А. В. Шубников
В. А. Копцик

СИММЕТРИЯ В НАУКЕ И ИСКУССТВЕ

Институт Компьютерных Исследований

А. В. Шубников
В. А. Копцик

СИММЕТРИЯ
в науке и искусстве

Издание третье, дополненное

Москва ♦ Ижевск

2004

УДК 519.46

Интернет-магазин

http://shop.rcd.ru

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

Шубников А. В., Копцик В. А.
Симметрия в науке и искусстве. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 560 стр.

За годы, прошедшие со дня выхода в свет первого издания данной книги, в классическое учение о симметрии добавились новые обширные разделы, такие как антисимметрия, цветная симметрия, симметрия многомерных пространств и т. д. Обогащенная новыми результатами, популярно изложенными комментариями, рисунками и примерами, книга может рассматриваться как монография, а также как учебник или справочник.

Для широкого круга читателей.

ISBN 5-93972-243-1

© А. В. Шубников, В. А. Копцик, 2004
© Институт компьютерных исследований, 2004

http://rcd.ru
http://ics.org.ru

Оглавление

Предисловие к третьему изданию 10
Из предисловия к второму изданию «Симметрия в науке и искусстве» 16

Глава 1. **ВВЕДЕНИЕ. ОТ ИНТУИТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СИММЕТРИИ** 19
Понятие равенства как основа геометрической закономерности и учения о симметрии 19
Геометрическая закономерность 20
Симметрия как особый род геометрической закономерности 22
Симметрия, красота форм и гармония 25

Глава 2. **СИММЕТРИЯ ОДНОСТОРОННИХ РОЗЕТОК** 28
Плоскость симметрии. Симметрия животных, растений, машин и т. д. 28
Ось симметрии. Принцип вращения и симметрия процессов, протекающих во времени 30
Энантиоморфизм. Правизна и левизна фигур 33
Комбинация оси симметрии с плоскостями симметрии . . 37
Вырезывание симметричных розеток из бумаги. Роль физических процессов, обусловливающих образование симметричных розеток 44
Понятие о полярных и неполярных плоскостях и осях . . 53
Особенные точки, прямые и плоскости. Кратность точек . 54
Точное определение понятия односторонней розетки . . . 56

Глава 3. **СИММЕТРИЯ ФИГУР С ОСОБЕННОЙ ТОЧКОЙ** . 57
Зеркально-поворотная ось симметрии и ее частный случай — центр симметрии. Значение этих элементов для изучения симметрии кристаллов. Параллельность и антипараллельность ориентированных отрезков и плоскостей 57
Ось симметрии с перпендикулярной плоскостью. Вращающиеся части машин. Кристаллы. Симметрия электрического вольтова столба и цилиндрического магнита 62

Комбинация главной оси с продольными и поперечными плоскостями симметрии. Снежинки, детали машин, предметы быта 66
Комбинация главной оси с поперечными осями второго порядка. Скрученные формы. Вращение плоскости поляризации 67
Другая комбинация главной оси с плоскостями и осями второго порядка 71
Правильные многогранники 71
Два вида симметрии шара. Оптически вращающие жидкости. Сферолиты 75
Полный обзор видов симметрии фигур с особенной точкой. Сферические и стереографические проекции элементов симметрии 79
Два типа фигур с особенной точкой. Односторонние и двусторонние розетки 82
Сопоставление симметрии кристаллов и организмов. Координатные и бескоординатные обозначения видов симметрии 82
Калейдоскопы Федорова для воспроизведения фигур с особенной точкой 85
Симметричные системы эквивалентных точек. Молекулы . 86
Симметричные пучки прямых и многогранника. Простые формы 89
Симметрия и структурные формулы молекул 92
Симметрия направленных величин. Векторы и тензоры . . 93
Заключительные замечания 96

Глава 4. **СИММЕТРИЯ БОРДЮРОВ** 97
Ось переносов как необходимый элемент симметрии бордюров. Декорирование подземных переходов и проходов метро 97
Плоскость скользящего отражения 100
Комбинация оси переносов с поперечными осями второго порядка. Декорирование проходов для встречного движения 102
Другие виды симметрии бордюров 104
Калейдоскопы для образования бордюров 109
Обзор семи видов симметрии бордюров 109

Глава 5. **СИММЕТРИЯ ЛЕНТ** 112
Винтовая ось симметрии второго порядка 112
Тридцать один вид симметрии лент 114
Вырезывание лент из бумаги 117

Глава 6. **СИММЕТРИЯ СТЕРЖНЕЙ** 119
Рациональные и иррациональные винтовые оси симметрии. Винт 119
Общая идея вывода всех видов симметрии стержней . . . 121
Стержни, составленные из элементарных фигур с одной осью симметрии 121
Стержни, порождаемые фигурами одной зеркально-поворотной осью 124
Стержни, порождаемые фигурами с симметрией $n : m$ (ось n и поперечная плоскость симметрии) 126
Стержни, порождаемые фигурами с симметрией $n \cdot m$ (ось n и продольные плоскости симметрии) 127
Стержни, порождаемые фигурами с симметрией $n : 2$ (ось n и поперечные оси второго порядка) 128
Стержни, порождаемые фигурами с симметрией $\widetilde{2n} \cdot m$ (ось $\widetilde{2n}$ и продольные плоскости симметрии) 130
Стержни, порождаемые фигурами с симметрией $m \cdot n : m$ (ось n, продольные и поперечные плоскости симметрии) . 131
Обзор типов симметрии стержней с конечными и бесконечными переносами 131
Предельные типы симметрии стержней. Валы со шкивами. Винты. Одномерные континуумы и дисконтинуумы 133
Некоторые обобщения. Единый принцип построения симметричных фигур в трехмерном пространстве 140

Глава 7. **СИММЕТРИЯ СЕТЧАТЫХ ОРНАМЕНТОВ. ДВУМЕРНЫЕ КОНТИНУУМЫ И СЕМИКОНТИНУУМЫ** . . . 146
Плоские сетки 147
Семнадцать видов симметрии сетчатых орнаментов. Примеры народных орнаментов 151
Проекции элементов симметрии для сетчатых орнаментов. Координатные и бескоординатные обозначения видов симметрии 167
Сетчатый орнамент в природе, технике и искусстве 170
Суперпозиция сетчатых орнаментов и ее технические применения. Формула Вульфа – Брагга. Биения 172
Вырезывание сетчатых орнаментов из бумаги 183
Калейдоскопы для сетчатых орнаментов 184
Параллелогоны и планигоны, их использование для паркетов 186
Правильные системы точек. Закон сохранения произведений кратности точек на их относительные числа 188
Плоские изогоны и изоэдры. Паркеты 190

Смешение стилей и особенности восприятия вертикальных плоскостей 194
Односторонние плоские континуумы 197
Односторонние плоские семиконтинуумы 200

Глава 8. **СИММЕТРИЯ СЛОЕВ** 203
Элементы симметрии слоев 203
Общая идея вывода, изображения и обозначения симметричных слоев 204
Восемьдесят видов симметрии слоев 205
Двусторонние плоские континуумы и семиконтинуумы . . 205
Систематика групп симметрии 210

Глава 9. **СИММЕТРИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ — ДИСКОНТИНУУМОВ И КОНТИНУУМОВ** 213
Калейдоскопы для образования трехмерно-периодических дисконтинуумов наивысшей симметрии 214
Пространственные решетки и группы параллельных переносов 217
Двести тридцать пространственных групп симметрии дисконтинуума. Структура кристаллов 221
Плотнейшая укладка шаров. Ее значение для кристаллографии и строительной техники 231
Параллелоэдры и стероэдры Федорова 237
Закон кратных отношений в структурной кристаллографии и химии 238
Пространственные семиконтинуумы с двумя осями непрерывных переносов. Примеры семиконтинуумов первого рода 241
Семиконтинуумы с одной осью непрерывных переносов . . 243
Симметрия трехмерного континуума 244

Глава 10. **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП. КЛАССИЧЕСКИЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ГРУППЫ** 248
Определение понятия группы. Группы преобразований *геометрических и физических объектов. Абстрактные* группы 248
Пример кристаллографической группы $2/m$. Группы перестановок и ортогональных матриц, изоморфные группе $2/m$ 250
Некоторые свойства групп. Подгруппы. Фактор-группы. Гомоморфное соответствие групп 254

Расширения групп с помощью прямых, полупрямых и условных произведений. Кристаллографические группы как расширения групп вращений 257
Пространственные (федоровские) группы Φ как расширения трансляционных групп T с помощью кристаллографических групп G и изоморфных им групп по модулю G^T . 264

Глава 11. **ГРУППЫ ОБОБЩЕННОЙ СИММЕТРИИ. АНТИСИММЕТРИЯ И ЦВЕТНАЯ СИММЕТРИЯ** 276
Точечные кристаллографические группы антисимметрии как расширения классических кристаллографических групп с помощью групп $1', 2', m', \bar{1}', 4'(\mathrm{mod}\ 2), \bar{4}'(\mathrm{mod}\ 2)$ 276
Пространственные (шубниковские) группы антисимметрии $Ш$ как расширения классических (федоровских) групп Φ или как расширения трансляционных групп T 282
Точечные кристаллографические группы цветной симметрии как расширения классических кристаллографических групп с помощью групп цветных подстановок P и $G^{(P)^*}$. 291
Пространственные (беловские) группы цветной симметрии $Б$ как расширения классических (федоровских) пространственных групп Φ или как расширения трансляционных групп T 308
Границы теории симметрии. Другие обобщения 317

Глава 12. **СИММЕТРИЯ В НАУКЕ И ИСКУССТВЕ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. СИММЕТРИЗАЦИЯ И ДИССИММЕТРИЗАЦИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ПРИНЦИП СИММЕТРИИ ДЛЯ СОСТАВНЫХ СИСТЕМ** 322
Симметрия как закон строения целостных систем и метод исследования структурных закономерностей 322
Законы преобразования и симметрия физических величин (приближение однородного континуума). Предельные группы антисимметрии и цветной симметрии 327
Законы преобразования и симметрия физических величин (приближение периодического дисконтинуума). Пространственные тензоры на цветных группах 335
Составные системы. Принцип суперпозиции групп симметрии. Законы изменения и сохранения симметрии . . . 343
Связь симметрии со свойствами систем. Симметрия физических уравнений и законов. Законы сохранения в фазовые переходы 352

Симметрия и диссимметрия в искусстве. Законы композиции. Структурно-системные методы анализа художественных произведений 366
Заключение. Эвристическое значение принципов симметрии. Симметрия как философская категория 381
Литература 388

Дополнение **417**
А. Л. Талис. **Симметрия тетракоординированных и тетраэдрических структур в рамках алгебраической геометрии** 419
Введение 419
I. Определения и терминология [35, 36] 421
1. Конечные проективные плоскости и конфигурации . . . 421
2. N-мерные платоновы тела (политопы). Расслоение Хопфа [34, 36–40] 428
3. Решетки корней, двоичные коды [34, 40–42] 431
II. Конфигурации и определяемые ими порождающие кластеры алмазоподобных структур 437
1. Параллелоэдр алмаза и другие 14-вершинные кластеры, как евклидовы реализации подконфигураций конфигурации Фано 7_3 437
2. Конфигурация Мебиуса – Кантора 8_3 и объединение двух полиэдров Бернала Z8 [35–37, 44–47] 443
3. Конфигурации $(9_3)_1$, $(9_3)_2$, $(9_3)_3$, их особые подконфигурации и определяемые ими кластеры [35, 44, 47, 50] 444
4. Конфигурация Дезарга 10_3 и алломорфное отображение 20-вершинного кластера алмаза в додекаэдр [19, 44, 51] 447
5. Конечные проективные плоскости PG(2, 3) и PG(2, 4). Кластеры алмазоподобных структур, содержащие икосаэдры в координационных сферах [44, 45, 53] . 449
6. Несамодуальные и недезарговы конфигурации и определяемые ими порождающие кластеры алмазоподобных структур с сильно искаженными тетраэдрическими углами [44, 50] 458
III. Система порождающих кластеров алмазоподобных структур 462
1. Политопы $\{3, 3, 5\}$ и $\{240\}$, решетка E8 и порождающие кластеры алмазоподобных (тетракоординированных) и тетраэдрических (металлических) структур 462

2. Система порождающих кластеров тетраэдрических структур . . . 469
3. Система порождающих кластеров алмазоподобных структур . . . 475
Заключение . . . 479
Литература . . . 482

С. В. Петухов. **Симметрии в биологии** . . . 489
Неевклидовы биосимметрии и золотой вурф . . . 490
Симметрии в системе генетического кода . . . 493
Бинарные субалфавиты . . . 495
Биериодическая таблица генетического кода . . . 498
Матрицы генетического кода и золотое сечение . . . 505
Матричные операции с геноматрицами . . . 509
Об атрибутивной теории кодирования . . . 515
Генетический код и лингвистика . . . 517
Правила вырожденности генетического кода и хроноциклическая концепция . . . 520
Правила расщепления генетического кода и их параллелизм с законами Менделя . . . 524
Теория четырех проаллелей . . . 530
Генетические секвенции как тетра-множества . . . 533
Почему число генетически кодируемых аминокислот равно 20? 536
Расщепление множества 20 аминокислот на подмножества из 8 и 12 аминокислот по специфике количества протонов в молекулах . . . 539
Системный анализ атомов углерода в элементах генетического кода . . . 540
Литература . . . 542
Указатель таблиц . . . 547
Указатель символов . . . 548
Предметный указатель . . . 552

Предисловие к третьему изданию

Первое издание этой книги (1972 г.) было названо вторым изданием, так как воспроизводило обновленный текст книги А. В. Шубникова «Симметрия. Законы симметрии и их применения в науке, технике и прикладном искусстве» — М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1940, стр. 186. Вторая часть этой книги (главы 10–12), написанная В. А. Копциком, удвоила ее объем и послужила ее необходимым дополнением (см. Предисловие ко второму изданию этой книги).

Настоящее издание воспроизводит текст книги 1972 г., а два дополнения, написанные моими друзьями и последователями — С. В. Петуховым и А. Л. Талисом вместе с моим послесловием придают книге новое качество обобщенной симметрии и ее приложений.

Выделение в особый класс алмазоподобных структур (АС), фаз Франка – Каспера, структур Бернала, газогидратов, квазигидратов и т.п. свидетельствует о невозможности адекватного отображения симметрии в рамках классической кристаллографии. Основным результатом предлагаемой работы А. Л. Талиса является определение особых кластеров АС как *эвклидовых реализаций графов инцидентности* особых подконфигураций $PG(2,q), q = 2,3,4$, которые однозначно задаются их таблицами инцидентности. Забегая вперед, укажем, что число особых подконфигураций $PG(2,q), q = 2,3,4$ сравнительно невелико, и, следовательно, все возможные особые кластеры АС могут быть перечислены априори подобно простым формам. Симметрия этих кластеров (в том числе и *сверхэвклидовая*) адекватно отображается в рамках ОКАС, представляющей собой лишь «перевод» определенных разделов алгебраической геометрии на структурный уровень. Конкретные результаты, полученные в данной работе, сформулированы в виде следующих выводов:

1. Структура алмаза как объединение двух ГЦК решеток представляет собой регулярный бихроматический граф степени 4 и обхвата 6. Графом инцидентности конечной проективной плоскости $PG(2,q)$ является регулярный бихроматический граф степени $q+1$ и обхвата 6, поэтому подконфигурации $PG(2,q), q = 2,3,4$ определяют графы особых кластеров АС.

2. Особые кластеры АС как объекты высшей (проективной) геометрии, рассматриваемые в низшей (эвклидовой) геометрии, обладают

по отношению к ней *сверхсимметрией*, адекватно отображаемой лишь в рамках ОКАС. Например, кластер $\{6,3\}^3_{2,1}$, определяемый подконфигурацией $\{7_3\}^3$ конечной проективной плоскости $PG(2,2)$, является параллелоэдром алмаза и обладает дробно-линейной группой симметрии $PGL_2^W(7)$ порядка 336, содержащей ортогональную подгруппу $\overline{3}m$ порядка 12.

3. Аппарат ОКАС позволяет априори определять особые кластеры реальных и гипотетических АС и тетраэдрических структур, которые не являются традиционными кристаллографическими объектами. Например, кластер АС, являющийся объединением двух полиэдров Бернала Z8, и кластер АС, содержащий *икосаэдр* во второй координационной сфере, определяются подконфигурациями $PG(2,3)$; а кластер АС, являющийся объединением кластеров двух базовых фаз Франка – Каспера (элементарной ячейки A15 и 26-атомника Полинга из C15) определяется подконфигурацией $PG(2,4)$.

Примером особо сложных природных систем, адекватные физико-математические теории которых науке еще только предстоит построить, являются биологические организмы. Характерной чертой многообразия органических форм надмолекулярного уровня является наличие обширного множества геометрически закономерных структур. Речь идет о структурах, составные части которых взаимосвязаны в единое целое симметрическим образом на основе определенных правил или алгоритмов, повторяющихся на самых разных линиях и уровнях биологической эволюции. Анализ этих отношений симметрии является одним из традиционных методов познания данных систем и поиска надлежащих вариантов их теории, объясняющих наблюдаемые феномены симметрий. Развитие общей математической теории симметрий вносит новые особенности в изучение биологических симметрий. Это обстоятельство отражено в дополнении, написанном С. В. Петуховым и посвященном биологическим симметриям, в том числе из области высших, неевклидовых симметрий. В рамках данных исследований по реализации неевклидовых симметрий в биологической морфологии автором, например, предложено и применено понятие золотого вурфа.

Особый интерес вызывают представленные в этом дополнении авторские результаты симметрологического анализа общебиологической системы генетического кода, на которой в живой природе построены сверхсложные структуры синергетического характера. В частности, описанная биериодическая таблица генетического кода Петухова позволила не только выявить ранее не известные отношения симметрии между базовыми элементами генетического кода, но также способствовала развитию новых биоматематических моделей в области теоретической биологии. Эти исследования являются продолжением классических работ

по симметрологическому анализу молекулярно-генетических систем, открывших миру строение двойной спирали ДНК, комплементарность азотистых оснований генетического кода и другие фундаментальные биологические факты.

Познание симметрических особенностей генетического языка важно еще и в связи с общей проблемой взаимосвязи биологических языков, поскольку лингвистические языки имеют содержательные аналогии с генетическим языком. По мнению многих авторов, лингвистические языки возникли не на пустом месте, а в связи с генетическим языком хранения и передачи наследственной информации. Углубление научных знаний о симметриях генетического языка, в частности, генетического алфавита и его бинарных субалфавитов, описанных в дополнении С. В. Петухова, способно внести значительный вклад в теоретическую биологию, синергетику, семиотику и другие области, демонстрируя все возрастающую роль методов симметрии в науке и искусстве.

——— * ———

Проблемы самоорганизации живого вещества, закономерного соединения его элементов в наделенный удивительными свойствами целостный организм, относятся к числу наиболее интересных для человечества. Характерной чертой многообразия органических форм надмолекулярного уровня является наличие обширного множества геометрически закономерных структур. Речь идет о структурах, составные части которых взаимосвязаны в единое целое на основе определенных правил или алгоритмов, повторяющихся на самых разных линиях и уровнях биологической эволюции. Изучение законов органического формообразования — одно из важных направлений биологии развития, в которой многие ожидают в ближайшем будущем крупных фундаментальных открытий и практических приложений.

Современная математическая биология в отличие, например, от кристаллографии не располагает общепризнанной формальной теорией морфогенеза, хотя попыток создания такой теории на основе различных подходов известно множество. Сложность построения такой теории обусловлена во многом недостаточными знаниями общебиологических свойств морфогенеза, поддающихся формализации и подлежащих теоретическому истолкованию. Уровень математической биологии развития таков, что ей, видимо, еще предстоит пройти тот общий путь — от накопления знаний о ключевых морфологических свойствах и адекватных геометрических классификациях до построения искомой теории, — какой уже прошли кристаллография и многие другие естественные науки, занимающиеся по сравнению с биологией несравненно более простыми объектами.

Традиционной составной частью биоморфологических исследований является геометрический анализ инвариантов и преобразований, реализуемых в геометрически закономерных биоструктурах. Этот анализ выявляет важный класс морфогенетических свойств, формализуемых на инвариантно-групповом языке, который является особо значимым для современного математического естествознания. Примером фундаментальных задач, возникающих на данном направлении, может служить вопрос о возможности и целесообразности развития обобщенной биоморфологии, использующей в качестве своей геометрической основы неевклидовы группы преобразований.

Данный вопрос связан с тем, что с геометрической точки зрения классическая биоморфология по существу базируется на группе преобразований подобия. Примерами являются морфологические учения о зеркальной симметрии и асимметрии биотел, многоблочных биоформах с циклическими группами автоморфизмов подобия по А. В. Шубникову (Шубников А. В. (1960)), масштабном объемном биорасте, карликах и великанах в организмах одного вида, и др. Вместе с тем, не известно веских причин считать, что геометрические основы морфологии сводятся к группе подобия, и давно существует гипотеза об отличие видов симметрии у кристаллов и живых тел и о важном биоморфологическом значении неевклидовой геометрии (В. И. Вернадский, Д'Арси Томпсон). Эта гипотеза тем более правомерна, что распределенный по объему тела или «объемный» рост живых тел принципиально отличается от поверхностного роста кристаллов.

Изучение систематического проявления одних и тех же алгоритмов симметрической организации у биоструктур с различными функциональным назначением, условиями существования и эволюционной историей значимо также в связи с решением принципиального для биологии вопроса: определяются ли все морфологические особенности живых тел требованием адаптации к окружающей среде и исполняемым функциям, или для морфологии также крайне существенна внутренняя среда? Этот вопрос обостряется современными исследованиями в области синергетики, прежде всего, по способности нелинейной среды определять типы диссипативных структур, которые могут на ней возникнуть.

Достижения исследователей биосимметрий способствовали становлению таких научных направлений, как обобщенная кристаллография, биомеханика поз и движений, биосимметрика, теория самоорганизующихся и растущих автоматов. Они открыли новые природные закономерности, например, универсальную ростовую способность организмов самых разных видов существовать в разномасштабных морфологически идентичных модификациях или известные законы филлотаксиса, отмечающие связь морфологических симметрий с рядом чисел Фибоначчи.

Они используются во многих областях биологии, биотехнологии, бионики, искусства, медицины, кибернетики, эргономики.

Известно то особое значение, которое имеет не только для биологии, но и для многих других областей науки и искусства, открытие двойной спирали ДНК и механизмов хранения и передачи наследственной информации. Нельзя не отметить ту позитивную роль, которую сыграло в этих открытиях применение принципов симметрии, начиная от симметрической модели строения самой молекулы ДНК и симметрологического правила комплементарности азотистых оснований в молекулах наследственности. Молекулярная генетика выявила, что самые разнообразные живые организмы имеют одинаковые базовые структуры генетического кодирования, а любые физиологические системы должны быть согласованы со структурами генетического кодирования для возможности их передачи по наследству и эволюционного выживания. С этого момента все большее значение в биологии стала приобретать информационно-генетическая точка зрения на живые организмы как дающая шанс на построении обобщающей теории живого вещества. В рамках такого подхода специальное внимание обращается на факты параллелизмов и симметрий между физиологическими структурами разного уровня и расположения на эволюционном дереве живой природы, включая структуры восприятия и обработки сенсорной информации с распознаванием образов, лингвистические структуры и пр. При этом открываются новые возможности приложения средств синергетики, семиотики, психофизики и других наук. Целая ветвь современного искусства сформирована на основе использования художниками и дизайнерами симметрологических образов молекулярной генетики, прежде всего, двойной спирали ДНК, что отражено, в частности, на многих сайтах в Интернете.

Появляется все больше данных, свидетельствующих о том, что биологическую эволюцию можно трактовать как процесс разворачивания и тиражирования определенных форм упорядочения. Именно с существованием таких архетипов связаны многие аспекты биологической самоорганизации на всех эволюционных уровнях.

В настоящей книге пример исследований этого направления приведен в статье С. В. Петухова «Симметрии в биологии». Ее материалы были доложены, в частности, на международном конгрессе «Фестиваль Симметрии 2003» (16–23 августа 2003 г., г. Будапешт) с участием специалистов из более чем 30 стран, где вызвали значительный интерес. В созданной на этом форуме «Международной Ассоциации Симметрии» (International Symmetry Association), представленной в Интернете на сайте **http://us.geocities.com/symmetrion/**, С. В. Петухов был избран председателем международного ученого совета. Данная работа хорошо иллюстрирует важную роль симметро-

логии в современной теоретической биологии. Мне, как почетному члену этой международной ассоциации, приятно отметить все возрастающий интерес международной научной общественности к симметрологии и, в частности, создание в рамках этой ассоциации нового «Международного общества симметрии в биоинформатике» (США, Флорида, адрес сайта: **http://polaris.nova.edu./MST/ISSB**).

Проф. В. А. Копцик — Заслуженный деятель науки, д. ф.-м.н., заслуженный профессор МГУ им. М. В. Ломоносова, почетный член Международной Ассоциации Симметрии (International Symmetry Association)

Из предисловия к второму изданию «Симметрия в науке и искусстве»

За годы, прошедшие со дня выхода в свет лежащей в основе данного издания книги А. В. Шубникова «Симметрия» (1940 г.), классическое учение о симметрии обогатилось обширными новыми разделами, такими как антисимметрия, цветная симметрия, симметрия многомерных пространств и т. д. Расширилось и углубилось использование методов теории симметрии в естественных науках — физике, химии, биологии — и в их многочисленных ответвлениях. Метод симметрии приобрел философское значение и стал одним из наиболее общих и эффективных методов теоретического исследования в современном естествознании вообще. Столь общее значение этого метода определяется его способностью выявлять инварианты преобразований, описывать внутреннюю структуру материальных и идеальных систем — объектов научного и художественного исследования.

Происшедшие изменения потребовали существенного расширения содержания вышеназванной книги, объем которой в настоящем издании увеличился вдвое. Научную подготовку новой книги, неудачно представленной как второе издание, по просьбе А. В. Шубникова осуществил В. А. Копцик. Им был частично переработан и обобщен первоначальный текст, относящийся к классической симметрии, и добавлены три новые главы (гл. 10–12), освещающие дальнейшее развитие, современное состояние и приложения теории симметрии. В рамках этой теории рассматриваются и эффекты диссимметризации (понижения симметрии), поэтому слово «диссимметрия» измененном заголовке книги подразумевается.

С предыдущей новая работа авторов связана единством замысла. Отметим некоторые особенности в построении и содержании представляемой книги. Прежде всего — об определении понятия симметрии. Это понятие содержит два противоречивых момента: преобразования (изменения) и сохранения (инварианта). Сохраняющееся при изменении есть инвариант; совокупность преобразований, сохраняющих нечто инвариантным, есть его группа симметрии. Теория симметрии принимает, что все преобразования совершаются на уровне элементов, эквивалентных в том или ином отношении. Сохраняется совокупность элементов и их структурных связей, образующих целостную систему.

Различное выделение структурных подуровней у одного и того же объекта приводит к различному определению его групп симметрии. Поэтому мы определяем симметрию как закон строения структурных объектов, точнее — как структурированных групп автоморфизмов, сохраняющие качественную целостность рассматриваемых систем.

Настоящая книга о симметрии, если угодно,— та же целостная система, состоящая из подструктур различного рода, и читать ее можно по-разному.

Это и популярное введение в предмет, и монография, учебник и справочник. Для первоначального ознакомления с предметом достаточно прочесть первую—девятую главы и конец заключительной главы Указанная часть книги рассчитана на широкие круги читателей, начиная от старших школьников и студентов и кончая представителями научно-технической и художественной интеллигенции, желающими расширить свой кругозор. Этой категории читателей мы рекомендуем пропускать доказательства (если они покажутся трудными) и не задерживать внимания на формулах и таблицах групп симметрии, носящих справочно-иллюстративный характер. Пропуск соответствующей информации компенсируют рисунки, органически связанные с текстом, которые можно рассматривать как таковые, выискивая в них те или иные симметрические закономерности.

Учебный уровень книги, ее математический и справочный аппарат, так же как заключительные 10—12 главы, предназначены другой категории читателей — для всех желающих изучить теорию симметрии и применить ее в практике научного исследования, технического конструирования или специализированного анализа «языка» искусства. Ознакомившись по этим разделам с принципами и примерами применения симметрии, заинтересовавшийся читатель может перейти далее к изучению специальной литературы, указанной в библиографии.

Наконец, монографический уровень книги адресован специалистам, которые найдут в ней немало нового. Обобщенное определение симметрии позволило, например, впервые включить в рассмотрение объекты содержательного искусства. Оригинально изложена схема теории расширений, позволяющая получать новые группы симметрии на базе уже известных групп. Впервые осуществлен вывод предельных групп цветной симметрии и дано определение «цветных пространственных» тензоров. Известный принцип диссимметризации Пьера Кюри, определяющий симметрию гетерогенных составных систем по пересечению групп симметрии их частей, объединен с вновь сформулированным принципом симметризации этих пересечений для гомогенных систем в единый принцип Шубникова – Кюри. Сформулированы законы сохранения стационарной симметрии для изолированных материальных систем и т. д.

Для обозначения групп симметрии в книге на равных правах используются две системы — бескоординатная, предложенная старшим из авторов, и так называемая международная (координатная), широко применяемая в специальной литературе. Инверсионные и зеркальные оси и соответствующие им операции симметрии различаются в работе знаками прямой черты и тильды, помещаемыми над символами, как $\bar{g}$ и $\tilde{g}$. Некоторые усовершенствования внесены в символику групп антисимметрии и цветной симметрии.

Авторы выражают глубокую благодарность Я. И. Шубниковой за большую работу по подготовке книги к изданию, Е. И. Балабан и В. Ф. Парвову за подготовку иллюстраций, работникам издательства «Наука» и всем лицам, способствовавшим улучшению книги своими советами и замечаниями.

А. В. Шубников, В. А. Копцик
1970 г.

Глава 1

Введение. От интуитивных представлений к определению симметрии

Понятие равенства как основа геометрической закономерности и учения о симметрии

Для всего учения о симметрии основное значение имеет понятие *относительного равенства* предметов.

Два предмета мы будем называть равными в отношении того или иного признака, если оба предмета обладают этим признаком. Приведем несколько примеров относительного равенства. Вершины квадрата равны друг другу в том смысле, что в каждой из них сходятся по два ребра, образующих прямые углы; но они не равны друг другу в смысле различной их ориентировки в пространстве. Все стороны косоугольного треугольника относительно равны друг другу, так как каждая из них есть отрезок прямой. Правая рука равна левой по всем количественным признакам, хотя правую руку и нельзя совместить с левой простым наложением, т. е. без предварительного отражения одной из них в зеркале. Грани куска каменной соли, выбитого по плоскостям спайности и имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, не равны друг другу в обычном геометрическом смысле, *но равны в отношении физических свойств.* Грани картонного куба, выкрашенные в разные цвета, равны друг другу геометрически, но не равны по окраске.

Из приведенных примеров мы видим, во-первых, что в природе нет и не может быть абсолютного равенства двух разобщенных в пространстве или времени предметов, и, во-вторых, что в реальном или относительном равенстве требуется указание критерия или, лучше сказать, *меры равенства.* Вводя меру равенства для каждого из признаков, мы вместе с тем вводим и представление о более или менее широком равенстве двух предметов. Например, мы можем сказать, что вершины квадрата более равны друг другу, чем вершины параллелограмма, так

как вершины квадрата сходны друг с другом большим числом признаков, чем вершины параллелограмма.

Обращаем внимание читателя на то, что при установлении равенства между двумя предметами мы оцениваем не только количественные их признаки, но и качественные. Отсюда и получается, что мы, например, можем говорить о равенстве и различии точек: для нас все точки окружности, равные друг другу по положению, отличаются от центра окружности; материальная точка отличается от геометрической. Таким образом, за термином «относительное равенство» мы закрепляем конкретный смысл равенства в отношении данного признака (или их совокупности), подразумевая, что мера равенства определена или может быть определена. В этом отношении наш термин отличается от близких по значению слов «сходство», «подобие», «равноценность», «равнозначность», «гомологичность» и т. д., которые мы оставляем для обозначения более широких понятий*. В дальнейшем, говоря о разных предметах, мы будем помнить, что речь может идти только об относительном равенстве. При этом признак, по которому предметы считаются равными, может не указываться, если он ясен по содержанию излагаемого.

Геометрическая закономерность

Второе понятие, которое для нас будет весьма полезным,— это понятие о геометрической закономерности. Мы будем говорить, что вещь построена геометрически закономерно или правильно, если ее можно разделить без остатка на равные части относительно некоторого геометрического признака.

Приведем ряд примеров фигур, обладающих геометрической закономерностью. Квадрат построен геометрически закономерно, так как он может быть разделен без остатка на восемь геометрически равных прямоугольных треугольников (рис. 1). Указанный способ деления квадрата на равные части не единственный. Иное деление (например, на четыре малых квадрата или на два прямоугольника) обнаружит и иную закономерность.

Окружность построена геометрически правильно, так как эта фигура целиком может быть составлена из бесконечного числа точек, равных друг другу в том смысле, что каждая из них удалена на одно и то же

*Исключение сделаем для слова «эквивалентность», которое будем употреблять в смысле относительного равенства при описании симметрических совокупностей точек (см. стр. 86, 147). У читателя не вызовут недоразумения также и такие обороты речи (в гл. 11, 12), как «равенство подобия» или «антиравенство», поскольку мера равенства (геометрическое подобие фигур или, соответственно, сравнение свойств материальных объектов по знаку) в этих случаях определена.

расстояние от центра окружности. Архимедова спираль представляет собой геометрически правильно построенную фигуру, так как она состоит из бесконечного числа точек, удовлетворяющих уравнению

$$r = a\varphi,$$

которое говорит нам, что расстояние точки спирали от начала O пропорционально углу φ, образуемому радиусом-вектором r с начальной осью OA (рис. 2). Таким образом, точки спирали равны друг другу в том смысле, что для каждой из них отношение r/φ имеет одно и то же значение a.

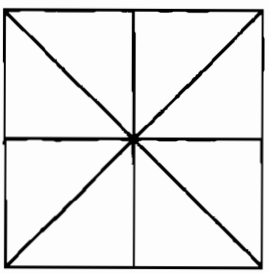


Рис. 1. Квадрат построен геометрически закономерно, так как он может быть разделен без остатка на восемь равных частей

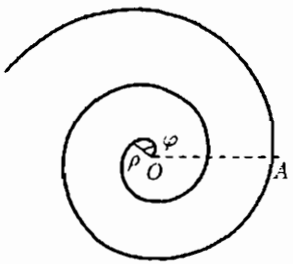


Рис. 2. Архимедова спираль обладает правильностью строения, так как представляет собой геометрическое место точек, равных друг другу в том смысле, что все они удовлетворяют одному уравнению $r = a\phi$

Пусть нам дан равнобедренный треугольник, разделенный на две части медианой угла между равными сторонами. Обе части треугольника выкрашены в разные цвета. При физическом различии частей фигура построена геометрически правильно, так как она состоит из двух частей, равных друг другу по геометрическим признакам (зеркальное равенство).

Возьмем бесконечную систему кружков, расположенных по вершинам примыкающих друг к другу равных квадратов (рис. 3 *а*)). Полученная фигура построена геометрически правильно, так как все ее элементы удовлетворяют одному и тому же правилу построения. Представим себе теперь не отвлеченную геометрическую фигуру, а реальное физическое тело, например газ водород, заключенный в замкнутый сосуд. Такой газ, как известно из физики, состоит из «одинаковых» беспорядочно движущихся молекул, при этом плотность газа во всех местах сосуда остается

одинаковой. Если бы можно было снять мгновенную фотографию некоторого слоя такого газа и достаточно увеличить ее, то мы получили бы картину вроде той, которая изображена на рис. 3 *б*). Несмотря на так называемую идеальную беспорядочность расположения точек в этой фигуре, она, тем не менее, построена геометрически правильно, и вот почему. Во-первых, вся фигура целиком может быть разложена на части, равные между собой, потому что каждая из них есть молекула водорода; во-вторых, всю фигуру можно мысленно разбить, например, на квадратные участки, равные в том смысле, что в каждом таком участке, в силу одинаковой плотности газа, заключается приблизительно одно и то же число молекул.

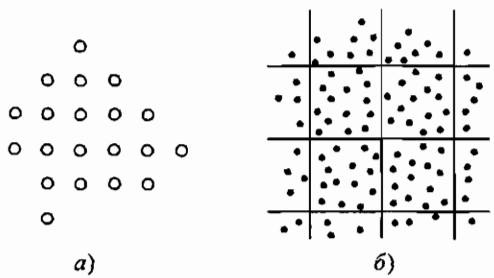


Рис. 3. Узлы квадратной сетки (*а*) образуют правильную фигуру, так как каждый из них занимает одинаковое положение среди других узлов. Система точек, расположенных беспорядочно, но с одной и той же средней плотностью (*б*), есть правильная фигура, так как ее можно разделить без остатка на участки, содержащие приблизительно одно и то же число частиц

Из приведенных примеров видно, что понятие геометрической закономерности, так же как и понятие равенства, очень широко. Совершенно ясно, что плодотворное применение столь широкого понятия возможно лишь при фиксировании характера этой закономерности для каждого конкретного случая.

Симметрия как особый род геометрической закономерности

Мы будем называть симметричным такой предмет, который состоит из геометрически и физически равных частей, должным образом расположенных относительно друг друга; должное расположение требует,

чтобы *упорядоченность* была в определенном смысле одинаковой для всех частей.

Под геометрическим равенством в данном случае подразумевается либо совместимое равенство (*конгруэнтность*), либо *зеркальное* равенство. Две статуэтки, гипсовая и чугунная, отлитые в одной форме, совместимо-равны, но неравны зеркально и физически. Правая и левая руки равны физически и зеркально. На рис. 4 представлены две пары совместимо- и зеркально-равных тетраэдров. Одинаковыми буквами отмечены соответственные вершины фигур. Буквой m обозначен след воображаемой зеркальной плоскости, переводящей «левую» фигуру в «правую».

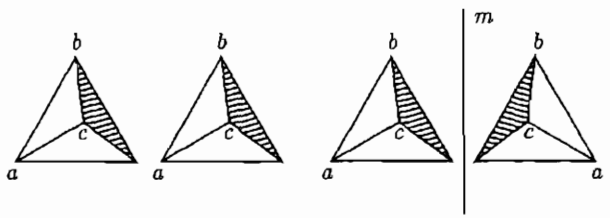


Рис. 4. Слева — две совместимо-равные фигуры, справа — две зеркально-равные фигуры

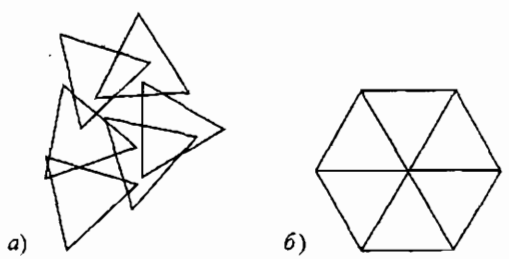


Рис. 5. В симметричной фигуре, кроме геометрического равенства частей (*а*), необходимо и одинаковое их расположение (*б*)

Необходимость особого расположения равных частей фигуры для того, чтобы она стала симметричной, показана на примере фигуры (рис. 5*а*), состоящей из шести равных правильных треугольников. Фигура становится симметричной после того, как все ее части будут расположены, например, так, как это показано на рис. 5*б*. В дальнейшем мы

детально разберем различные случаи симметричного расположения, а в конце главы 6 дадим и точное определение самого понятия симметрии.

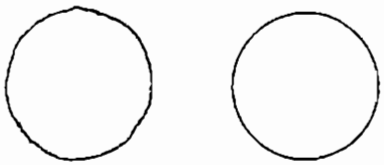


Рис. 6. Окружность, нарисованная «от руки» и циркулем

Симметрия никогда не осуществляется в изделиях человека и в природных объектах — кристаллах, растениях, животных — с математической точностью. Если отклонения от безукоризненной симметрии невелики и носят несистематический характер, предмет воспринимается нами как симметричный даже тогда, когда мы ясно видим эти отклонения: окружности, начерченные циркулем или «от руки» (рис. 6), принимаются нами одинаково за симметричные фигуры. Если отклонения увеличиваются, то пропадает и симметрия. Если изображенные на рис. 7 цветы рассматривать как плоские фигуры, то среди них мы найдем, наряду с явно симметричными и асимметричными формами, также и формы промежуточной, сомнительной симметрии. Изучение несовершенств симметрии оказывает большую услугу при разработке вопросов симметрии: в кристаллографии оно вылилось в особое учение о «реальном» кристалле, который противопоставляется «идеальному» кристаллу или, вернее, теоретической модели кристалла, построенной математически точно.

Рис. 7. Симметрия цветков, осуществленная с разной точностью

Существуют и другие отклонения от совершенной симметрии, которые мы могли бы назвать соединением в одном объекте двух противоречивых симметрий, как это показано, например, на рис. 8, изображающем

квадрат внутри пятиугольной звезды. Рассматриваемая в целом составная фигура асимметрична, так как ее невозможно разделить на равные, в указанном выше смысле, части, но порознь обе составляющие фигуры — квадрат и пятиугольная звезда — симметричны. В природе нередко встречается соединение противоречивых симметрий, например, морской организм на рис. 18 (см. стр. 35) снаружи имеет симметрию квадрата, а внутри — симметрию правильного пятиугольника.

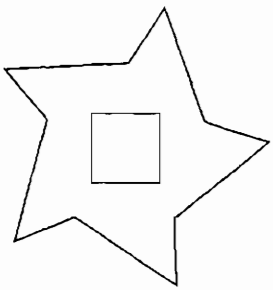


Рис. 8. Соединение в одной фигуре двух противоречивых симметрий

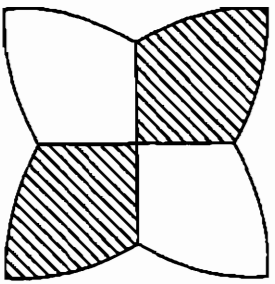


Рис. 9. Формальное противоречие между геометрической и физической симметрией

Бывают еще случаи смешения геометрического и физического равенства частей симметричной фигуры. Примером может служить рис. 9. С точки зрения геометрии изображенная на нем фигура обладает «четверной» симметрией, т. е. может быть разделена на четыре равные части; с физической точки зрения фигура имеет «двойную» симметрию.

Симметрия, красота форм и гармония

Симметрия является одним из важных факторов красоты форм. Другие, хотя бы и более важные, факторы красоты нас в этой книге интересовать не будут.

Чернильная клякса некрасива. Стоит нам, однако, перегнуть лист бумаги пополам, пока клякса еще не высохла, и мы получим картину (рис. 10), которая уже производит приятное впечатление. Здесь определяющим фактором красивого является правильное взаимное расположение частей фигуры — ее симметрия.

Смысл эстетического воздействия симметрии (и всякой иной закономерности), по нашему мнению, заключается в том психическом про-

Рис. 10. «Кляксография», приводящая к фигурам с одной плоскостью симметрии (рисунок слева)

Рис. 11. Две кляксы, расположенные по иному закону

цессе, который связан с *открытием* ее законов. Если закон очень прост и сразу схватывается, как в только что приведенном примере, он перестает быть привлекательным, надоедает. С этой точки зрения пара клякс, показанная на рис. 11, интереснее кляксы, изображенной на рис. 10. Предоставляем читателю самому установить закон их расположения.

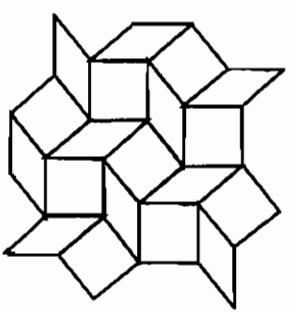


Рис. 12. Часть бесконечного плоского орнамента.
При внимательном рассматривании чертежа можно обнаружить в нем целый ряд закономерностей

Примером еще более сложной симметрии может служить фигура на рис. 12, где изображена небольшая часть бесконечного плоского орнамента. Вглядываясь в чертеж, зритель начинает искать в нем разные закономерности. Он может, например, подчинить всю композицию параллельно расположенным квадратам, разбив весь чертеж на систему зигзагов, образованных чередующимися квадратами и ромбами, вытянутыми вдоль системы параллельных прямых; можно разложить всю фигуру на части, напоми-

нающие детские бумажные вертушки (квадраты, окруженные ромбами), и т. д.

Симметрия, рассматриваемая как закон строения структурных объектов, сродни гармонии. В способности ощущать ее там, где другие ее не чувствуют, и состоит, по нашему мнению, вся эстетика научного и художественного творчества.

Глава 2

Симметрия односторонних розеток

Мы начнем рассмотрение различных случаев симметрии с простейших ее видов, часто встречающихся в хорошо всем известных фигурах и предметах. Этим фигурам и предметам мы дадим наименование *односторонних розеток*. К точному определению понятия розетки мы придем постепенно, разбирая симметрию наших объектов на конкретных примерах.

Плоскость симметрии. Симметрия животных, растений, машин и т. д.

Рассмотрим фигуру, показанную на рис. 19. Ее симметрия состоит в том, что две отраженно-равные половинки фигуры расположены относительно друг друга как предмет и его изображение в зеркале. Среди представителей живого мира этот случай симметрии встречается тогда, когда для особи по условиям ее жизни направления вверх и вниз, а также вперед и назад существенно различны, в то время как движения вправо и влево совершаются одинаково часто. С такой ситуацией, очевидно, имеют дело животные, жизнь которых протекает на поверхности земли и одна из главных функций которых — прямолинейное движение. Воображаемая плоскость, которая делит такие фигуры на две зеркально-равные половины, называется плоскостью симметрии и обозначается символически буквой m*. Тело человека, млекопитающих, ракообразных, рыб, птиц, насекомых обладает плоскостью симметрии. В природе симметрия осуществляется, конечно, только приблизительно, что никоим образом не может служить основанием для ее отрицания. Человек в своей деятельности весьма часто подражает тому, что его окружает. Этим мы объясняем, почему изготовляемые человеком вещи, будь то произведения искусства (рис. 13), предметы быта или орудия производства, *имеют так часто симметрию* m. *Во многих случаях этот вид* симметрии вытекает сам собой из способа применения человеком его изделий. Так, например, симметрия кресла или кровати явно вызывается

*От английского слова mirror — зеркало.

симметрией тела человека. В других случаях она вызывается эстетическими соображениями, плохо увязанными со способом употребления изделий; сюда, в первую очередь, относятся инструменты, рассчитанные на работу определенной рукой: молоток, рубанок, музыкальные инструменты (например, скрипка) и т. д. Симметрия этих предметов явно нерациональна.

Рис. 13. Стенная консоль как образец фигуры с симметрией m. Отклонения от симметрии, наблюдающиеся в деталях, несколько оживляют эту сухую статичную композицию

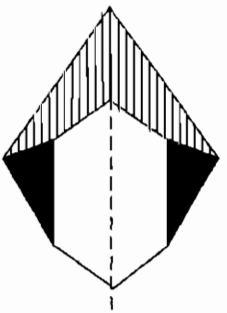


Рис. 14. Кристалл водного метасиликата натрия как образец фигуры с одной плоскостью симметрии

Показательным примером рациональной симметрии является автомашина, которая должна быть всегда обращена одной своей стороной вниз, другой — вверх, должна двигаться вперед лучше, чем назад, и одинаково хорошо поворачиваться направо и налево. Как видим, технические требования, предъявляемые человеком к автомашине, сходны с теми условиями, которым подчинено движение перечисленных выше видов животных, имеющих одну плоскость симметрии. Немудрено, что и автомашина оказалась обладателем той же симметрии. С другой стороны, у мотоцикла с прицепной коляской плоскости симметрии нет; это объединение, с точки зрения симметрии, предназначено скорее для кругового движения, чем для езды по прямому направлению. Надо полагать, что в этой форме мотоцикл сохранится недолго.

В так называемой неживой природе разбираемый нами случай симметрии встречается довольно часто, однако доминирующего значения он не имеет. На рис. 14 изображена схематически идеальная форма кристалла водного метасиликата натрия, выявляющая симметрию m. Плоскость

симметрии показана на рисунке штриховой линией; грани кристалла, равные по форме и по физическим свойствам, обозначены одинаковой раскраской или штриховкой.

С понятием «плоскость симметрии» мы связываем воображаемую операцию совмещения фигуры с ней самой, которое происходит при отражении фигуры в плоскости симметрии; при этом предполагается, что плоскость отражает обеими своими поверхностями. Совмещение с помощью отражения, а также и другие способы совмещения фигур будем в дальнейшем называть *симметрическими преобразованиями*. Вспомогательные геометрические элементы (точки, линии и плоскости), с помощью которых осуществляются симметрические преобразования (в нашем случае — плоскость симметрии), будем называть *элементами симметрии**. *Симметричен, по определению, всякий предмет, обладающий хотя бы одним элементом симметрии.* Этим определением, требующим еще перечисления и истолкования всех элементов симметрии, мы будем пользоваться, пока не придем в главе 6 к более общей и простой формулировке.

Ось симметрии. Принцип вращения и симметрия процессов, протекающих во времени

Симметричными в обиходе принято называть только такие фигуры, у которых есть плоскость симметрии. В новом виде симметрии, о котором сейчас будет идти речь, плоскостей симметрии нет, но есть *ось симметрии*: линия, при полном обороте вокруг которой фигура несколько раз приходит в совмещение сама с собой. Число совмещений при полном обороте называется *порядком оси*; наименьший угол поворота, при котором фигура совмещается сама с собой, называется *элементарным* углом поворота. На рис. 20 изображена дискомедуза, обладающая осевой симметрией (порядок оси равен четырем). Ось проходит через центр фигуры перпендикулярно к плоскости рисунка; элементарный угол поворота равен 90°. При полном обороте на 360° фигура, следовательно, должна четыре раза совместиться сама с собой.

Оси симметрии могут быть любого порядка — от 1 до ∞. Для краткости в дальнейшем оси симметрии будем обозначать одним целым

*Строго говоря, элементом симметрии фигуры называется геометрическое место точек, остающихся на место при выполнении данного преобразования симметрии и при всех его последующих повторениях. Совокупность таких преобразований образует циклическую группу, которую мы связываем с элементом симметрии (см. стр. 143).

числом, указывающим порядок оси; таким образом, ось симметрии четвертого порядка обозначается просто 4. Обратим внимание на то, что фигуры, вроде изображенной на рис. 20, *не могут быть совмещены сами с собой путем отражений в плоскостях*. Совмещение возможно только путем вращения.

Легко сообразить, что всякая, в том числе любая «асимметричная», фигура обладает бесконечным множеством осей симметрии первого порядка 1, так как после полного поворота на 360° вокруг произвольной прямой всякая фигура приходит в совмещение сама с собой один раз. Этот элемент симметрии может иметь лишь теоретическое значение и в дальнейшем изложении будет нами часто игнорироваться.

Большой интерес представляет рассмотрение другого предельного случая симметрии — оси бесконечного порядка ∞. Фигура, обладающая такой осью, может совмещаться сама с собой при любом угле поворота, так как элементарный угол поворота бесконечно мал.

Представим себе диск, который вращается вокруг центра в своей плоскости с некоторой постоянной угловой скоростью. Нетрудно заметить, что диск имеет ось симметрии бесконечного порядка, но лишен плоскостей симметрии, проходящих через центр перпендикулярно к его плоскости, так как в таком диске направления по часовой стрелке и обратно не равны друг другу. Мы видим, таким образом, что сообщение предметам новых физических качеств может изменять их симметрию. Так как движение — процесс, развивающийся во времени, в вопросах симметрии необходимо учитывать и фактор времени.

Ось симметрии бесконечного порядка может быть единственным элементом симметрии не только во вращающихся, но также и в покоящихся телах. Представим себе деревянный конус, боковая поверхность которого оклеена сукном. Если такой конус привести во вращение вокруг его оси (зажав в патрон токарного станка) и хорошо «причесать» на ходу щеткой, то после обработки конус потеряет все свои плоскости симметрии, так как ворс сукна будет иметь вполне определенное направление. В зависимости от направления вращения токарного станка мы получим либо правый, либо левый конус. Мы не будем здесь возвращаться к вопросу о *точности*, с которой в данном случае осуществляется симметрия; напомним только, что в природе идеальной симметрии нет. Для полного приближения к ней следует представить себе сукно с бесконечным числом бесконечно тонких и бесконечно близких друг к другу ворсинок. Поверхность вращающегося или «ворсистого» конуса *анизотропна*, т.е. обладает по разным направлениям разными свойствами. Когда мы проводим рукой по поверхности сукна, то испытываем различное трение в зависимости от направления движения руки. То же можно сказать и про поверхность вращающегося конуса: если мы

будем проводить по ней рукой по направлению вращения или против него, то испытаем неодинаковое сопротивление движению руки. Из всех плоских фигур только диски и системы концентрических окружностей могут обладать осями симметрии бесконечного порядка при одновременном присутствии или отсутствии плоскостей симметрии (в зависимости от вращения и других причин, вызывающих анизотропию фигур). Из фигур пространственных ось симметрии бесконечного порядка могут иметь все *тела вращения или токарные формы*.

Для дальнейшего полезно иметь в виду следующее. Когда мы говорим, что данная фигура имеет такую-то симметрию, например *осевую симметрию* n*, то это означает, что в фигуре нет иных элементов симметрии; в нашем примере фигура не имеет никаких других элементов симметрии, кроме единственной оси симметрии порядка n. Если же мы говорим, что фигура имеет *ось симметрии* n, то это означает, что, наряду с последней, фигура может иметь и другие элементы симметрии, например плоскость симметрии.

Авторам пришлось просмотреть большое количество всевозможных форм организмов, прежде чем удалось разыскать образец неприкрепленной формы, симметрия которой исчерпывается одной осью вращения (см. рис. 20). Сравнительную редкость осевой симметрии мы объясняем следующим образом. Если для большинства высших организмов симметрия m связана с выгодами поступательного движения при разыскивании пищи, то симметрия n (одна ось симметрии порядка n) может быть обусловлена выгодами привычного вращательного движения в одну сторону для улавливания пищи**.

Мы не беремся объяснять, почему *принцип вращения* получил в биологических формах столь малое развитие. В человеческой деятельности, особенно в технике, этот принцип находит широчайшее применение; вместе с тем и симметрия n занимает весьма почетное место среди других видов симметрии. Всякая машина или ее деталь, вращающаяся вокруг определенной оси, по обоим концам которой господствуют различные условия, принимает симметрию n. На рис. 15 изображена бумажная детская вертушка, назначение — которой вращаться при ветре. Когда она функционирует, то одна ее сторона и один конец ее оси направлены против ветра, а другая сторона и другой конец оси — по ветру. Колесо ветряной мельницы имеет также симметрию n, всякая другая симметрия для него технически нецелесообразна.

---

*n — любое целое число, указывающее порядок оси симметрии.

**Осевая симметрия встречается чаще среди растительных и животных форм, ведущих прикрепленный образ жизни. Примером может служить симметрия многих цветков, лепестки которых, как в складном веере, одним краем накрывают друг друга по закону правого или левого винта (см. Урманцев, 1870)

В орнаменте симметрия n имеет также большое распространение; часто она возникает благодаря применению *принципа переплетения*, который приводит к выпадению плоскостей симметрии, пересекающихся по оси симметрии.

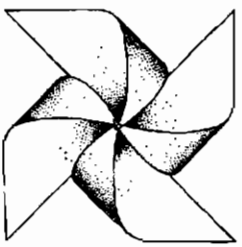


Рис. 15. Детская бумажная вертушка как пример вращающегося механизма с одной осью симметрии

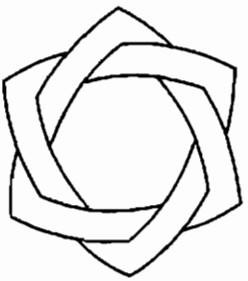


Рис. 16. В результате переплетения двух треугольных фигур в составной фигуре пропадают плоскости симметрии и остается только одна ось симметрии

Поясним это на примере переплетения двух треугольных фигур, вырезанных из бумаги (рис. 16). В целом фигура представляет собой шестиконечную звезду с шестерной осью симметрии. Плоскостей симметрии в фигуре нет. В этом нетрудно убедиться, если провести через противоположные вершины звезды прямые, которые, с первого взгляда, можно принять за следы плоскостей симметрии, и обратить внимание на то, что для некоторых отрезков кривых, расположенных справа от предполагаемой плоскости симметрии, нет соответствующих зеркально-равных отрезков слева. То же можно сказать и про воображаемые плоскости, рассекающие фигуру по противоположным вершинам ее входящих углов. В разобранном примере плоскости симметрии выпали не потому, что художник (фигура взята из книги Я. Чернихова «Орнамент») сознательно к этому стремился, а потому, что он воспользовался для композиции рисунка принципом переплетения.

Энантиоморфизм. Правизна и левизна фигур

Здесь уместно остановиться еще на одном важном понятии, вытекающем из симметрии n. Мы говорим о так называемом *энантиоморфизме*. Сравнивая между собой две фигуры, показанные на рис. 17, легко ви-

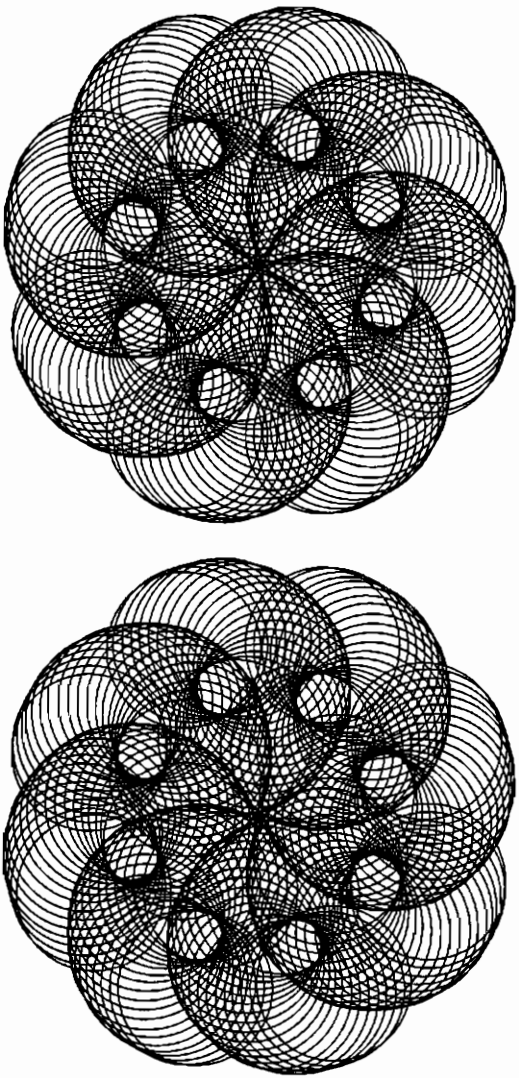


Рис. 17. Пример энантиоморфизма — правая (вверху) и левая фигуры (по Чернихову)

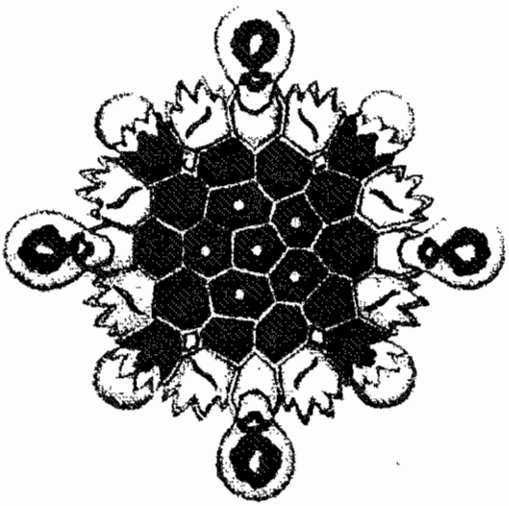


Рис. 18. Пример соединения четверной и пятерной симметрий в *Pediastrum elegans* (по Геккелю)

Рис. 19. *Sacculina carcini* — пример фигуры с одной плоскостью симметрии (по Геккелю)

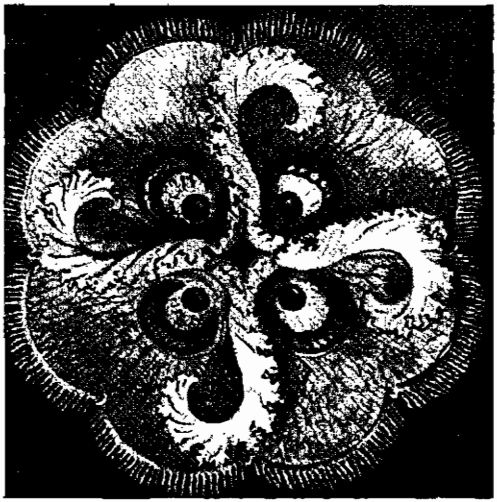


Рис. 20. ***Aurelia insulinda*** **— пример организма, обладающего осью симметрии четвертого порядка (по Геккелю)**

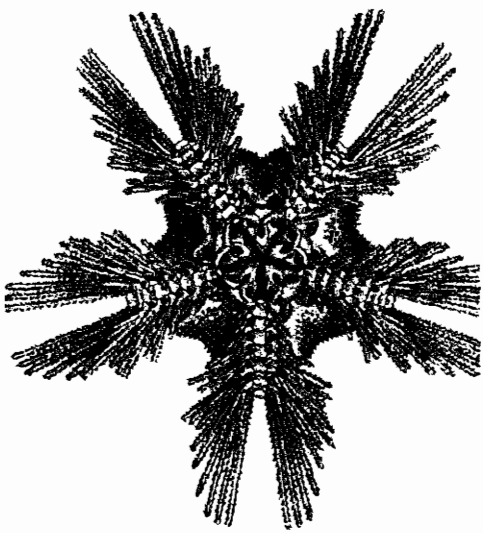


Рис. 21. Морская звезда ***Ophiotrix capillaris*** **— пример фигур с одной вертикальной осью и пересекающимися по ней плоскостями симметрии. Символ симметрии** $5 \cdot m$

деть, что они имеют одинаковую симметрию 8, т. е. элементы симметрии обеих фигур исчерпываются восьмерной осью симметрии. Плоскостей симметрии в фигурах нет. Обе они зеркально-равны, но несовместимы одна с другой, т. е. относятся друг к другу, как правая рука к левой. Поэтому целесообразно одну из этих фигур (безразлично какую) называть правой, а другую — левой. Существование зеркально-равных форм одной и той же симметрии и называется энантиоморфизмом. Так как обе формы геометрически равны друг другу, их часто называют энантиоморфными модификациями одной формы.

Вернемся к симметрии m и рассмотрим для примера рис. 14. Построив зеркальное изображение показанной на нем фигуры, мы не найдем между ним и исходной фигурой никакого различия*. Обе фигуры будут одновременно и зеркально- и совместимо- равны друг другу; для фигур с симметрией m энантиоморфизм невозможен. Невозможность построения энантиоморфных модификаций вызывается в разбираемом случае тем обстоятельством, что фигуры с симметрией m сами состоят из зеркально-равных частей. Таким образом, речь может идти лишь об энантиоморфизме этих частей, но не фигур в целом. При отражении фигуры в зеркале правая ее часть преобразуется в левую, левая — в правую; вся же фигура останется такой, какой она была до отражения. Выражаясь фигурально, формы с симметрией m, потому не имеют энантиоморфных модификаций, что «правизна» и «левизна» содержатся в самих формах.

Иначе обстоит дело с симметрией n. Фигуры, отвечающие этой симметрии (см., например, фигуру с симметрией 4 на рис. 20), состоят только из совместимо-равных частей — скажем, только из левых частей. При отражении в зеркале все части фигуры преобразуются в правые, отчего и вся фигура перейдет в другую энантиоморфную модификацию.

Комбинация оси симметрии с плоскостями симметрии

До сих пор мы рассматривали фигуры, имеющие либо одну плоскость симметрии (символ симметрии — m), либо одну ось симметрии (частные символы — 1, 2, 3, ..., ∞; общий символ для всего ряда — n). Теперь нам предстоит рассмотреть такие фигуры, в которых ось симметрии комбинируется простейшим образом с несколькими плоскостями симметрии. В дальнейшем будем называть полную совокупность всех элементов симметрии фигуры ее *видом симметрии*, а полный набор

*Не следует смешивать понятие зеркала с понятием плоскости симметрии. Зеркало в разбираемом случае может быть оставлено где угодно; плоскость симметрии занимает в данной фигуре определенное положение.

преобразований симметрии, осуществляемых с их помощью,— *группой симметрии* фигуры (определение группы будет дано в главе 10).

В настоящем параграфе нас будут интересовать такие виды симметрии, которые характеризуются одной осью симметрии и проходящей по ней плоскостью симметрии. Эти *порождающие элементы симметрии* мы и введем в символ вида. Например, символ $5 \cdot m$, который читается «пять точка эм», означает, что в качестве порождающих элементов симметрии взяты пятерная ось и плоскость симметрии; точка условно обозначает параллельность (или совпадение) оси и плоскости. Другие элементы симметрии, вытекающие из существования порождающих элементов, в символ не входят. Полная совокупность всех элементов симметрии вида $5 \cdot m$ состоит из одной пятерной оси и пяти пересекающихся по ней плоскостей симметрии. Этот вид симметрии имеет широкое распространение в органическом мире и наблюдается, например, у некоторых морских звезд (рис. 21).

Эти животные состоят из десяти совместимо- и отраженно-равных частей; каждая часть может быть совмещена со всякой другой, а вся фигура — сама с собой поворотами на пятую часть окружности (72°) вокруг оси, проходящей через центр фигуры перпендикулярно к плоскости рисунка, и отражениями в пяти плоскостях, проходящих через ось и образующих между собой углы 36°. Вид симметрии $5 \cdot m$ часто встречается у плодов растений. Яблоко, лимон, апельсин в поперечных резрезах отчетливо выявляют эту симметрию; многочисленные ее примеры можно наблюдать у цветков розоцветных (рис. 22).

В противоположность этому в мире кристаллов пятерная ось симметрии ни в роли единственного элемента, ни в какой-либо комбинации с другими элементами симметрии не встречается и, как показывает теория, встречаться не может. В равной мере в кристаллах не могут встречаться и все оси симметрии порядка выше шести, за исключением, впрочем, оси симметрии бесконечного порядка, которой могут характеризоваться в отдельных случаях оптические и некоторые другие физические свойства кристаллов. Такой теории, которая не допускала бы возможности появления тех или иных элементов симметрии в организмах, пока не существует, хотя некоторых элементов симметрии мы в них и не находим.

Симметрия $2 \cdot m$, $3 \cdot m$, $4 \cdot m$, $6 \cdot m$ весьма распространена в растительном и животном мире, а также и среди кристаллов. Соответствующие примеры даны на рис. 23—28. Примеры симметрии с осями порядка выше шести, невозможной для кристаллов, но возможной для организмов, приведены на рис. 29 и 30.

Разбираемый тип симметрии, характеризуемый одной осью и пересекающимися по ней плоскостями симметрии, имеет значительно боль-

Рис. 22. Альпийский цветок *Gentiana pumila* с симметрией $5 \cdot m$

шее распространение в орнаменте, чем тип симметрии с одной осью, но без плоскостей симметрии. Читатель может, при желании, найти тысячи примеров этой симметрии в архитектурных деталях, розетках, заставках, виньетках и т. д. Огромное количество «стоячих» предметов, в которых мы четко должны различать верх и низ, обладает симметрией $n \cdot m$. Сюда относятся архитектурные постройки, всевозможная посуда (стаканы, горшки, кувшины, вазы), лампы, столы, табуреты и т. д.

Рассмотренный нами вначале случай симметрии m формально может быть причислен также к категории $n \cdot m$, если n положить равным единице; символ $1 \cdot m$, очевидно, тождествен символу m, так как ось первого порядка всегда предполагается существующей во всех фигурах. В качестве примера розетки с симметрией $8 \cdot m$ приводим чертеж из книги Я. Чернихова «Орнамент» (рис. 31). В пределе, когда поря-

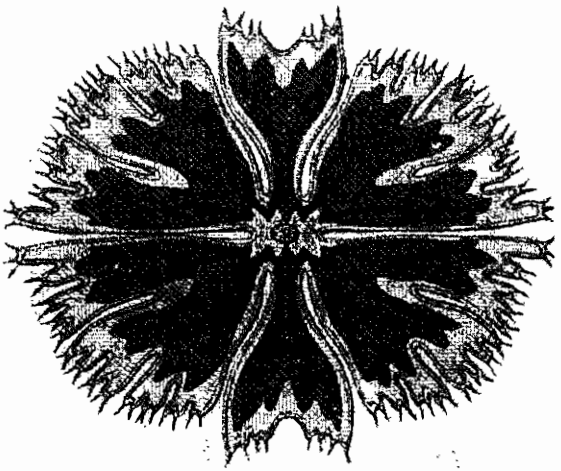


Рис. 23. ***Euastrum apiculatum*** **— пример организма с симметрией $2 \cdot m$ (по Геккелю)**

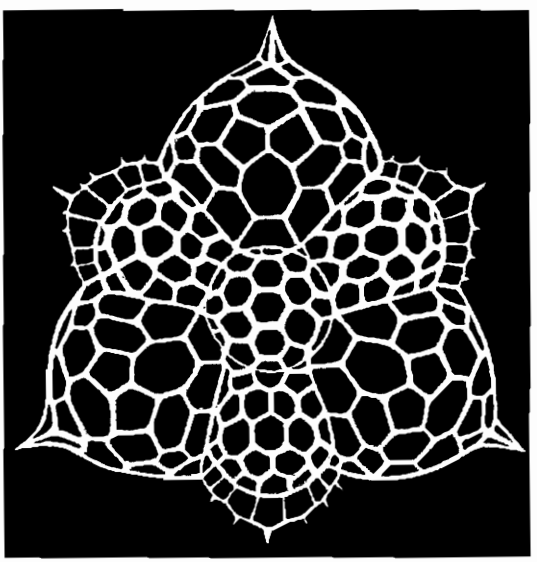


Рис. 24. ***Archidiscus pyloniscus*** **— пример организма с симметрией $3 \cdot m$ (по Геккелю)**

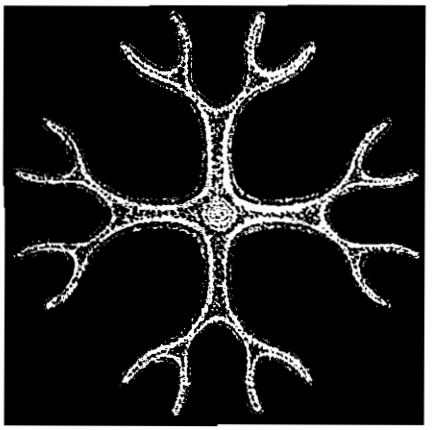


Рис. 25. ***Dicranastrum bifurcatum*** **— пример организма с симметрией $4 \cdot m$ (по Геккелю)**

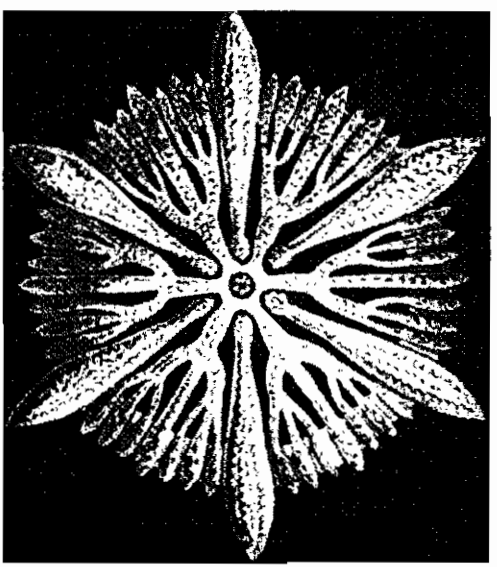


Рис. 26. ***Astrocyalhus paradoxus*** **— пример организма с симметрией $6 \cdot m$ (по Геккелю)**

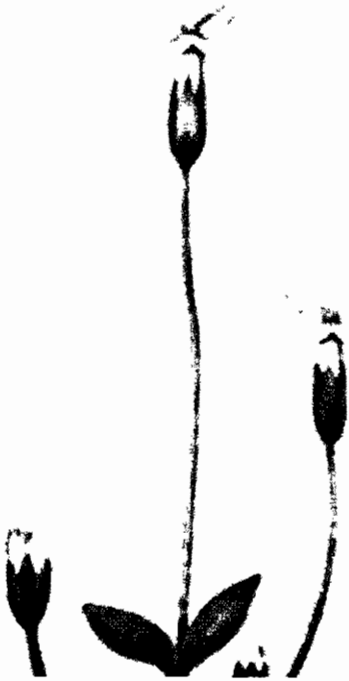


Рис. 27. *Gentiana glacialis* — пример цветка с симметрией $4 \cdot m$

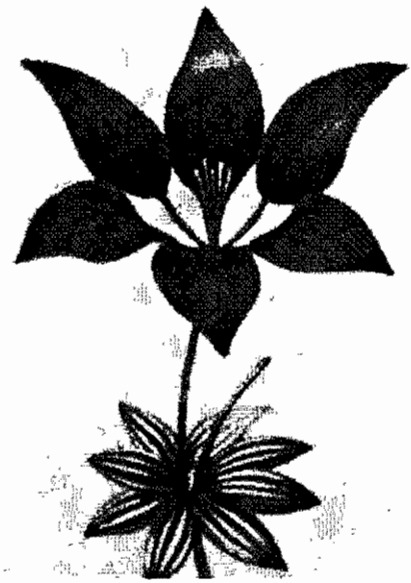


Рис. 28. *Lilium philadelphicum* — пример цветка с симметрией $6 \cdot m$

док оси становится бесконечно большим, симметрия $n \cdot m$ переходит в $\infty \cdot m$. Такую симметрию имеют многие токарные формы после шлифовки, если не принять особых мер для устранения плоскостей симметрии (вращение, причесывание ворса и т. д.). Из плоских розеток этой симметрией обладают только обыкновенная неподвижная окружность или система концентрических окружностей. Сравнивая между собой фигуры с плоскостями симметрии и без них, нетрудно подметить разницу между обеими категориями фигур по тому впечатлению, которое они производят на зрителя. Фигуры с плоскостями симметрии спокойны, статичны (см. рис. 13, 24); фигуры без плоскостей симметрии (рис. 15, 20) динамичны, вызывают представление о вращении.

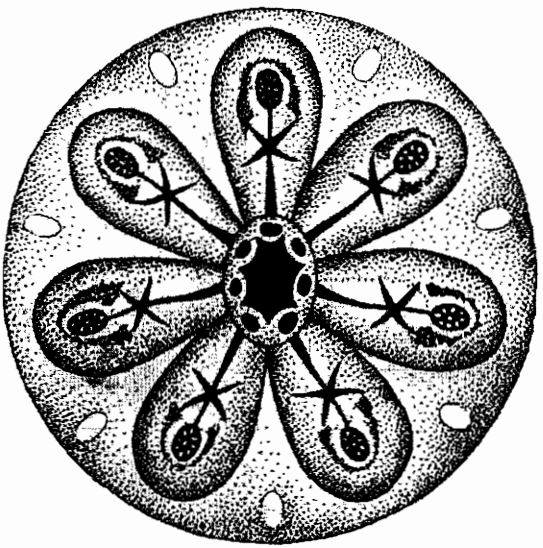


Рис. 29. ***Fistularia chinensis*** **— пример организма с симметрией** $7 \cdot m$ **(по Геккелю)**

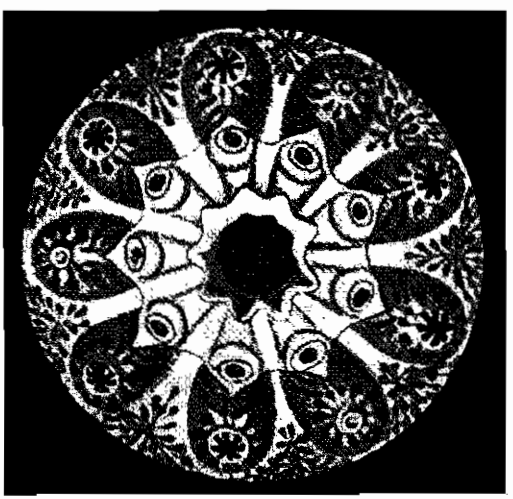


Рис. 30. ***Botryllus policyclus*** **— пример приближенной симметрии** $9 \cdot m$ **(по Геккелю)**

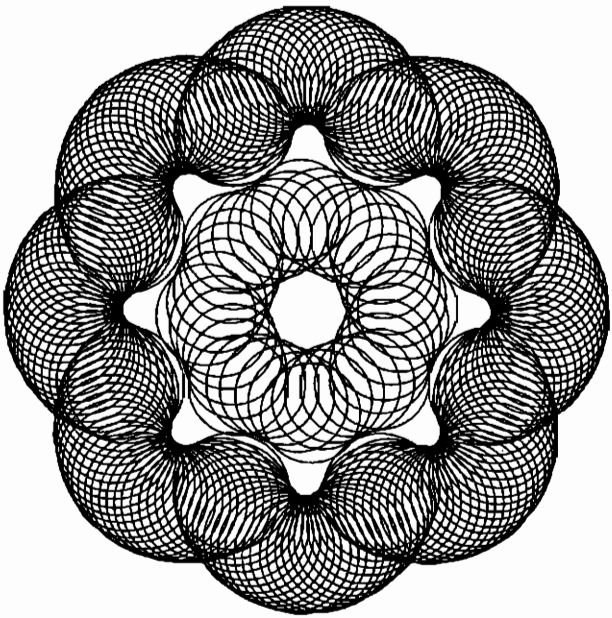


Рис. 31. Розетка с симметрией $8 \cdot m$ (по Чернихову)

Вырезывание симметричных розеток из бумаги. Роль физических процессов, обусловливающих образование симметричных розеток

До сих пор мы говорили о симметрии как о чем-то присущем фигурам или телам и лишь вскользь упоминали о связи симметрии с физическими явлениями. Сейчас нам хотелось бы более подробно остановиться на роли самих процессов или явлений, которые обусловливают симметрию фигур. Вспомним, что симметрия фигуры, получаемой из размазанной чернильной кляксы, целиком определяется процессом перегибания бумаги. Перегибание бумаги может быть использовано также и для вырезывания симметричных фигур. Обычно это делается так: лист бумаги, чаще всего квадратной формы, складывается вдвое по одной из диагоналей квадрата; полученный в результате перегибания бумаги равнобедренный прямоугольный треугольник складывается пополам по высоте; новый треугольник той же формы складывается пополам еще раз и т. д.

В сложенной бумаге вырезывается ножницами узор так, чтобы одновременно были прорезаны все слои бумаги. Форма вырезанного узора может быть совершенно произвольной и асимметричной. Из сочетания таких узоров в развернутой бумаге получается симметричная фигура. Легко сообразить, что при однократном перегибании бумаги получающаяся фигура будет иметь одну плоскость симметрии (рис. 32). При двукратном перегибании симметричная фигура будет иметь две плоскости симметрии и, соответственно, одну ось симметрии второго порядка $2 \cdot m$. При трехкратном перегибании получим фигуру с четырьмя плоскостями симметрии и одной осью четвертого порядка (рис. 33). Словом, каждое новое перегибание листа бумаги увеличивает вдвое число существующих плоскостей симметрии и порядок оси симметрии. Чтобы получить фигуру с произвольным числом плоскостей симметрии и соответствующей осью симметрии порядка p, чертим на бумаге окружность, делим ее на $2p$ частей, через точки деления проводим p диаметров, складываем по ним бумагу в любом порядке и начинаем вырезывание. Для фигуры с осью симметрии третьего порядка нужно, следовательно, разделить окружность на шесть частей. Вместо обыкновенной бумаги рекомендуется употреблять папиросную. Этот материал допускает вырезывание очень тонких полосок при большом числе слоев бумаги.

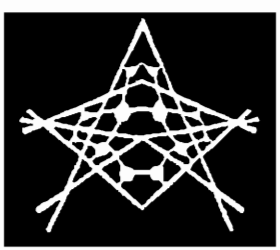


Рис. 32. Фигура, вырезанная из папиросной бумаги, перегнутой один раз. Перегибу отвечает плоскость симметрии m

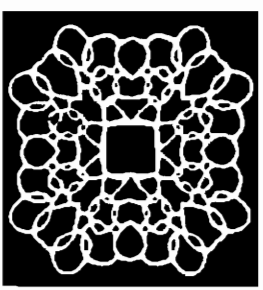


Рис. 33. Фигура, вырезанная из папиросной бумаги, с симметрией $4 \cdot m$

Мы видели, что метод вырезывания розеток путем перегибания бумаги обусловливает обязательное появление в фигуре плоскостей симметрии. Чтобы получить фигуры только с одной осью симметрии без плоскостей симметрии, нужно сложить бумагу в несколько слоев, не перегибая ее. С первого взгляда задача кажется невыполнимой. Решение

ее, однако, очень просто. Следует вырезать из бумаги круг и сделать в нем прорез по одному из радиусов; далее нужно свернуть из круга конус так, чтобы оба края прореза пришлись точно один под другим. Такое сворачивание может быть осуществлено в два, три, четыре слоя бумаги и более. Чем больше слоев бумаги будет иметь конус, тем меньше будет его телесный угол. Чтобы конус не развертывался, скалываем его булавкой в одном месте или осторожно приклеиваем несколькими капельками клея отходящий край бумаги. После этих приготовлений можно приступить к вырезыванию. Когда оно закончено, разворачиваем конус и получаем в окончательном результате розетку с одной осью симметрии, порядок которой равен числу слоев конуса (рис. 34).

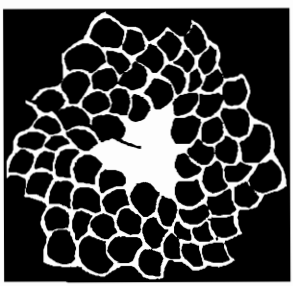


Рис. 34. Фигура, вырезанная из папиросной бумаги, навернутой после надреза на конус

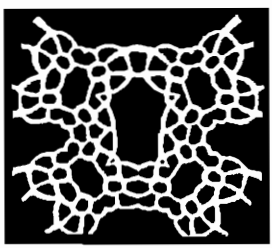


Рис. 35. Фигура, вырезанная из папиросной бумаги при произвольном складывании. Присутствуют одна плоскость симметрии, относящаяся ко всей фигуре, и четыре плоскости, которые являются плоскостями симметрии только для частей фигуры

Для облегчения техники сворачивания конуса можно предложить несколько приспособлений. Например, можно наворачивать бумагу с прорезом на деревянный конус, выточенный так, чтобы его образующая была в целое число раз больше радиуса основания; это число будет равно порядку оси розетки. Само вырезывание лучше производить в этом случае не ножницами, а острым ножом или ланцетом. Вместо деревянного конуса можно взять кусок картона, вырезанный углом. Величина угла должна быть равна целой доле окружности (вернее, чуть меньше, с учетом влияния толщины картона). При вырезывании фигур ножом картон вынимать из навернутой на него бумаги нельзя, иначе будет прорезано двойное число слоев бумаги, что повлечет за собой воз-

никновение в розетке плоскостей симметрии. Обратим еще внимание на узоры, которые получаются при совершенно произвольном складывании бумаги. В таких узорах всегда присутствует одна плоскость симметрии, относящаяся ко всему рисунку в целом; наряду с ней в фигуре можно найти и другие плоскости, которые являются плоскостями симметрии только для отдельных частей фигуры (рис. 35).

Другим примером процессов, приводящих к симметричным фигурам, может служить завязывание узлов, например завязывание бумажной ленты простым узлом. Возникающая при этом фигура (рис. 36), если от нее отрезать оба конца, представляет собой правильный пятиугольник.

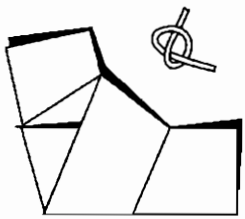


Рис. 36. Завязывание бумажной ленты приводит к образованию правильного пятиугольника, если от ленты отрезать оба свободных конца

Более сложные случаи проявления симметрии в результате физических процессов наблюдаются в хорошо известных из элементарной физики фигурах Хладни. Для получения этих фигур берут какие-нибудь упругие пластинки, например стеклянные или металлические, правильной геометрической формы. Закрепив пластинку в одной точке в горизонтальном положении, насыпают на пластинку небольшое количество песка и проводят по ее краю сильно натянутым смычком, одновременно прикладывая один или два пальца к определенным точкам пластинки. Во время звучания пластинка разделятся на части узловыми линиями, в которых собирается песок, сброшенный колебаниями пластинки с пучностей. Симметрия фигур Хладни в значительной мере определяется симметрией взятых пластинок; выражаясь математически, можно сказать, что симметрия песочной фигуры является подгруппой группы симметрии пластинки или проще: в песочных фигурах могут содержаться только те из элементов симметрии, которые содержатся в пластинке*. Поэтому, например, круглые пластинки, обладающие осью симметрии бесконечного порядка, а следовательно, и осью симметрии любого порядка, могут давать песочные фигуры с осью симметрии шестого или четвертого порядка; квадратные же пластинки не могут давать фигуры с тройной осью симметрии (рис. 37). Замечательные фигуры, совершенно аналогичные фигурам Хладни, образуются на поверхности кварцевых пластинок, посыпанных каким-нибудь легким порошком, если в них возбуждены колебания. Роль смычка в данном

*Это утверждение справедливо лишь для изотропных в упругом отношении пластин. Подробнее вопрос рассматривается с применением принципа суперпозиции групп симметрии (см. гл. 12).

случае выполняет переменное электрическое поле, заставляющее пластинки в известных условиях «звучать» сверхвысокими, неслышимыми для человеческого уха, но видимыми по пыльным фигурам звуками (100 000–1 000 000 колебаний в секунду) (рис. 38)*.

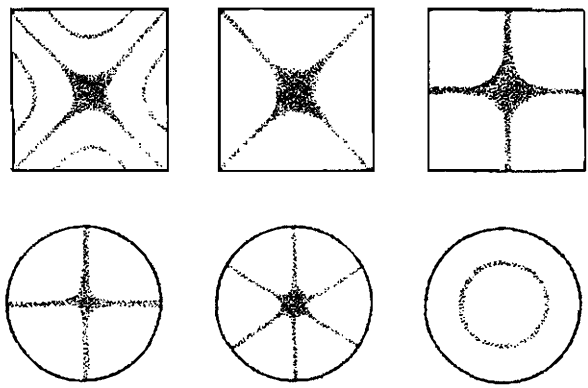


Рис. 37. Песочные фигуры Хладни, образующиеся при звучании посыпанных песком металлических пластинок

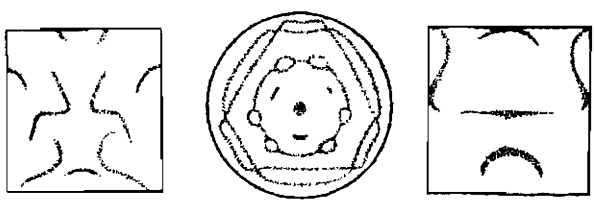


Рис. 38. Пыльные фигуры на колеблющихся пьезокварцевых пластинках

В акустике и механике имеют большое значение симметричные фигуры, известные под названием фигур Лиссажу; они описываются точкой, совершающей колебания по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Форма фигур Лиссажу определяется амплитудами слагающих колебаний и их частотой. На рис. 39 показаны фигуры Лисса-

*Человеческое ухо слышит звук, если число колебаний в секунду не превышает 20 000.

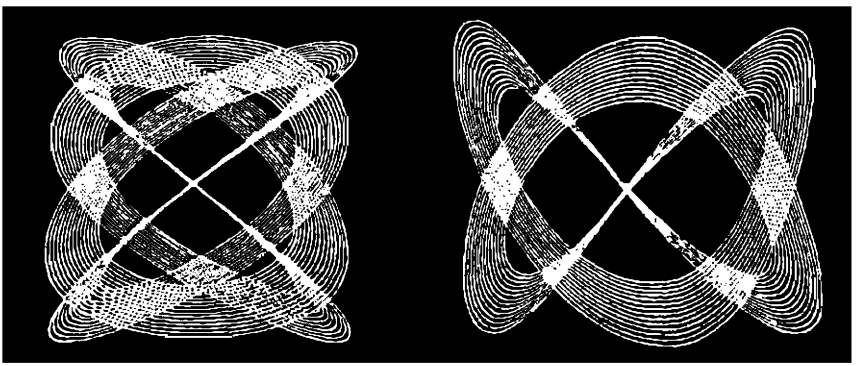


Рис. 39. Фигуры Лиссажу, образующиеся при сложении затухающих колебаний двух камертонов

жу, полученные от двух колеблющихся камертонов отражением света от приклеенных к ним зеркалец. Если мы впишем эти фигуры в прямоугольник, то окажется, что отношение чисел точек касания фигуры на сторонах прямоугольника равно отношению частот колебаний в одном и другом направлениях. Интересно, что фигуры Лиссажу могут и не иметь плоскостей симметрии, как это мы видим, например, на рис. 40, где симметрия исчерпывается только наличием одной оси симметрии второго порядка.

Приведем еще примеры образования симметричных розеток оптическим путем. Каждый из нас в детстве любовался красотой и многообразием фигур в калейдоскопе, но немногим известно, что идея этой игрушки может быть положена в основу теоретического вывода всех случаев пространственной и плоской симметрии. Простейший калейдоскоп состоит из двух зеркал, A и B, поставленных под углом, равным целой части окружности. В угол, образуемый зеркалами, помещают какие-нибудь блестящие и цветные предметы: кусочки стекол, обрезки жести и т. д. Отражаясь в зеркалах, эти предметы и их изображения в зеркалах образуют фигуру с симметрией $n \cdot m$, если угол между зеркалами равен $180°/n$. Построение таких фигур слишком просто, и мы на нем не будем останавливаться.

Очень интересные геометрические фигуры можно получать с помощью двух зеркал, ставя их на лист бумаги с начерченными на нем произвольными линиями. Рис. 41 поясняет, что при этом происходит. A и B — два зеркала, образующие угол 60°; отражающие поверхности

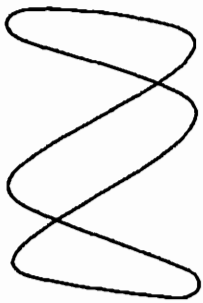


Рис. 40. Фигура Лиссажу без плоскостей симметрии

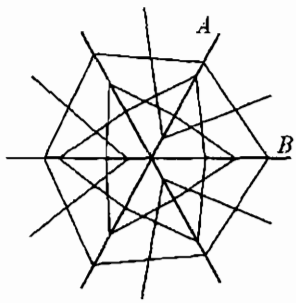


Рис. 41. Простой калейдоскоп из двух зеркал A и B для получения фигур с симметрией $3 \cdot m$. Калейдоскоп ставится на лист бумаги с начерченными на нем прямыми или кривыми линиями

зеркал обращены внутрь угла. Отражаясь друг в друге, зеркала образуют видимую фигуру из шести зеркал, пересекающихся по одной прямой, проходящей через центр фигуры. В разбираемом примере внутрь угла, образованного зеркалами A и B, попало четыре отрезка прямых, образующих вместе со своими изображениями в зеркалах своеобразную звезду. В дальнейшем нам придется встречаться с более сложными калейдоскопами.

Другой пример выберем из кристаллооптики. Если сходящийся пучок поляризованного света при соблюдении ряда условий (наблюдение в «скрещенных» николях) пропустить через две пластинки, вырезанные определенным образом из правого и левого кварца (двух энантиоморфных модификаций кристалла), то на матовом стекле, поставленном на пути лучей, можно получить картину, изображенную на рис. 42 и носящую название спиралей Эри. В зависимости от того, какой кварц лежит внизу, правый или левый, спирали оказываются закрученными по часовой стрелке или против нее. Одного взгляда на фигуру достаточно, чтобы возник вопрос о каком-то «вращении», лежащем в основе физического процесса, вызывающего интересующее нас оптическое явление. И это действительно так: спирали Эри обусловливаются тем, что в физике называется вращением плоскости поляризации.

В заключение упомянем еще о так называемых фигурах травления, которые получаются на гранях кристаллов при действии на них различных растворителей. Эти микроскопические фигурки, ямки и холмики играют в кристаллографии большую роль для определения симметрии

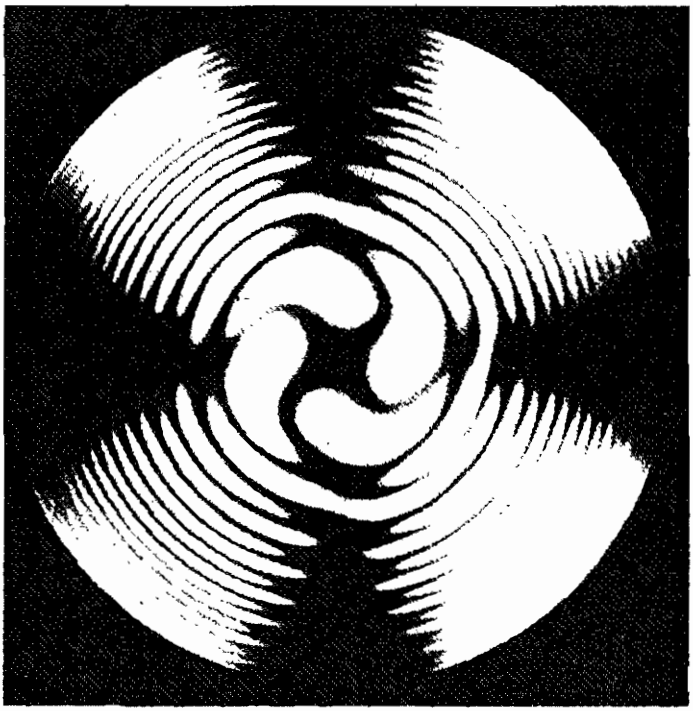


Рис. 42. Спирали Эри, наблюдаемые при прохождении сходящегося поляризованного света через две прозрачные пластинки правого и левого кварца. Николи скрещены

кристаллов и для выявления дефектов их структуры, так называемых дислокаций (рис. 43). Выше мы уже говорили о том, что в кристаллах невозможны оси симметрии пятого, седьмого и более высокого порядка (за исключением оси симметрии бесконечного порядка, характерной, например, для оптических явлений в некоторых кристаллах). Не следует думать, что в данном случае наука ставит природе какие-то свои «пределы». В действительности здесь речь идет примерно о такой невозможности, какую мы имеем в виду, когда говорим, что треугольник не может иметь четыре стороны. В кристаллах атомы, ионы, молекулы расположены по узлам сеток и так называемых пространственных решеток (см. гл. 9). Такому строению кристаллов по чисто геометрическим причинам

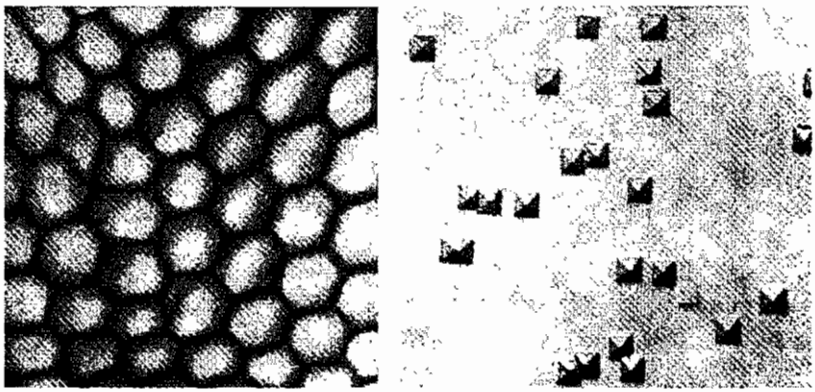


Рис. 43. Слева — структура дислокационной сетки в кристаллах Zn, выявленная с помощью электронной микроскопии высокого разрешения (увеличение 40 000×); справа — фигуры травления выявляют выходы одиночных дислокаций на поверхности (100) кристалла NaCl (оптический микроскоп, ув. 400×)

противоречит существование «запрещенных» осей симметрии. На этом основании и для фигур травления из бесчисленного множества видов симметрии остаются только десять видов симметрии:

$$1;\quad 2;\quad 3;\quad 4;\quad 6;$$
$$m;\quad 2\cdot m;\quad 3\cdot m;\quad 4\cdot m;\quad 6\cdot m.$$

Фигуры травления обыкновенно бывают очень малы и видимы лишь в лупу или в микроскоп. Если же взять плоскопараллельную пластинку какого-либо прозрачного кристалла, одна поверхность которой протравлена, а другая гладко отполирована, и пропустить сквозь пластинку тонкий пучок параллельных лучей света, то на поставленном на пути лучей после их прохождения через кристалл экране можно получить своеобразную звездчатую световую фигуру, обладающую симметрией отдельных микроскопических фигур травления. Образование таких световых фигур, или, как их называют, фигур астеризма, объясняется правильным преломлением света в микроскопических гранях фигур травления и дифракцией света. На рис. 44 показана фигура астеризма, которую можно наблюдать при прохождении света через пластинку кварца, одна сторона которой была протравлена плавиковой кислотой.

Рис. 44. Световые фигуры, наблюдаемые при прохождении света через пластинку кварца, протравленную с одной стороны плавиковой кислотой

Понятие о полярных и неполярных плоскостях и осях

Заканчивая главу о симметрии розеток, мы хотели бы дать точное определение понятия розетки с точки зрения учения о симметрии. Чтобы подойти к этому определению, необходимо предварительно познакомиться с двумя другими понятиями, имеющими чрезвычайно важное значение для всего учения о симметрии. Мы имеем в виду, во-первых, понятие о полярности плоскостей и осей и, во-вторых, понятие об особенных точках, прямых и плоскостях. *Полярной* мы называем такую плоскость, в которой обе ее поверхности физически не равны друг другу; употребляя житейские термины, мы могли бы сказать, что полярная плоскость имеет «лицо» и «изнанку». Совершенно аналогично мы называем полярной такую ось или такую прямую, в которой физически различаются направления вперед и назад.

Приведем примеры полярных плоскостей и осей. Лист бумаги, выкрашенный с обеих сторон в разные цвета, представляет собой образец полярной плоскости в отношении окраски.

Воображаемая геометрическая плоскость, разделяющая спокойную поверхность воды и воздух, полярна, так как одна ее сторона соприкасается с воздухом, а другая — с водой. Вертикальная линия полярна в отношении силы тяжести: перемещать груз вверх труднее, чем вниз.

Для точного определения полярности необходимо вспомнить, что симметрическое преобразование, отвечающее тому или иному элементу симметрии (мы знаем пока только два преобразования: отражение и вращение), переводит фигуру в новое положение или состояние, неотличимое от исходного. После сказанного можно принять такое *определение полярности* осей (направлений) и плоскостей: ось (плоскость) полярна, если оба ее конца (стороны) не могут быть приведены в совмещение симметрическими преобразованиями, входящими в группу симметрии фигуры.

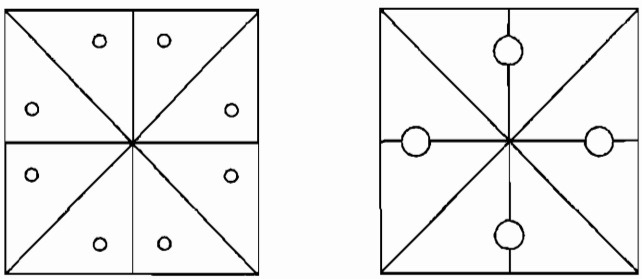
Возьмем лист бумаги, отметим на нем проколом иглы точку. Считая ее за центр, начертим на обеих сторонах листа две равные окружности. Глядя на первую окружность, как обычно, с той стороны листа, на которой нарисована окружность, припишем ей «правое» вращение, что и отметим на чертеже соответствующей стрелкой. Перевернем чертеж и, приписав второй окружности «левое» вращение, отметим его новой стрелкой. Рассматривая окружности в проходящем свете, «на просвет», убеждаемся, что они обе вращаются в одну сторону. Это означает, что с плоскостью бумаги совпадает плоскость симметрии. Плоскость бумаги в данном случае неполярна, так как обе ее поверхности преобразуются друг в друга симметрическим преобразованием (отражением в плоскости симметрии). Рассмотренный пример имеет большое значение для правильного решения многих вопросов электромагнетизма, о чем у нас еще будет идти речь (см. гл. 3).

Особенные точки, прямые и плоскости. Кратность точек

Особенными мы будем называть такие точки, прямые и плоскости, которые не имеют себе эквивалентных (или равных) в данном симметричном предмете или фигуре. Центр квадрата — особенная точка, так как других центров в фигуре не имеется. Все точки оси усеченного конуса особенные, так как никакими симметрическими преобразованиями, присущими элементам симметрии усеченного конуса (поворотами вокруг оси и отражениями в плоскостях симметрии), мы из данной точки на оси не можем вывести других эквивалентных точек. Центр эллипсоида вращения есть особенная точка, но все другие точки, расположенные на оси, не особенные, так как для каждой такой точки найдется эквивалентная точка, выводимая из данной отражением в плоскости симметрии, перпендикулярной к оси вращения (оси симметрии бесконечного порядка).

Четверная ось симметрии квадрата, бесконечная ось симметрии усеченного конуса являются особенными прямыми в данных фигурах, так

как других таких же осей у них нет. Всякая плоскость, перпендикулярная к бесконечной оси усеченного конуса, особенная; в эллипсоиде вращения есть только одна особенная плоскость, перпендикулярная к бесконечной оси и проходящая через центр фигуры.



а) *б*)

Рис. 45. Эквивалентная система точек: *а*) общего положения; *б*) частного положения

На особенные точки симметричных фигур можно смотреть как на точки *наивысшей кратности*. Возьмем для примера квадрат; выберем внутри него произвольную точку; вместе с эквивалентными ей точками она образует систему из восьми точек (рис. 45 *а*). Если мы станем перемещать исходную точку к центру квадрата и потребуем, чтобы симметрия фигуры при этом не изменялась, то и вся система эквивалентных точек будет перемещаться туда же; все точки сольются в одну, когда исходная точка совместится с центром квадрата или вообще с особенной точкой. Число эквивалентных точек, слившихся в особенной точке, мы будем называть *кратностью* особенной точки или *кратностью вырождения**. Другими словами, величина симметрии квадрата (на полярной плоскости) и кратность его центра равны восьми. Если бы мы стали двигать нашу исходную точку не к центру фигуры, а к одной из ее плоскостей симметрии, то и все другие точки, эквивалентные исходной, стали бы передвигаться к соответствующим плоскостям симметрии. В момент совпадения исходной точки с плоскостью симметрии произойдет совмещение каждой из восьми точек с ее зеркальным изображением

*Кратность вырождения особенной точки совпадает с числом равных частей, на которые можно разделить конечную симметричную фигуру; то число называется, по Е. С. Федорову, *величиной симметрии* фигуры. Величина симметрии фигуры равна порядку группы симметрии, т. е. числу различных преобразований, которое входит в ее группу симметрии (см. гл. 10).

в соответствующей плоскости. Общее число эквивалентных точек при этом уменьшится ровно вдвое, кратность же каждой из них возрастет, именно — вместо единицы станет равной двум (рис. 45 *б*). Итак, *произведение кратности эквивалентных точек на их число всегда равно величине симметрии фигуры.* В асимметричной фигуре все точки особенные, однократные.

Точное определение понятия односторонней розетки

Теперь, когда мы рассмотрели все виды симметрии односторонних розеток и ознакомились на конкретных примерах с их свойствами, можно привести и точное определение понятия розетки. *Односторонней розеткой мы называем фигуру, в которой имеется хотя бы одна особенная полярная плоскость и хотя бы одна особенная точка.*

Этому определению отвечают все приводившиеся выше примеры фигур, если их рассматривать как плоские рисунки, выполненные на одной стороне бумаги, которая играет роль полярной плоскости. Рассмотрим для примера вертушку (рис. 15). Этот предмет имеет различные «лицо» и «изнанку». Все плоскости, параллельные плоскости рисунка, для данного предмета полярные и вместе с тем особенные, все точки на четверной оси особенные, и сама ось полярна. Полярность оси — следствие полярности особенных плоскостей, поэтому в определение односторонней розетки признак полярности оси симметрии не входит, тем более что осей (порядка выше единицы) у односторонних розеток может и не быть. Односторонним розеткам мы противопоставляем двусторонние розетки — фигуры с двусторонней особенной плоскостью (см. гл. 3).

Глава 3

Симметрия фигур с особенной точкой

Как показывает само заглавие, в этой части мы будем рассматривать симметрию таких фигур, которые имеют по меньшей мере одну особенную точку. Отменяя второе условие, которое было обязательным для розеток (иметь хотя бы одну особенную полярную плоскость), мы расширяем круг интересующих нас симметричных фигур, которые, кроме плоскостей и осей симметрии, вследствие отмены второго условия, могут иметь новые элементы симметрии: зеркально-поворотные оси и центр симметрии.

Зеркально-поворотная ось симметрии и ее частный случай — центр симметрии. Значение этих элементов для изучения симметрии кристаллов. Параллельность и антипараллельность ориентированных отрезков и плоскостей

Вырежем из картона какой-нибудь правильный многоугольник с четным числом сторон, например квадрат, впишем в него косо (рис. 46) другой квадрат и отогнем углы по очереди вниз и вверх, как это показано на рис. 47.

Из знакомых нам элементов симметрии новая фигура обладает только осью симметрии второго порядка 2, проходящей через центр квадрата перпендикулярно к его плоскости, так как фигура при полном обороте вокруг этой оси два раза приходит в совмещение сама с собой. Важно убедиться, что в фигуре нет плоскостей симметрии; в частности, плоскость внутреннего квадрата не есть плоскость симметрии, так как углы, отогнутые книзу, и углы, отогнутые кверху, не являются зеркальными изображениями друг друга в этой плоскости.

Если мы возьмем нашу фигуру в руки и будем сначала рассматривать ее, скажем, сверху, т. е. с какой-либо одной стороны квадрата,

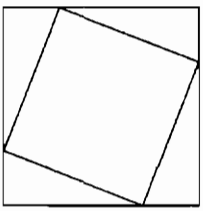


Рис. 46. Картонный квадрат для получения фигуры с симметрией $\bar{4}$

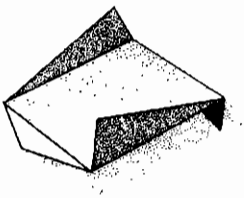


Рис. 47. Фигура, обладающая зеркально-поворотной осью симметрии четвертого порядка $\bar{4}$ (по Вульфу)

а затем снизу, т. е. с противоположной стороны квадрата, то мы не найдем никаких различий между «низом» и «верхом» фигуры. Это наводит на мысль о том, что в фигуре есть какой-то новый элемент симметрии, который совмещает* отогнутые кверху части фигуры с отогнутыми книзу и делает плоскость квадрата неполярной.

Этот новый элемент есть *зеркально-поворотная ось симметрии* $\bar{n}$, совпадающая по направлению с имеющейся в фигуре двойной осью**. Если мы повернем нашу фигуру вокруг этой оси на четверть оборота, то новое положение фигуры будет относиться к исходному так же, как предмет и его изображение в горизонтальном зеркале. При этом углы квадрата, отогнутые вверх, расположатся по отношению к фигуре в старом положении как раз над углами, отогнутыми вниз. Вспомогательная зеркальная плоскость, очевидно, располагается перпендикулярно к оси поворота и совпадает с плоскостью неотогнутой части квадрата. После отражения в этой плоскости повернутая фигура придет в положение, не отличающееся от исходного. Итак, в результате последовательно произведенных поворота на 90° и отражения фигура приходит в совмещение сама с собой. Порядок оси симметрии, которая приводит фигуру в совмещение с ней самой после поворота на угол $360°/n$ и последующего отражения в плоскости, перпендикулярной к оси, совпадает, очевидно, с порядком n простой поворотной оси. В нашем примере мы имеем дело с зеркально-поворотной осью четвертого порядка. Так как поочередное

*Совмещение, конечно, производится не элементом симметрии, а отвечающим ему симметрическим преобразованием. Это только сокращенный способ выражения; подобными выражениями мы будем пользоваться и впредь.

**Зеркально-поворотные оси обозначаются целыми числами, указывающими порядок оси, и тильдой наверху. Зеркально-поворотная ось четвертого порядка получает обозначение $\bar{4}$. Инверсионные оси симметрии (см. далее) обозначаются целыми числами с чертой наверху, например $\overline{4}$. Символы моментов и операций симметрии (кроме символа 1) набираются в этой книге курсивом.

отгибание углов можно осуществить только при четном их числе, то в разбираемом нами типе фигур возможными оказываются лишь четные зеркально-поворотные оси симметрии (порядка $2n$).

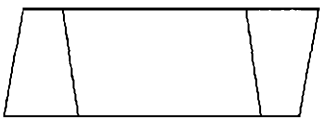


Рис. 48. Картонный параллелограмм для получения фигуры с центром симметрии $\bar{1}$

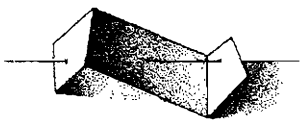


Рис. 49. Фигура с зеркально-поворотной осью второго порядка, эквивалентной центру симметрии $\tilde{2} = 1$ (по Вульфу)

Особый интерес представляет частный случай зеркально-поворотной оси, когда $n = 2$. Примером фигуры, обладающей только этим элементом симметрии, может служить параллелограмм с отогнутыми в разные стороны противолежащими краями (рис. 48 и 49). Замечательным свойством таких фигур является то, что все прямые, проходящие через точку пересечения поворотной оси и отражающей плоскости, пересекают фигуру в равноудаленных эквивалентных точках. Особенная точка фигуры называется ее *центром симметрии*. Наличие центра симметрии равносильно наличию зеркально-поворотной оси $\tilde{2}$, поэтому пишут: $\tilde{2} = \bar{1}$*. Сложную операцию поворота на 180° и последующего отражения в плоскости, перпендикулярной к оси поворота, можно заменить, следовательно, более простой операцией, называемой *инверсией* и заключающейся в замене всех точек фигуры, диаметрально противоположных по отношению к центру симметрии; в результате такой операции фигура приходит в совмещение сама с собой.

Возьмем для примера параллелепипед (рис. 50 *а*). Эта фигура обладает центром симметрии, так как каждая вершина фигуры имеет эквивалентную диаметрально противоположную вершину, каждая точка на любом ребре или грани имеет себе равную на противоположном ребре или на противоположной грани. Выберем на верхней грани параллелепипеда две произвольные точки, соединим их отрезком прямой и припишем ему определенное направление (рис. 50 *а*). Если (по условию) фигура обладает центром симметрии и стрелка на верхней грани направлена *вправо*, то на противоположной грани должна существовать равная и параллельная стрелка, идущая *влево*. Две параллельные прямые, у которых рав-

*$\bar{1}$ — международное обозначение соответствующего элемента и операции инверсии в центре симметрии.

ные направления смотрят в противоположные стороны $\rightleftarrows$, называются антипараллельными. Антипараллельность направленных прямых — одно из характерных свойств предметов, обладающих центром симметрии. Если тем или иным способом удается доказать, что два равных и противоположных отрезка какой-либо симметричной фигуры или предмета односторонне параллельны $\rightrightarrows$, то это означает, что фигура или предмет лишены центра симметрии.

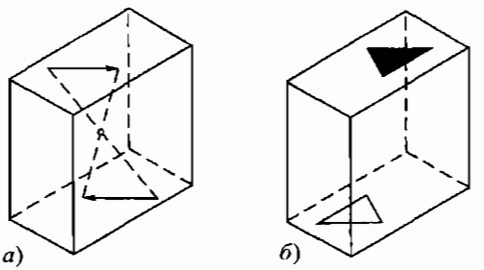


Рис. 50. Фигуры с центром симметрии.
а) — каждому произвольному отрезку прямой отвечает другой отрезок, равный и антипараллельный первому; *б*) — каждой плоскости или ее выделенной части (треугольнику) отвечает равная и антипараллельная плоскость (треугольник)

Возьмем теперь на грани нашего параллелепипеда, который представим себе сделанным из картона, три произвольные точки, определяющие некоторый треугольник. Выкрасим этот треугольник снаружи в черный цвет, оставив поверхность, обращенную внутрь фигуры, неокрашенной (рис. 50 *б*). Если фигура обладает центром симметрии, то на ее противоположной грани должен существовать равный треугольник, также окрашенный только снаружи. По аналогии с отрезками прямых назовем выкрашенные треугольники антипараллельными и распространим понятие антипараллельности также и на параллельные плоскости. Как видно из рис. 50 *б*, антипараллельные плоскости направлены равными сторонами в разные направления.

Нам останется еще рассмотреть свойства оси и в другом предельном случае, когда $n = \infty$. Исходя из определения зеркально-поворотной оси, мы должны принять, что фигура, обладающая осью $\widetilde{\infty}$, должна совмещаться сама с собой после поворота на бесконечно малый угол и отражения в плоскости, перпендикулярной к оси поворота. Из этого следует, что фигура может быть совмещена сама с собой только отражением в названной плоскости или что фигура имеет обыкновенную

плоскость симметрии. Это, в свою очередь, означает, что фигур, имеющих только ось $\widetilde{\infty}$ и не обладающих другими элементами симметрии, не существует. Можно также легко показать, что наличие оси $\widetilde{\infty}$ вызывает появление и центра симметрии, поэтому справедливо следующее условное равенство: $\widetilde{\infty} = \overline{\infty} = \infty : m$ (см. далее). В этом символе две точки означают, что ось бесконечного порядка ∞ перпендикулярна к плоскости m.

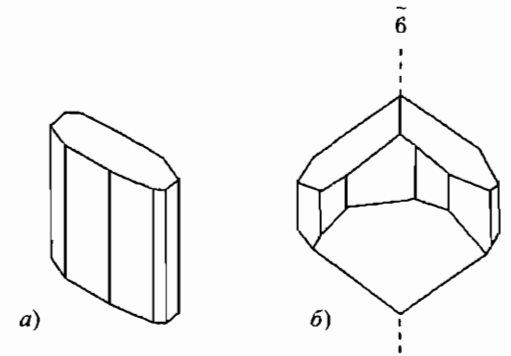


Рис. 51. Кристалл медного купороса (*а*) обладает только одним центром симметрии $\tilde{2} = \bar{1}$; **кристалл драгоценного камня фенакита** (*б*) обладает симметрией $\tilde{6}$

Типичным представителем фигур, симметрия которых исчерпывается наличием одного центра симметрии $\bar{1}$, служит косоугольный параллелепипед. В природе этот случай симметрии распространен, пожалуй, только среди кристаллов; сюда, между прочим, относятся и синие, великолепно вырастающие из раствора кристаллы медного купороса (рис. 51 *а*). Так как «косые» формы почти не встречаются ни в архитектуре, ни в скульптуре, то и симметрии $\bar{1}$ мы почти не находим в этих областях человеческой деятельности. В орнаментике эта симметрия также не находит применения хотя бы уже потому, что живопись имеет дело только с одной лицевой стороной плоскости, а центр симметрии требует двух (отраженно) равных ее сторон. Еще меньше распространены высшие представители разбираемого типа симметрии: $\tilde{4}$ и $\tilde{6}$. Интересно, что в больших учебниках физики середины XIX–начала XX в., в которых учению о симметрии отводилась иногда особая глава, почти всегда встречалась одна и та же ошибка; а именно: при перечислении элементов симметрии кристаллов пропускалась зеркально-пово-

ротная ось. Симметрия $\widetilde{4}$ была встречена у кристаллов алюмосиликата кальция $Ca_2Al_2{\cdot}SiO_7$; симметрией $\widetilde{6}$ обладают кристаллы драгоценного камня фенакита (рис. 51 *б*).

Ось симметрии с перпендикулярной плоскостью. Вращающиеся части машин. Кристаллы. Симметрия электрического вольтова столба и цилиндрического магнита

Этот тип симметрии характеризуется осью симметрии n и перпендикулярной к ней плокостью m. Первый член ряда при $n = 1$, очевидно, совпадает с разобранным ранее видом симметрии m; следующие члены ряда имеют обозначения $2 : m$, $3 : m$ и т. д. Симметрия $n : m$ наиболее естественна у предметов, предназначенных для вращения. В технике это требование встречается довольно часто; например, симметрию $n : m$ имеют наливные мельничные и маховые колеса (рис. 52). Обращаем внимание на различие между типами симметрии $n : m$ и n: в последнем

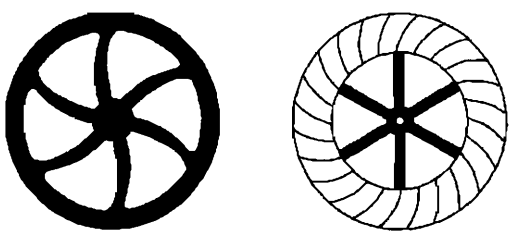


Рис. 52. Фигуры с симметрией $6 : m$

ось симметрии полярна, в первом — не полярна. Предметы, обладающие полярной осью, предназначены, например, для вращения вокруг осей, у которых направления «вперед» и «назад» существенно различны (гребные винты, турбины); у наливного же колеса и вообще у предметов, обладающих симметрией $n : m$, правая и левая стороны равны друг другу. Так как симметрия $n : m$ свойственна вращающимся пространственным предметам, у нее, очевидно, мало шансов найти себе применение в орнаменте, скульптуре в архитектуре. В кристаллах симметрия $6 : m$ встречается, например, у апатита (рис. 53). Шестерная ось симметрии и плоскость симметрии обозначены на рис. 53 штриховой линией.

Разбираемый тип симметрии переходит в предельном случае в тип $\infty : m$. В качестве иллюстрации фигуры с такой симметрией приведем

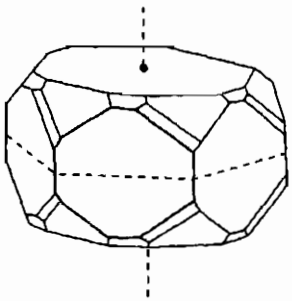


Рис. 53. Кристалл апатита с симметрией $6:m$. Ось и плоскость симметрии обозначены на рисунке пунктиром

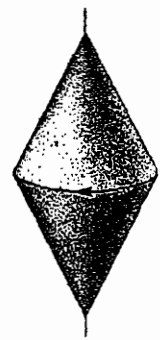


Рис. 54. Вращающийся биконус обладает симметрией $\infty:m$

биконус (рис. 54), вращающийся вокруг своей оси. Здесь уместно вспомнить, что мы говорили выше про связь симметрии с движением и временем. К нашим рассуждениям об этом предмете добавим еще следующее. На примере простого конуса с боковой поверхностью, обтянутой сукном с ворсом, причесанным в одну сторону, мы видели, что ось симметрии без пересекающихся в ней (продольных) плоскостей симметрии может осуществляться и при отсутствии вращения. С другой стороны, вращение вообще невозможно при существовании продольных плоскостей симметрии. Поэтому, если мы констатируем отсутствие плоскостей симметрии, параллельных оси, есть основание искать вращение.

Замечательной иллюстрацией сказанному служит цилиндрический магнит. Для определения истинной симметрии магнита полезно сравнить магнит с его электрическим аналогом — вольтовым столбом. Напомним, что вольтов столб представляет собой электрическую батарею, составленную из чередующихся кружков цинка, сукна, пропитанного слабой серной кислотой, и меди. Если обозначить составные части вольтова столба буквами A, B, C, их чередование в батарее можно изобразить рядом — $\ldots ABCABCABCA\ldots +$.

При чтении этого ряда слева направо и наоборот чередование букв оказывается различным. Если при обыкновенном чтении весь ряд может быть разложен на повторяющиеся группы ABC, то при обратном чтении такие группы выделить невозможно. Это указывает на то, что ось вольтова столба полярна. Полярность оси сказывается не только в чередовании составных частей столба, но и в разноименности электрических

зарядов по концам батареи. Полярность батареи сохраняется даже и тогда, когда на обоих ее концах окажутся одинаковые кружки, например цинковые; таким образом, полярность батареи зависит не от материала концов, а от характера чередования составных частей. Если ось вольтова столба полярна, то перпендикулярная к ней поперечная плоскость, проходящая через центр батареи, не является плоскостью симметрии, а центр батареи — не центр симметрии. Так как поворот батареи на любой угол вокруг ее оси не вызывает никаких изменений в свойствах, ось батареи можно принять за ось симметрии бесконечного порядка. Кроме того, все *продольные* плоскости, пересекающиеся между собой по оси, можно принять за плоскости симметрии, так как такое предположение не противоречит всему тому, что мы знаем о вольтовом столбе. Применяя принятый нами способ обозначения видов симметрии, можно сказать в итоге, что вольтов столб имеет симметрию $\infty \cdot m$.

С первого взгляда может показаться, что цилиндрический магнит имеет такую же симметрию, как и вольтов столб, поскольку и магнит имеет так называемые полюса. Посмотрим, в какой мере такое предположение соответствует действительности. Для выяснения истинной симметрии магнита можно использовать многочисленные явления электромагнетизма, магнетооптики и т. д. Мы ограничимся разбором только одного явления. Возьмем цилиндрический вольтов столб, полюса которого замкнуты проводником (рис. 55). Вдоль оси батареи течет электрический ток, направление которого можно условно принять от минуса к плюсу. Поднесем к батарее подвижной цилиндрический магнит. Опыт показывает, что при отсутствии мешающего трения цилиндр всегда повернется так, что его ось будет перпендикулярна к оси батареи; при этом если батарея поставлена вертикально и положительный ее конец направлен вверх, то южный полюс S цилиндрического магнита повернется влево по отношению к наблюдателю, для которого магнит представляется помещенным перед батареей. Словом, дело будет обстоять так, как это изображено на рис. 55. Если бы ось магнита была полярна, т. е. оба «полюса» магнита были бы не равны друг другу, они не могли бы расположиться зеркально по отношению к одной из плоскостей симметрии батареи, след которой изображен на рисунке штриховой линией*. Наблюдающееся расположение, скорее, может быть объяснено существованием в самом магните плоскости симметрии,

*Очевидно, вольтов столб с протекающим вдоль него током и магнит, ориентированный перпендикулярно, образуют единую физическую систему, для которой продольные плоскости являются плоскостями симметрии. Предположение об утрате этих плоскостей симметрии в результате взаимодействия магнита с током противоречит принципу сохранения стационарной симметрии для изолированных физических систем (см. гл. 12) и не подтверждается опытом.

перпендикулярной к его оси, совпадающей с осью симметрии ∞. Это предположение подтверждается всеми изученными до сих пор свойствами магнита.

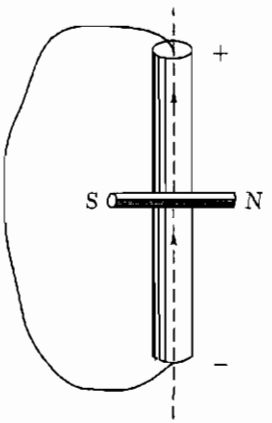


Рис. 55. Взаимодействие тока и магнита

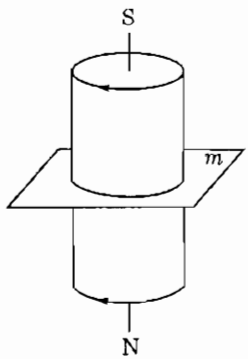


Рис. 56. Цилиндрический магнит обладает симметрией $\infty : m$.
S — южный полюс, N — северный полюс, m — плоскость симметрии магнита

Итак, цилиндрический магнит (рис. 56) имеет симметрию $\infty : m$, т.е. ту же симметрию, которая свойственна вращающемуся биконусу (рис. 54). Именно эта симметрия магнита и заставляет предположить в нем вращательные движения; гипотеза Ампера об элементарных электрических круговых токах, текущих и в северном, и в южном концах магнита *в одном и том же направлении*, служит моделью этого движения. Мы видим, что истинная симметрия магнита не дает ни малейшего повода называть зеркально-равные концы магнита полюсами. Полюсов в принятом значении этого слова у магнита нет; силовые магнитные линии не полярны, а аксиальны. Если же мы хотим продолжать пользоваться привычным термином, следует говорить о *полярных* и *аксиальных* полюсах.

Для читателей, знакомых со свойствами поляризованного света, заметим, что ту же симметрию $\infty : m$ в отношении оптических свойств приобретает и стеклянный стержень, помещенный внутрь соленоида, по которому пропускается сильный электрический ток. У поляризованного луча света, направленного вдоль оси стержня, поворачивается плоскость

поляризации: она закручивается вправо или влево в зависимости от направления тока. Связь симметрии с движением выступает еще отчетливее.

Комбинация главной оси с продольными и поперечными плоскостями симметрии. Снежинки, детали машин, предметы быта

Несмотря на большое количество элементов симметрии в этом типе, фигуры, принадлежащие к нему, кажутся нам особенно простыми. Можно, пожалуй, сказать, что простота их как раз и обусловлена высоким порядком группы симметрии. Мы не будем долго задерживаться на симметрии $m \cdot n : m$, так как ею обладают многие хорошо знакомые нам из элементарной геометрии фигуры: прямые призмы с правильными многоугольниками в основании, дипирамиды, биконус, цилиндр, эллипсоид и т. д. (рис. 57). Все эти фигуры характеризуются наличием особенной

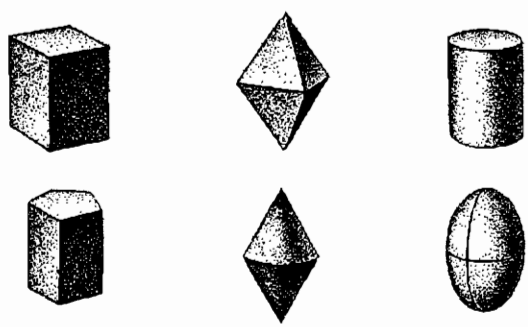


Рис. 57. Различные фигуры, обладающие симметрией $m \cdot n : m$. Квадратная призма $m \cdot 4 : m$, пентагональная призма $m \cdot 5 : m$, тригональная дипирамида $m \cdot 3 : m$, биконус, цилиндр и эллипсоид $m \cdot \infty : m$

(*главной*) оси порядка n; по ней пересекаются n продольных плоскостей симметрии. Еще одна (поперечная) плоскость симметрии расположена перпендикулярно к главной оси. От пересечения поперечной плоскости с продольными образуется n осей второго порядка, параллельных поперечной плоскости (рис. 58). У видов симметрии с главной осью четного порядка появляется центр симметрии, который лежит на пересечении

осей и перпендикулярных плоскостей симметрии. В других случаях центра нет.

Рассматриваемый тип симметрии наиболее целесообразен для таких предметов, у которых нет надобности различать верх и низ, правую и левую, лицевую и тыльную стороны. В природе он встречается в плодах, семенах, гальках камней и очень широко — в кристаллах. В частности, к этому типу симметрии принадлежат кристаллы льда — снежинки (рис. 59). Разнообразие их форм поистине безгранично: в атласе, составленном Бентли и Хамфри, содержится более тысячи фотографий снежинок. Эта симметрия широко применяется в массовых технических изделиях: ящиках, плитах, кирпичах, валах, трубах, гайках, коробках, монетах, карандашах и т. д.

Мы обозначили рассмотренный тип симметрии символом $m \cdot n : m$, указывающим на то, что в качестве порождающих элементов симметрии могут быть взяты главная ось n-го порядка, перпендикулярная к ней плоскость симметрии m (знак двоеточия) и одна параллельная плоскость симметрии (знак одной точки). В предельном случае, когда $n = \infty$, символ симметрии приобретает вид $m \cdot \infty : m2$.

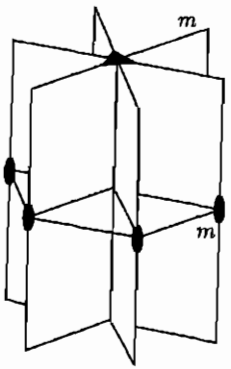


Рис. 58. Расположение элементов симметрии в виде симметрии $m \cdot 3 : m$.
По вертикальной оси третьего порядка, отмеченной черным треугольником, пересекаются три плоскости симметрии m; перпендикулярно к оси проходит горизонтальная плоскость симметрии m; линии пересечения горизонтальной и вертикальных плоскостей – оси симметрии второго порядка. На чертеже оси 2 отмечены маленькими черными двуугольниками

Комбинация главной оси с поперечными осями второго порядка. Скрученные формы. Вращение плоскости поляризации

Если в предыдущем типе симметрии удалить все плоскости и центр симметрии, то оставшиеся оси симметрии образуют новый тип симметрии $n : 2$. В отличие от предыдущего этот тип более труден для

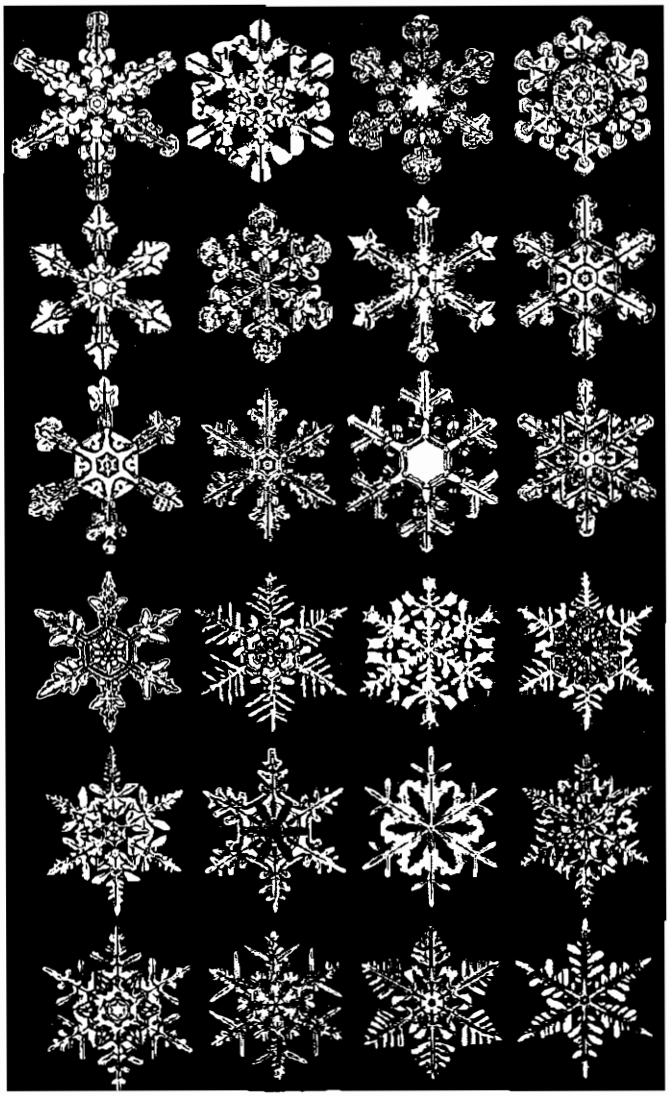


Рис. 59. Фотографии снежинок из атласа Бентли и Хамфри. Снежинки обладают симметрией $m \cdot 6 : m$

непосредственного восприятия; для сознательного употребления его на практике требуется некоторая подготовка. Этим, очевидно, объясняется меньшая распространенность нового типа симметрии по сравнению с только что рассмотренным. Удаление плоскостей и центра симметрии из фигур, изображенных на рис. 57, можно осуществить *скручиванием* фигур вокруг главной оси на небольшой угол. При таком скручивании главная ось остается на месте, так как поворот частей фигуры производится по условию именно вокруг главной оси. Боковые оси также остаются на своих местах, так как они лежат в средней (перпендикулярной к главной оси) плоскости, не испытывающей деформации. Скрученная на малый угол призма, потерявшая все свои плоскости симметрии, изображена на рис. 60. В зависимости от направления закручивания (вправо или влево) получаются правые или левые энантиоморфные фигуры. Симметрия этого типа нередко встречается среди кристаллов; классический ее пример мы находим в кварце (рис. 61). В кварце имеется главная ось симметрии третьего порядка и три перпендикулярные к ней оси второго порядка; последние образуют между собой углы в 60°. На рис. 61 главная ось расположена вертикально, а двойные (боковые) оси проходят через середины вертикальных ребер гексагональной (шестигранной) призмы. По расположению граней трапецоэдра, выкрашенных на рисунке в черный цвет, можно убедиться в том, что в кристалле нет ни вертикальных, ни горизонтальных плоскостей симметрии. Отсутствие плоскостей и центра симметрии допускает построение правых и левых форм кварца. В природе встречаются обе энантиоморфные модификации кварца. Если расположить кристалл кварца гранью R к наблюдателю, то в правом кварце грани трапецоэдра будут находиться справа, а в левом — слева от R. В соответствии с принятым нами способом обозначения симметрия кварца может быть отмечена символом 3 : 2, который указывает, что для полной характеристики данного вида симметрии достаточно задать одну ось симметрии третьего порядка и одну перпендикулярную к ней ось симметрии второго порядка; две другие двойные оси выводятся из первой поворотом вокруг тройной оси на угол 120°.

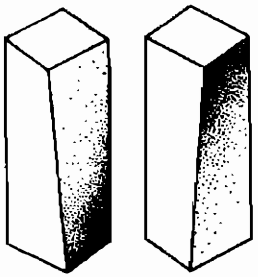


Рис. 60. Квадратная призма, потерявшая вследствие закручивания все вертикальные и горизонтальную плоскости симметрии и сохранившая только оси симметрии. Символ симметрии 4 : 2

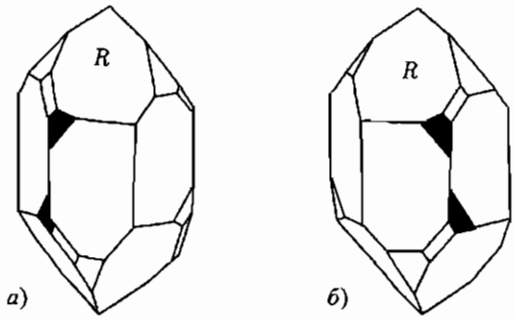


Рис. 61. Кристаллы левого (*а*) и правого (*б*) кварца, не обладающие плоскостями симметрии вследствие наличия маленьких (черных) граней трапецоэдра

Энантиоморфизм кварца находится в тесной связи со способностью кристаллов давать скрученные правые и левые формы (рис. 62) и с их внутренним атомным строением.

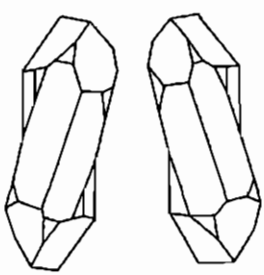


Рис. 62. Кварц, закрученный влево и вправо

Рассматриваемые виды симметрии мы обозначили общей формулой $n:2$, которая указывает, что любой конкретный вид вполне определяется генераторами: одной (главной) осью n-го порядка и перпендикулярной к ней двойной осью.

В технике симметрия $n:2$ встречается в тех же случаях, что и симметрия n. Если в символе $n:2$ положить n равным бесконечности, то мы будем иметь дело с предельным видом симметрии $\infty:2$. Такой симметрией обладает луч *линейно поляризованного света*, пропущенного через кварцевый цилиндр, вырезанный параллельно главной оси кристалла. Поляризованный луч «закручивается» в кристалле вправо (по левому винту) или влево (по правому винту) в зависимости от того, взят ли правый или левый кварц. Знак кручения, однако, остается без изменения при перемене направления луча на противоположное. В этом состоит главнейшее различие между вращением плоскости поляризации света в кристаллах и магнитным вращением, которое наблюдается в стекле, помещенном в магнитное поле (эффект Фарадея).

Другая комбинация главной оси с плоскостями и осями второго порядка

Этот тип симметрии определяется заданием зеркально-поворотной (главной) оси четного порядка $\widetilde{2n}$ (она же — простая поворотная ось порядка n) и системы n продольных пересекающихся по главной оси плоскостей симметрии. В качестве производных элементов появляется n поперечных двойных осей, которые делят углы между плоскостями симметрии пополам. Если принять главную ось $\widetilde{2n}$ и одну из плоскостей m за порождающие элементы симметрии, то общим символом всех видов симметрии рассматриваемого типа будет $\widetilde{2n} \cdot m$. В частном случае, когда главной является ось $\widetilde{6}$, расположение элементов симметрии иллюстрируется рис. 63*а*. На этом чертеже ось $\widetilde{6}$ условно обозначена контурным шестиугольником, а совпадающая с ней ось 3 — треугольником, закрашенным в черный цвет; двойные оси показаны в виде отрезков прямых, заканчивающихся черными «двуугольниками» (линзами). Рис. 63*а* изображает не фигуру с симметрией $\widetilde{6} \cdot m$, а элементы симметрии. Пример фигуры, обладающей симметрией $\widetilde{6} \cdot m$, приведен на рис. 63*б*. Это *ромбоэдр*, который может быть получен из куба растяжением или сжатием вдоль какой-либо одной из его телесных диагоналей. Хорошо известный двупреломляющий минерал исландский шпат образует кристаллы в форме ромбоэдра; при раскалывании их молотком они легко распадаются на спайные осколки с плоскими гранями, параллельными граням ромбоэдра. Такую же симметрию имеют кристаллы натриевой селитры, применяющиеся, как и исландский шпат, в оптике для изготовления николей (приборов для получения поляризованного света). В предметах искусства и бытовых изделиях тип симметрии $\widetilde{2n} \cdot m$, как и предыдущий, распространен значительно реже отчасти из-за слабого знакомства художников и конструкторов с теорией симметрии. В качестве примера назовем бумажные молочные пакеты, которые имеют форму удлиненных тетраэдров с симметрией $\widetilde{4} \cdot m$.

Правильные многогранники

Все предыдущие типы симметрии характеризовались наличием одной особенной (главной) оси симметрии. В фигурах, обладающих симметрией правильных многогранников, каждая ось имеет несколько равных себе осей, поэтому в данном случае нельзя говорить об особенных осях. Если из правильных многогранников исключить шар, который мы

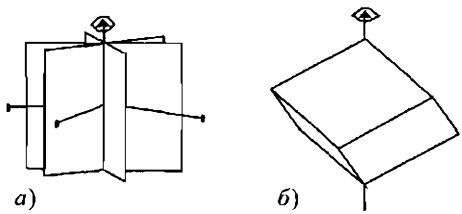


Рис. 63. Элементы симметрии вида $\tilde{6} \cdot m$ ($а$) и ромбоэдр, обладающий симметрией $\tilde{6} \cdot m$ ($б$)

будем рассматривать отдельно, то их симметрия может быть сведена к трем видам: $3/2 \cdot m = 3/\widetilde{4}$, $3/4 \cdot m = \widetilde{6}/4$; и $3/5 \cdot m = 3/\widetilde{10}$; косая черта, разделяющая символы осей, показывает, что оси пересекаются не под прямым углом. Каждой формуле отвечает бесчисленное множество фигур; простейшими из них будут сами правильные многогранники и производные многогранники с небольшим числом граней. На рис. 64 приведены все пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

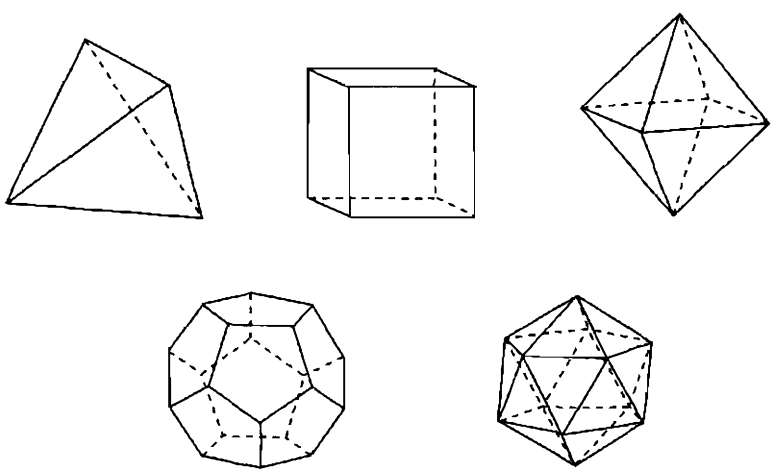


Рис. 64. Правильные многогранники: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр

Тетраэдр имеет симметрию $3/\widetilde{4}$. Производные двойные оси симметрии, совпадающие с осями $\widetilde{4}$, проходят через середины противоположных ребер тетраэдра. Тройные оси соединяют вершины тетраэдра с серединами противоположных граней. Каждая тройная ось образует равные углы с ближайшими осями $\widetilde{4}$ (2) (косая черта в символе). Плоскости симметрии проходят по двойным осям и ребрам тетраэдра (точка между m и 2). В существовании в тетраэдре зеркально-поворотных осей четвертого порядка легко убедиться, поворачивая тетраэдр вокруг двойных осей на четверть оборота и отражая фигуру в плоскости, перпендикулярной к оси поворота.

Куб имеет симметрию $\widetilde{6}/4$. Три (координатные) плоскости симметрии проходят через центр куба параллельно его граням, шесть плоскостей симметрии — через противолежащие ребра, рассекая грани куба по диагоналям. Четверные оси соединяют середины противоположных граней. Тройные оси (они же зеркально-поворотные оси $\widetilde{6}$) совпадают с диагоналями куба и соединяют его противоположные вершины. В символ $\widetilde{6}/4$ не входят плоскости, двойные оси, проходящие через середины противоположных ребер, и центр симметрии. Наличие центра симметрии обнаруживается тем, что в кубе каждой грани соответствует равная параллельная грань. В тетраэдре центра симметрии нет, так как для каждой его грани нет параллельной грани.

Октаэдр имеет ту же симметрию, что и куб. Антипараллельность граней октаэдра выступает очень отчетливо. Треугольные параллельные грани октаэдра направлены вершинами в разные стороны. В кубе параллельные грани одновременно и антипараллельны ($\rightleftarrows$). В октаэдре четверные оси проходят через вершины, тройные — через середины граней, двойные — через середины ребер.

Додекаэдр в икосаэдр имеют одинаковую симметрию $3/\widetilde{10}$. В додекаэдре пятерные, тройные и двойные оси проходят через середины граней, вершины и середины ребер.

Мы рассмотрели симметрию обыкновенных правильных многогранников, описываемых в элементарной геометрии. Наделяя грани правильных многогранников определенными физическими свойствами, легко показать, что число видов симметрии правильных многогранников может быть увеличено с трех до семи. Покажем, например, что может существовать пять кубов различной симметрии. Возьмем пять одинаковых картонных кубов и расчертим их грани пятью способами, как показано на рис. 65, так, чтобы в каждом кубе сохранились тройные оси; при этом все грани куба будут иметь одинаковую штриховку. Из рисунка видно, что первый куб после обработки сохранил свою симметрию $\widetilde{6}/4$; во втором все плоскости симметрии выпали, и куб приобрел симметрию $3/4$;

в третьем (символ $3/2 : m = \widetilde{6}/2$) четверные оси заменились двойными и выпали диагональные плоскости симметрии; четвертый куб приобрел симметрию тетраэдра $3/\widetilde{4}$; пятый потерял плоскости симметрии, а его четверные оси заменились двойными (символ симметрии 3/2).

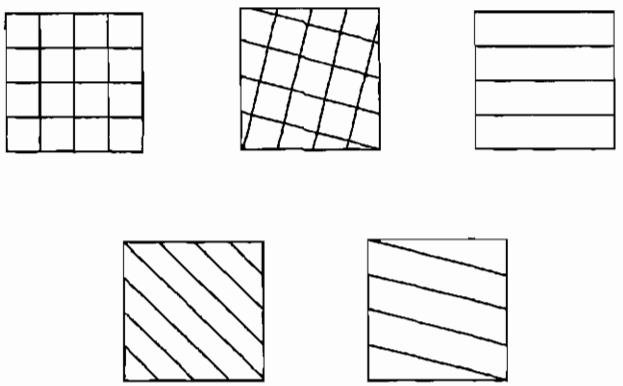


Рис. 65. Пять возможных штриховок граней куба, приводящих к фигурам различной симметрии

Обращаем внимание читателя на то, что во всех пяти случаях куб остался все же кубом, т.е. шестигранником с *равными* квадратными гранями. Можно доказать математически, что никакая другая раскраска или штриховка граней не приведет к новому виду симметрии, если только мы желаем оставить куб кубом.

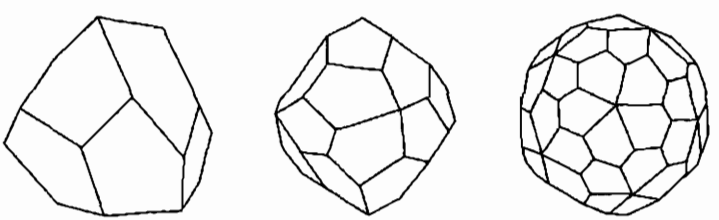


Рис. 66. Изоэдры (равногранники), обладающие осями симметрии правильных многогранников, но не имеющие плоскостей симметрии: пентагон-тритетраэдр, пентагон-триоктаэдр, пентагон-триикосаэдр

Если, например, выкрасить одну грань куба в черный цвет, а остальные грани — в белый, то куб, с физической точки зрения, перестанет быть кубом, так как теперь не все его грани *равны* друг другу. Если в качестве исходной фигуры взять октаэдр или тетраэдр, то никаких новых, сверх уже выведенных шести видов симметрии не получается. Однако из додекаэдра или икосаэдра удалением всех плоскостей симметрии можно получить еще один вид симметрии 3/5. Итак, правильные многогранники могут иметь семь видов симметрии:

$$\widetilde{6}/4;\ 3/\widetilde{4};\ \widetilde{6}/2;\ 3/4;\ 3/2;\ 3/\widetilde{10};\ 3/5.$$

Симметрию правильных многогранников могут иметь не только правильные многогранники, но в другие фигуры. На рис. 66 показаны *изоэдры* (равногранники), обладающие симметрией правильных многогранников. Первый изоэдр имеет симметрию 3/2; второй — 3/4, третий — 3/5.

Два вида симметрия шара. Оптически вращающие жидкости. Сферолиты

Всякий, кто изучал геометрию, несомненно, испытывал наибольшие трудности при необходимости доказывать то, что и без доказательства казалось совершенно ясным. Так именно и обстоит дело при рассмотрении симметрии шара. Шар — одна из самых простых фигур — обладает наиболее сложной симметрией. Обыкновенный шар, сделанный из сплошного изотропного вещества, т. е. такого материала, в котором все направления друг другу равны, имеет бесконечное количество осей симметрии бесконечного порядка, проходящих через центр по всем диаметрам шара. В каждой из таких осей пересекается бесконечное множество плоскостей симметрии. С центром шара совпадает центр симметрии. Кроме того, в шаре содержится, уже вследствие наличия перечисленных элементов симметрии, бесконечное множество осей симметрии любого порядка — простых и зеркально-поворотных. Чтобы получить полный комплекс элементов симметрии шара, достаточно взять в качестве порождающих элементов две бесконечные оси под любым углом и одну плоскость симметрии $\infty/\infty \cdot m$.

Центр шара есть его особенная точка. Каждой произвольной точке, взятой внутри или на поверхности шара, отвечает бесконечное множество эквивалентных точек, находящихся на одинаковых расстояниях от центра. Для конечных групп порядок группы, т. е. число входящих в нее различных преобразований симметрии, определялся произведением чис-

ла эквивалентных точек на их кратность (в каждой симметричной системе). Для определения соответствующих величин в случае бесконечных групп (их сводку см. на рис. 74) придется использовать более сложные методы из теории групп и теории множеств (см. гл. 10 и указатель символов).

Для бесконечных групп понятие порядка заменяется понятием мощности. Если бесконечная группа G разложена в ряд по смежным классам по бесконечной подгруппе H, $G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \ldots \cup Hg_3$, то мощность G равна мощности H, умноженной на s. Если группа представлена в виде произведения сомножителей, ее порядок (мощность) равен произведению порядков сомножителей. Предельные группы Кюри расщепляются в прямые $\otimes$ и полупрямые $\circledS$ произведения следующим образом: $\infty/m = \infty \otimes \overline{1}$, $\infty 22 = \infty \circledS 2$, $\infty/mmm = (\infty \otimes \overline{1}) \circledS m$, $\infty\infty m = \infty\infty \circledS m$ (подробнее об этом см. гл. 10). Обозначая знаком $\#$, стоящим перед символом группы, ее мощность, получим $\#\infty/m = 2\infty$, $\#\infty mm = 2\infty$, $\#\infty 22 = 2\infty$, $\#\infty/mmm = 4\infty$, $\#\infty\infty m = 2(\#\infty\infty)$, где через ∞ обозначена мощность одномерного континуума эквивалентных точек, образующих круговое сечение конуса, реализующего группу ∞ (см. рис. 74 *д*). Все точки этого сечения в группе ∞ однократны, но в группе ∞mm (рис. 74 *а*) они уже двукратны, так как через каждую из этих точек окружности проходит плоскость симметрии m. Аналогичным образом находим, что точки средних круговых сечений цилиндров (рис. 74 *в*, *г*, *б*) двукратны в группах ∞/m и $\infty 22$ и четырехкратны в группе ∞/mmm, так так каждая из них сохраняет свое положение под действием преобразований групп m, 2 или $m2$. В группах $\infty\infty$ и $\infty\infty m$ эквивалентные точки образуют двумерный сферический континуум мощности ∞^2; произведение «числа» этих точек на их кратность ∞ и 2∞ определяет мощность интересующих нас групп: $\#\infty\infty = \infty^2 \cdot \infty = \infty^3$, $\#\infty\infty m = \infty^2 \cdot 2\infty = 2\infty^3$.

Мы уже знаем, что каждому виду симметрии отвечает вообще бесконечное множество самых разнообразных фигур. Шаровая симметрия в этом отношении является исключением, так как виду $\infty/\infty \cdot m$ соответствует только шар, или, вернее, система концентрических шаров произвольного радиуса.

На примере куба мы видели, что число видов симметрии правильных многогранников увеличивается с трех до семи, если, наряду с геометрическим равенством (конгруэнтность, зеркальность), принимается во внимание и физическое равенство граней фигур. По аналогии можно ожидать, что и шар, т. е. фигура, обладающая равными по всем направлениям радиусами, может иметь несколько видов симметрии. Чтобы составить себе представление о симметрии шаров, вообразим, что поверхности трех мячей покрыты асимметричными чешуйками, имеющими форму

запятых (рис. 67). Чешуйки распределены совершенно произвольно, но с равномерной плотностью. На поверхности первого шара содержится поровну правых и левых запятых; чешуйки второго шара состоят только из правых запятых; третьего — только из левых. Если мы положим первый мяч на руку и будем вращать его сначала вправо, а затем влево, то никакой разницы в силе трения при правом и левом вращении мы не заметим, так как в обоих случаях число чешуек, которые будут особенно сильно царапать руку, одинаково. Иначе будет обстоять дело со вторым и третьим шарами: для них трение при вращении по часовой стрелке и обратно будет различным. Читатель может возразить нам, что наши чешуйчатые мячи не могут считаться настоящими шарами, и потому все то, что верно для мячей, не обязательно должно быть верным для идеальных шаров. На это мы ответим еще раз, что «настоящими» шарами могут быть только материальные шары, которые лишь с известной точностью удовлетворяют тем или иным идеальным закономерностям; кроме того, и идеальные шары могут быть чешуйчатыми, если чешуйки бесконечно малы.

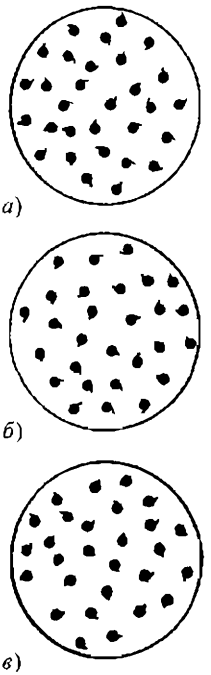


Рис. 67. Три шара видов симметрии $\infty/\infty \cdot m$ и ∞/∞.
а — с плоскостями симметрии; *б*, *в* — без плоскостей (правая и левая модификации); запятые можно заменить безразмерными окружностями, вращающимися в направлениях, заданных «хвостами» запятых (ср. рис. 181)

Другим примером шаров без плоскостей симметрии могут служить стеклянные прозрачные сферы, заполненные водным раствором какого-либо органического вещества, вращающего плоскость поляризации лучей света вправо (сахар) или влево. При пропускании поляризованного света через такие шары происходит закручивание лучей вправо или влево в зависимости от свойств растворенного вещества.

Итак, мы видим, что теоретически и практически могут существовать два вида шаровой симметрии. В первом виде ($\infty/\infty \cdot m$) содержится бесконечное множество плоскостей симметрии, бесконечное множество осей симметрии бесконечного порядка и центр симметрии; во втором виде ∞/∞ отсутствуют плоскости и центр симметрии. Как и всякий иной

вид симметрии, в котором нет никаких других элементов симметрии, кроме осей, второй вид шаровой симметрии ∞/∞ может быть реализован в двух энантиоморфных модификациях. *Правый* и *левый шары* являются, следовательно, энантиоморфными модификациями фигур, обладающих симметрией ∞/∞. Заметим, что все шары *изотропны*, так как у всякого шара все радиусы равны между собой.

Шары различной симметрии встречаются в природе в форме так называемых сферолитов. Возникновение и рост сферолитов можно легко наблюдать под микроскопом в искусственных препаратах различных веществ, которые для этой цели расплавляются в небольшом количестве между предметным и покровным стеклами; при охлаждении препарата часто возникают сферолиты (рис. 68). Особенно хорошо удается опыт с серой. Сферолиты, или сферокристаллы серы, состоят из радиальных тонких, может быть, молекулярно-тонких, волокон. Если наблюдать сферолиты в поляризованном свете при скрещенных николях, то всегда виден черный крест, который сохраняет свою неподвижность и при вращении столика микроскопа. Это оптическое явление служит доказательством радиальной структуры сферокристаллов. Бывают сферолиты, у которых волокна закручены; при наблюдении их в поляризованном свете можно видеть чередующуюся концентрическими слоями интерференционную окраску.

В зависимости от характера кручения, очевидно, можно различать правые и левые сферолиты; сферолиты с незакрученными волокнами обладают симметрией обыкновенного шара.

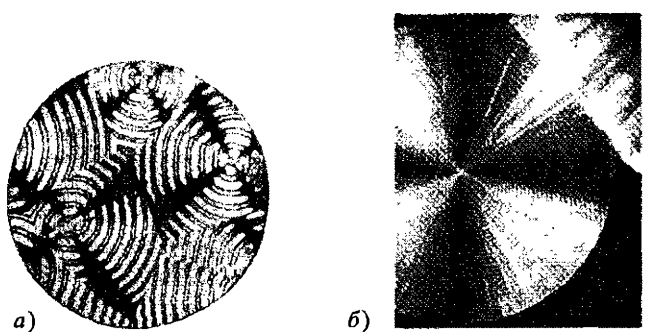


Рис. 68. Сферолиты малонамида с закрученными радиальными волокнами (по Попову) (*а*) и сферолиты трифенилметана (*б*).
Идеальная симметрия этих поликристаллических образований ∞/∞ и $\infty/\infty \cdot m$ соответственно

Полный обзор видов симметрии фигур о особенной точкой. Сферические и стереографические проекции элементов симметрии

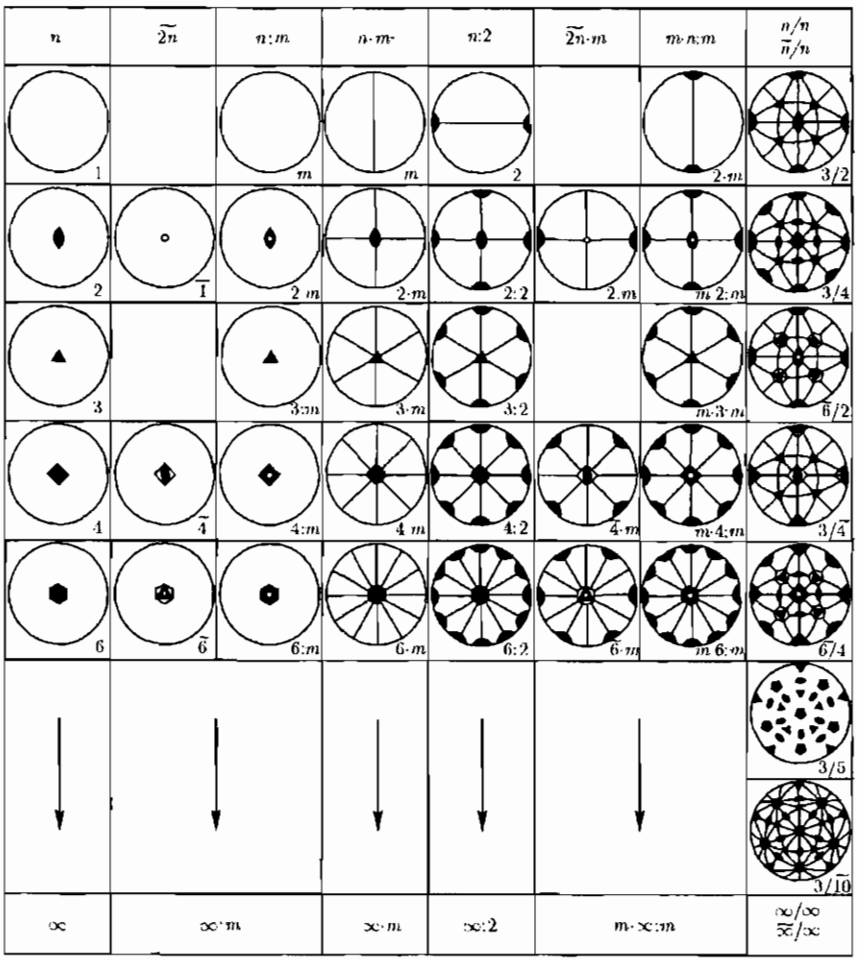
Мы рассмотрели все виды симметрии фигур с особенной точкой. Если фигура обладает центром симметрии, то он должен совпадать с особенной точкой. Иначе особенная точка имела бы эквивалентную (диаметрально противоположную по отношению к центру симметрии) точку и потому не была бы особенной. Если фигура обладает осями и плоскостями симметрии, то они должны пересекаться в особенной точке, так как в противном случае особенная точка была бы повторена элементами симметрии и перестала бы быть особенной. Если принять особенную точку за центр шара, то оси симметрии будут пересекать его поверхность в двух диаметрально противоположных точках. Плоскости симметрии будут пересекать поверхность шара по дугам больших кругов (меридианам), а центр симметрии всегда будет совпадать с центром шара. Если условиться обозначать точки пересечения простых поворотных осей с поверхностью шара маленькими черными многоугольниками с числом сторон, равным порядку оси*, толстыми дугами — линии пересечения плоскостей симметрии, а белым маленьким кружком — центр симметрии, то полученное таким образом изображение образует сферическую проекцию элементов симметрии фигуры. От объемной сферической проекции удобно перейти, в свою очередь, к плоской стереографической проекции, проектируя на экваториальную плоскость шара, выбираемую по определенным правилам, выходы элементов симметрии на сферу. Такое проектирование осуществляется, как в картографии, лучами, проведенными из северного или южного полюса к данной точке на сфере. Точка пересечения луча с экваториальной плоскостью, очевидно, и будет служить стереографическим изображением (проекцией) соответствующей точки на сфере, а дуга или прямая линия — изображением соответствующей плоскости симметрии.

Стереографические проекции элементов симметрии дают возможность непосредственно из чертежа определить, сколько и каких элементов симметрии содержится в том или ином виде симметрии и как эти элементы симметрии расположены относительно друг друга (рис. 69). Во всяком случае, такие диаграммы имеют преимущество наглядности перед символами, которыми мы пользовались для обозначения видов симметрии и которые вновь воспроизводятся в соответствующих клетках рис. 69. Сопоставляя формулы с изображениями, внимательный

*Двойные оси симметрии обозначаются «двуугольниками», имеющими форму линзы, зеркально-поворотные оси — белыми контурными многоугольниками.

читатель еще раз обнаружит, что в формулу вида симметрии входят символы не всех, а одних лишь *порождающих* элементов симметрии (см. стр. 38), достаточных для того, чтобы, применяя симметрические преобразования, найти все другие (*производные*) элементы симметрии данного вида. На основании соотношений эквивалентности

$$\widetilde{2} = \overline{1}, \quad \widetilde{2} \cdot m = 2 : m, \quad 3/4 \cdot m = \widetilde{6}/4, \quad 3/5 \cdot m = 3/\widetilde{10},$$
$$3/2 : m = \widetilde{6}/2, \quad 3/2 \cdot m = 3/\widetilde{4}$$



(последние два случая различаются ориентировкой плоскостей m по отношению к осям 3) шесть видов симметрии и один предельный вид $\infty/\infty \cdot m = \widetilde{\infty}/\infty$ представлены в таблице правыми (более употребительными) формулами. По формальным соображениям, четыре простейших вида симметрии, имеющих по два равноправных обозначения (см. рис. 70), $2 = 1 : 2, 1 : m = 1 \cdot m, 2 : m = \widetilde{2} \cdot m, 2 \cdot m = m \cdot 1 : m$ повторены на рис. 69 дважды соответственно двум различным ориентировкам элементов симметрии по отношению к плоскости чертежа. Эти формальные соображения играют большую роль при рассмотрении видов симметрии односторонних и двусторонних розеток, о чем будет идти речь в следующем параграфе.

Все виды симметрии фигур с особенными точками в кристаллографии называют видами симметрии конечных фигур, а соответствующие наборы симметрических преобразований — точечными группами. Рис. 69 показывает, что все эти виды укладываются в таблице в восемь столбцов. Каждый из первых семи столбцов представляет собой бесконечный ряд возрастающей симметрии, заканчивающийся предель-

---

Рис. 69. Стереографические проекции и символы видов симметрии фигур *о особенными точками*.

Тонкие окружности, совпадающие с плоскостью чертежа, ограничивают экваториальные плоскости стереографических проекций (см. текст). Толстые окружности, совпадающие с плоскостью чертежа, изображают горизонтальные плоскости симметрии. Толстые меридиональные дуги являются проекциями наклонных плоскостей симметрии, толстые прямые — проекциями вертикальных плоскостей симметрии. Черные маленькие двуугольники, треугольники, четырехугольники и т. д. изображают на проекциях выходы осей симметрии второго, третьего, четвертого и т. д. порядков. Если черный многоугольник помещен в центр круга, ему отвечает вертикальная ось симметрии. Если он помещен в другое место, ему отвечает наклонная ось. Горизонтальные оси пересекаются с экваториальным кругом проекции в двух точках. Белые контурные многоугольники изображают зеркально-поворотные оси четного порядка. В символах симметрии n — поворотная ось порядка n; $\widetilde{2n}$ — зеркально-поворотная ось порядка $2n$; m — плоскость симметрии; $\widetilde{1}$ — центр симметрии; ∞ и $\widetilde{\infty}$ — простая и зеркальная оси бесконечного порядка. Знаки двоеточия, точки и наклонной черты указывают на взаимную ориентировку (перпендикулярную, параллельную и наклонную) соответствующих элементов симметрии. Виды симметрии с зеркально-поворотными осями нечетного порядка располагаются в третьем столбце таблицы (графические символы этих осей на проекциях не изображены). Подробнее о построении стереографических проекций см. кристаллографические руководства

ным видом симметрии, обозначенным внизу соответствующим символом. Интересно отметить, что предельные виды для второго и третьего столбцов, а также для шестого и седьмого оказываются одинаковыми. В восьмом столбце таблицы приведены проекции элементов симметрии правильных многогранников и указаны символы двух предельных видов шаровой симметрии.

Два типа фигур с особенной точкой. Односторонние и двусторонние розетки

Все фигуры с особенной точкой могут быть разделены на две категории: фигуры без особенных плоскостей и фигуры с особенными плоскостями. Куб, икосаэдр, шар принадлежат к фигурам первой категории; любой плоскости, проведенной в этих фигурах, найдется другая равная; особенных плоскостей в этих фигурах нет. На рис. 69 отвечающие фигурам этой категории виды симметрии изображены в восьмом столбце. Фигуры, принадлежащие ко второй категории, мы называем *розетками*. Итак, розетки — это фигуры с особенной точкой и особенной плоскостью. Если особенная плоскость полярна, то розетка называется односторонней. Если особенная плоскость неполярна, то мы имеем дело с двусторонней розеткой. Цветные витражи, колеса, кольца, платки с одинаковым рисунком с обеих сторон — все это примеры двусторонних розеток. При рассматривании розеток мы проектируем их мысленно на особенную плоскость, принимаемую за *основную*, или картинную плоскость. Возможны случаи (виды симметрии 2; m; $2 \cdot m$), когда розетка имеет и полярные, и неполярные особенные плоскости. Тогда вопрос о причислении розеток к односторонним или двусторонним решается выбором картинной плоскости: фигура коня в профиль — двусторонняя розетка; та же фигура головой вперед — односторонняя розетка. Виды симметрии односторонних розеток показаны на рис. 69 в первом и четвертом столбцах, виды двусторонних розеток — во втором, третьем, пятом, шестом и седьмом столбцах.

Сопоставление симметрии кристаллов и организмов. Координатные и бескоординатные обозначения видов симметрии

К интересным результатам приводит сопоставление симметрии кристаллов и организмов. Выше мы говорили, что в кристаллах, если речь идет только об их естественной внешней форме, из бесконечного множе-

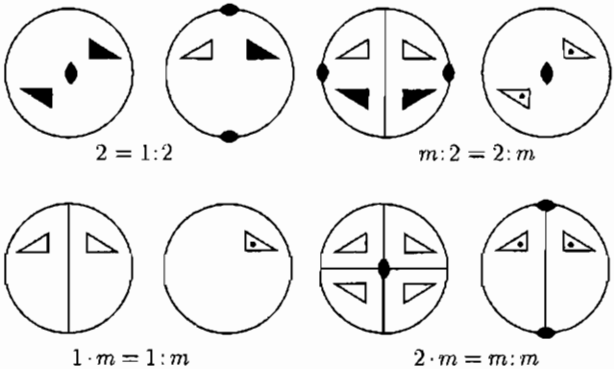


Рис. 70. Четыре простейших вида симметрии розеток изображены на стереографических проекциях в двух различных ориентировках.
Черные и белые треугольники, повторяемые элементами симметрии, изображают асимметричные точки. Черные треугольники обращены лицевой стороной к наблюдателю; у белых треугольников лицевая (черная) сторона смотрит вниз. В треугольниках, отмеченных точкой, лицо не отличается от изнанки. Три проекции описывают симметрию односторонних розеток, остальные — симметрию двусторонних розеток

ства осей симметрии могут существовать только оси симметрии порядка 1, 2, 3, 4 и 6*. В соответствии с этим требованием из бесчисленного множества видов симметрии фигур с особенной точкой для кристаллов оказываются возможными только 32 вида симметрии, символы которых представлены в табл. 1 в том же порядке, который был принят на рис. 69.

Применяемые нами обозначения видов симметрии можно было бы назвать «бескоординатными», поскольку в формуле вида указывается лишь взаимная ориентировка порождающих элементов (осей и плоскостей симметрии). Если ввести систему кристаллографических осей a, b, c (косоугольных — для одних видов и прямоугольных — для других) и связать эти оси определенным образом с элементами симметрии кристалла, то символ вида симметрии можно будет записать и в «координатной» форме, указав ориентировку осей и плоскостей симметрии по отношению к осям координат, а также к их биссектрисам, если оси координат симметрически эквивалентны. В этом случае мы приходим к си-

*Ювелирным изделиям из кристаллов искусственной огранкой может быть придана симметрия с осями 5, 7, 8 и т. д. Такая симметрия не согласуется с внутренней атомной структурой кристаллов и оказывается бесполезной при изучении их физических свойств

Таблица 1. Сопоставление бескоординатных и координатных (международных) обозначений 32 видов симметрии кристаллов

n	$\widetilde{2n}$	$n:m$	$n\cdot m$	$n:2$	$\widetilde{2n}\cdot m$	$m\cdot n:m$	n/n или $\widetilde{n}/n$
1		m	(m)	(2)		$(2\cdot m)$	3/2
1		m	(m)	(2)		$(mm2)$	23
2	$\widetilde{2}$	$2:m$	$2\cdot m$	2:2	$(2:m)$	$m\cdot 2:m$	3/4
2	$\bar{1}$	$\frac{2}{m}$	$mm2$	222	$(\frac{2}{m})$	$\frac{2}{m}\,\frac{2}{m}\,\frac{2}{m}$	432
3		$3:m$	$3\cdot m$	3:2		$m\cdot 3:m$	$\widetilde{6}/2$
3		$\bar{6}$	$3m$	32		$\bar{6}m2$	$m\bar{3}$
4	$\widetilde{4}$	$4:m$	$4\cdot m$	4:2	$\widetilde{4}\cdot m$	$m\cdot 4:m$	$3/\widetilde{4}$
4	$\bar{4}$	$\frac{4}{m}$	$4mm$	422	$\bar{4}2m$	$\frac{4}{m}\,\frac{2}{m}\,\frac{2}{m}$	$\bar{4}3m$
6	$\widetilde{6}$	$6:m$	$6\cdot m$	$6\cdot 2$	$\widetilde{6}\cdot m$	$m\cdot 6:m$	$\widetilde{6}/4$
6	$\bar{3}$	$\frac{6}{m}$	$6mm$	622	$\bar{3}m$	$\frac{6}{m}\,\frac{2}{m}\,\frac{2}{m}$	$m\bar{3}m$

Примечание. Расположение видов в таблице соответствует рис. 69. Бескоординатные и координатные обозначения видов записываются, соответственно, в верхней и нижней строчках в каждой клетке. Повторяющиеся формулы заключены в скобки.

стеме так называемых международных обозначений, в которой зеркальные оси симметрии заменены эквивалентными им инверсионными осями, а из разделительных знаков сохранен лишь знак черты, указывающий на перпендикулярное положение оси по отношению к плоскости симметрии. Сопоставляя международные обозначения со стереографическими проекциями видов симметрии (см. рис. 69), можно установить, каким образом ориентированы оси a, b, c по отношению к чертежу и с какими именно осями или биссектрисами совпадают оси симметрии или нормали к плоскостям симметрии, которые входят в символ вида симметрии (подробнее об установке осей см. рис. 149 и 211, а также специальные кристаллографические руководства) (см. также таблицу 20, стр. 324).

Если речь идет не о внешней форме, а о каких-либо других свойствах кристаллов, например об упругости, электропроводности, пироэлектричестве и т. д., то число видов симметрии кристаллов в отношении этих свойств будет вообще иным. Так, симметрия упругих свойств кристаллов исчерпывается всего восемью видами симметрии, симметрия пироэлектрических свойств — десятью и т. д. Для некоторых свойств кристаллов большую роль играют виды предельной симметрии, символы которых приведены на рис. 69 в последней строке. Например, каменная соль по оптическим свойствам принадлежит к виду шаровой симметрии $\widetilde{\infty}/\infty$, а по внешней форме — к виду $\widetilde{6}/4$. Однако до сих пор не удалось найти таких свойств кристаллов, в симметрию которых входили бы оси

симметрии пятого, седьмого и иного порядка, кроме предусмотренных рядом 1, 2, 3, 4, 6, ∞. Теоретические соображения, развиваемые кристаллографией, учат, что такие свойства кристаллов, по-видимому, и не могут существовать.

Что касается организмов, то для них еще не имеется теории, которая могла бы ответить на вопрос, какие виды симметрии совместимы и какие не совместимы с существованием живого вещества*. В то же время нельзя еще раз не обратить внимания на тот в высшей степени замечательный факт, что у представителей живой природы встречаются как раз те виды симметрии (с осями пятого порядка), которые невозможны для затвердевшего окристаллизованного «неживого» вещества.

Калейдоскопы Федорова для воспроизведения фигур с особенной точкой

Калейдоскопы, с которыми мы уже имели дело, состояли из двух зеркал и предназначались для наблюдения односторонних розеток с плоскостями симметрии. Калейдоскопы Федорова составляются из трех зеркал, образующих трехгранный угол; они позволяют воспроизводить большее число видов симметрии фигур с особенной точкой. Зеркалам обыкновенно придают форму секторов круга (см. рис. 71). В собранном виде калейдоскоп имеет вид трехгранной воронки; раструб ее ограничен тремя дугами окружности, образующими сферический треугольник. Так как зеркала калейдоскопов играют роль плоскостей симметрии, то в основу расчета калейдоскопов могут быть положены только такие сферические треугольники, которые на проекциях (рис. 69) образованы следами плоскостей симметрии (толстые прямые линии или дуги меридианов и кругов). Сюда относятся все сферические треугольники с двумя прямыми углами, представленные на рис. 69 в седьмом столбце (вид симметрии $2 \cdot m$ исключается, так как плоскости симметрии в нем образуют не треугольник, а двуугольник). Образец такого калейдоскопа показан на рис. 71. Кроме этих однотипных калейдоскопов, существуют еще только три калейдоскопа, определяемые сферическими треугольниками видов симметрии $3/\widetilde{4}$,

плоские углы граней калейдоскопа
55°, 55°, 70° (для вида $3/\widetilde{4}$),
55°, 45°, 35° (для вида $\widetilde{6}/4$),
37°, 32°, 21° (для вида $3/\widetilde{10}$),

*Можно лишь сказать, что и в этом случае особенности симметрии связаны с особенностями молекулярной структуры живого вещества (см. далее стр. 382 и след.) и симметрией среды.

$\widetilde{6}/4$ и $3/\widetilde{10}$. Длины сторон соответствующих треугольников, измеряемые округленно в градусах, приведены в табличке на полях страницы: Такими же должны быть и плоские углы граней калейдоскопов. Всякие другие комбинации зеркал приведут к «размазыванию» фигур вследствие их наложения друг на друга.

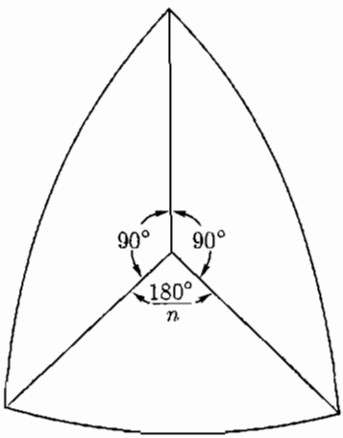


Рис. 71. Калейдоскоп Федорова (зеркальный трехгранник). Если поместить внутри калейдоскопа какой-нибудь предмет, то вместе с отражениями его в зеркалах получается симметричная фигура с особенной точкой

Если внутрь трехгранного угла калейдоскопа поместить какой-нибудь предмет, то мы увидим симметричную фигуру, составленную из этого предмета и его изображений в зеркалах. Для получения многогранников Е. С. Федоров рекомендует наливать в калейдоскоп ртуть; можно также вкладывать туда картонные треугольники, надлежащим образом вырезанные, или кусочки проволоки, приклеивая их концы к поверхности зеркал пластилином. При пользовании жидкостью можно, наклоняя калейдоскоп, изменять форму многогранников и заставлять их переходить друг в друга. Например, с помощью калейдоскопа с углами 55, 45 и 35° можно воспроизвести семь многогранников: куб (гексаэдр), октаэдр, ромбододекаэдр (двенадцатигранник, грани которого — ромбы), тетрагексаэдр (пирамидальный куб), тригонтриоктаэдр (пирамидальный октаэдр с треугольными гранями), тетрагонтриоктаэдр (то же, но с четырехугольными гранями), гексоктаэдр (сорокавосьмигранник). При помощи кусочков проволоки очень удобно воспроизводить многогранники с входящими углами или койлоэдры, имеющие вид очень сложных пространственных звезд. Калейдоскопы дают также возможность воспроизводить симметричные системы эквивалентных точек; в качестве исходной «точки», размножаемой в плоскостях симметрии, удобно взять лампочку от карманного электрического фонаря.

Симметричные системы эквивалентных точек. Молекулы

Возьмем на рис. 69 вид симметрии $\widetilde{6} \cdot m$ и мысленно перейдем от стереографической (плоской) к сферической проекции его элемен-

тов симметрии, представляя, что все они (кроме центра) нанесены на поверхность шара (рис. 72). Отметим маленьким кружочком произвольную точку на поверхности верхней, обращенной к зрителю, половины шара. Отражая точку в вертикальных плоскостях симметрии, легко получить симметричную совокупность точек, также изображенных кружочками и находящихся на верхней половине шара. Повернем теперь шар на пол-оборота вокруг одной из двойных осей симметрии, лежащих в плоскости чертежа. В результате все выведенные нами точки перейдут на нижнюю половину шара и займут новые положения, отмеченные крестиками. Легко проверить, что повороты вокруг других осей не создадут других эквивалентных точек сверх двенадцати, изображенных на рис. 72 *а* кружками и крестиками. Если перемещать исходную точку по поверхности шара, то будут двигаться и все остальные точки. Число их останется неизменным до тех пор, пока перемещаемая точка не попадет на один из элементов симметрии. Если она попадет на плоскость симметрии, общее число эквивалентных точек сократится вдвое (рис. 72 *б*). Если она будет находиться на оси второго порядка (рис. 72 *в*), общее число точек будет также вдвое меньше первоначального числа. Наконец, если исходная точка окажется одновременно на оси третьего порядка и на трех плоскостях симметрии (рис. 72 *а*), общее число эквивалентных точек уменьшится в шесть раз.

