

Сергей Славянов, Вольфганг Лай

Специальные функции:

Единая теория,
основанная
на анализе
особенностей

НЕВСКИЙ
ДИАЛЕКТ 

Сергей Славянов
Вольфганг Лай

Специальные функции:

Единая теория, основанная
на анализе особенностей

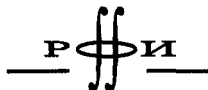
с предисловием
Альфреда Зеегера



Санкт-Петербург

2002

УДК 517.58
ББК 22.161.63
С 47



*Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект № 01-01-14031)*

Перевод с английского А. Я. Казакова
под редакцией С. Ю. Славянова

Славянов С. Ю., Лай В.

С47 Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей / Предисл. А. Зеегера. — СПб.: Невский Диалект, 2002. — 312 с.: ил. — ISBN 5-7940-0096-1

В книге изложена теория специальных функций, но рассматриваемая не как список функций, обладающих определенными свойствами, а введенная на основе единообразного изучения особенностей дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области. Число и характер особенностей служат базой классификации отдельных специальных функций. Впервые в русскоязычной литературе достаточно полно представлены функции, являющиеся решениями уравнений класса Гойна. Прослежена связь между линейными специальными функциями (решениями линейных уравнений) и нелинейными специальными функциями (трансцендентами Пенлеве). Представлен и обсуждается ряд приложений в различных областях физики.

Первое издание книги вышло на английском языке в серии Oxford Mathematical monographs (Slavyanov S. Yu., Lay W. *Special Function: A Unified Theory Based on Singularities* / Foreword by A. Seeger. Oxford; New York: Oxford University Press, 2000. — ISBN 0-19-850573-6). При подготовке настоящего издания в текст были внесены некоторые изменения и устранены замеченные опечатки.

Книга предназначена студентам старших курсов и специалистам, активно использующим в своей работе аналитическую теорию дифференциальных уравнений и специальные функции математической физики.

ISBN 5-7940-0096-1

© С. Ю. Славянов, В. Лай, 2002
© "Невский диалект", 2002

Оглавление

Предисловие	7
Предисловие к изданию на русском языке	12
Введение	13
1. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с полиномиальными коэффициентами	17
1.1. Регулярные особые точки и фуксовы уравнения	17
1.1.1. Регулярные и фуксовы особые точки	17
1.1.2. Фуксовы уравнения и их преобразования	19
1.1.3. Характеристические показатели	21
1.1.4. Решения Фробениуса	23
1.2. Иррегулярные особые точки и конфлюэнтные уравнения	25
1.2.1. s -ранг особой точки	25
1.2.2. Нефуксовы уравнения	27
1.2.3. s -гомотопные преобразования	28
1.2.4. Асимптотические решения в иррегулярных особых точках	29
1.2.5. Канонические формы	32
1.2.6. Обобщение теоремы Фукса	33
1.3. Конфлюэнция и редукция	36
1.3.1. Сильная и слабая конфлюэнции. Теорема о конфлюэнции	36
1.3.2. Принцип конфлюэнции	38
1.3.3. Редукция уравнений	38
1.3.4. Классы и типы уравнений	39
1.3.5. Стандартные формы уравнений	43
1.3.6. Инварианты s -гомотопных преобразований	44
1.4. Типы решений	45
1.4.1. Собственные функции сингулярной задачи Штурма–Лиувилля	45
1.4.2. Центральная и боковая задачи связи	46
1.4.3. Линии Стокса в окрестности особой точки. Матрицы Стокса	48
1.5. Обобщенная схема Римана	51
1.5.1. Введение	51
1.5.2. Обобщенная схема Римана	52
1.5.3. Приложения	54

