4 - 5\alpha^2)c^2 \right] \frac{\beta^2 a}{r_0^2} - \\ - \left\{ 5(1 - \alpha^2) - \beta^2\alpha^2 \left[(11 - 15\alpha^2)c^2 - 15(1 - \alpha^2)s^2 \right] \right\} \frac{\beta \tilde{x}}{r_0^2}.$$

В этой сумме соберем вместе второй член в первой строке и первый в предпоследней в новую сумму $\underline{s}$:

$$\underline{s} = 5(1 - \alpha^2)\beta\tilde{x}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) = \\ = 5\beta^2\alpha^2(1 - \alpha^2)\frac{\beta\tilde{x}}{r_0^2} + 10(1 - \alpha^2)c^2\frac{\beta^2 a}{r_0^2}.$$

Возвращая $\underline{s}$ в сумму s_a , получаем

$$s_a = (4 - 2\beta^2\alpha^2)\frac{a}{r^2} + \\ + \left\{ 2(4 - 5\alpha^2)c^2 - 5(1 - \alpha^2)s^2 + \right. \\ \left. + \beta^2\alpha^2 \left[2(4 - 5\alpha^2)c^2 - 5(1 - \alpha^2)s^2 \right] \right\} \frac{\beta^2 a}{r_0^2} + \\ + \beta^2\alpha^2 \left[4(4 - 5\alpha^2)c^2 - 10(1 - \alpha^2) \right] \frac{\beta\tilde{x}}{r_0^2}.$$

Приведя в этом выражении для s_a подобные члены, найдем, что сокращаются все дроби со знаменателем r_0^2 , в результате

$$s_a = 4\frac{a}{r^2} + \beta^2[4(2 - 3\alpha^2)c^2 - (5 - 3\alpha^2)s^2]\frac{a}{r^2}.$$

Трансцендентный член суммы. Согласно (7.38b)

$$\delta_6 = -2\text{Arth}\frac{r}{a}.$$

Тогда

$$p_6\delta_6 = 2\frac{1 - \alpha^2}{r}\text{Arth}\frac{r}{a}\left[2 - 3\beta^2\left(2\alpha^2c^2 + \frac{1 - \alpha^2}{2}s^2\right)\right].$$

С учетом определения функции Гюйгенса

$$\mathcal{H}_{\frac{r}{a}} = \mathcal{H}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{a^2 - r^2}{ar} \operatorname{Arth} \frac{r}{a}$$

последнее выражение перепишем как

$$p_6 \delta_6 = \frac{a}{r^2} \mathcal{H}_{\frac{r}{a}} \left[4 - 3\beta^2 \left(4\alpha^2 c^2 + (1 - \alpha^2) s^2 \right) \right].$$

Теперь запишем ρ -компоненту векторного потенциала

$$\begin{aligned} A_{\rho 11} = & \frac{e}{2r} \sin \vartheta \left\{ 1 - \mathcal{H}_{\frac{r}{a}} - \frac{3\beta^2}{4} (1 - \mathcal{H}_{\frac{r}{a}}) \sin^2 \vartheta + \right. \\ & \left. + \frac{\beta^2}{4} (1 - 5 \cos^2 \vartheta) \left[2 - \frac{3a^2}{r^2} (1 - \mathcal{H}_{\frac{r}{a}}) \right] \right\}. \quad (7.40) \end{aligned}$$

Здесь индекс у функции Гюйгенса $\mathcal{H}$ означает ее аргумент

$$\mathcal{H}_{\frac{r}{a}} = \mathcal{H}\left(\frac{r}{a}\right).$$

Первые два члена в первой строке выражения (7.40) представляют собой, очевидно, ρ -компоненту векторного потенциала неподвижной сферы радиуса a , имеющую полный заряд e . Следующие члены выражения (7.40) можно рассматривать как поправку к этой компоненте, обусловленную движением сферы. Следует подчеркнуть, что величина этой поправки пропорциональна β^2 , а ее пространственное распределение не зависит от β .

Для дальнейшего полезно представить $A_{\rho 11}$ как

$$A_{\rho 11} = \mathcal{A}_{11} \sin \vartheta, \quad (7.40a)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11} = & \frac{e}{2r} \left\{ 1 - \mathcal{H}_{\frac{r}{a}} - \frac{3\beta^2}{4} (1 - \mathcal{H}_{\frac{r}{a}}) \sin^2 \vartheta + \right. \\ & \left. + \frac{\beta^2}{4} (1 - 5 \cos^2 \vartheta) \left[2 - \frac{3a^2}{r^2} (1 - \mathcal{H}_{\frac{r}{a}}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Пределы компоненты $A_{\rho 11}$. Аналогично случаю скалярного потенциала разыщем теперь предельные выражения для функции $A_{\rho 11}$. Первый предел для функции $A_{\rho 11}$ тривиален: пропорциональная β^2 динамическая поправка к этой компоненте обращается в нуль при $\beta \rightarrow 0$, поэтому

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} A_{\rho 11} = \frac{e}{2r} \left(1 - \frac{a^2 - r^2}{ar} \operatorname{Arth} \frac{r}{a} \right) \sin \vartheta, \quad (7.40_1)$$

т.е. равна соответствующей компоненте векторного потенциала неподвижной сферы. Формула (7.40₁) означает, что статическая сфера описывается функцией (7.40) как частный случай, когда $\beta = 0$.

Второй предел находим, удерживая только первый член разложения функции Гюйгенса в степенной ряд:

$$\mathcal{H}_{\frac{r}{a}} \approx 1 - \frac{2r^2}{3a^2}.$$

Тогда находим

$$\lim_{r \rightarrow 0} A_{\rho 11}(r \rightarrow 0) = \frac{er}{3a^2} \left(1 - \frac{\beta^2}{4} \sin^2 \vartheta \right) \sin \vartheta \rightarrow 0. \quad (7.40_2)$$

Отсюда заключаем, что функция $A_{\rho 11}$ не имеет особенностей в центре a -сферы.

При отыскании третьего предела компоненты $A_{\rho 11}$ учтем, что при $r \rightarrow a$ функция $\mathcal{H}$ обращается в нуль, поэтому $A_{\rho 11}$ на поверхности a -сферы имеет значение

$$\lim_{r \rightarrow a} A_{\rho 11} = \frac{e}{2a} \left[1 - \frac{\beta^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) \right] \sin \vartheta. \quad (7.40_3)$$

Отсюда заключаем, что компонента $A_{\rho 11}$ непрерывна внутри a -сферы всюду, включая ее поверхность.

Наконец, положив в (7.40) $\beta = 1$, найдем четвертый предел:

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} A_{\rho 11} = \frac{e}{8r} \left\{ 2 \sin^2 \vartheta - 3(1 - 5 \cos^2 \vartheta) [1 - \alpha^2 (1 - \mathcal{H}_{\frac{r}{a}})] \right\} \sin \vartheta. \quad (7.40_4)$$

Таким образом, компонента $A_{\rho 11}$ непрерывна и конечна как в промежутке $r = [0, a]$, так и в промежутке $\beta = [0, 1]$, включая границы этих промежутков. Отметим также, что согласно (7.40₄) на поверхности a -сферы ρ -компонента векторного потенциала принимает особенно простую форму

$$\lim_{\substack{\beta \rightarrow 1 \\ r \rightarrow a}} A_{\rho 11} = \frac{e}{4a} \sin^3 \vartheta. \quad (7.40_5)$$

К такому же результату ведет выражение (7.40₃), если в нем положить $\beta = 1$.

7.6.5. Векторный потенциал $A_{x 11}$

Вычисление этой компоненты сводится к вычислению суммы, содержащейся в (7.32), т.к. компонента $A_{\rho 11}$ уже известна. Разумеется, функции δ_i здесь те же, что и для ρ -компоненты за исключением δ_5 , равной в этой области пространства:

$$\delta_5 = 2 \operatorname{Arth} \beta.$$

Что же касается коэффициентов-функций q_i , то для компоненты A_x они содержатся в (7.32а), при этом коэффициенты q_i , как и p_i , имеют особенности при $\rho \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow 0$, с устранения которых и начнем.

Алгебраическая сумма. Вычисление компоненты x , как и выше, начнем с вычисления суммы, содержащей алгебраические δ -функции:

$$\begin{aligned} s_{13} &= \sum_{i=1}^3 q_i \delta_i = q_1 \delta_1 + q_2 \delta_2 + q_3 \delta_3 = \\ &= \frac{xn}{\rho^2} (\beta x \delta_1 + r^2 \delta_2) - \left(\frac{1 - \beta^4}{\beta} - q'_1 \right) \delta_1 - 2rq_6 \delta_2 + q_3 \delta_3. \end{aligned}$$

Обозначим первый член этого выражения через $\underline{s}$, тогда для него найдем

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \frac{xn}{\rho^2} (\beta x \delta_1 + r^2 \delta_2) = \frac{xn}{\rho^2} [2\beta x + (\beta a x + r^2) \delta] = \\ &= 2 \frac{\beta x}{\rho^2} n \left[x - (r^2 + \beta a x) \frac{x + \beta a}{r_0^2} \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно установить, что квадратная скобка в последнем выражении имеет значение $-\beta a \rho^2 / r_0^2$, и все выражение для $\underline{s}$ можно записать как

$$\underline{s} = -2(1 - \beta^2 \alpha^2)^2 \frac{ax}{r_0^2}.$$

В результате благополучно устранилась особенность коэффициента-функции q_1 при $\rho \rightarrow 0$, и одновременно сократились β^2 , что устраняет особенность n , когда $\beta \rightarrow 0$. Возвращая $\underline{s}$ в s_{13} , получаем

$$s_{13} = -2(1 - \beta^2 \alpha^2)^2 \frac{ax}{r_0^2} - \left[\frac{1 - \beta^4}{\beta} - q'_1 \right] \delta_1 - 2r q_6 \delta_2 + q_3 \delta_3.$$

Квадратную скобку в этом выражении обозначим $\underline{s}$ и представим ее как две дроби:

$$\underline{s} = -\frac{1 - \beta^4}{\beta} (2 + a\delta) = -2 \frac{1 - \beta^4}{\beta} - a \frac{1 - \beta^4}{\beta} \delta.$$

Из них первую дробь прибавим к $p_5 \delta_5$:

$$p'_5 \delta'_5 = p_5 \delta_5 - 2 \frac{1 - \beta^4}{\beta^2} = 2 \frac{1 - \beta^4}{\beta^2} (\text{Arth } \beta - \beta),$$

а вторую вернем в сумму s_{13} . Очевидно, что выражение для $q'_5 \delta'_5$ остается конечным при любом значении β в интервале $[0, 1]$, принимая значения 0 на его границах.

Теперь сумма

$$\begin{aligned} s_{13} = & -2 \left(1 - \beta^2 \alpha^2 \right)^2 \frac{ax}{r_0^2} + 2(1 - \beta^4) \frac{ax}{r_0^2} + \\ & + 2\beta \left(1 - \beta^4 \right) \frac{a^2}{r_0^2} + q'_1 \delta_1 - 2r q_6 \delta_2 + q_3 \delta_3. \end{aligned}$$

Обозначим через $\underline{s}$ сумму двух первых членов в последнем выражении:

$$\begin{aligned} \underline{s} = & -2 \left(1 - \beta^2 \alpha^2 \right)^2 \frac{ax}{r_0^2} + 2 \left(1 - \beta^4 \right) \frac{ax}{r_0^2} = \\ = & 2 \left[2\beta^2 (1 - \beta^2) \alpha^2 - \beta^4 (1 - \alpha^2)^2 \right] \frac{ax}{r_0^2}. \end{aligned}$$

Тогда сумма s_{13} примет вид

$$s_{13} = 4\beta^2(1 - \beta^2)\alpha^2 \frac{ax}{r_0^2} + 2\beta(1 - \beta^4) \frac{a^2}{r_0^2} - \\ - 2\beta^4(1 - \alpha^2)^2 \frac{ax}{r_0^2} + q'_1\delta_1 - 2rq_5\delta_2 + q_3\delta_3.$$

Сумму двух первых членов этого выражения обозначим вновь как $\underline{s}$, и для нее находим

$$\underline{s} = 2\beta(1 - \beta^2) \left(2 \frac{\beta ax}{r^2} + 1 + \beta^2 \right) \frac{a^2}{r_0^2} = \\ = 2\beta(1 - \beta^2)\alpha^2 + 2\beta^3(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2) \frac{a^2}{r_0^2}.$$

Эти преобразования позволяют переписать сумму s_{13} как

$$s_{13} = 2\beta(1 - \beta^2)\alpha^2 - 2\beta^4(1 - \alpha^2)^2 \frac{ax}{r_0^2} + \\ + 2\beta^3(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2) \frac{a^2}{r_0^2} + q'_1\delta_1 - 2rq_6\delta_2 + q_3\delta_3.$$

Три последних члена этого выражения запишем в развернутом виде:

$$\begin{aligned} q'_1\delta_1 &= 4\beta(1 - \alpha^2)[1 - \beta^2(1 - \alpha^2)] + \\ &\quad + 2\beta(1 - \alpha^2)[1 - \beta^2(1 - \alpha^2)]a\delta, \\ -2rq_6\delta_2 &= -2\beta^2(1 - \alpha^2)(1 - 3\alpha^2)x\delta, \\ q_3\delta_3 &= -2\beta(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2) + \\ &\quad + \beta(1 - \alpha^2)[(1 + \beta^2)a + 2\beta x]\delta. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в сумму s_{13} , получим

$$s_{13} = 2\beta(1 - \beta^2)(2\alpha^2 - 1) + \\ + 4\beta(1 - \alpha^2)[1 - \beta^2(1 - \alpha^2)] +$$

$$\begin{aligned}
& + 2\beta^3(1 - \alpha^2)[(1 - \beta^2)a - (1 - \alpha^2)\beta x] \frac{a}{r_0^2} + \\
& + \{2\beta[1 - \beta^2(1 - \alpha^2)]a - \\
& - \beta(1 - \alpha^2)[2(1 - 3\alpha^2)x - U]\} \delta.
\end{aligned}$$

В первых двух строках этого выражения собраны члены, не имеющие знаменателя r_0^2 , во второй — имеющие такой знаменатель, а в последних — члены, имеющие множитель δ . После подстановки сюда явного выражения для U и приведения подобных членов выражение для s_{13} принимает вид

$$\begin{aligned}
s_{13} = & 2\beta(1 - \beta^2) + 4\beta^3\alpha^2(1 - \alpha^2) + \\
& + 2\beta^3(1 - \alpha^2)[(1 - \beta^2)a - \beta(1 - \alpha^2)x] \frac{a}{r_0^2} + \\
& + \beta(1 - \alpha^2)[(3 - \beta^2 + 2\beta^2\alpha^2)a + 6\beta\alpha^2x]\delta.
\end{aligned}$$

Подставив сюда

$$\delta = -2\beta \frac{x + \beta a}{r_0^2},$$

выполнив умножение в последней строке и приведя подобные члены, находим

$$\begin{aligned}
s_{13} = & 2\beta(1 - \beta^2) + 4\beta^3\alpha^2(1 - \alpha^2) - \\
& - 2\beta^2 \frac{1 - \alpha^2}{r_0^2} [2(1 + \beta^2\alpha^2)\beta a^2 + \\
& + (3 + 7\beta^2\alpha^2)ax + 6\beta^2\alpha^2x^2].
\end{aligned}$$

Воспользовавшись очевидным соотношением

$$1 + \beta^2\alpha^2 = \frac{r_0^2 - 2\beta ax}{r^2},$$

перепишем квадратную скобку (для нее еще раз используем обозначение $\underline{s}$) последнего выражения:

$$\begin{aligned}
\underline{s} &= 2 \frac{r_0^2 - 2\beta ax}{r^2} \beta a^2 + (3 + 7\beta^2\alpha^2)ax + 6\beta^2\alpha^2x^2 = \\
&= (2\beta\alpha^2 + 3 \frac{ax}{r^2})r_0^2.
\end{aligned}$$

В результате получаем

$$s_{13} = 2\beta(1 - \beta^2) + 4\beta^3\alpha^2(1 - \alpha^2) - \\ - 2\beta^2(1 - \alpha^2)(2\beta\alpha^2 + 3\frac{ax}{r^2}),$$

или окончательно

$$s_{13} = 2\beta(1 - \beta^2) - 6\beta^2(1 - \alpha^2)\frac{ax}{r^2}.$$

Как и в случае $A_{\rho 11}$, расстояние r_0 в окончательной сумме отсутствует.

Компонента $A_{x 11}$. Теперь мы можем записать формулу для суммы s_{16} всех шести членов:

$$s_{16} = s_{13} + p'_5\delta'_5 + p_6\delta_6 = \\ = 2\beta(1 - \beta^2) - 6\beta^2(1 - \alpha^2)\frac{ax}{r^2} + \\ + 2\frac{1 - \beta^4}{\beta^2}(\text{Arth } \beta - \beta) - \\ - 2\beta^2\frac{x}{r}(1 - \alpha^2)(1 - 3\alpha^2)\text{Arth } \frac{r}{a}.$$

Сумма ($\underline{s}$) членов, не зависящих от координат точки наблюдения поля:

$$\underline{s} = 2\beta(1 - \beta^2) + 2\frac{1 - \beta^4}{\beta^2}(\text{Arth } \beta - \beta) = \\ = \frac{2}{\beta} \left[(1 + \beta^2)\frac{1 - \beta^2}{\beta}\text{Arth } \beta - 1 + \beta^2 \right].$$

Последнее выражение мы можем, вспоминая определение функции Гюйгенса $\mathcal{H}$, записать в следующем компактном виде:

$$\underline{s} = 4\beta - 2\frac{1 + \beta^2}{\beta}(1 - \mathcal{H}_\beta),$$

где индекс $\mathcal{H}_\beta$ означает аргумент функции $\mathcal{H}$, т.е.

$$\mathcal{H}_\beta = \mathcal{H}(\beta).$$

Теперь запишем сумму

$$\begin{aligned} s_{16} = & 4\beta - 2\frac{1+\beta^2}{\beta}(1 - \mathcal{H}_\beta) - \\ & - 2\beta^2[(1 - 3\alpha^2)(1 - \mathcal{H}_{\frac{r}{a}}) + \\ & + 3(1 - \alpha^2)]\frac{a}{r} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

В итоге всех этих преобразований находим следующее выражение для компоненты A_{x11} внутри a -сферы:

$$\begin{aligned} A_{x11} = & \mathcal{A}_{11} \cos \vartheta + \frac{e}{4a}[2\beta - \frac{1+\beta^2}{\beta}(1 - \mathcal{H}_\beta)] - \\ & - \frac{\beta^2 e}{4r}[2 + (1 - 3\alpha^2)(1 - \mathcal{H}_{\frac{r}{a}})] \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (7.41)$$

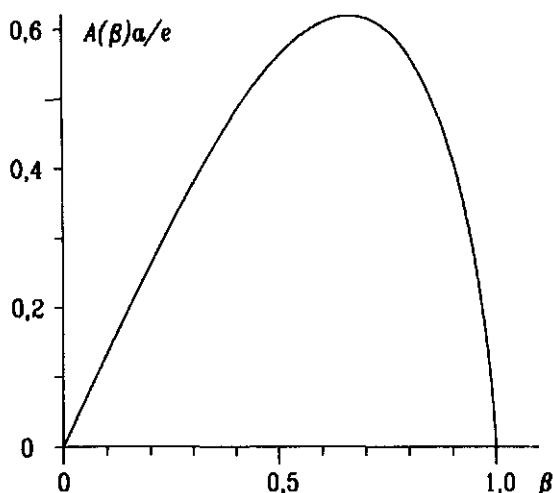
Здесь $\mathcal{A}_{11}$ определяется формулой (7.40а), поэтому векторный потенциал имеет сферически-симметричную часть и некоторую добавку к ней, нарушающую эту симметрию. Как и в случае $A_{\rho 11}$, зависящая от координат точки наблюдения поправка к x -компоненте векторного потенциала пропорциональна β^2 . Кроме того, к компоненте A_{x11} векторного потенциала движение “добавляет” потенциал с постоянным распределением в пространстве, определяемый лишь относительной скоростью a -сферы. Этот не зависящий от координат потенциал, график которого приведен на рис. 7.4, равен нулю на границах промежутка $[0, 1]$ по β и имеет максимум при $\beta \approx 0,655$.

Координаты изохронной точки M , как уже неоднократно упоминалось, равны

$$r = \beta a, \quad \vartheta = \pi,$$

поэтому в этой точке ρ -компонента векторного потенциала

$$A_{\rho 11} = 0.$$

Рис. 7.4. Постоянное слагаемое потенциала A_{x11}

В то же время функция A_{11} , введенная в (7.40а), принимает здесь значение

$$A_{11} = -\frac{e}{a} \left(\beta - \frac{1 - \mathcal{H}_\beta}{\beta} \right),$$

благодаря чему компонента A_{x11} также оказывается равной нулю. В результате заключаем, что в точке M всегда выполняются равенства

$$A_{11} = 0, \quad \Phi_{11} = 0,$$

если β имеет любое значение в промежутке $[0, 1]$. Иными словами, при любой скорости движения потенциалы в точке M сохраняют те же значения, что и в центре покоящейся a -сферы, что и оправдывает название этой точки — *изохронная*.

Пределы потенциала A_{x11} . Как и для компоненты A_{r11} , разыщем теперь такие же пределы для x -компоненты векторного потенциала.

Пользуясь разложением функции Гюйгенса в степенной ряд, находим, что второй член (вторая строка в (7.41)) при

$\beta \rightarrow 0$ имеет предел, равный нулю, а третий член в той же формуле пропорционален β^2 , поэтому в итоге имеем

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} A_{x11} = A_{\rho 11} \operatorname{ctg} \vartheta = A_{01} \cos \vartheta, \quad (7.41_1)$$

где A_{01} — единственная компонента векторного потенциала покоящейся сферы. Отсюда заключаем, что x -компонента векторного потенциала при $\beta \rightarrow 0$ представляет собой соответствующую компоненту сферы, покоящейся или движущейся равномерно и прямолинейно с нулевой скоростью. Разумеется, векторный потенциал в этом случае сферически-симметричен.

Когда r приближается к нулю, то первый член в (7.41) обращается в нуль согласно (7.40₂), второй остается неизменным, т.к. он не зависит от координат. Покажем, что третий член также обращается в нуль. Действительно, пользуясь приведенным выше разложением функции Гюйгенса в степенной ряд, для третьей строки выражения (7.41) найдем

$$\frac{\beta^2 e}{4r} [2 + (1 - 3\alpha^2)(1 - \mathcal{H}_a^r)] \cos \vartheta = \frac{\beta^2 e r}{6a^2} \cos \vartheta \rightarrow 0,$$

поэтому

$$\lim_{r \rightarrow 0} A_{x11} = \frac{e}{4a} [2\beta - \frac{1 + \beta^2}{\beta} (1 - \mathcal{H}_\beta)]. \quad (7.41_2)$$

Отсюда видно, что компонента A_{x11} не имеет особенностей в центре a -сферы.

На поверхности a -сферы эта компонента также остается конечной:

$$\lim_{r \rightarrow a} A_{x11} = \frac{e}{2a} \left\{ \left[1 - \frac{\beta^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) \right] \sin \vartheta + \beta - \frac{1 + \beta^2}{2\beta} (1 - \mathcal{H}_\beta) \right\}. \quad (7.41_3)$$

Отсюда заключаем, что обе компоненты векторного потенциала конечны во всей a -сфере.

При $\beta \rightarrow 1$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} A_{x11} = -\frac{e}{8r} \left\{ 1 - 3 \cos^2 \vartheta + (3 - 5 \cos^2 \vartheta) [2 - 3\alpha^2 (1 - \mathcal{H}_a^r)] \right\} \cos \vartheta. \quad (7.41_4)$$

Полагая в последнем выражении $r = a$, находим

$$\lim_{\substack{\beta \rightarrow 1 \\ r \rightarrow a}} A_{x11} = \frac{e}{4a} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta. \quad (7.41_5)$$

Отсюда и из выражения (7.40₅) заключаем, что при $\beta = 1$ на поверхности a -сферы векторный потенциал оказывается сферически-симметричным:

$$\mathbf{A}_{11}(r = a) = \frac{e}{4a} \begin{vmatrix} \sin^2 \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Завершая пределами рассмотрение потенциалов внутри сферы, найдем их вне ее.

7.7. Потенциалы при $\beta < 1$ вне сферы

Теперь найдем потенциалы вне a -сферы и посмотрим, будут ли они "сшиваться" на границе, т.е. на самой сфере. В случае неподвижной сферы функции, описывающие скалярный и векторный потенциалы, были непрерывны. Если то же самое будет и для движущейся сферы, то это обстоятельство явится своего рода проверкой правильности выбранного алгоритма вычисления потенциалов и доказательством верности полученных результатов. Придерживаясь процедуры, используемой в последнем разделе, вначале найдем граничные λ и c , затем граничные δ -функции, после чего выражениям для потенциалов постараемся придать по возможности компактную форму.

7.7.1. Граничные значения λ

Для определения граничных значений λ в этой области пространства обратимся вновь к рис.7.2. Если точка N находится вне a -сферы, т.е. если $r > a$, то пучок ϑ -гипербол с ростом λ пересекает вначале m -, а затем m -границу. Поэтому граничные $\lambda_{1,2}$ определяются следующими соотношениями:

$$\lambda_1 = \lambda_m = c_m - a, \quad \lambda_2 = \lambda_{\infty} = c_{\infty} + a.$$

Подставив сюда вместо c_m и c_n с из (7.9), найдем, что в этой области пространства граничные значения λ определяются двумя различными квадратными уравнениями, а именно

$$(1 - \beta^2)\lambda_1^2 - 2(\beta\tilde{x} - a)\lambda_1 - r^2 + a^2 = 0,$$

$$(1 - \beta^2)\lambda_2^2 - 2(\beta\tilde{x} + a)\lambda_2 - r^2 + a^2 = 0.$$

Разумеется, оба эти уравнения имеют по два корня, но в каждом из них только один корень положителен. Отбрасывая отрицательные корни, как не имеющие физического смысла, находим: положительные граничные значения λ :

$$\lambda_1 = \frac{\beta\tilde{x} - a + r'}{1 - \beta^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta\tilde{x} + a + r''}{1 - \beta^2}, \quad (7.42)$$

где для сокращения записи введены обозначения:

$$r' = \sqrt{(\tilde{x} - \beta a)^2 + (1 - \beta^2)\rho^2},$$

$$r'' = \sqrt{(\tilde{x} + \beta a)^2 + (1 - \beta^2)\rho^2}.$$

Функции λ_1 и λ_2 можно считать аналитически независимыми, т.к. их якобиан, т.е. определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho} \end{vmatrix},$$

не обращается тождественно в нуль в рассматриваемой области. Однако, благодаря равенству свободных членов в уравнениях, определяющих граничные λ , между ними можно установить соотношения, аналогичные соотношениям между корнями некоторого нового квадратного уравнения.

Для этого введем "средний" квадратный корень как полусумму двух арифметических корней

$$\bar{r} = \frac{r'' + r'}{2},$$

и заметим, что между этими радикалами r' и r'' всегда выполняется равенство

$$r''^2 - r'^2 = 4\beta a\tilde{x}. \quad (7.42a)$$

Из двух последних соотношений находим

$$r' = \bar{r} - \frac{\beta a\tilde{x}}{\bar{r}}, \quad r'' = \bar{r} + \frac{\beta a\tilde{x}}{\bar{r}}. \quad (7.42b)$$

Теперь граничные λ можно представить в более симметричном виде

$$\lambda_1 = \frac{\bar{r} + \beta\tilde{x}}{1 - \beta^2} \left(1 - \frac{a}{\bar{r}}\right), \quad \lambda_2 = \frac{\bar{r} + \beta\tilde{x}}{1 - \beta^2} \left(1 + \frac{a}{\bar{r}}\right). \quad (7.42c)$$

Отношение граничных λ равно

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\bar{r} - a}{\bar{r} + a}.$$

В этой области пространства аналогичное отношение граничных λ в случае неподвижной сферы было равно (см. разд. 7.5.3)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{r - a}{r + a}.$$

Сравнивая два последних соотношения, видим, что $\bar{r}$ для движущейся a -сферы играет такую же роль, что и расстояние r для неподвижной, по крайней мере, для отношения граничных значений λ .

В этом же представлении сумма и произведение граничных λ равны:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \frac{\bar{r} + \beta x}{1 - \beta^2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{\bar{r} + \beta x}{1 - \beta^2} \right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{\bar{r}^2} \right).$$

Располагая этими равенствами и пользуясь известными свойствами корней квадратного уравнения, можем считать, что вне a -сферы граничные λ также определяются одним квадратным уравнением:

$$\lambda^2 - 2 \frac{\bar{r} + \beta x}{1 - \beta^2} \lambda + \left(\frac{\bar{r} + \beta x}{1 - \beta^2} \right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{\bar{r}^2} \right) = 0,$$

как и внутри сферы. При этом оба корня этого уравнения всегда положительны.

Вернемся к форме (7.42) граничных λ и найдем их обратное значение λ_1 :

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1 - \beta^2}{r' + \beta \tilde{x} - a} = \frac{r' - \beta \tilde{x} + a}{r^2 - a^2}.$$

Подставим сюда r' , выраженное через $\bar{r}$:

$$\frac{r^2 - a^2}{\lambda_1} = (\bar{r} - \beta \tilde{x}) \left(1 + \frac{a}{\bar{r}}\right).$$

Это равенство умножим на λ_1 , также записанное через $\bar{r}$:

$$\lambda_1 = \frac{\bar{r} + \beta \tilde{x}}{1 - \beta^2} \left(1 - \frac{a}{\bar{r}}\right),$$

в результате получим тождество:

$$\bar{r}^2 = \frac{\bar{r}^2 - \beta^2 \tilde{x}^2}{1 - \beta^2} \frac{\bar{r}^2 - a^2}{r^2 - a^2}. \quad (7.42d)$$

Если это тождество рассматривать как уравнение для неизвестной переменной $\bar{r}$, то оно сводится к биквадратному алгебраическому уравнению, положительный (дважды) корень которого тождественно равен $2\bar{r} = r' + r''$.

Тождество (7.42d) перепишем как

$$\bar{r}^2 - \beta^2 \tilde{x}^2 = \bar{r}^2 (1 - \beta^2) \frac{r^2 - \beta^2 a^2}{\bar{r}^2 - a^2}.$$

Левую часть этого соотношения можно представить в виде

$$\bar{r}^2 - \beta^2 \tilde{x}^2 = \bar{r}^2 - \tilde{x}^2 + (1 - \beta^2) \tilde{x}^2.$$

Тогда, оставляя слева разность $\bar{r}^2 - \tilde{x}^2$, находим

$$\bar{r}^2 - \tilde{x}^2 = (1 - \beta^2) \frac{\bar{r}^2 \rho^2 - a^2 (\bar{r}^2 - \tilde{x}^2)}{\bar{r}^2 - a^2}.$$

Теперь разность $\bar{r}^2 - \tilde{x}^2$ появилась и справа, перенеся ее налево, получаем

$$\bar{r}^2 - \tilde{x}^2 = r^2 \frac{1 - \beta^2}{\bar{r}^2 - \beta^2 a^2} \rho^2.$$

Это равенство можно прочесть как уравнение эллипсоида

$$\frac{1 - \beta^2}{\bar{r}^2 - \beta^2 a^2} \rho^2 + \frac{\tilde{x}^2}{\bar{r}^2} = 1,$$

если считать $\bar{r} = \text{const.}$

Его малая полуось $b_e \approx \bar{r}$, а большая:

$$a_e^2 = \frac{\bar{r}^2 - \beta^2 a^2}{1 - \beta^2},$$

поэтому он представляет собой эллипсоид вращения (вокруг оси $\tilde{x}$) с переменным эксцентриситетом

$$\epsilon = \beta \sqrt{\frac{\bar{r}^2 - a^2}{\bar{r}^2 - \beta^2 a^2}}.$$

Можно показать, что среднее расстояние $\bar{r} = a$, если $r \rightarrow a$, и стремится к

$$\lim_{\substack{a \\ r \rightarrow 0}} \bar{r} = r \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta},$$

когда $r \gg a$. Следовательно, эксцентриситет ϵ равен нулю на a -сфере и затем стремится к β — на большом удалении от нее. Таким образом, на очень больших расстояниях от a -сферы полученный эллипсоид превращается в эллипсоид Хэвисайда, и его большая полуось ортогональна оси, вдоль которой движется сфера.