До сих пор мы перемещали исходную точку по поверхности шара. Полученные при этом расположения эквивалентных точек будут воз-

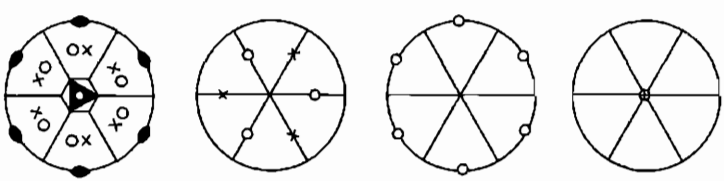


Рис. 72. Эквивалентные системы точек возникают из одной точки в результате повторения ее элементами симметрии.

Если исходная точка находится в частных положениях (на элементах симметрии), число точек соответствующей эквивалентной системы уменьшается в целое число раз по сравнению с числом точек в общей системе. На рисунке показаны четыре различные эквивалентные системы (а–г) для вида симметрии $\bar{6} \cdot m$. *Точки, изображенные на проекциях кружками и крестиками, на самом деле имеют симметрию тех элементов, на которых они находятся. Кружки отвечают положению точек над плоскостью чертежа, крестики — под ней*

никать и в тех случаях, когда исходная точка движется внутри шара. Новым здесь будет только то, что при ее прохождении через центр шара вся совокупность точек сольется в одну точку. Итак, в разбираемом виде симметрии эквивалентные системы могут состоять лишь из одной, двух, шести и двенадцати точек. Если вспомнить, что мы назвали *кратностью точки* число эквивалентных точек, слившихся в данной, то для выведенных симметричных систем кратности точек изобразятся тем же рядом чисел, но написанным в обратном порядке, причем окажется, что произведение кратности точки на число точек в данной системе всегда будет равно двенадцати (*табл.* 2).

Таблица 2

Числа точек в симметричных системах вида $\tilde{6} \cdot m$	1	2	6	12
Кратности точек	12	6	2	1
Произведение чисел точек в системе на их кратность	12	12	12	12

Обратим внимание на то, что положение исходной точки жестко фиксировано лишь тогда, когда она находится на пересечении осей симметрии, т. е. в центре шара. Только в этом случае мы можем получить для рассматриваемого вида симметрии систему, состоящую всего из одной точки. Во всех других случаях исходная точка может занимать бесконечное число положений и без изменения числа точек в системе. Другими словами, существует бесконечное множество эквивалентных систем из двух, шести и двенадцати точек.

При построении симметричных систем точек, показанных на рис. 72, мы исходили из предположения, что вид симметрии остается для всех систем точек одним и тем же. Сравнивая между собой системы *б* и *в*, мы видим, однако, что они различной симметрии: система *б* имеет, например, тройную ось, а система *в* — шестерную. Это кажущееся противоречие объясняется тем, что мы пока игнорируем симметрию самих точек, которые во всех случаях неправильно изображаются нами кружками. На самом деле точки во всех четырех системах обладают совершенно различной симметрией. На рис. 72 *а* они вполне асимметричны, так как не лежат ни на одном из элементов симметрии; кратность их равна единице. Точки системы *б* двукратны, лежат на плоскостях симметрии и имеют (каждая) симметрию m; точки системы имеют симметрию 2 и т. д. Ниже нам придется подробнее остановиться на вопросе о симметрии точек.

На примере рис. 72 мы показали, как строятся *простые системы* точек, возникающие в результате повторения одной надлежащим образом выбранной точки. От простых систем нетрудно перейти и к сложным

составным системам. В последнем случае на шаре или внутри него имеется несколько сортов точек; каждый сорт образует свою систему эквивалентных точек; точки же, принадлежащие к разным системам, друг другу не равны. При описании составных систем большую роль играют *относительные* числа точек. Поясним на примере, как эти числа могут быть получены. Пусть мы имеем составную систему, состоящую из трех простых систем с числами точек 2, 6, 12. Относительные числа получатся после сокращения на общий множитель, равный двум; в результате

Таблица 3. Относительные числа точек для составных систем вида симметрии $\overline{6} \cdot m$

Для системы из двух сортов точек	Для системы из трех сортов точек	Для системы из четырех сортов точек
1 1	1 1 1	1 1 1 1
1 2	1 1 2	1 1 1 2
1 3	1 1 3	1 1 1 3
1 6	1 1 6	1 1 1 6
1 12	1 1 12	1 1 1 12
	1 2 12	1 1 2 2
		1 1 2 6
		1 1 2 12
	1 3 3	1 1 3 3
	1 3 6	1 1 3 6
	1 6 6	1 1 6 6
	1 6 12	1 1 6 12
	1 12 12	1 1 12 12
		1 2 2 2
		1 2 2 6
		1 2 2 12
		1 2 6 6
		1 3 3 3
		1 3 3 6
		1 3 6 6
		1 6 6 6
		1 6 6 12
		1 6 12 12
		1 12 12 12

Примечание. Число точек наименьшей подсистемы, входящей в составную систему, принимается за единицу (левые колонки цифр).

будем иметь 1, 3, 6. Можно заранее вычислить относительные числа точек для составных систем каждого вида симметрии. Эти числа, как мы увидим далее, играют большую роль в химии, так как всякую молекулу можно рассматривать как сложную симметричную систему эквивалентных атомов или ионов, принимаемых в математическом приближении за «точки». Для рассматриваемого вида симметрии вычисления приводят, например, к табл. 3, в строках которой приведены относительные числа для составных систем, содержащих точки двух, трех и четырех неэквивалентных сортов.

Симметричные пучки прямых и многогранника. Простые формы

Любую точку на поверхности шара можно однозначно определить радиусом-вектором, соединяющим центр шара с данной точкой. Симметричной системе точек, простой или составной, будет отвечать простой

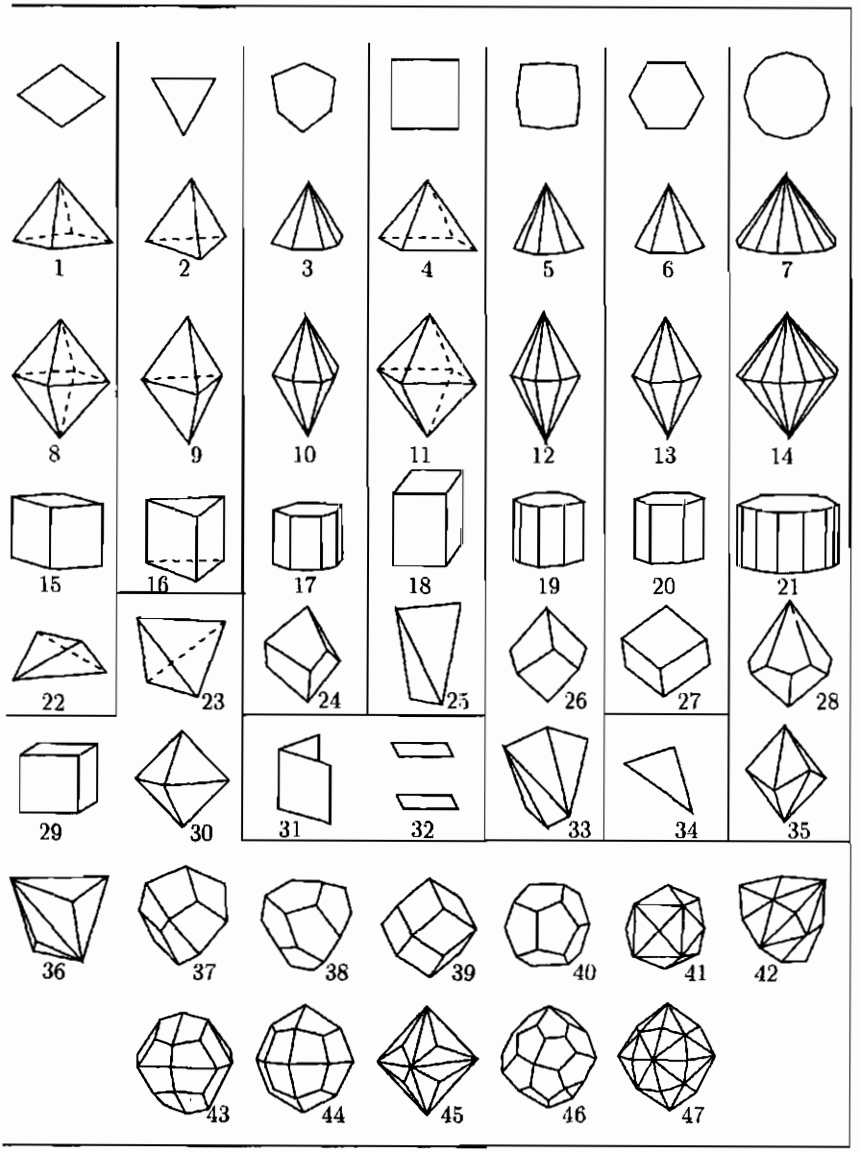
или составной пучок прямых. Такими пучками очень удобно пользоваться, например, для изображения комбинации осей симметрии, координатных осей и т. д. От пучков прямых легко перейти к симметричным многогранникам, образованным системой плоскостей, касающихся шара в точках выхода соответствующих радиусов-векторов. При этом простым пучкам отвечают многогранники, называемые *простыми формами* (рис. 73), а для составных пучков получаются *комбинации простых форм*. В простых формах все грани равны друг другу. В частном случае простая форма может состоять всего из одной грани (моноэдр), двух параллельных граней (пинакоид), двух пересекающихся граней (диэдр). Простые формы, состоящие только из граней, параллельных какой-либо одной оси симметрии, и в перпендикулярном сечении к этой оси образующие симметричный многоугольник, называются призмами. В пирамидах все грани пересекаются в одной точке. Призмы и пирамиды, о которых здесь идет речь, не имеют оснований; вместе с перечисленными выше простыми формами, состоящими из одной или двух граней, они принадлежат к *открытым* формам. К *закрытым* формам принадлежат, например, куб, октаэдр, двойные пирамиды (дипирамиды) и т. д. Подробно учение о простых формах развивается в курсах кристаллографии. Представление о комбинациях простых форм можно составить по кубооктаэдру, который получается из куба притуплением всех восьми его углов плоскостями октаэдра. Кристаллические многогранники, образующиеся в природе или в лаборатории при кристаллизации из рас-

---

Рис. 73. 47 простых форм, возможных для кристаллов.

1–7 — пирамиды: ромбическая, тригональная, дитригональная, тетрагональная, дитетрагональная, гексагональная, дигексагональная; 8–14 — дипирамиды тех же наименований; 15–21 — призмы тех же наименований; 22, 23, 25 — тетраэдры: ромбический, правильный и тетрагональный; 24, 26, 28 — трапецоэдры: тригональный, тетрагональный, гексагональный; 27 — ромбоэдр; 33, 35 — скаленоэдры: тетрагональный и дитригональный; 31 — диэдр (осевой или безосный); 32 — пинакоид; 23, 29, 30, 36–47 — простые формы кубической сингонии: 23 — тетраэдр, 29 — гексаэдр (куб), 30 — октаэдр, 36 — тригон-тритетраэдр, 37 — тетрагон-тритетраэдр, 38 — пентагон-тритетраэдр, 39 — ромбододекаэдр, 40 — пентагон-додекаэдр, 41 — тетрагексаэдр, 42 — гексатетраэдр, 43 — дидодекаэдр, 44 —тетрагон-триоктаэдр, 45 —тригон-триоктаэдр, 46 — пентагон-триоктаэдр, 47 — гексоктаэдр.

В среднем сечении всех фигур, помещенных выше разделяющей таблицу ступенчатой линии, образуются правильные многоугольники, показанные на рисунке в верхнем ряду


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47

творов, обычно имеют вид простых форм или не очень сложных комбинаций простых форм; при кристаллизации из расплава кристаллы могут принимать форму кривогранных фигур.

Симметрия и структурные формулы молекул

Хорошо известно, что вещество состоит из молекул, молекулы – из атомов, ионов, радикалов*. Почти с момента возникновения научной химии было принято считать, что одинаковые по своим свойствам части химических молекул имеют в ней и одинаковое (симметричное) расположение. Особенно плодотворной оказалась эта идея в органической химии, которая имеет дело обычно с небольшим числом химических элементов и вынуждена в одной и той же молекуле иногда отождествлять, а иногда и различать между собой атомы одного и того же элемента. Так, например, в молекуле уксусной кислоты, формула которой имеет вид CH_3COOH, различие между двумя атомами углерода подчеркивают тем, что символ углерода C повторяют в формуле два раза. То же относится и к двум атомам кислорода O. Иначе обстоит дело с атомами водорода H. Изучение свойств уксусной кислоты приводит к заключению, что в каждой молекуле содержится четыре атома водорода: три из них по своим свойствам равны друг другу, но отличаются от четвертого. В формуле уксусной кислоты это отмечено тем, что символ H употреблен дважды, причем при одном H поставлена внизу цифра 3.

После открытия Лауэ явления дифракции рентгеновских лучей и разработки методов структурного анализа кристаллов и молекул предположение о симметричном расположении структурных единиц в молекуле и в кристаллической решетке подтверждено экспериментально. Появились широчайшие возможности применения учения о симметрии в структурной химии и в кристаллохимии.

Если условиться обозначать атомы, а иногда и их совокупности (радикалы) точками (или лучше фигурами), то молекула представится в форме симметричной (простой или составной) системы точек (фигур). Если вид симметрии молекулы известен и известно число сортов одинаковых по своим свойствам атомов, то заранее можно вычислить, какие химические формулы совместимы с существованием данного вида симметрии.

Пусть, например, известно, что химическая молекула состоит из двух различных по своим свойствам сортов атомов A и B и что ее симметрия $\tilde{6} \cdot m$ (см. рис. 72). Необходимо найти все химические формулы, которые допускаются данным видом; другими словами, нужно

*Внутренняя структура атомов или ионов нас не будет сейчас интересовать.

вычислить все возможные коэффициенты n и m в формуле бинарного соединения A_nB_m. Предположим, что одинаковые атомы занимают в молекуле одну простую систему точек, тогда коэффициенты n и m будут *относительными числами* точек простых систем, входящих в сложную совокупность. Обращаясь к таблице относительных чисел (табл. 3), нетрудно сразу написать все формулы для интересующего нас случая:

$$A_1B_1;\quad A_1B_2;\quad A_1B_3;\quad A_1B_6;\quad A_1B_{12}.$$

Эти формулы усложнятся, если химически эквивалентные атомы будут структурно-неэквивалентны; иными словами, если атомы сорта A и атомы сорта B разобьются на подсорта $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_i}, B_{m_1}, B_{m_2}, \ldots, B_{m_j}$, занимающие каждый свою простую правильную систему. В этом случае структурная формула бинарного соединения примет вид

$$A_{n_1}A_{n_2}\ldots A_{n_i}B_{m_1}B_{m_2}\ldots B_{m_j}.$$

Симметрия направленных величин. Векторы и тензоры

Величины, с которыми приходится иметь дело физику или математику, бывают двух родов. Одни величины могут быть определены только числом, другие — требуют еще указания направления в пространстве. Первые называются *скалярами*, вторые — *векторами* и *тензорами*. Такие, например, величины, как масса, температура, плотность, представляют собой скаляры; перемещение точки, сила, скорость, напряжение электрического поля — векторы. Чтобы судить о массе тела, нужно знать, сколько единиц массы в нем содержится; для суждения о температуре, например, по шкале Цельсия нужно знать число градусов и знак температуры (+ или −). Чтобы иметь представление о перемещении тела, нужно знать и число сантиметров, пройденных телом, и направление, по которому произошло перемещение; мы можем поэтому изобразить перемещение стрелкой, длина которой равна числу сантиметров, пройденных телом, а направление совпадает с направлением перемещения. От векторов обычно требуется еще, чтобы они могли складываться геометрически по правилу параллелограмма. Указанные примеры векторов на самом деле удовлетворяют этому правилу; действительно, если пойти из вершины параллелограмма по одной его стороне, а затем продолжить путь по другой стороне, то придем в ту же точку, в какую приводит и диагональ параллелограмма. Мы не будем связывать себя этим требованием и, наряду с векторами, рассмотрим более широкий класс направленных величин, задаваемых системами чисел и

направлений. Мы увидим впоследствии (гл. 12), что число независимых (внутренних) параметров, определяющих направленную величину, существенным образом связано с ее симметрией.

Какую же симметрию может иметь отрезок прямой, которым изображается данная направленная величина? Мы уже знаем, что на подобные вопросы можно дать много различных ответов и все они будут правильными в зависимости от условий, которые при этом предполагаются. Например, главная ось квадратной призмы имеет симметрию цилиндра, если рассматривать эту ось изолированно от окружения, в котором она находится; и этот же отрезок оси будет иметь симметрию самой призмы, если он рассматривается вместе с ней как единое целое. Из приведенного примера видно, что направленные величины вообще могут иметь любую симметрию, которая совместима с существованием в фигуре особенных направлений. Другими словами, направленные величины могут иметь любую симметрию, разрешенную для фигур с особенными точками, за исключением видов симметрии правильных многогранников (восьмой столбец на рис. 69).

Для нас особый интерес представляют направленные величины, обладающие предельной симметрией, так как именно с такими величинами чаще всего приходится встречаться в физике; поэтому мы остановимся на них несколько подробнее. Например, вектор скорости материальной точки, движущейся в пустоте, имеет симметрию одной полости покоящегося круглого конуса ($\infty \cdot m$); эта величина может быть изображена отрезком прямой с односторонней стрелкой (рис. 74 *а*), так как для полной ее характеристики нужно: 1) задать числовое значение скорости (длину отрезка), 2) указать положение отрезка в пространстве (определив, например, его углы с координатными осями), 3) отметить различие в движении вперед и назад вдоль отрезка и безразличное отношение движения ко всем направлениям, ему *перпендикулярным*. Векторы, которые могут быть изображены таким образом, называются *полярными*. Напряжение электрического поля, очевидно, будет также полярным вектором.

Величина «полярного» тензора механического напряжения s направлении оси растягиваемого или сжимаемого цилиндра уже не может быть изображена односторонней стрелкой, так как растяжение или сжатие всегда направлено в обе стороны. Такие направленные величины, изображаемые отрезком прямой с двумя стрелками, устремленными в разные стороны (рис. 74 *б*), обладают симметрией покоящегося цилиндра $m \cdot \infty : m^*$.

*Отметим условность применяемой в физике терминологии: двусторонние отрезки, характеризующие величину полярных тензоров, строго говоря, неполярны (или двусторонне-полярны), поскольку группа симметрии $m \cdot \infty : m$ содержит центр и поперечные плоскости симметрии, обменивающие местами концы отрезков (рис. 74 *б*).

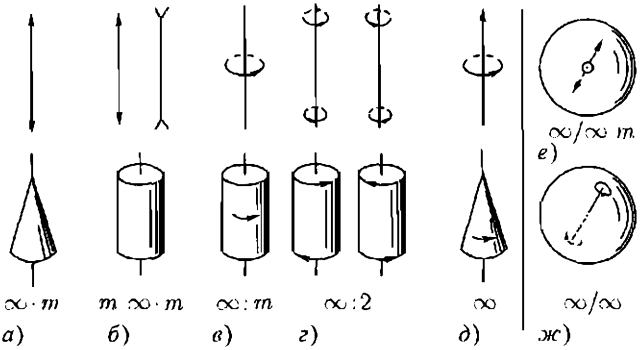


Рис. 74. Направленные (*а–д*) и ненаправленные (*е*, *ж*) величины и их симметрия.

а — полярный вектор; *б* — «полярный» тензор второго ранга; *в* — аксиальный вектор; *г* — аксиальный тензор второго ранга; *д* — комбинированный полярно-аксиальный вектор; *е* — «полярный» скаляр; *ж* — аксиальный скаляр

Перейдем теперь к направленным величинам, которые носят название *аксиальных*. Допустим, что нам нужно, например, изобразить равномерную угловую скорость вращения цилиндра вокруг своей оси. Значение скорости и положение оси могут быть по-прежнему обозначены отрезками прямой, но направление вращения теперь уже нельзя изображать прямолинейной стрелкой, так как такое изображение замаскировало бы действительную симметрию вектора. Поэтому направление вращения мы условимся изображать обтекающей стрелкой, указывающей на характер вращения (рис. 74 *в*). Симметрия таких величин будет $\infty : m$; мы встречались с ней в цилиндрическом магните. Напряжение магнитного поля внутри магнита представляет собой аксиальный вектор; «полюса» же магнита на самом деле не являются (полярными) полюсами, как об этом уже говорилось на стр. 66.

Если обтекающие стрелки направить у концов отрезка в разные стороны, то получим новую направленную величину (аксиальный тензор) с симметрией $\infty : 2$ (рис. 74 *г*). Так как в данном случае отсутствуют плоскости и центр симметрии, то следует различать правую и левую модификации величин (с обратными направлениями обтекающих стрелок). Примером величин этого рода может служить величина кручения проволоки, задаваемая направлением оси, углом кручения, пропорциональным длине отрезка, и направлением закручивания, определяемым направлением обтекающих стрелок. К таким же величинам

может быть отнесено вращение плоскости поляризации в кристаллах и растворах.

Совмещение полярной и аксиальной стрелок приводит к образованию комбинированного полярно-аксиального вектора, обладающего симметрией вращающегося конуса ∞ (рис. 74 *д*). Например, скорость вращения корабельного винта, вентилятора, пропеллера определяется не только величиной отрезка, пропорциональной скорости, и направлением стрелки, показывающей направление вращения, но и направлением «переднего» конца оси вращения; отсутствие последнего качественного признака вращения не дает возможности знать, работает машина прямым или обратным ходом.

Пятью указанными предельными группами (рис. 74 *а–д*) исчерпывается симметрия направленных физических величин, которые могут быть изображены направленными отрезками. Еще двумя предельными группами ($\infty/\infty \cdot m$ и ∞/∞) описывается симметрия полярных и аксиальных скалярных (ненаправленных) величин (рис. 74 *е, ж*): любой диаметр у полярного шара, равный по длине величине скаляра, является двусторонней стрелкой типа изображенной на рис. 74 *б*, а у аксиального скалярного шара — двусторонней крутильной стрелкой типа изображенной на рис. 74 *г*.

Напомним (см. рис. 69), что подгруппами семи предельных групп, найденных впервые Пьером Кюри, являются все кристаллографические (а также и некристаллографические) ортогональные группы.

Заключительные замечания

Рассмотрением симметрии фигур с особенной точкой мы закончили изложение той части учения о симметрии, разработка которой была завершена в третьей четверти XIX столетия. Мы связываем этот этап развития нашей науки с именами Гесселя, Гадолина, Пьера Кюри, Брава, Федорова. Последний называет симметрию фигур с особенной точкой «симметрией конечных фигур», что не может считаться вполне удачным, потому что симметрией фигур с особенной точкой могут обладать также и бесконечные фигуры: гиперболы, параболы и т. д.

Глава 4

Симметрия бордюров

С этой главы мы приступаем к изучению симметрии фигур без особенных точек. Понятие особенной точки (прямой или плоскости) мы ввели в свое время, рассматривая определенный класс преобразований конечных фигур (см. рис. 69). По отношению к другим преобразованиям фигуры (конечные или бесконечные) могут и не иметь инвариантных точек. Простейшим преобразованием, приводящим к бесконечным фигурам, не имеющим особенных точек, является параллельный перенос прямой вдоль нее самой на отрезок конечной длины. Каждая точка прямой повторяется этим преобразованием в эквивалентных точках бесчисленное множество раз. Сама прямая (*ось переносов*) становится при этом особенной. Если помимо особенной прямой у фигуры имеется и особенная односторонняя (полярная) плоскость, переходящая в себя при параллельном переносе, фигура называется бордюром. Само собой разумеется, что понятие «бордюр», как и ранее встречавшееся понятие «розетка», употребляется здесь не в обычном житейском смысле, а как вполне определенный научный термин.

Ось переносов как необходимый элемент симметрии бордюров. Декорирование подземных переходов и проходов метро

Представим себе бесконечный ряд равных фигур — плоских или трехмерных, расположенных относительно друг друга так, как это показано на рис. 75 и 76. Если весь ряд фигур без изменения их взаимного расположения переместить вдоль прямой AB на расстояние a таким образом, чтобы одна из фигур совместилась с соседней, то вся совокупность фигур займет новое положение, ничем не отличающееся от исходного. Прямая AB носит название оси переносов. Поскольку перемещение на расстояние a не вносит никаких изменений, его можно повторить сколько угодно раз. Перемещение фигур может происходить

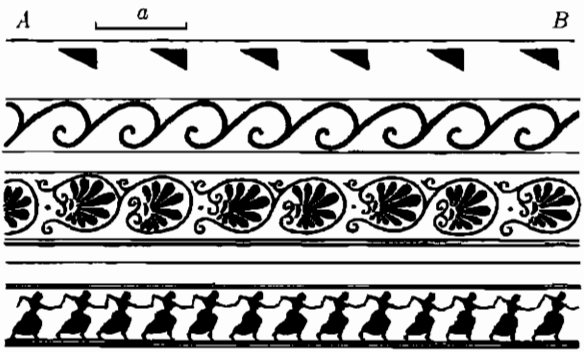


Рис. 75. Бордюры с одной осью переносов. Символ симметрии (а). Периоды переносов у всех горизонтальных бордюров различны

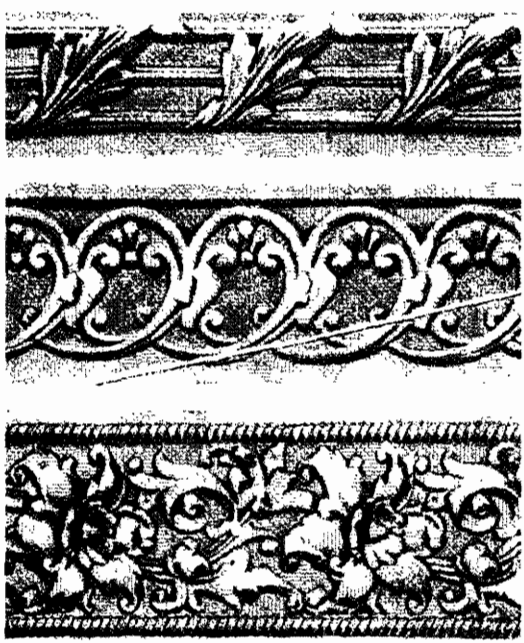


Рис. 76. Бордюры с симметрией (а)

в направлении AB или в обратном направлении BA с тем же результатом. Так как для рисунков существенна не сама линия AB, а ее направление, за ось переносов (трансляций) можно принять любую прямую, параллельную прямой AB. Совокупность всех параллельных переносов образует новый вид симметрии, или группу переносов, для нашей бесконечной фигуры. Наименьший путь a, который должен быть пройден рядом фигур, прежде чем произойдет совмещение, называется элементарным переносом, или периодом. Ось трансляций, обозначаемая той же буквой a, образует элемент симметрии, встречающийся только у бесконечных фигур*. Рассмотренные ранее конечные или бесконечные фигуры с особенными точками не могут обладать осью переносов, так как при наличии оси особенные точки фигур повторяются переносами бесчисленное множество раз и перестают быть особенными.

Мы привели примеры бордюров, обладающих единственным элементом симметрии a; поэтому составные части бордюров были взяты асимметричными. Предполагается также, что плоскость бумаги, на которую спроектированы бордюры, не является плоскостью симметрии рассматриваемых линейных орнаментов. Чтобы лучше оттенить это обстоятельство, образцовый бордюр, показанный в первой строке рис. 75, полезно представить сделанным из картонных треугольников, одна сторона которых выкрашена в черный цвет, а другая — в белый. Если все треугольники обращены к зрителю черной стороной, то картинная плоскость не может быть плоскостью симметрии. В дальнейшем мы будем часто прибегать к схемам с такими треугольниками.

Рассмотренный тип бордюров интересен тем, что в нем ось переносов полярна. Это означает, что свойства таких бордюров в направлении AB иные, чем в обратном направлении BA. Например, следуя вдоль верхнего бордюра (см. рис. 75) слева направо, мы будем всегда встречать черные треугольники с острого угла, а при обратном движении — со стороны малого катета. Полярностью оси переносов обусловливается впечатление поступательного движения, которое мы невольно испытываем при рассматривании бордюров с симметрией (a). Здесь напрашивается аналогия с тем, что говорилось при описании односторонних розеток, обладающих осью симметрии, но не имеющих плоскостей симметрии, — розеток, вызывающих впечатление вращения. Представление о движении в обоих случаях подкрепляется теми симметрическими преобразованиями (перенос, вращение), которые мы склонны мысленно производить с симметричными фигурами. Известную роль играет при этом и то обстоятельство, что перенос можно представлять как предельный

*Группу трансляций вдоль оси a обозначают символом (a) или p (см. на стр. 202 сопоставление употребляемых здесь бескоординатных обозначений с международными).

случай вращения вокруг бесконечно удаленной оси. Описанный тип бордюров часто встречается в прикладной живописи и архитектуре и может быть особенно рекомендован в тех случаях, когда расположением фигур нужно подчеркнуть поступательное движение в одном направлении, например для декорирования подземных переходов или проходов метро, предназначаемых для потока людей по одному направлению, и т. д.

На примере конечных фигур мы видели, какой интерес могут представлять предельные виды симметрии. Для рассматриваемого вида симметрии (a) предельным будет тот случай, когда элементарный перенос становится бесконечно малым, т. е. когда одна составная часть фигуры непрерывно переходит в другую. Соответствующий этому случаю элемент симметрии мы будем называть *осью непрерывных переносов* и обозначать a_0.

Представим себе бесконечно длинную ленточную пилу, обе стороны которой выкрашены в разные цвета; пила вытянута вдоль прямой и движется параллельно себе, не закручиваясь. Исследуем симметрию этой фигуры. Так как обе поверхности пилы окрашены в разные цвета, в ней нет продольной плоскости симметрии, совпадающей с плоскостью пилы. Нет также и другой продольной плоскости, параллельной оси бордюра и перпендикулярной к плоскости пилы, так как ребра полотна пилы отличаются друг от друга: одно может пилить, другое не может. Пусть пила движется, и притом так быстро, что зубцов не видно, — полотно ее выглядит сплошной лентой. Из того, что пила пилит лишь при движении в одном направлении, следует и отсутствие у полотна поперечных плоскостей симметрии, перпендикулярных к оси бордюра. Из этих наблюдений следует окончательно, что движущаяся пила обладает единственным элементом симметрии — осью непрерывных переносов a_0.

Плоскость скользящего отражения

Кроме оси переносов, в бордюрах встречается еще один элемент симметрии, невозможный для фигур с особенными точками. Назовем его *плоскостью скользящего отражения* и обозначим символом $\widetilde{a}$, совмещая направление скольжения с осью переносов a. Преобразование, осуществляемое новым элементом симметрии, состоит в том, что фигура (рис. 77 и 78), состоящая из бесконечного числа равных частей, приходит в совмещение сама с собой после последовательно произведенных переноса на расстояние $a/2$ и отражения в плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа; след ее изображен на рис. 77 штриховой линией. Взятые отдельно перенос и отражение в плоскости не приводят фигуру

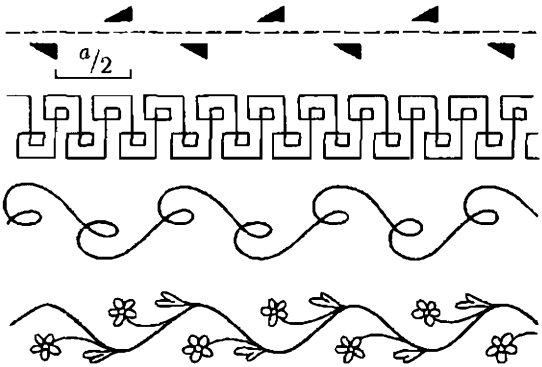


Рис. 77. Бордюры с одной плоскостью скользящего отражения. Комбинированное симметрическое преобразование фигур состоит в их переносе на отрезок $a/2$ и последующем отражении в плоскости. Символ симметрии — $(a) \cdot \tilde{a}$. Точка в символе означает, что плоскость $\tilde{a}$ проходит через ось a

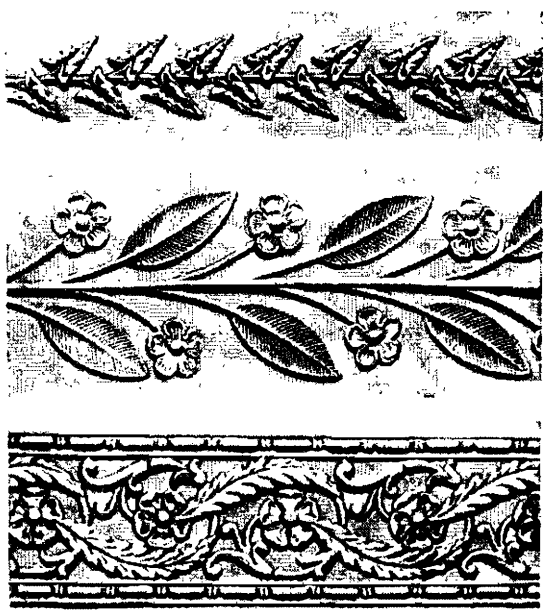


Рис. 78. Бордюры с симметрией $(a) \cdot \tilde{a}$

в совмещение с ней самой и не являются порознь операциями симметрии; поэтому, как сказано, необходимо проводить эти операции одну за другой. Порядок, в котором выполняются обе составляющие комбинированной операции, очевидно, не имеет значения. Двукратное повторение операции скользящего отражения $\widetilde{a}$ эквивалентно, как показывают примеры бордюров, операции чистого переноса фигуры вдоль оси переносов на отрезок a^*. Если бордюры с единственным элементом симметрии — осью переносов — пригодны для изображения поступательного движения в одном направлении с «шагом» a, то бордюры с осью и плоскостью скользящего отражения вызывают представление о волнообразном движении, напоминающем передвижение змеи. Из всех видов симметрии линейных орнаментов вид $(a) \cdot \widetilde{a}$ наиболее труден для понимания закономерности, лежащей в основе построения бордюров. В пределе, когда элементарная трансляция становится бесконечно малой, дискретная группа (a) переходит в непрерывную группу (a_0), плоскость скользящего отражения $\widetilde{a}$ — в обыкновенную плоскость симметрии m, и символ симметрии становится $(a_0) \cdot m$.

Комбинация оси переносов с поперечными осями второго порядка. Декорирование проходов для встречного движения

Если фигура, подвергаемая элементарному переносу, сама состоит из двух частей, переходящих одна в другую при поворотах на 180° вокруг оси, перпендикулярной к особенной плоскости, получается новый вид симметрии бордюра, обозначаемый символом $(a) : 2$. Бордюры этого вида представлены на рис. 79 и 80. В образцовом бордюре из треугольников (верхняя строка рис. 79) элементарная фигура переноса состоит из пары соседних треугольников, выбор которых, очевидно, может быть осуществлен двумя способами; выход осей 2 обозначен, как обычно, маленькими двуугольниками. На приведенном примере можно видеть, что всякий бордюр с симметрией $(a) : 2$ может быть разделен осью бордюра на два конгруэнтных (вследствие существования двойных осей) ряда фигур или на два *первичных* бордюра с симметрией (a). Полярные оси первичных бордюров наложены антипараллельно друг другу, вследствие

*Поэтому новый вид симметрии мы будем обозначать $(a) \cdot \widetilde{a}$ (или $p\widetilde{a}$), указывая вслед за символом трансляционной группы (a) символ плоскости скользящего отражения a. Точка в символе означает, что ось переносов a лежит в плоскости $\widetilde{a}$. Уместно заметить, что у вида (a) любая из параллельных осей переносов особенна; у вида $(a) \cdot \widetilde{a}$ особенна лишь линия пересечения картинной плоскости с плоскостью скользящего отражения. Эту ось удобно называть *осью бордюра* и выбирать за ось переносов.

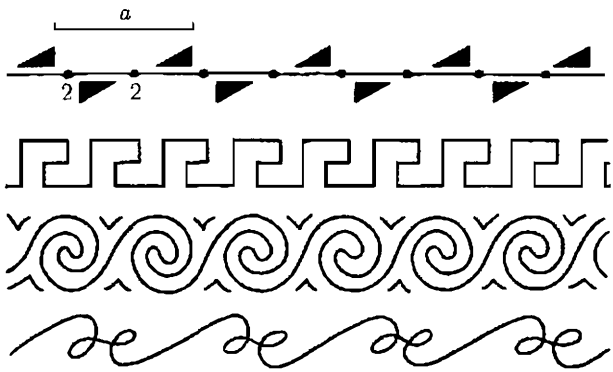


Рис. 79. Бордюры с осями второго порядка, перпендикулярными к плоскости чертежа. Символ симметрии $(a) : 2$.
Двоеточие в формуле означает, что ось переносов a перпендикулярна к оси 2

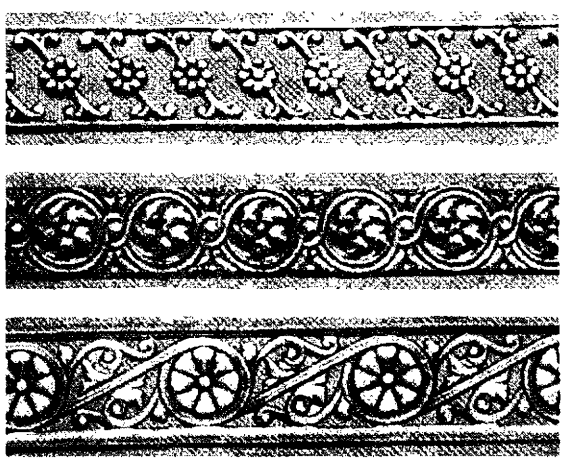


Рис. 80. Бордюры с симметрией $(a) : 2$

чего особенная ось интересующего нас составного бордюра с симметрией $(a) : 2$ становится неполярной.

Если два описанных ранее вида бордюров (см. рис. 75–78) могут с успехом применяться для декорирования проходов, предназначенных

для одностороннего потока людей, то новый вид симметрии бордюров, составленных из двух направленных в разные стороны рядов фигур, может быть более пригоден для украшения, например пола таких проходов метро, в которых одна сторона отведена для прямого, а другая — для встречного движения.

Очень интересно несколько подробнее остановиться на предельном виде симметрии, который может быть получен из рассматриваемого вида в предположении, что элементарная трансляция становится бесконечно малой. Мы обозначаем этот вид симметрии символом $(a_0) : 2$. Чтобы показать, что такой вид симметрии может реально существовать, представим себе две параллельные ленты конвейера, лежащие в одной горизонтальной плоскости и движущиеся в разные стороны. Вертикальная плоскость, разделяющая обе ленты, не будет в данном случае плоскостью симметрии, так как тогда оба конвейера должны были бы двигаться в одну сторону; поперечные вертикальные плоскости также не являются плоскостями симметрии вследствие движения полотен. Между тем любая вертикальная линия, проходящая между полотнами конвейера на равных расстояниях от них, есть ось второго порядка, так как мысленный поворот на 180° вокруг этой оси приведет нашу систему в совмещение с ней самой.

Другие виды симметрии бордюров

Сравнивая между собой бордюры различной симметрии, нетрудно установить некоторые характерные особенности этих фигур, отличающие их от фигур с особенными точками и от всех прочих фигур, речь о которых будет идти далее. Прежде всего мы должны отметить отсутствие в бордюрах особенных точек. Всякая точка этих фигур повторяется бесконечное множество раз. Всякий бордюр, кроме известных нам элементов симметрии, обладает обязательно единственной осью переносов. Бордюры иногда причисляют к плоским фигурам. Это неверно, так как они могут быть, например, лепными. Важно то, что с бордюрами мы связываем существование некоторой особенной полярной плоскости (вернее, серии параллельных плоскостей), всегда повернутой к зрителю одной своей стороной, скажем лицом. Мы могли бы поэтому определить бордюры как *фигуры без особенных точек, но с особенной полярной плоскостью и особенной осью переносов*. На всех рисунках бордюров полярная плоскость совмещена с картинной.

Исходя из этого определения, можно доказать математически, что, кроме трех перечисленных видов симметрии бордюров, могут существовать еще четыре вида. Комбинируя ось переносов a с поперечной плос-

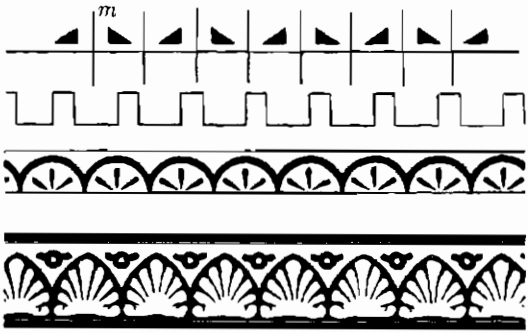


Рис. 81. Бордюры с поперечными плоскостями симметрии. Символ симметрии $(a) : m$.
Ось переносов a перпендикулярна к плоскости m

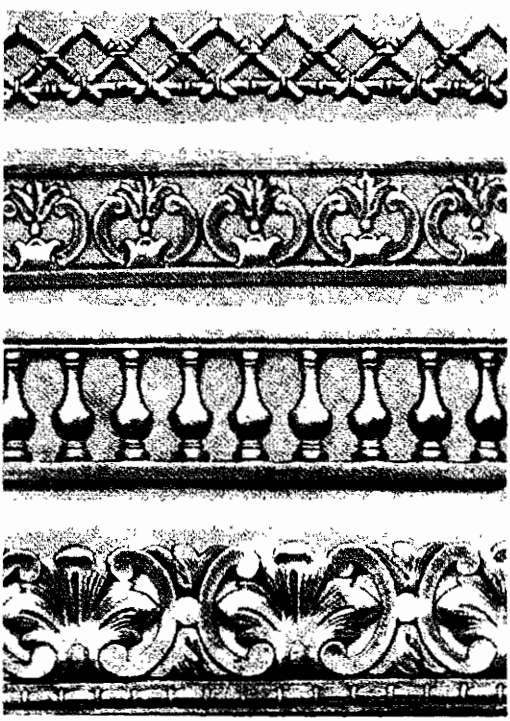


Рис. 82. Бордюры с симметрией $(a) : m$

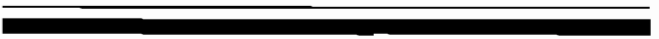


Рис. 83. Предельный вид симметрии $(a_0) : m$.
Ось непрерывных переносов a_0 перпендикулярна к плоскости симметрии m

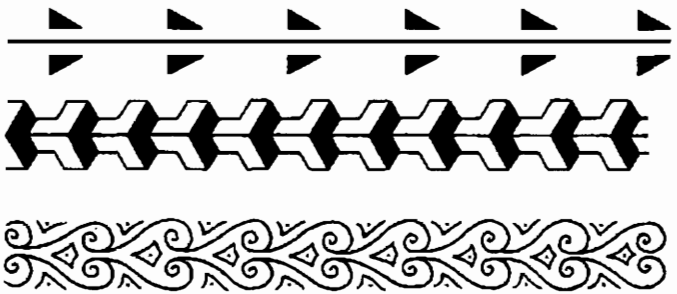


Рис. 84. Бордюры с симметрией $(a) \cdot m$. Ось a параллельна плоскости m

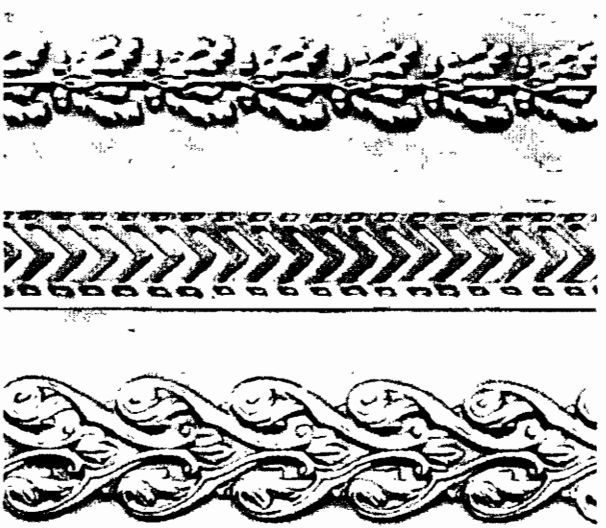


Рис. 85. Бордюры с симметрией $(a) \cdot m$.
Повернутые на 90° бордюры особенно пригодны для декорирования архитектурных вертикалей

костью симметрии m, получим вид симметрии $(a) : m$ (рис. 81 и 82). Бордюры этого вида встречаются довольно часто и особенно пригодны для украшения горизонтальных карнизов, так как оба направления оси бордюров в данном случае зеркально-равны друг другу, а направления вверх и вниз по плоскостям симметрии m различны. Предельный вид симметрии $(a) \cdot m$ нет необходимости связывать с движением и временем; простая сплошная лента с «лицом» и «изнанкой» (рис. 83), если

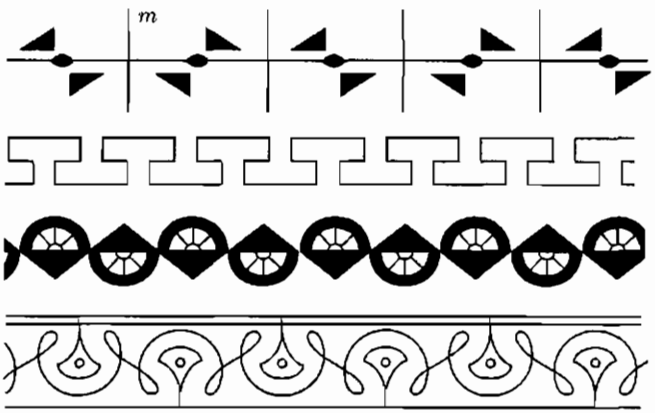


Рис. 86. Бордюры с симметрией $(a) : 2 \cdot \widetilde{a} = (a) \cdot \widetilde{a} : m$

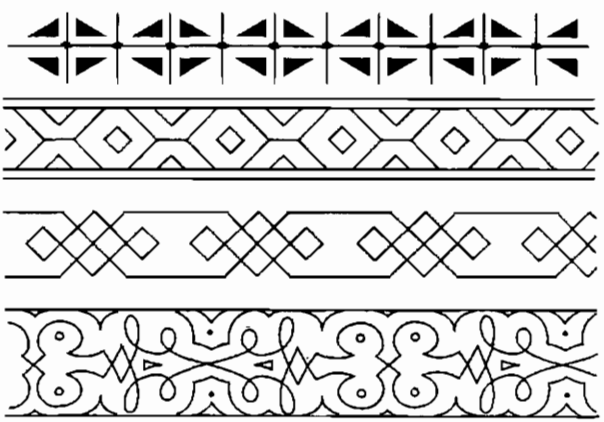


Рис. 87. Бордюры с симметрией $(a) : 2 \cdot m = (a) \cdot m : m$

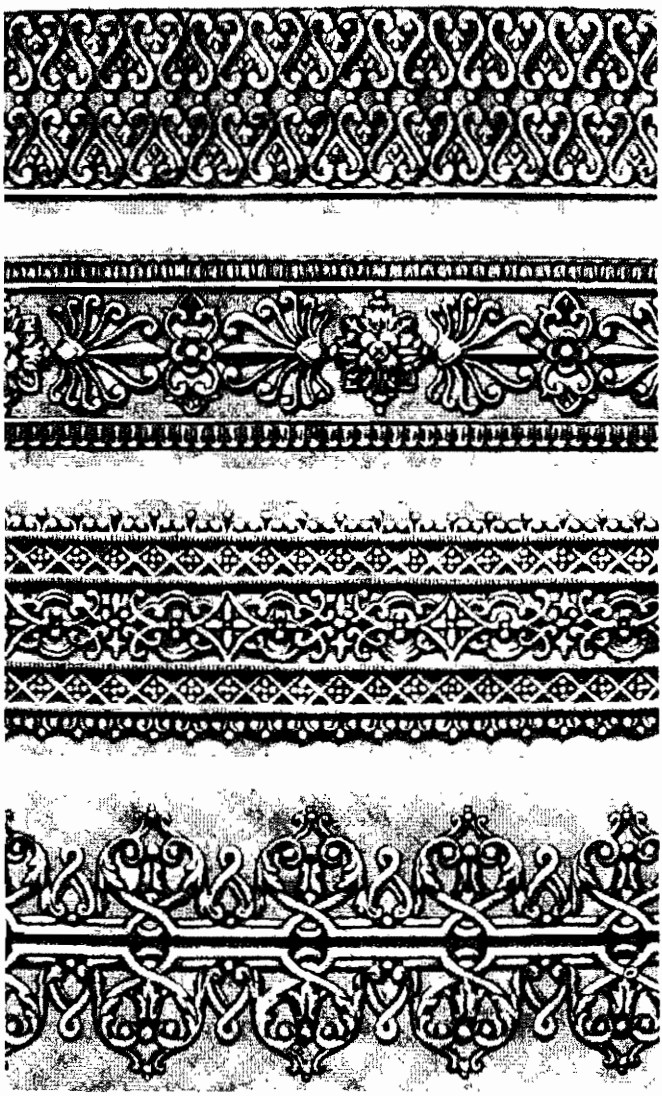


Рис. 88. Примеры бордюров с симметрией $(a) : 2 \cdot m$.
В нижнем бордюре из-за применения принципа переплетения симметрия понижается до вида $(a) : 2$

одно ребро ленты чем-либо отличается от другого, может служить иллюстрацией этого случая.

Если ось переносов комбинировать не с поперечной, а с продольной плоскостью симметрии m, получим пятый вид симметрии бордюров $(a) \cdot m$ (рис. 84 и 85). В отличие от предыдущего вида симметрии новый вид особенно пригоден для украшения пилястр, колонн и вообще частей сооружений, простирающихся вверх. Предельный случай этого вида симметрии осуществляется в простом ленточном конвейере, находящемся в движении. Из недвижущихся предметов симметрию $(a_0) \cdot m$ имеет, например, лента сукна с ворсом, направленным в одну сторону по длине ленты.

Шестой вид симметрии $(a) : 2 \cdot \widetilde{a}$ может быть получен результате комбинирования плоскости скользящего отражения и с осью 2 (оба эти элемента симметрии перпендикулярны к картинной плоскости) (рис. 86). Из этих порождающих элементов, как следствие, возникают ось переносов и поперечные плоскости симметрии m*. Предельный случай этого вида ничем не отличается от предельного случая последнего, седьмого вида симметрии.

Седьмой вид симметрии бордюров $(a) : 2 \cdot m$ возникает при комбинировании оси трансляций с поперечной и продольной плоскостями симметрии (рис. 87 и 88). Это самый распространенный и вместе с тем самый скучный вид симметрии бордюров. Предельный случай этого вида симметрии $(a_0) : 2 \cdot m$ осуществляется, например, в сплошной полосе, обе стороны которой выкрашены в разные цвета.

Калейдоскопы для образования бордюров

Два вида симметрии бордюров $(a) : m$ и $(a) : 2 \cdot m$ можно получить калейдоскопически с помощью зеркал. В первом случае достаточно взять два параллельных зеркала m (рис. 89 *а*), обращенных отражающими сторонами друг к другу. Исходная фигура A, помещенная между зеркалами, повторяясь в них, создает бордюр с симметрией $(a) : m$. Три зеркала m (рис. 89 *б*), расположенных буквой П отражающими сторонами внутрь, дают возможность получить бордюр с симметрией $(a) : 2 \cdot m$.

Обзор семи видов симметрии бордюров

Мы рассмотрели на конкретных примерах все виды симметрии бордюров. Общее число непредельных видов равно семи. В заключение

*Поэтому тот же вид симметрии можно определить и формулой $(a) \cdot \widetilde{a} : m = (a) \cdot \widetilde{a} \cdot 2 \odot m$ (см. табл. 9).

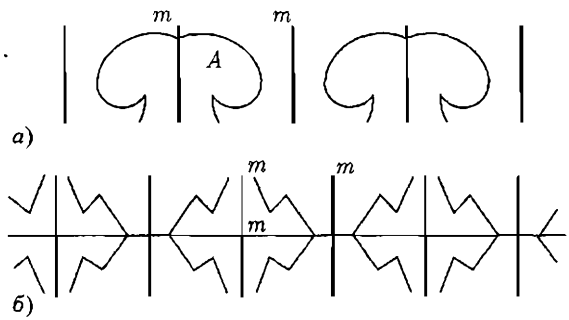


Рис. 89. Калейдоскопы для образования бордюров.
а — два параллельных зеркала служат для образования бордюров вида $(a) : m$; *б* — три зеркала, расположенных буквой П, служат для образования бордюров с симметрией $(a) : 2 \cdot m$

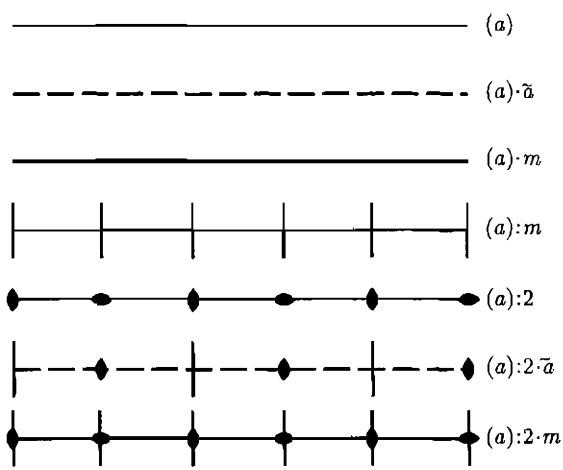


Рис. 90. Проекции элементов симметрии бордюров на картинную плоскость.
Тонкие горизонтальные линии обозначают оси переносов a; штриховые линии — плоскости скользящего отражения $\tilde{a}$; горизонтальные толстые линии — обыкновенные плоскости m, проходящие перпендикулярно к чертежу. Вертикальные отрезки прямых изображают следы поперечных плоскостей симметрии; маленькие черные двуугольники — перпендикулярные к чертежу оси второго порядка. Двоеточие в символах означает перпендикулярность, одна точка — параллельность. Сопоставление бескоординатных с международными обозначениями видов симметрии бордюров см. на стр. 202

приведем графическую таблицу элементов симметрии для непредельных видов (рис. 90). Эта таблица в руках художников-орнаменталистов может служить для сопоставления бордюров различной симметрии и для построения новых бордюров; она имеет для них такое же значение, какое для фигур с особенной точкой имела таблица, изображенная на рис. 69. На проекциях (рис. 90) оси переносов показаны тонкими линиями, плоскости симметрии — толстыми, плоскости скользящего отражения — штриховыми, двойные оси — двуугольниками. Ось переносов — обязательный элемент симметрии всякого бордюра, но для четырех видов ($(a)\cdot\widetilde{a}$, $(a)\cdot m$, $(a):2\cdot\widetilde{a}$, $(a):2\cdot m$) оси переносов не выделены, так как тонкая линия у них должна совпадать с толстой или штриховой. Общее число предельных видов симметрии бордюров равно пяти: (a_0), $(a_0)\cdot m$, $(a_0):m$, $(a_0):2$, $(a_0):2\cdot m$.

Глава 5
Симметрия лент

Бордюры являются частным случаем лент — бесконечных периодических фигур с особенной плоскостью и лежащей в ней особенной осью переносов. У бордюров особенная плоскость полярна: ее «лицо» отличается от изнанки. У лент особенная плоскость может быть неполярной, *т. е. допускаются преобразования, совмещающие обе ее стороны* с собой. Увеличение списка допустимых преобразований расширяет и число видов симметрии линейных орнаментов: к известным семи видам симметрии бордюров присоединяются 24 вида симметрии лент с неполярными особенными плоскостями. В этих видах мы встречаемся с новыми элементами симметрии — двойными винтовыми осями.

Винтовая ось симметрии второго порядка

Представим себе, что у нас имеется бесконечное множество одинаковых картонных прямоугольных треугольников, выкрашенных с одной стороны в черный, а с другой — в белый цвет; треугольники расположены вдоль прямой так, как показано на чертеже (рис. 91). Легко заметить, что три фигуры, изображенные на рисунке, обладают осью переносов с периодом переноса, равным расстоянию a между ближайшими треугольниками, повернутыми к зрителю одинаково окрашенными сторонами. Кроме этого элемента симметрии, фигуры обладают еще *двойной винтовой осью симметрии*. В верхней фигуре эта ось проходит по большим катетам треугольников, в средней и нижней фигурах она проходит на равных расстояниях от катетов. Каждая из трех фигур может совмещаться сама с собой в результате комбинированной операции, состоящей из поворота на 180° и последующего переноса вдоль оси на расстояние $a/2$. Так как нам важна не сама операция совмещения, а ее результат, то оба движения можно представить себе происходящими *в любой последовательности или одновременно. Такое движение*, очевидно, будет винтовым, поэтому и ось названа винтовой. Нетрудно убедиться, что для двойной винтовой оси результат останется тем же,

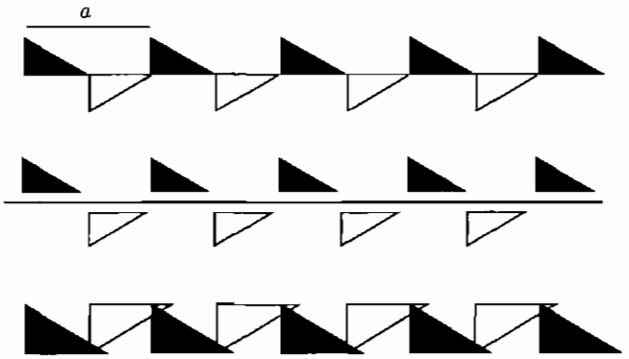


Рис. 91. Винтовая ось симметрии второго порядка 2_1.
Симметрическое преобразование, осуществляемое этой осью, состоит из поворота на угол 180° и переноса вдоль оси на половину периода переноса a. Показанная на рисунке бесконечная фигура состоит из равных треугольников, одна сторона которых выкрашена в черный цвет, а другая — в белый. В результате поворота на 180° каждый треугольник поворачивается к наблюдателю по очереди черной и белой стороной

будем ли мы производить винтовой поворот вправо (по часовой стрелке) или влево (против часовой стрелки). Последнее свойство отличает винтовую ось второго порядка от винтовых осей высшего порядка, о которых будет речь впереди. Мы назвали винтовую ось двойной или осью второго порядка, потому что при полном обороте вокруг нее (вместе с соответствующими перемещениями) бесконечная фигура *два* раза приходит в совмещение сама с собой.

Обратим внимание на различие симметрических преобразований, отвечающих двойной винтовой оси и плоскости скользящего отражения. Верхний бордюр рис. 77, построенный посредством скользящего отражения, состоит из треугольников, каждый из которых зеркально-равен двум ближайшим треугольникам; все треугольники обращены к зрителю одинаково окрашенными сторонами. Ленты рис. 91 сконструированы из совместимо равных треугольников, обращенных к зрителю поочередно то черной, то белой стороной. Если бы обе стороны треугольников были окрашены одинаково, мы не сумели бы отличить в указанных примерах плоскость скользящего отражения от двойной винтовой оси. Двойную винтовую ось мы будем обозначать символом 2_1 (частное от деления индекса на порядок оси дает величину переноса $(1/2)a$, комбинирующегося с вращением 2).

Тридцать один вид симметрии лент

Мы не будем останавливаться на описании видов симметрии лент, а приведем для каждого вида образцовые фигуры, составленные из прямоугольных треугольников по знакомому из примеров принципу (рис. 92). В табл. 4 читатель найдет сопоставление бескоординатных и координатных обозначений всех видов симметрии и необходимые пояснения. Заметим, что бесконечные совокупности преобразований, отвечающих каждому виду симметрии лент, называют, в отличие от точечных групп (см. рис. 69), одномерными *пространственными* группами

На рис. 92, помимо треугольников, окрашенных с обеих сторон в разные цвета (черный и белый), встречаются и треугольники, окрашенные одинаково с обеих сторон; они условно обозначены точкой в центре грани. Каждая образцовая фигура отвечает определенному виду симметрии. Всего существует 31 вид симметрии лент; один из них для примера мы рассмотрим. В ленте № 15 легко обнаружить обязательную ось переносов с периодом переноса a, равным расстоянию между ближайшими треугольниками, обращенными к наблюдателю черными сторонами. С осью a совпадают по направлению полупереносы $a/2$, входящие в состав двух плоскостей скользящего отражения: одной, совпадающей с плоскостью чертежа, и другой — ортогональной. С осью переносов совпадает также двойная ось симметрии, так как фигура совмещается с собой поворотами на 180° вокруг этой оси: треугольники, обращенные к зрителю черными сторонами, после таких поворотов займут положение треугольников, обращенных к наблюдателю белыми сторонами, и наоборот. Вот и все элементы симметрии ленты № 15; ее символ симметрии будет $(a) \cdot 2 \cdot \widetilde{a}$, если включить в него лишь порождающие элементы*.

Анализируя рис. 92 и табл. 4, можно заметить, что все виды симметрии лент порождаются независимыми комбинациями шести элементов симметрии:

$$a,\ 2,\ 2_1,\ m,\ \widetilde{a},\ \widetilde{2} = \overline{1}.$$

*Строго говоря, ими будут лишь элементы 2 и $\widetilde{a}$, так как ось перекосов a порождается плоскостью $\widetilde{a}$. Эту оговорку следует сделать для видов, в символ которых входят винтовые оси 2_1.

Рис. 92. Геометрическая реализация 31 вида симметрии лент фигурами составленными из треугольников.
Черные треугольники обращены лицевой стороной к наблюдателю, белой — от наблюдателя; белые треугольники — наоборот. В треугольниках с точкой обе поверхности одинаковы

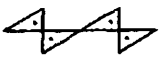
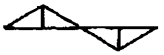
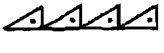
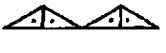
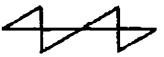
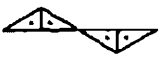
1		17	
2		18	
3		19	
4		20	
5		21	
6		22	
7		23	
8		24	
9		25	
10		26	
11		27	
12		28	
13		29	
14		30	
15		31	
16		ориентировка осей координат	

Таблица 4. Сопоставление бескоординатных и координатных (международных) обозначений 31 вида симметрии лент

№ п/п	Символ симметрии		№ п/п	Символ симметрии	
	бескоординатный	координатный		бескоординатный	координатный
1	$(a)\cdot 1$	$p1$	17	$(a):2_{\perp}:m$	$p11\frac{2}{m}$
2	$(a):2_{\parallel}$	$p121$	18	$(a):2_{\perp}\cdot\widetilde{a}$	$pma2$
3	$(a)\cdot 2_1:2$	$p2_122$	19	$(a)\cdot m\cdot 2:m$	$pmmm$
4	$(a)\cdot m_{\perp}$	$p1m1$	20	$(a)\cdot\widetilde{a}\cdot 2:m$	$pmaa$
5	$(a)\cdot\widetilde{a}_{\perp}$	$p1a1$	21	$(a)\cdot m_{\perp}\cdot 2_1:m$	$pmma$
6	$(a)\cdot 2_1\cdot m_{\perp}$	$p2_1ma$	22	$(a)\cdot 2_1$	$p2_111$
7	$(a)\cdot 2_1:m$	$p\frac{2_1}{m}11$	23	$(a)\cdot 2:2$	$p222$
8	$(a):2_{\perp}:\widetilde{a}$	$p11\frac{2}{a}$	24	$(a)\cdot m_{\parallel}$	$p11m$
9	$(a):2_{\parallel}\cdot m$	$pm2m$	25	$(a)\cdot\widetilde{a}_{\parallel}$	$p11a$
10	$(a):2_{\parallel}\cdot\widetilde{a}$	$pm2a$	26	$(a)\cdot 2_1\cdot m_{\parallel}$	$p2_1am$
11	$(a)\cdot 2$	$p211$	27	$(a)\cdot 2:m$	$p\frac{2}{m}11$
12	$(a):2_{\perp}$	$p112$	28	$(a):2_{\parallel}:m$	$p1\frac{2}{m}1$
13	$(a)\cdot\overline{1}$	$p\overline{1}$	29	$(a):2_{\perp}\cdot m$	$pmm2$
14	$(a)\cdot 2\cdot m$	$p2mm$	30	$(a):2_{\parallel}:\widetilde{a}$	$p1\frac{2}{a}1$
15	$(a)\cdot 2\cdot\widetilde{a}$	$p2aa$	31	$(a)\cdot m_{\parallel}\cdot 2_1:m$	$pmam$
16	$(a):m$	$pm11$			

Примечание. Порядковый номер формул соответствует номеру ленты на рис. 92. Ось a направлена вдоль ленты, перпендикулярная к ней ось b лежит в плоскости чертежа, ось c перпендикулярна к чертежу; знаками $\parallel$ и $\perp$ отмечено параллельное или перпендикулярное положение элементов симметрии по отношению к картинной плоскости. В международном символе одномерной пространственной группы после символа трансляционной группы p указано совпадение осей 2 и 2_1, или нормалей к плоскостям m и a с осями координат в последовательности a, b, c (первая, вторая и третья позиции символа после буквы p); по международной системе плоскости скользящего отражения $\widetilde{a}$ обозначаются без знака тильды той же буквой a; если с осью координат названные элементы симметрии не совпадают, на соответствующей позиции символа ставится единица; если с осью координат совпадают одновременно ось симметрии и нормаль к плоскости симметрии, на соответствующей позиции символа указываются оба элемента симметрии, разделенные знаком черты.

Двойная ось, центр и плоскость симметрии встречались нам в фигурах с особенной точкой, три других элемента симметрии (плоскость, скользящего отражения, ось переносов и двойная винтовая ось) возможны только для бесконечных фигур. Для лент характерно отсутствие осей симметрии порядка выше двух. Это объясняется тем, что такие оси привели бы к появлению либо нескольких равных осей переносов, либо

нескольких особенных плоскостей, что противоречит принятым условиям.

Некоторые из лент таблицы имеют одинаковые элементы симметрии, но отличаются друг от друга положением картинной плоскости. Сравним для примера ленты № 6 и 26. Обе ленты имеют ось переносов, двойную винтовую ось, плоскость скользящего отражения и плоскость симметрии. Но в № 6 картинная плоскость совпадает с плоскостью скользящего отражения, а в № 26 она ортогональна к ней. Если не проводить различия по ориентировке картинной плоскости к элементам симметрии, число видов симметрии лент сократится с 31 до 22 (попарно совпадут формулы видов 2 и 12, 4 и 24, 5 и 25, 6 и 26, 8 и 30, 9 и 29, 10 и 18, 17 и 28, 21 и 31).

С выбором необходимого вида симметрии лент художнику и конструктору приходится встречаться при проектировании ленточных украшений всевозможных оград, барьеров, садовых решеток, лентопротяжных механизмов и т. д. Так как подобного рода задачи встречаются на практике значительно реже, чем одностороннее орнаментирование, подобрать примеры 31 случая лент среди готовых образцов двусторонних бордюров довольно трудно. Может быть, эта задача невыполнима вообще, так как едва ли все эти случаи симметрии действительно существуют среди предметов человеческой деятельности. Мы ограничимся несколькими примерами применения распространенных мотивов в ленточных орнаментах (рис. 93).

Вырезывание лент из бумаги

Для вырезывания симметричных лент берут длинную полоску бумаги, складывают ее «гармошкой» в два, четыре, восемь и т. д. раз. Линии перегиба при этом будут отвечать следам поперечных плоскостей симметрии фигуры (рис. 94 *а*). Если, кроме многократных поперечных складок, сделать одну продольную, то в фигуре возникает продольная плоскость симметрии (рис. 94 *б*). Для получения лент только с одной осью переносов без других элементов симметрии полоску бумаги сворачивают в многослойный цилиндр или просто навертывают ее на плоскую линейку или картон. В последнем случае вырезывание следует проводить острым ножом, не вынимая картона, иначе будет прорезано двойное число слоев и в фигуре возникнут плоскости симметрии (рис. 94 *в*). Можно комбинировать наворачивание с продольным перегибом, что приведет к образованию лент с одной продольной плоскостью симметрии *а* осью переносов. В принципе, можно получить и другие виды симметрии лент, но для этого придется делать довольно много поперечных и других над-

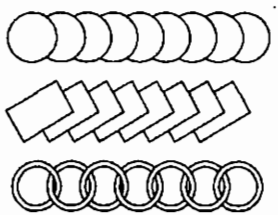


Рис. 93. Мотивы, используемые в ленточных орнаментах: цепочки, составленные из монет, пластин и переплетающихся колец

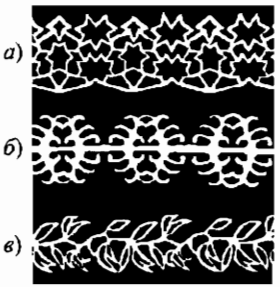


Рис. 94. Вырезывание симметричных лент из бумаги. *Лента а* перед вырезыванием перегибается поперек; *лента б* перегибается вдоль и поперек; *лента в* навертывается на цилиндр

резов, а также брать бумагу с различной окраской «лица» и «изнанки». Заинтересовавшийся читатель, имея перед глазами таблицу видов симметрии лент (или бордюров), сам сообразит, как следует делать надрезы в каждом конкретном случае.

Глава 6
Симметрия стержней

Идя по принятому в этой книге пути последовательного усложнения видов симметрии фигур за счет расширения числа допустимых преобразований, откажемся от требования сохранения у периодической фигуры особенной плоскости, но сохраним инвариантность единственного особенного направления. Фигуру без особенных точек и плоскостей, но с единственным особенным направлением будем называть стержнем, а выделенное в нем направление — осью стержня. С этим особенным направлением стержня, кроме оси переносов, могут совпадать простые поворотные, зеркально-поворотные и винтовые оси симметрии любого порядка. Примерами стержней могут служить трубы, винты, цепи, плетеные канаты, шнуры, нитки бус, стебли растений, лучи света простого и поляризованного, звуковые лучи, всевозможные силовые линии, математические векторы и тензоры (в узком смысле) и т. д.

Рациональные и иррациональные винтовые оси симметрии. Винт

Если бесконечная фигура приходит в совмещение сама с собой после произведенных последовательно друг за другом (или одновременно) двух операций: поворота на угол α и переноса на расстояние t вдоль оси поворота, то говорят, что фигура обладает винтовой осью симметрии α_t. Для симметричных стержней угол не обязательно должен быть равен целой части полного оборота. Если это равенство имеет место, т. е. если $\alpha = 360°/n$, то винтовую ось называют осью порядка n и обозначают n_j*. Приведем пример фигуры, обладающей винтовой осью. Пусть мы имеем стержень (рис. 95) с перпендикулярными отростками, расположенными в одной плоскости на равных расстояниях друг от друга. При закручивании такого стержня концы отростков сместятся с прямой линии, на которой они находились, и расположатся по винтовой кривой. В зависимости от степени кручения стержня угол α, на который

*По определению, индекс $j = n(t/a)$, где a — элементарный перекос вдоль оси a. Отношение $j/n = t/a$ определяет (в долях a) величину винтового переноса t вдоль оси n_j.

поворачиваются относительно друг друга два соседних отростка, будет различен; в частном случае он может оказаться равным целой части оборота. Если, например, этот угол был бы равен 60°, то винтовая ось стала бы осью шестого порядка 6_1 или 6_5 в зависимости от направления угла кручения.

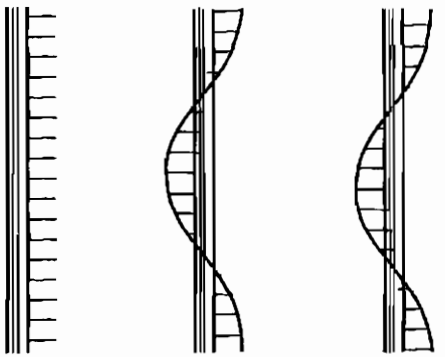


Рис. 95. При закручивании стержня *а* с боковыми отростками возникает правая фигура *б* с винтовой осью a_i^+ или левая фигура *в* с винтовой осью a_i^-

Так как закручивание можно производить «вправо» и «влево», то и винтовые оси вообще бывают правыми и левыми, и лишь в частном случае, для винтовых осей второго порядка, правая ось не будет отличаться от левой. Всякая винтовая ось характеризуется не только элементарным углом α, но и винтовым переносом t, в нашем примере равным расстоянию между отростками, измеренному по оси стержня. Перенос t винтовой оси следует отличать от элементарного переноса a вдоль оси a. В важном частном случае, когда элементарный угол α является рациональной частью полного оборота, винтовая ось содержит в себе и ось переносов a, так как при этом условии под каждым отростком располагается точно такой же отросток в параллельном положении на расстоянии $a = (n/j)t$. Величины a и t, в свою очередь, нельзя смешивать с ходом h винтовой оси, который равен расстоянию между двумя ближайшими точками винтовой линии, расположенными как раз одна под другой. Для однозаходных осей величины a и h между собой равны. Если элементарный угол α представляет собой иррациональную часть полного оборота, то винтовая ось не содержит в себе оси переносов или, фор-

мально говоря, имеет ось трансляций с бесконечным элементарным переносом. Для теории симметрии особый интерес представляют винтовые оси симметрии бесконечного порядка с бесконечно малым элементарным углом ($\alpha \to 0$) и конечным t или бесконечно малым переносом ($t \to 0$). Мы будем обозначать такие оси символами ∞_t^+, ∞_t^-, ∞_0^+, ∞_0^-, различая нижними индексами конечные (t) или бесконечно малые ($t \to 0$) переносы и верхними индексами правые ($+$) и левые ($-$) винтовые оси. Символами ∞_t, ∞_0 будем обозначать оси безразличного (право-левого) вращения.

Всякий винт представляет собой фигуру, обладающую наряду, с другими элементами симметрии, также и винтовой осью симметрии *бесконечного порядка*.

Общая идея вывода всех видов симметрии стержней

Всякий симметричный стержень можно рассматривать как бесконечную совокупность равных друг другу фигур, определенным образом «нанизанных» на ось стержня. Размещенные вдоль оси стержня фигуры могут обладать различными элементами симметрии, но не могут иметь наклонных осей и плоскостей симметрии, которые вызывали бы существование нескольких осей стержня, так как стержень по условию может иметь только одно особенное направление. Поэтому для вывода всех видов симметрии стержней пригодными могут оказаться только семь типов симметрии фигур с особенной точкой (см. рис. 69); восьмой же тип (тип *правильных многогранников*), *содержащий косые оси, должен быть исключен* из рассмотрения. Размещение фигур по оси стержня производится с помощью элементов симметрии бесконечных фигур (оси переносов, винтовой оси, плоскости скользящего отражения; в качестве производных при этом возникают дополнительные элементы симметрии (центры симметрии; плоскости и двойные оси, проходящие через срединную точку между фигурами перпендикулярно к оси стержня; продольные плоскости и зеркально-поворотные оси, совпадающие с осью стержня).

Стержни, составленные из элементарных фигур с одной осью симметрии

Пусть у нас имеется большое количество равных фигур с симметрией n, например много надлежащим образом раскрашенных картонных треугольников (рис. 96 *а*). Раскраска должна быть сделана так, чтобы в правильных треугольниках исчезли все четыре плоскости симметрии (*три продольные и одна поперечная*) и все три двойные оси симметрии;

«лицо» фигуры, таким образом, должно отличаться от «изнанки». Если мы расположим все фигуры в параллельном положении, то получим стержень, где, кроме тройной оси симметрии 3, будет содержаться еще и ось переносов a. Перенос a вдоль этой оси будет равен расстоянию между фигурами, «нанизанными» на ось стержня, как это показано на чертеже (рис. 96 a). Полученный таким образом вид симметрии можно обозначить формулой $(a) \cdot 3$ или, в общем случае, $(a) \cdot n$.

Если бы мы стали складывать или нанизывать наши треугольники так, чтобы каждый следующий треугольник был повернут относительно предыдущего на угол $\alpha = 60°$, то получили бы стержень с винтовой осью симметрии шестого порядка 6_3, с которой совпадает и обыкновенная тройная ось 3. Символ симметрии этой фигуры будет $(a) \cdot 6_3$ или, в общем случае, $(a) \cdot 2n_n$ (рис. 96 $б$). В этом виде симметрии присутствуют ось a конечных переносов с элементарным переносом $2t$, равным удвоенному расстоянию между соседними треугольниками. Из рассмотрения чертежа следует, что один и тот же результат получится независимо от того, производится ли поворот на 60° по часовой стрелке или против нее.

Иначе будет обстоять дело в том случае, если угол поворота α будет вполне произвольным (даже иррациональным); тогда поворот по часовой стрелке приведет к правой фигуре (рис. 96 $в$), а поворот против часовой стрелки — к левой (рис. 96 $г$).

Для того чтобы отличать правые винтовые оси от левых, условимся считать угол α положительным для правых фигур и отрицательным — для левых. При рациональных углах поворота $\alpha = 360°/n$ в символы соответствующих видов симметрии входит, как известно, ось конечных переносов, и мы получим формулы: $(a) \cdot n_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n/2 - 1)$ — для видов симметрии с правыми осями (в частности, $(a) \cdot 2n_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n - 1)$ — для видов с осями четного порядка, например, 6_1, 6_2); $(a) \cdot n_j$ $(j = n/2 + 1, \ldots, n - 1)$ — для видов симметрии с левыми осями (в частности, $(a) \cdot 2n_j$ $(j = n + 1, \ldots 2n - 1)$ — для видов с осями четного порядка, например, 6_4, 6_5). У видов $(a) \cdot n_{n/2}((a) \cdot 2n_n)$ оси $n_{n/2}(2n_n)$ являются одновременно и правыми, и левыми. При иррациональных углах поворота α бесконечная фигура апериодична и содержит (формально) ось бесконечных переносов α_∞; символы видов симметрии с иррациональными винтовыми осями (правыми α_t^+ и левыми α_t^-) примут, соответственно, вид $(a_\infty) \cdot \alpha_t^+$ и $(a_\infty) \cdot \alpha_t^-$.

Заканчивая рассмотрение симметрии типа $(a) \cdot n_j$*, отметим еще раз, что все сказанное про стержни из треугольников с симметрией 3

*К одному типу относятся виды симметрии, обозначаемые общей формулой, в которой порядок оси может быть произвольным. Например, виды $(a) \cdot m$, $(a) \cdot 2 \cdot m$, $(a) \cdot 3 \cdot m$, $(a) \cdot 4 \cdot m$ и т. д. принадлежат к типу $(a) \cdot n \cdot m$.

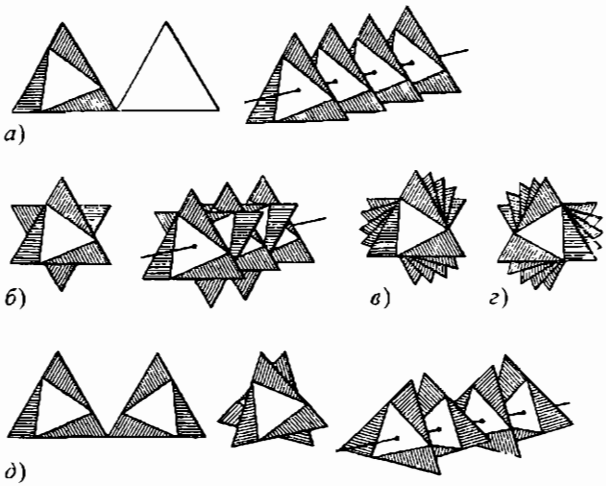


Рис. 96. Стержни тригональной, гексагональной и предельной симметрии. Стержень *а* с симметрией $(a) \cdot 3$ образован стопой параллельных треугольников, у которых лицевая сторона отличается от изнанки, а оси 3 совпадают по направлению с осью переносов a. Стержень *б* — с симметрией $(a) \cdot 6_3$; винтовая ось 6_3 совпадает на фигуре *б* с простой осью симметрии 3. Правая *в* и левая *г* фигуры с симметрией $(a_\infty) \cdot \alpha_t^+$ и $(a_\infty) \cdot \alpha_t^+$ соответственно; винтовая ось с иррациональным углом поворота α совпадает по направлению с простой осью симметрии 3. Стержень *д* с симметрией $(a) \cdot 3 \cdot \widetilde{a}$; три плоскости скользящего отражения пересекаются между собой по оси третьего порядка

целиком может быть перенесено на стержни, составленные из любых фигур с симметрией n. Во всех фигурах типа $(a) \cdot n_j$ винтовая ось n_j и совпадающая с ней ось переносов a полярны; что касается существования двух (правой и левой) или одной модификации данного вида, то это определяется каждый раз знаком угла α.

Возьмем за исходные две энантиоморфные фигуры с симметрией n, например два картонных треугольника, раскрашенных, как показано на рис. 96 *д*, с лицевой стороны и не раскрашенных с обратной. Наложим правую фигуру на левую так, чтобы центры обеих фигур оказались точно один под другим, т. е. на перпендикуляре, проведенном через центр одной из фигур; угол поворота одной фигуры относительно другой может быть совершенно произвольным; фигуры должны быть ориентированы «лицом» в одну сторону. Повторяя наложение фигур так, чтобы в про-

екции вдоль оси стержня правые фигуры совпали с правыми, а левые — с левыми (как показано на рис. 96 *д*), получим стержень с симметрией $(a)\cdot n\cdot \widetilde{a}$. Появившиеся вследствие указанного расположения фигур плоскости скользящего отражения $\widetilde{a}$ проходят через ось стержня и делят углы поворота фигур пополам. Число плоскостей скользящего отражения равно порядку оси, т. е. в нашей примере трем. В стержне содержится, конечно, и ось переносов a с элементарным переносом $a=2t$, но нет никаких других элементов симметрии. Можно убедиться непосредственно на опыте, что от изменения угла поворота фигур симметрия стержня не изменится; это остается справедливым даже и для угла, равного нулю градусов. Если бы мы стали складывать треугольники, ориентируя их «лицом» в разные стороны вдоль оси стержня, то пришли бы к новым видам симметрии стержней; но, так как к тем же видам симметрии можно проще прийти иным путем, находить их символы мы здесь не будем. В самом деле, складывая два треугольника друг с другом «изнанками», мы составляем из них одну фигуру более высокой симметрии; поэтому для выводов новых видов симметрии стержней лучше сразу взять в качестве исходных готовые фигуры высшей симметрии. Итак, подводя итог всему изложенному в этом параграфе, можно сказать, что фигуры с симметрией n порождают три типа симметрии стержней с конечным периодом: $(a)\cdot n$, $(a)\cdot n_j$, $(a)\cdot n\cdot\widetilde{a}$, и два типа стержней с бесконечным периодом: $(a_\infty)\cdot\alpha_t^+$ и $(a_\infty)\cdot\alpha_t^-$.

Стержни, порождаемые фигурами одной зеркально-поворотной осью

На этот раз в качестве исходной фигуры, размножаемой переносами вдоль оси стержня, возьмем фигуру с симметрией $\widetilde{2n}$ (второй столбец таблицы на рис. 69). За образец берем картонный квадрат с симметрией $\widetilde{4}$. Чтобы придать квадрату симметрию $\widetilde{4}$, впишем в него с лицевой и оборотной сторон два косо расположенных квадрата так, чтобы их ребра были параллельны друг другу и квадраты располагались точно один под другим; половину образующихся прямоугольных треугольников выкрасим с лица и изнанки в серый цвет так, чтобы серому цвету лицевой стороны отвечал белый изнанки, и наоборот (рис. 97 *а*). Лицо и изнанка квадрата энантиоморфны друг другу (зеркально-равны), хотя плоскость самого квадрата не есть плоскость симметрии. Накладывая квадраты друг на друга в параллельном положении «лицом» в одну сторону, получим стержень с симметрией $(a)\cdot\widetilde{4}$ или в общем случае $(a)\cdot\widetilde{2n}$ (рис. 97 *б*). В таких стержнях ось переносов a не будет полярной,

так как в полярных осях направления «вперед» и «назад» должны быть существенно различны; здесь же оба эти направления «энантиоморфны», т. е. отличаются друг от друга не больше, чем правая рука от левой.

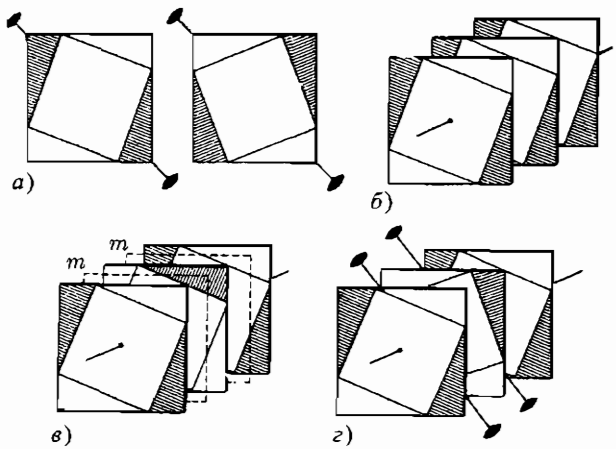


Рис. 97. Стержни тетрагональной симметрии.
Лицевая и оборотная стороны элементарной фигуры a с симметрией $\widetilde{4}$; фигура ориентирована так, что при повороте левого рисунка вокруг диагональной двойной оси получается правый рисунок. Стержень *б* с симметрией $(a)\cdot\widetilde{4}$; зеркально-поворотная ось совпадает по направлению с осью переносов. Стержень *в* с симметрией $(a)\cdot 4_2 : m$; винтовая ось симметрии четвертого порядка совпадает по направлению с зеркально-поворотной осью четвертого порядка. Стержень *г* с симметрией $(a)\cdot\widetilde{4}\cdot\widetilde{a}$; две плоскости скользящего отражения проходят вдоль зеркально-поворотной оси симметрии четвертого порядка

Переходим теперь к новому типу симметрии, который можно получить периодическим повторением повернутых квадратов; каждый следующий вдоль оси стержня квадрат повернут относительно предыдущего на угол 90°, и все квадраты по-прежнему смотрят в одну сторону лицом (рис. 97 *в*). По способу образования новый вид симметрии мог бы быть обозначен символом $(a)\cdot 4_2\cdot\widetilde{4}$ или в общем случае $(a)\cdot 2n_n\cdot\widetilde{2n}$. Нетрудно убедиться, однако, что в полученном стержне, кроме винтовой оси симметрии $2n_n$, содержится бесконечное множество поперечных плоскостей симметрии (обозначенных на рис. 97 *в* штриховыми линиями), расположенных между квадратами на равных расстояниях от них, и бесконечное

множество центров симметрии, расположенных по оси стержня в серединах между квадратами. Поэтому найденный вид мы будем обозначать $(a) \cdot 4_2 : m$ или в общем случае $(a) \cdot 2n_n : m$.

Нам остается рассмотреть еще антипараллельное расположение квадратов, при котором лицо и изнанка соседних квадратов чередуются вдоль оси стержня (рис. 97 *г*). Такое расположение вызывает появление двух взаимно-перпендикулярных продольных плоскостей скользящего отражения, проходящих по средним линиям квадратов, и бесконечного множества осей симметрии второго порядка, параллельных диагоналям квадратов и пересекающих ось стержня в серединах между квадратами. В соответствии со способом получения найденного типа симметрии можно обозначить его символом $(a) \cdot \widetilde{2n} \cdot \widetilde{a}$.

Можно доказать, что все другие мыслимые размещения квадратов по оси стержня не могут привести к новым видам симметрии; таким образом, фигура с симметрией $\widetilde{2n}$ вызывает существование стержней трех типов симметрии: $(a) \cdot \widetilde{2n}$, $(a) \cdot 2n_n : m$ и $(a) \cdot \widetilde{2n} \cdot \widetilde{a}$.

Стержни, порождаемые фигурами с симметрией $n : m$ (ось n и поперечная плоскость симметрии)

Пусть исходная фигура имеет симметрию $n : m$ (третий столбец таблицы на рис. 69). На лицевой и оборотной сторонах образцового картонного квадрата вписываем параллельно друг другу два косо расположенных квадрата точно один под другим; если бы картон был прозрачным, то оба косых квадрата при просвечивании совпадали бы между собой (рис. 98 *а*). Полученная фигура обладает осью симметрии четвертого порядка и плоскостью симметрии, совпадающей со средней плоскостью самого картона. Возьмем бесконечное множество таких фигур и нанижем их центрами на ось стержня перпендикулярно к ней, оставив равные промежутки между фигурами и расположив их параллельно друг другу лицевой стороной в одном направлении; тогда мы получим стержень с симметрией $(a) \cdot n : m$ (рис. 98 *б*). Нетрудно определить, что, кроме оси переносов a, в которой элементарный перенос равен расстоянию между квадратами, в промежутках между соседними квадратами лежат центры симметрии и поперечные плоскости, т. е. такие же элементы симметрии, которыми обладают и сами квадраты.

Если квадраты будут ориентированы лицевой стороной поочередно то в одну, то в другую сторону стержня (рис. 98 *в*), то в стержне возникнут четыре плоскости скользящего отражения, проходящие через ось стержня и пересекающие квадраты по их диагоналям и средним линиям. Наряду с плоскостями скользящего отражения появятся поперечные

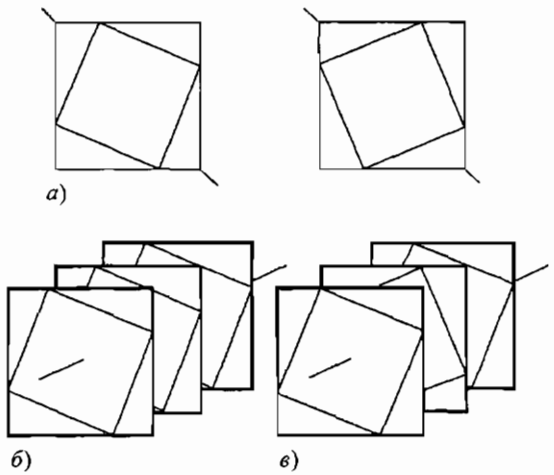


Рис. 98. Элементарная фигура симметрии $4:m$ и выводимые с ее помощью стержни:
а — лицевая (слева) и оборотная (справа) стороны элементарной фигуры; оборотная сторона изображена так, как она была бы видна при повороте фигуры на 180° вокруг отмеченной на рисунке диагонали; *б* — стержень симметрии $(a)\cdot 4:m$; *в* — стержень симметрии $(a)\cdot\widetilde{a}\cdot 4:m$

оси симметрии второго порядка. По способу образования нового типа симметрии его следует обозначить символом $(a)\cdot\widetilde{a}\cdot n:m$. Можно доказать, что другие мыслимые расположения не приводят к новым типам симметрии.

Стержни, порождаемые фигурами с симметрией $n\cdot m$ (ось n и продольные плоскости симметрии)

Возьмем за исходную фигуру картонный треугольник с симметрией $3\cdot m$ (рис. 99 *а*); лицевая его сторона отличается от оборотной только окраской. Подвергая треугольник переносам с помощью оси a, получим стержень с симметрией $(a)\cdot 3\cdot m$ или в общем случае $(a)\cdot n\cdot m$ (рис. 99 *б*); никаких других элементов симметрии в данном типе не содержится, если не считать плоскостей скользящего отражения, совпадающих по положению с продольными плоскостями симметрии, и винтовых осей с переносом, равным расстоянию между фигурами a.

Рис. 99. Элементарная фигура симметрии $3 \cdot m$ и выводимые с ее помощью стержни:
а — лицевая (белая) и оборотная (черная) стороны элементарной фигуры; *б* — стержень симметрии $(a) \cdot 3 \cdot m$; *в* — стержень симметрии $(a) \cdot 6_3 \cdot m$; винтовая ось 6_3 совпадает по направлению с осью 3

Поворот каждой следующей фигуры относительно предыдущей на угол 60° (или, что то же, на угол 180°) приводит к новому типу симметрии с винтовой осью 2_1, которая вместе с осью 3 вызывает существование оси 6_3. Из чертежа (рис. 99*в*) видно, что эта ось обладает одновременно и правым, и левым вращениями. С такого рода явлением мы встречались и ранее. Описанная группировка треугольников обусловливает также появление трех плоскостей скользящего отражения, делящих углы поворотов треугольников пополам. Новый вид симметрии, очевидно, можно обозначить символом $(a) \cdot 6_3 \cdot m = (a) \cdot 6_3 \cdot \widetilde{a}$ или в общем случае $(a) \cdot 2n_n \cdot m = (a) \cdot 2n_n \cdot \widetilde{a}$. Двумя полученными типами исчерпываются все случаи симметрии, выводимые из фигур с симметрией $n \cdot m$; рассматривать расположения чередующихся антипараллельных фигур нет надобности, так как каждая пара таких фигур эквивалентна одной фигуре высшей симметрии. Фигуры же с высшей симметрией далее будут использованы самостоятельно.

Стержни, порождаемые фигурами с симметрией $n : 2$ (ось n и поперечные оси второго порядка)

Переходим к рассмотрению стержней, порождаемых фигурами с симметрией $n : 2$ (пятый столбец таблицы на рис. 69). Такие фигуры могут быть двух сортов: правые и левые. Для примера выберем опять правые и левые картонные квадраты (*рис. 100 а*), на лицевой и оборотной сторонах которых начерчены совершенно одинаковые косо расположенные квадраты. Если бы картон был прозрачным и мы рассматривали фигуры на просвет, то увидели бы, что оба косых квадрата не совпадают друг с другом. Каждая из наших фигур обладает одной осью четвертого порядка, перпендикулярной к плоскости квадрата, и четырьмя осями

второго порядка, совпадающими с диагоналями и средними линиями квадрата. Параллельный перенос фигур одного сорта осью трансляций (рис. 100 *б*) приводит к симметрии типа $(a) \cdot n : 2$. Кроме оси переносов, в этом типе симметрии содержатся поперечные оси симметрии второго порядка, пересекающие ось стержня в точках, делящих расстояния между квадратами пополам.

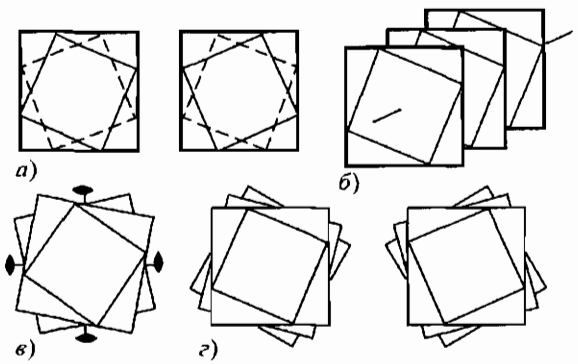


Рис. 100. Элементарная фигура симметрии 4 : 2 и выводимые с ее помощью стержни:
а — элементарная фигура: правая — справа, левая — слева; *б* — стержень симметрии $(a) \cdot 4 : 2$; *в* — стержень симметрии $(a) \cdot n_j : 2$; приобретает симметрию $(a) \cdot 8_4 : 2$, если угол поворота соседних фигур равен 45°; *г* — стержни с симметрией $(a_\infty) \cdot a_t^- \cdot 2 : 2$ и $(a_\infty) \cdot a_t^+ \cdot 2 : 2$; при иррациональном угле поворота α и конечном шаге t период переноса становится бесконечно большим

Поворот каждой фигуры относительно соседней на 45° влечет за собой появление винтовой оси восьмого порядка и четырех новых промежуточных поперечных осей второго порядка, делящих угол поворота фигур пополам. Соответствующий символ симметрии стержня будет $(a) \cdot 8_4 : 2$ или в общем случае $(a) \cdot n_{n/2} : 2$ (рис. 100 *в*). Винтовая ось симметрии $n_{n/2}$ имеет в данном случае безразличное вращение. При $j \gtrless n/2$ возникают энантиоморфные виды $(a) \cdot n_j : 2$.

Существенно новые типы симметрии получатся, если угол поворота α будет произвольным (рис. 100 *г*). В этом случае также можно различать между собой правую и левую винтовые оси. Подробнее о предельных видах симметрии стержней будет сказано в соответствующем разделе. Как и в предшествующих параграфах, чередование правых и левых фигур вдоль оси стержня мы здесь не рассматриваем.

Стержни, порождаемые фигурами с симметрией $\widetilde{2n} \cdot m$ (ось $\widetilde{2n}$ и продольные плоскости симметрии)

Для вывода всех типов симметрии стержней, порождаемых фигурами с симметрией $\widetilde{2n} \cdot m$ (шестой столбец таблицы на рис. 69), выберем картонный квадрат, на лицевой и оборотной сторонах которого начерчено по одной диагонали; последние расположены под прямым углом друг к другу (рис. 101 *а*).

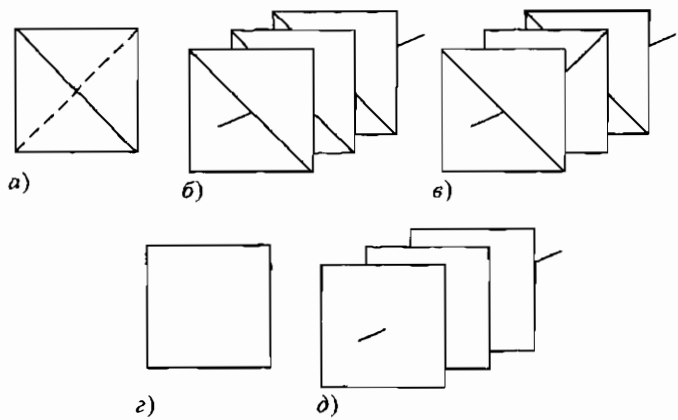


Рис. 101. Элементарные фигуры симметрии $\widetilde{4} \cdot m$ и $m \cdot 4 : m$ и выводимые с их помощью стержни:
а — элементарная фигура симметрии $\widetilde{4} \cdot m$; штрихом обозначена линия, начерченная на оборотной стороне фигуры; *б* — стержень симметрии $(a) \cdot \widetilde{4} \cdot m$; *в* — стержень симметрии $(a) \cdot m \cdot 4_2 : m$; *г* — элементарная фигура симметрии $m \cdot 4 : m$; *д* — стержень симметрии $(a) \cdot m \cdot 4 : m$

Такая фигура имеет симметрию $\widetilde{4} \cdot m$, т. е. две диагональные плоскости симметрии, две оси симметрии второго порядка, совпадающие со средними линиями квадрата, и одну зеркально-поворотную ось четвертого порядка 4. Параллельное расположение квадратов вдоль оси стержня приводит к типу симметрии $(a) \cdot \widetilde{2n} \cdot m$ (рис. 101 *б*).

Поворот каждого следующего квадрата на угол 90° относительно предыдущего приводит к симметрии $(a) \cdot 2n_n \cdot \widetilde{2n} \cdot m$. Но нам уже известно (см. стр. 126), что комбинации порождающих элементов симметрии $(a) \cdot 2n_n \cdot \widetilde{2n}$ и $(a) \cdot 2n_n : m$ отвечают одному и тому же виду.

Поэтому, произведя соответствующие замены, будем обозначать новый вид симметрии символом $(a) \cdot m \cdot 2n_n : m$. Элементы симметрии точечных подгрупп $m \cdot n \cdot m$ пересекаются у этого вида в средних точках между фигурами по оси стержня (рис. 101 *в*).

Стержни, порождаемые фигурами с симметрией $m \cdot n : m$ (ось n, продольные и поперечные плоскости симметрии)

Заканчивая рассмотрение всех типов симметрии стержней, выводимых из конечных фигур, обратимся к седьмому столбцу таблицы на рис. 69. Примем за исходную фигуру обыкновенный квадрат с присущей ему симметрией $m \cdot 4 : m$ (рис. 101 *г*).

Параллельный перенос таких квадратов приводит к типу симметрии $(a) \cdot m \cdot n : m$ (рис. 101 *д*).

Предоставляем читателю убедиться в том, что другие комбинации всех рассмотренных выше фигур, в том числе чередование вдоль оси стержня правых и левых фигур или фигур в антипараллельном положении, не приведут к образованию новых видов симметрии стержней.

Обзор типов симметрии стержней с конечными и бесконечными переносами

Принятый в предыдущих параграфах метод вывода видов симметрии стержней основывался на комбинировании преобразований точечных групп (описывающих симметрию фигур с особенной точкой) с преобразованиями одномерных (линейных) пространственных групп: параллельными переносами, которые сами по себе образуют группу переносов a, винтовыми переносами вдоль осей n_j, α_t^+ и α_t^- и зеркальными переносами, связанными с плоскостями скользящего отражения $\widetilde{a}$. Этот метод не единственный.

Для стержней с конечными переносами можно предложить и другой путь. Вначале мы комбинируем, как и выше, преобразования групп трансляций с преобразованиями точечных групп и получаем так называемые симморфные пространственные группы:

$$(a) \cdot n; \quad (a) \cdot \widetilde{2n}; \quad (a) \cdot n : m; \quad (a) : 2 : m; \quad (a) \cdot n \cdot m;$$
$$(a) : 2 \cdot m; \quad (a) \cdot n : 2; \quad (a) \cdot \widetilde{2n} \cdot m; \quad (a) \cdot m \cdot n : m.$$

В симморфные группы входят в качестве подгрупп* точечные группы симметрии размножаемых трансляциями фигур, что и поясняет смысл термина: форма исходной конечной фигуры в пространственной группе сохраняется неизменной. Сама бесконечная фигура (стержень) представляет в этом случае периодическое повторение конечных фигур.

Для получения несимморфных групп мы заменяем в символе симморфной точечной группы порождающие элементы симметрии соответствующими комбинированными элементами симметрии, включающими перенос: оси симметрии n заменяются винтовыми осями n_j, плоскости симметрии m — плоскостями скользящего отражения $\widetilde{a}$. Такая замена производится поочередно или попарно для всех порождающих элементов, а затем повторяющиеся комбинации, противоречащие переносам группы (a), отбрасываются. В результате фигура уже не обладает симметрией симморфной точечной группы, а только симметрией одной из ее возможных подгрупп.

В табл. 5, в первом столбце, мы приводим список всех типов симметрии стержней с конечными переносами. Перечисление групп каждого семейства начинается с симморфных групп и заканчивается несимморфными группами. Во втором столбце для каждого типа симметрии перечисляются для иллюстрации кристаллографические группы симметрии стержней, для которых допустимы лишь оси симметрии третьего, четвертого и шестого порядков**. Всего кристаллографических групп симметрии стержней оказывается 53. В третьем столбце приводится символ порождающей симморфной группы, общей для всего семейства.

Хотя несимморфную пространственную группу мы можем рассматривать как подгруппу симморфной, между операциями симморфной точечной группы и операциями так называемой группы по модулю, полученной из нее описанными выше заменами, можно установить взаимно однозначное (или, как говорят, изоморфное — см. стр. 253) соответствие. При таком соответствии произведению (последовательному выполнению) преобразований симморфной группы отвечает произведение соответствующих преобразований несимморфной группы. Если результат двух последовательно выполненных преобразований в плоскости скользящего отражения $\widetilde{a}$ и результат p последовательно выполненных преобразований винтового поворота вокруг оси n_j (где p — порядок оси n_j) приравнять по модулю единичному преобразованию ($a^2 \equiv 1 \pmod{a}$, $n_j^p \equiv 1 \pmod{a}$) (равенство по модулю означает равенство с точностью до периода переноса a), то и точечные симморфная и несимморфная группы

*Точное определение этого понятия будет дано на стр. 260.

**Стержни с осями симметрии не выше второго порядка имеют особенную плоскость и относятся к лентам. Сопоставление бескоординатных и координатных обозначений кристаллографических видов симметрии стержней и лент приводится в табл. 6.

Таблица 5. Типы симметрии стержней с конечными переносами

Типы симметрии стержней с конечными переносами	Виды симметрии (одномерные пространственные группы) кристаллографических стержней	Сходственные виды симметрии конечных фигур
$(a)\cdot n$	$(a)\cdot 3$; $(a)\cdot 4$; $(a)\cdot 6$	n
$(a)\cdot n_j (j < n/2)$	$(a)\cdot 3_1$; $(a)\cdot 4_1$; $(a)\cdot 6_1$; $(a)\cdot 6_2$	
$(a)\cdot n_{n/2}$	$(a)\cdot 4_2$; $(a)\cdot 6_3$	
$(a)\cdot n_j (j > n/2)$	$(a)\cdot 3_2$; $(a)\cdot 4_3$; $(a)\cdot 6_1$; $(a)\cdot 6_5$	
$(a)\cdot\widetilde{2n}$	$(a)\cdot\widetilde{4}$; $(a)\cdot\widetilde{6}$	$\widetilde{2n}$
$(a)\cdot n : m$	$(a)\cdot 3 : m$; $(a)\cdot 4 : m$; $(a)\cdot 6 : m$	$n : m$
$(a)\cdot (2n)_n : m$	$(a)\cdot 4_2 : m$; $(a)\cdot 6_3 : m$	
$(a)\cdot n\cdot m$	$(a)\cdot 3\cdot m$; $(a)\cdot 4\cdot m$; $(a)\cdot 6\cdot m$	$n\cdot m$
$(a)\cdot n\cdot\widetilde{a}$	$(a)\cdot 3\cdot\widetilde{a}$; $(a)\cdot 4\cdot\widetilde{a}$; $(a)\cdot 6\cdot\widetilde{a}$	
$(a)\cdot (2n)_n\cdot m = (a)\cdot (2n)_n\cdot\widetilde{a}$	$(a)\cdot 4_2\cdot m = (a)\cdot 4_2\cdot\widetilde{a}$; $(a)\cdot 6_3\cdot m = (a)\cdot 6_3\cdot\widetilde{a}$	
$(a)\cdot n : 2$	$(a)\cdot 3 : 2$; $(a)\cdot 4 : 2$; $(a)\cdot 6 : 2$	$n : 2$
$(a)\cdot n_j : 2 (j < n/2)$	$(a)\cdot 3_1 : 2$; $(a)\cdot 4_1 : 2$; $(a)\cdot 6_1 : 2$; $(a)\cdot 6_2 : 2$	
$(a)\cdot n_{n/2} : 2$	$(a)\cdot 4_2 : 2$; $(a)\cdot 6_3 : 2$	
$(a)\cdot n_j : 2 (j > n/2)$	$(a)\cdot 3_2 : 2$; $(a)\cdot 4_3 : 2$; $(a)\cdot 6_4 : 2$; $(a)\cdot 6_5 : 2$	
$(a)\cdot\widetilde{2n}\cdot m$	$(a)\cdot\widetilde{4}\cdot m$; $(a)\cdot\widetilde{6}\cdot m$	$\widetilde{2n}\cdot m$
$(a)\cdot\widetilde{2n}\cdot\widetilde{a}$	$(a)\cdot\widetilde{4}\cdot\widetilde{a}$; $(a)\cdot\widetilde{6}\cdot\widetilde{a}$	
$(a)\cdot m\cdot n : m$	$(a)\cdot m\cdot 3 : m$; $(a)\cdot m\cdot 4 : m$; $(a)\cdot m\cdot 6 : m$	$m\cdot n : m$
$(a)\cdot m\cdot 2n_n : m$	$(a)\cdot m\cdot 4_2 : m$; $(a)\cdot m\cdot 6_3 : m$	
$(a)\cdot\widetilde{a}\cdot n : m$	$(a)\cdot\widetilde{a}\cdot 3 : m$; $(a)\cdot\widetilde{a}\cdot 4 : m$; $(a)\cdot\widetilde{a}\cdot 6 : m$	

Примечание. Сопоставление принятых в таблице обозначений пространственных групп кристаллографических стержней с международными обозначениями производится в табл. 6.

(с описанными выше заменами) будут изоморфны, а их порядки будут равны. Полученный результат (изоморфизм групп или «сходственность» точечных видов симметрии для симморфных и несимморфных пространственных групп) имеет важное значение в теории пространственных групп*.

Предельные типы симметрии стержней. Валы со шкивами. Винты. Одномерные континуумы и дисконтинуумы

Ранее нам уже встречались предельные виды симметрии стержней, которые содержали винтовые оси с произвольным углом поворота α

*Подробнее об этом будет идти речь в главе 10.

Таблица 6. Сопоставление бескоординатных и координатных (международных) обозначений пространственных групп симметрии кристаллографических стержней и лент

№	Символ симметрии		№	Символ симметрии		№	Символ симметрии	
	бескоординатный	координатный		бескоординатный	координатный		бескоординатный	координатный
1*	$(a)\cdot 1$	$p1$	27*	$(a)\cdot 2_1 : m$	$p\frac{2_1}{m}11$	51	$(a)\cdot m\cdot 3 : m$	$p\bar{6}m2$
2*	$(a) : 2$	$p112$	28*	$(a) : 2 : \tilde{a}$	$p11\frac{2}{\tilde{a}}$	52	$(a)\cdot\tilde{a}\cdot 3 : m$	$p\bar{6}a2$
3*	$(a)\cdot 2$	$p211$	29	$(a)\cdot 4 : m$	$p4/m$	53	$(a)\cdot m\cdot 4 : m$	$p4/mmm$
4	$(a)\cdot 3$	$p3$	30	$(a)\cdot 4_2 : m$	$p4_2/m$	54	$(a)\cdot\tilde{a}\cdot 4 : m$	$p4/maa$
5	$(a)\cdot 4$	$p4$	31	$(a)\cdot 6 : m$	$p6/m$	55	$(a)\cdot m\cdot 4_2 : m$	$p4_2/mma$
6	$(a)\cdot 6$	$p6$	32	$(a)\cdot 6_3 : m$	$p6_3/m$	56	$(a)\cdot m\cdot 6 : m$	$p6/mmm$
7*	$(a)\cdot\widetilde{2} = (a)\cdot ol1$	$p\bar{1}$	33*	$(a) : 2\cdot m$	$pmm2$	57	$(a)\cdot\tilde{a}\cdot 6 : m$	$p6/maa$
8*	$(a)\cdot 2_1$	$p2_1$	34*	$(a) : 2\cdot m$	$p2mm$	58	$(a)\cdot m\cdot 6_3 : m$	$p6_3/mma$
9	$(a)\cdot 3_1$	$p3_1$	35*	$(a)\cdot 2\cdot\tilde{a}$	$p2aa$	59	$(a)\cdot\widetilde{\bar{6}}\cdot m$	$p\bar{3}m$
10	$(a)\cdot 3_2$	$p3_2$	36*	$(a)\cdot 2_1\cdot m$	$p2_1ma$	60	$(a)\cdot\widetilde{\bar{6}}\cdot\tilde{a}$	$p\bar{3}a$
11	$(a)\cdot 4_1$	$p4_1$	37*	$(a) : 2\cdot\tilde{a}$	$pma2$	61*	$(a)\cdot 2 : 2$	$p222$
12	$(a)\cdot 4_2$	$p4_2$	38	$(a)\cdot 3\cdot m$	$p3m$	62*	$(a)\cdot 2_1 : 2$	$p2_122$
13	$(a)\cdot 4_3$	$p4_3$	39	$(a)\cdot 3\cdot\tilde{a}$	$p3a$	63	$(a)\cdot 3 : 2$	$p32$
14	$(a)\cdot 6_1$	$p6_1$	40	$(a)\cdot 4\cdot m$	$p4mm$	64	$(a)\cdot 3_1 : 2$	$p3_12$
15	$(a)\cdot 6_2$	$p6_2$	41	$(a)\cdot 4\cdot\tilde{a}$	$p4aa$	65	$(a)\cdot 3_2 : 2$	$p3_22$
16	$(a)\cdot 6_3$	$p6_3$	42	$(a)\cdot 4_2\cdot m$	$p4_2ma$	66	$(a)\cdot 4 : 2$	$p422$
17	$(a)\cdot 6_4$	$p6_4$	43	$(a)\cdot 6\cdot m$	$p6mm$	67	$(a)\cdot 4_1 : 2$	$p4_122$
18	$(a)\cdot 6_5$	$p6_5$	44	$(a)\cdot 6\cdot\tilde{a}$	$p6aa$	68	$(a)\cdot 4_2 : 2$	$p4_222$
19	$(a)\cdot\widetilde{\bar{6}}$	$p\bar{3}$	45	$(a)\cdot 6_3\cdot m$	$p6_3ma$	69	$(a)\cdot 4_3 : 2$	$p4_322$
20	$(a)\cdot\widetilde{4}$	$p\bar{4}$	46*	$(a)\cdot m\cdot 2 : m$	$pmnm$	70	$(a)\cdot 6 : 2$	$p622$
21	$(a)\cdot 3 : m$	$p\bar{6}$	47*	$(a)\cdot\tilde{a}\cdot 2 : m$	$pmaa$	71	$(a)\cdot 6_1 : 2$	$p6_122$
22*	$(a)\cdot m$	$p11m$	48*	$(a)\cdot m\cdot 2_1 : m$	$pmma$	72	$(a)\cdot 6_2 : 2$	$p6_222$
23*	$(a) : m$	$pm11$	49	$(a)\cdot\widetilde{4}\cdot m$	$p\bar{4}2m$	73	$(a)\cdot 6_3 : 2$	$p6_322$
24*	$(a)\cdot\tilde{a}$	$p11a$	50	$(a)\cdot\widetilde{4}\cdot\tilde{a}$	$p\bar{4}2a$	74	$(a)\cdot 6_4 : 2$	$p6_422$
25*	$(a) : 2 : m$	$p11\frac{2}{m}$				75	$(a)\cdot 6_5 : 2$	$p6_522$
26*	$(a)\cdot 2 : m$	$p\frac{2}{m}11$						

Примечание. Ось a направлена вдоль оси стержня, оси b, c ортогональны к ней и образуют между собой прямой или косой угол в зависимости от вида симметрии стержня. В международном символе пространственной группы после символа трансляционной группы p на первой, второй и третьей позициях символа указывается совмещение тех или иных элементов симметрии с осями координат в последовательности a, b, c (для младших видов при $n = 2, 2_1$) или с осями a, b и биссектрисой угла $\widehat{b,c}$ (для старших видов при $n > 2$, $n_j > 2_j$). Если с осями координат не совпадают оси или нормали к плоскостям симметрии, на соответствующей позиции символа ставится единица или эта позиция оставляется незаполненной. Звездочкой отмечены 22 вида симметрии лент, различающихся элементами симметрии, но не их ориентировкой к особенной плоскости. Остальные 53 вида описывают симметрию стержней (фигур без особенных плоскостей).

(рис. 100 *г*). Чтобы описать типы предельной симметрии стержней, необходимо комбинировать преобразования трансляционных групп, порождаемых конечными (a), бесконечно малыми (a_0) и формально бесконечно большими (a_∞) переносами, с допустимыми преобразованиями точечных групп при включении в рассмотрение и предельных точечных групп (см. рис. 69). Несмотря на то, что предельные виды симметрии стержней встречаются довольно часто, теоретически они изучены недостаточно. Мы познакомимся вначале на примерах с некоторыми предельными видами симметрии, а в конце параграфа приведем сводную таблицу всех возможных предельных типов симметрии стержней.

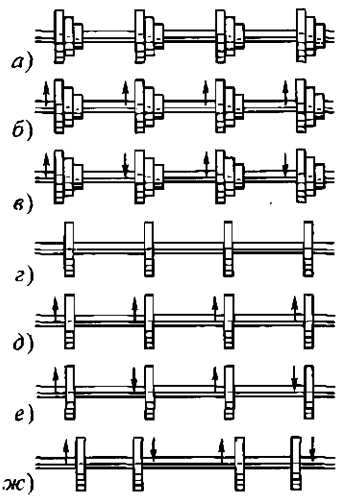


Рис. 102. Стержни с осями конечных переносов и предельной симметрией:
а — $(a)\cdot\infty\cdot m$;
б — $(a)\cdot\infty$;
в — $(a)\cdot\infty\cdot\widetilde{a}$;
г — $(a)\cdot m\cdot\infty : m$;
д — $(a)\cdot\infty : m$;
е — $(a)\cdot\widetilde{a}\cdot\infty : m$;
ж — $(a)\cdot\infty : 2$

На рис. 102 изображен вал с надетыми на него ступенчатыми шкивами. Если вал и шкивы равномерно и вместе вращаются в одну сторону, возникает симметрия $(a)\cdot\infty$; если механизм покоится — вид $(a)\cdot\infty\cdot m$; если вал не вращается, а каждый шкив вращается в противоположном направлении по сравнению с вращением ближайших соседних шкивов, симметрия механизма будет $(a)\cdot\infty\cdot\widetilde{a}$. Если заменить ступенчатые шкивы обыкновенными, получим в случае покоя симметрию $(a)\cdot m\cdot\infty : m$; при вращении шкивов в одну сторону — симметрию $(a)\cdot\infty : m$; в случае поочередного вращения шкивов в обе стороны — симметрию $(a)\cdot\widetilde{a}\cdot\infty : m$. Если расположить шкивы так, чтобы расстояния между ними чередовались (рис. 102 *ж*) и предположить, что в каждой паре шкивов вращение происходит в противоположных направлениях, получится симметрия $(a)\cdot\infty : 2$.

Мы получили семь видов симметрии стержней комбинированием преобразований предельных точечных групп с преобразованиями конечных переносов a и зеркальных переносов $\widetilde{a}$. Посмотрим теперь, какие виды симметрии могут быть получены при комбинировании бесконечно малых переносов с преобразованиями непредельных порождающих точечных групп. Представим себе, например, бесконечно длинную призму (рис. 103 *а*), поперечное сечение которой представляет собой правильный

треугольник. Эта фигура обладает симметрией обыкновенной конечной призмы и, кроме того, имеет ось переносов a_0 с бесконечно малой элементарной трансляцией $a \to 0$. Символ фигуры будет $(a_0) \cdot m \cdot 3 : m$ или в общем виде $(a_0) \cdot m \cdot n : m$. Если призма (рис. 103 *б*) равномерно движется вдоль оси a_0, то пропадают поперечные двойные оси и поперечные плоскости симметрии и возникает новая симметрия типа $(a_0) \cdot n \cdot m$. Покоящаяся фигура, изображенная на рис. 103 *в*, имеет симметрию $(a_0) \cdot n : m$, та же фигура, движущаяся вдоль оси, обладает симметрией $(a_0) \cdot n$. Фигура, показанная на рис. 103 *д*, состоящая из четырех сложенных особым образом призм, обладает симметрией $(a_0) \cdot \widehat{2n}$ в том случае, если одна пара противолежащих призм перемещается вдоль оси в одну сторону, а другая — в другую. На рис. 103 *е* показан пример симметрии $(a_0) \cdot n : 2$. Эта фигура состоит из восьми труб, расположенных вдоль сторон квадратной призмы; по трубам, изображенным белыми кругами, течет вода, скажем, к наблюдателю; по четырем другим трубам, условно показанным на чертеже черными кругами, вода течет от наблюдателя. Подобным же образом получается и вид $(a_0) \cdot \widetilde{4} \cdot m$ (рис. 103 *и*).

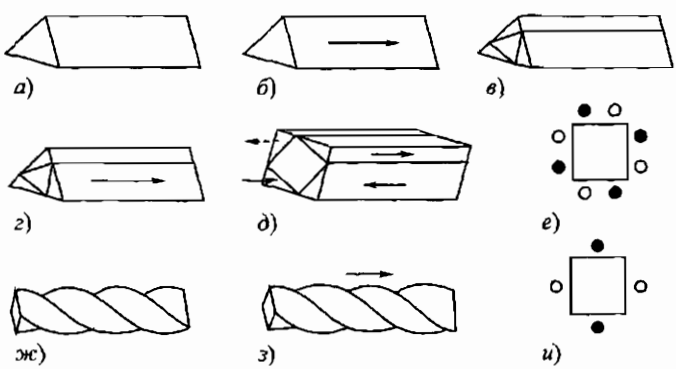


Рис. 103. Стержни с осями бесконечно малых (*а–и*) и конечных (*ж,з*) переносов и предельной симметрией

а — $(a_0) \cdot m \cdot 3 : m$; *б* — $(a_0) \cdot 3 \cdot m$; *в* — $(a_0) \cdot 3 : m$; *г* — $(a_0) \cdot 3$; *д* — $(a_0) \cdot \widetilde{4}$; *е* — $(a_0) \cdot 4 : 2$; *ж* — $(a) \cdot \infty_0^+ \cdot 4{:}2$; *з* — $(a) \cdot \infty_0^+ \cdot 4$; *и* — $(a_0) \cdot \widetilde{4} \cdot m$;

Новые виды предельной симметрии, содержащие подгруппы конечных переносов, получаются от размножения фигур с симметрией n и $n : 2$ с помощью винтовых осей бесконечного порядка ∞_0^+, ∞_0^-, и ∞_0 (определение соответствующих операций см. на стр. 121). При-

мером симметрии $(a) \cdot \infty_0^+ \cdot n : 2$ могут служить закрученные вправо призмы (рис. 103 *ж*), отвечающие тому, что в технике называется многозаходными винтами. Число ниток в таком винте равно числу ребер закручиваемой призмы; это значит, что из шестигранной призмы, например, получается шестизаходный винт, из двугранной призмы (ленты) — двухзаходный (рис. 104 *а*), из «одногранной» призмы, т. е. из прямой линии, закручиваемой вокруг некоторой оси, возникает однозаходный винт (рис. 104 *б*). Едва ли многие отдавали себе отчет в том, что многозаходные винты обладают, наряду с винтовой осью бесконечного порядка, также одной простой осью порядка, равного числу ниток винта, а неполярные винты — также по перечными двойными осями симметрии. Винты могут быть «правыми» и «левыми» в зависимости от способа закручивания стержней. Энантиоморфизм стержней существенно отличается от энантиоморфима фигур с особенными точками. В то время как энантиоморфные фигуры с особенными точками обладают одинаковой симметрией (правых и левых простых осей симметрии нет), правые и левые винты отличаются друг от друга наличием правой или левой винтовой оси (в теории групп энантиоморфные группы считаются изоморфными).

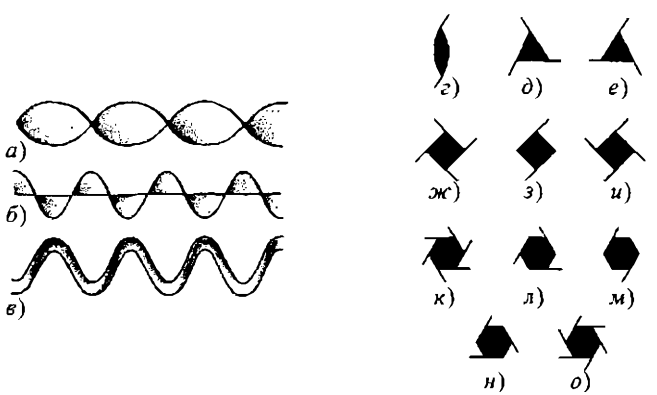


Рис. 104. Стержни с предельной симметрией *а–в*:
а — скрученная лента — пример двухзаходного ванта; *б* — однозаходный винт; *в* — змеевик с текущей водой, навитый на цилиндр.
Графические символы ортогональных чертежу винтовых осей симметрии, встречающихся у кристаллографических стержней *г–о*:
г — 2_1; *д* — 3_1; *е* — 3_2; *ж* — 4_1; *з* — 4_2; *и* — 4_3; *к* — 6_1; *л* — 6_2; *м* — 6_3; *н* — 6_4; *о* — 6_5

Существованием двойных поперечных осей симметрии, между прочим, обусловливается тот хорошо известный факт, что винты входят в свои гайки обоими концами. Если мы лишим симметрию винта ее двойных осей, то получим вид симметрии $(a)\cdot\infty_0^+\cdot n$ (рис. 103 *з*). Простейший пример фигур этого рода мы имеем в трубчатом змеевике (рис. 104 *в*), по которому пущена вода; винтовая ось симметрии бесконечного порядка — единственный элемент симметрии этой фигуры.

Нам остается еще рассмотреть несколько наиболее интересных предельных видов симметрии, получающихся от сочетания бесконечно малых переносов с преобразованиями предельных точечных групп. Простейший по непосредственному восприятию вид симметрии этого рода мы имеем в обыкновенном бесконечно длинном цилиндре или цилиндрической трубе (рис. 105 *а*). Символ этой симметрии $(a_0)\cdot m\cdot\infty : m$. Если пустить по трубе воду (рис. 105 *б*), то выпадут поперечные плоскости, двойные оси и центры симметрии, и мы получим вид симметрии $(a_0)\cdot\infty\cdot m$. Вращающаяся труба имеет симметрию $(a_0)\cdot\infty : m$ (рис. 105 *в*); та же вращающаяся труба, внутри которой по цилиндрическому неподвижному сердечнику проходит постоянный электрический ток (рис. 105 *г*), имеет симметрию $(a_0)\cdot\infty$. Закрученная труба или цилиндрическая нить (рис. 105 *д*), обладающие упругими натяжениями, имеют симметрию $(a_0)\cdot\infty : 2$. Если по закрученной трубе пустить воду (рис. 105 *е*), то выпадут двойные оси, и мы снова будем иметь симметрию $(a_0)\cdot\infty$.

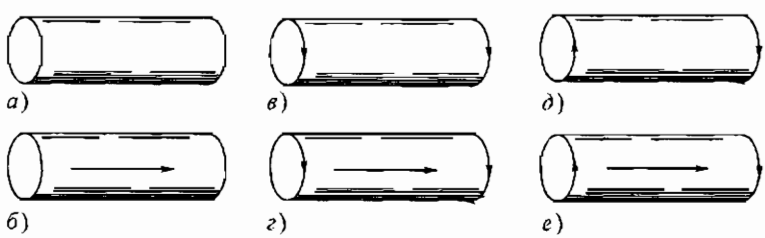


Рис. 105. Стержни с осями бесконечно малых переносов и предельной симметрией:
а — $(a_0)\cdot m\cdot\infty : m$; *б* — $(a_0)\cdot\infty\cdot m$; *в* — $(a_0)\cdot\infty : m$; *г* — $(a_0)\cdot\infty = (a_0)(\infty : m\cap\infty\cdot m)$; *д* — $(a_0)\cdot\infty : 2$; *е* — $(a_0)\cdot\infty = (a_0)(\infty : 2\cap\infty\cdot m)$. Знаком скобы $\cap$ обозначено пересечение — общая подгруппа объединяемых скобой групп симметрии

Приведем в заключение таблицу типов предельной симметрии стержней (табл. 7). За основу возьмем табл. 5, в которой были пере-

числены типы симметрии стержней, содержащие подгруппу конечных переносов (a). Заменяя подгруппу (a) подгруппой бесконечно малых переносов (a_0), перепишем результаты в первом столбце новой таблицы; при этом типы симметрии, содержащие плоскости скользящего отражения $\widetilde{a}$, сольются с типами симметрии, содержащими соответствующие зеркальные плоскости $m(\widetilde{a} \to m)$; подобным же образом при $a \to 0$ произойдут замены $n_j \to n$ и $(a) \cdot n_j \to (a_0) \cdot n$.

Ко второму столбцу новой таблицы перейдем предельным переходом $n \to \infty$, сохраняя в типах симметрии табл. 5 подгруппу конечных переносов (a); при этом конечные точечные группы заменяются предельными группами. Заметим, что под символом типа $(a) \cdot \infty_0^+ \cdot n : 2$ и т. д. мы объединяем бесконечный ряд групп с различными n. Это будут несимморфные подгруппы групп типа $(a) \cdot \infty : 2$.

Типами симметрии первого столбца описываются симметричные линейные континуумы (стержни, выполненные из сплошной среды), обладающие осями дискретных поворотов (см. рис. 103 *а–и*). Типами симметрии второго столбца описываются линейные дисконтинуумы, обладающие непрерывными поворотами и дискретными переносами вдоль оси a (см. рис. 102 *а–ж*; 103 *ж, з*).

Остальные типы предельной симметрии мы получим деформациями сжатия и растяжения стержней, формулы симметрии которых записаны во втором столбце нашей таблицы. При деформации сжатия подгруппа конечных переносов (a) заменяется подгруппой бесконечно малых переносов (a_0), и мы переходим к типам симметрии третьего столбца. Эти типы описывают симметрию одномерных континуумов (стержней, выполненных из сплошной среды), отличающихся от континуумов первого столбца произвольными (в том числе бесконечно малыми) поворотами вдоль главной оси. Заметим, что все типы третьего столбца допускают, наряду с a_0, также и конечные переносы a, а типы, не содержащие плоскостей симметрии, допускают преобразования ∞_0^+, ∞_0^- или ∞_0.

Деформациями растяжения стержней, символы которых помещены во втором столбце, перейдем к апериодическим структурам, содержащим оси бесконечных переносов (a_∞). Неясно, имеется ли физический смысл рассматривать такие типы (не сводящиеся к предыдущим), которые перечислены в четвертом и пятом столбцах таблицы. Во всяком случае, формально их можно получить. Стержни четвертого и пятого столбцов различаются между собой как дискретные винтовые дисконтинуумы, допускающие преобразования α_t и ∞_t с иррациональным конечным и бесконечно малым винтовым поворотом (при конечном поступании t) соответственно.

Примером фигур с симметрией $(a_\infty) \cdot \alpha_t^+ \cdot 2 : 2$ и $(a_\infty) \cdot \alpha_t^- \cdot 2 : 2$ являются стержни, показанные на рис. 100 *г*.

Таблица 7. Типы предельной симметрии стержней

Типы, порождаемые подгруппой (a_0) и конечными точечными группами	Типы, порождаемые подгруппой (a) и предельными точечными группами	Типы, порождаемые подгруппой (a_0) и предельными точечными группами	Типы, порождаемые подгруппой (a_∞) и группами конечных иррациональных поворотов α_t точечными группами	Типы, порождаемые подгруппой (a_∞) и предельными группами с осями ∞_t	Сходственные виды предельной симметрии исходных конечных фигур
$(a_0)\cdot n$	$(a)\cdot\infty$	$(a_0)\cdot\infty$	—	—	∞
	$(a)\cdot\infty_0^+\cdot n$		$(a_\infty)\cdot\alpha_t^+\cdot n$	$(a_\infty)\cdot\infty_t^+\cdot n$	
	$(a)\cdot\infty_0\cdot n$		$(a_\infty)\cdot\alpha_t\cdot n$	$(a_\infty)\cdot\infty_t\cdot n$	
	$(a)\cdot\infty_0^-\cdot n$		$(a_\infty)\cdot\alpha_t^-\cdot n$	$(a_\infty)\cdot\infty_t^-\cdot n$	
$(a_0)\cdot\widetilde{2n}$	$(a)\cdot\infty : m$	$(a_0)\cdot\infty\cdot m$	—	—	$\infty : m$
$(a_0)\cdot n : m$					
$(a_0)\cdot n\cdot m$	$(a)\cdot\infty\cdot m$	$(a_0)\cdot\infty\cdot m$	—	—	$\infty\cdot m$
	$(a)\cdot\infty\cdot\bar{a}$				
$(a_0)\cdot n : 2$	$(a)\cdot\infty : 2$	$(a_0)\cdot\infty : 2$	—	—	$\infty : 2$
	$(a)\cdot\infty_0^+\cdot n : 2$		$(a_\infty)\cdot\alpha_t^+\cdot n : 2$	$(a_\infty)\cdot\infty_t^+\cdot n : 2$	
	$(a)\cdot\infty_0\cdot n : 2$		$(a_\infty)\cdot\alpha_t\cdot n : 2$	$(a_\infty)\cdot\infty_t\cdot n : 2$	
	$(a)\cdot\infty_0^-\cdot n : 2$		$(a_\infty)\cdot\alpha_t^-\cdot n : 2$	$(a_\infty)\cdot\infty_t^-\cdot n : 2$	
$(a_0)\cdot\widetilde{2n}\cdot m$	$(a)\cdot m\cdot\infty : m$	$(a_0)\cdot m\cdot\infty : m$	—	—	$m\cdot\infty : m$
$(a_0)\cdot m\cdot n : m$	$(a)\cdot\bar{a}\cdot\infty : m$				

Примечание. Полагая в формулах симметрии второго, четвертого и пятого столбцов $n = 1, 2, \ldots, n$, получаем типы симметрии для однозаходных, двузаходных и многозаходных винтовых стержней, принадлежащих одному семейству.

Всего, таким образом, имеется бесконечное число типов предельной симметрии стержней, распределенных среди конечного числа семейств.

Некоторые обобщения. Единый принцип построения симметричных фигур в трехмерном пространстве

Прежде чем приступить к описанию более сложных видов симметрии бесконечных фигур, необходимо подвести итог всему изложенному. Мы рассмотрели множество видов симметрии, сознательно откладывая до более позднего времени обсуждение математически строгих определении. Нам хотелось сначала показать на примерах разнообразие форм проявления симметрии и только потом, после ознакомления читателей с конкретным материалом, делать те или иные обобщения. Кроме того, мы стремились отразить в нашей книге тот действительный путь, которым шло развитие учения о симметрии.

История этой дисциплины показывает, что содержание понятия симметрии даже в чисто геометрическом аспекте претерпевало в течение времени значительные изменения. Сначала исследователи под симметрией геометрических форм понимали исключительно их свойства, сводимые к преобразованиям зеркального отражения в плоскостях. При таком понимании фигуры, обладающие осями симметрии, но не имеющие зеркальных плоскостей, считались несимметричными. Когда к плоскостям симметрии были добавлены простые поворотные оси симметрии, в категорию симметричных фигур не попали фигуры с зеркально-поворотными осями. Но и всех этих элементов, из которых конструируются виды симметрии конечных фигур (Гессель, 1830; Гадолин, 1867), оказалось недостаточно для описания симметрии бесконечных фигур. Пришлось вводить преобразования переноса, винтового поворота и скользящего отражения и соответствующие этим операциям новые элементы симметрии. Такое значительное расширение понятия симметрии породило диаметрально противоположное течение — исключить из учения о симметрии все преобразования второго рода (отражения в плоскостях симметрии, зеркальные повороты, скользящие отражения в плоскостях). Представителями этого течения были Жордан (1869) и Зонке (1879). При этом Жордан включил, а Зонке исключил из рассмотрения бесконечно малые переносы и повороты. Были и компромиссные попытки обойтись в учении о симметрии одними плоскостями, простыми поворотными осями и осями конечных переносов (Бравэ, 1850). Федоров (1891) и Шёнфлис (1891) объединили наконец все симметрические операции, но отказались рассматривать введенные Жорданом бесконечно малые движения (переноси и вращения). Этим ученым казалось, что такие операции якобы противоречат симметрии кристаллов, которой только и были посвящены их работы. В нашей работе мы стремились устранить и этот пробел, уделяя особенное внимание предельным видам симметрии.

После того как в понятии симметрического преобразования объединились операции первого и второго рода, казавшиеся столь различными, многие исследователи, которым такое объединение конгруэнтности и зеркальности представлялось слишком искусственным, сосредоточили усилия на нахождении единого принципа построения симметричных фигур. Наиболее простое решение вопроса дали Вульф (1897) и Виола (1904). Для этого им пришлось вернуться (как часто бывает в истории науки) к первоначальной идее использования плоскости в качестве основного элемента симметрии. Оба ученых доказали, что все симметрические преобразования конечных фигур в трехмерном пространстве сводятся к последовательно проведенным отражениям не более чем в трех плоскостях, которые могут и не быть плоскостями симметрии. Распространяя идею Вульфа и Виола также и на бесконечные фигуры, можно

показать (Болдырев, 1907), что любое симметрическое преобразование (из допускаемого нами класса преобразований) может быть заменено последовательным отражением фигур максимально в четырех плоскостях, которые сами по себе могут и не быть плоскостями симметрии. Кстати говоря, этот путь использован Н. В. Беловым в «классном» методе вывода 230 пространственных (федоровских) групп (см. Н. В. Белов, 1951).

Так, поворот на угол α вокруг некоторой оси эквивалентен последовательно проведенному отражению в двух плоскостях, проходящих через данную ось и образующих между собой угол $\alpha/2$ (рис. 106).

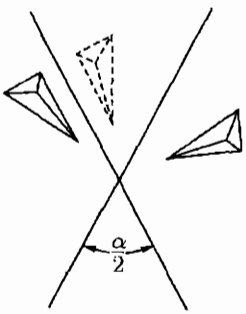


Рис. 106. Два произведенных последовательно одно за другим отражения фигуры в плоскостях, образующих угол $^{\alpha}/_{2}$ равносильны повороту фигуры на угол α вокруг линии пересечения плоскостей

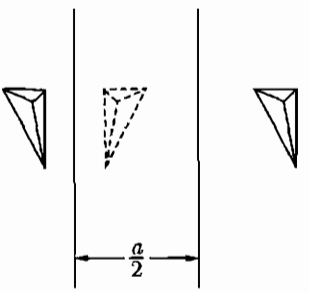


Рис. 107. Два отражения фигуры в параллельных плоскостях», отстоящих друг от друга на расстояние $a/2$, равносильны переносу фигуры по перпендикуляру к плоскостям на расстояние a

Перенос a равносилен двум последовательно произведенным отражениям в параллельных плоскостях, расположенных на расстоянии $\alpha/2$ друг от друга (рис. 107).

Зеркальный поворот, состоящий, как известно, из поворота и отражения, эквивалентен, очевидно, отражению в трех плоскостях: двух пересекающихся вдоль оси и одной поперечной к ней.

Скользящее отражение, состоящее из переноса и отражения, эквивалентно отражению в трех плоскостях: двух параллельных и одной к ним перпендикулярной.

Винтовое движение, которое, как известно, может быть разложено на два движения (вращение и перенос), очевидно, эквивалентно отражениям в четырех плоскостях: двух пересекающихся по оси вращения под половинным углом и двух параллельных плоскостях, к ним поперечных.

Нетрудно показать, что большее число отражений по своему результату не будет отличаться от перечисленных операций (в их число входит и единственное отражение в плоскости симметрии). Можно также убедиться в том, что последовательные отражения в плоскостях переводят прямые линии в прямые, сохраняя углы между ними и длины масштабных отрезков, выбранных на прямых. Это, в свою очередь, означает, что при всех перечисленных выше преобразованиях фигуры преобразуются в себя, как твердое тело без деформаций. Преобразования, обладающие таким свойством, называются изометрическими. Ограничиваясь классом *изометрических* преобразований, дадим теперь следующее простое и исчерпывающее определение симметрии геометрических фигур в трехмерном пространстве.

Симметричной называется всякая (конечная или бесконечная) фигура, которая может совмещаться сама с собой в результате одного или нескольких последовательно произведенных отражений в плоскостях.

Заканчивая общие замечания, напомним читателю, что свойство симметрии есть свойство относительное. Любой объект может иметь или не иметь специфическую симметрию в зависимости от выделенных свойств или той внутренней структуры, которую мы в данный момент рассматриваем. Но и при фиксированном уровне структуры объекта остаются еще два аспекта определения симметрии — внешний и внутренний.

Представим себе наблюдателя, жестко связанного с исследуемой фигурой и испытывающего изометрические преобразования вместе с ней. Любое перемещение (движение) фигуры в пространстве будет служить, с точки зрения внутреннего наблюдателя, преобразованием симметрии фигуры, так как оно сохраняет все внутренние свойства объекта: в каждый момент движения фигура, как целое, совпадает с собой. В то же время для внешнего наблюдателя, жестко связанного с какой-либо неподвижной системой отсчета, преобразование симметрии фигуры, помимо сохранения относительного расположения частей, должно сохранять первоначальное положение и ориентировку фигуры в целом в фиксированной области пространства. Говоря о симметрии фигур в этой книге, мы всюду молчаливо подразумеваем именно внешнюю симметрию: группа внешней симметрии фигуры определяется совокупностью преобразований (изометрических или ортогональных), под действием которых части фигуры обмениваются местами, а фигура в целом совпадает в первоначальном положении с собой.

Изометрические преобразования бесконечных фигур называются иначе *движениями*. Движения, сохраняющие у фигур по меньшей мере одну точку инвариантной, относятся к классу ортогональных преобразований. Все встречавшиеся нам до сих пор группы симметрии бесконеч-

Таблица 8. Элементы симметрии трехмерных фигур и соответствующие этим элементам операции симметрии[1]

Элемент симметрии	Символ элемента	Определяющее уравнение	Примечания и примеры
Ось симметрии порядка n	n	$n^n = 1$	1,2,3,...,∞
Плоскость симметрии	m	$m^2 = 1$	
Зеркально-поворотная ось симметрии (четного порядка)[2]	$\bar{n}$	$\bar{n}^n = 1$	$\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \ldots, \overline{\infty}$
Инверсионно-поворотная ось[2]			
порядка $2n$	$\overline{n}$	$\overline{n}^{2n} = 1$	$\overline{1} = \overline{2}$, $\overline{3} = \widetilde{6}$, $\overline{5} = \widetilde{10}, \ldots, \overline{\infty}$
порядка n	$\overline{n}$	$\overline{n}^n = 1$	$\overline{2} = m$, $\overline{4} = \widetilde{4}$, $\overline{6} = \widetilde{3}, \ldots, \overline{\infty}$
Оси конечных переносов[3]	a	$a^n = n\mathbf{a} \equiv 1 (\mathrm{mod} n\mathbf{a})$	В пределе a_0 и a_∞
	b	$b^n = n\mathbf{b} \equiv 1 (\mathrm{mod} n\mathbf{b})$	В пределе b_0 и b_∞
	c	$c^n = n\mathbf{c} \equiv 1 (\mathrm{mod} n\mathbf{c})$	В пределе c_0 и c_∞
Винтовая ось порядка n с конечным переносом $\mathbf{t} = \frac{\tau}{n} \cdot j$ и рациональным углом поворота ($j = 1, 2, \ldots, n-1$)[4]	n_j	$n_j^n = \tau \equiv 1 (\mathrm{mod} \tau)$	Правые оси при $j < \frac{n}{2}$: $3_1, 4_1, 5_1, 5_2, \ldots$ Левые оси при $j > \frac{n}{2}$: $3_2, 4_3, 5_3, 5_4, \ldots$ Оси безразличного вращения при $j = \frac{n}{2}$: $2_1, 4_2, 6_3, \ldots$
Винтовая ось с конечным переносом $\mathbf{t}$ и иррациональным углом поворота α	α_t		Ось α_t^+ правая; α_t^- — левая; α_t — безразличного вращения; в пределе $\infty_0 = \infty$ или $\infty_t^-, \infty_t^-, \infty_t$
Плоскости скользящего отражения с переносами $\mathbf{a}/2$, $\mathbf{b}/2$ и $\mathbf{c}/2$ соответственно[5]	$\widetilde{a}$	$\widetilde{a^2} = \mathbf{a} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, \mathbf{a})$	
	$\widetilde{b}$	$\widetilde{b^2} = \mathbf{b} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, \mathbf{b})$	
	$\widetilde{c}$	$\widetilde{c^2} = \mathbf{c} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, \mathbf{c})$	

Примечание.

[1] Элементом симметрии называется геометрическое место точек, сохраняющееся неподвижным при всех преобразованиях циклической группы G, порождаемой степенями произвольной операции симметрии g (см. стр. 253). Степень g^n операции g есть n раз повторенная операция g. Определяющее уравнение $g^n = 1$ определяет порядок n операции g и число различных элементов циклической группы $G = \{g^1, g^2, \ldots, g^n\}$. Элементы симметрии и порождающие их операции обозначаются одним и тем же символом g.

[2] По определению $\bar{n} = mn = nm$, $\overline{n} = \bar{1}n = \overline{n}1$, т. е. комбинированная операция $\bar{n}$ (или $\overline{n}$) есть последовательно выполненные поворот n и отражение в воображаемой перпендикулярной плоскости m (или инверсия 1).

[3] Для бесконечной периодической фигуры n-е степени переносов на периоды $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ можно приравнять по модулю операции отождествления 1 при любом $n = 1, 2, \ldots, \infty$.

[4] В качестве оси переносов τ у бордюров, лент и стержней выбиралась ось a ($\tau \equiv a$; см. гл. 4–6). В случае трехмерно-периодических фигур (гл. 9) всегда можно выбрать три оси переносов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ таким образом, что произвольный перенос τ будет линейной комбинацией переносов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$: $\tau = p_1\mathbf{a} + p_2\mathbf{b} + p_3\mathbf{c}$ (p_1, p_2, $p_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

[5] Для плоскостей скользящего отражения $\widetilde{d}$ и $\widetilde{n}$, встречающихся у трехмерно-периодических дисконтинуумов (см. гл. 9), переносы в диагональных направлениях могут быть равны $\beta(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\beta(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\beta(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ или $\beta(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ при $\beta = {}^1/_4$ (для плоскостей $\widetilde{d}$) и $\beta = {}^1/_2$ (для плоскостей $\widetilde{n}$). Определяющие уравнения: $\widetilde{d^4} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ и т. д., $\widetilde{n^2} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ и т. д. По международной системе плоскости скользящего отражения обозначаются буквами a, b, c, d, n без верхнего знака тильды.

ных и конечных фигур — пространственные и точечные — относятся, следовательно, к группам движений и к их ортогональным подгруппам.

В табл. 8 мы приводим список элементов симметрии фигур и выполняемых с их помощью изометрических преобразований в трехмерном пространстве. Позднее (гл. 11 и 12) мы снимем ограничение изометричности при переходе к более широким классам симметрических преобразований геометрических и негеометрических величин.

Глава 7

Симметрия сетчатых орнаментов. Двумерные континуумы и семиконтинуумы

Мы закончили рассмотрение фигур с особенной точкой и фигур без особенных точек, но с особенным направлением, т. е. стержней, лент и бордюров. С особенным направлением у этих фигур совпадала и особенная ось переносов. Далее нам предстоит остановиться на фигурах с двумя непараллельными осями и на фигурах с тремя не лежащими в одной плоскости осями переносов. В этом случае каждой оси будет соответствовать, как увидим, бесконечная система эквивалентных параллельных направлений.

В соответствии с размерностью пространств, в которые погружены наши фигуры, и характером их особенных элементов (зависящим от числа осей переносов) мы будем различать симметрию нуль-мерных, одномерных, двумерных и трехмерных фигур в пространствах такого же или большего числа измерений. Например, повышая размерность «объемлющего» пространства с двух до трех, т. е. разрешая производить геометрические преобразования в трехмерном пространстве, мы переходим от бордюров (фигур с особенной полярной плоскостью и особенным направлением в ней) к лентам (фигурам с особенной двусторонней плоскостью и особенным направлением). В этой и следующей главе речь будет идти о симметрии сетчатых орнаментов и слоев, находящихся в таком же отношении друг к другу, в каком бордюры относятся к лентам.

Всякий сетчатый орнамент характеризуется отсутствием особенных точек, наличием особенной полярной плоскости и двух осей переносов. У слоя, при сохранении двух условий, особенная плоскость становится двусторонней, неполярной. Простейший сетчатый орнамент представляет собой сетку из параллелограммов. И в более сложных случаях всегда можно обнаружить сетку, узлы которой составляют вполне определенную систему эквивалентных точек орнамента. Более того, как увидим, любая точка орнамента может быть принята за начальную при построении такой сетки. Сетчатые орнаменты широко применяются в произ-

водстве обоев, тканей, ковров, в кирпичной кладке стен, при укладке кафельных полос, брусчатых мостовых. Они встречаются также в биологических тканях животных и растений, в чешуе рыб, пчелиных сотах и т. д.

Плоские сетки

Начнем рассмотрение симметрии орнаментов с простых плоских сеток. Чтобы построить плоскую сетку в общем виде, поступаем следующим образом. Выбираем произвольную точку A^1 и подвергаем ее переносам вдоль оси трансляций a; в результате получаем линейный ряд равноотстоящих друг от друга точек $A_1^1, A_2^1; A_3^1 \ldots$ (рис. 108). Если использовать затем переносы вдоль ос b, получим бесконечное множество рядов точек, образующих в совокупности *параллелограмматическую систему эквивалентных точек*. Соединяя точки прямыми, параллельными осям переносов, получим плоскую сетку. Легко заметить, что в результате сочетания двух неколлинеарных осей переносов в системе точек возникает бесконечное множество новых осей переносов; любая прямая, соединяющая два произвольных узла системы, может быть принята за ось переносов. Совокупность всех возможных переносов, задаваемых осями переносов a, b, мы будем называть группой трансляций и обозначать символом (b/a) при косом наклоне осей, или $(b : a)$, если оси b, a взаимно ортогональны, или буквой p (по международной системе). Одной и той же системе точек, полученной описанным выше образом, отвечает бесчисленное множество плоских сеток и одна трансляционная группа, если оси переносов у новых сеток проведены так, что все точки первоначальной системы получаются без пропусков.

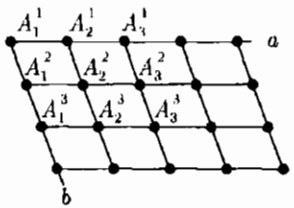


Рис. 108. Построение плоской сетки с помощью осей переносов a и b

На рис. 109 изображены три сетки, построенные для одной и той же системы точек. Интересно отметить, что в зависимости от способа соединения узлов и той симметрии, которую мы приписываем размножаемым переносами точкам, изменяется и симметрия составной фигуры, состоящей из системы узлов и соединяющих их прямых линий. Предположим, например, что точки, изображенные на рис. 109 условно в виде черных плоских кружков, на самом деле имеют симметрию предельных групп $\infty \cdot m$.

Иными словами, мы предполагаем, что поворот на произвольный угол вокруг оси, проходящей через точку ортогонально чертежу, и отра-

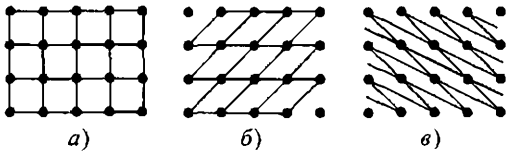


Рис. 109. Одной и той же системе узлов отвечает бесконечное множество сеток в зависимости от способов соединения узлов

жение в любой плоскости, проходящей через эту ось, совмещают фиксированную точку с собой. Симметрия системы точек зависит от взаимного расположения точек и может не совпадать с симметрией изолированной точки. Легко видеть, что взаимное расположение точек для всех трех систем на рис. 109 одно и то же и характеризуется симметрией $4 \cdot m$: при поворотах на 90° вокруг осей, проходящих через точки, и соответствующих отражениях к вертикальных плоскостях как фиксированная точка, так и система в целом совпадают с собой. Однако только квадратная сетка (рис. 109 *в*) будет иметь ту же симметрию, что и положенная в основу ее построения система точек, а именно: и сетка, и система узлов обладают вертикальными четверными осями, проходящими через узлы и середины квадратов, вертикальными двойными осями, проходящими через середины сторон квадратов, вертикальными плоскостями симметрии и т. д. Другие сетки (рис. 109 *б, в*), построенные на той же системе узлов, имеют уже другую симметрию; например, у них нет четверных осей и вертикальных плоскостей симметрии. В дальнейшем мы будем предпочитать строить лишь такие сетки, симметрия которых совпадает с симметрией заданной системы узлов.

Если соединение узлов производится так, что в каждом из них пересекаются две (и только две) прямые, и если прямые не имеют иных точек пересечения, кроме заданных узлов, то независимо от способа соединения получаемые параллелограммы имеют одинаковую площадь: значит, на рис. 109 площади квадратов равны площадям параллелограммов. Построенные таким образом параллелограммы, задаваемые длинами сторон a, b и углом $\alpha = \widehat{a, b}$ между сторонами, мы будем называть элементарными ячейками сеток, а величины a, b, α — параметрами ячеек.

Существует только пять параллелограмматических систем, отличающихся друг от друга по симметрии и (или) параметрам ячеек.

1. *Квадратная система узлов* ($a : a$). Имеет расположение узлов, которое позволяет построить сетку с элементарной ячейкой в форме квадрата. Очевидно, в этом случае $b = a$, $\alpha = 90°$ (рис. 110 *а*). Симметрия квадрата на полярной плоскости $4 \cdot m$.

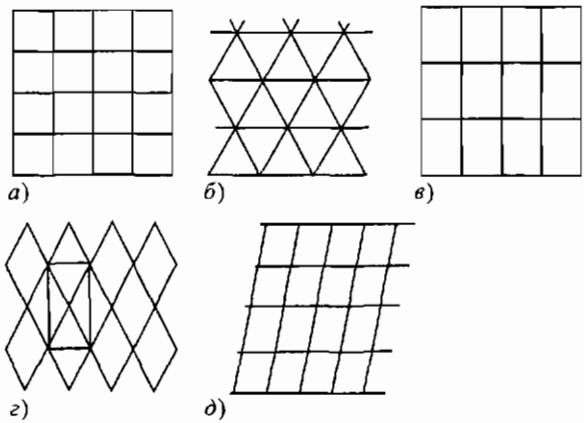


Рис. 110. Пять параллелограмматических систем точек: *а* — квадратная система узлов с симметрией $(a:a):4\cdot m$; *б* — правильная треугольная система узлов с симметрией $(a/a):6\cdot m$; *в* — прямоугольная система узлов с симметрией $(b:a):2\cdot m$; *г* — ромбическая система узлов с симметрией $(a/a):2\cdot m$ или $(c/b:a):2\cdot m$; *д* — косая параллелограмматическая система узлов с симметрией $(b/a):2$. Приводятся символы максимально высокой пространственной симметрии, совместимой с существованием параллелограмматических сеток

2. *Правильная треугольная система узлов* (a/a) (косая черта между одинаковыми буквами обозначает здесь наклон осей под углом 60°). Элементарная ячейка может быть выбрана в форме ромба, составленного из двух правильных треугольников: $b=a$, $\alpha=60°$ (рис. 110 *б*). Симметрия ячейки $2\cdot m$ не отражает в данном случае максимально возможной симметрии $6\cdot m$ правильной системы точек. Такую симметрию будет иметь ячейка в форме правильного шестиугольника, составленная из трех ромбов.

3. *Ромбическая система узлов* (a/a). Элементарная примитивная ячейка имеет форму произвольного ромба: $b=a$, $\alpha\neq 90°$, $\alpha\neq 60°$. Вместо примитивной ячейки (a/a), не содержащей узлов сетки внутри параллелограмма, для той же системы узлов можно выбрать центрированную ячейку, задаваемую ортогональными переносами $(b:a)$ и центрирующим переносом на вектор $\mathbf{c}=(\mathbf{b}+\mathbf{a})/\mathbf{2}$. Соответствующую группу трансляций будем обозначать символом $(c/b:a)$ или буквой *c* по международной системе (рис. 110 *г*). При любом выборе ячейки (ромб или центрированный прямоугольник) ее симметрия $2\cdot m$.

4. *Прямоугольная система узлов* $(b:a)$. Имеет элементарные ячейки в форме прямоугольников: $b \neq a, \alpha = 90°$ (рис. 110*в*). Заметим, что точечные группы максимально возможной симметрии сеток $(2 \cdot m)$ у ромбической и прямоугольной систем совпадают, трансляционные же группы $c = (c/b : a)$ и $p = (b : a)$ различны.

5. *Косая параллелограмматическая система узлов* (b/a). Имеет элементарную ячейку общего вида: $b \neq a, \alpha \neq 90°$ (рис. 110*д*). Симметрия произвольного параллелограмма на полярной плоскости — 2.

У всех рассмотренных систем точек, кроме осей переносов, содержатся также и другие элементы симметрии. Их возникновение в данном случае объясняется тем, что в качестве фигуры, подвергаемой переносам, была взята точка, которой мы интуитивно склонны приписывать наивысшую для конечных фигур симметрию. Если бы вместо геометрической точки мы взяли «материальную» точку с иной симметрией или подвергли переносам какую-либо асимметричную фигуру, например асимметричный тетраэдр, то симметрия системы понизилась бы. В частности, для системы асимметричных тетраэдров, расположенных по узлам квадратной сетки (рис. 111), мы не имели бы осей симметрии четвертого порядка и плоскостей симметрии, а только систему осей переносов $(a : a)$. В кристаллографии это обстоятельство часто упускают из вида, полагая, что наличие прямых углов в ячейке или кристалле уже гарантирует принадлежность его к высокосимметричной системе.

Из сказанного ясно, что полной группой симметрических преобразований для бесконечной параллелограмматической системы фигур будет так называемая *пространственная группа* симметрии. В эту группу входят трансляции, образующие подгруппы (b/a), преобразования точечных групп, характеризующие симметрию размножаемых конечных фигур, а также комбинированные преобразования — винтовые повороты вокруг винтовых осей n_j, отражения с переносом в плоскостях скользящего отражения $\tilde{b}$ и $\tilde{a}$ и т. д. Как и всюду в книге, мы будем обозначать пространственные группы комбинированным символом, записывая после символа трансляционной группы символ точечной группы (для симморфных групп, см. стр. 260) или символ изоморфной ей «точечной» группы по модулю, содержащий винтовые оси или плоскости скользящего отражения (для несимморфных групп). При такой записи две пространственные группы, $(a/a) : 3 \cdot m$ и $(a/a) : 2 \cdot m$, будут относиться к различным системам, несмотря на внешнее сходство символов трансляционных подгрупп. Заметим, наконец, что, если речь у нас будет идти не о преобразованиях, а об элементах симметрии, мы будем называть их полный набор (отвечающий пространственной группе) видом симметрии параллелограмматической системы или соответственно сетчатого орнамента. Возвращаясь к рис. 110, запишем символы пространственных групп мак-

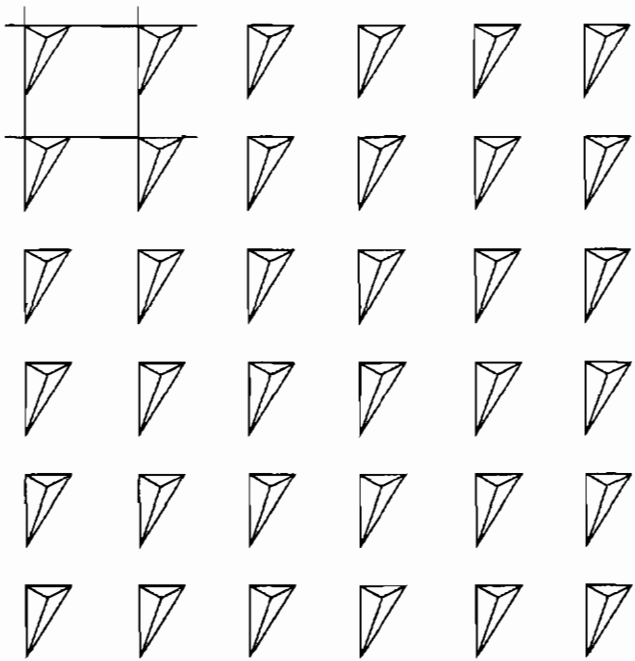


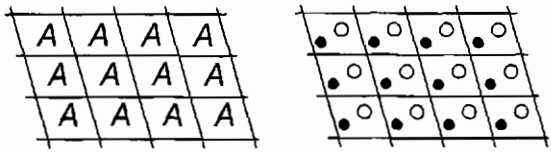
Рис. 111. В результате переносов асимметричной фигуры (тетраэдра) по осям квадратной сетки не возникает никаких новых элементов симметрии. Пространственная группа системы — $(a:a)1 = (b/a)1$

симально высокой симметрии, совместимой с существованием рассмотренных параллелограмматических сеток: а — $(a:a)4\cdot m$; б — $(a/a):6\cdot m$; в — $(b:a):2\cdot m$; г — $(a/a):2\cdot m$ или $(c/b:a):2\cdot m$; д — $(b/a):2$.

Если узлам параллелограмматических плоских сеток приписать симметрию подгрупп старших точечных групп, обладающих свойством сохранять те же самые сетки, получим новые пространственные группы, вывод которых предоставляем читателю.

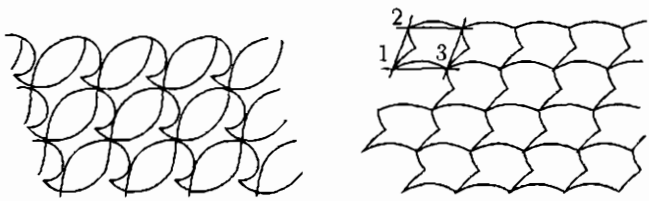
Семнадцать видов симметрии сетчатых орнаментов. Примеры народных орнаментов

Чтобы получить простейший орнамент с пространственной симметрией $(b/a)1$, воспользуемся порождающими переносами любой из пяти



а) *б*)

Рис. 112. Плоский орнамент с симметрией $(b/a)1$:
а — элементарные фигуры разобщены, и каждая состоит из одной части; *б* — фигуры разобщены, и каждая состоит из двух отдельных частей



а) *б*)

Рис. 113. Плоский орнамент с симметрией $(b/a)1$
а — элементарные фигуры пересекаются друг с другом; *б* — фигуры заполняют плоскость без промежутков и перекрытий

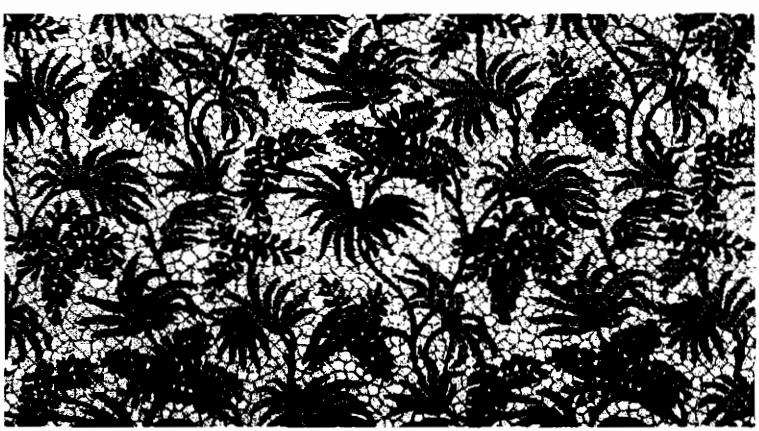


Рис. 114. Образец орнамента с симметрией $(b/a)1$

трансляционных групп (рис. 110) и размножим с их помощью произвольную ассимметричную фигуру подобно тому, как это мы делали на рис. 111 с тетраэдром. Так как симметрия 1 не накладывает на параметры a, b, α никаких ограничений, в общем случае $a \neq b$; $\alpha \neq 60°$ или 90°. Повторяемые переносами равные фигуры могут быть совершенно отделены друг от друга (рис. 112*а*), сами могут состоять из разобщенных частей (рис. 112*б*), могут пересекаться друг с другом (рис. 113, *а*) и, наконец, могут примыкать друг к другу, заполняя плоскость без промежутков (рис. 113*б*). Чтобы построить сетчатый орнамент из частей, заполняющих плоскость без промежутков, поступаем следующим образом. Берем параллелограмматическую систему (рис. 113*б*), соединяем точку 1 с точкой 2 произвольной кривой, не пересекающей себя и не выходящей за пределы одного из параллелограммов, смежных отрезку 1, 2; точки 1 и 3 соединяем другой кривой, соблюдая те же условия, и следим за тем, чтобы новая кривая не пересекла уже проведенную кривую. Повторяя это построение в каждой ячейке, разделим всю плоскость на равные части без промежутков. Условие расположения обеих кривых в пределах одного параллелограмма не является необходимым, но оно гарантирует отсутствие пересечений в системе наших кривых в точках, не совпадающих с узлами. При несоблюдении этого условия такие пересечения могут появиться при параллельных переносах ячеек; в этом случае в периодической фигуре возникнут неравные друг другу области, а нашей задачей было разделение плоскости на равные части. Образцы орнаментов с симметрией (b/a) даны на рис. 114 и 115. Если элементарная фигура орнамента сама по себе сложна и если дан небольшой участок орнамента, то разобраться в его симметрии иногда бывает довольно трудно. Предлагаем читателю убедиться в том, что изображенный на рис. 114 орнамент действительно имеет симметрию $(b/a)1$. Образец чрезвычайно простого орнамента той же симметрии приводим на рис. 115.

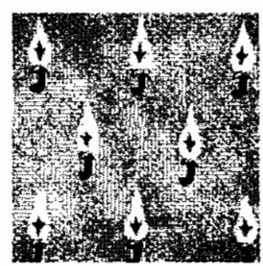


Рис. 115. Персидский орнамент с симметрией $(b/a)1$ (по Оузну Джонсу)

Второй вид симметрии сетчатых орнаментов можно получить переносом бордюров $(a)\cdot\tilde{a}$ в направлении, перпендикулярном его к оси, или, что то же самое, переносами $(b : a)$ асимметричной фигуры и последующими отражениями в плоскости скользящего отражения $\tilde{a}$. Этот новый вид симметрии мы могли бы поэтому обозначить символом $(b : a)\cdot\tilde{a}$. Рассмотрим пример орнамента, отвечающего найденному виду симметрии (рис. 116*а*). Выделим верхний зигзагообразный ряд прямоугольников

(наполовину черных, наполовину белых), вытянутый вдоль горизонтальной прямой. Эти прямоугольники образуют бордюр с симметрией $(a) \cdot \widetilde{a}$ (ср. рис. 77 и 78). Переносом по вертикальной оси b бордюр преобразуется в орнамент $(b : a) \cdot \widetilde{a}$.

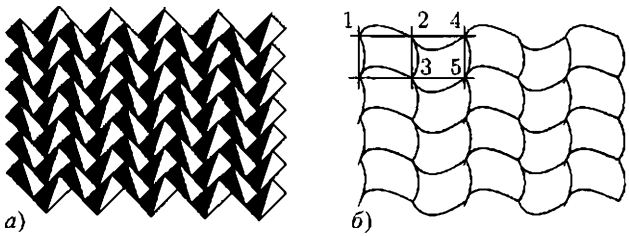


Рис. 116. Орнамент с симметрией $(b/a)\widetilde{a}$:
а — общий случай; *б* — равные фигуры заполняют плоскость без промежутков и перекрытий

Для построения орнамента той же симметрии из частей, заполняющих плоскость без промежутков (рис. 116 *б*), берем вспомогательную (координатную) прямоугольную сетку, не интересуясь ее собственной симметрией. Соединяем узлы 1, 2 и 2, 3 произвольными кривыми, не выходящими за пределы соответствующих прямоугольников и не образующими петель. Точки 2, 4 соединяем кривой зеркально-равной кривой 1, 2; точки 4, 5 соединяем кривой, полученной из кривой 2, 3 скользящим отражением в плоскости a, проходящей посередине между точками 2, 3 и 4, 5. Переносами построенных кривых по горизонтали на расстояние 1–4, равное двойной горизонтальной стороне прямоугольника, получаем бордюр с плоскостью скользящего отражения $\widetilde{a}$. Переносами бордюра по вертикали на расстояние 2–3, равное одной стороне прямоугольника, получаем весь орнамент. Трансляционная сетка этого орнамента, очевидно, состоит из петель, равных прямоугольнику 1, 4, 5.

Третий вид симметрии сетчатых орнаментов может быть получен из бордюров (a) : 2 переносом их в общем случае в косом направлении вдоль оси b, или, что то же самое, из фигуры, с симметрией 2 переносами (b/a) в плоскости, перпендикулярной к оси 2; символ вида симметрии будет (b/a) : 2. Пример такого орнамента дан на рис. 117. В этом орнаменте двойные оси симметрии проходят через центры завитков. Если бы все поля, имеющие форму ромбов с двумя искривленными сторонами, были выкрашены одинаково, то в орнаменте возникли бы еще двойные оси в серединах промежутков между центрами завитков.

В данном примере перенос по оси b происходит не по косому по отношению к горизонтальной оси бордюра направлению, как это должно было быть в общем случае, а по вертикали, что не изменяет симметрии орнамента $(b/a) : 2$. Интересно отметить также, что для построения этого египетского орнамента неизвестный автор выбрал квадратную координатную сетку и расположил центры завитков в узлах сетки, совершенно не считаясь с собственной симметрией сетки, вследствие чего выпали, например, перпендикулярные к чертежу оси симметрии четвертого порядка и петли сетки, с точки зрения симметрии, перестали быть квадратами (ср. рис. 65).

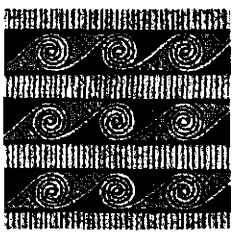


Рис. 117. Пример египетского орнамента с симметрией (b/a):2 (по Оуэну Джонсу).
В общем случае орнаментов этого вида оси второго порядка располагаются по вершинам косого параллелограмма. В данном рисунке они располагаются по вершинам квадрата, отчего не возникает никаких новых элементов симметрии

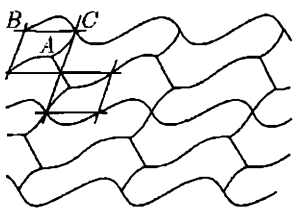


Рис. 118. Орнамент с симметрией (b/a):2.
Плоскость заполнена равными фигурами без промежутков и перекрытий. Элементарная ячейка орнамента образована объединением четырех смежных ромбов, сходящихся в одной вершине

Для получения орнамента, состоящего из заполняющих плоскость равных частей, поступаем следующим образом. Произвольную точку A (рис. 118), взятую внутри одного из параллелограммов косой сетки, соединяем с тремя узлами параллелограмма произвольными линиями, четвертый же узел B соединяем с одним из смежных ему узлов C того же параллелограмма, соблюдая, как всегда, условие непересечения кривых. Разместив перпендикулярные к чертежу двойные оси симметрии по узлам координатной сетки, повторяем сделанное построение, пользуясь поворотами на 180° вокруг этих осей.

Четвертый вид симметрии получаем повторением бордюра $(a) : 2$ с помощью плоскости скользящего отражения $\tilde{b}$, перпендикулярной к оси бордюра, или повторением бордюра $(b) : 2$ с помощью плоскости $\tilde{a}$. Со-

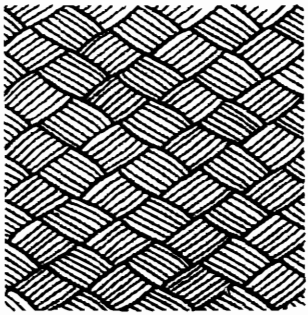


Рис. 119. Образец персидского орнамента с симметрией $(b:a):\widetilde{b}:\widetilde{a}=(b:a):2\odot\widetilde{a}$ (по Оуэну Джонсу)

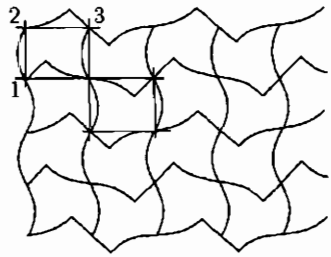


Рис. 120. Орнамент с симметрией $(b:a):\widetilde{b}:\widetilde{a}=(b:a):2\odot\widetilde{a}$. Плоскость заполнена равными фигурами без промежутков и перекрытий

ответствующий символ симметрии будет $(b:a):\widetilde{b}:\widetilde{a}$. Пример такого орнамента приведен на рис. 119. Как видим, этот орнамент состоит из ромбов, заштрихованных по двум направлениям. В горизонтальный бордюр $(a):2$ входят только одинаково заштрихованные ромбы, расположенные цепочкой. Весь орнамент строится скользящим переносом этой цепочки по вертикали. Двойные оси располагаются в центрах ромбов и в их вершинах. Плоскости скользящего отражения проходят через середины смежных сторон ромбов по горизонтальным и вертикальным направлениям. Как и в трех предыдущих случаях, в формулу вида симметрии $(b:a):\widetilde{b}:\widetilde{a}$ входят только порождающие элементы симметрии. Можно заметить, что «точечная» группа по модулю $\widetilde{b}:\widetilde{a}$ изоморфна группе $2\cdot m$, поэтому ее можно обозначить как $2\odot\widetilde{a}$ или $2\odot\widetilde{b}$, имея в виду, что плоскости $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ проходят не через оси 2 (как в группе $2\cdot m$), а посередине между двойными осями (подробнее о группах по модулю см. стр. 259–261).

Для построения орнамента с равными частями, заполняющими плоскость без промежутков, исходим из прямоугольной координатной сетки (рис. 120). В узлах этой сетки мысленно располагаем двойные оси симметрии. Через точки 1, 2, 3 проводим произвольные линии с соблюдением правил, изложенных выше применительно к аналогичным случаям заполнения плоскости равными фигурами. Построение повторяем, пользуясь поворотами на 180° вокруг двойных осей. Трансляционная сетка $(b:a)$ орнамента, очевидно, образована прямоугольниками, составленными из четырех малых прямоугольников координатной сетки. Пятый

вид симметрии возникает из повторения вертикального бордюра $(a) \cdot m$ скользящим отражением в направлении горизонтальной оси b. Символ симметрии будет поэтому $(b : a) : \widetilde{b} : m$. Пример орнамента этой симметрии приведен на рис. 121. В этом орнаменте следует обратить внимание на завитки, имеющие форму букв s и z. Производные двойные оси симметрии проходят через середины этих букв и соответствующих им завитков, плоскости симметрии проходят вертикально между завитками. Специфику рисунку придают пучки остроконечных листочков (венчики лотоса, обычные для египетского орнамента); при этом одни пучки расположены остриями листочков вверх, другие — остриями вниз. За образующий бордюр $(a) \cdot m$ принимаем вертикальный ряд элементарных фигур с листочками, направленными в одну сторону (например, только вниз). В орнаменте имеются горизонтальные плоскости скользящего отражения $\widetilde{b}$, проходящие через двойные оси, поэтому формулу симметрии можно записать и так: $(b : a) : 2 \cdot \widetilde{b}^*$. Подвергая образующий бордюр скользящему отражению вдоль плоскости $\widetilde{b}$, получаем весь орнамент.

Для построения орнамента из равных частей, заполняющих плоскость без промежутков (рис. 122), используем прямоугольную координатную сетку. Произвольно выбранную внутри прямоугольника точку A соединяем произвольными линиями с двумя узлами B и C сетки и с произвольной точкой D на стороне, противоположной стороне BC. Через точку D проводим в направлении вертикальной оси a прямую. Расположив мысленно перпендикулярные чертежу двойные оси в углах прямоугольников вдоль линии BC, а плоскости симметрии — по ближайшим параллельным прямым, поворотами вокруг двойных осей и отражениями в плоскостях симметрии построим весь орнамент. Трансляционная сетка его, очевидно, состоит из восьми прямоугольников: четырех, показанных на рисунке, и четырех, которые нужно себе представить расположенными справа.

Рис. 121. Египетский орнамент с симметрией $(b : a) : \widetilde{b} : m = (b : a) : 2 \cdot \widetilde{b}$ (по Оуэну Джонсу). Ось a направлена вертикально

*«Группа» по модулю $2 \cdot \widetilde{b}$ изоморфна группе $2 \cdot m$, но, так как плоскости $\widetilde{b}$ проходят через оси 2, мы не используем новый разделительный знак $\odot$, связывающий параллельные, но не пересекающиеся моменты симметрии.

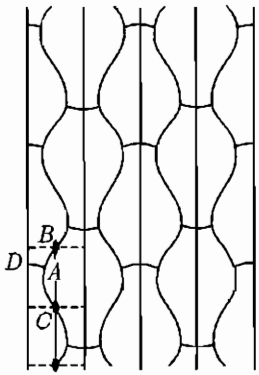


Рис. 122. Орнамент с симметрией $(b:a):\widetilde{b}:m=(b:a):2\cdot\widetilde{b}$. Плоскость заполнена равными фигурами без промежутков и перекрытий. Ось a направлена вертикально

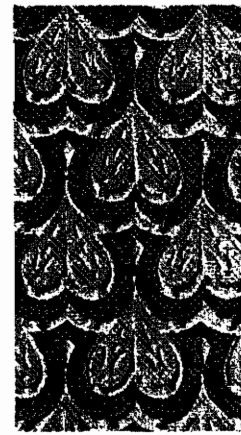


Рис. 123. Мавританский орнамент с симметрией $(a/a)/m = (c/b:a):m$ (по Оуэну Джонсу)

Шестой вид симметрии сетчатых орнаментов получается из фигуры с симметрией m повторением ее двумя осями переносов, образующих произвольные равные косые углы с плоскостью симметрии. Символ этого нового вида симметрии, соответственно методу его построения, будет $(a/a)/m$. Пример орнаментов, имеющих эту симметрию, приведен на рис. 123. Элементарная фигура орнамента, имеющая форму сердечка, обладает плоскостью симметрии и иных элементов симметрии не имеет. Символ симметрии элементарной фигуры — m. Орнамент обладает горизонтальной и перпендикулярной к ней осями переносов $(b:a)$. Однако обеих этих осей недостаточно, чтобы из одной элементарной фигуры получить весь орнамент, так как при построении будут пропущены фигуры, расположенные в середине трансляционного прямоугольника. Чтобы этого не произошло, необходимо использовать центрирующий перенос $\mathbf{c}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$*. Итак, один и тот же орнамент получает символы симметрии $(c/b:a):m=(a/a)/m$ при различном выборе групп переносов.