1.6.	Центральные двухточечные задачи связи (ЦДЗС)	58
1.6.1.	Введение	58
1.6.2.	Две регулярные особые точки в качестве конечных точек интервала	60
1.6.3.	Одна регулярная и одна иррегулярная особые точки в качестве конечных	63
1.6.4.	Доказательство	71
1.6.5.	Две иррегулярные особые точки	75
2.	Гипергеометрический класс уравнений	77
2.1.	Схема классификации	77
2.1.1.	Общее представление	77
2.1.2.	Гипергеометрическое уравнение	78
2.1.3.	Конфлюэнтные уравнения	82
2.1.4.	Редуцированные конфлюэнтные уравнения	88
2.2.	Разностные уравнения	94
2.2.1.	Общие соображения	94
2.2.2.	Разностные уравнения для гипергеометрических функций	94
2.2.3.	Конфлюэнтные гипергеометрические функции	97
2.3.	Интегральные представления и интегральные соотношения	99
2.3.1.	Предварительные леммы	99
2.3.2.	Интегральные представления	101
2.3.3.	Интегральные соотношения	104
2.4.	Центральные двухточечные задачи связи	106
2.4.1.	Стандартные наборы решений гипергеометрического уравнения	107
2.4.2.	Соотношения связи для конфлюэнтного гипергеометрического уравнения	110
2.5.	Полиномиальные решения	116
2.5.1.	Введение	116
2.5.2.	Полиномиальные решения гипергеометрического уравнения	116
2.5.3.	Полиномы Якоби	121
2.5.4.	Специализация полиномов Якоби	123
2.5.5.	Полиномы Лагерра	126
2.5.6.	Полиномы Эрмита	127
3.	Уравнения класса Гойна	129
3.1.	Схема классификации	129
3.1.1.	Уравнение Гойна	129
3.1.2.	Конфлюэнтное уравнение Гойна	132
3.1.3.	Редуцированные конфлюэнтные уравнения Гойна	140

3.2.	Типы решений	147
3.2.1.	Решения уравнения Гойна	147
3.2.2.	Конфлюэнтные уравнения Гойна	151
3.3.	Интегральные уравнения и интегральные соотношения	152
3.3.1.	Введение	152
3.3.2.	Интегральные уравнения	153
3.3.3.	Пример доказательства	161
3.3.4.	Интегральные соотношения	163
3.4.	Основные асимптотические формулы при малых t	167
3.4.1.	Введение	167
3.4.2.	Уравнение Гойна со сливающимися особыми точками	167
3.5.	Большие значения скейлингового параметра	175
3.5.1.	Введение	175
3.5.2.	Квазипересечения для триконфлюэнтного уравнения	175
3.5.3.	Биконфлюэнтное уравнение Гойна	181
3.5.4.	Конфлюэнтное уравнение Гойна	189
3.5.5.	Обсуждение	190
3.6.	Центральные двухточечные задачи связи	192
3.6.1.	Введение	192
3.6.2.	Дифференциальные уравнения в канонической форме	193
3.6.3.	Разностные уравнения и наборы Биркгофа	197
3.6.4.	Уравнение для собственных значений	202
3.6.5.	Вычислительные аспекты	204
4.	Приложения к физическим задачам	207
4.1.	Задачи атомной и молекулярной физики	208
4.1.1.	Атом водорода	208
4.1.2.	Эффект Штарка для атома водорода	210
4.1.3.	Ион молекулы водорода	211
4.2.	Уравнения Тьюкольского в астрофизике	214
4.3.	Движение дислокаций в кристаллических материалах	222
4.3.1.	Линейная модель напряжений	223
4.3.2.	Дифференциальные уравнения	228
4.3.3.	Статические решения	230
4.3.4.	Явные вычисления	231
4.3.5.	Дискретный спектр	232
4.3.6.	Непрерывный спектр	236
4.3.7.	Квантовая диффузия кинков вдоль дислокаций	239
4.4.	Туннелирование в двойной яме	240

4.5. Идеальный туннельный барьер	245
4.5.1. Введение	245
4.5.2. Формы уравнений	246
4.5.3. Асимптотики	249
4.5.4. Численный алгоритм	252
4.5.5. Результаты	254
4.5.6. Заключение	257
4.6. Диффузия в кристаллах, индуцированная излучением	258
5. Уравнения класса Пенлеве	263
5.1. Свойство Пенлеве	263
5.1.1. Неподвижные и подвижные особые точки нелинейных ОДУ	263
5.1.2. Свойство Пенлеве и уравнения Пенлеве	264
5.1.3. Доказательство того, что подвижные особенности решений P^{II} являются полюсами	267
5.2. Гамильтонова структура	268
5.2.1. Уравнения класса Гойна и уравнения Пенлеве	268
5.2.2. Альтернативная классификация уравнений Пенлеве	269
5.2.3. Линеаризация уравнений Пенлеве	274
5.3. Изомонодромные деформации	277
Приложение А. Гамма-функция и родственные функции	283
А.1. Гамма-функция	283
А.2. Бета-функция	285
А.3. Символ Похгаммера	287
Приложение Б. Мультипольные матричные элементы	289
Б.1. Введение	289
Б.2. Вспомогательное дифференциальное уравнение	290
Б.3. Интегральное преобразование	292
Б.3. Гармонический осциллятор	295
Б.5. Анггармонический осциллятор	296
Приложение В. SFTools — база данных по специальным функциям	299
В.1. Введение	299
В.2. Отдельная диалоговая версия программы	300
В.3. Возможное развитие в будущем	303
Список литературы	304
Предметный указатель	308