С помощью величины $\bar{r}$ можно получить аналогичные выражения для граничных значений величины s , представляющей собой расстояние между точкой наблюдения поля и центром a -сферы. Так,

$$c_1 = \lambda_1 + a = \frac{r' + \beta \tilde{x} - a}{1 - \beta^2} + a.$$

Пользуясь определением среднего радикала $\bar{r}$, после несложных преобразований получаем

$$c_1 = \frac{\bar{r} + \beta \tilde{x}}{1 - \beta^2} \left(1 - \beta \frac{a}{\bar{r}} \frac{\beta \bar{r} + \tilde{x}}{\bar{r} + \beta \tilde{x}} \right) = \frac{\bar{r} + \beta \tilde{x}}{1 - \beta^2} (1 - b).$$

Подобные преобразования для c_2 приводят к выражению

$$c_2 = \frac{\bar{r} + \beta \tilde{x}}{1 - \beta^2} \left(1 + \beta \frac{a}{\bar{r}} \frac{\beta \bar{r} + \tilde{x}}{\bar{r} + \beta \tilde{x}} \right) = \frac{\bar{r} + \beta \tilde{x}}{1 - \beta^2} (1 + b).$$

Заметим, что в двух последних выражениях дробь после множителя $\beta a / \bar{r}$ в круглой скобке совпадает с формулой косинуса суммы "углов параллельности" Лобачевского. Действительно, если обозначить

$$\beta = \cos \Pi(u), \quad \frac{\tilde{x}}{\bar{r}} = \cos \Pi(v),$$

то

$$\frac{\beta \bar{r} + \tilde{x}}{\bar{r} + \beta \tilde{x}} = \frac{\cos \Pi(u) + \cos \Pi(v)}{1 + \cos \Pi(u) \cos \Pi(v)} = \cos \Pi(u + v).$$

Определим теперь интервал времени τ , в течение которого возмущения от всех точек a -сферы приходят одновременно в точку наблюдения ее электромагнитного поля. Этот интервал, как и выше, равен

$$\tau = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{c} = \frac{r'' - r' + 2a}{c(1 - \beta^2)},$$

где c — скорость света. Нетрудно установить, что τ имеет экстремум при условиях

$$\bar{r}^2 = x^2 \quad \text{и} \quad \rho = 0,$$

т.е. на оси x . В рассматриваемой области пространства при $\rho = 0$ всегда $|\tilde{x}| \geq a$, следовательно, здесь имеем два

экстремальных значения τ , одно на носу движущейся a -сферы:

$$\tau_1 = \frac{2a}{1 - \beta}, \quad \text{если } \tilde{x} > 0,$$

а другое — на ее корме:

$$\tau_2 = \frac{2a}{1 + \beta}, \quad \text{если } \tilde{x} < 0.$$

Оба значения τ отличны от нуля, поэтому здесь "одновременности" нет. Однако значение τ на носу a -сферы всегда больше, чем на корме, поэтому можно предположить, что на носу сферы потенциал всегда меньше, чем на корме.

7.7.2. Граничные δ_i -функции

Располагая выражениями для граничных λ_1 , λ_2 и c_1 , c_2 , найдем теперь граничные δ_i -функции. Первая такая функция по определению (7.31b) равна

$$\delta_1 = \frac{\lambda_2}{c_2} - \frac{\lambda_1}{c_1} = \frac{c_2 + a}{c_2} - \frac{c_1 - a}{c_1} = a \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) = a\sigma_c,$$

где, как видно, через σ_c обозначена сумма обратных значений c_1 и c_2 .

Вторая функция δ_2 равна

$$\delta_2 = \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} = \delta_c,$$

т.е. разности обратных значений c .

Для вычисления функции

$$\delta_3 = \frac{r^2 - a^2}{\lambda_2 c_2} - \frac{r^2 - a^2}{\lambda_1 c_1}$$

воспользуемся выражениями для обратных λ :

$$\frac{r^2 - a^2}{\lambda_1} = r' - \beta \tilde{x} + a, \quad \frac{r^2 - a^2}{\lambda_2} = r'' - \beta \tilde{x} - a,$$

в которых радикалы r' и r'' заменим через c_1 и c_2 :

$$r' = (1 - \beta^2)c_1 - \beta\tilde{x} + \beta^2a, \quad r'' = (1 - \beta^2)c_2 - \beta\tilde{x} - \beta^2a,$$

что позволяет записать

$$\frac{r^2 - a^2}{\lambda_1} = (1 - \beta^2)c_1 - 2\beta\tilde{x} + (1 + \beta^2)a,$$

$$\frac{r^2 - a^2}{\lambda_2} = (1 - \beta^2)c_2 - 2\beta\tilde{x} - (1 + \beta^2)a.$$

Тогда найдем :

$$\delta_3 = -(1 + \beta^2)\sigma_c - 2\beta\tilde{x}\delta_c,$$

т.е. третья δ -функция оказалась равной линейной комбинации величин σ_c и δ_c .

Для четвертой функции δ_4 воспользуемся вновь выражениями для обратных $\lambda_{1,2}$ через $c_{1,2}$, тогда после несложных преобразований найдем

$$\delta_4 = -4(1 - \beta^2) + 2(3 + \beta^2)\beta a\tilde{x}\sigma_c + \\ + [(1 - \beta^2)(r^2 - a^2) + 4\beta^2x^2 + 2(1 + \beta^2)a^2]\delta_c.$$

Функция δ_4 также представляется линейной комбинацией функций σ_c и δ_c , к тому же с постоянным членом.

На этом заканчиваем нахождение алгебраических δ -функций и отыщем оставшиеся две трансцендентные. Первая из них — функция δ_5 — по определению (7.31b) равна

$$\delta_5 = \text{Arsh} \frac{\tilde{x} + \beta\lambda_2}{\rho} - \text{Arsh} \frac{\tilde{x} + \beta\lambda_1}{\rho} = \ln \frac{\tilde{x} + \beta\lambda_2 + c_2}{\tilde{x} + \beta\lambda_1 + c_1}.$$

В этом выражении сделаем замену

$$c_2 = \lambda_2 - a, \quad c_1 = \lambda_1 + a$$

согласно уравнениям границ ОСТВ в рассматриваемой области пространства. Тогда находим

$$\delta_5 = \ln \frac{(1 + \beta)\lambda_2 + \tilde{x} - a}{(1 + \beta)\lambda_1 + \tilde{x} + a}.$$

Заменим здесь λ их выражением через $\bar{r}$:

$$\lambda_1 = \frac{\bar{r} + \beta\tilde{x} - a - \frac{\beta a \tilde{x}}{\bar{r}}}{1 - \beta^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\bar{r} + \beta\tilde{x} + a + \frac{\beta a \tilde{x}}{\bar{r}}}{1 - \beta^2}.$$

Тогда, раскрыв скобки и приведя подобные члены в числителе и знаменателе, находим

$$\delta_5 = \ln \frac{r(\bar{r} + \tilde{x}) + \beta a(\bar{r} + \tilde{x})}{\bar{r}(\bar{r} + \tilde{x}) - \beta a(\bar{r} + \tilde{x})} = 2\text{Arth} \frac{\beta a}{\bar{r}}.$$

Заметим, что функция δ_5 остается постоянной на каждом эллипсоиде $\bar{r} = \text{const}$, меняясь по величине только при переходе с одного из них на другой, и при $\bar{r} \gg a$ обращается в нуль.

Аналогично находим выражение для функции δ_6 :

$$\begin{aligned} \delta_6 &= \text{Arsh} \frac{r^2 + \beta\tilde{x}\lambda_2}{\beta\rho\lambda_2} - \text{Arsh} \frac{r^2 + \beta\tilde{x}\lambda_1}{\beta\rho\lambda_1} = \\ &= \ln \frac{\lambda_1(r^2 + \beta\tilde{x}\lambda_2 + rc_1)}{\lambda_2(r^2 + \beta\tilde{x}\lambda_1 + rc_2)}. \end{aligned}$$

Здесь также заменим граничные c_i через a и λ_i согласно уравнениям границ ОСТВ:

$$\delta_6 = \ln \left[\frac{\lambda_1 r(r - a) + (r + \beta\tilde{x})\lambda_2}{\lambda_2 r(r + a) + (r + \beta\tilde{x})\lambda_1} \right].$$

Затем числитель второй логарифмируемой дроби разделим на λ_2 , а знаменатель — на λ_1 , и в полученное выражение подставим обратные значения граничных λ_i , выраженные через $\bar{r}$:

$$\delta_6 = \ln \frac{r - a}{r + a} + \ln \frac{r(\bar{r} - \beta\tilde{x})\left(1 - \frac{a}{\bar{r}}\right) + (r + a)(r + \beta\tilde{x})}{r(\bar{r} - \beta\tilde{x})\left(1 + \frac{a}{\bar{r}}\right) + (r - a)(r + \beta\tilde{x})}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим окончательное выражение для функции δ_6 :

$$\delta_6 = -2 \left(\operatorname{Arth} \frac{a}{\bar{r}} - \operatorname{Arth} \frac{\beta a \tilde{x}}{r \bar{r}} \right).$$

Отметим, что если внутри a -сферы функция δ_6 определялась лишь отношением r/a и не зависела от β , то здесь она зависит как от r , так и от β и угла ϑ .

Выражения для обратных c_1 и c_2 представим в следующем виде:

$$\frac{1}{c_1} = (\bar{r} - \beta \tilde{x}) \frac{1+b}{r_-^2}, \quad \frac{1}{c_2} = (\bar{r} - \beta \tilde{x}) \frac{1-b}{r_+^2}, \quad (7.42e)$$

где введены два новых "расстояния"

$$r_-^2 = r^2 + \beta^2 a^2 - 2\beta a \tilde{x}, \quad r_+^2 = r^2 + \beta^2 a^2 + 2\beta a \tilde{x}.$$

Эти величины представляют собой расстояния от двух фокусов, находящихся в точках $(\beta a, 0)$ и $(-\beta a, 0)$, т.е. внутри a -сферы, и потому r_- , r_+ никогда не обращаются в нуль вне ее, т.е. в рассматриваемой области пространства. Отсюда находим σ_c и δ_c :

$$\begin{aligned} \sigma_c &= (\bar{r} - \beta \tilde{x}) \left(\frac{1-b}{r_+^2} + \frac{1+b}{r_-^2} \right), \\ \delta_c &= (\bar{r} - \beta \tilde{x}) \left(\frac{1-b}{r_+^2} - \frac{1+b}{r_-^2} \right). \end{aligned} \quad (7.42f)$$

Наконец, выпишем для справки все δ -функции:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= a\sigma_c, \\ \delta_2 &= \delta_c, \\ \delta_3 &= -(1 + \beta^2)a\sigma_c - 2\beta \tilde{x}\delta_c, \\ \delta_4 &= -4(1 - \beta^2) + 2(3 + \beta^2)\beta a \tilde{x}\sigma_c + [4\beta^2 x^2 + \\ &\quad + (1 - \beta^2)(r^2 - a^2) + 2(1 + \beta^2)a^2]\delta_c, \\ \delta_5 &= 2\operatorname{Arth} \frac{\beta a}{r}, \\ \delta_6 &= 2 \left(\operatorname{Arth} \frac{\beta a \tilde{x}}{r \bar{r}} - \operatorname{Arth} \frac{a}{\bar{r}} \right). \end{aligned} \quad (7.42g)$$

Теперь займемся отысканием формул для потенциалов.

7.7.3. Скалярный потенциал

Скалярный потенциал при $r \geq a$ обозначим Φ_{12} и будем искать его, исходя из общей формулы (7.33). Подставляя в нее δ_i из (7.42g), найдем вначале сумму членов с алгебраическими δ -функциями:

$$\begin{aligned} s_a &= af_1\sigma_c + f_2\delta_c = \\ &= \frac{a}{r^2} \left(\frac{r^2 + \beta^2 a^2 + 2\beta ax}{c_2} + \frac{r^2 + \beta^2 a^2 - 2\beta ax}{c_1} \right). \end{aligned}$$

Замечаем, что числители дробей, заключенных в круглую скобку, равны r_-^2 и r_+^2 , тогда с учетом (7.42e) находим

$$s_a = 2a \frac{\bar{r} - \beta x}{r^2}.$$

Как видно, оба расстояния r_- и r_+ благополучно сократились подобно тому, как расстояние r_0 сокращалось в области $r < a$.

Подставляя полученное выражение и остальные граничные δ -функции в (7.33), находим скалярный потенциал Φ_{12} вне a -сферы:

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \frac{e}{2} \left[\frac{\bar{r} - \beta \tilde{x}}{r^2} + \frac{1 - \beta^2}{\beta a} \operatorname{Arth} \frac{\beta a}{\bar{r}} + \right. \\ &\quad \left. + \beta \tilde{x} \frac{r^2 - a^2}{ar^3} \left(\operatorname{Arth} \frac{\beta a \tilde{x}}{r\bar{r}} - \operatorname{Arth} \frac{a}{r} \right) \right]. \quad (7.43) \end{aligned}$$

Этот потенциал полезно представить в виде суммы трех потенциалов

$$\Phi_{12} = \Phi'_{12} + \Phi''_{12} + \Phi'''_{12}, \quad (7.43a)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi'_{12} &= \frac{e}{2r^2} (\bar{r} - \beta \tilde{x}), \\ \Phi''_{12} &= \frac{e}{2a} \frac{1 - \beta^2}{\beta} \operatorname{Arth} \frac{\beta a}{\bar{r}}, \\ \Phi'''_{12} &= \frac{\beta e}{2r} \frac{r^2 - a^2}{ar} \left(\operatorname{Arth} \frac{a}{r} - \operatorname{Arth} \frac{\beta a \tilde{x}}{r\bar{r}} \right) \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Опираясь на эту формулу, ниже найдем некоторые предельные выражения для скалярного потенциала.

Прежде всего посмотрим, чему равен найденный потенциал, когда величина β столь мала, что ею можно пренебречь. В этом случае, очевидно, $\bar{r}$ по величине приближается к r , поэтому первое слагаемое в (7.43a) равно

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Phi'_{12} = \frac{e}{2r}.$$

Третье слагаемое в (7.43a), имеющее множитель β , при $\beta \rightarrow 0$ равно нулю, а для второго находим

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Phi''_{12} \approx \frac{e}{2\beta a} \frac{1 - \beta^2}{r} \beta a = \frac{e}{2r}.$$

В итоге получаем

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Phi_{12} = \frac{e}{r} = \Phi_{02}, \quad (7.43_1)$$

т.е. скалярный потенциал вне неподвижной заряженной сферы радиуса a .

В формуле (7.43) положим $\beta \neq 0$ и $r \gg a$, тогда найдем

$$\lim_{\frac{a}{r} \rightarrow 0} \Phi_{12} = \frac{e}{r} (\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} - \beta \cos \vartheta). \quad (7.43_2)$$

Эта формула, как читатель, наверное, помнит, задает потенциал точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно (см. (5.19) в гл. V).

Пусть теперь $r \rightarrow a$, разумеется, со стороны $r > a$, тогда находим

$$\lim_{r \rightarrow a} \bar{r} = a,$$

как уже говорилось выше. В результате первый член формулы (7.43) примет вид

$$\lim_{r \rightarrow a} \Phi'_{12} = e \frac{\bar{r} - \beta \tilde{x}}{2r^2} \rightarrow e \frac{1 - \beta \cos \vartheta}{2a}.$$

Далее, второй член

$$\lim_{r \rightarrow a} \Phi''_{12} = e \frac{1 - \beta^2}{\beta a} \operatorname{Arth} \frac{\beta a}{\bar{r}} = \frac{e}{2a} \mathcal{H}(\beta).$$

Наконец, третий член, как нетрудно убедиться, обращается в нуль благодаря множителю $r^2 - a^2$, и вся формула (7.43) принимает вид

$$\lim_{r \rightarrow a} \Phi_{12} = \frac{e}{2a} (1 + \mathcal{H}_\beta - \beta \cos \vartheta). \quad (7.43_3)$$

Она в точности повторяет соответствующую формулу для Φ_{11} при тех же условиях (см. (7.39₃)). Отсюда заключаем, что формулы (7.39) и (7.43) описывают скалярный потенциал непрерывным образом во всем пространстве.

Из изложенного видно, что при $\beta < 1$ скалярный потенциал движущейся равномерно заряженной сферы описывается, как и в электростатике, двумя формулами — (7.39) при $r < a$ и (7.43) при $r > a$. Эти формулы достаточно общие и включают как частные случаи электростатику покоящейся сферы, когда $\beta \rightarrow 0$, и движущийся точечный заряд, если $a/r \rightarrow 0$. Скалярный потенциал движущейся сферы в любой точке остается конечным, поэтому имеющая место сингулярность потенциала точечного заряда связана именно с предположением о его точечности. Эта сингулярность устраняется, если заряд имеет некоторую структуру в пространстве.

На очень больших по сравнению с радиусом сферы расстояниях ее потенциал по величине стремится к потенциалу точечного заряда той же величины. Таким образом, скалярный потенциал движущейся равномерно и прямолинейно сферы непрерывен по двум параметрам — по ее относительной скорости β и по радиусу сферы a . Ничего подобного в классической электродинамике до сих пор не было, равно как нет и в СТО.

Распределение скалярного потенциала на оси x показано на рис 7.5, для различных значений β , и на плоскости (x, ρ) — ниже на рис. 7.5. Отметим, что скалярный потенциал при $\beta < 1$ имеет максимум на оси x в точке, находящейся позади a -сферы.

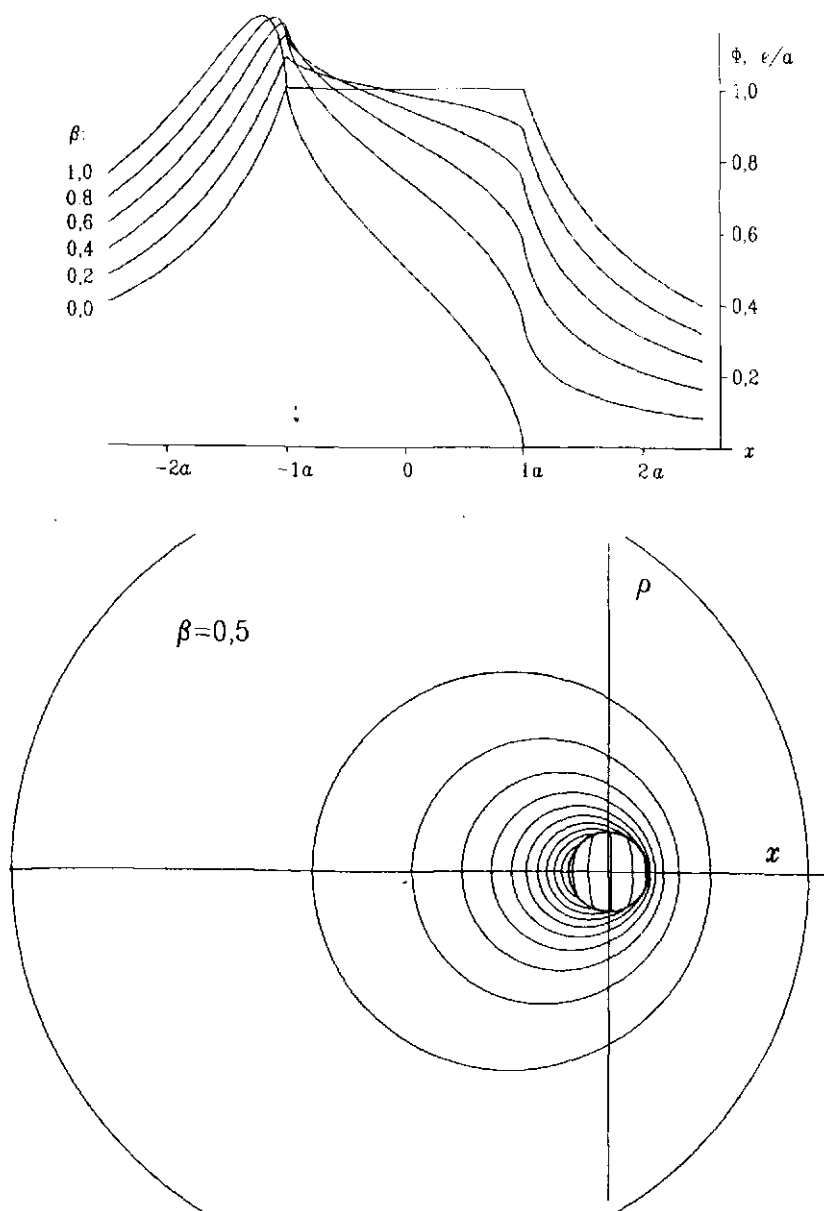


Рис. 7.5. Скалярный потенциал движущейся сферы $\Phi(x)$ при разных β вверх, внизу — эквипотенциалы $\Phi(x, \rho) = 0, 1ne/a$, $n = 1 \div 11$

Найдем этот максимум, для чего потенциал Φ_{12} при $\tilde{x} < -a$ и $\rho = 0$ представим как

$$\Phi_{12} = \frac{e}{2|\tilde{x}|} \left[1 + \beta + |\tilde{x}| \frac{1 - \beta^2}{\beta a} \operatorname{Arth} \frac{\beta a}{|\tilde{x}|} + \right. \\ \left. + \beta \frac{\tilde{x}^2 - a^2}{a|\tilde{x}|} \left(\operatorname{Arth} \frac{a}{|\tilde{x}|} + \operatorname{Arth} \frac{\beta a}{|\tilde{x}|} \right) \right].$$

В этой формуле два гиперболических арктангенса — первый и последний — имеют один и тот же аргумент, поэтому стоящие при них коэффициенты можно сложить:

$$\left(|\tilde{x}| \frac{1 - \beta^2}{\beta a} + \beta \frac{\tilde{x}^2 - a^2}{a|\tilde{x}|} \right) \operatorname{Arth} \frac{\beta a}{|\tilde{x}|} = \frac{\tilde{x}^2 - \beta^2 a^2}{\beta a |\tilde{x}|} \operatorname{Arth} \frac{\beta a}{|\tilde{x}|}.$$

Введем новые переменные

$$\alpha = \frac{a}{\tilde{x}}, \quad \alpha' = \beta \alpha.$$

Тогда, вспоминая определение функции Гюйгенса $\mathcal{H}$ (см. разд. 5.11), придадим предыдущей формуле следующий вид:

$$\Phi_{12} = -\frac{e}{2\tilde{x}} \{ 1 + \mathcal{H}(\alpha') + \beta [1 + \mathcal{H}(\alpha)] \}.$$

В этой формуле опущен знак модуля у переменной $\tilde{x}$, т.к. функция $\mathcal{H}$ произвольного аргумента

$$\mathcal{H}(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{\xi} \operatorname{Arth} \xi$$

является четной относительно него.

Теперь найдем частную производную Φ_{12} по $\tilde{x}$:

$$\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \tilde{x}} = \frac{e}{2\tilde{x}^2} \{ 1 + \mathcal{H}(\alpha') + \alpha' \dot{\mathcal{H}}(\alpha') + \beta [1 + \mathcal{H}(\alpha) + \alpha \dot{\mathcal{H}}(\alpha)] \}.$$

Здесь точкой обозначены полные производные функции $\mathcal{H}$ по ее аргументу.

Несложно показать, что для функции $\mathcal{H}$ любого аргумента ξ и ее производной всегда выполняется равенство

$$1 + \mathcal{H}(\xi) + \xi \dot{\mathcal{H}}(\xi) = -2(1 - \xi \operatorname{Arth} \xi).$$

Используя это равенство, перепишем производную потенциала как

$$\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \tilde{x}} = \frac{e}{\tilde{x}^2} [1 - \alpha' \operatorname{Arth} \alpha' + \beta (1 - \alpha \operatorname{Arth} \alpha)].$$

Приравнявая эту производную нулю и заменяя α' на $\beta\alpha$, получаем трансцендентное уравнение

$$1 - \beta\alpha \operatorname{Arth} \beta\alpha + \beta(1 - \alpha \operatorname{Arth} \alpha) = 0 \quad (7.43b)$$

относительно переменной $\alpha \equiv a/\tilde{x}$, которое и определит положение максимума потенциала Φ_{12} на оси $\tilde{x}$.

Это уравнение при $\beta \rightarrow 1$ принимает вид

$$1 - \alpha \operatorname{Arth} \alpha = 0$$

и его корень равен $\tilde{x}_0 = -1,199689a$. Если же $0 < \beta < 1$, то уравнение (7.43b) имеет действительный корень, величина которого при уменьшении β быстро приближается к $-a$, и, например, при $\beta = 0,1$ $\tilde{x}_0$ отличается от $-a$ всего на $\approx 6 \cdot 10^{-7}a$.

Если наблюдатель движется с той же скоростью, что и заряженная сфера, то с его точки зрения потенциал представляется электростатическим. Но согласно известной теореме Ирншоу распределение такого потенциала в свободном от других зарядов пространстве таково, что потенциал не может иметь пространственного максимума или минимума. Видим, что здесь эта теорема не выполняется потому, что она, как известно, была доказана для потенциала, удовлетворяющего уравнению Лапласа.

Из рис. 7.5 отчетливо видно, что эквипотенциальные поверхности всегда замкнуты. Эти поверхности перераспределяются по мере роста скорости движения сферы, а те из них, которые пересекают поверхность сферы, испытывают излом в точке пересечения. Распределение скалярного потенциала вдоль оси $\tilde{x}$ несимметрично: величина потенциала перед сферой всегда меньше, чем на таком

же расстоянии позади нее, что наглядно демонстрирует необратимость полученного распределения.

Согласно выражению (7.43₃) потенциал на поверхности движущейся сферы зависит от угла ϑ , и между ее носовой и кормовой точками появляется разность потенциалов $\beta e/a$. Эта разность потенциалов довольно велика, как уже отмечалось выше, и ее, безусловно, достаточно, чтобы изменить начальное (при $\beta = 0$) распределение свободных зарядов на поверхности a -сферы. Но здесь, как уже говорилось, рассматривается диэлектрическая заряженная сфера, на которой распределение зарядов предполагается неизменным несмотря на вызванную движением разность потенциалов на сфере. Решение же задачи для "металлической" сферы, на поверхности которой скалярный потенциал оставался бы постоянным при движении, еще предстоит найти.

Наконец, найдем предельное выражение для Φ_{12} при $\beta = 1$. При этом функция $\bar{r}$ имеет различные значения в зависимости от того, при каком значении $\tilde{x}$ она вычисляется:

$$\bar{r} = \begin{cases} \tilde{x}, & \text{если } \tilde{x} > a, \\ a, & \text{если } |\tilde{x}| < a, \\ |\tilde{x}|, & \text{если } \tilde{x} < -a. \end{cases} \quad (7.43c)$$

Поэтому при $\beta = 1$ скалярный потенциал задается тремя различными формулами.

Прежде всего, если $x > a$, то оба граничных значения λ оказываются отрицательными, следовательно, в эту область пространства созданные зарядами на a -сфере электромагнитные возмущения не приходят, поэтому там следует положить скалярный потенциал равным нулю.

Если $|\tilde{x}| < a$, то второй член в формуле (7.43) обращается в нуль, и вся формула с учетом (7.43c) принимает вид:

$$\Phi_{12} = \frac{e}{2r} \left[\frac{a - \tilde{x}}{r} + \tilde{x} \frac{r^2 - a^2}{ar^2} \left(\text{Arth} \frac{\tilde{x}}{r} - \text{Arth} \frac{a}{r} \right) \right].$$

Наконец, когда $\tilde{x} < -a$, то

$$\Phi_{12} = \frac{e|\tilde{x}|}{r^2} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{ar} \text{Arth} \frac{a}{r} \right) = \frac{e|\tilde{x}|}{r^2} (1 + \mathcal{H}_{\frac{a}{r}}).$$

Поэтому скалярный потенциал Φ_{12} при $\beta = 1$ вне a -сферы определяется уже тремя различными функциями

$$\Phi_{12} = \begin{cases} 0, & \tilde{x} > a, \\ \frac{e}{2r} \left[\frac{a - \tilde{x}}{r} - \right. \\ \left. - \tilde{x} \frac{r^2 - a^2}{ar^2} \left(\text{Arth} \frac{a}{r} - \text{Arth} \frac{\tilde{x}}{r} \right) \right], & |\tilde{x}| < a, \\ -\frac{e\tilde{x}}{r^2} \left(1 + \mathcal{H}_2 \right), & \tilde{x} < -a. \end{cases} \quad (7.43_4)$$

Можно показать, что эти три функции, оставаясь всюду конечными, описывают потенциал непрерывном образом, при этом одна функция переходит в другую на границах, разделяющих пространство вне a -сферы. Таким образом, мы получили рациональное описание скалярного потенциала не только при $\beta < 1$, но остающееся таковым при $\beta \rightarrow 1$. При $\beta = 1$ зарождающийся конус Маха ограничен плоскостями $|\tilde{x}| = a$, при этом область пространства ($r \geq a$, $|x| \leq a$) назовем пограничным конусом Маха, а область ($r \geq a$, $x < -a$) — основным конусом.

Как нетрудно получить из (7.43₄) при $a/r \ll 1$ имеем

$$\lim_{\frac{a}{r} \rightarrow 0} \Phi_{12} = -2 \frac{e\tilde{x}}{r^2}, \quad (7.43_5)$$

т.е. точную формулу для потенциала точечного заряда при $\beta = 1$.

Перейдем теперь к вычислению компонент векторного потенциала в этой области пространства.

7.7.4. Векторный потенциал $A_{\rho 12}$

Вывод формул для компонент векторного потенциала вне сферы начнем с компоненты $A_{\rho 12}$, т.к. согласно формуле (7.32) для определения компоненты $A_{x 12}$ требуется знать компоненту $A_{\rho 12}$. Для нее вновь воспользуемся общей формулой (7.31), определениями (7.31a) – (7.31c) и δ -функциями из (7.42g).

Если внутри a -сферы алгебраические δ -функции представляли собой дроби с общим знаменателем r_0^2 , то вне ее эти функции являются суммами или разностями дробей с двумя разными знаменателями — r_-^2 и r_+^2 , как можно видеть в (7.42g). В случае скалярного потенциала Φ_{12} эти дроби благополучно сократились, как мы видели выше, и к такому же результату приходим в формулах для компонент вектора $\mathbf{A}_{12}$. Однако вывод соответствующих формул оказывается довольно громоздким, поэтому он вынесен в приложения 2 и 3 для тех читателей, кто интересуется математическими выкладками.

Согласно формуле (11) приложения 2, ρ -компонента векторного потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} A_{\rho 12} = & A_{02} \sin \vartheta - \frac{e}{2r} \left\{ \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \operatorname{Arth} \frac{\beta \tilde{x}}{\varrho \bar{r}} + \frac{\beta \tilde{x}}{4\bar{r}} h_2 + \right. \\ & \left. + \frac{\beta^2}{4} \left[h_3 + h_4 \left(\mathcal{H}(\varrho^{-1}) - \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \operatorname{Arth} \frac{\beta \tilde{x}}{\varrho \bar{r}} \right) \right] \right\} \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (7.44)$$

где введены сокращения

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{\bar{\varrho}^2 - 1}{\bar{\varrho}^2 - \beta^2} \left[2 \left(1 - \frac{\beta^2}{\varrho^2} \cos^2 \vartheta \right) + 3\beta^2 \left(\frac{1}{\varrho^2} - 1 \right) \sin^2 \vartheta - \right. \\ &\quad \left. - 10 \left(\frac{1}{\bar{\varrho}^2} - 1 \right) \bar{r} \frac{\bar{r} - \beta \tilde{x}}{r^2}, \right. \\ h_3 &= 2 \left(1 + \frac{\cos^2 \vartheta}{\varrho^2} \right) - 3 \left(\frac{1}{\varrho^2} - 1 \right) \sin^2 \vartheta, \\ h_4 &= 3 \left[4 \frac{\cos^2 \vartheta}{\varrho^2} - \left(\frac{1}{\varrho^2} - 1 \right) \sin^2 \vartheta \right], \end{aligned}$$

а ϱ и $\bar{\varrho}$ суть величины r и $\bar{r}$, выраженные в единицах радиуса рассматриваемой сферы.

Первый член формулы (7.44) есть ρ -компонента векторного потенциала неподвижной сферы (см. разд. 7.5.3)

$$A_{02} = \frac{e}{2r} [1 + H(\varrho^{-1})],$$

а остальные можно рассматривать как динамические поправки к этой компоненте, вызванные движением сферы.

При $\beta \ll 1$ два члена в первой строке (7.44) примерно пропорциональны первой степени β , а остальные — второй.

Наконец, запишем $A_{\rho 12}$ в виде

$$A_{\rho 12} = A_{12} \sin \vartheta, \quad (7.44a)$$

который потребуется для компоненты $A_{x 12}$.

Пределы компоненты $A_{\rho 12}$. С учетом сказанного выше о динамических поправках к величине этой компоненты можем записать

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} A_{\rho 12} = A_{02} \sin \vartheta. \quad (7.44_1)$$

Следовательно, формула (7.44) включает как частный случай неподвижную сферу, если $\beta \rightarrow 0$.

Если $a/r \rightarrow 0$, то имеем

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\bar{\varrho}} = 0, \quad \mathcal{H}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 1, \\ h_2 &= 12 - 13\beta^2 \sin^2 \vartheta - 10\beta \cos \vartheta \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta}, \\ h_3 &= 2 + 3 \sin^2 \vartheta, \quad h_4 = 3 \sin^2 \vartheta, \\ &\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \operatorname{Arth} \frac{\beta}{\bar{\varrho}} \cos \vartheta = \frac{\beta \cos \vartheta}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta}}. \end{aligned}$$

Подставим эти значения в формулу (7.44), тогда после довольно простых, но громоздких (в написании) преобразований, получим

$$\lim_{a/r \rightarrow 0} A_{\rho 12} = \frac{e}{r} \left(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} - \beta \cos \vartheta \right)^2 \sin \vartheta. \quad (7.44_2)$$

Это выражение представляет собой компоненту A_{ρ} векторного потенциала точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно со скоростью β .