*Заметим, что переносы a b группе (a/a) можно положить равными $\mathbf{c}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$. Изменение базисных векторов, однако, не меняет трансляционной группы $(a/a)=(c/b:a)$; мы различаем лишь ее примитивный и центрированный аспекты.

На рис. 123 оси переносов хорошо видны. Предлагаем читателю убедиться, что и орнамент, показанный на рис. 124, имеет ту же симметрию.

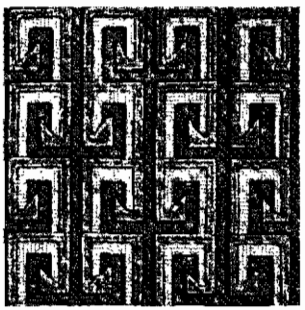


Рис. 124. Китайский орнамент с симметрией $(a/a)/m$ (по Оуэну Джонсу)

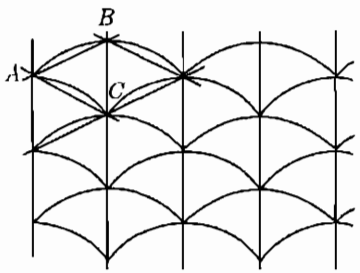


Рис. 125. Орнамент с симметрией $(a/a)/m = (c/b : a) : m$. Равные фигуры заполняют плоскость без промежутков и перекрытий

Для построения орнамента из равных фигур, заполняющих плоскость без промежутков, исходим из ромбической координатной сетки, которая на этот раз будет и трансляционной сеткой (рис. 125). Элементами построения служат произвольная линия AB (на рисунке это дуга окружности) и прямая линия BC. Подвергая линию AB отражению в плоскости симметрии BC и образовавшуюся фигуру — переносам по косым параллельным сторонам ромба осям, построим весь орнамент.

Седьмой вид симметрии показан на рис. 126, который при рассмотрении следует повернуть так, чтобы черные полосы расположились параллельно одному из ребер книги. Элементарной фигурой орнамента служат зубчатые эллипсы с симметрией m. Весь орнамент может быть построен переносами по осям a и b, ориентированным параллельно и перпендикулярно к плоскости m. Символ симметрии орнамента — $(b : a) : m$.

Орнамент из равных фигур, заполняющих плоскость без промежутков, строится на прямоугольной координатной сетке (рис. 127). Короткие стороны прямоугольников совпадают с плоскостями симметрии. Во всех случаях, когда в орнаменте есть плоскости симметрии, элементарные фигуры, заполняющие плоскость, имеют прямолинейные стороны, совпадающие с плоскостями симметрии. То же имеет место и в рассматриваемом случае. Линия, соединяющая точки A и B, произвольна.

Рис. 126. Индийский орнамент с симметрией $(b:a):m$ (по Оуэну Джонсу)

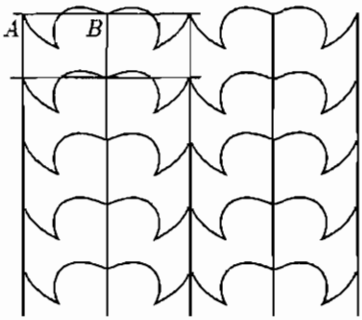


Рис. 127. Орнамент с симметрией $(b:a):m$.
Равные фигуры заполняют плоскость без промежутков и перекрытий

Восьмой вид симметрии (рис. 128) может быть получен переносами фигур с симметрией $2\cdot m$ по косым осям a, образующим произвольные равные углы с плоскостями симметрии. Символ симметрии — $(a/a):2\cdot m$. В приведенном для примера орнаменте плоскости симметрии проходят по диагоналям черных криволинейных ромбов, косые оси переносов — через центр фиксированного ромба и центры ближайших соседних с ним ромбов, расположенных в двух горизонтальных рядах, ближайших к выбранному. Орнамент обладает также вертикальными плоскостями скользящего отражения, расположенными параллельно между простыми вертикальными плоскостями симметрии, а также идущими вдоль диагоналей ромба осями переносов $(b:a)$, поэтому символ симметрии можно записать и так: $(c/b:a):2\cdot m$.

Для построения орнамента с равными фигурами, заполняющими плоскость без промежутков, исходим из ромбической координатной сетки (рис. 129). Двойные оси располагаем в середине ромба, в узлах сетки и в серединах сторон ромба. Плоскости симметрии проводим по диагоналям ромба. Элементарная фигура строится проведением прямых по плоскостям симметрии. Оси симметрии A и B соединяются произвольной линией. Все построение ясно из указанного рисунка.

Девятый вид симметрии возникает в результате переносов фигуры с симметрией $2\cdot m$ по двум осям a и b, параллельным ребрам книги. Орнамент (рис. 130), отвечающий этой симметрии, обладает с оговорками вертикальными и горизонтальными плоскостями симметрии, параллельными осям a и b; по линиям пересечения плоскостей проходят двойные

Рис. 128. Индийский орнамент с симметрией $(a/a) : 2 \cdot m = (c/b : a) : 2 \cdot m$ (по Оуэну Джонсу)

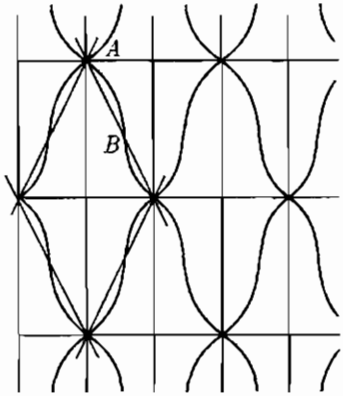


Рис. 129. Орнамент с симметрией $(a/a) : 2 \cdot m$. Фигуры заполняют плоскость без промежутков и перекрытий

оси симметрии. Символ симметрии — $(b : a) : 2 \cdot m$. В приведенном орнаменте при учете всех деталей его структуры рассматриваемая симметрия не выполняется. Например, плоскости, проходящие через центры спиралей и между ними, строго говоря, не являются плоскостями симметрии и становятся ими только при условии, если завитки рассматривать как концентрические окружности.

Орнамент из равных фигур, заполняющих плоскость без промежутков, для данного вида симметрии представляет собой простую прямоугольную сетку (рис. 131). Стороны прямоугольников проходят по плоскостям симметрии.

Десятый вид симметрии образуется простым переносом фигуры с симметрией 4 по двум взаимно-перпендикулярным осям $(a : a)$. Символ симметрии — $(a : a) : 4$. Образец этого вида симметрии показан на орнаменте рис. 132. Этот орнамент состоит из квадратов с завитками по углам, системы светлых параллельных полос и розеток внутри квадратов. Разбираемому виду симметрии отвечает не весь орнамент, в котором мы наблюдаем типичный случай смешения симметрий, а только система квадратов с завитками. С учетом белых полос симметрия орнамента будет $(a : a) : 2$ или в общем случае $(b/a) : 2$, так как ось 2 не накладывает ограничений на параметры a, b, α. Выбор квадратной сетки $(a : a) : 4$ определяется осями 4, выходящими в центрах квадратов. Второй пример орнамента этого вида симметрии дан на рис. 133, который при ближай-

Рис. 130. Египетский орнамент приобретает симметрию $(b:a):2\cdot m$, если завитки спиралей заменить концентрическими окружностями (по Оуэну Джонсу).
Принцип переплетения понижает эту симметрию до $(b:a):2=(b/a):2$

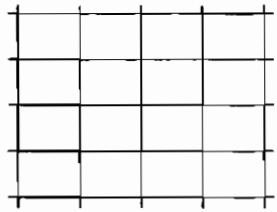


Рис. 131. Заполнение плоскости в случае симметрии $(b:a):2\cdot m$

шем рассмотрении оказывается видоизменением предыдущего. В этом орнаменте также наблюдаем смешение симметрий. Взятые отдельно розетки, расположенные между завитками, как видно из рисунка, имеют оси симметрии пятого порядка, противоречащие симметрии главной фигуры орнамента.

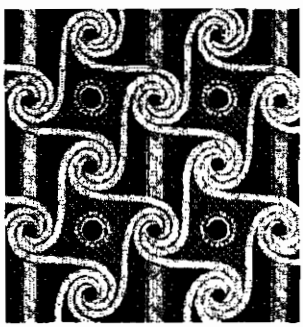


Рис. 132. Египетский орнамент противоречивой симметрии: без полос имеет симметрию $(a:a):4$, с полосами — симметрию $(a:a):2=(b/a):2$

Рис. 133. Египетский орнамент приобретает симметрию $(a:a):4$, если десятилепестковые розетки заменить кругами (по Оуэну Джонсу)

Для заполнения плоскости равными фигурами соединяем произвольной замкнутой кривой четверные и производные двойные оси симметрии, расположенные по вершинам квадратной координатной сетки (рис. 134). Образующаяся при этом фигура повторяется соответствующими осями 4 и 2 и осями переносов. Так как данный вид симметрии не содержит в себе плоскостей симметрии, то всякий орнамент, отвечающий этому виду, может существовать в двух энантиоморфных модификациях — правой и левой. Для получения второй модификации орнамент следует рассматривать на просвет с обратной стороны.

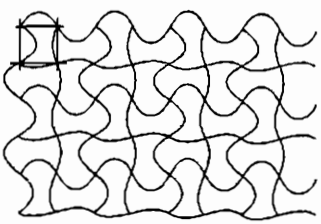


Рис. 134. Заполнение плоскости в случае симметрии $(a : a) : 4$

Рис. 135. Египетский орнамент с симметрией $(a : a) : 4 \cdot \widetilde{a}$ (по Оуэну Джонсу)

Одиннадцатый вид симметрии, как и в предыдущем случае, может быть образован фигурами с симметрией 4, но эти фигуры повторяются в плоскости не осями переносов, а двумя равными и взаимно перпендикулярными плоскостями скользящего отражения $\widetilde{a}$. Символ симметрии этого несимморфного вида $(a : a) : 4 \cdot \widetilde{a}$ показывает, что вертикальные плоскости a, параллельные ребрам книги, проходят через четверные оси и что «точечная» группа по модулю $4 \cdot \widetilde{a}$ изоморфна группе $4 \cdot m$; у вида имеются также и вертикальные плоскости m, проходящие через двойные оси параллельно плоскостям $\widetilde{a}$. Пример орнамента, обладающего симметрией $(a : a) : 4 \cdot \widetilde{a}$, показан на рис. 135. Элементарной фигурой в данном случае следует считать спираль с четырьмя ветвями, а не прямоугольник с завитыми углами, как это может показаться с первого взгляда. Благодаря наличию простых плоскостей симметрии данный вид орнамента не может встречаться в двух энантиоморфных модификациях. Заполнение плоскости равными фигурами производится проведением прямых линий по плоскостям симметрии (рис. 136). В вершинах образующейся при этом квадратной сетки располагаются двойные оси симметрии, а в цен-

трах квадратов — четверные оси. Соединяя четверную ось с ближайшей двойной произвольной кривой и повторяя эту кривую имеющимися элементами симметрии, разбиваем всю плоскость на равные, заполняющие ее без промежутков фигуры.

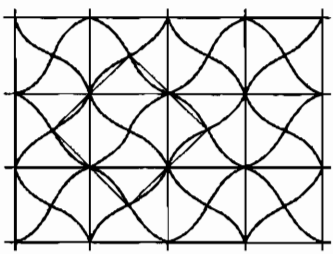


Рис. 136. Заполнение плоскости без промежутков в случае симметрии $(a:a):4\cdot\tilde{a}$. Повернутый на 45° квадрат изображает элементарную ячейку в международной установке осей

Рис. 137. Египетский орнамент с симметрией $(a:a):4\cdot m$ (по Оуэну Джонсу)

Двенадцатый вид симметрии наиболее прост для восприятия и наиболее распространен. Он возникает в результате простого переноса фигур с симметрией $4\cdot m$ вдоль двух взаимно перпендикулярных осей с равными периодами $(a:a)$. Символ этого вида симметрии будет $(a:a):4\cdot m$. Образец соответствующего орнамента приведен на рис. 137. Элементарной фигурой в этом орнаменте служит розетка, вписанная в квадрат. В этом виде симметрии заполнение плоскостей равными фигурами производится проведением прямых по плоскостям симметрии (рис. 138).

Тринадцатый вид симметрии (рис. 139) получается из фигур с симметрией 3 с помощью двух равных осей переносов (a/a), образующих между собой угол 60°. Соответствующий символ вида будет $(a/a):3$. Заполнение плоскости равными фигурами показано на рис. 140. Элементом построения служит разомкнутая кривая, выходящая из центра и проходящая через три вершины правильного треугольника координатной сетки. Ее повторение при переносах (a/a) и решит поставленную задачу.

Четырнадцатый вид симметрии (рис. 141) может быть построен из фигур с симметрией $3\cdot m$ переносами по равным осям (a/a), которые образуют между собой угол 60° и проходят параллельно плоскостям симметрии m. Символ этого вида симметрии — $(a/a)\cdot m\cdot 3$. Заполне-

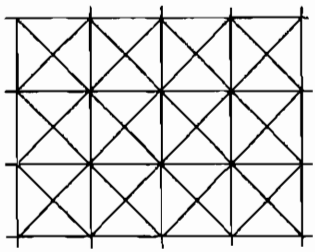


Рис. 138. Заполнение плоскости в случае симметрии $(a:a):4\cdot m$

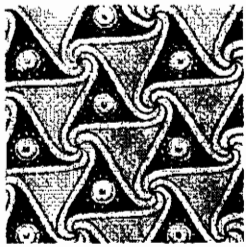


Рис. 139. Орнамент с симметрией $(a/a):3$

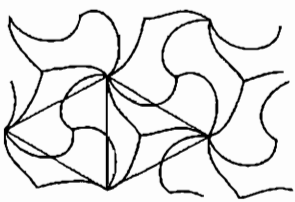


Рис. 140. Заполнение плоскости в случае симметрии $(a/a):3$. Элементарная ячейка образована объединением двух правильных треугольников

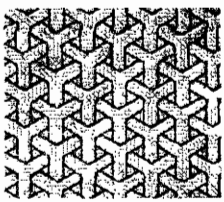


Рис. 141. Китайский орнамент с симметрией $(a/a)\cdot m\cdot 3$

ние плоскости равными фигурами производится построением треугольной сетки, повторением произвольной кривой, соединяющей центр треугольника с его вершиной (рис. 142), отражениями в плоскостях m.

Пятнадцатый вид симметрии (рис. 143) отличается от четырнадцатого только направлением осей (a/a), которые в данном случае не совпадают с плоскостями симметрии m, а перпендикулярны к ним, т. е. делят угол между соседними плоскостями пополам. Соответственно сказанному символ этого вида симметрии будет $(a/a):m\cdot 3$. Заполнение плоскости равными фигурами производится в данном случае единственным способом — равносторонними треугольниками (рис. 144).

Шестнадцатый вид симметрии возникает в результате переноса осями (a/a) фигур с симметрией 6 (рис. 145). Символ этого вида — $(a/a):6$. Заполнение плоскости равными фигурами производится с помощью вспомогательной треугольной сетки и двух произвольных кри-

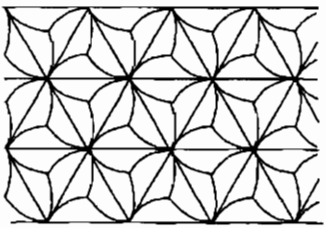


Рис. 142. Заполнение плоскости в случае симметрии $(a/a)\cdot m\cdot 3$

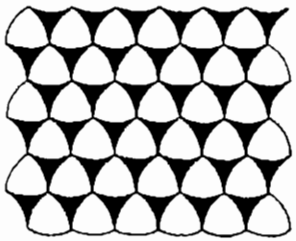


Рис. 143. Орнамент с симметрией $(a/a):m\cdot 3$

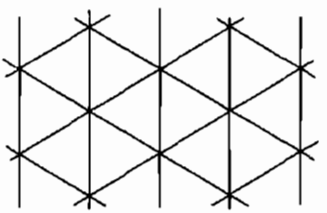


Рис. 144. Заполнение плоскости в случае симметрии $(a/a):m\cdot 3$. Для совмещения с установкой рис. 143 треугольную сетку следует повернуть на 30° вокруг оси 3

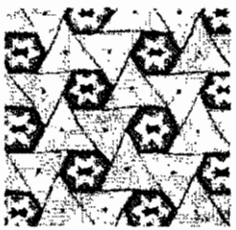


***Рис. 145. Персидский орнамент* с симметрией $(a/a):6$ (по Оуэну Джонсу).** Для совмещения с установкой рис. 146 орнамент следует повернуть на 30° вокруг оси 6. Симметрия выполняется приближенно

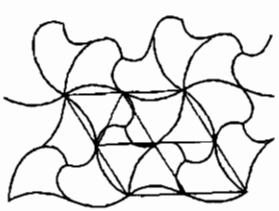


Рис. 146. Заполнение плоскости без промежутков в случае симметрии $(a/a):6$. Элементарная ячейка образована объединением четырех ромбов

Рис. 147. Орнамент с симметрией $(a/a)\cdot m\cdot 6$. Симметрия выполняется приближенно

вых, из которых одна соединяет две вершины треугольника, а другая — центр смежного треугольника с его вершинами (рис. 146).

Последний, семнадцатый вид симметрии получается из фигур $6 \cdot m$ в результате переносов их осями (a/a) (рис. 147). Символ этого вида можно записать эквивалентным образом: $(a/a) \cdot m \cdot 6$ или $(a/a) : m \cdot 6$. Заполнение плоскости возможно единственным, указанным на рис. 148 способом.

Следует полагать, что более полное использование законов симметрии поможет художникам разнообразить мотивы создаваемых ими орнаментов.

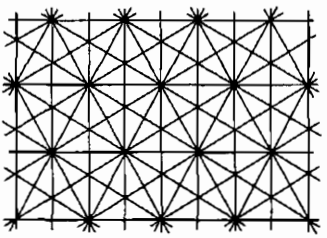


Рис. 148. Заполнение плоскости без промежутков и перекрытий в случае симметрии $a/a \cdot m \cdot 6$

Проекции элементов симметрии для сетчатых орнаментов. Координатные и бескоординатные обозначения видов симметрии

Приведем сводную таблицу всех 17 видов симметрии сетчатых орнаментов (рис. 149). В ней мы совершаем переход от бескоординатных к координатным обозначениям двумерных пространственных групп, указывая ориентировку элементов симметрии по отношению к осям координат.

В таблице приведены проекции элементов симметрии всех двумерных пространственных групп и символы этих групп, записанные по международной системе. Черные n-угольники изображают оси симметрии 2, 3, 4 и 6, идущие перпендикулярно к чертежу; сплошные толстые линии — плоскости симметрии m; штриховые толстые линии — плоскости скользящего отражения (a, b). Тонкие контурные линии (если они не совпадают с толстыми) определяют элементарные ячейки орнаментов. С ребрами ячеек совпадают оси координат: по левому ребру сверху вниз идет ось $a\,(X)$, по верхнему ребру слева направо — ось $b\,(Y)$; из точки пересечения осей a, b по нормали к чертежу идет ось $c\,(Z)$.

Международный символ плоских пространственных групп конструируется следующим образом: на первом месте символа стоит символ трансляционной подгруппы p ($p = (b/a)$, $b \neq a$, $\alpha = 90°$) для двух групп косоугольной системы; $p = (b : a)$, $b \neq a$, $\alpha = 90°$ для пяти и $p = c = (1/2(a + b)/b : a)$ для двух центрированных групп прямоугольной системы; $p = (a : a)$, $b = a$, $\alpha = 90°$ для трех групп квадратной

Таблица 9. Сопоставление бескоординатных и координатных (международных) обозначений видов симметрии сетчатых плоских орнаментов

Международный символ	Бескоординатный символ	Примечания и примеры	Международный символ	Бескоординатный символ	Примечания и примеры
$p1$	$(b/a)1$	Рис. 112—115	cmm^2	$(a/a) : 2 \cdot m$ или $(c/b : a) : 2 \cdot m$	Рис. 128, 129, перенос $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$
$p2$	$(b/a) : 2$	Рис. 117, 118	$p4$	$(a : a) : 4$	Рис. 132—134
pm	$(b : a) : m$ или $(a : b) : m$	Рис. 126, 127	$p4mm$	$(a : a) : 4 : m$	Рис. 137, 138
$pg(pb11)$	$(b : a) : \tilde{b}$	Выбор осей на рис. 116 соответствует установке $p1a1 = (b : a) \cdot \tilde{a} = (a : b) : \tilde{a}$	$p4gm$ $(p4bm)$	$(a : a) : 4 \odot \tilde{a}$ или $(a : a) : 4 \odot \tilde{b}$	Установка рис. 135, 136 отличается поворотом на 45° от международной
cm $(cm11)$	$(a/a)/m$ или $(c/b : a) : m$ или $(c/a : b) : m$	Рис. 123—125, перенос $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$	$p3$	$(a/a) : 3$	Рис. 139, 140
$pmm2$	$(b : a) : 2 \cdot m$	Рис. 130, 131	$p3m1$	$(a/a) : m \cdot 3$	Рис. 143, 144, $3 \cdot m$ в ориентировке $3m1$
$pmg2$ $(pma2)$	$(b : a) : m : \tilde{a}$ или $(b : a) : 2 \cdot \tilde{a}$	Выбор осей на рис. 121, 122 соответствует $pbm2 = (b : a) : \tilde{b} : m = (b : a) : 2 \cdot \tilde{b}$	$p31m$	$(a/a) \cdot m \cdot 3$	Рис. 141, 142, $3 \cdot m$ в ориентировке $31m$
$pgg2$ $(pba2)$	$(b : a) : b : \tilde{a}$ или $(b : a) : 2 \odot \tilde{a}$	Рис. 119, 120	$p6$	$(a/a) : 6$	Рис. 145, 146
			$p6mm$	$(a/a) : m \cdot 6$	Рис. 147, 148

Примечание. Координатные и бескоординатные символы согласованы с установкой осей на рис. 149. Изменение символов, связанное с изменением осей, отмечено в примерах. Знак $\odot$ связывает непересекающиеся параллельные элементы симметрии. В бескоординатной записи следующий за символом трансляционной группы (b/a), $(b : a)$ или $(c/b : a)$ элемент симметрии всегда «перпендикулярен» к плоскости осей b, a и одновременно перпендикулярен или параллелен ближайшей в символе оси a в зависимости от использованного разделительного знака ($:$ или $\cdot$).

системы; $p = (a/a)$, $b = a$, $\alpha = 60°$ для пяти групп правильной треугольной (гексагональной) системы. Последующие три позиции символа для младших групп (не содержащих осей > 2) заняты символами осей симметрии, идущих вдоль X, Y, Z, или плоскостей симметрии, перпендикулярных к X, Y, Z; при этом плоскость g обозначается буквой a или b (без знака тильды сверху) соответственно направлению вектора скользящего переноса по оси a или b. Для старших видов после буквы p указывается символ оси $n = 3, 4, 6$, совпадающей с осью Z; далее идет символ плоскости, перпендикулярной к оси X; последним следует символ плоскости, перпендикулярной к биссектрисе угла между соседними эквивалентными осями X, связанными операциями n. Если указанные

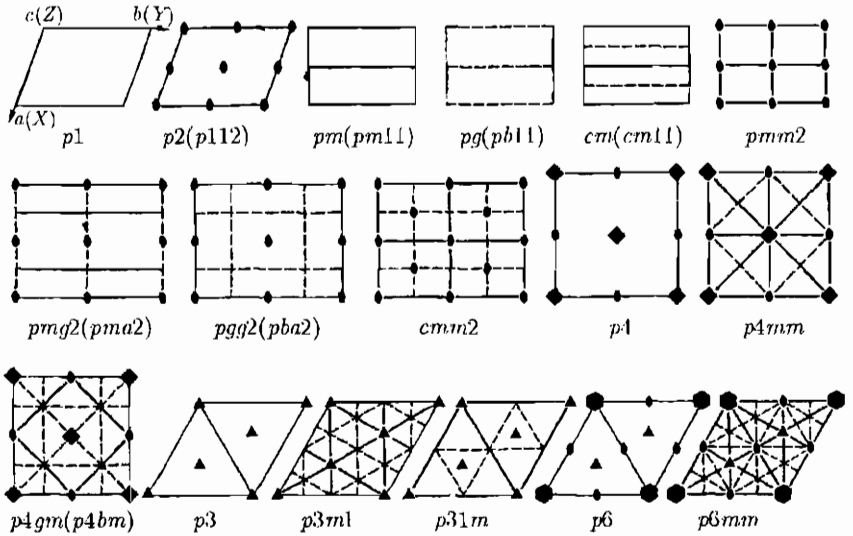


Рис. 149. Сводная таблица 17 видов плоских орнаментов.
В таблице приведены проекции элементов симметрии всех двумерных пространственных групп и символы этих групп, записанные по международной системе. Ориентировка осей координат показана лишь для первой проекции (см. пояснения в тексте)

выше элементы симметрии отсутствуют, на соответствующих позициях символа ставятся единицы. В табл. 9 приведено сопоставление международных обозначений с бескоординатными, которые мы использовали до сих пор и будем продолжать употреблять и далее.

Рис. 149 может быть использован для составления по заданной симметрии любого сетчатого орнамента. Помимо проекций элементов симметрии, каждый вид можно однозначно охарактеризовать заданием правильной системы асимметричных фигур, получаемой из одной фигуры, находящейся в общем положении, под действием всех преобразований группы. Для построения эквивалентных систем общего положения на рис. 150 у всех видов в качестве исходной взята одна и та же элементарная фигурка в форме черного прямоугольного треугольника. Во избежание путаницы отметим, что расположение правильных систем на рис. 150 не соответствует расположению проекций видов симметрии на предыдущем рисунке. Для читателя, рассчитывающего применять на практике полученные из этой книги сведения, было бы полезно

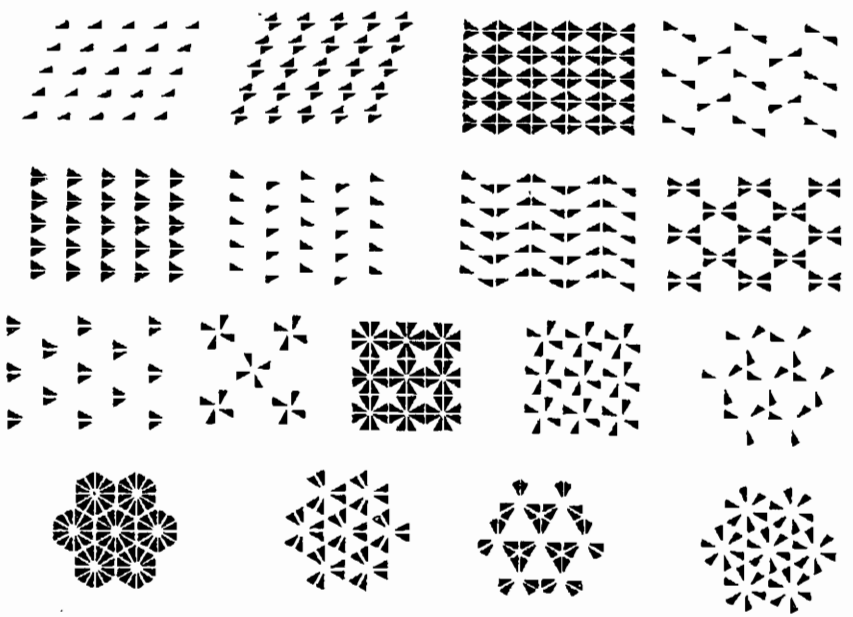


Рис. 150. Правильные системы асимметричных фигур (треугольников), соответствующие 17 видам симметрии плоских орнаментов (по Бюргеру)

провести сопоставление обоих рисунков и самому установить расположение элементов симметрии на проводившихся выше примерах орнаментов.

Сетчатый орнамент в природе, технике и искусстве

Бесконечный плоский орнамент широко применяется человеком в самых разнообразных случаях: при изготовлении бумажных обоев, укладке паркетных и керамических полов и черепичных крыш, облицовке стен керамикой и декоративным камнем, в кирпичной и каменной кладках, при мощении улиц и площадей, в процессах окраски тканей, в коврах и вязаных трикотажных изделиях, при плотной укладке и упаковке одинаковых предметов, штамповке большого количества стандартных предметов из металла или пластмассы, для декоративной живописи и т. д.

В природе бесконечный орнамент встречается в расположении чешуи рыб, клеточек в биологических тканях, ячеек в пчелиных сотах, чешуек в шишках хвойных деревьев. Особый интерес представляют плоские орнаменты кристаллических граней, т. е. плоские сетки из атомов, ионов или молекул. Мы, конечно, не видим непосредственно это расположение, но можем судить о нем на основании структурного рентгенографического или электронографического анализа или растровой микроскопии.

Анализируя те впечатления, которые мы получаем, рассматривая сетчатые орнаменты, можно установить несколько закономерностей, позволяющих художнику сознательно выбирать тот или иной вид симметрии для получения определенного зрительного эффекта. Например, орнаменты с косыми осями переносов и без плоскостей симметрии (см. рис. 112, 113) особенно пригодны в тех случаях, когда рисунком желательно подчеркнуть движение по косым направлениям. С такой задачей художник встречается при декорировании стен лестничных клеток, вестибюлей, эскалаторов, наклонных тоннелей метро, оград мостов, имеющих форму арок, и т. д.

Орнаменты без вертикальных плоскостей симметрии, обладающие горизонтальной осью переносов (см., например, рис. 115, 117), подчеркивают движение по горизонтальной плоскости в каком-нибудь одном направлении и могут с успехом применяться для декорирования горизонтальных проходов метро и коридоров. Плоскости симметрии как бы затормаживают движение в перпендикулярном к ним направлении; поэтому, например, орнаменты, показанные на рис. 121, 123 и т. д., кажутся неподвижными по горизонтали. Наличие двойных осей у рис. 121 создает представление о двустороннем движении вниз и вверх, а отсутствие их на рис. 123 вызывает впечатление движения только вверх или вообще в одну сторону по вертикали. В соответствии с этим рис. 121 подходит для украшения горизонтальных потолков и полов коридоров, а рис. 123 — для полов и потолков на подъеме или спуске, например в наклонных проходах метро. Наличие нескольких систем плоскостей симметрии, горизонтальных и вертикальных (см. рис. 128, 130, 137, 147), создает впечатление покоя, монументальности, неподвижности, тяжести; соответствующие виды симметрии наиболее подходят для декорирования стен и потолков таких помещений, которые предназначены для спокойного в них пребывания (библиотеки, аудитории). Интересно, что виды симметрии типа $(b : a) : 2 \cdot m$ (см. рис. 128 и 130) издавна применяются для обоев, а более симметричные виды, осуществленные на рис. 137 и 147,— для паркетов, плафонов, оконных витражей из цветных стекол и т. д. Своеобразное беспокойное впечатление производят орнаменты, у которых главную роль играют плоскости скользящего отражения

(см. рис. 116, 120). Не находя более подходящих слов, мы могли бы сказать, что фигуры в этих орнаментах шевелятся, ворочаются, ползают, если угодно — «кишат». Эти случаи симметрии встречаются реже других, так как они более трудны для построения и восприятия; они могут найти применение, например, для оформления ярмарочных помещений, мест для гуляний и т. д.

Большой интерес представляют орнаменты, характеризуемые тройными, четверными и шестерными осями без плоскостей симметрии (см. рис. 132, 139, 145). Большая динамичность таких орнаментов позволяет рекомендовать их для полов и потолков танцевальных и других помещений, предназначенных для больших скоплений беспорядочно движущихся людей. Наряду с орнаментами типа рис. 116 их можно использовать для декорирования площадей в парках культуры, арен цирковых павильонов, развевающихся полотнищ и т. д. Своеобразное впечатление покоя в целом и движения в деталях производят орнаменты, в которых обычные плоскости симметрии чередуются с плоскостями скользящего отражения (см. рис. 12, 135, 142). Доминирующее впечатление покоя или движения в данном случае в сильнейшей степени зависит от ориентировки орнамента по отношению к его рамке или к вертикальной и горизонтальной линиям. Например, рис. 12 при той ориентировке, какая ему придана в книге, производит преобладающее впечатление движения; плоскости симметрии при невнимательном рассматривании орнамента ускользают от наблюдения. С другой стороны, рис. 135, имеющий ту же симметрию, что и рис. 12, скорее производит впечатление покоя, чем движения, так как в этом случае плоскости симметрии орнамента проходят параллельно рамке, совпадая при нормальном положении книги с вертикальной и горизонтальной линиями. Об эффекте ориентировки плоскостей симметрии мы будем говорить еще на стр. 197.

Мы остановились довольно подробно на роли симметрии в формировании того впечатления, которое возникает у зрителя при рассмотрении сетчатых орнаментов. Само собой разумеется, что симметрия — отнюдь не единственный фактор возникновения эстетического чувства. Определяя закон строения орнамента, симметрия в декоративном искусстве играет ту же роль, какую играет перспектива в живописи.

Суперпозиция сетчатых орнаментов и ее технические применения. Формула Вульфа – Брагга. Биения

Если взять два небольших (10 × 10 см) куска тонкой материи (нейлон, капрон, шелк), наложить их друг на друга так, чтобы волокна пе-

ресекались под малыми углами (5–10°), зажать сложенные куски между двумя пластинками стекла и наблюдать препарат в проходящем свете, мы увидим то, что принято называть *муаром*,— явление, широко распространенное в природе и используемое в науке и технике (рис. 151). Несимметричность рисунков муара вызывается несовершенством интерферирующих между собой сеток; если бы последние были построены более правильно, то вместо расплывчатой фигуры муара возникла бы правильная вторичная картина. С этим явлением постоянно встречаются в полиграфии лица, занимающиеся фотографированием через растры, т. е. через очень мелкие черные сетки, нанесенные на пластинках стекла, с целью репродукции картин в печати. Не всегда, однако, «растр-эффект» является помехой для работы. В известных случаях он может быть использован для создания великолепных орнаментов для тканей, обоев и т. п.

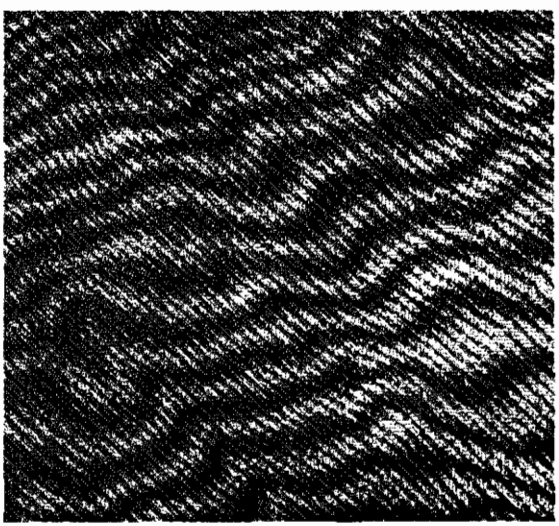


Рис. 151. Муар, наблюдаемый при наложении друг на друга двух кусков шелковой ткани

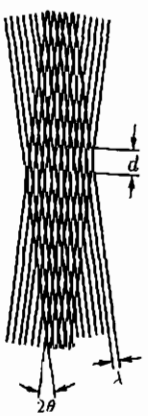


Рис. 152. Возникновение вторичной структуры при наложении друг на друга двух первичных систем полос

Чтобы понять, как возникает при суперпозиции двух бесконечных плоских орнаментов вторичная картина, разберем простейший случай

наложения друг на друга двух тождественных систем параллельных полос. Рис. 152 показывает, что в результате взаимодействия, или интерференции двух, первичных систем полос возникает вторичная система более широких полос с большим периодом повторяемости, чем у первичных полос. В действительности эти вторичные широкие полосы представляют собой не что иное, как зигзаги, образованные первичными полосами. Уменьшая щели между первичными полосами до размеров (порядка 0,1 мм и менее), не позволяющих различать простым глазом отдельные полосы, можно получить такой рисунок, в котором будут видны только вторичные полосы, воспринимаемые как увеличенное изображение одной из первичных картин.

Простые математические выкладки приводят к следующей зависимости, связывающей размер λ первичного периода (равного ширине одной полосы, сложенной с шириной промежутка между полосами), размер d вторичного периода и угол 2θ, под которым пересекаются первичные системы полос между собой,

$$\lambda = 2d \cdot \sin\theta.$$

Иными словами, величина первичного периода равна удвоенному произведению вторичного периода на синус половинного угла, под которым первичные системы полос пересекаются между собой. Полученное выражение полностью совпадает с известной формулой Вульфа – Брагга, объясняющей явление дифракции рентгеновских лучей при их прохождении через кристаллы. Величина λ в формуле Вульфа – Брэгга соответствует длине волны рентгеновских лучей, d — расстоянию между атомными плоскостями кристалла, отражающими лучи, θ — углу падающего луча с нормалью к отражающим плоскостям. Эта аналогия позволяет свести всю геометрическую рентгенографию кристаллов к явлению муара (см., например, книгу Больмана (1970)).

Если теперь заменить обе системы параллельных полос двумя одинаковыми квадратными сетками, то при достаточно малом угле 2θ получим вторичную картину, которая снова будет простым увеличенным, несколько размытым изображением первичных сеток (рис. 153). Величину сторон первичных квадратиков можно вычислить по углу поворота первичных сеток относительно друг друга и по размерам петель вторичной сетки, пользуясь приведенной выше формулой, которая оказывается справедливой и для этого случая.

В обоих предыдущих случаях было безразлично, накладываем ли мы фигуры друг на друга под малым углом $\pm 2\theta$ или под углом $180° \pm 2\theta$, так как взятые нами фигуры имели перпендикулярные к ним оси симметрии второго порядка. Существенное различие в результатах для обоих углов поворота получится, если мы в качестве первичного возьмем

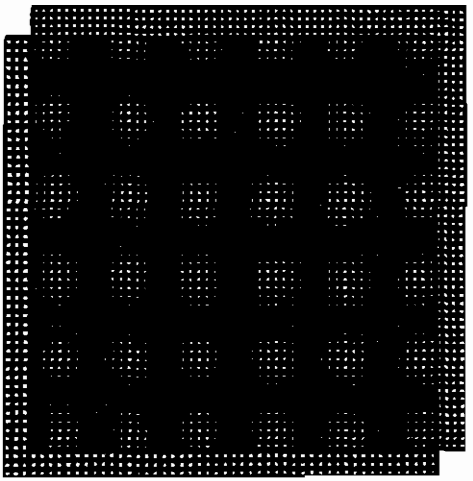


Рис. 153. При наложении друг на друга правильных квадратных сеток возникает вторичная увеличенная сетка той же формы

орнамент, не обладающий осями второго порядка, например систему *косоугольных треугольников (рис. 154). Как показывает рис. 155, при* малом угле поворота 2θ вторичная картина представляет собой нечто вроде системы эллипсов, в то время как при угле поворота $180° \pm 2\theta$ вторичный орнамент (рис. 156) состоит из косоугольных треугольников и может рассматриваться как увеличенное изображение первичной картины. Подробное рассмотрение показывает, что всякий бесконечный симметричный плоский орнамент может быть получен в увеличенном виде при суперпозиции двух одинаковых орнаментов под углом $180° \pm 2\theta$, если угол 2θ достаточно мал и если первичный орнамент имеет достаточное количество периодически повторяющихся маленьких элементарных фигур. На практике часто бывает трудно осуществить эти условия, поэтому опыт сравнительно хорошо удается только с элементарными фигурками простейшего вида (рис. 157 и 158).

Посмотрим теперь, что произойдет в результате интерференции двух одинаковых орнаментов при всевозможных углах поворота. Для примера возьмем систему колец, расположенных по узлам ромбической сетки (рис. 110 *а*). Как видно из рис. 159 и 160, при малых углах 2θ вторичная фигура может быть с известной оговоркой (вследствие недостаточности числа элементарных фигур) названа увеличенным изобра-

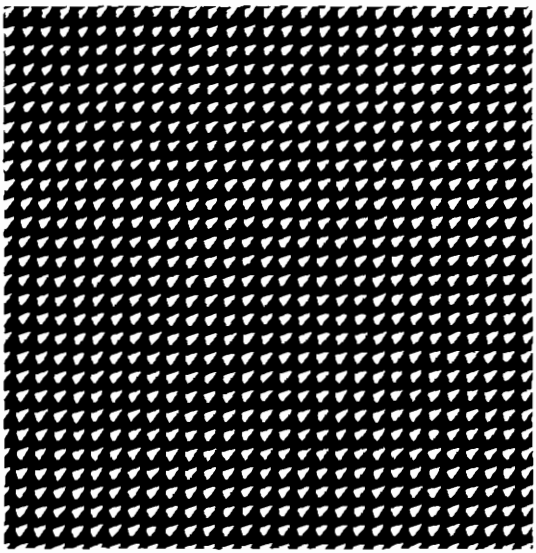


Рис. 154. Сетка из косоугольных треугольников для получения вторичных структур, изображенных на рис. 155 и 156

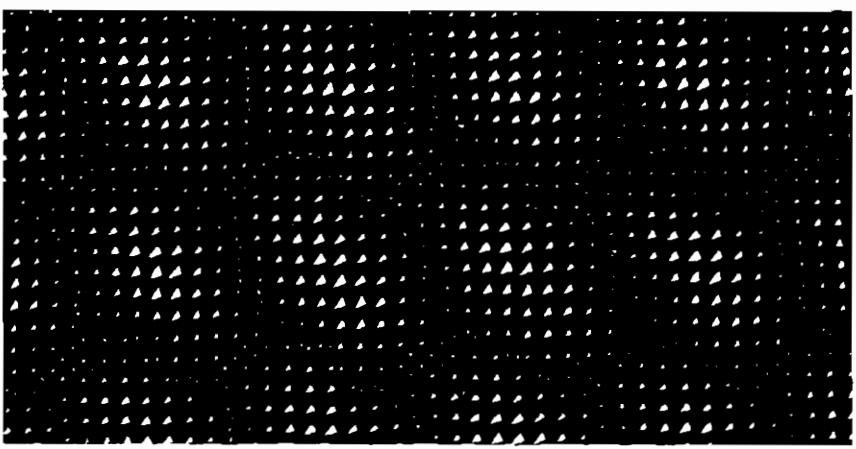


Рис. 155. Результат интерференции двух сеток из косоугольных треугольников (рис. 154) при малом угле поворота ± 20

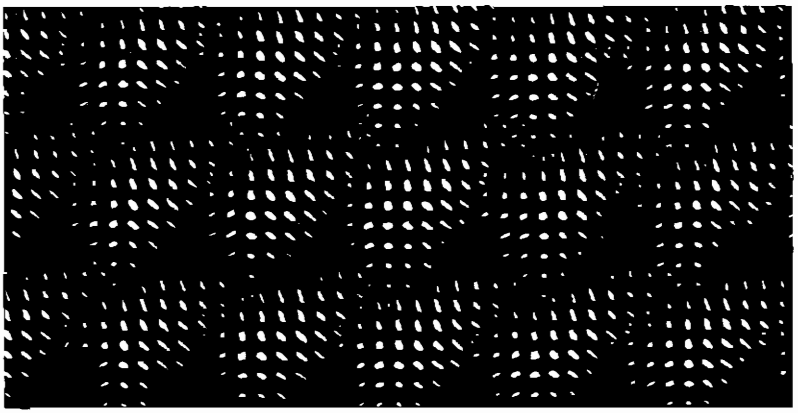


Рис. 156. Результат интерференции двух сеток из косоугольных треугольников (рис. 154) при угле поворота 180° $\pm 2\theta$. Вторичная структура состоит из мозаичных косоугольных треугольников той же формы, какую имеют элементарные треугольники исходных сеток

жением первичной. По мере роста угла 2θ степень увеличения падает. Далее орнамент начинает существенно изменять свой вид, сохраняя, однако, неизменной симметрию ромбической сетки. Приведенный ряд рисунков показывает, какой богатый ассортимент орнаментов, подходящих, например, для обоев и тканей, можно получить чисто механическим наложением друг на друга под разными углами двух тождественных периодических структур. В связи с такой возможностью возникает целый ряд вопросов. Можно, например, спросить: какой эффект получится от суперпозиции негатива и позитива одной и той же периодической фигуры? Опыт, проделанный уже встречавшимся нам рисунком, состоящим из колец, расположенных по узлам ромбической сетки, показывает, что в центрах вторичной системы шестиугольников возникают темные круглые пятна (рис. 161).

Очень интересны вопросы взаимного влияния симметрий накладываемых друг на друга фигур, суперпозиции общих и частных эквивалентных систем, относящихся к одному и тому же виду симметрии, взаимодействия правых и левых орнаментов или фигур, окрашенных в разные цвета, и т. д. (рис. 162). Все эти вопросы почти совершенно не изучены, но их можно исследовать с применением принципа симметрии для составных систем, с которым мы познакомимся в заключительной главе.

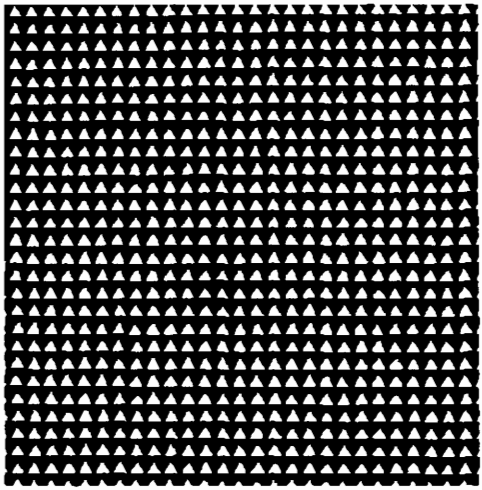


Рис. 157. Сетка из равнобедренных треугольников для получения вторичной структуры, изображенной на рис. 158

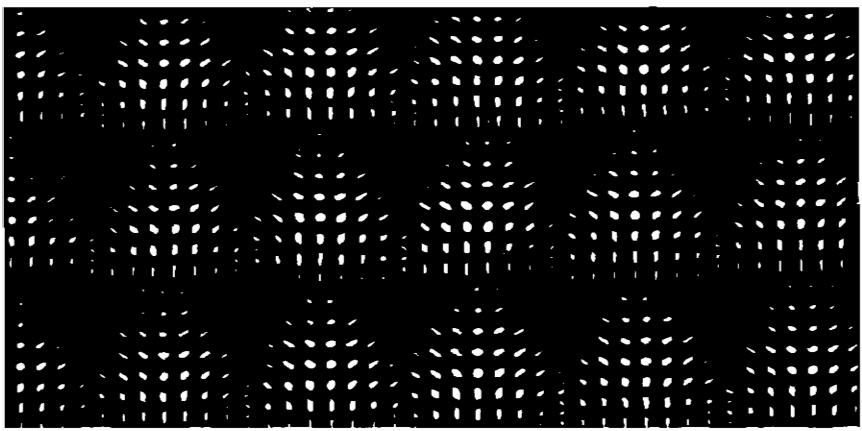


Рис. 158. Вторичное увеличенное мозаичное изображение сетки из равнобедренных треугольников (рис. 157) при угле поворота $180^\circ \pm 2\theta$

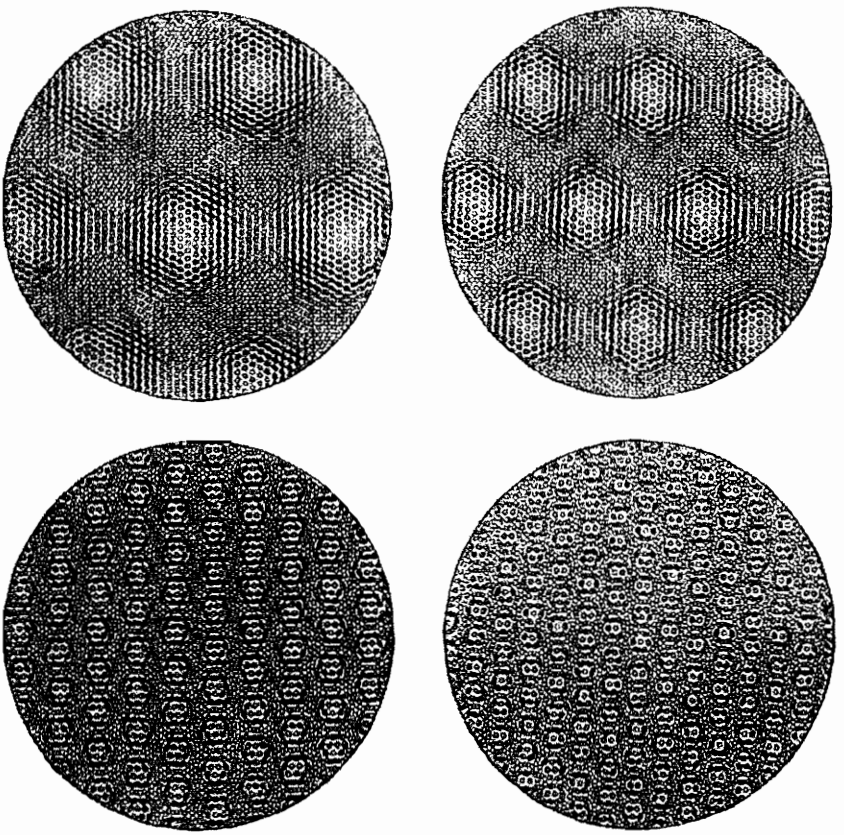


Рис. 159. Результат интерференции двух систем колец, расположенных по узлам ромбической сетки.

При малых углах вращения вторичная мозаичная структура напоминает первичную систему колец; по мере увеличения угла вращения размеры элементарных ячеек и диаметр колец уменьшаются

Несмотря на огромное разнообразие вторичных форм, получаемых в результате наложения бесконечных орнаментов друг на друга, формула $\lambda = 2d \cdot \sin\theta$ остается справедливой во всех случаях, когда в основе двух взятых орнаментов лежит одна и та же сетка и когда угол 2θ не слишком велик. Так, на рис. 163 (суперпозиция позитивного лево-

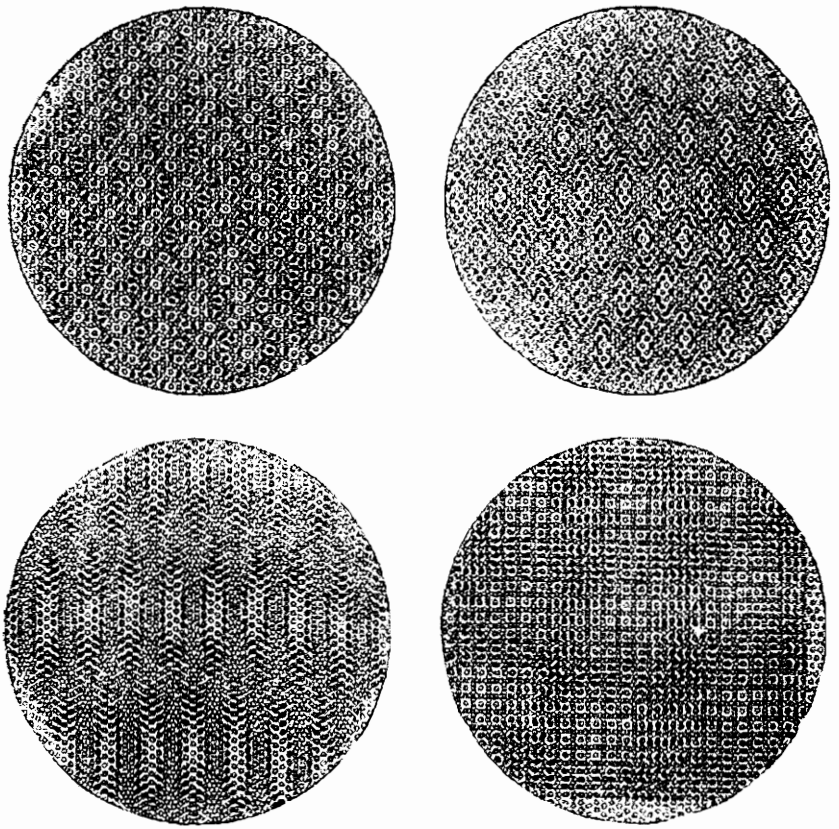


Рис. 160. То же, что на рис. 159, только при еще больших углах вращения. Вторичная структура уже не может считаться увеличенным изображением первичной. *Однако симметрия вторичных сеток остается неизменно ромбической* при любом угле поворота одной первичной сетки относительно другой

го орнамента с негативным правым) можно видеть, как ясно выражена во вторичной картине квадратная сетка, лежащая в основе первичных орнаментов, состоящих из рядов маленьких косоугольных черных (в позитиве) и белых (в негативе) треугольников. Определенные по чертежу коэффициент увеличения сетки (т. е. величина d/λ) и угол 2θ хорошо

коррелируют друг с другом, что показывает полную применимость формулы для данного случая.

В заключение остановимся еще на случае наложения друг на друга в параллельном положении двух систем полос с различными периодами (рис. 164). Этот случай интересен тем, что он геометрически иллюстрирует явление биения, известное из акустики, оптики, радиотехники и других областей волновой физики. Это явление состоит в том, что при распространении в одном направлении двух систем плоских волн, немного отличающихся по длине волны, возникают вторичные более длинные волны, воспринимаемые в случае акустики как периодическое усиление и ослабление звука (биения). Такие биения легко осуществить, заставляя звучать одновременно два камертона, настроенные почти на один тон. На практике для этого опыта берут два одинаковых камертона и один из них слегка расстраивают кусочком воска, приклеенным на одну из вибрирующих ножек камертона.

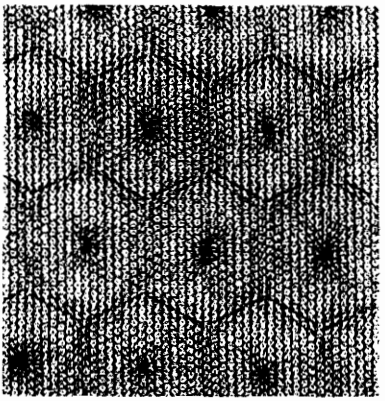


Рис. 161. В результате интерференции позитивной и негативной систем колец возникает вторичная структура типа пчелиных сот с темными пятнами, расположенными по узлам ромбической сетки, лежащей в основе первичных орнаментов

Геометрически биения, возникающие при наложении друг на друга двух систем параллельных полос, представляются в виде сгущений и разрежении. В конкретном случае расстояния между ближайшими полосами первой системы, продолженной на рис. 164 влево, равны $\lambda_1 = 1{,}91$ мм; во второй системе полос, продолженной вправо, соответствующие расстояния равны $\lambda_2 = 1{,}60$ мм. Обе величины можно назвать длинами первичных интерферирующих волн. Расстояние $L = 9{,}86$ мм между ближайшими сгущениями можно отождествить с длиной вторичной волны или волны биений.

Более подробное рассмотрение зависимости между этими величинами приводит к формуле, которая дает возможность вычислить длину вторичной волны L, если известны длины λ_1 и λ_2 интерферирующих волн:

$$L = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

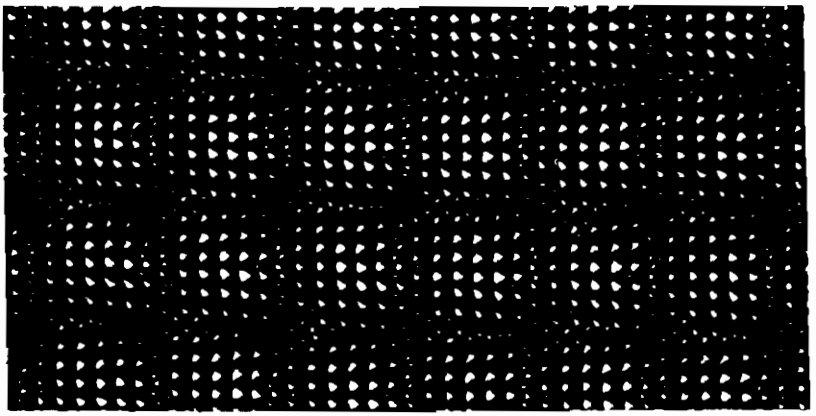


Рис. 162. Интерференция правого и левого позитивов из асимметричных треугольников (рис. 154) приводит к повышению симметрии.
Во вторичной периодической структуре присутствуют плоскости симметрии

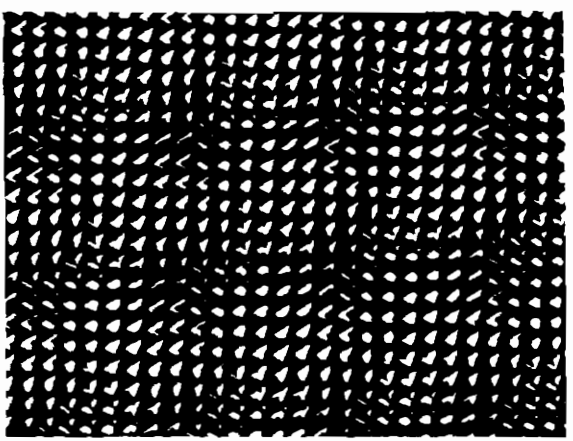


Рис. 163. Интерференция левого позитива с правым негативом.
На рисунке четко выявлены вторичные узлы квадратной сетки, на основе которой построены структуры первичных орнаментов

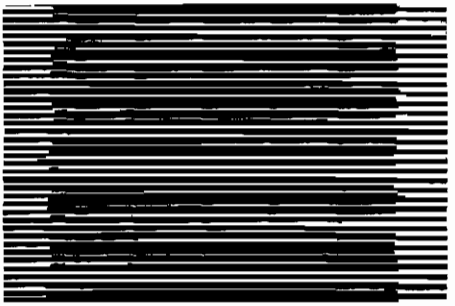


Рис. 164. «Биения» при интерференции двух параллельных систем полос. Длины первичных волн $\lambda_1 = 1,191$ мм, $\lambda_2 = 1,60$ мм, длина вторичной волны $L = 9,86$ мм (приближенно)

Вырезывание сетчатых орнаментов из бумаги

Для вырезывания сетчатых орнаментов можно взять лист бумаги в форме прямоугольника, квадрата, правильного треугольника или шестиугольника. Если исходная форма листа — прямоугольник, то в результате многократного складывания его пополам по линиям, параллельным сторонам прямоугольника, и дальнейшего вырезывания получим узор с плоскостями симметрии и осями второго порядка (рис. 165). Если

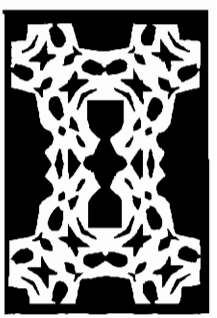


Рис. 165. Вырезывание орнаментов из бумаги. При многократном складывании прямоугольного листа бумаги по линиям, параллельным сторонам листа, получаются орнаменты с плоскостями симметрии и осями второго порядка. Следы плоскостей симметрии проходят по линиям сгибов; оси симметрии выходят в точках пересечения плоскостей

исходить из квадрата и перегибать его пополам не только в направлении сторон, но и по диагоналям, то придем к орнаменту с плоскостями симметрии и четверными осями (рис. 166). Из правильного треуголь-

ника или шестиугольника, если первый складывать по биссектрисам, а второй — по направлениям, параллельным сторонам вписанного треугольника, можно получить узор с плоскостями симметрии и тройными осями (рис. 167); если в шестиугольнике перегибы делать также по биссектрисам углов исходной фигуры, то возникнут и оси шестого порядка

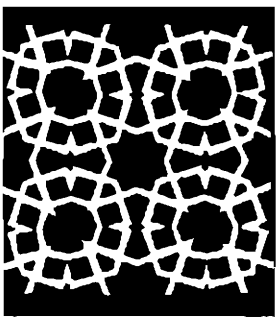


Рис. 166. Вырезывание орнаментов из бумаги. Орнамент с плоскостями симметрии и осями 4, 2

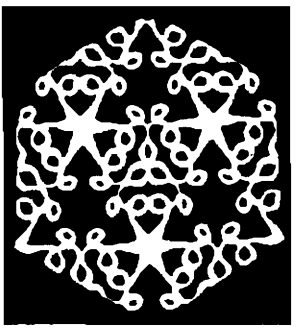


Рис. 167. Вырезывание орнаментов из бумаги. Орнамент с плоскостями симметрии и осями 3. Оси симметрии выходят в точках пересечения трех плоскостей

(рис. 168). Указанные приемы вырезывания приводят к (голоэдрическим) фигурам, наиболее богатым элементами симметрии, совместимыми с существованием определенных сеток. Вырезывание одним приемом узоров без плоскостей симметрии или с уменьшенным их числом (по сравнению с разобранными случаями) представляет известные трудности. В этих случаях целесообразно сначала вырезать из стопки бумаги достаточное число разрозненных розеток, а затем наклеивать их на бумагу или картон иного цвета, как на фон, руководствуясь законами симметрии плоских орнаментов или законами симметрии слоев (см. ниже). В последнем случае приходится считаться не только с лицевой, но и с оборотной стороной бумаги. На рис. 169 показан образец плоского орнамента, вырезанного этим способом.

Калейдоскопы для сетчатых орнаментов

С помощью калейдоскопов можно построить только четыре голоэдрических вида орнаментов; те же орнаменты получаются из бумаги после

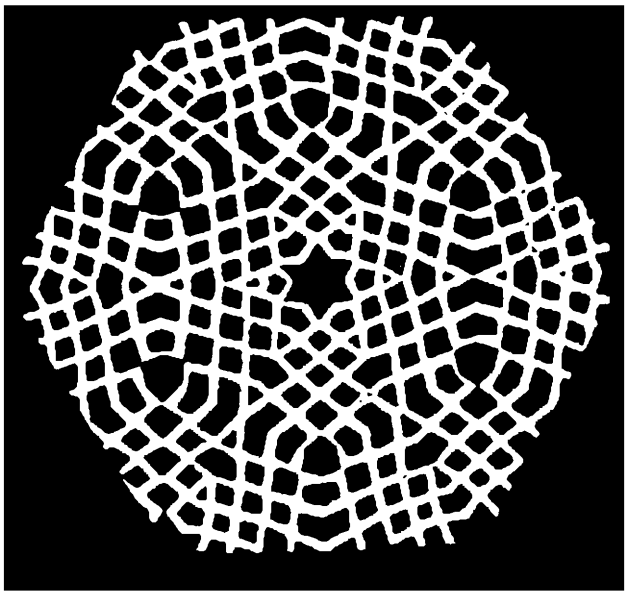


Рис. 168. Вырезывание орнаментов из бумаги. Орнамент с плоскостями симметрии и осями 6, 3, 2

надлежащего ее складывания и вырезывания. Призматическое расположение зеркал по сторонам прямоугольника отражающими поверхностями внутрь приводит к орнаментам типа $(b : a) : 2 \cdot m$ (рис. 170 *а*). Исходный предмет помещается внутри призмы. Зеркала, расположенные по равнобедренному прямоугольному треугольнику, приводят к орнаменту типа $(a : a) : 4 \cdot m$ (рис. 170 *б*). Калейдоскоп из зеркал, расположенных по сторонам правильного треугольника, дает возможность получать орнаменты типа $(a/a) : m \cdot 3$ (рис. 170 *в*). Наконец, калейдоскоп из трех зеркал, расположенных по сторонам прямоугольного

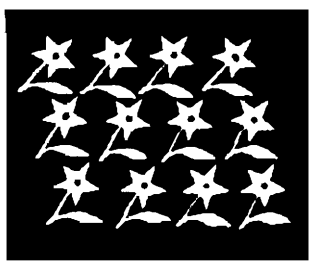


Рис. 169. Сетчатый орнамент получен наклеиванием на черный фон одинаковых белых фигур, вырезанных из стопы бумаги

треугольника с острыми углами 30° и 60°, позволяет получать орнаменты типа $(a/a) : m \cdot 6$ (рис. 170 *г*). Практически описанные калейдоскопы склеиваются из полосок зеркал; дно призмы делается из матового стекла. В калейдоскоп рассматривается картина, начерченная непосредственно на матовом стекле, или какой-либо предмет, прикладываемый к матовому стеклу с внешней стороны или помещаемый внутрь калейдоскопа. В первых двух случаях калейдоскоп держат горизонтально, направляя его на свет; в последнем — калейдоскоп приводят в вертикальное положение, освещая снизу.

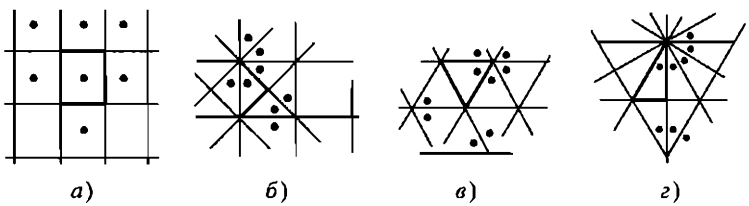


Рис. 170. Четыре калейдоскопа для получения плоских орнаментов

Параллелогоны и планигоны, их использование для паркетов

Мы уже неоднократно встречались с вопросами заполнения плоскости равными фигурами без пропусков и перекрытий. Если эти фигуры при заполнении плоскости располагаются параллельно друг другу и представляют собой многоугольники, то их называют параллелогонами. Параллелогонами могут быть только параллелограммы всех видов или шестиугольники, в которых каждой стороне есть равная и параллельная. Других параллелогонов быть не может. В соответствии с этим можно различать следующие восемь типических параллелогонов: четыре параллелограмма (квадрат, прямоугольник, ромб, косой параллелограмм) и четыре шестиугольника (правильный шестиугольник; шестиугольник, вытянутый по медиане противоположных сторон; шестиугольник, вытянутый по биссектрисе противоположных углов; косой шестиугольник) (рис. 171).

Чтобы перейти от параллелогонов к планигонам, т. е. к равным многоугольникам, заполняющим плоскость без пропусков и промежутков в положениях, различающихся поворотами вокруг осей или отражениями в плоскостях симметрии, достаточно разделить каждый параллелогон

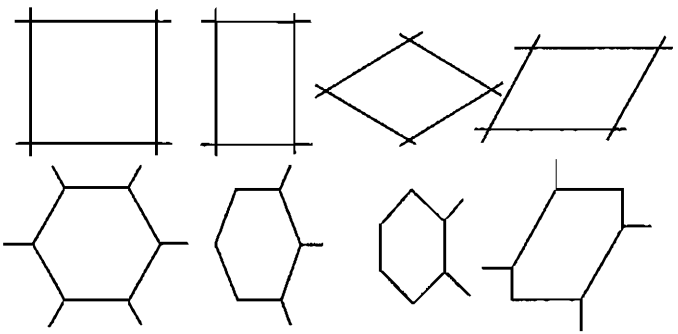


Рис. 171. Параллелогоны — фигуры, заполняющие плоскость без перекрытий и промежутков при параллельных переносах.
Получаются деформациями растяжения и сжатия квадрата и правильного шестиугольника

на равные части в соответствии с предполагаемой симметрией планигона. Например, квадрат (в обычном смысле) может быть разделен на равные части восемью способами (рис. 172, 19–26). Если мы принимаем его за асимметричную фигуру, то он не может быть разделен более чем на одну часть, т. е. остается без изменения (19), будучи одновременно и параллелогоном, и планигоном. Если мы приписываем квадрату симметрию $2 \cdot m$, то он может быть разделен на части двумя способами (20, 21); в предположении симметрии 2 он делится на два трапециевидных четырехугольника (22); при симметрии $4 \cdot m$ квадрат делится двумя способами на четыре части (23, 25) и одним способом — на восемь частей (26), а при симметрии 4 делится одним способом на четыре части (24). Совершенно аналогично можно разделить на равные части и все планигоны. Как показывает рис. 172, существует всего 48 способов деления параллелогонов на планигоны; однако при заполнении плоскости некоторые из этих 48 разделенных на части параллелогонов приводят к одинаковым результатам: например, параллелогоны 19 и 23 образуют простую квадратную сетку; параллелогоны 21, 25, 26 дают паркет разного рисунка, составленный из равнобедренных прямоугольных треугольников, и т. д.

Вопрос о заполнении плоскости планигонами, очевидно, является частный случаем более общей задачи о заполнении плоскости равными фигурами, которой мы занимались выше. Этот частный случай имеет практическое значение при создании рисунков паркетов для покрытия полов, улиц и т. д.

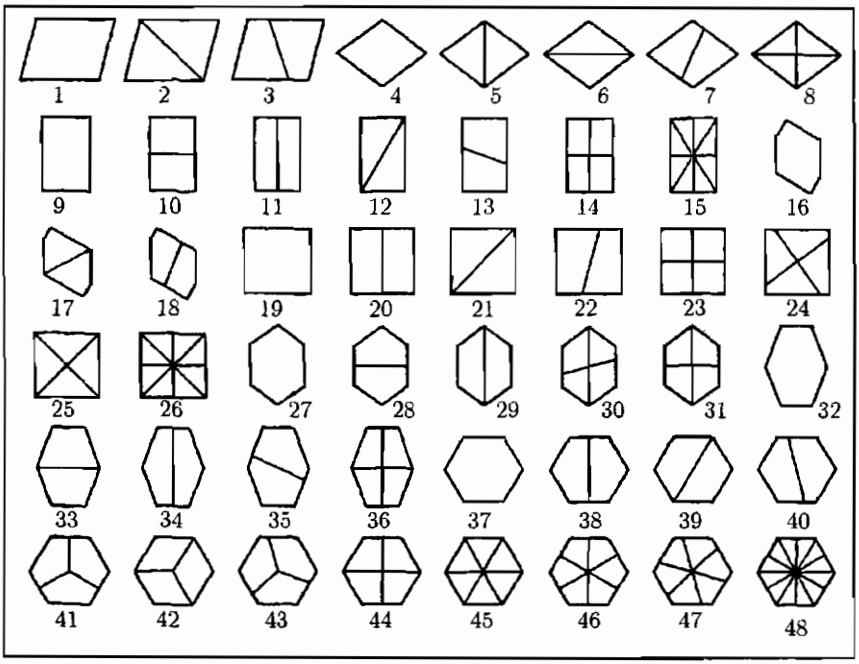


Рис. 172. Все способы деления параллелогонов на равные части (планигоны)

Правильные системы точек. Закон сохранения произведений кратности точек на их относительные числа

Мы уже встречались с понятием симметричных (правильных) систем точек для конечных фигур. Это понятие нетрудно перенести и на бесконечные плоские фигуры. Пусть нам дан какой-либо бесконечный плоский орнамент (рис. 173). Возьмем в нем одну произвольную точку (на рисунке — любой черный кружочек) и отметим все другие точки, эквивалентные выбранной; тогда вся полученная совокупность точек образует простую правильную (или эквивалентную) систему точек. Если прибавить к ней вторую, третью и т. д. системы (белые кружки, двойные кружки), получим сложные (составные) системы точек. Если исходная точка простой системы не лежит на оси или плоскости симметрии и не находится в центре симметрии, то полученная совокупность называется системой эквивалентных точек общего положения (черные круж-

ки); в противном случае получаются частные системы (белые и двойные кружки). Число точек каждого сорта в бесконечном орнаменте равно бесконечности, но в пределах элементарной ячейки этих точек, связанных друг с другом операциями симметрии, конечное число.

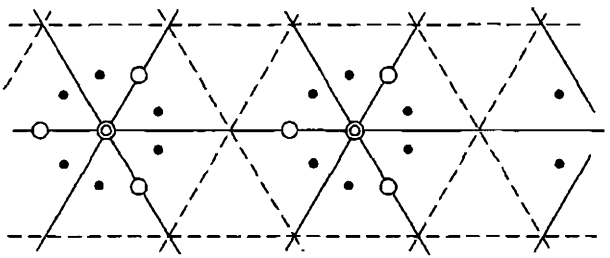


Рис. 173. Правильные системы точек для вида симметрии $p31m = (a/a) \cdot m \cdot 3$.

Показана лишь часть элементарной ячейки, полностью приведенной на рис. 149. Сплошные линии — плоскости симметрии, штриховые — плоскости скользящего отражения. Оси симметрии 3 на рисунке не показаны

Исследование рис. 173 показывает, что на каждую изображенную двойным кружком точку приходится по три точки, изображенных белыми кружками, и по шесть точек, изображенных черными кружками. Кратность черных точек равна единице, кратность белых — двум, кратность двойных кружков — шести. Если бы мы стали перемещать черную точку в другое положение, то в момент пересечения ею плоскости симметрии две черные точки слились бы в одну. При пересечении ею оси и одновременно трех плоскостей симметрии — шесть точек слились бы в одну. Отсюда следует, что взятые в расчете на ячейку относительные числа n_i точек различных сортов относятся друг к другу как обратные величины соответствующих кратностей s_i:

$$n_1 : n_2 : n_3 : \ldots = \frac{1}{s_1} : \frac{1}{s_2} : \frac{1}{s_3} : \ldots .$$

Во всяком орнаменте можно найти точки с кратностью $s = 1$; обозначая относительные числа этих точек через n, предыдущее отношение можно записать следующим образом:

$$n : n_1 : n_2 : \ldots = 1 : \frac{1}{s_1} : \frac{1}{s_2} : \ldots \quad \text{или} \quad n = n_i \cdot s_i .$$

Иными словами, произведение относительного числа точек данного сорта на их кратность для данного орнамента — величина постоянная. Так, для рассматриваемого орнамента произведение кратности на относительное число точек всегда будет равно шести, где бы ни выбрать исходную точку для построения симметричной системы; для черных кружков это произведение равно 1×6, для белых — 2×3, для двойных кружков — 6×1.

Для вывода симметричных систем точек нет необходимости строить весь плоский орнамент. Достаточно задать только совокупность элементов симметрии на некотором его участке, например на элементарной ячейке (см. рис. 149). Помещая точку в то или иное положение по отношению к заданным элементам симметрии и размножая ее последними, легко построить любую систему эквивалентных точек, отвечающую данному виду симметрии.

Плоские изогоны и изоэдры. Паркеты

Изогоном называется такой многогранник, в каждой вершине которого сходится одинаковое число ребер. Мы будем интересоваться только типическими изогонами, в которых пучки ребер, сходящихся в каждой вершине, совместимо или зеркально-равны друг другу. Примерами типических изогонов могут служить все правильные многогранники. Через все вершины любого типического изогона можно описать сферу. Если радиус сферы становится бесконечно большим, то поверхность сферы переходит в плоскость. Типический изогон, отвечающий шару с бесконечно большим радиусом, называется *плоским*. В общем случае плоский изогон состоит из нескольких сортов многоугольников (граней плоского изогона), заполняющих плоскость без промежутков. В каждой вершине плоского изогона сходятся геометрически равные (конгруэнтные или зеркальные) пучки ребер изогона (стороны многоугольников). Для построения плоских изогонов выбираем один из 17 видов симметрии сетчатых орнаментов. Пользуясь рис. 149, наносим на бумагу расположение элементов симметрии, отвечающих выбранному виду симметрии. Затем берем произвольную точку и размножаем ее симметрическими преобразованиями, соответствующими имеющимся элементам симметрии. Полученную систему эквивалентных точек и кладем в основу построения изогонов. Для этого во всех случаях поступаем следующим образом. Соединяем отрезком прямой каждую точку системы с ближайшей точкой. Продолжаем процесс до тех пор, пока это оказывается возможным, не допуская пересечений прямых в каких-либо иных точках, кроме данных. Если имеется несколько равных кратчайших расстояний, то проводим все отвечающие им прямые, если они между собой не пересекаются, и

не проводим ни одной, если они взаимно пересекаются. На рис. 174–176 под номерами 1—35 даны построенные этим способом плоские изогоны для различных видов симметрии.

Разберем для примера, как был построен изогон 2, изображенный на рис. 174. Для построения простой эквивалентной системы точек взят вид симметрии $(a/a) : m \cdot 6$ (см. рис. 149). Исходная точка A выбрана на плоскости симметрии между шестерной и тройной осями симметрии. Поворотами на соответствующие углы вокруг шестерных и тройных осей из точки A выводятся все прочие точки эквивалентной системы. Точку A соединяем с двумя ближайшими к ней точками; то же делаем со всеми другими точками системы. В результате вычерчиваются все показанные на рисунке шестиугольники. Далее точку A и все другие точки нашей системы соединяем со следующими по близости к ним точками, в результате чего возникают все треугольники. На этом процесс построения плоского изогона заканчивается. В самом деле, если бы мы соединили точку A со следующей ближайшей точкой, расположенной на противоположном конце прямоугольника, то нам пришлось бы провести и вторую диагональ, отчего возникла бы новая точка, не принадлежащая к простой системе, а именно точка пересечения диагоналей прямоугольника, что по условию недопустимо. По окончании построения изогона все вспомогательные точки и линии, изображавшие оси и плоскости симметрии, убираются.

При построении плоских изогонов одинаковые результаты могут получиться и в тех случаях, когда исходные виды симметрии различны. Например, плоский изогон 6 на рис. 174 может быть построен при надлежащем выборе исходной точки из вида симметрии $(a/a) \cdot m \cdot 6$ или из вида $(a/a) : m \cdot 3$ (см. рис. 149). Получается кажущееся противоречие: плоский изогон может иметь не ту симметрию, которая была положена в основу его построения. В данном случае мы встречаемся с тем же явлением, которое было подробно рассмотрено на примере пяти кубов различной симметрии. Мнимое противоречие возникает потому, что при построении изогонов игнорировалось физическое равенство фигур и направлений; оно может быть целиком устранено надлежащей обработкой (раскраской, штриховкой) рисунка.

Построенные выше изогоны мы будем называть полными в отличие от неполных, которые можно получить из них, исключая те или иные отрезки с условием, чтобы остающиеся отрезки разбивали плоскость на выпуклые многоугольники. На рис. 176–178 под номерами 36—60 показаны примеры неполных плоских изогонов, полученных таким способом. Например, неполный плоский изогон 36, показанный на рис. 176, получается из полного изогона 8 (см. рис. 174) путем исключения диагоналей параллелограммов; изогон 40 (рис. 177) получается из изогона 19 (рис. 175) при удалении коротких диагоналей ромбов и т. д.

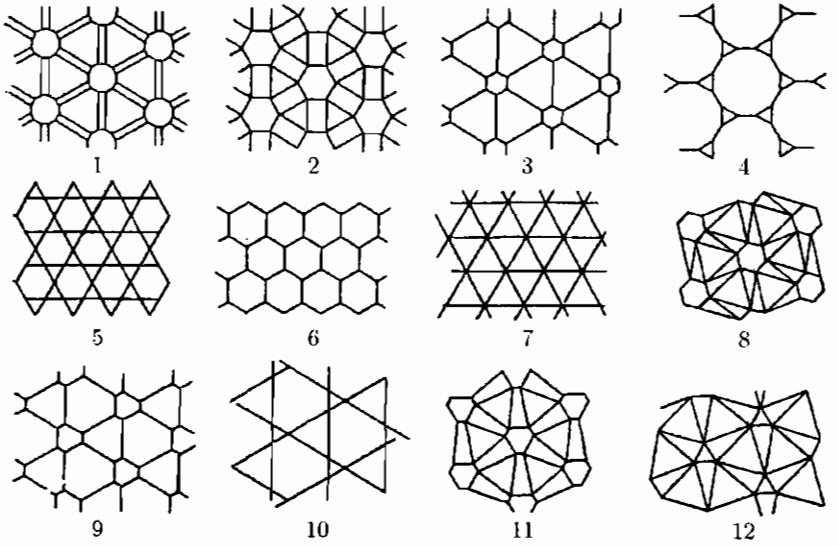


Рис. 174. Полные плоские изогоны 1–12

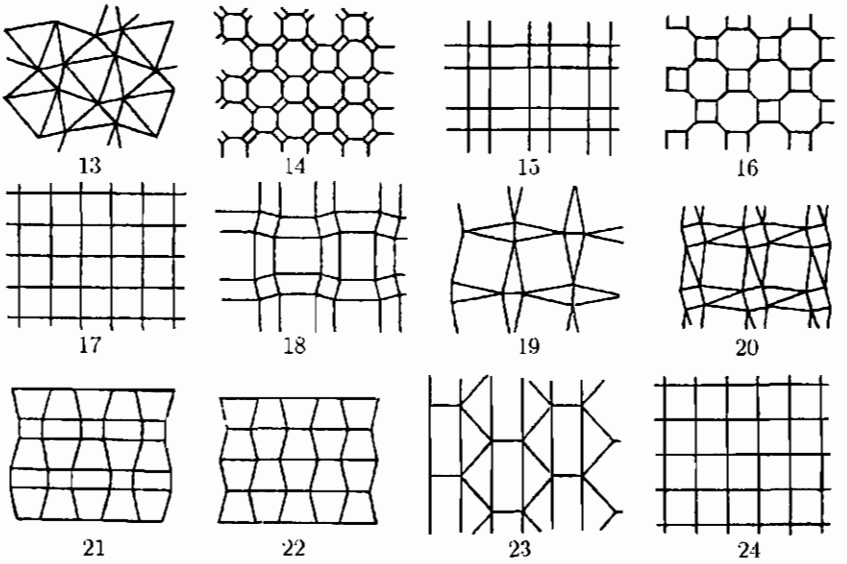


Рис. 175. Полные плоские изогоны 13–24

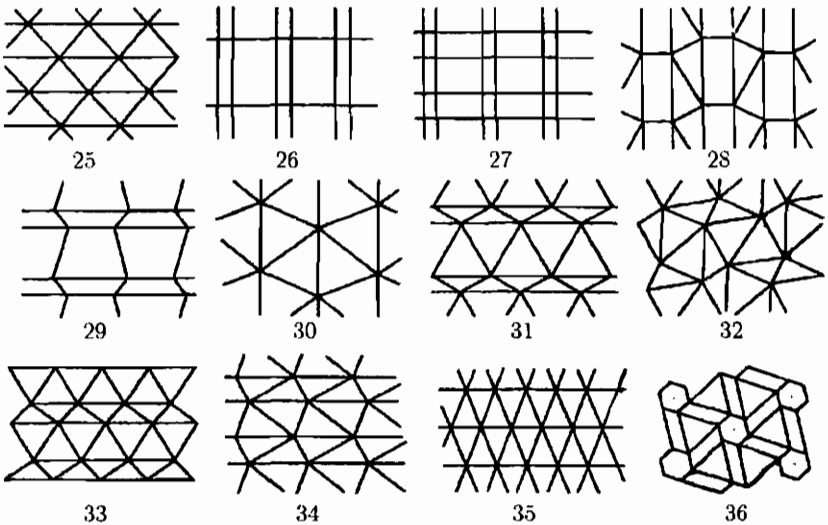


Рис. 176. Полные плоские изогоны 25–35, неполный изогон 36

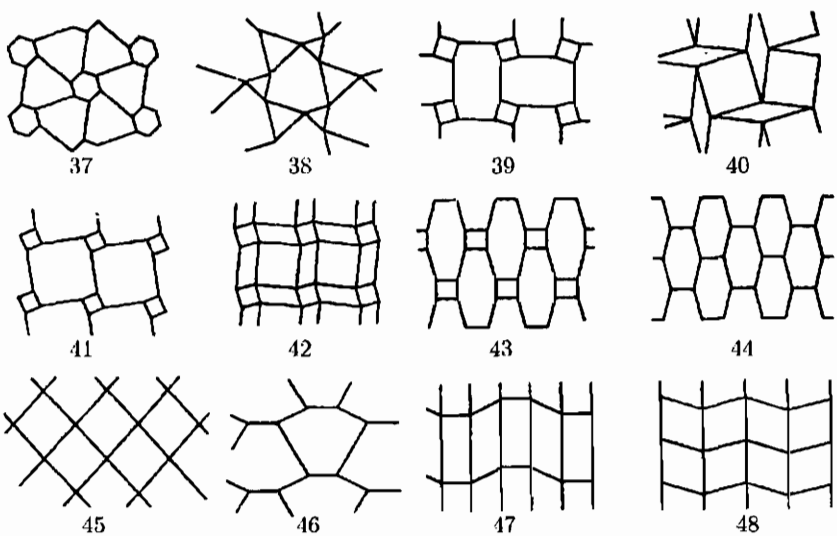


Рис. 177. Неполные плоские изогоны 37–48

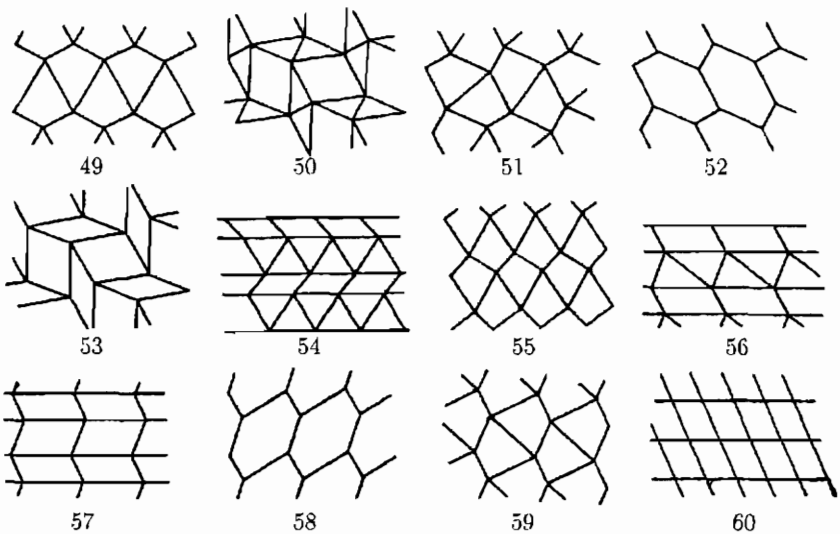


Рис. 178. Неполные плоские изогоны 49–60

От типических плоских изогонов легко перейти к типическим плоским изоэдрам, т. е. к таким плоским бесконечным фигурам, которые состоят из равных многоугольников, заполняющих плоскость без пропусков и промежутков. От рассмотренных выше плоских многоугольников (планигонов) эти многоугольники отличаются тем, что они необязательно должны быть частями параллелогонов (многоугольников с параллельными сторонами). Для построения плоских изоэдров берем плоские изогоны и проводим через середины их ребер прямые, которые после взаимного пересечения образуют выпуклые многоугольники плоских изоэдров. Рассмотрим для примера рис. 179. На нем тонкими линиями показан один из встретившихся нам изогонов (19). Толстые линии проходят через середины тонких, перпендикулярно к последним, и в совокупности образуют систему равных шестиугольников.

Смешение стилей и особенности восприятия вертикальных плоскостей

В самом начале этой книги мы уже говорили о составных фигурах, части которых характеризуются в известном смысле противоре-

чивой симметрией. К таким фигурам можно отнести квадрат, внутри которого вписан правильный треугольник. Рассматривая эту фигуру по частям, мы должны признать ее симметричной; в целом же она асимметрична, если не принимать плоскость чертежа за плоскость симметрии. Явление смешения стилей можно часто наблюдать в бордюрах и сетчатых орнаментах. Интересно, что это явление может и не вызывать неприятного впечатления у зрителя, а, наоборот, заставить его более активно рассматривать рисунок и искать в нем замаскированные закономерности. В этом можно убедиться, сравнивая между собой рис. 179 и 180.

Первый из них характеризуется только одним видом симметрии. При всей сложности композиции рисунка расшифровка скрытых в нем закономерностей, благодаря наличию плоскостей симметрии, производится очень быстро и легко. Во втором рисунке можно различить три вида симметрии. Тонкие линии образуют орнамент с симметрией $(a : a) : 4$. Толстые линии, разделяющие плоскость на шестиугольники, составляют орнамент с симметрией $(c/b : a) : 2 \cdot m$. Наконец, толстые зигзагообразные линии образуют орнамент с симметрией $(b/a) : 2$. При внешнем различии узоров и их групп симметрии согласование орнамен-

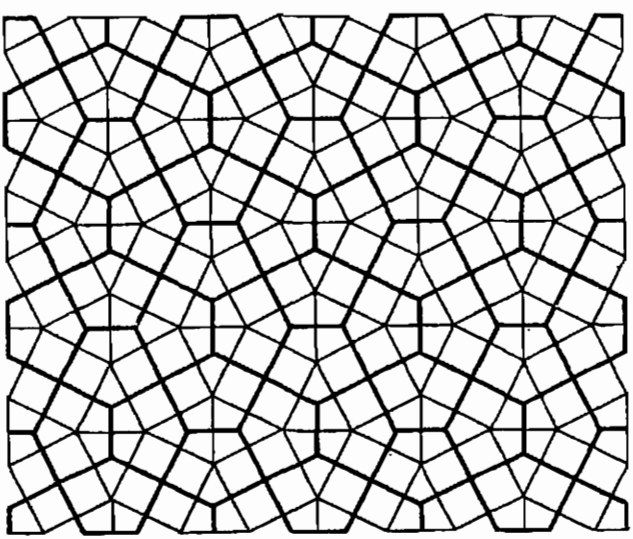


Рис. 179. Построение плоского изоэдра (толстые линии) для заданного плоского изогона (тонкие линии)

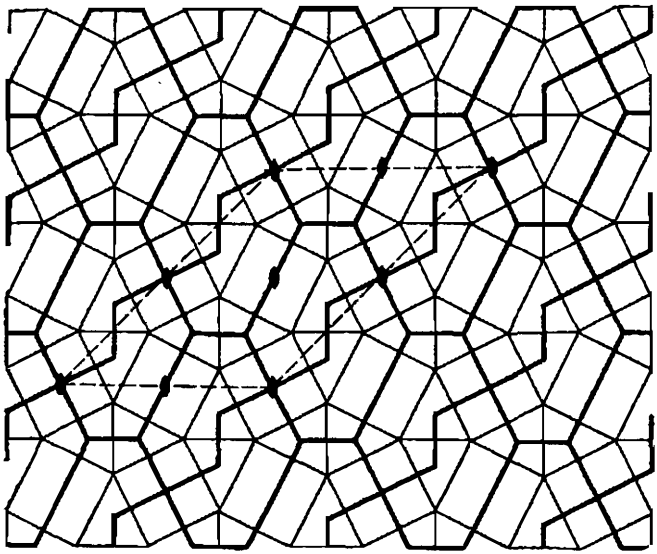


Рис. 180. Смешение стилей симметрии. Орнамент состоит из трех рисунков разной симметрии. Штриховой линией выделена элементарная ячейка общей для всех рисунков группы $p2 = (b/a) : 2$

тов обеспечивается нетривиальной общей подгруппой $p2 = (b/a) : 2$, элементарная ячейка которой выделена на рис. 180 штриховой линией. Под действием преобразований все три орнамента одновременно совпадают.

На первом рисунке можно проверить еще одну особенность вертикальных плоскостей симметрии. Если повернуть рис. 179 так, чтобы его плоскости симметрии заняли косое положение, то орнамент сразу «оживает», становится беспокойным; плоскости симметрии перестают играть роль элементов симметрии, определяющих первое впечатление от рисунка, и уступают в этом смысле место осям симметрии. При попытке объяснить это явление невольно появляется мысль о том, что вертикальная плоскость симметрии человека, вернее, симметрия его зрительного аппарата, как бы вносится в симметрию наблюдаемого объекта.

В свое время Мах иллюстрировал более легкое восприятие вертикальных плоскостей симметрии по сравнению с горизонтальными тем, что дети очень часто путают латинские буквы p и q или d и b, связанные между собой вертикальной плоскостью симметрии, но никогда не

смешивают букв p и b или q и d. О том, что между этими четырьмя буквами существует более тонкая симметричная связь по оси второго порядка (p и d; или q и b), Мах, по-видимому, не знал.

Односторонние плоские континуумы

До сих пор мы рассматривали только дискретные двумерно-периодические фигуры (сетчатые орнаменты), которые обладали односторонней особенной плоскостью; изнанкой этих фигур мы не интересовались, предполагая, что она отличается от лицевой стороны и не может быть совмещена с нею симметрическими преобразованиями. Переходя к непрерывным двумерным пространствам — континуумам, т. е. к обычным плоскостям, мы и среди них должны различать плоскости двусторонние, у которых обе стороны равны друг другу, и плоскости односторонние, или полярные, у которых «лицо» отличается от «изнанки» или, если угодно, у которых есть только лицевая сторона, а изнанки нет совсем. С первого взгляда кажется, что все эти рассуждения надуманны и что сам вопрос о непрерывных бесконечных плоских фигурах (или пространствах) является нелепым, так как, кроме привычной нам евклидовой плоскости, никаких других плоскостей представить себе нельзя. На самом же деле можно не только представить, но и осуществить бесконечное множество плоскостей, отличающихся друг от друга своими свойствами, в частности симметрией. Для этого нужно отказаться от привычного элементарно-геометрического рассмотрения фигур вообще и плоскостей в частности и принять, что всякая реальная поверхность есть прежде всего граница, разделяющая два тела, обладающих в общем случае различными комплексами физических свойств. Для удобства математического рассмотрения можно как угодно идеализировать эту границу, не забывая, однако, о том, что и она обладает физическими свойствами.

Наиболее простым для понимания и вместе с тем наиболее симметричным является однородное одностороннее двумерное пространство, представление о котором дает кусок плоского картона, лицевая сторона которого выкрашена равномерно одной краской, а изнанка так же равномерно другой. Легко проверить, что все точки такой «фигуры» обладают симметрией $\infty \cdot m$, т. е. через каждую точку по нормали к поверхности проходит полярная ось симметрии ∞ с бесконечным числом продольных плоскостей m. Символ симметрии однородной односторонней плоскости можно записать в виде $(a_0 : a_0) : \infty \cdot m$, так как такую плоскость можно построить непрерывными переносами $(a_0 : a_0)$ точки с симметрией $\infty \cdot m$.

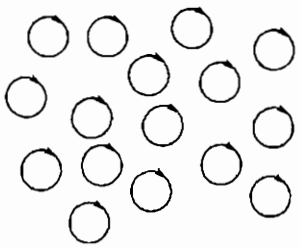


Рис. 181. *Модель двумерной среды с симметрией* $(a_0 : a_0) : \infty$. Точки на плоскости из-за вращения не имеют вертикальных плоскостей симметрии

Другой вид симметрии однородной односторонней плоскости получим тем же способом, т. е. непрерывными переносами точки с симметрией ∞. Эта материальная точка не имеет плоскостей симметрии. Чтобы составить понятие о новом плоском пространстве, достаточно представить себе, что все точки плоского картона, выкрашенного с обеих сторон в разные цвета, вращаются равномерно в одну сторону. В зависимости от направления вращения точек можно различать две энантиоморфные модификации таких пространств — правую и левую. Хорошей моделью новой плоскости может служить совокупность дисков, беспорядочно, но с равномерной плотностью расположенных на плоскости рис. 181 лицевой стороной к наблюдателю. Все диски вращаются в одну сторону. Если диски и расстояния между ними настолько малы, что наблюдатель не может никаким способом выделить роль отдельного элемента и вынужден изучать только суммарный эффект действия многих элементов, то исследуемый объект может быть принят за идеальную однородную плоскость с найденной выше симметрией $(a_0 : a_0) : \infty$.

От рассмотренных примеров односторонних плоскостей легко перейти к пространствам меньшей симметрии. Для этого достаточно взять бесконечное множество равных фигур с симметрией односторонней розетки $n \cdot m$ или n и расположить их на плоскости параллельно друг другу беспорядочно, но с одинаковой средней плотностью. Устремляя к нулю размеры фигур и расстояния между ними, получим «в пределе» однородную плоскость с симметрией $(a_0 : a_0) : n \cdot m$ или $(a_0 : a_0) : n$*. Если в качестве исходной фигуры взять односторонний прямоугольник или ромб, тогда моделью соответствующей среды будет служить картина, изображенная на рис. 182. Для наблюдателя, неспособного различать

*Не следует отождествлять понятия однородности и изотропии. Однородность требует трансляционной эквивалентности всех точек континуума, изотропия — ортогональной эквивалентности всех направлений, проходящих через фиксированную точку. Модели плоскостей с симметрией $(a_0 : a_0) : n \cdot m$ или $(a_0 : a_0) : n$ одновременно однородны и анизотропны: фиксируя на плоскости какое-либо направление (полярный вектор) и применяя к нему преобразования ортогональных групп $n \cdot m$ или n, получим в каждой точке связку (или «звезду») эквивалентных направлений, состоящую, соответственно, из $2n$ или n векторов. Группы симметрии анизотропных плоскостей являются подгруппами фундаментальной или охватывающей группы $(a_0 : a_0) : \infty \cdot m$ (см. стр. 345).

отдельные элементы этой структуры, каждая произвольно выбранная точка O будет иметь симметрию прямоугольника $2 \cdot m$, так как поворот обеих картин на 180° вокруг точки O или отражение в плоскостях m_1 и m_2, переводит структуру в целом в себя. В то же время всякий другой поворот или отражение пространства могут быть обнаружены по изменению свойств пространства вдоль фиксированного направления измерения.

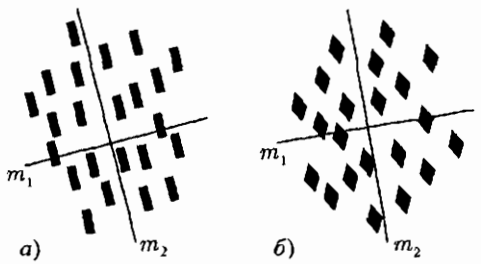


Рис. 182. Две структуры, переходящие при уменьшении взаимных расстояний и размеров элементарных частиц в континуумы симметрии $(a_0 : a_0) : 2 \cdot m$

Приведем еще один пример непрерывной односторонней двумерной среды. Представим себе выкрашенный с обеих сторон в разные цвета картон, движущийся в своей плоскости прямолинейно и равномерно. Для наблюдателя извне картон будет казаться неподвижным; исследуя его симметрию, нетрудно убедиться в существовании бесконечного множества взаимно параллельных плоскостей симметрии, перпендикулярных к картону и направленных по его движению. Никаких дополнительных элементов симметрии, кроме всегда присутствующих в двумерных континуумах осей переносов, в данной среде нет.

Нам остается сказать теперь несколько слов о тех реально существующих плоскостях или поверхностях, к которым в той или иной мере (идеальных плоскостей ведь не существует в природе) приложимы изложенные представления. Гладкая поверхность воды, если речь идет, например, об ее способности отражать световые лучи, вполне изотропна и, очевидно, обладает симметрией $(a_0 : a_0) : \infty \cdot m$. Поверхность сахарного раствора, который, как известно, способен вращать плоскость поляризации, имеет симметрию $(a_0 : a_0) : \infty$. Поверхность кристаллических граней можно рассматривать или как плоский орнамент прерывистого строения, если речь идет о расположении отдельных атомов (ионов, мо-

лекул), или как однородную плоскую среду — при изучении оптических и механических свойств.

В противоположность плоскому орнаменту, имеющему 17 видов симметрии, число случаев односторонних плоских континуумов бесконечно велико. Символы симметрии этих континуумов можно выписать в виде двух бесконечных рядов:

$$\begin{array}{ll} (a_0 : a_0) : 1 \cdot m & (a_0 : a_0) : 1 \\ (a_0 : a_0) : 2 \cdot m & (a_0 : a_0) : 2 \\ (a_0 : a_0) : 3 \cdot m & (a_0 : a_0) : 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_0 : a_0) : \infty \cdot m & (a_0 : a_0) : \infty. \end{array}$$

Только последние члены рядов отвечают вполне изотропным плоскостям: обыкновенной плоскости и двум ее энантиоморфным формам (правой и левой). Все остальные формулы относятся к анизотропным плоскостям; формула $(a_0 : a_0) : 1$ отвечает «асимметричной» плоскости в том смысле, что ни одна из ее точек не имеет никаких элементов симметрии, кроме осей первого порядка: сама же плоскость имеет только оси переносов.

Односторонние плоские семиконтинуумы

В разряд семиконтинуумов мы объединяем такие бесконечные фигуры, которые построены прерывно в одних направлениях и непрерывно — в других. Примером простейшего одностороннего плоского семиконтинуума может служить система начертанных на бумаге параллельных полос (рис. 183). Средние точки поперечных сечений полос, очевидно, имеют симметрию односторонней розетки $2 \cdot m$. Весь семиконтинуум может быть получен непрерывным переносом одного такого сечения вдоль горизонтальной оси b_0 и конечными переносами вдоль оси a, перпендикулярной к первой. Поэтому символ всей фигуры можно записать в виде $(b_0 : a) : 2 \cdot m$. Ту же симметрию имеет фигура, в которой роль одной полосы играет пара полос.

Если все равноотстоящие полосы направлены в одну сторону, получим фигуру с симметрией $(b_0 : a) : m$. Придать полосе направление можно различными способами; можно, например, представить себе полосы движущимися равномерно вправо или изготовленными из анизотропного ворсистого материала, приглаженного в одну сторону, и т. д. Ту же симметрию имеет система направленных двойных полос.

В следующем виде семиконтинуума элементом структуры служит поперечное сечение ленты, состоящей из широкой и узкой полос. Сим-

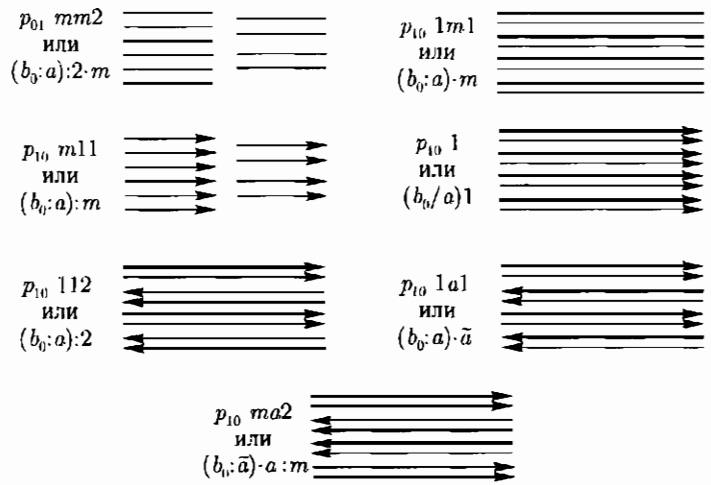


Рис. 183. Односторонние плоские семиконтинуумы и их виды симметрии. Ось b_0 направлена горизонтально, ось a — вертикально. Пояснение обозначений см. в примечании к табл. 10

метрия этого сечения — m, как и в предыдущем случае, только плоскость симметрии теперь перпендикулярна, а не параллельна ленте, в соответствии с чем и символ симметрии всей картины меняется и приобретает вид $(b_0 : a) \cdot m$. Напоминаем, что знак точки или двоеточия означает параллельность или перпендикулярность элемента симметрии (перпендикулярного особенной плоскости) к ближайшей в символе оси переносов.

Четвертый вид симметрии можно составить из двойных направленных лент различной ширины, благодаря чему из структуры выпадают как продольные, так и поперечные плоскости симметрии. Символ симметрии у этих лент — $(b_0 : a) : 1$ или более общий — $(b_0/a)1$.

В пятом виде симметрии двойные смежные односторонние ленты связаны между собой осями симметрии второго порядка. Символ симметрии этого вида — $(b_0 : a) : 2$ или более общий — $(b_0/a) : 2$.

В шестом виде симметрии двойные смежные ленты связаны между собой плоскостями скользящего отражения $\tilde{a}$ (на рисунке — вертикальными). Символ симметрии можно написать так: $(b_0 : a) \cdot \tilde{a}$.

Последний, седьмой вид симметрии плоских односторонних семиконтинуумов получается из пятого вида добавлением в символ верти-

Таблица 10. Сопоставление формул симметрии, записанных в бескоординатном и координатном видах для плоских однородных семиконтинуумов, орнаментов и бордюров

Для плоских однородных семиконтинуумов	Для бордюров	Для плоских односторонних орнаментов
$p_0 1 = (b_0/a)$	$(a)1$	$p1 = (b/a)1$
$p_0 1a1 = (b_0 : a) \cdot \widetilde{a}$	$(a) \cdot \widetilde{a}$	$p1a1 = (b : a) \cdot \widetilde{a}$
$p_0 112 = (b_0/a) : 2$	$(a) : 2$	$p112 = (b : a) : 2$
$p_0 m11 = (b_0 : a) : m$	$(a) : m$	$pm11 = (b : a) : m$
$p_0 1m1 = (b_0 : a) \cdot m$	$(a) \cdot m$	$p1m1 = (b : a) \cdot m$
$p_0 ma2 = (b_0 : a) \cdot \widetilde{a} : m = (b_0 : \widetilde{a}) : 2 \cdot \widetilde{a}$	$(a) \cdot \widetilde{a} : m = (a) : 2 \cdot \widetilde{a}$	$pma2 = (b : a) \cdot \widetilde{a} : m = (b : a) : 2 \cdot \widetilde{a}$
$p_0 mm2 = (b_0 : a) : 2 \cdot m$	$(a) : 2 \cdot m$	$pmm2 = (b : a) : 2 \cdot m$

Примечание. Международные обозначения видов симметрии бордюров совпадут с формулами для плоских орнаментов, если горизонтальную ось a бордюра (рис. 90), сохраняя ее наименование, совместить с осью b (рис. 149). Индекс 0 в символе трансляционной группы семиконтинуума p_0, отмечает наличие одной оси непрерывных переносов; совпадение этой оси с осью b можно отметить специально, поместив индекс 0 на вторую позицию, а на первой индексом 1 отметить конечность переносов («единичной» длины a) вдоль оси переносов a ($p_0 = p_{10}$), как это сделано на рис. 183.

кальной плоскости скользящего отражения $\widetilde{a}$ или из шестого вида добавлением горизонтальной плоскости m. (Заметим, что в получившейся структуре плоскости m проходят через оси 2.) Соответствующий символ симметрии будет $(b_0 : a) \cdot \widetilde{a} : m$ или $(b_0 : a) : 2 \odot m = (b_0 : a) : 2 \cdot \widetilde{a}$.

Если выписать в табл. 10 все формулы симметрии плоских односторонних семиконтинуумов и отбросить в них символ непрерывной оси переносов b_0, получим известные формулы симметрии бордюров (см. рис. 90); удаляя же индекс «нуль» у оси b_0, получим символы симметрии плоских орнаментов (см. рис. 149). Отсюда следует вывод, что плоские односторонние семиконтинуумы представляют собой не что иное, как обыкновенные бордюры, вытянутые в ширину до бесконечности, или плоские орнаменты с одной осью непрерывных переносов.

Глава 8

Симметрия слоев

Слои находятся в таком же отношении к сетчатым орнаментам, как ленты к бордюрам. Чтобы перейти от сетчатого орнамента к слою, необходимо ослабить требование обязательной полярности особенной плоскости. Для характеристики слоя достаточно двух условий: наличия особенной (односторонней или двусторонней) плоскости и двух осей переносов (для определенности ориентировки будем всегда представлять себе особенную плоскость слоя горизонтальной). Если принять такое определение, то понятие сетчатого орнамента войдет в понятие слоя, причем из определения будет следовать и требование отсутствия у слоя особенных точек. Полный вывод всех видов симметрии слоев осуществлен в тридцатых годах нашего столетия немецкими учеными Германом, Вебером, Александером и Германном. Учение о симметрии слоев применяется в кристаллографии — при изучении структуры жидких кристаллов, поверхностей раздела доменов, двойников и эпитаксиальных сростков; в физической химии — при изучении мономолекулярных слоев и тончайших пленок; в биологии — при изучении структуры мембран и других биологических тканей; его можно применять и в архитектуре — при проектировании ажурных решетчатых конструкций, оболочек, оград, вывесок и т. д.

Элементы симметрии слоев

В силу односторонности плоских орнаментов у них, как известно, отсутствуют «переворачивающие» элементы симметрии, с помощью которых элементарные фигуры переводятся с одной стороны плоскости на другую. В слоях эти элементы симметрии могут присутствовать; к ним принадлежат центры симметрии, горизонтальные (т. е. лежащие в основной плоскости) оси симметрии второго порядка (простые поворотные и винтовые), горизонтальные плоскость симметрии и плоскость скользящего отражения. Если оставаться в пределах классического учения о симметрии, то каких-либо новых, не встречавшихся еще в нашей книге элементов симметрии в слоях быть не может. Однако далее мы уви-

дим, что именно изучение симметрии слоев натолкнуло ученых на мысль о возможности расширения самого понятия симметрии и на вывод групп антисимметрии слоев и трехмерных (конечных и бесконечных) фигур.

Общая идея вывода, изображения и обозначения симметричных слоев

Идея вывода всех видов симметрии слоев, кроме полученных ранее 17 видов симметрии орнаментов, основана на попарном комбинировании одинаковых сетчатых орнаментов из числа этих 17 или на присоединении к числу порождающих орнаменты элементов добавочных «переворачивающих» элементов симметрии. Так, при дополнительном введении в каждый вид горизонтальной плоскости симметрии получаются 17 двусторонних видов симметрии слоев. В результате введения новых элементов симметрии число элементарных фигур, приходящихся на единицу поверхности особенной плоскости, очевидно, удвоится, если только фигуры при этом не сольются и не переплетутся между собой, что может дать повод принять за элементарную новую фигуру, составленную из нескольких старых.

Для изображения видов симметрии слоев мы несколько видоизменим способ, применявшийся ранее для лент. Черные треугольники на чертежах будут изображать такие фигуры, которые, кроме черной стороны, обращенной к наблюдателю, имеют еще и невидимую наблюдателю белую сторону. Наоборот, белые треугольники обращены своей черной стороной от наблюдателя, а белой — к наблюдателю. Треугольники с точкой в середине представляют фигуры, у которых «лицо» и «изнанка» одинаковы.

Бескоординатные символы пространственных групп симметрии двусторонних слоев конструируются таким же образом, как символы пространственных групп односторонних слоев (см. рис. 149). Для получения символов симметрии симморфных групп группу двумерных переносов $(a/b), (a : b)$ или $\left(\frac{a+b}{2}/a : b\right)$ «умножают» на группу симметрии соответствующей конечной фигуры (см. рис. 69); при этом элементы симметрии точечной группы «размножаются» с помощью трансляций в плоскости слоя и возникают некоторые производные элементы симметрии. Между символами группы трансляций и точечной группы ставятся знаки ($\cdot$ и :), показывающие относительное положение элементов симметрии этих групп; во всех случаях (кроме слоев 70–72, 74, изображенных на рис. 187) элемент симметрии точечной группы, записанный в ее символе первым слева, одновременно параллелен (или перпендикулярен)

плоскости слоя (a, b) и той из осей переносов, которая в символе трансляционной группы стоит на последнем месте справа (в скобках). При этом условии символ точечной группы иногда записывается не в стандартном виде, но обязательно с теми же разделительными знаками, как на рис. 69: $m:2=2:m$, $m\cdot 2=2\cdot m$, $m:2\cdot m=m\cdot 2:m$, $m:4\cdot m=$ $=m\cdot 4:m$, $m\cdot 3=3\cdot m$, $m:3\cdot m=m\cdot 3:m$, $2:3=3:2$, $m\cdot 6=6\cdot m$, $m:6=6:m$, $m\cdot 6=6\cdot m$, $m:6\cdot m=m\cdot 6:m$. В символах симметрии несимморфных слоевых групп происходит частичная или полная замена поворотных осей 2 на винтовые оси $\underset{\sim}{2}$ и плоскостей симметрии m на плоскости скользящего отражения $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{ab}=\tilde{n}$ (у последней плоскости перенос $(a+b)/2$ направлен по диагонали элементарной ячейки). Всего существует 80 пространственных групп симметрии слоев, из них 45 — симморфных и 35 — несимморфных.

Восемьдесят видов симметрии слоев

Мы не будем подробно описывать каждый вид симметрии слоев, так как все существенное можно видеть непосредственно из проекций правильных систем фигур (рис. 184–187). На этих проекциях элементы симметрии не указаны совсем; существенным в них является только взаимное расположение фигур (треугольников). Тонкими линиями на рис. 184–186 выделены элементарные ячейки слоев; на рис. 187 они должны быть составлены из двух смежных по любому ребру треугольников. Для построения слоя достаточно параллельным повторением ячеек заполнить плоскость без пропусков и перекрытий.

Далее в табл. 11 приводится сопоставление бескоординатных и координатных (международных) обозначений пространственных групп симметрии слоев в установке осей, соответствующей рис. 149. Для читателя будет полезным упражнением нарисовать на проекциях расположение элементов симметрии для двусторонних слоев, пользуясь в качестве пособия изображениями групп на рис. 149 и 69.

Двусторонние плоские континуумы и семиконтинуумы

Для нахождения видов симметрии двусторонних непрерывных плоскостей (континуумов) поступим аналогично тому, как мы это делали в случае односторонних континуумов, а именно, возьмем произвольную материальную точку с симметрией двусторонней розетки и подвергнем эту точку непрерывному переносу вдоль оси a_0, перпендикуляр-

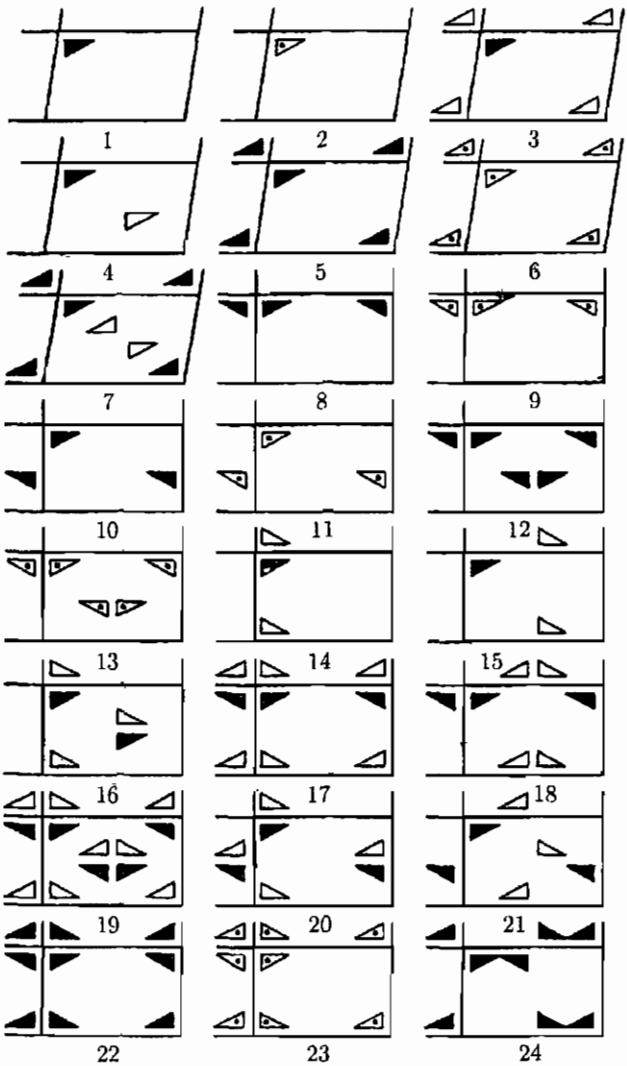


Рис. 184. Элементарные ячейки слоев 1–24 (по Веберу).
Для всех слоев (рис. 184–187) приведены правильные системы фигур общего положения

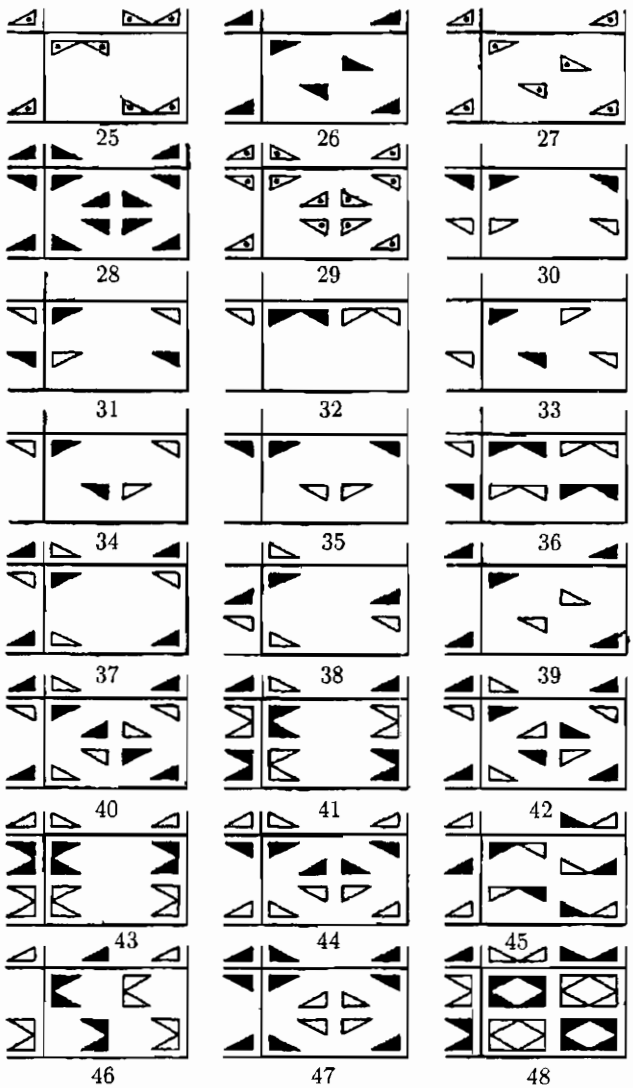


Рис. 185. Элементарные ячейки слоев 25–48 (по Веберу)

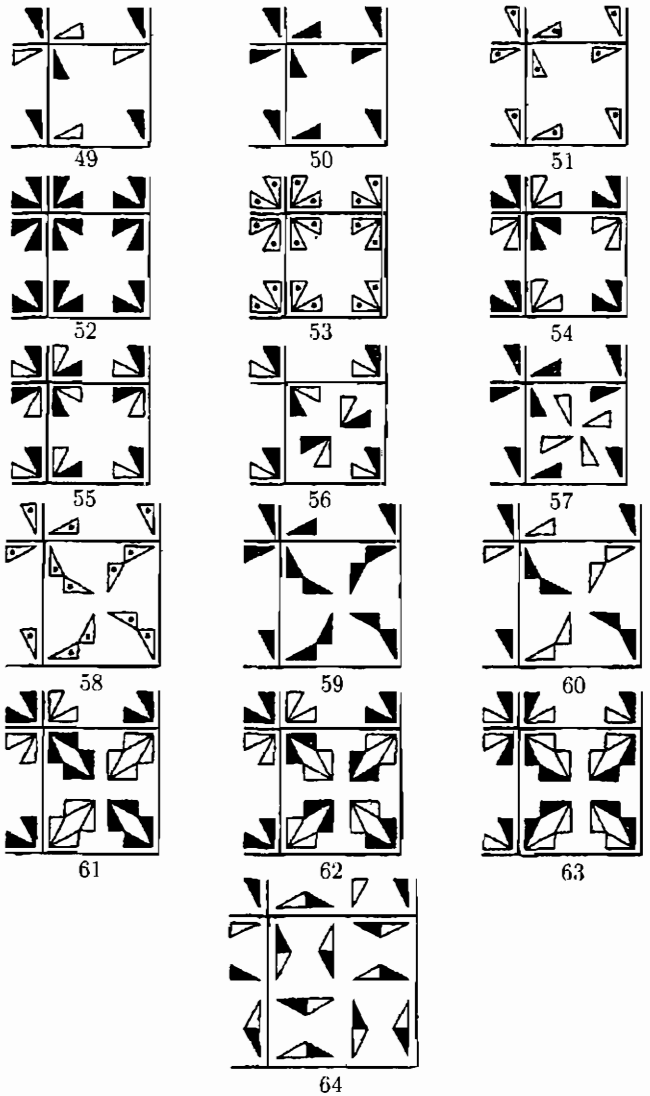


Рис. 186. Элементарные ячейки слоев 49–64 (по Веберу)

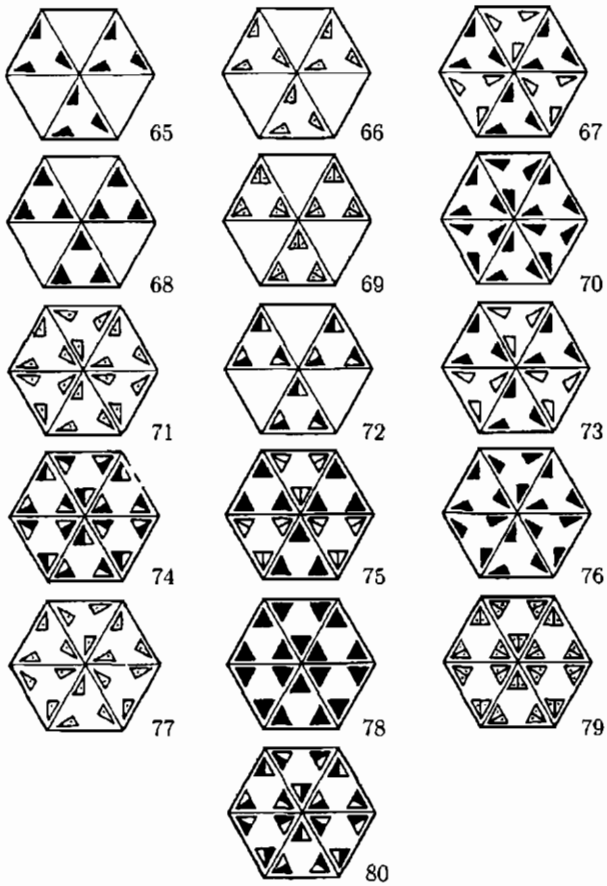


Рис. 187. Элементарные ячейки слоев 65–80 (по Веберу)

ной к главной оси симметрии розетки; образовавшуюся прямую линию подвергнем затем непрерывному переносу вдоль оси b_0, также перпендикулярной к главной оси розетки и наклоненной под произвольным (например, прямым) углом к оси переносов a_0.

Если симметрия исходной точки равна $n:2$, то символ континуума будет $(a_0/b_0):n:2$ или $(a_0:b_0):n:2$. Так как число видов симметрии двусторонних розеток бесконечно велико, то и число видов симметрии двусторонних плоских континуумов будет также бесконечно велико.

Примером двусторонней плоскости с симметрией $(a_0/b_0)\cdot m : \infty\cdot m$ может служить тонкая, равномерно растянутая во все стороны резиновая пленка. Взятая отдельно каждая точка такой пленки имеет симметрию $m\cdot\infty : m$ — ось бесконечного порядка, вертикальные и горизонтальные плоскости симметрии и горизонтальные двойные оси. Та же пленка, растянутая в одном направлении, обладает симметрией $(a_0 : b_0)\cdot m : 2\cdot m$. В такой пленке каждая точка имеет симметрию $m\cdot 2 : m$, т. е. симметрию прямоугольного параллелепипеда.

Двусторонний плоский семиконтинуум можно получить, подвергая непрерывному переносу прямую линию, обладающую симметрией двусторонней ленты, в направлении, лежащем в плоскости ленты под прямым или косым углом к ее оси. Так как число видов симметрии лент равно 31 (см. рис. 92), то столько же будет и видов симметрии плоских семиконтинуумов.

Система тонких натянутых параллельных проволок, расположенных в плоскости на равных расстояниях друг от друга, может служить примером семиконтинуума, образуемого из ленты с симметрией $pmmm$ (рис. 92, 19). Каждая точка на оси проволок имеет симметрию $mmm = m\cdot 2 : m$, одинаковую с симметрией отдельной фигурки ленты 19.

Расстояние между проволоками отвечает расстоянию между фигурками ленты. Если по проволокам идет в одну сторону электрический ток, то симметрия семиконтинуума будет отвечать симметрии ленты $pm2m$ (рис. 92, 9).

Магнитное поле рассматриваемой системы проволок обладает симметрией семиконтинуума, отвечающего симметрии ленты 28 ($p1\,2/m1$).

Систематика групп симметрии

Подготавливая переход к симметрии трехмерных пространств, включим в единую схему все типы до сих пор изученных групп. Обозначим символом $G_{r,s,\ldots,t}$ группу (изометрической) симметрии r-мерного геометрического пространства, если она одновременно преобразует в себя его (периодические или непериодические) подпространства размерности $s,\ldots,t (r > s > \ldots > t)$. В этих обозначениях точечные группы симметрии односторонних розеток (гл. 2) получат символ $G_{3,2,0}$ (или $G_{3,1,0}$), так как они преобразуют в себя особенную плоскость и нормаль к ней, одновременно сохраняя инвариантной особенную точку. Точечные группы симметрии конечных (или бесконечных) фигур $G_{3,0}$ (гл. 3), преобразуя в себе трехмерное пространство, сохраняют инвариантной лишь особенную точку (0-мерное подпространство). К группам $G_{3,2,0}$ можно прийти от групп $G_{3,0}$, рассматривая различные плоские сече-

Таблица 11. Бескоординатные и координатные (международные) обозначения 80 видов симметрии слоев

№	Бескоординатный символ	Международный символ	№	Бескоординатный символ	Международный символ
1*	$(a/b)\cdot 1$	$p1$	31	$(a:b)\cdot\tilde{a}\cdot 2$	$p2aa$
2	$(a/b)\cdot m$	$p11m$	32	$(a:b)\cdot\tilde{b}\cdot 2$	$p2mb$
3	$(a/b)\cdot\bar{1}$	$p\bar{1}$	33	$(a:b)\cdot\tilde{b}:\tilde{a}$	$p2_1ab$
4[1]	$(a/b)\cdot\tilde{b}$	$p11b$	34	$(a:b)\cdot\tilde{ab}\cdot 2$	$p2an$
5*	$(a/b)\cdot:2$	$p112$	35	$(a:b)\cdot\tilde{ab}\cdot 2_1$	$p2_1mn$
6	$(a/b)\cdot m:2$	$p11\frac{2}{m}$	36	$\left(\frac{a+b}{2}/a:b\right)\cdot\tilde{b}\cdot 2$	$c2mb$
7[1]	$(a/b)\cdot\tilde{b}:2$	$p11\frac{2}{b}$	37	$(a:b):2:2$	$p222$
8*	$(a:b):m$	$p1m1$	38	$(a:b):2:2_1$	$p2_122$
9	$(a:b)\cdot m\cdot 2$	$p2mm$	39	$(a:b)\cdot 2_1:2_1$	$p2_12_12$
10*	$(a:b):\tilde{a}$	$p1a1$	40	$\left(\frac{a+b}{2}/a:b\right):2:2$	$c222$
11	$(a:b)\cdot m\cdot 2_1$	$p2_1am$	41	$(a:b)\cdot\tilde{a}:2\cdot\tilde{a}$	$pmaa$
12*	$\left(\frac{a+b}{2}/a:b\right):m$	$c1m1$	42	$(a:b)\cdot\tilde{ab}:2\cdot a$	$pban$
13	$\left(\frac{a+b}{2}/a:b\right)\cdot m\cdot 2$	$c2mm$	43	$(a:b)\cdot\tilde{a}:2\cdot m$	$pmma$
14	$(a:b)\cdot 2$	$p121$	44	$(a:b)\cdot\tilde{ab}:2\cdot\tilde{b}$	$pbmn$
15	$(a:b)\cdot 2_1$	$p12_11$	45	$(a:b)\cdot\tilde{a}\cdot 2:\tilde{b}$	$pbaa$
16	$\left(\frac{a+b}{2}/a:b\right)\cdot 2$	$c121$	46	$(a:b)\cdot\tilde{b}:2\cdot\tilde{a}$	$pmab$
17	$(a:b)\cdot 2:m$	$p1\frac{2}{m}1$	47	$(a:b)\cdot\tilde{ab}:2\cdot m$	$pmmn$
18	$(a.b)\cdot 2_1:m$	$p1\frac{2_1}{m}1$	48	$\left(\frac{a+b}{2}/a:b\right)\cdot\tilde{a}:2\cdot m$	$cmma$
19	$\left(\frac{a+b}{2}/a:b\right)\cdot 2:m$	$c1\frac{2}{m}1$	49	$(a:a):\tilde{4}$	$p\bar{4}$
20	$(a:b)\cdot 2\cdot\tilde{a}$	$p1\frac{2}{a}1$	50*	$(a:a):4$	$p4$
21	$(a:b)\cdot 2_1:\tilde{a}$	$p1\frac{2_1}{a}1$	51	$(a:a):4:m$	$p4/m$
22*	$(a:b):2\cdot m$	$pmm2$	52*	$(a:a):4\cdot m$	$p4mm$
23	$(a:b)\cdot m:2\cdot m$	$pmmm$	53	$(a:a)\cdot m:4\cdot m$	$p4/mmm$
24*	$(a:b):2\cdot\tilde{b}$	$pbm2$	54	$(a:a):\tilde{4}:2$	$p\bar{4}2m$
25	$(a:b)\cdot m:2\cdot\tilde{b}$	$pbmm$	55	$(a:a):4:2$	$p422$
26*	$(a:b):\tilde{a}:\tilde{b}$	$pba2$	56	$(a:a):4:2_1$	$p42_12$
27	$(a\cdot b)\cdot m:\tilde{a}:\tilde{b}$	$pbam$	57	$(a:a):4:\tilde{ab}$	$p4/n$
28*	$\left(\frac{a+b}{2}/a:b\right):m\cdot 2$	$cmm2$	58[2]	$(a:a)\cdot m:4\cdot\tilde{b}$	$p4/mbm$
29	$\left(\frac{a+b}{2}/a:b\right)\cdot m:2\cdot m$	$cmmm$	59*[2]	$(a:a):4\odot\tilde{b}$	$p4bm$
30	$(a:b):m\cdot 2_1$	$p2_1ma$	60[3]	$(a:a):\tilde{4}\odot 2_1$	$p\bar{4}2_1m$

Таблица 11. (окончание)

№ п/п	Бескоординатный символ	Международный символ	№ п/п	Бескоординатный символ	Международный символ
61	$(a:a):\bar{4}\cdot m$	$p\bar{4}m2$	71[4]	$(a/a)\cdot m:3\cdot m$	$p\bar{6}2m$
62[2]	$(a:a):a\bar{b}:4\odot\bar{b}$	$p/4/nbm$	72[5]	$(a/a):2:3$	$p312$
63	$(a:a)\cdot a\bar{b}:4\cdot m$	$p4/nmm$	73	$(a/a)\cdot 2:3$	$p321$
64[1,2]	$(a:a):\bar{4}\odot\bar{b}$	$p\bar{4}b2$	74[4]	$(a/a)\cdot m\cdot\bar{6}$	$p\bar{3}1m$
65*	$(a:a):3$	$p3$	75	$(a/a):m\cdot\bar{6}$	$p\bar{3}m1$
66	$(a:a):3:m$	$p\bar{6}$	76*	$(a/a):6$	$p6$
67	$(a/a):\bar{6}$	$p\bar{3}$	77	$(a/a)\cdot m:6$	$p/6/m$
68*	$(a/a):m\cdot 3$	$p3m1$	78*	$(a/a):m\cdot 6$	$p6mm$
69	$(a/a):m\cdot 3:m$	$p\bar{6}m2$	79	$(a/a)\cdot m:6\cdot m$	$p6/mmm$
70*[4]	$(a/a)\cdot m\cdot 3$	$p31m$	80	$(a/a)\cdot 2:6$	$p622$

Примечания: Порядковый номер символа соответствует рис. 181–187. Установка осей в символах такая же, как на рис. 149. Звездочками (*) отмечены символы односторонних слоев; для согласования их с символами сетчатых орнаментов (табл. 9 на стр. 168 и рис. 140) в ряде случаев необходимо осуществить переименование осей a, b.

[1] У слоев 46, 64 за ось a выбраны диагонали ячеек, изображенных на рис. 4, 7, 61, 64.

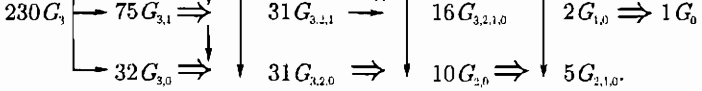
[2] У слоев 58, 59, 62, 64 плоскости b параллельны осям 4 или $\bar{4}$, но не проходят через них (символ $\odot$)

[3] У слоя 60 оси 2_1 перпендикулярны к осям $\bar{4}$, но не проходят через них (символ $\odot$)

[4] У слоев 70, 71, 74 первые плоскости m в символах $m\cdot 3$, $m\cdot 6$ и последняя — в символе $m:3\cdot m$ перпендикулярны к картинной плоскости (a/a) и проходят через оси a.

[5] У слоя 72 оси 2 лежат в плоскости (a/a) перпендикулярно к осям a.

ния трехмерных фигур, или найти их как подгруппы пространственных групп симметрии стержней $G_{3,1}$ (гл. 6). Сечения стержней двухсторонней плоскостью определят симметрию ленточных групп $G_{3,2,1}$ (гл. 5) от последних методом проектирования трехмерного пространства на односторонюю плоскость перейдем к группам симметрии бордюров $G_{2,1}$ (гл. 4). Подобный же образом переходим от слоевых групп $G_{3,2}$ к пространственным группам сетчатых орнаментов G_2 (гл. 7). Все эти группы и выводимые из них группы симметрии плиток $G_{3,2,1,0}$; $G_{2,1,0}$, розеток $G_{2,0}$, прямой G_1, отрезка $G_{1,0}$ и точки G_0 связаны друг с другом и с группами симметрии трехмерного пространства G_3 (гл. 9) следующей схемой:



Односторонняя стрелка на схеме означает переход в подгруппу; двусторонняя — сечение или проектирование. Цифры перед символами соответствуют числу дискретных кристаллографических групп.

Глава 9

Симметрия трехмерных пространств — дисконтинуумов и континуумов

Под симметричным трехмерным дисконтинуумом мы подразумеваем бесконечную совокупность равных фигур, распределенных по законам симметрии в пространстве; при этом «равенство» понимается в том смысле, какой вкладывается в это понятие с самого начала книги.

Как уже было отмечено, при ограничении классическим учением о симметрии мы не найдем в трехмерных пространствах никаких новых элементов симметрии сверх тех, которые уже встречались в предыдущих главах. Симметрия трехмерных пространств целиком описывается трехмерно-периодическими совокупностями осей симметрии (простых, зеркально или инверсионно-поворотных; частные случаи двух последних — центр и плоскости симметрии), плоскостей скользящего отражения, винтовых осей и осей переносов. Совокупность параллельных переносов всегда образует подгруппу переносов, входящую в полную пространственную группу симметрии континуума или дисконтинуума (см. табл. 8 на стр. 144). У дисконтинуумов эти переносы всегда конечны. В симметричных континуумах элементарные фигуры и расстояния между ними бесконечно малы.

Изучение симметрии трехмерных пространств имеет большое теоретическое и практическое значение потому, что к симметричным пространствам относятся кристаллы, из которых, как известно, состоит большинство твердых тел, и все без исключения однородные физические поля: электрическое, магнитное, гравитационное и т. д. Изучение структуры кристаллов немыслимо без знания законов симметрии трехмерных пространств. Объем настоящей книги не позволяет подробно остановиться на описании всех 230 видов симметрии дисконтинуумов (пространственных групп) и всех типов симметрии континуумов, объединяющих соответствующие виды симметрии в бесконечные серии. Мы ограничимся приведением списка бескоординатных и координатных (международных) символов пространственных групп и небольшим количеством примеров, отсылая читателя за подробностями к специальным руководствам по математической кристаллографии. В данной главе мы будем

более свободно пользоваться терминологией теории групп, подготовляя переход к следующей главе, где будут приведены соответствующие определения.

Калейдоскопы для образования трехмерно-периодических дисконтинуумов наивысшей симметрии

Пусть мы имеем прямоугольную призму (рис. 188, 1), составленную из шести зеркал, обращенных внутрь призмы отражающими сторонами. Если такую призму тем или иным способом осветить изнутри, то зеркала, отражаясь друг в друге бесчисленное множество раз, разобьют пространство на ячейки, равные исходной призме. Полученное разбиение образует симметричный дисконтинуум. В этом примере дисконтинуум, кроме плоскостей симметрии, совпадающих с плоскостями зеркал и их изображениями, имеет оси симметрии второго порядка, совпадающие с линиями пересечения плоскостей симметрии, а также центры симметрии, совпадающие с вершинами призм; оси переносов идут вдоль прямых, проходящих через любую пару вершин. Если внутри исходной призмы поместить асимметричную фигуру, то в результате ее отражения в зеркалах в каждой ячейке дисконтинуума окажется по одной фигуре, равной исходной. Совокупность всех таких фигур образует эквивалентную систему фигур, т.е. новый дисконтинуум с той же симметрией, какую имел исходный, составленный из призм дисконтинуум.

Представление о такой совокупности фигур можно получить, если вообразить себя находящимся внутри освещенной комнаты, все стены которой покрыты сплошь зеркалами. В этом случае исходной фигурой для получения дисконтинуума будем мы сами. Если в каждой из фигур нашего пространства отметим по одной точке так, чтобы все эти точки были равны друг другу, то их совокупность образует правильную, или эквивалентную, систему точек. Все различные системы точек, не связанные операциями симметрии в одном и том же дисконтинууме, образуют ансамбль правильных систем. Всякий кристалл представляет собой в общем случае ансамбль эквивалентных систем структурных единиц (атомов, ионов, радикалов или молекул). Мы увидим далее, что в структуре «идеального» кристалла физически или химически различные сорта структурных единиц всегда относятся к симметрически различным системам, а одинаковые (в химическом смысле) сорта единиц могут принадлежать как одной, так и нескольким правильным системам.

На рис. 188, 1 мы имели дело с калейдоскопом ромбической (прямоугольной) симметрии. Калейдоскоп для получения структуры квадрат-

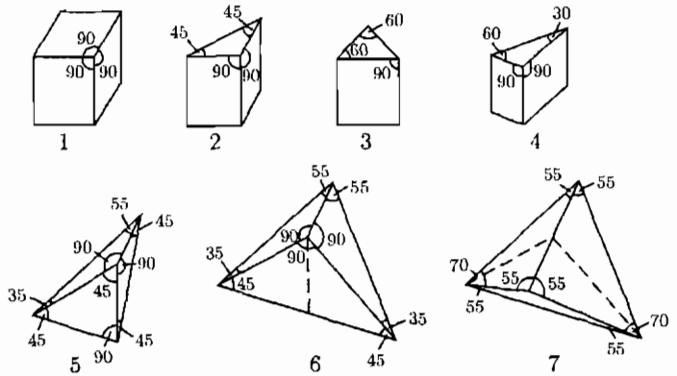


Рис. 188. Семь калейдоскопов для образования дисконтинуумов наивысшей симметрии.

Каждая из семи комбинаций зеркальных плоскостей порождает единственную пространственную группу: 1 — $Pmmm$, 2 — $P4/mmm$, 3 — $P\bar{6}m2$, 4 — $P6/mmm$, 5 — $Pm\bar{3}m$, 6 — $F4\bar{3}m$, 7 — $Fm\bar{3}m$. Обозначения пространственных групп поясняются на рис. 191, в табл. 12 и в тексте

ной (тетрагональной) системы, у которой из трех взаимно перпендикулярных направлений два симметрически и физически равны друг другу, представляет собой призму с основанием в форме равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 188, 2). Для гексагональных структур, имеющих тройку эквивалентных направлений, лежащих в одной плоскости и переходящих друг в друга при поворотах, можно построить два калейдоскопа: призму с равносторонним треугольником в основании (рис. 188, 3) и призму с основанием в форме прямоугольного треугольника с углами 90°, 60° и 30° (половина равностороннего треугольника; рис. 188, 4). Все четыре типа калейдоскопов (рис. 188, 1–4) можно получить из калейдоскопов для плоских фигур (см. рис. 170) с добавлением к ним зеркального «дна» и «покрышки».

Совершенно новую форму имеют калейдоскопы для структур кубической системы, допускающих выбор трех взаимно-перпендикулярных эквивалентных направлений. Теоретически могут быть построены три калейдоскопа этой системы (рис. 188, 5–7). Каждый из них представляет четырехгранник особого рода, сочетающий в себе одновременно свойства калейдоскопов для бесконечных плоских фигур и свойства калейдоскопов Федорова для многогранников (см. рис. 71). Такое объединение свойств характерно и для четырех некубических калейдоскопов.

Это означает, что двугранные углы пространственных калейдоскопов могут быть равны лишь 90°, 60°, 45° и 30°, а трехгранные углы могут быть образованы только следующими шестью комбинациями плоских углов* (приближенно):

1	90°	90°	30°
2	90°	90°	45°
3	90°	90°	60°
4	90°	90°	90°
5	55°	55°	70°
6	55°	45°	35°. (Седьмая комбинация соответствует икосаэдру (ср. стр. 85 и не может встречаться в пространственных калейдоскопах.)

Первые четыре комбинации встречаются у всех калейдоскопов, остальные — только у калейдоскопов для кубических структур. Калейдоскоп (рис. 188, 5) получается в результате разрезания куба на 48 равных частей по всем плоскостям симметрии (рис. 189 *а*). При внимательном рассмотрении каждой такой доли легко обнаружить, что она представляет собой четырехгранник с двугранными углами: 90°, 90°, 90°, 60°, 45°, 45° — и наборами плоских углов при каждой вершине: (55°, 45°, 35°), (55°, 45°, 35°), (90°, 90°, 45°) (90°, 90°, 45°). Это легко проверить, если нарисовать отдельно расположение какой-нибудь одной выделенной доли внутри элементарного кубика из числа восьми, на которые разделяется куб своими тремя координатными плоскостями (рис. 189 *б*).

Калейдоскоп (см. рис. 188 6) может быть составлен из двух предыдущих калейдоскопов — правого и левого, сложенных вместе по грани, имеющей форму равнобедренного прямоугольного треугольника (разбиение фигуры на равные части показано на рисунке штриховой линией). Такие четырехгранники получаются от деления куба на 24 части шестью его плоскостями симметрии, за исключением трех координатных плоскостей (рис. 189 *в*). Двугранные углы в этом многограннике равны: 90°, 90°, 90°, 60°, 60°, 45°, а плоские углы при каждой вершине образуют комбинации: (90°, 90°, 90°), (70°, 55°, 55°), (55°, 45°, 35°) (55°, 45°, 35°). По отношению к двум составленным вместе элементарным кубикам такие четырехгранники располагаются так, как показано на рис. 189 *г*.

Третий, последний калейдоскоп для кубических структур может быть построен из двух только что описанных тетраэдров, если их сложить по грани, имеющей форму прямоугольного равнобедренного

*Точнее 54°40′ 45° 35°20′.

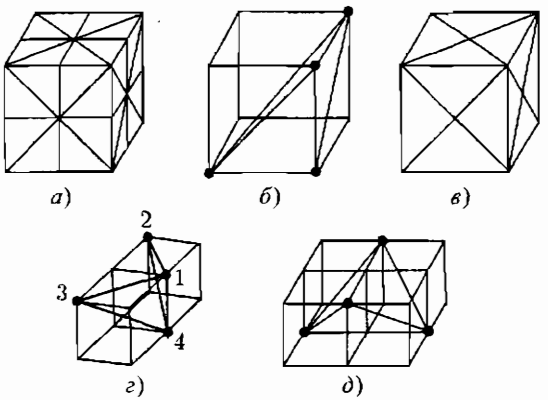


Рис. 189. Вспомогательные чертежи к калейдоскопам
Комбинации плоских углов при вершинах (*г*): 1) 90, 90, 90; 2) 95, 45, 55; 3) 45, 35, 55; 4) 55, 70, 55.

треугольника (на рис. 188 7 линия соединения тетраэдров показана штриховой линией). В новом калейдоскопе имеются двугранные углы 90°, 90°, 60°, 60°, 60°, 60° и четыре одинаковые комбинации углов при вершинах (70°, 55°, 55°).

Расположение одного из таких четырехгранников по отношению к восьми смежным элементарным кубикам показано на рис. 189 *д*.

Итак, для трехмерного пространства получаем в итоге семь калейдоскопов: *три для кубических структур и четыре для остальных*. Для демонстрации их действия в калейдоскопах, изготовленных из обыкновенных зеркал, необходимо оставить отверстия для наблюдения отражений. В качестве размножаемой элементарной фигуры можно взять электрическую лампочку от карманного фонаря, которая вставляется внутрь калейдоскопа.

Пространственные решетки и группы параллельных переносов

С помощью описанных семи калейдоскопов можно получить множество правильных систем фигур, исходя из одной асимметричной фигуры, помещаемой в общее положение (не на элементах симметрии) и размножаемой отражениями в зеркальных гранях калейдоскопов. Каждый калейдоскоп при этих условиях, несмотря на разнообразие возникающих

эквивалентных систем фигур, порождает один вид симметрии дискретных трехмерно-периодических пространств*.

Все другие пространственные группы симметрии, полное число которых было установлено Е. С. Федоровым и А. Шёнфлисом в 1891 г., получаются как подгруппы этих семи калейдоскопических групп (их можно найти, удаляя из эквивалентных систем те или иные подсистемы фигур) или комбинированием между собой элементов симметрии по определенным правилам.

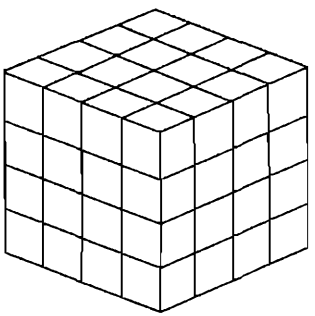


Рис. 190. Пространственная решетка как система равных параллелепипедов, сложенных равными гранями

При выводе пространственных групп симметрии существенную помощь оказывают инвариантные геометрические образы, играющие роль элементов симметрии. Одномерной группе параллельных переносов, состоящей из всех повторений (степеней) переноса a, соответствует инвариантный образ — ось переносов a с отмеченным на ней дискретным рядом точек (ср. рис. 75). Элементом симметрии, соответствующим двумерной трансляционной группе, служит плоская сетка или система ее узлов (ср. рис. 108). Трехмерной группе параллельных переносов будет соответствовать, очевидно, трехмерная сетка (или система ее узлов), называемая *пространственной решеткой*.

Во всех трех случаях выбор этих элементов симметрии однозначно не фиксирован: мы можем говорить о бесконечных семействах параллельных элементов симметрии или, что более удобно, свободном выборе места проведения данного элемента.

В случае трехмерного пространства можно выделить уже не пять сеток или параллелограмматических систем точек (как на рис. 110), различающихся по симметрии и (или) параметрам ячеек, а 14 бесконечных

*Иначе говоря — лишь одну из пространственных групп симметрии, международные символы которых указаны в подписи под рис. 188, 1–7. Частные эквивалентные системы, состоящие из симметричных фигур, также определяют однозначно соответствующие пространственные группы, если симметрия фигур совпадает с симметрией положений, занимаемых ими на элементах симметрии. При несоблюдении этого условия эквивалентные системы могут приобрести пространственную симметрию более высокую, чем та, преобразования которой использованы для построения систем. Симметрия положения определяется при атом совокупностью тех преобразований (из числа входящих в пространственную группу), которые сохраняют особенную точку фигуры на месте, переводя фигуру в себя.

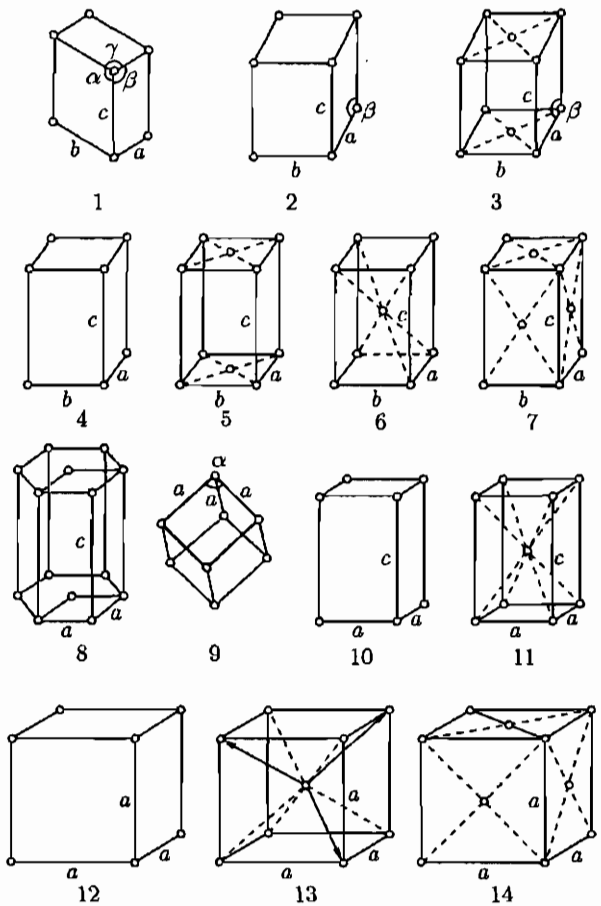
фигур, называемых решетками Бравэ. Аналогично плоским сеткам пространственные решетки Бравэ можно рассматривать или как систему равных параллелепипедов (ячеек), смежных по целым граням и заполняющих пространство без пропусков и перекрытий (рис. 190), или как эквивалентную параллелепипедальную систему точек (узлов решетки), состоящих только из вершин этих параллелепипедов (рис. 191). Последняя интерпретация оказывается более общей. Она позволяет соединять между собой узлы решетки отрезками прямых линий, так как этого требует, в частности, симметрия; при этом получаются не только параллелепипеды исходной формы, но и всевозможные другие фигуры. На рис. 191 изображены элементарные ячейки для всех 14 решеток Бравэ*. Параллельным переносом этих ячеек по трем направлениям можно построить сами решетки неограниченных размеров. Узлы на чертежах соединены прямыми отрезками так, чтобы наилучшим образом выявить максимальную симметрию решеток, а отнюдь не с целью выделения примитивных элементарных параллелепипедов, не содержащих дополнительных узлов в объеме или на гранях. Поэтому в решетке 13 (объемоцентрированный куб) примитивным элементарным параллелепипедом является не куб, а косой параллелепипед, построенный, например, на ребрах, выделенных на рисунке стрелками. В других случаях (3; 5–8, 11, 14) переход к примитивным параллелепипедам (ячейкам) также всегда легко осуществим.

Решетки Бравэ играют огромную роль в кристаллографии, так как любой кристалл представляет собой, вообще, систему трансляционных решеток, вставленных друг в друга в параллельном положении. Узлы этих решеток занимают в нем вполне определенные группы атомов (ионов, молекул), связанных в пределах решеток трансляциями. В частных случаях на элементарную ячейку кристалла может приходиться один атом или ион. Если взять два произвольных узла m и n решетки, провести через них прямую, то она пройдет через ряд узлов m, n, p, q ...; при этом будет иметь место равенство отрезков (периодов переноса) $mn = np = pq = \ldots$. Любой ряд узлов есть возможное ребро кристалла. Во всякой решетке можно провести бесконечное множество равных параллельных ребер с одинаковыми периодами. Двумя пересекающимися рядами определяется та или иная из известных нам плоских сеток. Любая плоская сетка пространственной решетки есть возможная грань кристалла. В решетке существует бесконечное множество равных параллельных возможных граней кристалла. Рост кристаллов сводится

*Совокупности всех трансляций, допускаемых решетками Бравэ, образуют 14 трансляционных групп, различающихся по симметрии и (или) параметрам ячеек. Буквенные символы трансляционных групп стоят на первом место в международном символе любой пространственной группы.

к последовательному параллельному наслоению на существующие грани кристалла новых плоских сеток. Несколько пересекающихся плоских сеток образуют возможную форму кристалла. Из бесконечного множества возможных форм природа осуществляет обычно весьма немногие, самые простые типы форм, отвечающие в условиях термодинамического равновесия минимуму свободной энергии.

Существенно, что среди 14 решеток Бравэ, построенных для сферически-симметричных узлов, нет двух, имеющих одинаковую пространственную группу симметрии; если же в узлах решеток поместить асим-



метричные точки, то у всех решеток будет одна пространственная группа симметрии, а именно $P1$ (ср. рис. 111). С этой точки зрения все трансляционные группы, отвечающие решеткам Бравэ, абстрактно неразличимы, или, как говорят, изоморфны друг другу (см. стр. 253). Группу P можно назвать абстрактной трансляционной группой, остальные — ее конкретными геометрическими реализациями. С другой стороны, решетки можно отличать друг от друга по метрическим свойствам — величинам элементарных переносов a, b, c вдоль соответствующих координатных осей — и по углам α, bt, γ наклона осей друг к другу*. Этот критерий приводит к делению всех кристаллов на семь метрических систем, или *сингоний*. Мы не будем, однако, сейчас подробнее останавливаться на этом вопросе.

Двести тридцать пространственных групп симметрии дисконтинуума. Структура кристаллов

Решетки Бравэ дают лишь самое общее представление о внутренней симметрии и строении кристаллов. Они выделяют в структуре кристалла трансляционно-эквивалентные системы частиц (а также любых точек дисконтинуума) таким образом, что кристалл в целом представляется в виде совокупности подрешеток, вставленных в параллельном

*В кристаллографии в качестве осей a, b, c выбирают обычно ребра изображенных на рис. 191 параллелепипедов. Углы $\alpha = \widehat{b, c}$, $\beta = \widehat{a, c}$, $\gamma = \widehat{a, b}$ (подробнее об этом см. стр. 324).

Рис. 191. Четырнадцать решеток Бравэ.
Если допустить сферическую симметрию узлов, то пространственными группами 14 решеток Бравэ будут: 1 — $P\bar{1}$; 2 — $P2/m$; 3 — $C2/m$; 4 — $Pmmm$; 5 — $Cmmm$; 6 — $Immm$; 7 — $Fmmm$; 8 — $P6/mmm$; 9 — $R\bar{3}m$; 10 — $P4/mmm$; 11 — $I4/mmm$; 12 — $Pm\bar{3}m$; 13 — $Im\bar{3}m$; 14 — $Fm\bar{3}m$. Прописные буквы обозначают трансляционные группы: P, R — примитивных решеток; C — решеток, центрированных по грани, секущей ребро c; F — гранецентрированных решеток; I — объемоцентрированных решеток. Метрические параметры решеток: J — триклинной: $a \neq b \neq c$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$; 2, 3 — моноклинных: $a \neq b \neq c$, $\alpha = \gamma = 90° \neq \beta \neq 60°$; 4–7 — ромбических: $a \neq b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$; 8 — гексагональной: $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 120°$; 9 — тригональной (ромбоэдрической): $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$; 10, 11 — тетрагональных: $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$; 12–14 — кубических: $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$. Другую моноклинную установку осей см. в табл. 20, стр. 324

положении. Вместе с тем нам известно, что кристалл, рассматриваемый как идеально развитый многогранник или как однородная сплошная среда, допускает операции симметрии конечных фигур. Следовательно, любая операция симметрии, взятая из соответствующей точечной группы, должна быть и операцией симметрии кристаллического дисконтинуума. Полная совокупность всех возможных для бесконечного дисконтинуума операций симметрии (движений) образует его пространственную группу симметрии. Все трансляции данного дисконтинуума образуют лишь часть (подгруппу) возможных операций симметрии дисконтинуума; другую часть составляют комбинированные операции, состоящие из преобразований точечных групп и трансляций: это будут винтовые переносы, переносы с отражением в плоскостях скользящего отражения, а также чистые и зеркальные (инверсионные) вращения вокруг соответствующих осей или отражения в обычных плоскостях симметрии. Поскольку трансляционно-эквивалентные точки и (фигуры) обладают одинаковой точечной симметрией, бесконечное множество элементов симметрии, характеризующих пространственную группу, можно наглядно представить себе разбитым на подсистемы трансляционно-эквивалентных элементов симметрии, пересекающихся в эквивалентных точках. Очевидно, трансляционно-эквивалентные оси и плоскости симметрии взаимно параллельны.

Со строением пространственных групп мы познакомимся на примерах структур кристаллов кварца, каменной соли, алмаза и на плотнейших упаковках шаров. Внимательное рассмотрение структуры низкотемпературного α-кварца (рис. 192) позволяет, например, выделить трансляционно-эквивалентную систему винтовых осей третьего порядка (одновременно только правых или только левых), выходящих в соответствующих точках перпендикулярно к чертежу. Идея представления пространственной группы в виде конечного набора трансляционно-эквивалентных систем, каждая из которых состоит лишь из одинаковых элементов симметрии, может быть проиллюстрирована также на примере структур алмаза и каменной соли.

На рис. 193 *а* изображена элементарная ячейка структуры NaCl. Эквивалентные частицы этой структуры (ионы натрия и хлора) обмениваются местами при переносах на отрезки $a = b = c$ вдоль ребер куба и на отрезки $(a + b)/2$, $(a + c)/2$, $(b + c)/2$ вдоль диагоналей граней таким образом, что структура в целом (ее следует рассматривать бесконечно протяженной) совпадает с собой. Это означает, что трансляционная группа структуры будет гранецентрированной кубической группой, обозначаемой буквой F (рис. 191, 14).

Помимо трансляций, структура NaCl совмещается с собой и всеми операциями точечных групп $\widehat{6}/4$ (в международных обозначениях

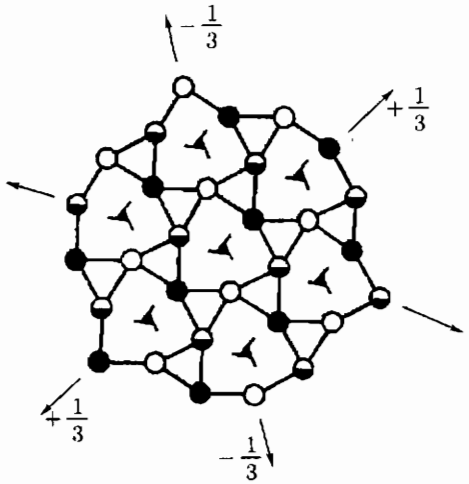


Рис. 192. Расположение атомов кремния в структуре α-кварца отвечает пространственным группам $P\ 3_121$ и $P3_221$ для правого и левого кристаллов соответственно.

На рисунке представлен лишь фрагмент бесконечной структуры, связанный с гексагональной ячейкой. Треугольниками с продолженными сторонами отмечены выходы эквивалентных винтовых осей 3_2, перпендикулярных к чертежу (определение винтовых осей см. на стр. 119, 138). Двусторонние стрелки на полях изображают оси 2, проходящие параллельно чертежу на уровнях 0, $+1/3$, $-1/3$ вертикального переноса c. Черно-белые кружки — атомы Si в плоскости чертежа, черные — над плоскостью чертежа, белые — под плоскостью чертежа на высотах $\pm 1/3$ элементарного переноса вдоль вертикальной оси c. Атомы кислорода на проекции не изображены

это будут группы $m\bar{3}m$; см. сопоставление бескоординатных и международных обозначений в табл. 1 на стр. 84). Совокупности элементов симметрии, характерные для этих групп (см. рис. 69), пересекаются в центрах всех ионов натрия и хлора. Например, через центр ячейки (рис. 193 *а*), обозначенный черным кружком, проходят все элементы симметрии группы $m\bar{3}m$, совмещающие ячейку с собой. В целом пространственную группу симметрии NaCl можно обозначить комбинированным символом $Fm\bar{3}m$.

Проекция части элементов симметрии группы $Fm\bar{3}m$ на верхнюю грань куба приведена на рис. 193 *в*. Помимо порождающих элемен-

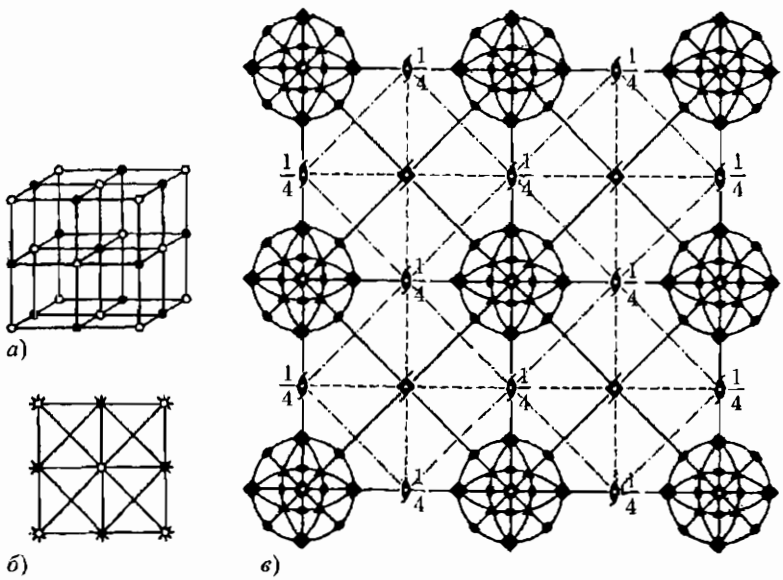


Рис. 193. Структура каменной соли:
а — элементарная ячейка; черные кружки — ионы натрия, белые — ионы хлора; *б* — проекция структуры NaCl вдоль ребер элементарной ячейки на горизонтальную плоскость (на проекции изображена лишь одна плоская сетка ионов); *в* — проекция на ту же плоскость части элементов симметрии пространственной группы $Fm\bar{3}m$ (пояснения см. в тексте)

тов симметрии точечных групп $m\bar{3}m$, на проекции изображены также и некоторые из производных элементов симметрии (возникающих от комбинирования преобразований группы $m\bar{3}m$ с переносами группы F), а именно: вертикальные плоскости скользящего отражения с переносами $a/2$ и $b/2$ (штриховые линии) и переносами $(a \pm b)/4 \pm c/2$ (штрих-пунктир); вертикальные винтовые оси 2_1 и 4_2 (черные линзы и квадраты с двумя хвостиками); центры симметрии (белые кружки; цифры у кружков показывают, что часть центров симметрии расположена над плоскостью чертежа на высоте $^1/_4$ элементарного переноса c). Подобные же системы производных элементов симметрии, идущие вдоль горизонтальных осей a и b, на проекции не изображены.

Итак, структура NaCl будет полностью описана, если мы скажем, что в пространственной группе $Fm\bar{3}m$ ионы натрия и хлора занимают

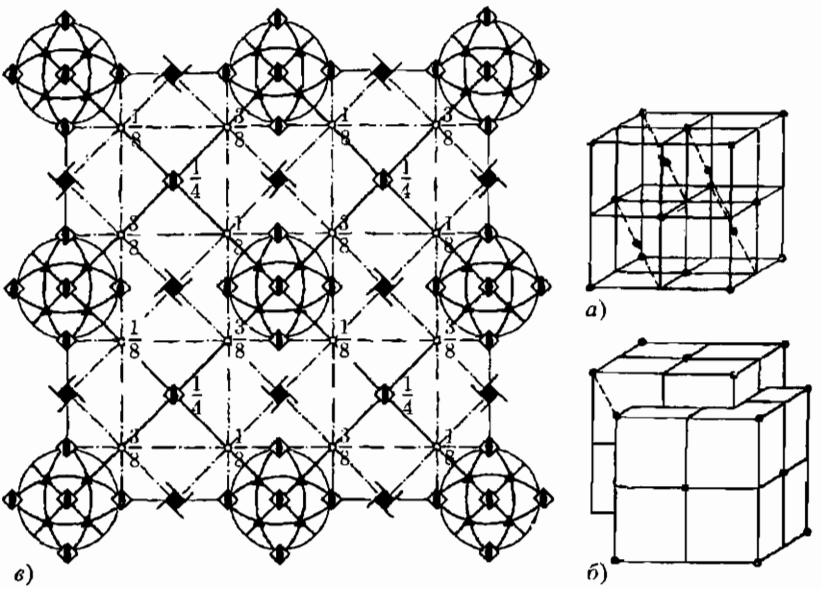


Рис. 194. Структура алмаза:
а — элементарная ячейка; ребра куба выбираются за оси *a*, *b*, *c*; *б* — две гранецентрированные кубические подрешетки, смещенные вдоль пространственной диагонали куба на вектор $(a+b+c)/4$; по узлам этих подрешеток в структуре алмаза размещаются атомы углерода двух сортов; *в* — проекция на горизонтальную плоскость части элементов симметрии пространственной группы $Fd\bar{3}m$ (см. пояснения в тексте)

в шахматном порядке положения с точечной симметрией $m\bar{3}m$. Можно сказать также, что структура NaCl состоит из двух гранецентрированных кубических подрешеток, вставленных в параллельном положении: подрешетки ионов натрия и подрешетки ионов хлора.

Другим простым примером, который мы здесь рассмотрим, может служить структура кристалла алмаза (рис. 194 *а, б*). Ее можно описать как совокупность двух гранецентрированных кубических подрешеток F, сдвинутых относительно друг друга на $^1/_4$ пространственной диагонали куба. Два сорта атомов углерода занимают в структуре алмаза узлы этих подрешеток, обладающие точечной симметрией $43m = 3/\tilde{4}$ (в обозначениях рис. 69). Поэтому в структуре алмаза мы можем обнаружить элементы симметрии двух пространственных групп $F\bar{4}3m$,

вставленных друг в друга в параллельном положении. Они получаются размножением с помощью группы трансляций f элементов симметрии двух исходных точечных групп $\bar{4}3m$, отстоящих друг от друга на $^1/_4$ пространственной диагонали. Полной группой симметрии алмаза будет пространственная группа $Fd\bar{3}m$, включающая в себя преобразования обеих подгрупп $F\bar{4}3m$ и дополнительно к ним еще некоторые преобразования связи. Проекция части элементов симметрии группы $Fd\bar{3}m$ на верхнюю грань куба показана на рис. 194 *в*. На чертеже легко обнаруживаются элементы симметрии одной из групп $F\bar{4}3m$: основные ее элементы изображены стереографическими проекциями групп $\bar{4}3m$ по углам и в центре квадрата, производные — такими же проекциями в серединах его сторон и штрих-пунктирными линиями, параллельными диагоналям квадрата. Эти линии являются следами вертикальных плоскостей скользящего отражения, которые переводят вершины куба в центры его вертикальных граней. Из элементов второй подгруппы $F\bar{4}3m$ на чертеже показаны лишь вертикальные инверсионные оси $\bar{4}$ (белые контурные квадраты с линзами двойных осей) и вертикальные плоскости симметрии (они же производные плоскости предыдущей подгруппы $F\bar{4}3m$). Все остальные элементы, изображенные на проекции, являются элементами симметрии связи, переводящими узлы одной гранецентрированной решетки в узлы другой. К их числу относятся вертикальные правые и левые винтовые оси 4_1 и 4_3, изображенные черными квадратиками с продолженными сторонами центры симметрии (белые кружочки на высотах $^1/_8$ и $^3/_8$ переноса c над плоскостью чертежа), вертикальные «алмазные» плоскости скользящего отражения d с наклонными к чертежу переносами типа $\pm(b+c)/4$, $\pm(a+c)/4$ (штрих-пунктирные линии со стрелками). Подобные же системы элементов симметрии связи, идущие вдоль горизонтальных осей a и b, на проекции не изображены.

Группы $Fm\bar{3}m$ и $Fd\bar{3}m$ структур NaCl и алмаза находятся в родственных отношениях: они имеют общую подгруппу $F\bar{4}3m$, а их точечные группы $m\bar{3}m$ и «группы по модулю» $d\bar{3}m$ изоморфны (подробнее об этом мы будем говорить в следующей главе). Сейчас лишь заметим, что группа $Fd\bar{3}m$ получается из $Fm\bar{3}m$ заменой координатных плоскостей симметрии m плоскостями скользящего отражения d и смещением последних на $^1/_8$ вдоль ребер куба a, b, c. В связи с этой заменой находятся и другие отличия обеих групп, которые можно усмотреть, сравнивая проекции (рис. 193 *в* и 194 *в*).

По Е. С. Федорову, группы типа $Fm\bar{3}m$ называются *симморфными*, а группы типа $Fd\bar{3}m$ — *несимморфными*; последние отличаются от первых заменой отдельных элементов симметрии порождающих точечных групп соответствующими им плоскостями скользящего отражения

Таблица 12. Бескоординатные и координатные (международные) обозначения пространственных групп симметрии трехмерных дисконтинуумов

Метрическая система	Символы симморфных пространственных групп: бескоординатные	Символы симморфных пространственных групп: международные	Точечные «группы по модулю» несимморфных пространственных групп	Число групп в серии
Триклинная	$(a/b/c)\cdot 1$	$P1$	—	1
	$(a/b/c)\cdot \bar{1}$	$P\bar{1}$	—	1
Моноклинная	$(c:(a/b)):2$	$P112$	2_1	2
	$\left(\frac{a+c}{2}/c:(a/b)\right):2$	$B112$	—	1
	$(c:(a/b))\cdot m$	$P11m$	$\bar{b}=b$	2
	$\left(\frac{a+c}{2}/c:(a/b)\right)\cdot m$	$B11m$	$\bar{b}=b$	2
	$(c:(a/b))\cdot m:2$	$P11\frac{2}{m}$	$m:2_1=2_1/m$, $\bar{b}:2=2/b$, $\bar{b}:2_1=2_1/b$	4
	$\left(\frac{a+c}{2}/c:(a/b)\right)\cdot m:2$	$B11\frac{2}{m}$	$b:2=2/b$,	2
Ромбическая	$(c:a:b):2:2$	$P222$	$2_1:2=222_1$, $2:2_1=2_12_12$, $2_1:2_1=2_12_12_1$	4
	$\left(\frac{a+b}{2}:c:a:b\right):2:2$	$C222$	$2_1:2=222_1$	2
	$\left(\frac{a+c}{2}/\frac{b+c}{2}/\frac{a+b}{2}:c:a:b\right):2:2$	$F222$	—	1
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/c:a:b\right):2:2$	$I222$	$2:2_1=2_12_12_1$	2
	$(c:a:b):m\cdot 2$	$Pmm2$	$\bar{c}2_1=mc2_1$, $\bar{c}\cdot 2=cc2$, $\bar{a}\cdot 2=ma2$, $\bar{a}\cdot 2_1=ca2_1$, $\bar{a}\bar{c}\cdot 2=cn2$, $\bar{a}\bar{c}\cdot 2_1=mn2_1$, $\bar{a}\odot 2=ba2$, $\bar{a}\odot 2_1=na2_1$, $\bar{a}\bar{c}\odot 2=nn2$	10
	$\left(\frac{a+b}{2}:c:a:b\right):m\cdot 2$	$Cmm2$	$\bar{c}2_1=mc2_1$, $\bar{c}\cdot 2=cc2$	3
	$\left(\frac{b+c}{2}/c:a:b\right):m\cdot 2$	$Amm2$	$m\cdot 2_1=\bar{c}\cdot 2=bm2$, $\bar{a}\cdot 2=ma2$, $\bar{a}\bar{c}\cdot 2=ba2$	4
	$\left(\frac{a+c}{2}/\frac{b+c}{2}/\frac{a+b}{2}:c:a:b\right):m\cdot 2$	$Fmm2$	$\frac{1}{2}\bar{a}\bar{c}\odot 2=dd2$	2
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/c:a:b\right):m\cdot 2$	$Imm2$	$\bar{c}\cdot 2=\bar{a}\cdot 2_1=ba2$, $\bar{a}\cdot 2=ma2$	3
	$(c:a:b)\cdot m:2\cdot m$	$Pmmm$	$\bar{a}\bar{b}:2\odot\bar{a}\bar{c}=nnn$, $m:2\cdot\bar{c}=ccm$, $\bar{a}\bar{b}:2\odot\bar{a}=ban$, $\bar{a}:2\cdot m=mma$, $\bar{a}:2\odot\bar{a}\bar{c}=nna$, $\bar{a}:2_1\cdot\bar{a}\bar{c}=mna$, $\bar{a}:2\cdot\bar{c}=cca$, $m:2\odot\bar{a}=bam$, $\bar{a}\bar{b}:2\cdot\bar{c}=ccn$, $m:2_1\odot\bar{c}=bcm$, $m:2\odot\bar{a}\bar{c}=nnm$, $\bar{a}\bar{c}:2\cdot m=mmn$, $\bar{a}\bar{c}:2_1\odot\bar{c}=bcn$, $\bar{a}:2_1\odot\bar{c}=bca$, $\bar{a}:2_1\odot m=nma$	16
	$\left(\frac{a+b}{2}:c:a:b\right)\cdot m:2\cdot m$	$Cmmm$	$m:2_1\cdot\bar{c}=mcm$, $\bar{a}\cdot 2_1\cdot\bar{c}=mca$, $m:\bar{2}\cdot c=ccm$, $\bar{a}:2\cdot m=mma$, $\bar{a}2:\bar{c}=cca$	6
	$\left(\frac{a+c}{2}/\frac{b+c}{2}/\frac{a+b}{2}:c:a:b\right)\cdot m:2\cdot m$	$Fmmm$	$\frac{1}{2}\bar{a}\bar{b}:2\odot\frac{1}{2}\bar{a}\bar{c}=ddd$	2
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/c:a:b\right)\cdot m:2\cdot m$	$Immm$	$m:2\cdot\bar{c}=bam$, $\bar{a}:2\cdot\bar{c}=bca$, $\bar{a}:2\cdot m=mma$	4

Таблица 12 (продолжение)

Метрическая система	Символы симморфных пространственных групп		Точечные «группы по модулю» несимморфных пространственных групп	Число групп в серии
	бескоординатные	международные		
Тетрагональная	$(c:a:a):4$	$P4$	4_1, 4_2, 4_3	4
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/c:a:a\right):4$	$I4$	4_1	2
	$(c:a:a):\bar{4}$	$P\bar{4}$	—	1
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/c:a:a\right):\bar{4}$	$I\bar{4}$	—	1
	$(c:a:a)\cdot m:4$	$P4/m$	$m:4_2=4_2/m$, $\tilde{ab}:4=4/n$, $\tilde{ab}:4_2=4_2/n$	4
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/c:a:a\right)\cdot m:4$	$I4/m$	$\tilde{a}:4_1=4_1/a$	2
	$(c:a:a):4:2$	$P422$	$4:2_1=42_12$, $4_1:2=4_122$, $4_1:2_1=4_12_12$, $4_2:2=4_222$, $4_2:2_1=4_22_12$, $4_3:2=4_322$, $4_3:2_1=4_32_12$	8
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/c:a:a\right):4:2$	$I422$	$4_1:2=4_122$	2
	$(c:a:a):m\cdot 4$	$P4mm$	$4\odot\tilde{a}=4bm$, $4_2\cdot\tilde{c}=4_2cm$, $4_2\odot\tilde{ac}=4_2nm$, $4\cdot\tilde{c}=4cc$, $4\odot\tilde{ac}=4nc$, $4_2\cdot m=4_2mc$, $\bar{4}_2\cdot a=4_2bc$	8
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/c:a:a\right):m\cdot 4$	$I4mm$	$4\cdot\tilde{c}=4cm$, $4_1\odot m=4_1md$, $4_1\cdot a=4_1\odot\tilde{c}=4_1cd$	4
	$(c:a:a):\bar{4}:2$	$P\bar{4}2m$	$\bar{4}\odot 2=\bar{4}2c$, $\bar{4}\cdot\tilde{ab}=\bar{4}2_1m$, $\bar{4}\cdot\tilde{a}\tilde{bc}=\bar{4}2_1c$	4
	$(c:a:a):\bar{4}\cdot m$	$P\bar{4}m2$	$\bar{4}\cdot\tilde{c}=\bar{4}c2$, $\bar{4}\odot\tilde{a}=\bar{4}b2$,	4
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/c:a:a\right):\bar{4}\cdot m$	$I\bar{4}m2$	$\bar{4}\cdot\tilde{c}=\bar{4}c2$	2
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/c:a:a\right):\bar{4}:2$	$I\bar{4}2m$	$\bar{4}\odot 2_1=\bar{4}2d$	2
	$(c:a:b)\cdot m:4\cdot m$	$P4/mmm$	$m\cdot 4\cdot\tilde{c}=4/mcc$, $\tilde{ab}:4\odot\tilde{b}=4/nbm$, $\tilde{ab}:4\cdot\tilde{ac}=4/nnc$, $m:4\odot\tilde{b}=4/mbm$, $m:4\odot\tilde{ac}=4/mnc$, $\tilde{ab}:4\cdot m=4/nmm$, $\tilde{ab}:4\cdot\tilde{c}=4/ncc$, $m:4_2\cdot m=4_2/mcm$, $m:4_2\cdot\tilde{c}=4_2/mcm$, $\tilde{ab}:4_2\odot\tilde{b}=4_2/nbc$, $\tilde{ab}:4_2\odot\tilde{ac}=4_2/nnm$, $m:4_2\odot\tilde{b}=4_2/mbc$, $m:4_2\odot\tilde{ac}=4_2/mnm$, $\tilde{ab}:4_2\cdot m=4_2/nmc$, $\tilde{ab}:4_2\cdot\tilde{c}=4_2/ncm$	16
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/c:a:a\right)\cdot m:4\cdot m$	$I4/mmm$	$m:4\cdot\tilde{c}=4/mcm$, $\tilde{a}:4_1\odot m=4_1/amd$, $\tilde{a}:4_1\odot\tilde{c}=4_1/acd$	4
Тригональная	$(c:(a/a)):3$	$P3$	3_1, 3_2	3
	$(a/a/a)/3$	$R3$	—	1
	$(c:(a/a)):\bar{6}$	$P\bar{3}$	—	1
	$(a/a/a)/\bar{6}$	$R\bar{3}$	—	1
	$(c:(a/a)):2:3$	$P312$	$2:3_1=3_112$, $2:3_2=3_212$ (оси 2 лежат в плоскости $(a/a)\perp$ к осям 3)	3
	$(c:(a/a))\cdot 2:3$	$P321$	$2:3_1=3_121$, $2:3_2=3_221$	3
	$(a/a/a)/3:2$	$R32$	—	1

Таблица 12 (продолжение)

Метрическая система	Символы симморфных пространственных групп		Точечные «группы по модулю» несимморфных пространственных групп	Число групп в серии
	бескоординатные	международные		
	$(c:(a/a)):m\cdot 3$	$P\bar{3}m1$	$\bar{c}\cdot 3=\bar{3}c1$	2
	$(c:(a/a))\cdot m\cdot 3$	$P\bar{3}1m$	$\bar{c}\cdot 3=\bar{3}1c$ (плоскости $m\perp$ к плоскости (a/a) и проходят через оси a)	2
	$(a/a/a)/3\cdot m$	$R\bar{3}m$	$3\cdot\bar{c}=\bar{3}c$	2
	$(c:(a/a))\cdot m\cdot\bar{6}$	$P\bar{3}\bar{1}m$	$\bar{c}\cdot\bar{6}=\bar{3}1c$ (плоскости $m\perp$ к плоскости (a/a) проходят через оси a)	2
	$(c:(a/a)):m\cdot\bar{6}$	$P\bar{3}m1$	$\bar{c}\cdot\bar{6}=\bar{3}c1$	2
	$(a/a/a)/\bar{6}\cdot m$	$R\bar{3}m$	$\bar{6}\cdot\bar{c}=\bar{3}c$	2
Гексагональная	$(c:(a/a)):6$	$P6$	6_1, 6_2, 6_3, 6_4, 6_5	6
	$(c:(a/a)):3:m$	$P\bar{6}$	—	1
	$(c:(a/a))\cdot m:6$	$P6/m$	$m:6_3=6_3/m$	2
	$(c:(a/a))\cdot 2:6$	$P622$	$2\cdot 6_1=6_122$, $2\cdot 6_2=6_222$, $2\cdot 6_3=6_322$, $2\cdot 6_1=6_122$, $2\cdot 6_5=6_522$	6
	$(c:(a/a)):m\cdot 6$	$P6mm$	$\bar{c}\cdot 6=6cc$, $\bar{c}\cdot 6_3=6_3cm$, $m\cdot 6_3=6_3mc$	4
	$(c:(a/a)):m\cdot 3:m$	$P\bar{6}m2$	$\bar{c}\cdot 3:m=\bar{6}c2$	2
	$(c:(a/a))\cdot m:3\cdot m$	$P\bar{6}2m$	$m:3:\bar{c}=\bar{6}2c$ (последние плоскости m в символе $m:3\cdot m\perp$ к плоскости (a/a) и проходят через оси a)	2
	$(c:(a/a))\cdot m:6\cdot m$	$P6/mmm$	$m:6\cdot\bar{c}=6/mcc$, $m:6_3\cdot\bar{c}=6_3/mcm$, $m:6_3\cdot m=6_3/mmc$	4
Кубическая	$(a:a:a):2/3$	$P23$	$2_1//3=2_13$	2
	$\left(\frac{a+c}{2}/\frac{b+c}{2}/\frac{a+b}{2}:a:a:a\right):2/3$	$F23$	—	1
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/a:a:a\right):2/3$	$I23$	$2_1//3=2_13$	2
	$(a:a:a)\cdot m\cdot\bar{6}$	$Pm\bar{3}$	$a\bar{b}/\bar{6}=n\bar{3}$, $\bar{a}/\bar{6}=a\bar{3}$	3
	$\left(\frac{a+c}{2}/\frac{b+c}{2}/\frac{a+b}{2}:a:a:a\right)\cdot m/\bar{6}$	$Fm\bar{3}$	$\frac{1}{2}a\bar{b}/\bar{6}=d\bar{3}(m/\bar{6}=\bar{6}/2)$	2
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/a:a:a\right)\cdot m/\bar{6}$	$Im\bar{3}$	$\bar{a}/\bar{6}=a\bar{3}$	2
	$(a:a:a):4/3$	$P432$	$4_1//3=4_132$, $4_2//3=4_232$, $4_3//3=4_332$	4
	$\left(\frac{a+c}{2}/\frac{b+c}{2}/\frac{a+b}{2}:a:a:a\right):4/3$	$F432$	$4_1//3=4_132$	2
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/a:a:a\right):4/3$	$I432$	$4_1//3=4_132$	2
	$(a:a:a):\bar{4}/3$	$P\bar{4}3m$	$\bar{4}//3=\bar{4}3n$,	2
	$\left(\frac{a+c}{2}/\frac{b+c}{2}/\frac{a+b}{2}:a:a:a\right):\bar{4}/3\cdot m$	$F\bar{4}3m$	$\bar{4}/3\cdot c=\bar{4}3c$, $\bar{4}//3\cdot\frac{1}{2}a\bar{b}=\bar{4}3d$ $(\bar{4}/3\cdot m=3/\bar{4})$	3
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/a:a:a\right):\bar{4}/3$	$I\bar{4}3m$	—	1
	$(a:a:a):4/\bar{6}\cdot m$	$Pm\bar{3}m$	$4/\bar{6}\cdot a\bar{b}=n\bar{3}n$, $4_2//\bar{6}\cdot a\bar{b}=m\bar{3}n$, $4_2//\bar{6}\cdot m=n\bar{3}m$	4

Таблица 12 (окончание)

Метрическая система	Символы симморфных пространственных групп		Точечные «группы по модулю» несимморфных пространственных групп	Число групп в серии
	бескоординатные	международные		
	$\left(\frac{a+c}{2}/\frac{b+c}{2}/\frac{a+b}{2} : a : a : a\right) : 4/\bar{6}\cdot m$	$Fm\bar{3}m$	$4_2/\bar{6}\cdot\bar{c}=m\bar{3}c$, $4_1//\bar{6}\cdot m=d\bar{3}m$, $4_1//\bar{6}\cdot\bar{c}=d\bar{3}c$	4
	$\left(\frac{a+b+c}{2}/a : a : a\right) : 4/\bar{6}\cdot m$	$Im\bar{3}m$	$4_1//\bar{6}\cdot\frac{1}{2}\widetilde{abc}=a\bar{3}d(4/\bar{6}\cdot m=\bar{6}/4)$	2

Всего групп: 73 симморфных и 157 несимморфных — 230 пространственных групп

Примечание. Пространственные группы симметрии можно рассматривать как произведения трансляционных групп на точечные группы или на «группы по модулю», получающиеся из них заменой части осей и плоскостей симметрии винтовыми осями и плоскостями скользящего отражения. В соответствии с этим символ пространственной группы состоит из символа трансляционной группы и следующего за ним символа точечной или изоморфной ей группы по модулю. Во втором столбце таблицы приведены символы симморфных пространственных групп. В соответствии с рис. 191 в круглых скобках записаны порождающие переносы трансляционной подгруппы; для центрированных групп, помимо примитивных переносов a, b, c вдоль ребер ячеек Бравэ, указаны дополнительные векторы центрирующих переносов; при этом запись $c : (a/b)$ означает, что векторы a, b наклонены под косым углом и что вектор c ортогонален к плоскости (a/b). Символы точечных групп составлены в соответствии с рис. 69, но не всегда в стандартном порядке. Разделительные знаки между символами трансляционной и точечной групп указывают ориентировку соседнего в записи элемента симметрии точечной группы по отношению к плоскости, заданной последними двумя векторами в символе трансляционной группы; одновременно указанный элемент точечной группы связан с последним вектором базиса трансляционной группы тем же разделительным знаком. Для кубических F-групп $a : a : a = c : a : b$. В третьем столбце таблицы приведены международные обозначения симморфных групп: круглая скобка заменяется прописной латинской буквой, а бескоординатная запись точечной группы — координатной записью в соответствии с принятым выбором осей (сопоставьте эти обозначения с символами сетчатых орнаментов (рис. 149) и двусторонних слоев (табл. 11 на стр. 211).