Предисловие

Можно предложить несколько подходов к классификации математических функций, возникающих в теоретической физике и прикладной математике. Мы, студенты в области естественных наук конца сороковых и начала пятидесятих годов XX столетия, использовали термины *функции Янке–Эмде* и *функции не Янке–Эмде*. Это — возможно, несколько шутовское — разделение имело поводом *Таблицы функций с формулами и кривыми* Эжена Янке и Фрица Эмде, второе издание которой было опубликовано Б. Г. Тойбнером в 1933 г. (в Лейпциге и Берлине). “Янке–Эмде”, как ее с любовью называли, была завлекательной и очень необычной книгой. Отпечатанная на немецком и английском языках, она содержала таблицы и диаграммы, облегчающие вычисления с комплексными числами и решение кубических уравнений. В те дни, когда сводки формул и таблиц так называемых *элементарных трансцендент* (логарифмов, тригонометрических и гиперболических функций) были основным инструментарием для вычислений и когда ручные настольные калькуляторы являлись высоко ценимыми раритетами, эта книга стала незаменимым подспорьем. Практический ум Фрица Эмде — единственного автора второго издания, которое появилось через двенадцать лет после смерти Эжена, — подчеркивается тем фактом, что приведенный обширный список таблиц элементарных трансцендент обеспечивал не только исчерпывающую характеристику содержания таблиц, но и показывал, какие из них уже распроданы, а какие доступны и по какой цене!

Реальная ценность книги связана с ее главами, посвященными неэлементарным функциям. Они содержат собрание формул (включая различные приближения), облегчающих численные выкладки, таблицы численных значений и графические иллюстрации, часто для *комплексной* переменной. Если в наших исследованиях мы встречались с нестандартным дифференциальным уравнением или параметрически определенным интегралом, то первым вопросом было: является ли решение *функцией Янке–Эмде*, т. е. функцией, для которой численное значение может быть получено с помощью информации, предоставляемой книгой? Встреча с *функцией не Янке–Эмде* обычно означала либо тяжелую численную работу на основе самостоятельных приближений, либо — что было чаще — поиски более простых подходов.

Хотя мне повезло унаследовать от отца вышеназванную книгу Янке–Эмде, изданную в 1933 г., на первые же заработанные мной деньги я приобрел ее переиздание, предпринятое в 1952 г.; оно содержало намного

больше материала в той области, которая имеет историческое название “специальные функции математической физики”, и в частности включало в себя главы о конфлюэнтной гипергеометрической функции, функциях Матье целого порядка, а также более детальное изложение материалов по функциям Бесселя. Примерно в то же время, т. е. в начале 1950-х, Институт технологии Штутгарта приобрел первый коммерческий электронный компьютер — машину Цузе. Так получилось, что я смог участвовать в принятии данного решения, и одним из побудительных мотивов к этому была невозможность избежать всех функций “не Янке–Эмде”, что в моих исследованиях приводило либо к их изгнанию, либо к использованию фазовых интегралов и техники теории возмущений для всех тех обыкновенных дифференциальных уравнений математической физики, которые не могли быть сведены к гипергеометрическому уравнению, его специальным или вырожденным случаям.

Однако вскоре я убедился, что электронный компьютер не позволяет разрешить проблему функций “не Янке–Эмде”. Математическое описание физических задач всегда требует упрощений, которые часто приводят к *особым точкам*. Существенное в физической задаче фактически часто связано именно с положением и характером особых точек. Однако численное обращение с особенностями, имеют ли они место в уравнениях или в решениях, всегда является деликатным моментом, для чего до сих пор нет общего рецепта.