Пусть теперь β находится в промежутке $(0, 1)$, а $r \rightarrow a$, тогда очевидны равенства

$$\bar{r} = a, \quad \varrho = \bar{\varrho} = 1.$$

Исходя из них, находим следующие значения:

$$h_2 = 0, \quad h_3 = 2(1 + \cos^2 \vartheta), \quad h_4 = 12 \cos^2 \vartheta$$

и

$$\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \operatorname{Arth} \frac{\beta \hat{x}}{\bar{\varrho} r} = 0.$$

Подставляя эти значения в (7.44), найдем

$$\lim_{r \rightarrow a} A_{\rho 12} = \frac{e}{2a} \left[1 - \frac{\beta^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) \right] \sin \vartheta. \quad (7.44_3)$$

Сравнивая эту формулу с (7.40₃), видим, что ρ -компонента описывается непрерывно, хотя и задается разными функциями в различных областях пространства.

Перейдем к вычислению последнего предела для этой компоненты векторного потенциала, когда $\beta \rightarrow 1$. Прежде всего заметим, что в этом случае должно выполняться пространственное ограничение

$$x \leq a,$$

следующее из требования причинности: перед сферой потенциалы при $\beta = 1$ не определяются ее зарядом, и потому там $A_{\rho 12}$ равна, как и Φ_{12} , нулю.

Далее, среднее расстояние $\bar{r}$ в этом случае равно

$$r = \begin{cases} a, & \text{если } |x| < a, \\ |x|, & \text{если } x < -a. \end{cases}$$

Отсюда следует, что мы получим два предельных выражения для компоненты $A_{\rho 12}$: одно при $|x| < a$, т.е. в бесконечном цилиндре, имеющем два плоских дна, ортогональных оси x , и высоту, равную диаметру a -сферы, другое же — во всем пространстве позади a -сферы, где $x < -a$.

При $\beta \rightarrow 1$ дробь d_e из выражения для h_2 в (7.44), как нетрудно установить, равна

$$d_e = \begin{cases} \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 \sin^2 \vartheta}, & \text{если } |\hat{x}| < a, \\ 1, & \text{если } \hat{x} < -a. \end{cases}$$

В результате при $|\tilde{x}| < a$ находим следующие пределы:

$$\begin{aligned}\bar{\varrho} &= 1, \\ h_2 &= \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^4 \sin^2 \vartheta} [2(\varrho^2 - \cos^2 \vartheta) - 3(\varrho^2 - 1) \sin^2 \vartheta] + \\ &\quad + \frac{10}{\varrho^4} (\varrho^2 - 1)(1 - \varrho \cos \vartheta), \\ h_3 &= \frac{2}{\varrho^2} (\varrho^2 + \cos^2 \vartheta) + 3 \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2} \sin^2 \vartheta, \\ h_4 &= \frac{12}{\varrho^2} \cos^2 \vartheta + 3 \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2} \sin^2 \vartheta.\end{aligned}$$

Подставляя все это в (7.44), получаем первое предельное выражение для ρ -компоненты векторного потенциала (только при $|x| \leq a$)

$$\begin{aligned}\lim_{\beta \rightarrow 1} A_{\rho 12} &= \frac{e}{2r} \left[1 - \frac{h_2}{4} \varrho \cos \vartheta - \frac{h_3}{4} + \right. \\ &\quad + \frac{\varrho^2 + 3(1 + \varrho^2 \cos^2 \vartheta) - 15 \cos^2 \vartheta}{4\varrho^2} (\mathcal{H}(\varrho^{-1}) - \\ &\quad \left. - \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \text{Arth} \cos \vartheta) \right] \sin \vartheta.\end{aligned}\tag{7.44_4}$$

В последнем выражении для $A_{\rho 12}$ имеется функция

$$\xi = \text{Arth} \cos \vartheta = \ln \left(\text{ctg} \frac{\vartheta}{2} \right),$$

представляющая собой угол параллельности Лобачевского. Если в (7.44₄) положить $r = a$, то найдем

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} A_{\rho 12} = \frac{e}{4} \sin^3 \vartheta.\tag{7.44_5}$$

Такое же выражение было получено выше для $A_{\rho 11}$ на поверхности сферы, движущейся со световой скоростью, — см. формулу (7.40₅).

Второй предел

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \bar{r} = |x| = -x$$

определяет потенциал позади a -сферы, когда $x < -a$. Для этого значения $\bar{r}$ находим

$$h_2 = \frac{2}{\varrho^2}(\varrho^2 - \cos^2 \vartheta) - \frac{3}{\varrho^2}(\varrho^2 - 1) \sin^2 \vartheta + \\ + \frac{20}{\varrho^2}(\varrho^2 - 1) \cos^2 \vartheta,$$

$$h_3 = \frac{2}{\varrho^2}(\varrho^2 + \cos^2 \vartheta) + \frac{3}{\varrho^2}(\varrho^2 - 1) \sin^2 \vartheta,$$

$$h_4 = \frac{3}{\varrho^2}[4 \cos^2 \vartheta + (\varrho^2 - 1) \sin^2 \vartheta],$$

$$\text{Arth} \frac{\beta \tilde{x}}{r \bar{\varrho}} = -\text{Arth} \frac{1}{\varrho}.$$

Знак минус в последней строке появился потому, что $x < -a$. Тогда для компоненты $A_{\rho 12}$ находим

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} A_{\rho 12} = \frac{e \sin \vartheta}{2r} \left\{ 5 \cos^2 \vartheta - 1 + \right. \\ \left. + [4\varrho^2 - 12 \cos^2 \vartheta - 3(\varrho^2 - 1) \sin^2 \vartheta] \frac{1 + \mathcal{H}(\varrho^{-1})}{2\varrho^2} \right\}. \quad (7.44_6)$$

Положим $\varrho^{-1} \rightarrow 0$ в последнем выражении, тогда

$$\mathcal{H}(\varrho^{-1}) \rightarrow 1$$

и

$$\lim_{\substack{a/r \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 1}} A_{\rho 12} = \frac{4e}{r} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta. \quad (7.44_7)$$

Это выражение представляет собой ρ -компоненту точечного заряда, движущегося со скоростью света. Именно эта величина получится, если в (7.44₂) устремить β к единице и помнить, что при этом $\cos \vartheta < 0$.

7.7.5. Векторный потенциал A_{x12}

Как следует из (7) приложения 3, общая формула для компоненты A_{x12} имеет вид

$$\begin{aligned}
 A_{x12} = & \mathcal{A}_{12} \cos \vartheta + \\
 & + \frac{\beta e}{4r} \left[3(\varrho^2 - 1) \frac{\bar{r} - \beta x}{r \varrho^2} - \bar{\varrho} \frac{1 - \beta^2}{\varrho^3} \frac{\varrho^2 - \beta^2}{\bar{\varrho}^2 - \beta^2} + \right. \\
 & + \frac{\beta}{\varrho^2} \cos \vartheta (\varrho^2 - 3) \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \left(\text{Arth} \frac{\beta \hat{x}}{r \varrho} - \text{Arth} \frac{1}{\varrho} \right) \Big] + \\
 & + \frac{e}{4a} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \left[(1 + \beta^2) \text{Arth} \frac{\beta}{\varrho} - \frac{\beta \bar{\varrho}}{\varrho^4} \frac{(\varrho^2 - \beta^2)^2}{\bar{\varrho}^2 - \beta^2} \right].
 \end{aligned} \quad (7.45)$$

Первая строка этой формулы содержит, как видно из (7.44a), компоненту $A_{\rho 12}$, умноженную на $\text{ctg } \vartheta$; вторая и третья строки — содержат поправки к x -компоненте векторного потенциала порядка β^1 и выше, а четвертая — при малых значениях β имеет величину порядка β^2 .

Таким образом, формулы (7.44) и (7.45) завершают решение задачи о компонентах векторного потенциала вне движущейся заряженной сферы при $\beta \leq 1$, и чтобы убедиться в этом, найдем предельные выражения формулы (7.45), аналогичные тем, что были найдены выше для (7.44).

Пределы компоненты A_{x12} . Если $\beta \rightarrow 0$, то из формулы (7.45) следует, что динамические поправки обращаются в нуль, и получаем

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} A_{x12} = \frac{e}{2r} \left(1 + \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \text{Arth } \varrho^{-1} \right) = A_{02} \cos \vartheta, \quad (7.45_1)$$

т.е. соответствующую компоненту векторного потенциала вне неподвижной заряженной сферы, если сравнить это выражение с (7.35b).

Если величина β находится в промежутке $(0, 1)$, то на поверхности a -сферы, где $r = a$, эта составляющая вектор-

ного потенциала имеет значение

$$\lim_{r \rightarrow a} A_{x12} = \frac{e}{2a} \left\{ \left[1 - \frac{\beta^2}{2}(1 + \cos^2 \vartheta) \right] \cos \vartheta + \right. \\ \left. + \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} [(1 + \beta^2) \operatorname{Arth} \beta - \beta(1 - \beta^2)] \right\}. \quad (7.45_2)$$

Сравнивая это равенство с (7.41₃), видим что при $r = a$ компонента $A_{x12} = A_{x11}$.

Следующим найдем предел, когда величина a/r настолько меньше 1, что ею можно пренебречь при сравнении с 1. В этом случае имеем

$$\lim_{a/r \rightarrow 0} A_{x12} = \frac{e}{r} \left(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} - \beta \cos \vartheta \right) \cos \alpha, \quad (7.45_3)$$

где

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} \cos \vartheta + \beta \sin^2 \vartheta.$$

Очевидно, что угол α представляет собой угол в треугольнике встречи точечного заряда (см. разд. 5.3), и компонента A_{x12} движущейся заряженной сферы в точности равна соответствующей компоненте точечного заряда той же величины, имеющего такую же скорость. Для угла α можем записать еще одно равенство

$$\sin \alpha = (\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} - \beta \cos \vartheta) \cos \vartheta,$$

с помощью которого и соотношений (7.44₃), (7.43₂) найдем, что при $r \gg a$ выполняются равенства

$$A_{x12}(r \gg a) = \Phi_{12}(r \gg a) \cos \alpha,$$

$$A_{\rho 12}(r \gg a) = \Phi_{12}(r \gg a) \sin \alpha.$$

Как видим, последние выражения для векторного потенциала a -сферы полностью совпадают с потенциалами точечного заряда, а между скалярным и векторным потенциалами выполняется соотношение (4.4).

Для отыскания предельного выражения для компоненты A_{x12} векторного потенциала при $\beta \rightarrow 1$ будем, как и выше, различать три случая. Если $\tilde{x} > a$, то в этом случае полагаем

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} A_{x12} = 0, \quad (7.45_4)$$

т.к. в эту область пространства не приходят электромагнитные возмущения от сферы, имеющей скорость света.

Если $|\tilde{x}| \leq a$, то находим

$$A_{x12} = A_{\rho 12} \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{e}{4r} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} \left[3 \frac{1 - \rho \cos \vartheta}{\rho} - \frac{\rho^2 - 3}{\rho} (\operatorname{Arth} \rho^{-1} - \operatorname{Arth} \cos \vartheta) \right]. \quad (7.45_5)$$

Разумеется, сюда следует подставить компоненту $A_{\rho 12}$ из (7.44₆).

Наконец, если $\tilde{x} < -a$, то второй предел имеет вид

$$A_{x12} = A_{\rho 12} \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{e}{2r} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} \left(3 + \frac{\rho^2 - 3}{\rho} \operatorname{Arth} \rho^{-1} \right) \cos \vartheta, \quad (7.45_6)$$

и сюда следует подставить $A_{\rho 12}$ из (7.44₅).

На этом закончим рассмотрение потенциалов движущейся заряженной сферы конечного радиуса при $\beta \leq 1$. Прежде чем перейти к следующей, более высокой скорости, подчеркнем, что полученные для случая $\beta < 1$ формулы остаются рациональными и при $\beta = 1$.

В общем виде потенциалы медленно движущейся сферы ($\beta \ll 1$) и на большом удалении от нее ($r \gg a$) отличаются от потенциалов неподвижного точечного заряда на поправки, вызванные двумя причинами: движением сферы и ее размерами. Если когда-нибудь удастся эти поправки экспериментально разделить, то достаточно точное "измерение" потенциала даст информацию не только о скорости заряда, но и о его размерах.

7.8. Потенциалы при $\beta = 1$ внутри сферы

При этом значении β мы уже нашли потенциалы как соответствующие пределы задающих их функций при $\beta <$

1. Однако значение $\beta = 1$ в современной электродинамике столь велико и вокруг него было так много разного рода спекуляций, что полезно рассмотреть отдельно потенциалы движущейся сферы при этом значении. Поэтому и для полноты изложения отыщем их вновь, чтобы, с одной стороны, отметить присущие этому значению особенности, а с другой — лишний раз убедиться в правильности выбранного нами алгоритма.

7.8.1. Граничные значения λ

В случае $\beta = 1$ вырожденный треугольник, содержащий ϑ -гиперболы, подобен треугольнику s -гипербол и отличается от последнего только размером конечной стороны, как видно из рис. 7.6.

При $r < a$ все ϑ -гиперболы на плоскости (λ, c) пересекают μ -границу треугольника встречи, а затем произвольная ϑ -гипербола, пересекая последовательно ряд s -гипербол, сливается с одной из них, что происходит при $\lambda \rightarrow \infty$. Иными словами, асимптоты ϑ - и s -гипербол становятся общими. Поэтому при $r < a$ первое граничное значение λ найдем из уравнения μ -границы

$$\lambda_1 = \lambda_\mu = a - c_\mu.$$

Как видим, это значение определяется линейным уравнением

$$2\lambda_1(\tilde{x} + a) = a^2 - r^2 \quad \text{или} \quad \lambda_1 = \frac{a^2 - r^2}{2(\tilde{x} + a)}.$$

Второе граничное значение:

$$\lambda_2 = \infty,$$

т.к. только при этом значении λ_2 сливаются ϑ - и s -гиперболы. Этому значению λ_2 отвечает c_2 , также равное бесконечности.

Слияние гипербол происходит вблизи прямой $\lambda \approx c$, поэтому считаем, что для второго граничного значения выполняются следующие соотношения:

$$\lambda_2 = c_2 = \infty, \quad \frac{\lambda_2}{c_2} = 1.$$

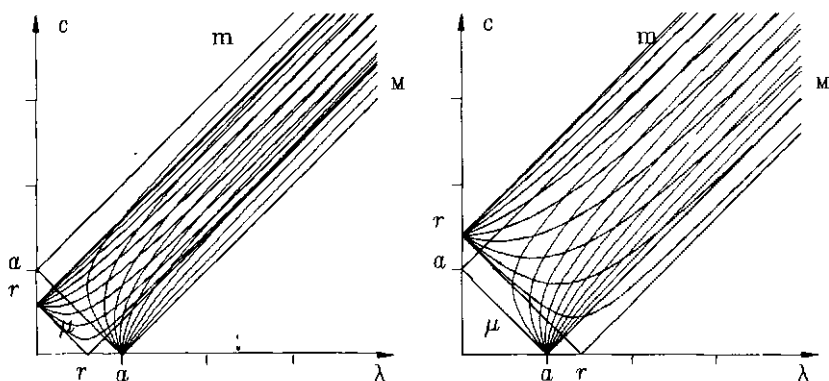


Рис. 7.6. Область существования треугольника встречи при $\beta = 1$

Интегрируя выражение (7.21) для дифференциального элемента площади a -сферы при этих граничных условиях, находим площадь видимой части a -сферы

$$S_e = 2\pi a(a - \tilde{x}).$$

Отсюда следует, что при $\beta = 1$ видимая площадь сферы оказывается функцией координаты $\tilde{x}$, поэтому видна только лишь ее часть. Если точка наблюдения поля находится на носу a -сферы, то, очевидно, ($\tilde{x} = a$) и $S_e = 0$, т.е. сфера в этой точке оказывается невидимой, а находящийся на сфере заряд не создаст там электромагнитные возмущения, и только при $\tilde{x} = -a$ видна вся сфера. Отсюда заключаем, что в любой точке пространства внутри a -сферы последняя видна, хотя бы частично.

Изохронная точка M в этом случае, как нетрудно установить, имеет координаты $r = a$, $\vartheta = \pi$ или $\tilde{x} = -a$ и расположена на корме a -сферы. Действительно, именно там видимой оказывается вся поверхность a -сферы.

7.8.2. Граничные δ_i -функции

Для приведенных выше граничных λ находим последовательно:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 2 \frac{r^2 + a\tilde{x}}{r_+^2}, & \delta_2 &= -2 \frac{a + \tilde{x}}{r_+^2}, & \delta_3 &= 4 \frac{(a + \tilde{x})^2}{r_+^2}, \\ \delta_4 &= -8 \frac{(a + \tilde{x})^3}{r_+^2}, & \delta_5 &= \infty, & \delta_6 &= -2 \operatorname{Arth} \frac{r}{a},\end{aligned}\quad (7.46)$$

где

$$r_+^2 = (a + \tilde{x})^2 + \rho^2.$$

Обращение величины δ_5 в бесконечность компенсируется тем, что при этом значении β соответствующий множитель q_5 обращается в нуль и поэтому произведение $\delta_5 q_5$ также равно нулю. Действительно, несложно показать, что выражение

$$q_5 \delta_5 = \frac{1 - \beta^4}{\beta^2} \operatorname{Arth} \beta$$

имеет при $\beta \rightarrow 1$ предельное значение, равное нулю. В результате потенциалы остаются конечными.

Функции δ_i можно найти двумя способами: или подставляя в общие формулы (7.31b) соответствующие граничные λ , или находя предельные выражения для δ_i , записанных при $\beta < 1$, когда $\beta \rightarrow 1$. Приведенные выше выражения для этих функций были получены первым способом, и читатель может убедиться, что второй способ приводит к тем же результатам.

Остановимся только на выводе функции δ_6 . По определению эта функция равна

$$\delta_6 = \operatorname{Arsh} \frac{r^2 + \tilde{x}\lambda_2}{\rho\lambda_2} - \operatorname{Arsh} \frac{r^2 + \tilde{x}\lambda_1}{\rho\lambda_1}.$$

Подставляя $\lambda_2 = \infty$, находим для первой дроби

$$\frac{r^2 + \tilde{x}\lambda_2}{\rho\lambda_2} = \frac{\tilde{x}}{\rho},$$

для второй дроби

$$\frac{r^2 + \tilde{x}\lambda_1}{\rho\lambda_1} = \frac{2ar^2 + \tilde{x}a^2 + \tilde{x}r^2}{\rho(a^2 - r^2)}.$$

Теперь функцию δ_6 представим в виде

$$\delta_6 = \text{Arsh } \frac{x}{\rho} - \text{Arsh } \frac{2ar^2 + \tilde{x}a^2 + \tilde{x}r^2}{\rho(a^2 - r^2)}.$$

В этом выражении заменим $\text{Arsh } x$ на натуральный логарифм по формуле

$$\text{Arsh } x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),$$

тогда получаем

$$\delta_6 = \ln \frac{\tilde{x} + r}{\rho} - \ln \frac{(\tilde{x} + r)(a + r)^2}{\rho(a^2 - r^2)} = -2\text{Arth } \frac{r}{a},$$

т.е. находим выражение, приведенное в (7.46).

7.8.3. Скалярный потенциал

Подставив эти граничные значения λ в (7.24) или (7.32), получим потенциал Φ_{21} внутри a -сферы, движущейся со световой скоростью:

$$\Phi_{21} = \frac{e}{2a} \left\{ 1 - \left[1 - \mathcal{H}(\varrho) \right] \frac{\cos \vartheta}{\varrho} \right\}. \quad (7.47)$$

Сравнивая это выражение с (7.39₄), замечаем, что

$$\Phi_{21} = \lim_{\beta \rightarrow 1} \Phi_{11},$$

т.е. потенциал внутри a -сферы описывается непрерывной функцией параметра β , когда последний изменяется от нуля до единицы включительно.

Очевидно, что при $r \rightarrow 0$ потенциал Φ_{21} остается конечным, т.к. при этом

$$1 - \mathcal{H}(\varrho) \approx \frac{2}{3}\varrho^2 = \frac{2r^2}{3a^2}.$$

На поверхности a -сферы ее потенциал при скорости сферы, равной скорости света:

$$\lim_{r \rightarrow a} \Phi_{21} = \frac{e}{2a}(1 - \cos \vartheta). \quad (7.47_1)$$

Из этой формулы следует, что скалярный потенциал в носовой точке равен нулю, а в кормовой — e/a , т.е. потенциалу неподвижной сферы. Этот результат следовало ожидать, т.к. при этой скорости именно на корме находится, как уже отмечалось выше, изохронная точка M .

7.8.4. Векторный потенциал

Компоненты векторного потенциала внутри сферы найдем как пределы выражений (7.40) и (7.41) при $\beta \rightarrow 1$:

$$A_{\rho 21} = \frac{e}{8r} \left\{ \left[13 \cos^2 \vartheta - 1 + \frac{3}{\varrho^2} (1 - 5 \cos^2 \vartheta) \right] (1 - \mathcal{H}_\varrho) \right\} \sin \vartheta, \quad (7.48)$$

$$A_{x 21} = \frac{e}{8r} \left\{ 3 \cos^2 \vartheta - 1 + \frac{5 \cos^2 \vartheta - 3}{\varrho^2} [2\varrho^2 - 3(1 - \mathcal{H}_\varrho)] \right\} \cos \vartheta. \quad (7.49)$$

К таким же выражениям можно прийти, исходя из приведенных выше граничных λ и выполнив соответствующие выкладки согласно (7.31) и (7.32).

Если $r \ll a$, то, пользуясь разложением в ряд функции Гюйгенса, получаем

$$\begin{aligned} A_{\rho 21} &= \frac{e}{12a^2} r (1 + 3 \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta, \\ A_{x 21} &= \frac{e}{12a^2} r (2 - 3 \sin^2 \vartheta) \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что в центре a -сферы компоненты векторного потенциала равны нулю.

На ее поверхности $\mathcal{H}_e = 0$, и потому там имеем

$$\begin{aligned} A_{\rho 21} &= \frac{e}{4a} \sin^3 \vartheta, \\ A_{x 21} &= \frac{e}{4a} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что при $\beta = 1$ векторный потенциал на поверхности сферы симметричен относительно ее центра и имеет только одну радиальную компоненту

$$A_{r 21} = \frac{e}{4a} \sin^2 \vartheta.$$

7.9. Потенциалы при $\beta = 1$ вне сферы

Если при $\beta < 1$ движущаяся a -сфера создаст потенциалы той или иной величины в любой точке пространства, то при $\beta = 1$ пространство вне сферы делится на три различные части. В одной из них заряд сферы вообще не создает потенциалы, т.е. сфера в этой части пространства оказывается невидимой. Во второй части пространства видна лишь часть движущейся сферы, и только в третьей — вся. Здесь мы видим зарождение конуса Маха, который при $\beta = 1$ представляет собой часть пространства, ограниченную плоскостями $|x| = a$.

7.9.1. Граничные значения λ

Вне a -сферы все ϑ -гиперболы образуют три различные по их отношению к ОСТВ группы, что нетрудно установить по рис. 7.6. Это означает, что и пространство, окружающее a -сферу, распадается на три подобласти, как показано на рис. 7.7.

Во-первых, некоторая часть ϑ -гипербол проходит вне ОСТВ. Это имеет место при $\tilde{x} > a$, когда a -сфера не имеет общих точек с λ -сферой, поэтому скалярный потенциал

Φ_{20} и векторный A_{20} в этой части пространства, которая обозначена как "20", следует положить равными нулю:

$$\Phi_{20} = 0, \quad A_{20} = 0. \quad (7.50)$$

Некоторая ϑ -гипербола второй части пучка после пересечения m -границы при конечных значениях λ и c затем сливается с одной из s -гипербол, когда λ и c уходят в бесконечность подобно тому, как это происходит внутри a -сферы. Можно показать, что вторая подобласть пространства (обозначим ее "22") определяется неравенствами $r > a$, $|\tilde{x}| < a$, и в ней граничные λ имеют значения

$$\lambda_1 = \lambda_m = c_m - a = \frac{r^2 - a^2}{2(a - \tilde{x})}, \quad \lambda_2 = \infty. \quad (7.50a)$$

Значение λ_2 выбрано по тем же соображениям, что и в случае $r < a$, и здесь также видимой оказывается лишь часть a -сферы. Площадь поверхности видимой части a -сферы равна $S_e = 2\pi a(a - \tilde{x})$.

Третья подобласть пространства ("23") вне a -сферы определяется условиями $r > a$, $\tilde{x} < -a$, где для граничных значений λ имеем

$$\lambda_1 = c_m - a = \frac{r^2 - a^2}{2(a - \tilde{x})}, \quad \lambda_2 = c_\kappa + a = \frac{a^2 - r^2}{2(a + \tilde{x})}. \quad (7.50b)$$

Здесь ϑ -гиперболы после пересечения m -границы проходят всю область существования треугольника встречи и покидают ее через m -границу при конечном значении λ_2 , так что здесь видимой оказывается вся a -сфера.

7.9.2. Скалярный потенциал

Подстановка граничных значений (7.50a) в (7.24) дает скалярный потенциал во второй подобласти пространства

$$\Phi_{22} = \frac{e}{2r^2} \left\{ a - \tilde{x} \left[1 + \frac{r^2 - a^2}{ar} \operatorname{Arth} \frac{r(a - \tilde{x})}{r^2 - r\tilde{x}} \right] \right\}. \quad (7.51)$$

С учетом (7.50b) потенциал в третьей подобласти равен

$$\Phi_{23} = -\frac{e\tilde{x}}{r^2}[1 + \mathcal{H}(\varrho^{-1})]. \quad (7.52)$$

Таким образом, потенциал a -сферы при $\beta = 1$ описывается уже с помощью четырех определенных в различных областях функций (7.47), (7.50) — (7.52), из которых только одна тривиальна. Покажем, что эти функции описывают потенциал непрерывным способом.

Прежде всего заметим, что если $\tilde{x} = a$, то при $r = a$ потенциал внутри a -сферы Φ_{21} принимает в этой точке значение нуль, т.е. оказывается равным потенциалу Φ_{20} . Если же $r > a$, но по-прежнему $\tilde{x} = a$, то на этой границе $\Phi_{22} = 0$ или, что то же самое, Φ_{20} .

Пусть в (7.47) и (7.51) $r \rightarrow a$, тогда находим

$$\lim_{r \rightarrow a} \Phi_{21} = \lim_{r \rightarrow a} \Phi_{22} = \frac{e}{2a}(1 - \cos \vartheta),$$

т.е. и на этой границе потенциал непрерывен.

Наконец, если в (7.51) и (7.52) положить $\tilde{x} = -a$, то на этой границе получим

$$\Phi_{22} = \Phi_{23} = \frac{ea}{r^2}[1 + \mathcal{H}(\varrho)].$$

Последнее выражение при $r = a$ принимает значение e/a , и такое же значение получим из (7.47) при $\tilde{x} = -a$.

Более того, потенциал досветовой сферы при $\beta \rightarrow 1$ оказывается равным потенциалу при $\beta = 1$, в чем можно убедиться, сравнивая соответствующие пределы предыдущего раздела с (7.47), (7.50) — (7.52). Отсюда следует, что описывающие скалярный потенциал функции непрерывны по координатам реального пространства и по таким параметрам, как относительная скорость β движения a -сферы и ее радиус.

Действительно, пусть в (7.52) $r \gg a$, тогда находим

$$\Phi_{23} = -\frac{2e}{r} \cos \vartheta, \quad (7.53)$$

т.е. потенциал точечного заряда при $\beta = 1$ (см. разд. 5.6).

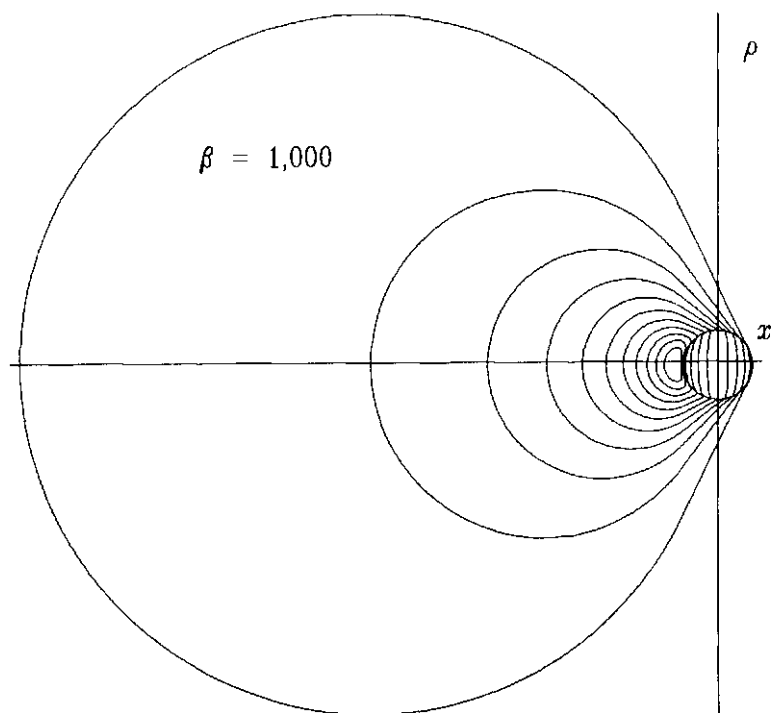
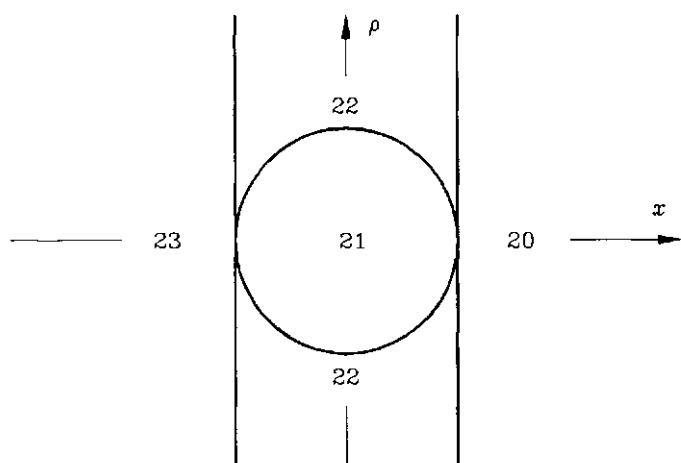


Рис. 7.7. Области пространства вокруг a -сферы при $\beta = 1$ и эквипотенциали $\Phi(x, \rho) = 0,1ne/a$, $n = 1 \div 11$

При $\beta = 1$ наблюдаем зарождение сверхсветового конуса Маха, который здесь представляет собой плоскость $\tilde{x} = a$, касающуюся a -сферы в ее носовой точке, и на нем потенциал равен нулю. Между этой плоскостью и плоскостью $\tilde{x} = -a$ находится переходная область, которую, как будет показано ниже, можно считать пограничным конусом Маха. Именно вырожденность конуса Маха при $\beta = 1$ позволила аналитически вычислить видимую площадь сферы, а с ней и скалярный потенциал. При $\beta > 1$ это сделать не удастся.

7.9.3. Векторный потенциал

Векторный потенциал можно вычислить тем же методом, что и скалярный, т.е. подставляя соответствующие δ -функции в общие формулы для его компонент. Однако можно поступить проще, а именно вычислить пределы соответствующих выражений для компонент векторного потенциала досветовой сферы, опираясь на то обстоятельство, что соответствующие пределы для скалярного потенциала равны потенциалу при скорости света.

Прежде всего заметим, что в пространстве перед сферой, когда $\tilde{x} \geq a$, выполняются равенства

$$A_{\rho 20} = 0, \quad A_{x 20} = 0.$$

Далее, полагая $\beta \rightarrow 1$ в выражениях (7.44) и (7.45), находим компоненты векторного потенциала вне a -сферы. При этом, как уже говорилось, содержащаяся в выражении (7.44) дробь

$$d_e = \frac{\bar{\rho}^2 - 1}{\bar{\rho}^2 - \beta^2} = \frac{\bar{r}^2 - a^2}{\bar{r}^2 - \beta^2 a^2}$$

имеет неопределенность вида $0/0$. Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталя, находим следующие значения для этой дроби:

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} d_e = \begin{cases} \frac{r^2 - a^2}{r^2 \sin^2 \vartheta}, & \text{если } |\tilde{x}| < a, \\ 1, & \text{если } \tilde{x} < -a. \end{cases}$$

Компоненту векторного потенциала $A_{\rho 22}$ представим как

$$A_{\rho 22} = A_{22} \sin \vartheta, \quad (7.54)$$

где

$$\begin{aligned} A_{22} = \frac{e}{8r} \left\{ 2 \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2} - \frac{\varrho^2 - 3}{\varrho^2} \sin^2 \vartheta - \right. \\ \left. - \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^3 \sin^2 \vartheta} [2(\varrho^2 - 1) - (3\varrho^2 + 10\varrho \cos \vartheta - 15) \sin^2 \vartheta] \cos \vartheta + \right. \\ \left. + \frac{\varrho^2 + 3(1 + \varrho^2 \cos^2 \vartheta - 5 \cos^2 \vartheta)}{\varrho^2} \left(\mathcal{H}_{e^{-1}} - \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \text{Arth} \cos \vartheta \right) \right\}, \end{aligned} \quad (7.54a)$$

а ϱ — расстояние r от точки наблюдения поля до центра a -сферы, выраженное в единицах ее радиуса.