Каждая симморфная группа порождает серию несимморфных групп. Все группы этой серии имеют общую с симморфной группой трансляционную подгруппу и различаются преобразованиями винтовых поворотов и отражений в плоскостях скольжения. Соответствующие символы точечных несимморфных «групп по модулю», изоморфных точечным симморфным группам, приведены в четвертом столбце таблицы. Плоскости скользящего отражения по бескоординатной и координатной системам обозначены символами: $\tilde{a}$=a, $\tilde{b}$=b, $\tilde{c}$=c, $\widetilde{ab}$, $\widetilde{ac}$, $\widetilde{bc}$, $\widetilde{abc}$=n; $\frac{1}{2}\widetilde{ab}$, $\frac{1}{2}\widetilde{ac}$, $\frac{1}{2}\widetilde{bc}$, $\frac{1}{2}\widetilde{abc}$ = d; у плоскости $\widetilde{ab}$ перенос равен $(a+b)/2$ и т. д.; у плоскости $\frac{1}{2}\widetilde{ab}$ перенос равен $(a+b)/4$ и т. д. Знаки $\odot$, $\odot\!\!\!|$, // означают, что соответствующие элементы симметрии параллельны, перпендикулярны или наклонены под косым углом, но не пересекаются друг с другом.

или винтовыми осями. Комбинируя 32 точечные группы (см. рис. 69) с 14 трансляционными группами (см. рис. 191), можно получить 73 симморфные пространственные группы. Остальные 157 групп будут несимморфными пространственными группами, получаемыми из симморфных групп описанными выше заменами.

Несимморфные группы можно рассматривать так же, как сверхструктурные подгруппы симморфных пространственных групп. Соответствующую таблицу подгрупп читатель может найти в монографии одного из авторов «Шубниковские группы» (1966). Например, составив вместе в форме куба восемь ячеек группы $Fm\bar{3}m$ и приняв эту увосьмеренную ячейку за ячейку группы $Fd\bar{3}m$, можно убедиться в том, что все преобразования $Fd\bar{3}m$ находятся среди преобразований $Fm\bar{3}m$, т. е. что $Fd\bar{3}m \subset Fm\bar{3}m$.

С другой стороны, несимморфные пространственные группы можно рассматривать как надгруппы своих симморфных подгрупп. Для структуры алмаза, например, $Fd\bar{3}m \supset F\bar{4}3m$. Повышение симметрии в этом случае произошло за счет добавления к объединению (системе) двух подгрупп $F\bar{4}3m$ «внешних» элементов симметрии связи, множество которых $\{1, 4_1, 4_3, d\}$ незамкнуто, т. е. не образует само по себе подгруппы группы $Fd\bar{3}m$ и не принадлежит подгруппам $F\bar{4}3m$. Такого повышения симметрии при объединении двух гранецентрированных подструктур у NaCl не происходит, так как эти подструктуры физически различны (состоят из различных сортов ионов) и внешнее множество элементов симметрии связи является пустым. Все соответствующие элементы симметрии обеих подструктур NaCl при объединении совпадают, определяя для составной системы ту же группу симметрии $Fm\bar{3}m$, которая характеризует и симметрию ее частей. Приводим в табл. 12 полный список координатных и бескоординатных символов всех 230 пространственных групп.

Плотнейшая укладка шаров. Ее значение для кристаллографии и строительной техники

Вопросами симметрии дисконтинуума в настоящее время интересуются главным образом кристаллография и структурная физика твердого тела (поскольку всякий кристалл можно рассматривать как дисконтинуум). В меньшей мере эти вопросы интересуют другие области знания и техники, в частности строительное искусство, которое и сейчас находится в стадии решения «плоских задач», так как расчета пространственных конструкций мы до настоящего времени делать не умеем. Впрочем, одна из задач теории симметрии дисконтинуума уже нашла себе приме-

нение в строительной технике. Мы имеем в виду задачу о плотнейшей упаковке тех или иных фигур, имеющую прямое отношение к укладкам кирпичей или других строительных блоков. Мы очень подробно останавливались на этой задаче для плоских фигур, описывая всевозможные способы деления плоскости без промежутков и перекрытий. В этом параграфе мы опишем только способы плотнейшей упаковки шаров, частично следуя при изложении вопроса Н. В. Белову (1947) и Тоту (1958).

С первого взгляда может показаться, что способ плотнейшей укладки шаров в пространстве может быть только один; в действительности их существует бесконечное множество. Чтобы это понять, расположим одинаковые шары в одном слое так, чтобы каждый шар касался шести других (рис. 195 *а*). Известно, что такое расположение будет самым плотным на плоскости. Второй слой шаров может быть расположен на первом при условии самой плотной укладки единственным способом: один из шаров второго слоя может занять позицию 2 или 3. Это приводит к одному и тому же результату: оба варианта не будут отличаться друг от друга. Третий слой может быть наложен на систему из двух слоев уже двумя способами: его шары могут оказаться или в позиции 1, т. е. над шарами первого слоя, или в позиции 3, если шары второго слоя занимают позиции 2. Полученные системы из трех слоев различаются теперь по положению шаров третьего слоя, совпадающих или не совпадающих в проекции с шарами слоя 1.

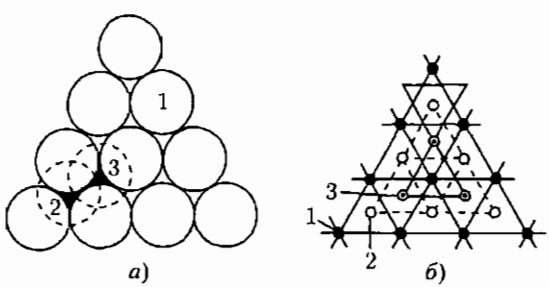


Рис. 195. При плотнейшей укладке шаров последние могут занимать только три позиции: 1, 2, 3: *а* — способы укладки шаров; *б* — проекция центров шаров на плоскость слоя

Оставляя от шаров только их центры и проектируя последние на плоскость (рис. 195 *б*), найдем, что других позиций шаров, кроме трех указанных на проекции, при любом числе слоев быть не может. Поэтому всякую плотнейшую упаковку шаров можно изобразить символом,

составленным из цифр 1, 2, 3 таким образом, чтобы в конечном или бесконечном ряду этих цифр нигде рядом не стояли две одинаковые цифры (иначе шар нового слоя не будет касаться трех шаров предыдущего слоя и упаковка не будет плотнейшей). Очевидно, что из трех цифр можно составить бесчисленное множество рядов, удовлетворяющих этому условию. Поэтому плотнейших упаковок шаров существует бесконечно много. Если в бесконечном ряду цифр будет периодически повторяться некоторая одинаковая и конечная их комбинация, то это означает, что мы имеем дело с симметричным дисконтинуумом. В противном случае при одинаковой плотной укладке шаров мы получим, по крайней мере в направлении, перпендикулярном к слоям, асимметричное расположение шаров. Например, рядом 12312 12312 12312... определяется симметричная пятислойная структура, так как в нем комбинация цифр 12312 периодически повторяется. Если же в этот ряд мы вставим хотя бы одну лишнюю цифру куда-нибудь между двумя имеющимися цифрами, трансляционная симметрия структуры сейчас же нарушится. Отметим попутно, что в симметричных (периодических) укладках не все шары при равенстве их радиусов равны друг другу по положению в структуре (последнее справедливо лишь для двуслойных структур). Каждому шару в многослойных укладках отвечает бесконечное множество трансляционно-эквивалентных шаров, находящихся в разных, но не во всех слоях структуры. В «асимметричной» укладке равные по положению шары могут быть только в одном и том же слое.

Посмотрим, какие группы симметрии возможны для плотнейших упаковок шаров. Возьмем ряд цифр, отвечающий той или иной симметричной укладке. Если чередование цифр в этом ряду одинаково, независимо от того, будем ли мы читать этот ряд слева направо или справа налево, в структуре будут содержаться горизонтальные плоскости симметрии, совпадающие по направлению с плоскостями слоев. Например, в ряде 1213121312... плоскости симметрии проходят по слоям 2 и 3. Если чередование цифр при прямом и обратном чтении окажется различным, то в структуре горизонтальных плоскостей симметрии нет. Все структуры, в которых содержатся горизонтальные плоскости симметрии, имеют одну и ту же гексагональную симметрию $P6_3/mmc$.

Такую симметрию будет иметь, например, гексагональная двуслойная упаковка 12 (рис. 196 *а*). На рисунке совмещены проекции элементов симметрии и упаковки шаров; шары слоя 1 изображены сплошными линиями, слоя 2 — штриховыми. Переход от слоя 1 к слою 2 может быть осуществлен поворотами вокруг вертикальных винтовых осей 6_3 и 2_1 (точки выхода этих осей на проекцию элементарной ячейки изображены, соответственно, черными шестиугольниками и линзами с продолженными сторонами), или отражениями в центрах симметрии (белые

кружки на расстояниях $c/4$ под плоскостью чертежа), или отражениями с переносом за величину $c/2$ в вертикальных плоскостях скользящего отражения (точечный пунктир). Кроме этого, на проекции показаны вертикальные и горизонтальные плоскости симметрии (последняя совпадает с центрами шаров слоя 1). Горизонтальные оси 2 и 2_1, проходящие между горизонтальными плоскостями симметрии, на проекции не изображены.

Все шаровые укладки без горизонтальных плоскостей симметрии (за исключением кубической трехслойной упаковки) обладают тригональной симметрией. Например, тригональная пятислойная упаковка 12132 имеет пространственную группу симметрии $P\bar{3}m1$ (рис. 196 *б*). На приводимой проекции шары слоев 1, 2, 3 изображены длинным и коротким штрихом и сплошными линиями соответственно. Шары слоя 4 совпадают в проекции с шарами слоя 1, а шары слоя 5 — с шарами слоя 2. Центры симметрии (маленькие белые кружки), лежащие в плоскости чертежа, совпадают с центрами и точками касания шаров слоя 3; в этих же центрах шары слоя 4 (над плоскостью чертежа) отображаются в шары слоя 2 (под плоскостью чертежа), а шары слоя 5 — в шары слоя 1. Кроме центров симметрии, на проекции показаны вертикальные плоскости симметрии (сплошные линии), плоскости скользящего отражения (с соответствующими переносами в направлении штрихов) и вертикальные простые и инверсионные оси 3 и $\bar{3}$. Горизонтальные оси симметрии 2 и 2_1 на проекции не изображены.

На рис. 196 *в* представлена проекция трехслойной структуры, имеющая симметрию кубической гранецентрированной решетки $Fm\bar{3}m$. В отличие от рис. 193 *в* элементы симметрии этой группы спроектированы на плоскость чертежа вдоль вертикальных осей 3; с центрами шаров совпадают центры стереографических проекций точечных групп $m\bar{3}m$. Центр шара слоя 1 лежит в центре рисунка в плоскости чертежа; переход от шаров слоя 1 к шарам слоев 2 и 3 (отмечены цифрами на чертеже) может быть осуществлен поворотами вокруг вертикальных винтовых осей 3_1 и 3_2 (их выходы на проекцию изображены в виде маленьких черных треугольников с продолженными сторонами), а также отражениями в центрах симметрии (маленькие белые кружки на уровнях $c/6$ и $c/3$). Центры шаров слоев 2 и 3 лежат на уровнях $c/3$ и $2c/3$, как это указано на проекции соответствующими цифрами. Дополнительно на проекции показаны центры симметрии на уровнях $c/2$, связывающие шары слоев 2 и 3, и вертикальные плоскости скользящего отражения (с соответствующими переносами вдоль штрихов). Часть элементов симметрии группы $Fm\bar{3}m$ на проекции не изображена.

Объемные модели кубической и гексагональной плотнейших упаковок изображены на рис. 197 *а, б*. В двуслойных упаковках пози-

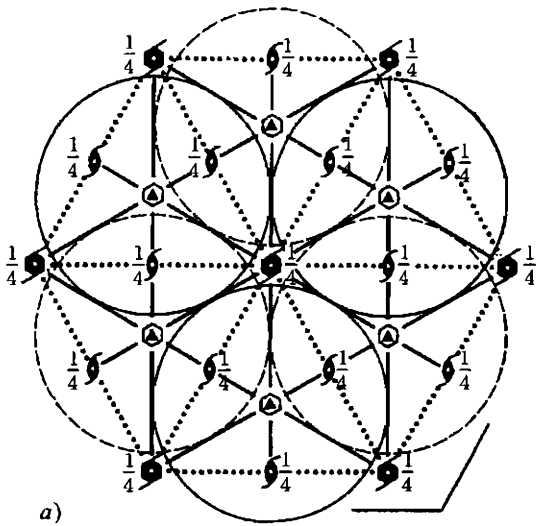
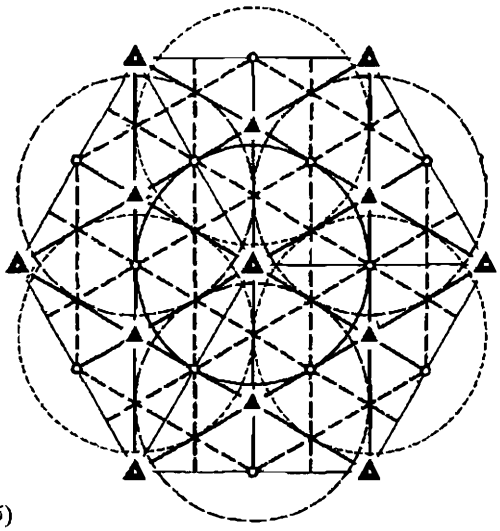


Рис. 196 *а*. **Симметрия гексагональной плотнейшей упаковки шаров.** Двуслойная упаковка 12 с симметрией $P6_3/mmc$; шары слоя 1 изображены сплошными линиями, слоя 2 — штриховой линией

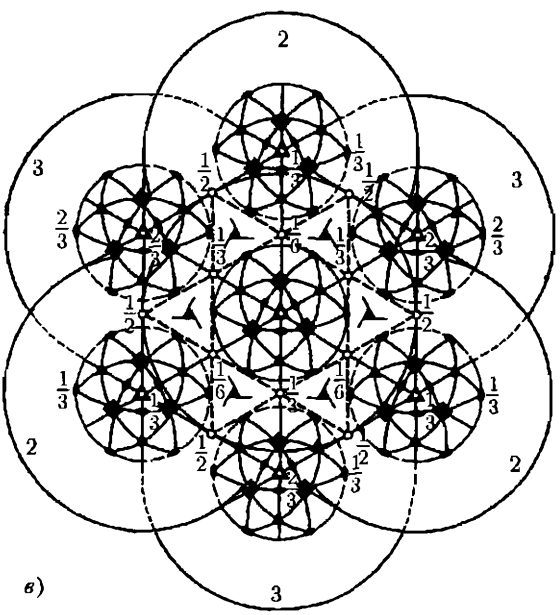
ции 3 (см. рис. 195 *а*) не заняты шарами и перпендикулярно к слоям идут структурные каналы, совпадающие по направлению с трехходовыми винтовыми осями шестого порядка 6_3. В кубических упаковках структурных каналов нет. Обе описанные упаковки отвечают строению кристаллов большинства химических элементов и уклад-

---

Рис. 196 *б*, *в*. **Симметрия тригональной и кубической плотнейших упаковок шаров**:
б — тригональная пятислойная упаковка 12312 с симметрией $P3\bar{m}1$, шары слоев 1, 2, 3 изображены длинным и коротким штрихом и сплошными линиями соответственно; *в* — кубическая трехслойная упаковка 123 с симметрией $Fm\bar{3}m$; в отличие от рис. 193 *е* элементы симметрии этой группы спроектированы на плоскость чертежа вдоль вертикальных осей 3, с центрами шаров слоев 1, 2, 3 совпадают центры стереографических проекций точечных групп $m\bar{3}m$ на уровнях 0, 1/3 и 2/3 периода переноса *c*



б)



в)

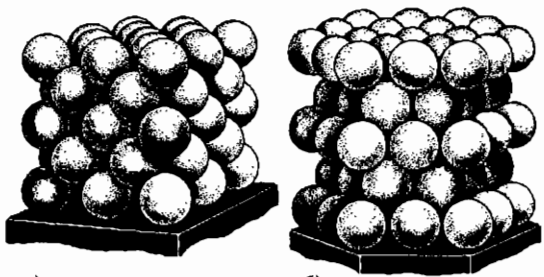


Рис. 197. Плотнейшие упаковки шаров:
а — кубическая трехслойная; *б* — гексагональная двухслойная. В кубической упаковке плотнейшие слои идут перпендикулярно к пространственной диагонали изображенного на рисунке куба.

кам анионов в структурах многих неорганических соединений и минералов.

Параллелоэдры и стереоэдры Федорова

Задачу заполнения плоскости без промежутков равными многоугольниками, примыкающими друг к другу равными сторонами и сохраняющими при этом взаимную параллельность, можно поставить и для трехмерного пространства. Роль параллелогонов для пространства играют многогранники, называемые *параллелоэдрами*. Существует пять типических параллелоэдров: куб, гексагональная призма с двумя основаниями, ромбододекаэдр, вытянутый ромбододекаэдр и кубооктаэдр (рис. 198). Прикладывая друг к другу равные параллелоэдры так, чтобы грани смежных фигур целиком совпадали, заполняем пространство без перекрытий и промежутков при параллельном положении всех параллелоэдров. Из пяти типических параллелоэдров можно получить бесконечное множество производных параллелоэдров путям их растяжений и сдвигов. При деформации фигур из куба получаются параллелоэдры в форме прямоугольных, прямых и косых параллелепипедов, из гексагональной (правильной прямой) призмы — косые шестигранные призмы и т. д. Приписав параллелоэдру определенную симметрию, можно разделить его на равные части, ориентированные в общем случае непараллельно. Такие части называются *стереоэдрами*. Стереоэдры в пространстве — аналоги планигонов на плоскости. Стереоэдр представляет наи-

меньшую неделимую часть дисконтинуума: его нельзя уже разделить на более мелкие равные части, совмещаемые друг с другом ортогональными преобразованиями. Мы не будем составлять каталог всех стереоэдров и ограничимся приведением нескольких примеров.

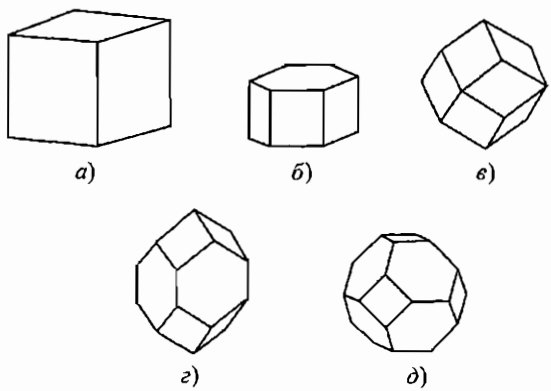


Рис. 198. Параллелоэдры Федорова.
При параллельных переносах заполняют пространство без промежутков: *а* — куб; *б* — гексагональная призма; *б* — ромбододекаэдр; *г* — вытянутый ромбододекаэдр; *в* — кубооктаэдр

Так, если параллелоэдр представляет собой косой параллелепипед без центра симметрии (предполагается, что его противоположные грани выкрашены неодинаково), фигуру нельзя разделить на равные части: она сама будет стереоэдром. Если с центром параллелепипеда совпадает центр симметрии, фигуру можно разделить на два стереоэдра. Куб можно разделить по плоскостям симметрии на 48 стереоэдров (см. рис. 189*а*). Стереоэдры сыграли большую роль при выводе Е. С. Федоровым 230 видов симметрии дисконтинуума. Задача о плотнейших укладках различных фигур, например шаров, может быть частично сведена к задаче о заполнении пространства стереоэдрами и параллелоэдрами (см. Б. Н. Делоне, 1934).

Закон кратных отношений в структурной кристаллографии и химии

При рассмотрении свойств конечных и бесконечных плоских фигур мы уже встречались с понятиями эквивалентных систем точек, кратно-

сти точек и их относительных чисел. Мы установили закон, согласно которому произведение кратности точки на относительное число точек данного сорта есть величина постоянная для данной симметричной фигуры. Естественно ожидать, что то же правило будет справедливым и для пространственного дисконтинуума. Действительно, рассуждая и на этот раз так же, как это мы делали применительно к плоским совокупностям точек, легко установить, что произведение кратности s_i точки на относительное число n_i таких точек в элементарной ячейке есть величина постоянная для всех дисконтинуумов данного вида симметрии. Это произведение равно относительному числу асимметричных точек фиксированного сорта в той же элементарной ячейке: $n = n_i \cdot s_i$.

Рассмотрим конкретный пример применения этой формулы к структуре кристаллов берилла. Структуру берилла можно описать как двухслойную упаковку $[Si_6O_{18}]$-колец, образованных объединением по общим кислородным вершинам шести $[SiO_4]$-тетраэдров, как это показано на рис. 199 для одного из слоев. На проекции выделена гексагональная ячейка пространственной группы $P6/mcc$, составленная из трех призматических элементарных ячеек с ромбическим основанием. С плоскостью рисунка совпадает плоскость симметрии (условно изображенная угловой скобкой справа снизу чертежа). В этой плоскости лежат ионы кремния, находящиеся в центрах заштрихованных $[SiO_4]$-тетраэдров, а также ионы кислорода сорта O′, объединяющие тетраэдры в шестичленные $[Si_6O_{18}]$-кольца. Ионы кислорода сорта O занимают внешние вершины тетраэдров над и под плоскостью чертежа (в проекции эти вершины совпадают). Ионы алюминия занимают положения с симметрией 32 в точках пересечения вертикальных осей 3 и горизонтальных осей 2 (последние изображены условно стрелками на полях чертежа; цифры у стрелок показывают, что оси 2 лежат на высоте $^1/_4$ переноса c над плоскостью чертежа). Ионы бериллия занимают положения 222 в точках пересечения горизонтальных и вертикальных осей 2. Кроме показанного на проекции слоя $[Si_6O_{18}]$-колец, в элементарной ячейке содержится и второй слой таких колец на высоте $^1/_2$ переноса c; к нему можно перейти поворотами колец первого слоя вокруг горизонтальных осей 2 или отражениями в вертикальных плоскостях скользящего отражения, изображенных на проекции пунктиром. Часть элементов симметрии группы $P6/mcc$ на проекции не изображена.

Мы указали симметрию эквивалентных положений, занятых атомами в структуре берилла, и можем приступить теперь к нахождению структурной формулы соединения. В табл. 13 указаны кратности точек, занимающих в пространственной группе $P6/mcc$ положения различной симметрии. Во всех случаях кратности точек равны порядку со-

Таблица 13. Симметрия и кратность эквивалентных положений в пространственной группе $P6/mcc$

Симметрия положения точки	Кратность точки s_i	Относительное число точек n_i^*	Симметрия положения точки	Кратность точки s_i	Относительное число точек n_i^*
1	1	24(72)	6	6	4(12)
m	2	12(36)	$\bar{6}(3:m)$	6	4(12)
2	2	12(36)	$32(3:2)$	6	4(12)
3	3	8(24)	$6/m(6:m)$	12	2(4)
$2/m(2:m)$	4	6(18)	$622(6:2)$	12	2(4)
$222(2:2)$	4	6(18)			

* Первая цифра дает число точек в расчете на элементарную ячейку, выбранную в форме ромбической призмы, вторая — число эквивалентных точек в гексагональной ячейке, составленной из трех ромбических призм.

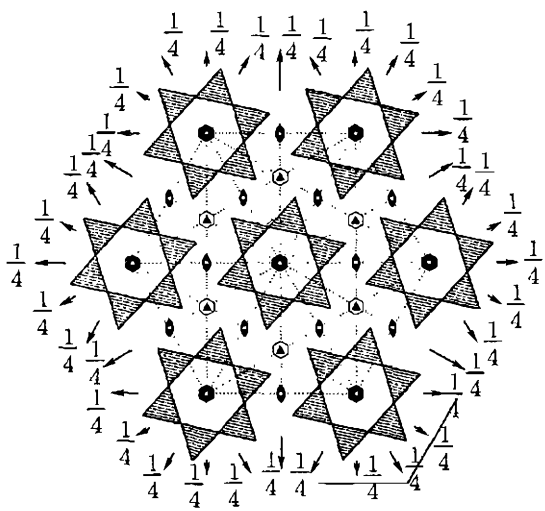


Рис. 199. Структура берилла $Be_6Al_4[Si_4O_6'O_{12}]_2$. С проекцией части элементов симметрии пространственной группы $P\,6/mcc$ совмещена проекция структурных элементов кристалла (см. пояснения в тексте)

ответствующих точечных групп, т. е. числу различных преобразований симметрии (из числа входящих в пространственную группу), сохраняющих данную точку на месте. Пользуясь таблицей, находим кратно-

сти $s_{Be} = 4$ (симметрия 222), s_{Al} (симметрия 32), $s_{Si} = 2$, $s_{O'} = 2$ (симметрия m), $s_O = 1$ (симметрия 1).

Подставляя полученные кратности в формулу симметрии, будем иметь

$$s_{Be} \cdot n_{Be} = s_{Al} \cdot n_{Al} = s_{Si} \cdot n_{Si} = s_{O'} \cdot n_{O'} = s_O \cdot n_O$$

или

$$4 \cdot n_{Be} = 6 \cdot n_{Al} = 2 \cdot n_{Si} = 2 \cdot n_{O'} = 1 \cdot n_O,$$

откуда для относительных чисел атомов получается выражение

$$n_{Be} : n_{Al} : n_{Si} : n_{O'} : n_O = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{1}.$$

Приводя правую часть равенства к общему знаменателю и отбрасывая последний, получим окончательно

$$n_{Be} : n_{Al} : n_{Si} : n_{O'} : n_O = 3 : 2 : 6 : 6 : 12,$$

что отвечает как обычной химической формуле $Be_3Al_2Si_6O_{18}$, так и структурной формуле $Be_6Al_4[Si_6O'_6O_{12}]_2$, более дифференцированно учитывающей сортность атомов и их число в элементарной ячейке.

Из рассмотренного примера следует, что между химическими и структурными формулами кристаллических веществ и их симметрией существует теснейшая связь и что закон кратных отношений в химии есть простое следствие более общего закона симметрии. Пользуясь соотношением $n = n_i \cdot s_i$, можно заранее вычислить все возможные химические формулы для бинарных, тройных, четверных и т. д. соединений.

Пространственные семиконтинуумы с двумя осями непрерывных переносов. Примеры семиконтинуумов первого рода

Изучение симметрии односторонних и двусторонних плоских семиконтинуумов представляло для нас в основном теоретический интерес; пространственные семиконтинуумы, благодаря своей распространенности в природе, должны интересовать нас в значительно большей степени. Следует различать пространственные семиконтинуумы двух родов. Грубое представление о пространственных семиконтинуумах первого рода дает нам стопа бумаги или колода карт. В соответствии с этим примером пространственные семиконтинуумы первого рода могут быть получены

из плоских континуумов (плоскостей) конечными переносами плоскостей в направлении перпендикулярной оси. Все способы чередования фигур вдоль прямой, будь то конечные фигуры или плоскости, были уже рассмотрены (ср. табл. 7) при изучении симметрии стержней; число видов симметрии при этом оказалось бесконечно большим; отсюда следует, что и число видов симметрии пространственных семиконтинуумов первого рода бесконечно велико.

Приведем несколько примеров. Система равноотстоящих изотропных двусторонних плоскостей (стопа бумаги) обладает вертикальной осью конечных переносов c. Так как сама изотропная плоскость имеет симметрию $(a_0 : a_0) \cdot m : \infty \cdot m$ или $p_{00}\infty/mmm$ (в международных обозначениях два нулевых индекса отмечают наличие у трансляционной группы p двух осей непрерывных переносов), то символ симметрии всего семиконтинуума будет $(c : a_0 : a_0) \cdot m : \infty \cdot m$ или $p_{00}\infty/mmm$ (рис. 200 *а*). Если бы плоскости были односторонними, то соответствующий семиконтинуум имел бы симметрию $(c : a_0 : a_0) : \infty \cdot m$ или $p_{00}\infty mm$. Такой семикоитинуум мы получили бы в стопе бумаги, сложенной из листов, имеющих «лицо» и «изнанку», таким образом, чтобы во всех листах лицевая поверхность была обращена в одну сторону. Если эти листы будут расположены чередуясь «лицом» то вверх, то вниз, возникает семиконтинуум с той же симметрией $p_{00}\infty/mmm$, но с удвоенным переносом вдоль оси c (рис. 200 *б*). Если допустить, что соседние плоскости семиконтинуума движутся в одном или в противоположных направлениях вдоль параллельных прямых, лежащих в самих плоскостях, получим новые виды семиконтинуумов первого рода.

Большой теоретический интерес представляют семиконтинуумы с винтовыми осями. Их можно построить из «ворсистых» «причесанных» плоскостей при условии, если направление ворса при переходе от верхней плоскости к нижней будет поворачиваться на один и тот же угол. Этот угол может быть совершенно произвольным, т. е. составлять как рациональную, так и иррациональную часть окружности (рис. 200 *в*). В природе такие семиконтинуумы встречаются в спиральных спиновых структурах магнитоупорядоченных соединений; магнитные моменты атомов этих структур поворачиваются на один и тот же угол при переходе от слоя к слою. Они наблюдаются у жидких кристаллов так называемой *смектической фазы*. Эти образования построены из пленок толщиной в одну-две молекулы; пленки расположены друг на друге, как листы в стопе бумаги. Молекулы в пленках ориентированы параллельно друг другу только одной своей осью; две другие оси располагаются произвольно.

Еще одним примером природных семиконтиiуумов первого рода может служить поле стоячих ультразвуковых волн, которое можно получить в жидкостях с помощью колеблющейся кварцевой пластинки.

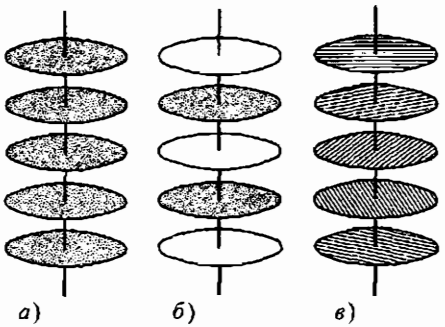


Рис. 200. Примеры пространственных семиконтинуумов первого рода: *а, б* — симметрии $(c : a_0 : a_0) \cdot m : \infty \cdot m = P_{00}\,\infty/mmm$; *в* — симметрии $P_{00}\,n_j$, или $P_{00}\,\alpha_t$ в зависимости от рационального или иррационального угла поворота вдоль винтовой оси

Это поле образовано сгущениями и разрежениями жидкости. При подходящих условиях плоскости сгущений и разрежений могут быть видимы и само поле использовано в качестве дифракционной решетки для оптико-спектральных исследований. Однородное световое поле можно также рассматривать как семиконтинуум из плоских волн. Изучение симметрии природных объектов, наделенных внутренней структурой, может предостеречь исследователей от неверных выводов, неизбежных в тех случаях, когда симметрия явлений не установлена точно или ею пренебрегают.

Семиконтинуумы с одной осью непрерывных переносов

Возьмем плоский орнамент, состоящий из шестиугольных планигонов, и подвергнем его непрерывному переносу c_0 в направлении нормали к основной плоскости орнамента (рис. 201 *а*). Возникающая вследствие этого система бесконечно длинных шестигранных призм, заполняющих пространство без промежутков, может служить простейшим примером семиконтинуумов второго рода. В общем случае для получения таких семиконтинуумов следует подвергнуть непрерывному переносу в должном направлении любой плоский дисконтинуум, вернее любую из односторонних или двусторонних плоскостей, обладающих симметрией бесконечных слоев. Так как для бесконечных слоев известно 80 видов сим-

метрии, такое же число видов симметрии можно получить и для семикоитинуумов второго рода (обозначение этих видов будет начинаться с символа трансляционной группы P_0). Остановимся на одном интересном примере семиконтинуума второго рода. Представим себе бесконечную систему бесконечно длинных, расположенных параллельно друг другу металлических стержней (рис. 201 *б*). В поперечном сечении оси стержней образуют ту или иную бесконечную эквивалентную систему точек. До тех пор пока эти стержни остаются для нас чисто геометрическими фигурами, семиконтинуум, образованный ими, имеет поперечные плоскости симметрии, но стоит представить, что по всем стержням в одном направлении течет электрический ток, как эти плоскости симметрии пропадают.

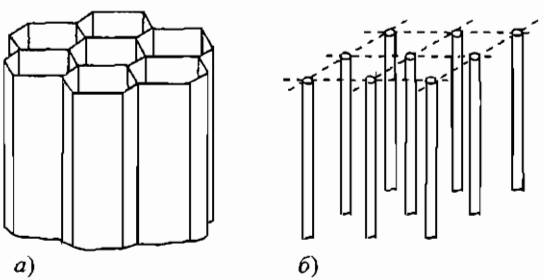


Рис. 201. Примеры пространственных семиконтинуумов второго рода: *а* — симметрии $(c_0 : a/a) : m \cdot 6 : m = P_0 6/mmm$; *б* — симметрии $(c_0 : a : a) : m \cdot 4 : m = P_0 4/mmm$ или $P_0 4mm$ (в последнем случае через стержни пропускается электрический ток)

Мы не можем задерживаться здесь на перечислении всех видов симметрии семиконтинуумов и ограничимся указанием на то, что с простейшими семиконтинуумами приходится постоянно встречаться в вопросах укладки или размещения стержней (пачек карандашей, связок свай и бревен, при рассадке леса и т. д.). В природе семиконтинуумы второго рода, по-видимому, имеют место у жидких кристаллов так называемой *нематической фазы*.

Симметрия трехмерного континуума

На протяжении всей книги мы старались не упустить практического подхода даже при рассмотрении отвлеченных математических вопро-

сов. Наиболее доступной для наблюдений и ощущений материальной средой является, конечно, обыкновенное вещество (в форме газообразных, жидких и твердых тел), состоящее из атомов химических элементов периодической таблицы Менделеева. Более сложным структурным объектом является плазма «элементарных» частиц. Но наряду с этой дискретной материей в нашем реальном мире существуют и не дискретные (непрерывные в известном пока приближении), но столь же материальные в физическом и философском смысле объекты, которые мы не можем обойти молчанием. Мы имеем в виду однородные физические поля — электромагнитное, гравитационное и т. д.*. Возьмем для примера электрическое поле, которое легко может быть получено между двумя параллельными металлическими пластинками, заряженными противоположным электричеством. Такое поле в принципе может быть совершенно однородным и непрерывным; оно симметрично, но симметрия его отличается от симметрии «пустого» евклидова пространства. Последнее в каждой точке имеет симметрию шара; это значит, что через каждую точку евклидова пространства проходит бесчисленное множество плоскостей симметрии.

В электрическом поле мы различаем направление «вперед», вдоль вектора напряженности электрического поля, и направление «назад», в противоположном направлении. Это означает, что в нашем поле нет поперечных плоскостей симметрии. То обстоятельство, что все направления в однородном электрическом поле, проведенные перпендикулярно «электрическому» вектору, нельзя отличить друг от друга, говорит в то же время о существовании бесчисленного множества продольных плоскостей симметрии, параллельных направлению поля. В целом это означает, что электрическое поле в каждой точке имеет такую же симметрию, которой обладает обыкновенный круговой конус. Мы могли бы поэтому представить себе электрическое поле, — если речь идет только об его симметрии,— как бесконечную непрерывную совокупность (континуум) точек с конической симметрией при условии, что все точки расположены в пространстве параллельно друг другу (рис. 202). Такой континуум, очевидно, можно было бы получить, подвергая произвольно

*Материальным физическим полям отвечает математическая конструкция — функциональное (или материальное) пространство. Вводя дополнительные координатные оси для описания изменений физических свойств, такие пространства можно трактовать как многомерные (простейший пример — четырехмерное физическое пространство «событий», x_1, x_2, x_3, x_4 с дополнительной четвертой координатой времени). В другой интерпретации эти пространства остаются трехмерными, но абстрактные геометрические точки заменяются материальными, например «цветными», где цвет моделирует значения некоторой функции, приписанной точке. Свойства симметрии таких пространств описываются обобщенными (в частности, «цветными») группами, соответствующими представлениям классических геометрических групп (подробнее об этом см. гл. 11, 12).

взятую точку (обладающую симметрией конуса $\infty \cdot m$) трем непрерывным переносам вдоль взаимно пересекающихся осей a_0, b_0, c_0. Символ симметрии получаемого континуума мог бы быть в этом случае изображен формулой $(a_0 : b_0 : c_0) \cdot \infty \cdot m$ или $P_{000}\infty mm$. Очевидно, при любой симметрии исходной точки из нее можно получить симметричный (симморфный) континуум с помощью одних непрерывных переносов. Так как число видов точечной симметрии (симметрия фигур с особенными точками) бесконечно велико, то и число видов симметрии континуумов оказывается бесконечно большим.

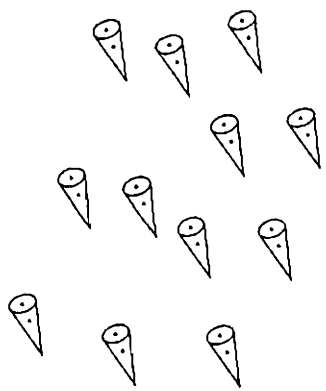


Рис. 202. Пример пространственного континуума симметрии $(c_0 : a_0 : a_0) : \infty \cdot m = P_{000}\infty mm$

Как и конечные фигуры, континуумы подразделяются на два сорта. Континуумы первого рода допускают лишь преобразования первого рода — чистые вращения, переносы и комбинированные операции (винтовые переносы). Континуумы второго рода содержат обязательно и операции второго рода — инверсионные или зеркальные повороты (в том числе плоскости и центры симметрии). К континуумам первого рода относятся, например, пространства, получающиеся в результате переносов точек с симметрией $n, n : 2$ и n/n по двум осям a_0, b_0 и винтового движения ∞_0* по третьему направлению, перпендикулярному к обеим осям. Чтобы составить себе представление о таких пространствах, вообразим стопу из параллельных «ворсистых» плоскостей, «причесанных» в одном и том же направлении, причем расстояние между соседними плоскостями бесконечно мало. Если такое пространство мы закрутим вокруг перпендикуляра к плоскостям, то симметрия «фигуры» изменится и мы будем иметь дело с одним из исследуемых видов симметрии.

Можно привести достаточно много примеров реально существующих физических полей, обладающих симметрией континуума. Мы уже установили симметрию однородного электрического поля. Однородное магнитное поле обладает другой симметрией: $P_{000}\infty/m$. Для исследователя один и тот же материальный объект, например кристалл, будет иметь различную выделенную симметрию в зависимости от исследуе-

*Определение осей ∞_0^+, ∞_0^-, ∞_0 см. в табл. 8 на стр. 144.

мого свойства или явления. Так, изучая расположение ионов в структуре каменной соли, мы должны рассматривать кристалл как пространственный дисконтинуум вполне определенной симметрии $Fm\bar{3}m$. Тот же самый кристалл по симметрии оптических свойств ничем не отличается от воды, воздуха и «пустоты», а потому должен быть причислен к континуумам шаровой симметрии $P_{000}\infty/m$. Если вместо каменной соли взять кристалл хлорновато-кислого натрия $NaClO_3$, который обыкновенно имеет ту же форму куба, что и кристалл каменной соли, но другую внутреннюю структуру, то окажется, что в отношении оптических свойств новое вещество будет иметь другую симметрию $P_{000}\infty\infty$, так как поляризованные лучи света, проходя через кристалл по всем направлениям с одинаковой скоростью, при этом еще «закручиваются» (явление вращения плоскости поляризации). В данном случае нам приходится иметь дело с изотропным континуумом, но уже без плоскостей симметрии.

Приведенных примеров достаточно, чтобы у читателя возникла мысль о том, что наш мир диалектически сочетает в себе одновременно два противоречивых, и на первый взгляд, исключающих друг друга свойства: прерывность и непрерывность. В настоящее время в физике не создано еще единой непротиворечивой теории поля. Как будут синтезированы эти противоречия в будущих теориях, мы пока не знаем, но можем быть уверены, что решение вопроса будет найдено и для наиболее глубокого структурного уровня организации материи — уровня структуры поля, исследуемого в физике в настоящий момент.

Глава 10

Элементы теории групп. Классические кристаллографические группы

В предыдущих главах элементы классического учения о симметрии геометрических и материальных фигур были изложены без привлечения сложного математического аппарата. За последние годы учение о симметрии обогатилось обширными новыми разделами, а ее приложения охватили многие новые области.

Чтобы рассказать об этом, нам придется несколько расширить запас математических сведений и более последовательно использовать некоторые идеи и представления из теории групп. Читатель в первом чтении может пропустить трудные места в этой и следующей главах, ограничиваясь рассмотрением рисунков и примеров.

Определение понятия группы. Группы преобразований геометрических и физических объектов. Абстрактные группы

Понятие группы в современной математике и физике имеет такое же фундаментальное значение, как понятие числа, множества, функции. Частично мы уже знакомы с ним, поскольку неоднократно говорили о группах симметрических преобразований фигур (соответствующих видам симметрии), подразумевая под этим конечные или бесконечные совокупности симметрических преобразований, под действием которых части (конечной или бесконечной) фигуры обмениваются местами, а фигура в целом совпадает с собой. Требование инвариантности (сохранения преобразованием структуры объекта) может быть положено в основу определения самого понятия группы симметрических преобразований фигуры.

В соответствии с характером допустимых преобразований фигур мы различаем изометрические и неизометрические (аффинные, проективные, топологические и т. д.) группы. Ортогональные группы, такие

как группы вращении (преобразований первого рода), вращений и отражений (преобразований второго рода), а также группы движений (параллельных переносов, скомбинированных с преобразованиями первого и второго рода) сохраняют метрические свойства фигур (т. е. длины произвольных отрезков и углы между ними). Именно с ортогональными группами преобразований фигур без деформаций и группами движений мы и имели дело до сих пор.

Аффинные группы состоят из совокупностей преобразований однородных деформаций (растяжений, сжатий и сдвигов), допускаемых бесконечными фигурами и средами. Изотропное однородное пространство аффинно-симметрично. В известном приближении группы преобразований подобия (частный случай афинных групп) описывают симметрию строения и роста некоторых растений и животных; симметрия подобия обнаруживается в деталях архитектурных сооружений, в рисунках, построенных по законам перспективы, и т. д.

Важный пример неортогональных групп — группы произвольных перестановок эквивалентных частей фигуры, при которых фигура совпадает в целом с собой (например, группы всех допустимых перестановок эквивалентных атомов в структуре кристалла, перестановок нуклонов в структуре атомного ядра и т. д.). Специальные случаи групп перестановок, как увидим далее, изоморфны ортогональным группам.

Понятие преобразования может быть определено не только для геометрических объектов (конечных фигур, континуумов, дисконтинуумов), но и для физических объектов (материальных носителей физических свойств), таких как материальные фигуры, скалярные, векторные, тензорные и иные физические поля. Такие объекты, помимо групп ортогональных преобразований, могут допускать и более общие группы преобразований — группы антисимметрии и цветной симметрии, применяющиеся в кристаллофизике и в структурном анализе кристаллов (мы познакомимся с этими группами в следующей главе); унитарные (в том числе унимодулярные) группы, используемые в теории элементарных частиц; однородные и неоднородные линейные группы; группы Лоренца и Пуанкаре, применяющиеся в теории относительности, и т. д. С каждой из этих групп связан в соответствующем пространстве свой набор инвариантов (сохраняющихся величин). Однако, какова бы ни была природа объекта, допускающего некоторую группу преобразований и каков бы ни был характер самих преобразований, у всех групп преобразований имеются некоторые общие свойства, которые могут быть положены в основу аксиоматического определения абстрактной группы*.

*Популярное наложение основ теории групп см., например, в книге П. С. Александрова (1951)., И. Гроссмана и В. Магнуса (1971)

Некоторое множество элементов произвольной природы g_1, $g_2 \ldots$ образует группу $\{g_1, g_2 \ldots\} = G$, если в этом множестве определена ассоциативная операция «умножения», ставящая в соответствие любой паре элементов g_1, g_j из G (пишут: $g_1, g_2 \in G$) элемент $g_k \in G$, называемый их «произведением», $g_i g_j = g_k$, и если выполнены дополнительно два условия: а) существования в множестве G единичного элемента e такого, что $g_i e = e g_i = g_i$ для произвольного $g_i \in G$; б) существования для произвольного g_i обратного элемента g_i^{-1} такого, что $g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e$. Всего получаем четыре условия:

$$\begin{aligned} &\text{I.} && g_i g_j = g_k \in G, \text{ если } g_i, g_j \in G, \\ &\text{II.} && (g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k), \\ &\text{III.} && g_i e = e g_i = g_i, \\ &\text{IV.} && g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = r. \end{aligned}$$

Выписанные выше соотношения, определяющие абстрактную группу, называются, соответственно, аксиомами принадлежности, ассоциативности, существования единичного и обратного элементов. В случае конкретных групп операцию умножения приходится (для каждого типа групп) соответствующим образом определять.

Пример кристаллографической группы $2/m$. Группы перестановок и ортогональных матриц, изоморфные группе $2/m$

Под произведением однородных ортогональных преобразований, определяющих точечную группу симметрии конечной фигуры, будем понимать последовательное выполнение этих преобразований. Используя это определение, проверим выполнимость в множестве $2/m$ четырех групповых аксиом.

Симметрией кристаллографической точечной группы $2/m$ обладает, например, фигура деформированной спичечной коробки (прямая призма, в основании которой лежит параллелограмм). Занумеруем грани фигуры, как показано на рис. 203, и запишем перестановки цифр, осуществляемых преобразованиями симметрии фигуры:

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix}123456\\123456\end{pmatrix}, \; 2 \leftrightarrow \begin{pmatrix}123456\\341256\end{pmatrix}, \; \bar{1} \leftrightarrow \begin{pmatrix}123456\\341265\end{pmatrix} \; m \leftrightarrow \begin{pmatrix}123456\\123465\end{pmatrix}.$$

В верхних строчках каждой перестановки ряды цифр следуют в натуральном порядке, в нижних — в том порядке, который устанавливается

после выполнения преобразования симметрий. Непосредственно очевидно, например, что после поворота на 180° вокруг оси 2 грань 1 переходит в положение грани 3, грань 2 — в положение грани 4 и т. д. Соответствие между операциями симметрии 1, 2, $\bar{1}$, m (мы их обозначаем теми же символами, что и элементы симметрии) и подстановками взаимно однозначно, что мы и отразили в записи знаком двусторонней стрелки.

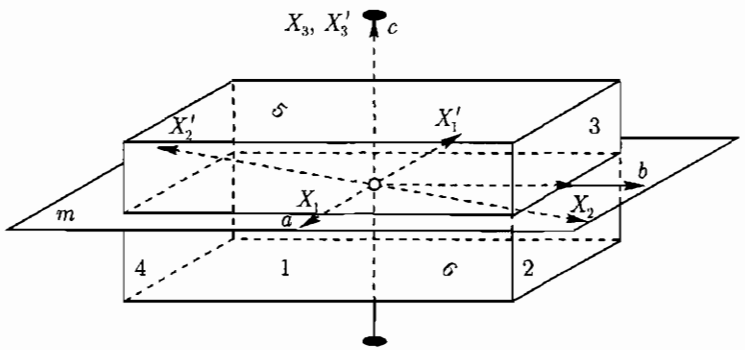


Рис. 203. Элементарная ячейка в форме деформированной спичечной коробки обладает метрическими параметрами $a \neq b \neq c$, $\alpha = \beta = 90° \neq \gamma$ и симметрией $2/m$.

Боковые грани призмы занумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, основания — цифрами 5, 6. Помимо кристаллографических (косоугольных) осей a, b, c введена кристаллофизическая (прямоугольная) система координат X_1, X_2, X_3 и показано ее преобразование в положение X_1', X_2', X_3' под действием поворота на 180° вокруг оси X_3. Элементы симметрии 2, m и $\bar{1}$ группы $2/m$ изображены условно двуугольниками, плоскостью и кружком соответственно

Используя найденное соответствие, определим операцию умножения перестановок. Найдем, например, произведение $\bar{1}2$, выполняя первой ту операцию, которая записана справа:

$$\bar{1}2 \leftrightarrow \begin{pmatrix}123456\\341265\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123456\\341256\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123456\\123456\end{pmatrix} \leftrightarrow m.$$

Под действием поворота 2 грань 1 переходит в положение грани 3, а под действием инверсии $\bar{1}$ грань 3 переходит в положение грани 1; следовательно, произведение преобразований $\bar{1}2$ переводит грань 1 в грань 1. Подобным же образом найдем, что произведение $\bar{1}2$ переводит грани 2, 3, 4 в себя, грань 5 переходит в грань 6, грань 6 — в грань 5.

Результат, который нас интересует, гласит: произведение преобразований $\bar{1}2$ эквивалентно преобразованию m, что можно записать в виде уравнения $\bar{1}2 = m$.

Продолжая нахождение парных произведений $g_i g_j$ (в последовательности справа налево), можно записать результат в форме таблицы умножения группы $2/m$:

	1	2	$\bar{1}$	m
1	1	2	$\bar{1}$	m
2	2	1	m	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	m	1	2
m	m	$\bar{1}$	2	1

по схеме

	$\cdots$	g_j	$\cdots$
$\cdot$		$\cdot$	
$\cdot$		$\cdot$	
$\cdot$		$\cdot$	
g_i	$\cdots$	$g_i g_j$	$\cdots$
$\cdot$		$\cdot$	
$\cdot$		$\cdot$	
$\cdot$		$\cdot$	

Эта таблица показывает, что аксиома принадлежности в множестве симметрических преобразований, допускаемых исследуемой фигурой (рис. 203), выполнена: произведение любых двух преобразований принадлежит тому же множеству. Нетрудно проверить и выполнимость аксиомы ассоциативности: в тройном произведении $g_i g_j g_k$ можно любым образом расставлять скобки, сохраняя последовательность умножений справа налево. Роль единицы группы выполняет в нашем множестве тождественное преобразование 1. Таблица показывает также, что для каждого элемента в группе $2/m$ существует обратный, так как каждый элемент g_i обратен самому себе: $g_i g_i = 1$.

С помощью таблицы можно найти и результат многократного повторения операции. Найдем, например, что третья степень операции 2 равна операции 2:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^2 2 = 2, \text{ так как } 2^2 = 2 \cdot 2 = 1.$$

Условившись считать одинаковыми степени операций, приводящие к одинаковому результату, найдем, что группа $2/m$ является группой четвертого порядка, так как она содержит четыре различные операции:

$$2/m = \{1, 2, \bar{1}, m\}.$$

Заметим, что за порождающие элементы (генераторы) группы $2/m$ может быть принята любая пара элементов, не включающая единицу 1. Записав для генераторов $\{2, m\}$ определяющие уравнения

$$2^2 = 1, m^2 = 1, 2m = m^2,$$

можно с их помощью построить всю таблицу умножения группы $2/m$, перемножая элементы m, 2 и $2m = \bar{1}$.

Соответствие между операциями симметрии и перестановками шести цифр, которое мы установили выше, приводит к изоморфизму группы симметрии $2/m$ и группы четырех перестановок. Вообще, группы $G = \{g_1, g_2, \ldots\}$ и $F = \{f_1, f_2, \ldots\}$ называются изоморфными, если их таблицы умножения совпадают при установлении взаимно однозначного соответствия между элементами, т. е. если из

$$g_i \leftrightarrow f_i,\ g_j \leftrightarrow f_j \text{ следует } g_i g_j \leftrightarrow f_i f_j.$$

Установление изоморфизма групп позволяет перенести все результаты, относящиеся к законам умножения и следствиям из них, известные для одной группы, на множество изоморфных групп, т. е. существенным образом ограничить объем исследований. Для конечных групп, например, справедлива теорема Кели: всякая конечная группа изоморфна некоторой группе перестановок. Поэтому исследование конечных групп можно свести к исследованию групп перестановок.

Множество групп перестановок, очевидно, шире множества ортогональных кристаллографических групп. Например, циклическая группа пятого порядка, порождаемая степенями перестановки

$$p = \begin{pmatrix}123456\\436251\end{pmatrix},\ \text{т. е группа } \{p, p^2, p^3, p^4, p^5\},\ \text{где } p^5 = \begin{pmatrix}123456\\123456\end{pmatrix} = 1,$$

неизоморфна ни одной из кристаллографических групп.

С другой стороны, кристаллографические группы могут быть изоморфны не только группам подстановок. Рассмотрим важный для кристаллофизических приложений пример групп ортогональных трехмерных матриц, изоморфных ортогональным преобразованиям. Свяжем с кристаллографическими осями a, b, c нашей фигуры систему прямоугольных осей X_1, X_2, X_3 как показано на рис. 203. Всякому преобразованию симметрии фигуры отвечает преобразование жестко связанных с ней осей координат; например, поворот 2 переводит оси X_1, X_2, X_3 в положение X_1', X_2', X_3'. Определяя матричные элементы D_{ij} как косинусы углов между штрихованными и нештрихованными осями, $D_{ij} = \cos(X_i', X_j)$, найдем, что трехмерная матрица

$$\begin{pmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{13}\\ D_{21} & D_{22} & D_{23}\\ D_{31} & D_{32} & D_{33}\end{pmatrix},\ \text{описывающая поворот 2, примет вид } \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Подобным же образом установим соответствие матриц и симметрических преобразований:

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{1} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, m \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определяя далее закон умножения матриц известным правилом («строка левой матрицы умножается на столбец правой»: $D_{ij} = D_{i1}D_{1j} + D_{i2}D_{2j} + D_{i3}D_{3j}$), найдем произведение матриц, соответствующее произведению операций:

$$\bar{1}2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow m,$$

и т. д. Следовательно, соответствие матричной группы и группы $2/m$ будет изоморфным.

Роль матричных групп заключается в том, что с помощью матриц записываются преобразования координат точек трехмерного пространства или координат соответствующих радиусов-векторов. Например, линейные однородные преобразования записываются в виде системы уравнений и в матричном виде так:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= D_{11}x_1 + D_{12}x_2 + D_{13}x_3 \\ x_2' &= D_{21}x_1 + D_{22}x_2 + D_{23}x_3 \\ x_3' &= D_{31}x_1 + D_{32}x_2 + D_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \text{ или } \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначив через $\mathbf{D}$ матрицу D_{ij} и через $\mathbf{r}$ вектор с координатами x_1, x_2, x_3, те же уравнения можно записать еще более компактно в тензорном и операторном видах:

$$x_i' = D_{ij}x_j (i, j = 1, 2, 3) \text{ или } \mathbf{r}' = \mathbf{Dr}$$

(по повторяющемуся в тензорном уравнении индексу j подразумевается суммирование от единицы до трех: $x_i' = D_{i1}x_1 + D_{i2}x_2 + D_{i3}x_3$, где $i = 1, 2, 3$).

Некоторые свойства групп. Подгруппы. Фактор-группы. Гомоморфное соответствие групп

Подгруппой $H = \{h_1, h_2 \ldots\}$ группы $G = \{g_1, g_2 \ldots\}$ называется подмножество $H \subset G$, обладающее свойствами группы по отношению

к операции умножения, действующей в G. Такими свойствами, например, обладают подгруппы кристаллографической группы $2/m$:

$$1 = \{1\},\ 2 = \{1.\ 2\},\ \bar{1} = \{1,\ \bar{1}\},\ m = \{1,\ m\},$$

в чем можно убедиться непосредственно или с помощью таблицы умножения группы $2/m$. Все подгруппы конечных групп легко находятся с помощью теоремы Лагранжа, утверждающей, что порядок подгруппы H конечной группы G есть делитель порядка G.

Элементы подгруппы $H = \{h_1, h_2, \ldots\}$ служат одновременно элементами группы $G = \{g_1, g_2, \ldots\}$, только они переобозначены другими буквами; при этом обязательно группа и подгруппа содержат общий единичный элемент, пусть это будет элемент $h_1 = g_1 = e$. Установив подгруппу H группы G, мы можем определить системы левых или правых смежных классов

$$g_iH = \{g_ih_1,\ g_ih_2, \ldots\} \text{ или } Hg_i = \{h_1g_i,\ h_2g_i, \ldots\},$$

где $h_1 = e$ и элемент g_i не принадлежит подгруппе $H (g_i \neq e,\ g_i \notin H,\ g_i \in G)$. Можно показать, что все элементы, входящие в фиксированный смежный класс, различны, как различны и элементы смежных классов g_iH и g_jH, если $g_i \neq g_j$. Используя это обстоятельство, можно произвести разложение группы по подгруппе, т. е. перечислить элементы группы по их принадлежности к смежным классам. Если группа G конечная, порядка n, то подгруппа $H \subset G$ имеет конечный порядок $m < n$. Следовательно, разложение группы G, например, по системе левых смежных классов закончится на конечном числе шагов:

$$G = g_1H \cup g_2H \cup \ldots \cup g_jH = \{h_1,\ h_2, \ldots, h_m\} \cup$$
$$\cup \{g_2h_1,\ g_2h_2, \ldots, g_2h_m\} \cup \ldots \cup \{g_jh_1,\ g_jh_2, \ldots, g_jh_m\}.$$

В частности, разложение группы $2/m$ по подгруппе 2 будет иметь вид

$$2/m = 1\{1,\ 2\} \cup \bar{1}\{1,\ 2\} = \{1,\ 2\} \cup \{\bar{1},\ m\}.$$

Число смежных классов j в разложении группы по подгруппе называется индексом подгруппы. Очевидно, индекс подгруппы $2 = \{1,\ 2\}$ группы $2/m$ равен двум.

Подгруппа $H \subset G$ называется инвариантной подгруппой или нормальным делителем группы G (пишут $H \lhd G$), если правые и левые смежные классы по этой подгруппе совпадают:

$$Hg_i = g_iH (g_i \in G,\ H \lhd G).$$

Подгруппа 2 группы $2/m$ инвариантна, так как $\bar{1}\{1, 2\} = \{1, 2\}\bar{1}$. Используя условие коммутативности $Hg_i = g_i$, определим теперь группу новой природы, называемую фактор-группой и обозначаемую символом G/H. Элементами фактор-группы являются левые (или правые) смежные классы; закон умножения (например, левых) смежных классов устанавливается формулой

$$g_iH \cdot g_jH = G_iG_jH (g_ig_jH = g_kH, \text{ если } g_ig_j = g_k).$$

Условие коммутативности использовано в формуле для переноса сомножителя g_j из правого в левое положение по отношению к символу H. Полагая $g_1 = e$, построим таблицу умножения фактор-группы G/H по подгруппе конечного индекса j:

	g_1H	g_2H	. . .	g_jH
g_1H	g_1H	g_2H	. . .	g_jH
g_2H	g_2H	g_2^2H		g_2g_jH
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
g_jH	g_jH	g_jg_2H	. . .	g_j^2H

В частности, таблица умножения фактор-группы $2/m/2$ по подгруппе 2 будет иметь вид

	$\{1, 2\}$	$\{\bar{1}, m\}$
$\{1, 2\}$	$\{1, 2\}$	$\{\bar{1}, m\}$
$\{\bar{1}, m\}$	$\{\bar{1}, m\}$	$\{1, 2\}$

Понятие фактор-группы играет первостепенную роль в теории групп и находит многочисленные применения. Другое важнейшее понятие теории групп — понятие гомоморфного отображения, элементов большей (по порядку или мощности) группы $G = \{g_1, g_2, \ldots\}$ на элементы меньшей группы $F = \{f_1, f_2, \ldots\}$. Это отображение одностороннее, такое, что из

$$g_i \to f_i, \; g_j \to f_j \text{ следует } g_ig_j \to f_if_j.$$

Гомоморфизм групп изображается символом $G \to F$. Можно показать, что фактор-группа G/H по инвариантной подгруппе H есть гомоморфный образ группы G, т. е. $G \to G/H$. Гомоморфизм этих групп

устанавливается односторонним соответствием элементов g_i группы G элементам g_iH фактор-группы G/H:

$$g_i \to g_iH,\ g_j \to g_jH,\ g_ig_j \to g_iHg_jH = g_ig_jH.$$

Односторонность такого соответствия следует из того, что на один и тот же смежный класс g_iH отображается несколько элементов группы G, а именно: все ее элементы $g_1^* = g_ih_1$, $g_2^* = g_ih_2, \ldots, g_m^* = g_ih_m (h_1, h_2, \ldots, h_m \in H \lhd G,\ g_i \notin H,\ g_i \in G)$, принадлежащие данному классу g_iH.

Установление гомоморфного соответствия позволяет свести изучение законов умножения в группе G к исследованию законов умножения для меньшей (по порядку или мощности) группы G/H. С гомоморфными отображениями связаны так называемые неприводимые представления групп G, использующиеся в физических приложениях. Чаще всего это группы операторов или матриц, сохраняющие закон умножения той группы G, которую они представляют при гомоморфном отображении.

Расширения групп с помощью прямых, полупрямых и условных произведений. Кристаллографические группы как расширения групп вращений

Любая группа G, содержащая заданную подгруппу H, называется ее расширением. Пусть

$$G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \ldots \cup Hg_s = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}g_1 \cup \\ \cup \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}g_2 \cup \ldots \cup \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}g_s \qquad (1)$$

— разложение группы по подгруппе (для определенности — по правым смежным классам). Из разложения следует, что расширение G группы H существует в общем случае тогда, когда элементы $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ образуют систему представителей смежных классов. Это означает, что:

1°. Элемент $g_1 = h_1 = e$ является общим единичным элементом для G и для H и, следовательно,— единицей системы $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$.

2°. Все элементы системы $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ различны в том смысле, что смежные классы $Hg_j \neq Hg_l$ для $g_j \neq g_l$, т. е. $h_ig_j \neq h_kg_l$ для любых $h_i, h_k \in H$.

3°. Произведение элементов $h_ig_j \in Hg_j$ и $h_kg_l \in Hg_l$ лежит в некотором смежном классе Hg_q, принадлежащем разложению (1) группы G.

Условиям 1°, 2°, 3° удовлетворяют разнообразные наборы представителей, взятых по одному из каждого смежного класса. Все такие

наборы, приводящие к одному и тому же расширению G группы H, мы будем считать эквивалентными. В математической теории расширений групп* разработаны особые приемы нахождения неэквивалентных систем представителей $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ для построения неэквивалентных расширений G. Мы познакомимся здесь лишь с некоторыми из них.

Прежде всего заметим, что условия 1°, 2°, 3° будут удовлетворены, если смежные классы Hg_j разложения (1) рассматривать как элементы некоторой группы $\{Hg_1, Hg_2, \ldots, Hg_s\}$, определяемой законом умножения

$$Hg_j \cdot Hg_l = Hg_q (Hg_q \neq Hg_i, Hg_l, \quad \text{если} \quad g_j, g_l \neq g_1 = e). \qquad (2)$$

В общем случае неинвариантных расширений (когда подгруппа H не образует нормального делителя группы G) это может быть группа подстановок смежных классов. В случае инвариантных расширений представители смежных классов, кроме условий 1°, 2°, 3°, должны удовлетворять дополнительному соотношению коммутации

4°. $g_j H = Hg_j = H$ или $g_j H g_j^{-1}$, т. е. $g_j h_k g_j^{-1} = h_f \in H$ для любых $h_k \in H$, $g_f \in G$. В этом случае подгруппа H является инвариантной или нормальным делителем G, а система $\{Hg_1, Hg_2, \ldots, Hg_s\}$ образует фактор-группу G/H, для которой закон умножения (2) принимает вид

$$Hg_j \cdot Hg_l = Hg_j g_l. \qquad (3)$$

Предположение о том, что набор смежных классов образует группу относительно закона умножения (2) или закона (3), усиливает наше условие 3°; теперь мы имеем

$$h_i g_j \cdot h_k g_l = h_p g_q \in Hg_q \quad \text{или} \quad \in Hg_j g_l, \quad \text{где} \quad h_i g_j \in Hg_j, \; h_k g_l \in Hg_l.$$

Дальнейшие следствия вытекают отсюда для случая инвариантных расширений. Сопоставляя смежным классам Hg_j элементы g_j, найдем, что при произвольном выборе представителей, взятых по одному из каждого смежного класса, система $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ образует группу, изоморфную фактор-группе G/H:

$$Hg_j \leftrightarrow g_j, \; Hg_l \leftrightarrow g_l, \; Hg_j g_l \leftrightarrow g_j g_l.$$

*Ее изложение можно найти в книгах А. Г. Куроша (1967) и М. Холла (1962) по общей теории групп, а также в работах Цассенхауса (1948), Яннера и Ашера (1965–1969) по расширениям кристаллографических групп. Относительно неинвариантных расширений см. работы Ван дёр Вардена, А. М. Заморзаева (1967), В. М. Бусаркина и Ю. М. Горчакова (1968) и В. А. Копцика (1967).

Условие изоморфизма требует, чтобы произведение элементов $g_j g_l = g_n$, найденное по законам умножения группы G, принадлежало бы смежному классу Hg_n, что осуществляется, если положить

$$g_j g_l = h g_{jl,n} g_n \in Hg_n,\ h_{jl,n} = h_1, h_2, \ldots, h_m \in H, \quad g_n \in \{g_1, g_2, \ldots, g_s\}.$$

В общем случае при $h_{jl,n} \neq h_1$ элемент $h_{jl,n} g_n \notin \{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$. Вводя закон приведенного умножения

$$g_j g_l = h_{jl,n} g_n \equiv g_n (\mathrm{mod}\, h_{jl,n}), \quad h_{jl,n} \in H,$$

т. е. приравнивая элемент $h_{jl,n} g_n$ элементу g_n (по модулю $h_{jl,n}$), найдем, что система $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ замкнута относительно этого закона, т. е. образует группу по модулю $G(\mathrm{mod}\, H)$.

В понятии группы по модулю объединяются все наши требования к системе представителей смежных классов. Условие существования инвариантных расширений мы можем сформулировать теперь так: расширение G группы $H \lhd G$ существует, если набор представителей смежных классов образует группу по модулю $G(\mathrm{mod}\, H)$, изоморфную фактор-группе G/H. Проблема эквивалентности наборов $(\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ сводится теперь к проблеме изоморфизма соответствующих групп. Из-за различий в законах умножения группы $G(\mathrm{mod}\, H)$ вообще не подгруппы G. В частном случае, если возможен выбор системы представителей такой, что для них все модули сравнения $h_{ji,n} \equiv h_1$, группа по модулю превращается в обычную группу $G^* = \{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ — подгруппу G. Группа G называется в этом случае симморфной. Если такой выбор невозможен, группа G *несимморфная*.

Расширение G можно практически построить как «произведение» групп H и $G(\mathrm{mod} H)$, комбинируя попарно все элементы $h_1, h_2, \ldots, h_m \in H$ с элементами $g_1, g_2, \ldots, g_s \in G(\mathrm{mod}\, H)$ и объединив в множество G полученные результаты:

$$G = \{h_1 g_1, h_2 g_2, \ldots, h_m g_1, h_1 g_2, h_2 g_2, \ldots, h_m g_2, \ldots, h_1 g_s, h_2 g_s \ldots, h_m g_s\}. \quad (4)$$

Напомним, что у групп, *используемых для построения расширений*, должен быть единственный общий элемент — *пересечение* $H \cap G(\mathrm{mod}\, H) = h_1 = g_1 = e \in G$. Так как $G(\mathrm{mod}\, H)$ — не подгруппа G, расширение (4) мы будем называть условным произведением и символически обозначать

$$G = H \odot G(\mathrm{mod}\, H), H \lhd G, G(\mathrm{mod}\, H) \not\subset G, H \cap G(\mathrm{mod}\, H) = e \in G. \quad (5)$$

Для симморфных групп G условное произведение (5) заменой группы по модулю на обычную группу $G^* = \{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ — инвариантную или неинвариантную подгруппу G — приводится к более простому случаю прямых или полупрямых произведений.

Прямое произведение двух групп

$$G = H \otimes G^*, \quad H \lhd G,\ G^* \lhd G, \quad H \cap G^* = e \in G$$

определяется законом умножения бинарных элементов $h_i g_j \in G$:

$$h_i g_j \otimes h_k g_l = h_i h_k g_j g_l,\ h_i, h_k \in H,\ g_j, g_l \in G^*; \tag{6}$$

полупрямое

$$G = H \circledS\, G^*,\ H \lhd G,\ G^* \subset G,\ H \cap G^* = e \in G$$

— законом

$$h_i g_j \circledS\, h_k g_l = h_i h_k^{g_j} g_j g_l, \quad h_i, h_k^{g_j} = g_j h_k g_j^{-1} \in H, g_j, g_l \in G^*. \tag{7}$$

Прямое произведение законом (6) вполне определено для любых двух групп H и G^*; полупрямое — определяется в соответствии с (7) заданием *преобразований автоморфизма* $g_j h_k g_j^{-1} = h_f$ для всех $h_k \in H$, $g_j \in G^*$. Вообще во всех случаях (5)–(7) $G(\mathrm{mod}\, H)$ или G^* — группы автоморфизмов для H, сохраняющие инвариантность $H \lhd G$: $g_j H g_j^{-1} = H$ при любых $h_k \in H, g_f \in G$. Представляя элементы G^* в виде $h_1 g_j$, $h_1 h_l$, убеждаемся в том, что оба закона (6), (7) сохраняют замкнутость умножения в подгруппах $G^* \subset G$:

$$h_1 g_j \cdot h_1 g_l = h_1 g_j g_l, \quad \text{так как} \quad h_1^{g_j} = g_j h_1 g_j^{-1} \equiv h_1.$$

Несимморфные группы G строятся по модели прямых и полупрямых произведений заменой части элементов $g_j \in G^*$ элементами новой природы

$$\begin{aligned} &g_j^H = \alpha_j g_j \equiv g_j (\mathrm{mod}\, \alpha_j) : \\ &g_1^H = \alpha_1 g_1 \equiv g_1 (\mathrm{mod}\, \alpha_1),\ g_2^H = \alpha_2 g_2 \equiv \\ &\qquad \equiv g_2 (\mathrm{mod}\, \alpha_2), \ldots, g_s^H = \alpha_s g_s \equiv g_s (\mathrm{mod}\, \alpha_s) \end{aligned} \tag{8}$$

только для $\alpha g = g \alpha^*$. В общем случае $\alpha_1 \equiv h_1$, остальные величины из *первой системы модулей сравнения* $\alpha_j \notin H$, однако $(\alpha_j g_j)^m = \alpha_j^m g_j^m =$

$= h_1^{h_i} g_1, \alpha_j^m = h_1^{h_i} \in H$, где m — порядок элемента g_j. Замена (8) превращает вновь группу G^* в изоморфную ей группу по модулю $G^H = \{g_1^H, g_2^H, \ldots, g_s^H\}$ с известным уже нам законом приведенного умножения* $G^H = G \pmod H$

$$g_j^H g_l^H = h_{jl,n} g_n^H \equiv g_n^H (\bmod h_{jl,n}),\ h_{jl,n} \in H,\ g_n^H \in G^H \tag{9}$$

или

$$(\alpha_j g_j) \circledS (\alpha_l g_l) = \alpha_j \alpha_l g_j g_l = \alpha_j \alpha_l \alpha_n^{-1} (\alpha_n g_n) \equiv (\alpha_n g_n) (\bmod h_{jl,n}), \tag{9а}$$

$$(\alpha_j g_j) \circledS (\alpha_l g_l) = \alpha_j \alpha_l^{g_j} g_j g_l = \alpha_j \alpha_l^{g_j} \alpha_n^{-1} (\alpha_n g_n) \equiv (\alpha_n g_n) (\bmod h_{jl,n}) \tag{9б}$$

соответственно случаям прямых и полупрямых произведений. Из (9а) и (9б) находим *модули сравнения второй систем*

$$h_{jl,n} = \alpha_j \alpha_l \alpha_n^{-1} \quad \text{и} \quad h_{jl,n} = \alpha_j \alpha_l^{g_j} \alpha_n^{-1},$$

где $\alpha^{g_j} = g_j \alpha_l g_j^{-1} = \alpha_k$ — автоморфизмы модулей α_l такие, что $\alpha_k g_k = g_k^H \in G^H$ и $\alpha_j^{g_j} = \alpha_j$. Роль единицы в группах G^H играет элемент $g_1^H = h_1 g_1$. Обратные элементы определяются по формулам

$$(\alpha_j g_j)^{-1} = \alpha_j^{-1} g_j^{-1} \quad \text{и} \quad (\alpha_j g_j)^{-1} = (\alpha_j^{-1})^{g_j^{-1}} g_j^{-1}$$

соответственно. Заметим, что система величин α_j сама образует группу по модулю $A^H = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$ гомоморфную группе $G^H = \{g_1^H, g_2^H, \ldots, g_s^H\}$ при естественном сопоставлении элементов: $\alpha^j \leftrightarrows g_j^H$, $\alpha_l \leftrightarrows g_l^H$ и

$$\alpha_j \alpha_l = h_{jl,n} \alpha_n \equiv \alpha_n (\bmod h_{jl,n}) \leftrightarrows g_n^H (\bmod h_{jl,n}) \equiv h_{jl,n} g_n^H = g_j^H g_l^H.$$

Это делает законным использование обозначений обратных элементов в приводившихся выше формулах: $\alpha_j \alpha_j^{-1} = \alpha_j^{-1} \alpha_j = \alpha_1 = h_1$.

Изоморфизм групп $G^H \leftrightarrow G^* \leftrightarrow G/H$, следующий из соответствий

$$g_j^H g_l^H = h_{jl,n} g_n^H \equiv g_n^H (\bmod h_{jl,n}) \leftrightarrow g_n = g_j g_l \leftrightarrow H g_n = H g_j g_l,$$

*Группы по модулю $G \pmod H$ для несимморфных расширений G обозначаем символами G^H. В простейшем случае G^H-групп мы можем положить $\alpha_j^m = h_j \equiv h_1 \pmod{h_i}$. Если $\alpha g \neq g\alpha$, прямое умножение $(\alpha g)^m = \alpha^m g^m = h_i g_1 \equiv g_1 (\bmod h_i)$ должно быть заменено полупрямым, $(\alpha g)^m = \alpha \alpha^g \ldots \alpha^{g^{m-1}} = h_k g_1 \equiv g_1 (\bmod h_k)$, $h_i \neq h_k, \alpha^{g^n} = g^n \alpha g^{-n}, n = 1, \ldots, m$, и формулы (9) и т. д., соответственно, модифицированны (ср. стр. 271 и 341).

гарантирует существование несимморфных расширений. Несимморфную группу построим как условное произведение двух групп

$$G = H \bigcirc G^H = \{h_1(\alpha_1 g_1), h_2(\alpha_1 g_1), \ldots, h_m(\alpha_1 g_1), \ldots \\ \ldots, h_1(\alpha_s g_s), h_2(\alpha_s g_s), \ldots, h_m(\alpha_s g_s)\}, \qquad (10)$$

различая законы *прямых* и *полупрямых условных произведений*:

$$h_i(\alpha_j g_j) \odot h_k(\alpha_l g_l) = h_i h_k(\alpha_j g_j)(\alpha_l g_l) = \\ = h_i h_k h_{jl,n}(\alpha_n g_n), h_{jl,n} = \alpha_j \alpha_l \alpha_n^{-1} \in H, \qquad (11)$$

$$h_i(\alpha_j g_j) \bigcirc h_k(\alpha_l g_l) = h_i h_k^{(\alpha_j g_j)}(\alpha_j g_j)(\alpha_l g_l) = h_i h_k^{(\alpha_j g_j)} h_{jl,n}(\alpha_n g_n), \qquad (12)$$

где $h_{jl,n} = \alpha_j \alpha_l^{g_j} \alpha_n^{-1} \in H$, $h_k^{(\alpha_j g_j)} = (\alpha_j g_j) h_k (\alpha_j g_j)^{-1} = h_f \in H$ для всех $h_k \in H, (\alpha_j g_j) \in G^H$.

Сопоставляя формулы (11), (12) и (6), (7), найдем, что несимморфные группы (10), построенные по модели симморфных групп (4), неизоморфны им. Это следует из появления в законах умножения (11), (12) величин $h_{jl,n}$, нарушающих изоморфизм.

Практическое построение несимморфных групп по заданным симморфным сводится к определению первой и второй систем модулей сравнения (соответствующие методы рассмотрены в литературе, цитировавшейся на стр. 258). Для групп невысокого порядка G^H таблицу модулей $h_{jl,n}$ легко определить подбором, если известна таблица умножения изоморфной группы G^* и величины α_j предварительно определены:

Таблица умножения G^*	$g_1 \ldots g_l \ldots g_s$
g_1	$g_1 \ldots g_l \ldots g_s$
.	. . .
.	. . .
.	. . .
g_j	$g_j \ldots g_n \ldots g_p$
.	. . .
.	. . .
.	. . .
g_s	$g_s \ldots g_q \ldots g_r$

$\rightarrow$

Таблица умножения $h_{jl,n}$	$g_1^H \ldots g_l^H \ldots g_s^H$
g_1^H	$h_1 \ldots h_1 \ldots h_1$
.	. . .
.	. . .
.	. . .
g_j^H	$h_1 \ldots h_{jl,n} \ldots h_{js,p}$
.	. . .
.	. . .
.	. . .
g_s^H	$h_1 \ldots h_{sl,q} \ldots h_{ss,r}$

Появление в таблице величин h_1 — следствие «безмодульного» умножения на единичный элемент: $(\alpha_j g_j)(h_1 g_1) = h_{j1,j}(\alpha_j g_j) = (\alpha_j g_j)$, $(h_1 g_1)(\alpha_j g_j) = h_{j1,j}(\alpha_j g_j) = (\alpha_j g_j)$, откуда $h_{j1,j} = h_{1j,j} = h_1$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Величины h_1 будут появляться также в таблице на пересечении соответствующих строк и столбцов при перемножении «безмодульных» элементов $g_i^H \equiv g_i$, $g_k^H = g_k$ (все такие элементы вместе с единичным $g_1^H \equiv g_1$ образуют подгруппу G_1^* моделирующей группы G^*).

Оставляя в стороне теорию неинвариантных расширений, приведем таблицу расщеплений в прямые, полупрямые и условные произведения

32 кристаллографических групп, рассматривая их как расширения групп вращении. Табл. 14 показывает, что все кристаллографические группы можно получить попарным перемножением восьми генерирующих групп

$$H = 1, 2, 3 \quad G^* = 2, m, \bar{1}, \quad G^H = 4(\mathrm{mod}\,2),\ \bar{4}(\mathrm{mod}\,2),$$

где группы по модулю определяются таблицами умножения

$4(\mathrm{mod}\,2)$	1	4^H
1	1	4^H
4^H	4^H	$2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$

$\bar{4}(\mathrm{mod}\,2)$	1	$\bar{4}^H$
1	1	$\bar{4}^H$
$\bar{4}^H$	$\bar{4}^H$	$2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$

Элементы $g_j^H = \alpha_j g_j$ этих групп ($4^H = 4^{-1}2$ и $\bar{4}^H = 4\bar{1}$) перемножаются по формуле (9а): $(4^{-1}2)(4^{-1}2) = 4^{-1}4^{-1}22 = 21 \equiv 1(\mathrm{mod}\,2), (4\bar{1})(4\bar{1}) = 44\bar{1}\bar{1} = 21 \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$.

В дальнейшем мы убедимся и на других примерах, что метод перемножения генерирующих групп служит эффективным средством вывода новых групп. Заканчивая параграф, проследим еще раз путь построения инвариантных расширений по схеме гомоморфных и изоморфных соотношений, связывающих исходные и конечные группы (рис. 204).

Таблица 14. Кристаллографические точечные группы как расширения групп вращений

Группы вращений	Инверсионные группы	Зеркальные группы
1	$\bar{1} = 1 \otimes \bar{1}$	$m = 1 \otimes m$
2	$2/m = 2 \otimes \bar{1}$	$mm2 = 2 \otimes m$
3	$\bar{3} = 3 \otimes \bar{1}$	$\bar{6} = 3 \otimes m$
—	—	$3m = 3 \circledS\, m$
$4 = 2 \odot 4(\mathrm{mod}\,2)$	$4/m = 4 \otimes \bar{1}$	$\bar{4} = 2 \odot \bar{4}(\mathrm{mod}\,2)$
—	—	$4mm = 4 \circledS\, m$
$6 = 3 \otimes 2$	$6/m = 6 \otimes \bar{1}$	$6mm = 6 \circledS\, m$
$222 = 2 \otimes 2$	$mmm = 222 \otimes \bar{1}$	$\bar{4}2m = 222 \circledS\, m$
$32 = 3 \circledS\, 2$	$\bar{3}m = 32 \otimes \bar{1}$	$\bar{6}m2 = 32 \otimes m$
$422 = 4 \circledS\, 2 = 222 \circledS\, 2$	$4/mmm = 422 \otimes \bar{1}$	—
$622 = 6 \circledS\, 2 = 32 \otimes 2$	$6/mmm = 622 \otimes \bar{1}$	—
$23 = 222 \circledS\, 3$	$m\bar{3} = 23 \otimes \bar{1}$	$\bar{4}3m = 23 \circledS\, m$
$432 = 23 \circledS\, 2$	$m\bar{3}m = 432 \otimes \bar{1}$	—

Примечание. Среди зеркальных в таблице перечислены группы, не сводимые к инверсионным и не имеющие центра симметрии.

Пространственные (федоровские) группы Φ как расширения трансляционных групп T с помощью кристаллографических групп G и изоморфных им групп по модулю G^T

Довольно абстрактные рассуждения предыдущего параграфа мы поясним подробно на конкретном примере, который послужил отправным пунктом при разработке общей теории. А именно, покажем, что пространственные (федоровские) группы Φ трехмерного дисконтинуума являются инвариантными расширениями трансляционных групп T с помощью кристаллографических точечных групп G или изоморфных им групп по модулю G^T.

Выберем в трехмерном дисконтинууме примитивный векторный базис $\{a, b, c\}$, в общем случае косоугольный, и свяжем с осями переносов a, b, c оси координат $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$, $\widetilde{X}_3$. Тогда пространственная решетка определится как трансляционно-эквивалентная система точек с целочислен-

---

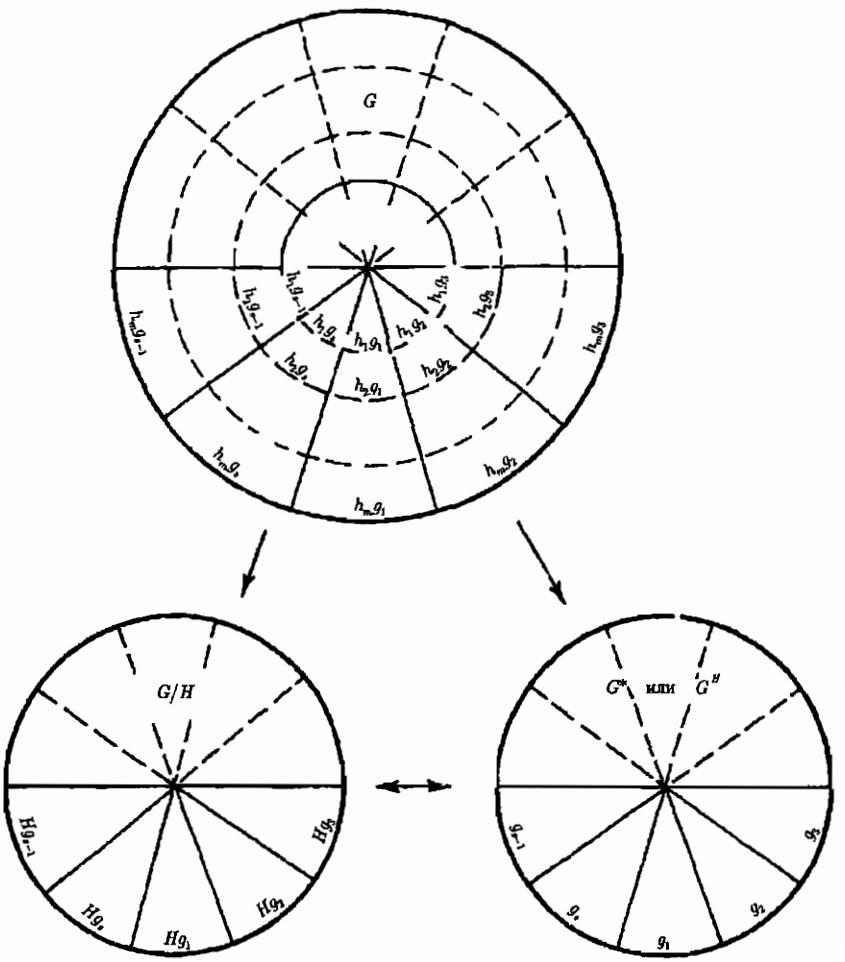
Рис. 204. **Гомоморфные ($\rightarrow$) и изоморфные ($\leftrightarrow$) соотношения между группами в схеме нормальных (инвариантных) расширений.**
Симморфные расширения $G = H \otimes G^*$ или $G = H(\S)G^*$ строим по схеме $G^* \leftrightarrow G/H \leftarrow G$, принимая произвольную группу $G^* = \{g_1, g_2, \ldots, g_S\}$ за модель фактор-группы $G/H = \{Hg_1, Hg_2, \ldots, Hg_s, \}$ и $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ — за ядро гомоморфизма $G^* \leftarrow G$, в котором все элементы $h_1, h_2, \ldots, h_m \in H$ отображаются на единичный элемент $g_1 \in G^*$. Заменяя в G/H элементы Hg_i системами элементов $\{h_1 g_i, h_2 g_i, \ldots, h_m g_i\}$, получаем искомое расширение G

$$\begin{array}{c} \{h_1 g_1, h_2 g_1, \ldots, h_m g_1, \ldots, h_1 g_s, h_2 g_s, \ldots, h_m g_s\} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \{Hg_1, Hg_2, \ldots, Hg_s\} \leftrightarrow \{g_1, g_2, \ldots, g_s\}, \end{array} \tag{4}$$

в котором необходимые соотношения между группами обеспечиваются отображениями $h_i g_j$ $(i = 1, 2, \ldots, m) \rightarrow Hg_j \leftrightarrow g_j$ $(j = 1, 2, ..., s)$ и законами умножения (6), (7) для G и (3) для G/H. Несимморфные группы $G = H \circ G^H$ получим заменой $G* \leftrightarrow G^H = G_1^* g_1 \cup G_1^* g_{i+1}^H \cup \ldots \cup G_1^* g_{i+p}^H$ где $G_1^* = \{g_1, g_2, \ldots, g_i\}$ — общая подгруппа групп $G*$ и G^H, элементы $g_{i+1}^H = \alpha_{i+1} g_{i+1}, \ldots, g_{i+p}^H = \alpha_{i+p}^H g_{i+p}$ и $p + 1 = s/i$ — индекс подгруппы $G*_1$ в разложении группы по модулю G^H по G_1. Замена $G^* \leftrightarrow G^H$ меняет симморфную группу (4) на несимморфную (10) и законы умножения (6), (7) на (11), (12) соответственно. На диаграмме элементы групп $G*$ и G^H обозначены для краткости одними и теми же символами $h_i g_j$; соответствию элементов $h_i g_j \rightarrow Hg_j \leftrightarrow g_j$ отвечает одноименное соответствие секторов кругов; так как $g_1 = h_1 = e$, группа $\widetilde{G}^* = \{h_1 g_1, h_1 g_2, \ldots, h_1 g_s\}$ отождествлена с G^*, группа $\widetilde{H} = \{h_1 g_1, h_2 g_1, \ldots, h_m g_1\}$ — с H

ными координатами. Любому параллельному переносу, совмещающему решетку с собой, будет отвечать перемещение начала координат (000) в некоторый узел с целочисленными координатами (m_1, m_2, m_3). Иными словами, любой перенос может быть описан вектором

$$\tau = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 = m_k\mathbf{a}_k;\ \mathbf{a}_1 = \mathbf{a},\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{b},\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{c},$$
$$(k = 1, 2, 3;\ m_k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$



Бесконечная совокупность $T = \{m_k \mathbf{a}_k\}$ таких векторов образует для нашего дисконтинуума группу в математическом смысле, называемую группой трансляций. Принимая за групповую операцию операцию сложения векторов, легко проверить выполнимость в множестве T четырех групповых аксиом (см. стр. 250).

I. Два последовательно проведенных переноса $\boldsymbol{\tau}_i$ и $\boldsymbol{\tau}_j$ эквивалентны переносу решетки на вектор $\boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\tau}_j = \boldsymbol{\tau}_k$; вектор $\boldsymbol{\tau}_k$ принадлежит множеству T, если $\boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}_j \in T$.

II. Операция векторного сложения ассоциативна: $(\boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\tau}_j) + \boldsymbol{\tau}_k = \boldsymbol{\tau}_i + (\boldsymbol{\tau}_j + \boldsymbol{\tau}_k)$.

III. Роль единицы группы играет нуль-вектор: $\boldsymbol{\tau}_i + 0 = 0 + \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_i$.

IV. Для каждого вектора $\boldsymbol{\tau}_i$ в множестве T определен обратный вектор $\boldsymbol{\tau}_i^{-1} = -\boldsymbol{\tau}_i$, так как $\boldsymbol{\tau}_i + (-\boldsymbol{\tau}_i) = -\boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\tau}_i = 0$.

Для доказательства теоремы, указанной в заголовке параграфа, нам будет удобно перейти от векторных групп T к изоморфным им группам операторов, сопоставляя кажому вектору $\boldsymbol{\tau}_i \in T$ оператор параллельного переноса $[E|\boldsymbol{\tau}_i]$, а «произведению» векторов $\boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\tau}_j$ — произведение операторов $[E|\boldsymbol{\tau}_i][E|\boldsymbol{\tau}_i] = [E|\boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\tau}_i]$. Нуль-вектору при этом соответствует оператор отождествления $[E|0]$, обратному вектору — обратный оператор $[E|\boldsymbol{\tau}_i]^{-1} = [E| - \boldsymbol{\tau}_i]$. По определению под действием оператора $[E|\boldsymbol{\tau}]$ любой вектор $\mathbf{r} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3$ трехмерного пространства переходит в вектор $\mathbf{r}' = x_1'\mathbf{a}_1 + x_2'\mathbf{a}_2 + x_3'\mathbf{a}_3$,

$$\mathbf{r}' = [E|\boldsymbol{\tau}]\mathbf{r} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau},$$

а точка с координатами (x_1, x_2, x_3) переходит в точку (x_1', x_2', x_3'),

$$x_1' = x_1 + m_1,\ x_2' = x_2 + m_2,\ x_3' = x_3 + m_3,$$

где m_1, m_2, m_3 — целочисленные координаты вектора $\boldsymbol{\tau}$.

Охарактеризовав таким образом трансляционную группу T, мы и для точечной группы симметрии решетки G построим изоморфную ей группу ортогональных операторов, или группу, матриц, сопоставляя каждому преобразованию $g \in G$ квадратную ортогональную матрицу $D(g)$ с матричными элементами $D_{ij} = \cos(\widehat{X_i', X_j})$, подобно тому как мы это делали на стр. 255 для кристаллографической группы $2/m$.

Для построения ортогональных матриц $D(g)$ используется декартова система координат X_1, X_2, X_3 с ортогональным базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$, связанная с косоугольными осями $\tilde{X}_1 = X_1$, $\tilde{X}_2 = X_2$, $\tilde{X}_3 = X_3$ по определенным правилам (см. табл. 20). В ортогональных осях уже не все узлы решетки имеют целочисленные координаты. Если $\boldsymbol{\tau} = \tau_1\mathbf{e}_1 + \tau_2\mathbf{e}_2 + \tau_3\mathbf{e}_3$, то преобразования параллельного переноса запишутся

в виде $x_1' = x_1 + \tau_1$, $x_2' = x_2 + \tau_2$, $x_3' = x_3 + \tau_3$. При совпадении осей $X_i = \widetilde{X}_i$ и ортов $\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$ координаты $\tau_i = m_i$, $i = 1, 2, 3$.

Под действием операторов $[D(g)|0]$, которые мы сопоставляем матрицам $D(g)$, или более кратко $[D|0]$, любой вектор $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ перейдет в вектор $\mathbf{r}' = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2 + x_3'\mathbf{e}_3[D(g)|0] = D\mathbf{r}$, а точка (x_1, x_2, x_3) — в точку (x_1', x_2', x_3'), координаты которой получаются умножением столбца координат (x_1, x_2, x_3) на матрицу D. Заметим, что столбец базисных векторов умножается при преобразовании $[D|0]$ на транспонированную матрицу $\widetilde{D}$, получающуюся из D заменой строк этой матрицы на столбцы: $\mathbf{e}_j' = D_{ij}\mathbf{e}_i$, если $x_i' = D_{ij}x_j$.

Симморфная пространственная группа симметрии дисконтинуума $\Phi_{\text{сим}}$ объединяет в себе преобразования T- и G-групп, а также допускает комбинированные преобразования. Если произвести последовательно друг за другом «поворот» дисконтинуума $[D|0]$, а затем параллельный перенос $[E|\tau]$, то комбинированному преобразованию — движению — будет отвечать оператор $[D|\tau] = [E|\tau][D|0]$, описывающий линейные неоднородные преобразования координат трехмерного пространства:

$$\begin{aligned} x_1' &= D_{11}x_1 + D_{12}x_2 + D_{13}x_3 + \tau_1 \\ x_2' &= D_{21}x_1 + D_{22}x_2 + D_{23}x_3 + \tau_2 \\ x_3' &= D_{31}x_1 + D_{32}x_2 + D_{33}x_3 + \tau_3 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}.$$

В операторной форме при замене столбцов координат векторами система линейных неоднородных уравнений запишется так:

$$\mathbf{r}' = [D|\tau]\mathbf{r} = D\mathbf{r} + \tau. \tag{13}$$

Произведению (последовательному выполнению) двух движений будет отвечать произведение операторов:

$$[D_j|\tau_i][D_l|\tau_k] = [D_jD_l|D_j\tau_k + \tau_i]. \tag{14}$$

В справедливости этой формулы можно убедиться геометрически, сделав чертеж решетки и наблюдая за перемещениями любой отмеченной точки: при умножении операторов движений обе части правого сомножителя («поворотная» и трансляционная) умножаются на матрицу D_j левого оператора и к трансляционной части произведения добавляется вектор τ_i левого сомножителя (порядок следования матриц D_jD_l существен!).

Чтобы убедиться в том, что пространственная группа $\Phi_{\text{сим}}$ образует искомое расширение группы T с помощью группы G, достаточно установить изоморфизм наших конкретных групп с абстрактными группами предыдущего параграфа. Легко обнаружить, что все преобразования

(операторы) группы $\Phi_{\text{сим}}$

$$\Phi_{\text{сим}} = \{[D_1|\tau_1], [D_2|\tau_1], \ldots, [D_s|\tau_2], [D_1|\tau_1], [D_2|\tau_2], \ldots, [D_s|\tau_2], \ldots, [D_1|\tau_m], [D_2|\tau_m], \ldots, [D_s|\tau_m], \ldots\}$$

получаются по схеме (4) путем попарного комбинирования ($[E|\tau_i][D_j|0] = [D_j|\tau_i]$) операторов двух групп:

$$T = \{[E|\tau_1], [E|\tau_2], \ldots, [E|\tau_m], \ldots\} \text{ и } G = \{[D_1|0], [D_2|0] \ldots, [D_s|0]\},$$

изоморфных соответствующим трансляционным и кристаллографическим группам; при этом обе генерирующие группы T и G имеют единственный общий элемент — оператор отождествления $[E|0]$, получающийся (для определенности) при $\tau_1 = 0, D_1 = E$. Группы $\Phi_{\text{сим}}$, T и G можно назвать конкретными *геометрическими реализациями* групп предыдущего параграфа G, H и G^*. Их изоморфизм устанавливается соответствием элементов

$$[D_j|\tau_i] = [E|\tau_i][D_j|0] \leftrightarrow h_i g_j \in G, [E|\tau_i] \leftrightarrow h_i \in H, [D_j|0] \leftrightarrow g_j \in G^*$$

и законов умножения (14) и (7). Записывая (14) по схеме (7)

$$([E|\tau_i][D_j|0]) \circledS ([E|\tau_k][D_l|0]) = [E|\tau_i][E|\tau_k]^{[D_j|0]}[D_j|0][D_l|0]$$

и вычисляя автоморфизмы $[E|\tau_k]^{[D_j|0]} = [D_j|0][E|\tau_k][D_j^{-1}|0] = [E|D_j\tau_k]$, находим, с одной стороны, что группа T образует инвариантную подгруппу пространственной группы $\Phi_{\text{сим}}$ (при любых $[D_j|\tau_i] \in \Phi$ и $[E|\tau_k] \in T$ группа T преобразуется в себя: $[D_j|\tau_i]T[D_j^{-1}|D_j^{-1}\tau_i] = T$, $[E|D_j\tau_k] \in T$) и, с другой стороны, что закон (14) действительно соответствует полупрямому умножению операторов движений (подставляя $[E|D_j\tau_i]^{[D_j|0]} = [E|D_j\tau_k]$ в правую часть уравнения и перемножая операторы по правилам умножения в группах T и G, получаем тождественно $[E|D\tau_k + \tau_i][D_jD_l|0] = [D_jD_l|D_j\tau_k + \tau_i]$). Итак, мы установили, что *симморфные пространственные группы суть полупрямые произведения групп трансляций T на точечные группы автоморфизмов решетки G* (или их подгруппы): $\Phi_{\text{сим}} = T \circledS G$.

Учитывая, что каждую метрическую систему (решетку T) сохраняют, помимо старшей группы, также и подгруппы G (ср. табл. 20) и что в семи случаях произведение $T \circledS G$ зависит от взаимной ориентации элементов симметрии сомножителей*, методом полупрямого умножения

*Различающиеся ориентировкой пары групп: $Cmm2$, $Amm2$; $P\bar{4}2m$, $P\bar{4}m2$; $I\bar{4}2m$, $I\bar{4}m2$; $P312$, $P321$; $P3m1$, $P31m$; $P\bar{3}1m$, $P\bar{3}m1$; $P\bar{6}m2$, $P\bar{6}2m$.

14 трансляционных групп T (ср. рис. 191) и 32 кристаллографических групп G (ср. рис. 69) получаем 73 симморфные группы $\Phi_{\text{сим}} = T \circledS G$, т. е. уже известный нам по табл. 12 результат.

В соответствии с *основной теоремой теории расширений* (см. стр. 259 и рис. 204) само существование пространственной группы $\Phi_{\text{сим}} = T \circledS G$ есть простое следствие соотношений изоморфизма и гомоморфизма между группами

$$\Phi_{\text{сим}} = \{[D_j|\tau_i]\}$$

$$\Phi/T = \{T\,[D_j|0]\} \leftrightarrow \{[D_j|0]\} = G.$$

Осуществив для примера разложение симморфной группы $P2/m$ на смежные классы по подгруппе трансляций $P = \{[E|\tau_i]\}$,

$$P2/m = \{[E|\tau_i]\}[D(1)|0] \cup \{[E|\tau_i]\}[D(2)|0] \cup \{[E|\tau_i]\}[D(\bar{1})|0] \cup \cup \{[E|\tau_i]\}[D(m)|0],$$

или в более простых обозначениях* $P2/m = P1 + P2 + P\bar{1} + Pm$, найдем, что таблицы умножения смежных классов (элементов фактор-группы Φ/T) и операций $2/m$ имеют одинаковую структуру:

$P2/m/P$	$P1$	$P2$	$P\bar{1}$	Pm
$P1$	$P1$	$P2$	$P\bar{1}$	Pm
$P2$	$P2$	$P1$	Pm	$P\bar{1}$
$P\bar{1}$	$P\bar{1}$	Pm	$P1$	$P2$
Pm	Pm	$P\bar{1}$	$P2$	$P1$

$\leftrightarrow$

$2/m$	1	2	$\bar{1}$	m
1	1	2	$\bar{1}$	m
2	2	1	m	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	m	1	2
m	m	$\bar{1}$	2	1.

Очевиден также и гомоморфизм $P2/m \to 2/m$, при котором бесконечные семейства трансляционно-эквивалентных («параллельных») элементов симметрии 2, m, $\bar{1}$, составляющие структуру пространственной группы $P2/m$, отображаются на элементы 2, m, $\bar{1}$ фиксированной точечной группы $2/m$, выбранной за порождающую (все трансляции $\tau \in P$ отображаются при этом на единицу $1 \in 2/m$).

Несимморфные группы $\Phi_{\text{нес}}$ находим по модели симморфных групп $\Phi_{\text{сим}} = T \circledS G$, заменяя точечную группу G изоморфной ей группой по

*Операторы $[D(g)|0]$ обозначены здесь просто через g, смежные классы $\{[E|\tau_i]\}[D(g)|0]$ — через Pg. Напоминаем закон умножения смежных классов (3) $P2 \cdot P\bar{1} = P2\bar{1} = Pm$ и т. д.

модулю G^T. Группы $\Phi_{\text{нес}}$ состоят из систем элементов (операторов)

$$\Phi_{\text{нес}} = \{[D_1|\alpha_1+\tau_1],[D_2|\alpha_2+\tau_1],\ldots,[D_s|\alpha_s+\tau_1],\ldots,[D_1|\alpha_1+\tau_m],\\ [D_2|\alpha_2+\tau_m],\ldots,[D_s|\alpha_s+\tau_m],\ldots\},$$

полученных попарным комбинированием ($[E|\tau_i][D_j|\alpha_j] = [D_j|\alpha_j+\tau_i]$) элементов двух групп:

$$T = \{[E|\tau_1],[E|\tau_2],\ldots,[E|\tau_m],\ldots\} \text{ и } G^T = \{[D_1|\alpha_1],[D_2|\alpha_2\},\ldots,[D_s|\alpha_s]\}.$$

Закон умножения операторов движений в несимморфных группах является обобщением закона (14):

$$[D_j|\alpha_j+\tau_i][D_l|\alpha_l+\tau_k] = [D_jD_l|D_j\alpha_l+D_j\tau_k+\alpha_j+\tau_i]. \qquad (15)$$

Относительно этого закона множество $\Phi_{\text{нес}}$ образует группу. Единицы $[D_1|\alpha_1+\tau_1] \equiv [E|0]$ и обратные элементы $[D_j|\alpha_j+\tau_i]^{-1} = [D_j^{-1}| - D_j^{-1}\alpha_j - D_j^{-1}\tau_i]$ в группах $\Phi_{\text{нес}}$ определены. *Инвариантность* подгруппы $T \subset \Phi_{\text{нес}}$ следует из преобразований автоморфизма $[D_j|\alpha_j + \tau_i][E|\tau_k][D_j^{-1}| - D_j^{-1}\alpha_j - D_j^{-1}\tau_j] = [E|D_j\tau_k]$. Изоморфизм групп G^T и G обеспечивается сопоставлением элементов*

$$[D_1|0] \leftrightarrow [D_1|0],\ldots,[D_i|0] \leftrightarrow [D_i|0],[D_{i+1}|\alpha_{i+1}] = [E|\alpha_{i+1}][D_{i+1}|0] \leftrightarrow\\ \leftrightarrow [D_{i+1}|0],\ldots[D_s|\alpha_s] = [E|\alpha_s][D_s|0] \leftrightarrow [D_s|0]$$

и введением в множестве G^T закона *приведенного умножения*

$$[D_j|\alpha_j][D_l|\alpha_l] = [E|\tau_{jl,n}][D_n|\alpha_n] \equiv [D_n|\alpha_n](\text{mod}\,[E|\tau_{jl,n}]), \qquad (16)$$

где величины $[E|\tau_{jl,n}]$ образуют *вторую систему модулей сравнения*, а операторы $[E|\alpha_{i+1}]$, ..., $[E|\alpha_s] \notin T$.

Записывая операторы групп G^T в виде $[E|\alpha_j][D_j|0]$ и сопоставляя их с элементами $g_j^H = \alpha_j g_j$ групп G^H предыдущего параграфа, находим, что (16) соответствует (96). Подобным же образом из сопоставлений элементов $[D_j|\alpha_j+\tau_i] = [E|\tau_i][D_j|\alpha_j] \leftrightarrow h_i(\alpha_j g_j)$ следует, что (15) соответ-

*Первые i элементов образуют общую подгруппу $G_1^* = \{[D_1|0],[D_2|0],\ldots,[D_i|0]\}$ групп G^T и G. Элементы $[E|\alpha_{i+1}]$ и следующие образуют первую систему модулей сравнения: $[D_j|\alpha_j] \equiv [D_j|0](\text{mod}\,[E|\alpha_j])$.

ствует (12)*, т. е. что $\Phi_{\text{нес}}$-группа образует геометрическую реализацию абстрактной группы $G_{\text{нес}} = H \bigcirc G^H$. Конкретизация треугольника (см. рис. 204) в виде

$$\Phi_{\text{нес}} = \{[D_j|\alpha_j+\tau_s]\}$$

$$\Phi/T = \{T\,[D_j|\alpha_j]\} \leftrightarrow \{[D_j|\alpha_j]\} = G^T \leftrightarrow G=\{[D_j|0]\}.$$

показывает, что *несимморфные пространственные группы суть условно-полупрямые произведения* $\Phi_{\text{нес}} = T \bigcirc G^T$.

Несимморфные группы $\Phi_{\text{нес}} = T \bigcirc G^T$, выводимые из данной симморфной $\Phi_{\text{сим}} = T \circledS G$ заменой группы G группами по модулю G^T, образуют серию родственных групп, в которой фактор-группы изоморфны одной и той же кристаллографической группе G. Выбрав для рассмотрения серию $2/m$, запишем стандартные разложения несимморфных групп $P2_1/m$, $P2/b$ и $P2_1/b$ в ряд по смежным классам:

$$P2_1/m = P1 + P2_1 + P\bar{1} + Pm,$$
$$P2/b = P1 + P2 + P\bar{1} + Pb,$$
$$P2_1/b = P1 + P2_1 + P\bar{1} + Pb.$$

Таблицы умножения фактор-групп этих групп по подгруппе трансляций, т. е. групп $P2_1/m/P$, $P2/b/P$, $P2_1/b/P$ (не смешивайте см. классы $P2_1$ и т. д. с пр.гр'.)

	$P1$	$P2_1$	$P\bar{1}$	Pm
$P1$	$P1$	$P2_1$	$P\bar{1}$	Pm
$P2_1$	$P2_1$	$P1$	Pm	$P\bar{1}$
$P\bar{1}$	$P\bar{1}$	Pm	$P1$	$P2_1$
Pm	Pm	$P\bar{1}$	$P2_1$	$P1$

↔

	$P1$	$P2$	$P\bar{1}$	Pb
$P1$	$P1$	$P2$	$P\bar{1}$	Pb
$P2$	$P2$	$P1$	Pb	$P\bar{1}$
$P\bar{1}$	$P\bar{1}$	Pb	$P1$	$P2$
Pb	Pb	$P\bar{1}$	$P2$	$P1$

↔

	$P1$	$P2_1$	$P\bar{1}$	Pb
$P1$	$P1$	$P2_1$	$P\bar{1}$	Pb
$P2_1$	$P2_1$	$P1$	Pb	$P\bar{1}$
$P\bar{1}$	$P\bar{1}$	Pb	$P1$	$P2_1$
Pb	Pb	$P\bar{1}$	$P2_1$	$P1$

*Ср. примечание к стр. 261. Изоморфизм (16) ↔ (9б), (15) ↔ (12) обеспечивается жестким порядком частей бинарных элементов $\alpha_i g_i \leftrightarrow [E|\alpha_i][D_s|0]$ и полупрямым умножением. Легко проверить, что квадрат скользящего отражения $c^2 = \left[1|\frac{b+c}{2}\right][m|0] \circledS \left[1|\frac{b+c}{2}\right][m|0] = \left[1|\frac{b+c}{2}\right]\left[1|\frac{b+c}{2}\right]^{[m|0]}[m^2|0] = \left[1|\frac{b+c}{2}\right]\left[1|\frac{-b+c}{2}\right][1|0] = [1|c]$, тогда как $c^2 = \left[1|\frac{b+c}{2}\right][m|0] \otimes \left[1|\frac{b+c}{2}\right][m|0] = \left[1|\frac{b+c}{2}\right][1|0]$ в противоречии с формулой (15), в группе $P2_1/c$ (см. рис. IV (цв. вклейка)

действительно имеют ту же структуру, что и таблица умножения группы $2/m$. Для доказательства заметим, что в стандартных разложениях Φ-групп операциям g_i — представителям смежных классов Tg_i — соответствуют элементы симметрии, принадлежащие фиксированным элементарным ячейкам. У симморфной группы $P2/m$ в стандартный набор входят элементы симметрии одной из точечных групп $2/m$, пересекающиеся, например, в левом верхнем углу элементарной ячейки, принятом за начало. Для несимморфных групп $P2_1/m$, $P2/b$, $P2_1/b$ эти элементы, не пересекающиеся вообще в одной точке, удобно выбирать как можно ближе к началу (проекции названных групп совпадут с проекциями изоморфных им цветных групп, если на рис. 213 все элементы симметрии изобразить одним цветом). Фиксировав таким образом выбор представителей g_j^T в разложениях несимморфных групп, сопоставим им операторы $[D_j|\alpha_j] = [E|\alpha_j][D_j|0]$. Ортогональные части $[D_j|0]$ этих «базисных» операторов выберем так, чтобы они совпадали с операторами $[D_j|0]$ стандартного набора симморфной группы $P2/m$. Иными словами, мы договариваемся и в несимморфных группах выполнять ортогональные преобразования $[D_j|0]$ с помощью действительных или воображаемых плоскостей и осей симметрии, занимающих в несимморфной ячейке такое же положение, как и у симморфной группы, дополняя их затем преобразованиями $[E|\alpha_j]$. Заменяя еще для сокращения письма символы D_j операторов $[D_j|\alpha_j]$ на g_j, запишем смежные классы $Pg_j^T = \{[E|\tau_i]\}[D_j|\alpha_j]$ интересующих нас разложений в явном операторном виде:

$$P1 = P[1|0],\ P2_1 = P\left[2\middle|\frac{c}{2}\right],\qquad P\bar{1} = P[\bar{1}|0],\ Pm = P\left[m\middle|\frac{c}{2}\right]\quad \text{для } P2_1/m,$$

$$P1 = P[1|0],\ P2 = P\left[2\middle|\frac{b}{2}\right],\qquad P\bar{1} = P[\bar{1}|0],\ Pb = P\left[m\middle|\frac{b}{2}\right]\quad \text{для } P2/b,$$

$$P1 = P[1|0],\ P2_1 = P\left[2\middle|\frac{b+c}{2}\right],\ P\bar{1} = P[\bar{1}|0],\ Pb = P\left[m\middle|\frac{b+c}{2}\right]\ \text{для } P2_1/b,$$

где через a, b, c обозначены базисные векторы трансляционной группы P. Явный вид базисных операторов $[D_j|\alpha_j] = [E|\alpha_j][D_j|0]$ фиксирует определенный выбор модулей сравнения $[E|\alpha_j]$ первой системы. Используя (15), (16) и перемножая смежные классы по закону (3)

$$P[D_j|\alpha_j]\cdot P[D_l|\alpha_l] = P[D_j|\alpha_j][D_l|\alpha_l] = P[D_jD_l|D_j\alpha_l+\alpha_j] = \\ = P[E|\tau_{jl,n}][D_n|\alpha_n], \qquad (17)$$

убеждаемся в правильности нахождения таблиц умножения фактор-групп и одновременно находим модули сравнения $[E|\tau_{jl,n}]$ второй системы. Например, для произведений $P2_1 \cdot Pb$ смежных классов — элементов фактор-группы $P2_1/b/P$ — найдем

$$P2_1 \cdot Pb = P\left[2\middle|\frac{b+c}{2}\right] \cdot P\left[m\middle|\frac{b+c}{2}\right] = P\left[2m\middle|\hat{2}\cdot\left(\frac{b+c}{2}\right)+\frac{b+c}{2}\right] =$$

$$= P\left[\bar{1}\middle|\frac{-b+c}{2}+\frac{b+c}{2}\right] = P[\bar{1}|c] = P[\bar{1}|c][\bar{1}|0] = P\bar{1}$$

и т. д. Здесь $\hat{2}\cdot\left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{-b+c}{2}$, так как при операции поворота на 180° вокруг оси c вектор c сохраняется, а вектор b изменяется на противоположный. Произведение $\hat{2}_1 \cdot b = [\bar{1}|c]$ не принадлежит базисному набору операторов — представителей смежных классов $\{1, 2_1, \bar{1}, b\} = \left\{[1|0],\ \left[2\middle|\frac{b+c}{2}\right][\bar{1}|0],\ \left[m\middle|\frac{b+c}{2}\right]\right\}$, но приводится к нему по (16) с помощью модуля сравнения $[1|c] : [\bar{1}|c] = [1|c][\bar{1}|0] \equiv [\bar{1}|0](\mathrm{mod}\,[1|c])$. Следовательно, в нашем случае $[E|\tau_{jl,n}] = [E|\tau_{2_1b,\bar{1}}) = [1|c]$. Подобным же образом находятся и остальные модули сравнения второй системы. Мы выписываем в отдельной таблице трансляционные части модулей сравнения $[E|\tau_{jl,n}]$, находим по (16) с их помощью таблицу умножения группы по модулю $2_1/b = \{1, 2_1, \bar{1}, b\}$ и убеждаемся в том, что группа $2_1/b$ изоморфна группе $2/m$:

$\tau_{jl,n}$	1	2_1	$\bar{1}$	b
1	0	0	0	0
2_1	0	c	0	c
$\bar{1}$	0	$-(b+c)$	0	$-(b+c)$
b	0	b	0	b

,

$2_1/b$	1	2_1	$\bar{1}$	b
1	1	2_1	$\bar{1}$	b
2_1	2_1	1	b	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	b	1	2_1
b	b	$\bar{1}$	2_1	1

$\leftrightarrow$

$2/m$	1	2	$\bar{1}$	m
1	1	2	$\bar{1}$	m
2	2	1	m	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	m	1	2
m	m	$\bar{1}$	2	1.

Как видим, нахождение модулей сравнения для известных групп не доставляет большого труда. Обратная задача построения несимморфной группы $\Phi_{\text{нес}}$ по заданным генерирующим группам T и G требует несложного перебора вариантов. Фиксируя, например, в $G = 2/m = \{1, \mathbf{2}, \bar{1}, m\}$ сохраняющуюся подгруппу $G_1^* = \{1, \bar{1}\}$, находим, что с остальными операторами $\mathbf{2}$ и m могут быть связаны лишь такие модули $[E|\alpha]$, которые при возведении в степень, равную порядку элемента $[D|0]$, дают минимальные трансляции в группе T. Этому условию удовлетворяют лишь три следующие неэквивалентные комбина-

ции: $\left(\left[2\middle|\frac{c}{2}\right],\left[m\middle|\frac{c}{2}\right]\right),\left(\left[2\middle|\frac{b}{2}\right],\left[m\middle|\frac{b}{2}\right]\right),\left(\left[2\middle|\frac{b+c}{2}\right],\left[m\middle|\frac{b+c}{2}\right]\right)$, реализующиеся, соответственно, в группах $P\mathbf{2}_1/m$, $P\mathbf{2}/b$ и $P\mathbf{2}_1/b$.

Явный вид операторов $[D_j|\alpha_j]$ позволяет фиксировать базисные наборы групп по модулю $\mathbf{2}_1/m = \{1, \mathbf{2}_1, \bar{1}, m\}$, $2/b = \{1, 2, \bar{1}, b\}$ и $2_1/m = \{1, 2_1, \bar{1}, b\}$ (см. рис. 213), подобрав из условия изоморфизма этих групп с группой $2/m$, соответствующие модули сравнения $[E|\tau_{jl,n}]$. Аналогичными методами могут быть найдены все 157 несимморфных пространственных групп, распределяющихся (см. табл. 12) по 60 сериям* (230 групп, распределяются по 73 сериям).

Группы одной серии тесно связаны, но (за исключением 11 энантиоморфных пар) неизоморфны между собой. Это следует из того, что в законе умножения (15), записанном по схеме (12), появляются факторы — модули сравнения второй системы $[E|\tau_{jl,n}]$:

$$([E|\tau_i]\{D_j|\alpha_j\}) \bigcirc ([E|\tau_k]\{D_l|\alpha_l\}) = [E|\tau_i]\{E|\tau_k\}^{\{D_j|\alpha_j\}}[E|\tau_{jl,n}]\{D_n|\alpha_n\}.$$

Для симморфных групп (при $\alpha_j = \alpha_l = \alpha_n = 0$) все величины $[E|\tau_{jl,n}] \equiv [E|0]$ (ср. стр. 259); для несимморфных групп, составляющих серию, не все факторы, появляющиеся перед соответствующими элементами $[D_n|\alpha_n]$, обращаются в $[E|0]$; для различных групп серии они различны.

Определяя по-новому операцию приведенного умножения *одноименных* операторов

$$[D_l|\alpha_l^{(i)}][D_l|\alpha_l^{(j)}] = [D_l|\alpha_l^{(i)} + \alpha_l^{(j)}] = [E|\tau_l^{(ij,k)}][D_l|\alpha_l^{(k)}] \equiv$$
$$\equiv [D_l|\alpha_l^{(k)}](\mathrm{mod}\,[E|\tau_l^{(ij,k)}]),$$

любым двум несимморфным группам $\Phi_{\text{нес}}^{(i)}$, $\Phi_{\text{нес}}^{(j)}$ серии поставим в соответствие группу $\Phi_{\text{нес}}^{(k)}$ той же серии: $\Phi_{\text{нес}}^{(k)} = \Phi_{\text{нес}}^{(i)} \cdot \Phi_{\text{нес}}^{(j)}$. Легко убедиться в том, что введенная операция ассоциативна; обратные операторы определяются соотношением $[D_l\alpha_l]^{-1} = [D_l|-\alpha_l]$; единичными операторами являются операторы $[D_l|0]$ симморфной группы $\Phi_{\text{сим}}^{(1)}$, возглавляющей серию: $[D_l|0][D_l|\alpha_l] = [D_l|\alpha_i]$. Следовательно, сами группы $\Phi_{\text{сим}}^{(1)} = T \circledS G$, $\Phi_{\text{нес}}^{(2)} = T \bigcirc G^T$ и т. д. могут быть приняты за элементы некоторых групп по модулю, изоморфных группам $G \leftrightarrow G^T$. Например,

*Помимо описанного метода подбора модулей сравнения, несимморфные группы можно вывести с помощью алгоритма Цассенхауса (1948), требующего решения так называемых конгруэнций Фробениуса, или методами теории когомологий — специального раздела теории групп (см. Ашер, Яннер, 1965—1969).

	$P2/m$	$P2_1/m$	$P2/b$	$P2_1/b$	
$P2/m$	$P2/m$	$P2_1/m$	$P2/b$	$P2_1/b$	
$P2_1/m$	$P2_1/m$	$P2/m$	$P2_1/b$	$P2/b$	$\leftrightarrow 2/m,$
$P2/b$	$P2/b$	$P2_1/b$	$P2/m$	$P2_1/m$	
$P2_1/b$	$P2_1/b$	$P2/b$	$P2_1/m$	$P2/m$	

	$Pmm2$	$Pmc2_1$	$Pma2$	$Pmn2_1$	
$Pmm2$	$Pmm2$	$Pmc2_1$	$Pma2$	$Pmn2_1$	
$Pmc2_1$	$Pmc2_1$	$Pmm2$	$Pmn2_1$	$Pma2$	$\leftrightarrow mm2.$
$Pma2$	$Pma2$	$Pmn2_1$	$Pmm2$	$Pmc2_1$	
$Pmn2_1$	$Pmn2_1$	$Pma2$	$Pmc2_1$	$Pmm2$	

Одномерные пространственные группы симметрии бордюров, лент и стержней и двумерные пространственные группы сетчатых орнаментов и слоев можно также рассматривать как расширения соответствующих трансляционных групп T с помощью точечных групп или изоморфных им групп по модулю G^T. Так как символы симметрии содержат всю необходимую информацию, конкретизируя вид групп T, G и G^T, мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе.

Глава 11

Группы обобщенной симметрии. Антисимметрия и цветная симметрия

Точечные кристаллографические группы антисимметрии как расширения классических кристаллографических групп с помощью групп $1', 2', m', \bar{1}', 4'(\mathrm{mod}\ 2), \bar{4}'(\mathrm{mod}\ 2)$

Все типы групп обобщенной симметрии мы будем рассматривать в этой главе как расширения соответствующих классических групп с помощью некоторых новых групп. К таким новым группам принадлежат указанные в заголовке группы антисимметрии. С идеей антисимметрии, выдвинутой независимо Хеешем (1929) и Шубниковым (1945), мы познакомимся на следующем примере.

Пусть нам дан кусок кожи, окрашенный с одной стороны в черный и с другой стороны в белый цвет. Требуется изготовить из такой черно-белой кожи перчатку с отворотом. Ясно, что эта задача имеет четыре решения (рис. 205). Можно изготовить: 1) правую белую перчатку с черным отворотом, 2) левую белую с черным отворотом, 3) правую черную с белым отворотом и 4) левую черную с белым отворотом. Отметим, что правая перчатка при желании может быть вывернута наизнанку и надета на левую руку, а левая перчатка таким же путем может быть надета на правую руку. Следовательно, каждая перчатка является и правой, и левой, и черной, и белой. Отсюда возникает вполне естественная мысль считать симметрично равными не только правые и левые перчатки одного цвета, но и равными в обобщенном смысле (иначе — антиравными) перчатки различных цветов.

Обозначая буквами П, Л правые и левые перчатки, а знаками «плюс», «минус» их белый или черный (с лица) цвет, попытаемся найти операции симметрии или антисимметрии, преобразующие перчатки друг в друга. Несложный анализ показывает, что преобразования $\overset{+}{\text{Л}} \to \overset{+}{\text{П}}$, $\overset{+}{\text{Л}} \to \overset{-}{\text{П}}$ могут быть осуществлены отражением в воображаемой

вертикальной плоскости m, проходящей на рис. 205 между перчатками, или инверсией $\bar{1}$ в произвольной точке (при этом преобразованная перчатка займет иное положение, не показанное на чертеже).

Рис. 205. Четыре антисимметричные перчатки: правая белая ($\overset{+}{\text{П}}$), левая белая ($\overset{+}{\text{Л}}$), правая черная ($\overset{-}{\text{П}}$), левая черная ($\overset{-}{\text{Л}}$). Перчатки одного цвета преобразуются друг в друга с помощью операций симметрии, перчатки различного цвета — с помощью операции антисимметрии

Преобразования $\overset{+}{\text{Л}} \to \overset{-}{\text{Л}}$, $\overset{+}{\text{П}} \to \overset{-}{\text{П}}$ могут быть осуществлены операцией перекрашивания с сохранением перчаток на месте; эту новую операцию мы будем называть антиотождествлением и обозначать символом $1'$. Наконец, преобразования $\overset{+}{\text{Л}} \to \overset{-}{\text{П}}$, $\overset{-}{\text{Л}} \to \overset{+}{\text{П}}$ могут быть осуществлены комбинированными (последовательно осуществляемыми) операциями отражения в вертикальной плоскости и перекрашивания или инверсии в произвольной точке и перекрашивания; эти новые операции мы будем называть, соответственно, *антиотражением* и *антиинверсией* и обозначать $m' = m1' = 1'm$ и $\bar{1}' = \bar{1}1' = 1'\bar{1}$; отвечающие этим операциям элементы симметрии будем называть *плоскостью и центром антисимметрии* и обозначать теми же символами m' и $\bar{1}'$.

На рис. 206 изображены фигуры, составленные из асимметричных тетраэдров, обращенных к наблюдателю своими трехгранными вершинами или основанием. Если рассматривать белый и черный цвет фигур как дополнительное внегеометрическое свойство, например как положительный и отрицательный заряд или как положительный и отрицательный знак некоторого физического оператора (например, оператора магнитного момента), то эти материальные фигуры будут служить представителями («материальными инвариантами») указанных в заголовке параграфа циклических групп антисимметрии, т. е. групп, порождаемых степенями одной операции.

Группа $1' = \{1, 1'\}$ второго порядка порождается степенями операции антиотождествления $1'$. Определяющее уравнение группы, следовательно, записывается в виде $(1')^2 = 1$. Все другие степени операции $1'$ не отличимы по результату от двух, записанных выше в фигурных скобках. Так как группа содержит операцию антиотождествления, изображающая

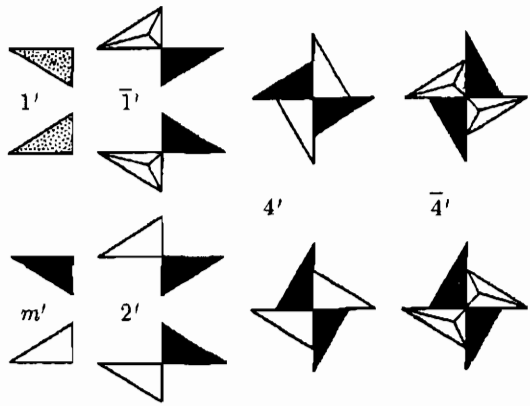


Рис. 206. Геометрическая реализация фигурами из асимметричных тетраэдров групп антисимметрии $1'$, m', $2'$, $\bar{1}'$, $4'$, $\bar{4}'$, с помощью которых производится расширение классических кристаллографических групп. Группе антиотождествления $1'$ сопоставляются нейтральные по цвету (серые) тетраэдры, остальным группам — фигуры из черных и белых тетраэдров. Операциям антисимметрии отвечают геометрические преобразования, сопровождающиеся изменением цвета (перекрашиванием) тетраэдров. Тетраэдры обращены к наблюдателю своими трехгранными вершинами или основаниями. Для построения расширений вместо групп $4'$ и $\bar{4}'$ достаточно взять группы по модулю $4'(\mathrm{mod}\ 2)$, $\bar{4}'(\mathrm{mod}\ 2)$ (см. пояснения в тексте)

ее фигура должна быть одновременно и черной, и белой (или физически нейтральной); по этой причине реализующие группу правые и левые тетраэдры окрашены в условно-нейтральный (серый) цвет.

Группы $m' = \{1, m'\}$, $\mathbf{2}' = \{1, \mathbf{2}'\}$ и $\bar{1}' = \{1, \bar{1}'\}$ порождаются степенями операций отражения в плоскости антисимметрии ($(m')^2 = 1$), поворота на 180° вокруг оси антисимметрии ($(2')^2 = 1$) и инверсии в центре антисимметрии ($(\bar{1}')^2 = 1$). Все эти группы абстрактно изоморфны группе $1' = \{1, 1'\}$, но реализующие их фигуры физически различаются по свойствам. Читатель сам сообразит, где на рис. 206 следует провести соответствующие элементы антисимметрии.

Группы по модулю $4'(\mathrm{mod}\,\mathbf{2}) = \{1, 4'\}$ и $\bar{4}'(\mathrm{mod}\,\mathbf{2}) = \{1, \bar{4}'\}$ порождаются степенями операций поворота на 90° вокруг простых и зеркальных (инверсионных) осей антисимметрии. Эти группы изоморфны группам $4\ (\mathrm{mod}\ 2) = \{1, 4\}$ и $\bar{4}\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{2}) = \{1, \bar{4}\}$ при соответствии элементов $4' \leftrightarrow 4$, $\bar{4}' \leftrightarrow \bar{4}$ (см. стр. 263).

Все другие кристаллографические группы антисимметрии получаются расширением классических кристаллографических групп с помощью описанных выше групп (см. табл. 15).

32 нейтральные группы $G1'$ получим, присоединяя к генераторам кристаллографических групп операцию антиотождествления, или, что то же самое, «умножая» группу $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ на группу $1' = \{1, 1'\}$. Умножение на операцию 1 сохранит все операции g_i; умножение на операцию $1'$ приведет к образованию комбинированных операций $g_i' = g_i 1' = 1' g_i$, которые мы называем *антиоперациями*. Таким образом, порядок расширенной группы $G1'$ будет вдвое больше порядка исходной кристаллографической группы G, выступающей сомножителем в прямом произведении $G1' = G \otimes 1'$,

$$G1' = \{g_1, g_2, \ldots, g_n, g_1, g_2, \ldots, g_n\} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \otimes \{1, 1'\}, (g_1 = 1,\ g_1' = 1').$$

58 двуцветных (черно-белых) групп G', не содержащих операции антиотождествления $1'$, получим, присоединяя к генераторам кристаллографических подгрупп $G^* \subset G$ индекса 2 операции $\bar{1}', 2', m', 4', \bar{4}'$, или, что то же самое, умножая все операции групп G^* последовательно на операции групп антисимметрии $\bar{1}', 2', m', 4'(\mathrm{mod}\ \mathbf{2}), \bar{4}'(\mathrm{mod}\ \mathbf{2})$. Поскольку эти группы второго порядка содержат поровну операций симметрии и антисимметрии, в обобщенной группе антисимметрии G' сохранится кристаллографическая подгруппа $G^* = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ индекса 2, выступающая сомножителем в прямом, полупрямом или условном произведении:

$$G' = \{g_1, g_2, \ldots, g_n, g_1 g', g_2 g', \ldots, g_n g'\} = \{g_1, g_2, \ldots g_n\} \cdot \{1, g'\},$$

где $g_1 = 1$ и через g' обозначена операция, с помощью которой производится расширение.

Легко видеть, что черно-белые группы G' изоморфны кристаллографическим группам G одинакового с ними порядка. Если для каждой группы G' указать изоморфную ей кристаллографическую группу G и классическую подгруппу G^* индекса 2, то получим так называемый двучленный символ группы антисимметрии $G' - G/G^*$. Этот символ содержит всю необходимую информацию о группе, позволяет осуществить ее разложение

$$G' = G^* \cup G^* g' \quad (g' \neq 1'),$$

т. е. сгруппировать по смежным классам операции симметрии и антисимметрии, построить двуцветные стереографические проекции групп антисимметрии и т. д.

В табл. 15 58 групп G' представлены в виде прямых ($\otimes$), полупрямых ($\circledS$) или условно-прямых ($\odot$) произведений $G' = G^* \cdot B$,

где B — группы, $\bar{1}', 2', m', 4'(\mathrm{mod}\,\mathbf{2}), \bar{4}'(\mathrm{mod}\,\mathbf{2})$. В прямых произведениях каждый сомножитель G^* и B выступает как группа автоморфизма для другого, иными словами, элементы симметрии группы G^* переводят элементы симметрии группы B в себя (и наоборот). В полупрямых произведениях такую роль играет только сомножитель B. Междуна-

Таблица 15. Точечные группы антисимметрии как расширения кристаллографических групп

Метрическая система	G	$G \otimes 1'$	$G' = G^* \cdot B;\ B = \bar{1}', 2', m'4'(\mathrm{mod}\,2), \bar{4}(\mathrm{mod}\,2)$
Моноклинная	1	$1'$	—
	$\bar{1}$	$11'$	$\bar{1}' = 1 \otimes \bar{1}'$
Триклинная	2	$21'$	$2' = 1 \otimes 2'$
	m	$m1'$	$m' = 1 \otimes m'$
	$2/m$	$2/m1'$	$2/m' = 2 \otimes \bar{1}', 2'/m = m \otimes \bar{1}', 2'/m' = \bar{1} \otimes m' = \bar{1} \otimes 2'$
Ромбическая	222	$2221'$	$2'2'2 = 2 \otimes 2'$
	$mm2$	$mm21'$	$mm'2' = m \otimes 2',\ m'm'2 = 2 \otimes m'$
	$\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}1'$	$\frac{2}{m'}\frac{2}{m'}\frac{2}{m'} = 222 \otimes \bar{1}', \frac{2'}{m}\frac{2'}{m}\frac{2}{m'} = mm2 \otimes \bar{1}', \frac{2'}{m'}\frac{2'}{m'}\frac{2}{m} = \frac{2}{m} \otimes 2' = \frac{2}{m} \otimes m'$
Тетрагональная	4	$\bar{4}1'$	$4' = 2 \odot 4'(\mathrm{mod}\,2)$
	$\bar{4}$	$\bar{4}1'$	$4' = 2 \odot \bar{4}'(\mathrm{mod}\,2)$
	422	$4221'$	$42'2' = 4 \circledS 2',\ 4'22' = 222 \circledS 2'$
	$4/m$	$4/m1'$	$4/m' = 4 \otimes \bar{1}',\ 4'/m' = \bar{4} \otimes 1',\ 4'/m = 2/m \odot 4'(\mathrm{mod}\,2)$
	$4mm$	$4mm1'$	$4m'm' = 4 \circledS m',\ 4'm'\bar{4}'2m' = 222 \circledS m',\ \bar{4}'2'm = 2mm \circledS m'$
	$\bar{4}2m$	$\bar{4}2m1'$	$\bar{4}2'm' = \bar{4} \circledS 2' = \bar{4} \circledS m',\ \bar{4}'2m' = 222 \circledS m',\ \bar{4}'2'm = 2mm \circledS 2'$
	$\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}1'$	$\frac{4}{m'}\frac{2}{m'}\frac{2}{m'} = 422 \otimes \bar{1}', \frac{4}{m'}\frac{2'}{m}\frac{2}{m} = 4mm \otimes \bar{1}', \frac{4'}{m'}\frac{2}{m'}\frac{2'}{m} = \bar{4}2m \otimes \bar{1}', \frac{4'}{m}\frac{2}{m}\frac{2'}{m'} = \frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m} \circledS 2', \frac{4}{m}\frac{2'}{m'}\frac{2'}{m'} = \frac{4}{m} \circledS 2' = \frac{4}{m} \circledS m'$
Тригональная	3	$31'$	—
	$\bar{3}$	$\bar{3}1'$	$\bar{3}' = 3 \otimes \bar{1}'$
	32	$321'$	$32' = 3 \circledS 2'$
	$3m$	$3m1'$	$3m' = 3 \circledS m'$
	$\bar{3}m$	$\bar{3}m1$	$\bar{3}'m' = 32 \otimes \bar{1}', \bar{3}'m = 3m \circledS 2' = 3m \otimes \bar{1}', \bar{3}m' = \bar{3} \circledS m'$

Таблица 15. (окончание)

Метрическая система	G	$G\otimes 1'$	$G'=G^*\cdot B;\ B=\bar{1}',2',m'4'(\mathrm{mod}\ 2),\bar{4}(\mathrm{mod}\ 2)$
Гексагональная	6	$61'$	$6'=3\otimes 2'$
	6	$\bar{6}1'$	$\bar{6}'=3\otimes m'$
	$\bar{6}m2$	$6m21'$	$\bar{6}'m'2=32\otimes m',\ \bar{6}m'2'=\bar{6}\,\textcircled{S}\,2'=6\,\textcircled{S}\,m',\ 6'm2'=3m\,\textcircled{S}\,2'=3m\otimes m'$
	622	$6221'$	$6'22'=32\otimes 2',\ 62'2'=6\,\textcircled{S}\,2'$
	$6/m$	$6/m1'$	$6/m'=6\otimes m'=6\otimes\bar{1}',\ 6'/m'=\bar{3}\otimes m',\ 6'/m=\bar{6}\otimes\bar{1}'$
	$6mm$	$6mm1'$	$6'mm'=3m\,\textcircled{S}\,m',\ 6m'm'=6\,\textcircled{S}\,m'$
	$\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}1'$	$\frac{6}{m'}\frac{2}{m'}\frac{2}{m'}=622\otimes\bar{1}',\ \frac{6}{m'}\frac{2'}{m}\frac{2'}{m}=6mm\otimes 1',\ \frac{6'}{m}\frac{2'}{m}\frac{2}{m'}=\bar{6}m2\otimes\bar{1}',\ \frac{6'}{m'}\frac{2}{m}\frac{2'}{m'}=\bar{3}m\,\textcircled{S}\,2',\ \bar{3}m\,\textcircled{S}\,m',\ \frac{6}{m}\frac{2'}{m'}\frac{2'}{m'}=\frac{6}{m}\,\textcircled{S}\,m'=\frac{6}{m}\,\textcircled{S}\,2'$
Кубическая	23	$231'$	—
	432	$4321'$	$4'32'=23\,\textcircled{S}\,2'$
	$\frac{2}{m}\bar{3}$	$\frac{2}{m}\bar{3}1'$	$\frac{2}{m'}\bar{3}'=23\otimes\bar{1}'$
	$\bar{4}3m$	$\bar{4}3m1'$	$\bar{4}'3m'=23\,\textcircled{S}\,m'$
	$\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$	$\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}1'$	$\frac{4}{m'}\bar{3}'\frac{2}{m'}=432\otimes\bar{1}',\ \frac{4'}{m'}\bar{3}'\frac{2'}{m}=\bar{4}3m\otimes 1',\ \frac{4'}{m}\bar{3}\frac{2'}{m'}=\frac{2}{m}\bar{3}\,\textcircled{S}\,2'=\frac{2}{m}\bar{3}\,\textcircled{S}\,m'$
Всего	32	32	58 (всего 122 группы антисимметрии, включая 32 классические)

родные символы групп G, изоморфных группам G', получаются из G' стиранием штрихов. На рис. I (цв. вклейка) представлены для примера двуцветные стереографические проекции элементов симметрии и эквивалентных систем асимметричных фигур для групп $4'mm'-4mm/2m1$, $\bar{4}2'm'-\bar{4}2m/\bar{4}11$, $\bar{4}'2m'-\bar{4}2m/221$, $\bar{4}'m2'-\bar{4}m2/2m1$. Во всех случаях группы G^* в двучленном символе G/G^* задаются в ориентировке группы G, т. е. на соответствующих позициях символа G^* ставятся единицы, если с соответствующими направлениями в группе G' совпадают оси или нормали к плоскостям антисимметрии. На проекциях групп элементы классической симметрии обозначены черным цветом, а элементы антисимметрии — красным; соответственно этой интерпретации операции антисимметрии отвечает некоторое геометрическое преобразование фигур и перекрашивание тетраэдров из черного в красный цвет (и наоборот).

Для читателя будет полезным упражнением построить по этому образцу двуцветные проекции остальных групп антисимметрии, используя стереографические проекции классических групп (см. рис. 69), выделяя на них черным цветом символы классических подгрупп G^* и закрашивая остальные элементы в красный цвет. Полностью двуцветные проекции и двучленные символы групп антисимметрии приведены в монографии «Шубниковские группы» (Копцик, 1966). Здесь же содержится теоретико-групповое описание этих групп в связи с их физическими приложениями.

Заметим, что группы антисимметрии, построенные в настоящем разделе, описывают свойства симметрии материальных двуцветных фигур (или объемлющих их трехмерных двуцветных пространств). Внегеометрическое качество, приписанное точкам этих пространств, абстрактно моделируется цветом или любой функцией, принимающей два значения. Точки общего положения окрашиваются при этом каждая в один цвет; точки частных положений — в два цвета в соответствии с симметрией положения. В другой интерпретации (ср. стр. 245) те же группы можно трактовать как группы симметрии $G^{1,2}_{3,0}$ неоднородных четырехмерных пространств, у которых внегеометрическая координата (верхний индекс в символе) принимает лишь два фиксированных значения $\pm x_4$. Для однородных четырехмерных пространств число точечных групп симметрии увеличивается с 58 $G^{1,2}_{3,0}$ до $G_{4,0}$ (см. литературу в конце главы и стр. 295).

Пространственные (шубниковские) группы антисимметрии $Ш$ как расширения классических (федоровских) групп Φ или как расширения трансляционных групп T

Пространственные группы антисимметрии находятся в таком же отношении к классическим федоровским группам, в каком находятся кристаллографические группы антисимметрии по отношению к точечным кристаллографическим группам. В шубниковских трехмерных группах мы встречаемся со всеми классическими операциями движений $\phi_i \in \Phi$ и дополнительно — с антиоперациями $ш_i \in Ш$, которые определяются как комбинированные преобразования

$$ш_i = \phi_i 1' = 1'\phi_i.$$

Выпишем все эти операции в явном виде:

Операции движений					Операции антидвижений				
1	2	3	4	6	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$	$6'$
$\bar{1}$	m	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}'$	m'	$\bar{3}'$	$\bar{4}'$	$\bar{6}'$
τ	2_1	3_1	4_1	6_1	τ'	$2_1'$	$3_1'$	$4_1'$	$6_1'$
	a	3_2	4_2	6_2		a'	$3_2'$	$4_2'$	$6_2'$
	b		4_3	6_3		b'		$4_3'$	$6_3'$
	c			6_4		c'			$6_4'$
	d			6_5		d'			$6_5'$.
	n					n'			

Напомним, что в табличках операций цифрами с нижними индексами n_j мы обозначаем винтовые повороты вокруг винтовых осей, буквами a, b, c, d, n — отражения с переносами в плоскостях скользящего отражения вдоль указанных направлений (осей a, b, c или их диагоналей), буквой τ — произвольный вектор из подгруппы параллельных переносов $\tau \in T, 3' = 31' = 1'3$.

Соответственно расширению списка операций пространственные группы антисимметрии можно рассматривать как расширения федоровских групп с помощью циклических групп второго порядка, порождаемых степенями операций $1', \bar{1}', \tau'$; $2', 2_1', m', a', b', c', d', n'$; $4', \bar{4}', 4_1', 4_2', 4_3'$*.

С идеей расширения мы начнем знакомиться на примере одномерных шубниковских групп — групп антисимметрии односторонних бордюров. На рис. 208 в первом столбце воспроизведены международные символы семи классических пространственных групп и дана их геометрическая реализация в форме одноцветных фигур (асимметричных треугольников и их объединений), повторяющихся вдоль оси переносов a (ср. рис. 90 и табл. 10 на стр. 202).

Во втором столбце приведена реализация семи нейтральных групп с помощью соответствующих серых фигур. Группы этого типа можно рассматривать как прямые произведения классических групп на группу $1' = \{1, 1'\}$.

В третьем столбце приведены символы групп антисимметрии, не содержащих антиотождествления $1'$ и антипереносов τ'. Группы этого

*Операции, содержащие поступание, порождают группы по модулю удвоенного поступания: $\tau'(\mathrm{mod}\, 2\tau) = \{1, \tau'\}, 2_1'(\mathrm{mod}\, \tau) = \{1, 2_1'\}, a', b', c', n'(\mathrm{mod}\, \tau) = \{1, x\}, d'(\mathrm{mod}\, n) = \{1, d'\}, 4_1'(\mathrm{mod}\, 2_1) = \{1, 4_2'\}, 4_2'(\mathrm{mod}\, [2|\tau]) = \{1, 4_2'\}, 4_3'(\mathrm{mod}\, 2_1) = \{1, 4_3'\}$, где $x = a, b, c, n$; $\tau \in T$. Кроме того, к группам по модулю принадлежат $4'(\mathrm{mod}\, 2) = \{1, 4'\}, \bar{4}'(\mathrm{mod}\, 2) = \{1, \bar{4}'\}$.

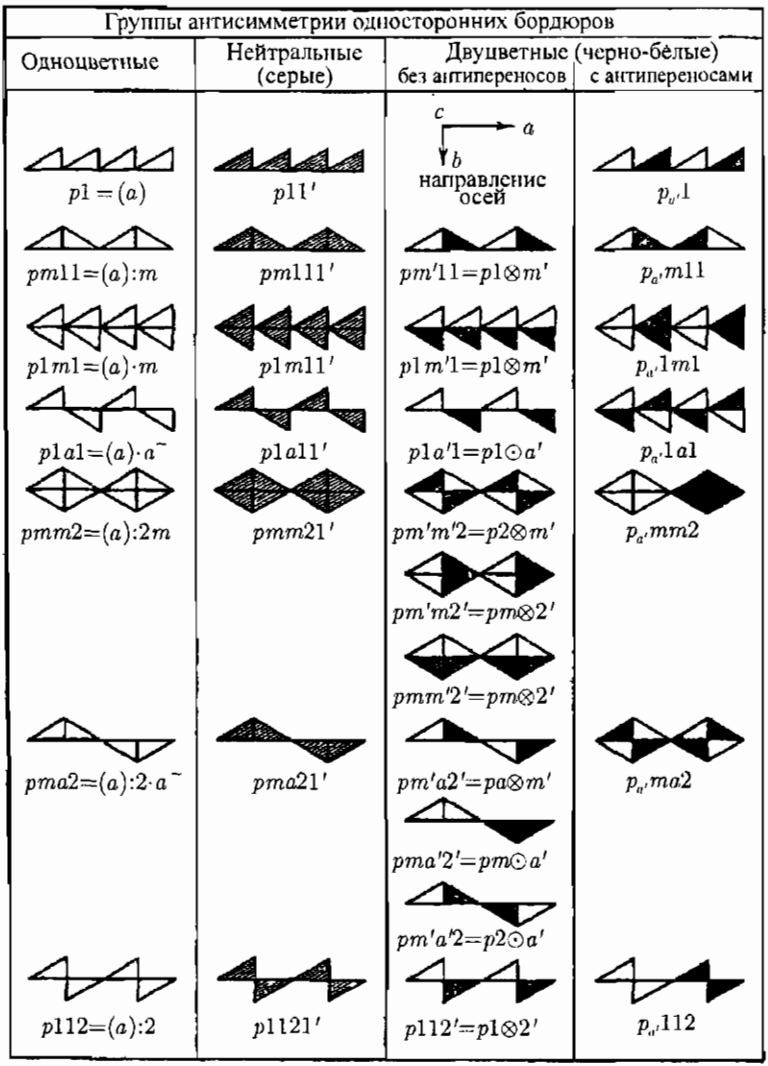


Рис. 208. Международные обозначения и геометрическая реализация групп антисимметрии односторонних бордюров, составленных из асимметричных треугольников

типа можно рассматривать как расширения классических групп с помощью групп $2'$, m', a' и реализовать в форме двуцветных черно-белых фигур. (Символами $\otimes$ и $\odot$ на рис. 208 обозначены прямые и условно-прямые произведения двух точечных групп или точечной группы на группу по модулю $a'(\mathrm{mod}\ 2)$; соответствующие пространственные группы будут полупрямыми или условно-полупрямыми произведениями.)

Наконец, в последнем столбце рис. 208 приведены геометрическая реализация и символы пространственных групп бордюров, содержащих антипереносы. Поскольку группа, порождаемая антипереносом τ', содержит и чистый перенос удвоенной длины ($\tau'+\tau' = 2\tau'$), соответствующую группу трансляций и антитрансляций мы обозначаем символом $p_{\tau'}$, указывая при символе p в качестве подстрочного индекса тот генерирующий антиперенос τ', с помощью которого производится расширение группы трансляций p.

Читателю рекомендуется найти подобным же образом одномерные шубниковские группы лент и стержней, проверяя себя по спискам символов групп, опубликованным в литературе (Шубников, 1959, 1962; Белов, и др., 1956, 1962). Мы не будем останавливаться на этом вопросе, а перейдем непосредственно к шубниковским группам антисимметрии слоев.

Всего известно 528 таких групп (Неронова, Белов, 1961). В качестве иллюстрации мы рассмотрим лишь 80 групп антисимметрии слоев, отвечающих черно-белым графикам Вебера (см. рис. 184–187). Именно эти графики натолкнули Хееша и Шубникова на мысль рассматривать операции перекрашивания как операции антисимметрии и вывести независимым образом точечные кристаллографические группы антисимметрии конечных фигур.

Результаты нашего рассмотрения приведены в табл. 16. В первом ее столбце записаны символы 17 классических пространственных групп Φ для одноцветных слоев, у которых лицевая и оборотная поверхности выкрашены в один (черный или белый) цвет. Во втором столбце приведены символы нейтральных серых) групп, полученные присоединением операции антиотождествления $1'$ к генераторам классических одноцветных групп, и в скобках указан номер соответствующего графика Вебера на рис. 184–187. Все нейтральные группы $Ш1' = \Phi \otimes 1'$ можно рассматривать, следовательно, как расширения классических групп с помощью группы $1'$.

В третьем столбце таблицы приведены символы двуцветных шубниковских групп $Ш$, изоморфных указанным в первом столбце таблицы федоровским группам Φ. Эти группы $Ш$, не содержащие антипереносов, можно рассматривать как расширения классических подгрупп $\Phi^* \subset Ш$ индекса 2 с помощью точечных групп антисимметрии G' или групп ан-

Таблица 16. Шубниковские группы слоев, изображенных на рис. 184–187

Одноцветные группы	Нейтральные («серые») группы	Двуцветные пространственные группы антисимметрии	
		не содержащие антипереносов	с антипереносами
$p11m$	$p11m1'(2)$	$p11m' = p1 \otimes m'(1)$	$p_{b'}11b = p_{b'}11m'(4)$
$p11\frac{2}{m}$	$p11\frac{2}{m}1'(6)$	$p11\frac{2'}{m'} = p\bar{1} \otimes 2'(3)$, $p11\frac{2}{m} = p2 \otimes m'(5)$	$p_{b'}11\frac{2}{b} = p_{b'}11\frac{2}{m'}(7)$
$p2mm$	$p2mm1'(9)$	$p2'mm' = p1m1 \otimes 2'(8)$, $pm'2m' = p121 \otimes m'(14)$	$p_{C'}2an = p_{C'}2m'm'(34)$, $p_{a'}2aa = p_{a'}2m'm'(31)$, $p_{b'}2mb = p_{b'}2'mm'(32)$, $p_{C'}2_1mn = p_{C'}2'mm'(35)$, $p_{a'}2_1ma = p_{a'}2'mm'(30)$,
$p2_1am$	$p2_1am1'(11)$	$p2_1'am' = p1a1 \odot m'(10)$, $pb'2_1m' = p12_11 \odot m'(15)$	$p_{b'}2_1ab = p_{b'}2_1a'm'(33)$
$c2mm$	$c2mm1'(13)$	$c2'mm' = c1m1 \otimes 2'(12)$, $cm'2m' = c121 \otimes m'(16)$	$c_{b'}2mb = c_{b'}2mm'(36)$
$pmmm$	$pmmm1'(23)$	$pm'mm' = p1\frac{2}{m}1 \circledS m'(17)$	$p_{a'}maa = p_{a'}mm'm'(41)$,
		$pmmm' = pmm2 \otimes \bar{1}'(22)$	$p_{C'}mmn = p_{C'}mmm'(47)$,
		$pm'm'm' = p222 \otimes \bar{1}'(37)$	$p_{a'}mma = p_{a'}mmm'(43)$
$pbmm$	$pbmm1'(25)$	$pb'mm' = p1\frac{2_1}{m}1 \odot m'(18)$,	$p_{C'}bmn = p_{C'}bmm'(44)$,
		$pm'am' = p1\frac{2}{a}1 \odot m'(20)$	$p_{a'}baa = p_{a'}bm'm'(45)$
		$pbmm' = pbm2 \otimes \bar{1}'(24)$, $pm'a'm' = p2_122 \otimes \bar{1}'(38)$	
$pbam$	$pbam1'(27)$	$pb'am' = p1\frac{2_1}{a}1 \odot m'(21)$,	$p_{C'}ban = p_{C'}bam'(42)$,
		$pbam' = pba2 \otimes \bar{1}'(26)$,	$p_{b'}mab = p_{b'}b'am'(46)$
		$pb'a'm' = p2_12_12 \otimes \bar{1}'(39)$	
$cmmm$	$cmmm1'(29)$	$cm'mm' = c1\frac{2}{m}1 \circledS m'(19)$,	$c_{a'}mma = c_{a'}mmm'(48)$
		$cmmm' = cmm2 \otimes \bar{1}'(28)$	
		$cm'm'm' = c222 \otimes \bar{1}'(40)$	
$p4/m$	$p4/m1'(51)$	$p4'/m' = p\bar{4} \otimes \bar{1}'(49)$, $p4/m' = p4 \otimes \bar{1}'(50)$	$p_{C'}4/n = p_{C'}4/m'(57)$
$p4/mmm$	$p4/mmm1'(53)$	$p4'/m'mm' = p\bar{4}m2 \otimes \bar{1}'(61)$,	$p_{C'}4/nmm =$
		$p4/m'mm = p4mm \otimes \bar{1}'(52)$,	$= p_{C'}4/m'mm(63)$
		$p4'/m'm'm = p\bar{4}2m \otimes \bar{1}'(54)$	
		$p4/m'm'm' = p422 \otimes \bar{1}'(55)$,	
$p4/mbm$	$p4/mbm1'(58)$	$p4/m'b'm' = p42_12 \otimes \bar{1}'(56)$,	$p_{C'}4/nbm =$
		$p4/m'bm = p4bm \otimes \bar{1}'(59)$	$= p_{C'}4/m'bm(62)$
		$p4'/m'b'm = p\bar{4}2_1m \otimes \bar{1}'(60)$,	
		$p4'/m'bm' = p\bar{4}b2_1 \otimes \bar{1}'(64)$	

Таблица 16 (окончание)

Одноцветные группы	Нейтральные («серые») группы	Двуцветные пространственные группы антисимметрии	
		не содержащие антиперносов	с антипереносами
$p\bar{6}$	$p\bar{6}1'(66)$	$p\bar{6}' = p3 \otimes m'(65)$	
$p\bar{6}m2$	$p\bar{6}m21'(69)$	$p\bar{6}'m2' = p3m \circledS 2'(68)$,	
		$p\bar{6}'m'2 = p32 \otimes m'(72)$	
$p\bar{6}2m$	$p\bar{6}2m1'(71)$	$p\bar{6}'2'm' = p3m \circledS 2'(70)$,	
		$p\bar{6}'2m' = p32 \otimes m'(73)$	
$p6/m$	$p6/m1'(77)$	$p\bar{6}'/m' = p\bar{3} \otimes m'(67)$,	
		$p6/m' = p6 \otimes m'(76)$	
$p6/mmm$	$p6/mmm1'(79)$	$p6'/m'm'm = p\bar{3}m \circledS m'(74)$,	
		$p6'/m'mm' = p\bar{3}m \circledS m'(75)$,	
		$p6/m'mm = p6mm \otimes \bar{1}'(78)$,	
		$p6/m'm'm' = p622 \otimes \bar{1}'(80)$	

Примечание. По поводу установки осей см. примечание к табл. 11 пространственных групп симметрии слоев (стр. 211); знаками $\otimes$, $\circledS$ и $\odot$ обозначены прямые, полупрямые и условные произведения групп; произведения точечных групп берутся из табл. 15 на стр. 280; в скобках приведен номер соответствующего графика на рис. 184–187.

тисимметрии по модулю G^T, т. е. как прямые, полупрямые и условные произведения*,

$$Ш = \Phi^* \otimes G', \; Ш = \Phi^* \circledS G' \text{ или } Ш = \Phi^* \bigcirc G^T.$$

Наконец, последняя категория двуцветных шубниковских групп, содержащих антипереносы τ', получается из классических федоровских групп присоединением к генераторам трансляционных групп $T \subset \Phi$ дополнительного генератора антипереноса τ' (который указывается в качестве подстрочного индекса у символа трансляционной группы T). Группы этого типа, обозначаемые $Ш = T_{\tau'}G$, можно рассматривать, следовательно, как расширения классических групп $\Phi^* = TG$ с помощью группы по модулю $\tau'(\mathrm{mod}\, 2\tau) = \{1, \tau'\}$.

Заметим, что группы $Ш = T_{\tau'}G$ изоморфны классическим группам $\Phi = T_\tau G$, имеющим с группой $Ш$ общую трансляционную группу T и дополнительный вектор переноса τ, равный по длине вектору $\tau'(\tau \leftrightarrow \tau')$. Группа $\Phi^* = TG$ является общей подгруппой (индекса 2) изоморфных $Ш$- и Φ-групп. Кроме того, группы $Ш = T_{\tau'}G$ допускают (при ином выборе генераторов) представление $Ш = T_{\tau'}G'$, где G' — точечная группа антисимметрии или группа по модулю (для симморфных

*Трансляционные подгруппы шубниковских групп связаны с ортогональными группами антисимметрии и группами по модулю только в полупрямые и условно-полупрямые произведения $Ш = T \circledS G'$ и $Ш = T \bigcirc GT'$. Знаки $\otimes$, $\circledS$ и $\odot$, идущие вслед за символом Φ-группы, указывают лишь на способ расширения ее ортогональной части, например: $Ш = \Phi^* \otimes G' = TG^* \otimes G'$ и т. д.

и несимморфных $Ш$-групп соответственно); группы G' изоморфны классическим точечным группам G или, соответственно, группам по модулю G^T, указанным в первом столбце таблицы. По этой причине шубниковские группы $Ш = T_{\tau}{}'G$ можно рассматривать так же, как расширения шубниковских подгрупп без антипереносов $Ш^* = TG' \subset Ш = T_{\tau'}G$ с помощью группы по модулю $\tau'(\mathrm{mod}\, 2\tau) = \{1, \tau'\}$.

Мы рекомендуем читателю построить проекции элементов симметрии и антисимметрии 80 шубниковских слоевых групп, аналогичные проекциям групп симметрии плоских орнаментов (см. рис. 149), различая элементы симметрии и антисимметрии черным и красным цветом соответственно. Сами мы построим такие проекции для трехмерных шубниковских групп, к рассмотрению которых и переходим. Среди шубниковских трехмерных групп (Заморзаев, 1953, 1957; Белов, Неронова, Смирнова, 1955) различают:

230 нейтральных групп типа $Ф1' = Ф \otimes 1'$, получаемых расширением 230 федоровских групп $Ф$ с помощью группы $1'$;

674 группы типа $Ш = T \circledS G'$, или $Ш = T \bigcirc G^{T'}$, не содержащие антипереносов τ' и антиотождествления $1'$; эти группы можно рассматривать как расширения трансляционных подгрупп T с помощью точечных групп антисимметрии G' или изоморфных им групп по модулю G^T (соответственно для симморфных и несимморфных $Ш$-групп);

517 групп типа $Ш = T_{\tau'} \circledS G$ или $T_{\tau'} \bigcirc G^T$, получаемых расширением федоровских подгрупп $Ф^* = TG$ или TG^T с помощью группы антипереносов $\tau'(\mathrm{mod}\, 2\tau) = \{1, \tau'\}$.

Присоединяя к этим группам формально 230 федоровских групп, получим всего $230 + 230 + 674 + 517 = 1651$ шубниковскую группу антисимметрии.

На рис. II (цв. вклейка) приведены для примера двуцветные проекции трех симморфных шубниковских групп, не содержащие антипереносов:

$$Ш_{10}^{44} - P2'/m = Pm \otimes \bar{1}' \quad (P2/m/Pm),$$

$$Ш_{10}^{45} - P2/m' = P2 \otimes \bar{1}' \quad (P2/m/P2),$$

$$Ш_{10}^{46} - P2'/m' = P\bar{1} \otimes m' = P\bar{1} \otimes 2'(P2/m/P\bar{1})$$

(цифровые обозначения соответствуют номерам групп по справочнику «Шубниковские группы» (Копцик, 1966); в скобках приводится так называемый двучленный символ, определяющий изоморфную федоровскую группу (числитель) и федоровскую подгруппу индекса 2 (знаменатель), общую изоморфным $Ш$- и $Ф$-группам).

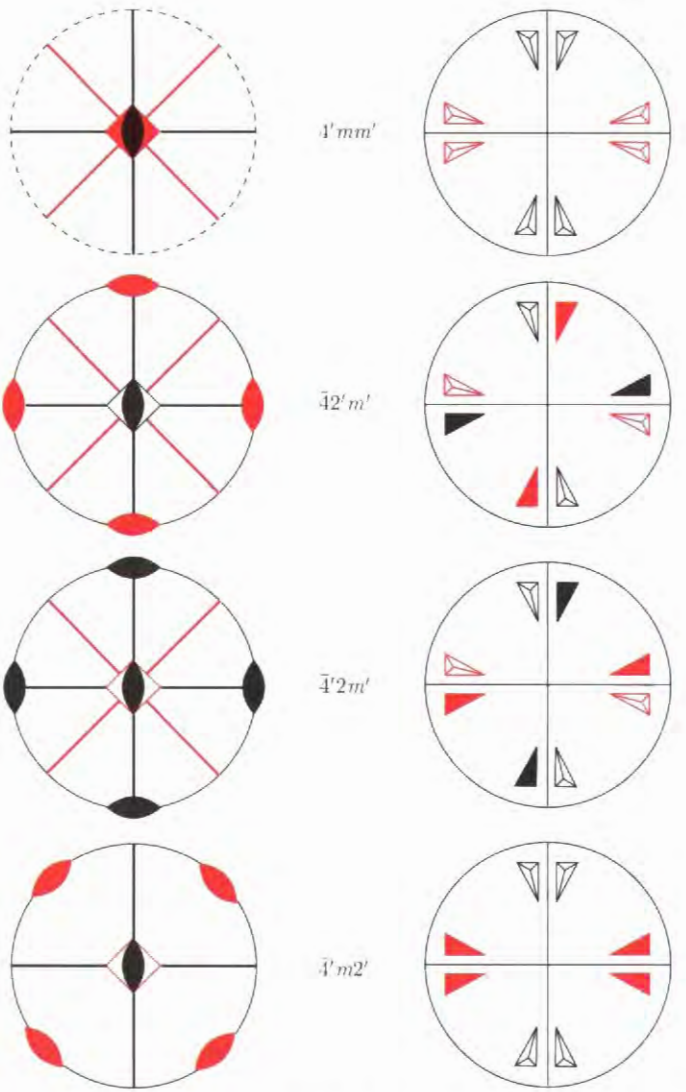
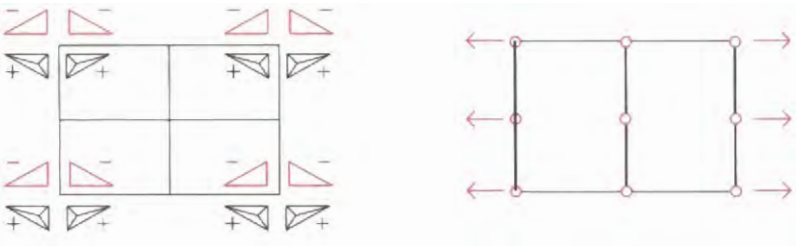
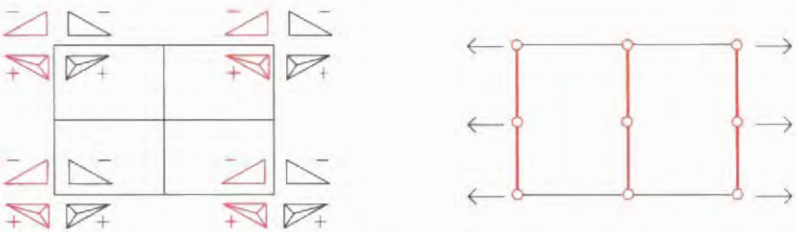


Рис. I. Двухцветные стереографические проекции групп антисимметрии $4'mm'$, $\bar{4}2'm'$, $\bar{4}'2m'$ и $\bar{4}'m2'$

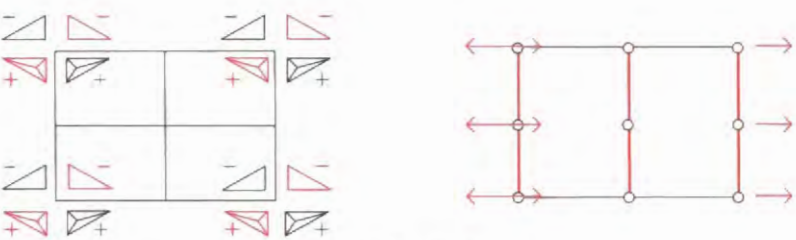
На левых проекциях условными обозначениями, такими же, как на рис. 69, показаны элементы симметрии (черные) и антисимметрии (красные). На правых проекциях представлены эквивалентные системы асимметричных фигур общего положения. Операциям антисимметрии отвечают геометрические преобразования, сопровождающиеся перекрашиванием тетраэдров



$Ш_{10}^{44} - P2'/m$



$Ш_{10}^{45} - P2/m'$



$Ш_{10}^{46} - P2'/m'$

Рис. 11. Двухцветные проекции шубниковских трехмерных групп $P2'/m$, $P2/m'$ и $P2'/m'$, не содержащие антипереносов

На правых проекциях черными или красными двусторонними стрелками, кружками и сплошными линиями показаны двойные оси, центры и плоскости симметрии или антисимметрии соответственно. На левых — проекции асимметричных фигур общего положения (черных и красных тетраэдров). Контуры элементарных ячеек изображены тонкими линиями

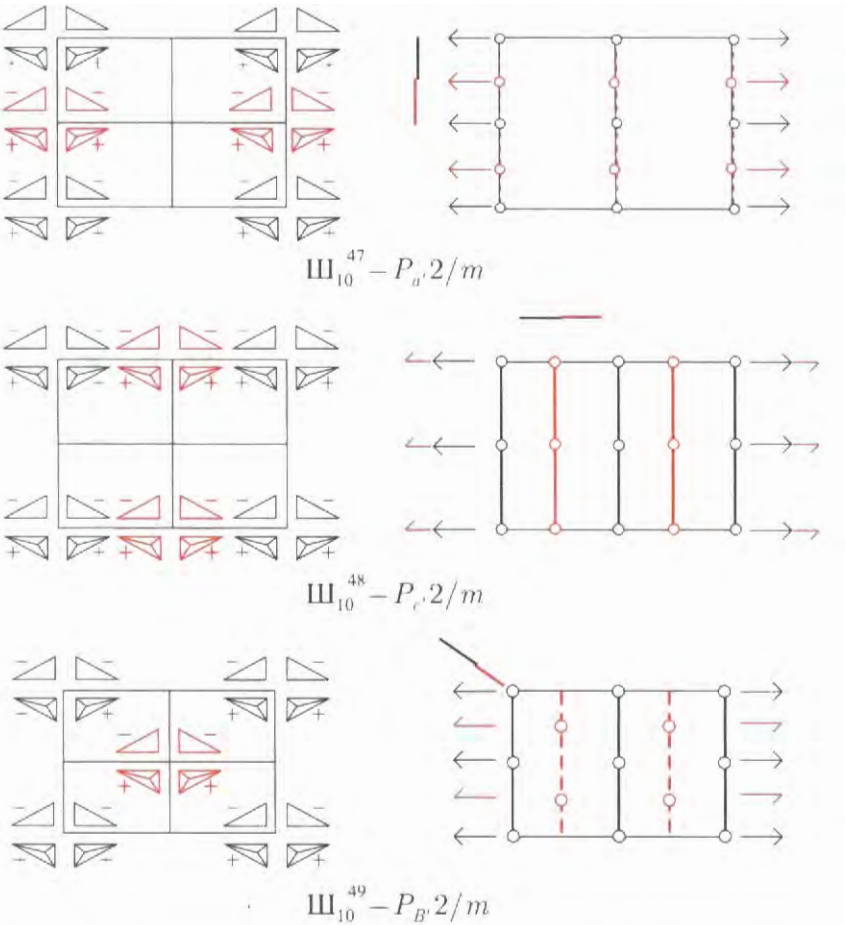


Рис. III. Двухцветные проекции элементов симметрии и антисимметрии и проекции эквивалентных систем фигур общего положения шубниковских групп $P_a 2/m$, $P_c 2/m$, $P_B 2/m$, содержащие антипереносы вдоль осей *a* и *c* и диагонали элементарной ячейки соответственно

Направление антипереносов указано двухцветными отрезками на полях ячеек. Винтовые оси 2_1 изображены на полях односторонними стрелками

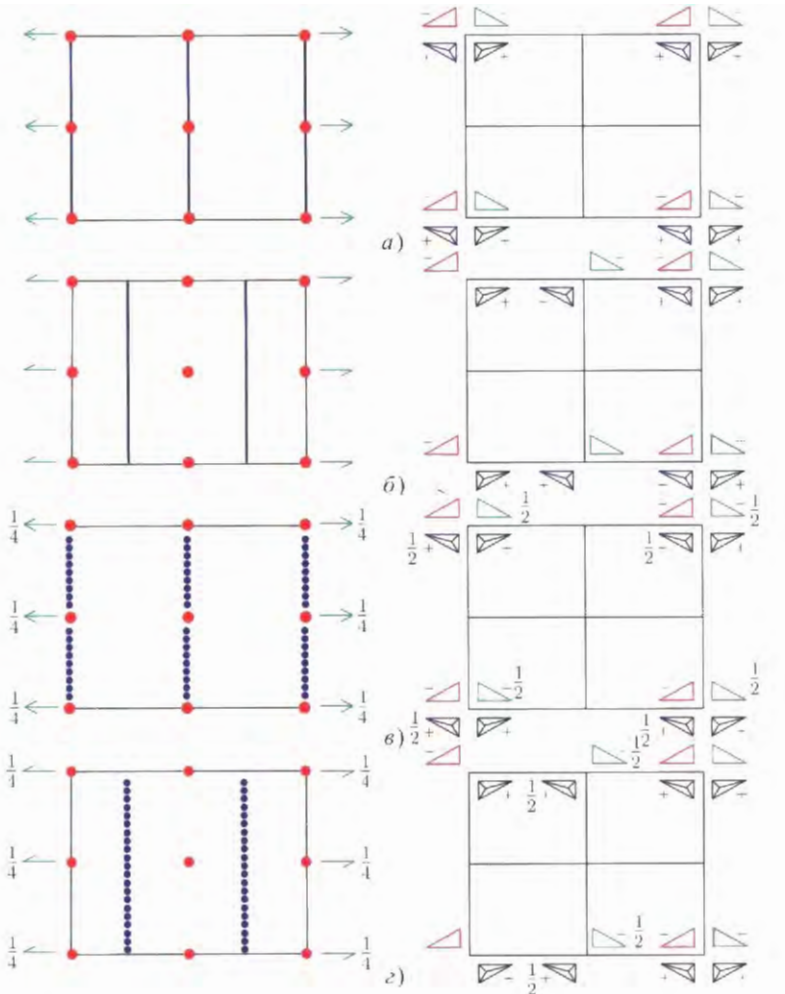


Рис. IV. Многоцветные проекции беловских трехмерных групп $P(2^{(2)}/m^{(2)})^{(4)}$ (*а*), $P(2_1^{(2)}/m^{(2)})^{(4)}$ (*б*), $P(2^{(2)}/b^{(2)})^{(4)}$ (*в*), $P(2_1^{(2)}/b^{(2)})^{(4)}$ (*г*), не содержащие цветных переносов

На левых проекциях элементам симметрии придан различный цвет в соответствии с различиями в цветных подстановках, осуществляемых ими над эквивалентными системами фигур (справа). Цифры у стрелок и тетраэдров отмечают их высоту над плоскостью чертежа в долях параметра b

Рис. V. Одномерные циклические группы цветных переносов $P_\tau^{(3)}$ 1 (*а*), $P_\tau^{(4)}$ 1 (*б*), $P_\tau^{(6)}$ 1 (*в*), порождаемые векторами цветных переносов $\tau^{(3)}$, $\tau^{(4)}$, $\tau^{(6)}$

Векторы $\tau^{(p)}$ изображены условно p-цветными отрезками. Действием операций $\tau^{(p)}$ на асимметричные тетраэдры получаем односторонние цветные p-циклические

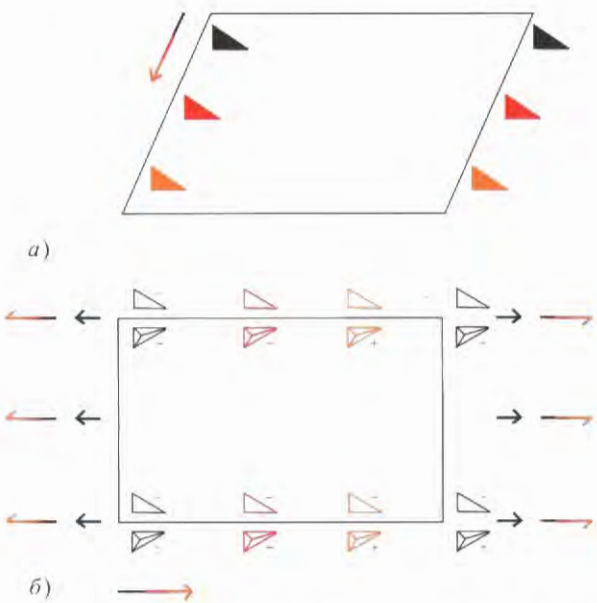


Рис. VI. Трехцветные проекции беловских трехмерных групп $P_a(3)1$ (*а*) и $P_c(3)2$ (*а*), содержащие трехцветные переносы вдоль осей *a* и *c* соответственно

Направления и величины цветных переносов указаны на полях ячеек трехцветными отрезками. В группе $P_c^{(3)}2$ произведение (последовательное выполнение) переноса $c^{(3)}$ и поворота 2 (двусторонние черные стрелки) порождает трехцветные винтовые оси $2_1^{(3)}$ (изображены на полях ячейки трехцветными стрелками) такие, что $(2_1^{(3)})^6$, где $c = 3c^{(3)}$ — классический перенос

Рис. VII. Трехцветный орнамент М. Эшера «Ящерицы» имеет симметрию двухмерной беловской группы P6(3). Полную гексагональную ячейку группы можно получить из трех смежных «ромбических» ячеек; контуры одной из таких ячеек можно выделить на чертеже

Рис. VIII. Трехцветный орнамент М. Эшера «Крылатые кони» характеризуется горизонтальными переносами и системой вертикальных плоскостей скользящего отражения; последние связывают коней одного цвета, смотрящих навстречу друг другу. Двухмерная беловская группа $P_b(3)a$

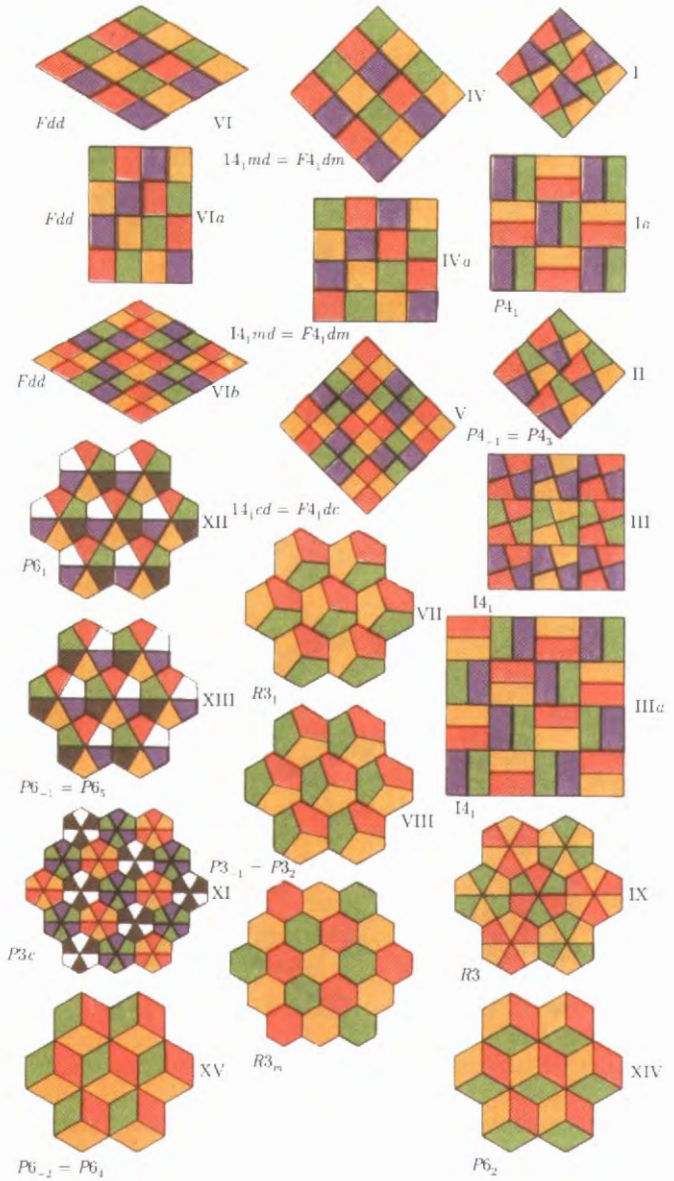


Рис. IX. Цветные мозаики для 15 двухмерных беловских групп, полученных методом обобщенного проектирования на плоскость трехмерных фёдоровских групп (по Белову и Тарховой, 1956; Белову и Беловой, 1957)

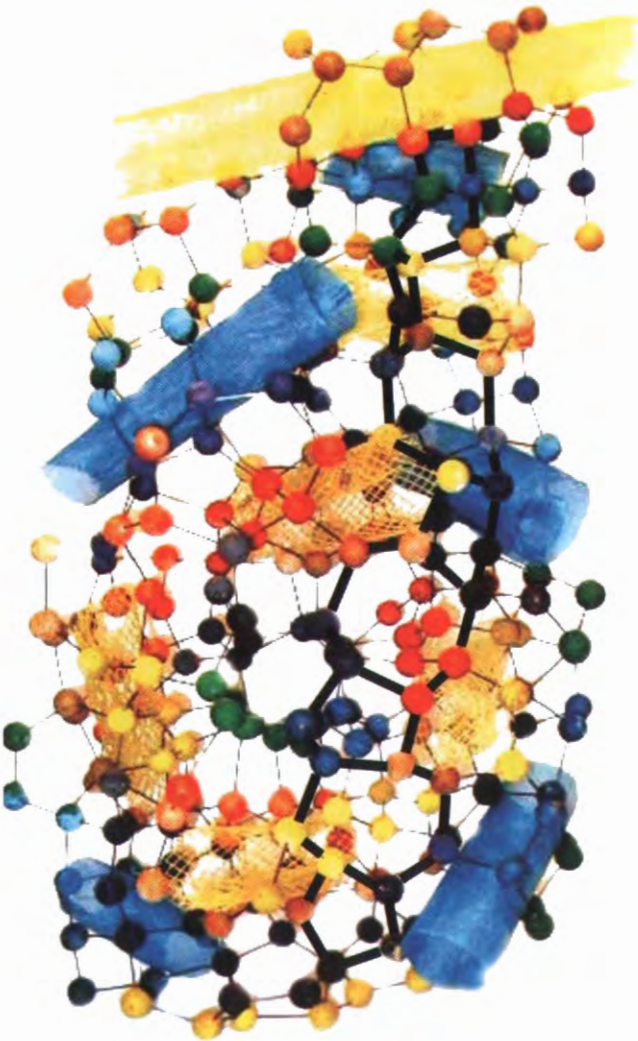


Рис. X. Модель стержня максимально детерминированной некристаллической алмазоподобной структуры, содержащая лишь пента, гекса и гептациклы. В центре «скрученный» алмазный канал идет перпендикулярно оси стержня, синие и желтые трубки вставлены в «скрученные» алмазные каналы и каналы с симметрией 30/11. Жирные черные линии выделяют перпендикулярную оси стержня последовательность каналов с поперечными пента и гептациклами.