Откровение пришло с книгой Йозефа Мейкснера и Фридриха Вильгельма Шефке *Функции Матье и сфероидальные функции с приложениями к физическим и техническим задачам*, опубликованной Шпрингером (Берлин–Геттинген–Гейдельберг) в 1954 г. Здесь были использованы точные методы для получения важных аналитических результатов относительно функций, которые не могут быть представлены ни сходящимися рядами, ни асимптотическими разложениями с явным образом определенными коэффициентами, ни в качестве определенных интегралов от простых функций и для которых не существуют рекуррентные формулы, включающие в себя производные и “соседние” функции. С помощью аналитических результатов Мейкснер и Шефке развили схемы аппроксимации, которые позволили получать численные результаты с умеренными усилиями, по крайней мере с учетом возможностей электронных вычислений, которые стали доступны в то время.

Постепенно становилось ясно, что “антисвойства” функций Матье и сфероидальных функций, о которых упоминалось выше, на самом деле присущи целому классу функций, которые являются решениями класса уравнений, ныне называемых классом Гойна обыкновенных дифференциальных уравнений — в честь Карла Гойна (1859–1922), профессора теоретической механики в Институте технологии Карлсруэ с 1902 по 1922 г. Этот класс функций достаточно полно представлен в книге *Специаль-*

ные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей С. Ю. Славянова и В. Лая.

Класс Гойна хотя и отстоит всего лишь на один шаг от “гипергеометрического класса”, но обладает гораздо большим, чем он, разнообразием. Когда я начал собирать известные факты о различных подклассах, я скоро понял, сколь разьединенными были различные подходы к классу Гойна. Существующая на то время литература умалчивала, до какой степени техника, развитая Мейкснером и Шефке и их предшественниками для функций Матье и сфероидальных волновых функций, применима к другим классам, какие возможны обобщения и где может быть развита новая техника. Взаимообогащение знаниями в этой области отсутствовало как у математиков, работающих с различными подклассами, так и у исследователей, заинтересованных в соответствующих приложениях.

Мне представилось, что столетие с момента первой публикации замечательной статьи Гойна, где было введено уравнение, которое мы ныне называем уравнением Гойна (Гойн К. *К теории функций Римана второго порядка с четырьмя точками ветвления* // Math. Annalen. 1889. Vol. 33. S. 51.), может послужить поводом собрать вместе (весьма ограниченное число) активных исследователей в данной области. В продвижении этой идеи мне посчастливилось получить поддержку от одного из моих научных сотрудников, доктора Вольфганга Лая, который, не прерывая научной работы, связанной с уравнениями Гойна, подставил плечо, возложив на себя основные административные функции по организации такой встречи, а также от профессора факультета математики Университета Штутгарта Питера Лески, профессора Анри Ронво из Университета Нотр-Дам де ля Пе в Намюре (Бельгия). Кроме того, помощь оказали Фонд Фольксвагена (Ганновер, Германия) и Общество Макса Планка поддержки науки. “Рабочее совещание, посвященное столетию уравнения Гойна: теория и приложения” состоялось 3–8 сентября 1989 г. Место проведения — превосходно расположенный замок Рингберг в Баварии, дар члена герцогской семьи Баварии Обществу Макса Планка — весьма соответствовало случаю, так как статья Гойна 1889 г. была им написана, когда он был лектором в Мюнхене, столице Баварии. Некоторое число копий трудов совещания (включая список участников) еще доступно и может быть получено у меня (факс ++49 711 689 1932).

Позднее как итог совещания появилась книга *Дифференциальные уравнения Гойна* под редакцией А. Ронво (Оксфорд: Изд-во Оксфордского ун-та, 1995) с главами, авторами которых стали ведущие эксперты в различных областях, и обзором жизни и научной деятельности К. Гойна, сделанным М. фон Рентельном.

Еще одной удачей было то, что некоторое время после того, как мне удалось приобрести в книжном магазине Москвы книгу *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции* И. В. Комарова,

Л. И. Пономарева и С. Ю. Славянова (М.: Наука, 1976, на рус. яз.), один из ее авторов, Л. И. Пономарев, в ответ на мое приглашение принять участие в намечаемом совещании порекомендовал пригласить С. Ю. Славянова. И это привело к весьма плодотворному сотрудничеству. Его результатом стали многие совместные работы, в ряде из них были изложены весьма важные (как мы полагаем) новые концепции, например понятие s -ранга особой точки и различие между сильной и слабой конфлюэнцией особых точек линейных дифференциальных уравнений. Настоящая книга также является плодом этого сотрудничества, подтверждающим связь интересов и устремлений научных групп Петербурга и Штутгарта.