Внешняя граница области "22" разделяет пограничный конус Маха и область "20", как показано на рис. 7.7. Эта граница определяется равенством $\tilde{x} = a$ при $r \geq a$, и на ней имеем

$$\cos \vartheta = \frac{\tilde{x}}{r} = \frac{a}{r} \quad \text{или} \quad \varrho \cos \vartheta = 1.$$

Подставляя это уравнение границы в выражение (7.54a), получаем на ней

$$A_{\rho 22}(\tilde{x} = a) = 0 = A_{\rho 20},$$

т.е. значения функций $A_{\rho 22}$ и $A_{\rho 20}$, имеющих различное представление в различных областях пространства, совпадают на границе, разделяющей эти области.

Далее, компонента $A_{x 22}$ согласно (7.45) равна

$$\begin{aligned} A_{x 22} = A_{22} \cos \vartheta + \frac{e}{4r} \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2} \left[3 \frac{1 - \varrho \cos \vartheta}{\varrho} - \right. \\ \left. - \frac{\varrho^2 - 3}{\varrho} (\text{Arth} \varrho^{-1} - \text{Arth} \cos \vartheta) \right]. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Нетрудно проверить, что для этой компоненты на внешней границе области "22" выполняются равенства:

$$A_{x 22}(\tilde{x} = a) = 0 = A_{x 20}.$$

В выражениях (7.54) и (7.55) положим $r \rightarrow a$, что дает

$$\begin{aligned}\lim_{\varrho \rightarrow 1} \mathcal{A}_{22} &= \frac{e}{2a} \sin^2 \vartheta, \\ \lim_{\varrho \rightarrow 1} A_{\rho 22} &= \mathcal{A}_{22} \sin \vartheta = \frac{e}{2a} \sin^3 \vartheta, \\ \lim_{\varrho \rightarrow 1} A_{x 22} &= \mathcal{A}_{22} \cos \vartheta = \frac{e}{2a} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Как видим, эти пределы совпадают с предельными значениями на поверхности a -сферы компонент векторного потенциала $\mathbf{A}_{21}$, заданного внутри нее:

$$\lim_{r \rightarrow a} \mathbf{A}_{22} = \lim_{r \rightarrow a} \mathbf{A}_{21}.$$

Далее, полагая $\tilde{x} \leq -a$, из выражения (7.44) находим

$$A_{\rho 23} = \mathcal{A}_{23} \sin \vartheta, \quad (7.56)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{23} &= \frac{e}{2r} \left[\frac{4\varrho^2 - 12 \cos^2 \vartheta - 3(\varrho^2 - 1) \sin^2 \vartheta}{2\varrho^2} (1 + \mathcal{H}_{\varrho^{-1}}) + \right. \\ &\quad \left. + 5 \cos^2 \vartheta - 1 \right],\end{aligned} \quad (7.56a)$$

и из (7.45)

$$A_{x 23} = \left[\mathcal{A}_{23} - \frac{e}{2r} \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2} \left(3 + \frac{\varrho^2 - 3}{\varrho^2 - 1} \mathcal{H}_{\varrho^{-1}} \right) \right] \cos \vartheta. \quad (7.57)$$

На границе областей "22" и "23", где

$$\tilde{x} = -a, \quad \varrho \cos \vartheta = -1,$$

компоненты векторного потенциала принимают следующие значения:

$$A_{\rho 23} = \frac{e}{2r} \left[\frac{\varrho^4 + 6\varrho^2 - 15}{2\varrho^4} (1 + \mathcal{H}_{\varrho^{-1}}) - \frac{\varrho^2 - 5}{\varrho^2} \right] \frac{\sqrt{\varrho^2 - 1}}{\varrho}$$

и

$$A_{x23} = \frac{ea}{4r^2} \left(\frac{13\rho^4 - 28\rho^2 + 15}{\rho^4} - 3 \frac{\rho^2 - 5}{\rho^2} \mathcal{H}_{e^{-1}} \right).$$

Если в формулах (7.54) и (7.55) положить $\tilde{x} = -a$, то компоненты векторного потенциала $A_{\rho 22}$ и A_{x22} примут такие же значения, что приведены выше. Отсюда заключаем, что на границе, разделяющей области пространства "22" и "23", значения компонент векторного потенциала одни и те же.

Наконец, если в области "23" рассматривать векторный потенциал на значительном удалении от центра a -сферы, когда $r \gg a$, то, полагая в (7.56) и (7.57) $\rho^{-1} \rightarrow 0$, находим

$$A_{\rho 23} = 2 \frac{e}{r} \cos \vartheta \sin 2\vartheta, \quad A_{x23} = 2 \frac{e}{r} \cos \vartheta \cos 2\vartheta.$$

Отсюда следует, что в сферической координатной системе (r, φ, ϑ) компоненты векторного потенциала сферы на большом удалении от нее можно представить как

$$A_{23} = 2 \frac{e}{r} \begin{vmatrix} \cos \vartheta \\ 0 \\ \sin \vartheta \end{vmatrix}.$$

Если сравнить эти потенциалы с теми, что были найдены в разд. 5.7 для точечного заряда, то можно сделать вывод, что на большом расстоянии от сферы ее векторный потенциал совпадает с потенциалом точечного заряда такой же величины и имеющего скорость света.

Подведем некоторые итоги разд. 7.6 – 7.9. Для скалярного и векторного потенциалов движущейся равномерно и прямолинейно и равномерно заряженной по поверхности сферы с радиусом a мы можем записать следующие общие выражения:

$$\Phi(r, t; \beta, a) = \begin{cases} \Phi_{11}, & \text{если } 0 \leq r \leq a, \\ \Phi_{12}, & \text{если } a \leq r \leq \infty \end{cases} \quad (7.58)$$

и

$$A(\mathbf{r}, t; \beta, a) = \begin{cases} A_{11}, & \text{если } 0 \leq r \leq a, \\ A_{12}, & \text{если } a \leq r \leq \infty, \end{cases} \quad (7.59)$$

где $\mathbf{r}$, t — аргументы, а β , a — параметры. В разделах 7.6 – 7.9 для всех функций получены соответствующие аналитические формулы, из которых видно, что определенные внутри a -сферы функции (с индексом "11") имеют там всюду конечные значения. На поверхности сферы эти значения равны значениям функций, определенных вне сферы (индекс "12") и также имеющих всюду конечные значения. Следовательно, как и в электростатике, потенциалы описываются непрерывными функциями координат и времени.

Эти функции имеют смысл для любого значения относительной скорости сферы β , находящегося в замкнутом интервале $[0, 1]$. Заметим, что этот интервал не совпадает с полуоткрытым интервалом по β , принятым в специальной теории относительности — $[0, 1)$.

При $\beta = 0$ функции (7.58) и (7.59) задают потенциалы неподвижной сферы. Если же $\beta = 1$, то функции с индексом "12" расщепляются на три различные функции, которые тем не менее задают потенциалы также непрерывным образом во всем пространстве и при этом имеют конечные значения. Ниже будет показано, что верхняя граница интервала относительной скорости заряженной сферы не ограничена.

7.10. Потенциалы при $\beta > 1$ внутри сферы

Случай $\beta > 1$ представляет особый интерес, т.к. здесь впервые одни и те же точки движущейся сферы, находясь в различных положениях, создают два электромагнитных возмущения, приходящих в точку наблюдения одновременно [23] и суммирующихся там. Окружающее движущуюся сферу пространство распадается на пять различных областей, поэтому и потенциалы задаются уже пятью функциями, различными в разных областях.

Этот случай наиболее сложный, и, к сожалению, даже скалярный потенциал автору не удалось всюду выразить

аналитически и пришлось использовать численное интегрирование. Это положение не имеет строгого доказательства, и, возможно, более опытный математик сумеет получить аналитическое выражение для потенциалов сверхсветовой сферы.

В свете сказанного ниже ограничимся рассмотрением только скалярного потенциала, и по сложившейся процедуре начнем со случая $r < a$.

7.10.1. Граничные значения λ

Обратившись к рис. 7.8, замечаем, что произвольная ϑ -гипербола после пересечения μ -границы ОСТВ последовательно пересекает s -гиперболы, и при этом видимая площадь a -сферы растет. Очевидно, что первое граничное значение λ_1 в этом случае определится равенством

$$c_\mu = a - \lambda_{\mu 1},$$

из которого находим уравнение

$$(\beta^2 - 1)\lambda_{\mu 1} + 2(a + \beta\tilde{x})\lambda_{\mu 1} + r^2 - a^2 = 0.$$

Единственный положительный корень этого уравнения имеет вид

$$\lambda_{\mu 1} = \frac{-(a + \beta\tilde{x}) + \sqrt{(a + \beta\tilde{x})^2 + (\beta^2 - 1)(a^2 - r^2)}}{\beta^2 - 1}.$$

В том, что $\lambda_{\mu 1} > 0$, легко убедиться, исходя из следующих соображений. Рассматривается случай, когда $\beta > 1$ и $r < a$, поэтому в произведении

$$(\beta^2 - 1)(a^2 - r^2) > 0$$

оба сомножителя положительные, а потому и произведение положительно. Отсюда следует, что при любом знаке скобки $(a + \beta\tilde{x})$ подкоренное выражение в $\lambda_{\mu 1}$ будет больше абсолютного значения этой скобки, что и доказывает справедливость неравенства $\lambda_{\mu 1} > 0$.

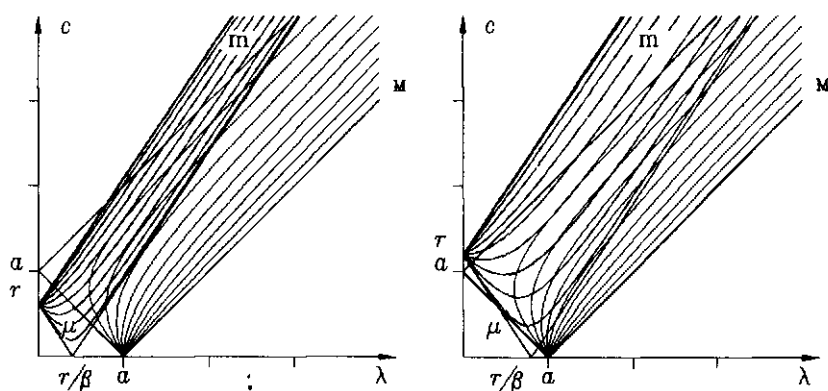


Рис. 7.8. Области существования треугольника встречи при $\beta > 1$, $r < a$ и $a < r < \beta a$

Раскрыв скобки в выражении для $\lambda_{\mu 1}$ и приведя подобные члены, перепишем его в виде

$$\lambda_{\mu 1} = \frac{\sqrt{(x + \beta a)^2 - (\beta^2 - 1)\rho^2} - (a + \beta \tilde{x})}{\beta^2 - 1}. \quad (7.60)$$

Найдя значение $\lambda_{\mu 1}$ и продвигаясь далее по выбранной ϑ -гиперболе, мы придем в точку, где эта гипербола, пересекая последовательно z -гиперболы, коснется одной из них. Затем с ростом λ она начнет пересекать уже встречавшиеся z -гиперболы, но в обратном порядке. Так будет продолжаться до тех пор, пока выбранная ϑ -гипербола не покинет ОСТВ через его m -границу. Это граничное значение $\lambda_{m 2}$ определится соотношением

$$c_m = a + \lambda_{m 2},$$

которому отвечает следующее квадратное уравнение:

$$(\beta^2 - 1)\lambda_{m 2} - 2(a - \beta \tilde{x})\lambda_{m 2} - a^2 + r^2 = 0.$$

Это уравнение также имеет единственный положительный

корень

$$\lambda_{m2} = \frac{\sqrt{(x - \beta a)^2 - (\beta^2 - 1)\rho^2} + a - \beta \tilde{x}}{\beta^2 - 1}. \quad (7.60a)$$

Выше в разд. 7.2 говорилось, что в преобразованной системе координат a -сфера покоится, а λ -сфера движется со скоростью βc — уравнения (7.7) и (7.8). Если $\beta > 1$, то множество λ -сфер имеет действительную огибающую, которую мы и рассмотрим. Для этого к уравнениям (7.7) и (7.8) присоединим еще уравнение огибающей λ -сфер, которое получим в результате дифференцирования уравнения (7.8) частным образом по λ , что приведет нас к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \xi_1^2 + \eta^2 + \zeta^2, \\ \lambda^2 &= (\xi_1 - \tilde{x} - \beta\lambda)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2, \\ \lambda &= -\beta(\xi_1 - \tilde{x} - \beta\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

Из последнего уравнения этой системы находим

$$\lambda = \frac{\beta}{\beta^2 - 1}(\xi_1 - \tilde{x}).$$

Подставив это выражение для λ во второе уравнение системы (7.61), получим уравнение

$$\frac{(\xi_1 - \tilde{x})^2}{\beta^2 - 1} = (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2. \quad (7.61a)$$

Это уравнение представляет собой, очевидно, уравнение конуса Маха с вершиной в точке $(\tilde{x}, y, z)$ и углом при вершине ϑ_M таким, что

$$\sin \vartheta_M = \frac{1}{\beta}.$$

В уравнении (7.61a) раскроем справа скобки и заменим сумму $\eta^2 + \zeta^2$ на разность $a^2 - \xi_1^2$ из первого уравнения системы (7.61), тогда после несложных преобразований приходим к уравнению

$$\frac{(\beta^2 \xi_1 - x)^2}{\beta^2(\beta^2 - 1)} = a^2 + y^2 + z^2 - \frac{\tilde{x}^2}{\beta^2} - 2(\eta y + \zeta z).$$

Если теперь в нем положить $z = 0$, то оно принимает вид

$$\frac{(\beta^2 \xi_1 - x)^2}{\beta^2(\beta^2 - 1)} = a^2 + y^2 - \frac{x^2}{\beta^2} - 2\eta y \quad (7.61b)$$

и представляет собой в пространстве уравнение параболического цилиндра, а на плоскости (ξ_1, η) — уравнение параболы. Последняя дважды пересекает окружность $r = a$ на той же плоскости.

С другой стороны, координаты произвольной точки на конусе (7.61a) можно задать в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \tilde{x} + \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \lambda, \\ \eta &= y + \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta} \lambda \cos \psi, \\ \zeta &= z + \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta} \lambda \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (7.61c)$$

где угол ψ отсчитывается по окружности, образованной пересечением конуса с плоскостью, ортогональной его оси. Координаты произвольной точки в этом представлении подставим в первое уравнение системы (7.61) и найдем

$$y \cos \psi + z \sin \psi = \frac{\beta(a^2 - r^2) - (\beta^2 - 1)\lambda(\beta\lambda + \tilde{x})}{2\lambda\sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

В последнем выражении координаты точки наблюдения y и z представим как

$$y = \rho \cos \phi, \quad z = \rho \sin \phi,$$

тогда оно примет вид

$$\rho \cos(\psi - \phi) = \frac{\beta(a^2 - r^2) - (\beta^2 - 1)\lambda(\beta\lambda + \tilde{x})}{2\lambda\sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

Теперь предположим, что $\cos(\psi - \phi) = \pm 1$, т.е. что углы ψ и ϕ равны или отличаются один от другого на π . Это

приводит к следующему квадратному уравнению относительно λ :

$$(\beta^2 - 1)\lambda^2 + 2\sqrt{\beta^2 - 1}\left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}\tilde{x} \pm \frac{\rho}{\beta}\right)\lambda + r^2 - a^2 = 0. \quad (7.61d)$$

Это уравнение определяет еще один набор граничных λ .

7.10.2. Новые граничные λ

Условимся отмечать корни уравнения (7.61d) индексом h , если этот корень соответствует условию $\psi + \phi = 0$, и индексом l , если $\psi + \phi = \pi$. Тогда корни этого уравнения можно записать как

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta^2 - 1}\lambda_{l1, l2} &= -\frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}\tilde{x} + \frac{\rho}{\beta} \mp \\ &\mp \sqrt{a^2 - \left(\frac{\tilde{x}}{\beta} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}\rho\right)^2}, \\ \sqrt{\beta^2 - 1}\lambda_{h1, h2} &= -\frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}\tilde{x} - \frac{\rho}{\beta} \mp \\ &\mp \sqrt{a^2 - \left(\frac{\tilde{x}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}\rho\right)^2}. \end{aligned}$$

Вспомним определения (см. (5.23)) тригонометрических функций угла ϑ_M раствора конуса Маха

$$\cos \vartheta_M = -\frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}, \quad \sin \vartheta_M = \frac{1}{\beta}$$

и присоединим сюда определения координат точки наблюдения (x, ρ) в сферической системе координат

$$\tilde{x} = r \cos \vartheta, \quad \rho = r \sin \vartheta,$$

тогда находим

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{\beta^2-1}}{\beta}\tilde{x} \pm \frac{1}{\beta}\rho &= r \cos(\vartheta \mp \vartheta_M), \\ \frac{1}{\beta}\tilde{x} \mp \frac{\sqrt{\beta^2-1}}{\beta}\rho &= r \sin(\vartheta \mp \vartheta_M). \end{aligned}$$

Эти равенства позволяют более компактно записать корни уравнения (7.61d)

$$\begin{aligned} \lambda_{h1,2} &= \frac{\mp \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2(\vartheta + \vartheta_M)} + r \cos(\vartheta + \vartheta_M)}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \\ \lambda_{l1,2} &= \frac{\mp \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2(\vartheta - \vartheta_M)} + r \cos(\vartheta - \vartheta_M)}{\sqrt{\beta^2 - 1}}. \end{aligned}$$

При такой записи нетрудно установить, что в рассматриваемой области ($r \leq a$) физический смысл ($\lambda > 0$) имеют только вторые значения граничных λ , а именно λ_{l2} и λ_{h2} , т.е. соответствующие знаку "+" перед радикалом, поэтому окончательно имеем

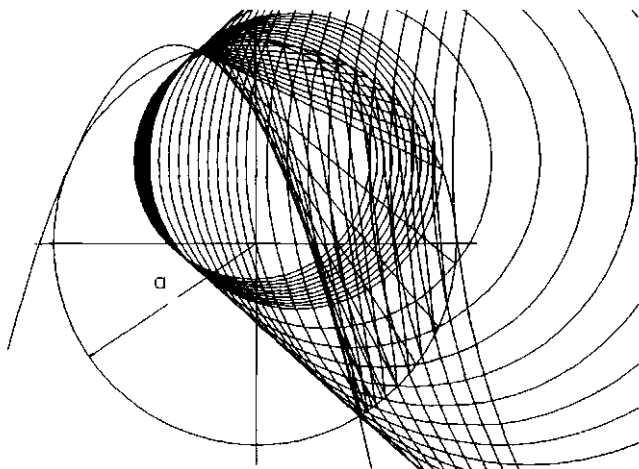
$$\left. \begin{aligned} \lambda_{h2} &= \frac{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2(\vartheta + \vartheta_M)} + r \cos(\vartheta + \vartheta_M)}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \\ \lambda_{l2} &= \frac{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2(\vartheta - \vartheta_M)} + r \cos(\vartheta - \vartheta_M)}{\sqrt{\beta^2 - 1}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.61e)$$

Можно показать, что внутри a -сферы всегда выполняются неравенства

$$\lambda_{\mu 2} \leq \lambda_{l2} \leq \lambda_{h2} \leq \lambda_{m2}.$$

На плоскости (λ, c) эти новые граничные значения λ и c образуют замкнутую кривую, напоминающую треугольник со скругленными вершинами. В точках, где эта кривая касается границ полуполосы ϑ -гипербол, выполняется равенство

$$\lambda_{l2} = \lambda_{h2}.$$

Рис. 7.9. Пересечения a - и λ -сфер

Эти точки делят кривую на две части, из которых нижняя часть состоит из точек (λ_{l2}, c_{l2}) , а верхняя — из точек (λ_{h2}, c_{h2}) . Следовательно, в этих точках выполняется равенство

$$\lambda_{l2} = \lambda_{h2} = \lambda_0,$$

и это равенство имеет место только на оси x .

Геометрически эти новые граничные λ означают следующее. Когда λ имеет значение в интервалах $[\lambda_{\mu 2}, \lambda_{h2}]$ или $[\lambda_{l2}, \lambda_{m2}]$, то пересечения a -сферы двумя соседними λ -сферами с радиусами λ и $\lambda + d\lambda$ образуют на ней шаровой слой с непараллельными в общем случае основаниями в виде двух окружностей, не имеющих между собой общих точек. Напротив, если значение λ находится в интервале $[\lambda_{l2}, \lambda_{h2}]$, то две соседние сферы с радиусами λ и $\lambda + d\lambda$ образуют на a -сфере пересекающиеся окружности, формирующие на a -сфере два сферических двуугольника. Причина этого состоит в том, что граница пересечения конуса Маха и a -сферы в общем случае представляет собой не плоскую, а находящуюся на сфере пространственную кривую, проекция которой на плоскость, проходящую через центр a -сферы и ось конуса Маха, представляет собой параболу.

Если проследить более детально за тем, что проис-

ходит в каждом из вышеуказанных интервалов, то обнаружится следующее (см. рис 7.9). В первом интервале $[\lambda_{\mu 2}, \lambda_{l2}]$ бесконечно малый элемент площади a -сферы $dS(\lambda, \phi)$ положителен, т.е. ее видимая площадь с ростом λ увеличивается.

В третьем интервале $[\lambda_{h2}, \lambda_{m2}]$ элемент $dS(\lambda, \phi)$ меньше нуля, как если бы видимая площадь a -сферы уменьшалась с ростом λ . Разумеется, при этом проходятся те же самые участки поверхности a -сферы, что проходились ранее, в первом интервале значений λ . Но эти участки проходятся с ростом λ в обратном порядке, поэтому при вычислении видимой поверхности или скалярного потенциала следует поменять порядок пределов в соответствующем интеграле, т.е. вычислять интеграл от λ_{m2} до λ_{h2} .

Наконец, во втором интервале $[\lambda_{l2}, \lambda_{h2}]$ имеем случай, включающий оба предыдущих.

В общем случае бесконечно малый дифференциальный элемент площади поверхности a -сферы имеет вид (см. (7.21))

$$dS(\lambda, \phi) = a^2 \sin \theta (\theta' + \alpha' \cos \phi) d\lambda d\phi.$$

Здесь углы θ и α представляют собой углы треугольника встречи рассматриваемых сфер и зависят только от α , а штрихи означают производные углов по λ . Приведенную форму можно переписать как

$$dS(\lambda, \phi) = a^2 \sin \theta \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'} \cos \phi\right) \theta' d\phi d\lambda.$$

По определению при $\beta > 1$ дробь

$$\frac{\theta'}{\alpha'} = -\cos \phi_b,$$

где ϕ_b — граничное значение угла ϕ , при котором круглая скобка в предыдущем выражении обращается в нуль. Подставляя в него это определение, получаем

$$dS(\lambda, \phi) = a^2 \left(1 - \frac{\cos \phi}{\cos \phi_b}\right) \sin \theta d\theta d\phi.$$

Проинтегрировав это выражение по ϕ в пределах от нуля до ϕ_b , получим дифференциальный элемент площади

$dS_1(\lambda)$ одного из двуугольников, образующихся на a -сфере при пересечении ее со сферой с радиусом λ и сферой с радиусом $\lambda + d\lambda$:

$$dS_1(\lambda) = \int_0^{\phi_b} dS(\lambda, \phi) = 2a^2(\phi_b - \operatorname{tg} \phi_b) \sin \theta d\theta. \quad (7.62)$$

Здесь коэффициент 2 появился в связи с тем, что двуугольник симметричен и имеет азимутальную протяженность от $(+\phi_b)$ до $(-\phi_b)$. Заметим, что при $\phi < \pi/2$ функция (обозначим ее f)

$$f = \phi - \operatorname{tg} \phi$$

всегда меньше нуля, поэтому и dS_1 также меньше нуля. Если выполнить эту несложную операцию для другого двуугольника, то получим

$$dS_2(\lambda) = \int_{\phi_b}^{\pi} dS(\lambda, \phi) = 2a^2(\pi - \phi_b + \operatorname{tg} \phi_b) \sin \theta d\theta. \quad (7.62a)$$

При этом сумма

$$dS_1(\lambda) + dS_2(\lambda) = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta,$$

т.е. остается такой же, как и ранее при $\beta < 1$, когда интегрирование по ϕ выполнялось в пределах от 0 до 2π .

7.10.3. Скалярный потенциал

Исходя из этих граничных значений λ , представим скалярный потенциал Φ_{31} в произвольной точке $(\tilde{x}, \rho)$ внутри a -сферы как сумму трех потенциалов

$$\Phi_{31} = \Phi'_{31} + \Phi''_{31} + \Phi'''_{31}, \quad (7.63)$$

каждый из которых вычисляется в различных областях значений λ .

Так, потенциал Φ'_{31} соответствует значениям λ в интервале $[\lambda_{\mu 2}, \lambda_{l2}]$, когда пересекающие a -сферу λ -сферы

образуют на ней шаровые слои, увеличивающиеся с ростом λ площадь ее видимой поверхности, и угол ϕ может принимать любое значение от нуля до 2π . В результате потенциал Φ'_{31} можем записать как

$$\Phi'_{31} = a^2 \int_{\lambda_{\mu 2}}^{\lambda_{l 2}} \frac{\sigma}{\lambda} \sin \theta d\lambda \int_0^{2\pi} (\theta' + \alpha' \cos \phi) d\phi,$$

где $\sigma = e/(4\pi a^2)$.

С учетом сказанного выше второй интеграл

$$\int_0^{2\pi} (\theta' + \alpha' \cos \phi) d\phi = 2\pi \theta'.$$

Поэтому, как и в (7.24), имеем:

$$\Phi'_{31} = \Phi(\lambda_{l 2}) - \Phi(\lambda_{\mu 2}). \quad (7.63a)$$

Когда значения λ находятся в промежутке $[\lambda_{l 2}, \lambda_{h 2}]$, то второй интеграл, интеграл по ϕ , следует представить как сумму интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\theta' + \alpha' \cos \phi) d\phi &= 2 \int_{\phi_b}^0 (\theta' + \alpha' \cos \phi) d\phi + \\ &+ 2 \int_0^{\pi} (\theta' + \alpha' \cos \phi) d\phi, \end{aligned}$$

где согласно (7.22) $\cos \phi_b = -\alpha'/\theta'$. При этом в первом интеграле изменен порядок пределов с тем, чтобы суммировались площади двуугольников, образующихся на a -сфере. Поэтому потенциал Φ''_{31} следует вычислять по формуле

$$\Phi''_{31} = \frac{e}{4\pi} \int_{\lambda_{l 2}}^{\lambda_{h 2}} \frac{\sin \theta}{\lambda} [\theta'(\pi - 2\phi_b) - 2\alpha' \sin \phi_b] d\lambda,$$

или, в более общем виде,

$$\Phi_{31} = I_{31}(\lambda_{h2}, \lambda_{l2}). \quad (7.63b)$$

Для интеграла I_{31} не удалось найти аналитическое выражение, поэтому его величина находится численным интегрированием.

Наконец, когда значения λ находятся в третьем промежутке $[\lambda_{h2}; \lambda_{m2}]$, то та же, что и раньше, часть поверхности a -сферы вторично покрывается шаровыми слоями, однако при этом ее видимая площадь уменьшается с ростом λ , поэтому на этом участке потенциал Φ_{31}''' определяется равенством

$$\Phi_{31}''' = \Phi(\lambda_{h2}) - \Phi(\lambda_{m2}). \quad (7.63c)$$

Разумеется, интеграл (7.63b) вычисляется численным интегрированием.

7.10.4. Потенциал внутри сферы на оси x

Если точка наблюдения поля внутри a -сферы находится на оси x , т.е. когда $\rho = 0$, то параболический цилиндр, общий для a -сферы и конуса Маха, вырождается в плоскость

$$\xi_1 = \frac{\tilde{x}}{\beta^2}.$$

При этом конус вырезает из a -сферы шаровой сегмент с плоским основанием, и этот сегмент виден из точки наблюдения дважды.

В то же время граничные λ_{l2} и λ_{h2} оказываются равными между собой, обозначим их λ_0 :

$$\lambda_{l2} = \lambda_{h2} = \lambda_0 = \frac{\sqrt{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2} - x\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta\sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

Благодаря этому удастся получить аналитическую формулу для скалярного потенциала на оси x при $\beta > 1$. Хотя это неполное решение задачи, оно представляет определенный интерес, т.к. позволяет сверить результаты компьютерных расчетов потенциала в соседних с осью x точках и

связать аналитически значения потенциала внутри сферы и вне ее хотя бы на оси x .

Скалярный потенциал в этом случае определяется двумя интегралами:

$$\Phi_{31}(\tilde{x}) = \int_{\lambda_{\mu 2}}^{\lambda_0} \frac{\sigma}{\lambda} dS(\lambda) - \int_{\lambda_0}^{\lambda_{m 2}} \frac{\sigma}{\lambda} dS(\lambda).$$

Знак минус перед вторым интегралом поставлен потому, что с ростом λ от λ_0 до $\lambda_{m 2}$ площадь шарового сегмента уменьшается, т.к. дифференциальный элемент площади

$$dS(\lambda) = 2\pi a^2 \sin \theta \theta' d\lambda$$

в этом диапазоне значений λ отрицателен. Покажем, что это так, вычислив видимую площадь a -сферы S_e .

Если значение λ находится в промежутке $[\lambda_{\mu 2}, \lambda_0]$, то согласно разд. 7.4

$$S_e = \int_{\lambda_{\mu 2}}^{\lambda_0} dS(\lambda) = 2\pi a^2 \cos \theta(\lambda) \Big|_{\lambda_0}^{\lambda_{\mu 2}}.$$

При $\lambda = \lambda_{\mu 2}$ угол $\theta = 0$, поэтому имеем

$$S_e = 2\pi a^2 [1 - \cos \theta(\lambda_0)].$$

Подставив сюда λ_0 и c_0 , получаем

$$S_e = 2\pi a \frac{\beta^2 a - \tilde{x} - \sqrt{(\beta^2 - 1)(\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2)}}{\beta^2}.$$

Из этой формулы находим следующие частные случаи:

$$S_e = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{x} = a, \\ 2\pi a^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}}\right), & \text{если } \tilde{x} = 0, \\ 4\pi \frac{a^2}{\beta^2}, & \text{если } \tilde{x} = -a. \end{cases}$$

Отсюда следует, что видимая площадь a -сферы имеет максимальное значение в кормовой точке сферы, и это значение там равно $4\pi a^2/\beta^2$. Это значение только при $\beta = 1$ равно площади всей сферы, а при $\beta > 1$ оно уменьшается как β^{-2} .

Когда же λ находится в промежутке $[\lambda_0, \lambda_{m2}]$, то получаем

$$S_e = 2\pi a^2 \cos \theta \Big|_{\lambda_{m2}}^{\lambda_0} = -2\pi a^2 [1 - \cos \theta(\lambda_0)],$$

т.к. здесь единице равен $\cos \theta(\lambda_{m2})$. Таким образом, в каждом промежутке видимая площадь a -сферы имеет одно и то же значение по абсолютной величине, но с противоположными знаками, поэтому достаточно изменить порядок пределов во втором интеграле для Φ_{32} , чтобы получить верный результат. Это достигается введением знака "минус" перед вторым интегралом в приведенной выше формуле для скалярного потенциала.