На рис. III (цв. вклейка) приведены двуцветные проекции трех шубниковских групп, содержащие антипереносы:

$$Ш_{10}^{47} - P_{a'}2/m = P2/m \bigcirc a' \quad (2P2/m/P2m),$$
$$Ш_{10}^{48} - P_{c'}2/m = P2/m \bigcirc c' \quad (2P2/m/P2/m),$$
$$Ш_{10}^{49} - P_{B'}2/m = P2/m \bigcirc \frac{1}{2}(a+c)' \quad (B2/m/P2/m)$$

(подстрочный индекс указывает направление вектора антипереноса; вектор $\frac{1}{2}(a+c)'$, центрирующий грань B элементарной ячейки, обозначен подстрочным индексом B'; $\bigcirc$ — символ условного полупрямого произведения; смысл цифр в двучленном символе поясняется в примечании к табл. 17).

Само построение проекций *Ш*-групп осуществляется следующим образом. Используя теоремы об умножении трансляций на ортогональные преобразования (или кристаллографические справочники), намечаем карандашом проекцию элементов симметрии изоморфной федоровской группы Φ; наносим на эту проекцию черным цветом элементы симметрии классической подгруппы Φ^*; остальные элементы, не принадлежащие подгруппе Φ^* (это будут элементы антисимметрии), окрашиваем в красный цвет. Рядом с проекциями элементов симметрии и антисимметрии указываем на отдельных чертежах расположения асимметричных фигур (тетраэдров) в элементарных ячейках *Ш*-групп.

Построение шубниковских групп, содержащих антипереносы, в принципе, легко осуществить, если предварительно построить двуцветные решетки, аналогичные решеткам Бравэ. На рис. 211 мы приводим изображения 22 таких решеток и символы симморфных шубниковских групп, обладающих максимально высокой симметрией, совместимой с существованием данной решетки. В табл. 17 приводятся расширенные векторные базисы $\{a, b, c, \tau'\}$ трансляционных групп $T_{\tau'}$, отвечающих этим решеткам (для непримитивных решеток базисы задаются избыточным числом векторов, включающим центрирующие переносы). Переход к изоморфным классическим группам $T_\tau = \{a, b, c, \tau\} \leftrightarrow \{a, b, c, \tau'\} = T_{\tau'}$. осуществляется превращением вектора антипереноса τ' в обычный вектор τ. В табл. 17 указаны векторные базисы классических (сверхструктурных) подгрупп $T^* = \{a, b, c\}$ (общих изоморфным группам $T_{\tau'}$ и T_τ) и двучленные символы T_τ/T^* трансляционных групп. На основе этих символов строятся полные двучленные символы пространственных групп Φ/Φ^*, по которым и осуществляется построение всех 517 шубниковских групп $Ш = T_{\tau'}G \leftrightarrow T_\tau G = \Phi \quad (\Phi^* = TG)$ или $Ш = T_{\tau'}G^T \leftrightarrow T_\tau G^T = \Phi \quad (\Phi^* = TG^T)$.

Таблица 17. Расширенные векторные базисы трансляционных групп антисимметрии и их трансляционных классических подгрупп

Метрическая система	Международные символы изоморфных пространственных групп		Расширенный векторный базис трансляционной группы антисимметрии $T_{\tau'} \leftrightarrows T_\tau$	Векторный базис классической подгруппы T^*	Двучленный символ T_τ/T^*
Триклинная	$P_{a'}\bar{1}$[1]	$P_a\bar{1}$	$\{2a, b, c, a'\}$	$\{2a, b, c\}$	$2P/P$
Моноклинная	$P_{c'}2/m$	P_c2/m	$\{a, b, 2c, c'\}$	$\{a, b, 2c\}$	$2P/P$
	$P_{a'}2/m$	P_a2/m	$\{2a, b, c, a'\}$	$\{2a, b, c\}$	$2P/P$
	$P_{B'}2/m$	$B2/m$	$\left\{a, b, c, \left(\frac{a+c}{2}\right)'\right\}$	$\{a, b, c\}$	B/P
	$B_{b'}2/m$	B_b2/m	$\left\{a, 2b, c, \frac{a+c}{2}, b'\right\}$	$\left\{a, 2b, c, \frac{a+c}{2}\right\}$	$2B/P$
	$B_{a'}2/m^2$	B_a2/m	$\{2a, b, 2c, a+c, a'\}$	$\{2a, b, 2c, a+c\}$	$4P/P$
Ромбическая	$P_{c'}mmm$	P_cmmm	$\{a, b, 2c, c'\}$	$\{a, b, 2c\}$	$2P/P$
	$P_{C'}mmm$	$Cmmm$	$\left\{a, b, c, \left(\frac{a+b}{2}\right)'\right\}$	$\{a, b, c\}$	C/P
	$P_{I'}mmm$	$Immm$	$\left\{a, b, c, \left(\frac{a+b+c}{2}\right)'\right\}$	$\{a, b, c\}$	I/P
	$C_{c'}mmm$	C_cmmm	$\left\{a, b, 2c, \frac{a+b}{2}, c'\right\}$	$\left\{a, b, 2c, \frac{a+b}{2}\right\}$	$2C/C$
	$C_{a'}mmm^3$	C_ammm	$\{2a, 2b, c, a+b, a'\}$	$\{2a, 2b, c, a+b\}$	$4P/C$
	$C_{A'}mmm^4$	$Fmmm$	$\left\{a, b, c, \frac{a+b}{2}, \left(\frac{b+c}{2}\right)\right\}$	$\left\{a, b, c, \frac{a+b}{2}\right\}$	F/C
	$F_{s'}mmm^5$	F_smmm	$\{2a, 2b, 2c, a+b, a+c, b+c, a'\}$	$\{2a, 2b, 2c, a+b, a+c, b+c\}$	$8P/F$
	$I_{c'}mmm^6$	I_cmmm	$\left\{a, b, c, \frac{a+b+2c}{2}, c'\right\}$	$\left\{a, b, 2c, \frac{a+b+2c}{2}\right\}$	$2C/I$
Тетрагональная	$P_{c'}4/mmm$	P_c4/mmm	$\{a, b, 2c, c'\}$	$\{a, b, 2c\}$	$2P/P$
	$P_{C'}4/mmm$	P_C4/mmm	$\left\{a, b, c, \left(\frac{a+b}{2}\right)'\right\}$	$\{a, b, c\}$	$4P/P^7$
	$P_{I'}4/mmm$	$I4/mmm$	$\left\{a, b, c, \left(\frac{a+b+c}{2}\right)'\right\}$	$\{a, b, c\}$	I/P
	$I_{c'}4/mmm$	I_c4/mmm	$\left\{a, b, 2c, \frac{a+b+2c}{2}, c'\right\}$	$\left\{a, b, 2c, \frac{a+b+2c}{2}\right\}$	$8P/F^8$
Гексагональная	$P_{c'}6/mmm$	P_c6/mmm	$\{(a\,b), 2c, c'\}$	$\{(a, b), 2c\}$	$2P/P^9$
	$R_{I'}\bar{3}m$	R_I3m	$\left\{(a, b, c), \left(\frac{a+b+c}{2}\right)'\right\}$	$\{(a, b, c)\}$	$2R/R^{10}$
Кубическая	$P_{I'}m\bar{3}m$	$Im\bar{3}m$	$\left\{a, b, c, \left(\frac{a+b+c}{2}\right)'\right\}$	$\{a, b, c,\}$	I/P
	$F_{s'}m\bar{3}m$	$F_sm\bar{3}m$	$\left\{a, b, c, \frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a'}{2}\right\}$	$\left\{a, b, c, \frac{a+b}{2}\,\frac{a+c}{2}\,\frac{b+c}{2}\right\}$	$8P/F^{11}$

Примечание.

[1] Аналогично определяются группы $P_{b'}\bar{1}$, $P_{c'}\bar{1}$ (общий символ $P_{s'}\bar{1}$).

[2] $B_{a'}2/m = B_{c'}2/m$, ось $2 \parallel c$.

[3] $C_{a'}mmm = C_{b'}mmm$.

[4] $C_{A'}mmm = C_{B'}mmm$.

[5] $s' = a', b', c'$.

[6] $I_c mmm = I_C mmm$.

[7] При выборе осей X, Y под углом 45° к осям a, b $P_{C'} = \left\{(a+b)(X), (-a+b)(Y), c(Z), \left(\frac{a+b}{2}\right)'\right\} = P_{\left(\frac{a+b}{2}\right)'} \leftrightarrow 4P$; для всей системы $a = b$.

[8] При выборе осей X, Y под углом 45° к осям a, b $I_{c'} = \left\{(a+b)(X), (-a+b)(Y), 2c(Z), b, \frac{a+b+2c}{2}, \frac{-a+b+2c}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)'\right\} = F_{s'} \leftrightarrow 8P$.

[9] $a = b$, $6 \parallel c$.

[10] $a = b = c$, ось $\bar{3}$ направлена по диагонали (a, b, c).

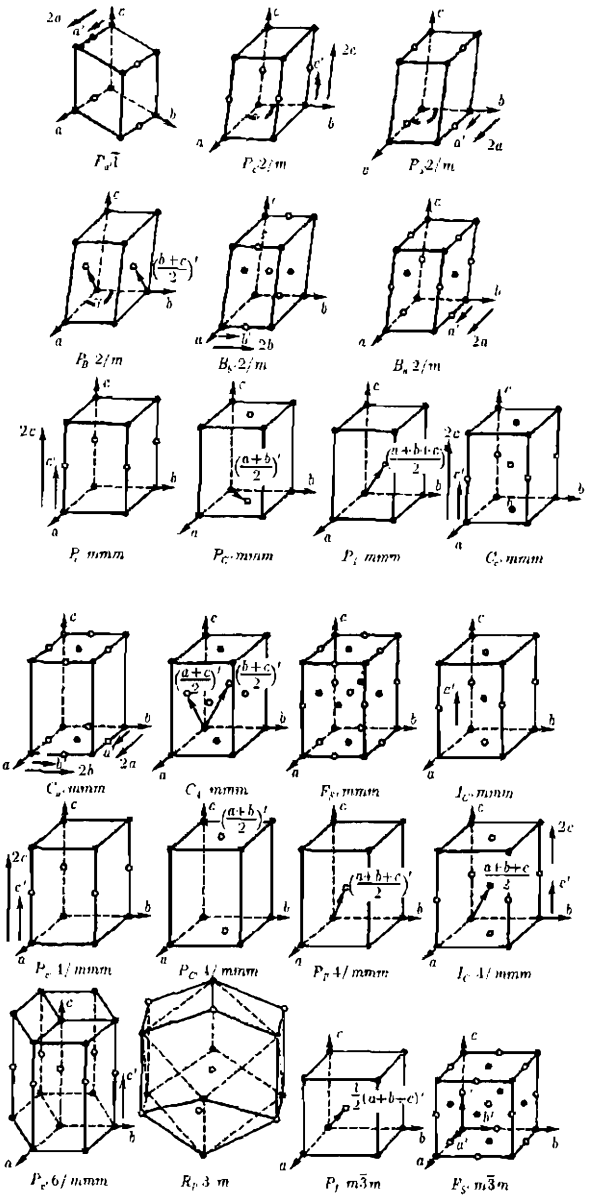
[11] $a = b = c$; $s' = \frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}, \frac{c'}{2}$. Цифры в числителях показывают, сколько элементарных ячеек Φ-групп нужно составить вместе, чтобы получить $T_{\blacktriangledown}$ = ячейку $Ш$-группы. Символ в знаменателе выделяет сохраняющуюся классическую подгруппу T^* базисными переносами вдоль ребер укрупненной ячейки (и центрирующим переносом в C-, F- и I-группах). Все переносы $Ш$-групп, не совпадающие с переносами T^*-подгрупп, становятся антипереносами.

Точечные кристаллографические группы цветной симметрии как расширения классических кристаллографических групп с помощью групп цветных подстановок P и $G^{(P)*}$

Новый класс расширений кристаллографических групп получается с помощью групп подстановок некоторых негеометрических качеств, приписываемых точкам кристаллического пространства при числе качеств p, большем двух. Если с каждой точкой кристаллического пространства связан некоторый оператор $\mathbf{H}$, который может принимать только два знака («плюс» и «минус»), то число качеств $p = 2$ и мы приходим к пространствам антисимметрии, в которых действуют комбинированные операции

$$g' = g1' = 1'g,$$

где g — классические кристаллографические операции $g \in G$, а $1'$ — операция антиотождествления, изменяющая знак оператора в фиксированной точке. В качестве операторов $\mathbf{H}$, как уже говорилось раньше, можно выбрать операторы магнитного момента, электрического заряда и т. д. (или, проще говоря, в каждой точке мы можем определить вектор $\mathbf{H}$, заряд $\mathbf{q}$ и т. д. и разрешить этим величинам принимать только два знака — «плюс» и «минус»).


$P_a\bar{1}$
$P_c 2/m$
$P_b 2/m$
$P_B 2/m$
$B_b 2/m$
$B_a 2/m$
$P_i\ mmm$
$P_C\cdot mmm$
$P_i\ mmm$
$C_c\cdot mmm$
$C_a\cdot mmm$
$C_i\ mmm$
$F_c\cdot mmm$
$I_c\cdot mmm$
$P_c\ 4/mmm$
$P_C\ 4/mmm$
$P_I\ 4/mmm$
$I_C\ 4/mmm$
$P_c\ 6/mmm$
$R_P\ 3\ m$
$P_I\ m\bar{3}m$
$F_S\ m\bar{3}m$

Пусть теперь число качеств p, приписываемых точкам, будет больше двух, например $p = 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$ (позднее мы объясним причину выбора именно этих цифр). Если $p = 3$, то оператор $\mathbf{H}$, связанный с каждой точкой, может принимать три различных значения, которые условно обозначим так:

$$\mathbf{H},\ \varepsilon\mathbf{H},\ \varepsilon^2\mathbf{H}.$$

Переход от значения $\mathbf{H}$ к значению $\varepsilon\mathbf{H}$ мы связываем с умножением оператора $\mathbf{H}$ на комплексный фазовый множитель ε, равный по модулю единице. Полагая $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$, приходим к определению циклической группы $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ обычным законом умножения чисел ε:

$$\varepsilon = \sqrt[3]{1},\ \varepsilon^2 = (\sqrt[3]{1})^2, \varepsilon^3 = (\sqrt[3]{1})^3 = 1$$

(дальнейшие степени числа ε повторяют эти три).

Определим далее комбинированные операции

$$g^{(\varepsilon)} = g\varepsilon = \varepsilon g,$$

полагая, что операции $g \in G$ осуществляют ортогональные преобразования «материальных» точек трехмерного пространства (сохраняя все свойства, приписанные точкам и в новой симметрической ориентировке пространства) и что операция ε действует лишь на оператор $\mathbf{H}$, изменяя его значение в фиксированной точке. Закон умножения комбинированных операций определим по типу прямого произведения, начиная нумерацию формул в пределах главы с номера (1)*:

$$g_i^{(\varepsilon_i)} \otimes g_j^{(\varepsilon_j)} = g_i g_j^{(\varepsilon_i \varepsilon_j)},\ g_i\varepsilon_i \otimes g_j\varepsilon_j = g_i g_j \varepsilon_i \varepsilon_j. \qquad (1)$$

Исследуем вопрос, при каких условиях множества комбинированных операций с определенным выше законом умножения образуют группы конечного порядка. Так как по определению группа содержит все

*При отсылках на формулы (3), (4) предыдущей главы будем писать (3.10), (4.10) и т. д.

Рис. 211. 22 трансляционные решетки трехмерных шубниковских групп, содержащие антипереносы и обладающие максимально высокой симметрией, совместимой с метрикой данной решетки.

Получаются из 14 решеток Бравэ (рис. 191) «цветной» центрировкой по ребрам $s = a', b', c'$, граням A', B', C' и объему I' ячеек. Индексы центрировок указаны в международных символах соответствующих шубниковских групп. В группе $R_I'3m$ исходный ромбоэдр выделен штриховой линией

степени своих операций и обязательно — единичную операцию, то в качестве необходимого для конечной группы условия мы можем принять требование равенства некоторой степени операции $g_i\varepsilon_i$ единичной операции

$$(g_i\varepsilon_i)^{m_i} = 1 \text{ или более общее требование } g_i^{m_i}\varepsilon^{m_i/s_i} = 1,$$

где m_i — целые числа и $g_i\varepsilon_i$ — произвольные операции рассматриваемых множеств (наименьшие целые числа, обладающие таким свойством, определяют *порядок* элемента g_i, и в дальнейшем именно такие числа мы и будем иметь в виду); s_i — делитель числа m_i : $m_i/s_i = p_i$, $\varepsilon_i^{p_i} = 1$).

В нашем случае при $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$ сформулированному условию удовлетворяет комбинирование операций ε с кристаллографическими операциями g_i порядков 3 и 6 ($g_i = 3, 6, \bar{6}, \bar{3}$). Соответственно при $\varepsilon = \sqrt[4]{1}$ допустимы кристаллографические операции $g_i = 4, \bar{4}$; при $\varepsilon = \sqrt[6]{1}$ — операции $g_i = 6, \bar{6}, \bar{3}$. В дальнейшем комбинированные операции $g^{(\varepsilon)}$ мы будем обозначать кристаллографическими символами, указывая над ними в скобках порядок p циклической группы $\{\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{p-1}, \varepsilon^p = 1\}$, определяемой операцией ε.

Итак, вашему условию удовлетворяют 9 обобщенных операций, определяющих 9 обобщенных циклических групп*:

$$3^{(3)}, 4^{(4)}, \bar{4}^{(4)}, 6^{(6)}, \bar{6}^{(3)}, \bar{6}^{(6)}, \bar{6}^{(3)}, \bar{3}^{(6)}, \bar{3}^{(3)}.$$

Если бы вместо операции $g^{(\varepsilon)} = g\varepsilon = \varepsilon g$ мы определили операцию

$$g^{(\varepsilon^{p-1})} = g\varepsilon^{p-1} = \varepsilon^{p-1}g \quad (\varepsilon\varepsilon^{p-1} = \varepsilon^p = 1),$$

например вместо ε взяли бы ε^2 (при $\varepsilon^3 = 1$), то получили бы 9 обобщенных циклических групп, изоморфных предыдущим группам и отличающимся от них только порядком цикла в группе ε:

$$\{\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^p = 1\} \leftrightarrow \{\varepsilon^{p-1}, \varepsilon^{p-2}, \varepsilon^{p-3}, \ldots, \varepsilon^0 = 1\}.$$

Соответственно этому мы будем различать обобщенные группы с прямым и обратным порядком цикла ε, как правые и левые (по ε) группы, и обозначать символами $G^{(p)+}$ и $G^{(p)-}$, например

$$3^{(3)\pm}, 4^{(4)\pm}, \bar{4}^{(4)\pm}, 6^{(6)\pm}, 6^{(3)\pm}, \bar{6}^{(6)\pm}, \bar{6}^{(3)\pm}, \bar{3}^{(6)\pm}, \bar{3}^{(3)\pm},$$

*Операции $6^{(3)\pm}, \bar{6}^{(3)\pm}$ и $\bar{3}^{(3)\pm}$ порождают циклические группы по модулю $6^{(3)\pm}(\mathrm{mod}\, 2) = \{1, 6^{(3)\pm}, (6^{(3)\pm})\}, \bar{6}^{(3)\pm}(\mathrm{mod}\, n) = \{1, \bar{6}^{(3)\pm}, (\bar{6}^{(3)\pm})^2\}, \bar{3}^{(3)\pm}(\mathrm{mod}\, \bar{1}) = \{1, \bar{3}^{(3)\pm}, (\bar{3}^{(3)\pm})^2\}$.

используя знак «плюс» для правых по ε групп и знак «минус» — для левых.

На рис. 212 рассмотрен пример обобщенных групп $6^{(6)+}, 6^{(6)-}, 6^{(3)+}, 6^{(3)-}$ в их магнитной интерпретации и проведено сравнение этих групп с группой антисимметрии $6'$ и классической кристаллографической группой 6. Для простоты мы рассматриваем лишь плоские спиновые конфигурации, обозначая магнитные векторы, лежащие в плоскости чертежа, условно-полярными стрелками, но помня о том, что по своей физической природе магнитные векторы аксиальны и их следует, строго говоря, изображать неполярными отрезками с обтекающими стрелками.

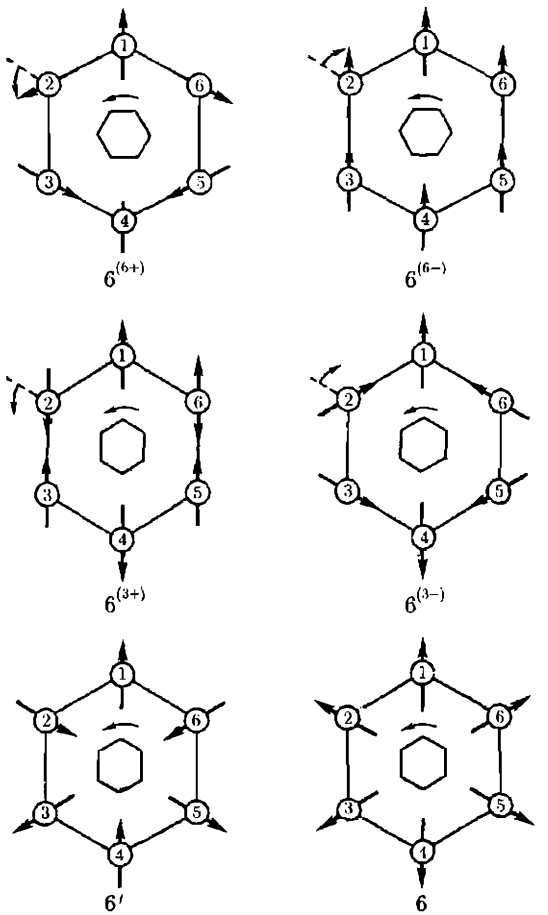
Исходной для построения спиновой конфигурации служит точка номер один с вертикально расположенным магнитным моментом. Принимая за положительное направление вращения вращение против часовой стрелки, перейдем с помощью геометрического преобразования g в группе $6^{(6)+}$ от точки 1 к точке 2; при этом жестко связанный с точкой магнитный момент также повернется и будет ориентирован в точке 2 по внешнему радиусу. Не изменяя теперь положения точки 2, применим к вектору оператор ε, определив его как поворот на 60° в положительном направлении; при этом магнитный момент займет положение по образующей правильного шестиугольника, что и будет отвечать проведению комбинированного преобразования $6^{(6)+} = \varepsilon 6$. Повторяя эту операцию, находим окончательно типичную (неколлинеарную) антиферромагнитную конфигурацию. Подобным же образом для группы $6^{(6)-}$ получаем коллинеарную ферромагнитную структуру, осуществляя поворот 6 против часовой стрелки и комбинируя его с дополнительным поворотом вектора на угол 60° по часовой стрелке (сочетать с оператором $\varepsilon^{-1} = \varepsilon 5$ поворот 6^{-1} на угол 60° по часовой стрелке не имеет смысла, так как это приведет нас снова к конфигурации $6^{(6)+}$). Для группы $6^{(3)+}$ получаем антиферромагнитную коллинеарную структуру; для остальных групп $6^{(3)-}, 6', 6$ — также антиферромагнитные, но уже неколлинеарные структуры.

Все шесть магнитных структур на рис. 212 различны между собой. Поскольку классическая симметрия и антисимметрия не исчерпывают, как видим, всех возможных у кристаллов магнитных конфигураций, новое обобщение понятия симметрии оказывается полезным в теории магнитных структур.

Вместо оператора магнитного момента точкам наших материальных пространств можно было бы приписать другие физические характеристики и соответственно определить действие на них операторов ε. При этом мы каждый раз приходили бы к новой конкретной интерпретации групп обобщенной симметрии, а вновь получающиеся группы оказывались бы изоморфными уже известным обобщенным группам. Поэтому

полезно ввести пригодную для всех случаев абстрактную характеристику обобщенных групп. Такой абстрактной характеристикой условно является цвет. Точкам пространства мы приписываем цветовые (фазовые) характеристики и трактуем операторы ε как операторы изменения цвета (фазы) в фиксированных точках*.

*В такой интерпретации проблема цветной симметрии частично совпадает с проблемой раскрашивания правильных карт или групповых графов (см. Ф. Харди, 1973, гл. 12, 14).



Для циклических групп $\{\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^p\}$ можно условиться изменять цвета в их естественной спектральной последовательности. Например, «окрасив» точку 1 в группе $6^{(6)+}$ в красный цвет, точкам 2, 3, 4, 5, 6 мы должны приписать последовательно цвета оранжевый, желтый, зеленый, голубой, сине-фиолетовый, разделив цветовой цикл на шесть частей. Группа $6^{(6)+}$, таким образом, является «шестицветной», группа $6^{(3)+}$ будет «трехцветной» и т. д. Вообще циклическая группа $G^{(p)}$ будет p-цветной, если $\varepsilon^p = 1$.

Помимо определенных выше циклических цветных групп, существуют и другие группы с циклическим или нециклическим характером перестановок цветов. Все такие обобщенные группы можно получить расширением 18 найденных групп с помощью групп симметрии, антисимметрии и цветной симметрии $2, m, \bar{1}, 4, \bar{4}$; $1', 2', m', \bar{1}', 4', \bar{4}'$; $1^{(p)}, 2^{(p)}, m^{(p)}, \bar{1}^{(p)}, 4^{(p)}, \bar{4}^{(p)}$, совершенно так же, как кристаллографические группы — методом расширения групп вращений (ср. табл. 14). Предоставляя эту возможность читателю, мы используем здесь иной, указанный в заголовке параграфа путь.

При этом мы ограничимся кристаллографическими порядками групп перестановок цветов: $p = 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$ — и будем рассматривать только такие цветные группы $G^{(p)}$, у которых старшая кристаллографическая подгруппа G^* образует нормальный делитель, т. е. инвариантную подгруппу конечного индекса $j = p$:

$$G^{(p)} = G^* g_1^{(p_1)} \cup G^* g_2^{(p_2)} \cup \ldots \cup G^* g_j^{(p_j)}$$

$$(g_1^{(p_1)} = 1;\ g_2^{(p_2)}, \ldots, g_j^{(p_j)} \notin G^*,\ g_2^{(p_2)}, \ldots, g_j^{(p_j)} \in G^{(p)}).$$

Рис. 212. Магнитные конфигурации, обладающие симметрией точечных цветных групп $6^{(6+)}$, $6^{(6-)}$, $6^{(3+)}$, $6^{(3-)}$, группы антисимметрии $6'$ и кристаллографической группы 6.

Получаются действием комбинированных или классических операций на вектор магнитного момента, условно изображенный полярной стрелкой и имеющий у всех конфигураций одну и ту же ориентацию в точке 1. Поскольку символика цветных групп еще не установилась окончательно, рисунок предлагает читателю еще один вариант обозначений циклических цветных групп. При теоретическом анализе обобщенные группы удобно обозначать символом $G^{l,p}_{r,s,\ldots,t}$, указывая первым верхним индексом число l негеометрических независимых координат, а вторым — общую цветность группы p. В этой символике изображенные на рисунке группы запишутся как $G^6_{3,0}$; $G^3_{3,0}$; $G^1_{3,0}$ и $G_{3,0}$ (см. стр. 210 и 282)

Обозначая цветовые характеристики точек цифрами $1, 2, 3, \ldots, p$, мы будем описывать перестановки цветов как перестановки цифр

$$p_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & p \\ m_{1j} & m_{2j} & m_{3j} & \ldots & m_{pj} \end{pmatrix},$$

записывая в нижней строчке номер m_{ij} цвета, в который перешел вышестоящий номер i при выполнении преобразования p_j. Группы перестановок цветов обозначим символом $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$ и определим комбинированные операции обобщенных групп $G^{(p)}$ коммутирующими соотношениями:

$$g^{(p)} = gp = pg$$

(в случае циклических групп p совпадает с ε). Закон умножения комбинированных операций определим соотношением

$$g_i^{(p_i)} \otimes g_j^{(p_j)} = g_i g_j^{(p_i p_j)} \text{ или } g_i p_i \otimes g_j p_j = g_i g_j p_i p_j$$
$$\left(g_i, g_j \in G,\ p_i, p_j \in P,\ g_1 = 1,\ p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}\right). \qquad (2)$$

По определению, назовем цветную группу $G^{(p)}$ расширением классической группы G^* с помощью групп перестановок цветов P или порождающих* цветных групп $G^{(p)^*}$, если фактор-группа $G^{(p)}/G^*$ (состоящая из смежных классов $G^* p_i$ или $G^* g^{(p_i)}$) с законами умножения $G^* p_i \cdot G^* p_j = G^* p_i p_j$ или $G^* g_i^{(p_i)} G^* g_j^{(p_j)} = G^* g_i^{(p_i)} g_j^{(p_j)}$ изоморфна P или $G^{(p)^*}$:

$$G^{(p)}/G^* \leftrightarrow P \text{ или } G^{(p)^*}\ (P = \{p_i\},\ G^{(p)} = \{g_i p_i\},\ g_i p_i \neq 1^{(p)}).$$

Назовем обобщенные группы $G^{(p)}$ *нейтральными* (или смешанными) по цвету, если они получаются расширением групп G^* с помощью группы цветного отождествления $1^{(p)}$, которую определим как симметрическую группу S_p порядка $p! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p$, состоящую из всевозможных перестановок p цифр. Например, для случая $p = 3$ найдем

$$1^{(3)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

*В порождающих группах число цветов равно порядку группы $p^* = 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48$. На этом основании группы по модулю типа $6^{(3)\pm} (\mathrm{mod}\, 2) = \{1, 6^{(3)\pm}, (6^{(3)\pm})^2\}$, когда это ясно из контекста, можно просто обозначать $6^{(3)\pm}$ и т. д.

Под «операцией цветного отождествления» будем понимать одновременное выполнение во всех точках пространства *всех операций*, перечисленных в фигурной скобке.

Нейтральные по цвету группы определим как прямые произведения 32 кристаллографических групп G на группу цветного отождествления $1^{(p)}$:

$$G1^{(p)} = G \otimes 1^{(p)} = 1^{(p)} \otimes G.$$

Так как мы приняли $p = 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$, всего можно определить 8 групп $1^{(p)}$ и $32 \times 8 = 256$ нейтральных по цвету групп $G1^{(p)}$, в том числе 28 групп при $p = n$, 90 при $p < n$ и 138 при $p > n$, где n — порядок порождающей группы G. Очевидно, нейтральные группы не разрешают кристаллу иметь какие-либо свойства, допускающие фазовые изменения. Например, при магнитной интерпретации обобщенных групп, применяя к магнитному вектору группу операций $1^{(p)}$, мы получили бы в каждой точке звезду векторов с нулевой равнодействующей, что означает, что, группы $G1^{(p)}$ не разрешают кристаллу иметь макроскопические магнитные свойства*.

Собственно цветные группы $G^{(p)}$, изоморфные кристаллографическим группам G, получим, находя нормальные делители $G^* \lhd G$ и умножая их прямым, полупрямым или условным образом на порождающие цветные группы $G^{(p)^*}$ или группы по модулю $G^{(p)^*}\ (\mathrm{mod}\, G_1^*)$ типа $6^{(3)\pm}\ (\mathrm{mod}\, 2)$,

$$G^{(p)} = G^* \otimes G^{(p)^*},\ G^{(p)} = G^* \circledS G^{(p)^*} \text{ или } G^{(p)} = G^* \odot G^{(p)^*}\ (\mathrm{mod}\, G_1^*).$$

Изоморфизм групп $G^{(p)} \leftrightarrow G$ обеспечивается совпадением индекса s подгруппы $G^* \lhd G$ с порядком $p^* = 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48$ соответствующим образом выбранных порождающих цветных групп $G^{(p)^*}$ или $G^{(p)^*}\ (\mathrm{mod}\, G_1^*)$; при этом $G^* = G^{(p)} \cap G$, $G^{(p)}/G^* \leftrightarrow G^{(p)^*}$ или $G^{(p)^k}\ (\mathrm{mod}\, G_1^*)$. Существенно отметить, что собственно цветные группы не содержат подгруппы цветного отождествления $1^{(p)}$, т. е. цветные перестановки в них всегда комбинируются с геометрическими преобразованиями, отличными от тождественного преобразования.

В табл. 18 цветные группы представлены в виде прямых, полупрямых и условных произведений. Их символы сконструированы на базе международных обозначений кристаллографических групп: для каждого цветного элемента $g_i^{(p_i)}$ и группы в целом $G^{(p)}$ указаны их *показатели*

*В частично нейтральных цветных группах $G^{(p)}1^{(p^*)}$ группа $1^{(p^*)}$ действует на подмножестве цветов ($p^* < p$). Такие группы разрешают кристаллу иметь стационарную магнитную структуру.

цветности p_i и p. В принятой символике числа p равны произведениям показателей p_i независимых порождающих элементов; например, для группы $\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$ $p = 2\times 2\times 2$, так как эта группа порождается тремя генераторами. Числа p_i совпадают с порядками цветных элементов: $(g^{(p_i)})^{p_i} = 1$. Это означает, что в нециклических группах $G^{(p)}$ (при $p > p_i$) перестановки из p-цифр (цветов), связанные с элементами $g^{(p_i)}$ разбиваются на p_i-членные циклы:

$$p_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ m_1 & m_2 & \dots & m_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m_1 \\ m_1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \dots & m_2 \\ m_2 & \dots & 2 \end{pmatrix}\dots$$
$$\dots\begin{pmatrix} j & \dots & m_j \\ m_j & \dots & j \end{pmatrix},\ p = p_i \times j.$$

Нахождение в группах перестановок $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ всех различных разбиений p-цифр на p_i-членные циклы и допустимых комбинаций цветных и классических генераторов и составляет, если угодно, задачу вывода цветных групп $G^{(p)}$ при $p \leqslant n$. Если не ограничиваться порядками p кристаллографических групп, можно получить при этом и некристаллографические цветные группы. В более простом варианте цветные группы типа $\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$ можно просто обозначать

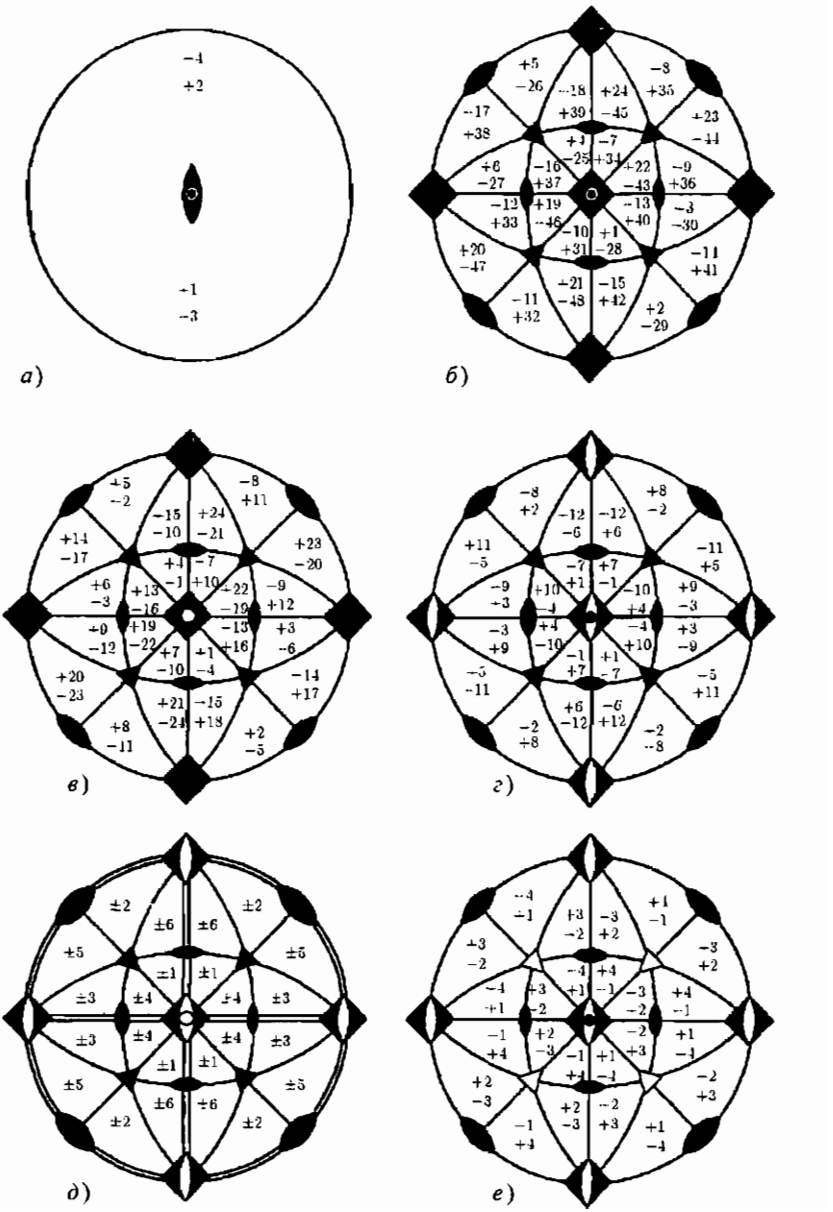
Рис. 213. Стереографические проекции точечных групп цветной симметрии:

$а$ — $(2^{(2)}/m^{(2)})^{(4)}$; $б$ — $\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}3^{-(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(48)}$;

$в$ — $\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}3^{-(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(24)}$; $г$ — $\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}3^{-(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$;

$д$ — $\left(\frac{4^{(2)}}{m}3^{-(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$; $е$ — $\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}3^{-(2)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$

(изображены условно в черно-белом варианте по схеме рис. 69).
Знаками ± указано действительное положение асимметричных точек (тетраэдров) на верхней или нижней полусфере (соответственно над или под плоскостью чертежа). Цифра условно обозначает номер цвета, приписываемый точке. Элементы цветной симметрии должны изображаться одним и тем же цветом, если они осуществляют одинаковую подстановку цветов. Элементы симметрии, соответствующие операциям классических кристаллографических подгрупп, должны изображаться черным цветом (на данных проекциях они изображены белым)


а)
б)
в)
г)
д)
е)

$\frac{2^{(8)}}{m^{(8)}}\frac{2^{(8)}}{m^{(8)}}\frac{2^{(8)}}{m^{(8)}}$, поскольку необходимую информацию о длине цикла p_i дает кристаллографический элемент: $g_i^{p_i}=1$.

Встречающиеся в табл. 18 группы по модулю $G^{(p)*}\ (\mathrm{mod}G_1^*)$ необычны в той же мере, как необычны уже известные нам группы типа $4\,(\mathrm{mod}\,2)=\{1,4\}$, $4'\,(\mathrm{mod}\,2)=\{1,4'\}$ и т. д. Употребления групп по модулю можно избежать, если рассматривать цветные группы как расширения не только кристаллографических, но и соответствующих цветных групп. В этом случае

$$(4^{(2)}2^{(2)}2^{(2)})^{(4)}=2'2'2\circledS 2''=4'\circledS 2'',\ (4^{(2)}/m^{(2)})^{(4)}=4'\otimes\bar{1}''=4'\otimes m'',$$

$$(4^{(2)}m^{(2)}m^{(2)})^{(4)}=m'm'2\circledS m''=4'\circledS m'',\ (\bar{4}^{(2)}2^{(2)}m^{(2)})^{(4)}=2'2'2\circledS m''=\bar{4}'\circledS m'',$$

$$\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}=\bar{1}^{(2)}\otimes(4^{(2)}2^{(2)}2^{(2)})^{(4)},\ \left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}=$$

$$=2'2'2\circledS\frac{2''}{m''}=2'2'2\circledS mm''2'',$$

$$(4^{(2)}3^{(3)}2^{(2)})^{(6)}=2^{(2)}\otimes(23^{(3)})^{(3)},\ \left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}=\bar{1}^{(2)}\otimes(4^{(2)}3^{(3)}2^{(2)})^{(6)},$$

$$\left(\frac{4^{(2)}}{m}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}=\bar{1}\otimes(\bar{4}^{(2)}3^{(3)}2^{(2)})^{(6)}\left(\text{здесь }\bar{1}\subset\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}=G^*\subset G^{(p)}\right)$$

(знаками $'$ и $''$ различаются независимые операторы (антисимметрии) двуцветных групп: $2'=2^{(2)}$, $2''=2^{(2)*}$, $m''=m^{(2)*}$ и т. д.).

На рис. 213*а–е* приведены в черно-белом варианте стереографические проекции цветных групп, изоморфных группам $2/m$ и $m\bar{3}m$. Схемы соответствуют рис. 69: белым цветом на них изображены элементы симметрии классических подгрупп $1(a,\ б)$, $\bar{1}(в)$, 222 $(г)$, $\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}(д)$, $23(е)$. Остальные элементы в действительности цветные, т. е. с их помощью осуществляются комбинированные преобразования типа $g^{(p)}=gp$, где $g\in G\leftrightarrow G^{(p)}$ и p — подстановка цветов (цифр), осуществляемая в данной точке негеометрической частью оператора. Знаками $\pm$ указано положение асимметричных точек (тетраэдров), проектирующихся на плоскость чертежа с верхней или нижней полусфер сферической проекции; разделение знаков проведено для удобства, каждой паре отвечает на проекции одна совмещенная точка. Все точки эквивалентных систем, изображенных на рис. 213*а–е*, цветные: «цвет» точки указывается соответствующим номером. Четырехцветная группа $(2^{(2)}/m^{(2)})^{(4)}$ состоит

из комбинированных операций

$$1 = 1\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} = 1(1)(2)(3)(4);\ 2^{(2)} = 2\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} = 2(12)(34);$$

$$m^{(2)} = m\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} = m(13)(24);\ \bar{1}^{(2)} = \bar{1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix} = \bar{1}(14)(23).$$

В правых частях приведенных уравнений, определяющих элементы $g^{(p)} = gp$ перестановки p, записаны, соответственно, в полной и сокращенной (циклической) форме (индекс (p) в $g^{(p)}$ соответствует длине цикла). Соответствующие операциям $2^{(2)}$, $m^{(2)}$, $\bar{1}^{(2)}$ элементы цветной симметрии следует покрасить в различный цвет, т. к. осуществляемые с их помощью перестановки цветов (цифр) различны. Легко убедиться в том, что и все элементы симметрии группы $\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(48)}$ должны быть покрашены в различный цвет.

По определению, элементы цветной симметрии, задаваемые первыми степенями порождающих операций g_ip_i и g_jp_j, окрашиваются в один цвет, если эти элементы осуществляют одну и ту же перестановку цветов, т. е. если $p_i = p_j$. С таким случаем мы встречаемся в группах

$$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(24)} = \bar{1}\otimes(4^{(4)}3^{(3)}2^{(2)})^{(24)};$$

$$\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)} = 222\odot\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}\ (\mathrm{mod}\ 222);$$

$$\left(\frac{4^{(2)}}{m}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)} = \frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}\odot\left(\frac{4^{(2)}}{m}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}\left(\mathrm{mod}\ \frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}\right);$$

$$\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(2)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = 23\circledS\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}.$$

В последней группе, например, со всеми диагональными плоскостями m связаны перестановки (13)(24), с центром симметрии и с координатными плоскостями m_x, m_y, m_z — перестановки (14)(23), с осями 2_i и $4_j^{(2)}$ — перестановки (12)(34) и для изображения групп, кроме черного, потребуется три цвета.

Таблица 18. Цветные группы G^p как расширения кристаллографических групп $G^* \lhd G_{(p)} \leftrightarrow G^{(p)}$

Метрическая система	G	$G \otimes j^{(p)}$	$G^{(p)} = G^* \otimes G^{(p)*}$, $G^{(p)} = G^* \circledS G^{(p)*}$, $G^{(p)} = G^* \odot G^{(p)*} \pmod{G_i^*}$
Моноклинная	$\frac{2}{m}$	$\frac{2}{m}1^{(p)}$	$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = 1 \otimes \left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$
Ромбическая	222	$2221^{(p)}$	$(2^{(2)}2^{(2)}2^{(2)})^{(4)} = 1 \otimes (2^{(2)}2^{(2)}2^{(2)})^{(4)}$
	$mm2$	$mm21^{(p)}$	$(m^{(2)}m^{(2)}m^{(2)})^{(4)} = 1 \otimes (m^{(2)}m^{(2)}m^{(2)})^{(4)}$
	$\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}1^{(p)}$	$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)} = 1 \otimes \left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$,
			$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = \bar{1} \otimes (2^{(2)}2^{(2)}2^{(2)})^{(4)}$,
			$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = 2 \otimes (m^{(2)}m^{(2)}m^{(2)})^{(4)}$,
			$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = m \otimes (2^{(2)}2^{(2)}2^{(2)}2^{(2)})^{(4)}$
Тетрагональная	4	$41^{(p)}$	$4^{(4)} = 1 \otimes 4^{(4)}$
	$\bar{4}$	$\bar{4}1^{(p)}$	$\bar{4}^{(4)} = 1 \otimes \bar{4}^{(4)}$
	422	$4221^{(p)}$	$(4^{(4)}2^{(2)}2^{(2)})^{(8)} = 1 \otimes (4^{(4)}2^{(2)}2^{(2)})^{(8)}$,
			$(4^{(2)}2^{(2)}2^{(2)})^{(4)} = 2 \odot (4^{(2)}2^{(2)}2^{(2)})^{(4)} \pmod 2$
	$\frac{4}{m}$	$\frac{4}{m}1^{(p)}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)} = 1 \otimes \left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$, $\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = \bar{1} \otimes 4^{(4)}$,
			$\left(\frac{4^{(4)}}{m}\right)^{(4)} = m \otimes 4^{(4)}$, $\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = 2 \odot \left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} \pmod 2$
	$4mm$	$4mm1^{(p)}$	$(4^{(4)}m^{(2)}m^{(2)})^{(8)} = 1 \otimes (4^{(4)}m^{(2)}m^{(2)})^{(8)}$,
			$(4^{(2)}m^{(2)}m^{(2)})^{(4)} = 2 \odot (\bar{4}^{(4)}m^{(2)}m^{(2)})^{(8)} \pmod 2$
	$\bar{4}2m$	$\bar{4}2m1^{(p)}$	$(\bar{4}^{(4)}2^{(2)}m^{(2)})^{(8)} = 1 \otimes (\bar{4}^{(4)}2^{(2)}m^{(2)})^{(8)}$,
			$(\bar{4}^{(2)}2^{(2)}m^{(2)})^{(4)} = 2 \otimes (\bar{4}^{(2)}2^{(2)}m^{(2)})^{(4)} \pmod 2$
	$\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}1^{(p)}$	$\left(\frac{4^4}{m^{(2)}}\frac{2^2}{m^{(2)}}\frac{2^2}{m^{(2)}}\right)^{(16)} = 1 \otimes \left(\frac{4^4}{m^{(2)}}\frac{2^2}{m^{(2)}}\frac{2^2}{m^{(2)}}\right)^{(16)}$,
			$\left(\frac{4^4}{m^{(2)}}\frac{2^2}{m^{(2)}}\frac{2^2}{m^{(2)}}\right)^{(8)} = \bar{1} \otimes \left(4^{(4)2^{(2)}2^{(2)}}\right)^{(8)}$,
			$\left(\frac{4^2}{m^{(2)}}\frac{2^2}{m^{(2)}}\frac{2^2}{m^{(2)}}\right)^{(8)} = 2 \odot \left(\frac{4^2}{m^{(2)}}\frac{2^2}{m^{(2)}}\frac{2^2}{m^{(2)}}\right)^{(8)} \pmod 2$,

Таблица 18. (продолжение)

Метрическая система	G	$G \otimes j^{(p)}$	$G^{(p)} = G^* \otimes G^{(p)*}$, $G^{(p)} = G^* \circledS G^{(p)*}$, $G^{(p)} = G^* \odot G^{(p)*} \pmod{G_i^*}$
Тетрагональная	$\frac{4}{m}\frac{4}{m}\frac{4}{m}$	$\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}1^{(p)}$	$\left(\frac{4^4}{m}\frac{2^2}{m^{(2)}}\frac{2^2}{m^{(2)}}\right)^{(8)} = m \otimes \left(4^{(4)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(8)}$, $\left(\frac{4}{m^{(2)}}\frac{2^2}{2^{(2)}}\frac{2^2}{2^{(2)}}\right)^{(4)} = 4\circledS\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$, $\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = \overline{4}\circledS\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$, $\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = 222\circledS\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$, $\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = mm2\circledS\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$, $\left(\frac{4^{(2)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = \frac{2}{m}\odot\left(4^{(2)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(4)} \pmod 2$
Тригональная	3	$31^{(p)}$	$3^{(3)} = 1 \otimes 3^{(3)}$
	$\overline{3}$	$\overline{3}1^{(p)}$	$\overline{3}^{(6)} = 1 \otimes \overline{3}^{(6)}$, $\overline{3}^{(3)} = 1 \otimes 3^{(3)}$
	32	$321^{(p)}$	$\left(3^{(3)}2^{(2)}\right)^{(6)} = 1 \otimes \left(3^{(3)}2^{(2)}\right)^{(6)}$
	$3m$	$3m1^{(p)}$	$\left(3^{(4)}m^{(2)}\right)^{(6)} = 1 \otimes \left(3^{(3)}2^{(2)}\right)^{(6)}$
	$\overline{3}m$	$\overline{3}m\overline{1}^{(p)}$	$\left(\overline{3}^{(6)}m^{(2)}\right)^{(12)} = 1 \otimes \left(\overline{3}^{(6)}m^{(2)}\right)^{(12)}$, $\left(\overline{3}^{(3)}m^{(2)}\right)^{(6)} = o\overline{1} \otimes \left(\overline{3}^{(3)}m^{(2)}\right)^{(6)}$, $\left(\overline{3}^3 m\right)^{(4)} = 3\circledS\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$
Гексагональная	6	$61^{(p)}$	$6^{(6)} = 1 \otimes 6^{(6)}$, $6^{(3)} = 2 \otimes 3^{(3)}$
	$\overline{6}$	$\overline{6}1^{(p)}$	$\overline{6}^{(6)} = 1 \otimes \overline{6}^{(6)}$, $6^{(3)} = m \otimes 3^{(3)}$
	$\overline{6}m2$	$\overline{6}m21^{(p)}$	$\left(\overline{6}^{(6)}m^{(2)}2^{(2)}\right)^{(12)} = 1 \otimes \left(\overline{6}^{(6)}m^{(2)}2^{(2)}\right)^{(12)}$, $\left(\overline{6}^{(3)}m2^{(2)}\right)^{(6)} = m \otimes \left(3^{(3)}2^{(2)}\right)^{(6)}$, $\left(\overline{6}^{(2)}m^{(2)}2^{(2)}\right)^{(4)} = 3\circledS\left(m^{(2)}m^{(2)}2^{(2)}\right)^{(4)}$
	622	$6221^{(p)}$	$\left(6^{(6)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(12)} = 1 \otimes \left(6^{(6)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(12)}$, $\left(6^{(3)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(6)} = 2 \otimes \left(3^{(3)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(6)}$, $\left(6^{(2)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(4)} = 3\circledS\left(2^{(2)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(4)}$,
	$\frac{6}{m}$	$\frac{6}{m}1^{(p)}$	$\left(\frac{6^{(6)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)} = 1 \otimes \left(\frac{6^{(6)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$, $\left(\frac{6^{(3)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)} = 2 \otimes \overline{6}^{(6)}$,

Таблица 18. (продолжение)

Метрическая система	G	$G \otimes j^{(p)}$	$G^{(p)} = G^* \otimes G^{(p)*}$, $G^{(p)} = G^* \circledS G^{(p)*}$, $G^{(p)} = G^* \odot G^{(p)*} \pmod{G_i^*}$
Гексагональная	$\frac{6}{m}$	$\frac{6}{m}1^{(p)}$	$\left(\frac{6^{(6)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)} = \bar{1} \otimes 6^{(6)}$, $\left(\frac{6^{(6)}}{m}\right)^{(6)} = m \otimes 6^{(6)}$,
			$\left(\frac{6^{(3)}}{m}\right)^{(3)} = \frac{2}{m} \otimes 3^{(3)}$, $\left(\frac{6^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = 3 \otimes \left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$.
	$6mm$	$6mm1^{(p)}$	$(6^{(6)}m^{(2)}m^{(2)})^{(12)} = 1 \otimes (6^{(6)}m^{(2)}m^{(2)})^{(12)}$,
			$(6^{(3)}m^{(2)}m^{(2)})^{(6)} = 2 \otimes (3^{(3)}m^{(2)})^{(6)}$,
			$(6^{(2)}m^{(2)}m^{(2)})^{(4)} = 3 \circledS (2^{(2)}m^{(2)}m^{(2)})^{(4)}$,
	$\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}1^{(p)}$	$\left(\frac{6^{(6)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(24)} = 1 \otimes \left(\frac{6^{(6)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(24)}$,
			$\left(\frac{6^{(6)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)} = \bar{1} \otimes \left(6^{(6)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(12)}$,
			$\left(\frac{6^{(3)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)} = 2 \otimes \left(\bar{6}^{(6)}m^{(2)}2^{(2)}\right)^{(12)}$,
			$\left(\frac{6^{(6)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)} = m \otimes \left(6^{(6)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(12)}$,
			$\left(\frac{6^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)} = 3 \circledS \left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$,
			$\left(\frac{6^{(3)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)} = \frac{2}{m} \otimes \left(3^{(3)}2^{(2)}\right)^{(6)}$,
			$\left(\frac{6^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = \bar{3} \circledS \left(2^{(2)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(4)}$,
			$\left(\frac{6^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = 32 \circledS \left(m^{(2)}m^{(2)}2^{(2)}\right)^{(4)}$,
			$\left(\frac{6^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = 3m \circledS \left(2^{(2)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(4)}$,
			$\left(\frac{6}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = 6 \circledS \left(m^{(2)}m^{(2)}2^{(2)}\right)^{(4)}$,
			$\left(\frac{6^{(2)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = \bar{6} \circledS \left(2^{(2)}2^{(2)}2^{(2)}\right)^{(4)}$,
Кубическая	23	$231^{(p)}$	$(2^{(2)}3^{(3)})^{(12)} = 1 \otimes (2^{(2)}3^{(3)})^{(12)}$, $(23^{(3)})^{(3)} = 222 \circledS 3^{(3)}$
	432	$4321^{(p)}$	$(4^{(4)}3^{(3)}2^{(2)})^{(24)}$,
			$(4^{(2)}3^{(3)}2^{(2)})^{(6)} = 222 \odot (4^{(2)}4^{(3)}2^{(2)}) \pmod{222}$

Таблица 18. (окончание)

Метрическая система	G	$G \otimes j^{(p)}$	$G^{(p)} = G^* \otimes G^{(p)*}$, $G^{(p)} = G^* \circledS G^{(p)*}$, $G^{(p)} = G^* \odot G^{(p)*} \pmod{G_i^*}$
Кубическая	$\frac{2}{m}\bar{3}$	$\frac{2}{m}\bar{3}1^{(p)}$	$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\right)^{(24)} = 1 \otimes \left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\right)^{(24)}$, $\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\right)^{(12)} = \bar{1} \otimes (2^{(2)}3^{(3)})^{(12)}$, $\left(\frac{2}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\right)^{(6)} = 222 \circledS \bar{3}^{(6)}$, $\left(\frac{2}{m}\bar{3}^{(3)}\right)^{(3)} = \frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m} \circledS 3^{(3)}$
	$\bar{4}3m$	$\bar{4}3m1^{(p)}$	$(\bar{4}^{(4)}3^{(3)}m^{(2)})^{(24)} = 1 \otimes (\bar{4}^{(4)}3^{(3)}m^{(2)})^{(24)}$, $(\bar{4}^{(2)}3^{(3)}m^{(2)})^{(6)} = 222 \circledS (3^{(3)}m^{(2)})^{(6)}$
	$\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$	$\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}1^{(p)}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(48)} = 1 \otimes \left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(48)}$, $\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(24)} = \bar{1} \otimes (4^{(4)}3^{(3)}2^{(2)})^{(24)}$, $\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)} = 222 \odot \left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)} \pmod{222}$, $\left(\frac{4^{(2)}}{m}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)} = \frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m} \odot \left(\frac{4^{(2)}}{m}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)} \cdot (\mathrm{mod}\ \frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m})$, $\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(2)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)} = 23 \circledS \left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$
Всего		256	$28G^{(p)} = 1 \otimes G^{(p)*}$, $53G^{(p)}$ = прямых, полупрямых и условных произведений

Как на рис. 213*а–е*, так и в табл. 18 символы 81 группы $G^{(p)}$ приводятся без различения цветного энантио- и полиморфизма; с учетом цветного энантио- и полиморфизма число групп $G^{(p)\pm}$ возрастает до 134. Из этого числа лишь 37 групп генерирующих: 28 тривиальных $G^{(p)} = 1 \otimes G^{(p)}$ и 9 групп $G^{(p)} (\mathrm{mod} G_i^*)$. Группы с цветными циклическими перестановками были получены впервые Ниггли (1959) и Инденбомом, Беловым и Нероновой (1960). Группы, содержащие нормальные классические делители, рассмотрел Виттке (1962). Рациональная символика, стереографические проекции и представления цветных групп в форме произведений сомножителей приводятся в настоящей работе впервые. Группы $G_M^{(p)} = G^* \cdot G^{(p)*}$ табл. 18 можно пополнить 73 группами Виттке–Гарридо $G_{WG}^{(p)} = G^{(p)*} \cdot G^*$ и изоморф-

ными им 73 группами Ван дер Вардена – Буркхарда $G^{(p)}_{WB} = G^{(p_1)^*} \cdot G^{(p_2)^*}$, не содержащими нетривиальных инвариантных классических подгрупп. Используя известные группы $(4^{(2)}m^{(2)}m^{(2)})^{(4)} = 4^{(2)}\circledS m^{(2)^*}$, $(4^{(2)}2^{(2)}2^{(2)})^{(4)} = 4^{(2)}\circledS 2^{(2)^*}$, $(\bar{4}^{(2)}2^{(2)}m^{(2)})^{(4)} = \bar{4}^{(2)}\circledS m^{(2)^*}$ как модель (см. стр. 302), получим, например, новые группы Виттке – Гарридо $(4^{(4)\pm}mm^{(2)})^{(4)} = 4^{(4)}\circledS m$, $(4^{(4)\pm}22^{(2)})^{(4)} = 4^{(4)}\circledS 2$, $(\bar{4}^{(4)\pm}2m^{(2)})^{(4)} = \bar{4}^{(4)}\circledS 2$, $(\bar{4}^{(4)\pm}2^{(2)}m)^{(4)} = \bar{4}^{(4)}\circledS m$ и дер Вардена—Буркхарда $(4^{(4)} + m^{(2)}m^{(2)})^{(4)} = 4^{(4)}\circledS m^{(2)}$, $(4^{(4)} + 2^{(2)}2^{(2)})^{(4)} = 4^{(4)}\circledS 2^{(2)}$, $(\bar{4}^{(4)} + 2^{(2)}m^{(2)})^{(4)} = 4^{(4)}\circledS 2^{(2)}$, $(4^{(4)} + 2^{(2)}m^{(2)})^{(4)} = \bar{4}^{(4)}\circledS m^{(2)}$. Подгруппа $G^{(p_2)^*} \subset G^{(p)}_{WB}$ сохраняет у последних фиксированный цвет; тип цветной подстановки $G^{(p)^*}$ у групп $G^{(p)}_{WG}$ зависит от выбора точки. Вывод всех $G^{(p)}_{WB}$ и $G^{(P)}_{WG}$ групп был сделан в 1972 г. в кандидатской диссертации нашего аспиранта Кужукеева (см. резюме книги, стр. 16).

Пространственные (беловские) группы цветной симметрии $Б$ как расширения классических (федоровских) пространственных групп $Ф$ или как расширения трансляционных групп $Т$

Пространственные группы цветной симметрии находятся в таком же отношении к классическим федоровским группам, в каком находятся кристаллографические группы цветной симметрии по отношению к точечным кристаллографическим группам. В честь автора идеи цветной симметрии мы будем называть их *беловскими группами*. В этих трехмерных группах в дополнение к операциям движений $\phi_i \in Ф$ и антидвижений $ш_i \in Ш$ встречаются еще и цветные движения, которые мы определим как комбинированные преобразования

$$б_i^{(p)} = \phi_i 1^{(p)} = 1^{(p)}\phi_i$$

или, в частном случае, как преобразования

$$б_i^{(p)} = \phi_i p_i = p_i \phi_i,$$

где p_i — перестановки цветов из группы цветного отождествления, $p_i \in p \subset S_p = 1^{(p)}$ совместимые с геометрическими преобразованиями. Следовательно, приведенный на стр. 282 список операций простран-

ственных Φ и $Ш$-групп пополнится преобразованиями цветной симметрии

$$\begin{array}{ccccc} 1^{(p)} & 2^{(p)} & 3^{(p)} & 4^{(p)} & 6^{(p)} \\ \bar{1}^{(p)} & m^{(p)} & \bar{3}^{(p)} & \bar{4}^{(p)} & \bar{6}^{(p)} \\ \tau^{(p)} & 2_1^{(p)} & 3_1^{(p)} & 4_1^{(p)} & 6_1^{(p)} \\ & a^{(p)} & 3_2^{(p)} & 4_2^{(p)} & 6_2^{(p)} \\ & b^{(p)} & & 4_3^{(p)} & 6_3^{(p)} \\ & c^{(p)} & & & 6_4^{(p)} \\ & d^{(p)} & & & 6_5^{(p)} \\ & n^{(p)} & & & \end{array}$$

Соответственно расширению списка операций пространственные группы цветной симметрии можно рассматривать двояко: или как расширения федоровских групп Φ с помощью циклических групп, порождаемых степенями операций $1^{(p)}$, $\bar{1}^{(p)}$, $\tau^{(p)}$; $2^{(p)}$, $2_1^{(p)}$, $m^{(p)}$, $a^{(p)}$, $b^{(p)}$, $c^{(p)}$, $d^{(p)}$, $n^{(p)}$; $4^{(p)}$, $\bar{4}^{(p)}$, $4_1^{(p)}$, $4_2^{(p)}$, $4_3^{(p)}$, или как расширения трансляционных групп T с помощью конечных кристаллографических цветных групп $G1^{(p)}$, $G^{(p)}$ (и изоморфных им групп по модулю $G^{(p)} \pmod{G_1^*}$) и дополнительно с помощью конечного цикла одномерных цветных переносов (группы по модулю)

$$\tau^{(p)} \pmod{\tau} = \{\tau^{(p)}, (\tau^{(p)})^2, \ldots, (\tau^{(p)})^p = \tau \equiv 0 \pmod{\tau}\};$$

в произведении с группой T последняя определяет трехмерную центрированную группу переносов и цветных переносов $T_{\tau^{(p)}}$. Для нашего рассмотрения мы выберем второй путь, ограничившись случаем существования у $Б$-групп нормальных делителей — федоровских подгрупп индекса $p = 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$.

Очевидно при этих условиях существует 1840 нейтральных (смешанных) по цвету беловских групп трех категорий: $p < n$, $p = n$, $p > n$ (ср. стр. 299),

$$\Phi 1^{(p)} = \Phi \otimes 1^{(p)} \; (\Phi 1^{(p)} = TG1^{(p)} = TG \otimes 1^{(p)})$$

(число $1840 = 230 \times 8$ получается от перемножения числа федоровских групп на число типов групп $1^{(p)}$). Все эти группы, как мы уже знаем, не допускают определения у кристаллических дисконтинуумов каких-либо свойств, испытывающих фазовые (цветовые) изменения (ср. примечание, стр. 299).

Вывод собственно цветных групп, не содержащих подгруппы $1^{(p)}$, был начат в 1969 г. работой А. М. Заморзаева, который произвел подсчет числа трех-, четырех-, шестицветных пространственных групп и получил соответствующие цветные решетки. Собственно цветные группы распадаются на две категории: на группы, не содержащие цветных переносов, и на группы с цветными переносами. Кроме того, в обоих случаях различают еще симморфные и несимморфные группы.

Рассмотрим вначале примеры всех типов групп.

На рис. IV (цв. вклейка) изображены проекции элементов симметрии четырех моноклинных четырехцветных групп, не содержащих цветных переносов: одной симморфной и трех несимморфных. Рядом с ними представлены проекции эквивалентных систем асимметричных фигур (тетраэдров), занимающих общие положения в соответствующих элементарных ячейках; знаками «плюс» и «минус» отмечены координаты тетраэдров вдоль оси b, косо наклоненной к чертежу; оси a, c лежат в плоскости чертежа, причем ось c совпадает с направлением двойных (простых или винтовых) осей, изображенных на полях чертежа двусторонними или односторонними стрелками; оси a, b наклонены к оси c под прямым углом.

Симморфную группу $P(2^{(2)}/m^{(2)})^{(4)}$ мы можем рассматривать как полупрямое произведение инвариантной подгруппы переносов P, определяемой векторным базисом $\{a, b, c\}$, и цветного класса $(2^{(2)}/m^{(2)})^{(4)}$:

$$P(2^{(2)}/m^{(2)})^{(4)} = P\circledS\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}.$$

Иными словами, $P(2^{(2)}/m^{(2)})^{(4)}$ есть трехмерно-периодическая совокупность групп $(2^{(2)}/m^{(2)})^{(4)}$. Убедимся в этом, выполняя произведение ортогональных преобразовании $g^{(p)}$ (соответствующих элементам симметрии, пересекающимся в левом верхнем углу элементарной ячейки) на трансляции τ. Доказательство теорем о произведениях $\tau g^{(p)}$ будем проводить чисто геометрически, не вводя соответствующих выражений для операторов (методом *диаграммной* техники), следя за судьбой тетраэдра, принятого за исходный в левом верхнем углу ячейки.

Покажем что произведение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{2}^{(2)} = \mathbf{2}^{(2)^*}$. Действительно, под действием цветного поворота $\mathbf{2}^{(2)}$ исходный черный тетраэдр переходит в зеленый в верхнем левом углу ячейки; под действием переноса $\mathbf{a}$ зеленый тетраэдр перемещается параллельно себе в нижнюю часть ячейки. В результате исходный черный тетраэдр вверху переходит в зеленый тетраэдр внизу элементарной ячейки, что эквивалентно применению операции $\mathbf{2}^{(2)^*}$. Подобным же образом найдем произведения (выполняя их

в последовательности справа налево)

$$\mathbf{c}\cdot m^{(2)}=m^{(2)k},\ \mathbf{c}\cdot\bar{1}^{(2)}=\bar{1}^{(2)*}\ \text{и т. д.}$$

В результате получаем все производные элементы симметрии, которые в совокупности с исходными наборами элементов, пересекающимися в вершинах элементарной ячейки, определяют группу $P(2^{(2)}/m^{(2)})^{(4)}$.

Для несимморфных групп соответствующие произведения преобразований получаем таким же образом:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{a}\cdot 2_1^{(2)}=2_1^{(2)*},\ \mathbf{c}\cdot m^{(2)}=m^{(2)*},\ \mathbf{c}\cdot\bar{1}^{(2)}=\bar{1}^{(2)*} & \text{в группе } P(2_1^{(2)}/m^{(2)})^{(4)}, & \\
\mathbf{a}\cdot 2^{(2)}=2^{(2)*},\ \mathbf{c}\cdot b^{(2)}=b^{(2)*}, \quad \mathbf{c}\cdot\bar{1}^{(2)}=\bar{1}^{(2)*} & \text{в группе } P(2^{(2)}/b^{(2)})^{(4)}, & \to P2/c \\
\mathbf{a}\cdot 2_1^{(2)}=2_1^{(2)*},\ \mathbf{c}\cdot b^{(2)}=b^{(2)*}, \quad \mathbf{c}\cdot\bar{1}^{(2)}=\bar{1}^{(2)*} & \text{в группе } P(2_1^{(2)}/b^{(2)})^{(4)}, & \to P2_1/c
\end{array}$$

Приведем доказательство для группы $P(2_1^{(2)}/b^{(2)})^{(4)}$, предоставляя читателю разбор остальных случаев. Под действием операции $2_1^{(2)}$ левый верхний черный тетраэдр переходит в положение верхнего зеленого тетраэдра, который смещается под действием трансляции $\mathbf{a}$ к нижней стороне элементарной ячейки. То же самое преобразование тетраэдров из исходного положения в конечное может быть описано как цветной винтовой поворот вокруг оси $2_1^{(2)*}$, расположенной на уровне $1/4$ параметра $\mathbf{b}$ элементарной ячейки. Следовательно, $\mathbf{a}\cdot 2_1^{(2)}=2_1^{(2)*}$. Таким же образом в произведении операций $\mathbf{c}\cdot b^{(2)}$ черный тетраэдр после отражения в плоскости скользящего отражения переходит в положение синего тетраэдра на уровне $1/2$; затем он смещается вправо на вектор $\mathbf{c}$, и результат эквивалентен операции $b^{(2)*}$. В заключение находим и $\mathbf{c}\cdot\bar{1}^{(2)}=\bar{1}^{(2)*}$.

Итак, несмотря на то, что наборы преобразований $\{1,2_1^{(2)},\bar{1}^{(2)},m^2\}$, $\{1,2^{(2)},\bar{1}^{(2)},b^{(2)}\}$, $\{1,2_1^{(2)},\bar{1}^{(2)},b^{(2)}\}$ в рассмотренных несимморфных группах не образуют точечных групп в собственном смысле этого слова, произведения этих преобразований на трансляции выполняются по общим правилам. Поэтому и несимморфные группы $\mathcal{Б}_{\text{нес}}$ мы можем рассматривать как расширения трансляционных групп T с помощью указанных наборов операций $G^{(p)}\,(\mathrm{mod}\,T)$

$$\mathcal{Б}=T\bigcirc G^{(p)}\,(\mathrm{mod}\,T),$$

что и находит отражение в международных символах пространственных групп. Сами наборы операций мы можем называть, если угодно, группами по модулю $G^{(p)}\,(\mathrm{mod}\,T)$, изоморфными старшим точечным группам симморфных пространственных групп (см. стр. 260, 269 и др.).

Рассмотренные примеры показывают, что каждая беловская группа $Б$, не содержащая цветных переносов, изоморфна некоторой федоровской группе $Ф$ (симморфной или несимморфной):

$$Б_{\text{сим}}=T\circledS G^{(p)} \leftrightarrow T\circledS G=Ф_{\text{сим}},\ Б_{\text{нес}}=T\bigcirc G^{(p)}\ (\mathrm{mod}\ T) \leftrightarrow T\bigcirc G^{T}=Ф_{\text{нес}}.$$

Поэтому $Б$-группа будет полностью определена, если задать изоморфную ей федоровскую группу $Ф$ и «точечные» группы $G^{(p)}$, $G^{(p)}\ (\mathrm{mod}\ T)$ (или общую $Б$ и $Ф$-группам подгруппу $Ф^{*}=Б\cap Ф$).

Переходим к категории беловских групп, содержащих цветные переносы $\tau^{(p)}$. Определим одномерные группы переносов и цветных переносов, порождаемые векторами $\tau^{(3)}, \tau^{(4)}, \tau^{(6)}$ (рис. V (цв. вклейка)). По определению в трансляционных группах групповой операцией является операция сложения векторов. Сумма трех векторов $\tau^{(3)}$ дает классический вектор переноса τ, входящий в группу трансляций T.

Длины цветовых циклов $(\tau^{(p)})^{p}$ определятся из уравнений

$$(\tau^{(3)})^{3}=\tau^{(3)}+\tau^{(3)}+\tau^{(3)}=3\tau^{*}=\tau\in T;\ \tau^{(3)}\in T_{\tau^{(3)}},$$

$$(\tau^{(4)})^{4}=\tau^{(4)}+\tau^{(4)}+\tau^{(4)}+\tau^{(4)}=4\tau^{*}=\tau\in T;\ \tau^{(4)}\in T_{\tau^{(4)}},$$

$$(\tau^{(6)})^{6}=\tau^{(6)}+\tau^{(6)}+\tau^{(6)}+\tau^{(6)}+\tau^{(6)}+\tau^{(6)}=6\tau^{*}=\tau\in T;\ \tau^{(6)}\in T^{\tau^{(6)}}.$$

Здесь через $T_{\tau^{(p)}}$ обозначена группа переносов и цветных переносов; символ T определяет группу чистых переносов, а подстрочный индекс — центрирующий цветной перенос. Через τ^{*} обозначен классический вектор, равный по длине вектору $\tau^{(p)}$. Очевидно, что группы $T_{\tau^{*}}$ и $T_{\tau^{(p)}}$ изоморфны и имеют общую (сверхструктурную) подгруппу T:

$$T_{\tau^{*}} \leftrightarrow T; \qquad T=T_{\tau^{*}}\cap T_{\tau^{(p)}}.$$

Оба сформулированных утверждения остаются справедливыми и в трехмерном случае. Если к векторному базису трехмерной трансляционной решетки $T=\{a, b, c\}$ добавим центрирующий цветной перенос $\tau^{(p)}$, получим цветную трансляционную решетку $T_{\tau^{(p)}}=\{a, b, c, \tau^{(p)}\}$ при выполнении следующих трех условий:

1) вектор $p\tau^{*}=\tau=(\tau^{(p)})^{p}$, определяющий длину цветового цикла, должен принадлежать решетке $T=\{a, b, c\}$;

2) направление центрирующего вектора $\tau^{(p)}$ должно быть выбрано так, чтобы обе решетки $T=\{a, b, c\}$ и $T_{\tau^{(p)}}=\{a, b, c, \tau^{(p)}\}$ принадлежали одной метрической системе;

3) преобразования векторов $\boldsymbol{\tau}^{(p)} \to -\boldsymbol{\tau}^{(p)}$ запрещены, так как при перемене знака цветного вектора цветной цикл меняется на обратный; справедливым будет следующее правило нахождения обратных цветных векторов:

$$(\boldsymbol{\tau}^{(p)})^{-1} \to -\boldsymbol{\tau}^{(-p)}; \quad \boldsymbol{\tau}^{(p)} \cdot (-\boldsymbol{\tau}^{(-p)}) = \boldsymbol{\tau}^{(0)} = 1, \quad p > 2.$$

В силу последнего условия центросимметричные кристаллографические группы, меняющие знак вектора $\boldsymbol{\tau}^{(p)}$, не допускают построения цветных решеток*. Преобразования $T_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}} = \{a, b, c, \boldsymbol{\tau}^{(p)}\}$ могут комбинироваться только с такими группами G, G' и $G^{(p)}$, которые не содержат центра симметрии $\bar{1}$, а также осей $\mathbf{2}$ и плоскостей m в перпендикулярном к вектору $\boldsymbol{\tau}^{(p)}$ положении. Взяв за основу 14 решеток Бравэ и центрируя их двух-, трех-, четырех- и шестицветными векторами $\boldsymbol{\tau}^{(p)}$, можно построить (при соблюдении условий 1—3) 76 цветных решеток с максимально высокой пространственной симметрией $\mathcal{B}_{\text{сим}} = T_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}} \circledS G$. В число этих решеток входят три триклинных $P_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}1$; 22 моноклинных: $6P_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}2$, $6P_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}m$, $5B_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}2$, $5B_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}m$; 30 ромбических: $9P_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}mm2$, $6C_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}mm2$, $6B_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}mm2$, $3I_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}mm2$, $I_{\mathcal{J}^{(p)}}222$, $5F_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}mm2$; 10 тетрагональных: $6P_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}4mm$, $3I_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}4mm$, $I_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}\bar{4}2m$; 5 тригональных: $3R_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}3m$, $2P_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}31m$; 5 гексагональных: $3P_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}6mm$, $2P_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}\bar{6}m2$; одна кубическая решетка $I_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}23 \subset I_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}\bar{4}3m$. В табл. 19 для всех решеток приводятся международные символы старших пространственных групп — трех-, четырех- и шестицветных; цветность решетки p определяется произведением цветностей p_1 и p_2 генерирующих цветных переносов; при $p_1 \times p_2 > 6$ цветные переносы не являются независимыми. Прописными буквами в таблице обозначены классические решетки Бравэ $T \subset T_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}$, заданные примитивными базисами P и $R = \{a, b, c\}$, $B = \left\{a, b, \dfrac{a+c}{2}\right\}$, $C = \left\{a, \dfrac{a+b}{2}, c\right\}$, $I = \left\{a, b, \dfrac{a+b+c}{2}\right\}$, $F = \left\{a, \dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+c}{2}\right\}$. Главная ось выбирается по оси c, а в ромбоэдрической решетке — по вектору $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Подстрочные индексы указывают, какие из базисных векторов заменены цветными векторами при переходе к группам $T_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}$.

Замена в символах $T_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}G$ старших групп G их подгруппами (принадлежащими той же метрической системе), а также всех групп G —

*См., однако, примечание к табл. 19, стр. 315. Четырехцветные решетки возможны при $P \leftrightarrow 222, 2'2'2, 21', \ldots \leftrightarrow D_2$, восьмицветные — при $P \leftrightarrow 2221' \leftrightarrow D_2h$, 2-,4- и 8-цв. решетки $T_{a^{(2)}}$, $T_{a^{(2)}b^{(2)}}$, $T_{a^{(2)}b^{(2)}c^{(2)}}$ возможны для $G \ni T$, т. к. $p = 2$ для каждого $\boldsymbol{\tau}^{(p)} \in T_{\boldsymbol{\tau}^{(p)}}$ примеры в примечании к табл. 19.

изоморфными им группами антисимметрии G' и цветными группами $G^{(p)}$ позволяет построить все симморфные группы типов $Б = T_{\tau^{(p)}} Ⓢ G$, $Б = T_{\tau^{(p)}} Ⓢ G'$ и $Б = T_{\tau^{(p)}} Ⓢ G^{(p_2)}$. В свою очередь, замена групп G, G' и $G^{(p)}$ соответствующими группами по модулю дает несимморфные группы типов $Б = T_{\tau^{(p)}} \bigcirc G^T$, $Б = T_{\tau^{(p)}} \bigcirc G^{T'}$ и $Б = T_{\tau^{(p_1)}} \bigcirc G^{(p_2)} \pmod T$. Напомним, что, кроме всех этих групп, существуют еще и группы, не содержащие цветных переносов: симморфные $Б = T Ⓢ G^{(p)}$ и несимморфные $Б = T \bigcirc G^{(p)} \pmod T$.

Теоремы об изоморфизме позволяют предложить для беловских групп с цветными переносами трехчленные символы

$$Б - \left|\frac{T_{\tau^*}}{T_{\tau^{(p)}}}\right| G \quad \text{или} \quad T_{\tau^{(p)}} G - \left|\frac{\{a,b,c,\tau^*\}}{\{a,b,c,\tau^{(p)}\}}\right| G$$

и такие же символы, в которые вместо G входят группы $G^{(p)}$, G^T, $G^{(p)} \pmod T$.

По этим символам легко осуществляется построение элементов симметрии $Б$-групп и находится другая необходимая информация. В качестве примера на рис. VI (цв. вклейка) построены проекции двух групп с цветными переносами, определяемые трехчленными символами

$$P_{a^{(3)}} 1 - \left|\frac{\{3a,b,c,a\}}{\{3a,b,c,a^{(3)}\}}\right| 1 \quad \text{и} \quad P_{c^{(3)}} 2 - \left|\frac{\{a,b,3c,c\}}{\{a,b,3c,c^{(3)}\}}\right| 2.$$

Подчеркнем еще раз, что цветность пространственной группы $Б = T_{\tau^{(p_1)}} \cdot G^{(p_2)}$ может быть произведением или наименьшим общим кратным цветности генераторов p_1 и p_2. При выполнении некоторых условий p-цветные группы существуют для всех чисел $p = 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 28, 48$, так что ограничение класса рассмотренных групп цветностью генераторов $p = 3, 4, 6$ не является необходимым. Например, если точечная группа кристалла допускает одновременно $\tau^{(3)}$, $\tau^{(4)}$, $\tau^{(6)}$, то она допускает $\tau^{(p)}$ при любом конечном p. Это открывает путь для вывода цветных решеток и групп при $p > 6$.

Подводя итоги главы, напомним, что вывод цветных групп — инвариантных расширений классических — сводится: 1) к разысканию нормальных делителей порождающих групп $G^* \lhd G \leftrightarrow G^{(p)}$; 2) к построению конкретных цветных реализации фактор-групп G/G^* в виде изоморфных им групп $G^{(p)*}$ или групп по модулю $G^{(p)*} \pmod{G_1^*}$; 3) к «перемножению» генерирующих групп G^* на $G^{(p)*}$ или $G^{(p)*} \pmod{G_1^*}$. Таким путем получаются 817 беловских групп $Б^{(p)*}$ циклической фактор-группой

Таблица 19. Беловские пространственные группы трех-, четырех- и шестицветных решеток

Триклинная система	$P_{a^{(3)}}1;\ P_{a^{(4)}}1;\ P_{a^{(6)}}1$
Моноклинная система	(ось $2 \parallel c$, плоскость $m \perp c$) $P_{c^{(3)}}2;\ P_{c^{(4)}}2;\ P_{c^{(6)}}2;\ P_{a^{(2)}c^{(3)}}2;\ P_{a^{(2)}c^{(4)}}2;\ P_{a^{(2)}c^{(6)}}2;\ P_{a^{(3)}}m;$ $P_{a^{(4)}}m;\ P_{a^{(6)}}m;\ P_{a^{(3)}c^{(2)}}m;\ P_{a^{(4)}c^{(2)}}m;\ P_{a^{(6)}c^{(2)}}m;\ B_{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(3)}}2;$ $B_{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(4)}}2;\ B_{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(6)}}2;\ B_{b^{(2)}\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(3)}}2;\ B_{b^{(2)}\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(4)}}2;\ B_{b^{(3)}}m;$ $B_{b^{(4)}}m;\ B_{b^{(6)}}m;\ B_{a^{(3)}\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(6)}}m;\ B_{a^{(2)}\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(4)}}m$
Ромбическая система	$P_{c^{(3)}}mm2;\ P_{c^{(4)}}mm2;\ P_{c^{(6)}}mm2;\ P_{a^{(2)}c^{(3)}}mm2;\ P_{a^{(2)}c^{(4)}}mm2;$ $P_{a^{(2)}c^{(6)}}mm2;\ P_{a^{(2)}b^{(2)}c^{(3)}}mm2;\ P_{a^{(2)}b^{(2)}c^{(4)}}mm2;\ P_{a^{(2)}b^{(2)}c^{(6)}}mm2;$ $C_{c^{(3)}}mm2;\ C_{c^{(4)}}mm2;\ C_{c^{(6)}}mm2;\ C_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{(2)}c^{(3)}}mm2;$ $C_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{(2)}c^{(4)}}mm2;\ C_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{(2)}c^{(6)}}mm2;\ B_{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(3)}}mm2;$ $B_{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(4)}}mm2;\ B_{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(6)}}mm2;\ B_{b^{(2)}\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(3)}}mm2;$ $B_{b^{(2)}\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(4)}}mm2;\ B_{b^{(2)}\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(6)}}mm2;\ I_{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{(3)}}mm2;$ $I_{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{(4)}}mm2;\ I_{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{(6)}}mm2;\ I_{a^{(2)}b^{(2)}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{(4)}}222;$ $F_{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(3)}}mm2;\ F_{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(4)}}mm2;\ F_{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(6)}}mm2;$ $F_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{(2)}\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(3)}}mm2;\ F_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{(2)}\left(\frac{a+c}{2}\right)^{(4)}}mm2$
Тетрагональная система	$P_{c^{(3)}}4mm;\ P_{c^{(4)}}4mm;\ P_{c^{(6)}}4mm;$ $P_{a^{(2)}b^{(2)}c^{(3)}}4mm;\ P_{a^{(2)}b^{(2)}c^{(4)}}4mm;\ P_{a^{(2)}b^{(2)}c^{(6)}}4mm;$ $I_{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{(3)}}4mm;\ I_{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{(4)}}4mm;$ $I_{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{(6)}}4mm;\ I_{a^{(2)}b^{(2)}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{(4)}}\bar{4}2m.$
Тригональная система	$R_{a^{(3)}b^{(3)}c^{(3)}}3m;\ R_{a^{(4)}b^{(4)}c^{(4)}}3m;\ R_{a^{(6)}b^{(6)}c^{(6)}}3m;$ $P_{a^{(3)}b^{(3)}c^{(3)}}31m;\ P_{a^{(3)}b^{(3)}c^{(6)}}31m;$
Тексагональная система	$P_{c^{(3)}}6mm;\ P_{c^{(4)}}6mm;\ P_{c^{(6)}}6mm;\ P_{a^{(3)}b^{(3)}}\bar{6}2m;\ P_{a^{(3)}b^{(3)}c^{(2)}}\bar{6}2m.$
Кубическая система	$I_{a^{(2)}b^{(2)}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{(4)}}\bar{4}3m.$

Примечание. Табл. 19 составлена по данным работы А. М. Заморзаева, (1969). Международные символы пространственных групп указываются максимально высокую симметрию, совместимую с существованием цветных решеток.

Кроме 76 циклических по цвету решеток, существует еще 11 четырехцветных решеток с нециклическими перестановками цветов: $P_{a^{(2)}b^{(2)}}\bar{1}$, $P_{a^{(2)}b^{(2)}}2/m$, $P_{a^{(2)}c^{(2)}}2/m$, $P_{b^{(2)}(a+c)^{(2)}}2/m$, $B_{a^{(2)}b^{(2)}}2/m$, $P_{a^{(2)}c^{(2)}}mmm$, $P_{a^{(2)}(b+c)^{(2)}}mmm$, $P_{(a+b)^{(2)}(a+c)^{(2)}}mmm$, $C_{a^{(2)}c^{(2)}}mmm$, $I_{a^{(2)}c^{(2)}}mmm$, $P_{c^{(2)}(a+b)^{(2)}}4/mmm$

при $p = 3, 4, 6$. Нециклические фактор-группы реализуемые цветными группами, изоморфными группами $2/m$, 222, $mm2$, порождают 1843 четырехцветные беловские группы типа $Б^{(2}Б^{2)}$; каждую из них можно рассматривать как группу двукратной антисимметрии. Нециклические цветные фактор-группы , изоморфные группам 32 и $3m$, порождают 278 шестицветных беловских групп в виде произведений $Б^{(3}Б^{2)}$ трехцветных групп на группы антисимметрии.

При подсчете числа беловских групп существенно иметь виду, что две группы $Б_1$ и $Б_2$, считаются одинаковыми, если они одинаковы в кристаллографическом смысле, т. е. если изоморфные им федоровские группы $Ф_1$ и $Ф_2$, приводятся друг к другу собственным движением S (скомбинированным, если необходимо, с преобразованием подобия), таким образом, что $Б_2 = SБ_1S^{-1}$, и если группы цветных подстановок, связанные с геометрическими преобразованиями, сопоставляемыми по изоморфизму $Ф_1 \leftrightarrow Ф_2$, приводятся друг к другу единой перенормировкой цветов.

Подобным же образом в схеме расширений получаются боловские трехмерные группы с кристаллографическим числом цветов $p = 8, 12, 16, 24, 48$. Заметим, что практическое нахождение инвариантных делителей $G^* \lhd G$ и построение цветных генерирующих групп $G^{(p)*}$ и $G^{(p)*} \pmod{G_1^*}$ может быть осуществлено с помощью таблиц неприводимых представлений классических групп. $Б^{(p)}$-группы с циклической подстановкой цветов связаны с одномерными комплексными представлениями $Ф$-групп; группы $Б^{(2}Б^{2)}$-типа связаны с прямыми суммами двух одномерных знакопеременных представлений; группы $Б^{(3}Б^{2)}$-типа строятся по регулярному продолжению одномерных комплексных представлений с помощью знакопеременного представления и т. д. Метод представлений был использован Копциком и Кужукеевым уже для вывода. 2942 3-,4- и 6-цветных $Б$-групп. (см. резюме книги)

У трехмерных беловских групп в качестве подгрупп могут быть найдены цветные двумерные и одномерные пространственные группы. Впервые 15 двумерных цветных циклических групп были получены методом обобщенного проектирования на плоскость федоровских групп, содержащих винтовые оси $3_1, 3_2, 4_1, 4_2, 4_3, 6_1, 6_5, 6_2, 6_4$, плоскости скользящего отражения d и группу переносов R (Белов и Тархова, 1956). В элементарных ячейках этих групп сопрягаемые названными элементами фигуры располагаются в слоях на трех, четырех или шести уровнях; этим уровням условно приписывается цвет, который и переходит при проектировании на плоскость. От цитируемой работы началось развитие идеи многоцветной симметрии. На рис. IX (цв. вклейка) в следующей главе мы приводим цветные мозаики, иллюстрирующие 15 беловских двумерных цветных групп.

Границы теории симметрии. Другие обобщения

Недостаток места не позволяет нам остановиться подробнее на других обобщениях классической симметрии, появившихся в последние годы. Мы ограничимся перечислением лишь главных направлений и включением в список литературы основных работ.

В 1945 г. А. В. Шубниковым была выдвинута идея кратной антисимметрии, а в 1960 г.— идея симметрии подобия (рис. 217). Обе идеи были плодотворно разработаны и доведены в работах А. М. Заморзаева и его учеников (А. Ф. Палистранта, Е. И. Соколова, Э. И. Галярского) до вывода соответствующих обобщенных групп. В тех же работах, а также в работах школы Н. В. Белова были синтезированы идеи антисимметрии, кратной антисимметрии и цветной симметрии в форме соответствующих обобщенных групп. Сама идея цветной симметрии получила дальнейшее развитие в работах Ниггли, Вондрачека, Виттке, Ван дер Вардена, Буркхарда, Поли, Маккая и Заморзаева (1959–1971). В ряде работ были намечены пути получения цветных групп, содержащих классические подгруппы, не являющиеся нормальными делителями.

Группы Ван дер Вардена – Буркхарда $G^{(p)}_{WB}$ определяются трехчленным символом $G/H'/H$, в котором классическая группа $G \leftrightarrow G^{(p)}_{WB}$; подгруппа $H' \subset G$ индекса p соответствует по изоморфизму подгруппе $H_i^{(p_1)} \subset G^{(p)}_{WB}$, сохраняющей качество (цвет) i; нормальный делитель $H = G \cap G^{(p)}_{WB}$, образующий классическую подгруппу $H \lhd G^{(p)}_{WB}$, определяется пересечением всех сопряженных подгрупп $H = \cap gH'g^{-1}$, $g \in G$. Цветная группа $G^{(p)}_{WB} = g \perp H_i^{(p_1)} \cup g_2^{(p)} H_i^{(p_1)} \cup \ldots \cup g_p^{(p)} H_i^{(p_1)}$ представляет расширение своей подгруппы $H_i^{(p_1)}$ с помощью системы представителей смежных классов $G^{(p)*} = \{g_1, g_2^{(p)}, \ldots, g_p^{(p)}\}$, которая вообще может и не быть группой; действующие в $G^{(p)}_{WB}$ перестановки p-качеств моделируются при этом перестановками, например, левых смежных классов $g_k H'$ при их умножении слева на g_i:

$$g_i^{(p)} = g_i p_i = p_i g_i,\ p_i = \begin{pmatrix} g_1 H' & g_2 H' & \ldots & g_p H' \\ g_i g_l H' & g_i g_2 H' & \ldots & g_i g_p H' \end{pmatrix}.$$

Заморзаевские группы P-симметрии охватывают все рассмотренные до сих пор типы цветной симметрии для случая, когда точки общего положения соответствующих фигур окрашиваются каждая в один цвет*.

*Несколько более общий (некоммутативный) вариант цветной симметрии (Q-симметрии) кратко описан на стр. 341 (замена текста).

Всякую такую группу $G^{(p)}$ можно вывести из ее порождающей группы G следующими шагами: 1) разыскиванием нормальных делителей $H \lhd G$ и $Q \lhd P$ таких, что $G/H \leftrightarrow P/Q$, где $H = G^{(p)} \cap G = G^*$ — классическая подгруппа в $G^{(p)}$, $Q = G^{(p)} \cap P$ — подгруппа перестановок цветов, 2) установлением изоморфизма $G/H \leftrightarrow P/Q$ и попарным перемножением соответствующих по изоморфизму смежных классов $gH \leftrightarrow \varepsilon Q$, 3) объединением полученных произведений: $G^{(p)} = \cup gH \cdot \varepsilon Q$.

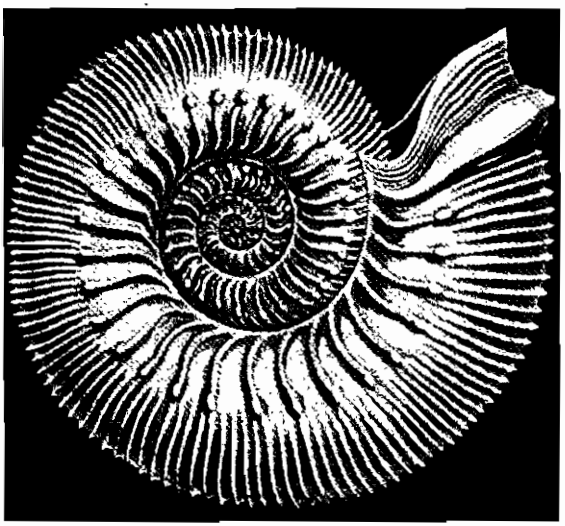
Вне этой схемы находятся группы цветной симметрии Виттке – Гарридо и симметрии комплексных функций Эвальда – Биненстока. В этих случаях закон изменения цветов зависит не только от преобразования, но и от выбора точки фигуры, т. е. соответствующие цветные преобразования оказываются локальными, (ср. стр. 307 и резюме).

В цикле недавних работ Б. Н. Делоне (1959–1961) было по существу завершено построение общей теории стереоэдров (теории правильных разбиений пространства на выпуклые многогранники). На плоскости эта теория построена чисто топологически на основе известной теоремы Шубникова – Лавеса; были выведены все 46 сортов разбиения плоскости на планигоны. В трехмерном пространстве полная теория стереоэдров Дирихле (соответствующих первым зонам Бриллюэна) была доведена до задания алгоритма вывода стереоэдров для любой наперед заданной федоровской группы. Для стереоэдров общего типа Б. Н. Делоне доказал общую теорему: число топологически различных правильных разбиений n-мерного евклидова пространства на выпуклые многогранники, смежные по целым граням, конечно для любого n. При этом требование смежности по целым граням, как показал пример (Заморзаев, 1965), существенно.

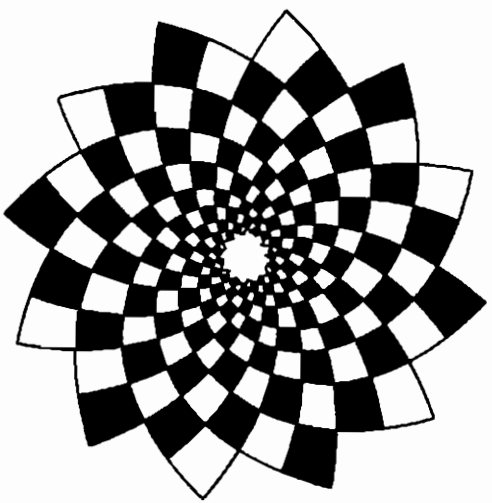
Продвинулась вперед разработка вопросов симметрии многомерных геометрических пространств. Выведены четырехмерные федоровские группы *низших систем*, все точечные группы и четырехмерные решетки

Рис. 217. Группы симметрии подобия содержат комбинированные преобразования g^n, которые определяются как ортогональные преобразования g (сохраняющие особенную точку фигуры), объединенные с фиксированным для данной группы преобразованием п (гомотетией в той же точке), т. е. с сохраняющим эту точку преобразованием подобного расширения или сжатия фигуры: $g^n = g\text{п} = \text{п}g$.

а — пример природной однозаходной логарифмической спирали (раковина аммонита, по Геккелю); *б* — многозаходная спираль с симметрией 24^n. Группа 24^n содержит классическую подгруппу 6 и подгруппу антисимметрии $12'$, если преобразования перекрашивания эквивалентных частей фигуры рассматривать как операции антисимметрии



а)



б)

Бравэ (К. Германн, 1949; А. Харли, 1951, 1967; А. Маккай и Г. Поли, 1963; Заморзаев и Цехиновский 1968; И. Ньюбузер, Г. Вондрачек и Р. Бюлов, 1971; Кунцевич и Белов, 1970, 1971). Начат вывод федоровских групп для неевклидовых пространств (Макаров, 1968).

В монографиях Фаддеева и Ковалева (1961), Миллера и Лава (1967), Зака, Глюка и Гура (1969), Брэдли и Кракнелла (1971) в основном завершена разработка теории неприводимых представлений и копредставлений федоровских и шубниковских пространственных групп и результаты доведены до таблиц характеров и матриц соответствующих матричных групп.

Намеченная еще в работах Виола (1904) и Вульфа (1909) идея вывода групп аффинных деформаций получила дальнейшее развитие в работах Михеева (1961), Наливкина (1951), Дубова (1970) и Заболотного (1973) в форме так называемых групп гомологии и групп криволинейной симметрии. Хотя вывод этих групп, изоморфных цветным группам, не может считаться еще до конца завершенным, идея аффинных деформаций, восходящая к теории кристаллографических пределов Е. С. Федорова, открывает путь изучения динамической симметрии кристаллов и трактовки классических групп как усредненных по времени динамических групп. Группы по модулю локально-аффинных преобразований могут быть использованы при анализе симметрии геометрически неоднородных объектов, например структур реальных кристаллов.

В кратком перечне мы назвали лишь некоторые из основных направлений, по которым развивалась теория симметрии за последние годы. Многие важные результаты, лежащие в стороне от нашей темы, не были упомянуты вообще. Более полно затронутые здесь вопросы рассмотрены в обзорах Копцика (1967), Заморзаева (1970), Делоне (1973) и в специальной литературе по теории групп и ее приложениям.

В связи с чрезвычайным богатством конкретных результатов и разросшимися естественнонаучными приложениями теории симметрии уместно поставить вопрос о ее границах. По самому общему определению, данному Г. Вейлем (1938, 1952), теория симметрии совпадает с теорией автоморфизмов математических или физических объектов, т. е. с теорией групп автоморфных преобразований. В ее основе лежит аксиома равенства, по которой два объекта, равные третьему, равны между собой. По сути дела отсюда и вытекает свойство преобразований, сохраняющих некий объект инвариантным, образовывать группу. Отсюда же следует и широта приложений теории симметрии, и, равным образом, очерчиваются ее границы, поскольку преобразования автоморфизма не исчерпывают всех отношений эквивалентности и порядка между объектами (см. по этому поводу книгу Шрейдера, 1971).

Любые обобщения теории симметрии сохраняют ее основные групповые постулаты, они идут по пути замены понятия равенства более широким понятием относительного равенства конкретных реализаций абстрактных групп, замены известных групп их изоморфными или гомоморфными представлениями или расширениями, по пути поисков новых автоморфизмов. Характеризуя научное значение таких поисков, достаточно сказать, что само обнаружение новых отношений эквивалентности и новых автоморфизмов у известных объектов уже означает проникновение на более глубокий структурный уровень исследования. Новой главой теории симметрии является теория полугруппы симметрии (см. резюме).

Конкретным приложениям теории симметрии мы посвящаем нашу заключительную главу.

Глава 12

Симметрия в науке и искусстве. Законы сохранения. Симметризация и диссимметризация физических систем. Принцип симметрии для составных систем

Симметрия как закон строения целостных систем и метод исследования структурных закономерностей

На протяжении книги мы изучали симметрию самых разнообразных материальных фигур — конечных и бесконечных, пространственно-периодических и непрерывных. Последовательно усложняя структуру соответствующих геометрических объектов, мы сохраняли, тем не менее, основное требование к преобразованиям симметрии — преобразовывать фигуры в себя без деформаций. Поскольку при ортогональных преобразованиях (вращениях и отражениях) и параллельных переносах метрические свойства фигур не меняются, главное внимание мы уделяли ортогональным группам и группам движений. Это *основное требование* не было нарушено и в предыдущей главе при переходе от классических групп к группам антисимметрии и цветным группам в силу самого метода построения цветных пространств и изоморфизма новых групп с классическими, хотя цвет может иметь смысл локальной деформации.

Переход к цветным группам значительно расширяет возможности использования идей и методов симметрии в научных исследованиях и художественном творчестве. Еще более эти возможности возрастают при отказе от обязательного требования — сохранения метрики исследуемых объектов при соответствующих преобразованиях. Такой отказ позволяет, например, изучать свойства фигур, которые сохраняются при аффинных, проективных и топологических преобразованиях; иными словами, он позволяет построить саму аффинную, проективную или топологическую геометрию как совокупность инвариантных предложений (аксиом,

теорем и вытекающих из них следствий), не изменяющихся при соответствующих преобразованиях.

Если всем точкам рассматриваемых геометрических пространств приписать цветовые характеристики или определить в них значения скалярных, векторных или тензорных величин, то для полученных таким образом материальных пространств (скалярных, векторных или тензорных полей) можно определить группы обобщенных комбинированных преобразований. Естественно принять эти группы за группы симметрии наших материальных объектов. Обобщая пример, мы *будем называть группой симметрии любого целостного структурного объекта, состоящего из элементов, эквивалентных в смысле относительного равенства, максимально высокую группу преобразований автоморфизма, отображающих этот объект на себя*. Таким образом мы *определяем симметрию как закон строения структурных объектов или*, точнее, *как группу допустимых преобразований, сохраняющих структурную целостность рассматриваемых систем*[*].

В природе нет бесструктурных объектов. Понятие симметрии относится к тем из них, которые состоят из эквивалентных в смысле относительного равенства взаимосвязанных элементов, образующих целостные системы. Эквивалентными элементами геометрических целостных систем являются точки, прямые, плоскости, поверхности, фигуры, связанные друг с другом определенными отношениями. В материальных объектах эквивалентными элементами целостных систем служат системы элементарных частиц и античастиц — электронов, протонов, нейтронов и т. д.; их «цветные» модификации, отличающиеся друг от друга только фазовыми характеристиками; эквивалентные атомы, ионы, молекулы; силовые линии физических полей и т. д. и т. п. Из названных элементов при определенных условиях образуются целостные взаимосвязанные комплексы (системы), которые, в свою очередь, могут рассматриваться как элементы еще более сложных материальных систем.

Достаточная общность категории *структуры*, выступающей в качестве *инвариантного* аспекта системы, принципиальная возможность выделения в целом эквивалентных (в том или ином отношении) частей определяют столь же *общее значение* для современного естествознания и искусствознания понятия симметрии. При этом речь может идти не только о симметрии материальных объектов, но и о симметрии систем понятий и теорий, отображающих структуру реального мира. Хорошо об этом сказано в предисловии к книге Г. Вейля «Симметрия»: «Симметрия устанавливает забавное и удивительное родство между пред-

[*]Еще более общая концепция полугрупп симметрии возникает в случае отображения произвольного множества X на себя, когда преобразования $X \to X$ не обязательно взаимно-однозначны (см. Клиффорд и Престон, 1964, т. 1, § 1.1 и резюме этой книги).

метами, явлениями и теориями, внешне никак не связанными: земным магнетизмом, женской вуалью, поляризованным светом, естественным отбором, теорией групп, инвариантами и преобразованиями, рабочими привычками пчел в улье, строением пространства, рисунками ваз, квантовой физикой, скарабеями, лепестками цветов, интерференционной картиной рентгеновских лучей, делением клеток морских ежей, равновесными конфигурациями кристаллов, романскими соборами, снежинками, музыкой, теорией относительности» (Ньюмен, 1956).

Идеи симметрии (дословно *соразмерности*) возникли у древнегреческих философов и математиков в связи с их учением о гармонии мира. По канонам гармонии (представление о которой менялось с веками) создавали свои шедевры древние ваятели, живописцы и зодчие*. Современную научную форму учение о симметрии приобрело, однако, лишь с появлением понятия группы (Галуа, 1832). Наиболее подробно к началу XX в. было разработано учение о симметрии кристаллов — в форме классических групп симметрических преобразований (Федоров, Шенфлис, 1891). Вслед за кристаллографией и кристаллофизикой, теоретико-групповые методы распространились на физику в целом и другие естественные науки. Метод симметрии превратился в мощный и эффективный инструмент теоретического исследования в современном естествознании вообще.

С применениями метода мы познакомимся на примере кристаллофизики. Этот выбор обусловлен нашим предварительным знакомством с соответствующими группами и тем, что кристаллы, по словам Е. С. Федорова, «блещут своей симметрией», обнаруживая огромное многообразие форм структурной организации материи на атомно-молекулярном уровне.

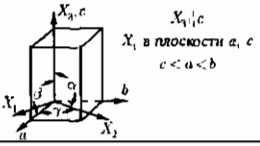
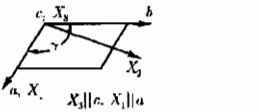
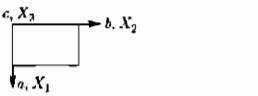
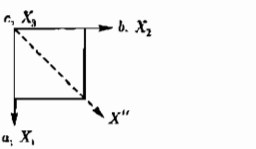
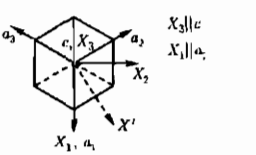
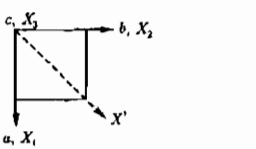
Все, что мы будем говорить о кристаллах, может быть перенесено (с соответствующими изменениями) и на другие объекты, обладающие симметричной внутренней структурой.

Если точечная или пространственная группа симметрии кристалла установлена экспериментально, тем самым, можно сказать, установлена и минимальная симметрия его возможных физических свойств. В частности, как нам уже известно, точечные группы G_k позволяют описать симметрию идеально развитых кристаллических многогранников (такую форму кристаллы приобретают при росте из слабо пересыщенных растворов в условиях равнодоступного снабжения всех граней многогранника кристаллизующимся веществом).

Подобным же образом пространственная группа Φ_k описывает внутреннюю структуру кристалла: взаимное расположение эквивалентных систем атомов в элементарных ячейках (см. стр. 221 и 238).

*См. Лосев А. Ф., 1963, 1969, 1974; Шестаков В. П., 1979.

Таблица 20. Стандартная установка кристаллографических и кристаллофизических осей координат

Метрическая система	Метрические параметры a, b, c, α, β, γ	G_k	Выбор кристаллографических (a, b, c) и кристаллофизических (X_1, X_2, X_3) осей	Полный международный символ
Триклинная	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ (6 параметров)	1 $\bar{1}$		1 $\bar{1}$
Моноклинная	$a \neq b \neq c$ $\gamma \neq \alpha = \beta = 90°$ (4 параметров)	2 m $2/m$		$X_3X_1X_2$ 211 $m11$ $\frac{2}{m}11$
Ромбическая	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$ (3 параметров)	222 $mm2$ mmm		$X_1X_2X_3$ 222 $mm2$ $\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$
Тетрагональная	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$ (2 параметров)	4, $\bar{4}$ $4/m$, 422 $4mm$ $\bar{4}2m$ $4/mmm$		X_3X_1X'' 411, $\bar{4}11$, $4/m11$ 422 $4mm$ $\bar{4}2m$ $\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$
Гексагональная*	$a_1 = a_2 = a_3 \neq c$ $\alpha = \widehat{a_i, c} = 90°$ $\gamma = \widehat{a_i, a_{i+1}} = 120°$ (2 параметров)	3, $\bar{3}$ 32, $3m$ $\bar{3}m$ 6 $\bar{6}$ $6/m$, 622 $6mm$ $\bar{6}m2$ $6/mmm$		$X_3X_1X_1'$ 311, $\bar{3}11$ 321, $3m1$ $\bar{3}m1$ 611, $\bar{6}11$, $6/m11$ 622 $6mm$ $\bar{6}m2$ $\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$
Кубическая	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma 90°$ (1 параметров)	23 $m\bar{3}$ 432 $\bar{4}3m$ $m\bar{3}m$		$X_1X''X'$ 231 $m31$ $\bar{4}32$ $\bar{4}\bar{3}m$ $\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$

На базе симметрии в кристаллографии и кристаллохимии возводят описательно-морфологические и структурные классификации, объединяющие кристаллы в генетические ряды по той или иной совокупности признаков. Сходным образом в физике классифицируют элементарные частицы, атомные и молекулярные спектры, нормальные колебания и т. д.; в основе этих симметрических классификаций всегда лежат те или иные группы допустимых преобразований, выполняемых над элементами соответствующих структур. Поскольку задача классификации является первичной для всякой науки, симметрия, устанавливая структурные инварианты, представляет для таких классификаций необходимый метод.

Но это не самое главное. Более важно для кристаллофизики то, что с элементами симметрии кристалла можно однозначным образом связать систему координат и обеспечить тем самым однозначность описания его физических свойств, которые, вообще говоря (для нескалярных свойств), зависят от направления измерения. Условившись о выборе осей (см. табл. 20 и стр. 221), можно утверждать с определенностью, что вдоль направления

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 \quad \text{или}$$
$$[x_1 : x_2 : x_3] = [p : q : r]$$

кристалл обладает такими-то физическими свойствами. Выбрав оси, можно придать определенность и утверждению, что такие-то плоскости

$$hx_1 + kx_2 + lx_3 = 1 \quad \text{или} \quad (h\,k\,l)$$

являются для кристалла особенными (например, плоскостями спайности, плоскостями эллипсоида теплового расширения, оптической индикатрисы и т. д.). В руководствах по кристаллографии показывается, что кристаллографические координаты плоскости $(h\,k\,l)$ имеют смысл обратных отрезков, отсекаемых этой плоскостью на осях координат.

Таким образом, результаты измерений физических свойств, выполненных на кристаллах одного и того же вещества, оказываются сопоставимыми только в тех случаях, когда они отнесены к одной и той же системе координат, выбранной стандартным образом. Измерения, выполненные без соблюдения этого требования, не имеют в кристаллофизике никакой цены.

---

* Классы 3, $\bar{3}$, 32, $3m$, $\bar{3}m$ гексагональной системы иногда выделяют в тригональную (ромбоэдрическую) подсистему при другом выборе осей.

Зная группу симметрии кристалла G_k, можно ограничить область измерения физических свойств (по заданным направлениям) симметрически независимой областью телесных углов. Такой выбор направлений измерения осуществляется на основании теоремы, утверждающей, что число симметрически независимых или симметрически равных областей, на которые можно разделить симметричную фигуру, равно порядку ее группы симметрии. Например, для куба и гексагональной призмы такими областями будут $^1/_{48}$ и $^1/_{24}$ части этих фигур (рис. 218). Если свойства кристалла измерены внутри телесного угла, ограниченного симметрически независимым сферическим треугольником, то нет необходимости измерять его свойства по другим направлениям, лежащим за пределами выделенного угла. Это обстоятельство существенно уменьшает число измерений, необходимых для выявления анизотропии, т. е. для выявления зависимости физических свойств от направления измерения. Но и это еще не все.

Группа симметрии кристалла (тесно связанная, как увидим, с группами симметрии физических величин) позволяет установить число независимых констант, характеризующих каждое данное свойство. Иными словами, всегда можно сказать, сколько измерений (по различным направлениям) необходимо выполнить, чтобы получить полную характеристику интересующего нас свойства кристалла. Ответ на этот вопрос зависит от характера исследуемого свойства и от закона преобразования соответствующей физической величины.

Законы преобразования и симметрия физических величин (приближение однородного континуума). Предельные группы антисимметрии и цветной симметрии

Скалярные свойства кристаллов не зависят от направления измерения и полностью определяются одним числом. Так, температура и плотность однородного кристалла одинаковы во всех его «точках», т. е. во всех элементах объема, достаточно малых по сравнению с размерами макроскопического образца, но превышающих, во всяком случае, размеры элементарной ячейки.

Некоторые диэлектрические кристаллы (их называют пироэлектриками и сегнетоэлектриками) обладают спонтанной поляризацией, присущей кристаллу в силу его структурных особенностей даже в отсутствие внешнего электрического поля. Вектор поляризации $\mathbf{P}$ в кристаллах с симметрией 1 определяется тремя независимыми параметрами (компонентами): P_1, P_2, P_3 (рис. 219 *а*). В кристаллах с симметрией m рав-

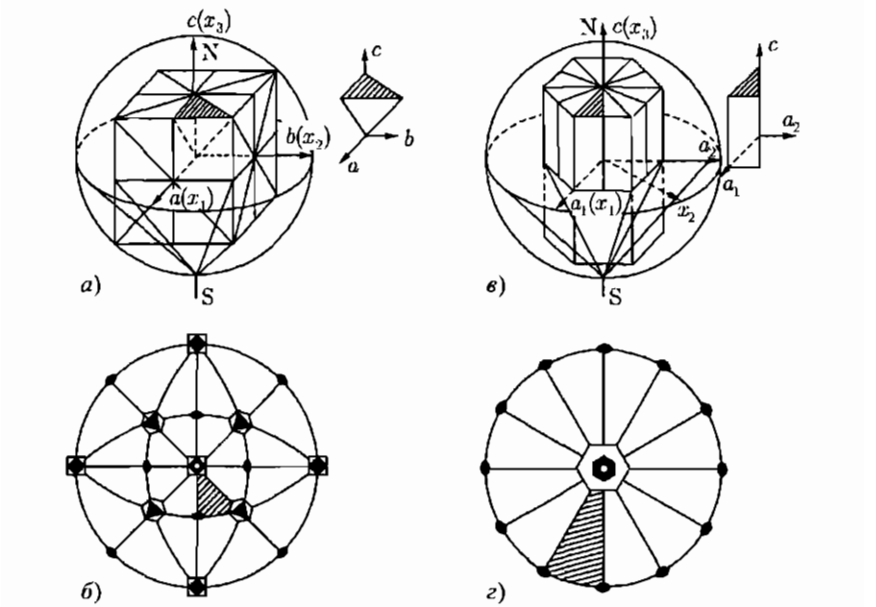


Рис. 218. Выделение в кубе и правильной шестиугольной призме симметрически независимых элементов объема осуществляется делением фигур на равные части плоскостями симметрии:

а, в — соответствующие симметрически независимые сферические треугольники в перспективном построении; *б, г* — на стереографических проекциях

нодействующий вектор $\mathbf{P}$ полностью определен двумя компонентами: P_1 и P_2 (рис. 219 *б*). Компонента $P_3 = 0$, так как для косых векторов, не лежащих в плоскости m, всегда найдутся зеркально-равные. В кристаллах осевых классов **2**, 3, 4, 6, $m2$, $3m$, $4mm$ равнодействующий вектор $\mathbf{P}$ определен одним параметром P_3 (рис. 219 *с*). В кристаллах остальных классов, например при симметрии $\bar{1}$, пироэлектричества не существует, т. е. $\mathbf{P} = 0$.

Вспоминая закон преобразования полярных векторов $\mathbf{r}' = [\mathbf{D}|0]\mathbf{r} = D\mathbf{r}$ (см. стр. 254), запишем его для $\mathbf{r} = \mathbf{P}$ в матричной форме: $P_i' = (D_{ij})P_j$. Используя найденный там же явный вид матрицы (D_{ij}) поворота на 180° вокруг оси $\mathbf{2} \parallel X_3$, учитывая, что этот поворот является преобразованием симметрии, и выполняя умножение матриц по правилу «строка на столбец», получим известный уже нам результат аналитиче-

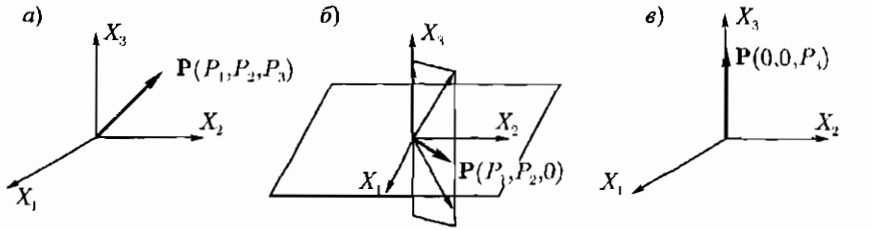


Рис. 219. Ориентировка равнодействующего полярного вектора P с компонентами (P_1, P_2, P_3) по отношению к кристаллофизическим осям координат, выбранным согласно правилам установки осей (см. табл. 20), в группах 1(*а*); *m*(*б*) 2, 3, 4, 6, *mm*2, 3*m*; 4*mm*, 6*mm* (*в*)

ским путем:

$$\begin{pmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_1 \\ -P_2 \\ P_3 \end{pmatrix};$$

в силу симметрии после поворота системы на 180°

$$\begin{pmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}, \text{ т. е. } \begin{cases} P_1' = -P_1 = P_1 = 0, \\ P_2' = -P_2 = P_2 = 0, \\ P_3' = P_3 = \text{const}. \end{cases}$$

Рассмотрим еще пример свойств, описываемых полярным тензором второго порядка, например явление электрической индукции в диэлектриках (рис. 220). Вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ в кристаллах не совпадает, вообще говоря, с направлением наложенного электрического поля $\mathbf{E}$ (как это имеет место у изотропных сред). Связь между компонентами D_i и E_j этих полярных векторов следующая:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \quad \text{или} \quad \begin{cases} D_1 = \varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2 + \varepsilon_{13} E_3, \\ D_2 = \varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2 + \varepsilon_{23} E_3, \\ D_3 = \varepsilon_{31} E_1 + \varepsilon_{32} E_2 + \varepsilon_{33} E_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Коэффициенты связи между векторами $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ образуют тензор диэлектрической проницаемости ε_{ij}. В общем случае (в силу внутренней симметрии компонент $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) этот тензор имеет не девять, а шесть

независимых параметров. В дальнейшем условимся записывать (для сокращения письма) матрицу тензора (ε_{ij}) в форме строки или столбца, опуская равные величины и нули:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}).$$

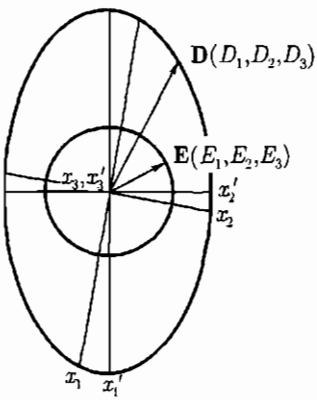


Рис. 220. Общий случай анизотропной связи между вектором электрического поля E и вектором электрической индукции D, описываемый уравнениями (1). Уравнение эллипсоида диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{11}x_1^2+\varepsilon_{22}x_2^2+\varepsilon_{33}x_3^2+2\varepsilon_{12}x_1x_2+ +2\varepsilon_{13}x_1x_3+2\varepsilon_{23}x_2x_3=1$, записанное в кристаллофизических осях X_1, X_2, X_3. В главных осях эллипсоида X_1', X_2', X_3' уравнение принимает вид: $\varepsilon_{11}'(x_1')^2+\varepsilon_{22}'(x_2')^2+ +\varepsilon_{33}'(x_3')^2=1$

Поверхность второго порядка с коэффициентами

$$\varepsilon_{11}x_1^2+\varepsilon_{22}x_2^2+\varepsilon_{33}x_3^2+2\varepsilon_{12}x_1x_3+2\varepsilon_{13}x_1x_2=1$$

однозначно связана с симметричным тензором; она представляет в общем случае эллипсоид диэлектрической проницаемости — индикатрису физического свойства, наглядно характеризуя рассматриваемый эффект. Группа симметрии кристалла G_k определяет вид этой поверхности (трехосный, одноосный эллипсоиды или сфера) и ориентировку главных осей X_1', X_2', X_3' эллипсоида по отношению к кристаллофизическим осям X_1, X_2, X_3. Тем самым группа G_k, определяет и число независимых компонент ε_{ij}, подлежащих экспериментальному определению. Чтобы убедиться в этом, запишем уравнения преобразования компонент тензора ε_{ij} в виде

$$\varepsilon_{i'j'}=\varkappa(D)D_{i'i}D_{j'j}\varepsilon_{ij},\ i',j',i,j=1,2,3, \qquad (2)$$

где $D_{i'i}=\cos(\widehat{X_i', X_i})$, величина $\varkappa(D)$ для полярных тензоров равна $+1$ и по индексам i, j, встречающимся дважды в правых частях уравнений,

подразумевается суммирование от 1 до 3. Придавая индексам матричных элементов указанные выше значения и проводя суммирование членов, получим избыточную систему из девяти уравнений для определения шести неизвестных (три уравнения, отвечающие равенствам $\varepsilon_{i'j'} = \varepsilon_{j'i'}$, необходимо в данном случае отбросить; в общем случае несимметричных тензоров этого, разумеется, делать нельзя).

Предоставляя читателям проделать эту процедуру, мы получим матрицу интересующей нас системы уравнений другим методом — методом прямого перемножения (самих на себя) ортогональных матриц, описывающих преобразования координат трехмерного пространства (ср. стр. 254). Прямое произведение двух матриц D_{ij} выполняется по правилу

$$\mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}(D_{ij}) & D_{12}(D_{ij}) & D_{13}(D_{ij}) \\ D_{21}(D_{ij}) & D_{22}(D_{ij}) & D_{23}(D_{ij}) \\ D_{31}(D_{ij}) & D_{32}(D_{ij}) & D_{33}(D_{ij}) \end{pmatrix},$$

где через (D_{ij}) обозначена вся 3×3-матрица и, например,

$$D_{23}(D_{ij}) = \begin{pmatrix} D_{23} & D_{11} & D_{23} & D_{12} & D_{23} & D_{13} \\ D_{23} & D_{21} & D_{23} & D_{22} & D_{23} & D_{23} \\ D_{23} & D_{31} & D_{23} & D_{32} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

Зная матрицу $\mathbf{D}$ поворота на 180° вокруг оси $2 \parallel X_3$ (для нее $D_{11} = D_{22} = -1$, $D_{33} = 1$, а остальные матричные элементы $D_{ij} = 0$), найдем матрицу $\mathbf{D}^2$, описывающую тот же самый поворот в пространстве тензоров ε_{ij}. Уравнения преобразования компонент тензора $\varepsilon_{i'j'} = \varkappa(D)\mathbf{D}^2\varepsilon_{ij}$ получат при этом вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1'1'} \\ \varepsilon_{1'2'} \\ \varepsilon_{1'3'} \\ \varepsilon_{2'1'} \\ \varepsilon_{2'2'} \\ \varepsilon_{2'3'} \\ \varepsilon_{3'1'} \\ \varepsilon_{3'2'} \\ \varepsilon_{3'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix},$$

откуда с учетом симметрии системы

$$\begin{cases} \varepsilon_{1'1'} = \varepsilon_{11}, \\ \varepsilon_{1'2'} = \varepsilon_{12}, \\ \varepsilon_{1'3'} = -\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13} = 0, \\ \varepsilon_{2'1'} = \varepsilon_{21}, \\ \varepsilon_{2'2'} = \varepsilon_{22}, \\ \varepsilon_{2'3'} = -\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{3'1'} = -\varepsilon_{31} = \varepsilon_{31} = 0, \\ \varepsilon_{3'2'} = -\varepsilon_{32} = \varepsilon_{32} = 0, \\ \varepsilon_{3'3'} = \varepsilon_{33}. \end{cases}$$

Вычеркивая из матрицы $\mathbf{D}^2$ четвертую, седьмую и восьмую строки и такие же столбцы $(4, 7, 8)$, перейдем от 9×9-матрицы к 6×6-матрице, вполне характеризующей закон преобразования симметричных тензоров. Будем называть эту матрицу симметризованным произведением (или симметризованным квадратом) двух матриц и обозначать $\mathbf{D}^{(2)}$.

Группа матриц $\{\mathbf{D}_1(g_1), \mathbf{D}_2(g_2), \ldots, \mathbf{D}_j(g_j)\}$, изоморфная группе $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_j\}$, образует ее матричное представление. Это представление можно назвать векторным, поскольку 3×3-матрицами $\mathbf{D}_j$ описываются не только преобразования координат точек, но и преобразования компонент векторов трехмерного пространства*.

Представление группы G группой $\{\mathbf{D}_1^2(g_1), \mathbf{D}_2^2(g_2), \ldots, \mathbf{D}_j^2(g_j)\}$ можно назвать квадратом векторного представления или тензорным представлением. Используя эту терминологию, мы будем говорить, что тензор диэлектрической проницаемости ε_{ij} преобразуется по симметризованному квадрату векторного представления $\{\mathbf{D}_1^{(2)}(g_1), \mathbf{D}_2^{(2)}(g_2), \ldots, \mathbf{D}_j^{(2)}(g_j)\}$. Само определение тензорных величин неразрывно связано с определением законов преобразований компонент, т. е. соответствующих тензорных представлений.

Построив представления $\{\mathbf{D}_1^2, \mathbf{D}_2^{(2)}, \ldots, \mathbf{D}_j^{(2)}\}$ для 32 кристаллографических групп, можно определить вид тензора ε_{ij} для любой из этих групп, подобно тому как это было сделано для группы $G_k = 2$. Более быстро матрицы тензора ε_{ij} определяются, если заметить, что компоненты ε_{ij} преобразуются как произведения соответствующих координат $x_i x_j$. Найдем по этому способу вид матрицы тензора ε_{ij} для группы $G_k = m$ при ориентировке $m \perp X_3$. Отражение в этой плоскости, сохраняя координаты x_1, x_2, меняет знак координаты x_3 : $x_1 \to x_1$, $x_2 \to x_2$, $x_3 \to x_3$. Произведения координат меняются при этом следующим образом:

$$x_1x_1 \to x_1x_1,\ x_1x_2 \to x_1x_2,\ x_1x_3 \to -x_1x_3,\ x_2x_1 \to x_2x_1,\ x_2x_2 \to x_2x_2,$$

$$x_2x_3 \to -x_2x_3,\ x_3x_1 \to -x_3x_1,\ x_3x_2 \to -x_3x_2,\ x_3x_3 \to x_3x_3.$$

Так как проведенное преобразование является преобразованием симметрии, компоненты $\varepsilon_{ij} \leftrightarrow x_i x_j$ до и после преобразования должны совпадать. Следовательно, матрица (ε_{ij}) для группы m приобретает такой же вид, что и для группы 2 : $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$.

Приведем сводку результатов для всех кристаллографических групп:

Триклинные группы $G_k = 1, \bar{1}$. Тензор общего вида $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33})$.

Моноклинные группы $\mathbf{2}$, m, $2/m$. Тензор $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$.

Ромбические группы $mm\mathbf{2}$, 222, mmm. Тензор $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$.

Три-, тетра- и гексагональные группы. Тензор $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11}, \varepsilon_{33})$.

Кубические группы $\mathbf{23}$, $m\bar{3}$, $\mathbf{432}$, $\bar{4}3m$, $m\bar{3}m$. Тензор $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11}, \varepsilon_{33} = \varepsilon_{11})$.

Подобным же образом, принимая в законе преобразования компонент тензоров величину $\varkappa(\mathbf{D}) = +1$ для преобразований первого рода

*Ср. стр. 254 и 267.

и $\varkappa(\mathbf{D}) = -1$ для преобразований второго рода, можно найти тензорные инварианты для аксиальных тензоров, т. е. матрицы тензоров, не изменяющиеся при преобразованиях соответствующих групп.

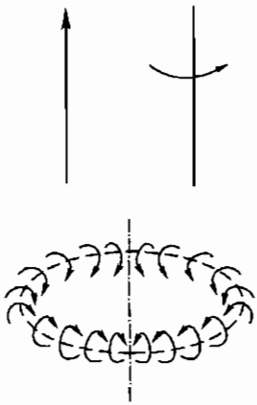


Рис. 221. Геометрическая интерпретация и магнитная симметрия электрического ($\infty\, m\, m1'$), магнитного $\left(\frac{\infty}{m}, \frac{2'}{m'}\, \frac{2'}{m'}\right)$ и магнитоэлектрического $\left(\frac{\infty}{m'}, \frac{2'}{m}\, \frac{2'}{m}\right)$ векторов.

В магнитной интерпретации операция антиотождествления $1'$ сохраняет прямолинейные и изменяет на противоположные круговые токи; поэтому в две последние группы эта операция входит лишь в виде комбинированных преобразований $2' = 21' = 1'2$, $m' = m1' = 1'm$. Если направить магнитоэлектрический вектор $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ вдоль оси Z, а электрический вектор $\mathbf{E}$ — по внешней нормали к окружности, обтекающая стрелка укажет ориентировку магнитного вектора $\mathbf{H}$ для фиксированной электромагнитной волны в данный момент. В противофазе в той же волне вектор $\mathbf{E}$ направлен по внутренней нормали, а обход $\mathbf{H}$-вектора заменяется на противоположный. Усредненная по периоду колебаний группа двукратной антисимметрии неполяризованного луча будет $\frac{\infty}{m'}, \frac{2'}{m}\, \frac{2'}{m} 1^*$, где $1^* = 1'1''$ — произведение операторов антиотождествления: $1'\mathbf{H} = -\mathbf{H}$, $1''\mathbf{E} = -\mathbf{E}$, $1^*\mathbf{P} = -\mathbf{E} \times (-\mathbf{H}) = \mathbf{P}$. В поляризованном луче симметрия понижается до стационарной группы $\frac{2'}{m}, \frac{2'}{m}\, \frac{2}{m'} 1^*$ или группы мгновенного состояния $\frac{2'}{m^*}, \frac{2''}{m}\, \frac{2^*}{m'}$

Заметим, что собственная ортогональная симметрия тензоров, определяемая максимально высокой группой ортогональных преобразований, сохраняющих матрицу тензора инвариантной, может быть выше исходной кристаллографической симметрии. Так, диэлектрический эллипсоид у кубических кристаллов вырождается в сферу с симметрией $\infty\infty\, m$. У три-, тетра- и гексагональных кристаллов одноосный диэлектрический эллипсоид имеет симметрию ∞/mmm. У остальных кристаллов диэлектрический эллипсоид трехосный с симметрией mmm. В последнем можно убедиться, приводя эллипсоид (см. рис. 220) к главным осям X_1', X_2', X_3': все преобразования группы mmm сохраняют матрицу тензора $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$. Излишнее число параметров (сверх этих трех) необ-

ходимо для указания ориентировки эллипсоида в системе кристаллографических осей X_1, X_2, X_3 для кристаллов низших систем.

Среди групп симметрии однородных тензорных полей, помимо предельных групп Кюри (см. рис. 74), можно встретить предельные ортогональные группы антисимметрии и цветные группы.

Семь нейтральных и семь двуцветных предельных групп антисимметрии получаются методами теории расширений:

$$\infty 1', \infty 221', \infty mm1', \infty/m1', \quad \infty/mmm1', \quad \infty\infty 1', \infty\infty m1',$$
$$\infty/m', \infty 2'2', \infty m'm', \infty/m'mm, \infty/mm'm', \infty/m'm'm', \infty\infty m'.$$

Реализующие эти группы материальные фигуры по форме те же самые, что и у групп Кюри, но для нейтральных групп все точки фигур нейтральны, а для двуцветных групп — двуцветны (два цвета в каждой точке смешаны или соответственно разделены). В магнитной интерпретации антисимметрии электрический, магнитный и магнитоэлектрический вектора имеют предельные группы магнитной симметрии: $\infty mm1'$, $\infty/mm'm'$ и $\infty/m'mm$ соответственно (рис. 221). О выводе предельных групп антисимметрии см. работы Шубникова (1958, 1959), Сиротина (1962) и Копцика (1966).

Существует бесконечное число цветных предельных групп, распределяющихся в серии:

$$\infty 1^{(p)}, \infty 221^{(p)}, \infty mm1^{(p)}, \infty/m1^{(p)}, \infty/mmm1^{(p)},$$
$$\infty\infty 1^{(p)}, \infty\infty m1^{(p)};$$
$$\infty^{(\infty)}, \infty^{(\infty)}m^{(2)}m^{(2)}, \infty^{(\infty)}/m, \infty^{(\infty)}/mm^{(2)}m^{(2)},$$
$$\infty^{(\infty)}\infty^{(\infty)}, \infty^{(\infty)}\infty^{(\infty)}m^{(2)};$$
$$\infty^{(\infty)}2^{(2)}2^{(2)}, \infty^{(\infty)}/m^{(2)}, \infty^{(\infty)}/m^{(2)}m^{(2)}m^{(2)}.$$

Образцовые фигуры, реализующие собственно цветные группы, можно получить, оклеив фигуры Кюри цветной бумагой с непрерывными, как у радуги, последовательными переходами тонов. Представив, например, что из вершины конуса к его основанию идут одноцветные лучи, цвета которых сменяются при поворотах конуса в естественной спектральной последовательности, получим серию групп $\infty^{(\infty)}(1), \infty^{(\infty)}(\mathbf{2}), \ldots, \infty^{(\infty)}(n)$, если конус вращается, и серию $\infty^{(\infty)}m^{(2)}m^{(2)}(1), \infty^{(\infty)}m^{(2)}m^{(2)}(2), \ldots, \infty^{(\infty)}m^{(2)}\cdot m^{(2)}(n)$ в случае неподвижного конуса (в скобках указаны символы классических осевых подгрупп; если группа цветного конуса содержит подгруппу n, это означает, что смена цветных циклов при полном обороте конуса происходит n раз). Взяв за основу цилиндр и оклеив его цветным циклом один раз, получим группы $\infty^{(\infty)}/mm^{(2)}m^{(2)}(1)$ (покоящийся цилиндр) и $\infty^{(\infty)}/m(1)$

(вращающийся цилиндр). Если цвет непрерывно меняется не только при обходе цилиндра (по круговому основанию), но и одинаковым образом вдоль всех образующих, получим двойной цветной цилиндр с симметрией $\infty^{(\infty)}/m^{(2)}m^{(2)}m^{(2)}(1)$ (*случай покоя*), $\infty^{(\infty)}/m^{(2)}(1)$ (вращающийся цилиндр) и $\infty^{(\infty)}2^{(2)}2^{(2)}(1)$ (скрученный цилиндр). Во всех случаях, заменяя подгруппу 1 на n, выводим из исходной бесконечную серию групп. Группы цветных цилиндров можно различать, кроме того, по классическим подгруппам nmm и $n22$ или по подгруппам, сохраняющим фиксированное качество. Последние две группы реализуем сферами, все точки которых ∞-цветны, но не нейтральны; можно принять, что цвета в точках распределены по секторам или наложены друг на друга послойно без перемешивания, как у вершин конусов $\infty^{(\infty)}$ и $\infty^{(\infty)}m^{(2)}m^{(2)}$. Каждый диаметр сферы $\infty^{(\infty)}\infty^{(\infty)}$ закручен как в группе $\infty^{(\infty)}2^{(2)}2^{(2)}$; у группы $\infty^{(\infty)}\infty^{(\infty)}m^{(2)}$ вращение точек отсутствует. В другой интерпретации этих групп всем точкам общего положения приписывается один фиксированный цвет, как и у всех ранее рассмотренных фигур. Симметрию скрученного цилиндра можно описать полнее группой цветной двукратной антисимметрии $\frac{\infty^{(\infty)}}{m'^*}\frac{2^{(2)}}{m'^*}\frac{2^{(2)}}{m'^*}$, где звездочка меняет цветовой обход на основаниях цилиндра, а штрих меняет направление кручения.

Заметим еще, что в нейтральных группах подгруппы цветного отождествления $1^{(\infty)}$ различаются по мощности. Кроме названных выше реализаций, могут существовать цветные фигуры, описываемые классическими группами Кюри, предельными группами антисимметрии, группами Ван дер Вардена, группами Виттке–Гарридо и их допустимыми произведениями (ср. стр. 307, 316).

Все конечные цветные группы (кристаллографических и некристаллографических порядков) являются подгруппами предельных групп, вывод которых осуществлен в настоящей работе впервые. В физике целостных структурных объектов цветные предельные группы будут играть, по-видимому, не менее важную роль, чем обычные предельные ортогональные группы.

Законы преобразования и симметрия физических величин (приближение периодического дисконтинуума). Пространственные тензоры на цветных группах

В приближении сплошной однородной среды все точки континуума ортогонально- и трансляционно-эквивалентны. В предыдущем параграфе

нас интересовали лишь точечные ортогональные группы. Рассматривая наряду с ними и группы параллельных непрерывных переносов, можно построить все группы движений однородного континуума типа $T_{000}\,\textcircled{S}\,G$ и изоморфные им группы цветных континуумов.

В настоящем параграфе нас будет интересовать симметрия цветных трехмерно-периодических дисконтинуумов и законы преобразования обобщенных тензорных величин (пространственных тензоров). Пространственные тензоры по определению представляют трехмерно-периодические совокупности точечных тензоров, определенных на эквивалентных системах точек в федоровских, шубниковских и беловских группах. Мы уже знакомы с операторами $[\mathbf{D}|\boldsymbol{\tau}]$ и $[\mathbf{D}|\alpha+\boldsymbol{\tau}]$ и законами их умножения в федоровских группах (см. формулы (14.10) и (15.10) гл. 10). Определим теперь операторы цветных преобразований и законы их умножения в беловских группах.

Преобразованиям $g_i^{(p_i)} = g_i p_i = p_i g_i$ цветных точечных групп $G^{(p)}$ мы сопоставим комбинированные операторы $[\mathbf{D}_i|0]^{(p_i)} = [\mathbf{D}_i|0](p_i) = (p_i)\ [\mathbf{D}_i|0]$, где операторы $[\mathbf{D}_i|0]$ имеют классический смысл (см. стр. 266), а скобка (p_i) фиксирует определенную перестановку цветов, связанную с данным геометрическим преобразованием. В соответствии с формулой (2.11) закон умножения операторов цветных ортогональных преобразований запишется в виде

$$[\mathbf{D}_j|0]^{(p)_j}[\mathbf{D}_l|0]^{(p)_l} = [\mathbf{D}_j\mathbf{D}_l|0]^{(p_jp_l)} \text{ или } [\mathbf{D}_j|0](p_j)[\mathbf{D}_l|0](p_l) = [\mathbf{D}_j\mathbf{D}_l|0](p_jp_l). \quad (3)$$

Перестановки (p_j) условимся записывать в виде $(p_j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots p \\ n_1 & n_2 & \dots n_p \end{pmatrix}$, где p равно полному числу цветов (цифр), перетасовываемых в группах $G^{(p)}$. Умножение перестановок (как и ортогональных матриц) будем проводить всегда справа налево, выполняя первыми операции (p_l) и $\mathbf{D}_l$.

Закон умножения операторов цветных переносов запишется в виде

$$[\mathbf{E}|\boldsymbol{\tau}_i]^{(p_i)}[\mathbf{E}|\boldsymbol{\tau}_k]^{(p_k)} = [\mathbf{E}|\boldsymbol{\tau}_i+\boldsymbol{\tau}_k]^{(p_ip_k)} \quad \text{или}$$
$$[\mathbf{E}|\boldsymbol{\tau}_i](p_i)[\mathbf{E}|\boldsymbol{\tau}_k](p_k) = [\mathbf{E}|\boldsymbol{\tau}_i+\boldsymbol{\tau}_k](p_i)(p_k). \quad (4)$$

Записывая операторы классических преобразований формально в виде $[\mathbf{D}_j|0]^{(1)}$, $[\mathbf{E}|\boldsymbol{\tau}_j]^{(1)}$, где (1) — тождественная подстановка $(1) = \begin{pmatrix} 1\,2\dots p \\ 1\,2\dots p \end{pmatrix}$, получаем возможность использования формул (3), (4) и для нахождения произведений цветных преобразований на классические.

Операторы движений в беловских группах определим уравнениями

$$[\mathbf{E}|\boldsymbol{\tau}_i]^{(p_i)}[\mathbf{D}_j|0]^{(p_j)} = [\mathbf{D}_j|\boldsymbol{\tau}_i]^{(p_i p_j)} \quad \text{или}$$
$$[\mathbf{E}|\boldsymbol{\tau}_i](p_i)[\mathbf{D}_j|0](p_j) = [\mathbf{D}_j|\boldsymbol{\tau}_i](p_i)(p_j), \tag{5}$$

а закон их умножения — уравнениями

$$[\mathbf{D}_j|\boldsymbol{\tau}_i](p_{ij})[\mathbf{D}_l|\boldsymbol{\tau}_k](p_{kl}) = [\mathbf{D}_j\mathbf{D}_l|\mathbf{D}_j\boldsymbol{\tau}_k + \boldsymbol{\tau}_i](p_{ij}p_{kl}). \tag{6}$$

Здесь $(p_{ij}) = (p_i)(p_j)$, $(p_{kl}) = (p_k)(p_l)$ — перестановки, связанные с операторами цветных движений. Подобным же образом могут быть найдены операторы движений и законы их умножения для несимморфных цветных групп.

В качестве упражнения читателю рекомендуется найти аналитически произведения цветных движений, которые мы получали на стр. 310 для групп рис. IV (цв. вклейка) методом диаграммной техники. Сами мы рассмотрим пример шестицветной группы $P_{c^{(3)}}2^{(2)}$, выводимой из группы $P_{c^{(3)}}2$ (см. рис. VI (цв. вклейка)) заменой осей 2 цветными осями $2^{(2)}$. Занумеровав тетраэдры у верхнего ребра элементарной ячейки по схеме $\begin{smallmatrix}4&5&6&4\\1&2&3&1\end{smallmatrix}$ и записывая для сокращения письма выражения $[\mathbf{D}(g)|\boldsymbol{\tau}]$ в виде $[g|\tau]$, найдем явный вид генерирующих операторов группы $P_{c^{(3)}2^{(2)}}$:

$$[2|0]^{(2)} = [2|0]\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&1&2&3\end{pmatrix} \leftrightarrow 2^{(2)}, \quad \left[1\middle|\frac{\mathbf{c}}{3}\right]^{(3)} = \left[1\middle|\frac{\mathbf{c}}{3}\right]\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&1&5&6&4\end{pmatrix} \leftrightarrow c^{(3)}.$$

Далее находим

$$[2|0]^{(2)}\left[1\middle|\frac{\mathbf{c}}{3}\right]^{(3)} = \left[2\middle|\frac{\mathbf{c}}{3}\right]\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&4&2&3&1\end{pmatrix} \leftrightarrow 2_1^{(3)}, \text{ так как } (2_1^{(3)})^3 = \mathbf{c};$$

$$[2|0]^{(2)}\left(\left[1\middle|\frac{\mathbf{c}}{3}\right]^{(3)}\right)^2 = \left[2\middle|\frac{2\mathbf{c}}{3}\right]\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&5&3&1&2\end{pmatrix} \leftrightarrow 2_1^{(6)}, \text{ так как } (2_1^{(6)})^6 = 4\mathbf{c};$$

в то же время

$$(2_1^{(6)})^3 = [2|2\mathbf{c}]\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&1&2&3\end{pmatrix} = [1|2\mathbf{c}][2|0]\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&1&2&3\end{pmatrix} \equiv 2^{(2)} \pmod{2\mathbf{c}} \text{ и т. д.}$$

Напомним, что $[2|0]\left[1\middle|\frac{\mathbf{c}}{3}\right] = \left[2\middle|\hat{2}\frac{\mathbf{c}}{3}\right] = \left[2\middle|\frac{\mathbf{c}}{3}\right]$, так как вектор c не изменяется операцией 2. Показатель цветности винтовых осей $2_1^{(3)}$, $2_1^{(6)}$ выбран

так, чтобы возведение операции в соответствующую степень давало минимальный классический перенос.

Пространственные (комплексные) тензоры порядка s определим на беловских группах операторными уравнениями

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}') = (p)^s[\mathbf{D}|\boldsymbol{\tau}]^s\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (p)^s\mathbf{D}^s\mathbf{A}([\mathbf{D}|\boldsymbol{\tau}]\mathbf{r}), \tag{7}$$

действуя на столбец компонент тензора $\mathbf{A} = \{A_{i_1 i_2 \ldots i_s}\}$ матрицей s-й степени векторного представления $\mathbf{D}^s = \underbrace{\mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \ldots \times \mathbf{D}}_{s \text{ раз}}$ и умножая после этого (или до этого) все компоненты тензора на соответственным образом определенные фазовые множители, например $(p)^s = e^{-si\varphi}$, где $p = e^{-i\varphi}$, если цветная перестановка циклическая. На аргумент тензора $\mathbf{r}$ действуем первой степенью классического оператора $[\mathbf{D}|\boldsymbol{\tau}]$. В результате тензор $\mathbf{A}$, определенный в фиксированной точке $\mathbf{r}$, претерпевает в этой точке ортогональное преобразование и изменяет свою цветовую характеристику (фазу); затем преобразованные величины $\mathbf{A}'$ размножаются оператором $[\mathbf{D}|\boldsymbol{\tau}]$ на всю эквивалентную систему точек $\{\mathbf{r}' = [\mathbf{D}|\boldsymbol{\tau}]\mathbf{r}\}$ соответствующей цветной пространственной группы.

В специальных случаях пространственные тензоры могут быть вещественными. Например, магнитный пространственный вектор, определяемый уравнением

$$\mathbf{m}'(\mathbf{r}') = (p)[\mathbf{D}|\boldsymbol{\tau}]\mathbf{m}(\mathbf{r}) = (p)\mathbf{D}\mathbf{m}([\mathbf{D}|\boldsymbol{\tau}]\mathbf{r}), \tag{8}$$

описывает магнитную (спиновую) структуру кристаллов; оператор изменения фазы (p) для него может быть определен как «поворот» вектора в фиксированной точке (см. рис. 212).

Число компонент тензора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в ячейке для данной B-группы определяется умножением числа независимых компонент тензора $\mathbf{A} = \{A_{i_1 i_2 \ldots i_s}\}$, допускаемого точечной группой симметрии положения $G^{(p)}$ или G, на число точек эквивалентной системы $\{\mathbf{r}' = [\mathbf{D}|\boldsymbol{\tau}]\mathbf{r}\}$ в пределах элементарной ячейки.

Далее мы более подробно остановимся на вещественных пространственных тензорах, определенных на двуцветных шубниковских группах (Копцик, 1966, 1967), представляя операторы антисимметрии $[\mathbf{D}|0]'$ как операторы чистого вращения $[\mathbf{C}(\mathbf{k}, \varphi)/0]$, умноженные на степени операций $1'$ и $\bar{1}$.

Оператор антиотождествления $1'$ в случае нейтральных групп осуществляет перестановки двух знаков (цветов), играя роль перестановки (p) в формуле (7):

$$1' = \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для классификации тензоров на группах антисимметрии (аналогично их разделению на полярные и неполярные величины в классических группах) рассмотрим нейтральную точечную группу $\bar{1}1' = \{1, \bar{1}, 1', \bar{1}'\}$ и построим ее простейшее матричное представление, выбирая в качестве матриц $\mathbf{D}$ числа ± 1. Сопоставляя (во всех случаях) операции 1 число 1, найдем только четыре возможности выбора чисел ± 1 для других операций, при которых таблица умножения группы $\mathbf{D} = \{\pm 1\}$ имеет ту же структуру, что и таблица умножения группы $\bar{1}1'$. Ниже (в табличке слева) перечисляются эти возможности и осуществляется (справа) проверка изоморфизма групп $\mathbf{D}_{\text{М}} = \{1, 1, , -1, -1\}$ и $\bar{1}1'$:

$\varkappa(g)$	1	$\bar{1}$	$1'$	$\bar{1}'$
Е	1	1	1	1
М	1	1	−1	−1
Э	1	−1	1	−1
МЭ	1	−1	−1	1

;

$\mathbf{D}_{\text{М}}$	1	1	−1	−1
1	1	1	−1	−1
1	1	1	−1	−1
−1	−1	−1	1	1
−1	−1	−1	1	1

$\leftrightarrow$

$\bar{1}1'$	1	$\bar{1}$	$1'$	$\bar{1}'$
1	1	$\bar{1}$	$1'$	$\bar{1}'$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	1	$\bar{1}'$	$1'$
$1'$	$1'$	$\bar{1}'$	1	$\bar{1}$
$\bar{1}'$	$\bar{1}'$	$1'$	$\bar{1}$	1

Представления $\mathbf{D}_{\text{Е}}$ (единичное) и $\mathbf{D}_{\text{М}}$, $\mathbf{D}_{\text{Э}}$, $\mathbf{D}_{\text{МЭ}}$ (знакопеременные) называются неприводимыми, поскольку не существует более простых матричных групп, изоморфных (в данном случае) группе $\bar{1}1'$. Заметим, что у 32 кристаллографических групп G_k существует 58 знакопеременных одномерных представлений, с каждым из которых связана своя группа антисимметрии G_k'. Подобным же образом цветные группы $G_k^{(\text{p})}$ связаны с комплексными или неодномерными представлениями групп G_k (Ниггли, 1959, Инденбом, 1960). Определим теперь на обобщенной евклидовой группе движений (прямом произведении группы движений на группу $\bar{1}1'$) пространственный тензор $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ порядка s заданием закона преобразования аргумента $\mathbf{r}$ и компонент тензор-функции $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$[\bar{1}1'^q \mathbf{C}(\mathbf{k}, \varphi)|\boldsymbol{\tau}]^s A_{i_1 i_2 \ldots i_s}(\mathbf{r}) = A_{i_1' i_2' \ldots i_s'}(\mathbf{r}') = \\ = \varkappa(g) C_{i_1' i_1} C_{i_2' i_2} \ldots C_{i_s' i_s} A_{i_1 i_2 \ldots i_s}((-1)^p C_{j'j}(r_j - \tau_j)). \quad (9)$$

Здесь $\varkappa(g)$ — число $+1$ или -1, сопоставляемое элементу $g = \bar{1}^p 1'^q = 1, \bar{1}, 1', \bar{1}'$ (при $p, q = 1, 2$) в представлении $\mathbf{D}_{\text{Е}}$, $\mathbf{D}_{\text{М}}$, $\mathbf{D}_{\text{Э}}$ или $\mathbf{D}_{\text{МЭ}}$; $\mathbf{C}(\mathbf{k}, \varphi)$ — оператор чистого вращения на угол φ вокруг направления, задаваемого единичным вектором $\mathbf{k}$: $C_{i'i} = \cos(X_{i'}, X_i)$; по повторяющимся в уравнении (9) индексам $i_1, i_2, \ldots, i_s$ подразумевается суммирование от 1 до 3.

Тензоры $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ при соответствующем определении описывают в кристалле трехмерно-периодическое распределение плотности массы или электрического заряда $\rho(x, y, z)$, плотности токов $\mathbf{j}(x, y, z)$, дипольных

и мультипольных моментов и т. д. Соответственно неприводимому представлению $\mathbf{D}_{\text{Е}}$, $\mathbf{D}_{\text{М}}$, $\mathbf{D}_{\text{Э}}$ или $\mathbf{D}_{\text{МЭ}}$, используемому в законе (9), различают четные, магнитные, электрические и магнитоэлектрические тензоры. Например, компоненты пространственного вектора магнитного момента $\mathbf{m}(\mathbf{r})$, описывающего стационарную магнитную структуру ферро- и антиферромагнетиков, преобразуются по закону $\mathbf{m}'_i(\mathbf{r}') = \varkappa_{\text{М}} C_{i'i} m_i((-1)^p C_{j'j}(\mathbf{r}_j - \tau_j))$, следующему из (9), и представлению $\mathbf{D}_{\text{М}}$ приведенной выше таблицы. Заметив, что операция $\bar{1}$ действует на электрические векторы $\mathbf{D}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$ таким же образом, как операция $1'$ — на магнитные векторы $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{H}$, можно установить изоморфизм между шубниковскими классами, описывающими электрические и магнитные свойства кристаллов соответственно. Таким образом, можно решить задачу формального сведения феноменологического аппарата магнитной кристаллофизики к аппарату классической и облегчить тем самым решение ряда задач, основанных на учете свойств симметрии (Сиротин, 1962).

Обращаясь вновь к закону преобразования тензоров (9), определим пространственную группу симметрии тензора $G_{\mathbf{A}(\mathbf{r})}$ требованием инвариантности тензора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ по отношению к любым ее преобразованиям:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}') = [\mathbf{D}|\boldsymbol{\tau}]^s \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r})_s [\mathbf{D}|\boldsymbol{\tau}] = [1'^q \bar{1}^p \mathbf{C}(\mathbf{k}, \varphi)|\boldsymbol{\tau}]. \qquad (10)$$

В общем случае группами симметрии тензоров будут P-группы типа $G \otimes P$, поскольку употребляемые в кристаллофизике тензоры инвариантны не только к преобразованиям подгрупп обобщенной группы движений G, но и к преобразованиям P-перестановок индексов $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Не имея возможности охарактеризовать подробнее тензоры, применяющиеся в кристаллофизике, ограничимся приведением на рис. 222 магнитных структур кристаллов гематита (α-Fe_2O_3), описываемых магнитным пространственным вектором $\mathbf{m}(\mathbf{r})$. Шубниковская (нейтральная) группа высокотемпературной парамагнитной фазы $R\bar{3}c1' = R\bar{3}c \otimes 1'$ запрещает кристаллу α-Fe_2O_3 иметь стационарную магнитную структуру. У низкотемпературных фаз при различных гипотетических ориентировках векторов магнитного момента $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ будут возникать стационарные антиферромагнитные и слабонеколлинеарные ферромагнитные структуры, описываемые шубниковскими группами $B2/b$ (рис. 222 *а*) или $B2'/m'$ (рис. 222 *б*). Магнитный тензор $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ образует в этих группах одну или, соответственно, две эквивалентные системы спинов:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \left\{ [m_1 m_2 m_3] \left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) \right\} \quad \text{и}$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \left\{ [m_1 m_2 0] \left(\frac{1}{6}0\frac{1}{2}\right), [m_1, -m_2, 0] \left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) \right\}$$

(в фигурных скобках ориентировка магнитного момента задана компонентами $[m_1 m_2 m_3]$ вектора $\mathbf{m}$, определенного в одной или двух симметрически независимых точках $\mathbf{r}$ с координатами (x, y, z), выраженными в долях элементарной ячейки; действиями всех преобразований групп $B2/b$ и $B2'/m'$ получаются все другие магнитные векторы, образующие эквивалентные спиновые системы).

Недавно обнаруженные неколлинеарные зонтичные и спиральные магнитные структуры кристаллов (ср. рис. 212) могут иметь симметрию многоцветных пространственных групп. Приведем еще примеры использования в физике кристаллов и молекул классических кристаллографических групп, шубниковских групп антисимметрии и беловских цветных групп.

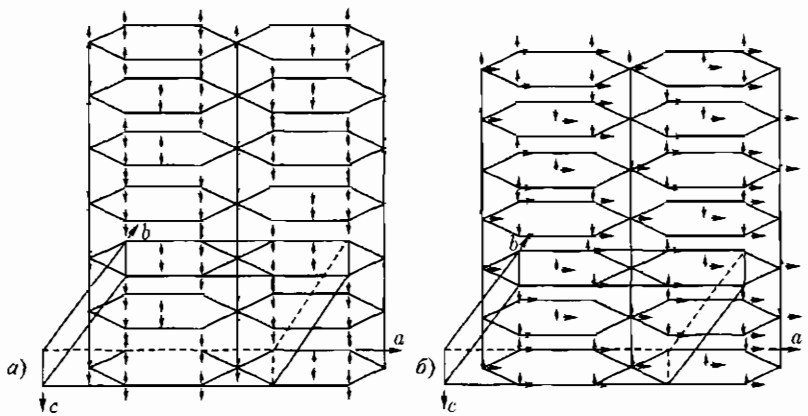


Рис. 222. Возможные магнитные структуры кристалла α-Fe_2O_3:
а — симметрия структуры $B2/b$ при ориентировке пространственного магнитного вектора $m(r)$, определенного на одной эквивалентной системе точек $\{[m_1, m_2, m_3]\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\}$; *б* — симметрия структуры $B2'/m'$ при ориентировке магнитного вектора $m(r)$, определенного в двух симметрически независимых системах точек $\{[m_1, m_2, 0]\left(\frac{1}{6}0, \frac{1}{2}\right), [m_1, -m_2, 0]\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\}$. На рисунках выделены элементарные ячейки моноклинных магнитных групп; верхними и нижними рядами стрелок условно показана ориентировка в каждой точке антиферромагнитных и ферромагнитных составляющих векторов $[m_1, m_2, m_3]$, $[m_1, m_2, 0]$ и $[m_1, -m_2, 0]$ соответственно; компоненты векторов m отнесены к осям моноклинных ячеек; координаты точек r — к осям гексагональных ячеек, описывающих кристаллохимическую структуру α-Fe_2O_3 (см. Копцик, 1967)

Эти группы широко применяются в теории электронной структуры и в теории колебаний молекул. Известно, что волновые функции электронов, ответственные за связи в структуре молекул, образуют линейные комбинации (так называемые *молекулярные орбитали*), которые преобразуются по неприводимым представлениям групп симметрии молекул. По тем же представлениям преобразуются и колебательные координаты молекулы, т. е. некоторые линейные комбинации, составленные из векторов смещений атомов из их положений равновесия в молекуле. Поскольку между неприводимыми представлениями кристаллографических групп и группами антисимметрии и цветной симметрии существует прямая связь, предыдущие утверждения эквивалентны тому, что молекулярные орбитали и колебательные координаты молекулы обладают симметрией соответствующих шубниковских и беловских групп. С комбинациями представлений групп симметрии молекул, т. е. с соответствующими группами антисимметрии и цветной симметрии, связаны правила отбора электронных излучательных переходов, структура инфракрасных спектров и спектров комбинационного рассеяния света.

Еще более эффективным оказывается использование методов симметрии в теории электронной структуры, теории колебаний и в структурном анализе кристаллов. Если бы не существовало трансляционной симметрии кристаллов, анализ физических свойств атомных систем, содержащих по порядку в одном кубическом сантиметре 10^{23} частиц, был бы чрезвычайно затруднен. Однако структура кристалла определяется периодическим повторением в трех измерениях элементарного атомного мотива, состоящего в большинстве случаев из сравнительно небольшого числа частиц. Такой мотив (занимающий элементарную ячейку) играет роль «молекулы» в структуре кристалла. Поэтому при исследовании физических свойств кристаллов, грубо говоря, достаточно изучить поведение коллектива частиц в пределах элементарной ячейки, чтобы по свойствам части судить о свойствах целого. В квантовой теории твердого тела свойства целого отображаются на свойства трансляционно-периодической части с помощью теоремы Блоха и эквивалентных ей теорем. При этом оказывается, что волновые функции, описывающие электронную структуру кристаллов, равно как и нормальные колебательные координаты атомов, преобразуются по неприводимым представлениям пространственных групп симметрии, т. е. системы этих функций характеризуются пространственными группами антисимметрии и пространственными цветными группами. То же самое можно сказать и о трансформационных свойствах основных для структурного анализа функций электронной плотности и функций Паттерсона, связывающих дифракционную картину со структурой кристаллов.

Составные системы. Принцип суперпозиции групп симметрии. Законы изменения и сохранения симметрии

При исследовании природных объектов, образующих целостные системы, обращает на себя внимание прежде всего сложный композиционный характер их структурной организации. Любой материальный объект характеризуется взаимопроникновением, определенной координацией или субординацией подструктур. Таковы, например, «элементарные» частицы, внутренняя структура которых стала сегодня в физике проблемой номер один. Таковы структуры атомов (бывших «неделимых»), составленные из нуклонов, образующих ядра, и электронов, распределенных в подоболочки. Из атомов и ионов возникают постройки следующих уровней организации — молекулы, кристаллы, структуры биологических полимеров. Композиционны структуры самых разнообразных макроскопических объектов вплоть до структур планетных и звездных систем, галактик и метагалактик. Сложный композиционный характер имеют биологические системы, начиная от атомно-молекулярных и кончая организмами и сообществами организмов. Сложную структуру имеют и общественные (социальные) системы.

Композиционный характер организации целостных систем выдвигает методологическую проблему изоляции систем и обособления их структурных подуровней. Это необходимо как для научного изучения самих систем, так и для выяснения их внешних и внутренних связей с другими системами и подсистемами. Разделить для того, чтобы объединить, — таков девиз и метод научного исследования. Отвлекаясь от несущественных связей или интересуясь лишь выделенными свойствами систем, взятыми в данном отношении, наука строит упрощенные модели реальных систем, которые и служат объектом дальнейшего изучения. Подобным образом возникают научные абстракции замкнутых или изолированных систем, противопоставляемых открытым системам, для которых разрешен обмен энергией и (или) веществом с внешними телами. Не ставя себе задачей привести более детальную классификацию систем или дать описание их общих свойств (см. по этому поводу сборники «Структура и формы материи», 1967; «Проблемы методологии системного исследования», 1970), в последующей части главы мы продолжим изучение главного для этой книги вопроса — о связи симметрии систем с их структурой и свойствами.

На многочисленных геометрических примерах мы уже установили, что структура — инвариант соответствующих групп автоморфных преобразований. Для материальных систем симметрия геометрического строения при правильном определении одновременно выступает и как

минимальная симметрия связанных с данной структурой свойств и отношений. С каждой подструктурой системы может быть сопоставлена своя группа автоморфизмов, преобразующая друг в друга только элементы выделенных подструктур. Сама правильность выделения подструктурного уровня в системе может быть проверена по тому, существует ли группа преобразований, ставящая элементы подструктуры в отношения эквивалентности*. Вопрос о связи групп симметрии подструктур с группой симметрии системы в целом мы будем изучать на составных геометрических фигурах, моделирующих свойства составных материальных систем.

Обратимся к примерам. На рис. 8 составная фигура образована наложением пятилучевой звезды и квадрата. Обе составляющие фигуры геометрически различны, так как не приводятся преобразованиями движения и подобия одна к другой. Квадрат (на односторонней плоскости) имеет симметрию $G_1 = 4\,m\,m$, пятилучевая звезда — симметрию $G_2 = 5$. Составная фигура в целом обладает симметрией единственной общей подгруппы этих двух групп, а именно группой $G = 1$. Операция нахождения общей подгруппы двух групп при заданном расположении их элементов симметрии называется пересечением и обозначается символом $\cap$: $G = G_1 \cap G_2$, т. е. $1 = 4mm \cap 5$. Как видим, симметрия подструктур, не связанных отношениями эквивалентности, оказывается не ниже симметрии системы в целом: $G_i \supset G (i = 1, 2)$. Процесс образования составной фигуры из неэквивалентных частей сопровождается диссимметризацией системы, так как приводит к понижению симметрии целого по сравнению с симметрией частей. Противоположный процесс симметризации систем наблюдается при образовании составных фигур из эквивалентных частей.

На рис. 5*б* представлена фигура (правильный шестиугольник), составленная из равносторонних треугольников. Собственная симметрия треугольников $G_i = 3m$, а системы в целом — $G = 6\,m\,m$. Симметрия системы G не совпадает в данном случае с пересечением групп G_i (будем писать $\bigcap\limits_{1=i}^{6} G_i = G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_6) : \bigcap\limits_{1}^{6} 3m = 1$. Не совпадает она и с объединением групп (множеством $\bigcup\limits_{1}^{6} G_i = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_6$, в которое входят преобразования всех шести групп при заданной располо-

*По определению, отношение — есть отношение эквивалентности (относительного равенства между элементами a, b, c, если выполняются три свойства: рефлексивности $a \sim a$, симметричности ($a \sim b$, следует $b \sim a$) и транзитности (из $a \sim b$, $b \sim c$ следует $a \sim c$). В примерах нас интересуют отношения эквивалентности, сохраняющие метрические свойства фигур.

жении их элементов симметрии). Множество $\bigcup_1^6 3m$ состоит из осей 3, выходящих в центрах шести треугольников, шести плоскостей m, не проходящих через центр шестиугольника, и трех плоскостей m, проходящих через его центр. Это множество не образует группы, но две входящие в него плоскости, идущие через центр фигуры, порождают группу $G_i^* = 3m \subset 6\,m\,m = G$, изоморфную группам G_i; последние приводятся к G_i^* операциями параллельных переносов S, совмещающими центры треугольников с центром шестиугольника: $G_i^* = SG_iS^{-1}$.

Ни объединение, ни пересечение групп G_i не характеризуют в рассматриваемом примере симметрии составной системы, так как они не включают всех отношений эквивалентности, в которых находятся наши треугольники в рамках целого. Вообще говоря, любые две фигуры на ориентированной плоскости метрически эквивалентны, если они конгруэнтно, или зеркально-равны, т. е. совмещаются друг с другом под действием преобразований S из группы движений двумерного континуума $p_{00}\infty mm$. Применив все преобразования $S \in p_{00}\infty mm$ к какой-либо фиксированной фигуре, получим континуум эквивалентных фигур, образующий по геометрической терминологии тело. Конечные правильные системы эквивалентных фигур будут иметь симметрию подгрупп этой охватывающей или фундаментальной группы $p_{00}\infty mm$. В случае правильного шестиугольника отношения метрической эквивалентности между частями фигуры устанавливаются подгруппой $6mm \subset p_{00}\infty mm$.

Принадлежность фиксированной фундаментальной группе $G_{\text{охв}}$ подгрупп G_i обеспечивает существование непустого пересечения $\cap G_i \neq \varnothing$ и делает само понятие о симметрии составной фигуры достаточно определенным, если идет речь о типе групп. Действительно, если в правильном шестиугольнике (рис. 5*б*) покрасить в черный цвет три треугольника, не имеющих друг с другом общих сторон, получим черно-белую фигуру, группа антисимметрии которой $6'mm'$ принадлежит расширенной охватывающей группе $p_{00}\infty mm1'$.

Обобщая рассмотренные примеры, примем по определению, что пересечение $\cap G_i$ групп симметрии частей G_i определяет на уровне фиксированной охватывающей группы $G_{\text{охв}} \supset G_i$ симметрию G гетерогенного геометрического объекта, если части объекта не образуют правильной системы фигур. Если части гомогенного геометрического объекта образуют правильную систему фигур, ее симметрия есть расширение подгруппы $\cap G_i \subset G$ с помощью системы представителей смежных классов $G^C = \{g_1, g_2, \ldots, g_j\}$, принадлежащей той же охватывающей группе $G_{\text{охв}} \supset G_i$, или с помощью любой изоморфной, например, цветной системы $G^{(p)C} = \{g_1, g_2^{(p)}, \ldots, g_j^{(p)}\}$, принадлежащей обобщенной охватываю-

щей группе $G_{\text{охв}}1^{(p)}$:

$$G = (\cap G_i)g_1 \cup (\cap G_i)g_2 \cup \ldots \cup (\cap G_i)g_j = \cap G_i \odot G^C.$$

Очевидно, группа $G \subset G_{\text{охв}}$, если G_i и $G^C \subset G^{\text{охв}}$; она становится обобщенной (цветной) группой, если G^G заменить на $G^{(p)C}$.