Сказанное позволяет нам записать общую формулу (7.33) для скалярного потенциала на оси x в виде

$$\Phi_{31} = \frac{e}{4a} \sum_{i=1}^6 f_i [\delta_i(\lambda_0, \lambda_{\mu 2}) + \delta_i(\lambda_0, \lambda_{m2})].$$

Внутри a -сферы на оси x граничные λ и c имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu 2} &= \frac{a - \tilde{x}}{\beta + 1}, & c_{\mu 2} &= \frac{\beta a + \tilde{x}}{\beta + 1}, \\ \lambda_0 &= \frac{c_0 - \tilde{x}}{\beta}, & c_0 &= \sqrt{\frac{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}{\beta^2 - 1}}, \\ \lambda_{m2} &= \frac{a - \tilde{x}}{\beta - 1}, & c_{m2} &= \frac{\beta a - \tilde{x}}{\beta - 1}. \end{aligned}$$

Заметим, что на оси x всегда выполняется равенство

$$c_{\mu 2} c_{m2} = c_0^2. \quad (7.63d)$$

Для этих граничных значений последовательно находим

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 2 \frac{\lambda_0}{c_0} - \frac{\lambda_{\mu 2}}{c_{\mu 2}} - \frac{\lambda_{m 2}}{c_{m 2}} = \\ &= 2 \frac{\tilde{x}}{\beta} \left(\frac{\beta^2 a - \tilde{x}}{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2} - \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}} \right), \\ \delta_2 &= 2 \frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_{\mu 1}} - \frac{1}{c_{m 2}} = \\ &= -2 \left(\frac{\beta^2 a - \tilde{x}}{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2} - \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}} \right).\end{aligned}$$

Функции δ_3 и δ_4 не вычисляем, т.к. соответствующие коэффициенты — функции f_3 и f_4 — согласно (7.33a) равны нулю. При вычислении функций δ_5 и δ_6 используем равенства (для любых граничных λ_1 и λ_2):

$$\begin{aligned}\delta_5(\lambda_2, \lambda_1) &= \operatorname{Arsh} \frac{\tilde{x} + \beta \lambda_2}{\rho} - \operatorname{Arsh} \frac{\tilde{x} + \beta \lambda_1}{\rho} = \\ &= \ln \frac{\tilde{x} + \beta \lambda_2 + c_2}{\tilde{x} + \beta \lambda_1 + c_1}, \\ \delta_6(\lambda_2, \lambda_1) &= \operatorname{Arsh} \frac{r^2 + \beta \tilde{x} \lambda_2}{\beta \lambda_2 \rho} - \operatorname{Arsh} \frac{r^2 + \beta \tilde{x} \lambda_1}{\beta \lambda_1 \rho} = \\ &= \ln \left(\frac{r^2 + \beta \tilde{x} \lambda_2 + r c_2}{r^2 + \beta \tilde{x} \lambda_1 + r c_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right),\end{aligned}$$

с помощью которых устраняется особенность этих функций при $\rho = 0$. Разумеется, в этих формулах под r следует понимать $|\tilde{x}|$.

Тогда для разности δ_5 находим следующее значение, справедливое в силу равенства (7.63d):

$$\begin{aligned}\delta_5 &= \ln \frac{(\tilde{x} + \beta \lambda_0 + c_0)^2}{(\tilde{x} + \beta \lambda_{\mu 2} + c_{\mu 2})(\tilde{x} + \beta \lambda_{m 2} + c_{m 2})} = \\ &= \ln \frac{c_0^2}{c_{\mu 2} c_{m 2}} = 0.\end{aligned}$$

Если разность δ_5 имеет один и тот же вид при любом значении $|\tilde{x}| \leq a$, то разность

$$\begin{aligned} \delta_6 = & \ln \frac{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda_0 + |\tilde{x}| c_0}{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda_{\mu 2} + |\tilde{x}| c_{\mu 2}} + \ln \frac{\lambda_{\mu 2}}{\lambda_0} + \\ & + \ln \frac{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda_0 + |\tilde{x}| c_0}{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda_{m 2} + |\tilde{x}| c_{m 2}} + \ln \frac{\lambda_0}{\lambda_{m 2}} \end{aligned}$$

при $\tilde{x} > 0$ равна

$$\delta_6 = \ln \frac{c_0^2}{c_{\mu 2} c_{m 2}} + \ln \frac{\lambda_{\mu 2} \lambda_{m 2}}{\lambda_0^2} = \ln \frac{\lambda_{\mu 2} \lambda_{m 2}}{\lambda_0^2},$$

т.к. первый логарифм равен нулю в силу равенства (7.63d).

При отрицательных же значениях переменной $\tilde{x}$ как дробь

$$\frac{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda_0 + |\tilde{x}| c_0}{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda_{\mu 2} + |\tilde{x}| c_{\mu 2}},$$

так и аналогичная, входящая в общую формулу для δ_6 , имеют неопределенности вида $0/0$.

Для раскрытия этих неопределенностей введем функцию

$$w_0 = r^2 + \beta \tilde{x} \lambda_0 + r c_0, \quad r^2 = \tilde{x}^2 + \rho^2$$

и найдем ее частную производную по переменной ρ , когда эта переменная стремится к нулю. Дифференцируя w_0 , получаем

$$\frac{\partial w_0}{\partial \rho} = \rho \frac{(c_0 + r)^2}{c_0 r} + \beta \frac{r \tilde{x} + \beta r \lambda_0 + \tilde{x} c_0}{c_0} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \rho}.$$

Заметим, что в этом выражении числитель второй дроби при $r \rightarrow 0$ и $\tilde{x} < 0$ равен

$$r \tilde{x} + \beta r \lambda_0 + \tilde{x} c_0 = -w_0(x).$$

Отсюда заключаем, что на оси x при отрицательных значениях для функции w_0 выполняются равенства

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial \rho} = 0.$$

Можно показать, что и для других функций, содержащих $\lambda_{\mu 2}$ и $\lambda_{m 2}$, выполняются такие же равенства, поэтому для раскрытия указанных выше неопределенностей дважды применяем правило Лопиталья и находим

$$\begin{aligned}\ln \frac{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda_0 + |\tilde{x}| c_0}{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda_{\mu 2} + |\tilde{x}| c_{\mu 2}} &= \ln \frac{(c_0 + |\tilde{x}|)^2 |\tilde{x}| c_{\mu 2}}{|\tilde{x}| c_0 (c_{\mu 2} + |\tilde{x}|)^2}, \\ \ln \frac{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda_0 + |\tilde{x}| c_0}{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda_{m 2} + |\tilde{x}| c_{m 2}} &= \ln \frac{(c_0 + |\tilde{x}|)^2 |\tilde{x}| c_{m 2}}{|\tilde{x}| c_0 (c_{m 2} + |\tilde{x}|)^2}.\end{aligned}$$

Далее, для любого расстояния s при отрицательных $\tilde{x}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}c_0 + |\tilde{x}| &= c_0 - \tilde{x} = \beta \lambda_0, \\ c_{\mu 2} + |\tilde{x}| &= c_{\mu 2} - \tilde{x} = \beta \lambda_{\mu 2}, \\ c_{m 2} + |\tilde{x}| &= c_{m 2} - \tilde{x} = \beta \lambda_{m 2}.\end{aligned}$$

Подставляя эти результаты в общую формулу для функции δ_6 , получаем для нее следующее выражение:

$$\delta_6 = 2 \ln \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{\mu 2} \lambda_{m 2}} + \ln \frac{\lambda_{\mu 2} \lambda_{m 2}}{\lambda_0^2} = \ln \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{\mu 2} \lambda_{m 2}}.$$

В результате для этой функции можем записать общую формулу на оси x

$$\delta_6 = \begin{cases} \ln \frac{\lambda_{\mu 2} \lambda_{m 2}}{\lambda_0^2}, & \text{если } 0 \leq \tilde{x} \leq a, \\ \ln \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{\mu 2} \lambda_{m 2}}, & \text{если } -a \leq \tilde{x} \leq 0. \end{cases}$$

Подставим сюда явные выражения для конечных λ , тогда при $\tilde{x} < 0$ получим

$$\delta_6 = 2 \ln \frac{\sqrt{\beta^2 a - \tilde{x}^2} - \tilde{x} \sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta(a - \tilde{x})},$$

и такую же функцию, но с противоположным знаком при $\tilde{x} > 0$, т.е.

$$\delta_6 = 2 \ln \frac{\sqrt{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2} + \tilde{x} \sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta(a + \tilde{x})}.$$

Отсюда находим, что в особых точках ($\tilde{x} = \pm a$) функция δ_6 имеет одно и то же конечное значение

$$\delta_6 = 2 \ln \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}.$$

С другой стороны, эту функцию можно представить как разность двух гиперболических арктангенсов; например, при $\tilde{x} > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \delta_6 &= 2 \ln \frac{\sqrt{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2} + \tilde{x} \sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta(a + \tilde{x})} = \\ &= 2 \left(\operatorname{Arth} \frac{\tilde{x}}{a} - \operatorname{Arth} \frac{\tilde{x} \sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}} \right). \end{aligned}$$

Аргументы этих арктангенсов при $\tilde{x} \rightarrow a$ равны единице, поэтому сами функции становятся бесконечно большими, но их разность имеет конечное значение. Здесь мы снова встречаемся с чудесами геометрии Лобачевского.

Однако последняя форма записи функции δ_6 позволяет просто установить ее значение, когда $\tilde{x} \rightarrow 0$, поэтому приведем ее выражение на всей оси x внутри a -сферы:

$$\delta_6 = \begin{cases} 2 \left(\operatorname{Arth} \frac{\tilde{x}}{a} - \operatorname{Arth} \frac{\tilde{x} \sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}} \right), & \tilde{x} > 0, \\ -2 \left(\operatorname{Arth} \frac{\tilde{x}}{a} - \operatorname{Arth} \frac{\tilde{x} \sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}} \right), & \tilde{x} < 0. \end{cases}$$

Заметим, что формула для функции δ_6 сохранит свой вид, если в нее вместо переменной $\tilde{x}$ подставить ее абсолютное значение $|\tilde{x}|$.

Используя теперь полученные в этом разделе функции δ и формулу (7.33), находим выражение для скалярного потенциала на оси x внутри a -сферы:

$$\Phi_{31} = \frac{e}{2\beta a} \left\{ 1 + \frac{1}{\tilde{x}} \left[\sqrt{(\beta^2 - 1)(\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \beta^2 a \left(1 - \frac{a^2 - \tilde{x}^2}{a\tilde{x}} \left(\text{Arth} \frac{\tilde{x}}{a} - \text{Arth} \frac{\tilde{x}\sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}} \right) \right) \right] \right\}. \quad (7.64)$$

В этой формуле множитель перед разностью гиперболических арктангенсов содержит величину $\tilde{x}^{-1}$, поэтому разность из нечетной функции $\tilde{x}$ превращается в четную, что позволяет пользоваться формулой (7.64) на всей оси.

Согласно этой формуле скалярный потенциал при $\tilde{x} = a$ равен

$$\Phi_{31}(a, 0) = 0, \quad (7.64a)$$

что совпадает со значением потенциала Φ_{30} вне сферы в этой же точке пространства.

В центре сферы скалярный потенциал равен

$$\Phi_{31}(0, 0) = \frac{e}{2\beta a}. \quad (7.64b)$$

Наконец, если положить $\tilde{x} = -a$, то

$$\Phi_{31}(-a, 0) = \frac{e}{\beta a}. \quad (7.64c)$$

Отсюда заключаем, что внутри a -сферы скалярный потенциал при сверхсветовой скорости остается конечным на оси x . Более того, значения потенциала в трех точках этой оси ($\tilde{x} = a$, $\tilde{x} = 0$ и $\tilde{x} = -a$) лежат на одной прямой.

Наконец, пусть в выражении (7.64) $\beta \rightarrow 1$, тогда найдем следующий предел:

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \Phi_{31} = \frac{e}{2a} \left\{ 1 - \frac{\tilde{x}a}{|\tilde{x}|^2} \left[1 - \mathcal{H}\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right) \right] \right\}. \quad (7.64d)$$

Сравнивая этот предел с выражением (7.39₄) при $r = |\tilde{x}|$, видим, что оба эти выражения совпадают.

7.11. Потенциалы при $\beta > 1$ вне сферы

Если $r > a$, то в этой части пространства расширенный принцип Гюйгенса позволяет рассмотреть микроструктуру конуса Маха и найти скалярный и векторный потенциалы. Как и внутри a -сферы, ограничимся только скалярным потенциалом, но и для него не всегда удастся найти аналитическое выражение, а придется использовать численное интегрирование.

7.11.1. Структура конуса Маха

Обратившись к рис. 7.10, видим, что при $\beta > 1$ и $r > a$ имеется группа ϑ -гипербол, проходящих вне ОСТВ. Начинается эта группа с прямой $\vartheta = 0$ и заканчивается гиперболой, касающейся m -границы ОСТВ. На этой границе выполняется равенство

$$c_m = a + \lambda_m,$$

которое после замены c_m радикалом (7.9) и возведения в квадрат приводит к следующему квадратному уравнению:

$$(\beta^2 - 1)\lambda_m^2 - 2(a - \beta\tilde{x})\lambda_m + r^2 - a^2 = 0. \quad (7.65)$$

Это уравнение будет иметь единственное решение, если его детерминант равен нулю, т.е. если выполняется равенство

$$(\tilde{x} - \beta a)^2 - (\beta^2 - 1)\rho^2 = 0. \quad (7.65a)$$

Очевидно, это равенство представляет собой уравнение прямого круглого конуса с вершиной, расположенной в точке $(\tilde{x} = \beta a, \rho = 0)$.

В этом случае единственный корень квадратного уравнения (7.65) равен

$$\lambda_m = \frac{a - \beta\tilde{x}}{\beta^2 - 1}. \quad (7.65b)$$

Разумеется, этот корень отвечает условию причинности (2.1) в том и только в том случае, когда выполняется неравенство $\tilde{x} \leq a/\beta$. Последнее в случае равенства задает плоскость

$$\tilde{x} = a/\beta, \quad (7.65c)$$

ортогональную оси x , вдоль которой движется рассматриваемая сфера.

Отсюда заключаем, что потенциалы при $r > a$ имеют физический смысл внутри конуса (7.65a), усеченного плоскостью (7.65c), и вне этого конуса скалярный потенциал Φ_{30} можно положить равным нулю:

$$\Phi_{30} = 0. \quad (7.66)$$

Плоскость (7.65c), отсекая часть конуса (7.65a), также отсекает часть a -сферы, и скалярный потенциал на поверхности отсеченной части сферы также равен нулю. Это доказывают следующие соображения. При $r = a$ часть пучка ϑ -гипербола на плоскости (λ, c) проходит вне ОСТВ. Для этой части граничной будет та из ϑ -гипербол, для которой производная $dc/d\lambda = 1$ при $r = a$, т.е. для которой при $r = a$ выполняется равенство

$$\frac{dc}{d\lambda} = \frac{\beta(\tilde{x} + \beta\lambda)}{c} = \beta \cos \theta = 1.$$

Но при $\lambda = 0$ выполняется равенство $\cos \theta = \cos \vartheta$, поэтому все ϑ -гиперболы при $0 \leq \vartheta \leq \arccos(1/\beta)$ проходят вне ОСТВ, следовательно, в этих точках наблюдения поля скалярный потенциал равен нулю.

Если значение r находится в промежутке $[a, \beta a]$, то часть пучка ϑ -гипербол входит в ОСТВ через его m -границу и, пройдя по ОСТВ, покидает ее через ту же границу. Часть физического пространства на плоскости (x, ρ) , соответствующую этим ϑ -гиперболам, назовем пограничным конусом, а скалярный потенциал в ней обозначим индексом "32" (см. рис. 7.10). С ростом угла ϑ эта часть ϑ -гипербол завершается той из них, которая касается μ -границы ОСТВ, и для нее из равенства

$$c_\mu = a - \lambda_\mu$$

находим

$$(\beta^2 - 1)\lambda_\mu^2 + 2(a + \beta\tilde{x})\lambda_\mu + r^2 - a^2 = 0. \quad (7.67)$$

Значение λ_μ будет единственным, если выполняется условие

$$(\tilde{x} + \beta a)^2 - (\beta^2 - 1)\rho^2 = 0. \quad (7.67a)$$

При выполнении этого условия

$$\lambda_\mu = -\frac{a + \beta \tilde{x}}{\beta^2 - 1}. \quad (7.67b)$$

Это значение будет положительным при выполнении неравенства

$$a + \beta \tilde{x} \leq 0. \quad (7.67c)$$

Уравнение (7.67a) представляет собой, очевидно, уравнение конуса с вершиной в точке $(-\beta a, 0)$ и углом раствора таким же, как и у конуса Маха. В силу условия (7.67c) этот конус обращен вершиной в сторону, противоположную движению a -сферы, и ограничен плоскостью

$$\tilde{x} = -a/\beta. \quad (7.67d)$$

Этот конус назовем обращенным, а скалярный потенциал в нем, как показано на рис. 7.10, отметим индексом "33".

Заметим, что обращенный конус можно представить как отражение отсеченной части пограничного конуса относительно плоскости $\tilde{x} = 0$. Вершина обращенного конуса совпадает с вершиной основного.

Если $r > \beta a$, то весь пучок ϑ -гипербол делится на три части. К первой части относятся те гиперболы, которые не имеют общих точек с областью существования треугольника встречи a - и λ -сфер. Вторая часть ϑ -гипербол, как видно из рис. 7.10, с ростом λ пересекает m -границу ОСТВ, а затем возвращается из нее через ту же границу. Эта часть ϑ -гипербол ограничена той из них, которая касается m -границы ОСТВ. Условие касания, как и выше, равносильно требованию, чтобы на этой границе

$$c_m = \lambda_m - a$$

решение соответствующего квадратного уравнения

$$(\beta^2 - 1)\lambda_m^2 + 2(\beta \tilde{x} + a)\lambda_m + r^2 - a^2 = 0 \quad (7.68)$$

было единственным. Для этого достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$(x + \beta a)^2 - (\beta^2 - 1)\rho^2 = 0, \quad (7.68a)$$

представляющее собой также уравнение конуса Маха, который назовем основным конусом, и где скалярный потенциал обозначим индексом "34".

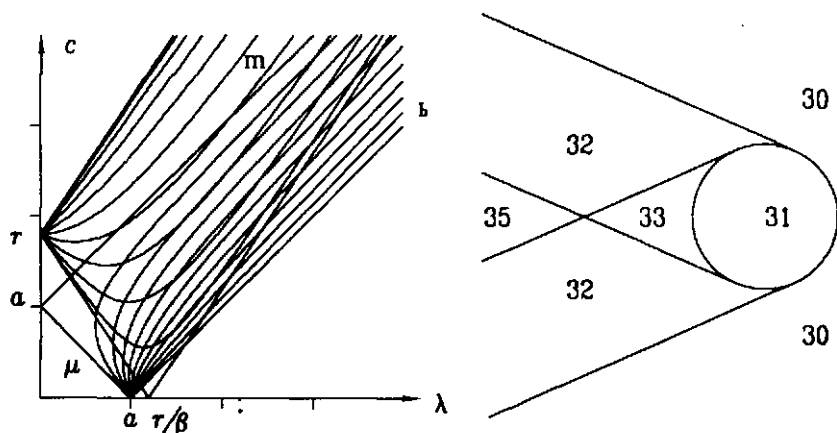


Рис. 7.10. ОСТВ при $\beta > 1$, $r > \beta a$ и структура конуса Маха

7.11.2. Потенциал в пограничном конусе

Этот конус, как видно из рис. 7.10, ограничен усеченной частью конуса (7.65a), частью a -сферы, заключенной между двумя плоскостями

$$\tilde{x} = \frac{a}{\beta} \quad \text{и} \quad \tilde{x} = -\frac{a}{\beta},$$

обращенным конусом (7.67a) и основным (7.68a).

Если точка наблюдения поля находится в пограничном конусе, то граничные λ здесь определяются неравенствами

$$\lambda_{m1} < \lambda_{l1} < \lambda_{l2} < \lambda_{m2}.$$

При этом λ_{m1} и λ_{m2} задаются уравнением (7.65), а λ_{l1} и λ_{l2} — (7.61d), в котором выбирается знак "+" перед членом с ρ/β . Парабола (7.57c) и окружность $r = a$ в этой части пространства имеют также две общие точки, как и внутри a -сферы.

Скалярный потенциал Φ_{32} в пограничном конусе представим, как и внутри a -сферы, в виде суммы трех потенциалов

$$\Phi_{32} = \Phi'_{32} + \Phi''_{32} + \Phi'''_{32}, \quad (7.69)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi'_{32} &= \int_{\lambda_{m1}}^{\lambda_{l1}} \frac{e}{2\lambda} \theta' \sin \theta d\lambda, \\ \Phi''_{32} &= \int_{\lambda_{l1}}^{\lambda_{l2}} \frac{e}{2\lambda} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \phi_b \right) \theta' + \alpha' \cos \phi_b \right] \sin \theta d\lambda, \\ \Phi'''_{32} &= \int_{\lambda_{m1}}^{\lambda_{l2}} \frac{e}{2\lambda} \theta' \sin \theta d\lambda.\end{aligned}$$

Здесь обозначения те же, что и в разд. 7.10.3. При этом потенциалы Φ'_{32} и Φ'''_{32} можно представить аналитически, но значения потенциала Φ''_{32} находятся численным интегрированием. В потенциале Φ'''_{32} изменен порядок граничных значений λ_{l2} и λ_{m2} на обратный, чтобы видимая площадь α -сферы увеличивалась с изменением λ .

7.11.3. Потенциал в обращенном конусе

Обращенный конус, как показано на рис. 7.10, ограничен продолжением основного конуса от его вершины ($x = -\beta a$, $y = 0$) вперед по направлению движения α -сферы до его касания со сферой и той частью сферы, которая при этом оказывается в этом конусе.

Если точка наблюдения поля находится в обращенном конусе, то тогда парабола (7.61c) и окружность $r = a$ имеют две пары общих точек, а граничные значения λ образуют следующие неравенства:

$$\lambda_{m1} < \lambda_{l1} < \lambda_{h1} < \lambda_{\mu 1}$$

и

$$\lambda_{\mu 2} < \lambda_{h2} < \lambda_{l2} < \lambda_{m2}.$$

Разумеется, граничные значения λ_m определяются квадратным уравнением (7.65), λ_l и λ_h — (7.61d), λ_μ — (7.67), а λ_μ — уравнением (7.68). При этом все перечисленные

уравнения имеют по два действительных и положительных корня, отвечающих условию причинности (2.5).

Детальный анализ показывает, что здесь, подобно тому, как и внутри α -сферы или в пограничном конусе, пересечения λ - и α -сфер после их взаимного касания образуют в начале интервала, когда $\lambda = \lambda_{m1}$ или $\lambda = \lambda_{\mu 2}$, шаровые слои, затем с ростом λ шаровые двугольники, которые опять переходят в слои. Такая инцидентность α - и λ -сфер повторяется дважды, поэтому для скалярного потенциала Φ_{33} в этой части пространства можем записать следующую общую формулу:

$$\begin{aligned}\Phi_{33} = & \Phi(\lambda_{l1}) - \Phi(\lambda_{m1}) + I'_{33}(\lambda_{h1}, \lambda_{l1}) + \\ & + \Phi(\lambda_{h1}) - \Phi(\lambda_{\mu 1}) + \\ & + \Phi(\lambda_{l2}) - \Phi(\lambda_{\mu 2}) + I''_{33}(\lambda_{h2}, \lambda_{l2}) + \\ & + \Phi(\lambda_{h2}) - \Phi(\lambda_{m2}).\end{aligned}\quad (7.70)$$

Здесь для любой функции $\Phi(\lambda)$ используем выражение (7.24), подставив в него соответствующее конечное λ , а значения интегралов

$$\begin{aligned}I'_{33} &= \frac{c}{2\pi} \int_{\lambda_{l1}}^{\lambda_{h1}} \frac{\sin \theta}{\lambda} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \phi_b \right) \theta' + \alpha' \sin \phi_b \right] d\lambda, \\ I''_{33} &= \frac{c}{2\pi} \int_{\lambda_{l2}}^{\lambda_{h2}} \frac{\sin \theta}{\lambda} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \phi_b \right) \theta' + \alpha' \sin \phi_b \right] d\lambda\end{aligned}$$

находим численным интегрированием на ПК.

Так определяется скалярный потенциал в произвольной точке обращенного конуса. Однако, если точка наблюдения поля находится на оси x , то по аналогии с тем, что было внутри α -сферы, интегралы I'_{33} и I''_{33} в силу равенств

$$\lambda_{l1} = \lambda_{h1} = \lambda'_0, \quad \lambda_{l2} = \lambda_{h2} = \lambda''_0$$

обращаются в нуль, и имеется возможность получить для потенциала Φ_{33} аналитическое выражение.

7.11.4. Потенциал на оси x обращенного конуса

В этом случае граничные λ образуют две группы, первая из которых определяется как

$$\lambda_{m1} = -\frac{a + \tilde{x}}{\beta + 1},$$

$$\lambda'_0 = \frac{-\sqrt{\beta^2 - 1}\tilde{x} - \sqrt{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}}{\beta\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad \lambda_{\mu 1} = -\frac{a + \tilde{x}}{\beta - 1},$$

а вторая

$$\lambda_{\mu 2} = \frac{a - \tilde{x}}{\beta + 1},$$

$$\lambda''_0 = \frac{-\sqrt{\beta^2 - 1}\tilde{x} + \sqrt{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}}{\beta\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad \lambda_{m2} = \frac{a - \tilde{x}}{\beta - 1}.$$

Если теперь вспомнить, что на оси обращенного конуса выполняются неравенства

$$-\beta a \leq \tilde{x} \leq -a,$$

то нетрудно установить, что все приведенные выше значения граничных λ положительны и тем самым удовлетворяют условию причинности (2.5).

Заметим, что в каждой из этих групп граничных λ при интегрировании, например, видимой площади a -сферы, следует изменить порядок граничных значений на обратный подобно тому, как это делалось выше. В результате на оси λ получаем четыре сегмента, как говорят математики, интегрирования:

$$s' \rightarrow [\lambda_{m1}, \lambda'_0], \quad s'' \rightarrow [\lambda_{\mu 1}, \lambda'_0],$$

и

$$s''' \rightarrow [\lambda_{\mu 2}, \lambda''_0], \quad s'''' \rightarrow [\lambda_{m2}, \lambda''_0].$$

Для каждого из этих сегментов найдем свои собственные δ -функции, обозначая их штрихами и индексами, а суммы

подобных функций подставим в (7.32). Так, для функции δ_1 находим

$$\begin{aligned}\delta'_1 &= \frac{\lambda'_0}{c'_0} - \frac{\lambda_{m1}}{c_{m1}} = -\frac{\tilde{x}}{\beta} \left(\frac{1}{c'_0} - \frac{1}{c_{m1}} \right), \\ \delta''_1 &= \frac{\lambda'_0}{c'_0} - \frac{\lambda_{\mu 1}}{c_{\mu 1}} = -\frac{\tilde{x}}{\beta} \left(\frac{1}{c'_0} - \frac{1}{c_{\mu 1}} \right), \\ \delta'''_1 &= \frac{\lambda''_0}{c''_0} - \frac{\lambda_{\mu 2}}{c_{\mu 2}} = -\frac{\tilde{x}}{\beta} \left(\frac{1}{c''_0} - \frac{1}{c_{\mu 2}} \right), \\ \delta''''_1 &= \frac{\lambda''_0}{c''_0} - \frac{\lambda_{m2}}{c_{m2}} = -\frac{\tilde{x}}{\beta} \left(\frac{1}{c''_0} - \frac{1}{c_{m2}} \right).\end{aligned}$$

Суммируя все эти функции, находим

$$\delta_1 = 4 \frac{\tilde{x}}{\beta} \left(\frac{\beta^2 a}{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2} - \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}} \right).$$

Заметим, что любая функция δ_1 , т.е. вычисленная в любом интервале или с любым штрихом, равна функции δ_2 , вычисленной в том же интервале и умноженной на $(-\tilde{x}/\beta)$, поэтому можем записать

$$\delta_2 = -4 \left(\frac{\beta^2 a}{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2} - \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}} \right).$$

Подобным образом вычисляем функции δ_5 и δ_6 . Однако при вычислении функций δ'_5 и δ''_5 находим, что эти функции имеют неопределенность вида $0/0$. Подобную же неопределенность имеют и функции δ'''_6 и δ''''_6 . Так, функция δ'_5 в общем виде равна

$$\begin{aligned}\delta'_5 &= \operatorname{Arsh} \frac{\tilde{x} + \beta \lambda'_0}{\rho} - \operatorname{Arsh} \frac{\tilde{x} + \beta \lambda_{m1}}{\rho} = \\ &= \ln \frac{\tilde{x} + \beta \lambda'_0 + c'_0}{\tilde{x} + \beta \lambda_{m1} + c_{m1}} = \ln \frac{f'_0}{f_{m1}}.\end{aligned}$$

Нетрудно установить, что на оси x выполняются равенства

$$f'_0 = 0, \quad f_{m1} = 0.$$

Полагая, что для любого λ выполняется соотношение

$$c = \sqrt{(\tilde{x} + \beta\lambda)^2 + \rho^2},$$

находим

$$\frac{\partial f'_0}{\partial \rho} = \frac{\rho + \beta f'_0 \frac{\partial \lambda'_0}{\partial \rho}}{c'_0}.$$

Аналогичную формулу нетрудно получить и для функции f_{m1} , откуда заключаем, что при $\rho \rightarrow 0$ выполняются также равенства

$$\frac{\partial f'_0}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial f_{m1}}{\partial \rho} = 0.$$

Поэтому для раскрытия неопределенности функций δ'_5 и δ''_5 воспользуемся правилом Лопиталья дважды, что дает

$$\begin{aligned} \delta'_5 &= \ln \frac{c_{m1}}{c'_0} = -\operatorname{Arth} \frac{1}{\beta} - \operatorname{Arth} \frac{\tilde{x}}{\beta a}, \\ \delta''_5 &= \ln \frac{c_{\mu 1}}{c'_0} = \operatorname{Arth} \frac{1}{\beta} + \operatorname{Arth} \frac{\tilde{x}}{\beta a}. \end{aligned}$$

В двух оставшихся функциях δ_5 такая неопределенность отсутствует, и для них получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \delta'''_5 &= \ln \frac{c''_0}{c_{\mu 2}} = \operatorname{Arth} \frac{1}{\beta} - \operatorname{Arth} \frac{\tilde{x}}{\beta a}, \\ \delta''''_5 &= \ln \frac{c''_0}{c_{m2}} = -\operatorname{Arth} \frac{1}{\beta} + \operatorname{Arth} \frac{\tilde{x}}{\beta a}. \end{aligned}$$

Суммируя все четыре последних выражения, находим функцию δ_5 на оси x :

$$\delta_5 = \delta'_5 + \delta''_5 + \delta'''_5 + \delta''''_5 = 0.$$

В двух первых интервалах функции δ_6 не имеют неопределенности вида $0/0$, поэтому для них получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\delta'_6 &= \ln \left(\frac{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda'_0 + |\tilde{x}| c'_0}{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda_{m1} + |\tilde{x}| c_{m1}} \frac{\lambda_{m1}}{\lambda'_0} \right) = \\ &= \ln \frac{c'_0(\beta + 1)}{\beta a - |\tilde{x}|} + \ln \frac{\lambda_{m1}}{\lambda'_0}, \\ \delta''_6 &= \ln \left(\frac{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda'_0 + |\tilde{x}| c'_0}{\tilde{x}^2 + \beta \tilde{x} \lambda_{\mu 1} + |\tilde{x}| c_{\mu 1}} \frac{\lambda_{\mu 1}}{\lambda'_0} \right) = \\ &= \ln \frac{c'_0(\beta - 1)}{\beta a - |\tilde{x}|} + \ln \frac{\lambda_{\mu 1}}{\lambda'_0}.\end{aligned}$$

Функции δ_6 в двух оставшихся интервалах интегрирования

$$\begin{aligned}\delta'''_6 &= \ln \frac{r^2 + \beta \tilde{x} \lambda''_0 + r c''_0}{r^2 + 2\beta \tilde{x} \lambda_{\mu 2} + r c_{\mu 2}} + \ln \frac{\lambda_{\mu 2}}{\lambda''_0}, \\ \delta''''_6 &= \ln \frac{r^2 + \beta \tilde{x} \lambda''_0 + r c''_0}{r^2 + 2\beta \tilde{x} \lambda_{m2} + r c_{m2}} + \ln \frac{\lambda_{m2}}{\lambda''_0}\end{aligned}$$

имеют, как упоминалось выше, на оси x неопределенности вида $0/0$, причем они содержатся в обоих первых логарифмах приведенных выше выражений. Действительно, легко убедиться в том, что находящиеся под логарифмом функции

$$\begin{aligned}f''_0 &= r^2 + \beta \tilde{x} \lambda''_0 + r c''_0, \\ f_{\mu 2} &= r^2 + \beta \tilde{x} \lambda_{\mu 2} + r c_{\mu 2}, \\ f_{m2} &= r^2 + \beta \tilde{x} \lambda_{m2} + r c_{m2}\end{aligned}$$

при $\rho \rightarrow 0$ принимают значения, также равные нулю. Эти функции имеют квадратичную зависимость от ρ , поэтому при раскрытии неопределенности с использованием правила Лопиталя необходимо дважды выполнить дифференцирование по переменной ρ .