Операцию симметризации — перехода от подгруппы $H = \cap G_i$ к группе G — можно интерпретировать как объединение смежных классов, $G = H \odot G^C = H \cup M$, где $M = G \backslash H = Hg_2 \cup \ldots \cup Hg_j$ — теоретико-множественное дополнение H до $G(g_1 = e, g_2, \ldots g_j \in G^C)$. Обратная операция диссимметризации $H = G \odot G_D = G\ M = H \cap M$ к отбрасыванию из расширения G дополнения M. С помощью операторов G^G, G^D представим пересечение $\cap G_i \subset G_i$ в виде $\cap G_i = G_i \odot G^{D^*}$, фиксируя какую-либо группу G_i. Тогда $G = \cap G_i \odot G^C$ примет вид $G = G_i \odot G^{D^*} \odot G^C$. С другой стороны, можно записать $G = G_i \odot G^{C*} \odot G^{D**}$, где $C_i \odot G^{C*} = G_{\text{охв}}$, $G = G_{\text{охв}} \odot G^{D**}$. Полученные формулы

$$G = G_i \odot G^{D*} \odot G^C \quad \text{и} \quad G = G_i \odot G^{C*} \odot G^{D**},$$

в которых симметризаторы могут быть заменены изоморфными цветными аналогами, выражают в символической форме искомые соотношения связи между группами симметрии целого и части. Они оказываются справедливыми не только для составных геометрических объектов, части которых образуют правильные системы фигур, но и для обобщенных геометрофизических (или материальных) объектов, точкам которых приписаны дополнительные негеометрические (цветные) характеристики. Этот вывод базируется непосредственно на результатах теории расширений групп. Распространенный на составные физические системы, он представляет обобщенный принцип суперпозиции групп симметрии (или просто принцип симметрии для составных систем), не сводящийся в общем случае к принципам пересечения или объединения групп. Особенно наглядно это видно, если переписать формулу $G = G_i \odot G^{D*} \odot G^C$ в виде

$$G = \cap G_i \cup M,\ M = G \backslash \cap G_i \neq \varnothing; \tag{11}$$

для частного случая гетерогенных систем она переходит в

$$G = \cap G_i,\ M = \phi,\ G^C = e \in G. \tag{12}$$

Из (12) следует, что в материальных гетерогенных системах симметрия части не ниже симметрии целого: $G_i \supseteq G$. Придавая конкретный смысл понятиям части и целого, можно получить различные аналоги

этого принципа, например логическую аксиому («Если гипотезы теории инвариантны относительно группы G, то это же можно сказать и о выводах», Г. Биркгоф, 1954) или физический принцип причинности («Когда некоторые причины производят некоторые действия, элементы симметрии причин должны обнаруживаться в этих действиях», П. Кюри, 1894). Разумеется, справедливость этих новых утверждений должна быть обоснована независимо от нашего геометрического доказательства.

В то же время для материальных гомогенных систем из (11) следуют и другие возможности, касающиеся симметрии подсистем системы G. Может быть

$$G_i \supseteq G,\ G_i \subset G \quad \text{или} \quad G_i \not\supset G, \quad G_i \not\subset G,$$

где, в случае необходимости, G_i заменяются изоморфными им классическими или цветными группами: $G_i^* = SG_iS^{-1}$, $S \in G_{\text{охв}}$ или $G_{\text{охв}}1^{(p)}$. Соответствующий этим случаям принцип причинности приобретает вероятностно-статистический характер, о чем у нас еще будет идти речь.

В связи с формулировкой общих соотношений связи между симметрией целого и симметрией части, полезно уточнить содержание понятий целого и части. Определение этих понятий дается логической аксиомой: часть не меньше целого. Конкретизуя определение для точечных множеств, укажем, что существуют бесконечные множества, являющиеся элементами самих себя: мощность таких множеств может совпадать с мощностью его частей.

Назовем замкнутое и ограниченное множество точек в евклидовом пространстве фигурой. Пусть M и N — две произвольные точки фигуры F и $\rho(M, N)$ — расстояние между ними. В силу непрерывности функции $\rho(M, N)$ всегда найдутся две точки A и B фигуры такие, что $\rho(A, B) \geqslant \rho(M, N)$. Расстояние $d = \rho(A, B)$ между такими двумя точками представляет собой диаметр множества F. Под разбиением фигуры на меньшие части (см. Болтянский, Гохберг, 1971) будем понимать представление множества F в виде объединения (покрытия) нескольких подмножеств

$$F = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m,$$

диаметр которых меньше или равен диаметру F (в частном случае фигуры H_i могут не перекрываться друг с другом).

Если понятие симметрии для фигуры F определено, оно, очевидно, будет определено и для ее частей, и возникает проблема связи между соответствующими группами G и G_i, решаемая обобщенным принципом суперпозиции групп симметрии.

Читателя не должно смущать обилие приводимых в этом и следующем параграфе формул. Все они представляют, по сути дела, конкрети-

зацию основного соотношения (11), которое мы перепишем в виде

$$G = G_i \cdot G^{D*} \cdot G^C = G_i \cdot G^{C*} \cdot G^{D**}, \qquad (11^*)$$

и вытекающих из него следствий (см. далее стр. 360): $G_i \supseteq G$, $G_i \subset G$ и $G_i \not\supseteq G$. В последнем случае переход от G_i к G может осуществляться либо путем симметризации общей подгруппы этих групп $G_i \cap G = G \cdot G^D$, либо путем диссимметризации их общей надгруппы $G_{охв} \supseteq G_i \cup G$.

Переход от геометрических к геометрофизическим (материальным) пространствам, не меняя основных соотношений между группами G и G_i, включает в игру проблему взаимодействия частей целостной системы. Появляется также и другая трудность — проблема органической целостности образования, составленного из некоторого (конечного или бесконечного) числа частей. Все это приводит к тому, что на геометрофизическом уровне может реализоваться лишь часть соотношений, справедливых для геометрического уровня.

Существенно иметь в виду, что отношения части и целого шире, например, отношений причины и следствия, так как части могут не находиться с целым в причинной связи (см. Свечников, 1971). С другой стороны, рассматривая фиксированное состояние некоторой целостной системы как часть допустимого множества ее состояний, находим, что симметрия состояния связана со стационарной группой симметрии системы соотношениями, вытекающими из нашего принципа суперпозиции. В этом случае обобщенный принцип описывает опосредованные формы причинной связи состояний, характерные, например, для квантовой механики, не укладывающиеся в рамки принципа классического детерминизма.

Соотношения (11) и (12), или предшествующие им формулы, выражают вместе принцип суперпозиции групп симметрии. Первая формула связывает процесс симметризации (расширения) или диссимметризации (сужения) системы с включением в систему или соответственно выключением из нее некоторых симметризующих факторов (элементов множества M). Во втором соотношении, наоборот, симметризация системы — следствие выключения из пересечения $\cap G_i$ некоторых групп G_i; диссимметризация же — следствие включения в систему ряда новых неэквивалентных подструктур: отвечающие им группы G_i выступают в этом случае в качестве факторов диссимметризации системы.

Сохранение под действием преобразований групп G и G_i структуры системы в целом и слагающих ее подструктур означает, как неоднократно уже отмечалось, одновременное сохранение всех свойств и отношений, связанных с данной структурой и ее подструктурами. Поэтому принцип суперпозиции групп симметрии действует не только в мире чистой геометрии, но и в мире материальных систем и фигур. При

этом группы G и G_i (или изоморфные им цветные группы, действующие в пространстве представлений) характеризуют не только симметрию геометрического расположения элементов структур или подструктур, но и трансформационные свойства соответствующих физических величин, например однородных тензорных полей, описывающих физические свойства материальных систем и явления, возникающие при взаимодействии физических полей друг с другом и с материальными объектами.

Распространение геометрического принципа диссимметризации (12) на физические явления принадлежит Пьеру Кюри (1894). Именно ему принадлежит знаменитая фраза «Диссимметрия творит явление», которую, выражаясь его же словами, необходимо понимать следующим образом: «Явление может существовать в среде, обладающей характеристической симметрией (G_i) или симметрией одной из подгрупп его характеристической симметрии ($G \subseteq G_i$). Иными словами, некоторые элементы симметрии могут сосуществовать с некоторыми явлениями, но это не обязательно. Необходимо, чтобы некоторые элементы симметрии отсутствовали. Это и есть та диссимметрия, которая творит явление». Формулировку принципа (12) в виде

$$G_{\text{явления}_i} \supseteq G_{\text{среды}} = \cap G_{\text{явления}_i} \text{ или } G_{\text{свойства}_i} \supseteq G_{\text{объекта}} = \cap G_{\text{свойства}_i} \quad (13)$$

мы будем называть принципом Поймана—Миннигероде—Кюри (НМК), т. к. формулировка Кюри опирается на результаты предшественников и обобщает накопленные физикой XIX в. факты. Приведем в хронологической последовательности другие формулировки, характеризующие историю становления принципа.

В. Вивелл (1830): «Оптическая симметрия в точности соответствует геометрической симметрии». Ф. Пойман (1850—1885): «Материал в отношении физических свойств обнаруживает симметрию того же рода, что и его кристаллографическая форма». В. Миннигероде (1884): «Группа симметрии кристалла есть подгруппа симметрии всех возможных в этом кристалле физических явлений». Для перехода отсюда к формулировке Кюри достаточно заменить слово «кристалл» словом «среда».

Предшественники Кюри, как и он сам, к сожалению, не могли быть свидетелями того бурного расцвета структурных исследований, которыми так богата физика XX в. Поэтому они не могли предусмотреть всех наблюдающихся форм связи между группами G и G_i, в частности эффекта симметризации (11), хотя самому Кюри и принадлежит гениальная догадка: «Произведенные действия могут быть более симметричны, чем причины». Данный Пьером Кюри рецепт нахождения симметрии составной системы («Когда несколько различных явлений природы накладываются друг на друга, образуя одну систему, диссимметрии их

складываются. В результате остаются лишь те элементы симметрии, которые являются общими для каждого явления, взятого отдельно»), как теперь стало ясно, справедлив лишь для гетерогенных систем. Неясный характер и противоречивость ряда высказанных Кюри положений неоднократно побуждали исследователей к критике и замене этих положений другими утверждениями, основывающимися на принципе причинности или принципе достаточного основания (Биркгоф, 1950, 1954; Шубников, 1956; Копцик, 1957–1971; Спасский и Криндач, 1968, 1971).

Несмотря на большую литературу вопроса, применение принципа НМК в физике наталкивается на трудности. Примером могут служить так называемые *парадоксы симметрии* в гидродинамике, когда явная симметрия причин не влечет за собой симметрии вызываемых ими действий (см. Биркгоф, 1954). Связано это с тем, что принцип НМК в формулировках (12), (13) имеет ограниченную применимость, т. к. симметрия системы не сводится, вообще, к пересечению групп симметрии ее составных частей. Кроме того, группа симметрии системы, определенная в результате физических испытаний, может быть неправильно принята за геометрическую группу G, тогда как в действительности она является цветной группой $G^{(p)}$. Например, ферромагнитный кубический кристалл, имеющий с учетом спиновой подструктуры двуцветную группу $Ш = P4/mm'm'$, по данным рентгеновского анализа, будет иметь группу $\Phi = Pm\bar{3}m \supset P4/mmm \leftrightarrow P4/mm'm' = Ш$; лишь подгруппа $\Phi^* = \Phi \cup Ш = P4/m \subset \Phi$ будет здесь группой чисто геометрических преобразований. В подобных случаях лишь геометрическая подгруппа $G^* \subset G^{(p)}$ должна приниматься в (12), (13) за геометрическую симметрию системы. Еще одна трудность заключается в том, что условия симметрии, в силу своей абстрактной природы, только необходимы, но недостаточны для реализации явлений. Предсказываемые симметрией системы явления могут не наблюдаться или быть неустойчивыми. Следует подчеркнуть, что формальный анализ условий симметрии не освобождает исследователя от необходимости тщательного изучения самих физических явлений и от нахождения тех материальных агентов, которые действительно выступают в качестве симметризующих или диссимметризующих факторов для физических систем.

Одна из указанных выше трудностей устраняется использованием наряду с (12) также и принципа симметризации (11); примеры симметризации геометрических систем приводились уже в первом издании этой книги (см. также Шубников, 1961).

Заканчивая анализ принципа суперпозиции групп симметрии, нельзя обойти молчанием вопрос о взаимодействии структурных подуровней в пределах выделенной системы и о взаимодействии систем друг с другом. Материальные системы и их подсистемы могут быть лишь мысленно

изолированы друг от друга. В действительности наблюдается взаимодействие, которое может изменить структуру, а следовательно, и симметрию по сравнению с той, которую система или ее подуровень имели бы в изолированном состоянии.

Обозначим в (12) через G_i и G группы стационарной симметрии, определенные для наших объектов, находящихся в (мысленно) изолированном состоянии. Пусть G_i' и G' — группы тех же объектов в состоянии взаимодействия. Если само расположение гетерогенных подсистем G_i, определяющее на фиксированном уровне симметрию пересечения $G = \cap G_i$, является достаточной причиной для их взаимодействия (система $G = \cap G_i$ полна и изолирована от внешних воздействий) и если это взаимодействие не приводит на другом структурном уровне к установлению новых соотношений эквивалентности между элементами, то группа симметрии пересечения $\cap G_i$ невзаимодействующих объектов должна сохраниться при взаимодействии: ибо почему она должна измениться, если исходное состояние симметрично, а симметризующие систему факторы (по предположению) не включаются в игру?

$$G' = \cap G_i' = \cap G_i = G. \tag{14}$$

Если взаимодействие приводит к появлению новых соотношений эквивалентности между элементами, то в соответствии с (11) возможна симметризация взаимодействующей системы:

$$G' = \cap G_i' \cup M' \supseteq \cap G_i \cup M = G,\ M' \neq \phi,\ M = \phi. \tag{15}$$

Соотношение (15) можно применять и для исходного состояния (11); в этом случае $M \neq \phi$.

Взаимодействие, начавшееся от исходных состояний $\cap G_i$ (12) или $\cap G_i \cup M$ (11), которые (по предположению) сами по себе служат достаточным основанием для взаимодействия, не может привести к диссимметризации изолированных систем. Для того чтобы диссимметризация произошла в (12), необходимо включить диссимметризующие факторы (их роль играют новые группы G_i). Но почему эти факторы должны уменьшить пересечение $\cap G_i$, если само их появление в изолированной системе предопределялось исходным пересечением групп? Для диссимметризации системы (11) необходимо исключить некоторые элементы связи из множества M. Но почему симметризующие факторы должны выпадать из объединений $\cap G_i \cup M$, если это объединение было симметричным и определяло взаимодействие?

Проведенное рассуждение, базирующееся на принципе достаточного основания*, привело нас к формулировке законов сохранения стаци-

*Или, вернее, на принципе отсутствия достаточного основания.

онарной симметрии для изолированных систем. В системе (14) симметрия невзаимодействующего состояния сохраняется полностью. В системе (15) симметрия исходного состояния не уменьшается (но может возрасти). С этой точки зрения, если выполняются положенные в основу рассуждения предпосылки, стационарная симметрия изолированных систем может изменяться лишь в сторону увеличения. Для диссимметризации необходимо расширить систему, нарушив ее изоляцию: только внешние по отношению к фиксированной системе материальные агенты способны изменить ее симметрию в сторону уменьшения.

Законы сохранения симметрии играют важную роль в термодинамике равновесных состояний и в теории фазовых переходов. В следующем параграфе мы приступим к рассмотрению соответствующих примеров.

Связь симметрии со свойствами систем. Симметрия физических уравнений и законов. Законы сохранения в фазовые переходы

Связь симметрии с общими и частными свойствами систем определяется отношениями типа (11), (12) между целым и его частью, поскольку эти отношения отражают связь состояний, а подструктуры системы являются материальными носителями этих свойств.

Если физическая система гетерогенна (состоит из неэквивалентных подсистем), (12) можно переписать в виде (13) или еще иначе:

$$G_{(\text{свойства подсистемы})_i} \supseteq G_{\text{системы}} = \cap G_{(\text{свойства подсистемы})_i}. \qquad (16)$$

Если материальная система гомогенна (однородна), принцип симметризации (11) принимает вид

$$G_{(\text{свойства подсистемы})_i} \supseteq, \subset \text{ или } \not\supset G_{\text{системы}} = \cap G_{(\text{свойства подсистемы})_i} \cup M, \quad (17)$$

где, как и в (11), вместо G_i могут быть изоморфные им классические или цветные группы $G_i^* = SG_iS^{-1}$ в зависимости от принадлежности $S \in G_{\text{охв}}$ или $G_{\text{охв}}1^{(p)}$. Если в (16), (17) интересоваться не частными свойствами подсистем, а свойствами системы в целом, то на основании *принципа причинности* и *логической аксиомы* в обоих случаях следует сохранить лишь одну возможность

$$G_{(\text{свойства системы})_i} \supseteq G_{\text{системы}},$$

где индекс i нумерует симметрию i-го свойства системы, а не симметрию i-ой подсистемы или ее свойства.

Так как природные системы всегда гомогенны в одном отношении (на одном уровне структуры) и гетерогенны в другом (или других), (16), (17) следует рассматривать вместе как единый принцип суперпозиции групп симметрии. Их необходимо рассматривать также и в неразрывном единстве с законами сохранения стационарной симметрии для изолированных систем, которые мы, объединяя (14) и (15), перепишем в виде

$$G'_{\text{системы}} = \cap G'_{\substack{\text{(взаимодействую-}\\\text{щих подсистем)}_i}} \cup M' \supseteq \cap G_{\substack{\text{(невзаимодействую-}\\\text{щих подсистем)}_i}} \cup M = G_{\text{системы}}. \tag{18}$$

Для гетерогенных в исходном состоянии систем $M = \phi$, для гомогенных — $M \neq \phi$ (за исходное принимаем состояние условной изоляции частей системы или невзаимодействия подсистем).

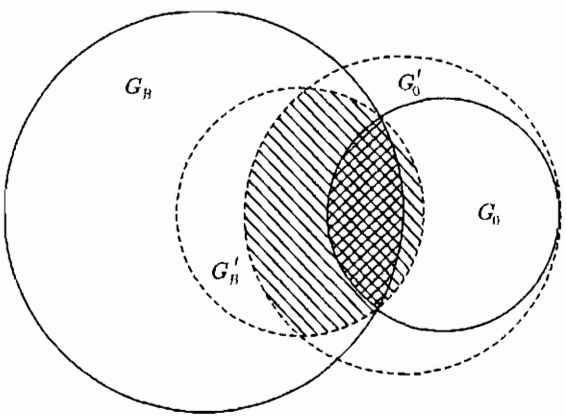


Рис. 223. Диаграмма Эйлера иллюстрирует частный случай закона сохранения (неубывания) стационарной симметрии $G'_0 \cap G'_B \supseteq G_0 \cap G_B$ для изолированной физической системы, состоящей из объекта и наложенного на него воздействия (см. пояснения в тексте)

Не следует думать, что законы сохранения симметрии определяют мир застывших систем, для которых запрещены какие-либо структурные изменения. Совсем наоборот! Пусть, например, гетерогенную систему составляют некий материальный объект и наложенное на него воздействие, имеющие в изолированном состоянии стационарную симметрию G_0 и $G_в$, соответственно. Пересечение этих двух групп, изображенных на рис. 223 кругами, определяет стационарную симметрию системы $G_{\text{системы}} = G_0 \cap G_в$. Если система изолирована, это пересечение

не может измениться при взаимодействии ее частей

$$G'_{\text{системы}} = G'_{\text{о}} \cap G'_{\text{в}} \supseteq G_{\text{о}} \cap G_{\text{в}} = G_{\text{системы}}; \qquad (19)$$

тогда как части системы могут изменять свою симметрию любым образом. На рис. 223 представлен случай, когда симметрия объекта возрастает $C'_{\text{о}} \supset G_{\text{о}}$, а взаимодействующее поле изменяет симметрию до группы $G'_{\text{в}}$, которая не является подгруппой исходной группы: $G'_{\text{в}} \not\subset G_{\text{в}}$. На практике могут встретиться и все другие случаи, например $G'_{\text{о}} \supset G_{\text{о}}$, $G'_{\text{о}} = G_{\text{о}}$, $G'_{\text{о}} \subset G_{\text{о}}$, $G'_{\text{в}} \subset G_{\text{в}}$, $G'_{\text{в}} = G_{\text{в}}$, $G'_{\text{в}} \supset G_{\text{в}}$, однако с точностью до изоморфизма групп и лишь в таких сочетаниях, чтобы удовлетворялся закон сохранения (19). Если этот закон не выполняется, значит система не изолирована и исследователь имеет дело с расширенной (или суженной) системой, не замечая включения в исходную систему (или выпадения из нее) внешних диссимметризующих или симметризующих факторов.

В этой связи стоит заметить, что сильнейшее волнение в среде ученых вызывают случаи так называемого нарушения законов сохранения, например, несохранение пространственной четности P в реакции радиоактивного β-распада кобальта ($Co^{60} \rightarrow Ni^{60} + e^- + \nu$) или комбинированной CP-инвариантности при распаде нейтрального K-мезона на π-мезоны ($K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$). Отдаленные отзвуки этих потрясений доходят в наши дни и до неспециалистов. Однако во всех случаях оказывается, что никакого нарушения логической аксиомы или самого принципа инвариантности в действительности нет, а просто исследователям открываются новые, не учитывавшиеся ранее, соотношения связи и совершается переход к расширенным гетерогенным или суженным гомогенным системам; в рассматриваемом примере — к CPT-системам*.

Рассмотрим подробнее названные примеры. Если наблюдать достаточно долго реакцию распада Co^{60}, можно обнаружить равновероятное излучение электронов e^- по всем направлениям, т. е. сферическую группу симметрии $\infty\infty om$. В однородном магнитном поле с группой антисимметрии $\infty/mm'm'$ кобальт излучает электроны преимущественно в направлении северного полюса в соответствии с симметрией конуса ∞mm. Определяя симметрию системы по принципу пересечения, находим, что закон сохранения (19) на уровне классических групп нарушается:

$$G_{\text{системы}} = G_{\text{о}} \cap G_{\text{в}} = \infty\infty om \cap \infty/mm'm' = \infty/m \not\subset \infty mm = G'_{\text{системы}}.$$

*Буквами C, T (начальными от слов Charge — заряд, Time — время) в ядерной физике обозначаются операторы антисимметрия, изменяющие знак зарядовой (q) или временной (t) координаты элементарной частицы. Оператор P (Parity — четность) меняет знак всех геометрических координат ($\mathbf{r}$), и его можно отождествить с инверсией: $\mathbf{Pr} = -\mathbf{r}$, $\mathbf{C}q = -q$, $\mathbf{T}t = -t$.

Однако это нарушение свидетельствует лишь о неправильном определении геометрической симметрии систем. Можно предположить, что с учетом спиральности испускаемого нейтрино ν симметрия излучения Co^{60} будет не $\infty\infty m$, а группой сферы без плоскостей $\infty\infty$ или группой ∞ в присутствии поля: $\infty\infty \cap \infty/mm'm' = \infty \subset \infty mm$. По другому предположению, закон сохранения (19) выполняется статистически в расширенной системе, состоящей из частиц и античастиц; переход от одной из них к другой совершается комбинированной операцией зарядовой инверсии $\bar{1}^* = PC$ или зарядового отражения в PC — плоскости m^*. При таком предположении закон сохранения симметрии приобретает вид $\infty/m\bar{1}^* = \infty/m^* \subset \infty/m^*m'm'$ или

$$G_{\text{расширенной системы}} = (\infty\infty m \cap \infty/mm'm')\bar{1}^* = \infty\infty m^* \cap \infty/m^*m'm' = \\ = \infty/m^* \subset \infty/m^*m'm' = G'_{\text{расширенной системы}},$$

где $\infty/m^*m'm'$ — группа двукратной антисимметрии, меняющая у подсистем знак магнитного поля и переводящая конус электронов e^- в конус позитронов e^+, испускаемых антикобальтом где-то в антимире; операции 1^*, $\bar{1}^* \notin G_{\text{подсистем}}$.

Причина CP-неинвариантности, несмотря на очень большие усилия физиков, остается пока неразгаданной. Академик В. Л. Гинзбург (1971 г.) пишет по этому поводу: «Итак, в природе наблюдается нарушение CP-инвариантности. Такой результат приводит, возможно, к фундаментальным выводам о неэквивалентности правого и левого, о неэквивалентности прямого и обратного направлений времени, о неэквивалентности частиц и античастиц. С другой стороны, по-видимому, не исключена возможность связать CP-несохранение с действием какого-то нового (ранее не известного) сверхслабого взаимодействия... Несомненно, проблема CP-несохранения — одна из самых интригующих, а по всей вероятности, и самых важных в современной физике».

Итак, законы сохранения (15), (18) не запрещают изменений структуры и свойств взаимодействующих объектов, а лишь устанавливают их границы. Неучет тех или иных взаимодействий приводит к построению приближенных моделей, заменяющих при исследованиях реальные системы. Замена этих моделей более точными, связанная подчас с ломкой старых представлений, проявляется внешне как «нарушение» законов сохранения. С приближенным характером наших знаний и сохранившимся еще от натурфилософии и физики XIX в. неправильным пониманием действий как причин явлений (действительными причинами могут быть только взаимодействия!), связаны и упоминавшиеся в предыдущем параграфе парадоксы симметрии. Действия могут быть приняты за формальные причины изменений симметрии лишь в предельных случаях

сохранения одной из групп G_0 или G_B при «слабых» взаимодействиях, что, впрочем, не исключает появления деформаций у соответствующих подструктур.

Продолжая рассмотрение примера, построим группу CPT-преобразований, включающую помимо названных преобразований еще и операцию отождествления $1 = C^2 = P^2 = T^2$. Очевидно, группа двукратной антисимметрии $CPT = \{1, P, T, C\}$ изоморфна группе $\bar{1}1' = \{1, \bar{1}, 1'\bar{1}'\}$ или группе $2/m = \{1, \bar{1}, 2, m\}$ при соответствии элементов в порядке перечисления (таблицы умножения групп $\bar{1}1'$ и $2/m$ см. на стр. 339 и 252). Известная теорема Швингера, Людерса и Паули (1953, 1955)* утверждает, что любые уравнения движения в квантовой теории поля, удовлетворяющие постулатам специальной теории относительности, должны быть инвариантными при одновременном выполнении тройного CPT-преобразования. Если потребовать, чтобы эти уравнения при выполнении преобразований P (над $\mathbf{r}$) и CT (над qt) изменялись одинаковым образом (в обоснование этого требования мы здесь вдаваться не можем), теорема сводится к тривиальному утверждению: из $P = CT$ немедленно следует $P^2 = PCT = 1$.

Поскольку мы уже начали говорить о симметрии уравнений, необходимо подчеркнуть, что в основу классификации физических теорий могут быть положены группы физических автоморфизмов, сохраняющие инвариантными фундаментальные уравнения этих теорий. К такой классификации проложили путь Эрлангенская программа Клейна (1872) — выделения из геометрии ее метрически-, аффинно-, и проективно-инвариантных частей, работы Лоренца (1895) и Эйнштейна (1905) по анализу преобразований, допускаемых уравнениями классической электродинамики и специальной теории относительности. Изменение фундаментальных групп изменяет всегда структуру теорий.

Так, классическая механика Ньютона представляет совокупность предложений, инвариантных относительно преобразований Галилея–Ньютона

$$x_i' = x_i + v_i t,\ x_i' = x_i + a_i,\ x_i' = D_{ik}x_k,\ t' = t + b,\ D_{ik}D_{kj} = \delta_{ij}$$
$$(\delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j,\ \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j,\ i, k = 1, 2, 3),$$

образующих непрерывную 10-параметрическую группу симметрии однородного и изотропного геометрического пространства и однородного времени. Законы движения имеют тождественную (ковариантную) форму во всех связанных этими преобразованиями эквивалентных системах координат, в том числе — в инерциальных системах, движущихся отно-

*См. библиографию к гл. 4 книги Р. Стритера и А. Вайтмана (1966).

сительно друг друга с постоянной скоростью v_i (принцип относительности Галилея).

Уравнения движения в специальной теории относительности, квантовой механике и электродинамике инвариантны относительно преобразований Лоренца, имеющих в простейшем случае вид

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ t' = \frac{t + \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \beta = \frac{v}{c}.$$

Приведенные уравнения выделяют релятивистски-эквивалентные системы отсчета, движущиеся вдоль оси x_1 со скоростями, близкими к скорости света c (принцип относительности Эйнштейна).

Инвариантность названных выше теорий отражает свойства однородности и изотропии четырехмерного пространства геометрических координат и времени $\{x_1,\ x_2 x_3,\ x_4 = i\,c\,t\}$ (введение мнимой единицы i выделяет координату времени и подчеркивает, что пространство рассматривается в теории как математический объект). Преобразования Лоренца сохраняют метрику этого пространства (квадрат длины четырехмерного вектора $x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2t^2$), откуда следует и инвариантность величины c.

В 1918 г. последовательница Клейна Эмми Нетер, опираясь на его работы, доказала знаменитую теорему*: «Всякому непрерывному преобразованию координат и обусловленному им преобразованию функций поля, обращающему в нуль вариацию действия, соответствует определенный инвариант, т. е. некоторая сохраняющаяся комбинация функций поля и их производных». В общем случае из теоремы Нетер следует, что для любой изолированной физической системы существует 10 сохраняющихся кинематических величин: 3 компоненты импульса, 6 компонент момента количества движения и энергия. Это будут, соответственно, инварианты преобразований параллельных переносов, ортогональных преобразований геометрического пространства и преобразований смещения начала отсчета времени.

Связь между законами сохранения и симметриями физических законов, по словам Ричарда Фейнмана, «до сих пор поражает физиков своей глубиной и красотой... Среди наиболее мудрейших и удивительнейших вещей в физике эти связи — одни из самых интересных и красивых» (Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, 1965; см. также А. А. Богуш и Л. Г. Мороз, 1968). Для любой физической теории, формулирующей законы исследуемых явлений на языке дифференциальных или алгебраических уравнений, подобным же образом находятся свои группы

*Историю и библиографию работ см. в книге В. П. Визгина (1972)

преобразований симметрии и свои инварианты. Покажем это на модели кристаллофизических тензорных уравнений.

Примером таких уравнений может служить уравнение поляризации диэлектрической среды под действием внешнего электрического поля (см. стр. 329):

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \text{ или } D_i = \varepsilon_{ij}E_j,\ i,j = 1,2,3.$$

Обобщая пример, запишем уравнения связи между однородными тензорными полями $A_{pq\ldots r}$, описывающими эффект, и полями воздействия $B_{ij\ldots k}$ в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{aB} \text{ или } A_{pq\ldots r} = a_{pq\ldots rij\ldots k}B_{ij\ldots k};\ p,q,\ldots,r,i,j,\ldots,k = 1,2,3. \tag{20}$$

Если тензоры $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$, и $\mathbf{B}$ определены на охватывающей ортогональной группе $\infty\infty m$, уравнения преобразования их компонент имеют вид

$$A_{p'q'\ldots r'} = \varkappa(\mathbf{D})D_{p'p}D_{q'q}\ldots D_{r'r}A_{pq\ldots r},\ p',q'\ldots,r',p,q,\ldots,r = 1,2,3 \tag{21}$$

и аналогично — для тензоров $\mathbf{a}$ и $\mathbf{B}$ (ср. уравнения (2), стр. 329). Представляя физический закон, уравнения (20) должны сохранять соотношения связи между тензорами $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{B}$ в любой из допускаемых группой $\infty\infty m$ системе координат. Иными словами, левые и правые части уравнений (20) под действием ортогональных преобразований изменяются согласованно (принцип ковариантности физических уравнений):

$$\mathbf{A} = \mathbf{aB} \text{ (в системе } X_1X_2X_3) \Rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{a}'\mathbf{B}' \text{ (в системе } X_1'X_2'X_3'). \tag{22}$$

Однако компоненты тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{B}$ относительно произвольных преобразований, вообще говоря, неинвариантны. Группами симметрии $G_{\mathbf{A}}$, $G_{\mathbf{a}}$, $G_{\mathbf{B}}$ тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ в $\mathbf{B}$ будут максимально высокие подгруппы ортогональной группы $\infty\infty m$, сохраняющие матрицы тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{B}$ инвариантными (Шубников, 1949). Тензорная модель позволит нам установить полезные соотношения, связывающие группы симметрии уравнений и их решений.

Возьмем произвольную операцию $g \in G_{\mathbf{a}} \cap G_{\mathbf{B}}$, принадлежащую пересечению групп $G_{\mathbf{a}} \cap G_{\mathbf{B}}$. По определению относительно нее тензоры $\mathbf{a}$ и $\mathbf{B}$ инвариантны. Следовательно, преобразованное с ее помощью уравнение (20) приобретает первоначальный вид

$$\mathbf{A}' = \mathbf{a}'\mathbf{B}' \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{aB}$$

и $g \in G_{\mathbf{A}}$. В силу произвольности операции $g \in G_{\mathbf{a}} \cap G_{\mathbf{B}}$

$$G_{\mathbf{A}} \supseteq G_{\mathbf{a}} \cap G_{\mathbf{B}} = G_{\mathbf{a}\cap\mathbf{B}}. \tag{23}$$

Назовем группы $G_{\mathbf{A}} = G_{\mathbf{AB}}$ и $G_{\mathbf{a}\cap\mathbf{B}}$ группами симметрии уравнения, определенными по его решению, уже учитывающему (по предположению) результат физического взаимодействия, и, соответственно, по пересечению невзаимодействующих тензорных полей. Если уравнения $\mathbf{A} = \mathbf{aB}$ допускают некоторое множество $\{\mathbf{A}\} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots\}$ эквивалентных решений $\mathbf{A}_i = \mathbf{aB}$, то

$$G_{\{\mathbf{A}\}} = \cap G_{\mathbf{A}_i} \cup M \supseteq G_{\mathbf{a}} \cap G_{\mathbf{B}} = \\ = G_{\mathbf{a}\cap\mathbf{B}}, G_{\mathbf{A}_i} \supseteq, \subset \text{ или } \not\supset G_{\{\mathbf{A}\}} \supseteq G_{\mathbf{a}\cap\mathbf{B}}, \quad (24)$$

где $G_{\mathbf{A}_1}$ или их изоморфные аналоги $G^{(p)}_{\mathbf{A}_i} = SG_{\mathbf{A}_i}S^{-1}$ выражают симметрию одного из возможных решений, M — симметризатор системы решений и $G_{\{\mathbf{A}\}} = G_{\mathbf{aB}} = G_{\mathbf{a}} \cap G_{\{\mathbf{B}\}}$; $G_{\{\mathbf{B}\}} = \cap G_{\mathbf{B}_i} \cup M$. Если уравнения $\mathbf{A} = \mathbf{aB}$ несовместны, множество решений пусто и можно положить формально $G_{\{\mathbf{A}\}} = \infty\infty m \supseteq G_{\mathbf{a}\cap\mathbf{B}}$.

Соотношения (23), (24) выражают для уравнений общие связи (16), (17), существующие между частями системы и целым. Например, биконус эквивалентных решений $\{\mathbf{D}\}$ уравнения (1), соответствующий коаксиальному биконусу воздействий $\{\mathbf{E}\}$, совпадает в кристаллах кварца с симметрией уравнения

$$G_{\{\mathbf{D}\}} = \infty/mmm = \infty/mmm \cap \infty/mmm = G_{\varepsilon} \cap G_{\{\mathbf{E}\}} = G_{\varepsilon\mathbf{E}}$$

(ср. рис. 220). Для любого частного решения $D_j = \varepsilon_{ij}E_j$ из этой системы имеем по (24) $G_{D_j} = \infty m m \not\supset \infty/mmm = G_{\varepsilon E}$. В то же время $G_{\{\mathbf{D}\}} \supset G_{\varepsilon} \cap G_{E_i}$ и $G_{D_j} = \infty m m \supset m = \infty/mmm \cap \infty m m = G_{\varepsilon} \cap G_{E_i}$ по (23).

Для читателя, знакомого с теорией представлений групп, заметим, что возможность перехода в (24) от групп $G_{\mathbf{A}_i}$ к изоморфным им цветным группам $G^{(p)}_{\mathbf{A}_i}$ соответствует тому, что решения операторных уравнений типа $\widehat{\mathbf{aB}} = \mathbf{A}$ (к ним относятся тензорные уравнения кристаллофизических эффектов, стационарное уравнение Шредингера $\mathbf{H}\psi = E\psi \ldots$ и т. д.) преобразуются по неприводимым представлениям группы симметрии уравнения и по их комбинациям. С изменением оператора $\hat{\mathbf{a}}$ меняется, естественно, и группа симметрии уравнения. Если квантово-механическую систему, описываемую уравнением $\mathbf{H}_0\psi^0 = E^0\psi^0$, поместить во внешнее стационарное поле, то состояния системы будут описываться решениями уравнения $(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1)\psi = E\psi$ и группа симметрии уравнения $G_{\mathbf{H}_0}$ заменится на $G_{\mathbf{H}} = G_{\mathbf{H}_0} \cap G_{\mathbf{H}_1}$ (см., например, И. Г. Каплан, 1969 г.).

Таким образом, если известны трансформационные свойства величин, входящих в правую часть уравнений, можно определить группы симметрии уравнений, а следовательно, и их решений еще до нахождения самих решений. Полученный результат носит общий характер. Если система уравнений в частных производных инвариантна относительно некоторой группы G, можно отыскать решения, которые также инвариантны относительно G. Приведенная теорема Биркгофа, синтезирующая *логическую аксиому с принципом суперпозиции* групп симметрии, широко используется в современной физике.

Заметим, что нахождение точных решений уравнений физических теорий сопряжено со многими трудностями. Теория может быть неполна, если ее условия не определяют решения единственным образом; переопределена, если не существует решения, совместимого с ее условиями; некорректна, если не подтверждается опытом. В теории могут возникнуть парадоксы симметрии, аппроксимации, особых точек, топологического переупрощения. Полученное математическое решение может быть *физически неустойчивым* (Биркгоф, 1954). Пути преодоления отмеченных трудностей сводятся к построению более точных моделей физических явлений и к совершенствованию самих математических методов.

Законы сохранения типа (18) (ср. также рис. 223), допускающие структурные изменения изолированных систем на их пути к термодинамическому равновесию, равно как и общие отношения связи между частью и целым (11), справедливые и при динамическом равновесии, проливают свет на многие парадоксальные ситуации, позволяют понять, почему, например, симметричная задача не обязательно имеет устойчивое симметричное решение (симметрия объекта определена приближенно, за причину явления принято действие, а не взаимодействие и т. д.). Нарушение законов сохранения служит сигналом некорректности теории или физической неустойчивости решения.

Анализ принципа суперпозиции и законов сохранения стационарной симметрии особенно прост в тех случаях, когда группы симметрии систем и подсистем расщепляются в прямые, полупрямые или условные *произведения подгрупп*. Если такое расщепление осуществимо на всех этапах, соотношения (11)–(24) перепишутся в символах произведений подгрупп:

$$(11)\ G=\cap G_i \cup M,\ SG_iS^{-1}\supseteq,\subset,\not\supset G,\ S\in G_{\text{охв}}1^{(p)}\Rightarrow G=G_i\odot G^D\cdot G^C,$$
$$G=G_i\cdot G^{C^*}\odot G^{D^*},\ \text{где точка замещает символы } \otimes,\ \circledS,\ \odot,\ \bigcirc \qquad (11^*)$$

$$(12)\ G=\cap G_i,\ G_i\supseteq G\Rightarrow G=G_i\cdot G^D \text{ или } G_i=G\cdot G^C,\ G^DG^C=1, \qquad (12^*)$$

где G^C, G^D — соответствующие группы симметризаторов и диссимметризаторов. С помощью указанных замен получаем, например,

$$(15)\ G' = \cap G'_i \cup M' \supseteq \cap G_i \cup M = G \Rightarrow G' = G \cdot G^{C''} =$$
$$= G'_i \odot G^{D'} \cdot G^{C'} \supseteq G_i \odot G^D \cdot G^C = G \quad (15^*)$$

и т. д. Между множествами M и группами G^C существует простая связь.

Пусть $\Phi = T\textcircled{S}G$ — пространственная группа кристалла, G_1, $G_2, \ldots$, G_i — подгруппы G, $G_1 = 1$ — младшая подгруппа, G_i — подгруппа индекса 2. Разложим Φ по подгруппам TG_i:

$$\Phi = \bigcup_{k=1}^{s} TG_1 g_k = T \bigcup_{k=2}^{s} Tg_k = T \cup M, \ldots,$$
$$\Phi = \bigcup_{k=1}^{2} TG_i g_k = TG_i g_1 \cup TG_i g_2 = TG_i \cup M., \ g_1 = 1. \qquad (25)$$

Разложениям (20) соответствуют

$$\Phi = TG_1 \cdot \{g_1, g_2, \ldots, g_s\} = T\textcircled{S}G, \ldots,$$
$$\Phi = TG_i \cdot \{g_1, g_2\} = TG_i \otimes G^C. \qquad (26)$$

Элементами связи эквивалентных подструктур в структуре пространственной группы выступают наборы представителей смежных классов $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$, образующие точечные группы или группы по модулю T. За исключением единичного элемента все элементы связи $g_2, \ldots g_s \in \in M = \Phi \setminus TG_i$.

Разложения (25), (26) еще раз показывают, что структуру кристалла можно представлять себе как суперпозицию подструктур — пространственных решеток, параллельных друг другу, составленных из асимметричных или диссимметричных фигур. Симметрия, таким образом, состоит из асимметрий и диссимметрий и определяется через них! В процессе колебаний частицы кристалла смещаются из своих положений равновесия, благодаря чему симметрия системы в каждый данный момент описывается какой-либо одной из подгрупп группы Φ. Сама группа Φ выступает как единство симметрии и диссимметрми — результат усреднения по времени реализующихся при колебаниях диссимметрий!

Этот вывод является общим. Процессы симметризации–диссимметризации мгновенных состояний систем происходят, как видим, и в изолированных системах. Но если речь идет о стационарной (усредненной

по времени) симметрии, ее изменение — всегда результат нарушения изоляции системы, включения в нее некоторых внешних симметризующих или диссимметризующих факторов. Если таким внешним (переходящим во внутренний) фактором является сообщение системе дополнительной энергии, колебательная структура системы изменяется, происходит изменение свободной энергии, температуры, средних межатомных расстояний и других внутренних параметров и функций состояния. При некотором значении свободной энергии изменение колебательной структуры может привести и к изменению стационарной симметрии системы. В этом случае говорят о фазовом переходе, отличая его от случаев индуцированного изменения симметрии систем под влиянием других внешних воздействий.

На рис. 224 фазовый переход иллюстрируется на двухподрешеточной модели двумерного кристалла. Обозначая через Δt разность температур, l и $l'(l < 1')$ — межатомные расстояния между черным и соседними белыми атомами, лежащими в диагональном ряду, и через l_i и $l'_i (i = 1, 2)$ — их проекции на оси координат, представим коэффициент α теплового расширения кристалла, измеренный вдоль диагонали, в виде суммы коэффициентов теплового расширения α_l и $\alpha_{l'}$ длин связей:

$$\alpha = k\alpha_1 + k'\alpha_{l'} = k(\alpha_l - \alpha_{l'}) + \alpha_{l'},$$

$$\left(\alpha = \frac{1}{l+l'} \cdot \frac{\Delta(l+l')}{\Delta t},\ \alpha_l = \frac{1}{l}\frac{\Delta l}{\Delta t},\ \alpha_{l'} = \frac{1}{l'}\frac{\Delta l'}{\Delta t},\ k = \frac{l}{l+l'},\ k' = \frac{l'}{l+l'},\ k+k' = 1\right).$$

Если предположить в первом приближении, что тепловое расширение двумерной модели определяется линейным расширением выделенных цепочек атомов, можно установить критерий фазового перехода. Очевидно, переход из геометрически полярной фазы (k, $k' \neq 1/2$) в неполярную (k, $k' = 1/2$) может наступить при некоторой температуре лишь при условии $\alpha_l - \alpha_{l'} > 0$, когда короткие связи расширяются быстрее длинных, т.е. при наличии в структуре кристалла анизотропии теплового расширения длин связей. Подобным же образом могут быть рассмотрены фазовые переходы в трехмерных структурах (Копцик, 1960).

Группа симметрии более симметричной фазы сохраняет в качестве одной из подгрупп симметрию исходной фазы, $p4/mmm \supset pm1m$, реализующуюся на уровне колебательной структуры кристалла. Соотношение $p4/mmm = pm1m \textcircled{S} 4$ показывает, что симметризатором системы выступает группа $G^C = 4$. Она возникает при некоторой температуре в структуре колебательного спектра низкосимметричной фазы; «время

жизни» ее с ростом температуры непрерывно возрастает, и при температуре фазового перехода группа 4 становится стационарной, определяя симметризацию системы. Перефразируя предыдущие формулировки, можно сказать, что и симметрия уже существует внутри диссимметрий в «приуготовленном» виде.

В теории фазовых переходов принято считать, что стационарная симметрия системы меняется при фазовом переходе скачком. Проведенное рассмотрение показывает, что этот скачок подготавливается непрерывным изменением структуры колебательного спектра кристалла. Проводя процесс в обратной последовательности, заметим, что переход в низкосимметричную фазу лишь стационарно закрепляет одну из диссимметричных подгрупп колебательного спектра симметричной фазы $pm1m \subset p4/mmm$. Так как диагонали квадрата в симметричной фазе (рис. 224) эквивалентны, смещения черного атома вдоль направлений [110], [$\bar{1}$10], [$\bar{1}\bar{1}$0], [1$\bar{1}$0] к вершинам элементарной ячейки равновероятны. В различных локальных областях кристалла такие смещения (если нет других диссимметризующих факторов) осуществляются по закону случая, и все 4 возможные ориентировки присутствуют в макроскопическом образце в одинаковой объемной пропорции.

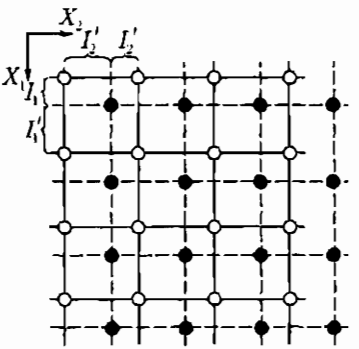


Рис. 224. Модель двумерного кристалла, составленная из двух подрешеток с симметрией $G_1 = G_2 = p4/mmm$ для иллюстрации фазовых переходов.

Симметрия «полярной» фазы при структурных коэффициентах $k_i = \dfrac{l_i}{l_i + l_i'} \neq \dfrac{1}{2}$ $(i = 1, 2)$ определяется пересечением $G_1 \cap G_2 = pm1m$ (в установке осей X_2X_1X', где ось X_3 ортогональна чертежу, а X' — биссектриса эквивалентных осей X_1, X_2). Симметрия «неполярной» фазы при $k_i = 1/2$ равна $G_1 \cap G_2 = p4/mmm$

Диссимметризация атомной структуры (выпадение фактора $G^C = 4$) наблюдается только в этих локальных областях; на границах раздела оси 4 сохраняются, определяя взаимную ориентировку самих областей и векторов смещений в соседних доменах. Весь процесс фазового перехода подчиняется удивительному открытому философами закону компенсации симметрии*: *при понижении симметрии на каком-то одном струк-*

*См. Н. Ф. Овчинников (1966).

турном уровне она возникает и сохраняется на другом! Метафорически выражаясь, структура старой фазы продолжает существовать в новой, но в преобразованном виде. Наоборот, элементы структуры новой фазы уже существуют в старой и лишь проявляются при фазовом переходе. В окрестности точки фазового перехода элементы обеих структур наблюдаются не только на уровне колебаний кристаллической решетки, но и на уровне флуктуаций, представляющих дисперсную форму существования сохраняющейся при переходе структуры. Пространственная группа $p4/mmm$ атомной структуры понизилась в нашем примере при фазовом переходе до групп симметрии доменов $pm1m$, но элементы ортогональных подгрупп $4/mmm$, не принадлежащие группам $m1m$, сохранились в «распределенном» виде и в низкотемпературной фазе, определяя симметрию доменной структуры в целом. С изменением трансляционных масштабов в неполярной фазе сохраняются и элементы пространственной группы $p4/mmm$ (см. Копцик, 1966).

Законы сохранения стационарной симметрии (18) можно распространить, как видим, и на квазиизолированные физические системы, проявляющие тенденцию компенсировать диссиметризацию на одном уровне структуры симметризацией на другом. Известный консерватизм вещества по отношению к изменению состояния, описываемый принципом подвижного равновесия Ле-Шателье, заставляет физическую систему оказывать сопротивление и вынужденному изменению ее симметрии. Заметим также, что поведение симметрии, как функции состояния изолированной системы, коррелирует с поведением ее энтропии. Максимальная стационарная симметрия достигается в равновесном состоянии системы.

Как известно, энтропия служит мерой «беспорядка» или, лучше сказать, симметрической неопределенности в системе: колебательная энтропия $S_v = k \ln W_v$ определяется, например, числом способов W_v распределения внутренней энергии U по N_v степеням свободы; конфигурационная энтропия $S_c = k \ln W_c$ определяется, например, числом размещений n эквивалентных элементов по $N \geqslant n$ эквивалентным ячейкам. В обоих случаях с ростом энтропии, $\Delta S \geqslant 0$, возрастает число эквивалентных состояний в системе, а это и означает ее симметризацию на уровне симметрических групп перестановок и ее подгрупп.

Приведем еще ряд примеров симметризации–диссимметризации систем и соблюдения в этих процессах законов сохранения симметрии.

На рис. 55 (стр. 65) представлен случай симметризации системы при взаимодействии прямолинейного электрического тока $\mathbf{j}$ с полем магнитной стрелки $\mathbf{H}$. В отсутствие взаимодействия (ток в проводнике не течет)

стрелка занимает по отношению к проводнику положение безразличного равновесия: группа симметрии невзаимодействующей системы, определяемая пересечением $G_{\mathbf{j}} \cap G_{\mathbf{H}} = \infty mm \cap \infty/m = 1$. При включении тока стрелка устанавливается, как показано на рисунке, и $G'_{\mathbf{j}} \cap G'_{\mathbf{H}} = m$ в полном соответствии с законами сохранения (18), (19). Симметрия 1 сохраняется на уровне флуктуационных колебаний магнитной стрелки. Другой пример магнитоэлектрической системы см. на рис. 221.

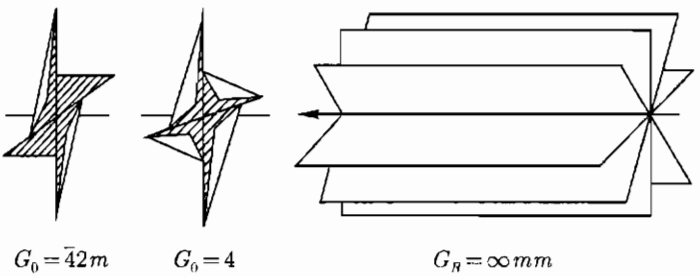


Рис. 225. Схема опыта по наблюдению вращения вертушек различной симметрии при взаимодействии их с ламинарным потоком воздуха.
На схеме показаны направление потока воздуха, совпадающее с осью ∞, и несколько плоскостей симметрии из группы воздействия $G_B = \infty mm$; вертушки с симметрией покоящегося объекта $G_0 = 4$ и $42m$ (если сложить правую и левую вертушки рис. 15, получится вертушка с симметрией $G_0 = 4/m$; соответственно загибая лопасти можно получить вертушку и с симметрией $G_0 = 422$). Опыт показывает, что вертушки с симметрией $G_0 = 4, 4/m, 422$, взаимодействуя с потоком воздуха, вращаются, а вертушка с симметрией $G_0 = \bar{4}2m$ — нет.

Опишем теперь опыт, который каждый читатель может проделать сам, изготовив из бумаги вертушки различной симметрии (рис. 225). Подставив вертушки с симметрией $G_0 = 4, 4/m, 422, \bar{4}2m$ под ламинарный поток с симметрией $G_{\mathbf{B}} = \infty mm$ и придерживая лопасти вертушек, чтобы не допустить их вращения, определим симметрию пересечений невзаимодействующих объектов: $G_0 \cap G_B = 4, 4, 4$ и $2mm$. Отпустив поддержку, найдем, что первые три вертушки вращаются, приобретая динамическую симметрию $G'_0 = \infty, \infty/m, \infty 22$, а последняя не вращается, сохраняя симметрию покоя $G'_0 = G_0 = \bar{4}2m$. Ламинарный поток воздуха в области взаимодействия с вертушками закручивается, приобретая в трех случаях симметрию $G'_{\mathbf{B}} = \infty$; обтекая невращающуюся вертушку, он разделяется на слои и приобретает симмет-

рию $G'_в = 2mm$. Подставляя найденные значения пересечений в (19), получим

$$\infty = G'_0 \cap G'_B \supset G_0 \cap G_B = 4 \text{ и } 2mm = G'_0 \cap G'_B = G_0 \cap G_B = 2mm.$$

В первых трех случаях симметрия среды $\infty \supset 4$ допускает вращение, в последнем — ему противоречит, так как наличие продольных плоскостей симметрии у вертушки $\bar{4}2m$ несовместимо с явлением ее вращения. Совместимым с симметрией $2mm$ оказывается явление покоя или ламинарного течения воздуха.

Заметим, что, если вместо вертушек взять плоские фигуры — многоугольники или звезды с симметрией $G_0 = n = 1, 2, 3 \ldots$, — никакого вращения фигур не будет наблюдаться, несмотря на то, что группы $G_0 \cap G_в = n \cap \infty mm = 1, 2, 3 \ldots$ допускают вращение. Для вращения фигур, помимо условий симметрии, необходимо выполнить еще и некоторое физическое условие, например обеспечить существование ненулевого угла атаки, т.е. наклона лопастей вертушек к потоку воздуха под острым углом. Еще раз мы убеждаемся в том, что условия симметрии лишь необходимы, но недостаточны для существования явлений. Абсолютен запрет: и при наличии ненулевого угла атаки вращение объекта не будет наблюдаться, если его лопасти не расположены соответствующим образом.

В связи с законами сохранения процессы симметризации–диссимметризации неразрывно связаны и протекают одновременно на различных структурных уровнях. Математически метод симметризации лежит в основе теории расширений групп. С физическими процессами симметризации–диссимметризации мы встречались при образовании структур плотнейших упаковок шаров и структуры алмаза (см. стр. 232 и 225); при наложении друг на друга одинаковых растровых сеток (рис. 153–164) или сочетании в орнаменте узоров различной симметрии (рис. 180); в процессах фазового перехода с образованием или разрушением упорядоченных фаз (ср. переходы рис. 3, *а*↔ 3, *б*; рис. 5 *а*↔ 5, *б*); при образовании структур дислокационных сеток и т. д., и т.п.

Симметрия и диссимметрия в искусстве. Законы композиции. Структурно-системные методы анализа художественных произведений

Вопросам проявления симметрии и диссимметрии в искусстве мы посвящаем заключительный параграф книги не потому, что искусство

представляет собою область, менее важную для приложений симметрии, чем область науки. Связано это с меньшей разработанностью тем, указанных в заголовке параграфа. Понятие симметрии входит в искусствознание через понятие структуры. Искусство, как образная форма познания и моделирования мира, должно отражать и действительно отражает его структурную сторону. Структурность — достаточно общий закон, форма существования и движения материи, и этому закону подчинены также продукты научного и художественного творчества. Хорошо известно, что произведения искусства — художественной литературы, поэзии, музыки, живописи, архитектуры и т. д.— обладают сложной художественной структурой, представляют органическое переплетение и взаимопроникновение различных подструктур — отдельных компонент художественной выразительности.

Однако, если теме соответствия произведений искусства действительности, «правде жизни» посвящена обширная научно-критическая литература, исследование «языка искусства», его технических приемов методами структурно-системного анализа началось сравнительно недавно (см., например, Лотман, 1964; Успенский, 1970; Жегин, 1970 и др.). Сами эти методы находятся еще в процессе становления. И хотя в новой области искусствознания уже получены интересные результаты и накоплены любопытные наблюдения на уровне анализа вычлененных подструктур, многим конкретным структурно-системным исследованиям не достает синтетической точки зрения, целостного охвата всего единства подструктур, которое только и составляет в произведении неповторимый художественный эффект.

Что касается симметрии, то ее применение в искусстве носило ограниченный характер до тех пор, пока понятие симметрии ограничивалось ортогональными группами и группами движений, имеющими дело с конгруэнтными и зеркально-равными геометрическими формами. Область ее приложений ограничивалась «неизобразительными» формами искусства: архитектурой, декоративной орнаменталистикой и художественным конструированием — дизайном. Мы говорили об этом неоднократно в первой части нашей работы, приводя примеры симметричных розеток, бордюров, лент и орнаментов. Менее подробно говорилось о том, что объемные формы архитектуры имеют симметрию «полярных» подгрупп ортогональной группы $\infty m m$. Еще более бегло затрагивались проблемы дизайна.

Рассматривая эти произведения искусства, как целостные художественные системы, состоящие из гомогенных или гетерогенных подсистем, мы можем воспользоваться теперь принципом суперпозиции, чтобы определить группы симметрии слагающих систему подсистем. Мысленно вычленяя подструктуры, определим их симметрию в изолированном

состоянии. Состоянию взаимодействия будут отвечать составные подсистемы, сохраняющие симметрию пересечений или объединений соответствующих групп. Проводя мысленный или реальный эксперимент вычленения и объединения подструктур, можно оценить ту роль, которую играет в общей композиции то или иное объединение или каждая из подструктур.

Расширение понятия симметрии (см. стр. 322) существенно расширяет и области ее приложений в искусстве. Действительно, законы перспективы в живописи и графике представляют собой не что иное, как законы групп проективных преобразований, воспринимаемых как преобразования подобия или цветного подобия, на уровнях соответствующих подструктур. Гармоническая пропорциональность античных скульптурных и архитектурных форм — результат строгого соблюдения античными мастерами канонов проективных групп. Группы преобразований четырехмерного пространства–времени совместно с цветными группами определяют специфические законы композиции для временных искусств: музыки, поэзии, танца, кинематографа.

Строго говоря, группы симметрии произведений искусства изоморфны названным выше группам. Применение расширенного понятия симметрии в искусстве связано с нахождением специфических соотношений эквивалентности между элементами художественных подструктур и нахождением групп художественных автоморфизмов, сохраняющих выделенный структурный уровень инвариантным. Преобразования (вариации) и их инварианты — вот важнейшие понятия и в сфере науки, и в сфере искусства! При установлении групп симметрии в искусстве, как и в науке, приходится прибегать к абстрагированию, суждению по методу аналогий, замене сложного явления упрощенной идеальной моделью. При этом сами преобразования и группы симметрии могут оказаться «необычными», «странными» (такими же, как группы по модулю), но они существуют, если только существует относительная эквивалентность и упорядоченность элементов художественных подструктур.

Вместе с тем перенесение понятия ортогональной симметрии (или симметрии движений) на более широкую сферу искусства, вполне уместное на геометрическом подуровне, становится недопустимым на более высоких структурных уровнях, в том числе и на высшем из них — уровне смысла художественного произведения. Заметим в этой связи, что использование идей и представлений «обычной» симметрии в литературоведении, поэтике, теории музыки и т. д. носит зачастую характер суждения по аналогии или метафоры. Переход к представлениям и идеям теории обобщенной симметрии позволяет и в структур-

ном искусствознании придать этим идеям более определенный и точный смысл.

Высокие требования к симметрии (читай: гармонии) литературного слога предъявлялись в литературоведческих работах XIX в. Вот как писал об этом старинный русский журнал в 1812 г. (цит. по книге акад. В. В. Виноградова, 1941, стр. 274): «По осмотрительности в слоге избегают сколько можно стечения гласных букв, одинаковых слогов, обоюдности выражений — стараются, чтобы не было двух или трех слов сряду в одном падеже,— двух или трех слов различного отношения с одним предлогом; остерегаются от неправильных повторений в выражениях; подводят их под законы симметрии»*.

Первыми русскими учеными, применившими идеи классической симметрии к музыке и поэзии в более определенном смысле, были Г. Э. Конюс — крупный музыкант и педагог — и Г. В. Вульф — основоположник отечественной физической науки о кристаллах. «Душа музыки—ритм,—писал Г. В. Вульф в 1908г.,— состоит в правильном периодическом повторении частей музыкального произведения (частей такта в такте, такта в музыкальном предложении, предложения в периоде и т. д.), правильное же повторение одинаковых частей в целом и составляет сущность симметрии. Мы с тем большим правом можем приложить к музыкальному произведению понятие о симметрии, что это произведение записывается при помощи нот, т. е. получает пространственный геометрический образ, части которого мы можем обозревать. Подобно музыкальным произведениям могут быть симметричными и произведения словесности, в особенности стихотворения. Если понятие о симметрии может быть приложено к музыкальным и словесным произведениям, то, конечно, оно имеет гораздо более непосредственное и прямое приложение к произведениям живописи и архитектуры».

Возможно, что эти слова были написаны под влиянием публичной лекции о симметрии в музыке, которую прочел в Политехническом музее Г. Э. Конюс приблизительно в то же самое время. Возможно, что влияние наших ученых друг на друга было обоюдным. Ниже мы скажем несколько слов о созданной Г. Э. Конюсом метротектонической теории музыки. Но сначала перейдем к вычленению подструктур поэтического текста и к определению их групп симметрии, выбрав для разбора одну из пушкинских строф («Евгений Онегин», 4, XXXVI):

*Термин simetria А. С. Пушкин переводил словами соразмерность и соответственность в известной фразе: «Соразмерность (simetria), соответственность свойственна уму человеческому» /Е. Эткинс. *Симметрические композиции у Пушкина*. Institut d'etudes Slaves, Paris, 1988, с. 7.

Уж их далече взор мой ищет. *A*
⏑ ⏓ ⏑ | — ⏑ | ⏓ ⏑ | ⏓ ⏜ |
А лесом кравшийся стрелок *b*
⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ ⏑ | — ⏑ ⏓ |
Поэзию клянет и свищет, *A*
⏓ | — ⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ ⏜ |
Спуская бережно курок. *b*
⏑ ⏓ ⏑ | ⏓ ⏑ — | ⏑ ⏓ |
У всякого своя охота, *C*
⏑ ⏓ | ⏑ — | ⏑ — | ⏑ ⏓ ⏜ |
Своя любимая забота: *C*
⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ | ⏑ — | ⏑ ⏓ ⏜ |
Кто целит в уток из ружья, *d*
⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ |
Кто бредит рифмами, как я, *d*
⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ |
Кто бьет хлопушкой мух нахальных, *E*
⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ ⏜ |
Кто правит в замыслах толпой, *f*
⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ | ⏑ — | ⏑ ⏓ |
Кто забавляется войной, *f*
⏑ — | ⏑ ⏓ | ⏑ — | ⏑ ⏓ |
Кто в чувствах нежится печальных, *E*
⏑ ⏓ | ⏑ ⏓ | ⏑ — | ⏑ ⏓ ⏜ |
Кто занимается вином: *g*
⏑ — ⏑ | ⏓ ⏑ — | ⏑ ⏓ |
И благо смешано со злом. *g*
⏑ ⏓ ⏑ | ⏓ ⏑ — | ⏑ ⏓ |

Поэтические формы основаны на естественном для звуковой речи чередовании сильных и слабых слогов, обеспечивающих четкость воспроизведения и восприятия речи («просодия языка»). Слоговая подструктура пушкинских стихов выделена под каждой строчкой: — — обозначает сильный слог; ⏑ — слабый; ⏓ — ударный; ⏜ — безударный;

вертикальная черточка обозначает обязательный словораздел. Абстрагируемся от дополнительных нюансов: уберем черточки, акценты и положим $\frown = \smile$. Выстраивая мысленно строчки в одну строку, получим одномерный звуковой орнамент (бордюр), элементарную ячейку которого в пределах каждого стиха образует ямб $|\ \smile\ -|$. На стыках между стихами 7 раз встречается хорей $x = |-\ \smile\ |$ и 6 раз — ослабленный ямб $я = |\ \frown\smile\ |$ в последовательности $яxяxяяxxяxxя\,x(x)$ (в скобки заключено хореическое созвучие, связывающее приведенную строфу со следующей строфой).

Переходы между стихами усилены рифмой — созвучиями, образующими следующий уровень звуковой структуры: $AbAbCCddEffEgg$. Большими буквами обозначены строки с женским окончанием (рифмой); маленькими — с мужским. Заметим, что звуковая структура пушкинской строфы асимметрична: элементарную ячейку составляет указанный буквами набор рифм, трансляционно повторяющийся от строфы к строфе. Таким образом, роман «Евгений Онегин» в целом представляет собой на этом уровне одномерную трансляционную структуру! Замечательно, что Пушкин отступил от принятой рифмовки на протяжении романа всего лишь около 10 раз. Если на уровне слоговой структуры можно уподобить строфу поликристаллу, на уровне чередований рифм весь роман представляется как одномерный монокристалл!

Третий звуковой — мелодико-интонационный — подуровень образует система «звуковых волн»: чередований повышения и понижения интонаций типа «вопрос–ответ». Степень регулярности этой трансляционной структуры зависит от уровня абстрагирования: она более регулярна, если не обращать внимания на различную высоту гребней звуковых волн, и менее регулярна в противоположном случае. Мы не будем выделять этот уровень, отсылая читателя к работе А. Белого (1929), выполнившего для пушкинского «Медного всадника» подробный интонационный разбор.

Все три выделенные звуковые подструктуры не несут смысловой нагрузки, но придают поэтическому произведению определенную эмоциональную окраску. Они как бы представляют собой аккомпанемент (сопровождение) стиха. Самими сменами (убыстрениями–замедлениями) или монотонным повторением ритмов и рифм, мелодическим рисунком вопросно-ответных интонаций, выделением голосом особенно эмоциональных мест уже создается определенное настроение, как в песне без слов.

Выделенные звуковые подструктуры не являются самостоятельными в стихе и не существуют вне связи с выразительными средствами языка. Лишение стиха смысла разрушает поэзию (ср. «заумные стихи» В. Хлебникова и В. Каменского). Объединение слогов в слова, слов —

в предложения, предложений в периоды и т. д. приводит к образованию качественно новых смысловых (синтаксических и сюжетно-тематических) подструктур, на уровне которых и возникает поэзия. Определяющая роль смысловых структур по отношению к звуковым видна из того, что возможны стихи без рифм, деструктивные стихи. Белые стихи А. Блока лишены рифм, но они сохраняют ритм и поэтическую образность. Включение в стихотворение аритмических строк используется поэтами как средство выделения и подчеркивания мысли. Диссимметрия в стихе возможна и даже необходима, но только в меру.

Низшей смысловой единицей стихотворной речи является стих. Симметрия «ближнего порядка» на этом уровне бедна. «Подлинная жизнь стиха начинается в его движении» (Б. Томашевский, 1959, стр. 184). Поставленные рядом, эквивалентные по смыслу слова не дают развития мысли, поэтому классическая трансляция на уровне стиха практически не встречается, если только повтор не служит специальным экспрессивным приемом подчеркивания слова. Смысловая антисимметрия в пределах стиха встречается в антонимах («... Волна и камень, Стихи и проза, Лед и пламень» — А. Пушкин), антитезах («Я — царь, я — раб, я — червь, я — бог» — Г. Державин). Больший простор для развития мысли дает цветная симметрия: усиление или ослабление экспрессии при переходе от слова к слову может рассматриваться как придание слову нового качества «... Не жалею, не зову, не плачу» — С. Есенин; «Найду. Загоню. Доконаю. Замучу!» — В. Маяковский). Так как стихотворные строки и произведение в целом имеют конечную длину, трансляционные группы следует рассматривать на всех уровнях как группы по модулю. Бесконечное повторение цветного переноса $\tau^{(3)}$ в стихе С. Есенина бессмысленно. Мысленно построенный бесконечный ряд слов операцией классической трансляции приводится к циклу из трех слов, образующих смысловую единицу. Группа $\{\tau^{(3)}, (\tau^{(3)})^2, \ldots, (\tau^{(3)})^6 = 2\tau\}$ эквивалентна, например, группе $\{\tau^{(3)}, (\tau^{(3)})^2, (\tau^{(3)})^3 = \tau\}$, так как $(\tau^{(3)})^6 = 2\tau \equiv \tau (\mathrm{mod}\, \tau)$, где через τ обозначена длина строки.

Высшее стиховое единство образует строфа. Основные ее признаки: фиксированная последовательность рифм, ритмико-интонационная замкнутость. Онегинская строфа и сонет, включающие 14 стихов, образуют верхний предел для строфы. Более перегруженные строфы не воспринимаются как единое целое. Другие примеры строф: дистих (*ab ab* ...), газель (*aa ba ca da* ...), терцины (*aba bcb edc ded* ...), секстина (*abbacc*), септима (*aabcccb*, *ababccd* или *ababccb*), октава (*abababcc*) и т. д. Строфичность придает произведению композиционную целостность, тематическую законченность и метрическое единство.

Онегинская строфа у Пушкина — не только ритмически-синтаксическая единица, но и сюжетно-тематическая, миниатюрная глава в повествовании. Ее внутренняя структура состоит из четырех подструктур. Первое четырехстишие имеет перекрестные рифмы (классический перенос $Ab \rightarrow Ab$); второе — смежные (цветной перенос $CC \rightarrow dd$), третье — охватные (антиперенос $Ef \rightarrow fE$). В целом ритмическая асимметрия строфы, подчеркнутая концовкой gg, полярна. Выделяя особенное направление по оси времени, ритмический звукоряд согласуется в главных чертах и с направлением развития сюжета. «Первое четверостишие, наиболее автономное в строфе, содержит тезис — краткую формулировку темы строфы. Два следующих четверостишия... развивают тему. Это, конечно, не строгий закон, но очень ясно выраженная тенденция... Последние двустишия строф по большей части заключают в себе самостоятельные сентенции, подготовленные темой строф» (Томашевский, 1959). Разработку темы в пределах строфы мы можем сравнить, следовательно, с «цветным» трансляционным варьированием.

Дальнейшее укрупнение масштаба «цветных переносов» происходит на композиционном уровне связи строф в единое произведение. Если инвариантами трансляционных групп на неизобразительных подуровнях стиха были повторяющиеся группы звуков, то на тематически-сюжетном уровне инвариантами укрупненных цветных групп выступают постоянные образы и темы, фабулы и сюжеты, кочующие от автора к автору, из века в век. Разумеется, здесь можно говорить не об абсолютном, а лишь об относительном, «цветном» равенстве варьируемых смысловых единиц. Инвариантными для соответствующих литературных жанров оказываются технические приемы зачинов и окончаний варьированных повторов, методы кадрирования — выделения переднего плана и описания фона. Такая специфическая черта поэзии, как метафоричность ее языка, возникает в единой схеме групп проективных преобразований. Записывая аристотелевскую метафору в виде пропорции

$$\frac{\text{что старость}}{\text{для жизни}} \simeq \frac{\text{то вечер}}{\text{для дня}},$$

найдем, что по аналогичному плану образуются и другие тропы (поэтические со- и противопоставления).

Идея варьированного развития — центральная во всех видах искусства. Лишение литературного произведения стержневой идеи развития разрушает его структуру коренным образом. Бесконечные стихи типа «Сказки про белого бычка», в которых строфы повторяются с абсолютной точностью, это уже не стихи. Если от чтения звукоряда слева направо или наоборот в большинстве случаев ничего не меняется, то

на высших смысловых уровнях операция «обращения времени» приводит к абсурду. Такое обращение допустимо лишь в «экспериментальных стихах» — палиндромах («Аргентина манит негра» — Н. Булгаков; слова здесь можно читать побуквенно справа налево) и в анациклических стихах:

Жестоко — раздумье. Ночное молчанье
Качает виденья былого...
.....
...былого — виденье качает ...
Молчанье, ночное раздумье — жестоко.
(*В. Брюсов.*)

Приведенную строфу можно читать пословно от конца к началу; ее можно рассматривать как инвариант преобразования «комбинированной инверсии» $\bar{I}'$: перемена направления чтения (от конца к началу) при одновременной переустановке порядка букв в словах не изменяет смысла.

Нахождение смысловых инвариантов в литературном произведении — не случайность. В работах по математической лингвистике показывается, что «смысл есть инвариант синонимических преобразований» языка (см. Гладкий, Мельчук 1969, стр. 154)*. Нахождение инвариантов стилистических преобразований — заслуга акад. В. В. Виноградова. Прослеживая создание «новых стилистических узоров по старой канве», он отмечает, что «группы слов, образов и тем, являющиеся опорами, скрепами сюжетной конструкции и управляющие ее движением, выступают (у Пушкина.— Авт.) симметрично, почти с математической правильностью соотношений». Двигаясь зигзагообразно, сюжет «образует симметрические узоры, связанные отношениями параллелизма, контраста и семантической взаимообусловленности». Сам «принцип симметричного расположения, отражения и варьирования образов и тем в строе литературного произведения является своеобразным «законом» пушкинской художественной системы» (В. В. Виноградов, 1941, стр. 440, 454, 479).

Можно показать, что глубокое единство законов композиции, действующих на различных структурных уровнях во всех временных видах искусства, — *следствие гомо- или изоморфизма групп симметрии* соответствующих структур — трансляционных классических, цветных групп и групп симметрии подобия. Не имея возможности остановиться более подробно на оценках информационной или эстетической стороны поэтического произведения (см. по этому поводу работы Волькенштейна (1970), Биркгофа (1932), Колмогорова и Прохорова (1968), Д. Моля

*См. так же новую книгу Е. Падучевой (1974) по трансформационной грамматике русского языка.

(1966, 1973) и др.), заметим, что бесструктурные уровни действительного произведения искусства (достойного такого наименования) сплавлены в нем в единую художественную систему и вносят свой специфический вклад в общий художественный эффект.

Переходя от поэзии к музыке, напомним, что первой теорией, в которой нашли применение идеи классической симметрии, была теория метротектонизма Г. Э. Конюса (см. Конюс, 1965). В основе этой теории лежит аналогия метрических поэтических форм с музыкальными. Сильным и слабым слогам в поэзии сопоставляются сильные и слабые доли в музыке. Конструктивно-метрические единицы Конюс считает наиболее существенными для музыкальной формы и называет их «скелетными». Смысловые единицы называются им «покровными». Согласно обнаруженному автором теории «закону отражения временных величин» (1900) каждому метрическому построению (такту высшего порядка) в первой половине произведения соответствует «отраженный» такт — во второй. При этом музыкальное содержание обоих тактов может быть тождественным или совершенно различным, они могут быть похожи в одном отношении и контрастировать в другом.

При такой степени неопределенности, как справедливо отметил Л. Мазель, комментируя работу Конюса (стр. 124), «закон равновесия» в том или ином виде действительно может быть обнаружен в любом произведении. В отрыве содержательной стороны музыки от конструктивной заключалась слабая сторона метротектонизма. В то же время аналогия поэзии и музыки имеет не только метафорический смысл («поэзия — музыка слова, музыка — поэзия звука»). Глубокое единство поэзии и музыки зиждется на их общей временной природе, структурности и на существовании некоторых общих законов композиции. Эти законы сводятся к трем основным: трансляционно-тождественное (или подобное), контрастное (антисимметричное) или варьированное (цветное) повторение элементов структуры во времени (или пространстве).

Конструктивная форма в широком смысле — организация для воплощения содержания всех музыкальных средств: лада, мелодии, темпа, метра, ритма, гармонии, полифонии, тембра, регистровки, фактуры, динамики, исполнительских нюансов и т. д. Обладая столь богатым языком, музыка способна отражать динамику явлений, их развитие, борьбу противоположных сил; передавать не только мир чувств, но и мыслей, идей (см. Л. А. Мазель, В. А. Цуккерман, 1967). В фундаментальной работе упомянутых авторов, широко использующей соображения симметрии, приведены превосходные образцы целостных анализов форм музыкальных произведений; убедительно продемонстрировано «единство в принципах построения мельчайших и крупнейших частей произведения» (стр. 256). Вместе с тем показано, что «подчинение музыки ор-

ганизующим закономерностям есть настолько же важный непреложный факт, как и уклонение музыки от чрезмерно точного им следования» (стр. 100). Опять мы встречаемся здесь с единством симметрии и диссимметрии!

Отсылая читателя за примерами к работе Мазеля и Цуккермана, ограничимся лишь одной общей иллюстрацией. Покажем, что в некотором приближении нотную запись музыкального произведения можно перевести на язык (преобразований двумерных пространственных групп цветного подобия. Направим вдоль фиксированной, нотной линейки горизонтальную ось классических переносов a («ось времени t»). Действие оператора $[\mathbf{E}|n\mathbf{a}]$ на нотный знак перемещает его по горизонтали на некоторое целое число долей такта $n\mathbf{a}$, не изменяя высоты знака. С вертикальной осью цветных переносов b будем сопоставлять комбинированные операторы $[\mathbf{E}|s\mathbf{b}](p)$, формально полагая, что геометрический перенос нотного знака на отрезок $s\mathbf{b}$ не изменяет высоты сопоставляемого этому знаку звука; высота же звука изменяется специальным оператором — цветной перестановкой (p). Дополнительно введем оператор изменения длительности звука $[\mathbf{E}|0](q)$, трактуя его как оператор преобразований подобия для временных интервалов Δt. Самостоятельно этот оператор не применяется, а только в комбинации с другими, например,

$$[\mathbf{E}|0](q)[\mathbf{E}|n\mathbf{a}] = [\mathbf{E}|n\mathbf{a}](q),$$
$$[\mathbf{E}|0](q)[\mathbf{E}|s\mathbf{b}](p) = [\mathbf{E}|s\mathbf{b}](q)(p).$$

Учтем еще возможность выполнения ортогональных преобразований над нотными знаками на плоскости. Это будут преобразования цветных групп $mm^{(p)}2^{(p)}$. Вертикальной плоскости $m_\perp$, перпендикулярной нотным линейкам и осуществляющей зеркальное отражение знаков без изменения их высоты, сопоставим оператор $[\hat{m}_\perp|0]$. Горизонтальной плоскости цветного отражения $m_\parallel^{(p)}$ сопоставим комбинированный оператор $[\hat{m}_\parallel|0](p)$. Подобным же образом ортогональной к нотной плоскости оси $2^{(p)}$ сопоставляется оператор $[\hat{2}|0](p)$. Комбинирование преобразований $m_\perp$ и $m_\parallel^{(p)}$ трансляциями a, b дает цветные плоскости скользящего отражения $b^{(p)}$ и $a^{(p)}$, которым сопоставляются операторы $[\hat{m}_\perp|s\,\beta](p)$ и $[\hat{m}_\parallel|n\alpha](p)$ (α и β — связанные с этими плоскостями минимальные переносы вдоль осей a и b).

Полагая $\mathbf{D} = \hat{1}, \hat{2}, \hat{m}_\parallel, \hat{m}_\perp, \boldsymbol{\tau} = n\mathbf{a}, s\mathbf{b}$ и $(p_{ij}) = (1)$ — для преобразований, имеющих классический смысл, получим закон умножения комбинированных операторов $[D_j|\boldsymbol{\tau}_i](p_{ij})(q_j) = [D_j|\boldsymbol{\tau}_i](p_{ij})[E|0] \quad (q_j)$: ·

$$[D_j|\boldsymbol{\tau}_i](p_{ij})(q_j)[D_l|\boldsymbol{\tau}_k](p_{kl})(q_l) = [D_jD_l|D_j\boldsymbol{\tau}_k + \boldsymbol{\tau}_i](p_{ij})(p_{il})(q_j)(q_l).$$

Этот закон обобщает закон умножения операторов в цветных пространственных группах (см. стр. 336). Чтобы прийти с его помощью к образованию замкнутых групп, соответствующих записи нотного текста на ленте конечной ширины и длины, результат умножения операторов следует ограничить по модулю допустимых переносов вдоль осей b и a.

Если теперь у нас в «элементарной ячейке», определенной соответствующим образом, имеется некоторый базисный набор звуковых сочетаний — «зерен» мотивов, аккордов, музыкальных предложений, периодов и других построений, – с помощью преобразований музыкального варьирования можно получить подструктуру музыкального текста («правильную» систему звуков и их объединений), инвариантную относительно соответствующих групп по двойному модулю a и b. Среди семейств этих групп, различающихся по перестановкам (p), (q) генерирующих элементов, встречаются старшие симморфные группы $P^{(q)}_{b^{(p)}}mm2 = p_{b^{(p)}}mm2 \otimes (q)$, $p^{(q)}mm^{(p)}2^{(p)} = pmm^{(2)}2^{(2)} \otimes (q)$, $P^{(q)}_{b^{(p)}}mm^{(2)}\,2^{(2)} = p_{b^{(p)}}mm^{(2)}\,2^{(2)} \otimes (q)$, их симморфные подгруппы и соответствующие им несимморфные группы, получаемые заменами плоскостей симметрии плоскостями скользящего отражения.

Структура музыкального произведения в целом представится как суперпозиция (объединение и пересечение) таких подструктур. Если мы, помимо высоты и длительности звука, захотим учесть такие его характеристики, как громкость и тембр, необходимо будет перейти к условному трех- или четырехмерному пространству, вводя дополнительные координатные оси и соответствующие преобразования изменения громкости Γ или тембра T. Обобщенные группы симметрии музыкальных произведений будут выглядеть тогда как прямые произведения ранее выведенных групп M на группы Γ или T: $M \otimes \Gamma$ или $M \otimes T$. Найдут ли применение в теоретическом музыкознании эти группы — покажет будущее. Возможно, придется развить и негрупповые методы. Более специализированное рассмотрение затронутых здесь вопросов, относящихся к моделированию звуковой структуры музыкальной ткани, проводится в работах М. Ломанова (1970), Ф. Юрьева (1971), Р. Зарипова (1971), Барбо (1971) и др.

Анализ соотношений симметрии, действующих на различных структурных уровнях тематического произведения живописи, по сравнению с уже рассмотренными случаями, представляет собой, как правило, более сложную задачу. Сравнительно легко производится вычленение самих структурных подуровней. Мы перечислим их укрупненным планом.

Уровень геометрической композиционной схемы включает выбор формы и формата картины, перспективы (точки зрения), геометрических сюжетных осей. На этом уровне производится также грубое геометри-

ческое членение картинной плоскости. Уровень графического контурного рисунка. Геометрическая схема здесь детализируется; фиксируется распределение масс и объемов, выделяются фигуры переднего плана; производится (если это необходимо) ритмическое членение картинной плоскости.

Уровень светотени. Переводит плоскостное контурное изображение в объемное «черно-белое». Акцентирует выделение кульминационных мест, центральных действующих фигур; подчеркивает пространственную перспективу.

Уровень колорита. Осуществляет перевод черно-белого (тонального) изображения в цветное; производит дальнейшее расчленение планов изображения и цветовую гармонизацию произведения в целом.

Сюжетно-тематический уровень. Производит приведение всех структурных подуровней в единую художественную систему, подчинение изображения плану отображения, центральной идее произведения.

Идеологический уровень. Тесно сливается с предыдущим. Представляет высший уровень оценки, авторской точки зрения.

Четыре низших «неизобразительных» уровня определяют в большей или меньшей степени декоративные качества живописного полотна. Одновременно, будучи элементами составной знаковой структуры, они являются и материальными носителями определенных моментов содержания. Если условно абстрагироваться от содержательной стороны, с каждым из этих уровней можно связать специфические группы преобразований симметрии. Ортогональные группы с вертикальными плоскостями симметрии будут определять, как и у орнаментов, общую статичность композиции. С ортогональными осевыми группами будет связано циклическое движение, замкнутое в пространстве картины. Идею бесконечного движения вносят в художественную структуру проективные группы, определяющие линейную перспективу, и трансляционные ритмы, связанные с пространственными группами симметрии подобия. Специальные группы антисимметрии можно связать с распределением света и тени на уровне топологических соотношений эквивалентности между «бесформенными» пятнами. Подобным же образом обобщенные цветные группы определяют колористическую согласованность топологически-эквивалентных цветных пятен. Во всех случаях симметрия соблюдается не с математической точностью, а с той или иной степенью приближения.

Если смысловые уровни в анализируемой системе отсутствуют — перед нами или произведение абстракционистского плана или декоративный узор. Абстракционистские композиции не образуют, как правило, целостных художественных систем (или образуют очень узкую систему, включающую самого автора и его композицию). Симметрия их

минимальна. На уровне же орнамента действуют более строгие законы классической и цветной симметрии (см. рис. 226 227 VII (цв. вклейка), VIII (цв. вклейка), IX (цв. вклейка).

Для нахождения смысловых инвариантов соответствующих преобразований сформулируем предварительно основные законы (или принципы) композиции, которым подчиняются художественные составные системы. В каждом из них находят отражение те или иные черты основных законов материалистической диалектики. Закон единства формы и содержания на уровне искусства может быть сформулирован как принцип целостности художественного произведения.

Целостность, неделимость композиции, как и принцип соответствия, — высший принцип искусства. Согласно этому принципу все структурные подуровни произведения искусства связаны соотношениями координации и субординации в единую художественную систему. Высшим уровням — идеологическому и тематически-сюжетному — подчинены все остальные. Требование единого сюжетно-композиционного центра, которое формулируется иногда как самостоятельный закон, — следствие этого главного принципа.

Принцип развития, выступающий на уровне временных искусств, как принцип цветного варьирования и разработки сюжета, на уровне невременных искусств выступает как принцип кульминации. Этот принцип требует от тематического произведения живописи передачи и в кульминационном моменте сюжета признаков предыдущего и последующего состояний доступными для данного вида искусства художественными средствами.

Принцип контраста — закон художественной драматургии — представляет крайнее выражение цветной нюансировки; используется как прием противопоставления сюжетных линий развития, света и тени, дополнительных тонов; органически необходим для различения элементов на всех структурных подуровнях.

Принцип соответствия требует существования отношений изоморфизма ($A \leftrightarrow A'$) или гомоморфизма ($A \rightarrow A'$) между объектом A и его моделью A'. Искусство, как образная форма отражения и воспроизведения действительности и ее гомоморфная модель, должно сохранять существенные отношения действительности. Отсюда — требование обобщения, выражения типического через конкретное, которое формулируется иногда как самостоятельный принцип искусства.

Из сформулированных принципов следует, что тематическое произведение живописи (модель A'), чтобы быть правдивым, должно сохранять существенные отношения и связи между персонажами картины, как в действительности или в ее литературном прототипе (A). В частности, это могут быть смысловые инварианты отношений варьированно-

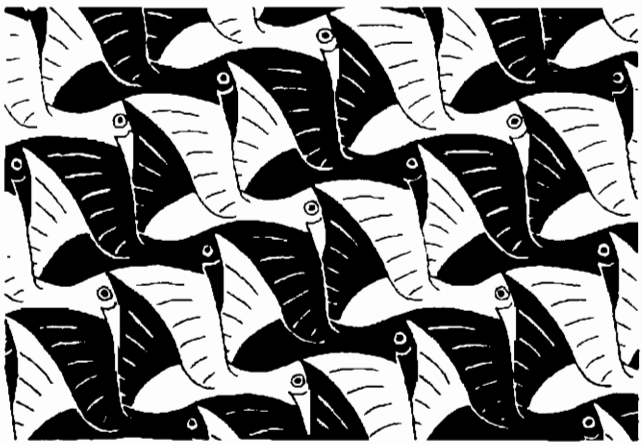


Рис. 226. Антисимметричный орнамент М. Эшера «Летящие птицы» с симметрией двумерной шубниковской группы $p_a'1$ можно получить из черно-белого бордюра типа $p_a'1$ (рис. I (цв. вклейка)) простым переносом бордюра по подходящему косому направлению b

Рис. 227. Орнамент М. Эшера «Крылатые львы» характеризуется горизонтальными переносами и системой вертикальных плоскостей скользящего антиотражения, преобразующих черных львов в белых (и наоборот). Двумерная шубниковская группа орнамента pb'

го сопоставления или противопоставления (контраста) сюжетных ходов и тематических линий.

Не имея возможности привести здесь необходимые примеры, отошлем читателя к специальной литературе (см. М. Алпатов (1940), Б. Успенский (1970) и другие работы) и к более общим источникам по эстетике, вскрывающим роль структурно-системных методов в теории искусства (М. Каган (1971), М. Марков (1970) и т. д.).

Заключение. Эвристическое значение принципов симметрии. Симметрия как философская категория

Предубеждение против применения научных методов к исследованию явлений искусства еще до конца не преодолено в среде творческих работников. Оно основано на том, что будто бы познание законов искусства может чем-то помешать непосредственному восприятию художественных произведений. В 1927 г. старший из авторов этой книги отмечал, что людям искусства «ненавистны слова: закон, порядок, симметрия, геометрия; они больше любят слова: гармония, красота, стиль, ритм, единство, хотя смысл этих последних слов едва ли чем существенным отличается от смысла первых. Но дело, конечно, не в словах; суть неприязни искусства к науке лежит в убеждении, что до конца раскрытый закон вносит будни в поэзию. Может быть, отчасти это и так, но, вернее, что это совсем не так: наслаждаться искусством может только тот, кто подготовлен ощущать и, по возможности, понимать его законы».

В наши дни программы художественных и музыкальных учебных заведений уже требуют от студентов знакомства с методами структурного искусствознания. В учебнике для студентов консерватории 1967 г. хорошо сформулирована основная мысль: «От целостного восприятия — к логическому анализу — и затем снова к целостному синтетическому охвату явления на более высокой основе». Понимание этой целостности, а отнюдь не ее разрушение, вносит наука в искусство.

Нам приятно отметить, что первое издание этой книги в какой-то мере способствовало распространению идей классической симметрии (см. Барышников, Лямин, 1951; Бакланов и др., 1952; Щербина, 1952; Иванов, 1963). Хотелось бы надеяться, что и идеи обобщенной симметрии найдут применение в искусствознании, так как они уже нашли свое применение в науке. Закончив книгу параграфом об искусстве, мы далеки от мысли, что нам удалось «до конца» раскрыть его законы. Как говорил знаменитый физик Нильс Бор, сила искусства «заключа-

ется в его способности напоминать нам о гармониях, недосягаемых для систематического анализа».

Авторы отдают себе отчет и в том, что их работа не относится к литературе для легкого чтения. Она занимает промежуточное положение между книгами, которые пишутся «для всех», и литературой для специалистов. Стиль популярного разговора о симметрии в первой части книги сменяется во второй профессиональным обсуждением научных вопросов. Нам хотелось не только заинтересовать читателя предметом и остановить его у входа в науку, но и дать возможность желающим пойти несколько дальше. Наука о симметрии, как и всякая другая дисциплина, требует изучения. Мы думаем, что глубина и широта обобщений, связанных с использованием понятия симметрии, эстетичность самого предмета с лихвой вознаградят усилия читателя, который пожелает познакомиться с проблемой «всерьез».

Принятая структура книги учитывает тот факт, что методы структурно-системных исследований очень молоды и их еще предстоит разрабатывать молодым. Эти методы зародились лет 15–20 назад в связи с исследованиями биологических структур. Было обнаружено, что биологические законы сохранения — законы наследования — связаны с сохранением некоторых молекулярных механизмов и структур. Дезоксирибонуклеиновые (ДНК) и рибонуклеиновые (РНК) кислоты как носители и орудия наследственной информации у разных типов клеток различны. Однако во всех случаях молекулы ДНК представляют собой линейные полимеры, свернутые в структуру двойной спирали. Во всех случаях схема передачи наследственной информации «ДНК → РНК → белок» контролирует синтез белков. У всех биологических систем неизменны процессы, в результате которых реплицируется (воспроизводится) ДНК, а родительская клетка делится на две дочерние клетки. В основных чертах у всех живых существ оказываются общими и механизмы преобразования энергии. Пестрое многообразие форм жизни есть лишь внешнее проявление единых для всего живого структурных, биофизических и биохимических принципов.

Иллюстрацией к сказанному служат выборочные примеры, представленные на рис. 231–234. На рис. 231, 232 показаны спиральные структуры биологических полимеров, а на рис. 233 — один из возможных способов их «свертки» в трехмерную структуру (глобулу). Рис. 234 иллюстрирует схему образования двумерной биологической ткани. Со всеми этими и следующими в порядке «иерархии» биологическими структурами связаны свои группы симметрии. На всех биологических уровнях, видоизменяясь, действует принцип суперпозиции структур и связанный с ним принцип симметрии для составных систем.

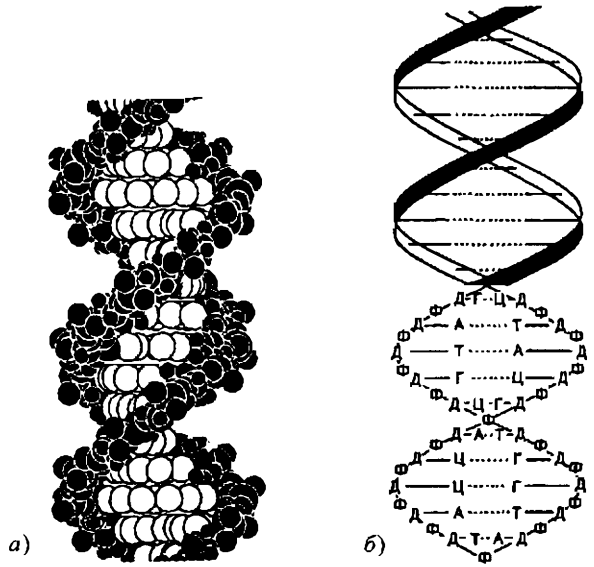


Рис. 231. Пространственная модель участка двойной спирали дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК):
а — остатки дезоксирибозы Д и фосфата Ф, образующие остов полинуклеотидных цепей, располагаются с внешней стороны двойной спирали ДНК (темные кружки); атомы пуриновых и пиримидиновых оснований (светлые кружки) располагаются внутри спирали, объединяясь водородными связями в пары А–Т (аденин–тимин) и Г–Ц (гуанин–цитозин); *б* — схема объединения «водородными мостиками» А–Т, Г–Ц, цепей двойной спирали ДНК

Возникнув на почве структурной биологии (и ее предшественницы — структурной кристаллографии), структурно-системные методы исследования распространились постепенно и на другие области современного естествознания и искусствознания.

Как показали советские философы, высокая общность этих методов определяется тем, что структурность — достаточно общая форма существования и развития материи. Такая трактовка опирается на знаменитые ленинские слова о неисчерпаемости электрона, которые можно интерпретировать и в аспекте неисчерпаемости структурных уровней материи.

Структура, понимаемая в широком смысле слова,— инвариантный аспект любой целостной системы на определенном этапе ее развития. Движение материи следует представлять себе как диалектическое единство моментов изменения и сохранения. Математический аппарат теории групп весьма удачно отражает эту специфическую черту движения. Действительно, чтобы определить группу преобразований, необходимо задать инвариантный объект (или систему объектов), внутренняя структура которого состоит из эквивалентных в определенном отношении элементов. Наоборот, с каждой из групп преобразований связана своя система сохраняющихся величин.

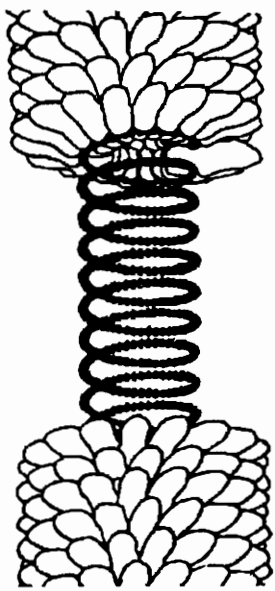


Рис. 232. Спиральное расположение белковых субъединиц в оболочке палочковидной частицы вируса табачной мозаики.
Часть белка на рисунке удалена, чтобы обнажить внутреннюю спираль ДНК

После сказанного читателя не удивит, что советские философы зачисляют понятие симметрии в разряд философской категории, уделяя большое внимание анализу ее отношений с другими категориями материалистической диалектики (см. Готт (1960), Свидерский (1962), Короткова (1968), Свечников (1971) и другие работы). В теории познания симметрия выступает как метод обнаружения и описания инвариантных закономерностей — «законов сохранения», выступающих в виде конкретных модификаций принципа несотворения и неуничтожимости материи. Принципы симметрии требуют: ищите в каждом материальном процессе сохраняющуюся величину, отношение, закон! Одновременно они показывают (если создана модель изучаемого явления), какие именно из свойств для данной системы запрещены. С этими двумя свойствами принципов симметрии, отражающих причинные связи, и связана их эвристическая роль.

Отражая отношения части и целого, принцип суперпозиции описывает на уровне симметрии связь состояний одного и того же объекта или результат взаимодействия различных объектов в рамках единой системы. В его схему укладываются как классические, так (при статистической трактовке) и опосредованные формы причинных связей и связи состояний, наблю-

дающиеся у квантовых микросистем. Определяя симметрию материального объекта через объединение подгрупп, проявляющихся во внешних гетерогенных взаимодействиях, $G_0 = \cup(G_0 \cap G_{B_i})$, принцип суперпозиции устанавливает, с одной стороны, меру ее неопределенности, а с другой — служит мостиком связи между внешним и внутренним, выражая симметрию объекта через параметры его подструктур: $G_0 = \cap G_i \odot G^C$.

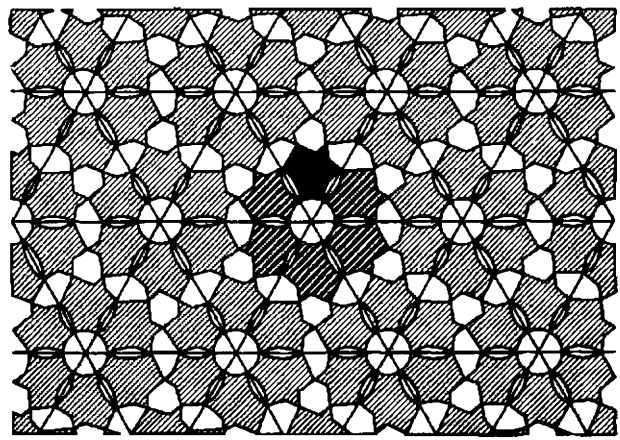
Подводя итог и анализируя еще раз материальные проявления принципа суперпозиции групп симметрии, нельзя не подчеркнуть его двоякой роли: в конкретных физических системах принцип суперпозиции выступает и как принцип сохранения некоторых пересечений групп симметрии, и как тенденция к симметризации этих пересечений при взаимодействии частей составных физических систем. Симметризация и диссимметризация — суть процессы взаимосвязанные, одновременно протекающие на различных структурных подуровнях материальных целостных систем. Такова, с точки зрения симметрии, объективная диалектика развития структурных объектов.

Рис. 233. Модель молекулы миоглобина из мышцы кашалота, расшифрованная методами рентгеноструктурного анализа Джоном Кендрью

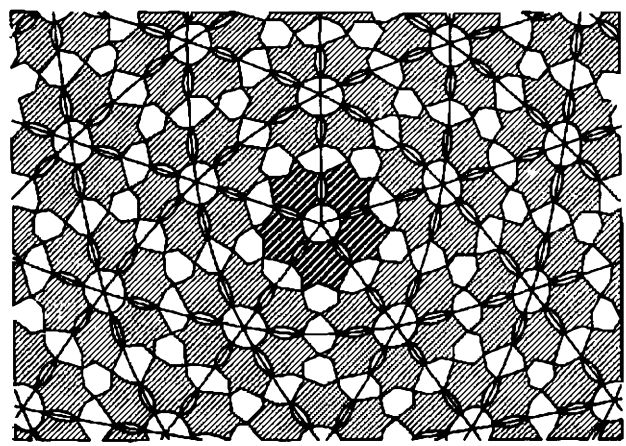
Математический аппарат теории симметрии, как уже отмечалось, хорошо приспособлен для описания поведения и свойств целостных систем, структурные подуровни которых состоят из эквивалентных в определенном отношении элементов. Но не все структурные объекты таковы*. И не каждое из математических преобразований является автоморфным преобразованием симметрии. Например, гомоморфное отображение $A \to A'$ системы отношений материального мира A на систему наших научных знаний или систему искусства A' ставит в отношения соответствия (не эквивалентности!) две качественно различные системы: материальную и ее идеальный образ (отражение).

Для исследования инвариантных объектов (например, необратимых физических процессов) или аспектов несохранения инвариантности в частично упорядоченных множествах, наряду с групповыми, могут потребоваться и более общие методы, учитывающие необратимость, неассоциативность или неоднозначность преобразований, отсутствие в множестве преобразований единичной операции и т. д. Перечисленным случаям от-

*См. например Ю. Шрейдер (1971), K. Dornberger-Shiff (1966) и Н. Клепиков (1974).



а)



б)

Рис. 234. Решетчатая модель биологической оболочки.
Оболочку «сферического» вируса можно получить из правильной гексаговальной решетки с асимметричными элементами, объединенными в группы (гексамеры); один из гексамеров выделен на рисунке более жирной штриховкой (*а*); если из такой решетки удалить отмеченный зачернением треугольный сектор и соединить края, образуется конус с осью пятого порядка, выходящей из центра лентамера, выделенного жирной штриховкой (*б*) (по Д. Каспару и А. Клугу)

вечает математический аппарат так называемых полугрупп, группоидов, квазигрупп и структур. Такой аппарат уже подготовлен математиками, но исследование материальных систем негрупповыми методами только еще начинается.

Назовем еще несколько общих проблем, бегло затронутых в книге и ожидающих конкретизации и дальнейшей разработки. Среди них: исследование суперпозиционных соотношений для конкретных физических систем, в особенности со статистически-опосредованным характером причинных связей; разработка схем возможного изменения симметрии компонент составных систем при динамическом взаимодействии на уровне фиксированных охватывающих групп; проблема определения симметрии объекта при взаимодействии его с прибором в приближении сильной, промежуточной и слабой связи; конкретизация связей симметрии с термодинамикой и статистикой на всех структурных уровнях исследуемого объекта; последовательный учет в теории фазовых переходов параллельных изменений симметрии, происходящих на различных структурных уровнях у одного и того же объекта; проблема выделения основного структурного уровня, ответственного за рассматриваемый эффект, и т. д. и т. п. Прекрасная страна гармонии и симметрии открыта для новых исследований.

Литература*

У. *Александров П. С.* Введение в теорию групп. Изд. 2-е. М., Учпедгиз, 1951.

• *Алпатов В. В.* О встречаемости левых и правых тел в неживой и живой природе. — Бюлл. МОИП, отд. биол., 1953, **58**, 5; Левизна и правизна в строении растительных и животных организмов. — Бюлл. МОИП, отд. биол., 1957, **62**, 5.

У. *Алпатов М.* Композиция в живописи. М–Л., изд-во «Искусство», 1940.

М. *Бабкин А. М.* Русская фразеология, ее развитие и источники. Л., Изд-во «Наука», 1970.

У. *Багавантам С., Венкатарайуду Т.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М., ИЛ, 1959.

У. *Бакланов Н. Б., Мухортов И. Д., Николаев А. С., Породня А. И.* Декоративные окраски и росписи. Л.–М., 1952.

У. *Бартенев И. А.* Форма и конструкция в архитектуре. Л., Изд-во литературы по строительству, 1968.

• *Барышников А. П., Лямин И. В.* Основы композиции М., Трудрезервиздат, 1951.

• *Башкиров Н. М.* Обобщение метода стереоэдров Е. С. Федорова. — Кристаллография, 1959, **4**, 466.

М. *Бахман Ф.* Построение геометрии на основе понятия симметрии. М., изд-во «Наука», 1969.

*Из огромного числа работ по теории симметрии и ее приложениям в науке и искусстве в список литературы включено сравнительно небольшое число работ, имеющих отношение к обсуждавшимся в книге вопросам. Для ориентировки читателя буквами «П», «У», «М», «О», «С» отмечены работы научно-популярного, учебного, монографического, обзорного и справочного характера. Остальная литература относится к специальной и к первоисточникам. Работы, имеющиеся в переводах, цитируются, как правило, в русских изданиях, но в ряде случаев в скобках указывается и год появления оригинальных публикаций.

М. *Бегенау З. К.* Функция, форма, качество. М., изд-во «Мир», 1969.

• *Белова Е. Н., Белов Н. В., Шубников А. В.* О числе и составе абстрактных групп, отвечающих 32 кристаллографическим классам. — ДАН СССР, 1948, **63**, 669.

М. *Белов Н. В.* Структура ионных кристаллов и металлических фаз. М., Изд-во АН СССР, 1947.

У. *Белов Н. В.* Структурная кристаллография. М., Изд-во АН СССР, 1951.

• *Белов Н. В.* Об одномерных бесконечных кристаллографических группах. — Кристаллография, 1956, **1**, 474–476.

• *Белов Н. В.* Трехмерные мозаики с цветной симметрией. — Кристаллография, 1959, **1**, 621.

• *Белов Н. В.* О номенклатуре 80 плоских групп в трех измерениях. — Кристаллография, 1959, **4**, 775–778.

• *Белов Н. В., Кунцевич Т. С., Неронова Н. Н.* Шубниковские группы (антисимметрии) для бесконечных двусторонних лент. Кристаллография, 1962, **7**, 805–808.

• *Белов Н. В., Неронова Н. Н., Смирнова Т. С.* 1651 шубниковская группа. — Труды Ин-та кристаллографии АН СССР, 1955, **11**, 33–67; Кристаллография, 1957, **2**, 315–325.

• *Белов Н. В., Тархова Т. Н.* Группы цветной симметрии. — Кристаллография, 1956, **1**, 4–13, 619–620.

• *Белов Н. В., Кунцевич Т. С.* О применении четырехмерных пространственных групп симметрии к выводу трехмерных P-цветных групп ($p = 1, 2, 3, 4, 6$). Acta Cryst (1971), **A 27**, 511-517.

М. *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. М. Изд-во «Наука», 1967.

М. *Белый А.* Ритм как диалектика и «Медный всадник». М. Изд-во «Федерация», 1929.

О. *Бернал Дж. Д., Карлайл С. Х.* Поля охвата обобщений кристаллографии. — Кристаллография, 1968, **13**, 927–951.

П. *Бернал Джон.* Возникновение жизни. М., изд-во «Мир», 1969.

• *Биненсток А., Эвальд П. П.* Структурные теории в физическом пространстве и пространстве Фурье. — Кристаллография, 1961, **6**, 820.

М. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. Постановка задач, результаты и подобие. М., ИЛ, 1954.

М. *Блохинцев Д. И.* Пространство и время в микромире. М., изд-во «Наука», 1970.

М. *Богомолов С. А.* Вывод правильных систем по методу Федорова, ч. I. Общее учение о симметрии и основные свойства правильных систем. Л., изд-во «Кубуч», 1932; ч. II. Л.–М. — Новосибирск, ОНТИ, 1934.

М. *Богуш А. А., Мороз Л. Г.* Введение в теорию классических полей Минск, изд-во «Наука и техника», 1968.

П. *Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц.* Разбиение фигур на меньшие части. М. Изд-во «Наука», 1971.

У. *Болтянский В. Г., Яглом И. М.* Преобразования. Векторы. М. Изд-во «Просвещение», 1964.

• *Бокий Г. Б.* Число физически различных простых форм кристаллов. — Труды Лабор. кристаллографии АН СССР, 1940, **2**, 13–37.

У. *Бокий Г. Б.* Введение в кристаллохимию. М., изд-во МГУ, 1954. Кристаллохимия. М. Изд-во МГУ, 1960.

• *Болдырев А. К.* Основы геометрического учения о симметрии. — Зап. минер. об-ва, 2-я серия, 1907, ч. 40, вып. 1.

П. *Борисовский Г. Б.* Наука, техника, искусство. Мысли о современной архитектуре, М., изд-во «Наука», 1969.

М. *Браут Р.* Фазовые переходы. М., изд-во «Мир», 1967.

М. *Брегг У. Л. Кларингбулл.* Кристаллографическая структура минералов. М., изд-во «Мир», 1967.

М. *Бриллюэн Л., Пароди М.,* Распространение волн в периодических структурах. М., ИЛ, 1959.

• *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. Изд-во «Наука», М., 1968.

М. *Вайнштейн Б. К.* Антисимметрия преобразования Фурье фигур с особой точкой. — Кристаллография, 1960, **5**, 341–345.

О. *Вайнштейн Б. К.* Дифракция рентгеновских лучей на цепных молекулах. М. Изд-во АН СССР, 1963.

• *Вайнштейн Б. К.* Рентгеноструктурный анализ глобулярных белков. — УФН, 1966, 88, 527–565.

• *Вайнштейн Б. К., Звягин Б. Б.* Об отражении в обратном пространстве симметрии кристаллографической решетки. — Кристаллография, 1963, **8**, 147.

М. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. М. ИЛ, 1947.

П. *Вейль Г.* Симметрия. М., изд-во «Наука», 1968 (издание в оригинале 1952 г.)

М. *Вигнер Е.* Теория групп и ее приложения к квантово-механической теории атомных спектров. М., ИЛ, 1961.

О. *Вигнер Е.* Нарушение симметрии в физике. — УФН, 1966, **89**, 453–466.

О. *Вигнер Е.* События, законы природы и принципы инвариантности. — УФН, **85**, 727–736, 1965.

• *Визлин В. П.* Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. «Наука», М. 1972.

М. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М., изд-во «Наука», 1965.

М. *Вильсон Е., Дешиус Дж., Кросс П.* Теория колебательных спектров молекул, М., ИЛ, 1960.

М. *Виноградов В. В.* Стиль Пушкина. М., Госполитиздат, 1941.

• *Волков Н. И.* Цвет в живописи. Искусство. М. 1965.

П. *Волькенштейн М.* Стихи как сложная информационная система. — Наука и жизнь, 1970, **1**, 72–78.

М. Всеобщая история архитектуры в 12 томах. М. Изд-во литературы по строительству, 1963–1971.

М. *Вудворд Р., Хоффман Р.* Сохранение орбитальной симметрии. М., изд-во «Мир», 1971.

У. *Вульф Г. В.* Руководство по кристаллографии. Варшава, 1904.

М. *Вульф Ю. В.* Избранные работы по кристаллофизике и кристаллографии. М.–Л., Гостеориздат, 1952.

- Оригинальные работы: Симметрия и вывод всех ее кристаллографических видов, 1897, стр. 166–191; К теории внешней формы кристаллов, 1908, стр. 192–241; Симметрия и ее проявление в природе, 1908, стр. 242–320.

- *Гадолин А. В.* Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала. М., Изд-во АН СССР, 1954 (впервые опубликовано в «Зап. минер. об-ва», 2-я серия, 1867, **4**, 112–200).

- *Галуа Э.* Сочинения. Изд-во ОНТИ. М.–Л., 1936.

П. *Гарднер М.* Этот правый, левый мир. М., изд-во «Мир», 1967.

М. *Геккель Э.* Красота форм в природе. СПб, 1907.

М. *Гельфанд И. М., Граев М. И.* Теория представлений и автоморфные функции. М., изд-во «Наука», 1966.

М. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.

П. *Гельфер Я. М.* Законы сохранения. М., изд-во «Наука», 1967.

М. *Гика М.* Эстетика пропорций в природе и в искусстве. М., изд-во Всес. Акад. архитектуры, 1936.

П. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. Изд. 2-е. М.–Л., Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1951. гл. II. Правильные точечные системы, стр. 41–102.

П. *Гинзбург В. Л.* Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными. «Наука и жизнь», 2, 9–17, 1971.

М. *Гинзбург А. М.* Наука о физике и астрофизике. 2-е изд. М., 1974. Симметрия на плоскости. Харьков, ОНТИ, 1934.

М *Гинзбург А. М.* Симметрия на шаре. Харьков, ОНТИ, 1935.

М. *Гладкий А. В., Мельчук И. А.* Элементы математической лингвистики. М., изд-во «Наука», 1969.

М. *Гольденрихт С. С.* О природе эстетического творчества. М., изд-во МГУ, 1966.

М. *Грин Д., Гольдбергер Р.* Молекулярные аспекты жизни. М., изд-во «Мир», 1968.

П. *Гробстайн К.* Стратегия жизни. М., изд-во «Мир», 1968.

М. *Грюнбаум А.* Философские проблемы пространства и времени. М., изд-во «Прогресс», 1969.

М. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М.–Л., Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1948.

• *Делоне Б. Н.* Теория планигонов. — Изв. АН СССР, серия матем., 1959, 23, 365–386

• *Делоне Б. Н.* Доказательство основной теоремы теории стереоэдров. — ДАН СССР, 1961, **138**, 1270–1272.

• *Делоне Б. Н.* О правильных разбиениях пространств. — Природа, 1963, №2, 60–63.

М. *Делоне Б., Падуров Н., Александров А.* Математические основы структурного анализа кристаллов. Л.–М., Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1934.

• *Делоне Б. Н., Сандаков Н. И.* Теория стереоэдров. — Труды Матем. ин-та им.В.А. Стеклова, 1961, **64**, 28–51.

• *Делоне Б. Н., Галиулин Р. В., Штолгрин М. И.* О типах Бравэ решеток. Сб. «Современные проблемы математики» т. 2. М., 1973, стр. 119–252. Изд. ВИНИТИ.

П. *Джаффе Г., Орчин М.* Симметрия в химии. М., изд-во «Мир», 1967.

М. *Джонс Г.* Теория зон Бриллюэна и электронные состояния в кристаллах. М., изд-во «Мир», 1968.

• *Желудев И. С.* Симметрия направлений в кристаллах. Кристаллография, 1971, **16**, 273–278.

М. *Жегин Д. Ф.* Язык живописного произведения. М., изд-во «Искусство», 1970.

У. *Займан Дж.* Принципы теории твердого тела. М., изд-во «Мир», 1966.

У. *Займан Дж.* Современная квантовая теория. М., изд-во «Мир», 1971.

• *Заморзаев А. М.* Обобщение федоровских групп. — Кристаллография, 1957, **2**, 15–20; О 1651 шубниковской группе. — Кристаллография, 1962, **7**, 813–821 (впервые опубликовано в диссертации, ЛГУ, 1953).

• *Заморзаев А. М.* Вывод новых шубниковских групп. — Кристаллография, 1958, **3**, 399–404; 1963, **8**, 307–312.

• *Заморзаев А. М.* О ненормальных правильных разбиениях эвклидова пространства. — ДАН СССР, 1965, **161**, 30–32.

• *Заморзаев А. М.* О пространственных группах симметрии подобия. — ДАН СССР, 1966, **167**, 334–336.

• *Заморзаев А. М.* О группах квазисимметрии (*P*-симметрии). — ДАН СССР, 1967, **12**, 819–825.

О. *Заморзаев А. М.* Развитие новых идей в федоровском учении о симметрии за последние десятилетия. — Сб. «Идеи Е. С. Федорова в современной кристаллографии и минералогии». Л., изд-во «Наука», 1970, стр. 42–64.

• *Заморзаев А. М., Палистрант А. Ф.* Двумерные шубниковские группы. — Кристаллография, 1960, **5**, 517–524.

• *Заморзаев А. М., Соколов Е. М.* Симметрия и различного рода антисимметрия конечных фигур. — Кристаллография, 1957, **2**, 9–14.

• *Заморзаев А. М., Цекиновский Б. В.* О четырехмерных решетках Бравэ. Кристаллография, **13**, 211–214 (1968)

• *Заболотный П. А.* О группах гомологии и антигомологии. Крист. **18**, 5–10, (1979).

М. *Зарипов Р. Х.* Кибернетика и музыка. М. Изд-во «Наука», 1971.

М. *Иванов С. В.* Орнамент народов Сибири как исторический источник (по материалам XIX–начала XX вв.). Народы Севера и Дальнего Востока. М.–Л. Изд-во АН СССР, 1963.

• *Инденбом В. Л.* Связь групп антисимметрии и цветной симметрии с одномерными представлениями обычных групп симметрии. — Кристаллография, 1959, **4**, 619–621.

• *Инденбом В. Л., Белов Н. В., Неронова Н. Н.* Точечные группы цветной симметрии (цветные классы). — Кристаллография, 1960, **5**, 497–500.

У. *Каган М. С.* Лекции по марксистско-ленинской эстетике. Л. Изд-во ЛГУ, 1971. Морфология искусства. Изд-во «Искусство», 1972.

• *Калужин Л. А.* Введение в общую алгебру. Изд-во «Наука», М. 1979.

М. *Каплан И. Г.* Симметрия многоэлектронных систем. Изд-во «Мир», 1969.

• *Картан Э.* Теория групп и геометрия. Сб. «Об основаниях геометрии». М. Изд-во ГИТТЛ, 1956, стр. 485–506.

М. *Кэмпфер Ф.* Основные положения квантовой механики. М. Изд-во «Мир», 1967.

П. *Кендрью Дж.* Нить жизни. М., изд-во «Мир», 1968.

• *Кибрик Е. А.* Объективные законы композиции в изобразительном искусстве. — Вопросы философии, 1966, **10**, 103.

П. *Китайгородский А. И.* Порядок и беспорядок в мире атомов. Изд. 2-е. М., Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1956.

• *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»). Сб. «Об основаниях геометрии». М. Изд-во ГИТТЛ, 1956, стр. 399–434.

• *Клепиков Н. П.* Перестройки в системе трех частиц. Ядерная физика. **19**, 464–471 (1974)

С. *Ковалев О. В.* Неприводимые представления пространственных групп. Киев, 1961.

П. *Кольман Э.* Четвертое измерение. Изд-во «Наука», 1966, гл. 4, 10, 11, 15, 22.

• *Кокстер Г. С. М.* Введение в геометрию. М., изд-во «Наука»,1955, гл. 4, 10, 11, 15, 22.

• *Колмогоров А., Прохоров А.* К основам русской классической метрики. Сб. «Содружество наук и тайны творчества». М., изд-во «Искусство», 1968, стр. 397–432.

П. *Компанеец А. С.* О симметрии. Симметрия в микромире. М., изд-во «Знание», 1965, серия 9, вып. 6,7.

• *Коноплева Н. П., Соколик Г. А.* Возможное и действительное в теории поля и их связь с принципом относительности. Сб. «Пространство и время в современной физике». Киев. Изд-во «Наукова думка», 1968, стр. 82–106.

М. *Конюс Г. Э.* Статьи и материалы. Воспоминания. М., изд-во «Музыка», 1963.

• *Копцик В. А.* О суперпозиции групп симметрии в кристаллофизике. — Кристаллография, 1957, **2**, 99–107.

У. *Копцик В. А.* Некоторые вопросы феноменальной тензорной кристаллофизики. — В кн.: *У. Вустер.* Практическое руководство по кристаллофизике. М., ИЛ, 1958, стр. 141–158.

• *Копцик В. А.* Геометрическая модель для описания полиморфных фазовых переходов в кристаллах. Сб. «Физика диэлектриков». М.–Л., 1960.

• *Копцик В. А.* Полиморфные фазовые переходы и симметрия кристаллов. — Кристаллография, 1960, **5**, 932–943.

• *Копцик В. А.* Принципы симметризации–диссимметризации Шубникова–Кюри для составных физических систем. Сб. памяти акад. А. В. Шубникова. М. Изд-во «Наука», 1974.

• *Копцик В. А.* Изменение симметрии пьезоэлектрических кристаллов при прямом и обратном пьезоэффекте. — Кристаллография, 1962, **7**, 144–147.

М. *Копцик В. А.* Шубниковские группы. Справочник по симметрии и физическим свойствам кристаллографических структур. М., изд-во МГУ, 1966.

• *Копцик В. А.* Инварианты и симметрические преобразования художественных структур. [Ежемесячник. М-лы всес. симп. по вторичн. модел. сист.] (5). Таргу 1974.

• *Копцик В. А.* Об описании трехмерно-периодических магнитных структур шубниковскими группами. — Кристаллография, 1967, **12**, 826–830.

О. *Копцик В. А.* Очерк развития теории симметрии и ее приложений в физической кристаллографии за 50 лет. — Кристаллография, 1967, **12**, 755–774.

• *Копцик В. А., Коцев Н. Н., Кужукеев Ж. Н.* М. Беловские цветные группы и классификация магнитных структур. Сообщения ОИЯИ, Дубна, 1979, Р. 4–7519.

• *Копцик В. А., Коцев И. Н., Кужукеев Ж. Н.* М. Методы цветной симметрии и теория представлений групп в магнитной кристаллофизике. I. Сообщ. ОИЯИ, Дубна, 1973, Р4–7514.

• *Копцик В. А., Кужукеев Ж.* Выводы трех-, четырех- и шестицветных беловских пространственных групп с помощью таблиц неприводимых представлений. — Кристаллография, 17, 1971, стр. 705–711.

С. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. Изд-во «Наука», М., 1970.

• *Короткова Г. П.* Принципы целостности. Л. Изд-во ЛГУ, 1968.

• *Костов И.* Кристаллография. М., изд-во «Мир», 1965.

• *Криндач В. П., Спасский Б. И.* Обоснование и некоторые применения принципа симметрии. Вестник МГУ, серия физики и астрономии, 1972, № 4, стр. 458–464.

У. *Кубо Р.* Термодинамика. Статистическая механика. Изд-во «Мир». М. 1970, 1967.

• *Кунцевич Т. С., Белов Н. В.* Четырехмерные пространственные группы симметрии низших систем. Кристаллография, 1971, **16**, 5–17, 268–272; Решетки Бравэ, 1970, **15**, 215–229.

М. *Курош А. Г.* Теория групп. М., ГИТТЛ, 1953; 3-е изд. М. 1970.

П. *Кюри Мария.* Пьер Кюри. М., изд-во «Наука», 1968, гл. 3, стр. 19–32.

• *Кюри Пьер.* Избранные труды. М.–Л., изд-во «Наука», 1966. Оригинальные работы: О симметрии, 1884, стр. 66–94; О вопросах упорядоченности повторяемость, 1884, стр. 49–65; О симметрии в физических явлениях. Симметрия электрического и магнитного полей, 1894, стр. 95–113.

У. *Ландау Л. Д., Лифшиц В. М.* Курс теоретической физики, т. 3–9, М., Физматгиз, Изд. 1951–1968 гг.

М. *Лейбфрид Г.* Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов. М.–Л., Физматгиз, 1963.

С. *Леушин А. М.* Таблицы функций, преобразующихся по непроводимым представлениям кристаллографических точечных групп. М., изд-во «Наука»,1968.

О. *Ли Т. Д.* К вопросу о возможности нарушения Т, СР и СРГ-инвариантности при распадах гиперонов. — УФН, 1967, 91, 721–730.

М. *Лисса З.* Эстетика киномузыки. Изд-во «Музыка», М., 1970.

М. *Ломанов М.* Элементы симметрии в музыке. Сборник «Музыкальные искусство и наука. Вып. 1, стр. 136–165. Изд-во «Музыка», М., 1970.

• *Лотман Ю. М.* Анализ поэтического текста. Просвещение, Л., 1972.

М. *Лотман Ю. М.* Лекции по структуральной поэтике. Труды по знаковым системам. — Уч. зап. Тартуского ун-та вып. Тарту, 1964. См. также вып. 181, 1965, г., вып. 198, 1967 г., вып. 236, 1969 г., вып. 284, 1971 г., вып. 308, 1979 г.,

М. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применения в физике. М., Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1957.

• *Ляпин М.* Полугруппы. М., Физматгиз, 1960.

У. *Мазель Л. А., Цуккерман В. А.* Анализ музыкальных произведений. М., изд-во «Музыка», 1967.

• *Макаров В. С.* Об одном классе дискретных групп пространства Лобачевского, имеющих бесконечную фундаментальную область конечной меры. — ДАН СССР, 1966, 167, 30–33.

• *Малиновский А. А.* Общие вопросы строения систем и их значение для биологии. Сб. «Проблемы методологии системного исследования», М., изд-во «Мысль», 1970, стр. 146–183.

М. *Марадулин А., Монтролл Э., Вейсс Дж.* Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. М., изд-во «Мир», 1965.

М. *Марков М.* Искусство как процесс. М., Изд-во «Искусство», 1970; см. так же статью «К основам функциональной теории искусства» в сб. «Вопросы эстетики» М. Изд-во «Искусство», 1971, стр. 33–135.

М. *Маршак Р., Судершан О.* Введение в физику элементарных частиц. М., ИЛ, 1962.

М. *Михайлов Б. П.* Витрувий и Эллада. Основы античной теории архитектуры. М., Изд-во литературы по строительству, 1967, стр. 154 и след.

М. *Михеев В. Н.* Гомология кристаллов Л., Госгоптехиздат, 1961.

П. *Мейлах Б.* Ритмы действительности и ритмы искусства. Наука и жизнь, 12, 81–86, 1970.

М. *Михайлова А.* О художественной условности. зд-во «Мысль», М., 1970.

- *Мокиевский В. А.* Группы симметрии двойников. Проблемы кристаллохимии минералов и эндогенного минералообразования. Л., изд-во «Наука», 1967, стр. 115–123 (см. также «Минералогический сборник», изд-во Львовского ун-та, 1966, 2, 359–364).

- *Моль А.* Теория информации и эстетическое воспитание. МИР, М., 1966.

- *Моль А.* Социодинамика культуры. Прогресс, М., 1973.

У. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов. М., ИЛ, 1960.

М. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца М., Физматгиз, 1958.

- *Найш В. Е.* О магнитной симметрии кристаллов. — Изв. АН ССР, серия физ., 1963, 27. 1496–1504.

- *Наливкин Д. В.* Криволинейная симметрия. Сб. «Кристаллография». М., Металлургиздат, 1951, стр. 15–23.

У. *Нгуен Ван Хьеу* Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц. М., Атомиздат, 1967.

О. *Неронова Н. Н.* I. Классификационные принципы для групп симметрии и различного рода антисимметрии. — Кристаллография, 1966, 11, 495–504; II. Особые элементы пространства как основа для классификации групп симметрии. — Кристаллография, 1967, 12, 3–10; III. Краткий обзор «кристаллографических» групп симметрии трехмерных континуумов, дисконтинуумов, семиконтинуумов и апериодических объектов. — Кристаллография, 1967, 12, 191–194.

О. *Неронова Н. Н., Белов Н. В.* Единая схема кристаллографических групп симметрии классических и черно-белых. — Кристаллография, 1961, 6, 3–12

• *Неронова Н. Н., Белов Н. В.* Цветные антисимметричные мозаики. — Кристаллография, 1961, 6, 831–839.

• *Нётер Э.* Инварианты дифференциальных выражений. — В сб. «Вариационные принципы механики». М., изд-во «Наука», 1956.

М. *Ниггли П.* Стереохимия. М., ИЛ, 1949.

М. *Нишиджима К.* Фундаментальные частицы. М., изд-во «Мир», 1965. Новые свойства симметрии элементарных частиц. Сборник статей М., ИЛ, 1957.

М. *Нокс Р., Голд А.* Симметрия в твердом теле. М., изд-во «Наука», 1970.

М. *Овчинников Н. Ф.* Принципы сохранения. М., изд-во «Наука», 1966; см. также статью «Структура и симметрия» в сб. «Системные исследования». М. Изд-во «Наука», 1971, стр. 111–121.

• *Озеров Р. П.* Систематические погасания отражений при когерентном магнитном рассеянии медленных нейтронов, вызванные присутствием элементов симметрии и антисимметрии в коллинеарных магнетиках. — Кристаллография, 1967, 12, 239–251; 1969, 14.

П. *Окладников А. Л.* Утро искусства. Л., 1967.

О. *Окунь Л. Б.* Нарушение CP-инвариантности. — УФН, 1966, 89, 603–646.

• *Падучева Е. В.* О семантике синтаксиса. Материалы к трансформационной грамматике русского языка. «Наука» М., 1974.

• *Палистрант А. Ф.* Двумерные группы цветных симметрии и различного рода антисимметрии. — Кристаллография, 1966, 11, 707–713.

• *Палистрант А. Ф.* Группы цветных симметрии и различного рода антисиметрии слоев. — Кристаллография, 1967, 12, 194–200.

• *Палистрант А. Ф.* Плоскостные точечные труппы симметрии и различного рода антисимметрии. — Кристаллография, 1968, 13, 955–959.

• *Палистрант А. Ф., Заморзаев А. М.* К полному выводу многоцветных двумерных и слоевых групп. — Кристаллография, 16, 1971, 681–689.

• *Палистрант А. Ф.* Группы цветной симметрии и различного рода антисимметрии бордюров и лент. — Кристаллография, 17, 1971, 1096.

• *Перутц М.* Молекула гемоглобина. — Сб. «Молекулы и клетки», М., изд-во «Мир», 1966, стр. 7–29.

У. *Петрашень М. И., Трифонов Е. Д.* Применение теории групп в квантовой механике. М., изд-во «Наука», 1967.

П. *Плеханов Г. В.* Письма без адреса. Избр. философ, произведения в пяти томах. М., Госполитиздат — Соцэкгиз, 1956–1958, т. V, стр. 311 и след. (*симметрия орнамента*)

• *Повилейко Р.* Архитектура машины. Художественное конструирование. (Проблема и практика.) Зап.-Сиб. книжн. изд-во, Новосибирск, 1974.

• *Поли Г.* Цветные мозаики :антисимметрии. М., Кристаллография, 1961, 6, 109–111

• *Порай-Кошиц М. А.* Вывод рабочих формул электронной плотности в структурной амплитуды на основе свойств симметрии и антисимметрии тригонометрических функций. — Кристаллография, 1965, 1, 27.

М. *Портер У.* Современные основания общей теории систем. М. Изд-во «Наука», 1971.

• *Пригожин И.* Неравновесная статистическая механика. М., 1964.

• Проблемы кристаллологии. Сборник статей к 80-летию академика Н. В. Белова. М., изд-во МГУ, 1971.

М. Проблемы методологии системного исследования. Сборник статей под ред. И. В. Блауберга и др. И., изд-во «Мысль», 1970.

М. Проблемы формального анализа систем. Сб. под ред. А. И. Уемова и В. Н. Садовского. М., изд-во «Высшая школа», 1968.

М. *Раппопорт С. Х.* Неизобразительные формы в декоративном искусстве. М., изд-во «Советский художник», 1968.

• *Раппопорт С. Х.* Семиотика и язык искусства. Сб. Музык. иссk. и наука, 2. Музыка, 1973, стр. 17.

М. *Рейтман У.* Познание и мышление. Моделирование на уровне информационных процессов. М., изд-во «Мир», 1968.

• *Роман Т.* Симметрии 4-мерных бордюрных орнаментов. — ДАН СССР, 1959, 128, 6, 1122–1124; Симметрия бордюрных орнаментов в $(n+1)$-мерном пространстве. — ДАН СССР, 1962, 147, 5, 1038–1041.

• *Рагс Ю., Назнайкинский Е.* О художественных возможностях синтеза музыки и цвета. Сборник «Музыкальное искусство и наука». Вып. 1, стр. 166–190, изд-во «Музыка», М. 1970.

• *Руманова И. М.* Симметрия взвешенных проекций электронной плотности кристаллов низших систем. — Кристаллография, 1960, 5, 180–193; Формулы взвешенных проекций электронной плотности для плоских косоугольных и прямоугольных черно-белых групп с центром симметрии (антисимметрии). — Кристаллография, 1960, 5, 831–863; Формулы взвешенных проекций электронной плотности для плоских косоугольных и прямоугольных черно-белых групп без центра симметрии (антисимметрии). — Кристаллография, 1961, 6, 13–36.

М. Сборник «Идеи Е. С. Федорова в современной кристаллографии в минералогии». Л., изд-во «Наука», 1970.

М. Сборник «Структура и формы материи». М., изд-во «Наука», 1967.

• Сборник «Ранние формы искусства». Искусство, М., 1972.

• Сборник «Ритм, пространство и время в литературе и искусстве». Наука, Л. 1974.

М. *Свечников Г. А.* Причинность и связь состояний в физике. М. Изд-во «Наука», 1971.

М. *Свидерский В. И.* О диалектике элементов и структуры. М., Соцэкгиз, 1962.

М. *Свидерский В. И., Зобов Р. А.* Новые философские аспекты элементно-структурных отношений. Л. Изд-во ЛГУ, 1970.

М. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., изд-во «Наука», 1967.

М. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М., изд-во «Наука», 1970.

М. *Серр Ж.* Алгебраические группы и поля классов. М., изд-во «Мир», 1968.

М. *Симонов П. В.* Теория отражения и психофизиология эмоций. М., изд-во «Наука», 1970.

• *Сиротин Ю. И.* Магнитная симметрия тензоров и энергия магнитной анизотропии. — Кристаллография, 1962, 7, 89.

М. *Скорняков Л. А.* Элементы теории структур. М., изд-во «Наука», 1970.

М. *Слэтер Дж.* Электронная структура молекул. М., изд-во «Мир», 1965.

М. *Слэтер Дж.* Диэлектрики, полупроводники, металлы. М., изд-во «Мир», 1969.

М. Содружество наук и тайны творчества. Сборник статей под ред. Б. С. Мейлаха М., изд-во «Искусство», 1968.

• *Соколик Г. А.* Симметрия в современной физике. Сб. «Философские вопросы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии». Киев. Изд-во «Наукова думка», 1965, стр. 167.

• *Сонин А. С., Желудев И. С.* Пространственная симметрия и сегнетоэлектрические фазовые переходы. Кристаллография. 4, 487–497, 1959.

П. *Сохор А.* Музыка как вид искусства. М., изд-во «Музыка», 1970.

М. *Соколов А. Н.* Теория стиля. М., изд-во «Искусство», 1968.

П. *Столл Р.,Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. М., изд-во «Просвещение», 1968.

• *Стритер Р., Вайтман А. С.* Спин и статистика и все такое. М., «Наука», 1966.

М. *Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. М., изд-во «Наука», 1965.

• Теория групп и элементарные частицы. — Сборник статей. М., изд-во «Мир», 1967.

• Теория систем и биология. Сборник обзоров. М., изд-во «Мир», 1971.

М. *Терлецкий Я. П.* Парадоксы теории относительности. М., изд-во «Наука», 1966.

М. *Томашевский Б. В.* Стих и язык. Филологические очерки. М.–Л., изд-во худож. литературы, 1959.

П. *Томсон Д.* Дух науки. М. Изд-во «Знание», 1970.

М. *Тот Л. Ф.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М., Гос. изд-во физ. матем. литературы, 1958

П. *Уилер Дж. Л.* Предвидение Эйнштейна. М., изд-во «Мир», 1970.

М. *Уемов А. Н.* Аналогия в практике научного исследования, Изд-во «Наука», М., 1970.

• *Уемов А. И.* Логические основы метода моделирования. М., изд-во «Мысль», 1971.

• *Урманцев Ю. А.* Растения правши и левши. — Природа, 1961, № 5, 100–102 (см. также сб. «О сущности жизни». М., изд–во «Наука», 1964); О диссимметрии листьев и цветков растений. — ДАН СССР, 1960, 133, 480–484 (см. также сб. «Научная мысль». АПН, 1964, № 4): Некоторые вопросы проблемы диссимметрии в природе. — ДАН СССР, 1961, 140, 1441–1444.

• *Урманцев Ю. А.* Изомерия в живой природе. — Бот. журн. 1970, 55, 153–158.

М. *Успенский Б. А.* Поэтика композиции. М., изд-во «Искусство», 1970.

С. *Фаддеев Д. К.* Таблицы основных унитарных представлений федоровских групп. М.–Л., изд-во АН СССР, 1961.

• *Федоров Ф. И.* О размерности тензорных пространств в кристаллах. Кристаллография, 1971, 15, 631–644.

• *Федоров Ф. И.* Собственные тензоры и размерности тензорных пространств в кристаллах. Кристаллография, 15, 638–644, 1973

• *Федоров Е. С.* Симметрия на плоскости. — Зап. минер. об-ва, 2-я серия, 1891, 28, 345–390.

У. *Федоров Е. С.* Курс кристаллографии. СПб. 1901.

• *Федоров Е. С.* Системы планигонов как типических изоэдров на плоскости. — Изв. АН СССР, 6-я серия, 1916, 10, 1523.

М. *Федоров Е. С.* Начала учения о фигурах. М., изд-во АН СССР, 1953 (впервые опубликовано в 1885 г.); Симметрия и структура кристаллов. Основные работы. М., Изд-во АН СССР, 1949 (работы 1888–1896 гг.).

У. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэнде М.* Фейнмановские лекции по физике. М., изд-во «Мир», 1965, вып. 4, гл. 52 «Симметрия законов физики»; 1967, вып. 9, гл. 15. «Симметрия и законы сохранения».

П. *Фейнман Р.* Характер физических законов. М., изд-во «Мир», 1968.

• *Филипс Д.* Трехмерная структура молекулы фермента. — Сб. «Молекулы и клетки», вып. 3. М., изд-во «Мир», 1968, стр. 9–28.

П. *Форд К.* Мир элементарных частиц. М., изд-во «Мир», 1965.

М. *Хамермеш М.* Теория групп и ее приложения к физическим проблемам. М., изд-во «Мир», 1966.

• *Харари Ф.* Теория графов. МИР, М., 1979.

М. *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. М., изд-во «Мир», 1970.

М. *Хейне В.* Теория групп в квантовой механике. М., ИЛ, 1963.

У. *Холл М.* Теория групп. М., ИЛ, 1962.

П. *Холден.* Что такое ФТТ. Изд-во «Мир» М., 1971.

М. *Хохштрассер Р.* Молекулярные аспекты симметрии. М., изд-во «Мир»,1968

М. Художественное восприятие. Сб. статей под ред. Б.С. Мейлаха. Л. Изд-во «Наука», 1971.

М. Художественный образ и декоративность в искусстве Азии и Африки. Сборник статей под ред. Э.М. Кильчевской, изд-во «Наука», 1969.

М. *Хэмбидж Д.* Динамическая симметрия в архитектуре. М., изд-во Всес. акад. архитектуры, 1936 (издание в оригинале 1920 г.).

М. *Цирхунов В.* Об эстетической природе зодчества. М., изд-во литературы по строительству, 1970.

М. *Цуккерман В.* Музыкально-теоретические очерки и этюды. М., изд-во «Сов. композитор», 1970.

• *Чернихов Я.* Орнамент. Л., 1931.

М. *Шафрановский И.И.* Формы кристаллов. — Труды Ин-та кристаллографии АН СССР, 1948, 4, 13–166.

М. *Шафрановский И.И.* История кристаллографии в России. М.–Л., Изд-во АН СССР, 1962.

П. *Шафрановский И.И.* Кристаллы стихов, стихи кристаллов. — Знание — сила, 1968, № 11, 106–107.

У. *Шафрановский И.И.* Лекции по кристалломорфологии. Л., изд-во «Высшая школа», 1968.

П. *Шафрановский И.И.* Симметрия в природе. Л., изд-во «Недра», 1968.

• *Шестаков В.П.* Гармония как эстетическая категория. М., Наука, 1979.

П. *Шрейдер. Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. М., изд-во «Наука», 1971.

• *Шубников А.В.* К вопросу о строении кристаллов. — Изв. АН СССР, 6-я серия, 1916, 10, 755–799.

• *Шубников А. В.* К вопросу о заполнении пространства многогранниками без промежутков. — Зап. минер. об-ва, 2-я серия, 1924, 53, 193–198.

П. *Шубников А. В.* Гармония в природе и искусстве. — Природа, 1927, № 7–8, 609–622.

• *Шубников А. В.* О сочетаниях правильных систем фигур на плоскости. I. — Изв. АН СССР, 6-я серия, 1926, 20, 1171–1180; II. — Изв. АН СССР, 6-я серия, 1927, 21, 177–184.

• *Шубников А. В.* Кристалл как непрерывная среда. — ЖФХ, 1933, 4, 231–245.

• *Шубников А. В.* Учение о симметрии как основной метод естествознания. — В кн. «Труды ноябрьской юбилейной сессии АН СССР», Л., изд-во АН СССР. 1933, стр. 181–193.

П. *Шубников А. В.* Вырезывание симметричных фигур из бумаги. — Наука и жизнь. 1935. № 7, 29 (541) — 35 (547).

• *Шубников А. В.* Закон симметрии и кристаллохимия. — В кн. Гассель О. Кристаллохимия. Л., ОНТИ, 1936, стр. 190–197; см. также «Изв. Российской АН», 6-я серия, 1922, 16, 1–18, 515–524.

• *Шубников А. В.* Симметрия электромагнитного луча. — Труды Лабор. кристаллографии АН СССР, 1939, I, 91–94

У. *Шубников А. В., Флинт Е. Е., Бокий Г. Б.* Основы кристаллографии. М–Л., изд-во АН СССР, 1940.

• *Шубников А. В.* Новое в учении о симметрии и его применении. — Сб. «Отчет об общем собрании АН СССР 14–17 октября 1944 г.». М., изд-во АН СССР, 1945, стр. 212–227.

С. *Шубников А. В.* Атлас кристаллографических групп симметрии. М.–Л., изд-во АН СССР, 1946.

• *Шубников А. В.* О симметрии векторов и тензоров. Симметрия и геометрическая интерпретация двумерных полярных тензоров. — Изв. АН СССР, серия физ., 1949, 13, 347–375, 376–386.

• *Шубников А. В.* Перспективы развития учения о симметрии. — Труды Федоровской научной сессии. М., Металлургиздат, 1949, стр. 33–47.

У. *Шубников А. В.* Симметрия и антисимметрия конечных фигур. М., Изд-во АН СССР, 1951. Поправку к книге см. «Труды Ин-та кристаллографии АН СССР», 1954, вып. 9, стр. 383.

П. *Шубников А. В.* О работах Пьера Кюри в области симметрии. — УФН, 1956, 59, 591–602.

П. *Шубников А. В.* Кристаллы в науке и технике. М., изд-во АН СССР, 1958.

У. *Шубников А. В.* Основы оптической кристаллографии. М., изд-во АН СССР, 1958.

• *Шубников А. В.* Антисимметрия текстур. — Кристаллография, 1958, **3**, 263; 1959, **4**, 276.

• *Шубников А. В.* Симметрия и антисимметрия стержней и семиконтинуумов с главной осью бесконечного порядка и конечными переносами вдоль нее. — Кристаллография, 1959, **4**, 279–285.

• *Шубников А. В.* Симметрия подобия. — Кристаллография, 1960, 5, 489–496.

П. *Шубников А. В.* Проблема диссимметрии материальных объектов. М., изд-во АН СССР, 1961.

• *Шубников А. В.* Группы (классы) симметрии и антисимметрии конечных лент. — Кристаллография, 1962, **7**, 3–6, 805.

• *Шубников А. В.* Об отнесении всех кристаллографических групп к группам трехмерным. — Кристаллография, 1962, **7**, 490–495.

• *Шубников А. В.* Черно-белые группы бесконечных лент. — Кристаллография, 1962, **7**, 186–191.

П. *Шубников А. В.* Растровая модель обыкновенных и групповых волн. — Природа, ноябрь 1965, стр. 61.

• *Шубников А. В.* Схема соподчинения кристаллографических точечных групп и сингоний. — Зап. Всес. минер. об-ва, 1965, **94**, вып. 3.

• *Шубников А. В.* Тридцать две кристаллографические группы, содержащие только повороты и антиповороты. — Кристаллография, 1965, **10**, 775.

• *Шубников А. В.* Антисимметрия (доклад на Седьмой Генеральной Ассамблее Международного союза кристаллографов). М., 1966.

• *Шубников А. В.* Тридцать две кристаллографические группы, содержащие только повороты и зеркальные антиповороты. Кристаллография, 1966, **11**, 366.

П. *Шубников А. В.* Световые волны с поперечными и продольными колебаниями. — Природа, 1966, № 6.

• *Шубников А. В. Парвов В. Ф.* Зарождение и рост кристаллов. М., изд-во «Наука», 1969.

• *Шубников А. В.* У истоков кристаллографии. М. Изд-во «Наука». 1972.

• *Шувалов Л. А.* Антисимметрия и ее конкретные модификации. — Кристаллография, 1962, **7**, 520–525.

• *Шувалов А. Л.* Предельные группы двойной антисимметрии. — Кристаллография, 1962, **7**, 822–825.

У. *Щербина В. В.* Техническое рисование. М. — Киев, 1952.

• Элементарные частицы и компенсирующие поля. — Сб. статей. М., изд-во «Мир». 1964.

П. *Энгельгардт В. А.* Часть и целое в биологических системах. «Природа», **1**, 24–36, 1971.

М. *Юлдашев Л. Г.* Эстетическое чувство и произведение искусства. М., изд-во «Мысль», 1969.

П. *Юрьев Ф.* Музыка света. Киев. Изд-во «Музична Украина», 1971.

М. *Яворский И. В.* Отображение симметрии физического пространства в пространстве Фурье. М., изд-во «Высшая школа», 1964 (см. также «Кристаллография», 1963, **8**, 158).

• *Яновский Ч.* Строение гена и структура белка. — Сб. «Молекулы и клетки», вып. 3. М., изд-во «Мир», 1968, стр. 61–76.

O. *Abraham M.* Mechanik der deformlerbaren Körper. Geometrische Grundbegrifte. Eni. d. malhem. Wiss., Leipzig, 1900, IV, 3, 1–47.

• *Alexander E.* Syelematik der eindimensionalen Raumgruppen. — Z. Kriet., 1929, 70, 367.

• *Alexander E., Herrmann K.* Die 80 xweidimeneionnalen Raumgpurpea. Z. Kristallogr., 1929, 70, 328–345.

• *Ascher S., Janner A.* Algebraic Aspects of Crystallography. Space Groups as Extensione. — Helv. Phyaica Acta, 1965, 38, 551.

M. *Barbaud P.* La musique, discipline scientifique. Paris, Dunod, 1971.

C. *Bentley W.A., Humphreys W.J.* Snow Crystals, N.Y. and London, 1931.

M. *Bhagavantam S.* Crystal Symmetry and Physical Properties. Acad. Press, N. Y. and London, 1966.

M. *Birkhoff G.D.* A Mathematical Theory of Esthetics and its Applications to Poetry and Music. — Rice Institute Pamphlet, 1932, **19**, 189–342.

• *Birkhoff G.D.* The Principle of Sufficient Reason. Collected math. pap., v. III, 778, N. Y., 1950.

M. *Birss R.* Symmetry and Magnetism. North-Holland Publ. Co. Amsterdam. 1964.

• *Bollmann W.* Crystal Defects and Crystalline Interfaces. Berlin, Springer Verlag, 1970.

M. *Bossert H.T.* Encyclopédie de l'ornement. Paris, 1956–1959.

• *Bradley C.I., Cracknell A.P.* The mathematical theory of symmetry in solids: representation theory for point groups and space groups. Oxford. Clarendon Press, 1971.

• *Bravais A.* Mémoire sur les polyédres de forme symétrique. — J. de math. pures et appl., 1894, **14**, 141. (Перевод Я.В. Самойлова — см. Вестник опыта. физ. в элемент, матем. Одесса, 1869).

• *Bravais A.* Etudes cristallographiques. Paris, 1866 (вывод 14 решеток Бравэ).

У. *Buerger M.J.* Elementary Crystallography. N.Y. and London, 1956.

M. *Burckhardt J.J.* Die Bewegungsgruppen der Krietallographie. 2 Auflage. Basel u. Stuttgart, 1966.

• *Clifford A.H., Freston G.B.* The algebraic Theory of semigroups Amer. Math. Soc., 1964.

• *Cochran W., Dyer H. B.* Some Practical Applications of Generalized Crystalstructure Projections. — Acta crystallographica, 1952, **5**, 634–636.

C. *Coxeter If. S. M., Mow W. O. J.* Generators and Relations for Discrete Groups. 2 edit. Berlin, 1965.

• *Fedorow E.* Reguläre Plan- und Raum-theflung. München, 1900.

• *Grossman I., Magnus W.* Groups and Their Graphs. Random House L. W. Singer Company, 1964.

• *Günzburg A. M.* Die Grundsätze der Lehre von der Symmetrle aut Linien und in Ebenen. — Z. Krist., 1929, 71, 81.

• *Harary F.* Graphtheory. Addisson-Wesley, Pubb. Co. London, 1969.

• *Heesch H.* Ueber die Symmetrie zweier Art in Kontinuen und Semidlekontinuen. — Z. Krist., 1930, **73**, 346.

• *Heesch H.* Zur Strukturtheorie der ebenen Symmetriegruppen. — Z. Krist., 1929, **71**, 95; Über die vierdimenslonalen Gruppen des droidimensionalen Raums. — Z. Krist., 1930, **73**, 325-345.

M. *Henze W.* Ornament, Dekor und Zeichnen. Dresden, 1958.

• *Hermann C.* Ketten und Netzgruppen. — Z. Krist., 1929, **69**, 226–249.

• *Hermann C.* Kristallographie in Räumen beliebiger Dimensionzahl. I. Die Symmetrieoperationen. — Acta Cryst., 1949, 2. 139–145.

• *Hessel J. F.* Ch. Krystallometrie oder Krystallonomie und Krystallographie. Gehlers physikalisches Wörterbuch. Bd. 5. Leipzig, 1830 (См. также *Heiul J. P.* Ch. Krystallometrie, Leipzig, 1831).

M. *Hilton H.* Mathematical Crystallography. Oxford, 1903.

• *Hurley A. C.* Crystal Uasees of Fourdimensional Space. — Acta Cryst., 1967, **22**, 605.

C. International Tables for X-ray Crystallography. v. I. Symmetry Groups. Birmingam, 1952.

M. *Jaeger F. M.* Lectures on the principle of symmetry and its applications in natural sciences. Amsterdam and London, 1917.

• *Janssen T., Janner A., Ascher E.* Crystallographic groups in space and lime. — Physica, 1969, **41**, 541–565; 42, 41–70, 71–92.

• *Janner A., Ascher E.* Crystallography in two-dimonsional metric spaces. — Zs. Krist., 1969, 130, 277–303.

• *Janner A., Ascher E.* Relalivistic crystallographie point groups and Bravais lattices in two dimensions. — Physica, 1969, **45**, 33–66; 67–85.

• *Janner A., Ascher E.* Rolativistic symmetry groups of uniform electromagnetic fields and crystal diffraction. — Physica, 1970, **46**, 162–164: **48**, 425–446.

• *Janner A.* On Bravais Classes of Magnetic Lattices. — Helv. Physica Acta, 1966, **39**, 665–682.

У. *Jaswon M.A.* An Introduction to Mathematical Crystallography. London, 1965.

С. *Jonei Owen.* The Grammar of Ornament. London, 1856.

• *Jordan C.* Mémoire sur les groupes de mouvements. Annali di Matematica. Ser. IIa, 1868, 1869, **2**, 167, 322. (Симметрия, континуума первою рода — ‚без отражений).

С. *Koster G.F., Dimmok J.O., Wheeler R.S., Start H.* Properties of the Thirty-two Point Groups. M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1963.

• *Koptsik V.A.* On Microscopic Theory of Static Domain Structures of Ferroelectric Crystals.-Proceedings of the Internal. Meeting on Ferroelectrlcity. v. II, Prague, 1966, p. 20–30.

• *Loeb A.L.* Color and Symmetry. John Wiley α Sons. New Jork, 1971.

• *Ludwig W.* Rechts-links Problem im Tierreich und bei Menschen. Berlin, 1932.

П. *Macgillavry C.H.* Symmetry Aspects of M.C. Escher's Periodic Drawings. — Publ. Int. Union of Crystallography. Utrecht, 1965.

О. *Mackay A.L.* Extensions of Space-Group Theory. — Acta Gryst., 1957, **10**, 543–548.

• *Mackay A.L., Powley G.S.* Bravais Lattices in Four-dimensional Space. — Acta Gryst., 1963, **16**, 11–19.

• *Miller S. C., Love W. P.* Tables of irreducible representations of space groups and co-representations of magnetic space groups. Colorado, Pruett Press, 1967.

• *Minnigerode B.* Untersuchungen über die Symmetrie verhS ltnisse dor Kristalle. — Neues Jahrbucb für Mineral., Geol. und Pal., 1887, B-Band **5**, 145. (См. также Göttingen Nachr., 1884, 195. — *Принцип симметрии*).

• *Neumann F. E.* Vorlesungen über die Theorie Elastizität. Leipzig, 1885.

• *Newman J., R.* The World of Mathematics, v. 1, N. Y., 1956, p. 670.

П. *Nicolle J.* La symétrie dans la nature et les travaux des hommes. Edit. du Vieux. Colombier. Paris, 1955.

• *Niggli A.* Über die Eigensymmetrien von Tensoren. — Zs. Krist., 1955, **106**, 401–429.

• *Niggli A.* Zur Systematik und gruppentheoretischen Ableitung der Symmetric, Antisymmetrie und Entartungs-symmetriogruppen — Zs. Krist., 1959, **111**, 288–300.

• *Niggli A., Wondratschek H.* Eine Verallgemeinigung der Punktgruppen: I. Die efnfachen Kryptosimmetrien. — Z. Krist., 1960, **114**, 215–231; II. Die mehrfachen Kryptosymmetrien.— Z. Krist., 1961, **115**, 1–20.

• *Niggli P.* Geometrische Kristallographie des Diskontinuums. Leipzig, 1919.

• *Niggli P.* Die Flächensymmetrien homogener Diskontinuums. — Z. Krist., 1924, **60**, 283–299.

• *Niggli P.* Die regelmässige Punktverteilung längs einer Geraden in einer Ebene (Symmetrie von Bordürenmuster). — Z. Krist., 1926, **63**, 255.

• *Neubüser Y., Wondretschek H., Bülow R.* On crystallography in higher dimensions. I, II, III. Acta Cryst. (1971) A27, 517–535.

• *Nussbaum A.* Crystal Symmetry, Group Theoy and Band Structure Calculations. Solid State Physics, v. 18, Academic Press, N. Y. and London, 1966, p. 165–272.

• *Pabst A.* The 179 two-sided, two-colored band groups and their relations.— Z. Krist., 1962, **117**, 128–134.

• *Pasteur L.* Recherches sur la Dissimétrie moléculaire des Produits organiques naturels. Paris, 1861. (См. также — Ann. **d**. chimie et de phys., 1853, **38**, (3), 437; Bull. de la Soc. Chim., 1884, **41**, 218). (см. также Л. Пастёр. Избранные труды. М., Изд-во «Наука», 1960).

• *Palya G.* Ueber di Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. — Z. Krist., 1924, 60, 278.

• *Popoff B.* Sphärolithenbau und Strahlungkristallisation, Latv. Farm. Zurn. Riga, 1934.

• *Roman T.* Simetria. Bucuresti, 1963.

• *Schiebold E.* Über eine neue Herleitung und Nomenklatur der 230 kristallographischen Raumgruppen. Leipzig, 1929.

М. *Schönflies A.* Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig, 1891. 2-е изд. Theorie der Kristallstruktur. Berlin, 1923.

• *Sohncke L.* Entwicklung einer Teorie der Kristallstruktur. Leipzig, 1879 (Дисконтинуумы первого рода — без отражений).

• *Schubnikow A.* Über die Symmetrie des Kontinuums. — Z. Krist. 1929, **72**, 272–290; Ueber die Symmetris des Semikontinuums. — Z. Krist., 1930, **73**, 430–433.

• *Seitz F.* On the Reduction of Space Groups. — Ann. of Mathematics, 1936, **37**, 17–28.

У. *Speiser A.* Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Berlin, 1927, 1937; Theory of Groups of finite Order. Basel, 1958.

• *Speiser D.R., Tarski J.* Possible Schemes for Global Symmetry. J. Math. Phys., 1963, **4**, 588–612.

• *Streater R.F., Wightmanc P.T.* PET, spin and statisties and all that. W.A. Benjamin Inc. New York – Amsterdam, 1964.

• Studium Generale. Springer Verlag in Berlin – Göttingen – Heidelberg. 2 Jahrgang, H 4/5, 1949. (*Допросы симметрии в науке и искусстве*).

М. *Thompson D'Arcy W.* On Growth and Form. Cambridge, N.Y., 1948 (1-е изд. 1915 г.).

У. *Viola C.M.* Grundzüge der Kristallographie. Leipzig, 1904.

M. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin, 1910, 1928.

- *Waerden B. L. van der, Burckhardt J. J.* Farbgruppen. — Z. Krist., 1961, **115**, H. 3/4, 213–234.
- *Weber L.* Die Symmetrie homogener ebener Punktsysteme. — Z. Krist., 1929, **70**, 309–327.
- *Wild U. Keller I., Günthard Hs. H.* Symmetry Properties of the Hückel Matrix. Theoret. chim. Acta. (Berl), 1969, **14**, 383–395.
- *Wittke O.* The Colour-symmetry Groups and Cryptosymmetry Groups Associated with the 32 Crystallographic Point Groups. — Z. Krist., 1962, **117**, 153–165.
- *Wittke O., Garrtdo J.* Simétrie des polyedres polichromatiques. — Bull. Soc. franc. minéral, et cristallogr., 1959, **82**, 223–230.
- *Wondratschek G., Neubüser A.* Results, in four-dimensional Cryslalography. Actaryst 1970, A27? 523–535.
- *Zak J., Casher A., Gluck M., Gur Y.* The irreducible representations of space groups. New York, Benjamin, 1969.
- *Zassenhaus H.* Comm. Math. Helv., 1948, **21**, 117–141. Über einen Algorithmus zur Beslimmung der Raumgruppen.
- *Zheludev I.* Symmetry in Physics. — Atomic Energy Review, 1969, **7**, 215–263.

ДОПОЛНЕНИЕ

Симметрия тетракоординированных и тетраэдрических структур в рамках алгебраической геометрии

А. Л. Талис

Книгу завершает «Дополнение», которое представляет собой попытку применения аппарата алгебраической геометрии для определения наиболее общих симметричных закономерностей строения тетракоординированных (алмазоподобных) и тетраэдрических (металлы, сплавы) структур. В качестве примера действия развиваемого аппарата рассмотрены априори определяемые структуры — как экспериментально существующие, так и гипотетические — от макро- до наномасштабов.

Строгая математическая теория квазикристаллов изложена [16]. Она позволяет строить квазикристаллы со всеми типами точечных групп: кристаллографическими (кубическими и др.), некристаллографическими (икосаэдрическими и др.) и бесконечной (группа цилиндра). Одна из структурных реализаций квазикристалла с бесконечной точечной группой построена М. И. Салковичем с сотрудниками [61–63].

В качестве одного из приложений квазикристалллы могут быть использованы как при объяснении основ процессов зародышеобразования в расплавах металлов.

Введение

Симплексом трехмерного евклидова пространства E^3 является тетраэдр, поэтому тетракоординированные структуры, в которых каждая вершина связана с 4-мя ближайшими, являются особо важными — базовыми для всех структур. К тетракоординированным структурам относятся в первую очередь алмазоподобные структуры (АС) и цеолиты. Множество вершин и ребер кристаллической структуры образует связную сетку — граф, который определяет структурный тип и реализует одно из разбиений E^3. На протяжении многих лет вывод возможных структурных типов тетракоординированных кристаллов требовал от кри-

сталлографов эмпирических и интуитивных построений таких графов, и только в 1999 году [1] успехи в области теории разбиений E^3 позволили перечислить все кристаллические тетракоординированные комбинаторно-топологически различные графы, содержащие вершины одного, двух или трех различных типов.

Применяемый в [1] аппарат, фактически, использует более общие, чем дискретные группы движений в E^3 [2] алгебраические конструкции, таким образом, для адекватного отображения симметрии даже кристаллической структуры (не говоря уже о детерминированных некристаллических структурах) недостаточно «классической» кристаллографии, ограниченной определенными в E^3 федоровскими группами. На необходимость обобщения классической кристаллографии указывалось и в кристаллохимических работах П. М. Зоркого [3] и Л. А. Асланова [4]. Систематическое, но скорее кристаллофизическое, чем структурное обобщение классической кристаллографии изложено в трудах В. А. Копцика [5–9]. В рамках созданного Н. А. Бульенковым модульного подхода им был осуществлен априорный вывод детерминированных АС различных типов [10–14].

Вышеизложенное показывает, что снятие основных ограничений классической кристаллографии требует перехода к E^n, $n > 3$, и неевклидовым геометриям. Помимо широко известных в последнее время работ по квазикристаллам, например, [15,16], наиболее «структурными» примерами таких работ можно считать работы, использующие аппарат регулярных разбиений трехмерных пространств Римана и Лобачевского S^3 и H^3 [17–25], эллиптической геометрии [26], теории расслоенных пространств [27], решеток корней [28] и т. п. Наряду с группами (соответствующих геометрий) использовались поля [29], алгебры [27] и другие конструкции. Тем не менее, в рамках всех этих расширений классической кристаллографии аппарат для адекватного отображения симметрии детерминированных (не только кристаллических !) АС создан не был. Либо математическая основа была недостаточно широка, либо наоборот — оторванный от АС сложнейший математический аппарат был подкреплен лишь несколькими (довольно абстрактными) двумерными примерами.

По нашему мнению, необходимый аппарат должен быть подобен федоровским группам: строгий (и довольно сложный; например, изложенный в §§ 48–52 в [30]) математический аппарат, являющийся основой для предельно наглядного алгоритма отображения симметрии структур (см., например, Интернациональные таблицы [31]). Всем этим требованиям отвечает проективная (а в более широком смысле — алгебраическая) геометрия, включающая в единую схему геометрии Евклида, Лобачевского и Римана [32, с. 242].

Открытие правильных многогранников, соответствующих конечным подгруппам группы движений пространства, рассматривалось как высшее достижение античной математики — описание правильных многогранников завершает «Элементы» Евклида. Это были самые глубокие симметрии, открытые античной математикой. Завершением этого подхода можно считать вывод Е. С. Федоровым правильных систем фигур, которые соответствуют дискретным подгруппам группы движений. Открытие и перечисление простых групп Ли в математике нового времени — это самые тонкие симметрии, до понимания которых современная математика поднялась [33]. И точно так же, как Платон считал тетраэдр, октаэдр, куб и икосаэдр формами элементарных составляющих четырех стихий (выделяя додекаэдр как всеобъемлющий символ космоса), так и современные исследователи пытаются при помощи этих базовых конструкций алгебраической геометрии найти общие симметрийные закономерности в многообразии детерминированных структур. Особую роль среди таких конструкций играет уникальная 8-мерная кристаллографическая решетка E_8 — решетка корней максимальной исключительной простой алгебры Ли, которая отображается на себя точечной группой отражений порядка $696729600 = 2^{14} \times 3^5 \times 5^2 \times 7$ [33, 34]. В каком-то смысле развиваемый аппарат можно рассматривать как структурную реализацию определяемых E_8 конструкций.

Предлагаемое читателю «Дополнение» представляет собой (насколько нам известно) первую попытку применения аппарата алгебраической геометрии для определения общих симметрийных закономерностей строения детерминированных тетракоординированных и тетраэдрических (металлы, сплавы и т. п.) структур. Для наглядности изложения математической строгостью во многих местах «Дополнения» пришлось пожертвовать и использовать многочисленные иллюстрации, обеспечивающие прямое сопоставление конструкций алгебраической геометрии с однозначно определяемыми ими структурами.

I. Определения и терминология [35, 36]

1. Конечные проективные плоскости и конфигурации

Проективная плоскость PG(2, k) состоит из евклидовой плоскости E^2 = EG(2, k), к которой добавлено по одной «точке на бесконечности» для каждого пучка параллельных в E^2 прямых. Модель PG(2, k) представлена на рис. 1 *а, б*. Прямая общего положения в E^3, проходящая через 0, не содержится в плоскости ($Z = 0$), и, значит, пересекает плоскость $Z = 1$ в единственной точке. Прямые, лежащие в плоскости ($Z = 0$), не пересекают плоскость $Z = 1$, следовательно, они соответствуют не точкам из E^2, а пучкам параллельных прямых в E^2.

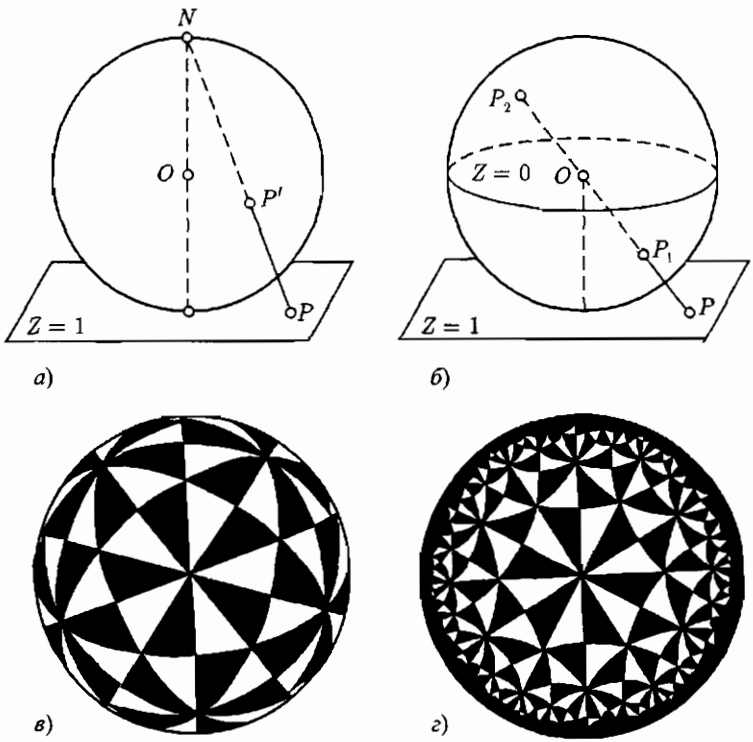


Рис. 1. Евклидова и проективная плоскости; сферическая и гиперболическая мозаики [37]. *а*) Сфера S^2 однозначно проектируется в плоскость E^2 при проектировании из северного полюса N. *б*) Пара диаметрально противоположных точек S^2 проектируется в одну точку проективной плоскости $\mathrm{PG}(2, k)$; при проектировании из центра сферы экватор проектируется в бесконечно удаленную прямую, не принадлежащую E^2. *в*) *г*) Сферическая и гиперболическая мозаики, порождаемые отражениями относительно сторон криволинейного треугольника с углами $\pi/3, \pi/5, \pi/2$ и $\pi/6, \pi/4, \pi/2$.

Структура, содержащая n точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и n прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$, $n = q^2 + q + 1$, в которой через каждую точку проходит $q + 1$ «прямая», состоящая из $q + 1$ точки, называется конечной проективной плоскостью $\mathrm{PG}(2, q)$ порядка q. Плоскость $\mathrm{PG}(2, q)$ однозначно определяется своей таблицей инцидентности (принадлежности), представляющей собой квадратную таблицу $n \times n$, в которой столб-

цы $P_1, P_2, \ldots, P_n$ называются «точками», а строки $l_1, l_2, \ldots l_n$ — «прямыми». Инцидентность точки P_i и прямой l_j определяется заполнением клетки ij (кружком) в этой таблице, пустая клетка означает отсутствие инцидентности. На рис. 2 приведен пример построения таблицы инцидентности (ТИ(q)) плоскости PG(2, 3). По таблицам сложения и умножения поля GF(q) — поля Галуа порядка $q = 3$.

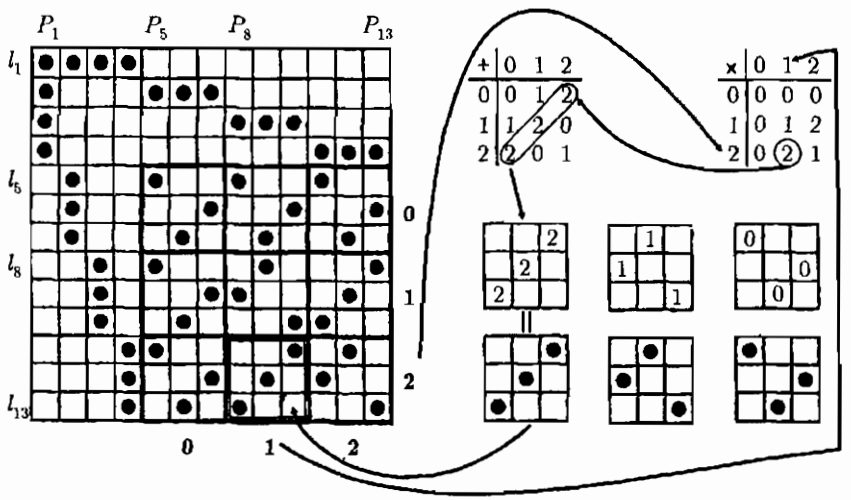


Рис. 2. Построение таблицы инцидентности конечной проективной плоскости PG(2, 3) по таблицам сложения и умножения поля Галуа GF(3) [35]. Индексы 2 и 1 показанного двойными линиями квадрата C^{21} совпадают с элементами 2 и 1 строки и столбца таблицы умножения (×) поля Галуа GF(3) = $= \{0, 1, 2\}$. Произведение этих элементов определяет элемент 2, распределение которого в таблице сложения (+) GF(3) и является распределением знаков инцидентности в квадрате C^{21}. Квадраты C^{mx} с m или x, равными 0, одинаковы и представляют собой распределение 0 в таблице сложения GF(3). Квадрат из 3^2 квадратов C^{mx} ($m, x = 0, 1, 2$) представляет собой Q — внутренность таблицы. Первые 4 строки и столбца образуют Г-крюк.

В каждой строке и каждом столбце таблицы ТИ(q) содержится по q+1 кружку; q^2 строк и столбцов $l_{q+2}, l_{q+3}, \ldots, l_n$ и $P_{q+2}, P_{q+3}, \ldots, P_n$ образует Θ — внутренность таблицы ТИ(q), которая может быть представлена как квадратная таблица из $q \times q$ квадратов C^{mx}, каждый из которых состоит, в свою очередь, из $q \times q$ клеток. Расположение знаков в

«крюках» $P_1 - l_1$ и $P_2 \dots P_{q+1} - l_2 \dots l_{q+1}$ — ступенчатое, распределение знаков во всех $q \times q$ квадратах Θ — является одним из $q!$ различных диагональных распределений, при котором в каждой строке и каждом столбце встречается ровно один знак. Если первые или вторые индексы двух квадратов C^{mx} совпадают и не равны нулю, то распределение знаков в этих квадратах различно. Каждый из q^2 квадратов C^{mx} характеризуется своим индексом mx, а каждый знак инцидентности в этом квадрате — индексом by; $m, x, b, y \in \{0, 1, \dots, q-1\} = Q$. Квадрат C^{mx} соответствует клетке таблицы умножения поля Галуа $\mathrm{GF}(q)$, определяемой строкой m и столбцом x; пусть в этой клетке стоит число $mx = t$. То же число t будет находиться в клетке таблицы сложения поля $\mathrm{FG}(q)$: $b + y = t$ (рис. 2). Таким образом, в квадрате C^{mx} клетка со строчным и столбцевым индексом by будет содержать знак инцидентности лишь при $mx = t = b + y$, т. е. когда $y = mx - b$ (рис. 2). Эту клетку t можно рассматривать и как пересечение «строки» $[m, b]$ со «столбцом» (x, y), поэтому можно говорить о прямой $[m, b]$ и о точке (x, y) и сопоставить $\mathrm{PG}(2, q)$ с евклидовой плоскостью (рис. 3 *а*).

1. Роль идеальных точек играют точки $P_1, P_2, \dots, P_{q+1}$, которым приписываются обозначения $0, 1, \dots, q-1$ и (∞). Множество точек $(0), (1), \dots, (q-1)$ и (∞) образуют идеальную прямую l_1. Обыкновенные точки $P_{q+2} \dots P_n$ — это пары (x, y) элементов из Q, P_{q+2} и P_{2q+3} играют роль начала координат $(0, 0)$ и точки $(1, 1)$ соответственно.

2. q прямых первого и q прямых второго семейства — это множества $\{(0), (x, y) | x, y \in Q, y = \mathrm{const}\}$ и $\{(\infty), (x, y) | x, y \in Q, x = \mathrm{const}\}$.

3. $q(q-1)$ диагональных прямых — это множество, состоящее из идеальной точки (f) и обыкновенных точек (x, y). Таким образом, каждая диагональная прямая является ломаной, состоящей из q звеньев и заканчивающейся идеальной точкой данной прямой.

Итак, $PG(2, q)$ содержит $q+1$ идеальную и q^2 обычных точек, одну идеальную прямую, $2q$ прямых первого и второго семейства и $q(q-1)$ диагональных прямых (рис. 3, *б*).

Множество из m точек и n прямых (плоскостей), в котором через каждую точку проходит c прямых (плоскостей), а на каждой прямой (плоскости) лежат d точек, называется конфигурацией. Конфигурация обозначается (m_c, n_d); если $m = n$, то конфигурация является самодуальной и обозначается n_d. Конфигурация определяется своей таблицей инцидентности $\Gamma(m_c, n_d)$ из m строк и n столбцов, содержащей $m \cdot c = n \cdot d$ знаков инцидентности. Конфигурация может быть реализована в различных (конечных или бесконечных) пространствах; для реализации на какой-либо проективной плоскости она должна быть геометрической, т. е. $\Gamma(m_c, n_d)$ во всякой своей подтаблице 2×2 должна иметь одну пустую клетку. (Это обеспечивает пересечение двух раз-

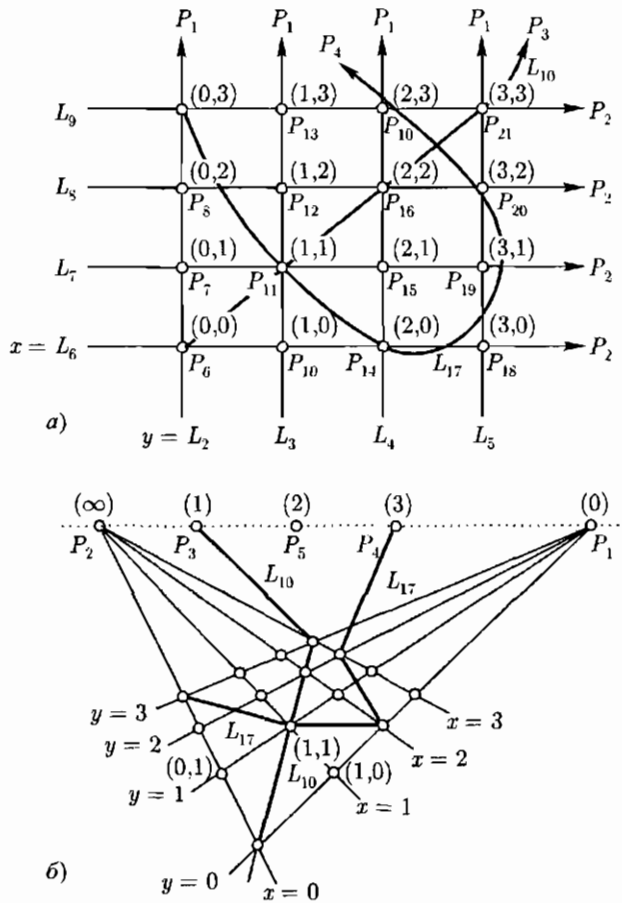


Рис. 3. Графические модели конечной проективной плоскости PG(2, 4) [35]. *а*) PG(2, 4) как расширение конечной евклидовой плоскости EG(2, 4), состоящей из 4^2 (неидеальных) точек (0, 0), (0, 1) ...(3, 3), определяемых пересечением прямых $l_2, \ldots, l_{4+1}$ и $l_{4+2}, \ldots, l_{2\cdot 4+1}$. Идеальные точки $P_1, \ldots, P_5$ образуют (не показанную на рисунке) бесконечно удаленную (идеальную) прямую l_1; остальные диагональные «прямые» (например, l_{10}, l_{17}) не изображаются в виде прямых EG(2, 4). *б*) Модель PG(2, 4), на которой представлена (пунктиром) идеальная прямая. Диагональные прямые l_{10} и l_{17} заканчиваются в идеальных точках 1 и 3 и изображаются ломаными из 4-х звеньев.

личных прямых проективной плоскости лишь в одной точке). Если при добавлении нескольких знаков инцидентности в $\Gamma(m_c, n_d)$ получаемая конфигурация останется геометрической, то мы получаем расширенную конфигурацию, содержащую разное число знаков в строках и столбцах таблицы.

Автоморфизмом, или взаимно-однозначным отображением PG(2, q) на себя, является такое преобразование, при котором образы трех точек тогда и только тогда принадлежат одной прямой, когда сами эти точки принадлежат одной прямой. Такие автоморфизмы называются *коллинеациями*. Рассмотрим их подробно на примере PG(2, 3).

На рис. 4, *а* три идеальные точки показаны стрелками, идеальная прямая $l_1 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ не показана. Подстановка $\pi_1 = (1,7,8,10,2,11,6,12)(3,9,13,5)(4)$ является коллинеацией (и однозначно определяет подстановку прямых $\lambda_1 = (1,12,13,11)(2,9,3,6,5,10,7,4)(8)$, которая является той же коллинеацией), при этом $P_4 \to P_4$, $l_8 \to l_8$, т. е. P_4 и l_8 — неподвижная точка и прямая коллинеации π_1. При коллинеации $\pi_2 = (1)(2,3)(4)(5,12)(6,13)(7,11)(8)(9)(10)$ и индуцированной ею $l_2 = (1)(2,4)(3)(5,9)(6,10)(7,8)(11)(12)(13)$ все четыре прямые l_1, l_{11}, l_{12}, l_{13}, проходящие через неподвижную точку P_4, неподвижны. В этом случае P_4 — центр коллинеации, а l_3 (на которой лежат неподвижные точки P_1, P_8, P_9, P_{10}) — ось коллинеации. Если центр лежит на оси, то коллинеацию называют *элацией* (или проективным сдвигом), в противном случае — *гомологией*. Если центр и ось коллинеации являются идеальной точкой и прямой PG(2, q), то коллинеация называется переносом; если центр коллинеации — идеальная точка, лежащая на оси коллинеации, которая не является идеальной прямой, то это — аффинный сдвиг. Например, на рис. 4, *а* отображение точек $\pi = (5,7,6)(8)(9)(10)(11,12,13)$ и индуцированное им отображение прямых $\lambda = (2)(3)(4)(5,9,13)(6,10,11)(8,12,7)$ является аффинным сдвигом.

Все подстановки n-элементного множества образуют полную группу подстановок S_n порядка $n!$. Множество всех коллинеаций PG(2, q) составляет подгруппу $P^{\text{кол}}(2, q)$ группы S_n, порядок $P^{\text{кол}}(2, q) = m(q^2 + q + 1)(q+1)q^3(q+1)^2$, где $q = p^m$, p — простое число. Коллинеации, квадраты которых являются тождественной коллинеацией, называются *инволюциями*, в силу связи с группами отражений (простейшая инволюция — плоскость отражения) они имеют глубокий геометрический смысл.

В $P^{\text{кол}}(2, q)$ можно выделить подгруппу $P_1^{\text{кол}}(2, q)$, сохраняющую идеальную прямую в PG(2, q) и изоморфную группе $A^{\text{кол}}(2, q)$ аффинных коллинеаций конечной аффинной плоскости AG(2, q), ассоциированной с PG(2, q). При аффинных коллинеациях из группы $A^{\text{кол}}(n, q)$

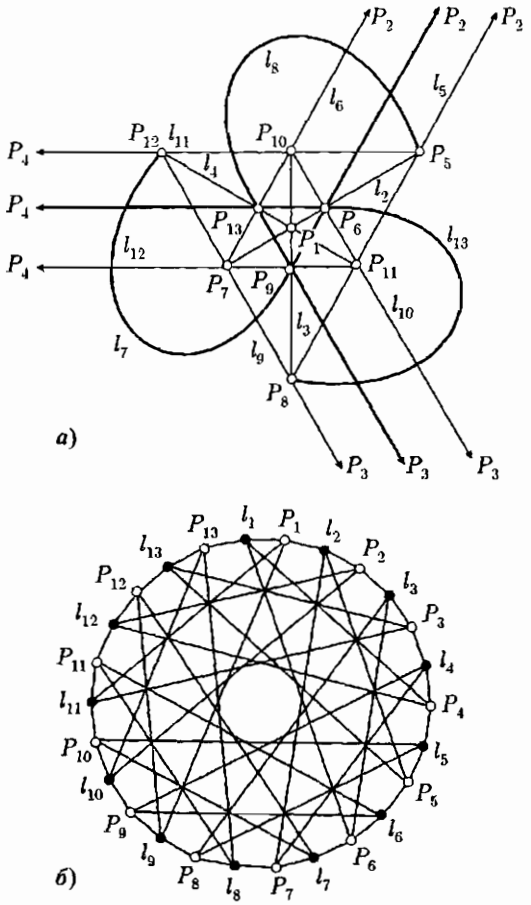


Рис. 4. Графическая модель конечной проективной плоскости PG(2, 3) и соответствующий ей граф инцидентности [35]. *а*) PG(2, 3) как расширение конечной евклидовой плоскости EG(2, 3), состоящей из 3^2 неидеальных точек $P_5, \ldots, P_{13}$. Идеальные точки $P_1, P_2, \ldots, P_4$ образуют (не представленную на рисунке) идеальную прямую l_1; l_7, l_8, l_{13} — диагональные «прямые». *б*) Граф инцидентности PG(2, 3) как регулярный бихроматический гамильтонов граф степени 4=3+1 и обхвата 6, имеющий наименьший возможный порядок $2(3^2 + 3 + 1) = 26$.

сохраняется параллельность прямых. В общем случае $A^{\text{кол}}(n, q)$ является подгруппой $P^{\text{кол}}(n, q)$ и содержит подгруппу $A_0(n, q) = \mathrm{GL}_n(q)$, которая оставляет некоторую выделенную точку на месте. Прямые из $\mathrm{AG}(n, q)$, проходящие через эту точку, составляют $\mathrm{PG}(n-1, q)$, группа $P^{\text{кол}}(n-1, q)$ которой содержит подгруппу проективных коллинеаций $\mathrm{PGL}_n(q)$, изоморфную фактор-группе $\mathrm{GL}_n(q)$ по центру. $\mathrm{PGL}_n(q)$ является подгруппой индекса m в группе $P^{\text{кол}}(n-1, q)$. Группа $\mathrm{GL}_n(q)$ — это множество матриц $n \times n$ с ненулевыми определителями; матрицы с определителем 1 составляют в $\mathrm{GL}_n(q)$ нормальную подгруппу $\mathrm{SL}_n(q)$, фактор-группа которой по центру изоморфна группе $\mathrm{PSL}_n(q)$ или $\mathrm{LF}_n(q)$. Порядок Ω группы $\mathrm{GL}_n(q)$ определяется соотношением: $\Omega = (q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\ldots(q^n-q^{n-1})$; группы $\mathrm{PGL}_n(q)$, $\mathrm{SL}_n(q)$ и $\mathrm{PSL}_n(q)$ имеют порядок $\Omega/(q-1)$, $\Omega/(q-1)$ и $\Omega/(q-1)\cdot d$, где $d = (n, q-1)$ — наибольший общий делитель.

2. N-мерные платоновы тела (политопы). Расслоение Хопфа [34, 36–40]

Конечная проективная плоскость $\mathrm{PG}(2, q)$ — это «неметрическое» обобщение полиэдра $\{p, q\}$, но в E^n, $n \geqslant 3$, возможно и его «метрическое» обобщение. Так, например, обозначаемый символом Шлефли $\{p, q, r\}$ четырехмерный полиэдр (политоп) составлен из правильных платоновых тел (ячеек) $\{p, q\}$ таким образом, что каждая грань $\{p\}$ принадлежит двум ячейкам, а каждое ребро — r ячейкам. Расположение ячеек при вершине $\{p, q, r\}$ соответствует расположению граней полиэдра $\{q, r\}$, вершины которого — середины ребер, выходящих из данной вершины. Полиэдр $\{q, r\}$ — вершинная фигура политопа, вершины дуального ему полиэдра $\{r, q\}$ являются центрами ячеек полиэдра $\{p, q\}$, сходящихся у каждой вершины политопа. Для политопа $\{p, q, r\}$ возможно лишь единственное «вырождение» в трехмерную мозаику (соты) $\{4, 3, 4\}$, представляющую собой разбиение E^3, при котором каждое ребро принадлежит $4^{\text{м}}$ кубам $\{4, 3\}$. Многоугольник Петри политопа $\{p, q, r\}$ — это последовательность ребер, в которой любые три, но не четыре принадлежат многоугольнику Петри ячейки $\{p, q\}$ (рис. 5, *а, б*).

Невозможное в E^3 разбиение на правильные тетраэдры реализуется в 4-мерном икосаэдре — политопе $\{3, 3, 5\}$, 120 вершин которого принадлежат 3-мерной сфере S^3, погруженной в E^4 (рис. 5, *в, г*). Политоп $\{3, 3, 5\}$ и дуальный к нему политоп $\{5, 3, 3\}$ (4-мерный додекаэдр) отображаются на себя группой $\mathrm{Y}' \times \mathrm{Y}'$ порядка 14400. Если Y-группа вращений икосаэдра из 60 элементов $g(n, \varphi)$, где n — единичный вектор оси икосаэдра, вокруг которой происходит вращение на угол φ, то Y' — группа из 120 элементов вида $y(n, \varphi)$ и $y(n, \varphi + 2\pi) = -y(n, \varphi)$, которые од-

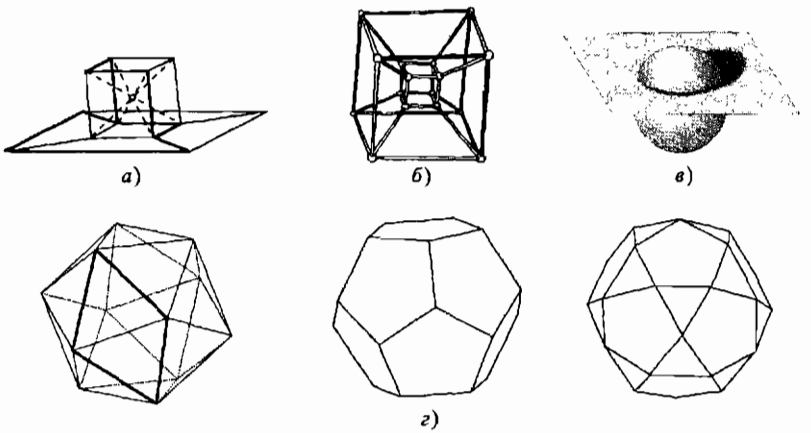


Рис. 5. Отображения политопов в E^3 [20]. *а*) Куб $\{4, 3\}$ и его проекция на плоскость в форме диаграммы Шлегеля. 6-реберный многоугольник Петри куба и его диаграммы Шлегеля показан жирными линиями. *б*) Проекция политопа $\{4, 3, 3\}$ в E^3, на которой жирными линиями выделен его 8-реберный многоугольник Петри. *в*) Окружность как сечение сферы S^2 плоскостью E^2. *г*) Икосаэдр, додекаэдр, икосидодекаэдр как сечения политопа $\{3, 3, 5\}$, вершины которого находятся на сфере S^3, гиперплоскостью E^3. Две треугольные грани икосаэдра образуют «ромб», выделенный жирной линией.

нозначно соответствуют $\pm\varphi$-дисклинациям, вводимым в икосаэдр вдоль оси n. Например, элемент $y(n, {}^{-2\pi}/_5)$ соответствует ${}^{-2\pi}/_5$-дисклинации, превращающей (при вставке клина с углом ${}^{2\pi}/_5$) пентагональную «шапочку» икосаэдра в гексагональную; взаимодействие дисклинаций определяется произведением соответствующих им элементов группы Y′. Введение в вершины «ромба» из двух соседних треугольных граней икосаэдра дисклинационного квадруплета (из двух ${}^{-2\pi}/_5$ и двух ${}^{2\pi}/_5$-дисклинаций) приводит к переброске диагонали в этом «ромбе» (рис. 5, *г*). Квадруплету, или 2π-дисклинации [19], соответствует элемент $y(n, 2\pi) = -1$ группы Y′ и вращение на 2π по ленте Мебиуса.

Полиэдр $\{p, q\}$ может вкладываться как ячейка и в обычные 3-мерные гиперболические соты: $\{3, 5, 3\}$, $\{4, 3, 5\}$, $\{5, 3, 4\}$, $\{5, 3, 5\}$, Если же $\{p, q\}$ — это двумерная евклидова мозаика, то мы получаем особые гиперболические соты: $\{4, 4, 3\}$, $\{6, 3, 3\}$, $\{6, 3, 4\}$, $\{6, 3, 5\}$, в которых 2-мерные мозаики $\{4, 4\}$ и $\{6, 3\}$ трансформируются в сферы ∞ радиуса, не являющиеся гиперболическими плоскостями, погруженными в H^3.

Они представляют собой более сложные объекты, именуемыми орисферами, но их геометрия совпадает с евклидовыми плоскостями E^2 [37,42], поэтому «ячейку» в $\{6, 3, 3\}$ можно рассматривать как евклидову мозаику $\{6, 3\}$.

Мультипликативная группа Y' состоит из 120 элементов-*икосианов*:

$$\tfrac{1}{2}(\pm 2, 0, 0, 0)^A, \quad \tfrac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)^A, \quad \tfrac{1}{2}(0, \pm 1, \pm\sigma, \pm\tau)^A, \qquad (1)$$

где A означает, что разрешены все четные перестановки координат, $\sigma = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, $\tau = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Икосиан — это *кватернион* $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ принадлежат полю золотого сечения $Q(\tau) = \{a + b\sqrt{5}\}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Сопряженный квантернион $\bar{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$ и $q\bar{q} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$. Кольцо икосианов $\mathfrak{I}$ — это множество всех конечных сумм $q_1 + \ldots q_t + \ldots + q_n$, где каждый q_t — икосиан, определяемый формулой (1).

Для группы $[3, 3, 5]$ политопа $\{3, 3, 5\}$ и ее подгруппы вращений $[3, 3, 5]^+$ справедливы следующие коды:

$$\begin{gathered}(R_1 R_2)^3 = (R_2 R_3)^3 = (R_3 R_4)^5 = Q^6 = P^{10} = (PQ^3)^2 = 1 \\ (R^3 S^5)^2 = (R^5 S^3)^2 = R^{15} = S^{15} = Z, \qquad R^3 \leftrightarrow S^3, R^5 \leftrightarrow S^5,\end{gathered} \qquad (2)$$

где R_1, R_2, R_3, R_4 — порождающие плоскости отражений $R_1 R_2 R_4 = Q \subset [3, 3, 5] \supset P = R_1 R_3 R_4$; $R_1 R_2 R_3 R_4 = R \subset [3, 3, 5]^+ \supset S = R_2 R_3 R_4 R_1$, $15 = h/2$, $h = 30$ — число ребер в многоугольнике Петри политопа $\{3, 3, 5\}$; элемент Z порядка 2 содержится и в $[3, 3, 5]^+$, и в Y' [36]. В неприводимые системы образующих группы $[3, 3, 5]$ входят лишь элементы Q и P или $Q(P)$ и $R(S)$.

Пусть $e_1, , \ldots, e_9$ — ортобазис в E^9, тогда векторы $(e_1 - e_2, \ldots e_7 - e_8, \frac{1}{8}(\sum_{k=4}^{8} e_k - 5\sum_{k=1}^{3} e_k) + \frac{3}{\sqrt{7}} e_9)$ в E^8 образуют кристаллографическую решетку E_8 — плотнейшую упаковку 7-мерных сфер S^7 в E^8. Первая координационная сфера E^8 состоит из множества 240 вершин полурегулярного *политопа Госсета* $\{4_{21}\}$, которое распадается на 10 эквивалентных подмножеств, каждое из которых принадлежит S^3 и не пересекает 9 остальных. Фактически, это есть *расслоение Хопфа* S^7 со слоем S^3 и базой S^4, которую образуют 10 точек. В каждом слое 24 точки образуют политоп $\{3, 4, 3\}$, который сам представляет собой расслоение Хопфа S^3 со слоем S^1 (рис. 6, *б*), содержащим четыре точки и базой S^2, содержащей шесть точек — вершин октаэдра. Каждая точка расслоения для $\{4_{21}\}$ имеет 8 ближайших. Множество точек (не более чем по

одной из каждого слоя), в котором пары точек из смежных слоев являются ближайшими в расслоении, называется сечением расслоения. Для 6 точек базы расслоения Хопфа для $\{3, 4, 3\}$ глобального сечения не существует, но для 5 точек имеются локальные сечения. Пусть P точка $^1/_{\sqrt{5}}(1, 1, 1, 1, 1)$, находящаяся на равном расстоянии от 5 из 10 точек базы, определяет 4-мерную гиперплоскость E^4, тогда отображение $\{4_{21}\}$ на E^4 означает отображение на эту 10 политопов $\{3, 4, 3\}$, которые по 5 попадают на сферы S^3 (радиуса 1 и τ) образуя два концентрических политопа $\{3, 3, 5\}$:

$$\{4_{21}\} \leftrightarrow \{3, 3, 5\} \cup \tau\{3, 3, 5\} \tag{3}$$

3. Решетки корней, двоичные коды [34, 40–42]

Группа отражений может быть компактно описана с помощью *диаграммы Коксетера–Дынкина*, представляющей собой граф, каждая вершина которого соответствует отражающей плоскости и две вершины соединены ребром с отметкой p, если угол между соответствующими плоскостями равен $\frac{\pi}{p}$. Для ребер с малыми значениями p обычно употребляются определенные сокращения:

Для *кристаллографических* групп отражений p принимает значения только 2, 3, 4, 6, так как лишь эти группы связаны с кристаллографическими решетками.

Каждая отражающая гиперплоскость определяется перпендикулярным к ней вектором, называемым *корневым вектором* (или просто *корнем*). Корневые векторы, перпендикулярные к стенкам фундаментальной области, называются *простыми*, или *фундаментальными корнями*, а все множество корней называется *системой корней*. Решетка, порожденная системой корней, называется *решеткой корней*, фундаментальные корни образуют ее целочисленный базис.

Обратно, если задана решетка, определим ее *корень* (*корневой вектор*) r как вектор, для которого отражение $x \to x - 2(x \cdot r / r \cdot r)r$ является симметрией решетки. Если решетка целочисленна и унимодулярна, то корни суть в точности векторы решетки нормы 1 и 2, они называются соответственно *короткими* и *длинными* корнями решетки.

Все неразложимые конечные системы корней, а следовательно, и все неразложимые конечные кристаллографические группы отражений представлены на рис. 7. В первом столбце приводятся название системы (ре-

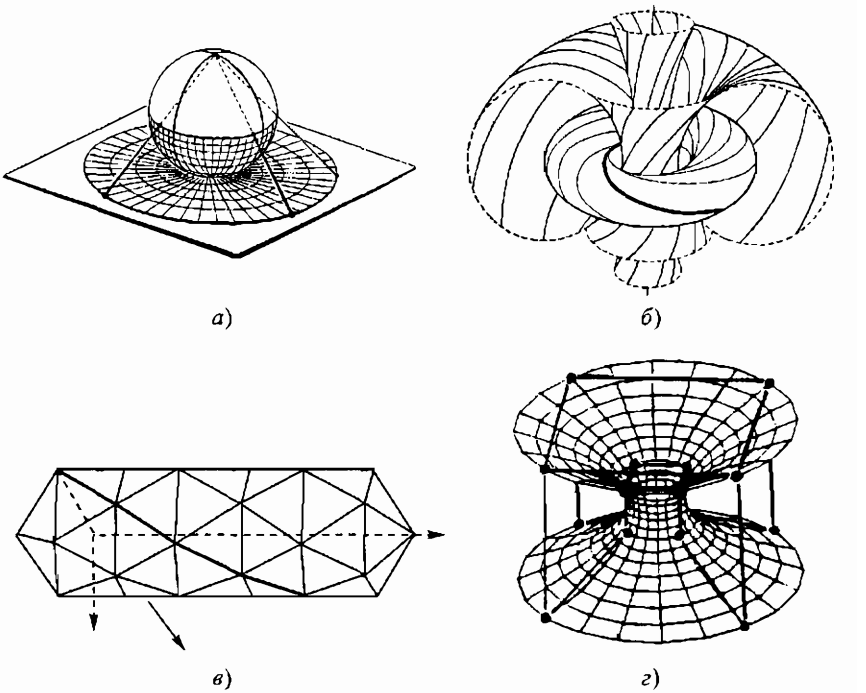
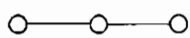


Рис. 6. Стереографическая проекция сферы S^2 на E^2 и политопы [24]. *а*) Стереографическая проекция сферы S^3 на E^3. *б*) Стереографическая проекция S^3 на E^3 как семейство торов в E^3, которые склеены по своим окружностям Вилларсо, одна из которых выделена жирной линией. Множество всех окружностей Вилларсо реализует расслоение Хопфа для S^3. *в*) Стержень из икосаэдров с общей осью 5-го порядка, на котором жирной линией выделена часть спирали, определяемой осью 10_1 политопа $\{3, 3, 5\}$. При замыкании стержня в тор эта спираль «замкнется» в выделенную в (*б*) окружность Вилларсо. *г*) Все 16 вершин политопа $\{4, 3, 3\}$ (рис. 5, *б*) лежат на одной тороидальной поверхности, а каждая из четырех четверок вершин — на своей окружности Вилларсо.

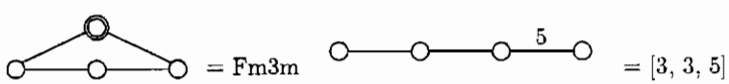
шетки) корней, во втором обозначения группы отражений, порожденной корнями этой системы, а в третьем — порядок этой группы. В четвертом столбце приведены диаграммы Коксетера – Дынкина, задающие простые корни Π кристаллографических решеток, отражения относительно которых порождают соответствующую конечную группу отражений W. За-

даваемая диаграммой Коксетера – Дынкина *точечная группа Вейля* W «размножает» множество простых корней Π до всей системы корней Δ. В пятом столбце показано «вложение» диаграмм Коксетера – Дынкина некристаллографических решеток H_2, H_3, H_4 в диаграммы решеток A_4, D_6, E_8. Длины корней определяются соглашением, что k-кратное ребро, стрелка на котором (если она есть) направлена от корня r к корню s, задает условие $N(r) = kN(s)$. Системы корней A_2, B_2, G_2, B_3, A_3 изображены на рис. 8. Бесконечная (*евклидова*) *группа отражений*, иногда называемая *аффинной группой Вейля*, получается присоединением к W всех сдвигов на корневые векторы. Это также группа отражений, диаграмма которой получается добавлением еще одной вершины (называемой *расширяющей вершиной*) к диаграмме для конечной группы.

Симплекс E^3 — это правильный тетраэдр $\{3, 3\}$, который отображается на себя группой отражений $[3, 3] = 4\bar{3}m$ с диаграммой Коксетера – Дынкина:



Посредством добавления еще одной порождаемой гиперплоскости, обозначаемой на диаграмме двойным кружком, $[3, 3]$ может быть расширена до бесконечной евклидовой группы отражений — федоровской группы Fm3m или до (некристаллографической) точечной группы отражений $[3, 3, 5]$ решетки H_4 (политопа $\{3, 3, 5\}$):



ГЦК-решетка совпадает с решеткой корней $A_3 = D_3$, при этом 12 векторов ее первой координационной сферы образуют систему корней D_3, а 18 векторов второй — систему корней C_3 (рис. 8, *в*).

Каждый корень β в системе корней Δ с базисом Π может быть представлен в виде: $\beta = \sum\limits_{\alpha} k_\alpha \alpha$, $\alpha \in \Pi$, где k_α — неотрицательные (неположительные) целые числа. Корень $\beta \in \Delta$ называется положительным (относительно Π) при $k_\alpha \geqslant 0$ и отрицательным при $k_\alpha \leqslant 0$. При фиксированной Π:

$$\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-, \tag{4}$$

где $\Delta^- = -\Delta^+$, $\Delta^+(\Delta^-)$ — система положительных (отрицательных) корней.

Гранецентрированная кубическая решетка D_3 — плотнейшая решетчатая упаковка шаров в E^3, определяется двоичным линейным кодом $C = \{000, 011, 101, 110\}$, состоящем из 3-х слоев длины $n = 3$,

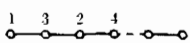
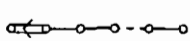
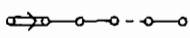
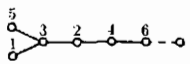
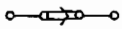
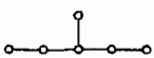
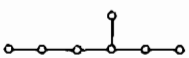
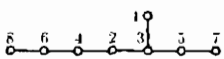
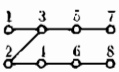
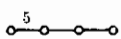
Система (решетка) корней	Обозначение группы отражений	Порядок группы	Диаграмма Коксетера-Дынкина	Вложение систем H_0 в A_4, D_6, E_8	
$A_n\,(A_n)$	$[3^{n-1}]$	$(n+1)!$			A_4
$B_n\,(Z^n)$	$[3^{n-1},4]$	$2^n\cdot n!$		[5]	H_2
$C_n\,(D_n)$	$[3^{n-2},4]$	$2^n\cdot n!$			
$D_n\,(D_n)$	$[3^{n-3,1,1}]$	$2^{n-1}\cdot n!$			D_6
$G_2\,(A_2)$	$[6]$	12		[3, 5]	H_3
$F_4\,(D_4)$	$[3,4,3]$	1152			
$E_6\,(E_6)$	$[3^{2,1,1}]$	$2^7\cdot 3^4\cdot 5$			
$E_7\,(E_7)$	$[3^{3,2,1}]$	$2^{10}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$			
$E_8\,(E_8)$	$[3^{4,2,1}]$	$2^{14}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7$			E_8
				 [3, 3, 5]	H_4

Рис. 7. Неразложимые кристаллографические системы корней и вложения некристаллографических систем H_n, $n = 2, 3, 4$ в кристаллографические системы A_4, D_6, E_8. Конечные группы отражений и соответствующие им диаграммы Коксетера – Дынкина [34, 41].

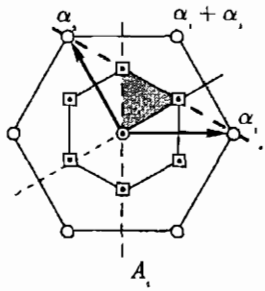
которые содержат по $d = 2$ единицы, и нулевого слоя. Для кода C число слоев $A_d(0)$, отличающихся от нулевого слоя не менее чем в d координатах, равно 3. В общем случае, если $d < 4$, ближайшими к началу координат центрами шаров являются $2^d A_d(0)$ векторов вида $2^{-1/2}(\pm 1)^d 0^{n-d}$, полученных из кодовых слоев веса d. Для таких центров квадрат расстояния от начала координат составляет $d/2$. Если $d > 4$, то ближайши-

ми к началу координат являются $2n$ центров типа $(\pm\sqrt{2})1^{n-1}$, квадрат расстояния от которых до начала координат равняется 2. Наконец, если $d = 4$, оба множества центров находятся на одинаковом расстоянии от начала координат. Поэтому число шаров, касающихся шара с центром в нуле, равно

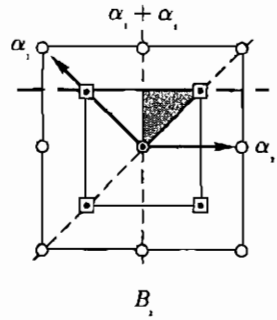
$$\tau = \begin{cases} 2^d A_d(0), & \text{если } d < 4 \\ 2n + 16A_d(0), & \text{если } d = 4 \\ 2n, & \text{если } d > 4 \end{cases} \tag{5}$$

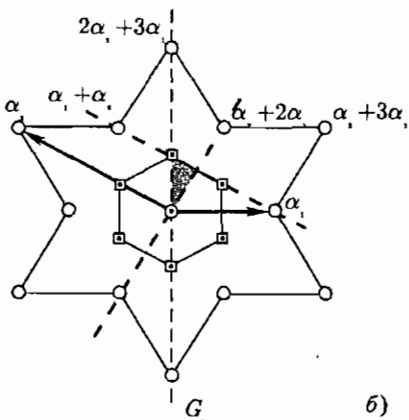
[7, 4, 3]-код Хэмминга $\mathscr{H}_7$ — это двоичный код длины 7, с весовым спектром $A_0 = 1$, $A_3 = A_4 = 7$, $A_7 = 1$; т.е. он включает 7 слоев веса 3, 7 слоев веса 4 и по одному слою веса 0 и 7. Сокращенно это записывается в виде: $0^1 3^7 4^7 7^1$ и означает, что $\mathscr{H}_7 = \{(0000000), (1101000)\ldots(1011100)\ldots(1111111)\}$. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathscr{H}_7)$ — это *группа Клейна* порядка $168 = 4 \cdot 6 \cdot 7$. *Расширенный* [8, 4, 4] — *код Хэмминга* $\mathscr{H}_8$ получается добавлением к $\mathscr{H}_7$ проверки на четность. Весовой спектр кода $\mathscr{H}_8$ равен $0^1 4^{14} 8^1$, а группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathscr{H}_8)$ — аффинная группа порядка $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 1344$. Применяя конструкцию A к $\mathscr{H}_7$, получим $E_7 \cong \Lambda_7$ — плотнейшую решетчатую упаковку в E^7 с $\tau = 2 \cdot 7 + 16 \cdot 7 = 126$. Применяя конструкцию A к $\mathscr{H}_8$, мы получим $E_8 \cong \Lambda_8$ — плотнейшую решетчатую упаковку в E^8 с $\tau = 2 \cdot 8 + 14 \cdot 16 = 240$. Таким образом, решетка E_8 получается применением конструкции A к коду Хэмминга $\mathscr{H}_8$; минимальные векторы (после перенормировки) суть $24 \cdot 14 = 224$ вектора вида $(\pm{}^1/_2, \pm{}^1/_2, \pm{}^1/_2, \pm{}^1/_2, 0, 0, 0, 0) = ((\pm{}^1/_2)^4, 0^4)$ и 16 векторов вида $(\pm 1, 0^7)$.

Таблица инцидентности конечной проективной плоскости $\mathrm{PG}(2, q)$ представляет собой частный случай ($t = 2, \lambda = 1$) блок-схемы $t - (v, k, \lambda)$, определяемой следующими соотношениями: в каждой строке длины v таблицы $t - (v, k, \lambda)$ имеется ровно k знаков инцидентности; для любых t столбцов существует ровно λ строк, пересекающих каждый из этих столбцов по квадратам, содержащим знак инцидентности; все столбцы содержат одно и то же число знаков инцидентности. Если знак инцидентности считать 1 (единицей), а отсутствие знака — 0, то при $\lambda = 1$ блок-схема $t - (v, k, \lambda)$ совпадает с системой Штейнера $\mathrm{S}(t, k, v)$ двоичного кода, т.е. замкнутым подмножествам его слоев длины и веса k (состоящих из k единиц и $v - k$ нулей). Так, например, ТИ $\mathrm{PG}(2, 2)$ — это блок-схема $2 - (7, 3, 1)$ или система Штейнера $\mathrm{S}(2, 3, 7)$. Действительно, для любых двух столбцов ТИ $\mathrm{PG}(2, q)$, всегда найдется одна строка, которая пересекает их по знакам инцидентности (т.к., согласно аксиоме 1 проективной геометрии, для любых двух различных точек

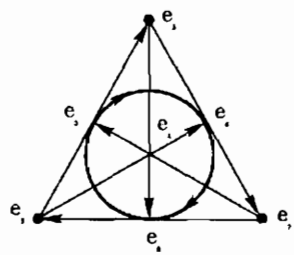

α_1
$\alpha_1+\alpha_2$
α_2
A_2

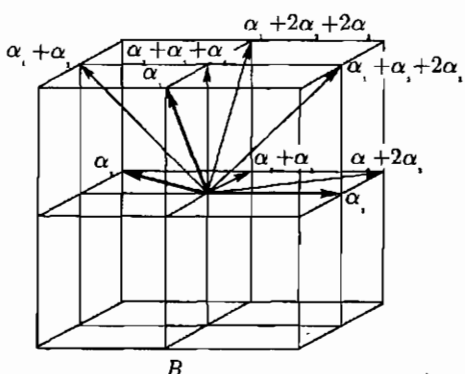
а)


$\alpha_1+\alpha_2$
α_1
α_2
B_2

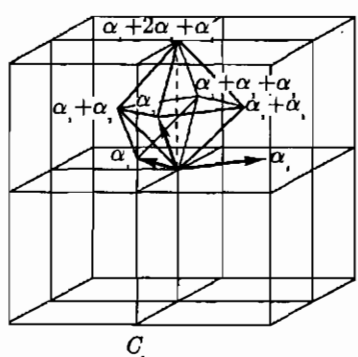

$2\alpha_1+3\alpha_2$
α_1
$\alpha_1+\alpha_2$
$\alpha_2+2\alpha_1$
$\alpha_1+3\alpha_2$
α_2
G_2

б)


e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6


$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$
$\alpha_1+\alpha_2$
$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$
α_3
$\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$
α_2
$\alpha_2+\alpha_3$
$\alpha_2+2\alpha_3$
α_1
B_3

в)


$\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_1$
$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$
$\alpha_1+\alpha_2$
α_3
$\alpha_2+\alpha_3$
α_2
α_1
C_3

существует единственная инцидентная им прямая). $S(2, 3, 7)$ — это 7 слоев веса 3 в коде Хэмминга $\mathscr{H}_7$.

II. Конфигурации и определяемые ими порождающие кластеры алмазоподобных структур

1. Параллелоэдр алмаза и другие 14-вершинные кластеры как евклидовы реализации подконфигураций конфигурации Фано 7_3

Осуществляемое $\mathrm{PG}(2, q)$ выделение подгрупп симметрической группы S_n, $n = q^2 + q + 1$, возможно и в рамках теории геометрических графов. Геометрический граф — это фигура, составленная из вершин и соединяющих их ребер. Каждое ребро соединяет ровно две различные точки, две точки соединяются не более чем одним ребром. Если в вершине сходится k ребер, то эта вершина имеет степень k. Если все вершины графа имеют одну и ту же степень k, то граф — регулярный, степени k (рис. 9, *г*). Длина кратчайшего цикла графа называется его обхватом, а цикл, проходящий через каждую точку графа — гамильтоновой цепью. (Граф с гамильтоновой цепью — граф Гамильтона). Если множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества (черных и белых точек) таким образом, что любое ребро соединяет точки разных подмножеств (черную и белую), то граф называется бихроматическим. Регулярный граф степени k и обхвата l, имеющий наименьшее число точек, обозначается через $\Gamma(n, k, l)$.

Для проективной геометрии справедлив *принцип двойственности*: если всюду поменять слова «точка» и «прямая», все определения и теоремы не изменятся. Этот принцип позволяет по таблице инцидентности для $\mathrm{PG}(2, q)$ построить граф, являющийся моделью $\mathrm{PG}(2, q)$. Для

Рис. 8. Системы корней [60]. *а, б*) Системы корней A_2, B_2, G_2 и схема, задающая таблицу умножения (направление стрелок указывает знак произведения) базисных векторов октавы. Фундаментальный симплекс группы отражений зачернен, плоскости отражений, образующие его стенки, показаны пунктиром, а плоскость, образующая его крышу — жирным пунктиром. Вершины многоугольника Дирихле начала координат показаны квадратиками. *в*) Подсистемы положительных корней B_3 и C_3, содержащиеся в примитивной и гранецентрированной кубических решетках. Без вектора α_3 подсистема C_3 определяет одношапочный октаэдр — октаэдр с тетраэдром $(0, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, стоящим на его грани. Простые (фундаментальные) корни на всех рисунках показаны жирными стрелками.

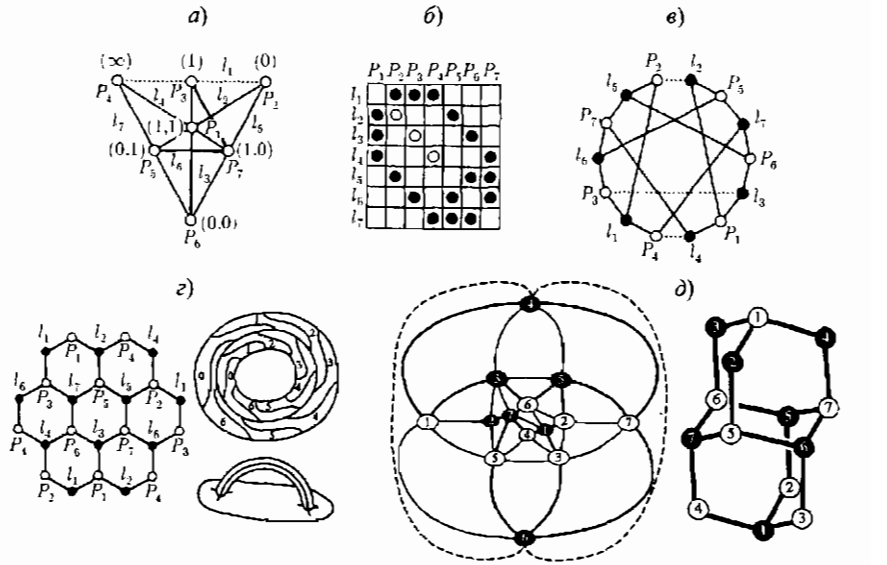


Рис. 9. Конечная проективная плоскость PG(2, 2) или самодуальная конфигурация Фано 7_3 [35,46], стереографическая проекция нерегулярной карты $\{6, 3\}^3_{2,1}$. *а*) Графическая модель конечной проективной плоскости PG(2, 2). Параллельные прямые l_2, l_5; l_3, l_6; l_7, l_4 пересекаются в идеальных точках 0, 1, ∞, образующих бесконечно удаленную прямую l_1. Диагональные «прямые» l_3 и l_6 показаны жирными линиями. *б*) Таблица инцидентности PG(2, 2), которая без показанных пустыми кружками знаков инцидентности является ТИ подконфигурации $\{7_3\}^3$. *в*) Граф инцидентности подконфигурации 7_3, который без показанных пунктиром ребер, соответствующих звеньям P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, прямых l_2, l_3, l_4 в *а*) и пустым кружкам в *б*), представляет собой граф инцидентности подконфигурации $\{7_3\}^3$ конфигурации 7_3. *г*) Граф инцидентности PG(2, 2) как регулярная, бихроматическая карта $\{6, 3\}_{2,1}$ на торе, имеющая 14 вершин, 21 ребро, 7 гексациклов; и его представление сферой с ручкой, которая имеет форму изогнутой треугольной призмы. *д*) Стереографическая проекция 14-вершинного разбиения сферы на гексациклы к которому приводит отбрасывание ручки в торе *г*). Разбиение *д*) определяется нерегулярной картой $\{6\ 3\}^3_{2,1}$, имеющей на 3 ребра и 1 гексацикл меньше по сравнению с картой $\{6, 3\}_{2,1}$ *г*). Триангуляция сферы показана тонкими линиями, состоящие из 4-х треугольников гексациклы — жирными. Разбиение *д*) определяет граф 14-вершинного кластера алмаза.

этого точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и прямые $l_1, l_2, \ldots, l_n$, $n = q^2 + q + 1$ плоскости PG(2, q) примем за белые и черные вершины графа, а ребрами будем соединять те и только те пары из одной светлой и одной темной точки, для которых в пересечении соответствующей строки l_i и столбца P_j содержится знак инцидентности, таким образом, мы получим граф степени $q+1$, состоящий из $2(q^2+q+1)$ вершин и $(q+1)(q^2+q+1)$ ребер. Можно показать, что обхват этого графа равен 6, он является гамильтоновым и имеет наименьший возможный порядок. Итак, по таблице инцидентности можно построить эквивалентный ей граф $\Gamma(2(q^2 + q + 1), (q + 1), 6)$, который является моделью PG(2, q).

Вышеизложенное можно сформулировать в виде теоремы: Граф инцидентности PG(2, q) является регулярным бихроматическим гамильтоновым графом степени $q + 1$ и обхвата 6, имеющим наименьший возможный порядок [35]. Графы инцидентности PG(2, q) при $q = 2, 3$ (графы Леви самодуальных конфигураций 13_4 и 7_3) приведены на рис. 4, *б*, 9, *в*, *г*.

Граф называется симметричным, если группа его автоморфизмов транзитивна как на множестве вершин, так и на множестве ребер. Согласно [36], все простейшие симметричные графы, по-видимому, можно вложить в подходящие поверхности так, чтобы они составили правильные карты. (Напоминаем, что в отличие от графа, в котором возможно пересечение ребер, *карта* — это разбиение поверхности S на N_2 непересекающихся односвязных областей N_1 ребрами, которые не имеют общих внутренних точек и объединяют в пары некоторые из N_0 вершин).

Пусть $\Gamma(N_0, k, 6)$, $N_0 \leqslant 2(q^2 + q + 1)$, $k \leqslant q + 1$ — максимальный симметричный подграф графа инцидентности $\Gamma(2(q^2 + q + 1), q + 1, 6)$ конечной проективной плоскости PG(2, q). Если числами вершин, ребер и гексациклов графа $\Gamma(N_0, k, 6)$ являются $N_0 = 12\mu$, $N_1 = 6k\mu$, $N_2 = 2k\mu$, где $\mu = \chi/4(3 - k)$, χ — эйлерова характеристика поверхности S в E^3, то $\Gamma(N_0, k, 6)$ может быть представлен в форме правильной карты $\{6, k\}_r$ на S. В соответствии с четностью или нечетностью r поверхность S является ориентируемой (сфера с ручками) или неориентируемой (сфера со скрещенными колпаками). Символ $\{6, k\}_r$ означает, что карта составлена из гексагонов, в каждой вершине сходятся k из них, а сама карта получена из примитивной мозаики $\{6, k\}$ отождествлением тех пар ее вершин, которые разделены r шагами вдоль многогоугольника Петри — «зигзага» из h ребер, в котором любые две, но не три последовательные стороны принадлежат одной грани (рис. 5 *а*, *б*). В общем случае всякую регулярную карту $\{p, q\}_r$ на поверхности S можно «развернуть» так, что она составит часть правильной мозаики: при $(p - 2)(q - 2) < 4$ — сферической, при $(p - 2)(q - 2) = 4$ — евклидовой, при

$(p-2)(q-2)>4$ — гиперболической. Примеры таких мозаик приведены на рис. 1 *в, г* [36, 37].

Общим примером вышеизложенного может служить граф $\Gamma(2\cdot 13, 4, 6)$ плоскости PG(2, 3) (рис. 2, 4 *б*), который нельзя представить в форме правильной карты, но это возможно, например, для его подграфа $\Gamma(2\cdot 9, 3, 6)$, который может быть представлен правильной картой $\{6, 3\}_{3,0}$. Граф же инцидентности $\Gamma(2\cdot 7, 3, 6)$ плоскости PG(2, 2) может быть представлен и как граф Хивуда [43] — карта $\{6, 3\}_{2,1}$ на торе (рис. 9 *г*).

Автоморфизмы карты, образующие ее группу, сохраняют отношение инцидентности для любых двух вершин ребра, инцидентные одной из них, соответствуют ребрам, инцидентным другой, в том же самом (или противоположном) циклическом порядке. Таким образом, группа автоморфизмов карты $\{6, k\}_r$ является подгруппой группы коллинеаций и корреляций плоскости PG(2, q), например, группа автоморфизмов конфигурации 10_3 — подгруппа индекса $2\cdot 26$ в группе коллинеаций и корреляций PG(2, 3) порядка $2\cdot 5616$ [35].

Две карты называются элементарно-подобными, если они могут быть преобразованы друг в друга посредством конечного числа элементарных операций: одномерного подразделения (новая вершина разбивает ребро на 2) и обратной ей операции одномерного укрупнения; двумерного подразделения (новое ребро разбивает грань на 2) и обратной операции двумерного укрупнения. Элементарными операциями во всякой карте могут быть выделены ручки [43]. Так, например, в регулярной карте на торе может быть выделена ручка, представимая в виде изогнутой k-угольной призмы, дополняющей сферу до тора [37]. Удаление этой ручки (т. е. k ребер в регулярной карте на торе) приводит к образованию на оставшейся сфере нерегулярной карты. Если регулярные разбиения сферы — это тела Платона, то нерегулярные — «сферические *тела Каталани*», дуальные *телам Архимеда*. Например, в кубооктаэдре (теле Архимеда) грани двух типов, но в каждой вершине их схождение одинаково; в ромбододекаэдре (тело Каталани) все грани ромбы, но в вершинах они сходятся по 3 и по 4.

Среди подконфигураций плоскости PG(2, q) возможны и такие, граф инцидентности которых представим лишь нерегулярной картой, осуществляющей разбиение S с различным числом гексагонов у каждой вершины. Такой нерегулярной картой является, в частности, карта, получаемая из регулярной карты $\{6, 3\}_{b,c}$ на торе с $N_2=b^2+bc+c^2$, $N_1=3N_2$, $N_0=2N_2$. Удалив из нее $k=3$ ребра, мы получим на сфере нерегулярную карту $\{6, 3\}^3_{b,c}$ со свойственной сфере эйлеровой характеристикой:

$$\chi\left(\{6, 3\}^3_{b,c}\right)=2N_2-3(N_2-1)+(N_2-1)=2, \qquad (6)$$

где $2N_2$, $3(N_2-1)$ и (N_2-1) — число вершин, ребер и гексациклов $\{6,3\}^3_{b,c}$. Если вершины карты $\{6,3\}^3_{b,c}$ соединены ρ внутренними ребрами, протыкающими сферу, то для такой карты $\chi = 2-\rho$, и мы будем обозначать ее $\{6,3\}^{3,\rho}_{q,l}$.

Как объединение D_3^+ двух конгруэнтных ГЦК-решеток D_3, структуру алмаза можно рассматривать как регулярный бихроматический граф $\Gamma(D_3^+)$ бесконечного порядка, степени 4 и обхвата 6. Ребра этого графа не пересекаются, поэтому общий подграф $\Gamma(D_3^+)$ и $\Gamma(2(q^2+q+1), q+1, 6)$ должен совпасть с нерегулярной картой $\{6,3\}^{3,\rho}_{q,1}$. Алмаз — это объект евклидовой геометрии, PG$(2,q)$ — конечной проективной геометрии, следовательно, кластер алмаза с графом

$$\big(\Gamma(2(q^2+q+1), q+1, 6)\cap\Gamma(D_3^+)\big) \leftrightarrow \{6,3\}^{3,\rho}_{q,1}, \qquad (7)$$

является объектом конечной проективной геометрии, рассматриваемом в евклидовой геометрии [32]. Наличие не более 4-х связей в вершине кластера заведомо реализуется при $q=2,3$; поэтому, в силу (6), можно утверждать, что кластеры алмаза с графами $\{6,3\}^{3,\rho}_{q,1}$, $q=2,3$ обладают «оставшейся» от PG$(2,q)$ и в E^3 дополнительной «сверхъевклидовой» симметрией, адекватное отображение которой возможно лишь на уровне групп коллинеаций.

Граф инцидентности однозначно определяет PG$(2,2)$ или самодуальную конфигурацию Фано $(7_3,7_3)=7_3$, поэтому карта $\{6,3\}^3_{2,1}$, $\rho=0$ определяет ее самодуальную подконфигурацию, также состоящую из 7 точек и 7 прямых, но с различным числом (3 и 2) прямых, проходящих через 4 и 3 точки и, соответственно, с различным числом точек (3 и 2) на 4-х и 3-х прямых. Если PG$(2,2)$ соответствует «нормальная» таблица инцидентности, содержащая 21 зачерненный кружок (21 ребро в карте $\{6,3\}_{2,1}$), то такой ее подконфигурации будет соответствовать таблица с 18 зачерненными кружками (18 ребер в карте $\{6,3\}^3_{2,1}$) и 3 белыми кружками, соответствующими 3-м удаленным из $\{6,3\}_{2,1}$ ребрам (рис. 9, *а*, *б*, *в*).

Рассматриваемую самодуальную подконфигурацию можно обозначить как $(1_3+3_2+3_3,\ 1_3+3_2+3_3)=1_3+3_2+3_3$, т. к. 7 эквивалентных в 7_3 точек распадаются на три подмножества: через 1 точку проходят 3 прямых, на которых лежат по 2 точки; через 3 точки проходят по 3 прямых, на которых лежат по 3 и 2 точки; наконец, через 3 точки проходят по 2 прямых, на которых лежат по 3 точки. Такая форма записи самодуальной подконфигурации фактически определяет карту $\{6,3\}^3_{2,1}$. Действительно, в этой карте должно быть $2(1+3+3)=14$ вершин и

$1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 18$ ребер; при этом одна белая вершина связана с 3 черными, каждая из которых имеет по 2 связи; у 3-х белых вершин по 3 связи с черными вершинами, не все из которых имеют по 3 связи; у 3-х белых вершин по 2 связи с черными вершинами.

Рассмотрим, чему соответствует переход от 7_3 к $1_3 + 3_3 + 3_2$, осуществляемый удалением трех ребер в графе инцидентности PG(2, 2), т.е. заменой трех «полных» знаков инцидентности на «пустые» клетки в таблице инцидентности PG(2, 2) (рис. 9, *б*). На рис. 9, *а* идеальные точки 0, 1, ∞ составляют идеальную прямую; 0 и евклидовы точки (0, 0), (1, 0) и (0, 1), (1, 1) — 2 прямые 1-го семейства; ∞ и евклидовы точки (0, 0), (0, 1) и (1, 0), (1, 1) — 2 прямые 2-го семейства; 1 и евклидовы точки (1, 0), (0, 1) и (1, 1), (0, 0) — 2 «прямые» диагонального семейства. Согласно аксиоматике PG(2, q), прямые каждого семейства параллельны и сходятся в лежащих на бесконечности точках идеальной прямой. Переименовав точки 0, 1, ∞ в P_2, P_3, P_4, а (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) в P_6, P_5, P_7, P_1; идеальную прямую в l_1, а прямые 1-го, 2-го и диагонального семейств в l_5, l_2; l_7, l_4, l_6, l_3; мы получим таблицу инцидентности PG(2, 2) (рис. 9, *б*). На каждой из прямых лежат по 3 точки, таким образом, прямая состоит из двух звеньев, каждому из которых соответствует ребро в графе инцидентности и «полный» знак инцидентности в таблице (рис. 9, *б*). Удаление ребра графа или замена полного знака инцидентности пустым означает уничтожение соответствующего звена прямой. Подконфигурации $1_3 + 3_2 + 3_3$ соответствует уничтожение звеньев прямых l_2, l_3, l_4 между точками P_1 и P_2, P_3, P_4. Но в этом случае параллельные прямые l_2 и l_5, l_4 и l_7, l_3 и l_6 не будут пересекаться (в идеальных точках P_2, P_4, P_3), таким образом, мы перешли от проективной к евклидовой геометрии, в которой параллельные прямые не пересекаются. Иными словами, переход от 7_3 к $1_3 + 3_2 + 3_3$ — это переход от проективной к евклидовой трактовке (*евклидову представлению*) PG(2, 2). PG(2, q) — это соответствующая проекция векторов из E^3 на плоскость, поэтому данный переход является определенным «обращением» этой проекции [44]. Если 7_3 отображается на себя группой коллинеаций $L_3(2)$, то $1_3 + 3_2 + 3_3$ будет отображаться на себя изоморфной ей группой *«нагруженных» коллинеаций* $L_3^W(2)$. В рамках аппарата *позиционных групп цветной W-симметрии* [5, 7] $L_3^W(2)$ — младшая группа, в силу (7):

$$L_3(2) \leftrightarrow L_3^W(2) \supset L_3(2) \cap L_3^W(2) = 2sL_2(2) \leftrightarrow D_{3d}, \qquad (8)$$

где $L_3(2) = PSL_3(2)$, $L_3(2) \cap L_3^W(2)$ — ее подгруппа симметрии, не являющаяся в общем случае нормальным делителем. (Если бы $L_3(2) \cap L_3^W(2)$ была нормальной подгруппой индекса 2, то $L_3^W(2)$ представляла бы собой

шубниковскую группу *антисимметрии* [5, 7]). *Таким образом, переходу* от 7_3 к $1_3 + 3_2 + 3_3$ соответствует переход от $L_3(2)$ к изоморфной ей $L_3^W(2)$, конкретизирующий *принцип неубывания симметрии*: при переходе от PG(2, 2) в E^3 симметрия не исчезает, а видоизменяется [6]. Граф инцидентности подконфигурации $1_3 + 3_2 + 3_3$ определяет нерегулярное разбиение $\{6, 3\}^3_{2,1}$, сферы на гексогоны, которое при условии равенства ребер и углов между ними реализуется в E^3 как кластер алмаза (рис. 9, *д*). Впервые этот кластер из структуры алмаза был выделен в [13]; он представляет собой подробно описанный в [44,45] невыпуклый *параллелоэдр алмаза*.

2. Конфигурация Мебиуса – Кантора 8_3 и объединение двух полиэдров Бернала Z8 [35–37, 44–47]

Граф инцидентности 8_3 представляет собой бихроматический граф $\{8\} + \{8/3\}$ степени 3 и обхвата 6 (рис. 10, *а*) и совпадает с регулярной картой $\{4 + 4, 3\}$, состоящей из $N_2 = 6$ октагонов на сфере с двумя ручками S_2. Характеристика Эйлера для этой карты с $N_0 = 16$ вершинами и $N_1 = 24$ ребрами:

$$\chi = 16 - 24 + 6 = -2 = 2 - 2p, \tag{9}$$

где $p = 2$ — число ручек на поверхности S_p, представляющей собой сферу S_0 с p ручками.

Если каждый октагон в $\{4 + 4, 3\}$ разделить двумя ребрами на 3 четырехугольника, то на S_2 будут размещены $6 \cdot 3 = 18$ четырехугольников, разделенных $24 + 6 \cdot 2 = 36$ ребрами. Карту $\{4 + 4, 3\}$, разбитую на четырехугольники, обозначим через $\{\widetilde{4 + 4}, 3\}$. Отбрасывание ручки в карте $\{4, 4\}_{b,c}$ на торе S_1 приводит к уменьшениям числа ребер на 4, а 4-угольников — на 2, таким образом, если отбросить две ручки у S_2, разбитой на 4-угольники, то это должно привести к карте $\{\widetilde{4 + 4}, 3\}^8$ — разбитой на 4-угольники сфере S_0, на которой ребер и 4-угольников будет на 8 и 4 меньше, чем в $\{\widetilde{4 + 4}, 3\}$. Если у карты $\{\widetilde{4 + 4}, 3\}$ отбросить лишь одну ручку, то мы получим тор S_1, на котором размещена карта $\{4, 4\}_{4,0}$ с 16 вершинами, 32 ребрами и 16 четырехугольниками. Так как отбрасывание общего ребра у двух 4-угольников приводит к образованию гексагона, то от разбиения сферы на 4-угольники мы можем перейти к ее разбиению на гексагоны. Покажем, что разбиение октагонов на 4-угольники на карте $\{\widetilde{4 + 4}, 3\}$ (например, октагон $7'71'23'66'5$ разбивается ребрами $6–1'$ и $6'–7$ на три 4-угольника (рис. 10 *а*)), отбрасывание в $\{\widetilde{4 + 4}, 3\}$ двух ручек и объединение в $\{\widetilde{4 + 4}, 3\}^8$ четырехугольников в

гексагоны приводит к графу ПК 2Z8, содержащему 16 вершин, 21 ребро и 7 гексагонов (рис. 10, *б*):

$$\begin{aligned}
&\{4+4,\ 3\} = \{\widetilde{4+4},\ 3\} : 16 - 24 + 6 = -2 = 16 - 36 + 18;\\
&\{\widetilde{4+4},\ 3\}^8 = \{4,\ 4\}_4^{4(4)} : 16 - (36 - 8) + (18 - 4) = 2 =\\
&\qquad = 16 - (32 - 4) + (16 - 2) = 16 - 28 + 14;\\
&\qquad \Gamma(\text{ПК } 2Z8) : 16 - (28 - 7) + 14/2 = 2 = 16 - 21 + 7,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\{4,\ 4\}_4^{4(4)}$ — карта на S_0, полученная отбрасыванием ручки в карте $\{4,\ 4\}_{4,0}$ на S_1.

Из 12-ти ребер, разбивающих октагоны на 4-угольники в $\{\widetilde{4+4},\ 3\}$ и не принадлежащих графу $\{8\} + \{8/3\}$, 10 ребер будут отброшены при отбрасывании ручек и объединении 4-угольников в гексагоны. Но два ребра, 6–1′ и 7–6′ (рис. 10 *а*), останутся. Т. к. они не принадлежат ТИ 8_3, то на рис. 10, *г* они отмечены крестиками; но т. к. они принадлежат карте $\{\widetilde{4+4},\ 3\}$, то подконфигурация $1_2+2_3+2_2+3_3$, состоящая из зачерненных знаков инцидентности и крестиков, будет геометрической. Иными словами, отбрасывание незачерненных знаков инцидентности позволяет ввести в ТИ 8_3 «крестики» без образования в этой ТИ «запрещенных» прямоугольников, соответствующих циклам из 4-х ребер.

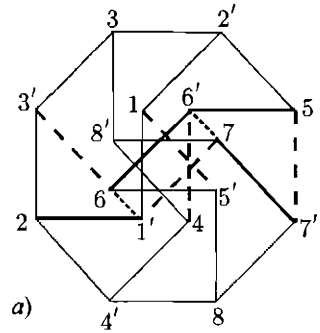
При требовании равенства ребер и углов между ними эта ТИ определяет кластер 2Z8, который может быть получен [44, 45] и из ТИ $(9_3)_2$ (рис. 10, *в*). Кластер 2Z8 представляет собой объединение двух полиэдров Бернала [48, 49], обозначаемых Z8; следовательно, граф полиэдра Бернала Z8 может быть чисто аналитически получен из (10). Как и параллелоэдр алмаза, кластер 2Z8 представляет собой объект проективной геометрии, рассмотренный в E^3.

3. Конфигурации $(9_3)_1$, $(9_3)_2$, $(9_3)_3$, их особые подконфигурации и определяемые ими кластеры [35, 44, 47, 50]

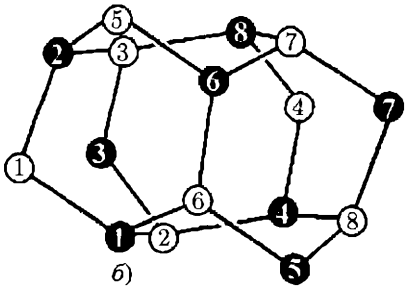
В отличие от единственных реализаций самодуальных конфигураций 7_3 и 8_3 возможны 3 самодуальные конфигурации 9_3: Паппа — $(9_3)_1$ (рис. 11, *а*), трех вписанных друг в друга треугольников — $(9_3)_2$ (рис. 11, *б*) и неправильной конфигурации $(9_3)_3$ (рис. 11, *в*).

Если бихроматический граф ПК осуществляет разбиение сферы на гексациклы, то, применяя теорему Эйлера для многогранников, получаем соотношения:

$$F = {}^1\!/_2(m_1 + n_1) - 1, \qquad E = 3F, \tag{11}$$



а)



б)

	1	2	3	9	5	6	7	8	4
1	●	●				●			
2	●		●		●				
3		●	●						●
9		●		●				●	
5						●		●	●
6					●	●	●		
7	○						●	●	
8			●	●		●			
4				●	●				●

в)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	●	●				x	○	
2	●		●		●			
3		●	●			○		
4		●		●				●
5	○					●		●
6				○	●	●	x	
7					○		●	●
8			●	●			●	

г)

Рис. 10. Кластер 2Z8, определяющие его граф $\{8\} + \{8/3\}$ **и ТИ подконфигураций** 8_3 **и** $(9_3)_2$. *а*) Граф $\{8\} + \{8/3\}$ с двумя не принадлежащими ему ребрами 6–1′ и 7–6′ (цифры со штрихами нумеруют черные вершины), которые показаны точками и делят выделенный жирными линиями октагон 7′71′23′66′5 на три 4-угольника [46]. *б*) 16-вершинный кластер 2Z8, определяемый ТИ подконфигурации $\{8_3\}^{5-2}$ и представляющий собой объединение двух (черного и белого) полиэдров Бернала Z8 двойной осью, которая проходит перпендикулярно середине ребра 6–6′. *в*) ТИ, полученная перестановкой строк и столбцов 4, 9 из ТИ $(9_3)_2$ (рис. 11*б*). Ее подтаблица 8×8 определяет ПК 2Z8 лишь с одной неалмазоподобной связью. *г*) ТИ 8_3, в которой знаки инцидентности, соответствующие показанным пунктиром ребрам графа $\{8\} + \{8/3\}$, изображены пустыми кружками; изображенные крестиками × знаки инцидентности не принадлежат ТИ 8_3 и соответствуют ребрам 6–1′ и 7–6′ графа *а*). С крестиками, но без пустых кружков ТИ 8_3 определяет граф инцидентности подконфигурации $\{8\,3\}^{5-2}$, т. е. граф *а*) без показанных пунктиром ребер.

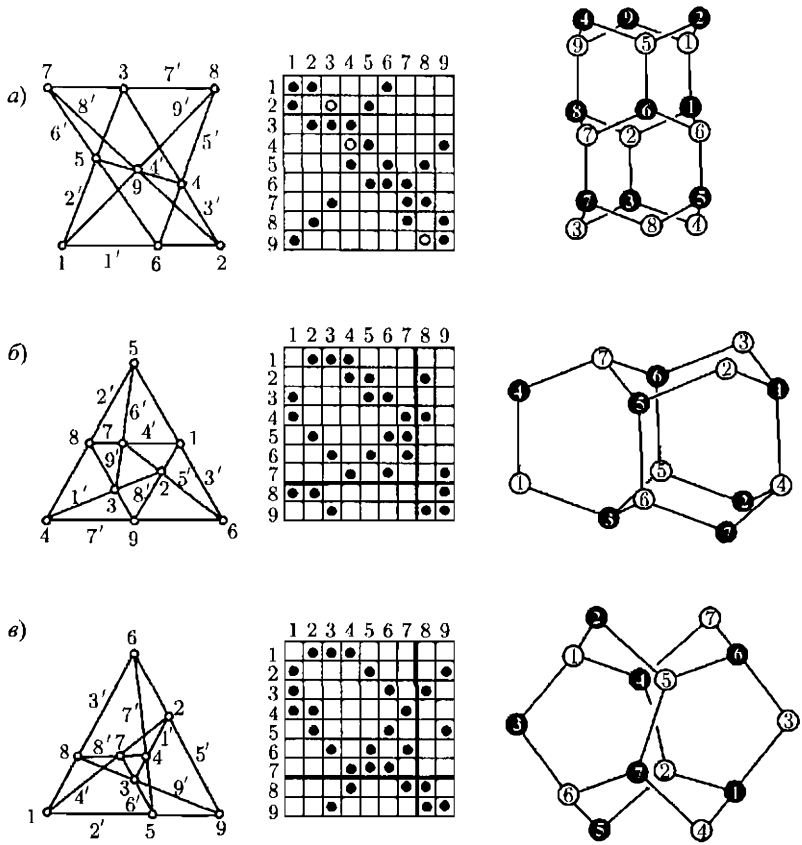


Рис. 11. Конфигурации 9_3 [35, 47], их таблицы инцидентности и определяемые их подтаблицами кластеры алмазоподобных структур. *а*) Конфигурация Паппа $(9_3)_1$, ТИ которой без 3 пустых кружков определяет 18-вершинный кластер лонсдейлита. *б*) Конфигурация $(9_3)_2$ трех вписанных друг в друга треугольников: {7, 2, 3}, {1, 8, 9}, {4, 5, 6}. Жирными линиями выделена подтаблица 7 × 7 ее ТИ определяет ПК лонсдейлита. *в*) Неправильная конфигурация $(9_3)_3$. Выделенная жирными линиями подтаблица 7 × 7 ее ТИ определяет ПК ядра винтовой дислокации в алмазе. Цифры со штрихами нумеруют прямые, которым соответствуют черные вершины кластеров АС.

где m_1 и n_1 — числа белых и черных вершин графа; F — число гексациклов, E — число ребер. Самодуальная конфигурация $n_3 = (n_3, n_3)$ может быть представлена в форме $((m_1 + m_2)_3, (n_1 + n_2)_3)$, позволяющей выделить в ТИ n_3 подтаблицу $m_1 \times n_1$. Если эта подтаблица содержит не менее $3(\frac{1}{2}(m_1 + n_1) - 1)$ знаков инцидентности и в каждой строке и столбце их не менее двух, то в силу (11) такая подтаблица ТИ должна определять ПК либо непосредственно, либо при последующем отбрасывании в ней отмеченных пустыми кружками знаков инцидентности.

Наиболее простой случай $m_2 = n_2 = 0$ иллюстрирует пример конфигурации Паппа $(9_3)_1$, ТИ которой без трех пустых кружков (т.е. ТИ подконфигурации $\{(9_3)_1\}^3$) определяет 18-вершинный кластер лонсдейлита с восемью гексациклами (рис. 11, *а*).

Вариант $m_2 = n_2 = 2$ реализуется для конфигурации $(9_3)_2 = ((7 + 2)_3, (7 + 2)_3)_2 = ((7 + 2)_3)_2$, подтаблица 7×7 ТИ которой однозначно определяет 14-вершинный ПК лонсдейлита с шестью гексациклами: двумя креслами и четырьмя ваннами (рис. 11, *б*). Подконфигурацию $(9_3)_2$ с такой ТИ будем обозначать $((7 \cup 2)_3)_2$. Аналогично, подконфигурация $((7 \cup 2)_3)_3$ конфигурации $(9_3)_3$ однозначно определяет 14-вершинный ПК ядра винтовой дислокации в алмазе [10] с шестью гексациклами: двумя твист-ваннами и четырьмя твист-креслами (рис. 11, *в*).

4. Конфигурация Дезарга 10_3 и алломорфное отображение 20-вершинного кластера алмаза в додекаэдр [19, 44, 51]

Додекаэдр — это карта $\{5, 3\}$ на сфере (в каждой вершине сходятся 3 пентагона), его многоугольником Петри является декацикл; 6 таких декациклов, содержащих все 30 ребер и 20 вершин додекаэдра, изоморфны карте $\{10, 3\}_5$ (в каждой вершине сходятся 3 декацикла; вершины, отстоящие друг от друга на 5 ребер из многоугольника Петри, отождествляются) на неориентируемой поверхности. Карта $\{10, 3\}_5$ содержит и пентациклы, являющиеся ее минимальными циклами (рис. 12, *а*).

Карта $\{10, 3\}_5$ алломорфна карте $\{10, 3\}'_5$ (рис. 12, *д*), отличающейся от нее лишь тем, что ее минимальными циклами являются гексациклы; переход от карты $\{10, 3\}_5$ к $\{10, 3\}'_5$ (и обратно) осуществляется 2π-дисклинациями. Так, например, если в декацикле 13′65′21′36′74′ (цифры со штрихами нумеруют «черные» вершины), разделенном на 4 пентацикла, ребро 8′10 заменить ребром 5′7, то помимо 4 пентациклов (двух старых и двух новых) декацикл разбивается на 2 гексацикла: 13′65′74′ и 76′31′25′ (рис. 12, *б*). Карта $\{10, 3\}'_5$ вкладывается в граф $\{10\} + \{10/3\}$, который (при раскраске вершин в два цвета и соединении ребрами лишь вершин разных цветов) совпадает с бихроматическим графом $\Gamma(10_3)$ — графом

инцидентности конфигурации Дезарга 10_3 (рис. 12, *д*). Таким образом, оказывается возможным вложение подграфа додекаэдра $\{5, 3\}$ в граф инцидентности основополагающей конструкции проективной геометрии:

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(10_3) & \supset & \{10, 3\}' \cap \{10, 3\}_5 & \subset & \{5, 3\} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \{10, 3\}'_5 & \longleftarrow & \text{al} & \longrightarrow & 10, 3_5, \end{array} \tag{12}$$

где $\leftarrow$ al $\rightarrow$ — символ алломорфизма, подграф $\{10, 3\}'_5 \cap \{10, 3\}_5 = \{d\}$ содержит декациклы, но не содержит пента- и гексациклы.

Граф $\Gamma(10_3)$ задается своей таблицей инцидентности (ТИ10_3), подтаблица которой из 24 заполненных кружков (рис. 12, *е*) определяет 20-вершинный кластер алмаза $\{10_3\}^6$ (рис. 12, *г*). Если в ТИ10_3 (рис. 12, *е*) поменять местами тройки двойных кружков, то получим ТИ10_3 (рис. 12, *в*), подтаблица которой ТИ$\{d\}$ определяет кластер алмаза с графом $\{d\} = \{10_3\}^6_d$, в котором связи $56'$, $67'$ и $75'$ разорваны, а $89'$, $9, 10'$ и $10, 8'$ — установлены. При раскраске вершин додекаэдра в 2 цвета его граф задается ТИ$\{5, 3\}$, отбрасывание из которой 6 стрелок (соответствующих ребрам между вершинами одного цвета) также приводит к ТИ$\{d\}$, определяющей подграф додекаэдра $\{d\} = \{5, 3\}^6$ (рис. 12, *а*). Взаимные трансформации тетракоординированных кластеров $\{5, 3\}^6$ и $\{10_3\}^6$ осуществляются по алломорфизму (2), посредством введения трех 2π-дисклинаций, которые сохраняют симметрию D_3 этих кластеров и меняют 3 ребра графа $\{5, 3\}^6$ ($\{10_3\}^6$) на 3 ребра графа $\{10_3\}^6$ ($\{5, 3\}^6$). Это определяет возможность взаимных трансформаций кластеров при давлении (с вращением), вдоль тройной оси, прикладываемом лишь к двум вершинам на этой оси (рис. 12, *а*, *г*) и вызывающим синхронные винтовые движения всех вершин, которые реализуются посредством шарнирного прокручивания ребер. Итак, если разорвать в додекаэдре 9 связей (стрелки и пунктир на рис. 12, *а*) и оставшийся каркас «раскручивать» до образования трех новых связей такой же длины (двойные линии на рис. 12, *г*), то возникает кластер алмаза. И наоборот, если в 20-вершинном кластере алмаза разорвать 3 связи (двойные линии на рис. 12, *г*), то при «скручивании» оставшегося каркаса до равенства неалмазных связей алмазным (пунктир и сплошная линия на рис. 12, *г*), образуется додекаэдр.

Тройная ось графа $\{5, 3\}$ совпадает с осью 6_1 политопа $\{5, 3, 3\}$, ячейкой которого является $\{5, 3\}$, поэтому возможны взаимные трансформации и для (бесконечных) стержней из тетракоординированных кластеров [51–53].

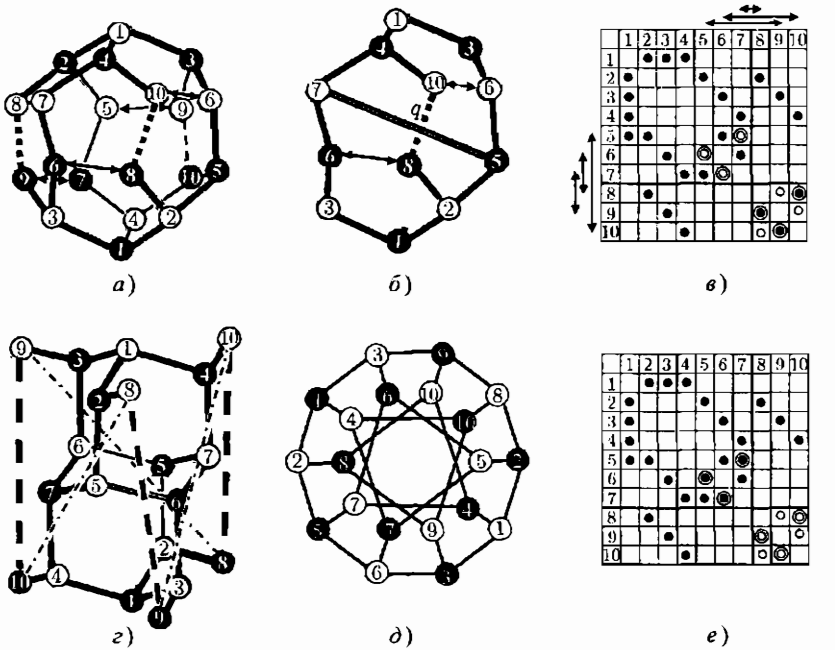


Рис. 12. Додекаэдр и алломорфный ему 20-вершинный кластер алмаза, их графы инцидентности и соответствующие им таблицы инцидентности. *а*) В «бихроматическом» графе {5, 3} додекаэдра 6 стрелок соединяют вершины одного цвета. *б*) Переброска ребер 2π-дисклинацией q приводит к появлению в декацикле гексацикла. *в*) ТИ графа {5, 3} совпадает с ТИ конфигурации Дезарга 10_3 при отбрасывании 6 стрелок. *г*) 20-вершинный кластер алмаза. «Неалмазные» связи показаны пунктиром и штрих-пунктиром. *д*) Бихроматический граф {10} + {10/3}, задаваемый ТИ конфигурации Дезарга 10_3 [46]. *е*) ТИ 10_3, в которой ребрам кластеров соответствуют зачерненные кружки, а связям, которые не являются ребрами, — пустые. ТИ *в*), *е*) отличаются лишь стрелками и парами троек двойных кружков.

5. Конечные проективные плоскости PG(2, 3) и PG(2, 4). Кластеры алмазоподобных структур, содержащие икосаэдры в координационных сферах [44, 45, 53]

Для всех (идеальных) АС вторая координационная сфера состоит из объединения 4-х центрированных тетраэдров, поэтому АС различаются

торсионными углами, определяемыми вращениями 4-х троек атомов второй координационной сферы. Если эти 12 вершин образуют архимедов кубооктаэдр, то АС — алмаз ($\Theta = 60°$); если они образуют гексагональный кубооктаэдр, то АС — лонсдейлит ($\Theta = 60°, 0$); если образуются оба эти 12-вершинника, то АС — полисинтетический двойник [25]. Если 4 тройки архимедова кубооктаэдра начинают синхронно вращаться на угол ψ, то кубооктаэдр переходит в косой икосаэдр (КИ) с группой симметрии T, а торсионный угол Θ становится равным $60° - \psi$. В [54] был построен график изменения расстояний от вершины косого икосаэдра до остальных 11 вершин в зависимости от $\Theta = 60° - \psi$.

Синхронное вращение всех троек обеспечивает сохранение подгруппы T, поэтому достаточно рассмотреть зависимость от Θ длин сторон и диагоналей лишь квадрата $ABCD$ из исходного архимедова кубооктаэдра (рис. 13, *а*). Если сторону квадрата (длиной 2,52 Å) принять за $a = \sqrt{\tau + 2}/2 = 0{,}951$ — отношение расстояния от центра до вершины икосаэдра к его ребру, то справедливы соотношения:

$$AB(\Theta) = CD(\Theta) \geqslant a = AD = BC, \qquad BD(\Theta) \leqslant \sqrt{a} \leqslant AC(\Theta), \quad (13)$$

равенство в которых достигается при $\Theta = 60°$ (рис. 13, *б*). При $\Theta < 60°$ тройки точек смещаются в вершины косого икосаэдра [25], 20 треугольных граней которого разбиваются на 3 класса:

$$Y_h = \bigcup_{i=1}^{3} T g_i C_{3v}, \qquad T \cap C_{3v} = C_3, \qquad n_i = |T| : |T \cap g_i C_{3v} g_i^{-1}|, \quad (14)$$

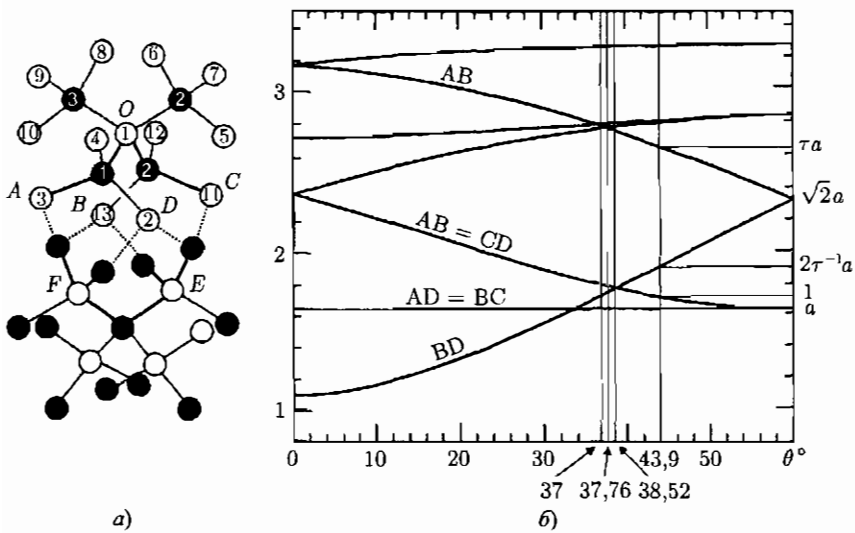
где $n_1 - 4$ правильных треугольника со стороной a, $n_2 = 4$ — число правильных треугольников со стороной $AB(\Theta)$, $n_3 - 12$ треугольников со сторонами: a, $AB(\Theta)$, $BD(\Theta)$ или a, $AB(\Theta)$, $AC(\Theta)$.

Если $AB(\Theta) = BD(\Theta)$ или $BD(\Theta) = a$, то в таком косом икосаэдре будут 12 равнобедренных треугольников и две четверки правильных, но не конгруэнтных треугольников. В прямом икосаэдре 8 правильных треугольников конгруэнтны [25]; таким образом, рассматриваемый косой икосаэдр логично назвать косо-прямой икосаэдр (КПИ).

При $\Theta_1 = 38{,}52°$ $AB = BD = 1{,}085a \approx 1{,}032$ и КИ = КПИ; при $\Theta_2 \approx 37{,}0°$ все 5 вторых расстояний (от вершины A) становятся приблизительно равными AC. При $\Theta_i = 37{,}76°$ стартовая точка A попадает на плоскость симметрии группы икосаэдра Y_h и наиболее близка к направлению $[\tau, 0, 1]$ его оси C_5. Значения Θ_1 и Θ_2 отличаются на $\pm 0{,}76°$ от Θ_i, поэтому (как и в [54]) будем считать, что при синхронном вращении четырех троек на угол Θ наиболее близким к икосаэдру (в котором все ребра равны 1, а вторые расстояния — τ) является КИ($\Theta \approx 37{,}76°$) = КИ$_i$. Если O — центр КИ($\Theta \approx 43{,}9°$), то A, O, C —

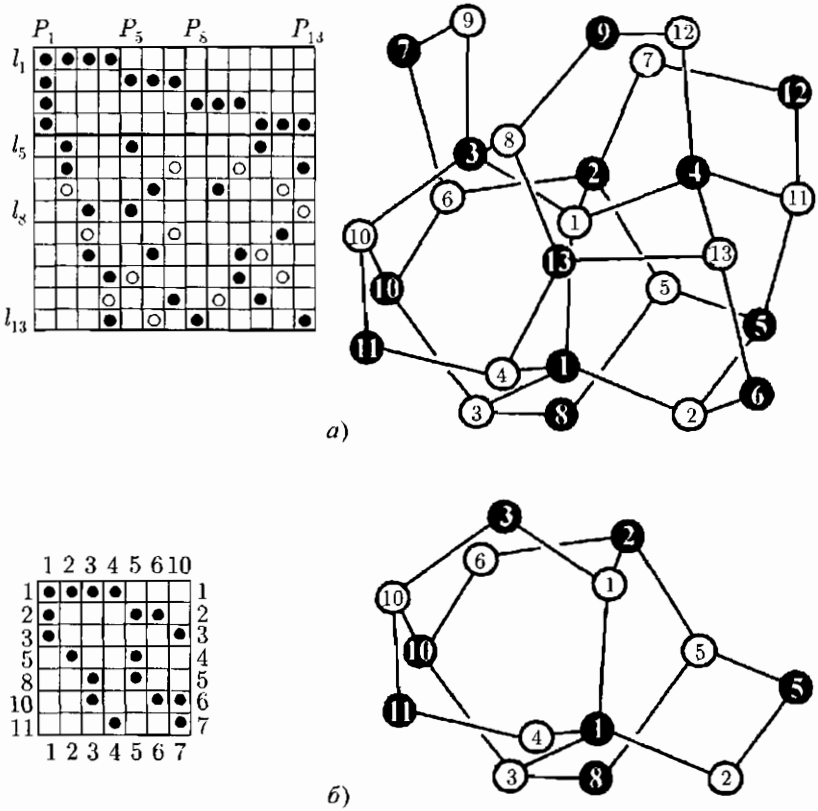
три вершины «экваториального» пентагона $AOCEF$ пентагональной бипирамиды с полюсами B и D (расположенными на ее оси) и длинами ребер a и l (рис. 13, a).

Во всех АС 17-вершинник второй координационной сферы определяется ТИ 13×4, являющейся подтаблицей $\mathrm{PG}(2, 3) = 13_4$ (рис. 14, a). Т. о., максимальная подконфигурация PG(2, 3), граф инцидентности которой определяет кластер АС, должна быть получена из некой регуляр-



а) *б*)

Рис. 13. Вторая координационная сфера алмаза в зависимости от изменения торсионных углов. *а*) Синхронное вращение на угол ψ четырех троек атомов второй координационной сферы алмаза приводит к изменению расстояний между вершинами A и B, A и C, B и D. Синхронное вращение троек вершин на $\psi = 16,1°$ в двух вторых координационных сферах алмаза приводит к образованию особого 14-вершинного кластера (рис. 11, $в$), ребра которого показаны жирными и пунктирными линиями. *б*) График изменения расстояний во второй координационной сфере алмаза (a) в зависимости от угла $\theta = 60 - \psi$ при синхронном вращении на ψ всех четырех троек атомов второй координационной сферы алмаза. Вершины A, B, C, D указаны на (a), при $\Theta = 38,52°$ — возникает «косо-прямой» икосаэдр (18 и 12 равных между собой ребер); при $\Theta = 37,76° = (37 + 0,76)° = (38,52 - 0,76)°$ (или $\psi = 22,24°$) косой икосаэдр наиболее близок к икосаэдру [54].



а) *б*)

Рис. 14. «Реберная» фигура политопа {240}**, ПК канала** 40/9 **в политопе** {240} **и определяющие их подтаблицы ТИ PG**(2, 3). *а*) ТИ PG(2, 3) (без о) определяет «реберную» фигуру {240} — вершинную фигуру {240} (рис. 15, *г*) без вершины 14′. Подтаблица 13×4 ТИ PG(2, 3) определяет 17-вершинное объединение 4-х центрированных тетраэдров с общей вершиной (рис. 13 *а*). *б*) Подтаблица ТИ $\widetilde{10}_3^4$ определяет ПК канала 40/9 в {240}. Слева и сверху от ТИ указаны номера строк и столбцов из ТИ $\widetilde{10}_3^4$.

ной 26-вершинной карты. Такой картой является карта $\{6, 3\}_{3,1}$ на торе с 39 ребрами и 13 гексациклами. Отбросив в ней ручку (аналогично отбрасыванию ручки в $\{6, 3\}_{2,1}$, рассмотренному в §§ 3, 4), мы получим нерегулярное разбиение сферы на $13 - 1 = 12$ гексагонов, разделенных $39-3 = 36$ ребрами. В подтаблице 13×4 ТИ PG(2, 3) точка P_1 — тетракоординированная, таким образом, ТИ искомой подконфигурации должна содержать $36 + 1 = 37$ знаков инцидентности, а знак в 1-ом столбце 1-ой строки должен соответствовать внутреннему, 37-ому ребру кластера АС. Итак, если в ТИ PG(2, 3) выделить подтаблицу 13×4, а в оставшейся части 13×9 отбросить $52 - 37 = 15$ знаков инцидентности, то полученная ТИ будет максимальной подконфигурацией PG(2, 3), определяющей некий особый кластер АС, собранный из гексациклов. Условие сборки этого кластера из гексациклов (т. е. отсутствие торчащих связей и однокоординированных вершин) требует, чтобы в каждой строке (столбце) подтаблицы 13×9 отбрасывалось не более двух знаков инцидентности. Всем этим условиям удовлетворяет единственная подконфигурация $\{13_4\}^{15}$ плоскости PG(2, 3), однозначно определяющая 26-атомный кластер АС (рис. 14, *а*). Этот кластер представляет собой объединение трех ячеек $\{6, 3\}^{3(2)}_{2,1}$ (рис. 15, *а*, *б*) политопа $\{240\}$ вокруг общего внутреннего ребра 1–1′ (т. е. «реберную фигуру» политопа $\{240\}$ или вершинную фигуру $\{240\}$ (рис. 15, *г*)) без вершины 14′.

Помимо подконфигурации $\{13_4\}^{15}$ в PG(2, 3) могут быть выделены и иные конфигурации, также определяющие 26-атомные кластеры АС. 26-атомные кластеры лонсдейлита и двойника алмаза с лонсдейлитом также определяются немаксимальными подконфигурациями $\{13_4\}^{21-3}_1$ и $\{13_4\}^{21-3}_2$ PG(2, 3), возникающими при отбрасывании 21 и добавлении 3 (отмеченных крестиками) знаков инцидентности в 13_4. Отметим, что если к 26-атомному кластеру лонсдейлита добавить вершину 14′, то образуется *звезда Делоне* (вершины 1) лонсдейлита, которая может быть трансформирована (переброской связей) в вершинную фигуру политопа $\{240\}$ (рис. 3, *г* [52]).

Итак, в PG(2, 3) могут быть выделены подконфигурации, реализующие 26-вершинные разбиения сферы на гексациклы, которые однозначно определяют особые кластеры АС. Среди всех этих подконфигураций существует лишь одна максимальная, т. е. целиком вкладывающаяся в ТИ PG(2, 3) посредством отбрасывания минимума знаков инцидентности. Определяемый ею кластер АС является реберной фигурой политопа $\{240\}$, содержащей икосаэдр, образованный вершинами второй координационной сферы центральной точки.

Плоскость PG(2, 3) содержит полную расширенную конфигурацию Дезарга $\widetilde{10}^4_3$ [35]. Подконфигурация PG(2,3), задаваемая пересечением

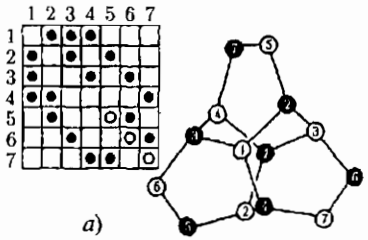
$\{13_4\}^{15} \cap \widetilde{10_3^4} = \{\widetilde{10_3^4}\}^6$, определяет 20-вершинный кластер АС [13] с одним внутренним ребром (рис. 15 *д*), который можно определить как слоевую часть реберной фигуры политопа {240}. Аналогично выделению в PG(2, 3) особой подконфигурации $\{13_4\}^{15}$, которая определяет 26-атомный кластер АС (рис. 14, *а*), в ТИ PG(2, 4) можно отбросить 49 знаков инцидентности и выделить подконфигурацию, определяющую 40-атомный кластер АС, содержащий 2 икосаэдра (из белых и черных атомов) с центрами в 1 и 6′ (рис. 16, *а*). Дополнение этого кластера еще тремя белыми и тремя черными атомами (I, II, III, и I′, II′, III′) приводит к возникновению 46-атомного объединения четырех икосаэдров (с центрами в 4′, 1, 6′, 14) на общей тройной оси. Расположение на этой оси атомов 5′ и 18 (связям которых с атомами 5, 9, 13 и 9′, 18′, 21′ не соответствуют знаки инцидентности ТИ PG(2, 4)) позволяет получить 48-атомный кластер АС (рис. 16, *а*), который определяется подконфигурацией уникального комбинаторного объекта MOG (*чудесного генератора октад*) [34]. MOG обобщает PG(2, 4) и определяется таблицей 6×4 (рис. 16, *б*, «римским точкам» I, II, III которой соответствуют атомы I, II, III, а точке ∞ — атом 18) (рис. 16, *а*, *б*).

ТИ PG(2, 4), в которой отброшено 52 знака инцидентности, также определяет 40-атомный кластер АС, содержащий 2 икосаэдра (с центрами в 1 и 4′) из белых и черных атомов (рис. 16, *в*). Дополнение этого кластера еще 6 черными атомами ($\hat{1}$–$\hat{6}$), которым не соответствуют стро-

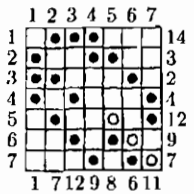
---

Рис. 15. Вершинная фигура «правого» политопа {240} и ее части [13,14,18], определяемые таблицами инцидентности соответствующих подконфигураций. *а*) Ячейка «левого» политопа {240}, определяемая подконфигурацией 7_3, ТИ которой представляет собой ТИ 7_3 без набора №2 из 3-х пустых кружков. *б*) Ячейка «правого» политопа {240}, определяемая ТИ *а*), в которой произведена замена строк на столбцы (корреляция). Номера соответствующих вершин кластера *г*) указаны справа и снизу от ТИ. *в*) Кластер, генерирующий многоугольник Петри «правого» политопа {240} из белой и черной спиралей Бернала. Объединяющая эти спирали двойная ось проходит перпендикулярно середине ребра 3–3′. Кластер определяется ТИ 7_3 без набора №3 из 3-х пустых кружков, энантиоморфной модификации соответствует замена строк на столбцы. *г*) Вершинная фигура «правого» политопа {240} как объединение 4-х ячеек *б*). Вершины 1, 2–13 и 1′–4′; 5′, 10′, 13′, 14′; 6′, 7′, 8′, 9′, 11′, 12′ (цифры со штрихами нумеруют черные вершины) соответствуют приведенным в табл. 5 [38] сечениям 0_0–1_0 и 1_3–3_3 политопа {3, 3, 5} гиперплоскостью E^3. Сечения n_0 и n_3 начинаются, соответственно, с вершины и ячейки {3, 3, 5}. *д*) Слоевая часть кластера *г*), определяемая ТИ расширенной конфигурации Дезарга 10_3^4 без пустых кружков. Справа и снизу от ТИ указаны номера соответствующих строк и столбцов из содержащей ее ТИ PG(2, 3) (рис. 2).

ки ТИ PG(2, 4), и белым атомом 18, связям которого с атомами 9′, 18′, 21′ не соответствуют знаки инцидентности ТИ PG(2, 4), позволяет получить 47-атомный кластер АС (рис. 16, *в*). Белые атомы этого кластера образуют центрированный куб с вписанным в него идеальным икосаэдром, деформация которого приводит к *элементарной ячейке* (ЭЯ) *фазы Франка – Каспера* A15 с федоровской группой $Pm\bar{3}n$. Черные атомы образуют 26-атомное объединение 4-х икосаэдров (с центрами в 1′,2′,3′,4′),

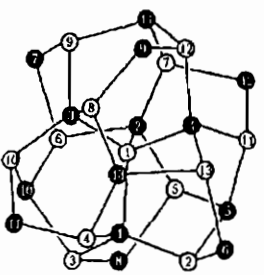


а)

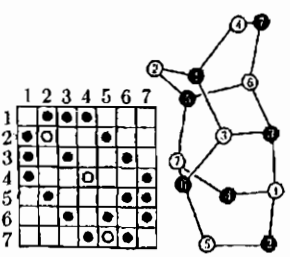


б)

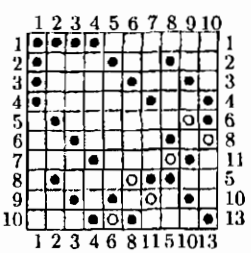
Сечение {3,3,5}	x_1	$(x_1\ x_2\ x_3)$	Число вершин	Полиэдр
0_0	2	(0, 0, 0)	1	точка
1_0	τ	$(1, 0, \tau^{-1})$	12	икосаэдр
2_0	1	$(1, 1, 1)$ $(\tau, \tau^{-1}, 0)$	20	додекаэдр
...				
Сечение {3,3,5}	$x_4\sqrt{2}$	$(x_1, x_2, x_3)\sqrt{2}$	**Число вершин**	**Полиэдр**
1_3	τ^2	$(\tau^{-1}, \tau^{-1}, \tau^{-1})$	4	тетраэдр
2_3	$\sqrt{5}$	$(-1, 1, 1)$	4	тетраэдр
3_3	2	(2, 0, 0)	6	октаэдр
4_3	τ	(τ, τ, τ^{-2})	12	кубодитетраэдр
...				



г)



в)



д)

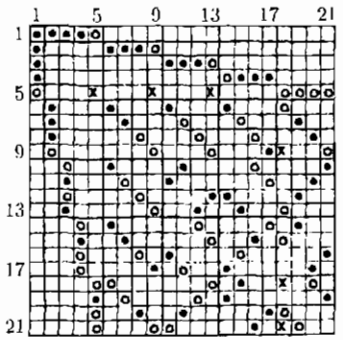
которые принадлежат фазе Франка – Каспера $TiNi_2$ с федоровской группой $Fm\bar{3}n$. В целом же этот 47-атомный кластер, определяемый подконфигурацией PG(2, 4), изоморфен ЭЯ гипотетической АС с федоровской группой $P4\bar{3}n = Pm\bar{3}n \cap Fd\bar{3}m$ [55].

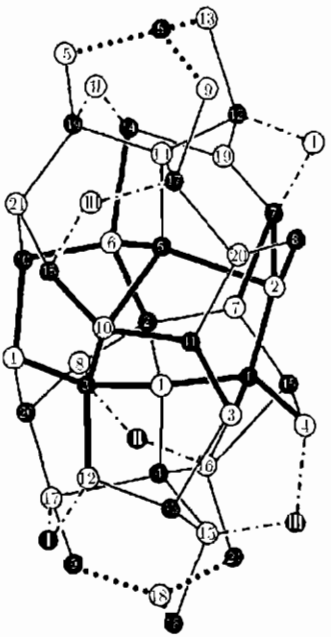
Подконфигурация PG(2, 4), определяющая наиболее симметричный кластер АС (рис. 16, *в*), является максимальной по числу (56) содержащихся в ней знаков инцидентности PG(2, 4). Минимальной особой подконфигурацией PG(2, 4) можно считать расширенную конфигурацию Дезарга 10_3^3, ТИ которой содержит на 3 знака инцидентности больше, чем ТИ конфигурации Дезарга 10_3, и вкладывается только в ТИ PG(2, 4) [35]. Определяемый кластер АС (20 вершин и 24 ребра) содержится в кластерах АС, определяемых подконфигурациями PG(2, 4) (рис. 16, *в*), которые можно рассматривать как различные варианты его наращивания. Сопоставление с полученными ранее результатами позволяет сделать вывод о том, что особые подконфигурации PG(2, q), $q = 2, 3, 4$ определяют особые кластеры АС по единому алгоритму.

В силу невозможности разбиения E^3 на идеальные икосаэдры, кластеры с икосаэдрическим упорядочением могут достигать лишь сравни-

---

Рис. 16. Таблица инцидентности PG(2, 4), ее расширение до MOG (чудесного генератора октад) [34, 35] и определяемые ими особые кластеры АС. *а*) Без показанных пустыми кружками 49 знаков инцидентности ТИ PG(2, 4) определяет 40-вершинный кластер АС, который совместно с вершинами I, II, III и I′, II′, III′, соответствующими римским точкам MOG, является объединением 4-х икосаэдров с центрами в 1, 4, 6′, 1, 4′. Вершинам 18 и 5′ соответствует точка ∞ в MOG. *б*) Таблицы сложения (+) и умножения (×) поля Галуа GF(4) = $= \{0, 1, \omega, \bar{\omega}\}$, $\omega = \frac{1}{2}(i\sqrt{3} - 1)$ и MOG, как расширение PG(2, 4). *в*) Без показанных пустыми кружками 52 знаков инцидентности ТИ PG(2, 4) определяет 40-вершинный кластер АС; 20 белых вершин этого кластера совместно с вершиной 18 изоморфны ЭЯ фазы Франка – Каспера A15 — в показанный двойными линиями куб вписан икосаэдр с центром в 1. Совместно с 6 черными вершинами $\hat{1}$–$\hat{6}$, не принадлежащими ТИ PG(2, 4), его 20 черных вершин образуют тетраэдр из икосаэдров (с центрами в 1′, 2′, 3′, 4′) или 26-вершинник из фазы Франка – Каспера $TiNi_2$ [20]. В целом 47-вершинный кластер АС совпадает с ЭЯ гипотетической АС [55]. Точечным пунктиром показаны связи, которым не соответствуют ребра графа инцидентности PG(2, 4); в ТИ они показаны крестиками. Штрих-пунктиром показаны ребра, между принадлежащими и не принадлежащими графу инцидентности PG(2, 4) вершинами. 20-вершинный кластер АС, определяемый расширенной конфигурацией Дезарга 10_3^3, показан жирными линиями.





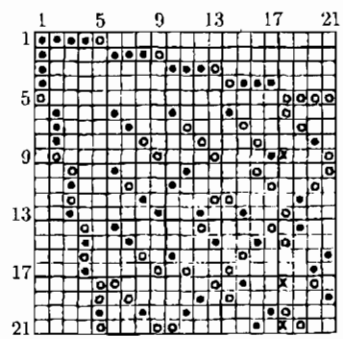
а)

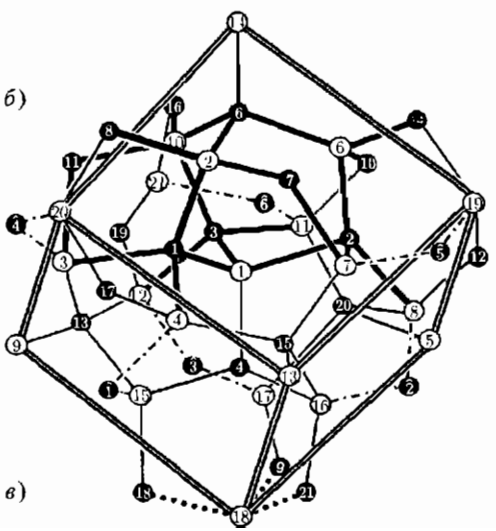
+	0	1	ω	ω̄
0	0	1	ω	ω̄
1	1	0	ω	ω
ω	ω	ω̄	0	1
ω̄	ω	ω̄	1	0

×	0	1	ω	ω̄
0	0	0	0	0
1	0	1	ω	ω̄
ω	0	ω	ω̄	1
ω̄	0	ω̄	1	ω

		0	1	ω	ω̄
I	0				0
	1				1
II	ω				ω
III	ω̄				ω̄

б)





в)

тельно небольших размеров [18,20,54] и быть энергетически выгодными лишь до определенного предела, определяемого возможностью разбиения E^3. Таким образом, изоморфизм определяемого PG(2, 4) кластера (рис. 16, *в*) с ЭЯ кристаллической АС, осуществляющей разбиение E^3 на кубы, означает, что этот кластер является «предельно допустимым». Иными словами, определяемые PG(2, q), $q \geqslant 5$ особые кластеры АС либо энергетически невыгодны, либо являются объединением кластеров, определяемых PG(2, q), $q \leqslant 4$.

6. Несамодуальные и недезарговы конфигурации и определяемые ими порождающие кластеры алмазоподобных структур с сильно искаженными тетраэдрическими углами [44,50]

В самодуальной конфигурации $(9_3)_3$ может быть выделена несамодуальная подконфигурация $((6 \cup 3)_3, (8 \cup 1)_3)_3$ с ТИ 8×6, которая представляет собой пересечение конфигурации $(9_3)_3$ с несамодуальной конфигурацией $(6_4, 8_3)$ (рис. 17, *а, б*). Конфигурацию $(6_4, 8_3)$ можно рассматривать как множество восьми вершин и шести граней куба; каждая вершина принадлежит трем граням, а каждая плоскость содержит четыре вершины. Заменив каждую грань белой точкой, мы получим бихроматический граф ромбододекаэдра; так как его грани 4-угольники, то $(6_4, 8_3)$ — негеометрическая конфигурация. Пересечение $(9_3)_3 \cap (6_4, 8_3)$ — это максимальная геометрическая подконфигурация конфигурации $(6_4, 8_3)$ (рис. 17, *б*). ТИ $(6_4, 8_3)$ содержит меньше знаков инцидентности, чем ТИ $(9_3)_3$; следовательно, подконфигурация $(9_3)_3 \cap (6_4, 8_3)$, определяющая 14-вершинный ПК с 6 гексациклами, вкладывается в несамодуальную конфигурацию $(6_4, 8_3)$. Граф этого ПК получается из графа ромбододекаэдра при отбрасывании показанных пунктиром ребер, которым соответствуют пустые кружки в ТИ $(6_4, 8_3)$ (рис. 17, *б, в*); он представляет собой граф ПК ВС-8 — объемноцентрированной фазы высокого давления Si [55]. Эта структура является АС с весьма искаженными ($\approx$ до 100°) тетраэдрическими углами. ВС-8 можно считать «пограничной» структурой, находящейся между АС и тетраэдрическими (металлическими) структурами; в [55] структура ВС-8 была получена как *аппроксимант икосаэдрического квазикристалла*.

Несамодуальный ПК LD^d (рис. 18, *а*) определяется подконфигурацией $(8_3, 1_3 + 2_2 + 1_3 + 1_2 + 2_3 + 3_2)$ конфигурации $(10_3)_2$ и представляет собой объединение Z8 и Z10′ (рис. 18, *б*). Подробное описание этого кластера приведено в [44,53].

Все рассмотренные ранее ПК определялись дезарговыми подконфигурациями плоскостей PG(2, q), $q = 2, 3, 4$; но у этих плоскостей могут быть и недезарговы подконфигурации. Например, *ступени Холла* T_2

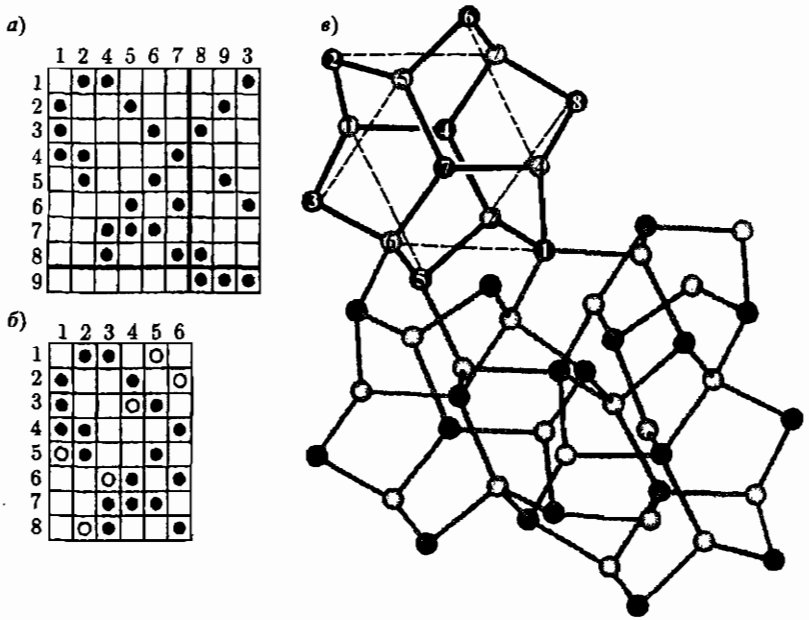


Рис. 17. Кристалл ВС-8 [55], **генерируемый 14-вершинным порождающим кластером, который определяется пересечением конфигураций** $(9_3)_3$ **и** $(6_4, 8_3)$. *а*) Размещение за 9-м столбцом 3-го столбца «правой» ТИ $(9_3)_3$ приводит к изоморфной ТИ; ее подтаблица 6×8, выделенная жирными линиями, определяет ПК ВС-8. *б*) ТИ негеометрической конфигурации $(6_4, 8_3)$ без пустых кружков определяет ПК ВС-8. *в*) Структура ВС-8, генерируемая ПК ВС-8, который выделен жирными линиями. ПК ВС-8 однозначно определяется подтаблицей 8×6 — пересечением ТИ $(9_3)_3$ и ТИ $(6_4, 8_3)$, представленных на *а*) и *б*). С показанными пунктиром ребрами графа инцидентности конфигурации $(6_4, 8_3)$, которым в ТИ $(6_4, 8_3)$ соответствуют пустые кружки, граф ПК ВС-8 совпадает с графом ромбододекаэдра.

и T_3 (рис. 19) представляют собой конечные недезарговы проективные плоскости [35], вкладывающиеся, соответственно, в PG(2, 2) и PG(2, 3). В силу недезарговости T_2 (T_3), выражаемой непересечением между собой части столбцов (строк) в ТИ T_2 (T_3), в бихроматическом графе инцидентности T_2 (T_3) возникнут отсутствующие в графе PG(2, q) циклы, которые могут быть разделены на меньшие при соединении ребрами вершин одного цвета. Это означает, что в расширенной «инцидентностя-

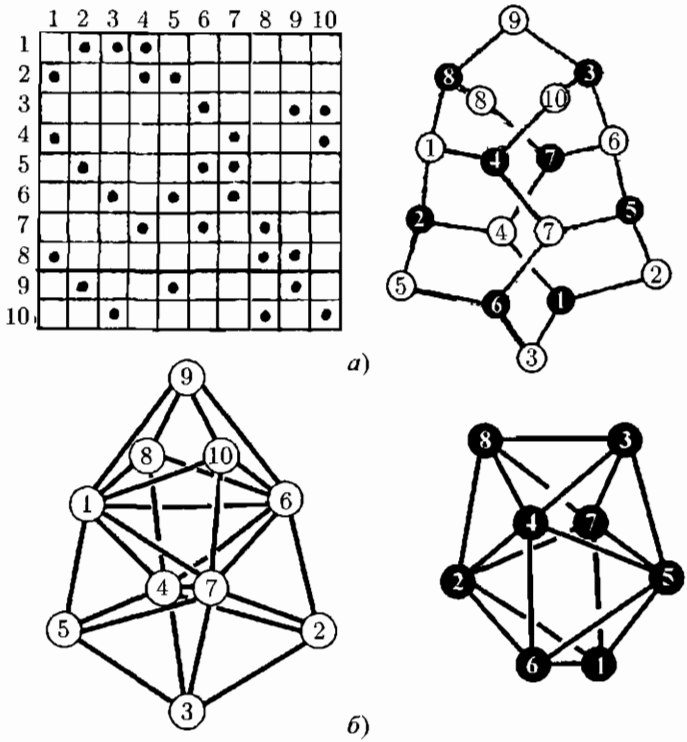


Рис. 18. Особый кластер LD^d и ТИ конфигурации $(10_3)_2$. *а*) ТИ конфигурации $(10_3)_2$, подтаблица 10×8 которой полностью определяет LD^d. *б*) Белые вершины LD^d образуют 10-вершинное объединение 9-ти тетраэдров, черные вершины LD^d — полиэдр Бернала Z8.

ми» между точками или между прямыми дезарговой плоскости T_2 (T_3) можно выделить подконфигурацию, определяющую разбиение сферы на пента-, гекса- и гептациклы.

Помимо T_2 плоскость PG(2, 2) содержит и подробно рассмотренную ранее подконфигурацию $7_3 \cap 10_3$, определяющую параллелоэдр алмаза. Пересечению $(7_3 \cap 10_3)$ с T_2 будет соответствовать отбрасывание еще двух знаков в ТИ T_2. Если в этой ТИ отбросить еще один знак, а затем посредством стрелок установить «инцидентность» между точками 2–4 и 6–7, то полученная ТИ будет определять подконфигу-

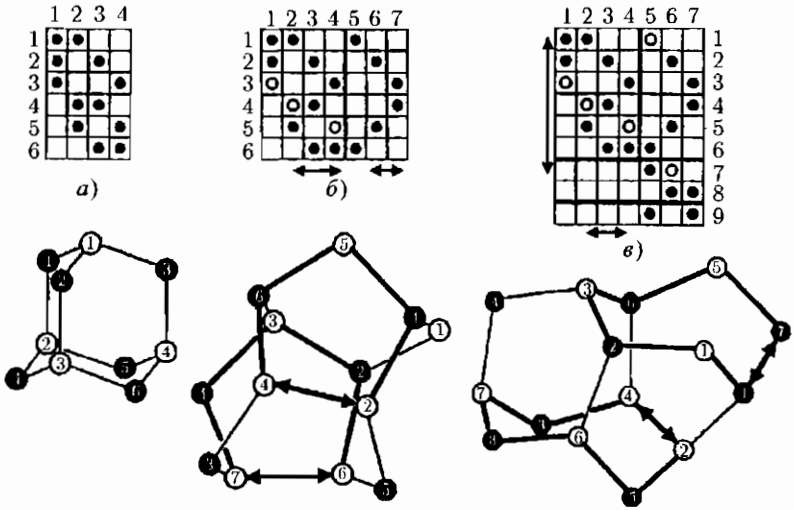


Рис. 19. Конечные недезарговы плоскости [35] и определяемые подтаблицами их таблиц инцидентности порождающие кластеры с пента-, гекса- и гептациклами. *а*) ТИ конфигурации $(4_3, 6_2)$ — собственного четырехугольника и определяемый ею ПК адамантана. *б*), *в*) Расширенные (посредством стрелок) ТИ конечных недезарговых плоскостей и определяемые их подтаблицами 6×7 и 8×7 кластеры с пента-, гекса- и гептациклами. Приведенная на *а*), *б*), *в*) последовательность ТИ (без стрелок) — это последовательность ступеней T_1, T_2, T_3 модели Холла, возникающая при попеременном добавлении столбцов и строк к предыдущей ступени. Подтаблица предыдущей ступени выделена жирной линией в последующей. Пента- и гептациклы выделены жирными линиями. Связи между вершинами одного цвета показаны стрелками.

рацию $\{7_3 \cap 10_3 \cap T_2\}^{1-2}$. В символе этой подконфигурации верхний индекс 1 означает одно отбрасываемое «бихроматическое» ребро, а -2 означает введение двух добавочных ребер, не принадлежащих графу инцидентности подконфигурации $7_3 \cap 10_3 \cap T_2$ и соединяющих вершины одного цвета. Эта подконфигурация определяет граф 13-вершинного кластера с 2 «поперечными» пентациклами и 4 «боковыми» гексациклами (рис. 19, *б*). PG(2, 3) содержит ступень Холла T_3 (рис. 19, *в*) и конфигурацию 8_3, поэтому, аналогично вышеизложенному, граф инцидентности подконфигурации $\{8_3 \cap (9_3)_2 \cap T_3\}^{-2}$ определяет граф 15-вершинного ПК

с двумя «поперечными» гептациклами и 4 «боковыми» гексациклами (рис. 19, *в*).

III. Система порождающих кластеров алмазоподобных структур

1. Политопы {3, 3, 5} и {240}, решетка E8 и порождающие кластеры алмазоподобных (тетракоординированных) и тетраэдрических (металлических) структур

Ранее особые кластеры AC трактовались как результат отображения в E^3 конструкций более «высоких» геометрий. Рассмотрим, что собой представляет структура алмаза в E^4 и существуют ли неевклидовы 3-мерные алмазоподобные структуры.

По определению [34], самосклейка решеток

$$D_n^+ = D_n \cup [1]D_n \tag{15}$$

является алмазной упаковкой при нечетных n и решеткой при четных n. Упаковка D_4^+ совпадает с примитивной кубической решеткой Z^4 и не обладает характеристиками алмазной структуры:

$$D_3^+ = D_3 \cup [1]D_3, \tag{16}$$

где D_3 — это ГЦК-решетка, а [1] — вектор сдвига на $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$. Итак, бесконечная структура алмаза по алгоритму (15) не может быть построена в E^4.

Группа [3, 3, 5] обладает двумя неэквивалентными 4-мерными представлениями, которым соответствуют некристаллографические решетки корней H_4 и $\widetilde{H}_4$ [41, 42]:

$$\widetilde{H}_4 = \varphi H_4, \quad H_4 \cap \widetilde{H}_4 \leftrightarrow \{3, 3, 5\} \cap \varphi\{3, 3, 5\} = \{3, 4, 3\}, \quad \varphi^2 = 1, \tag{17}$$

где $[3^{4,2,1}] \ni \varphi \notin [3, 3, 5]$; $\{3, 3, 5\}$ и $\varphi\{3, 3, 5\}$ — корневые политопы для H_4 и $\widetilde{H}_4$; т.к. $\varphi\{3, 3, 5\} \supset \{3, 4, 3\}$, то $\varphi \in N([3, 4, 3])$ — нормализатору $[3, 4, 3]$ в точечной группе всех движений E^4.

Пусть χ — это преобразование, отображающее $\{3, 4, 3\}$ в дуальный и конгруэнтный ему политоп $\{3, 4, 3\}^*$:

$$\chi\{3, 4, 3\} = \{3, 4, 3\}^*, \qquad \chi^2 = 1, \qquad [3, 4, 3] \not\ni \chi \in N([3, 4, 3]), \tag{18}$$

где $\{3, 4, 3\} \cup \{3, 4, 3\} = \{48\}$ — политоп 48 [56], $\chi \in [3^{4,2,1}]$.

В силу (17), $\chi\{3, 3, 5\}$ и $\chi\varphi\{3, 3, 5\}$ содержат вершины политопа $\{3, 4, 3\}^*$, поэтому 240-вершинные энантиоморфные «политопы»

$\{3, 3, 5\} \cup \chi\{3, 3, 5\} = \{240\}_r$ и $\varphi\{3, 3, 5\} \cup \chi\varphi\{3, 3, 5\} = \{240\}'_l$ будут содержать вершины политопа $\{48\}$. Если к $\{240\}'_l$ применить преобразование $\varphi = \varphi^{-1}$, то

$$\varphi\{240\}'_l = \{3, 3, 5\} \cup \varphi\chi\varphi^{-1}\{3, 3, 5\} = \{240\}_l, \quad \{3, 3, 5\} \cup \chi\{3, 3, 5\} = \{240\}_r$$

и, следовательно, энантиоморфизм политопа $\{240\}$ — алмазной структуры на сфере S^3 — определяется добавлением к политопу $\{3, 3, 5\}$ «правой» ($\chi\{3, 3, 5\}$) или «левой» ($\varphi\chi\varphi^{-1}\{3, 3, 5\}$) конгруэнтной ему структуры.

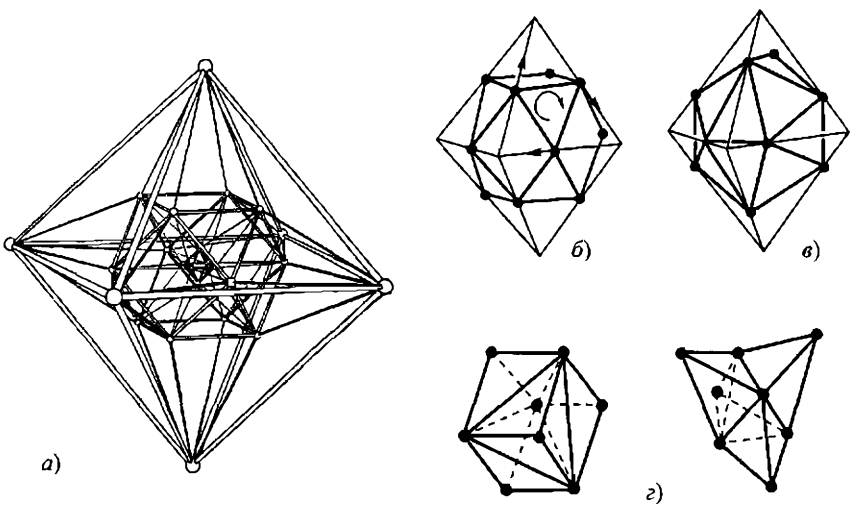


Рис. 20. Конструкция Госсета. *а*) Проекция политопа $\{3, 4, 3\}$ в E^3 [47]. *б*) Центры ребер октаэдра образуют кубооктаэдр. Показанные стрелками сдвиги вершин кубооктаэдра вдоль ребер октаэдра обеспечивают вращение треугольной грани кубооктаэдра по часовой стрелке. *в*) Икосаэдр, в который трансформируется кубооктаэдр (*б*) при синхронном вращении его четырех треугольных граней. *г*) Трансформация куба в объединение 5 тетраэдров — центральный тетраэдр с тетраэдрами на каждой грани [19]

Политоп $\{240\}$ автоматически возникает и при «замыкании» алгоритма Госсета, который позволяет построить политоп $\{3, 3, 5\}$ из политопа $\{3, 4, 3\}$ [37, 38]. Действительно, если на каждом из 96 ребер $\{3, 4, 3\}$ (рис. 20, *а*, *б*) разместить вершину, делящую ребро в отношении

$1 : \tau$, то возникнет нерегулярный 96-вершинный политоп sn-$\{3, 4, 3\}$, состоящий из 24 икосаэдров (рис. 20, *в*, *г*), центры которых образуют политоп $\{3, 4, 3\}^*$. Вершины sn-$\{3, 4, 3\}$ и $\{3, 4, 3\}^*$ — это 120 вершин политопа $\{3, 3, 5\}$. Политопы $\{3. 4, 3\}^*$ и $\{3, 4, 3\}$ конгруэнтны, поэтому алгоритм Госсета справедлив и для политопа $\{3, 4, 3\}^*$, из которого аналогично может быть получен 96-вершинный политоп sn-$\{3, 4, 3\}^*$ конгруэнтный sn-$\{3, 4, 3\}$. Центрами 24 икосаэдров, составляющих sn-$\{3, 4, 3\}^*$, являются вершины исходного политопа $\{3, 4, 3\}$, применение к которому алгоритма Госсета возвращает к началу построения. Вершины sn-$\{3, 4, 3\}^*$ и $\{3, 4, 3\}$ — это 120 вершин политопа, конгруэнтного $\{3, 3, 5\}$, поэтому очевидно, что объединение политопа $\{3, 3, 5\}$ с этим политопом будет «инвариантно» относительно алгоритма Госсета (рис. 21, *а*). Ребро октаэдра в $\{3, 4, 3\}$ ($\{3, 4, 3\}^*$) делится вершиной sn-$\{3, 4, 3\}$ (sn-$\{3, 4, 3\}^*$) в отношении $1 : \tau$, либо «вправо», либо «влево» от середины (рис. 21, *б*). Это определяет два возможных варианта объединения политопа $\{3, 3, 5\}$ с конгруэнтным ему политопом, т. е. «правый» и «левый» политопы $\{240\}$:

$$\begin{aligned}
\{240\}_r &= (\text{sn-}\{3, 4, 3\}_r \cup \{3, 4, 3\}^*) \cup (\text{sn-}\{3, 4, 3\}_r^* \cup \{3, 4, 3\}) \\
&= \{3, 3, 5\} \cup \chi\{3, 3, 5\} \\
\{240\}_l &= (\text{sn-}\{3, 4, 3\}_l \cup \{3, 4, 3\}^*) \cup (\text{sn-}\{3, 4, 3\}_l^* \cup \{3, 4, 3\}) \\
&= \{3, 3, 5\} \cup \varphi\chi\varphi^{-1}\{3, 3, 5\}
\end{aligned} \tag{19}$$

будут инвариантны относительно алгоритма Госсета. Итак, алгоритм Госсета [37, 38] позволяет построить $\{3, 3, 5\}$ по $\{3, 4, 3\}$, а «замыкание» алгоритма Госсета — достроить $\{3, 3, 5\}$ до $\{240\}$.

Регулярный составной полиэдр (РСП) — это объединение полиэдров с общим центром, вершины которого образуют полиэдр [38]. Например объединение двух тетраэдров, вершины которых составляют куб — это РСП $\{4, 3\}[2\{3, 3\}]\{3, 4\}$. В первой скобке символа этого РСП — обозначение куба, во второй — двух тетраэдров, в третьей — октаэдра, которому принадлежат грани пересечения тетраэдров, ограничивающие центральную пустоту (ЦП) данного РСП. Если в $\{4, 3\}[2\{3, 3\}]\{3, 4\}$ тетраэдры отодвинуть друг от друга вдоль общей тройной оси, то такой полиэдр можно назвать нерегулярным составным полиэдром (НСП). В общем случае составляющие НСП полиэдры могут быть и неконгруэнтными.

Алмазоподобная структура в E^2 — это мозаика $\{6, 3\}$, вершины которой принадлежат составной мозаике, обозначаемой символом $\{6, 3\}[2\{3, 6\}]$. В этом символе $[2\{3, 6\}]$ означает, что берутся две мозаики $\{3, 6\}$ с общим центром и их вершины образуют мозаику $\{6, 3\}$

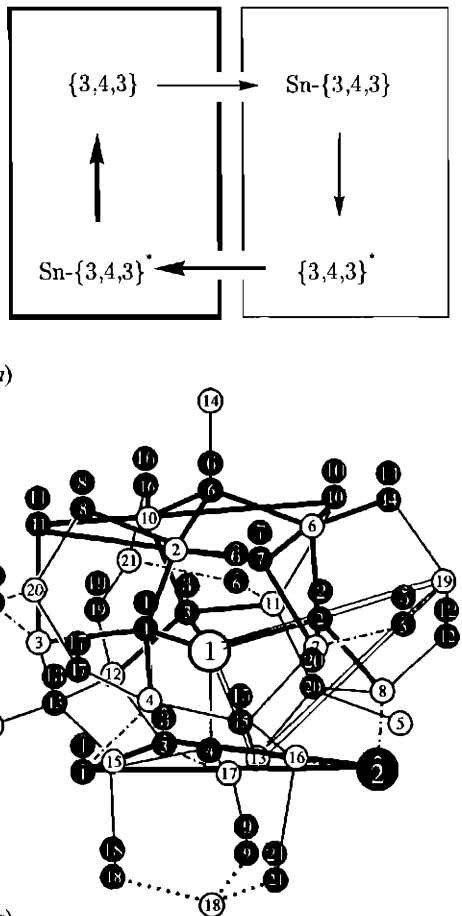


Рис. 21. «Замкнутый» алгоритм Госсета. *а*) Последовательность шагов «алгоритма Госсета» изображена тонкими стрелками, а его замыкание — жирными. Политоп {240} определяется замкнутым циклом схемы как объединение исходного политопа {3, 3, 5} (тонкая рамка) с его конгруэнтной копией. *б*) Построение политопа {240} по «замкнутому» алгоритму Госсета. Октаэдр $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, 7′, 10′, 11′ принадлежит политопу {3, 4, 3}, его центр 1-октаэдру с гранью 1, 19, 13 из политопа {3, 4, 3}*. 1 и $\hat{2}$ — центры икосаэдров из белых и черных шаров, принадлежащих политопам Sn-{3, 4, 3} и Sn-{3, 4, 3}*.

(рис. 4.2.d. [38]). Наряду с символикой РСП будем использовать и символ объединения двух полиэдров относительно общего центра, пригодный и для НСП:

$$\{6, 3\}[2\{3, 6\}] = \{3, 6\} \cup \varphi\{3, 6\}, \qquad \varphi^2 = 1, \tag{20}$$

где φ — элемент 2-го порядка, отображающий исходную мозаику $\{3, 6\}$ в конгруэнтную ей мозаику $\varphi\{3, 6\}$. Аналогично (20), составная карта

$$\{6, 3\}^{3(i)}_{2,1}[2\{3, 6\}^{6(i)}_{2,1}] = \{3, 6\}^{6(i)}_{2,1} \cup \varphi_i\{3, 6\}^{6(i)}_{2,1}, \quad i = 1, 2, \ldots, I, \quad \varphi_i^2 = 1 \tag{21}$$

совпадет с картой $\{6, 3\}^{3(i)}_{2,1}$ (рис. 11, *в*; рис. 15, *а, в*; рис. 9, *д*), если каждую «белую» вершину $\{3, 6\}^{6(i)}_{2,1}$ соединить с ближайшими к ней «черными» вершинами $\varphi\{3, 6\}^{6(i)}_{2,1}$. Карта $\{6, 3\}^{3(i)}_{2,1}$ определяет бихроматическое нерегулярное разбиение сферы на гексациклы и обладает 7 белыми и 7 черными вершинами, $18 = 21 - 3$ ребрами и 6 гранями; а картой, определяющей нерегулярную триангуляцию сферы, является 7-вершинная карта $\{3, 6\}^{6(i)}_{2,1}$ с $15 = 21 - 6$ ребрами и 10 треугольными гранями. При условии равенства ребер карты $\{3, 6\}^{6(i)}_{2,1}$ определяют полиэдры Залгаллера [4], при $i = 1, 2, 3$ — это объединения 4 идеальных тетраэдров, при $i = 4$ — это одношапочный октаэдр (объединение октаэдра и тетраэдра) из ГЦК-решетки. Определяемые картами $\{3, 6\}^{6(i)}_{2,1}$ триангулированные полиэдры изображены в строке 4 табл. 1.

n-мерным симплексом называется выпуклая оболочка $n + 1$ точек евклидова пространства, не лежащих в $(n-1)$-мерном подпространстве. Для E^3 симплекс — это тетраэдр и, следовательно, любую структуру можно разбить на объединения тетраэдров. Если тетраэдры незначительно отличаются от идеальных, то такую структуру (металлы, металлические стекла и т.п.) можно назвать тетраэдрической. В основополагающих работах [48, 49] были рассмотрены возможные ансамбли из жестких шаров и показано, что случайная упаковка жестких шаров с равными расстояниями между ними (модель идеальной жидкости) содержит только 5 полиэдров пустоты: тетраэдр, октаэдр и три полиэдра Бернала. В [49] были определены конфигурации наиболее вероятного расположения жестких сфер, если число последних достаточно мало. Кроме кластеров из ГЦК-решетки, все эти конфигурации (названные псевдоячейками) представляют собой объединения (по граням) тетраэдров с числом вершин от 4 до 10. Кластеры $\{3, 6\}^{6(i)}_{2,1}$, из которых мо-

Таблица 1

Объединения тетраэдров, определяемые подсистемами корней решетки H_4 и многоугольником Петри политопа {3,3,5}					Полиэдры пустоты
$A_2 \vee A_1$	$A_1 \vee A_1 \vee A_1$	H_3	$H_2 \vee A_1$		A_{i-1}, D_{i-1}
(6_1)	(2)		(10_1)	30/11	21 M_1
	20 $2M_1$				22 M_2
	19 $3M_1$				23 $2M_2$
16 $3M_1+M_1$		17 25 $5M_1$		18 30/11(7)	24 $2M_2+M_1$
11 M_1+16	12 $M_1^4+M_1$	13 27 M_1+17	$G_2 \vee A_1$ 14 $6M_1$ 28	15 30/11(8)	26 Z8
6 M_1^4+16	7 30 $2M_1+12$	8 31 $3M_1+17$	9 32 M_1+17+M_1	10 30/11(9)	29 Z9
1 M_1^3+16	2 34 $2M_1+12+2M_1$	3 35 $3M_1+2M_1+17$	4 36 $3M_1+17+M_1$	5 30/11(10)	33 37 Z10

гут быть собраны различные тетраэдрические структуры, удовлетворяют требованиям [49], поэтому назовем их порождающими кластерами тетраэдрических структур (ПКТ).

Из определяемых картами $\{6, 3\}^{3(i)}_{2,1}$, $i = 1, 2, 3, 4$, особых кластеров AC могут быть собраны различные AC, поэтому назовем их порождающими кластерами алмазоподобных структур (ПК). Если в таком ПК соединить между собой только белые вершины, то образуется «белый» ПКТ, определяемый картой $\{3, 6\}^{6(i)}_{2,1}$. При соединении черных вершин образуется «черный» ПКТ, конгруэнтный «белому». При переходе от то-

ра к сфере (посредством отбрасывания ручки, дополняющей сферу до тора) РСП на торе трансформируется в НСП в E^3. В РСП расстояния между ближайшими вершинами разных цветов одинаковы, это сохраняется и в НСП, обеспечивая почти идеальную тетракоординированность ПК как равенство расстояний от вершины одного цвета до окружающих ее вершин другого цвета. Полиэдры пустоты Бернала, рассматриваемые как центры жестких шаров одного радиуса, обладают ЦП меньше объема шара; поэтому ЦП в ПКТ меньше, чем у любого равновершинного полиэдра с той же длиной ребра. Это означает, что и ПК, образованный двумя ПКТ, обладает минимально возможной (при данных геометрических параметрах) ЦП. Невозможность регулярного разбиения сферы на гексациклы определяет и неплоскогранность ПК, задаваемого картой $\{6, 3\}^{3(i)}_{2,1}$. Вышеизложенное позволяет определить идеальный ПК данного типа как неплоскогранный полиэдр, граф которого вкладывается в граф инцидентности PG(2, 2), а вершины принадлежат двум ПКТ, образующим НСП с минимально возможной ЦП.

Как было показано выше (см. II.5) ПК, определяемые PG(2, q), $q \geqslant 5$, либо нереализуемы, либо являются объединением кластеров, определяемых PG(2, q), $q \leqslant 4$. Поэтому, в общем случае, граф идеального ПК вкладывается в граф инцидентности PG(2, q), $q = 2, 3, 4$. Если граф ПК образован объединением ближайших друг к другу вершин разных ПКТ, то граф бихроматический, собран лишь из гексациклов и определяется дезарговой подконфигурацией PG(2, q); если в ПК ближайшими друг к другу являются и вершины одного ПКТ, то граф содержит пента- гептациклы и определяется недезарговой подконфигурацией PG(2, q).

Определяющий ПК нерегулярный составной полиэдр может быть образован объединением двух любых ПКТ, поэтому задача априорного вывода всех возможных ПК фактически сводится к задаче определения всех возможных ПКТ. На «симметрийном» уровне «предельность» PG(2, 4) определяется ее вложением в алгебраическую конструкцию MOG (рис. 16, *б*), которая, в конечном счете, определяется системой корней E_8. Это означает, что все ПК, а значит, и ПКТ должны быть получены из системы корней E_8 (или определяемых ею конструкций).

Решетка E_8 возникает по конструкции A из кода Хэмминга $\mathscr{H}_8$, который, в свою очередь, является расширением кода Хэмминга $\mathscr{H}_7$, подмножество из 7 слоев которого является системой Штейнера $S(2, 3, 7)$, совпадающей с PG(2, 2). Из 120 икосианов, соответствующих вершинам $\{3, 3, 5\}$, 112 в силу (5) соответствуют $16 \cdot 7$ векторам вида $((^1/_2)^4, 0^4)$ решетки E_8; поэтому, наряду с традиционным определением $\{3, 3, 5\}$

посредством 120 икосианов (1), справедливы и соотношения:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{PG}(2,2) = & \mathrm{S}(2,3,7) & \to \mathscr{H}_7 & \to \mathscr{H}_8 & \to E_8 & \to \{3,3,5\} \\ \downarrow & & & & \| & \\ \{6,3\}_{2,1}^{3(i)} \leftarrow & \{3,6\}_{2,1}^{6(i)} \subset \{4,3,3\} \cdot \{3,6\}_{2,1}^{6(i)} & & & \cup & \{3,3,4\}, \end{array} \tag{22}$$

где 112-вершинный политоп $\{4,3,3\} \cdot \{3,6\}_{2,1}^{6(i)}$, $i \leqslant 3$ получается из политопа $\{4,3,3\}$ (*рис. 5, б*) «*присоединением*» к каждой из его 16 вершин 6 ближайших вершин политопа sn-$\{3,4,3\}$ (рис. 20, *в, г*); 8-вершинный политоп $\{3,3,4\}$ дуален политопу $\{4,3,3\}$.

Семь вершин одношапочного октаэдра $\{3,6\}_{2,1}^{6(i)}$, $i=4$ определяют 6 векторов ГЦК-решетки D_3, образующих подсистему системы корней C_3 (рис. 8, *в*). Систему C_3 можно рассматривать как результат определения системы корней E_7 над полем вещественных чисел [57], так как E_7 возникает по конструкции A из кода Хэмминга $\mathscr{H}_7$, то справедливы соотношения, связывающие все рассмотренные ранее конструкции:

$$\begin{array}{ccccccc} & C_3 & \leftarrow & E_7 & \leftarrow E_7 + A_1 = & E_8 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \\ \mathrm{PG}(2,2) = \mathrm{S}(2,3,7) \to & \mathscr{H}_7 & \to & \mathscr{H}_8 & \to \{3,3,5\} \\ \downarrow & & & & & \downarrow \\ \{6,3\}_{2,1}^{3(i)} \leftarrow \{3,6\}_{2,1}^{6(i)} & \subset \{4,3,3\} & \cdot & \{3,6\}_{2,1}^{6(i)} & \cup & \{3,3,4\} \end{array} \tag{23}$$

где $E_7 + A_1$ — *разложение* E_8 *на страты* [41].

Из соотношений (23) следует, что ПКТ $\{3,6\}_{2,1}^{6(i)}$, $i=1,2,3,4$ определяются подсистемами системы корней H_4, которую образуют 120 икосианов, соответствующих вершинам политопа $\{3,3,5\}$. Возможность восстановления системы корней E_8 по H_4 (3) позволяет утверждать, что все ПКТ, которые составляют ПК, вкладываемые в E_8 (в общем случае в 24-мерную решетку Лича, определяемую E_8 [34]), могут быть определены как подсистемы H_4.

2. Система порождающих кластеров тетраэдрических структур

Группа отражений $[3,3,5]$ может быть задана системой образующих подгрупп [36], которые также являются группами отражений, например:

$$[3,3,5] = \{[3,5],[3,3]\} = \{[3,5],[1]\times[1]\times[1]\times[1]\} = \ldots, \tag{24}$$

где $[3,5] = 3\bar{5}m$, $[3,3] = \bar{4}3m$, $[1]\times[1]\times[1]\times[1] = m\times m\times m\times m$.

Эти подгруппы определяют подсистемы решетки корней H_4, которая может быть задана, например, парой подсистем:

$$H_4 = \{H_3 \times A_1, A_4\} \tag{25}$$

где все вектора из H_3 перпендикулярны векторам из A_1.

Объединение тетраэдров в E^3 представляет собой комплекс — множество, состоящее из симплексов, примыкающих друг к другу по целым граням. При этом вместе с симплексом в комплекс входят и все его грани, и каждая точка принадлежит лишь конечному числу симплексов. Каждому комплексу X можно сопоставить группу гомологии $H_n(X)$ комплекса X, которая определяет «проекцию» топологии в алгебру. Группы гомологий и когомологий играют важнейшее значение в алгебраической геометрии; в частности, федоровская группа (как расширение группы трансляций T при помощи кристаллического класса G) однозначно задается элементом 2-ой группы когомологии $H^2(T, G)$; если элемент группы $H^2(T, G)$ — нулевой, то группа — симморфная [33]. Систему H_3 образуют 30 векторов (корневой полиэдр — икосидодекаэдр), проведенных из центра икосаэдра к серединам его ребер (рис. 5, *г*); подсистему положительных корней $\Delta^+_{15}(H_3)$ составляют 15 таких векторов, которым перпендикулярны 15 ребер икосаэдра, соединяющих 9 его вершин. Соединив эти вершины с центром, получим 10-вершинное объединение по граням 7 тетраэдров. Подсистему положительных корней A_4 составляют 10 векторов $\Delta^+_{10}(A_4)$, проведенных из центра сферы S^3 к серединам ребер 5 тетраэдров, которые составляют политоп $\{3, 3, 3\}$. При наложении определенных ограничений на простые корни $\Delta^+_{10}(A_4)$ она может быть отображена [57] в 3-мерную систему $\Delta^+_n(A_{4-1})$, $n \leqslant 9$. Середины ребер тетраэдра — это вершины октаэдра, таким образом $\Delta^+_n + (A_{4-1})$ определяет не более чем 10-вершинное (9 векторов и начало координат) объединение тетраэдров и октаэдров (полуоктаэдров).

Возможность восстановления A_4 по A_{4-1} и $H_3 \times A_1$ по H_3, позволяет задать систему $H_4(25)$ и максимальными трехмерными подсистемами корней:

$$H_4 \to \{H_3, A_{4-1}\} \to \{\Delta^+(H_3), \Delta^+(A_{4-1})\}, \tag{26}$$

которые определяются не более чем 10-вершинными объединениями по граням тетраэдров и других триангулированных полиэдров, удовлетворяющих определению ПКТ. Таким образом, число вершин в ПКТ не должно превышать 10, что согласуется и с «критерием Бернала» [48,49], согласно которому полиэдры пустоты и псевдоячейки характеризуются числом вершин от 4 до 10. Это согласуется и с предшествующим

рассмотрением конструкций проективной геометрии (см. II.4). Действительно, самодуальная конфигурация Дезарга 10_3 определяет 20-вершинный кластер алмаза (рис. 12 *г*), который может быть трансформирован в додекаэдр — ячейку тетракоординированного, но не алмазоподобного политопа $\{5, 3, 3\}$. Этот же кластер может быть вложен и в политоп $\{240\}$ [52]; следовательно, тетракоординированные кластеры всегда являются алмазоподобными лишь при числе вершин не более 20, а значит, число вершин в ПКТ не должно превышать 10.

Два полиэдра называются элементарно-подобными, если они могут быть преобразованы друг в друга посредством конечного числа элементарных операций: одномерного подразделения (новая вершина разбивает ребро на два) и обратной операции одномерного укрупнения; двумерного подразделения (новое ребро разбивает грань на две) и обратной операции двумерного укрупнения. Нетождественное произведение двумерного укрупнения и двумерного подразделения представляет собой дисклинационный квадруплет q или 2π-дисклинацию, [19], действие которого иллюстрирует, например, переброска диагонали в «ромбе» из двух треугольных граней икосаэдра (рис. 5 *г*). Действительно, замена короткой диагонали в таком «ромбе» на длинную меняет число сходящихся в его вершинах ребер на ± 1, что эквивалентно проведению $+2\pi/5$, $-2\pi/5$, $+2\pi/5$, $-2\pi/5$ дисклинаций через каждую из этих вершин. Дисклинационный квадруплет осуществляет, например, трансформацию объединения тетраэдров в элементарно-подобный ему триангулированный полиэдр. В частности, если в объединении $3M_1$ трех тетраэдров выделить «ромб» $ABDC$, то в нем ребро AD — короткая диагональ, а длинная диагональ BC не является ребром. Заменив ребро AD ребром BC и потребовав равенства ребер, получим октаэдр, в котором ребро BC — короткая диагональ ромба $ABCD$ (табл. 1, 3 строка).

Итак, ПКТ — это не более чем 10-вершинный комплекс тетраэдров или элементарно-подобный ему триангулированный полиэдр, определяемый 3-мерной подсистемой корневых векторов, вкладываемой (или отображаемой) в решетку корней H_4. Группа гомологии комплекса характеризует его как геометрическую (конечную полумодулярную) решетку, в которой каждый элемент является объединением точек [33, 36, 58, 59]. Проективная геометрия $\mathrm{PG}(2, q)$ — это модулярная геометрическая решетка над полем Галуа порядка q [35, 59], поэтому определение ПКТ как комплекса, в конечном итоге, приводит к определению графа ПК как подграфа графа инцидентности подконфигурации $\mathrm{PG}(2, q)$, $q = 2, 3, 4$.

Согласно (24), произведение плоскостей отражения (определяющих простые корни подсистемы корней) является порождающим элементом циклической подгруппы группы [3, 3, 5], которой соответствует ось политопа $\{3, 3, 5\}$. Подсистемы $A_2 \times A_1$, $H_2 \times A_1$ и $A_1 \times A_1 \times A_1$ определяют

оси 6_1, 10_1 и 2, действующие в стержнях из взаимопроникающих икосаэдров с общей 3, 5 и 2 осями (рис. 6*в*); поэтому можно утверждать, что определяемые этими подсистемами ПКТ представляют собой наборы тетраэдров из этих стержней. H_{4-1} — это трехмерная подсистема, определяющая ось 30/11, которая реализуется в образованной тетраэдрами цепочке Бернала. Подсистема H_3 определяет наборы тетраэдров из икосаэдра.

Элементарно-подобные комплексам тетраэдров равнореберные триангулированные полиэдры определяются отображаемыми из $\Delta^+(A_n)$ и $\Delta^+(D_4)$ подсистемами A_{4-1} и D_{4-1}. (Так как $\{H_3, A_4\} \subset D_6 \subset E_8$, то в общем случае возможны триангулированные полиэдры, определяемые и подсистемой D_{6-3}).

Для 4-мерной системы корней введем обозначение: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1234$; отсутствие слагаемого в сумме задается отсутствием соответствующей цифры; увеличение вектора α_i в n раз — символом (ni), $n = 2, 3\ldots$; вектору $-\alpha_i$ соответствует $\bar{i}$. Подсистема $\Delta^+(D_4)$ содержит 6 корней системы $D_3 = A_3 = \{1, 2, 3, 12, 23, 123\}$ и 6 корней $\{4, 24, 124, 234, 1234, 1(22)34\}$, содержащих α_4. Отображение α_4 в 0 позволяет получить подсистему $\Delta_7^+(D_{4-1}) = \{1, 2, 3, 12, 23, 123, 1(22)3\}$, в которой простой корень α_3 перпендикулярен простому корню α_1. Отбросив этот корень, получаем подсистему $\Delta_6^+(D_{4-1}) = \{1, 2, 12, 23, 123, 1(22)3\}$, определяющую одношапочный октаэдр — объединение октаэдра и тетраэдра из ГЦК-*решетки* (рис. 8, *в*).

Аналогично, при отображении α_4 в α_2 подсистема $\Delta^+(A_4) = \{1, 2, 3, 12, 23, 123, 4, 34, 234, 1234\}$ отображается в $\Delta_8^+(A_{4-1}) = \{1, 2, 3, 12, 23, 123, (22)3, 1(22)3\}$, которая без α_3 определяет ромбоэдр, состоящий из октаэдра и двух тетраэдров или из двух одношапочных октаэдров, связанных центром инверсии. Чтобы перейти к «несоставному» полиэдру, перебросим (посредством дисклинационных квадруплетов q) диагонали в двух соседних ромбах этого ромбоэдра и перейдем в элементарно-подобный ему триангулированный полиэдр, являющийся полиэдром Бернала $Z8$. Таким образом, система векторов $\Delta_7^+(A_{4-1})^q$ определяет $Z8$. По такому же алгоритму могут быть получены и полиэдры Бернала $Z9$ и $Z10$.

Условия $\alpha_4 = 0$, $\alpha_3 = 2\alpha_1$, наложенные на $\Delta^+(D_4)$, приводят к системе корней $\Delta^+(G_2) = \{1, 2, 12, (21)2, (31)2, (31)(22)\}$ (корень $2\alpha_1$ отбрасывается в силу наличия в системе корня α_1 [57, 60]), которая возникает в силу k-квазиразложимости D_4 [57]. Появление не вкладываемой непосредственно в H_4 системы корней G_2 (рис. 8*б*) обусловлено тем, что задаваемая системой корней G_2 исключительная простая группа Ли G_2 — это подгруппа в группе вращений SO_7, состоящая

из автоморфизмов алгебры октав e_8, системой корней которой является E_8 [60]. Соотношения между системой корней D_4 и определяемыми ею (по k-квазиразложимости) подсистемами представлены таблицей на рис. 22 *а*.

Система G_2 (*точнее* $G_2 \times A_1$) *определяет в качестве* ПКТ гексагональную бипирамиду, необходимость введения которой обусловлена тем, что если 5 идеальных тетраэдров имеют в E^3 общее ребро, то между гранями 1-го и 5-го остается зазор в 0,104 идеального тетраэдра [17].

Корневые вектора $\Delta_6^+ D_6(4-1)$ являются и корневыми векторами *системы* C_3, *которая возникает из системы* E_7 (23) при k-квазиразложимости [57]. Поэтому все рассматриваемые системы корней можно связать соотношениями k-квазиразложимости и вложения:

$$E_7 \to G_3, \quad E_7 \to F_4 \supset D_4 \to G_2 \leftarrow H_4 \leftarrow E_8, \quad D_4 \supset D_3 = A_3 \subset A_4, \quad (27)$$

где система корней F_4 состоит из двух координационных сфер решетки корней D_4, которая возникает в нашем рассмотрении в силу соотношений (27). Группой Коксетера решетки F_4 является группа [3, 4, 3], отображающая на себя политоп {3, 4, 3}, который является слоем в расслоении Хопфа для системы E_8 [40].

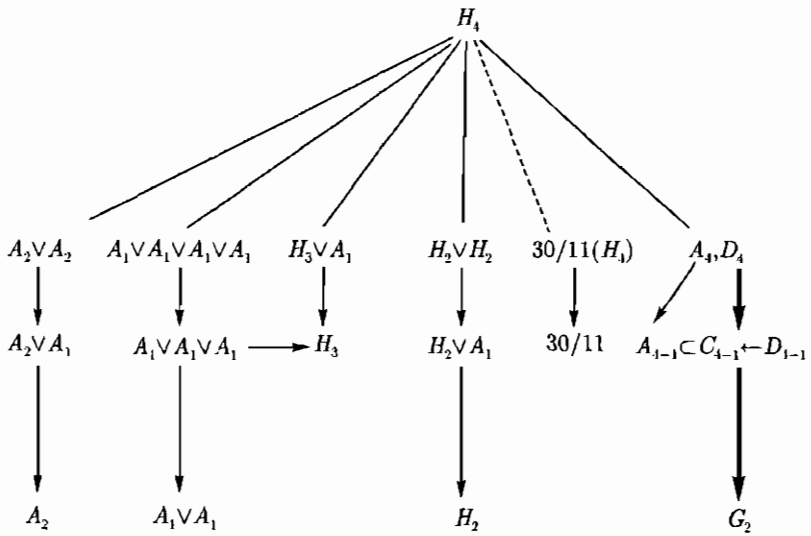
Вкладываемые (или отображаемые) в H_4 *подсистемы* корней образуют систему (рис. 22 *б*), которая определяет строение системы ПКТ (табл. 1). В первых пяти столбцах находятся объединения тетраэдров: в 3-м — принадлежащие икосаэдру, в остальных — стержням из тетраэдров, определяющих оси политопа {3, 3, 5}. В 6-ом столбце расположены полиэдры — пустоты Бернала, являющиеся равнореберными триангулированными полиэдрами Залгалера. Для обозначения полиэдров используются символы Залгалера: M_1 — тетраэдр, M_2 — полуоктаэдр, $2M_2$ — октаэдр, nM_1 — *объединение* n *тетраэдров с общим ребром*. В табл. 1 приводятся изображения ПКТ с внутренними ребрами, которым соответствует «верхний» номер; этот же ПКТ без внутренних ребер обозначается «нижним» номером. Например, ПКТ № 17 — объединение 5 тетраэдров; ПКТ № 25 — пентагональная бипирамида. Символ $mM_1 + {}$ $+ \text{№}\, j + kM_1$ обозначает, что «сверху» на грани ПКТ №j «поставлены» m тетраэдров, а «снизу» к нему добавлено объединение k тетраэдров. В символе ПКТ 5 столбца указывается число вершин в объединении тетраэдров из цепочки Бернала.

Число вершин полиэдров последовательно возрастает от строки к строке; в каждой из 7 строк находятся элементарно-подобные полиэдры. В 4-ой строке находятся рассматриваемые ранее 7-вершинные ПКТ № 16, 25, 18, 24, графы которых определяются картами $\{3, 6\}_{2,1}^{6(i)}$: $i = 1, 2, 3, 4$. Для перехода *по* строке между ПКТ разных столб-

	2,4	1,2,4	2,3,4	1,2,3,4	1,2·2,3,4			4	
1	2	1,2	2,3	1,2,3			3		D_3
1	2	1,2	2,3	1,2,3	1,2·2,3		3		$D_4 \to C_3$
1	2	1,2	2·1,2	3·1,2	3·1,2·2	G_2	2·1		

D_4

а)



б)

Рис. 22. Иерархия максимальных подкорневых систем некристаллографической системы корней H_4. *а*) *Подсистемы положительных корней* D_4, D_3, $D_4 \to C_3$ и G_2. Вектор $\sum c_i\alpha_i$ задается символом $c_1 1$, $c_2 2$, $c_3 3$, $c_4 4$, ($c_i = 0, 1, 2, 3$); в котором при $c_i = 0$, позиция опускается. В 3-ей строке выделено 6 векторов подсистемы $D_4 \to C_3$, которые определяют одношапочный октаэдр (рис. 8 *в*). *б*) В первой, второй и третьих строках схемы расположены 4, 3 и 2-мерные подсистемы корней. Символами A_{4-1}, C_{4-1} и D_{4-1} обозначены 3-мерные подсистемы A_4, C_4 и D_4. *Жирными линиями показана схема к-квазиразложимости* D_4 в G_2.

Подсистема 30/11 (H_4) не является максимальной подкорневой системой

цов необходимо в исходном ПКТ удалить внутренние ребра, найти «ромб» из двух треугольных граней и заменить в нем короткую диагональ длинной. Требование равенства ребер (и восстановление внутренних ребер) приводит к трансформации исходного ПКТ в ПКТ другого столбца.

Всего систему ПКТ образуют 27 ПКТ без внутренних ребер и 9 ПКТ с внутренними ребрами. Особый 10-вершинный ПКТ №37 определяется системой корней $\{\Delta_6^+(D_{4-1}), \overline{2}, \overline{13}, (21)23\}$ и представляет собой ПКТ №24 с тремя дополнительными треугольными гранями. Этот ПКТ может быть получен из 20-вершинного кластера алмаза при соединении между собой только белых (черных) вершин (рис. 12*г*).

Система ПКТ составляет математический базис обобщенной кристаллографии тетраэдрических структур, к которым, в частности, относятся и плотноупакованные металлические структуры (ПМС). Действительно, она содержит все полиэдры пустоты и псевдоячейки Бернала [48, 49], полученные как структурные реализации конструкций алгебраической геометрии. Это, в свою очередь, обеспечивает систематический подход к пониманию законов строения ПМС и механизма структурных ФП между ними. Так, например, взаимные трансформации находящихся в одной строке таблицы ПКТ можно считать основой структурной модели плавления нететраэдрических металлов (НПМС), при которой кластеры структуры НПМС переходят в объединения тетраэдров, свойственные ПМС. Если для описания плавления ПМС было достаточно конструкции политопа $\{3, 3, 5\}$ [21,22], то в случае НПМС для этого уже необходимо использовать строение решетки корней H_4, которая определяет и этот политоп, и другие конструкции алгебраической геометрии.

3. Система порождающих кластеров алмазоподобных структур

Построение системы ПКТ позволяет определять ПК символом, аналогичным символу составного полиэдра:

$$\text{ПК}_{i,j} = \left((m_1 + m_2)_f, (n_1 + n_2)_d\right)^{\lambda-\rho} \langle i, j\rangle, \tag{28}$$

где $((m_1 + m_2)_f, (n_1 + n_2)_d)$ — минимальная подконфигурация конфигурации (m_f, n_d), $m, n = 4, \ldots, 10$ конечной проективной плоскости $\mathrm{PG}(2, q)$, $q = 2, 3, 4$. Таблица инцидентности (m_f, n_d) содержит подтаблицу $m_1 \times n_1$, определяющую бихроматический граф ПК, при отбрасывании из нее λ, знаков инцидентности; i, j — номера ПКТ из системы ПКТ. Добавка ρ ребер, соединяющих вершины одного цвета (и не принадлежащих графу инцидентности $\mathrm{PG}(2, q)$) в бихроматическом графе ПК, приводит к графу ПК, который содержит и пента- гептациклы. В дальнейшем для простоты мы будем пользоваться

лишь упрощенным символом $(m_f, n_d)^\lambda\langle i, j\rangle$, в котором $(m_f, n_d)^\lambda$ — минимальная подконфигурация, в которую вкладывается граф ПК. Подконфигурация $PG(2, q)$ может определяться и пересечением конфигураций [35, 44]. Если ПК определяется конгруэнтными ПКТ, то он — самодуальный и определяется символом $ПК_{i,i}$ $(m_f)^\lambda\langle i\rangle$. К таким ПК относятся, в частности, рассмотренные ранее параллелоэдры алмаза — $ПК_{24,24} = (7_3 \cap 10_3)\langle 24\rangle$ (рис. 9 *д*) и ПК ячейки политопа $\{240\}$ $ПК_{16,16} = (7_3)^3\langle 16\rangle$ (рис. 15 *а, б*) [44]. Примером ПК «общего вида» является несамодуальный ПК ВС-8 (рис. 17 *в*), определяемый символом $ПК_{23,28} = (6_4, 8_3)\langle 23, 28\rangle$.

Символ ПК (28) позволяет определить систему ПК как квадрат Кэли (таблица 1), где все ПКТ расположены в строку и столбец, а ПК определяется как «произведение» $ПКТ_i$ из i-ой строки и $ПКТ_j$ из j-го столбца. $ПК_{i,j}$ и $ПК_{j,i}$ — энантиаморфны [44], поэтому в табл. 2, представляющей собой часть системы ПК [44], помещен лишь символ $ПК_{i,j}$, а на место (симметрично расположенного относительно диагонали) $ПК_{j,i}$ помещается символ конфигурации (m_f, n_d). Для самодуальных $ПК_{i,i}$, расположенных на диагонали, эта информация размещается на пересечении i-го столбца с подтабличной строкой. Число вершин $ПК_{i,j}$ равно сумме вершин $ПКТ_i$ и $ПКТ_j$.

Порядок размещения ПКТ в строке и столбце табл. 2 выбран так, чтобы блочное строение системы ПК отражало закономерности строения АС, в частности, их деление на 3 основных типа: политопный, реально-кристаллический и промежуточный (линейно-дефектный). Блоки выделены жирными линиями, пересечение политопного и реально-кристаллического блока осуществляется только по клетке 21, 21.

В «реально-кристаллическом» блоке размещены ПК, из которых могут быть собраны подструктуры кристаллических AC с введенными в них линейными дефектами [44]. L_1 — 8-вершинный «фонарь» из структуры лонсдейлита, совпадающий с описанным выше НСП, возникающим при движении двух тетраэдров в $\{4,3\}[2\{3,3\}]\{3,4\}$ вдоль общей тройной оси. L_2 генерирует канал 0001 в лонсдейлите. Кластеры лонсдейлита $L_1 = ПК_{21,21} = \{4,3\}\langle 21\rangle$ и $L_2 = ПК_{23,23} = \{3,5\}\langle 23\rangle$ возникают при отбрасывании вершин 2, 3, 4, 1′, 2′, 7′ и 1,4 в кластере лонсдейлита $L_3 = ПК_{24,24} - (9_3)_2\langle 24\rangle$ (рис. 11 *б*). При отбрасывании в параллелоэдре алмаза $D_2 = ПК_{24,24} = (7_3 \cap 10_3)\langle 24\rangle$ (рис. 9 *д*) 4 вершин возникает кластер $D_1 = ПК_{21,23} = (4_3, 6_2)\langle 21, 23\rangle$, совпадающий с углеродным остовом молекулы адамантана (рис. 19 *а*). ПК ядра винтовой дислокации в алмазе $ПК_{25,25} = (9_3)_3\langle 25\rangle$ (рис. 11 *в*) обозначен в табл. 2 через D^d. Самодуальные ПК из полиэдров Бернала $ПК_{26,26} = 2Z8 =$

$= (9_3)_2\langle 26\rangle$ (рис. 10*б*) и $\text{ПК}_{29,29} = 2Z9 = (9_3)_1\langle 29\rangle$ могут генерировать линейные дефекты в *AC* [44].

В политопном блоке размещены кластеры политопа {240}, минимальным из которых является 8-вершинный Р.В. (petit barelan [18]), задаваемый символом $\text{ПК}_{21,21} = (4_3)\langle 18\rangle$, где 4_3 — самодуальная конфигурация из 4 вершин и 4 граней тетраэдра. Р.В. возникает из L_1 при вращении одного из тетраэдров вокруг общей оси; направление вра-

Таблица 2

	1	2	3	14	16	17	18	19	21	22	23	24	25	26	28	29	37
1	Dod		Dod														
2														LD^d			
3	10_3^3																
14											R8						
16					{240}							$\frac{30}{11}^{-dc}$					
17							$\frac{40}{9}$					*al*-Ge					
18						$\widetilde{10}_3^4$	$\frac{30}{11}$					D_2^R, L_3^R					
19								$\frac{30}{11}-2$				D_2^{+dc}					
21									PB L_1		D_1						
22										M_2^2							
23				$(6_3,8_3)^{-1}$					$4_3,6_2$		L_2				BC8		
24					T_3^2	T_3^3	$\frac{7_3}{(9_3)_2}$	T_2^2				D_2, L_3					
25													D^d				
26		$(10_3)_2$												2Z$_8$			
28											$6_4,8_3$						
29																2Z$_8$	
37																	Dod
	$\widetilde{10}_3^4$				7_3		7_3	{3,5}	4_3	{4,4}$_{3,1}$	{3,5}	$\frac{7_3}{(9_3)_2}$	$(9_3)_3$	$(9_3)_2$		$(9_3)_1$	10_3

щения определяется энантиоморфизмом $\{240\}$. Генерирующий спираль Бернала в политопе $\{240\}$ ПК30/11 = $\text{ПК}_{18,18} = (7_3^3)\langle 18\rangle$ (рис. 15*в*) самодуальный, а ПК40/9 = $\text{ПК}_{17,18} = (10_3^4, 10_3^4)\langle 17, 18\rangle$ (рис. 14*б*) хотя и вкладывается в самодуальную конфигугацию 10_3^4, но образован двумя неконгруэнтными ПКТ.

В промежуточный блок попадают и «энантиаморфные копии неэнантиаморфных ПК»; например, $\text{ПК}_{18,24} = D_2^R = (7_3 \cap 10_3)\langle 18, 24\rangle$ представляет собой просто закрученный вправо $\text{ПК}_{24,24}$ (рис. 9*д*). Действительно, ядро винтовой дислокации в алмазе энантиаморфно, поэтому граничащие с ним ПК алмаза тоже должны быть энантиаморфны; ПК алмаза, которые граничат с ними, обладают уже меньшим энантиаморфизмом и т. д. до полного отсутствия энантиаморфизма в достаточно удаленных от ядра винтовой дислокации ПК алмаза. ПК с пента- гептациклами также попадают в промежуточный блок. Если в ПК ВС-8 = $= (6_4, 8_3)\langle 23, 28\rangle$ №28 заменить на ПКТ №14 (табл. 1), то возникает ПК $R8 = (6_4, 8_3)^{-1}\langle 14, 23\rangle$, так же, как и ПК ВС-8, генерирующий кристаллическую фазу высокого давления в Si [55]. Таким образом, возникновение пентациклов в ПК с четным количеством вершин обусловлено наличием внутреннего ребра.

Введение $+2\pi/6$ $(-2\pi/6)$ дисклинаций в ПК D_2 (ПК 30/11) приводит к их трансформации в ПК D_2^{+dc} (ПК $30/11^{-dc}$) с поперечными пента- гептациклами. Эти ПК определяются недезарговыми конфигурациями T_2 и T_3 ступеней Холла (рис. 19*б*, *в*) и сокращенно обозначаются ПК $D_2^{+dc} = \text{ПК}_{19,24} = T_2^2\langle 19, 24\rangle$, и $\text{ПК}30/11^{-dc} = \text{ПК}_{16,24} = T_3^2\langle 16, 24\rangle$. Итак, введение дисклинаций (вдоль особых направлений) в ПК с четным числом вершин трансформирует их в ПК с нечетным числом вершин, содержащие пента- гептациклы перпендикулярные оси дисклинаций. Возможны и такие трансформации бихроматических ПК, которые не изменяют числа вершин, но приводят к появлению одинакового числа пента- и гептациклов. Подобным примером является трансформация из ПК D_2 в ПК кристалла allo-Ge [44].

И кристаллический, и политопный блоки завершают 20-вершинные ПК, которые могут быть трансформированы в додекаэдры [44, 51]. Додекаэдр — это минимальный идеальный ПК тетракоординированной, но не алмазоподобной структуры. Поэтому завершение табл. 2 кластерами $\text{ПК}_{1,1}$ и $\text{ПК}_{37,37}$ означает выделение AC из всего класса тетракоординированных структур: клатратов, газогидратов и т. п. Это позволяет определить (идеальную) AC как тетракооородинированную структуру, собираемую из кластеров табл. 2.

ПК (набор ПК), который генерирует данную AC, позволяет классифицировать ее по типу подконфигураций $\text{PG}(2, q)$, $q = 2, 3, 4$, и опреде-

лять симметрийно-возможные фазовые переходы из этой AC [44]. Таким образом, система ПК (частично представленная в форме табл. 2) содержит все симметрийно-возможные ПК, из определенных наборов которых могут быть собраны все симметрийно-возможные AC.

Заключение

Используемый в «Дополнении» аппарат можно назвать обобщенной кристаллографией тетраструктур (ОКТ), его математическая основа изложена, в основном, в работах [18–24, 33–43, 57–62]. Основой ОКТ фактически является соответствие между расслоением Хопфа в применении к E_8 и кольцом из 120 икосианов, которое определяет политоп $\{3, 3, 5\}$ (разбиение сферы S^3 на 600 правильных тетраэдров) и некристаллографическую решетку корней H_4 [18, 34, 42]. Вышеизложенное определило путь построения ОКТ, этапы которого мы конспективно приводим ниже:

1. Подсистемы корневых векторов решетки H_4 и многоугольник Петри политопа $\{3, 3, 5\}$ определяются кодом группы отражений $[3, 3, 5]$ политопа $\{3, 3, 5\}$. В свою очередь, они задают объединения тетраэдров X и (элементарно-подобных им [43]) триангулированных полиэдров X', которые можно назвать порождающими кластерами идеальных тетраэдрических структур (ПКТ). 37 таких ПКТ с числом вершин от 4 до 10 образуют систему ПКТ (табл. 1), содержащую все полиэдры пустоты и квазиячейки, введенные Берналом [48, 49] для объяснения строения идеальной жидкости. Тетраэдрические структуры собираются из определенного набора ПКТ; структурные фазовые переходы между ними определяются взаимными трансформациями ПКТ [44].

2. Система ПКТ позволяет определить порождающий кластер идеальной алмазоподобной структуры (ПК) как невыпуклый полиэдр, вершины которого принадлежат двум ПКТ из системы ПКТ, а граф (образованный объединением ближайших друг к другу вершин этих ПКТ) вкладывается в граф инцидентности конечной проективной плоскости $\mathrm{PG}(2, q)$, $q = 2, 3, 4$. Так как $\mathrm{PG}(2, q)$ — это модулярная геометрическая решетка над полем Галуа порядка q, а группа $H_n(X)$ гомологии комплекса X характеризует его как конечную полумодулярную решетку [33, 35, 36, 58, 59], то определение ПКТ как X или X', в конечном итоге, приводит к вложению графа ПК в граф инцидентности $PG(2, q)$. Если граф ПК образован объединением ближайших друг к другу вершин разных ПКТ, то граф — бихроматический, собран лишь из гексациклов и определяется дезарговой подконфигурацией $\mathrm{PG}(2, q)$; если в ПК ближайшими друг к другу являются и вершины одного ПКТ, то граф содержит пента- гептациклы и определяется недезарговой подконфигурацией $\mathrm{PG}(2, q)$ [44, 45, 50].

3. Система ПК строится как квадрат Кэли для всех ПКТ из системы ПКТ: каждый ПК определяется как объединение ПКТ строки и ПКТ столбца. Число вершин в ПК — от 8 до 20; 20-вершинные ПК могут быть трансформированы в додекаэдр [51], что является принципиальным для выделения АС из всего класса тетракоординированных (клатраты, фуллериты и т. п.) структур. Система ПК разделена на подтаблицы, определяющие ее «политопную», «реально-кристаллическую» и «промежуточную» части, наборы ПК из которых генерируют соответствующие АС [44,53].

4. Сборка АС из ПК требует построения расслоенного пространства, возможного для этого ПК. Такой подход позволяет получить и квазикристаллические алмазоподобные структуры (QAC), которые не могут быть получены стандартным методом среза некоторого многомерного кристалла. Для такой QAC точечная группа является бесконечной, а ее квазикристаллогафическая группа $G_\infty(3)$ является алгебраической подгруппой общей линейной группы $\mathrm{GL}(n, Z)$, заданной над определенным кольцом Z. Этой группе соответствует нетривиальное расслоение, не допускающее непрерывного глобального сечения.

Сама QAC собирается из двух 14-вершинных ПК (бихроматические графы которых вкладываются в $\mathrm{PG}(2, 2)$) и реализуется в E^3 как объединение стержней диаметром ~ 3 нм [44,61,63]. (Впервые модель канала 30/11, окруженного спиралью из чередующихся поперечных пента- и гептациклов с боковыми гексациклами, была построена Н. А. Бульенковым [12]). В [40,42] решетка E_8 определена как прафаза для всех квазикристаллов (в частности, решетка D_6, определяющая икосаэдрические квазикристаллы [15,16], вкладывается в E_8), поэтому построенная в рамках ОКТ модель QAC (рис. X (цветная вклейка)) может соответствовать и «линейно-дефектным» аппроксимантам гиперболических сот, и квазикристаллу с бесконечной точечной группой [24,61–63].

Наиболее эффективным представляется применение ОКТ для исследований и синтеза тонких пленок, в которых частичный или полный отказ от монокристальности и наличие напряжений программируется изначально. Малая толщина тонких пленок значительно расширяет возможности согласования напряжений с упругими (и неупругими) характеристиками материала пленки, и вместо кристалла мы можем получить закономерное, но не кристаллическое распределение линейных дефектов, приводящее к закономерной «осцилляции» допустимых напряжений. Модель QAC позволяет утверждать, что для решения ряда задач более перспективными (по сравнению с получаемыми в настоящее время поликластерными алмазными пленками) будут структуры типа QAC, сохраняющие достаточную преемственность физических свойств при уходе от кристаллической структуры. Особенности строения позво-

ляют QAC сохранять достоинства алмаза, будучи лишенными определенных его недостатков; например, в силу отсутствия плоскостей симметрии QAC (рис. X, (цветная вклейка)) будет лишена присущей алмазу хрупкости [44, 61–63].

Традиционная физика твердого тела делала упор на изучение периодических систем, в которых энергетические уровни характеризовались с помощью волнового вектора. В непериодической системе аморфной структуры описание с помощью волнового вектора неприменимо, поэтому необходимость подхода ОКТ для изучения «аморфных» *AC* представляется очевидной. Действительно, вещества в аморфном состоянии продолжают оставаться важнейшими материалами для прикладного использования, но при этом само понятие аморфной структуры остается «аморфным». Таким образом, применение ОКТ необходимо и для адекватного отображения симметрии таких структур [65]. ОКТ должно применяться и для адекватного симметрийного описания металлов и сплавов, например, для объяснения экспериментальных фактов, наблюдаемых при мартенситных превращений [66, 67]. В частности, только ОКТ можно рассматривать в качестве геометрической основы для модели плавления нететраэдрических металлов.

При размерах кластера 2–5 нм алмаз термодинамически устойчивее чем любая другая форма углерода. В таком наноалмазе $\sim$ 30 % идеальных и $\sim$ 70 % слегка искаженных sp^3 связей [64]. Стержень QAC (рис. X, (цветная вклейка)) удовлетворяет этим условиям [44, 61–63], поэтому, принимая во внимание высокую насыщенность энергией таких наночастиц алмаза, существование QAC внутри наноалмаза представляется достаточно вероятным [64]. Возможно, что лауэграмма (рис. 23) от наночастицы алмаза, определяется наличием QAC внутри нее.

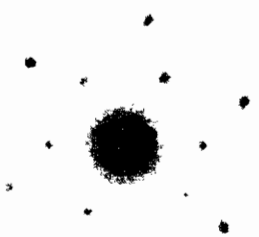


Рис. 23. Лауэграмма от наночастицы алмаза [64]

Согласно модели наночастицы [68–70], ее строение принципиально не может быть адекватно отображено в рамках классической кристаллографии. Применение же аппарата ОКТ (в существующей или адаптированной форме) открывает возможности для единого аналитического описания таких особенностей наномира, как структурное многообразие, фрагментарность, метаморфозы и т. п. В свою очередь, это позволит перейти к учету размера как физикохимического фактора, определяющего особые свойства наноструктур.

Итак, на геометрическом уровне ОКТ осуществляет замену евклидова базиса структурной кристаллографии на более общий базис алгебраической (проективной) геометрии, что приводит к расширению базисных для классической кристаллографии понятий; например, понятие регулярного полиэдра расширяется до составного регулярного полиэдра, политопа, регулярной карты на поверхности, (графа инцидентности) конечной проективной плоскости. На алгебраическом уровне ОКТ осуществляет переход от группы, в которой определена лишь одна операция, к множествам (полям, алгебрам и т. п.), в которых определены минимум две операции.

На структурном уровне применение ОКТ делает возможным адекватное симметрийное описание детерминированных (не только кристаллических!) тетраструктур от макро- до нано-масштабов [62–70].

Часть работы выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-02-16446).

Автор выражает глубокую признательность М. И. Самойловичу за многолетний постоянный интерес к работе и стимулирующие обсуждения. Автор благодарит В. А. Копцика, Л. И. Цинобера, Н. А. Бульенкова, Н. П. Долбилина, С. С. Рышкова, В. С. Крапошина, П. И. Белоброва, В. Я. Шевченко, А. Е. Мадисона за обсуждение различных аспектов работы. Автор благодарит А. А. Реу за большую помощь в оформлении рукописи.

Литература

[1] Delgado Friedrichs O., Dress A. W. M., Huson D. H., Klinowski J., Mackay A. L. *Systematic enumeration of crystalline networks*. Nature, 1999, v. 400, p. 644–647.

[2] Федоров Е. С. *Симметрия и структура кристаллов*. М.: АН СССР, 1949, 630 с.

[3] Зоркий П. М. *Сверхсимметрия молекулярных кристаллических структур*. В кн. «Проблемы кристаллохимии». М.: Наука, 1984, с. 102–134.

[4] Асланов Л.А. Структуры веществ. М.: МГУ, 1989, 161с.

[5] Koptsik V. A. *Advances in theoretical crystallography. Colour symmetry of defect crystals*. Krist. und Technik., 1975, v. 10, № 3, p. 231–245.

[6] Копцик В. А. *Принципы симметризации-дисимметризации Шубникова – Кюри для составных физических систем.* В кн. «Проблемы современной кристаллографии». М.: Наука, 1975, с. 42–60.

[7] Копцик В. А. *Теретико-групповые методы в физике реальных кристаллов и теории структурных фазовых переходов.* В кн. «Теоретико-групповые методы в физике». М.: Наука, 1980, т. 1, с. 368–381.

[8] Талис А. Л., Копцик В. А. *Веночные алгоритмы построения модульных кристаллических структур.* Кристаллография, 1990, т. 35, вып. 6, с. 1347–1353.

[9] Шубников А. В., Копцик В. А. *Симметрия в науке и искусстве.* М.: Наука, 1972, 340 с.

[10] Бульенков Н. А. *Модель диспирационной алмазоподобной структуры (ДААС) и значение возможности образования микровключений ДААС в бездислокационном кремнии.* ДАН СССР, 1985, т. 284, с. 1392–1396.

[11] Бульенков Н. А. *Кооперативный (бимодульный) механизм образования различных преципитатов в бездислокационном кремнии.* ДАН СССР, 1986, т. 290, № 3, с. 605–610.

[12] Bul'enkov N. A., Cynober L. I. *Dispiration-module simulation of sources of helicoidal crystal layers in diamond-like structures.* 12-th European crystallographic meeting, Collected abstract, Moscow, 1989, v. 2, p. 45.

[13] Бульенков Н. А. *О возможной роли гидратации как ведущего интеграционного фактора в организации биосистем на различных уровнях их иерархии.* Биофизика, 1991, т. 36, 2, с. 181–242.

[14] Bulienkov N. A. *Three possible branches of determinate modular generalization of crystallography.* Fields institute monographs, Ed. J. Patera, 1998, v. 10, p. 67–134.

[15] Danzer L., Papadopolos Z., Talis A. *Full equivalence between Socolar's tilings and the (A, B, C, K)-tillings leading to a rather natural decoration.* Int. J. Mod. Phys., B, 1993, v. 7, № 6–7, p. 1379–1386.

[16] Ле Ты Куок Тханг, Пиунихин С. А., Садов В. А. *Геометрия квазикристаллов.* УМН, 1993, т. 48, № 1, с. 41–102.

[17] Mosseri R., Sadoc J.F. *Order and disorder in amorphous, tetrahedrally coordinated semiconductors. A curved-space description*. Phil. Mag. B, 1982, v. 45, № 5, p. 467–483.

[18] Mosseri R. Di, Vincenzo D. P., Sadoc T. F., Brodsky M. H. *Polytope model and electronic and structural properties of amorphous semiconductors*. Phys. Rev. B, 1985, v. 32, No 6, p. 3974–4000.

[19] Sadoc J.F., Rivier N. *Hierarchy and disorder in non-crytalline structures*. Phil. Mag., B, 1987, v. 55, № 5, p. 537–573.

[20] Sadoc J.F., Mosseri R. *Icosahedral order, space and quasicrystals*. Aperiodicity and order, ed.: Marko V. Jaric, Academic press, 1989, v. 3, p. 163–189.

[21] Nelson D. R. *Order, frustration, and defects in liquids and glasses*. Phys. Rev, B, 1983, v. 28, № 10, p. 5515–5535.

[22] Rivier N., Duffy D. M. *On the topological entropy of atomic liquids and the latent heat of fusion*. J.Phys., C: Solid State Phys., 1982, v. 15, p. 2867–2874.

[23] Mosseri R., Sadoc J. P. *Polytopes and projection method: an approach to complex structures*. J. de Physique, C–3, 1986, v. 47, p. 281–297.

[24] Kleman M. *Curved crystals, defects and disorder*. Advances In Physics, v. 38, 1989, № 6, p. 605–607.

[25] Галиулин Р. В. *Высшая кристаллография алмаза*. Материаловедение, 1999, № 6, с. 2–5.

[26] Руднев С. В. *Групповой подход к решеткам в эллиптическом пространстве*. В кн. ICS моделирование роста и деформации кристаллов минералов, Томск: Изд-во Том. ун-та, 1994, 210 с.

[27] Манжар В. В. *Твердые тела с ближним порядком в рамках локального подхода, основанного на математическом аппарате теории расслоенных пространств*. Препринт № 9–93, Львов, 1993, 36 с.

[28] Kramer P., Papadopolos Z., Schlottman M., Zeidler D. *Projection of the icosahedral Danzer tiling from the root lattice D6*. Preprint TPT-QC-92-09-1, Tübingen.

[29] Домрачев Г. А., Лазарев А. И. *Роль чисел в моделях апериодических структур*. XVI научные чтения им. академика Н. В. Белова, 1997, с. 79–81.

[30] Курош А. Г. *Теория групп*. М.: Наука, 1967, 648 с.

[31] *International tables for crystallography*. v. A. Space-group symmetry, Ed. T. Hahn, Dordrecht, etc.: Reidel, 1983, 854 p.; Addition, 1985, 119 p.

[32] Ефимов Н. В. *Высшая геометрия*. М.: Наука, 1978, 576 с.

[33] Шафаревич И. Р. *Основные понятия алгебры*. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 348 с.

[34] Конвей Дж., Слоэн Н. *Упаковки шаров, решетки и группы*. М.: Мир, 1990, т. 1, 2, 791 с.

[35] Картеси Ф. *Введение в конечные геометрии*. М.: Наука, 1980, 320 с.

[36] Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. *Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп*. М: Наука, 1980, 240 с.

[37] Коксетер Г. С. М. *Введение в геометрию*. М.: Наука, 1966, 648 с.

[38] Coxeter H. S. M. *Regular Polytopes*. Dover, New York, 1973, 321 p.

[39] Manton N. S. *Connections on discrete fibre bundles*. Commun. Math., 1987, v. 113, p. 341–351.

[40] Sados J. F., Mosseri R. *The E^8 Lattice and quasicrystals*. J. Non-Cryst. Solids., 1993, v. 153–154, p. 247–252.

[41] Щербак О. П. *Волновые фронты и группы отражений*. УМН. 1988, т.43, № 3, с. 125–160.

[42] Moody R. V., Patera J. Chen L. *Non-crystallographic root systems*. Fields institute monographs. 1998. V. 10. p. 135–178.

[43] Рингель Г. *Теорема о раскраске карт*. М.: Мир, 1977, 256 с.

[44] Талис А. Л. *Синтез минералов*. Александров: ВНИИСИМС, 2000, т. 3, с. 321.

[45] Талис А. Л. *Обобщенная кристаллография алмазоподобных структур. I. Конечные проективные плоскости и определяемые ими особые кластеры алмазоподобных структур.* Кристаллография, 2002, т. 47, № 4, с. 583–593.

[46] Coxeter H. S. M. *Self-dual configurations and regular graphs.* Bull. Amer. Math. Soc. 1950 V. 56. p. 413–455.

[47] Гилберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981. с. 289.

[48] Бернал Дж. *О роли геометрических факторов в структуре материи.* Кристаллография, 1962, т. 7, № 4, с. 507–519.

[49] Бернал Дж. *О структуре жидкости. Рост кристаллов.* М.: Наука, 1965, т. 5, с. 149–162.

[50] Талис А. Л. *Обобщенная кристаллография алмазоподобных структур. II. Алмазная упаковка в пространстве трехмерной сферы, подконфигурации конечных проективных плоскостей и порождающие кластеры алмазоподобных структур.* Кристаллография, 2002, т. 47, № 5, с. 775–784.

[51] Талис А. Л. *Закономерности строения газогидратов и конструкции, определяемые 8-мерной решеткой E^8.* ДАН, 2003, т. 390, № 2, с. 172–177.

[52] Талис А. Л. *Тетракоординированные структуры в рамках модульного подхода.* В кн. Труды II международной конференции «Реальная структура и свойства ацентричных кристаллов». Александров, 1995, с. 117–144.

[53] Талис А. Л. Априорный вывод алмазоподобных структур в рамках обобщенной кристаллографии. В кн. «Синтез минералов и методы их исследования». Труды ВНИИСИМС, т. 15, Александров, 1998, с. 97–132.

[54] Yasushi I. *Propagating local positional order in tetrahedrally bonded system.* Acta cryst., 1988, A44, p. 987–998.

[55] Дмитриенко В. Е., Клеман М. Кристаллография, 2001, т. 46, с. 591.

[56] Robinson G. de B. *On the orthogonal group in four dimensions.* Proc. Camb. Phil. Soc. 27, 37 (1931);

[57] Хамфри Дж. *Линейные алгебраические группы*. М.: Наука, 1980, 400 с.

[58] Биркгоф Г. *Теория решеток*. М.: Наука, 1984, 564 с.

[59] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия*. М.: Наука, 1979, 760 с.; *Методы теории гомологий*. М.: Наука, 1984, 344 с.

[60] Фоменко А. Т. *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы*. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 252 с.

[61] Самойлович М. И., Талис А. Л., Миронов М. И. *Квазикристаллы с бесконечной точечной группой как симметрийная основа некристаллических алмазоподобных материалов*. Неорганические материалы, 2002, т. 38, № 4, с. 443–448.