Первая частная производная функции f_0'' по ρ равна

$$\frac{\partial f_0''}{\partial \rho} = \rho \frac{(c_0'' + r)^2}{rc_0''} + \beta \frac{\tilde{x}r + \beta r \lambda_0'' + \tilde{x}c_0''}{c_0''} \frac{\partial \lambda_0''}{\partial \rho}.$$

При этом числитель дроби, стоящей перед частной производной λ_0'' , равен, очевидно, самой функции f_0'' , когда $\rho \rightarrow 0$, поэтому на оси x имеем

$$\frac{\partial f_0''}{\partial \rho} \rightarrow 0.$$

Такие же равенства справедливы и для двух других функций. Повторное дифференцирование дает

$$\left. \frac{\partial^2 f_0''}{\partial \rho^2} \right|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{(c_0'' + |x|)^2}{|x|c_0''}.$$

Тогда находим

$$\begin{aligned} \delta_6''' &= 2 \ln \frac{c_0'' + |\tilde{x}|}{c_{\mu 2} + |\tilde{x}|} + \ln \frac{c_{\mu 2}}{c_0''} + \ln \frac{\lambda_{\mu 2}}{\lambda_0''}, \\ \delta_6'''' &= 2 \ln \frac{c_0'' + |\tilde{x}|}{c_{m 2} + |\tilde{x}|} + \ln \frac{c_{m 2}}{c_0''} + \ln \frac{\lambda_{m 2}}{\lambda_0''}. \end{aligned}$$

При суммировании функций δ_6 по всем штрихам получим логарифмы следующих дробей:

$$L_\lambda = \ln \frac{\lambda_{m 1} \lambda_{\mu 1}}{\lambda_0'^2} \frac{\lambda_{m 2} \lambda_{\mu 2}}{\lambda_0''^2}, \quad L_c = \ln \frac{c_{\mu 2} c_{m 2}}{c_0''^2}.$$

Граничные значения λ определяются соответствующими квадратными уравнениями, поэтому все их парные произведения равны между собой, т.е. для них выполняются равенства

$$\lambda_{m 1} \lambda_{m 2} = \lambda_{\mu 1} \lambda_{\mu 2} = \lambda_0' \lambda_0'' = \frac{r^2 - a^2}{\beta^2 - 1}.$$

Благодаря этому обстоятельству заключаем, что величина $L_\lambda = 0$.

Далее, расстояние c_0'' между центрами a -сферы и сферы с радиусом λ_0'' равно, как нетрудно установить,

$$c_0'' = c_0' = \sqrt{\frac{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}{\beta^2 - 1}}.$$

Произведение расстояний $c_{\mu 2}$ и $c_{m 2}$, где

$$c_{\mu 2} = \frac{\beta a + \tilde{x}}{\beta + 1}, \quad c_{m 2} = \frac{\beta a - \tilde{x}}{\beta - 1},$$

равно

$$c_{\mu 2} c_{m 2} = \frac{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}{\beta^2 - 1} = c_0''^2.$$

Из этих равенств следует, что $L_c = 0$.

Наконец, суммируя все четыре функции δ_6 с различными штрихами, находим искомую функцию δ_6 на оси обращенного конуса:

$$\delta_6 = \delta_6' + \delta_6'' + \delta_6''' + \delta_6'''' = 4 \ln \frac{\sqrt{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2} - \tilde{x} \sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta(a - \tilde{x})}.$$

Подставив эти граничные δ -функции в (7.32) и выполнив несложные алгебраические преобразования, найдем скалярный потенциал на оси x обращенного конуса

$$\begin{aligned} \Phi_{33} = & \frac{\beta e}{|\tilde{x}|} \left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \left(a^2 - \frac{\tilde{x}^2}{\beta^2}\right)} - \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{x}^2 - a^2}{a\tilde{x}} \left(\operatorname{Arth} \frac{a}{\tilde{x}} - \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{\beta^2 a^2 - \tilde{x}^2}}{\tilde{x} \sqrt{\beta^2 - 1}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (7.64), замечаем, что в ней аргументы гиперболических арктангенсов имеют тот же вид, но обратные значения.

Для потенциала Φ_{33} найдем два предельных значения на оси x . Пусть $\tilde{x} = -a$, тогда в этой точке скалярный потенциал имеет величину

$$\Phi_{33} = \frac{e}{\beta a}. \quad (7.71a)$$

Такое же значение потенциала Φ_{31} внутри a -сферы в этой точке (сравни с (7.64с)) подтверждает еще раз непрерывность функций, задающих скалярный потенциал в различных областях пространства. Разумеется, если $\beta \rightarrow 1$, то потенциал Φ_{33} при $\tilde{x} = -a$ будет равен e/a , т.е. именно тому значению, которое в этой точке принимает потенциал сферы, движущейся со скоростью света. В точке ($\tilde{x} = -a$, $\rho = 0$) обращенного конуса потенциал имеет наименьшее значение, которое затем увеличивается с ростом x в отрицательном направлении.

Положив теперь $\tilde{x} = -\beta a$, найдем наибольшее значение скалярного потенциала в обращенном конусе

$$\Phi_{33} = \frac{e}{a} \left(1 + \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \operatorname{Arth} \frac{1}{\beta} \right). \quad (7.71b)$$

Как показано ниже, это значение потенциала совпадает с его значением в вершине основного конуса Маха.

7.11.5. Потенциал в основном конусе

Когда точка наблюдения поля находится в этой части пространства, то в ней имеются две пары граничных значений λ : $(\lambda_{m1}, \lambda_{\mu1})$ и $(\lambda_{m2}, \lambda_{\mu2})$. Граничные значения $(\lambda_{m1}, \lambda_{m2})$ определяются пересечением данной ϑ -гиперболы с m -границей ОСТВ:

$$c_m = \lambda_m - a,$$

откуда приходим к уравнению (7.65), а $(\lambda_{\mu1}, \lambda_{\mu2})$ — пересечением с μ -границей и уравнением (7.68). При этом для каждой пары граничных λ видимой оказывается вся поверхность a -сферы.

Однако, если сохранять направление изменения λ , то для первой пары $(\lambda_{m1}, \lambda_{\mu1})$ видимая площадь равна $4\pi a^2$, а для второй $(\lambda_{m2}, \lambda_{\mu2})$ — тому же значению, но с противоположным знаком: здесь, как говорят, время идет как бы в "обратном" направлении (см. разд. 5.9). Поэтому для вычисления потенциала Φ_{34} в основном конусе используем (7.28) с пределами

$$\Phi_{34} = \Phi(\lambda_{\mu1}) - \Phi(\lambda_{m1}) - [\Phi(\lambda_{\mu2}) - \Phi(\lambda_{m2})].$$

Определив соответствующие λ , находим потенциал Φ_{34} в основном конусе Маха:

$$\Phi_{34} = -\frac{\beta e \tilde{x}}{r^2} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{ar} \operatorname{Arth} \frac{a}{r} \right). \quad (7.72)$$

На оси x ($\rho = 0$) скалярный потенциал (7.72) равен, очевидно,

$$\Phi_{34} = -\frac{\beta e}{x} \left(1 + \frac{\tilde{x}^2 - a^2}{a\tilde{x}} \operatorname{Arth} \frac{a}{\tilde{x}} \right). \quad (7.72a)$$

Этот потенциал, очевидно, остается конечным при любой скорости a -сферы.

Дифференцируя потенциал Φ_{34} по $\tilde{x}$ и приравнявая результат нулю, получаем

$$\frac{\partial \Phi_{34}}{\partial \tilde{x}} = 2 \frac{\beta e}{\tilde{x}^2} \left(1 - \frac{a}{\tilde{x}} \operatorname{Arth} \frac{a}{\tilde{x}} \right) = 0,$$

что равносильно трансцендентному уравнению

$$\xi \operatorname{Arth} \xi = 1, \quad \xi = a/\tilde{x}.$$

Корень этого уравнения равен $\tilde{x} = -1,1997$, поэтому при $\beta < 1,1997$ потенциал Φ_{34} имеет максимум в этой точке:

$$\Phi_{34} = 1,1997 \beta \frac{e}{a},$$

и его положение на оси x остается неизменным, когда $1,1997 > \beta > 1$.

При более высоких скоростях скалярный потенциал имеет наибольшее значение

$$\Phi_{34} = \frac{e}{a} \left(1 + \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \operatorname{Arth} \frac{1}{\beta} \right) \quad (7.72b)$$

в изохронной точке ($\tilde{x} = -\beta a, \rho = 0$), а затем плавно уменьшается с ростом $\tilde{x}$ в сторону отрицательных значений $\tilde{x}$. Значение (7.72b) потенциала Φ_{34} совпадает со значением (7.71b) потенциала Φ_{33} в той же точке на оси x .

Последнее выражение можно переписать как

$$\Phi_{34} = 2 \frac{e}{a} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[1 - \mathcal{H} \left(\frac{1}{\beta} \right) \right] \right\},$$

в котором аргументом функции Гюйгенса $\mathcal{H}$ служит обратное значение относительной скорости β . Отсюда приходим к выводу, что когда $\beta \gg 1$, то

$$\Phi_{is} \approx 2 \frac{e}{a} \left(1 - \frac{1}{3\beta^2} \right),$$

т.е. при скорости a -сферы значительно больше скорости света скалярный потенциал оказывается всего в два раза больше, чем потенциал неподвижной сферы.

Пусть теперь $r \gg a$ в (7.72), тогда получим

$$\Phi_{34} = -2 \frac{\beta e \tilde{x}}{r^2} = -2 \frac{\beta e}{r} \cos \vartheta,$$

т.е. потенциал (5.26) точечного заряда при $\beta > 1$.

На этом закончим вычисления, связанные с потенциалами равномерно заряженной сферы с радиусом a , движущейся равномерно и прямолинейно. Хотя при $\beta > 1$ мы ограничились только скалярным потенциалом, аналогичные формулы можно получить также и для векторного потенциала, но это еще более увеличило бы объем данной главы.

7.11.6. Эквипотенциальные поверхности

Полученные в последних разделах формулы для скалярного потенциала (7.64), (7.66), (7.71) и (7.72) позволяют построить графики распределения скалярного потенциала на оси x при сверхсветовой скорости движения сферы, аналогичные тем, что представлены на рис. 7.9 для $\beta < 1$.

Отметим характерные черты полученного распределения потенциала. Прежде всего, скалярный потенциал при $\beta > 1$ остается всюду конечным.

Далее, если при $\beta < 1$ потенциал на оси x имел только два излома, то при сверхсветовой скорости таких изломов оказывается уже три:

- в точке $\tilde{x} = a$, разделяющей потенциалы, задаваемые функциями Φ_{30} , (7.61) и Φ_{31} , (7.59);
- в точке $\tilde{x} = -a$, разделяющей потенциалы, задаваемые функциями Φ_{31} , (7.59) и Φ_{33} , (7.71);
- в точке $\tilde{x} = -\beta a$, разделяющей потенциалы, задаваемые функциями Φ_{33} , (7.71) и Φ_{34} , (7.72).

Вместе с тем следует подчеркнуть, что четыре функции Φ_{30} , Φ_{31} , Φ_{33} и Φ_{34} , оставаясь конечными, непрерывным образом задают скалярный потенциал при сверхсветовой скорости движения сферы.

Наконец, в носовой части такой сферы имеются заряды, которые создают потенциал, равный в этой части сферы нулю. Это отчетливо видно на рис. 7.11, где показано распределение скалярного потенциала рассматриваемой сферы при $\beta > 1$.

Далее, эквипотенциальные поверхности всегда замкнуты, хотя сами поверхности значительно "деформируются", особенно вблизи сферы. Излом эквипотенциальных поверхностей при $\beta < 1$ наблюдается только на самой сфере, и здесь производная потенциала по пространственным координатам испытывает разрыв. Практически такое же положение существует в электростатике, и оно связано с заданием бесконечно тонкого слоя заряда на поверхности сферы. При $\beta > 1$ наблюдаются три таких излома — на сфере и на границах обращенного конуса и основного.

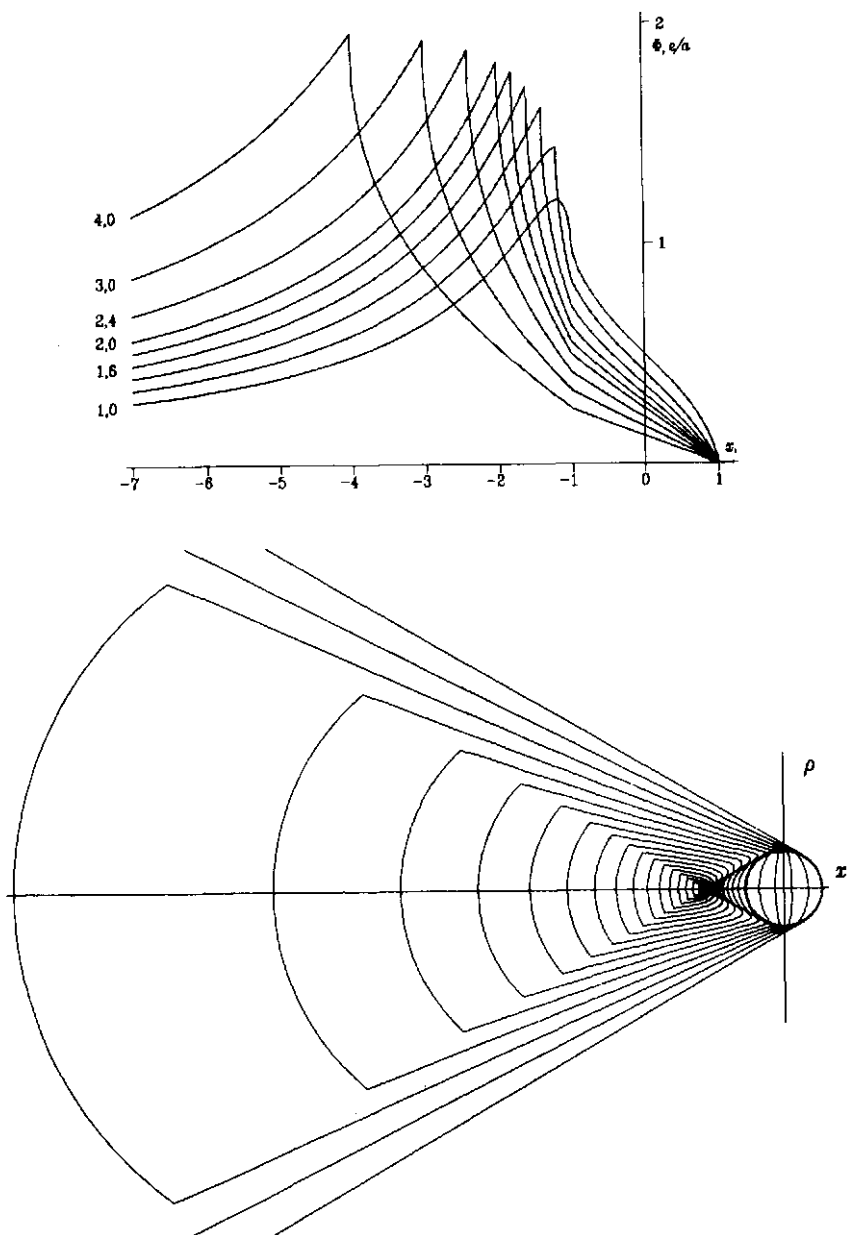


Рис. 7.11. Скалярный потенциал $\Phi(x, 0)$ при разных β сверху и эквипотенциали $\Phi(x, \rho) = 0, 1ne/a$, $n = [0, 17]$ при $\beta = 2$

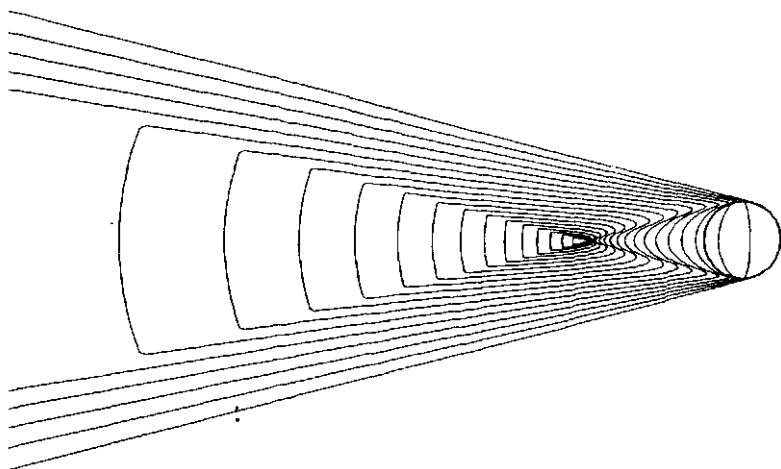


Рис. 7.12. Скалярный потенциал a -сферы при $\beta = 4,01$

Характерный для точечного заряда скачок потенциала на границе конуса Маха исчезает для заряженной сферы, потенциал которой плавно возрастает от нуля на внешней границе до конечного значения внутри конуса. Протяженность пограничного конуса равна $2\beta a$; двигаясь со скоростью βc (здесь c — скорость света), он проходит мимо неподвижного наблюдателя за время $2a/c$. Для сверхсветового электрона это время составит $0,94 \cdot 10^{-23}$ с, протона — $0,51 \cdot 10^{-26}$ с, что пока недоступно прямому измерению.

Выше (разд. 4.6) отмечалось, что свойства λ -функции характерны не только для движущихся зарядов, но и для других движущихся источников волновых процессов. Подтверждением этого может служить фотография [25] (рис. 7.13) шара, летящего в воздухе со скоростью 4,01 М. Сравнивая ее с представленным на рис. 7.12 распределением скалярного потенциала заряженной сферы, движущейся с той же относительной скоростью, находим, что такая относительно простая математическая модель потенциала, которая следует из расширенного принципа Гюйгенса, качественно довольно хорошо описывает характерные черты этого физического явления.

Разумеется, при вычислении потенциала рис. 7.12 скорость света считалась постоянной, а фотография рис. 7.13

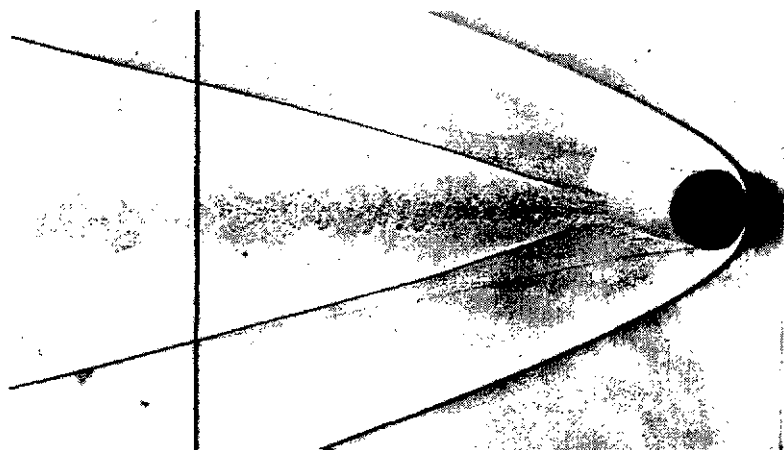


Рис. 7.13. Фотография шара, летящего в воздухе со скоростью $v = 4,01 \text{ М}$

фиксирует нагрев воздуха сверхзвуковым шаром, поэтому там скорость звука переменная, что и приводит к некоторым отличиям этих двух рисунков.

* * *

На этом закончим эту затянувшуюся главу, хотя и остался нерешенным ряд вопросов. К ним следует отнести общую энергию электромагнитного поля движущейся заряженной сферы, ее эффективный заряд. Интересно также найти условия "равновесного" распределения заряда на металлической сфере, при котором заряд при любой скорости движения сферы находится всегда на ее поверхности при одном и том же потенциале.

Результаты, полученные в этой главе, показывают, что эквипотенциальные поверхности заряженной сферы всегда замкнуты, а величина скалярного потенциала ограничена при любой скорости ее движения и в любой точке пространства — результат, который ожидался интуитивно, но здесь получил достаточно строгое математическое доказательство. Поэтому сингулярность потенциала точечного заряда связана именно с принятым в задаче точечным приближением.

Для описания скалярного потенциала при $\beta > 1$ во всем пространстве потребовалось уже пять различных функций для пяти различных областей. Лишь часть из них удастся записать аналитически, поэтому непрерывность этих функций можно проследить по результатам численного интегрирования и построения соответствующих распределений потенциала.

В заключение остановимся на статистике, относящейся к описанию потенциалов равномерно заряженной сферы, движущейся равномерно и прямолинейно. Как показано выше, в зависимости от скорости движения сферы все окружающее ее пространство делится на части. Таких частей две, если относительная скорость сферы меньше единицы, четыре, когда $\beta = 1$, и пять, если $\beta > 1$. Всего при различных значениях β имеется 11 областей, и в каждой потенциалы задаются тремя различными функциями — одна из них задает скалярный потенциал, две другие — компоненты векторного. Таким образом, для полного описания потенциалов движущейся сферы необходимо знать 33 функции.

Для этих многочисленных функций, задающих потенциалы движущейся сферы, удалось получить аналитические выражения в восьми областях: две области при $\beta < 1$, четыре — $\beta = 1$ и две области при скорости движения сферы выше скорости света. В трех оставшихся областях при $\beta > 1$ приведенные формулы позволяют получить значения потенциалов численным интегрированием.

Такое многообразие функций отражает, по-видимому, как сложность задачи, так и определенное несовершенство математических средств ее решения.

Глава VIII

Системы движущихся зарядов

Природа — сфинкс! И тем она верней
Своим искусом губит человека,
Что, может статься, никакой из века
Загадки нет и не было у ней.

Ф. Тютчев

В этой главе рассмотрим электромагнитное поле различных систем движущихся точечных зарядов. Системы зарядов, движущихся равномерно и прямолинейно, наиболее подходят для моделирования прямых проводов и магнитов, образованных бесконечными прямыми проводами с током. С одной стороны, для этой системы движущихся точечных зарядов можно провести точное аналитическое вычисление электромагнитного поля, с другой — магнитные поля таких систем детально изучены экспериментально, и потому они дают возможность сравнить теорию и эксперимент.

Для другой системы движущихся точечных зарядов — замкнутый или плоский круговой виток с током — также найдем ее электромагнитное поле аналитически, но только на оси витка.

Показано, что поля таких систем, вычисленные согласно расширенному принципу Гюйгенса, в точности отвечают обычным уравнениям Максвелла. Для таких систем вызванная движением зарядов поляризация окружающего пространства отсутствует. Точнее, поляризация пространства одним точечным зарядом нейтрализуется поляризацией соседних зарядов, что и представляется как отсутствие поляризации.

Но вначале обратимся к закону Био — Савара — Лапласа в его классической формулировке и посмотрим, в чем состоит отличие магнитного поля тока, предсказываемого этим законом, от поля, вычисленного согласно расширенному принципу Гюйгенса.

8.1. Закон Био — Савара — Лапласа

Напомним, что закон Био — Савара — Лапласа устанавливает величину и направление вектора магнитного поля $d\mathbf{H}$ в произвольной точке N , создаваемого в вакууме бесконечно малым элементом проводника длиной ds с током I :

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{cr^3} [ds \mathbf{r}]. \quad (8.1)$$

Здесь ds — вектор бесконечно малого элемента проводника, численно равный ds и проведенный в направлении тока, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из этого элемента проводника в точку наблюдения поля N , c — скорость света. В этом выражении квадратная скобка справа обозначает векторное произведение соответствующих векторов и определяет направление вектора магнитного поля $d\mathbf{H}$.

Удивляет, что в этой формулировке отсутствует какое-либо упоминание о запаздывании магнитного поля и даже о скорости движения зарядов, образующих ток, для которого вычисляется магнитное поле. Из выражения (8.1) видно, что поле определяется током и расстоянием до него в данный момент времени. Разумеется, это возможно только в том случае, когда скорость света бесконечно велика. Иными словами, стандартная формулировка этого закона не учитывает конечность скорости света.

Из выражения (4.10) с учетом равенств (3.10), (3.7) найдем, что магнитное поле движущегося точечного заряда равно

$$\mathbf{H} = -\frac{e}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c \partial t}\right) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{l}. \quad (8.2)$$

Предположим, что для рассматриваемого заряда выполняются следующие условия:

$$\beta \ll 1, \quad |\mathbf{r}_c| \ll |\mathbf{r}|.$$

При этих предположениях общее уравнение (2.5) для λ -функции примет следующий вид:

$$\lambda \mathbf{l} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c \approx \mathbf{r}. \quad (8.3)$$

Откуда находим

$$\lambda = r, \quad 1 = \frac{r}{r}, \quad \frac{\partial \lambda}{c \partial t} = 0.$$

Тогда выражение (8.2) для магнитного поля принимает вид

$$\mathbf{H} = -\frac{e}{cr^3} \mathbf{v} \times \mathbf{r}.$$

Величину $e\mathbf{v}$ можно представить как

$$e\mathbf{v} = e \frac{d\mathbf{s}}{dt} = I d\mathbf{s},$$

где I — ток бесконечно короткой токовой нити, а $d\mathbf{s}$ — вектор, численно равный длине этой нити и проведенный в направлении тока. Тогда магнитное поле точечного заряда, вычисленное согласно расширенному принципу Гюйгенса в предположении $\beta \ll 1$, можно представить окончательно в виде

$$d\mathbf{H} = -\frac{I}{cr^3} d\mathbf{s} \times \mathbf{r}. \quad (8.4)$$

Очевидно, последнее уравнение отличается от закона Био — Савара — Лапласа (8.1) лишь знаком или порядком векторных сомножителей. Отсюда следует, что общепринятая форма этого закона (8.1) есть всего лишь приближение, верное при $\beta \ll 1$. В этом и только в этом приближении векторный потенциал $\mathbf{A}$ точечного заряда, определенный в гл. II как

$$\mathbf{A} = \frac{e}{\lambda} \mathbf{l},$$

позволяет вычислить магнитное поле, отличающееся от поля, вычисленного согласно закону Био — Савара — Лапласа, лишь знаком.

Напротив, выражение (8.2) следует считать точной формулировкой этого закона, справедливой при любом значении β и верно учитывающей динамический характер магнитного поля. Ниже мы воспользуемся этой формулой для вычисления поля при любой скорости движущихся равномерно и прямолинейно зарядов, включая и $\beta > 1$. Разумеется, в последнем случае следует учитывать двузначность потенциалов, созданных в точке наблюдения.

8.2. Прямолинейный провод

Найдем теперь электромагнитное поле прямой нити, равномерно заряженной с удельным зарядом e' на единицу ее длины и движущейся с постоянной скоростью $v = \beta c$ вдоль оси x , т.е. прямолинейного провода с током. Пусть длина провода равна $2a$, и он ориентирован вдоль оси x .

Положение любой точки такого провода задается вектором

$$\mathbf{r}_c = (\xi + vt)\mathbf{i}.$$

Если в этой точке выделить бесконечно малый элемент провода длиной $d\xi$, то эту точку можно считать движущимся точечным зарядом, имеющим величину $e'd\xi$ и скорость $\mathbf{v}$. Магнитное поле $d\mathbf{H}$ этого элемента согласно (8.2) равно

$$d\mathbf{H} = \frac{e'd\xi}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c\partial t}\right) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{l}.$$

Поле всего провода найдем, интегрируя это выражение по ξ , т.е. вновь пользуясь принципом суперпозиции:

$$\mathbf{H} = - \int_{-a}^{+a} \frac{e'}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\partial \lambda}{c\partial t}\right) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{l} d\xi. \quad (8.5)$$

Разумеется, мы учтем все точки прямого провода, если ξ изменяется от $-a$ до a .

Для выбранной точки провода функция λ определится уравнением (2.5), которое примет вид

$$\lambda^2 = (x - vt - \xi + \beta\lambda)^2 + \rho^2, \quad \rho^2 = y^2 + z^2. \quad (8.6)$$

Корни этого уравнения (5.3) подробно рассмотрены в гл. V.

Для интегрирования введем координаты:

$$x - vt - \xi = x_1 - \xi, \quad r_1 = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + \rho^2},$$

$$\sin \vartheta = \rho/r_1.$$

Тогда можем записать

$$x_1 - \xi = \rho \operatorname{ctg} \vartheta, \quad d\xi = \rho \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}.$$

При $\beta < 1$ уравнение (8.6) имеет единственный корень, отвечающий условию причинности (2.1), который в этих обозначениях имеет вид

$$\lambda = \rho \frac{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} + \beta \cos \vartheta}{\sin \vartheta (1 - \beta^2)}.$$

Магнитное поле провода имеет, как нетрудно установить, только φ -компоненту, так как

$$\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{l} = \frac{\beta}{\lambda} (-\mathbf{j}z + \mathbf{k}y),$$

где $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные орты декартовой системы координат. И эта компонента равна

$$H_\varphi = -\frac{\beta e'}{\rho} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} - \beta \cos \vartheta)^2}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta}} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Для интегрирования введем новую переменную

$$\chi = \cos \vartheta.$$

Тогда, раскрыв скобку в числителе подынтегрального выражения и выполнив интегрирование, найдем

$$H_\varphi = \frac{e'\beta}{\rho} (\cos \vartheta \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} - \beta \cos^2 \vartheta) \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}.$$

Здесь

$$\cos \vartheta_1 = \frac{x - vt + a}{\sqrt{(x - vt + a)^2 + \rho^2}},$$

$$\cos \vartheta_2 = \frac{x - vt - a}{\sqrt{(x - vt - a)^2 + \rho^2}}.$$

Разумеется, произведение $e'\beta$ можно переписать как

$$e'\beta = \frac{I}{c}.$$

Теперь магнитное поле

$$H_\varphi = \frac{I}{c\rho} (\cos \vartheta \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} - \beta \cos^2 \vartheta) \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}. \quad (8.7)$$

Заметим, что магнитное поле прямого провода конечной длины зависит от скорости носителей заряда в нем и в общем случае это поле несимметрично относительно координаты x : абсолютное значение поля перед зарядами меньше, чем значение поля на том же расстоянии от центра зарядов, но позади. Это хорошо видно на рис. 8.1, где показаны кривые $H_\varphi(x_1)$ при фиксированном ρ , но различных β .

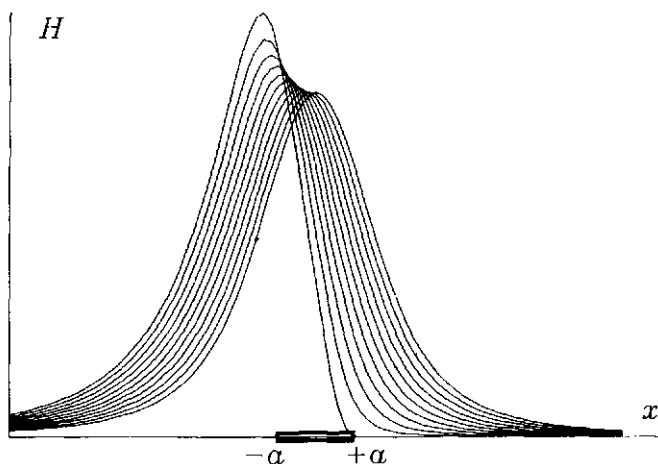


Рис. 8.1. Магнитное поле отрезка прямого проводника

При $\beta \rightarrow 0$ находим следующее предельное выражение для компоненты H_φ :

$$H_\varphi = \frac{I}{c\rho} (\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1), \quad (8.8)$$

которое полностью (с точностью до знака) совпадает с известным выражением для магнитного поля прямого провода конечной длины в классической электродинамике. Это обстоятельство еще раз подтверждает тот факт, что закон Био — Савара — Лапласа справедлив только для очень малых скоростей зарядов.

Магнитное поле из выражения (8.7) представим как сумму двух полей

$$H_\varphi = H_1 + H_2,$$

где

$$H_1 = \frac{I}{c\rho} (\cos \vartheta_2 \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta_2} - \cos \vartheta_1 \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta_1}),$$

$$H_2 = \frac{\beta I}{c\rho} (\cos^2 \vartheta_2 - \cos^2 \vartheta_1).$$

Поле H_1 симметрично относительно координаты $x - vt$ и с точностью до β^2 совпадает с классическим. Напротив, поля H_2 нет в классике. Это поле в β раз меньше, чем H_1 , и антисимметрично относительно $x - vt$.

Разумеется, в природе не существует отрезков провода с током, но достаточно точной моделью такого отрезка может служить импульс тока ускоренных частиц, например, электронов с подходящей длительности. Детальное измерение магнитного поля такого токового импульса и сравнение его с распределением, представленным на рис. 8.1, позволит получить экспериментальное подтверждение излагаемой здесь электродинамики.

8.3. Бесконечный прямой провод

Рассмотрим теперь магнитное поле бесконечно длинного прямого провода, для чего положим $a \rightarrow \infty$. Тогда нетрудно установить следующие равенства:

$$\cos \vartheta_2 = -1, \quad \cos \vartheta_1 = 1.$$

Подставив эти граничные значения косинусов в выражение (8.7), найдем магнитное поле прямого бесконечного провода с током I :

$$H_\varphi = -\frac{2\beta e'}{\rho}.$$

Но $\beta e' = ve'/c = I/c$, где I — ток нити, поэтому окончательно магнитное поле досветовой нити принимает вид

$$H_\varphi = -\frac{2I}{c\rho}. \quad (8.9)$$

Это хорошо известное поле прямого проводника с током, хотя противоположно ему по направлению. Для такого провода поле H_2 тождественно равно нулю, и составляющая H_1 не зависит от скорости носителей зарядов, т.к. синусы соответствующих углов равны нулю.