[62] Самойлович М. И., Талис А. Л. *Топологические особенности конструкций алмазоподобного квазикристалла с бесконечной точечной группой. Алмазные пленки и пленки родственных материалов*, Сборник докладов 5-го Международного симпозиума, Харьков, 2003, с. 133–146.

[63] Самойлович М. И., Талис М. И., Белянин А. Ф. *Конструкции алгебраической геометрии и определяемые ими закономерности строения алмазоподобных (тетракоординированных) и тетраэдрических структур*. Углеродные нанокластеры и законы их сборки. В сб.: «Высокие технологии в промышленности России», М.: ОАО ЦНИТИ «Техномаш», 2003, с. 270.

[64] Белобров П. И. Природа наноалмазного состояния и новые применения алмазных технологий. В сб.:«Высокие технологии в промышленности России», М.: ОАО ЦНИТИ «Техномаш», 2003, с. 235.

[65] Schmitz J., Peters J., Trebin. H.-R.Z. *An icosahedral quasicrystalline for amorphous semiconductor*. Phys, B, 1996, v. 100, p. 57–62.

[66] Крапошин В. С., Талис А. Л., Панкова М. Н. *Политопный топологический подход к описанию мартенситного превращения*. Металловедение и термическая обработка металлов, № 8, 1999, с. 23–28.

[67] Kraposhin V. S., Talis A. L., Dubois J.-M. *Structural realization of the polytope approach for the geometrical description of the transition of*

a quasicrystal into a crystalline phase. J. Phys. Condensed Matter. 2002. V. 14. p. 8987-8996.

[68] Шевченко В. Я., Мадисон А. Е., Шудегов В. Е. *Структурное многообразие наномира*. Физ. и химия стекла, 2003, т. 29, № 6, с. 801–808.

[69] Шевченко В. Я., Мадисон А. Е., Шудегов В. Е., *Фрагментарность и метаморфозы наноструктур*. Физ. и химия стекла, 2003, т. 29, № 6, с. 809–816.

[70] Шевченко В. Я. В кн. Стекло и керамика — XXI. Перспективы развития. СПб.:«Янус», 2001. 303 с.

Симметрии в биологии

С. В. Петухов

Симметрия в формах биологических тел издавна вызывала пристальный интерес естествоиспытателей как одно из наиболее замечательных и загадочных явлений природы. Этому посвящены труды многих современных ученых. Проблемы биологических симметрий на макромолекулярном уровне рассматривались на специальном Нобелевском симпозиуме [40], на котором подчеркивалась важная роль концепции симметрии для биологических исследований. Уже школьные программы по биологии включают рассмотрение многочисленных примеров вращательных, трансляционных и зеркальных симметрий, а также симметрий масштабного подобия в биологических телах: цветках и побегах растений, опорно-двигательном аппарате человека и животных и пр.

Углубление биологических знаний сопровождается открытием все новых и новых фактов подчиненности принципам симметрии очень разных биологических объектов, отличающихся масштабом и уровнем организации. С вопросом о биологических симметриях в той или иной степени связаны многие биологические учения и концепции, утвердившиеся в науке или вызывающие подчас острые дискуссии: закон гомологических рядов Н. И. Вавилова, теория морфогенетического поля А. Г. Гурвича, гипотеза В. И. Вернадского о неевклидовой геометрии живого вещества, концепция морфогенетической обусловленности многих психофизических феноменов, включая эстетическое предпочтение морфогенетически значимой пропорции золотого сечения, связанной с числами Фибоначчи, и др. Становление молекулярной биологии выявило существование фундаментальных проблем симметрии и лево-правой диссиметрии на биомолекулярном уровне. Развитие теории симметрий, в свою очередь, поставило вопросы о реализации новых видов симметрии, например, неевклидовых симметрий в биологических телах. Интересно, что еще создатель одной из важных неевклидовых геометрий — проективной геометрии — французский архитектор и инженер Ж. Дезарг (1593–1662) при введении ее понятий широко пользовался биологической терминологией, возможно, предполагая аналогию между исследуемыми им проективными структурами и биологическими объектами. Моделирование биологических явлений на основе современных теорий нелинейной динамики

вводит в биологические модели высшие симметрии, известные прежде в области физики, например, солитонные модели макробиологических явлений привлекают в биологию симметрии преобразований Лоренца из специальной теории относительности [17,18,43]. Не вызывает сомнений, что принципы симметрии были, есть и будут важнейшей составной частью развития биологии, приобретая, вероятно, все большее значение, связанное с их общей ролью одной из основ современного математического естествознания.

Неевклидовы биосимметрии и золотой вурф

Не претендуя на обзор работ этой обширной области знаний, проиллюстрируем специфику исследования биологических симметрий на примере собственных работ автора настоящего приложения. Одно из проведенных им исследований связано с проблемой неевклидовых симметрий в живых телах. Речь идет о реализации в телесном строении и развитии живых организмов трансформаций и инвариантов неевклидовых групп преобразований [13, 15, 16, 44]. Конкретным примером подобного исследования является морфометрический анализ в живых объектах пропорций так называемых двойных отношений, или вурфов, являющихся инвариантами проективной и конформной геометрий. (Термин «вурф», заменяющий термин «двойное, или сложное, отношение», был введен Х. Штаудтом при создании проективного исчисления без метрических оснований и обозначает в переводе с немецкого языка «бросок»).

Многие органические тела строятся по принципу многоступенчатости симметрийных блоков: объект выстраивается из взаимосимметричных (например, в смысле евклидовой симметрии) блоков первой ступени, объединяемых в блоки второй ступени и т. д. В частности, этот принцип проявляется в кинематической схеме тела человека, в которой наряду с зеркальной симметрией двух половин тела, выступающих в роли блоков второй ступени, имеется приближенная неевклидова (проективная или мебиусова) симметрия между длиннотными пропорциями трехчленных кинематических блоков, из которых состоит эта схема: трехфаланговых пальцев, трехчленистых конечностей (плечо–предплечье–кисть и бедро–голень–стопа), трехчленистого тела (в антропологии тело подразделяют на верхний, туловищный и нижний отрезки). Такое заключение получено в результате вычисления нами по известным антропометрическим данным [2, 29] величин вурфов этих трехчленных блоков:

$$W = \frac{(C - A)(D - B)}{(C - B)(D - A)}, \qquad (1)$$

где в скобках даны длины отрезков между расчленяющими последовательными точками A, B, C, D трех звеньев каждого блока (см. рис. 1). Например, в трехчленной кинематической схеме всего тела человека точка A обозначает макушку головы, точка B — основание шеи, точка C — тазобедренное сочленение, точка D — конец пальцев распрямленных ног. Тогда в формуле (1) величина $(C-A)$ соответствует расстоянию между тазобедренным сочленением и макушкой головы, т. е. длине верхнего отрезка тела, и т. д. Значение вурфов (1) у всех рассматриваемых трехчленных кинематических блоков на протяжении по крайней мере всего индивидуального развития после рождения группируются вокруг эталонной величины $P = 1,31$. Это тем более интересно, что рост тела человека носит нелинейный характер (рис. 1): например, на протяжении жизни от рождения у человека верхний отрезок тела вырастает в 2,4 раза, туловище — в 2,8 раза, а нижний отрезок — в 3,8 раза.

Анализ этих вурфовых пропорций применительно к строению и росту тела человека выявляет, что все названные трехчленные блоки его кинематической схемы в распрямленном состоянии по своим пропорциям практически проективно эквивалентны и проективно неизменны на протяжении жизни. Это во многом оказывается справедливым не только для нормально развитых людей, но и для карликов и великанов. Это также справедливо и для широкой совокупности высокоорганизованных животных.

Напомним, что нелинейные проективные и мебиусовы преобразования трансформируют геометрические фигуры так, что размеры их частей и их простые отношения меняются, но определенные характеристики, в том числе двойные отношения (вурфы), остаются неизменными. Поскольку группы проективных и мебиусовых преобразований, согласно знаменитой Эрлангенской программе Ф. Клейна, лежат в основе, соответственно, проективной и мебиусовой геометрий, то эти инварианты относятся именно к данным неевклидовым геометриям. В одномерном случае группы мебиусовых и проективных преобразований совпадают, поэтому в рассмотренном примере с равным правом можно говорить о проективной или мебиусовой биосимметрии. Отметим также, что группа евклидовых преобразований является составной частью (подгруппой) групп проективных и мебиусовых преобразований, поэтому в данном примере речь идет об обобщении традиционного анализа евклидовых биосимметрий на основе перехода к анализу более общих неевклидовых биосимметрий.

Эталонная величина 1,31 вурфов трехчленных кинематических блоков тела оказывается связанной с известными в биологии филлотаксисными законами морфогенеза (симметрийными законами листорасполо-

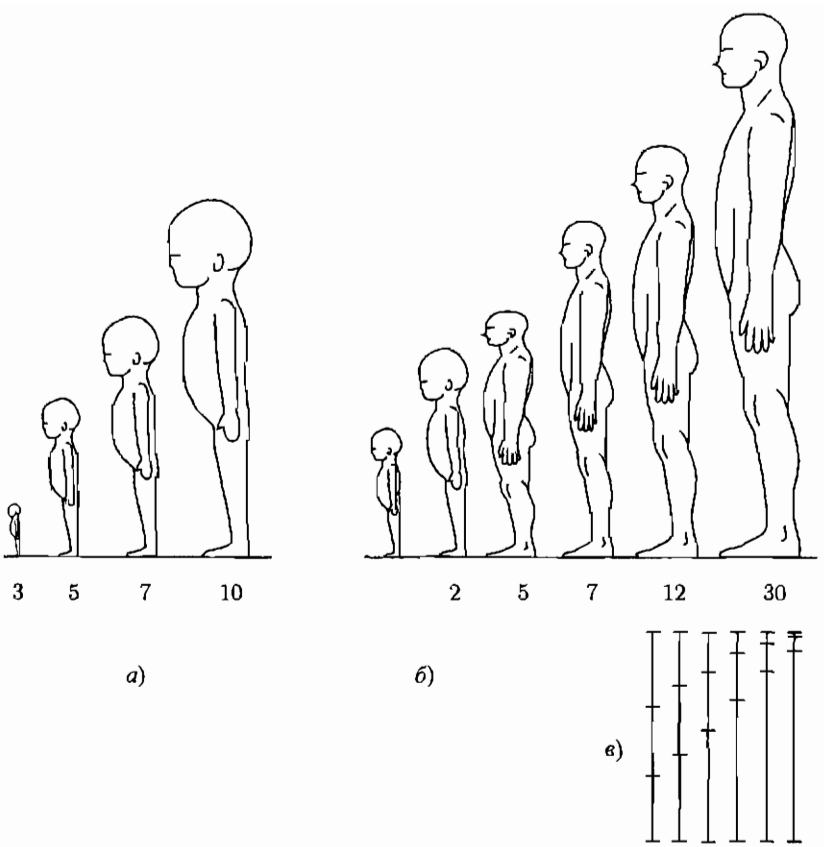


Рис. 1. Онтогенетические изменения человеческого тела (из [28]): *а, б* — антенатальные и постнатальные стадии; *а* — в лунных месяцах; *б* — в годах, первый слева — новорожденный; *в* — различные трехотрезочные членения, величина вурфов которых равна 1,3

жения), в которых важную роль играет ряд чисел Фибоначчи:

$$\{F_{n+2} = F_n + F_{n+1}\} : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 \ldots \qquad (2)$$

Эта связь выявляется, прежде всего, при рассмотрении вурфов соседних членов ряда Фибоначчи F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, если эти числа интерпретировать как длины трех последовательных отрезков, заключенных

согласно рекуррентному свойству ряда Фибоначчи (2) между четырьмя точками F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}, F_{n+4}. Величина вурфа (1) таких трех отрезков равна

$$W_n = \frac{(F_n + F_{n+1})(F_{n+1} + F_{n+2})}{F_{n+1}(F_n + F_{n+1} + F_{n+2})}. \tag{3}$$

Величины вурфов всех последовательных троек чисел Фибоначчи образуют новую — вурфовую — последовательность:

$$\{W_n\} : 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{8}{6}, \frac{13}{10}, \ldots, \frac{F_{n+2}}{2F_n}, \ldots \to P. \tag{4}$$

Предельное значение вурфовой последовательности (4) при $n \to \infty$ равно

$$P = \frac{\Phi^2}{2} = 1,309\ldots, \tag{5}$$

где Φ представляет собой знаменитое золотое сечение, связанное с рядом чисел Фибоначчи (Φ представляет собой предел простого отношения последующего члена ряда Фибоначчи к предыдущему при $n \to \infty$:

$$\Phi = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} = 1,618\ldots \tag{6}$$

Полученная величина $P = 1,309$ равна одновременно значению вурфа последовательности трех отрезков с относительными длинами $1 : \Phi : \Phi^2$. Интересно, что именно в таком соотношении находятся длины трех фаланг среднего пальца руки человека. Это является дополнительным подтверждением того, что приближенное значение вурфов 1,31 трехчленных кинематических блоков тела человека и животных связано с филлотаксисными законами биологического морфогенеза, а через них с рядом чисел Фибоначчи и золотым сечением. Для подчеркивания этой связи с золотым сечением Φ вурф (5) с величиной $\Phi^2/2$ назван нами золотым вурфом [13]. Этот биологически значимый инвариант высшей геометрии дополнительно применяется в эстетике пропорций и некоторых других прикладных областях.

Симметрии в системе генетического кода

Исследование симметрий в системе генетического кодирования, традиционно является одним из важных методов познания. Например, благодаря этому методу были открыты такие ключевые факты, как комплементарность азотистых оснований в молекуле ДНК и ее конфигурация регулярной двойной спирали.

Эта область представляется особенно важной в силу общебиологической унифицированности основ генетического кодирования. Мир живых организмов поражает многообразием видов своих представителей, отличающихся друг от друга формой, цветом, способами пространственного передвижения, механизмами оплодотворения и пр. Тем более значительным является открытие, совершенное в области молекулярной генетики во второй половине прошлого века. Речь идет о том, что с информационно-генетической точки зрения все живые организмы — от бактерии до кашалота и от червя до птицы и человека — имеют одни и те же основы генетического кодирования, эквивалентны друг другу. Другими словами, в науке произошло «великое объединение живых организмов». Эту всеобщую для живых организмов особенность можно использовать даже для формального определения того, какие объекты можно называть живыми (близкий вопрос — «что такое жизнь?»).

Соответственно, информационная точка зрения на живые организмы стала особенно актуальной. В биологической литературе все чаще можно встретить утверждение, что живые организмы представляют собой тексты, начиная с молекулярного уровня их организации. С этой точки зрения организмы представляют собой информационные сущности. Они существуют потому, что получают наследственную информацию от своих предков, и живут для того, чтобы передать свой информационный генетический пакет своим потомкам. При таком подходе все остальные физические и химические механизмы, представленные в живых организмах, можно трактовать как вспомогательные, способствующие реализации этой основной — информационной — задачи. Каждая физиологическая система — сенсорная, моторная и любая другая — закрепляется в биологической эволюции лишь в том случае, если она согласована с генетической системой, может быть опосредованным образом закодирована в ней и передана по наследству последующим поколениям. Итогом нормальной биологической реализации генетической информации являются организмы с чрезвычайной сложностью и многообразием своего устройства, многие функциональные особенности которого порой даже невоспроизводимы в современных лабораториях.

Контрастом к этому выступают поразительная простота основ языка наследственной информации и их общность для всех живых организмов. Речь идет, прежде всего, о том, что для записи генетических посланий, кодирующих белки, в рибонуклеиновых кислотах любых организмов используется «алфавит», состоящий всего из четырех «букв», или азотистых оснований (рис. 2): аденин (A), цитозин (C), гуанин (G), урацил (U) (в ДНК вместо урацила используется родственный ему тимин (T)). Именно строчная последовательность этих четырех букв на нитях нуклеиновых кислот содержит генетическую информацию для синтеза

белков во всех организмах. Данный набор четырех букв обычно считается элементарным алфавитом генетического кода. Современной науке неизвестны причины того, почему алфавит генетического языка именно четырехбуквенный (а не из тридцати букв, например) и почему из миллиардов возможных химических соединений именно эти четыре азотистые основания выбраны в качестве элементов алфавита.

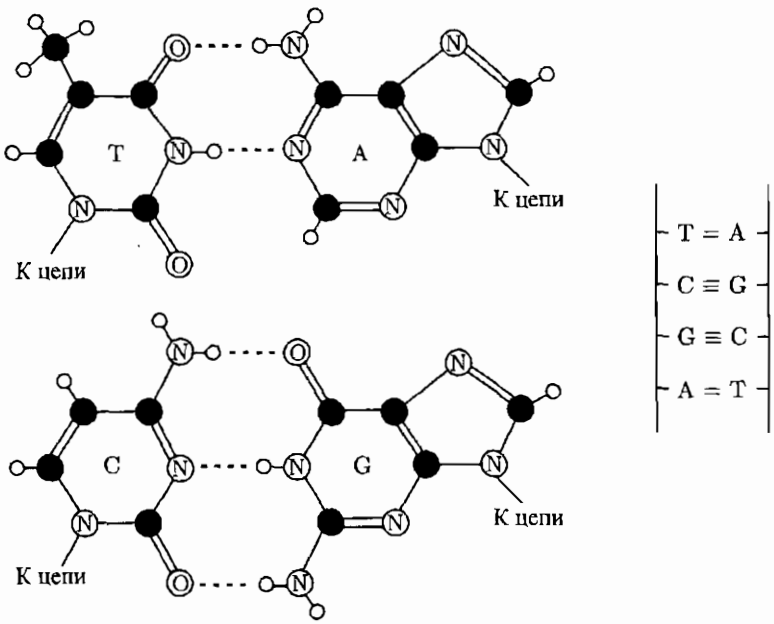


Рис. 2. Комплементарные пары четырех азотистых оснований в *ДНК*: A — T (аденин и тимин), C — G (цитозин и гуанин). Пунктиром даны водородные связи в этих парах. Черные кружки — атомы углерода, маленькие белые кружки — водорода, кружки с буквой N — азота, кружки с буквой O — кислорода

Бинарные субалфавиты

Стартовой точкой излагаемого симметрологического исследования явилось обращение автором внимания на то, что эти четыре азотистые основания представляют собой специфические полиатомные конструкции с особыми биохимическими свойствами. Набор этих четырех кон-

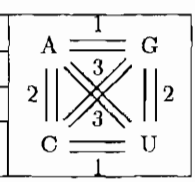
струкций не совершенно разнороден, а является носителем содержательной симметрической системы различительно-объединяющих признаков (или, точнее, пар «признак–антипризнак»). Эта система признаков разбивает четырехбуквенный алфавит всеми тремя возможными способами на различные пары букв, эквивалентные по одному из этих признаков или его отсутствию.

Например, две из этих букв, C и U, эквивалентны друг другу по наличию признака пиримидиновости (имеют одно кольцо в их молекулярном строении), а две другие буквы — A и G — эквивалентны между собой по причине его отсутствия (они относятся к пуринам — соединениям с двумя кольцами). По признаку наличия свойства аминомутируемости под действием азотистой кислоты (связанному с отщеплением аминогруппы, см. работу [51]) образуются другие пары эквивалентных букв: A = C (обе имеют свойство аминомутируемости, связанное с наличием аминогруппы NH_2, расположенной в одной из шести вершин молекулярного кольца напротив атома азота) и G = U (не имеют этого свойства аминомутируемости и соответственно расположенной аминогруппы). По признаку комплементарности в молекулах нуклеиновых кислот образуется третий вид пар эквивалентности: G = C (образуют комплементарную пару с тремя водородными связями между этими азотистыми основаниями) и A = U (образуют комплементарную пару не с тремя, а с двумя водородными связями).

В этом симметрическом разбиении на эквивалентные пары по конкретному признаку каждой букве условно может быть приписан символ бинарной оппозиции: например, единицы — в случае наличия у буквы данного признака, и нуля — при его отсутствии. В результате автором выявлено, что всегда считавшийся «элементарным» четырехбуквенный алфавит кода содержит в себе разбиение на три бинарных субалфавита по трем биохимическим признакам, что иллюстрируется таблицей 1 (индексы у нулей и единиц идентичны номеру признака).

Таблица 1. Три бинарных субалфавита по признакам

Признак	G	A	U	C
1) Пиримидиновость (одно кольцо)	0_1	0_1	1_1	1_1
2) Аминомутируемость	0_2	1_2	0_2	1_2
3) Комплементарность на основе трех водородных связей	1_3	0_3	0_3	1_3



Каждая буква кода имеет три «лица», или значения, в трех бинарных субалфавитах по названным признакам. По каждому из признаков

четырехбуквенный алфавит кода свертывается в двухбуквенный алфавит; например, по первому признаку имеем вместо четырехбуквенного алфавита алфавит из двух букв 0_1 и 1_1, который назван автором «бинарным субалфавитом по первому признаку» (из указанных трех бинарных субалфавитов по признакам вполне независимы только два). Соответственно, генетический текст в виде строчной последовательности четырех букв кода представлен тремя параллельными и различными последовательностями нулей и единиц. Это иллюстрирует нижеследующей пример начального отрезка генетической последовательности для инсулина (таблица 2).

Таблица 2. Бинарные последовательности в гене инсулина

№ признака	Последовательность «букв» кода в гене инсулина																							
	A	U	G	G	G	C	A	U	C	G	U	U	G	A	A	C	A	G	U	G	U	...		
№1	0_1	1_1	0_1	0_1	0_1	1_1	0_1	1_1	1_1	0_1	1_1	1_1	0_1	0_1	0_1	1_1	0_1	0_1	1_1	0_1	1_1	...		
№2	1_2	0_2	0_2	0_2	0_2	1_2	1_2	0_2	1_2	0_2	0_2	0_2	0_2	1_2	1_2	1_2	1_2	0_2	0_2	0_2	0_2	...		
№3	0_3	0_3	1_3	1_3	1_3	1_3	0_3	0_3	1_3	1_3	0_3	0_3	1_3	0_3	0_3	1_3	0_3	1_3	0_3	1_3	0_3	...		

Образно говоря, генетический текст оказывается связкой параллельно сосуществующих текстов на трех разных языках, отражая свойство полиязычности генетических последовательностей, упускавшееся ранее из вида. Смысл всего генетического послания, видимо, заключен в переплетении или одновременном использовании этих разноязычных текстов. Данные три текста не независимы друг от друга: имея два из них в виде последовательностей нулей и единиц с индексами, можно однозначно восстановить третью последовательность нулей и единиц с третьим сортом индексов. Это свойство избыточности может использоваться в генетических посланиях для повышения надежности хранения и передачи наследственной информации.

Каждая буква генетического языка с учетом ее значения в трех бинарных субалфавитах может быть выражена кодовым вектором в трехмерном декартовом пространстве, каждая координата которого соответствует одному из бинарных субалфавитов. Каждые три буквы такой генетической последовательности, называемые триплетом, или кодоном, кодируют, как известно, одну из 20 аминокислот или знак пунктуации белкового синтеза. Учет трех бинарных субалфавитов приводит к тому, что каждый триплет представим набором трех кодовых векторов или числовой матрицей (3×3), детерминант которой равен «0» (у 40 триплетов), «+1» (у 12 триплетов) и «−1» (у 12 триплетов). Над этим ансамблем бинарных субалфавитов и текстом из их элементов возникают различные симметрические структуры, формальная теория кото-

рых составляет отдельный предмет математического исследования. Ансамбль бинарных субалфавитов генетического языка оказывается новой, не исследовавшейся ранее в биологии системой, имеющей, по данным автора, важное значение для понимания всей конструкции хранения и передачи наследственной информации. Подобно тому, как в физике понятие «элементарной частицы» (как частицы, не содержащей частей) оказывается несостоятельным при выявлении того, что эта частица на самом деле содержит составные части, так и понятие «элементарного» алфавита в молекулярной генетике оказывается преходящим, поскольку обнаруживается, что он состоит из содержательных бинарных субалфавитов. Последние сближают живую природу, использующую генетические послания в виде последовательностей нулей и единиц бинарных субалфавитов, с компьютерной техникой, разнообразные виды которой унифицированы по принципу хранения и передачи информации на основе последовательностей нулей и единиц. Отметим также формальную аналогию между шестью признаковыми символами 0_1, 0_2, 0_3, 1_1, 1_2, 1_3 «элементарного» генетического алфавита (см. таблицу 1) и шестью кварками, из которых состоят «элементарные частицы». Эта аналогия позволяет рассматривать каждый такой признаковый символ как некий «алфавитный кварк» или «генокварк» и развивать соответствующую генокварковую теорию генетических структур, сознательно стремясь по возможности заимствовать в генетику обширные наработки из теории элементарных частиц.

Биопериодическая таблица генетического кода

Перейдем к рассмотрению множества $64 = 4^3$ генетических триплетов (именно столько различных триплетов можно составить на основе четырехбуквенного алфавита). Учет признаков, членящих четырехбуквенный алфавит генетического языка на бинарные субалфавиты, приводит к выявлению внутренней структурированности и упорядоченности данного множества. Это демонстрирует построенная автором октетная биопериодическая таблица кодонов (таблица 3), в которой все триплеты оказываются естественным образом перенумерованы и расположены в систему с двойной — по горизонтали и вертикали — периодичностью и фрактальностью (подробности изложены в [26]). Поясним принцип построения этой таблицы.

В каждой из 64 ее ячеек представлен один из 64 триплетов. В каждом ее столбце представлены те 8 триплетов, которые эквивалентны друг другу с точки зрения бинарного субалфавита по первому признаку из таблицы 1. Другими словами, триплеты одного столбца неразличимы друг от друга по позициям, занятым в них пуринами и пиримидинами.

Таблица 3. Биериодическая таблица генетических триплетов

№	111 ЦЯНЬ	110 ДУЙ	101 ЛИ	100 ЧЖЭНЬ	011 СЮНЬ	010 КАНЬ	001 ГЭНЬ	000 КУНЬ
111 ЦЯНЬ	CCC 63	CCA 62	CAC 61	CAA 60	ACC 59	ACA 58	AAC 57	AAA 56
110 ДУЙ	CCU 55	CCG 54	CAU 53	CAG 52	ACU 51	ACG 50	AAU 49	AAG 48
101 ЛИ	CUC 47	CUA 46	CGC 45	CGA 44	AUC 43	AUA 42	AGC 41	AGA 40
100 ЧЖЭНЬ	CUU 39	CUG 38	CGU 37	CGG 36	AUU 35	AUG 34	AGU 33	AGG 32
011 СЮНЬ	UCC 31	UCA 30	UAC 29	UAA 28	GCC 27	GCA 26	GAC 25	GAA 24
010 КАНЬ	UCU 23	UCG 22	UAU 21	UAG 20	GCU 19	GCG 18	GAU 17	GAG 16
001 ГЭНЬ	UUC 15	UUA 14	UGC 13	UGA 12	GUC 11	GUA 10	GGC 9	GGA 8
000 КУНЬ	UUU 7	UUG 6	UGU 5	UGG 4	GUU 3	GUG 2	GGU 1	GGG 0

Например, во втором столбце слева на первых двух позициях любого триплета стоят два пиримидина (*C* или *U*), а на третьей позиции стоит пурин (*A* или *G*). Поскольку, согласно таблице 1, пиримидинам соответствует бинарный символ 1_1, а пуринам — 0_1, то каждое семейство триплетов автоматически получает свой бинарно-числовой символ в виде одного из восьми трехразрядных чисел: $0_10_10_1$, $0_10_11_1$, $0_11_10_1$, $0_11_11_1$, $1_10_10_1$, $1_10_11_1$, $1_11_10_1$, $1_11_11_1$ (в таблице 3 индексы опущены). При переводе из двоичной в десятичную систему счисления этот ряд преобразуется в ряд целых чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. В построенной автором таблице 3 все столбцы, содержащие эти семейства триплетов, упорядочены по номерам в нисходящем порядке. Очевидно, что в двоичной системе счисления можно использовать не только символы нуля и единицы, но, например, как это сделано в древнекитайской «Книге перемен» [9,34], также символ непрерывной черты вместо единицы и символ прерывной черты вместо нуля, располагая эти черты стопкой, читаемой снизу вверх. Тогда восемь семейств триплетов получат соответствующие символы древних китайских триграмм, приведенные в таблице 3 с их китайскими названиями.

Подобные октетные семейства триплетов известны в истории молекулярной генетики с 1961 года в связи с работой Виттмана [51] по

разбиению множества триплетов на семейства в связи со свойством аминомутируемости азотистых оснований кода, т.е. в связи со вторым признаком из таблицы 1. Предложенная нами таблица 3 представляет собой объединение этих октетов Виттмана в табличные столбцы с их упорядочением по указанной естественной двоичной нумерации. Существенно, что вся таблица построена нами с опорой на реальные биохимические материалы.

Каждая строка таблицы 3 также имеет свою бинарную нумерацию, связанную с признаком аминомутируемости (признак №2 в таблице 1) в триплетах строки. Все 8 триплетов каждой строки эквивалентны с точки зрения бинарного субалфавита по этому второму признаку таблицы 1. Например, ее вторая сверху строка характеризуется символом $1_2 1_2 0_2$, т.е. все триплеты строки имеют именно такое число и порядок букв, соответствующих бинарным символам 1_2 и 0_2. (В таблице 3 бинарные символы напечатаны без индексов, но символы строк подчеркнуты с тем, чтобы отличать их от символов столбцов). Очередность строк в таблице 3 также выстроена в убывающем порядке их естественных двоичных номеров. (В книге [26, табл. 1.2.1, 2.3.1, рис. 2.3.1, 2.3.3] представлены два близких варианта упорядочения строк в биериодической таблице. Один из них, упорядочивающий строки по классам аминомутируемости триплетов в связи с октетами Виттмана, приводит к перестановке местами двух средних строк таблицы 3 и в настоящем изложении не рассматривается как менее естественный и менее совершенный с точки зрения формулируемой ниже атрибутивной концепции кодирования).

В построенной таблице 3 каждый триплет имеет координаты из символа строки и символа столбца, на пересечении которых он расположен. Если выписать для каждого триплета обе его трехразрядных координаты в виде единой последовательности, образующей шестиразрядное двоичное число (например, пусть трехразрядный номер строки идет в начале, а координатный номер столбца в конце), то все триплеты оказываются перенумерованными шестиразрядными числами. При их переводе в десятичную систему счисления образуется упорядоченный ряд номеров от 0 до 63, нумерующих все 64 триплета и проставленных в соответствующие ячейки таблицы 3. В этой естественной системе упорядочения триплетов существует числовой инвариант, характеризующий любую пару «кодон-антикодон» (кодоном и антикодоном называются триплеты, стоящие напротив друг друга в парах комплементарных нитей молекул наследственности — ДНК и РНК): сумма координатных номеров кодона и его антикодона всегда равна 63. И наоборот: если сумма координатных номеров двух триплетов в таблице 3 равна 63, то эти триплеты являются парой «кодон-антикодон». Например, кодон CUA и его антикодон

GAU имеют координатные номера 46 и 17 соответственно, а их сумма равна 63. Любая пара «кодон-антикодон» расположена в этой таблице инверсионно симметрично относительно ее центра.

При использовании для записи координат в биериодической таблице кодонов не цифровой, а китайской триграммной формы каждый триплет получает индивидуальный координатный символ в виде древнекитайской гексаграммы: стопы из шести прерывных и непрерывных черт, имеющей внизу координатную триграмму его строки, а вверху — координатную триграмму его столбца. Если заменить каждый триплет такой его координатной гексаграммой, то биериодическая таблица триплетов 3 трансформируется в таблицу, которая удивительным образом совпадает с исторически знаменитой таблицей 64 гексаграмм по Фу-си из древнекитайской «Книги перемен» (таблица 4 [9, 34]). Последняя на протяжении тысячелетий утверждается китайцами в качестве всеобщего природного архетипа. Таким образом, биохимическая система генетического кода оказывается сопряженной с этой древнекитайской символической системой. Детальному рассмотрению данной аналогии посвящена специальная глава в книге автора [23, глава 5], где также приведены сведения о других исследователях подобных параллелизмов.

В ходе авторских исследований выявился целый ряд других интересных аналогий между генетической системой и «Книгой перемен», и прежде всего, числовых, из которых в этой небольшой статье приведем лишь некоторые. Напомним, что числам в Древнем Китае придавалось совершенно особое значение (см., например, [5, 9, 34]). Одно из наиболее важных мест отводилось четверке чисел 6, 7, 8, 9. В этой четверке четные числа 6 и 8 символизировали, соответственно, старую (изменяющуюся) и молодую (неизменяющуюся) инь, а нечетные числа 9 и 7 — старый (изменяющийся) и молодой (неизменяющийся) ян. Число 60 являлось основой *универсальной шестидесятиричной циклической системы*, на которой строился 60-летний китайский календарь, 60 ладотональностей традиционной китайской музыки и пр.

Эти числа интересным системным образом связаны с таблицей 3. Действительно, вспомним о третьем признаке таблицы 1, по которому пара комплементарных азотистых оснований C и G характеризуется тремя водородными связями, а другая пара комплементарных оснований A и U — двумя. Заменим в таблице 3 каждый триплет суммой этих чисел водородных связей, считая $C = G = 3$, $A = U = 2$. При этом, например, триплет CAU заменится числом 7 (=3+2+2). В результате получится октетная числовая матрица, представленная в таблице 5. В этой таблице дополнительно для каждой строки и каждого столбца указаны также суммы Σ числа рассматриваемых водородных связей у совокупности их триплетов.

Таблица 4. Квадратное расположение гексаграмм по Фу-си из «Книги перемен», дополненное указанием для каждой гексаграммы ее двоично-числового аналога и его эквивалента в десятичной системе счисления

верх → / низ ↓	111 ЦЯНЬ	110 ДУЙ	101 ЛИ	100 ЧЖЭНЬ	011 СЮНЬ	010 КАНЬ	001 ГЭНЬ	000 КУНЬ
111 ЦЯНЬ	111111 63	111110 62	111101 61	111100 60	111011 59	111010 58	111001 57	111000 56
110 ДУЙ	110111 55	110110 54	110101 53	110100 52	110011 51	110010 50	110001 49	110000 48
101 ЛИ	101111 47	101110 46	101101 45	101100 44	101011 43	101010 42	101001 41	101000 40
100 ЧЖЭНЬ	100111 39	100110 38	100101 37	100100 36	100011 35	100010 34	100001 33	100000 32
011 СЮНЬ	011111 31	011110 30	011101 29	011100 28	011011 27	011010 26	011001 25	011000 24
010 КАНЬ	010111 23	010110 22	010101 21	010100 20	010011 19	010010 18	010001 17	010000 16
001 ГЭНЬ	001111 15	001110 14	001101 13	001100 12	001011 11	001010 10	001001 9	001000 8
000 КУНЬ	000111 7	000110 6	000101 5	000100 4	000011 3	000010 2	000001 1	000000 0

В этой матрице все столбцы и все строки по числам в их ячейках отличаются друг от друга. Но сумма водородных связей в ячейках каждой строки и каждого столбца одинакова и равна тому самому числу 60, которая в Китае с древних времен является основой «универсальной шестидесятиричной циклической системы» (см., например, [5, с. 70-75]). Число 60 общеупотребительно используется при счете времени: 60 минут в часе, 60 секунд в минуте и т. д. Оно же известно как основание древнейшей шумерской системы счисления, заимствованной позже вавилонянами.

В ячейках данной матрицы фигурируют только те самые числа 6, 7, 8 и 9, которые в Древнем Китае символизировали молодые и старые инь

Таблица 5. Числовая матрица биериодической таблицы кодонов, показывающая систему сумм водородных связей триплетов в ее ячейках (C = G = 3, A = U = 2)

	ЦЯНЬ	ДУЙ	ЛИ	ЧЖЭНЬ	СЮНЬ	КАНЬ	ГЭНЬ	КУНЬ	Σ
ЦЯНЬ	9	8	8	7	8	7	7	6	60
ДУЙ	8	9	7	8	7	8	6	7	60
ЛИ	8	7	9	8	7	6	8	7	60
ЧЖЭНЬ	7	8	8	9	6	7	7	8	60
СЮНЬ	8	7	7	6	9	8	8	7	60
КАНЬ	7	8	6	7	8	9	7	8	60
ГЭНЬ	7	6	8	7	8	7	9	8	60
КУНЬ	6	7	7	8	7	8	8	9	60
Σ	60	60	60	60	60	60	60	60	480

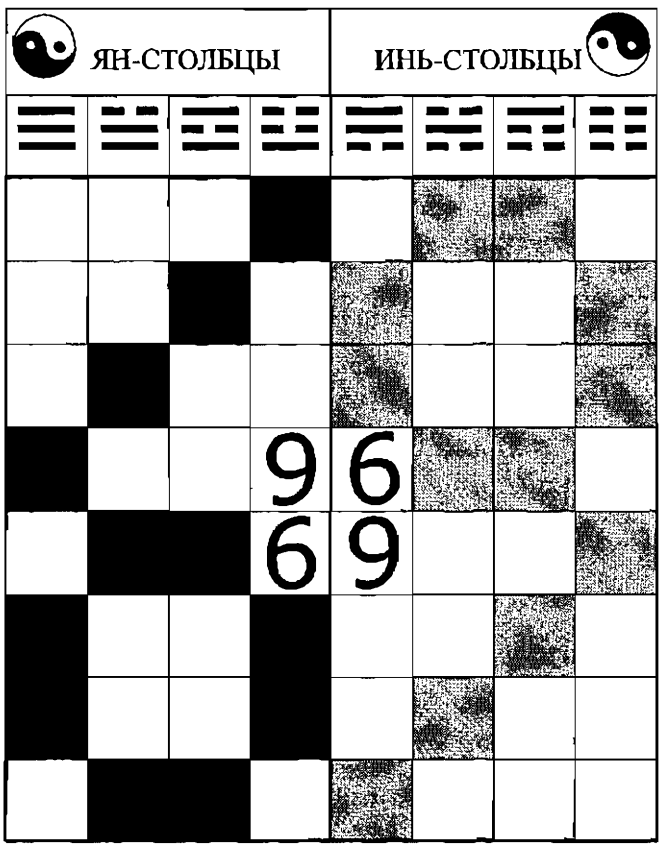
и ян. В их размещении в таблице 5 наблюдаются определенные закономерности, из которых отметим здесь лишь некоторые. Основная диагональ таблицы заполнена ячейками с числом 9, а вторая диагональ — ячейками с числом 6.

Диагонали матрицы делят ее на четыре сектора, состоящих из внедиагональных ячеек с цифрами 7 и 8: верхний, правый, нижний и левый. Каждый из секторов содержит в своих ячейках сумму чисел, равную 90, а все четыре сектора — сумму $4 \times 90 = 360$. Каждый из секторов содержит в себе по шесть пар симметрично расположенных ячеек, в которых заключены пары соответствующих чисел — 7 и 8, — дающих в сумме для каждой пары число 15. Всего в четырех секторах содержится 24 таких пары, сумма чисел в которых равна: $24 \times 15 = 360$. Здесь имеет место аналогия с традиционными китайскими представлениями о календаре солнечного года, который содержит 360 дней и состоит из четырех сезонов по 90 дней и, более дробно, из 24 фаз по 15 дней. Эти и другие аналогии делают очень вероятным то, что именно числовая матрица таблицы 5 использовалась в Древнем Китае в качестве одной из основных

классификационно-числовых систем, под которую выстраивались многие представления об устройстве окружающего мира.

Рассмотрим оригинальное расположение в таблице 5 ячеек с цифрой 7, закрасив их темным цветом и сохранив числа только в четырех центральных ячейках. При этом для лучшей демонстрации возникающей символики используем для закрашиваемых ячеек в одной половине таблицы более темный цвет, чем в другой. Результат представлен в таблице 6.

Таблица 6. Мозаика в биперiодической таблице генетических элементов, возникающая при закрашивании ячеек с триплетами, имеющими 7 водородных связей



В этой мозаике неожиданно появляется число 69, составленное из более черной цифры 6 в левой половине таблицы и более светлой цифры 9 в правой. Цифра 6 получается здесь в результате указанной закраски ячеек с кодонами в левой половине таблицы, а «перевернутая», инверсионно симметричная ей цифра 9 в правой половине — в результате закраски ячеек с их антикодонами. Эти цифры перекликаются с числом водородных связей 6 и 9 в центре таблицы. Интересно, что визуализированные в этой мозаике биериодической таблицы генетического кода цифры 6 и 9 являлись в Древнем Китае общепринятыми символами инь и ян, что дополнительно свидетельствует в пользу связи биогенетической системы с символьной системой «Книги перемен».

Если закрасить ячейки не с цифрой 7, а с цифрой 8 (ячейки с которыми расположены в биериодической таблице зеркально симметрично относительно ячеек с цифрой 7), то аналогичным образом визуализируется не число 69, а его зеркальный двойник. Мозаика ячеек с цифрами 6 и 9 в таблице 5 представляет крест из ее диагоналей.

В связи с «Книгой перемен» известны так называемые центросуммированные магические квадраты (3×3), в которых числа в каждой паре противоположных периферических ячеек квадрата давали одну и ту же сумму, равную числу в его центральной ячейке (один из известных вариантов основан на числах 6, 7, 8 и 9 в периферических ячейках квадрата, имеющего в центральной ячейке число 15 [34, схема 14]). Таблица 5 генетических характеристик имеет прямое отношение к таким квадратам. Восемь чисел любой ее строки (и любого ее столбца) вписываются по стандартному правилу Фу-си в периферические ячейки квадрата (3×3), давая для пары таких противоположных ячеек квадрата одну и ту же сумму 15, записываемую в его центральную ячейку.

Матрицы генетического кода и золотое сечение

Можно заметить, что биериодическая матрица триплетов (таблица 3) представляет собой третью тензорную степень более простой матрицы второго порядка P, составленной из четырех азотистых оснований. Это иллюстрирует таблица 7, в которой скобки при показателе степени означают, что речь идет о возведении в тензорную (или кронекерову) степень. Другими словами, вместо описанного выше относительно сложного построения биериодической таблицы триплетов можно построить эту таблицу на основе формальной математической операции из простейшей матрицы четырех азотистых оснований.

Повторим теперь ранее проделанную операцию замены каждого азотистого основания в матрицах таблицы 7 на соответствующее ему число

Таблица 7. Возведение исходной базовой матрицы P, имеющей размер (2×2), в третью тензорную степень дает бипериодическую матрицу (8×8) триплетов из Таблицы 3

$$P = \begin{vmatrix} C & A \\ U & G \end{vmatrix}; \qquad P^{(3)} =$$

CCC	CCA	CAC	CAA	ACC	ACA	AAC	AAA
CCU	CCG	CAU	CAG	ACU	ACG	AAU	AAG
CUC	CUA	CGC	CGA	AUC	AUA	AGC	AGA
CUU	CUG	CGU	CGC	AUU	AUG	AGU	AGG
UCC	UCA	UAC	UAA	GCC	GCA	GAC	GAA
UCU	UCG	UAU	UAG	GCU	GCG	GAU	GAG
UUC	UUA	UGC	UGA	GUC	GUA	GGC	GGA
UUU	UUG	UGU	UGG	GUU	GUG	GGU	GGG

водородных связей: $C = G = 3$, $A = U = 2$. Но в отличие от случая, показанного в таблице 5 заменим каждый триплет не суммой, а произведением чисел водородных связей у тройки его азотистых оснований. Например, триплет CAU заменится числом 12 $(= 3 \times 2 \times 2)$. В результате получим числовые матрицы $M^{(1)}$ и $M^{(3)}$, представленные в таблице 8. Матрицу $M^{(3)}$ можно называть мультипликативной (в отличие от аддитивной матрицы таблицы 5). Эта мультипликативная матрица $M^{(3)}$, как и похожая на нее аддитивная матрица, также содержит только четыре вида чисел — 8, 12, 18, 27 с аналогичной мозаикой их расположения. Суммы чисел в каждой строке и каждом столбце этой матрицы равны 125, а общая сумма чисел в ней равна 1000. В отличие от аддитивной матрицы матрица $M^{(3)}$ является невырожденной с детерминантом, равным 512.

Таблица 8. Числовые матрицы $M^{(1)}$ и $M^{(3)}$, полученные из символьных матриц $P^{(1)}$ и $P^{(3)}$ при $C = G = 3$, $A = U = 2$. Жирными рамками выделены диагональные ячейки для иллюстрации содержания в каждой диагонали только одного вида чисел

$$M^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \qquad M^{(3)} =$$

27	18	18	12	18	12	12	8
18	**27**	12	18	12	18	8	12
18	12	**27**	18	12	8	18	12
12	18	18	**27**	8	12	12	18
18	12	12	8	**27**	18	18	12
12	18	8	12	18	**27**	12	18
12	8	18	12	18	12	**27**	18
8	12	12	18	12	18	18	**27**

В биологии генетическая система отвечает за самовоспроизведение организмов. В математике по крайней мере, со времен Возрождения математическим символом самовоспроизведения было так называемое золотое сечение, или «божественная пропорция» (обширные сведения по этой теме представлены на вэб-сайте «Музея гармонии и золотого сечения» А. П. Стахова: www.goldenmuseum.com). Золотым сечением называется величина $\varphi = (1 + 5^{0,5})/2 = 1{,}618\ldots$ Интересно, что матрица $M^{(3)}$, построенная на базе особенностей генетического кода, оказывается, как и все матрицы $M^{(n)}$ данного семейства, тесно связанной с этим самым золотым сечением. Данная связь выявляется при извлечении квадратного корня из любой матрицы $M^{(n)}$. Таблица 9 представляет случай такого извлечения для матриц $M^{(1)}$ и $M^{(3)}$.

Таблица 9. Связь «генетических» матриц $M^{(1)}$ и $M^{(3)}$ с золотым сечением $\varphi = (1 + 5^{0,5})/2$

$$(M)^{1/2} = \begin{vmatrix} \varphi^{1} & \varphi^{-1} \\ \varphi^{-1} & \varphi^{1} \end{vmatrix}; \qquad (M^{(3)})^{1/2} =$$

φ^{3}	φ^{1}	φ^{1}	φ^{-1}	φ^{1}	φ^{-1}	φ^{-1}	φ^{-3}
φ^{1}	φ^{3}	φ^{-1}	φ^{1}	φ^{-1}	φ^{1}	φ^{-3}	φ^{-1}
φ^{1}	φ^{-1}	φ^{3}	φ^{1}	φ^{-1}	φ^{-3}	φ^{1}	φ^{-1}
φ^{-1}	φ^{1}	φ^{1}	φ^{3}	φ^{-3}	φ^{-1}	φ^{-1}	φ^{1}
φ^{1}	φ^{-1}	φ^{-1}	φ^{-3}	φ^{3}	φ^{1}	φ^{1}	φ^{-1}
φ^{-1}	φ^{1}	φ^{-3}	φ^{-1}	φ^{1}	φ^{3}	φ^{-1}	φ^{1}
φ^{-1}	φ^{-3}	φ^{1}	φ^{-1}	φ^{1}	φ^{-1}	φ^{3}	φ^{1}
φ^{-3}	φ^{-1}	φ^{-1}	φ^{1}	φ^{-1}	φ^{1}	φ^{1}	φ^{3}

Отмечаемая связь заключается, том, что при извлечении квадратного корня из $M^{(n)}$ получается матрица, содержащая столько же видов чисел и с той же мозаикой расположения, что и исходная матрица, но все ее числа представляют собой различные степени одного и того же числа — золотого сечения. При этом сами данные степени соотносятся друг с другом симметричным, парным образом. Например, для случая $(M^{(3)})^{1/2}$ в таблице 9 показатели степени при φ образуют пары типа инь–ян из противоположных по знаку значений числа 1 и числа 3. Подобные матрицы, состоящие из степеней золотого сечения, названы золотыми матрицами.

Неожиданное проявление золотого сечения в связи с генетическим кодом и его матрицами позволяет автору предложить принципиально новое определение золотого сечения на базе системы генетического кода:

золотым сечением φ и его обратной величиной φ^{-1} называются элементы бисимметрической числовой матрицы, получаемой при

извлечении квадратного корня из матрицы второго порядка M, элементами которой являются оба числа 2 и 3 водородных связей комплементарных азотистых оснований генетического кода, причем на главной диагонали расположено число 3.

Это определение вовсе не использует традиционных понятий, применяемых в классических определениях золотого сечения: отрезков прямой, их пропорций, квадратного уравнения и его корней, рядов чисел Фибоначчи – Люка. Оно имеет генетико-матричную природу, поскольку исходит из матричного представления элементов генетического кодирования. По мнению автора, многие реализации золотого сечения в природе связаны именно с этой его матричной сущностью, ранее нигде не описанной, насколько ему известно (автор будет признателен тем читателям, которые смогут сообщить о более ранних публикациях подобного определения золотого сечения). Необходимо исследовать специально, для описания каких природных систем и феноменов могут быть применены представленные золотые матрицы и их модификации. Можно надеяться на открытие на данном пути новых системных феноменов и связей между ними в живой и неживой природе.

Новая тема золотого сечения в генетических матрицах представляется важной, поскольку многие физиологические системы и процессы связаны с золотым сечением, согласно многочисленным публикациям разных авторов. Так, по их данным, пропорции золотого сечения характеризуют разнообразные параметры деятельности сердечно-сосудистой системы, дыхательной системы, электрической активности мозга, локомоторной активности и пр. Они же издавна описаны и изучаются в феноменах психофизики эстетического восприятия. Автор надеется, что алгебра бисимметрических матриц, развиваемая им в связи с темой золотого сечения, будет полезна для объяснения и численного предсказания отдельных параметров физиологических подсистем биологических организмов с их кооперативными особенностями и феноменами золотого сечения. Изучение математических свойств золотых матриц составляет содержательную ветвь исследований, более подробно изложенную в других публикациях автора.

Возможности применения золотых генетических матриц для моделирования биологических систем весьма разнообразны. Оправданием такого применения служит то, что все физиологические системы обязательным образом согласуются со структурами генетического кода с целью быть переданными по наследству потомкам. Такое согласование является условием эволюционного выживания любых физиологических систем и внутренним камертоном согласования между ними. Оно выступает в роли внутреннего критерия естественного отбора физиологи-

ческих систем. Поэтому каждая из этих систем может нести на себе печать структурных особенностей системы генетического кода, которую матричная математика генетического кодирования может проявить.

Матричные операции с геноматрицами

Интересные симметрологические свойства матрицы таблицы 5 и других матриц, получаемых из биопериодической таблицы генетического кода (для краткости условно назовем их геноматрицами), исследуются в настоящее время систематическим образом. Приведем примеры красивых симметрологических свойств этих матриц.

Матрица таблицы 5 содержит четыре вида чисел, каждое из которых расположено в подмножестве ячеек, образующих в совокупности определенную мозаику. Оказывается, что при возведении такой матрицы в любую целочисленную положительную степень порождается матрица, которая также содержит только четыре вида чисел (величины чисел изменяются), матричное расположение которых в точности воспроизводит мозаики исходной матрицы. В силу этого сохранения числовых мозаик подобные матрицы называются нами мозаико-инвариантными. Так при возведении во вторую степень матрицы таблицы 5 получается матрица, в ячейках которой просто происходит однозначная замена исходных четырех чисел 6, 7, 8, 9 новыми взаимосвязанными числами с сохранением видовой картины расположения соответствующих ячеек: все числа 6 заменяются числом $444 = 4 \times 111$, все числа 7 — числом $448 = 4 \times 112$, все числа 8 — числом $452 = 4 \times 113$, все числа 9 — числом $456 = 4 \times 114$. Существенно, что это свойство мозаико-инвариантности подобной матрицы при ее возведении в степень не зависит от величины самих чисел, а только от их взаимного расположения. Это свойство сохраняется даже тогда, когда перемножаются две матрицы с наборами четырех совершенно различных видов матричных элементов (например, первая матрица содержит символы a, b, c, d, а вторая — k, l, m, p), но с тем же самым расположением этих видов, что и у матрицы таблицы 5. В итоге обычного матричного перемножения здесь образуется матрица с набором четырех иных матричных элементов того же самого мозаичного расположения. При этом каждый из этих четырех элементов, очевидно, может быть не только фиксированным числом, но также произвольной функцией от времени или комплексной величиной и т. д., но «кооперативные» свойства данного матричного ансамбля все равно обеспечат его мозаико-инвариантность. Теорию множества мозаико-инвариантных матриц, вовсе не исчерпываемого приведенным примером геноматриц, еще предстоит развить. Самостоятельный интерес представ-

ляет вариант, при котором вписанные в матрицу символы сами являются матрицами и состоят из вложенных в них других матриц. Подобные схемы иерархических геноматриц могут использоваться для моделирования самоорганизующихся процессов и систем в рамках некоторой матричной механики развития.

Если переставить местами левую и правую половину матрицы таблицы 5, то получается матрица с измененной мозаикой чисел и с несколько иными свойствами. При ее возведении в любую нечетную степень образуется матрица с той же самой мозаикой расположения четырех чисел (или символьных элементов). А при ее возведении в любую четную степень образуется матрица с той же мозаикой, какую имеет матрица таблицы 5. Другими словами, семейство степеней данной матрицы имеет два различных класса эквивалентности, образующих подсемейство четных и подсемейство нечетных степеней матриц. Каждое из этих подсемейств имеет свою собственную мозаику, которая трансформируется в мозаику другого подсемейства перестановкой «левой» и «правой» половин матриц.

Четыре азотистых основания кода C, A, G, U связаны определенным матричным образом с биериодической таблицей 64 триплетов [26, стр. 106, рис. 2.3.1]. Если собрать эти четыре элемента в простейшую матрицу P второго порядка, в верхней строке которой расположены элементы C, A, а в нижней строке — U, G, то возведение этой матрицы в третью степень в смысле тензорного произведения матриц дает биериодическую таблицу 3. Формально эта базовая геноматрица P представляет собой обобщение известной в физике спин-матрицы, подчиненной дополнительному условию равенства нулю ее детерминанта. Множество матриц, представляющих собой различные целочисленные степени n геноматрицы P в смысле тензорного произведения, образуют семейство матриц порядка $(2^n \times 2^n)$, наделенное коммутативными и иными алгебраическими свойствами. В каждой его матрице порядка $(2^n \times 2^n)$ размещены закономерным образом все возможные n-плеты из четырех исходных элементов C, A, G, U. Например, в матрице $(2^4 \times 2^4)$ размещены все квадруплеты типа $CUAG$ и пр. Особенный интерес представляет коммутативное подсемейство матриц, порождаемых тензорным возведением геноматрицы P в степени, кратные трем. Именно в этом подсемействе содержатся матрицы, в которых представлены все мыслимые триплетные последовательности в виде единой мультиплетной цепи. Совокупность этих последовательностей включает в себя как «значимые» последовательности (т. е. реально кодирующие определенные белки), так и «мусорные» (которые по неясным для генетиков причинам не кодируют никаких белков и составляют подавляющую часть множества генетических последовательностей).

Например, в матрице, представляющей собой 999-ю тензорную степень матрицы P, содержатся все мыслимые варианты последовательностей из 999 азотистых оснований кода или 333 генетических триплетов. Заимствуя из существующих банков генетических данных и подставляя в эту матрицу все известные значимые последовательности азотистых оснований названной длины, можно анализировать кооперативные особенности размещения в матрице значимых и незначимых («мусорных») последовательностей, увязывая их с мозаико-инвариантными и иными алгебраическими свойствами подобных матриц и их частных случаев. Для проведения такого исследования необходимо составить библиотеку мозаик размещения значимых генетических последовательностей в указанных геноматрицах. Целями этого предлагаемого автором симметрологического анализа является установление (моделирование) причин распадения всего множества генетических последовательностей азотистых оснований на подмножества значимых и незначимых последовательностей, предсказание еще не известных науке значимых вариантов генетических последовательностей и пр. Подчеркнем, что возникающий здесь в связи с бинарными субалфавитами математический аппарат, базирующийся на линейной алгебре и теории квадратичных форм, касается не только 64 триплетов и 20 кодируемых ими аминокислот, но и особенностей первичной структуры белков (в организме человека их насчитывается около 40000 видов).

Обратимся к специальному важному случаю семейства геноматриц, порождаемого тензорным возведением базовой матрицы P в целочисленные степени. Речь идет о случае, при котором $C = G$, $A = U$ и который соответствует третьему бинарному субалфавиту таблицы 1. При этом матрица P имеет диагонали, позиции каждой из которых содержат одно и то же число (или символ), и называется бисимметрической матрицей. Совокупность матриц размера $(2^n \times 2^n)$, получаемых в результате возведения этой бисимметрической матрицы в целочисленные степени тензорным образом, образует семейство с особыми свойствами, среди которых фигурируют следующие: мозаико-инвариантность любой матрицы семейства при ее возведении в целую степень в обычном смысле (это свойство было рассмотрено выше на частном примере октетной матрицы таблицы 5); «память мозаик в поколениях»; «упорядочивающее действие» матриц этого семейства; взаимная дополнительность любой матрицы семейства и ее повернутого на 90° двойника, и др. Именно к данному случаю относится, в частности, таблица 5, построенная для ситуации $C = G = 3$, $A = U = 2$.

Под названным свойством «памяти поколений» подразумевается следующее. Исходная матрица P данного семейства содержит два вида чисел, каждое их которых заполняет ячейки одной из диагоналей. Тем

самым эта матрица содержит два вида числовых мозаик в форме диагональных линий, образующих в совокупности фигуру диагонального креста. Легко проверить, что матрица следующего поколения, представляющая собой вторую тензорную степень исходной матрицы P, имеет размер (4×4) и содержит три вида чисел. Соответственно, она имеет уже три вида числовых мозаик глобального типа, т. е. мозаик, имеющих сопоставимые с этой матрицей размеры, а потому в принципе не могущих быть реализованными в матрице предыдущего поколения с ее относительно малыми размерами. Но каждый квадрант с размерами (2×2) этой новой матрицы содержит свои собственные мозаики, которые по отношению ко всей матрице выступают в роли локальных мозаик. Оказывается, что эти локальные мозаики любого квадранта матрицы очередного поколения в точности совпадают с глобальными мозаиками матрицы предыдущего поколения. Данное правило выполняется для всего рассматриваемого бесконечного семейства матриц $P^{(n)}$, каждая из которых содержит «n» видов чисел и «n» соответствующих им мозаик. В силу этого любая матрица семейства содержит в своих квадрантах и более мелких субквадрантах соответствующего размера локальные мозаики, которые воспроизводят глобальные мозаики матриц всех предыдущих поколений. Другими словами, имеет место память мозаик в поколениях геноматриц рассматриваемого семейства. В силу мозаико-инвариантности данных геноматриц эта память, или набор локальных и глобальных мозаик геноматрицы, не изменяется при возведении любой матрицы семейства в целую степень в смысле обычного умножения матриц. Описанное свойство используется для моделирования ряда биологических явлений, например, лингвистических, при которых, смысловой объект (например, слово), становясь частью смыслового объекта более общего уровня (фразы и пр.), не утрачивает вместе с тем свою смысловую индивидуальность по аналогии с сохранением локальной мозаики в составе глобальных мозаик рассматриваемых матриц.

Под свойством взаимной дополнительности любой геноматрицы рассматриваемого семейства и ее повернутого на 90° двойника понимается следующее. Если сложить такие две матрицы, то итоговая матрица будет иметь во всех своих ячейках одно и то же число (для мультипликативного случая ячейки диагоналей будут иметь одно число, а внедиагональные ячейки — другое). Такие две геноматрицы напоминают образующую и проверяющую матрицы из математической теории кодирования. Действительно, по числам в итоговой матрице, порожденной сложением или умножением геноматрицы на ее повернутый двойник, можно обнаружить изменения в исходной геноматрице.

Свойство упорядочивающего действия геноматриц рассматриваемого семейства проявляется при обычном перемножении такой геноматри-

цы W в степени n с матрицами H (или векторами) случайных чисел, имеющих значения в диапазоне от нуля до единицы. Это свойство было выявлено в ходе машинного эксперимента с использованием известной компьютерной программы МатЛаб и генерируемых ею матриц и векторов названных случайных чисел. Итоговая матрица перемножения $H \times W^n$ имеет близкие величины чисел в каждой строке, причем совпадение этих чисел по величине нарастает с ростом n. При обратном порядке перемножения $W^n \times H$ то же самое оказывается справедливым в отношении чисел каждого столбца. Перемножение трех матриц $W^n \times H \times W^n$ представляет собой матрицу, во всех ячейках которой стоят примерно равные числа, причем их равенство тем сильнее, чем выше степень n.

Другой пример. Рассмотрим умножение октетной матрицы (или октетного вектора), все компоненты которой равны единице, на названную числовую матрицу таблицы 5. В результате данного умножения получаем октетную матрицу (октетный вектор), все компоненты которой равны 60. Это эквивалентно получению шестидесяти исходных матриц, все компоненты которых равны единице. В биологическом плане данный результат может ассоциироваться с представлением о пшеничном зерне, которое под действием генетических механизмов эволюционирует в пшеничный колос с 60 зернами, подобными исходному. Другими словами, данная матрица, как и все матрицы рассматриваемого семейства геноматриц, обладает как бы свойствами множественного клонирования исходных единичных объектов. Этими свойствами обладают все квадратные матрицы, сумма чисел во всех строках и столбцах которых равна одному и тому же числу. О фрактальных свойствах геноматриц можно говорить особо, поскольку они нередко демонстрирует полифрактальность, т. е. фрактальность своего устройства сразу по нескольким свойствам и закономерностям, повторяющимся на разных уровнях.

Еще один симметрологический пример. Рассмотрение октетных матриц, возникающих из биериодической таблицы генетического кода, позволило автору выявить такой их подкласс, матрицы которого при их возведении в целочисленную степень n трансформируются в умноженные на закономерный коэффициент матрицы, заполненные только тремя соседними числами ряда Фибоначчи (2): F_{n-1}, F_n, F_{n+1}. Например, такой матрицей является та, у которой все ячейки правого нижнего квадранта заполнены нулями, а все остальные ячейки — единицами. Эти октетные геноматрицы представляют собой обобщение известной матрицы Фибоначчи (2×2). Они особенно интересны в связи с существующими в биологии филлотаксисными законами морфогенеза, в которых фигурируют числа Фибоначчи и которые уже упоминались в начале статьи в связи с золотым вурфом. Законы филлотаксиса реализуются на разных уровнях живых организмов. Например, во многих растениях они

представлены как на стебле, так и на его ветвях, развивающихся позднее. Эти биологические ситуации предлагается формально моделировать на основе представления о геноматрицах Фибоначчи, вложенных друг в друга.

В какой мере живой организм представим в виде иерархической системы вложенных друг в друга матриц, способных к определенному развитию в том или ином темпе, и каковы должны быть свойства матриц для такого представления? Не является ли, например, человек некоторой иерархической суперматрицей, согласованной с бипериодической таблицей генетического кода? Этот вопрос является основным для развиваемой автором в настоящее время специфической матричной механики биологического развития, оперирующей вложенными друг в друга матрицами этой бипериодической таблицы. Возможно, описанные в литературе исторические факты о том, что у многих народов в различные эпохи жрецы разнообразных религий почему-то по много лет занимались исследованиями числовых квадратов, окажутся, в конце концов, связаны с подспудным значением описанных выше матричных семейств для самоорганизации живых организмов. Не является ли описанный ансамбль матриц отражением существующей в природе некоторой симметрологической прасистемы, которая издавна эксплуатируется живым веществом в его задачах саморазвития и паттерны которой проявляются в генетически наследуемом устройстве организмов и кооперативном согласовании их частей в единое целое? Эти вопросы имеют отношение также к хронической концепции вырожденности кода, развиваемой автором и связывающей существование 20 видов аминокислот с биологическими хроноциклами и суммой $8 + 12 = 20$ в характеристиках этой вырожденности.

Многие современные компьютерные программы позволяют легко работать с матрицами и операциями над ними. В этой связи любой читатель может самостоятельно исследовать красивые свойства матриц на основе бипериодической таблицы генетического кода и открыть для себя и науки новые красивые результаты.

Более углубленное рассмотрение известных данных о генетическом кодировании с позиций бипериодической таблицы 3, в частности, по специфике размещения в ней 20 аминокислот и знаков пунктуации белкового синтеза, кодируемых 64 триплетами, выявляет новые отношения симметрии между частями системы генетического кодирования, а также целую иерархию двоичных систем типа инь–ян на разных ее уровнях [26]. На этой основе удается, например, выявить содержательные правила позиционирования бинарных языков в триплетах, существенные для понимания генетической системы. Фрактальности строения бипериодической таблицы кода [26, рис. 2.3.1] автором сопоставляется определенное

дихотомическое дерево из циклов поочередного порождения элементов первых двух бинарных субалфавитов таблицы 1 по аналогии с древнекитайскими дихотомическими деревьями инь–ян. Данное дерево фрактального типа имеет на шестом уровне своего ветвления все 64 триплета, сгруппированных в семейства в соответствии с биериодической таблицей. К общепринятым в биологии эволюционным дихотомическим деревьям происхождения биологических видов от далеких единых предков, а также известным фактам биологической реализации дихотомий при делении клеток и пр. автором добавляется особое дихотомическое дерево, воспроизводящее естественную структурную упорядоченность множества генетических триплетов, представленную в биериодической таблице кода. Это дает дополнительные возможности осмысления генетических феноменов с позиций синергетики, обращающей активное внимание на сближение мировоззрений Востока и Запада [8]. Очень интересен симметрологический анализ описываемых генетических структур в связи с идеями унитарных симметрий, столь удачно зарекомендовавших себя в физике элементарных частиц и приведших, в частности, к представлению о «самосветящемся свете» в теории глюонов [1, с. 229]. Наиболее смелая из гипотез, выдвигаемых автором в данной связи, заключается в предположении существования в живой природе некоторого подобия этому в форме «самооживляющейся жизни».

Об атрибутивной теории кодирования

В связи с бинарными «субалфавитами по признакам» и биериодической таблицей генетического кода автор развивает бинарно-атрибутивную теорию генетического кодирования (или, кратко, атрибутивную теорию), опирающуюся на анализ биологических симметрий. Эта теория исходит из положения о том, что бинарно-оппозиционные атрибуты играют важнейшую роль в информационных механизмах генетики — роль основных информационных единиц (во всяком случае, для целого ряда генетических задач). По мнению автора, азотистые основания A, C, G, U (T), которые обычно рассматриваются в генетике как основные информационные единицы, играют на самом деле вспомогательную, вторичную роль транспортных средств (карет или повозок) для действительно важных персон — вышеназванных атрибутов. Эта точка зрения резко отличается от традиционного представления о том, что данные азотистые основания (или нуклеотиды) являются основными информационными единицами в генетических посланиях. Согласно атрибутивной теории, основное внимание в информационно-генетических проблемах должно быть сконцентрировано на анализе последовательностей би-

нарно-оппозиционных признаков в генетических посланиях без привычного исключительного внимания к последовательностям только самих нуклеотидов (во всяком случае, для широкого класса генетических задач; даже начальная стадия развития этой теории позволяет получать интересные результаты, представленные, например, в работе [32]). Подчеркнем, что множество самих генетических молекул, которое и определило название «молекулярная генетика», и последовательность которых обычно исследовалась биохимиками, совершенно отличается от множества тех их бинарно-оппозиционных признаков, важность которых декларируется атрибутивной теорией. Возможно, в будущем для изучения вероятных связей этих признаков генетических молекул с надмолекулярными признаками биологических организмов возникнет некая новая «атрибутивная генетика».

Атрибутивная теория генетического кодирования охватывает также множество 20 аминокислот, которое, как показали наши исследования, структурировано по собственным бинарно-оппозиционным признакам. Нами отмечается, что набор из 20 аминокислот включает в себя пять видов семейств аминокислот (алифатические, ароматические, полярные, неполярные, заряженные) с четырьмя видами аминокислот в каждом семействе. Данные семейства аминокислот имеют закономерное распределение своих собственных бинарно-оппозиционных признаков, а также имеют свои бинарные субалфавиты по признакам. Это позволяет представить белковые последовательности аминокислот в виде специфических последовательностей из символов «0» и «1» с соответствующими индексами для изучения скрытых закономерностей. В этой же связи автором построены дихотомические деревья признаков для аминокислот и проанализирована их симметрическая стыковка с дихотомическими деревьями признаков для генетических триплетов. Выясняется, что этот круг материалов имеет интересные параллелизмы не только с таблицами триграмм и гексаграмм древнекитайской «Книги перемен», но и с древнекитайским учением о пяти элементах (у-син). Специфические отношения и циклы «порождения» и «подавления» между пятью элементами этого учения могут быть сопоставлены с отношениями и циклами физиологии аминокислот и белков. Рассмотрение результатов, полученных автором на этом пути, выходит за рамки настоящей публикации.

Вернемся к трем параллельным текстам на трех различных языках, которые с точки зрения атрибутивной теории существуют в генетической последовательности нуклеотидов. Отметим, что эта ситуация параллельных текстов, на самом деле, не только не нова, но даже стандартна для живых организмов. Например, музыкальная мелодия как последовательность звуков включает в себя, по крайней мере, два параллельных «текста»: один — в виде последовательности звуковых частот отдельных

нот, а другой — в виде последовательности длительностей этих же нот. Живой организм обладает удивительной способностью объединять эти разные тексты в некое гармоничное целое (при условии, что это не случайный набор звуков, а композиционная последовательность, созданная композитором интуитивно или по известным правилам).

Другой пример дает физиология цветового восприятия, которое у человека строится на одновременном (параллельном) восприятии трех базовых цветов — красного, синего и зеленого, на которые врожденным образом автоматически разлагается любой воспринимаемый им цвет. Поэтому зрительно-цветовое восприятие человеком раскрашенного предмета, которое производится посредством сканирования глазами последовательности окрашенных участков этого предмета, может быть интерпретировано как сходная процедура создания объединенного образа раскраски на основе перцепции трех параллельных текстов на трех разных «языках»: красном, синем, зеленом. Добавим, что в физиологии цветового восприятия давно известно существование трех пар взаимно дополнительных цветов: красный–голубой, синий–желтый, зеленый–пурпурный. Эти три пары цветов из физиологии цветовосприятия могут ставиться в формальную параллель с тремя парами «признак–антипризнак» таблицы 1, определяющими три бинарных субалфавита генетического кода. Эта параллель позволяет, в частности, представить бипериодическую таблицу генетического кода закономерно раскрашенной в шесть названных базовых цветов.

Подобные примеры позволяют полагать, что атрибутивная теория эффективна не только в применении к анализу генетического кодирования, но имеет значительно более широкое применение, охватывая, возможно, все или почти все информационные системы или каналы биологических организмов. При этом способность живого организма интегрировать несколько параллельно получаемых «разноязычных текстов» одной модальности (звуковой, зрительной, молекулярно-генетической и пр.) в некое единое целое (музыкальную мелодию, образ раскрашенного предмета, генетическую инструкцию для создания белка и т. д.) реализуется на самых разных его уровнях. Существование данной — видимо, общебиологической — способности делает оправданной разработку расширенной атрибутивной теории информационной физиологии, тесно связанной с атрибутивной теорией генетического кодирования.

Генетический код и лингвистика

Интересно, что в лингвистике давно существует теория бинарных оппозиций и их ансамблей как структурной основы различных язы-

ков [3, 7, 35–38]. И давно существует мнение, что языки человеческого общения сформировались не на пустом месте, а являются продолжением генетического языка. Это свидетельствует в пользу идеи информационной унифицированности организмов. Приведем характерные цитаты из трудов Якобсона [35], одного из крупнейших лингвистов современности и автора глубокой теории бинарных оппозиций в языкознании. Они свидетельствуют, насколько серьезно относятся лингвисты к исследованию структурных свойств генетического кода, который работает, казалось бы, на совершенно ином — молекулярном — уровне.

«Название книги Дж. и М. Бидлов «Язык жизни» — не просто фигуральное выражение, и исключительно высокая степень подобия систем генетической и языковой информации полностью объясняет ведущую мысль этой книги: «расшифровка ДНК-кода выявила, что мы обладаем языком, который гораздо старше иероглифики, языком, который так же стар, как сама жизнь, языком, который является самым живым из всех языков»... Среди всех систем передачи информации только генетический код и языковый код базируются на использовании дискретных компонентов, которые сами по себе не имеют смысла, но служат для построения минимальных единиц, имеющих смысл... Сравнивая достижения лингвистов и генетиков, Жакоб (*Нобелевский лауреат за работы по молекулярной генетике* — С.П.) справедливо заметил: «В обоих случаях речь идет о единицах, которые, взятые сами по себе, полностью лишены значения, но, будучи определенным образом сгруппированы, приобретают его»... Однако сходство структур в двух рассматриваемых информационных системах простирается гораздо дальше. Все отношения между фонемами разложимы на ряд бинарных оппозиций элементарных дифференциальных признаков» [35, с. 392–394]. Важнейшей проблемой является то, «каким образом следует интерпретировать все эти бросающиеся в глаза соответствия между генетическим кодом... и базовой моделью (*бинарно-оппозиционной* — С.П.), лежащей в основе вербальных кодов всех человеческих языков» [там же, с. 395]. «Наследственность сама по себе является фундаментальной формой коммуникации... Быть может, основы языковых структур, наложенные на молекулярную коммуникацию, были построены прямо по ее структурным принципам» [там же, с. 396]. Эти вопросы возникли у Якобсона как следствие его многолетних исследований связей лингвистики, биологии и физики, которые, в частности, рассматривались на объединенном семинаре физиков и лингвистов, совместно организованном Нильсом Бором и Романом Якобсоном в Массачусетском Технологическом институте.

Кстати, «в своих новаторских трудах о роли симметрии в словесном искусстве Якобсон использовал и мысли о созвучии древнекитайского

символического понимания симметрии, высказанные двумя другими нобелевскими лауреатами по физике — Ли и Янгом, чьи имена связаны с открытием особого рода симметрических отношений в физике» [6, с. 5].

Подобные вопросы о связи лингвистики и генетического кода волнуют многих исследователей. Дело еще и в том, что немало исследователей воспринимают язык как живой организм: «Взгляд на язык как на живой организм, подчиняющийся естественным законам природы, восходит к глубокой древности... Исследование природы, характера и причин изоморфизма генетических и лингвистических закономерностей является для языкознания нашего времени одной из наиболее важных кардинальных проблем» [10,12, с.3]. Читатель может познакомиться с интересными материалами на эту тему в книгах [3,4,7,12,36–38]. Ряд публикаций посвящен фрактальным особенностям лингвистических и генетических текстов. При этом обращается дополнительное внимание на те обширные сегменты ДНК, в которых не содержатся инструкции для производства белков. Эти сегменты с определенной точки зрения кажутся особо выразительным представлением некоторого языка [4, 39, 52]. Работа [11] утверждает, что стиховой метр имеет сходные с генетическим кодом черты эволюции.

Исследования этого направления продолжаются во всем мире. При этом ряд из них связан с прямым использованием системы инь–ян, о чем свидетельствует, например, название монографии [36] «Об инь–ян природе языка».

Анализ биериодической таблицы 3 генетического кода показал, что система генетической информации связана со стихотворными формами. Действительно, ее система триплетов выступает в некотором смысле аналогом этих форм. Речь идет о том, что данную таблицу 3 в силу ее биериодичности можно интерпретировать как двойное «генетическое стихотворение». Оно предстает записанным в строку при трактовке азотистых оснований в одном «субалфавите по признаку» (по признаку пуриновости–пиримидиновости). И оно же предстает записанным в столбец при трактовке тех же азотистых оснований триплетов в другом «субалфавите по признаку» (по признаку аминомутируемости–немутируемости). При этом каждый триплет можно понимать, например, как отдельный слог. Тогда можно сказать, что каждый слог строки оказывается «рифмованным» с теми слогами, которые имеют такой же порядковый номер в других строках, т. е. расположены в том же столбце таблицы под обобщающим эти слоги триграммным символом. Под «рифмованностью» в «горизонтальном стихотворении» таблицы понимается созвучность, аналогичность триплетов-слогов по признаку пуриновости–пиримидиновости их оснований. Применительно к «вертикальному стихотворению» таблицы то же самое можно сказать о «рифмованности» друг

с другом всех тех слогов, которые имеют одинаковый порядковый номер в ее столбцах, т.е. расположены в той же ее строке. Под «рифмованностью» здесь понимается созвучность, аналогичность триплетов-слогов по признаку мутируемости–немутируемости их оснований. Эта рифмованность на каждом слоге дополнительно отличает рассматриваемое «генетическое стихотворение» от обычного стихотворения, где обычно рифмуются только последние слоги строки.

Здесь вспоминается тезис замечательного поэта-мыслителя В. Хлебникова: «Сам мир устроен на тех же структурных принципах, что и стихотворение» [31, с. 255]. В современной науке поэзия исследуется как специфический фактор физиологического влияния: «Почти у всех народов метрический стих участвует в ключевых религиозных, общественных и хозяйственных ритуалах; его повсюду считают носителем какой-то таинственной мудрости» [31, с. 80].

Еще Лейбниц (1646–1716) мечтал о создании всеобщего, универсального языка, связанного с разрабатывавшимся им бинарным, или двоичным, исчислением. Кстати, познакомившись с помощью иезуитских миссионеров с древнекитайской «Книгой перемен», он с изумлением обнаружил, что система ян и инь в ней определяет ту самую двоичную систему счисления, относительно которой Лейбниц полагал, что он сам ее только что изобрел [50, с. 64–65]. Сегодня благодаря прогрессу биологии и других наук мы имеем основания вернуться к этим идеям Лейбница в свете новых данных об унифицированных основах биологических языков. Мы полагаем, что именно ансамбли бинарных субалфавитов играют роль таких унифицированных основ биологических языков на разных информационных уровнях живых организмов.

Правила вырожденности генетического кода и хроноциклическая концепция

До этого момента речь шла о триплетах. Обратимся теперь к множеству 20 аминокислот, которые кодируются триплетами. По данным современной науки, система азотистых оснований и 64 триплетов одинакова для всех живых организмов. Но при этом, начиная с уровня соответствия множества 64 триплетов этому множеству 20 аминокислот, наблюдается значительное эволюционное разнообразие.

В каждом генетическом коде любая из 20 аминокислот кодируется определенным числом триплетов. Это число кодирующих ее триплетов будем называть числом вырожденности аминокислоты в данном коде. Например, аминокислота Thr в коде митохондрий человека и позвоночных животных кодируется четырьмя триплетами *ACC*, *ACA*, *ACU*,

ACG, а потому в этом коде число вырожденности для данной аминокислоты равно 4. В другом генетическом коде эта же аминокислота может иметь число вырожденности, которое будет равно, например, 8. Разные генетические коды имеют несколько разные совокупности своих чисел вырожденности для унифицированного набора из 20 аминокислот. На сегодня известно 17 генетических кодов, данные о которых представлены на сайте под названием «The Genetic Codes» авторитетного National Center for Biotechnology Information (США).

Проведенный автором сравнительный анализ чисел вырожденности у этих 17 кодов выявил существование важного эволюционного правила симметрического расщепления множества 20 аминокислот на два оппозиционных подмножества [42]. Одно подмножество из 8 «высоковырожденных» аминокислот отличается тем, что его аминокислоты имеют большие числа вырожденности — от 4 и более. К таким аминокислотам относятся Ala, Arg, Gly, Leu, Pro, Ser, Thr, Val (здесь и далее используются традиционные сокращенные названия аминокислот). Другое подмножество содержит 12 «низковырожденных» аминокислот, у которых числа вырожденности равны 3 или менее: Asn, Asp, Cys, Gln, Glu, His, Ile, Lys, Met, Phe, Trp, Tyr.

Обнаружение этого эволюционного правила разделения всех аминокислот на две категории вырожденности было связано с поисками автором связей генетического кода с биологическими ритмами или циклами организмов во времени (хроноциклами), наиболее выраженные из которых, как известно, привязаны к 24-часовому солнечному циклу день-ночь. Древняя восточная медицина тысячелетиями использует знания о биоритмах организмов при диагностике, профилактике и лечении болезней, например, в методах пульсовой диагностики и акупунктуры. Сутки при этом поделены на 12 частей по 2 часа, во время которых наблюдается кульминация активности отдельных органов. Многое в этих воззрениях и рецептах опирается на таблицу 64 гексаграмм. Возник следующий вопрос: если генетическая система построена на 64 триплетах, сводимых по объективно существующим у них признакам в аналогичную октетную таблицу, то не связана ли система триплетов с биоритмами и задачей генетического кодирования не только пространственных, но и временных особенностей построения организмов. Этим значимым вопросам посвящена большая статья [21]. В ней излагаются выдвигаемая автором хроноциклическая концепция генетического кода и ряд новых правил структуризации этого кода в связи с 24-часовым циклом солнечной активности.

Как же размещены представители двух подмножеств — высоко- и низковырожденных — аминокислот в биопериодической матрице $P^{(3)}$ триплетов (см. таблицу 7)? Есть ли какая-то надежда на их

симметричное закономерное размещение в ней? Никаких исходных оснований надеяться на это нет. Действительно, как было отмечено выше, матрица $P^{(3)}$ триплетов строится на формальной основе возведения простейшей матрицы P из четырех азотистых оснований в третью тензорную степень без какого-либо упоминания об аминокислотах и без учета кодовой роли триплетов. Кроме того, между триплетными последовательностями ДНК и местом сборки соответствующей цепи аминокислот лежит целая биохимическая пропасть из большого числа промежуточных биохимических агентов и процессов, кооперативная деятельность которых сама по себе представляет научную проблему, далекую от ясности. Ниоткуда не следует, что деятельность этих десятков и сотен промежуточных ферментов и других участников молекулярно-генетического процесса должна привести к какой-то симметрии в расположении 20 аминокислот в биериодической таблице множества 64 триплетов, совсем иного по своей природе. Если же вдруг окажется, что в полученную формальным путем матрицу 64 триплетов множество 20 аминокислот впишется достаточно упорядоченным, симметрическим образом, то этот феноменологический факт будет сильным аргументом в пользу адекватности развиваемого автором матричного аппарата анализа и моделирования системы генетического кодирования.

Таблица 10 показывает, что, несмотря на его малую вероятность, именно закономерное, симметрическое расположение рассматриваемых категорий аминокислот реализуется в биериодической матрице $P^{(3)}$. В этой таблице, черным цветом обозначены ячейки с 8 высоковырожденными аминокислотами, представлен случай генетического кода митохондрий человека и животных. Этот код в литературе называется «идеальным» и предположительно наиболее древним, а потому может быть использован для в качестве удобного эталона сравнения. Аналогичное расположение этих 8 аминокислот имеет место в других генетических кодах (обсуждение деталей этого выходит за рамки данной статьи).

В таблице 10 реализуются сразу четыре вида симметрологических закономерностей:

1) матрица $P^{(3)}$ содержит четыре пары соседних строк 1–2, 3–4, 5–6, 7–8, эквивалентных между собой по расположению в них тех же самых аминокислот;

2) каждая строка содержит две пары соседствующих черных ячеек и две пары соседствующих белых ячеек, причем в каждой такой паре черных ячеек заключена одна и та же высоковырожденная аминокислота;

3) левая и правая половина матричной черно-белой мозаики зеркально антисимметричны друг другу: каждая пара ячеек, расположенных зеркально симметрично в левой и правой половине матрицы, характеризуется наличием обоих цветов;

4) диагонально расположенные квадранты матрицы эквивалентны друг другу по своей черно-белой мозаике.

Таблица 10. Расположение 8 высоковырожденных аминокислот в ячейках биериодической матрицы $P^{(3)}$ генетического кода митохондрий человека и позвоночных акцентировано для наглядности черным цветом. Белым цветом обозначены все остальные ячейки, в которых размещены низковырожденные аминокислоты и стоп-сигналы (Stop).

		CAC His 61	*CAA* Gln 60			*AAC* Asn 57	*AAA* Lys 56
		CAU His 53	*CAG* Gln 52			*AAU* Asn 49	*AAG* Lys 48
				AUC Ile 43	*AUA* Met 42	*AGC* Ser 41	*AGA* Stop 40
				AUU Ile 35	*AUG* Met 34	*AGU* Set 33	*AGG* Stop 32
		UAC Tyr 29	*UAA* Stop 28			*GAC* Asp 25	*GAA* Glu 24
		UAU Tyr 21	*UAG* Stop 20			*GAU* Asp 17	*GAG* Glu 16
UUC Phe 15	*UUA* Leu 14	*UGC* Cys 13	*UGA* Trp 12				
UUU Phe 7	*UUG* Leu 6	*UGU* Cys 5	*UGG* Trp 4				

Особенностью биериодической матрицы $P^{(3)}$ (см. таблицы 3, 7 и 10) является то, что в каждом из ее четырех квадрантов порядка (4×4) расположено все семейство из 16 триплетов, начинающихся с одинаковой первой буквы. Например, в левом верхнем квадранте расположены все C-триплеты, т. е. триплеты, начинающиеся с буквы C. В общем слу-

чае, когда в теоретическом рассуждении нет необходимости конкретизировать первую букву, данные семейства будем называть семействами *-триплетов. Каждый такой квадрант, в свою очередь, состоит из четырех субквадрантов порядка (2 × 2), в каждом из которых размещено подсемейство всех четырех триплетов, эквивалентных друг другу по двум первым буквам. Эти подсемейства будем называть в общем случае подсемействами **-триплетов. Как легко видеть из таблицы 10, симметрии черно-белой мозаики бипериодической матрицы $P^{(3)}$ связаны именно с этими семействами и подсемействами триплетов.

Правила расщепления генетического кода и их параллелизм с законами Менделя

Генетический код лежит в основе великого объединения живых организмов, и в этом смысле он составляет основу жизни. Но какого типа законы лежат в основе самого генетического кода и генетических секвенций? Попытки ответить на этот вопрос привели автора к выдвижению и обоснованию положения о реализации в генетической системе особых биологических правил («законов») расщеплений, формально родственных законам Менделя, на которых построена научная генетика.

В таблице 10 каждый из квадрантов матрицы $P^{(3)}$ расщеплен на белые и черные ячейки в соотношении 1 : 3 (или 3 : 1) между их количеством. Но один из основных законов биологии — второй закон Менделя (или закон расщепления) о наследовании признаков у организмов — гласит о формально таком же количественном расщеплении наследуемых признаков доминантного и рецессивного характера. Это только один из многих примеров параллелизмов с законами Менделя, отмеченных нами в ходе симметрологического анализа типовых расщеплений множеств элементов генетического кода.

140 лет назад Грегор Мендель сформулировал свои количественные законы наследования бинарно-оппозиционных признаков у гибридных организмов. Эти законы Менделя нередко называются в литературе основными законами биологии.

Наши исследования связаны с количественными характеристиками реализации бинарно-оппозиционных признаков на уровне тех структур генетического кода, которые носят унифицированный характер для всей живой природы. Соответственно, речь идет об уровне существенно более глубоком, базовом по отношению к уровню наследуемых признаков отдельных видов организмов. Кроме того, автором исследуется микроскопический — молекулярный — уровень носителей бинарно-оп-

позиционных признаков в отличие от макроскопического — организменного — уровня признаков, рассматриваемых обычно в связи с законами Менделя.

Строение генетического кода является многолетней загадкой для науки. С момента той «расшифровки» генетического кода, которая заключалась в установлении 40 лет назад специфического соответствия между 64 триплетами и 20 генетически кодируемыми аминокислотами (вместе со стоп-сигналами и старт-сигналами белкового синтеза), не прекращались попытки исследователей предложить модели генетического кода, объясняющие загадочный характер этого соответствия. В литературе по молекулярной генетике описано много таких попыток, первой из которых считается известная «ромбическая» модель Г. Гамова. Однако вопрос о специфике наблюдаемого строения генетического кода остается открытым.

Развиваемый нами подход к этому вопросу связан с выявлением широкого распространения «тетра-множеств» в системе генетического кодирования. Тетра-множеством автор называет множество элементов, которое по критерию наличия или отсутствия значимого признака у его элементов расщеплено на два или три подмножества, количественные составы которых соотносятся в типовых пропорциях как 1 : 3, или 2 : 2, или 4 : 0, или 1 : 2 : 1. Выявляемые количественные феномены тетра-расщеплений генетического кода ставятся в параллель с известными количественными законами Менделя о расщеплении наследуемых признаков у гибридных организмов (в этих законах фигурируют те же отношения 1 : 3, 2 : 2, 1 : 2 : 1, 4 : 0). Совпадение количественных характеристик у этих двух типов феноменов, относящихся к области проблем генетического наследования, дает основание думать о следующем. Во-первых, законы Менделя могут трактоваться как частный случай этих новых биологических правил расщепления, действующих на более глубоком уровне генетического кода. Во-вторых, излагаемые в статье закономерности расщепления структур генетического кода являются скрытой отдаленной причиной тех генетических феноменов организменного уровня, которые описываются законами Менделя. Отмечаемый параллелизм позволяет автору выдвинуть гипотезу о том, что расщепление структур генетического кода основано на существовании пар особых задатков (которые можно условно назвать «проаллелями»), которые бывают «доминантными» и «рецессивными» по аналогии с тем, что в менделевской генетике гибридных организмов расщепление признаков обусловлено существованием пар задатков (аллелей) доминантного и рецессивного типа. На основе этой гипотезы автором предлагается соответствующая теория проаллелей, объясняющая ряд случаев тетра-множеств в генетической системе.

Приведем сначала лишь простейшие примеры генетических тетра-множеств. Тетра-множеством в генетической системе по одному из признаков является четырехбуквенный алфавит генетического кода, который по своим свойствам расщеплен на два подмножества с соотношением их количественного состава 3 : 1. Речь идет о том, что три буквы A, C, G этого алфавита одинаковы для молекул ДНК и РНК и по этому признаку объединены в единое подмножество, а одна буква U (урацил) образует второе, оппозиционное подмножество, поскольку не обладает данным свойством и при переходе от РНК к ДНК заменяется на букву T (тимин).

Соответственно, все множество 64 триплетов также является тетра-множеством по аналогичному признаку. Действительно, оно содержит четыре семейства по 16 триплетов с одинаковой буквой на первой позиции, причем три из этих семейств содержат только такие $*$-триплеты, которые не меняют эту первую букву при переходе от ДНК к РНК, а одно семейство, напротив, содержит только такие $*$-триплеты, которые меняют свою первую букву при таком переходе.

Важнейшей заслугой Менделя явилось, помимо получения строгих количественных данных в экспериментах по наследованию признаков у гибридных организмов, введение теоретических представлений о доминантных и рецессивных задатках признаков и роли парных комбинаций этих задатков («аллелей»). Будем доминантный задаток признака обозначать буквой W, а рецессивный — буквой V. Под именем законов Менделя известны следующие три закона:

- Закон единообразия гибридов первого поколения, или первый закон Менделя, утверждает, что потомство первого поколения от скрещивания устойчивых форм, различающихся по одному признаку, имеет одинаковый фенотип по этому признаку. Этот закон основан на том, что при скрещивании двух гомозиготных по разным аллелям форм (WW и VV) все их потомки одинаковы по генотипу (гетерозиготны — WV), а значит, и по фенотипу.

- Закон расщепления, или второй закон Менделя, гласит, что при скрещивании гибридов первого поколения между собой среди гибридов второго поколения в определенных соотношениях появляются особи с фенотипами исходных родительских форм и гибридов первого поколения. Так, в случае полного доминирования выявляются 75 % особей с доминантным признаком и 25 % с рецессивным признаком, т. е. два фенотипа в отношении 3 : 1 (отметим, что в основе этого лежит тетра-множество парных комбинаций задатков — WW, WV, VW, VV, из которых пара рецессивных задатков VV определяет признак, оппозиционный к признаку, который задается

другими тремя парами задатков). В случае неполного доминирования и кодоминирования 50% гибридов второго поколения имеют *фенотип гибридов первого поколения* и по 25% — фенотипы исходных родительских форм, т. е. наблюдается расщепление 1 : 2 : 1. В основе второго закона лежит закономерное поведение пары гомологичных хромосом (с аллелями W и V), которое обеспечивает образование у гибридов первого поколения гамет двух типов, в результате чего среди гибридов второго поколения выявляются особи трех возможных генотипов в соотношении $1WW : 2WV : 1VV$. Конкретные типы взаимодействия аллелей и дают расщепления по фенотипу в соответствии со вторым законом Менделя.

- Закон независимого комбинирования (наследования) признаков, или третий закон Менделя, утверждает, что каждая пара альтернативных признаков ведет себя в ряду поколений независимо друг от друга, в результате чего среди потомков второго поколения в определенном соотношении появляются особи с новыми (по отношению к родительским) комбинациями признаков. Этот закон основан на независимом поведении (расщеплении) нескольких пар гомологичных хромосом. Например, при дигибридном скрещивании это приводит к образованию у гибридов первого поколения 4 типов гамет (W_1W_2, W_1V_2, V_1W_2, V_1V_2) и после образования зигот — закономерному расщеплению по генотипу и, соответственно, по фенотипу.

Подчеркнем, что современное понимание происхождения законов Менделя связано с расщеплением пар гомологичных хромосом. На уровни генетических микроструктур, меньших уровня хромосом, законы Менделя не распространяются. Поэтому правила расщепления признаков у множеств элементов генетического кода, вскрываемые нами, имеют вполне самостоятельный характер и из законов Менделя никак не выводятся.

По законам Менделя, в первом и втором поколении от скрещивания форм, различающихся по одному признаку, реализуются следующие соотношения между количествами особей, наделенных этими признаками или признаком, представляющим их смешивание:

— 4 : 0 (у устойчивых форм или у гибридов первого поколения по первому закону Менделя);

— 1 : 3 (у гибридов второго поколения в случае схемы полного доминирования);

— 1 : 2 : 1 (у гибридов второго поколения в случае схемы неполного доминирования и кодоминирования);

— 2 : 2 (у гибридов второго поколения при условии, что родители были наделены парами аллелей WV и VV, которые привели к реализации у потомков особей с парами аллелей WW, WV, VV, VV, т.е. потомков, у которых 50 % особей наделены доминантным признаком, а 50 % — рецессивным).

Очевидно, что введенное выше определение тетра-множеств соответствует описанным вариантам количественных соотношений в данных законах Менделя.

Подчеркнем, что ни в одном из 17 генетических кодов ни разу не встречается тетра-расщепление подсемейства **-триплетов в «неменделевском» отношении 1 : 1 : 1 : 1. Другими словами, в эволюции генетического кода исключена ситуация распада одного подсемейства **-триплетов на четыре разных по кодовому значению триплета, каждый из которых кодировал бы разные аминокислоты или стоп-сигнал. Обязательным является именно объединение части или всех четырех триплетов подсемейства по их кодовым значениям в группы с одним из «менделевских» вариантов расщепления.

Пример тетра-множеств у совокупности 64 триплетов. Вернемся к черно-белой мозаике таблицы 10 с ее тетра-множествами в семействах *-триплетов (и в соответствующих им квадрантах матрицы). На ее основе можно сформулировать следующее правило расщепления семейств *-триплетов с отношением 1 : 3:

- В генетических кодах каждое семейство из 16 *-триплетов с одинаковой буквой на их первой позиции представляет собой тетра-множество, которое расщеплено на два подмножества из одного и трех подсемейств **-триплетов по наличию или отсутствию признака кодирования всеми четырьмя триплетами подсемейства одной и той же высоковырожденной аминокислоты, независимо от буквы на третьей позиции триплета. При этом C- и G-семейства содержат по три подсемейства **-триплетов, обладающие таким признаком (свойством), и по одному подсемейству, не обладающему им. Напротив, A- и U-семейства содержат по одному подсемейству **-триплетов, обладающему названным признаком, и по три подсемейства, не обладающих им.

Автор полагает, что причиной такого расщепления семейств триплетов на подсемейства в отношении 1 : 3 (которое известно в биологии для закона расщепления Менделя при схеме полного доминирования) является существование неких доминантных и рецессивных задатков признака, названного в этом правиле. Именно парные комбинации этих задатков определяют доминантный и рецессивный характер

подсемейств **-триплетов в расщеплениях семейств *-триплетов и, соответственно диктуют количественные соотношения расщепления 1 : 3 по схеме полного доминирования. Эти гипотетические задатки будем называть особым термином — «проаллели». Он позволяет избежать терминологической путаницы и облегчает эвристические ассоциации, поскольку термином «аллель» (от греческого слова «взаимно») в менделевской генетике называются задатки, играющие сходную роль в теории доминантного и рецессивного наследования признаков у организмов. Термины «доминантный», «рецессивный», «полное доминирование» и «неполное доминирование» заимствуем из менделевской генетики без изменений.

Поясним, как представление о доминантных (W) и рецессивных (V) проаллелях объясняет характер черно-белой мозаики таблицы 10. При этом пока не будем уточнять природу самих проаллелей.

Начнем с того, что рассматриваемое правило отмечает противопоставление пары семейств C- и G-триплетов другой паре семейств A- и U-триплетов по обратному характеру их расщепления на подсемейства **-триплетов черного и белого типа. Поэтому сначала объясним характер этого расщепления в паре C- и G-семейств, а затем с помощью аналогии из области менделевской генетики объясним обратный характер расщепления у совокупности A- и U-триплетов.

Поскольку для подсемейств **-триплетов, обозначенных в таблице 10 черным цветом, вид буквы на их третьей позиции не существенен, то очевидно, что специфика кодирования в этих подсемействах зависит от буквы на второй позиции их триплетов. По этой причине проанализируем ситуацию с буквами на второй позиции триплетов. В каждом из семейств C- и G-триплетов в качестве единственного подсемейства **-триплетов, обозначенного белым цветом, выступает подсемейство с буквой A на второй позиции. По аналогии с законом расщепления Менделя будем трактовать кодовое значение этой буквы, как контролируемое двумя рецессивными проаллелями VV. Тогда три других возможных парных комбинации доминантного и рецессивного проаллелей — WW, WV, VW — приходятся на другие три буквы C, U, G генетического алфавита, которые стоят на второй позиции трех подсемейств **-триплетов, обозначенных черным цветом в таблице 10. Для объяснения того, почему эти три пары проаллелей, в каждой из которых присутствует доминантный проаллель, определяют у рассматриваемых «черных» подсемейств **-триплетов одинаковый — доминантный — признак «черного цвета», достаточно принять (что автор и делает), что здесь реализуется схема, аналогичная менделевской схеме полного доминирования, в которой реализуется соотношение 1 : 3.

Обратимся теперь к оппозиционной паре семейств A- и U-триплетов, в которых ситуация с доминантностью и рецессивностью по черному и белому цвету в их подсемействах прямо обратная. В каждом из этих семейств уже «белые» подсемейства $**$-триплетов выступают в роли доминантных, поскольку количество таких подсемейств равно трем, тогда как количество «черных» подсемейств равно 1. Но из менделевской генетики известно, что доминантность или рецессивность не является абсолютной чертой признака, а носит относительный характер: один и тот же признак бывает доминантным или рецессивным в зависимости от биологической среды его проявления. Так, признак облысения является доминантным у мужчин, но рецессивным у женщин. Поэтому для объяснения обратного характера расщеплений в рассматриваемых парах семейств достаточно принять по аналогии следующее. Семейства C- и G-триплетов *являются условно «мужскими» семействами*, у которых доминантным является проаллель W, контролирующий признак принадлежности триплетов к категории, обозначенной черным цветом. Семейства A- и U-триплетов, напротив, являются «женскими» в том смысле, что в них тот же самый проаллель W является рецессивным, а оппозиционный ему проаллель V — доминантным. Подчеркнем, что содержание проаллеля в смысле контроля им определенного признака остается неизменным, меняется только степень этого контроля, связанная с доминантностью или рецессивностью данного проаллеля.

Аналогично допустим, что обозначенный в таблице 10 черным цветом признак кодирования высоковырожденной аминокислоты подсемейством $**$-триплетов является в семействах A- и U-триплетов рецессивным (а не доминантным, как у C- и G-триплетов). Рецессивный признак черного цвета проявляется здесь у подсемейств $**$-триплетов, у которых на второй позиции стоит буква C. Поэтому этой букве естественно сопоставить пару проаллелей WW, рецессивных в данной паре семейств. Другие три возможные парные комбинации проаллелей — VV, VW, WV, в каждой из которых присутствует доминантный проаллель V, — приходятся тогда на другие три буквы A, U, G, которые стоят на второй позиции трех подсемейств $**$-триплетов белого цвета в таблице 10. По схеме полного доминирования эти три подсемейства $**$-триплетов должны обладать одинаковым признаком и быть подсемействами белого цвета, которые лишены свойства кодировать высоковырожденную аминокислоту без учета буквы на третьей позиции их триплетов.

Теория четырех проаллелей

Какова природа этих проаллелей, контролирующих рассматриваемое тетра-расщепление? Автором в качестве возможного варианта предлагается следующий ответ: в роли проаллелей способны выступать те самые

бинарно-оппозиционные атрибуты, которыми наделена система четырех азотистых оснований генетического кода и которые были рассмотрены выше как основа бинарных субалфавитов (см. таблицу 1). Этот ответ опирается на то обстоятельство, что анализируемое тетра-расщепление каждого из семейств $*$-триплетов на подсемейства $**$-триплетов черного и белого цвета связано именно с буквами генетического алфавита, т. е. с азотистыми основаниями кода. Естественно предположить, что эти азотистые основания наделены некоторыми свойствами, которые позволяют им играть такую роль в данном тетра-расщеплении. К числу этих характерных свойств относятся названные бинарно-оппозиционные атрибуты.

Покажем, как с их помощью можно объяснить данное тетра-расщепление. Для этого несложного примера достаточно рассмотреть, что собой представляет каждая из четырех букв кода с точки зрения двух пар бинарно-оппозиционных атрибутов: «пурин–пиримидин» и «две водородных связи — три водородных связи» (см. таблицу 1). Применяемая для этого теория исходит из представления о существовании четырех видов проаллелей, сокращенно обозначаемых, например, как «Пир», «Пур», «2», «3». За этими сокращениями скрываются объективно существующие у азотистых оснований кода бинарно-оппозиционные атрибуты: «пурин», «пиримидин», а также «2 водородные связи» и «3 водородные связи» (речь идет о связях одного основания с комплементарным ему другим азотистым основанием). В азотистых основаниях эти проаллели представлены всегда в парных связках всего следующих четырех видов — «Пир-2», «Пир-3», «Пур-3», «Пур-2» (одномодальные связки типа «Пир–Пур» и «2–3» очевидно невозможны ни в каком азотистом основании). Данные четыре связки взаимно-однозначно характеризуют четыре буквы генетического алфавита:

— буква C несет на себе парную связку атрибутов «Пир-3», поскольку цитозин является пиримидином с 3 водородными связями в комплементарном соединении;

— буква A несет на себе парную связку противоположных атрибутов «Пур-2», поскольку аденин является пурином с 3 водородными связями в комплементарном соединении;

— буква G несет парную связку «Пур-3», поскольку гуанин является пурином с 3 водородными связями;

— буква U (или T) несет парную связку «Пир-2», поскольку урацил (и тимин) является пиримидином с 2 водородными связями.

Обратимся сначала к семействам C- и G-триплетов и рассмотренному выше их расщеплению на рецессивное и доминантные семейства **-триплетов. В этом расщеплении буква A на второй позиции **-триплетов играла роль рецессивного признака. По этой причине проаллели «Пур» и «2», парная связка которых характеризует букву A, примем за рецессивные проаллели, опреляющие в парной связке рецессивность соответствующего подсемейства семейства **-триплетов. Тогда оппозиционные им проаллели «Пир» и «3» будут, соответственно, доминантными. Примем также, что применительно к рассматриваемой проблеме расщепления генетического кода парная связка проаллелей всегда будет доминантной, если в ней присутствует хотя бы один доминантный проаллель. В этом случае получаем, что три парные связки проаллелей «Пир-3», «Пур-3» и «Пир-2», соответствующие буквам C, G и U, являются доминантными, т. е. определяющими черный цвет в таблице 10 для подсемейств тех **-триплетов, у которых на второй позиции стоит одна из этих трех букв.

Теперь рассмотрим семейства A- и U-триплетов, у которых, как выше отмечалось, проаллели меняют свое значение доминантности или рецессивности на противоположное. Другими словами, рецессивными проаллелями в этих семействах выступают «Пир» и «3», а доминантными — «Пур» и «2». Тогда парная связка «Пир-3», характеризующая букву C, выступает в качестве рецессивной, что соответствует рецессивному характеру подсемейства **-триплетов со второй буквой C среди множества всех A- и U-триплетов. Остальные три парные связки проаллелей «Пур-3», «Пур-2» и «Пир-2», соответствующие буквам G, A и U, являются доминантными, поскольку один из проаллелей в них — доминантный. Это согласуется с тем, что подсемейства тех **-триплетов, у которых на второй позиции расположена одна из этих букв, относятся к доминантным подсемействам в описываемом расщеплении множества A- и U-триплетов.

Таким образом, предложенная теория четырех проаллелей успешно описывает данный случай расщепления семейств *-триплетов на подсемейства **-триплетов черного и белого цвета в таблице 10. При этом она говорит о том, что не сами буквы кода, а привязанные к ним бинарно-оппозиционные атрибуты играют решающую роль в феноменах расщепления ансамблей генетического кода. С точки зрения данной теории генетический код является гибридным образованием в смысле, приближенном к менделевскому. Теория проаллелей приложима и к ряду других случаев тетра-множеств в расщеплениях совокупности 64 триплетов, демонстрация чего выходит за рамки данной публикации.

Дополнительно отметим, что тетра-множества реализуются на разных биологических уровнях. Один из важных примеров дает ключевой акт размножения организмов — мейоз, или процесс образования половых клеток. Мейоз является обязательным звеном полового процесса с формированием половых клеток. Как известно, в надмолекулярном акте мейоза образуются четыре гаплоидные клетки (гаметы). При этом в случае образования женской половой клетки (овогенез) возникают четыре гаплоидных клетки, из которых одна резко отличается от трех других клеток этого тетра-множества по своей готовности к оплодотворению, а также увеличенному размеру и массе. Другие три хилые клетки со временем дегенерируют и объединяются в биологии общим названием «редукционные тельца». Таким образом, при овогенезе порождается биологическое тетра-множество с отношением 1 : 3. При мейозе с образованием мужских половых клеток (сперматогенез) четыре половые клетки равноценны друг другу, т. е. в этом тетра-множестве реализуется отношение 4 : 0.

Генетические секвенции как тетра-множества

Не могут ли аналогичные принципы тетра-расщепления обусловливать также композиционные особенности генетических секвенций, т. е. последовательностей азотистых оснований, кодирующих конкретные белки, — например, не могут ли генетические секвенции из некоторого обширного класса (или даже все секвенции) быть тетра-расщеплены на рецессивные и доминантные подмножества триплетов с отношением 1 : 3 между их количествами?

Поставив этот вопрос, автор провел его начальное исследование на некоторых простых примерах. Так, к примеру, им была взята следующая известная секвенция, которая кодирует простейший белок инсулин, состоящий из альфа- и бета-цепи, и имеет 51 триплет (с учетом старт-кодона ATG число триплетов — $52 = 4 \times 13$):

— альфа-цепь (21 триплет, перед триплетом указан его порядковый номер):

$$1GGC \to 2ATC \to 3GTT \to 4GAA \to 5CAG \to 6TGT \to$$
$$\to 7TGC \to 8ACT \to 9TCT \to 10ATC \to 11TG \to 12TCT \to$$
$$\to 13CTT \to 14TAC \to 15CAG \to 16CTT \to 17GAG \to$$
$$\to 18AAC \to 19TAC \to 20TGT \to 21AAC;$$

— бета-цепь (30 триплетов, перед триплетом указан его порядковый номер):

$$1TTC \to 2GTC \to 3AAT \to 4CAG \to 5CAC \to 6CTT \to$$
$$\to 7TGT \to 8GGT \to 9TCT \to 10CAC \to 11CTC \to 12GTT \to$$
$$\to 13GAA \to 14GCT \to 15TTG \to 16TAC \to 17CTT \to$$
$$\to 18GTT \to 19TGC \to 20GGT \to 21GAA \to 22CGT \to$$
$$\to 23GGT \to 24TTC \to 25TTC \to 26TAC \to 27ACT \to$$
$$\to 28CCT \to 29AAG \to 30ACT.$$

Легко подсчитать, что это инсулиновое множество из 51 триплета расщеплено на подмножество из 13 G-триплетов и подмножество из 38 A-, C- и U-триплетов (с учетом старт-кодона ATG второе подмножество содержит 39 триплетов). Отношение количества триплетов в обоих подмножествах равно 1 : 3. Значит, о генетической секвенции инсулина можно говорить как о тетра-множестве с отношением 1 : 3, характерным для схемы полного доминирования. При этом букву G на первой позиции триплетов в инсулиновой секвенции следует считать рецессивным признаком, а характеризующую ее пару проаллелей «Пур-3» — парой рецессивных проаллелей в данной ситуации.

Рассмотрение секвенций триплетов в альфа- и бета-цепи инсулина в приведенном примере дает близкие результаты. В альфа-цепи из 21 триплета подмножество A-триплетов представлено 5 триплетами, а подмножество всех других триплетов — 16 триплетами, что дает отношение между подмножествами 5 : 16, близкое к 1 : 3. В роли рецессивного признака здесь выступает буква A на первой позиции триплетов. В бета-цепи множество из 30 триплетов расщеплено на подмножество C-триплетов из 8 триплетов и подмножество остальных 22 триплетов, что дает отношение близкое к 1 : 3 (но если добавить старт-кодон AUG и стоп-кодон из разряда U-триплетов в этом случае, то второе подмножество будет содержать 24 триплета, и тогда отношение 8 : 24 в точности равно 1 : 3).

Второй частный пример генетической секвенции автор взял случайным образом из Интернета на «EcoGene WEB Site». Ею является секвенция для EG13077 у Escherichia:

$$\underline{\underline{ATG}} - GTT - CAG - \underline{\underline{AAG}} - CCC - CTC - \underline{\underline{ATT}} - \underline{\underline{AAG}} - CAG - GGA -$$
$$- TAT - TCA - CTG - GCA - GAG - GAA - \underline{\underline{ATA}} - GCC - \underline{\underline{AAC}} - \underline{\underline{AGC}} -$$
$$- GTC - \underline{\underline{AGT}} - CAC - GGC - \underline{\underline{ATT}} - GGG - TTG - GTG - TTT - GGT -$$
$$- \underline{\underline{ATC}} - GTT - GGG - CTG - GTG - TTC - CTA - CTG - GTT - CAG -$$
$$- GCG - GTG - GAT - CTT - \underline{\underline{AAT}} - GCC - \underline{\underline{AGC}} - GCC - \underline{\underline{ACA}} - GCG -$$
$$- \underline{\underline{ATA}} - \underline{\underline{ACC}} - \underline{\underline{AGC}} - TAC - AGC - CTC - TAT - GGC - GGC - \underline{\underline{AGT}} -$$

$$
\begin{aligned}
&- \underline{\boldsymbol{ATG}} - \underline{\boldsymbol{ATC}} - CTG - CTG - TTC - CTC - GCT - TCG - \underline{\boldsymbol{ACG}} - CTC - \\
&- TAT - CAC - GCC - \underline{\boldsymbol{ATT}} - CCT - CAT - CAA - CGG - GCA - \underline{\boldsymbol{AAA}} - \\
&- \underline{\boldsymbol{ATG}} - TGG - CTG - \underline{\boldsymbol{AAG}} - \underline{\boldsymbol{AAA}} - TTT - GAC - CAT - TGC - GCT - \\
&- \underline{\boldsymbol{ATT}} - TAC - CTG - TTG - \underline{\boldsymbol{ATT}} - GCC - GGA - \underline{\boldsymbol{ACC}} - TAC - \underline{\boldsymbol{ACG}} - \\
&- CCG - TTT - TTG - CTG - GTG - GGG - CTG - GAT - TCT - CCG - \\
&- TTA - GCG - CGC - GGG - TTG - \underline{\boldsymbol{ATG}} - \underline{\boldsymbol{ATT}} - GTT - \underline{\boldsymbol{ATC}} - TGG - \\
&- \underline{\boldsymbol{AGC}} - CTG - GCA - TTG - CTG - GGT - \underline{\boldsymbol{ATT}} - CTG - TTT - \underline{\boldsymbol{AAA}} - \\
&- CTG - \underline{\boldsymbol{ACC}} - \underline{\boldsymbol{ATC}} - GCG - CAC - CGA - TTC - \underline{\boldsymbol{AAA}} - \underline{\boldsymbol{ATT}} - TTA - \\
&- TCT - CTG - GTG - \underline{\boldsymbol{ACC}} - TAT - CTG - GCG - \underline{\boldsymbol{ATG}} - GGC - TGG - \\
&- CTG - TCG - CTG - GTG - GTA - \underline{\boldsymbol{ATT}} - TAT - GAA - \underline{\boldsymbol{ATG}} - GCA - \\
&- GTT - \underline{\boldsymbol{AAG}} - CTC - GCG - GCG - GGC - \underline{\boldsymbol{AGC}} - GTT - \underline{\boldsymbol{ACC}} - TTA - \\
&- CTG - GCG - GTA - GGC - GGC - GTG - GTT - TAT - TCG - CTC - \\
&- GGG - GTG - \underline{\boldsymbol{ATT}} - TTC - TAC - GTC - TGC - \underline{\boldsymbol{AAA}} - CGC - \underline{\boldsymbol{ATT}} - \\
&- CCA - TAC - \underline{\boldsymbol{AAC}} - CAT - GCC - \underline{\boldsymbol{ATC}} - TGG - CAC - GGC - TTC - \\
&- GTG - CTC - GGC - GGT - \underline{\boldsymbol{AGT}} - GTG - TGC - CAC - TTT - CTG - \\
&- GCG - \underline{\boldsymbol{ATC}} - TAT - TTG - TAT - \underline{\boldsymbol{ATT}} - GGG - CAG - GCG - TAA
\end{aligned}
$$

Эта секвенция состоит из множества 220 триплетов, которое расщеплено на подмножество 55 A-триплетов (они выделены жирным шрифтом и подчеркнуты нами для демонстрации видимо случайного характера их распределения вдоль цепи триплетов) и подмножество остальных 165 остальных триплетов (50 C-триплетов, 69 T-триплетов, 46 G-триплетов). Отношение между этими двумя подмножествами $55 : 165 = 1 : 3$. Другими словами, можно говорить о том, что данная генетическая секвенция представляет собой тетра-множество (четыре семейства триплетов) с расщеплением $1 : 3$.

Конечно, по отдельным примерам нельзя говорить о степени общности такого принципа организации для всего множества генетических секвенций. Исследование генетических секвенций как тетра-множеств с возможным приложением к ним понятий доминантных и рецессивных проаллелей должно быть поставлено на систематическую основу. Результаты такого «гибридологического» анализа более представительных выборок генетических секвенций будут опубликованы позже. Этот анализ должен уточнить, в какой степени процесс образования генетических текстов (секвенций) с формальной точки зрения аналогичен процессу гибридизации организмов. В случае широкого распространения подобных правил тетра-множеств в организации генетических текстов, число допустимых вариантов состава этих текстов оказывается сильно ограниченным. Возможно, именно в существовании данных правил заключается одна из причин того, что далеко не все мыслимые генетические секвенции кодируют белки.

Почему число генетически кодируемых аминокислот равно 20?

Предлагаемый автором ответ на этот фундаментальный вопрос связан с расщеплением множества 20 аминокислот на два оппозиционных или взаимно-дополнительных подмножества из 8 и 12 аминокислот [42]. Таким образом, исходный вопрос сведен к существенно иному вопросу о том, почему множество 20 аминокислот расщеплено на подмножества из 8 и 12 аминокислот двух различных типов.

Но отчего в системе генетического кодирования реализуются подмножества из 8 и 12 аминокислот? Заметим, что эти числа представимы как тетра-множества: $8 = 4 \times 2$ и $12 = 4 \times 3$. Отличие между числами 8 и 12 как характеристиками тетра-множеств заключается только в том, что число 8 при его тетра-расщеплении на одинаковые числовые блоки содержит число 2 в качестве модульного блока (или мотивной единицы) расщепления, а число 12 при его тетра-расщеплении — число 3 в аналогичной роли.

Автор полагает, что причина реализации подмножеств из 8 и 12 аминокислот связана именно с биологическим механизмом тетра-расщепления (и существованием доминантных и рецессивных проаллелей), ведущим к образованию в каждом из данных подмножеств четырех количественно равных модульных блоков. При этом в случае подмножества 8 аминокислот каждый модульный блок содержит две аминокислоты, а в случае подмножества 12 аминокислот каждый модульный блок состоит из трех аминокислот. Ниже будет приведен подтверждающий пример такого расщепления.

Исследования выявили, что типовые расщепления множества 20 аминокислот на подмножества из 8 и 12 аминокислот происходят не по единственному, а по нескольким вариантам в зависимости от вида бинарно-оппозиционного признака, по которому расщепление имеет место. Речь идет о том, что не только пара оппозиционных признаков «высоковырожденная–низковырожденная» аминокислота приводит к распадению сообщества 20 аминокислот на 8 и 12 аминокислот. Сходные расщепления, но с другим составом аминокислот в образующихся подмножествах из 8 и 12 аминокислот дают, например, следующие бинарно-оппозиционные признаки: «комплементарная–некомплементарная» аминокислота, «восьмеричная–невосьмеричная» аминокислота (по количеству протонов в молекуле аминокислоты), «высокоуглеродная–низкоуглеродная» аминокислота (по количеству атомов углерода в молекуле аминокислоты) [25,42]. Очень возможно, что принцип двухэлементных и трехэлементных блоков в природной реализации тетра-множеств весьма распространен, и его можно отследить на разных уровнях организации природных систем, прежде всего, биологических.

Рассмотрим, например, расщепление множества 20 аминокислот на подмножества из 8 и 12 аминокислот по признаку «комплементарная–некомплементарная» аминокислота. Напомним, что некоторые пары аминокислот имеют такое соответствие между своими триплетами, что триплеты, кодирующие одну аминокислоту из этой пары, являются антикодонами тех триплетов, которые кодируют вторую аминокислоту из этой пары. Такие аминокислоты называются «комплементарными» (по своим триплетам) в отличие от остальных «некомплементарных» аминокислот. Например, аминокислота Pro (которая во всех генетических кодах кодируется четырьмя **-триплетами: *CCC*, *CCA*, *CCU*, *CCG*) и аминокислота Gly (которая во всех генетических кодах кодируется их антикодонами *GGG*, *GGU*, *GGA*, *GGC*) являются комплементарными друг другу.

Проведенный нами анализ выявил, что по этому признаку множество 20 аминокислот распадается на подмножество из 8 комплементарных аминокислот и 12 некомплементарных в коде митохондрий человека и позвоночных (напомним, что он называется в литературе «идеальным» и предположительно наиболее древним):

— 8 комплементарных аминокислот — Pro–Gly, Arg–Ala, Lys–Phe, Met–Tyr;

— 12 некомплементарных аминокислот — His, Gln, Leu, Asp, Glu, Val, Ile, Asn, Thr, Cys, Trp, Ser.

Их распределение в четырех семействах *-триплетов (и, соответственно, в квадрантах таблицы 10) носит закономерный характер, поскольку в каждом из них содержится по 2 комплементарных аминокислоты и 3 некомплементарных. Это иллюстрирует таблица 11.

Данное закономерное распределение подтверждает правомочность трактовки двух подмножеств из 8 и 12 аминокислот как двух тетра-множеств, отличающихся только числовым значением своего модульного блока, равным 2 или 3. Эта закономерность является дополнительным свидетельством в пользу того, что загадка числа 20 у множества генетически кодируемых аминокислот связана с природной реализацией этого числа как суммы двух тетра-множеств с 8 и 12 аминокислотами в них. Кроме того, она обращает внимание на то, что признак «комплементарная–некомплементарная» у аминокислот, связанный с взаимоотношением «кодон–антикодон» между их триплетами, может являться важным, если не ключевым фактором в реализации этого загадочного для генетики числа 20 у множества аминокислот.

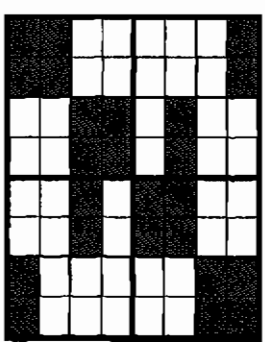
В таблице 12 слева показано закономерное расположение 8 комплементарных аминокислот вместе с кодирующими их триплетами в биопериодической таблице генетического кода митохондрий человека и позво-

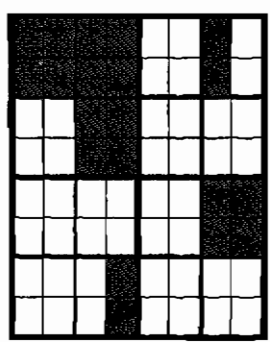
Таблица 11. Слева: распределение 8 комплементарных аминокислот (AK) по две аминокислоты в каждом из четырех семейств $*$-триплетов. Справа: распределение 12 некомплементарных аминокислот по три аминокислоты в каждом из четырех семейств $*$-триплетов

Распределение 8 комплементарных AK в четырех семействах $*$-триплетов			
C-триплеты	A-триплеты	U-триплеты	G-триплеты
Pro, Arg	Lys, Met	Phe, Tyr	Gly, Ala
Распределение 12 некомплементарных AK в четырех семействах $*$-триплетов			
C-триплеты	A-триплеты	U-триплеты	G-триплеты
Gln, His, Leu	Asn, Ile, Thr	Cys, Trp, Ser	Asp, Glu, Val

ночных. В этом случае семейства C- и G-триплетов эквивалентны по черно-белой мозаике и имеют тетра-расщепление с отношением 2 : 2. Семейства A- и U-триплетов характеризуются инверсионно-симметричной мозаикой, причем каждое подсемейство $**$-триплетов расщеплено на черно-белые пары.

Таблица 12. Слева: расположение 8 комплементарных аминокислот вместе с кодирующими их триплетами в бипериодической таблице генетического кода митохондрий человека и позвоночных (см. Таблицу 10). Соответствующие ячейки таблицы для наглядности зачернены. Все остальные триплеты кодируют 12 некомплементарных аминокислот и стоп-сигналы. Они занимают белые ячейки. Справа: расположение 8 невосьмеричных аминокислот в бипериодической таблице того же генетического кода. Ячейки с триплетами, которые кодируют эти аминокислоты, выделены черным цветом.





Расщепление множества 20 аминокислот на подмножества из 8 и 12 аминокислот по специфике количества протонов в молекулах

Один из вариантов расщепления множества из 20 аминокислот на подмножества из 8 и 12 аминокислот реализуется также по признаку 8-кратности количества протонов в молекуле аминокислоты (см. книгу [26, глава 3]). 12 аминокислот имеют такие количества протонов в их молекулах, которые делятся на 8. Эти аминокислоты были названы нами восьмеричными. Другие 8 аминокислот имеют такие количества протонов, которые не делятся на 8. Они называются невосьмеричными. Обе категории аминокислот представлены в таблице 13.

Таблица 13. 12 восьмеричных и 8 невосьмеричных аминокислот. В скобках указано количество протонов в молекуле аминокислоты

	Аминокислоты и их количества протонов
12 восьмеричных аминокислот	Gly ($40 = 8 \times 5$), Ala ($48 = 8 \times 6$), Ser ($56 = 8 \times 7$), Val ($64 = 8 \times 8$), Thr ($64 = 8 \times 8$), Cys ($64 = 8 \times 8$), Leu ($72 = 8 \times 9$), Ile ($72 = 8 \times 9$), Lys ($80 = 8 \times 10$), Met ($80 = 8 \times 10$), Phe ($88 = 8 \times 11$), Tyr ($96 = 8 \times 12$)
8 невосьмеричных аминокислот	Pro (62), Asn (70), Asp (70), Gln (78), Glu (78), His (82), Arg (94), Trp (108)

Правая часть Таблицы 12 показывает расположение 8 невосьмеричных аминокислот по семействам $*$-триплетов и подсемействам $**$-триплетов в бипериодической таблице генетического кода митохондрий человека и животных. Обращает на себя внимание закономерный характер расположения 8 невосьмеричных аминокислот в бипериодической таблице триплетов, хотя он более сложен, чем в других вышеизложенных случаях. Здесь противопоставленными друг другу являются уже семейства C- и G-триплетов, представляющие собой тетра-множества с отношением расщепления 1 : 3 по подсемействам $**$-триплетов, которые не зависят от буквы на третьей позиции триплетов. Также противопоставленными друг другу являются семейства A- и U-триплетов, которые представляют собой тетра-множества с отношением расщепления 1 : 3 по подсемействам $**$-триплетов, поскольку в каждом из данных семейств только в одном из четырех подсемейств $**$-триплетов присутствует по паре триплетов, кодирующих невосьмеричную аминокислоту. При этом

речь идет о тех подсемействах, кодовые значения триплетов которых зависят от буквы на третьей позиции триплета и каждое из которых, в свою очередь, является тетра-множеством с отношением расщепления 2 : 2.

Эти данные свидетельствуют в пользу важности фактора протонов в закономерной организации генетического кода, что позволяет привлечь ряд связанных с протонами физических феноменов, например, известный феномен «атомной памяти» для физического осмысления механизмов генетической памяти [26, с. 161–162].

Системный анализ атомов углерода в элементах генетического кода

Генетический код — это код органической жизни, основу которой составляют соединения углерода. Поэтому естественно уделить особое внимание атомам углерода в молекулярных элементах генетического кода. Как известно, именно по тому, откуда живые организмы берут углерод для построения своего тела — из фотосинтеза или из поглощения уже готовой органики других организмов, — все живые существа разделяются на два основных класса автотрофных и гетеротрофных организмов. Не исключено, что неорганические формы жизни, если они когда-либо будут найдены, продемонстрируют существование у них другого кода. Изложим некоторые результаты проведенного автором количественного анализа атомов углерода в элементах генетического кода.

Четырехбуквенный алфавит ДНК по признаку количества атомов углерода в его азотистых основаниях представляет собой тетра-множество с отношением расщепления 1 : 3. Действительно, цитозин содержит четыре атома углерода, а три других азотистых основания — аденин, гуанин и тимин — противопоставлены ему по этому параметру, поскольку содержат по пять атомов углерода.

Четырехбуквенный алфавит РНК по признаку количества атомов углерода в его азотистых основаниях представляет собой тетра-множество с отношением расщепления 2 : 2. Действительно, цитозин и урацил содержат по четыре атома углерода, а аденин и гуанин — по пять атомов углерода.

По признаку количества атомов углерода в молекуле аминокислоты множество 20 аминокислот расщепляется на подмножество из 8 «высокоуглеродных» аминокислот, которые имеют 6 и более атомов углерода, и подмножество из 12 «низкоуглеродных» аминокислот, имеющих 5 и менее атомов углерода (Таблица 14).

Таблица 14. Количество атомов углерода в молекулах 20 аминокислот. Видно расщепление множества 20 аминокислот на два подмножества: подмножество из 12 низкоуглеродных аминокислот с числом атомов углерода от 5 и менее (в левой жирной рамке) и подмножество из 8 высокоуглеродных аминокислот с числом атомов углерода от 6 и более (в правой жирной рамке). Жирным шрифтом с подчеркиванием выделены высоковырожденные аминокислоты

Кол-во атомов углерода	2	3	4	5	6	9	11
Аминокислота	Gly	**Ala** **Ser** Cys	**Thr** Asn Asp	**Pro** **Val** Met Gln Glu	**Leu** **Arg** Ile Lys His	Phe Tyr	Trp

Эти подмножества можно анализировать на предмет расщепления их по другим признакам на более мелкие подмножества. Например, совокупность 8 высокоуглеродных аминокислот содержит две высоковырожденных аминокислоты (они выделены шрифтом в таблице 14) и шесть низковырожденных аминокислот. По этому признаку совокупность высокоуглеродных аминокислот является тетра-множеством с отношением расщепления 1 : 3. Совокупность 12 низкоуглеродных аминокислот по этому признаку является тетра-множеством с отношением расщепления 2 : 2, поскольку содержит по шесть высоковырожденных и низковырожденных аминокислот. Исследование симметрий генетического кода продолжается.

О значении правил расщепления генетического кода. До сих пор считалось, что биология организмов живет по менделевским законам наследования признаков, а мир биологических молекул — по каким-то другим законам. Теперь в результате изложенных исследований открывается, что этот мир биологических молекул (по крайней мере, его часть из генетических биомолекулярных ансамблей) живет по законам, формально родственным законам менделевского типа. Соответственно молекулярная генетика вдруг предстает как наука о гибридных ансамблях биомолекул с расщеплениями менделевского типа. А биология с определенной точки зрения начинает выступать как единая наука о гибридах менделевского типа на всех биологических уровнях.

Изложенные результаты позволяют выдвинуть в качестве важной программной задачи системное исследование генетических кодов и генетических текстов (секвенций) как гибридных образований с широким участием тетра-множеств с различными отношениями расщеплений, включая дополнительный поиск и изучение тех признаков, по которым

происходят подобные типовые расщепления на разных уровнях генетической системы.

Видимо, список выявленных тетра-расщеплений на разных биологических уровнях станет со временем весьма обширным. Ведь с определенной точки зрения цель развития организма в онтогенезе и филогенезе заключается в построении иерархического дерева признаков, а механизм тетра-расщеплений представляется одним из активно используемых в реализации этого построения. В данный список может неожиданно войти много хорошо знакомых всем явлений. Например, фонетическое расщепление звуков речи в разных языках на гласные и согласные звуки, которое, насколько автор может судить, зачастую реализует принцип тетра-множества с отношением расщепления 1 : 3.

Не исключено, что идея тетра-множеств и доминантно-рецессивных проаллелей, родившаяся в области биологии, окажется полезной также в области физики. Эта идея имеет значительные параллелизмы с символической системой древнекитайской «Книги перемен», которая трактовалась древними мыслителями как всеобщий природный архетип. Известное древнее суждение о том, что человек представляет собой микрокосмос, в котором воспроизведено строение всего мира, ориентирует на задачи сращивания знаний о генетическом кодировании живых организмов и об устройстве физического мира. В наши дни нередко можно слышать даже от физиков предположения типа: «а не закодирован ли наш мир в целом?». Некоторыми физиками развиваются модели информационного устройства физического мира. В этой связи описанные в данной статье материалы об основах генетического кода и о существовании некоторой системы кодирования самого́ кода (или о существовании «системы прокода») порождают мысль о возможности переноса теории проаллелей на мир физических и химических явлений.

В области такого переноса примером неожиданной гипотезы (из разряда «сумасшедших» гипотез) может служить мысль о применении понятия тетра-множества и теории доминантных и рецессивных проаллелей к совокупности четырех размерностей единого пространства–времени. Эта совокупность может рассматриваться формально как тетра-расщепленная в отношении 1 : 3, где одной рецессивной координате времени противопоставлены три пространственные координаты. Соответствующая «гибридная» теория размерности такого пространства–времени, в которой совокупность размерностей пространства и времени была бы аналогом гибридных организмов, должна оперировать понятиями бинарных проаллелей типа инь–ян, контролирующих признаки размерностей.

Автор выражает благодарность академику К. В. Фролову и профессору В. А. Копцику за помощь в проведении данной работы.

Литература

[1] Ахиезер А. И, Рекало М. П. *Элементарные частицы.* М.: Наука, 1986. 286 с.

[2] Бунак В. В. *Об изменении продольных размеров сегментов скелета конечностей у некоторых групп млекопитающих в период роста.* Известия АПН РСФСР, 1957. Вып. 84, с. 33–45.

[3] Гамкрелидзе Т. В. *Р. Якобсон и проблемы изоморфизма между генетическим кодом и семиотическими системами.* Вопросы языкознания, 1988, № 3.

[4] Гаряев П. П. *Волновой геном.* М.: 1994.

[5] Еремеев В. Е. *Чертеж антропокосмоса.* М.: АСМ, 1993. 383 с.

[6] Иванов В. В. Предисловие к книге: Кобзев А. И. *Учение о символах и числах в китайской классической философии.* М.: Восточная литература, 1994. 432 с.

[7] Иванов В. В. *Избранные труды по семиотике и истории культуры.* В 2 томах. М.: Языки русской культуры, 1999.

[8] Князева Е. Н., Курдюмов С. П. *Законы эволюции и самоорганизации сложных систем.* М.: Наука, 1994. 220 с.

[9] Кобзев А. И. *Учение о символах и числах в китайской классической философии.* М.: Восточная литература, 1994, 432 с.

[10] Копцик В. А. *Цветная симметрия и скейлинг в теории фазовых переходов и критических явлений* // В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1983. С. 320–331.

[11] Корона В. В. *О сходстве факторов эволюции генетического кода и стихового метра* // В сб.: Языки науки, языки искусства. М.: Прогресс-Традиция, 2000. С. 289–294.

[12] Маковский М. М. Лингвистическая генетика. М.: Наука, 1992.

[13] Петухов С. В. *Биомеханика, бионика и симметрия.* М.: Наука, 1981. 239 с.

[14] Петухов С. В. *Бисимметрические матрицы генетического кода и золотое сечение.* — Депонировано в ВИНИТИ РАН 25.11.2003 г., № 2042-В2003.25 с. (Указатель ВИНИТИ «Депонированные научные работы», № 1, 2004 г.)

[15] Петухов С. В. *Высшие симметрии в биомеханике формообразования.* Автореферат диссертации д.ф.-м.н., М., Ин-т кристаллографии им. А. В. Шубникова, 1987. 39 с.

[16] Петухов С. В. *Геометрии живой природы и алгоритмы самоорганизации.* М.: Знание, 1988. 48 с.

[17] Петухов С. В. *Биосолитоны. Основы солитонной биологии* // Предисловие К. В. Фролова. М.: 1999. 288 с.

[18] Петухов С. В. *Макроскопические биосолитоны и биодомены. Солитонный подход в биологии* // 7-я Международная конференция «Математика, компьютер, образование» (Дубна, 24–29 января 2000 г.). М.: Прогресс-Традиция, 1999. С. 262.

[19] Петухов С. В. *Анализ симметрий в системе элементов генетического кода*. Депонировано в ВИНИТИ РАН 28.08.2000, № 2340-В00, 19 с. (Указатель ВИНИТИ «Депонированные научные работы», 2000 г., № 11)

[20] Петухов С. В. *Системный анализ числовых закономерностей распределения протонов в молекулярных соединениях*. Депонировано в ВИНИТИ РАН 09.11.2000, № 2817-В00, 26 с. (Указатель ВИНИТИ «Депонированные научные работы», 2001 г., № 1,).

[21] Петухов С. В. *О теории бинарных языков генетического кода и генетической алгебре*. — Депонировано в ВИНИТИ РАН 02.02.2004 г., 30 с., № 182–В2004 (Указатель ВИНИТИ «Депонированные научные работы», 2004 г., № 4).

[22] Петухов С. В. *Октетная таблица генетического кода и древнекитайская «Книга перемен»* // VIII Международная конференция «Математика, компьютер, образование», (г. Пущино, 31 января – 5 февраля 2001 г.), М.: Прогресс-Традиция, 495 с.

[23] Петухов С. В. *Системные закономерности чисел протонов в молекулах*. VIII Международная конференция «Математика, компьютер, образование». (г. Пущино: 31 января – 5 февраля 2001 г.): М., Прогресс-Традиция, с. 316.

[24] Петухов С. В. *О числах протонов и периодической таблице системы элементов генетического кода*. Депонировано в ВИНИТИ РАН 27.02.2001 г, № 523-В01, 30 с. (Указатель ВИНИТИ «Депонированные научные работы», 2001 г., № 4)

[25] Петухов С. В. *Правила расщепления генетического кода и их параллелизм с законами Менделя*. — Депонировано в ВИНИТИ РАН 07.06.2004 г, 30 с., №964-В2004 (Указатель ВИНИТИ «Депонированные научные работы», 2004 г., № 8)

[26] Петухов С. В. *Биопериодическая таблица генетического кода и число протонов*. Предисловие К. В. Фролова. М.: 2001, 258 с.

[27] Петухов С. В. *Бинарные субалфавиты генетического кода и проблема унифицированных основ биологических языков* // IX Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование»

(Дубна, 28 января – 2 февраля 2002 г.). Тезисы докладов, М.: 2002. с. 191.

[28] Пэттен Б. М. *Эмбриология человека*. М.: Медгиз, 1959. 768 с.

[29] Рохлин Д. Г. *Рентгеноостеология и рентгеноантропология*. М.–Л.: Биомедгиз, ч. 1, 1936. С. 310.

[30] Степанов Н. Велимир Хлебников. М., Сов.писатель, 1975. 280 с.

[31] Тернер Ф., Пеппель Э. *Поэзия, мозг и время*. В сб. «Красота и мозг», М.: Мир, 1995. С. 74–96.

[32] Хи М. *Симметрия в структуре генетического кода*. Труды Третьей Всероссийской конференции «Этика и наука будущего» (Москва, 12–14 февраля, 2003). С. 68–75.

[33] Швырев Ю. А. *Письма Лейбница о двоичной системе счисления и ее китайских истоках*. Восемнадцатая научная конференция «Общество и государство в Китае». М.: 1987. с. 145–147.

[34] Щуцкий Ю. К. Китайская классическая «Книга перемен» М., 1997. 605 с.

[35] Якобсон Р. О. Избранные работы. (Предисловие Вяч. Всев. Иванова). — М.: Прогресс, 1985. 455 с.

[36] Baily Ch. J. N. *On the Yin and Yang nature of language*. Ann Arbor, 1982.

[37] Chomsky N. *Essays on Language*. N. Y.: 1975.

[38] Jacob F. *Le modele linguistique en biologie*. Critique, Mars 1974, tome XXX, № 322. P. 197–205

[39] Jeffry H. J. *Chaos game representation of gene structure*. Nucleic Acids Research, 1990, v. 18, № 8, p. 2163–2170.

[40] Nobel Symposium «Symmetry and Function of Biological Systems at the macromolecular level» /A.Engstrom and B.Strandberg eds., Sweden, 1968.

[41] Petoukhov S. V. *Genetic Codes I: Binary Sub-Alphabets, Bi-Symmetric Matrices and Golden Section*. — Symmetry in Genetic Information, ed. Petoukhov S. V., ISBN 963216 242 0, special double issue of the journal «Symmetry: Culture and Science», Budapest, 2001a: International Symmetry Foundation, p. 255–274.

[42] Petoukhov S. V. *Genetic Codes II: Numeric Rules of Degeneracy and a Chronocyclic Theory*. — Symmetry in Genetic Information, ed. Petoukhov S. V., ISBN 963216 242 0, special double issue of the journal «Symmetry: Culture and Science», Budapest, 2001b: International Symmetry Foundation, p. 275–306.

[43] Petoukhov S.V. *Macroscopic biosolitons and biodomains. The solitonic approach to biology.* — VII International Conference «Mathematics, Computer, Education» (Dubna, January 24–29, 2000). — Moscow: Progress-Traditsia, 1999. P. 392.

[44] Petoukhov S.V. *Non-Euclidean geometries and algorithms of living bodies.* — Computers & Mathematics with Applications, v. 17, № 4–6, 1989. P. 505–534.

[45] Petoukhov S.V. *System regularities of numbers of protons in molecular systems.* — VIII International Conference «Mathematics, Computer, Education» (Puschino, February 1–5, 2001). — Moscow: Progress-Traditsia, 2001. P. 348.

[46] Petoukhov S.V. *The Biperiodic Table and Attributive Conception of Genetic Code.* A Problem of Unification Bases of Biological Languages. — In: Proceedings of «The 2003 International Conference on Mathematics and Engineering Techniques in Medicine and Biological Sciences (METMBS'03)», session «Bioinformatics 2003», Las Vegas, June 23–26, 2003.

[47] Petoukhov S.V. *The octet genetic code table and the ancient Chinese «I-Ching».* — VIII International Conference «Mathematics, Computer, Education» (Puschino, February 1–5, 2001). — Moscow: Progress-Traditsia, 2001. P. 347.

[48] Petoukhov S.V. *The octet genetic code table and the trigrams of the ancient Chinese «I Ching».* — International Conference on Discrete Geometry and its Applications, dedicated to professor S.S. Ryshkov's 70th anniversary. Abstracts. (Moscow, January 24–27, 2001). — Moscow: Moscow State University, Mechanical-mathematical faculty publishing, 2001. P. 73–34.

[49] Petoukhov S.V. *The rules of degeneracy and the rules of segregations of genetic codes.* — In: Proceedings of «The International Conference on Bioinformatics and its Applications» (December 16–19, 2004, Florida, USA), plenary lecture (in print).

[50] Stent G.S. *The Coming of the Golden Age.* — N-Y, The Natural Histore Press, 1969.

[51] Wittmann H.G. *Ansatze zur Entschlusselung des genetishen Codes.* — Die Naturwissenschaften, 1961, B. 48, 24, S. 55.

[52] Yam Ph. *Talking trash (Linguistic patterns show up in junk DNA).* — Sci. Amer., 1995, v. 272, № 3, p. 12.

Указатель таблиц

1. Сопоставление бескоординатных и координатных (международных) обозначений 32 видов симметрии кристаллов стр. 84
2. Числа точек в симметричных системах вида $\widetilde{6} \cdot m$ стр. 88
3. Относительные числа точек для составных систем вида симметрии $\widetilde{6} \cdot m$ стр. 89
4. Сопоставление бескоординатных и координатных (международных) обозначений 31 вида симметрии лент стр. 116
5. Типы симметрии стержней с конечными переносами стр. 133
6. Сопоставление бескоординатных и координатных (международных) обозначений пространственных групп симметрии кристаллографических стержней и лент стр. 134
7. Типы предельной симметрии стержней стр. 140
8. Элементы симметрии трехмерных фигур и соответствующие этим элементам операции симметрии стр. 144
9. Сопоставление бескоординатных и координатных (международных) обозначений видов симметрии сетчатых плоских орнаментов стр. 168
10. Сопоставление формул симметрии, записанных в бескоординатном и координатном видах для плоских однородных семиконтинуумов, орнаментов и бордюров стр. 202
11. Бескоординатные и координатные (международные) обозначения 80 видов симметрии слоев стр. 211
12. Бескоординатные и координатные (международные) обозначения пространственных групп симметрии трехмерных дисконтинуумов стр. 227
13. Симметрия и кратность эквивалентных положений в пространственной группе $P6/mcc$ стр. 240
14. Кристаллографические точечные группы как расширения групп вращений стр. 263
15. Точечные группы антисимметрии как расширения кристаллографических групп стр. 280
16. Шубниковские группы слоев, изображенных на рис. 184–187 стр. 286
17. Расширенные векторные базисы трансляционных групп антисимметрии и их трансляционных классических подгрупп стр. 290
18. Цветные группы G^p как расширения кристаллографических групп $G^* \lhd G \leftrightarrow G^p$ стр. 304
19. Беловские пространственные группы трех-, четырех- и шестицветных решеток стр. 315
20. Стандартная установка кристаллографических и кристаллофизических осей координат стр. 325

Указатель символов

G, H, F — символы множеств (абстрактных групп) 250, 253, 255

$\varnothing$ — пустое множество 345, 346

g, h, f — элементы множеств 250, 253, 255

$\in$ — элемент принадлежит множеству, $g \in G$ 250

$\notin$ — элемент не принадлежит 257, 259

$\{g_1, g_2, \ldots, \}$ — множество элементов $g_i \in G$ 250, 253, 255

$\subset$ — символ строгого включения (подгруппы) 255

$\not\subset$ — не включает 260

$\subseteq$ — включает или равно, $H \subseteq G$ 346–349

$\rightarrow$ — группа G гомоморфна H, отображение элементов $g \rightarrow h$ 257, 263, 379

$\rightarrow$ — переход от G к $H \subset G$ 210; к пределу 121; от одной системы величин к другой 263

$\leftrightarrow$ — изоморфизм групп $G \leftrightarrow F$, соответствие элементов $g \leftrightarrow f$ 253, 263, 379; соответствие двух систем величин 271

$\neq$ — не равно 258

$\lesseqgtr$ — меньше ($<$) или больше ($>$) 129

$\sim$ — отношение эквивалентности 345

$\bigcup_{i=1}^{n} G_i = G_1 \cup \ldots \cup G_i$ — объединение n множеств G_i 255, 345, 347

$\bigcap_{i=1}^{n} G_i = G_1 \cap \ldots \cap G_i$ — пересечение n множеств G_i 138, 260, 345, 351, 360

$\Rightarrow$ — следует 292; переход от G к H путем проектирования или сечения фигур 210

$\cdot = \otimes, \circledS, \odot, \bigcirc$ — произведения групп: прямое, полупрямое, условно-прямое и условно-полупрямое 260–263, 268, 271, 279, 285, 360

$\odot$ — операция диссимметризация 360, 346

$H \lhd G$ — H — инвариантная подгруппа (нормальный делитель) G 255, 259, 260

G/H — фактор-группа $\{Hg_i\}$ или $\{g_iH\}$ с элементами Hg_i или g_iH 257, 259, 269

$Hg_i(g_iH)$ — правые (левые) смежные классы в разложениях $G = \cup Hg_i$ или $G = \cup g_iH$ 255, 258

$G\backslash H$ — разность множеств (дополнение H до G) 346
$G_{r,t,\ldots,s}$ — символ классических групп изометрических преобразований 210
$G^{l,p}_{r,t,\ldots,s}$ — теоретический символ групп обобщенной симметрии 295
G^C, G^D — симметризаторы и диссимметризаторы групп 346, 360
$G^H = G \pmod H$ — группа по модулю 259, 261, 269
$\equiv$ — тождественно равно 208; сравнение по модулю, $g^H \equiv g \pmod H$ 260
$h_{jl,n}$ — факторы (модули сравнения) 259, 273
$h_k^{g_j} = g_j h_k g_j^{-1}$ — автоморфное преобразование $h_k \leftrightarrow h_k^{g_j} \in H$, $H \leftrightarrow H$ 260
$G_i^* = SG_iS^{-1}$ — условие эквивалентности (сопряженности) групп G_i и G_i^* 314, 316, 345, 347
$\Phi = TG$ — теоретический символ федоровской (пространственной) группы 264, 268, 271
$T = P, R, A, B, C, F, I$ — символы трансляционных подгрупп $T \subset \Phi$ 264
p_0, p_{00}, P_{000}, — символы групп непрерывных переносов для одномерных, двумерных и трехмерных континуумов, 202, 345
$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ — метрические параметры T-групп 219, 324
G — точечная группа для симморфной Φ- или группа по модулю $G^T = G \pmod T$ для несимморфной Φ-группы 264
$Ш$ — символ шубниковской (пространственной) группы антисимметрии 282
G/G^* — двучленный символ группы антисимметрии G' 279
Φ/Φ^* — двучленный символ $Ш$-группы 289, 290
$G' = G^1_{3,0}$ — абстрактный символ точечных групп антисимметрии 282, 295
$Б$ — символ беловской (пространственной) группы цветной симметрии 308
$T_{\tau'}$ — символ группы переносов и антипереносов 287, 290
$T_{\tau(p)}$ — символ группы переносов и цветных переносов 312, 313
$G^{(p)} = G^p_{3,0}$ — абстрактный символ цветных точечных групп 294, 295
$S_p = 1^p$ — симметрическая группа цветного отождествления порядка $p!$ 298
$P \subset S_p$ — подгруппа цветных перестановок $P = \{p_1, \ldots, p_s\} \subset S_p$ $s < p!$ 298

$T_{\tau^*}/T_{\tau(p)}/G$ — трехчленный символ группы $Б = T_\tau^{(}p)G$ 313
$G/H/H'$ — трехчленный символ группы Ван-дер-Вардена – Буркхарда $G^{(p)}$ 316
$ф$, $ш$ — элементы групп $ф \in Ф$, $ш \in Ш$ 282
$б = фр = рф$ — элементы цветных $Б$-групп 308
$p_i \in P$ — элементы группы P (для циклических цветных групп $p_i = \varepsilon$) 291, 298, 317, 336
$g = g\bar{1} = \bar{1}g$ — инверсионный поворот, $g \in \infty\infty\infty$ 16, 57, 144
$\tilde{g} = gm = mg$ — зеркальный поворот, $g \in \infty\infty\infty$ 16, 57, 144
$g_i g_j = g_k$ — произведение элементов g_i, $g_j \in G$ 250, 250, 259
g^m — m-я степень элемента g 144, 252, 253
$g^{(p)} = pg = gp$ — комбинированное преобразование $g^{(p)} \in G^{(P)}$ 291, 298, 317
$g^{(-1)}$, $e = 1$ — обратный и единичный элементы $g^{-1}g = gg^{-1} = e$ 250, 261, 266
$p_i = m_i/s_i$ — показатель цветности элемента $g_i^{(pi)} = g_i p_i = p_i g_i \in G : p_i^{pi} = 1$, $g_i^{mi} = 1$, $p_i \in P$, $g_i \in G \leftrightarrow G^{(p)}$ 294, 298, 307, 338
$\mathbf{D}(g)$ или $\mathbf{D}$ — матрица векторного представления $\mathbf{D}(g) \leftrightarrow g$ ортогональной группы $G \subseteq \infty\infty m$ 254, 266
$\tilde{\mathbf{D}}$ — транспортированная матрица 267
$D_{ij} = \cos(\widehat{X_i', X_j})$ — матричные элементы $\mathbf{D}$ 254, 266, 329, 339
$\mathbf{D}^n = \mathbf{D} \times \ldots \times \mathbf{D}$ — n-ая (кронекерова) степень векторного представления (тензорное представление) группы $G \subseteq \infty\infty m$ 329, 331, 338
$\chi(\mathbf{D})$ или χg — характер матрицы $\mathbf{D}$ (преобразования g) в фиксированном представлении группы $G \subseteq \infty\infty m$ 329, 339
$\mathbf{C}(\mathbf{k}, \varphi)$ — матрица чистого поворота на угол φ вокруг оси, задаваемой вектором $\mathbf{k}$ 339
$[\mathbf{D}|0] = [\bar{1}^p \mathbf{C}(\mathbf{k}, \varphi)|0]$ — оператор ортогонального преобразования на группе $\infty\infty m$ 266, 267, 339
$R[\mathbf{D}|0] = [\bar{1}^p 1'^q \mathbf{C}(\mathbf{k}, \varphi)|0]$ — оператор преобразования антисимметрии на группе $\infty\infty m1'$; $R = 1'$ 339
$(p)[\mathbf{D}|0] = (p)[\bar{1}^q \mathbf{C}(\mathbf{k}, \varphi)|0]$ — оператор цветного преобразования на группе $\infty\infty m1^{(p)}$; фиксированная перестановка $(p) \in P \subset S_p = 1^{(p)}$ 336
$[\mathbf{E}|\mathbf{0}]$ — единичный оператор (отождествления) 266
$[\mathbf{E}|\tau]$ — оператор переноса на вектор τ 266, 267
$[\mathbf{E}|\bar{\tau}]$ — оператор движения в симморфной $Ф$-группе 267, 339
$[\hat{g}|\tau]$ — сокращенная запись оператора $[\mathbf{D}(g)|\tau]$ 272, 338

$[\mathbf{D}|\alpha+\tau]$ — оператор движения в несимморфной Φ-группе 269

$R[\mathbf{D}|\alpha+\tau]$ — оператор антидвижения в $Ш$-группе; $R=1'$ 277, 336, 339

$(p)[\mathbf{D}|\alpha+\tau]$ — оператор цветного движения $6^{(p)}=\phi p=p\phi$ в цветной $Б$-группе; $p\in P$ 336, 339

$[\mathbf{D}|\alpha+\tau](p)(g)$ — оператор цветного преобразования подобия 304

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — пространственный тензор 338, 339

$\mathbf{m}(\mathbf{r})$ — магнитный пространственный вектор 338, 339

$\mathbf{A}=\mathbf{aB}$ — операторная запись тензорных уравнений 358

$A_i=a_{ij}B_j=$
$=a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+a_{i3}B_3$ — запись тензорных уравнений в компонентах (пример суммирования по $j=1, 2, 3$ 254, 329

δ_{ij} — дельта-функция: $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}\neq 1$ при $i\neq j$ 356

$/, \cdot, :$ — косое, параллельное и перпендикулярное расположение пересекающихся элементов симметрии в бескоординатных символах точечных и пространственных групп G 79

$//, \odot, \dot{:}$ — то же, но элементы симметрии не пересекаются (в символах групп по модулю G^H) 157, 168, 230

— Символы конкретных групп — см. в табл. 1, 4–12, 14–19

— Графические символы элементов симметрии точечных и пространственных групп — см. на проекциях групп (рис. 69, 90, 104, 149, 192–194, 196, 199, 203, 207, 209, 210, 213–216)

Предметный указатель

Автоморфизмы геометрические (см. *также преобразования* и *группы* симметрии) 5, 261, 270, 271, 322
— физические 259, 261, 288
— художественные 370
Аксиома равенства (критерий эквивалентности) 7, 8, 261, 279, 288, 317
Анизотропия 32, 329, 330
Антиотождествление 279, 280
Антипараллельность 59, 60, 73
Антиравенство 20, 278
Антисимметрия *см.* конкретные группы
Асимметрия 23, 364

Беловские группы *см.* гуппы цветной симметрии пространственные1000
Бордюры 98, 107, 110, 203, 212, 285

Векторные базисы цветных решеток 221, 267, 291, 292, 313, 315, 316
Векторы аксиальные и полярные 93, 95, 96, 330, 335
— магнитные, электрические и магнито-электрические 64, 336, 342
— пространственные 340, 342
Величина симметрии *см.* порядок группы симметрии
Вид симметрии 35, 80, 152
Винтовые оси иррациональные 122, 124
— рациональные 113, 122, 124, 138, 223
Вращение плоскости поляризации 34, 48, 50, 54, 56, 96, 158, 198
Вульфа - Брегга формула для сетчатых орнаментов 174
Вырезывание симметричных фигур из бумаги 44, 118, 184

Гармония как аналог симметрии 13, 261, 297, 308
Генераторы групп 50, 54, 61, 224, 254, *см.* порождающие элементы
Геометрические и геометрофизические объекты 197, 200, 223, 281, 282
Гомоморфное отображение 206, 211, 217
Группа Галилея - Ньютона 359
— Лоренца 200, 289
— линейная однородная и неоднородная 200, 255, 269
Группы абстрактные 250–252, 269, 322
— антисимметрии l-кратные (заморзаевские) 336, 357, 358
— — предельные 335
— — точечные конечного порядка как расширения кристаллографических 200, 222–226, 237, 283
— антисимметрии пространственные двумерные (слоевые) 285–288
— — дискретные одномерные 286, 287
— — трехмерные (шубниковские) как расширения федоровских 285, 288–293
— аффинных преобразований 200, 259
— генерирующие в теории расширений 212, 224, 241, 248, 255–258
— гомологии и криволинейной симметрии 322
— изометрических преобразований (движений) внешние и внутренние *см.* ткже пространственные группы145, *см.* ткже пространственные группы212, *см.* ткже пространственные группы223, *см.* ткже пространственные группы251
— квазисимметрии P — симметрии по Заморзаеву) 320, 342
— конечных антипереносов трехмерные 289–292
— — переносов двумерные 148, 151, 152

— — переносов одномерные 99, 136
— — переносов трехмерные 175, 223, 268
— — переносов четырехмерные 320
— — цветных переносов трехмерные 310, 313, 315–317
— матричные 203, 207, 214, 268
— непрерывных переносов двумерные 156–158, 166–168, 279
— — одномерные 101, 103, 110, 136–140, 203
— — трехмерные 214, 245–247, 338
— — цветные 341, 347
— операторов 259, 268, 271
— ортогональные *см.* тчечные группы385
— охватывающие (фундаментальные) 199, 341, 347, 355, 358, 360
— перестановок 251, 252, 254, 301
— по модулю 227–231, 260, 261, 263–265, 267, 271, 273–276
— подобия геометрические 200, 256
— — цветные 321, 378
— проективных преобразований 251, 369, 380
— пространственные в неевклидовой геометрии 320
— — двумерные 117, 130–132, 163–167, 221
— — дискретные, симморфные и несимморфные, как расширения групп переносов 261, 263, 264, 269–271, 273
— — непрерывные одно-, дву- и трехмерные *см.* группы непрерывных перевосов385
— — одномерные 87, 88, 132, 133, 140, 221
— — трехмерные (федоровские) 212, 223, 233, 269–271, 273–275
— — четырехмерные 320
— симметрии (автоморфных преобразований) 16, 35, 145, 212, 250, 322, 325
— топологических преобразований 251, 380
— — цветного отождествления 298, 300, 338
— точечные в четырехмерном пространстве 283, 320
— — как расширения групп вращении 265, 267
— — предельные (группы Кюри) 50, 70–72, 79, 269
— — трехмерные конечного порядка (кристаллографические и некристаллографнческие) 80, 145, 212, 252, 253, 255
— цветной кратной антисимметрии 317, 319
— цветной симметрии точечные пространственные дискретные двумерные 319
— — пространственные дискретные одномерные 310, 313, 319
— — пространственные дискретные трехмерные (беловские) как расширения федоровских и шубниковских 310–313, 315–317, 339
— цветной симметрии точечные, конечного порядка по Ван-дер-Вардену – Буркхарду 308, 319, 320
— — конечного порядка по Виттке – Гарридо 308, 320
— — конечного порядка предельные 270, 271
— — конечного порядка, как расширения классических 246, 251, 293–295, 297, 298, 300–302, 304, 305, 307

Двучленные символы шубниковских групп 281, 290–292
Деление фигур на равные части (правильные разбиения) 154–157, 159–162, 164, 165, 187–189, 219, 233, 320, 329, 350
Диаграммная техника в теории преобразований 311
Диаметр фигуры (точечного множества) 350
Дисконтинуумы двумерные одно- и *двусторонние* 151, 168–170, 206–210, 222, 276
— одномерные 110, 113, 115, 132, 133, 203, 222, 276
— трехмерные 170, 177, 182–184, 216, 218, 219, 221, 227, 271, 275
Диссиметризация гетерогенных систем 346, 348, 350, 351, 364–366, 368

Диссимметрия природных объектов 23, 28, 32, 351
— произведений искусства 60, 171, 196, 373, 378

Единый принцип построения симметричных фигур 141–143, 145

Закон кратных отношений или постоянства произведений n_i, s_i 56, 76, 88, 90, 91, 93, 189, 191, 241–243
Законы изменения симметрии компонент для составных физических систем 356, 358, 363, 365, 383
— композиции в искусстве 368, 375, 376, 381
— преобразования физических величин 96, 255, 268, 269, 329, 330, 332, 333, 335, 336, 338–341, 351, 360
— сохранения стационарной симметрии для изолированных физических систем 284, 355–357, 363, 364, 366
— сохранения физических величин — инварианты групп преобразований 277, 278, 285, 289, 311
Заморзаевские группы *см.* группы l-кратной антисимметрии385
Звезды (пучки) эквивалентных направлений (векторов) 90, 300

Изгоны *полные и неполные* 191–195
Изоморфизм абстрактных и конкретных групп 222, 254, 264, 281, 288, 300, 312, 341
Изотропия 32, 56, 157, 198, 200, 289
Изоэдры 54, 69, 154, 155
Инварианты в искусстве 298, 301, 302, 305, 307
— геометрические 98, 120, 220
— групп преобразований 16, 251, 359, 383
— материальные 223, 261, 270, 310
— структурные 250, 325, 328, 383
— тензорные *см.* ределение независимых компонент тензора385
Инверсия 59
Индекс подгруппы 205, 211, 224, 242
Индикатриссы физических свойств 266, 267

Калейдоскопы для построения симметричных фигур 32, 49, 62–64, 85, 147, 171–173
Классификация тензорных величин 328, 332, 341, 360
— физических теорий 264, 288, 289
Классы эквивалентности (смежные классы) 257, 258
Композиционный характер природных объектов 345, 346
Континуумы двумерные одно- и двусторонние 198, 200, 208–210, 347
— одномерные 110, 136–140, 203
— трехмерные 1-го и 2-го рода 214, 245, 247, 329, 338
Копредставления групп антисимметрии 321
Кратность эквивалентных положений (точек) 56, 88, 188, 242
Кристаллографические группы *см.* тчечные группы385
Кристаллографические оси координат 253, 254, 326–328
Кристаллофизические оси координат 253, 254, 326–330

Ленты 113, 115–117, 146, 212

Магнитная интерпретация цветных групп 281, 295, 300, 336, 340–343
Магнитная симметрия *см.* атисимметрия336, *см.* атисимметрия342, 343
Материальные объекты (физические поля, фигуры) 117, 156, 197, 200, 223, 261, 270, 280, 282
Матрицы векторных и тензорных представлений ортогональных групп 255, 268, 332, 333
— конкретных ортогональных преобразований 255, 333
Методы моделирования в науке и искусстве 199, 346, 370
Метрические системы и сингонии 149, 222, 251, 315, 326
Метротектоническая теория музыки 371, 376
Модули сравнения (факторы) 1-й и 2-й систем 260, 261, 263, 264, 271, 273–275

Мощность предельных ортогональных групп 76, 258, 338, 350

Направленные величины 93, 95–97, 335, 336
Нарушение законов сохранения (*P*- и *CP*-инвариантности) 357, 358, 363
Негрупповые методы в естествознании 383
Нейтральные цветные группы 279, 280, 298, 300
Необходимость, но недостаточность условий симметрии 352, 368
Неполярность направлений, осей, плоскостей 37, 38, 42, 44, 97
Непрерывные группы *см.* нпрерывные пространственные группы, группы переносов и предельные точечные группы385
Нормальный делитель *см.* ивариантная подгруппа205, *см.* ивариантная подгруппа207, 208, *см.* ивариантная подгруппа255

Обобщенные группы изометрических преобразований 251, 278, 325
Однородность пространства и времени 199, 246, 247, 338, 359
Операторы движений 214, 215, 217, 219
— ортогональных преобразований 268, 275
— цветных движений 339, 340
— — ортогональных преобразований 338, 339, 341
Операции (*см.* преобразования, операторы антисимметрии385
— антисимметрии 278, 280, 285, 293, 341
— диссимметризации (сужения групп) 280, 282
— ортогональной симметрии 83, 145, 252–255, 285
— симметризации (расширения групп) 348, 351
— цветной симметрии 300, 310
Определение *независимых компонент* тензора 329, 330, 332, 333, 335, 340
Определяющие уравнения *групп* 112, 203, 223
Ориентированные (односторонние) прямые и плоскости 53, 57, 62, 107, 113, 198
Орнамент сетчатый в природе, технике, искусстве 146, 154–157, 159–162, 164–166, 168–172, 174, 181, 212
Оси антисимметрии и цветной симметрии 280, 294, 300, 301
Основная теорема теории расширений групп 260, 264, 270
Особенные точки, прямые и плоскости 53, 54, 120
Ось конечных переносов (трансляций) 98, 99, 146, 148, 267
— непрерывных переносов 76, 85, 105, 160
— симметрии зеркально-поворотная 41, 80, 143
— — инверсионно-поворотная 58, 85, 143
— — поворотная 30, 32, 35, 143
Отношение причины и следствия 350, 351, 353, 355, 362
— соответствия 307, 312
— целого и части 348, 350, 351, 355, 362, 363, 383
— эквивалентности и порядка 8, 259, 279, 298

Парадоксы симметрии 352, 358, 362, 363
Параллелепипеудальные системы точек *см.* пространственные решетки385
Параллелогоны и планигоны 147, 148, 257
Параллелограмматические системы точек *см.* поские сетки385
Параллелоэдры Федорова 239
Параллельность односторонняя 59, 126
Пиро- и сегнетоэлектрики 265, 266
Плоские сетки 148, 149, 151, 222
Плоскость антисимметрии и цветной симметрии 223, 242, 243
— дву- и односторонняя (ориентированная) 53, 54, 56, 57, 107, 113, 198, 205
— *симметрии* 28, 29, 35
— скользящего отражения 101, 223

Плотнейшие упаковки (укладки) шаров 233–237
— кубическая и гексагональная 235–237
Подгруппы инвариантные и неинвариантные 76, 231, 233, 257, 260
Подструктуры композиционных объектов: музыкальных композиций 376, 378, 379
— произведений живописи 379–381
— стихотворной речи 371, 373, 374
Показатель цветности группы и элемента симметрии 294, 295, 297, 300, 308, 322, 340
Полюса аксиальные и полярные 66
Поля физические и функциональные (векторные и тензорные) 197, 251, 261, 282, 283
Полярность осей, направлений и плоскостей 53, 57, 62, 107, 113, 198, *см.* ориентированность
Порядок конечной группы 56, 76, 242, 254, 280, 294, 329
— ортогонального тензора 330, 333, 340
— элемента (операции) симметрии 30, 79, 294
Правильные многогранники 72, 73, 75, 94
— системы точек или фигур 56, 87, 88, 90, 171, 189, 219, 378
— системы точек или фигур *см.* ткже симметрические, эквивалентные системы385
Представления групп векторные и тензорные 197, 256, 268, 273, 274, 291
— — изоморфные (точные) 322, 341
— — матричные и операторные 268, 274
— — неприводимые (гомоморфные) 259, 319, 320, 341
Преобразования 16, 29, 59, 71, 113, 145, 169, 186, 200–204, 212, 223, 226, 237, 241, 251, 271, 279, 280, 285, 294, 298, 301, 302, 307, 321, 322, 324, 325, 370, 375, 378, *см. также* группы подобия, *см. также* группы связи, элементы связи, *см. также* группы синонимические и стилистические, *см. также* также группы симметрии, автоморфизмы, *см.* группы ортогональные, первого и второго рода, *см.* также группы антисимметрии, *см.* также группы гомологии и криволинейной симметрии, *см. также* группы изометрические, внешние и внутренние, *см. также* группы сюжетно-тематические, *см. также* группы художественные на уровне подструктур эквивалентных элементов, *см. также* также группы цветной симметрии
Приближенный характер симметрии природных объектов 11, 14, 17
Принцип Поймана – Миннигероде – Кюри (НМК) 352, 355
— варьированного развития в искусстве 375, 376, 381
— вращения 30, 34
— динамического равновесия Ле-Шателье – Брауна 365
— диссимметризации гетерогенных систем 17, 351, 352
— инвариантности (логическая аксиома) 325, 348, 355, 357, 362
— ковариантности физических уравнений 360
— компенсации (сохранения) симметрии 365, 383
— относительности Галилея 359
— — Эйнштейна 359
— переплетения 18, 83, 125
— причинности 348, 350, 351, 355, 383
— симметризации гомогенных систем 17, 352, 353
— симметрии (суперпозиции) для составных систем 6, 32, 144, 282–286, 348, 350
— соответствия 307, 312
— суперпозиции групп симметрии с учетом взаимодействия подсистем 46, 284–286, 290, 311, 312
Принципы (законы) композиции в искусстве 381
— целостности составных систем 325, 350, 381
Проблема взаимодействия для составных систем 284, 290, 312

— внутренних степеней свободы симметрии 356, 383
— выделения основного структурного уровня 383
— параллельных изменений симметрии структурных подуровней при фазовых перехода 355, 365, 383
— прибора и объекта при определении симметрии 286, 311, 312
— связи симметрии с термодинамикой и статистической физикой 365, 383
Проекции групп антисимметрии и цветной симметрии 225, 243, 247
— пространственных беловских групп 311, 315, 319
— — федоровских групп 223–226, 235, 236, 242
— — шубниковских групп 288, 289
— сетчатых орнаментов 130, 132
— слоев 206–208
— точечных групп симметрии стереографические 58, 64, 264
— элементов симметрии и эквивалентных систем фигур для бордюров и лент 84, 89
Произведение групп полупрямое, прямое или условное 209, 210, 213, 216, 225, 226, 229, 232, 242, 244, 251, 292
— матриц кронекерово (прямое) 332, 333
— перестановок 252, 253, 339
— по правилу <строка на столбец> 255, 330
— преобразований в пространственных группах 269, 271
— — в точечных группах 252–255
— — в цветных группах 238, 241, 272, 304
— приведенное (по модулю) 208, 210, 212, 218, 221
— условно-полупрямое или прямое 263, 264, 273, 281, 282, 285, 288, 300, 302, 312
Пространственные группы симметрии *см.* кнкретные группы385
— решетки Бравэ (классические) 220–222, 267, 315
— — антисимметрии (двуцветные) 290–292
— — для четырехмерного евклндового пространства 320
— — цветные (3-х, 4-х и 6-цветные) 310, 313, 315–317
Пространство материальное (геометрофизическое) 197, 227, 281, 282
— представлений групп (функциональное) 246, 283, 333, 351
Простые формы кристаллов 66, 69
Противоречивая симметрия 11, 12, 121, 126, 155

Равенство абсолютное и относительное (качественное) 7, 8, 10, 56, 259, 261, *см.* также отношение эквивалентности
— по модулю 103, 112, 208, 209, 220, 265, 273
— совместимое (конгруентное) и зеркальное 21, 22, 77, 141
Разложение группы по подгруппе 257, 259, 264, 270, 273, 319, 363
Расширения инвариантных подгрупп *см.* тория расширений групп385
Реализация (точное представление) группы *см.* также изоморфизм групп
— (точное представление) группы также изоморфизм групп 270, 279, 285, 317, 322
— предельных групп материальными фигурами 70, 71, 270, 271
Розетки одно- и двусторонние 14, 37, 39, 60, 169

Связь групп антисимметрии и цветной симметрии с представлениями классических групп 319, 320, 341, 351, 362
— симметричных и диссимметрнчных состоянии физических систем и принцип суперпозиции групп симметрии 281, 351, 355, 356, 364, 365, 383
Семиконтинуумы двумерные одно- и двусторонние 159, 160, 168
— трехмерные 1-го и 2-го рода 243, 245
Символы видов (групп) изометрической симметрии, бескоординатные и координатные (международные) 6,

22, 59, 61, 88, *см.* указатель символов, 115–117, 122, 123, 130–132, 134, 152, 160, 167, 181–185
— дву- и трехчленные для цветных групп 281, 289, 291, 293, 315, 319, 383
— теоретические для групп изометрических преобразований 212, 283, 297
— элементов (операций) симметрии, антисимметрии и цветной симметрии *см.* п названию соответствующих элементов и групп385
Симметризация гомогенных систем 347, 348, 351, 353, 355, 364–366
— связь с поведением энтропии 365, 383
Симметризованные и антисимметризованные степени векторных представлений групп 333
Симметрию материальных объектов — бордюров, векторов, дисконтинуумов, континуумов; лент, направленных величин, орнаментов, пиро и сегнетоэлектриков, плотнейших упаковок шаров, полей физических, правильных многогранников и простых форм, розеток, семиконтинуумов, скаляров, слоев, стержней, сферолитов, тензоров, фигур астеризма, Лиссажу, травления, Хладни - *см.* по названию соответствующих объектов
Симметрия аффинная 200, 259
— в архитектуре 27, 74, 133, 134, 200, 261, 297
— в графике, живописи и скульптуре 29, 196, 251, 325, 369, 380, 381
— в декоративно-прикладном искусстве 13, 27, 74, 85, 115, 119–130, 132–134, 155, 169, 297, 306, 307
— в кристаллографии и кристаллофизике 83, 85, 91, 222–231, 233–237, 247, 251, 322, 327–330, 332, 333, 335, 336, 338, 342, 343, 345, 364
— в музыке 297, 298, 303–306
— в поэзии и художественной литературе 369–371, 373–375
— в структурной биологии 102, 115, 133, 161, 309, 310
— в структурной физике и химии 91, 205, 243, 246, 251, 325, 345
— в художественном конструировании 29, 41, 72, 117, 137, 148, 171, 172, 174, 369
— двуцветная *см.* атисимметрия251, *см.* атисимметрия279, 280
— динамическая (мгновенных состояний) 259, 293, 296
— изометрическая 145, 212, 251, 324
— как метод исследования 16, 322, 325, 327, 383
— как философская категория 16, 322, 325, 383
— кристаллов пространственная 223–226, 235–237, 241–243, 247
— — точечная 34, 44, 45, 48, 50, 51, 61, 263
— линейно-поляризованного луча 50, 270
— молекул 90, 91
— объекта, как объединения групп 356, 383
— — объекта, как пересечения групп 355, 356, 363, 383
— организмов (животных и растений) 28, 32, 34, 36–38, 40–42, 85, 148, 171, 205, 251, 321
— ортогональная 113, 169, 200, 269
— — конечных трехмерных фигур 80, 97, 146, 212, 297
— осевая 32
— подобия 200, 256, 258, 297
— проективная 251, 369, 380
— составных систем гетерогенных 148, 149, 151, 196, 345–348, 355, 357, 364, 366
— — гомогенных 135, 141–143, 277–280, 285, 293
— стационарная (усредненная по времени) 364–366
— уравнений и их решений 358–360, 362
— физических свойств систем 327, 329, 346, 351, 355
— цветная (многоцветная) 246, 251, 319
— эквивалентных положений (точек) 65, 220, 226, 241, 242, 341

Систематика групп изометрических преобразований 212
Системы представителей смежных классов 257, 259, 260, 321, 348, 363
— составные, геометрические и физические 261, 277–296
— — изолированные, квазиизолированные и открытые 278, 284, 286, 292
— художественные 297, 302, 303, 307
Скаляры аксиальные (псевдоскаляры) 68, 96, 97
— полярные 93, 96, 97
— пространственные 342
Скрученные формы 67, 69
Слои 114, 161–164, 166–169, 207, 230
Смежные классы (классы эквивалентности) 76, 257–260, 271, 274
Степени операций (преобразований) симметрии 112, 174, 202, 223
Стереоэдры Федорова – Дирихле 191, 258
— в n-мерном евклидовом пространстве 320
Стержни 92, 102, 109, 136, 169
Структура биологических объектов 383
— как инвариантный аспект системы 250, 325, 346, 383
— кристаллов 223–226, 237, 239, 241–243, 322, 327, 340, 342, 364
— художественных систем 369, 375, 376, 378–381
Структурно-системные методы в естествознании 325, 327, 346, 383
— — в искусствознании 368–370, 381
Структурные формулы кристаллов и молекул 88, 90, 91, 93, 241–243
Сферолиты 56, 57

Таблицы умножения групп 253, 258, 265, 271, 273–276
— характеров неприводимых представлений 257, 274
Тело (континуум эквивалентных фигур) 347
Тензоры ортогональные, аксиальные и полярные 68, 71, 266–269, 275, 290
— пространственные на группе $P_{000}\infty\infty\infty m1^p$ 338, 340–342
— четные, электрические, магнитные и магнитоэлектрические на группе $\infty\infty\infty m1'$ 274, 275
— — , внутренняя симметрия по индексам 332, 342
Теорема Биркгофа 362
— Кэли 254
— Лагранжа 257
— Людерса – Швингера – Паули 358
— Нетер 359
Теория расширений групп 259–261, 263–265, 270, 297, 368
Тип симметрии 62, 67, 71, 124, 140
Точечные группы *см.* группы точечные385

Узлы сеток и решеток 148, 220, 222, 226, 267
Укладки и покрытия *см.* ткже деление фигур233, *см.* ткже деление фигур245, *см.* ткже деление фигур320, *см.* ткже *деление* фигур350
Умножение(*см.* поизведение) преобразований385
Установка кристаллов (однозначный выбор осей) 267, 268, 326–328

Фазовые переходы в кристаллах 364, 365, 383
Фактор-группа 258, 260, 264, 271, 273, 274
Факторы симметризации–диссимметризации 282, 284, 293
Федоровские группы *см.* пространственные группы трехмерные385
Фигуры Лиссажу 47–49
— Хладни 46–48
— астеризма 36, 37
— травления 49–51

Цветной анантио- и полиморфизм 294, 308
Центр антисимметрии 279
— симметрии 59, 79
Циклические группы 16, 237, 238, 240, 249

Шубниковские группы *см.* группы антисимметрии трехмерные385

Эвристическое значение принципов симметрии 311
Эквивалентные системы точек (фигур) 54, 87, 148, 189, 194, 216, 343
Элементы полярные и неполярные 53, 54, 62, 99, 103, 107, 125
— порождающие (генераторы групп) 35, 83, 117, 143, 254, 379
— связи (представители смежных классов) 180, 186, 292
— симметрии особенные 30, 54, 98, 110, 143, 220
Энантиоморфизм (правизна, левизна фигур) 18, 22, 50, 55, 93, 96
Эстетическое воздействие симметрии и диссимметрии 26, 44, 99, 103, 109, 171, 172, 196, 198, 369, 380

Ядра гомомфизмов 264, 271
Ячейки элементарные 116, 150, 164, 176, 192, 198, 277, 341

Шубников Алексей Васильевич,
Копцик Владимир Александрович

СИММЕТРИЯ В НАУКЕ И ИСКУССТВЕ

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка Д. П. Вакуленко
Корректор З. Ю. Соболева

Подписано в печать 27.07.04. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 32,55. Уч.-изд. л. 33,12.
Гарнитура Антиква. Бумага офсетная № 1. Тираж 1000 экз. Заказ № 3700.
АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ОАО «Дом печати–Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

ISBN 5-93972-243-1