При $\beta > 1$ следует учитывать, что угол ϑ изменяется в пределах от $\vartheta_1 = \pi - \arctg(1/\sqrt{\beta^2 - 1})$, когда координата $\xi_1 = \rho\sqrt{\beta^2 - 1}$, до $\vartheta_2 = \pi$, когда $\xi_2 \rightarrow \infty$. Тогда, интегрируя выражение (8.5) в этих пределах, найдем магнитное поле сверхсветовой заряженной нити

$$H_\varphi = -\frac{2e'}{\rho} = -\frac{2I}{c\rho\beta}. \quad (8.10)$$

Таким образом, в терминах поле — ток магнитное поле прямого бесконечного проводника с током постоянно при $\beta < 1$ и обратно пропорционально β , если $\beta > 1$. Как и в случае потенциалов точечного заряда, магнитное поле проводника с током имеет физический смысл при любой скорости движения зарядов и описывается непрерывно при помощи двух различных функций, соответствующих двум областям значений β .

Следует особо подчеркнуть то обстоятельство, что поляризационные заряды ρ_h и токи j_h "исчезли", и магнитное поле (8.11) и (8.12) теперь не зависит от времени и удовлетворяет классическому уравнению Максвелла. Исчезновение поляризации можно объяснить тем, что в случае

бесконечной нити поляризация, вызванная движением отдельных точечных зарядов, из которых по предположению состоит нить, нейтрализовалась поляризацией, вызванной соседними точечными зарядами, и в силу бесконечного числа таких зарядов нейтрализация оказалась полной.

Если для рассмотренной выше нити вычислить таким же способом электрическое поле, то найдем

$$E_{\rho} = \begin{cases} \frac{2e'}{\rho} = \frac{2I}{c\rho\beta}, & \text{если } \beta < 1, \\ \frac{2\beta e'}{\rho} = \frac{2I}{c\rho}, & \text{если } \beta > 1. \end{cases} \quad (8.11)$$

Если рассматриваемую нить заменить обычным проводником, то в нем наряду с движущимися зарядами e'_1 (электроны проводимости) присутствуют также неподвижные ионы с плотностью заряда e'_2 , при этом выполняется очевидное равенство

$$e'_1 = -e'_2 = e',$$

т.к. проводник с током в целом остается нейтральным. Скорости этих зарядов равны

$$\beta_1 = \beta, \quad \beta_2 = 0.$$

Суммируя поля этих зарядов, для случая $\beta < 1$ имеем

$$\begin{aligned} H_{\varphi} &= H_{\varphi 1} + H_{\varphi 2} = \frac{2I}{c\rho}, \\ E_{\rho} &= E_{\rho 1} + E_{\rho 2} = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что магнитное поле $H_{\varphi 2}$ зарядов e'_2 равно нулю, т.к. эти заряды неподвижны.

Для сверхсветового тока, т.е. в случае $\beta > 1$, находим

$$\begin{aligned} H_{\varphi} &= \frac{2I}{\beta c\rho}, \\ E_{\rho} &= (\beta - 1) \frac{2I}{\beta c\rho} = (\beta - 1) H_{\varphi}. \end{aligned}$$

Реальный проводник с током соответствует движению электронов с досветовой скоростью, т.к. в нем отсутствует радиальная компонента электрического поля.

8.4. Токовое кольцо

Можно показать, что и для других систем проводников с током принятое определение векторного потенциала (2.5) дает в интегрируемых случаях значение магнитного поля, отличающееся от справочного лишь знаком.

Рассмотрим, для примера, плоскую круговую нить с радиусом a и удельным зарядом e' на единицу длины, вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей оси. Выбрав на нити бесконечно малый элемент заряда $de = e'ad\varphi$, примем его за точечный заряд, для которого функция λ определится уравнением

$$\lambda^2 = r^2 + a^2 - 2ar \sin \vartheta \cos(\varphi - \omega t + \frac{\omega}{c}\lambda),$$

где r, ϑ, φ — сферические координаты точки наблюдения поля. Это уравнение имеет точное аналитическое решение только на оси $\sin \vartheta = 0$. Тогда, пользуясь формулой (8.2) и проведя несложные вычисления, найдем, что магнитное поле вращающегося точечного заряда de имеет величину

$$dH_z = -\frac{\beta e' a^2}{\sqrt{r^2 + a^2}^3} d\varphi$$

на оси вращающейся нити. Полагая φ заданным в интервале $[0, 2\pi]$ и интегрируя, получаем

$$H_z = -2\pi \frac{\beta e' a^2}{\sqrt{r^2 + a^2}^3}.$$

Как и раньше, будем под произведением $\beta e'$ понимать I/c , тогда последнее выражение можно записать в стандартном виде

$$\mathbf{H} = -\frac{2\mathbf{P}_m}{c\sqrt{r^2 + a^2}^3}, \quad (8.12)$$

где вектор $\mathbf{P}_m = I\mathbf{S}/c$ есть магнитный момент плоского кругового проводника с током, а $\mathbf{S}$ — вектор, численно равный площади проводника и направленный по нормали к плоскости окружности.

На оси рассматриваемой круговой нити $\sin \vartheta = 0$, поэтому λ остается однозначной при любой скорости вращения. Следовательно, формула (8.14) справедлива при любом значении β .

* * *

Общепринятая форма (8.1) закона Био — Савара — Лапласа представляет собой, как мы видели, всего лишь нулевое приближение к действительности (нулевое по величине относительной скорости β движущихся зарядов). Напротив, последовательная формулировка электродинамики на основе расширенного принципа Гюйгенса дает точную формулу (8.2) для магнитного поля движущихся зарядов. При этом магнитное поле проводника конечной длины зависит сложным образом от скорости движения носителей зарядов в проводнике (см. (8.7)). Это невозможно измерить экспериментально для обычных проводников в силу того, что средняя скорость носителей зарядов в них чрезвычайно мала. Но для импульсных пучков электронов распределение магнитного поля доступно для измерения. Можно ожидать, что соответствующие измерения дадут подтверждение справедливости принципа Гюйгенса.

Приведенные выше вычисления показывают, что в интегрируемых случаях магнитное поле проводников с током, вычисленное согласно принятому определению векторного потенциала, совпадает с полем, предсказываемым уравнениями Максвелла и наблюдаемым на опыте. Располагая формулами (8.7) и (8.12), мы можем построить магнитную систему практически любой конфигурации. При этом характерная для точечного заряда необратимость уравнений поля исчезает благодаря взаимной нейтрализации поляризационных зарядов и токов, вызываемых движением отдельных точечных зарядов.

Полученный здесь противоположный знак магнитного поля, по-видимому, связан с условностью принятого направления и никак не отражается в эксперименте. Действительно, знак магнитного поля можно изменить, т.к. в выражении для силы, с которой оно действует на заряженную частицу, входит векторное произведение поля на скорость частицы, и, изменив лишь порядок сомножителей, можно сохранить направление силы.

Отметим также то обстоятельство, что полученные здесь магнитные поля *стационарны*, т.е. не зависят от времени, хотя и состоят из множества движущихся со скоростью света элементарных волн. В этом аспекте рассмотренное магнитостатическое поле аналогично электростатическому.

Электрическое поле бесконечного прямого провода при $\beta < 1$ описывается известным из электростатики скалярным потенциалом; разумеется, такой потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа.

Послесловие

И какой же русский не любит
быстрой езды!

Н. Гоголь

В основу изложенной в этой книге теории электромагнитного поля положен принцип Гюйгенса, который, по мнению автора, следовало бы назвать волновым, т.к. именно этот принцип положил начало волновой теории света. Этот принцип постулирует участие трех разнородных объектов в формировании электромагнитного поля движущегося заряда трех объектов. Среди них первый объект — это собственно сам точечный заряд, на движение которого волновой принцип Гюйгенса не накладывает никаких ограничений, равно как и на величину заряда или его структуру во времени. Полагая, что такой движущийся объект может иметь заряд только в течение очень короткого промежутка времени, т.е. может быть точечным как в пространстве, так и во времени, мы нашли, как показано в гл. I, что в СТО не выполняется ею же постулируемый принцип постоянства скорости света в любой инерциальной системе.

Под другим объектом понимается множество элементарных электромагнитных возмущений, созданных зарядом за все время его существования, предшествующее моменту наблюдения электромагнитного поля. На движение таких возмущений волновой принцип Гюйгенса налагает следующие довольно жесткие ограничения:

- каждое отдельно взятое возмущение с момента своего возникновения сферически расширяется в однородном пространстве;

- расширение данного возмущения происходит "постепенно" с постоянной скоростью и относительно той точки пространства, в которой это возмущение появилось;
- в случае электромагнитных явлений это расширение происходит со скоростью света, в других явлениях — со своей характерной скоростью;
- если через некоторую точку пространства проходит одновременно несколько возмущений, то каждое возмущение проходит эту точку, не взаимодействуя с другими.

Если же несколько элементарных возмущений приходит одновременно в точку наблюдения электромагнитного поля, то там они суммируются, и это суммирование происходит в результате принципа суперпозиции.

Наконец, третьим объектом любого волнового процесса является среда, заполняющая все окружающее (разумеется, в пределах той или иной задачи) пространство и служащая переносчиком элементарных возмущений. Причем согласно волновому принципу эта среда материальна и отвечает только одному требованию — обеспечивает "постепенное" распространение элементарного возмущения с постоянной или переменной (для сред с дисперсией) скоростью. Для электромагнитного поля в свободном однородном пространстве принимаем скорость распространения возмущений равной скорости света.

Расширенный принцип Гюйгенса постулирует, что в любой точке пространства с координатой $\mathbf{r}$ и в момент времени t движущийся по траектории $\mathbf{r}_c(t)$ точечный заряд e создает скалярный потенциал Φ и векторный $\mathbf{A}$:

$$\Phi = \frac{e}{\lambda}, \quad \mathbf{A} = \frac{e}{\lambda} \mathbf{l}, \quad (1)$$

где

$$\lambda \mathbf{l} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t - \frac{\lambda}{c}), \quad (2)$$

$$\lambda = c(t - t') \geq 0, \quad (3)$$

$$|\mathbf{l}| = 1. \quad (4)$$

Здесь t' — некоторый момент времени, предшествующий моменту t наблюдения электромагнитного поля, и соотношение (3) есть условие причинности. Решение уравнений (2) и (4), удовлетворяющее условию (3), дает нам функции $\lambda(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{l}(\mathbf{r}, t)$, а с ними и функции $\Phi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Потенциалы связаны с электрическим полем $\mathbf{E}$ и магнитным $\mathbf{H}$ стандартными соотношениями обычной электродинамики, что приводит к полному решению задачи отыскания электромагнитного поля движущегося точечного заряда.

Расширенный принцип Гюйгенса позволяет найти потенциалы и поля точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно с любой скоростью как меньше, так и больше скорости света. При этом потенциалы имеют сингулярность только в одной точке — той, где в данный момент находится заряд. Эта сингулярность вызвана принятым точечным приближением. Для заряженной сферы конечного радиуса эта сингулярность отсутствует и ее потенциалы всюду имеют конечную величину.

Этот принцип в приложении к различным задачам классической электродинамики приводит к результатам, некоторые из них совпадают с известными ранее, другие же существенно отличаются. Так, скалярный потенциал Φ , описывающий поле точечного движущегося заряда при $\beta \leq 1$, удовлетворяет, как мы видели, нелинейному и необратимому дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных [31]

$$\square \Phi = -\frac{2e}{\lambda^3} \frac{\partial \lambda}{c \partial t} = \frac{\partial \Phi^2}{e c \partial t}. \quad (5)$$

Это уравнение получено при самых общих предположениях относительно движения заряда и является нелинейным и необратимым, и оно включает электростатику как частный случай, когда $\partial \lambda / c \partial t = 0$ или $\partial \Phi / c \partial t = 0$.

Подчеркнем то обстоятельство, что эти уравнения можно составить лишь при условии $\beta \leq 1$, т.к. только при его выполнении уравнение (2) для функции $\lambda(\mathbf{r}, t)$ имеет единственный корень, удовлетворяющий условию причинности (3). Напротив, при $\beta \geq 1$ таких корней может быть два и более, поэтому составить аналогичное дифференциальное уравнение второго порядка для произвольной траектории заряда, имеющего скорость выше скорости све-

та, не представляется возможным. Однако для заданной траектории точечного заряда можно выполнить сначала вычисление потенциалов, а затем для них составить соответствующее дифференциальное уравнение. В гл. V показано, что для равномерно и прямолинейно движущегося со сверхсветовой скоростью точечного заряда скалярный потенциал, представляющий собой сумму двух электромагнитных возмущений, распространяющихся со скоростью света, можно рассматривать как возмущение, созданное одним зарядом, но распространяющееся с той же скоростью, с которой движется заряд.

Когда рассматривается электромагнитное поле системы зарядов, то принцип суперпозиции изменяет вид уравнения (5), и для некоторых систем движущихся зарядов оно трансформируется в однородное и обратимое волновое уравнение

$$\square \Phi = 0. \quad (6)$$

Напротив, в электродинамике Лоренца — Эйнштейна при отыскании потенциала точечного заряда исходили именно из уравнения (6), и этот подход привел к СТО.

Обосновывается такой подход ссылкой на уравнения Максвелла, что, на мой взгляд, далеко не так. Действительно, уравнение (6) следует не только из уравнений Максвелла, но и предположения о том, что распределение движущегося точечного заряда такое же, как и покоящегося. Именно это предположение ведет к парадоксам СТО и ее абсурдности.

Если же, как здесь, исходить не из этого предположения, а из существа дела, а именно последовательно учитывать основы волновой теории света, то все встает на свои места. Уравнения Максвелла остаются справедливыми, хотя они и изменяют свой вид при переходе от одной системы зарядов к другой, но такова жизнь, или наука, если хотите, да и Максвелл составлял свои уравнения не для точечного заряда, а для тех систем, которые в то время были известны.

Со времен Максвелла считается, что распространение электромагнитных колебаний можно с успехом описать с помощью модели свободных полей, для которых не требуется присутствие зарядов или токов, т.к. энергия переменного электромагнитного поля способна сама себя поддерживать, переходя из одной формы (магнитной) в другую

(электрическую). Это утверждение опирается на уравнения Максвелла в так называемой однородной форме.

Действительно, полагая $\mathbf{j}$ в (1.1) и ρ в (1.4) всюду равными нулю, можем уравнения (1.1) — (1.4) переписать в однородной форме

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{c \partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{c \partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}$$

Образуя вихрь от первого уравнения каждой строки приведенной выше системы, получаем

$$\square \mathbf{H} = 0 \quad \text{и} \quad \square \mathbf{E} = 0, \quad (7)$$

т.е. однородные волновые уравнения для напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ и электрического $\mathbf{E}$. Именно такое или более развернутое доказательство можно найти в любом учебнике по электродинамике.

Однако автор, опираясь на собственный опыт многолетнего курильщика и вековую мудрость народа, придерживается той точки зрения, что дыма без огня не бывает. Поэтому если есть переменное электромагнитное поле, то должны быть заряды и токи, его возбуждающие.

Положим, что в уравнениях (1.1) и (1.4) $\mathbf{j}$ и ρ не равны нулю, а задаются непрерывными функциями координат и времени, которые, как и поля, можно дифференцировать сколько угодно раз. Тогда, образуя вихрь от уравнений (1.2) и (1.1), найдем последовательно

$$\square \mathbf{E} = 4\pi \left(\operatorname{grad} \rho - \frac{\partial \mathbf{j}}{c \partial t} \right), \quad \square \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}.$$

Полученные неоднородные волновые уравнения для полей мы можем обратить в однородные, положив в них правые части равными нулю. Тогда функции, задающие $\mathbf{j}$ и ρ , должны подчиняться уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{grad} \rho - \frac{\partial \mathbf{j}}{c \partial t} = 0. \quad (8)$$

Добавив сюда закон сохранения заряда

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

получим систему уравнений, из которой следует, что ρ и $\mathbf{j}$ также удовлетворяют однородным волновым уравнениям

$$\square \mathbf{j} = 0, \quad \square \rho = 0. \quad (9)$$

Таким образом, согласно уравнениям Максвелла пару однородных волновых уравнений (7) для полей всегда должна сопровождать пара подобных уравнений (9) для плотности заряда и тока, которые можно назвать волновыми. Более того, если в рассматриваемом пространстве относительные проницаемости ϵ и μ не равны единице, то в уравнениях (7) множитель перед второй частной производной поля по t равен, как известно, $\epsilon\mu/c^2$, и такой же множитель появляется в уравнениях (9) перед вторыми частными производными по времени плотностей заряда и тока. В этом читатель может сам убедиться, проделав соответствующие выкладки. Поэтому волны электрического и магнитного полей всегда сопровождаются волнами зарядов и токов, и все эти волны в вакууме или в среде движутся с одной и той же скоростью, величина которой является характеристикой среды.

Появление гюйгенсовских зарядов и токов вокруг движущегося точечного заряда заставляет думать, что их природа такая же, как и волновых.

Знаю, что смертен, что век мой недолог, и все же — когда я
Сложный исследую ход круговращения звезд,
Мнится, Земли не касаюсь ногами, но гостем Зевеса
В небе амброзией я, пищей бессмертных кормлюсь.

Птолемей

Приложение 1

Как показано в разд. 7.5.2, компоненту A_ρ векторного потенциала движущейся a -сферы можно записать в виде

$$A_\rho = \frac{e\rho}{8a} \sum_{i=1}^5 k_i I_{i+1}, \quad (1)$$

где k_j — следующие коэффициенты:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 1 - \beta^4, \\ k_2 &= 2\beta x(1 - \beta^2), \\ k_3 &= 2(r^2 - a^2), \\ k_4 &= 2\beta x(r^2 - a^2), \\ k_5 &= (r^2 - a^2)^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

а I_j — приведенные ниже интегралы.

Компонента A_x определяется выражением

$$A_x = \frac{x}{\rho} A_\rho + \frac{e}{8a} \sum_{i=1}^5 \kappa_i I_i. \quad (3)$$

Здесь I_j те же интегралы, а κ_j равны

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \beta(1 - \beta^4), \\ \kappa_2 &= 2\beta x(1 - \beta^2), \\ \kappa_3 &= 2\beta(r^2 - a^2), \\ \kappa_4 &= -2\beta x(r^2 - a^2), \\ \kappa_5 &= (r^2 - a^2)^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подынтегральные выражения в I_i содержат алгебраические функции и радикал из квадратичного трехчлена вида

$$c = \sqrt{(\beta\lambda + x)^2 + \rho^2}$$

и в общем случае сводятся к табличным. Однако в таблицах подкоренное выражение записывают в общем виде. Для удобства читателя ниже приведены искомые интегралы с учетом специфики подкоренного выражения; интегралы записаны в неопределенной форме, и постоянная интегрирования положена равной нулю:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\lambda^2 d\lambda}{c^3} = \frac{x^2 - \rho^2}{\beta^2 \rho^2} \frac{\lambda}{c} + \frac{x r^2}{\beta^3 \rho^2 c} + \frac{\bar{\alpha}}{\beta^3}, \\ I_2 &= \int \frac{\lambda d\lambda}{c^3} = -\frac{x}{\beta \rho^2} \frac{\lambda}{c} - \frac{r^2}{\beta^2 \rho^2 c}, \\ I_3 &= \int \frac{d\lambda}{c^3} = \frac{\lambda}{\rho^2 c} + \frac{x}{\beta \rho^2 c}, \\ I_4 &= \int \frac{d\lambda}{\lambda c^3} = -\frac{\beta x}{\rho^2 r^2} \frac{\lambda}{c} - \frac{x^2 - \rho^2}{\rho^2 r^2 c} - \frac{\bar{\gamma}}{r^3}, \\ I_5 &= \int \frac{d\lambda}{\lambda^2 c^3} = \beta^2 \lambda \frac{x^2 - 2\rho^2}{\rho^2 r^4 c} + \beta x \frac{x^2 - 5\rho^2}{\rho^2 r^4 c} - \\ &\quad - \frac{1}{r^2 \lambda c} + \frac{3\beta x}{r^5} \bar{\gamma}, \\ I_6 &= \int \frac{d\lambda}{\lambda^3 c^3} = -\beta^3 x \lambda \frac{2x^2 - 13\rho^2}{2\rho^2 r^6 c} - \\ &\quad - \beta^2 \frac{2x^4 - 25x^2 \rho^2 + 3\rho^4}{2\rho^2 r^6 c} + \frac{5\beta x}{2r^4 \lambda c} - \\ &\quad - \frac{1}{2r^2 \lambda^2 c} - 3\beta^2 \frac{5x^2 - r^2}{2r^7} \bar{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\bar{\alpha} = \text{Arsh} \frac{x + \beta \lambda}{\rho}, \quad \bar{\gamma} = \text{Arsh} \frac{r^2 + \beta x \lambda}{\beta \rho \lambda}.$$

Подставляя I_j из (5) в (1) и суммируя, найдем

$$A_\rho = \frac{e\rho}{8a} \sum_{i=1}^6 p_i \delta_i,$$

где функции $p_i(r, x)$ обозначают коэффициенты при одинаковых функциях λ и s , равные

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\beta x}{\rho^2} \left[-\frac{1-\beta^4}{\beta^2} + 2(1-\beta^2) - 2(1-\alpha^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2\beta^2(1-\alpha^2) \frac{x^2-2\rho^2}{r^2} - \beta^2(1-\alpha^2)^2 \frac{2x^2-13\rho^2}{2r^2} \right], \\ p_2 &= \frac{x^2}{\rho^2} \left[-\frac{1-\beta^4}{\beta^2} + 2(1-\beta^2) \frac{x^2}{r^2} - 2(1-\alpha^2) \frac{x^2-\rho^2}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2\beta^2(1-\alpha^2)^2 \left(x^2 \frac{x^2-5\rho^2}{r^4(1-\alpha^2)} - \frac{2x^4-25x^2\rho^2+3\rho^4}{4r^4} \right) \right], \\ p_3 &= \frac{\beta x}{2r^2} (1-5\alpha^2), \\ p_4 &= -\frac{1}{2r^2}, \\ p_5 &= 0, \\ p_6 &= -\frac{1-\alpha^2}{2r} [2-6\beta^2 \frac{x^2}{r^2} + 3\beta^2(1-\alpha^2) \frac{4x^2-\rho^2}{2r^2}]. \end{aligned}$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение $\alpha = a/r$.

Введем переменные

$$m = \frac{3}{2}\beta^2(1-\alpha^2)(1-5\alpha^2), \quad n = (1-\beta^2\alpha^2)^2,$$

тогда после приведения подобных членов коэффициенты p_i примут вид

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \beta x \left(\frac{m}{r^2} - \frac{n}{\beta^2 \rho^2} \right), \\ p_2 &= x^2 \left(\frac{m}{r^2} - \frac{n}{\beta^2 \rho^2} \right) + p'_2, \\ p'_2 &= -\frac{1-\beta^4}{\beta^2} - r p_6, \\ p_3 &= \frac{\beta x}{2r^2} (1-5\alpha^2), \\ p_4 &= -\frac{1}{2r^2}, \\ p_5 &= \frac{1-\alpha^2}{2r} [2-6\beta^2 \frac{x^2}{r^2} + 3\beta^2(1-\alpha^2) \frac{4x^2-\rho^2}{2r^2}], \\ p_6 &= -\frac{1-\alpha^2}{r} [1-6\beta^2 \frac{x^2}{r^2} + \frac{3}{2}\beta^2(1-\alpha^2)^2 \frac{4x^2-\rho^2}{r^2}]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Функции δ_i равны

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\lambda_2}{c_2} - \frac{\lambda_2}{c_2}, \\ \delta_2 &= \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}, \\ \delta_3 &= \frac{r^2 - a^2}{\lambda_2 c_2} - \frac{r^2 - a^2}{\lambda_1 c_1}, \\ \delta_4 &= \frac{(r^2 - a^2)^2}{\lambda_2^2 c_2} - \frac{(r^2 - a^2)^2}{\lambda_1^2 c_1}, \\ \delta_5 &= \bar{\alpha}(\lambda_2) - \bar{\alpha}(\lambda_1), \\ \delta_6 &= \bar{\gamma}(\lambda_2) - \bar{\gamma}(\lambda_1) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и определяются граничными значениями λ_1 и λ_2 (соответственно, c_1 и c_2), значения которых зависят от того, в какой области пространства находится точка наблюдения поля.

Подставив теперь (5) в (3), найдем

$$A_x = \frac{x}{\rho} A_\rho + \frac{e}{8a} \sum_{i=1}^6 q_i \delta_i.$$

Здесь δ_i приведены выше, а q_i после приведения подобных члены равны

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= n \frac{\beta^2}{\rho^2} - \frac{1 - \beta^4}{\beta} + \\ &\quad + 2\beta(1 - \alpha^2)[1 - \beta^2(1 - \alpha^2)], \\ q_2 &= n \frac{r^2}{\rho^2} - 2\tau q_6, \\ q_3 &= -\beta(1 - \alpha^2), \\ q_4 &= 0, \\ q_5 &= \frac{1 - \beta^4}{\beta^2}, \\ q_6 &= \frac{\beta^2}{r}(1 - \alpha^2)(1 - 3\alpha^2). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Приложение 2

Согласно выражению (7.31) компонента

$$A_{\rho 12} = \frac{e\rho}{8a} \sum_{i=1}^6 p_i \delta_i = \frac{e\rho}{8a} (s_a + p_6 \delta_6),$$

куда следует подставить δ_i из (7.42g) для области $r > a$. Найдем сумму s_a всех членов, имеющих алгебраические δ_i -функции:

$$\begin{aligned} s_a &= ap_1 \sigma_c + p_2 \delta_c - [(1 + \beta^2)a\sigma_c + 2\beta x \delta_c] p_3 - 4(1 - \beta^2)ap_4 + \\ &+ \left\{ 2(3 + \beta^2)\beta ax \sigma_c + [(1 - \beta^2)(r^2 - a^2) + 4\beta^2 x^2 + 2(1 + \beta^2)a^2] \delta_c \right\} p_4 = \\ &= -4(1 - \beta^2)p_4 + [ap_1 - (1 + \beta^2)p_3 + 2(3 + \beta^2)\beta x p_4] a \sigma_c + \\ &+ \{ p_2 - 2\beta x p_3 + [(1 - \beta^2)(r^2 - a^2) + 4\beta^2 x^2 + 2(1 + \beta^2)a^2] p_4 \} \delta_c = \\ &= 2(1 - \beta^2) \frac{a}{r^2} + P \sigma_c + Q \delta_c, \end{aligned}$$

где введены два многочлена:

$$\begin{aligned} P &= [2r^2 p_0 - (1 + \beta^2)(3 - 5\alpha^2) - 4] \frac{\beta ax}{2r^2}, \\ Q &= p_2 - \beta^2(3 - 5\alpha^2) \frac{\tilde{x}^2}{r^2} - \frac{1 - \beta^2}{2}(1 - \alpha^2) - (1 + \beta^2)\alpha^2. \end{aligned}$$

Вначале преобразуем многочлен P :

$$\begin{aligned} P &= \left[3\beta^2(1 - \alpha^2)(1 - 5\alpha^2) - 2 \frac{nr^2}{\rho^2} - \beta^2(3 - 5\alpha^2) - \right. \\ &\quad \left. - (7 - 5\alpha^2) \right] \frac{\beta ax}{2r^2}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$P = - \left[\frac{nr^2}{\rho^2} + \frac{\beta^2}{2} \alpha^2 (13 - 15\alpha^2) + \frac{7 - 5\alpha^2}{2} \right] \frac{\beta a \tilde{x}}{r^2}. \quad (1)$$

Теперь займемся многочленом Q :

$$Q = p_2 - \beta^2(3 - 5\alpha^2) \frac{\tilde{x}^2}{r^2} - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2) - (1 + \beta^2)\alpha^2 =$$

$$= p_2 - \frac{1 + \alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2} [(5 - 7\alpha^2)c^2 - (1 - 3\alpha^2)s^2].$$

Здесь представим p_2 в общем виде, а rp_6 — в явном:

$$p_2 = x^2 p_0 - \frac{1 - \beta^4}{\beta^2} - rp_6 = x^2 p_0 - \frac{1 - \beta^4}{\beta^2} + \\ + 2(1 - \alpha^2) - 6\beta^2 \alpha^2 (1 - \alpha^2) \frac{\tilde{x}^2}{r^2} - \frac{3}{2} \beta^2 (1 - \alpha^2)^2 \frac{\rho^2}{r^2}.$$

Тогда многочлен Q примет вид

$$Q = x^2 p_0 - \frac{1 - \beta^4}{\beta^2} + \frac{3 - 5\alpha^2}{2} - \\ - \frac{\beta^2}{2} \left[(5 + 5\alpha^2 - 12\alpha^4) \frac{\tilde{x}^2}{r^2} + (2 - 3\alpha^2 + 3\alpha^4) \frac{\rho^2}{r^2} \right].$$

Наконец, произведение $x^2 p_0$ представим в виде

$$x^2 p_0 = \frac{x^2}{r^2} m - \frac{x^2}{\rho^2} n = \frac{3\tilde{x}^2}{2r^2} \beta^2 (1 - 6\alpha^2 + 5\alpha^4) - n \frac{\tilde{x}^2}{\rho^2}.$$

В результате для Q получаем выражение

$$Q = - \left\{ n \frac{\tilde{x}^2}{\rho^2} - \frac{3 - 5\alpha^2}{2} + \frac{1 - \beta^4}{\beta^2} + \right. \\ \left. + \frac{\beta^2}{2} \left[(2 + 23\alpha^2 - 27\alpha^4) \frac{\tilde{x}^2}{\rho^2} + (2 - 3\alpha^2 + 3\alpha^4) \frac{\rho^2}{r^2} \right] \right\}.$$

Сумму подчеркнутых членов обозначим $\underline{\varepsilon}$:

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1 - \beta^4}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{2} \left[(2 + 23\alpha^2 - 27\alpha^4) \frac{\tilde{x}^2}{\rho^2} + (2 - 3\alpha^2 + 3\alpha^4) \frac{\rho^2}{r^2} \right] = \\ = \frac{1}{\beta^2} + \beta^2 \alpha^2 (13 - 15\alpha^2) c^2 - 3 \frac{\beta^2}{2} \alpha^2 (1 - \alpha^2).$$

Кроме того, второй член суммы Q перепишем как

$$- \frac{3 - 5\alpha^2}{2} = -3 \frac{1 - \alpha^2}{2} + \alpha^2.$$

Тогда, возвращая его и $\underline{s}$ в Q , находим

$$Q = - \left[n \frac{\tilde{x}^2}{\rho^2} + \beta^2 \alpha^2 (13 - 15\alpha^2) \frac{\tilde{x}^2}{r^2} + \left(\frac{1}{\beta^2} - 3 \frac{1 - \alpha^2}{2} \right) (1 + \beta^2 \alpha^2) \right]. \quad (2)$$

Величины σ_c и δ_c возьмем из (7.42f), тогда для алгебраической суммы s_a получим

$$s_a = 2 \frac{1 - \beta^2}{r^2} a + (\bar{r} - \beta x) \left[\frac{1 - b}{r_+^2} (P + Q) + \frac{1 + b}{r_-^2} (P - Q) \right]. \quad (3)$$

Пользуясь выражениями (1) и (2), находим сумму $\sigma_{PQ} = P + Q$:

$$\begin{aligned} \sigma_{PQ} = & - \left[n(\beta a + \tilde{x}) \frac{\tilde{x}}{\rho^2} + \frac{7 - 5\alpha^2}{2} \frac{\beta a \tilde{x}}{r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{13 - 15\alpha^2}{2} \frac{\beta a \tilde{x}}{r^2} (\beta^2 \alpha^2 + 2 \frac{\beta a \tilde{x}}{r^2}) + \left(\frac{1}{\beta^2} - 3 \frac{1 - \alpha^2}{2} \right) (1 + \beta^2 \alpha^2) \right]. \end{aligned}$$

В этом выражении первую круглую скобку во второй строке запишем как

$$\beta^2 \alpha^2 + 2 \frac{\beta a \tilde{x}}{r^2} = \frac{r_+^2}{r^2} - 1,$$

а вторую —

$$1 + \beta^2 \alpha^2 = \frac{r_+^2}{r^2} - 2 \frac{\beta a \tilde{x}}{r^2}.$$

Тогда сумма σ_{PQ} примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{PQ} = & - \left[n(\beta a + \tilde{x}) \frac{\tilde{x}}{\rho^2} - 2 \frac{1 - \beta^2 \alpha^2}{\beta} \frac{a \tilde{x}}{r^2} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{13 - 15\alpha^2}{2} \frac{\beta a \tilde{x}}{r^2} - \frac{1}{\beta^2} + 3 \frac{1 - \alpha^2}{2} \right) \frac{r_+^2}{r^2} \right]. \end{aligned}$$

Далее, величину $n r^2 / \rho^2$ представим как

$$n \frac{r^2}{\rho^2} = \frac{(1 - \beta^2 \alpha^2)^2 r^2}{\beta^2 \rho^2} = \frac{r_-^2 r_+^2}{\beta^2 \rho^2 r^2} - 4\alpha^2. \quad (4)$$

Тогда сумму двух первых членов (обозначим ее вновь $\underline{s}$) в выражении для σ_{PQ} можно переписать как

$$\underline{s} = n(\beta a + \tilde{x}) \frac{\tilde{x}}{\rho^2} - 2 \frac{1 - \beta^2 \alpha^2}{\beta} \frac{a \tilde{x}}{r^2} = \frac{r_-^2 r_+^2}{\beta^2 s^2 r^4} (\beta a + \tilde{x}) \frac{\tilde{x}}{\rho^2} - 2 \frac{a \tilde{x} r_+^2}{\beta r^4}.$$

Возвращая сумму $\underline{s}$ в σ_{PQ} , находим

$$\sigma_{PQ} = -\frac{r_+^2}{r^2} \left[\frac{\tilde{x} r_-^2}{\beta^2 r^2 \rho^2} (\beta a + \tilde{x}) + \right. \\ \left. + \frac{13 - 15\alpha^2}{2} \frac{\beta a \tilde{x}}{r^2} - 2 \frac{a \tilde{x}}{\beta r^2} + \frac{1}{\beta^2} - 3 \frac{1 - \alpha^2}{2} \right].$$

В этом выражении три подчеркнутых члена во второй строке (обозначим их сумму $\underline{s}$) образуют

$$\underline{s} = -2 \frac{a \tilde{x}}{\beta r^2} + \frac{1}{\beta^2} - 3 \frac{1 - \alpha^2}{2} = \\ = \left(1 - 2 \frac{\beta a \tilde{x}}{r^2} + \beta^2 \alpha^2 \right) \frac{1}{\beta^2} - \frac{3 - \alpha^2}{2} = \frac{r_-^2}{\beta^2 r^2} - \frac{3 - \alpha^2}{2}.$$

Благодаря этому получаем

$$\sigma_{PQ} = -\frac{r_+^2}{r^2} \left[\frac{r_-^2}{\beta^2 r^2 s^2} (\beta a s + 1) + \frac{13 - 15\alpha^2}{2} \beta a s - \frac{3 - \alpha^2}{2} \right]. \quad (5)$$

Аналогично для разности $\delta_{PQ} = P - Q$ находим

$$\delta_{PQ} = - \left[(\beta a - \tilde{x}) \frac{n \tilde{x}}{\rho^2} + (7 - 5\alpha^2) \frac{\beta a \tilde{x}}{2r^2} + (13 - 15\alpha^2) (\beta a - 2\tilde{x}) \frac{\beta^2 a^2 \tilde{x}}{2r^4} - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{\beta^2} - 3 \frac{1 - \alpha^2}{2} \right) \left(1 + \beta^2 \alpha^2 \frac{\tilde{x}}{r} \right) \right] = \left[2 \frac{1 - \beta^2 \alpha^2}{\beta} \frac{a \tilde{x}}{r^2} - (\beta a - \tilde{x}) \frac{n \tilde{x}}{\rho^2} + \right. \\ \left. + (13 - 15\alpha^2) \frac{\beta a \tilde{x}}{2r^2} - \frac{1}{\beta^2} + 3 \frac{1 - \alpha^2}{2} \right] \frac{r_-^2}{r^2}.$$

Вновь через $\underline{s}$ обозначим сумму подчеркнутых членов, тогда, подставляя сюда n из (4), найдем

$$\underline{s} = \frac{r_-^2 r_+^2}{\beta^2 \rho^2 r^4} (\beta a - \tilde{x}) \tilde{x} - 4 (\beta a - \tilde{x}) \frac{a^2 \tilde{x}}{r^4} - 2 (1 - \beta^2 \alpha^2) \frac{a \tilde{x}}{\beta r^2} = \\ = \frac{r_-^2 r_+^2}{\beta^2 \rho^2 r^4} (\beta a - \tilde{x}) \tilde{x} - 2 (\beta^2 \alpha^2 - 2 \beta \frac{a \tilde{x}}{r^2} + 1) \frac{a \tilde{x}}{\beta r^2} = \\ = \frac{r_-^2}{r^4} \left[\frac{r_+^2}{\beta^2 \rho^2} (\beta a - \tilde{x}) - 2 \frac{a}{\beta} \right] \tilde{x}.$$

Тогда, возвращая $\underline{s}$ в δ_{PQ} , получаем

$$\delta_{PQ} = -\frac{r_-^2}{r^2} \left[\frac{r_+^2}{\beta^2 s^2 r^2} (\beta\alpha - c)c + \frac{13 - 15\alpha^2}{2} \beta\alpha c - \right. \\ \left. - \frac{1}{\beta^2} + 3\frac{1 - \alpha^2}{2} - 2\frac{\alpha c}{\beta} \right].$$

В этом выражении три последних члена (вновь обозначим их суммой $\underline{s}$) образуют

$$\underline{s} = 3\frac{1 - \alpha^2}{2} - 2\frac{a\tilde{x}}{\beta r^2} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{3 - \alpha^2}{2} - \frac{r^2 + 2\beta a\tilde{x} + \beta^2 a^2}{\beta^2 r^2} = \\ = -\frac{r_+^2}{\beta^2 r^2} + \frac{3 - \alpha^2}{2}.$$

Благодаря этому δ_{PQ} принимает вид

$$\delta_{PQ} = -\frac{r_-^2}{r^2} \left[\frac{r_+^2}{\beta^2 \rho^2} \left(\beta \frac{a\tilde{x}}{r^2} - 1 \right) + (13 - 15\alpha^2) \frac{\beta a\tilde{x}}{2r^2} + \frac{3 - \alpha^2}{2} \right]. \quad (6)$$

Выражения (4) и (6) подставим в (3), выполним умножение и приведем подобные члены, что даст

$$s_a = \frac{2\frac{1 - \beta^2}{r^2}a - \frac{\bar{r} - \beta x}{r^2} \left[(13 - 15\alpha^2) \frac{\beta a\tilde{x}}{r^2} + b(3 - \alpha^2) - \right. \\ \left. - 2\frac{(1 - \beta^2\alpha^2)(\beta a + b\tilde{x})\tilde{x} + (1 + \beta^2\alpha^2)b\rho^2}{\beta^2 \rho^2} \right]}{\beta^2 \rho^2}.$$

В результате выполненных преобразований в выражении для алгебраической суммы устранились дроби вида r_+^2 и r_-^2 , однако, как видно в последнем выражении, остались сингулярности ρ^{-2} и β^{-2} .

Устранением их и займемся, для чего подчеркнутую дробь (обозначим ее $\underline{s}$) в последнем выражении преобразуем по следующей схеме:

$$\underline{s} = \frac{2(1 - \beta^2\alpha^2)(\beta a + b\tilde{x})\tilde{x} + (1 + \beta^2\alpha^2)b\rho^2}{\beta^2 \rho^2} = \\ = \frac{2(1 - \beta^2\alpha^2)(\beta a\tilde{x} + b r^2)}{\beta^2 r^2} + 4\alpha^2 b.$$

Возвращая ее в выражение для s_a , находим

$$s_a = 2 \frac{1-\beta^2}{r^2} a - \frac{\bar{r}-\beta x}{r^2} \left\{ 10(1-\alpha^2) \frac{\beta a \bar{x}}{r^2} - \right. \\ \left. - \left[2 \frac{1-\beta^2 \alpha^2}{\beta^2 \rho^2} - (3-5\alpha^2) \right] \left(\frac{\beta a \bar{x}}{r^2} + b \right) \right\}.$$

Далее, в этом выражении подчеркнутую круглую скобку (обозначим ее $\underline{s}$) перепишем:

$$\underline{s} = \frac{\beta a \bar{x}}{r^2} + b = \beta a \frac{x(\bar{r}^2 - r^2) + \beta \bar{r}(r^2 - x^2)}{r^2 \bar{r}(\bar{r} - \beta x)}.$$

Здесь первая разность $\bar{r}^2 - r^2$ в соответствии с уравнением эллипсоида Хэвисайда преобразуется следующим образом:

$$\bar{r}^2 - r^2 = -\beta^2 \frac{1 - \bar{\alpha}^2}{1 - \beta^2 \bar{\alpha}^2} \rho^2,$$

а вторая очевидна: $r^2 - x^2 = \rho^2$. Тогда величина $\underline{s}$ примет вид

$$\underline{s} = \frac{a\beta^2 \rho^2}{r(\bar{r} - \beta x)} \left(1 - \frac{1 - \bar{\alpha}^2}{1 - \beta^2 \bar{\alpha}^2} \frac{\beta x}{\bar{r}} \right).$$

Возвращая $\underline{s}$ в выражение для s_a , получаем

$$s_a = 2 \frac{1-\beta^2}{r^2} a - 10(1-\alpha^2) \beta a \bar{x} \frac{\bar{r}-\beta x}{r^4} + \\ + \left[2(1-\beta^2 \alpha^2) - \beta^2(3-5\alpha^2) \frac{\rho^2}{r^2} \right] \frac{a}{r^2} \left(1 - \frac{1-\bar{\alpha}^2}{1-\beta^2 \bar{\alpha}^2} \frac{\beta x}{\bar{r}} \right).$$

Эти преобразования устраняют сингулярности суммы s_a как при $\rho \rightarrow 0$, так и при $\beta \rightarrow 0$.

Введем две безразмерные функции

$$h_2 = 10(1-\alpha^2) \bar{r} \frac{\bar{r}-\beta x}{r^2} + \\ + \frac{1-\bar{\alpha}^2}{1-\beta^2 \bar{\alpha}^2} \left[2 \left(1 - \beta^2 \frac{a^2 \bar{x}^2}{r^4} \right) - 3\beta^2(1-\alpha^2) \frac{\rho^2}{r^2} \right], \quad (7)$$

$$h_3 = 2 \left(1 + \frac{a^2 \bar{x}^2}{r^4} \right) + 3(1-\alpha^2) \frac{\rho^2}{r^2}.$$

Раскроем скобки в последнем выражении для s_a , тогда, воспользовавшись определениями (7), получим

$$s_a = \left(4 - \beta \frac{x}{r} h_2 - \beta^2 h_3\right) \frac{a}{r^2}. \quad (8)$$

Заметим, что функция h_3 , как и в случае компоненты $A_{\rho 11}$, зависит только от пространственных координат a/r и ϑ . Напротив, функция h_2 в общем случае помимо пространственных координат зависит также и от относительной скорости β движущейся a -сферы.

Последний член в сумме (7.31)

$$p_6 \delta_6 = \left[4\mathcal{H}_{\varrho^{-1}} - (4 - \beta^2 h_4) \frac{\varrho^1 - 1}{\varrho} \text{Arth} \frac{\beta \tilde{x}}{r \varrho} - \beta^2 h_4 \mathcal{H}_{\varrho^{-1}}\right] \frac{a}{r^2}, \quad (9)$$

где

$$h_4 = 3 \left[4 \frac{a^2 \tilde{x}^2}{r^4} - (r^2 - a^2) \frac{\rho^2}{r^4}\right]. \quad (10)$$

Подставляя (8) и (9) в (7.31), находим

$$\begin{aligned} A_{\rho 12} = & A_{02} \sin \vartheta - \frac{e}{2r} \left\{ \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \text{Arth} \frac{\beta \tilde{x}}{r \varrho} - \frac{\beta \tilde{x}}{4r} h_2 - \right. \\ & \left. - \frac{\beta^2}{4} \left[h_3 - h_4 \left(\mathcal{H}(\varrho^{-1}) + \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \text{Arth} \frac{\beta \tilde{x}}{r \varrho} \right) \right] \right\} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь A_{02} — единственная компонента векторного потенциала неподвижной a -сферы вне ее.

Приложение 3

Следуя той же процедуре, что и при вычислении $A_{\rho 12}$, в сумме (7.32)

$$A_{x12} = \frac{\tilde{x}}{\rho} A_{\rho 12} + \frac{\beta e}{8a} \sum_{i=1}^6 q_i \delta_i = \frac{\tilde{x}}{\rho} A_{\rho 12} + \frac{\beta e}{8a} (s_a + q_5 \delta_5 + q_6 \delta_6)$$

выделим прежде всего сумму s_a тех членов, которые имеют алгебраические δ_i -функции:

$$\begin{aligned} s_a &= q_1 a \sigma_c + q_2 \delta_c - q_3 [(1 + \beta^2) a \sigma_c + 2\beta x \delta_c] = \\ &= [q_1 - (1 + \beta^2) q_3] a \sigma_c + [q_2 - 2\beta x q_3] \delta_c = P \sigma_c + Q \delta_c. \end{aligned}$$

Здесь введены многочлены P и Q , разумеется, для этой компоненты свои. Многочлен P имеет вид

$$\begin{aligned} P = a[q_1 - (1 + \beta^2) q_3] &= a \left\{ \frac{\beta x^2}{\rho^2} n - \frac{1 - \beta^4}{\beta} + \beta(1 + \beta^2)(1 - \alpha^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2\beta(1 - \alpha^2)[1 - \beta^2(1 - \alpha^2)] \right\}, \end{aligned}$$

где $\alpha = a/r$. Приведя здесь подобные члены, перепишем это выражение

$$P = a \left[\frac{\beta \tilde{x}^2}{\rho^2} n - \frac{1 - \beta^4}{\beta} + \beta(1 - \alpha^2)(3 - \beta^2 + 2\beta^2 \alpha^2) \right]. \quad (1)$$

Выполнив аналогичные преобразования для многочлена Q , получим

$$Q = x \left[\frac{n r^2}{\rho^2} + 6\beta^2 \alpha^2 (1 - \alpha^2) \right]. \quad (2)$$

Подставляя в выражение для s_a значения σ_c и δ_c , выраженные через обратные величины c_1 и c_2 , находим

$$s_a = (\bar{r} - \beta x) \left[\frac{1 - b}{r_+^2} (P + Q) + \frac{1 + b}{r_-^2} (P - Q) \right]. \quad (3)$$

Найдем сумму $\sigma_{PQ} = P + Q$, опираясь на (1) и (2):

$$\begin{aligned}\sigma_{PQ} &= xn \frac{\beta ax + r^2}{r^2 s^2} - \frac{1 - \beta^4}{\beta} a + \\ &+ \beta a(1 - \alpha^2) \left[3 - \beta^2(1 + 2\alpha^2) + 6 \frac{\beta xa}{r^2} \right] = \\ &= \left[\frac{xn}{s^2} + 3\beta(1 - \alpha^2)a \right] \frac{r_+^2}{r^2} - \beta n \frac{\tilde{x}^2}{\rho^2} a - \\ &- \beta^2 a^2 n \frac{x}{\rho^2} - \beta^3(1 - \alpha^4)a - \frac{1 - \beta^4}{\beta} a.\end{aligned}$$

Теперь второй член в последнем равенстве разложим на два

$$-\beta n a \frac{\tilde{x}^2}{\rho^2} = -\beta n \frac{ar^2}{\rho^2} + \beta an,$$

и первый член разложения сложим с третьим членом σ_{PQ} :

$$\begin{aligned}-\beta n \frac{ar^2}{\rho^2} - \beta^2 \alpha^2 n \frac{\tilde{x}r^2}{\rho^2} &= -\beta a \frac{n}{\rho^2} (r^2 + \beta ax) = \\ &= -\beta an \frac{r_+^2 - \beta ax - \beta^2 a^2}{\rho^2}.\end{aligned}$$

Возвращая все это в сумму σ_{PQ} , имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{PQ} &= \left[\frac{x - \beta a}{\rho^2} nr^2 + 3\beta(1 - \alpha^2)a \right] \frac{r_+^2}{r^2} + \underline{\beta an} + \\ &+ \beta^2 a^2 n \frac{x + \beta a}{\rho^2} - \beta^3(1 - \alpha^4)a - \underline{\frac{1 - \beta^4}{\beta} a}.\end{aligned}$$

Сумму подчеркнутых членов обозначим $\underline{s}$:

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \beta an - \frac{1 - \beta^4}{\beta} a = \left[\frac{(1 - \beta^2 \alpha^2)^2}{\beta} - \frac{1 - \beta^4}{\beta} \right] a = \\ &= \beta a [\beta^2(1 + \alpha^4) - 2\alpha^2].\end{aligned}$$

Возвращая $\underline{s}$ в сумму σ_{PQ} , получаем

$$\begin{aligned}s_{PQ} &= \left[\frac{x - \beta a}{s^2} n + 3\beta(1 - \alpha^2)a \right] \frac{r_+^2}{r^2} + \\ &+ \underline{\beta^2 \alpha^2 n \frac{x + \beta a}{s^2}} - \underline{2\beta \alpha^2(1 - \beta^2 \alpha^2)a}.\end{aligned}$$

Второй член суммы σ_{PQ} имеет множитель β^2 , поэтому все члены этой суммы, находящиеся вне квадратной скобки, не имеют особенности при $\beta \rightarrow 0$.

Теперь представим n как

$$\frac{nr^2}{\rho^2} = \frac{(1 - \beta^2\alpha^2)^2 r^2}{\beta^2 \rho^2} = \frac{r_+^2 r_-^2}{\beta^2 r^2 \rho^2} - 4\alpha^2, \quad (4)$$

и воспользуемся этим представлением пока только для второго члена суммы σ_{PQ} . Тогда сумма подчеркнутых членов (обозначим ее $\underline{s}$) в σ_{PQ} будет равна

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \beta a^2 \left[\beta n \frac{x + \beta a}{\rho^2} - 2a(1 - \beta^2\alpha^2) \right] = \\ &= \frac{a^2}{r^2} \left[\frac{r_+^2 r_-^2}{r^4 s^2} (x + \beta a) - 4\beta^2 \frac{a^2}{r^2} (x + \beta a) - 2\beta\alpha^2(1 - \beta^2\alpha^2)a \right] = \\ &= \alpha^2 \frac{r_+^2 r_-^2}{r^4 s^2} (x + \beta a) - 2\beta\alpha^2 \frac{r_+^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Возвращая все это в сумму σ_{PQ} , находим

$$\sigma_{PQ} = \frac{r_+^2}{r^2} \left[\frac{x - \beta a}{s^2} n + \beta(3 - 5\alpha^2)a + \alpha^2 \frac{r_-^2}{r^2 s^2} (x + \beta a) \right]. \quad (5)$$

Отметим, что вся сумма σ_{PQ} имеет общий множитель r_+^2 .

Теперь вычислим разность $\delta_{PQ} = P - Q$:

$$\begin{aligned} \delta_{PQ} &= xn \frac{\beta xa - r^2}{\rho^2} - \frac{1 - \beta^4}{\beta} a + \\ &+ \beta(1 - \alpha^2) \left[3 - \beta^2(1 - 2\alpha^2) - 6 \frac{\beta ax}{r^2} \right] a = \\ &= \left[-n \frac{x r^2}{\rho^2} + 3\beta(1 - \alpha^2)a \right] \frac{r_-^2}{r^2} - \beta n \frac{\tilde{x}^2}{\rho^2} a + \\ &+ \beta^2 a^2 n \frac{x}{\rho^2} - \beta^3(1 - \alpha^4)a - \frac{1 - \beta^4}{\beta} a. \end{aligned}$$

Второй член этой разности представим как два:

$$-\beta n \frac{\tilde{x}^2}{\rho^2} a = \beta na - \beta n \frac{a r^2}{\rho^2},$$

и второй член этого представления сложим с третьим членом разности δ_{PQ} :

$$\begin{aligned} -\beta n \frac{ar^2}{\rho^2} + \beta^2 a^2 n \frac{x}{\rho^2} &= -\beta a \frac{\pi r^2}{\rho^2} \left(1 - \frac{\beta ax}{r^2}\right) = \\ &= -\beta an \frac{r_-^2 + \beta ax - \beta^2 a^2}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Возвращая все это в разность δ_{PQ} , имеем

$$\begin{aligned} \delta_{PQ} &= \left[-\frac{x + \beta a}{s^2} n + 3\beta(1 - \alpha^2)a \right] \frac{r_-^2}{r^2} + \beta an - \\ &\quad - \beta^2 \alpha^2 n \frac{x - \beta a}{s^2} - \beta^3(1 - \alpha^4)a - \frac{1 - \beta^4}{\beta} a. \end{aligned}$$

Найдем сумму второго члена и последнего, обозначив ее $\underline{s}$:

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \beta an - \frac{1 - \beta^4}{\beta} a = \\ &= \left[\frac{(1 - \beta^2 \alpha^2)^2}{\beta} - \frac{1 - \beta^4}{\beta} \right] a = \beta [\beta^2(1 + \alpha^4) - 2\alpha^2] a. \end{aligned}$$

Возвращая $\underline{s}$ в разность δ_{PQ} , получаем

$$\begin{aligned} \delta_{PQ} &= \left[-\frac{x + \beta a}{\rho^2} n r^2 + 3\beta(1 - \alpha^2) \right] \frac{r_-^2}{r^2} - \\ &\quad - \beta \alpha^2 \left[\beta n r^2 \frac{x - \beta a}{\rho^2} + 2(1 - \beta^2 \alpha^2)a \right]. \end{aligned}$$

Теперь представим $\pi r^2/\rho^2$ в виде (4), и воспользуемся им для второго члена разности δ_{PQ} . Тогда сумма членов второй строки (обозначим ее $\underline{s}$) в последнем выражении для δ_{PQ} будет равна

$$\begin{aligned} \underline{s} &= -\beta^2 a^2 n \frac{x - \beta a}{\rho^2} - 2\beta \alpha^2 (1 - \beta^2 \alpha^2) = \\ &= -\alpha^2 \frac{r_+^2 + r_-^2}{r^2 \rho^2} (x - \beta a) - 2\beta \alpha^2 \frac{r_-^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Окончательно разность δ_{PQ} представим в виде

$$\delta_{PQ} = r_-^2 \left[-\frac{x + \beta a}{\rho^2} n + \beta a \frac{3 - 5\alpha^2}{r^2} - \frac{a^2 r_+^2}{r^4 \rho^2} (x - \beta a) \right]. \quad (6)$$

Как видим, в разности δ_{PQ} , как и в сумме σ_{PQ} , присутствует общий множитель, но теперь это r_-^2 .

Подставим σ_{PQ} из (5) и δ_{PQ} из (6) в (3):

$$s_a = (\bar{r} - \beta x) \left\{ (1-b) \left[\frac{x - \beta a}{\rho^2} n + \beta(3 - 5\alpha^2) \frac{a}{r^2} + \frac{a^2 r_-^2}{r^4 \rho^2} (x + \beta a) \right] + \right. \\ \left. + (1+b) \left[-\frac{x + \beta a}{\rho^2} n + \beta(3 - 5\alpha^2) \frac{a}{r^2} - \frac{a^2 r_+^2}{r^4 \rho^2} (x - \beta a) \right] \right\}.$$

Опуская элементарные преобразования выражений в квадратных скобках, приведем окончательное выражение для алгебраической суммы: :

$$s_a = 2\beta \frac{a}{r} \left[3(1 - \alpha^2) \frac{\bar{r} - \beta x}{r} - \alpha \bar{\alpha} (1 - \beta^2) \frac{1 - \beta^2 \alpha^2}{1 - \beta^2 \bar{\alpha}^2} \right] - \\ - 2\bar{\alpha} (1 - \beta^2) \frac{(1 - \beta^2 \alpha^2)^2}{\beta(1 - \beta^2 \bar{\alpha}^2)}.$$

Заметим, что в сумме s_a благополучно устранилась особенность, когда $\rho \rightarrow 0$, а особенность при $\beta \rightarrow 0$ сохранилась только в одном члене, стоящем во второй строке. Эта особенность самоустраниется при суммировании этого члена алгебраической суммы с соответствующим членом $q_5 \delta_5$ трансцендентной.

Трансцендентная сумма s_t в (7.32) имеет два члена:

$$s_t = q_5 p_5 + q_6 p_6 = \\ = 2 \left[\frac{1 - \beta^4}{\beta^2} \text{Arth } \beta \bar{\alpha} + \beta^2 \frac{\tilde{x}}{r} (1 - 3\alpha^2) \left(\text{Arth } \beta \frac{a \tilde{x}}{r \bar{r}} - \text{Arth } \alpha \right) \right].$$

Возвращая s_a и s_t в (7.32) и заменяя $\alpha = \varrho^{-1}$, получаем

$$A_{x12} = A_{\rho 12} \text{ctg } \vartheta + \frac{\beta e}{4r} \left[3 \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2} \frac{\bar{r} - \beta \tilde{x}}{r} - \bar{\varrho} \frac{1 - \beta^2}{\varrho^3} \frac{\varrho^2 - \beta^2}{\bar{\varrho}^2 - \beta^2} + \right. \\ \left. + \beta \frac{\tilde{x}}{r} \frac{\varrho^2 - 3}{\varrho^2} \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \left(\text{Arth } \frac{\beta \tilde{x}}{\varrho \bar{r}} - \text{Arth } \frac{1}{\varrho} \right) \right] + \\ + \frac{e(1 - \beta^2)}{4a\beta^2} \left[(1 + \beta^2) \text{Arth } \frac{\beta}{\bar{\varrho}} - \frac{\beta \bar{\varrho}}{\varrho^4} \frac{(\varrho^2 - \beta^2)^2}{\bar{\varrho}^2 - \beta^2} \right]. \quad (7)$$

Литература

- [1] **Эйнштейн А.** — Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965, т. 1, с. 7.
- [2] **Whitney С.К.** — *Hadronic J.*, 1988, v. 11, p. 257.
- [3] **Sommerfeld А.** — *Göttin. Nachricht*, 1904, S. 99, S. 363; 1905, S. 201.
- [4] **Lord Kelvin** — *Phil.Mag. J.*, 1901, v. 2.
- [5] **Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.** — Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1966, т. 6, с. 156.
- [6] **Ландау Л., Лифшиц Е.** — Теория поля. М.-Л.: ОГИЗ, 1948, с. 10.
- [7] **Бейтман Г.** — Математическая теория распространения электромагнитных волн. М.: ГОИЗ ФМЛ, 1958, с. 137.
- [8] **Блохинцев Д.И.** — Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981, с. 96.
- [9] **Уолкер Дж.** — В мире науки. М.: Мир, 1988, с. 76 ("Scientific American" на русском языке).
- [10] Ibid [8], с. 119.
- [11] Ibid [8], с. 120.
- [12] **Брусин Л.Д., Брусин С.Д.** — Иллюзия Эйнштейна и реальность Ньютона. М., 1993.
- [13] **Гюйгенс Х.** — Трактат о свете. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935, с. 11.
- [14] **Франк И.М.** — Излучение Вавилова — Черенкова. М.: Наука, 1988, с. 27.
- [15] **Умов Н.А.** — Избранные сочинения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950, с. 37.

- [16] Шелаев И.А. — Сообщения ОИЯИ, P2-90-27, Дубна, 1990.
- [17] Шелаев И.А. — Сообщения ОИЯИ, P2-93-160, Дубна, 1993.
- [18] Prigogine I. — Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes. J. Wiley & Sons, New York — London, 1951, p. 14.
- [19] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. — Справочник по математике. М.: ГИТТЛ, 1957, с. 213.
- [20] Ibid [8], с. 96.
- [21] Ibid [8], с. 118.
- [22] Каган В.Ф. — Основы теории поверхностей. М.: ОГИЗ, 1947, с. 19.
- [23] Шелаев И.А. — Сообщения ОИЯИ, P2-90-30, Дубна, 1990.
- [24] Рыжик И.М., Градштейн И.С. — Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1955, с. 56.
- [25] Альбом течений жидкости и газа. Под ред. М. Бан-Дейка. М.: Мир, 1986, с. 168.
- [26] Ibid [13], с. 469.
- [27] Корн Г., Корн. Т. — Справочник по математике. М.: Наука, 1972, с. 520.
- [28] Ibid [23], с. 56.
- [29] Ibid [19], с. 296.
- [30] Яворский Б.М., Детлаф А.А. — Справочник по физике. М.: Наука, 1977, с. 378.
- [31] Шелаев И.А. — Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. 1996, вып. 4(16), с. 94.

Оглавление

Предисловие	3
Глава I. Относительная справедливость теории относительности	6
1.1. Уравнения Максвелла	7
1.2. Запаздывающие потенциалы	8
1.3. Преобразования Лоренца	10
1.4. Недостатки теории	11
1.5. Акустика	15
Глава II. Расширенный принцип Гюйгенса	20
2.1. Принцип Гюйгенса	20
2.2. Принцип Гюйгенса у других авторов	22
2.3. Расширенный принцип Гюйгенса	23
2.4. Доказательство принципа Гюйгенса	26
2.5. Векторный потенциал	28
Глава III. λ -функция	32
3.1. Градиент λ -функции	33
3.2. Дивергенция вектора $\mathbf{l}$	34
3.3. Волновое уравнение для λ -функции	35
3.4. Еще раз о запаздывающих потенциалах	36
3.5. Сопровождающий трехгранник	37
3.6. Число корней уравнения (2.7)	41
Глава IV. Поле движущегося заряда	44
4.1. Уравнение для скалярного потенциала	45
4.2. Уравнения для векторного потенциала	46
4.3. Поле движущегося заряда	47
4.4. Уравнения Максвелла	49
4.5. Сопровождающий репер	53
Глава V. Равномерное и прямолинейное движение ..	57
5.1. Уравнение (2.7)	58
5.2. Корни уравнения (5.3)	60
5.3. Треугольник "встречи"	62
5.4. Поле движущегося заряда при $\beta \leq 1$	64

5.5. Поле движущегося заряда при $\beta \geq 1$	68
5.6. Пределы	75
5.7. Дифференциальное уравнение для Φ	77
5.8. Ортогональные кривые	81
5.9. Еще раз о запаздывающих потенциалах	84
5.10. Заряды и токи поляризации	84
5.11. Величина движущегося заряда	85
5.12. Функция Гюйгенса	90
5.13. Эффект Доплера	94
5.14. Движущийся диполь	97
Глава VI. Вращающийся заряд	101
6.1. Уравнение (2.5)	102
6.2. Конус Маха	104
6.3. Поле вращающегося заряда	109
6.4. Точка равновесия	111
6.5. Вращающийся диполь	114
6.6. Вектор Умова — Пойнтинга	116
Глава VII. Заряженная сфера	120
7.1. Алгоритм решения задачи	121
7.2. Общие точки α - и λ -сфер	124
7.3. Область существования треугольника встречи	126
7.4. Видимая площадь поверхности сферы	128
7.5. Общие формулы для потенциалов	131
7.5.1. Скалярный потенциал	131
7.5.2. Векторный потенциал	133
7.5.3. Векторный потенциал при $\beta = 0$	140
7.6. Потенциалы при $\beta < 1$ внутри сферы	144
7.6.1. Граничные значения λ	144
7.6.2. Граничные δ_i -функции	148
7.6.3. Скалярный потенциал	151
7.6.4. Векторный потенциал $A_{\rho 11}$	155
7.6.5. Векторный потенциал $A_{x 11}$	163
7.7. Потенциалы при $\beta < 1$ вне сферы	171
7.7.1. Граничные значения λ	171
7.7.2. Граничные δ_i -функции	177
7.7.3. Скалярный потенциал	181
7.7.4. Векторный потенциал $A_{\rho 12}$	188
7.7.5. Векторный потенциал $A_{x 12}$	194
7.8. Потенциалы при $\beta = 1$ внутри сферы	196
7.8.1. Граничные значения λ	197
7.8.2. Граничные δ_i -функции	199
7.8.3. Скалярный потенциал	200
7.8.4. Векторный потенциал	201

7.9. Потенциалы при $\beta = 1$ вне сферы	202
7.9.1. Граничные значения λ	202
7.9.2. Скалярный потенциал	203
7.9.3. Векторный потенциал	206
7.10. Потенциалы при $\beta > 1$ внутри сферы	210
7.10.1. Граничные значения λ	211
7.10.2. Новые граничные λ	215
7.10.3. Скалярный потенциал	219
7.10.4. Потенциал внутри сферы на оси x	221
7.11. Потенциалы при $\beta > 1$ вне сферы	229
7.11.1. Структура конуса Маха	229
7.11.2. Потенциал в пограничном конусе	232
7.11.3. Потенциал в обращенном конусе	233
7.11.4. Потенциал на оси x обращенного конуса	235
7.11.5. Потенциал в основном конусе	241
7.11.6. Эквипотенциальные поверхности	244
Глава VIII. Системы движущихся зарядов	249
8.1. Закон Био — Савара — Лапласа	250
8.2. Прямолинейный провод	252
8.3. Бесконечный прямой провод	255
8.4. Токовое кольцо	258
Послесловие	261
Приложение 1	267
Приложение 2	271
Приложение 3	278
Литература	283
Оглавление	285

Шелаев
Игорь Александрович

ВВЕДЕНИЕ
В НЕОБРАТИМУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ

Редактор *Е.К.Аксенова*
Оригинал-макет предоставлен автором

Подписано в печать 05.04.99
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 14,7
Тираж 500. Заказ 51281. Цена договорная

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области