Само название книги — *Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей* — подчеркивает ключевую роль особых точек в связи физики и математики. При анализе сложной физической ситуации с помощью математических методов положение и характер особых точек отражают сущность физической задачи, в то время как параметры, не связанные с особыми точками, обычно характеризуют несущественную информацию, такую как физические свойства рассматриваемого специфического материала. Признание этого факта ведет к пониманию важности асимптотических разложений и явления Стокса. С математической точки зрения, именно особые точки дифференциальных уравнений определяют характер решений.

Хотя это известно довольно давно, полная классификация дифференциальных уравнений класса Гойна, основанная на числе и s -рангах особых точек, была дана только недавно (см. приложение в книге *Дифференциальные уравнения Гойна* под ред. А. Ронво). Эта классификация является стартовой точкой компьютерной базы данных “Специальные функции”, созданной С. Ю. Славяновым и его сотрудниками в С.-Петербурге. Пакет *SFTools*, кратко описанный в приложении в настоящей книге, ныне развивается все дальше и, возможно, ответит на вопрос, как электронные средства вычислений могут эффективно помочь исследователю, который пожелает использовать специальные функции более общие, чем гипергеометрические (которые, конечно, также включены в *SFTools*).

Признание исключительной важности особых точек приводит и к еще одному выходу за рамки функций Янке–Эмде, отличному от описанного выше. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} = F\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right), \quad (*)$$

где F — рациональная функция от dy/dz и y , а коэффициенты — аналитические функции z . Поль Пенлеве (1863–1929) поставил вопрос: при каких условиях решения $(*)$ не имеют подвижных критических точек?

В данном случае под критическими точками понимаются точки ветвления и существенные особые точки; “подвижные” означает, что их положение зависит от выбора констант интегрирования и тем самым не является свойством самого дифференциального уравнения. Про дифференциальные уравнения, удовлетворяющие этому условию, говорят, что они обладают свойством Пенлеве. Единственные “подвижные” особенности решений дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве — полюса. Отсутствие подвижных критических точек позволяет нам разрезать комплексную z -плоскость способом, зависящим только от дифференциального уравнения, таким образом, чтобы уравнение (*) допускало однозначное решение, что является важным обстоятельством с точки зрения физических приложений.

П. Пенлеве и его ученик Б. Гамбье показали, что имеется 50 различных уравнений вида (*), обладающих свойством Пенлеве, и что решения 44 таких уравнений могут быть выражены в терминах известных функций, таких как эллиптические функции и функции, которые являются решениями линейных дифференциальных уравнений (иногда последние называют классическими трансцендентами). Оставшиеся 6 уравнений, так называемые уравнения Пенлеве, образуют неклассические трансценденты, сейчас известные как трансценденты Пенлеве.

Уравнения Пенлеве и трансценденты Пенлеве были объектами активных исследований в течение последних двух десятилетий XX века: ими вновь заинтересовались, когда была обнаружена их связь с теорией солитонов и тем самым — с рядом областей физики. Таким образом, становится очевидной необходимость включить трансценденты Пенлеве в базу данных SFTools. Однако эта область исследований в последние годы стала настолько разнообразной, что ее полное описание само по себе потребовало бы издания соответствующей монографии (кстати, давно ожидаемой научным сообществом).

В главе 5 настоящей книги авторы особое внимание уделяют связи между уравнениями Пенлеве и дифференциальными уравнениями класса Гойна. Уравнения Пенлеве можно рассматривать как уравнения Лагранжа, управляющие классическим движением нерелятивистских квантовых систем, уравнения Шредингера которых относятся к классу Гойна.

Среди других моих добрых напутствий, сопровождающих публикацию книги *Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей*, я хочу пожелать, чтобы эта книга познакомила прикладных математиков, физиков, химиков-теоретиков и инженеров с новыми классами функций “не Янке–Эмде”, помогла им применить эти функции и стимулировала использование компьютерного пакета SFTools.

Альфред Зеегер
Штутгарт, апрель 2000

Предисловие к изданию на русском языке

При подготовке издания на русском языке из оригинального текста были исключены один раздел четвертой главы, часть параграфа 4.3.7 и одно приложение. Часть этих текстов имела малую связь с основным содержанием книги, часть была перегружена техническими деталями. Были убраны замеченные опечатки, сделаны небольшие добавления и исправления. Ряд исправлений возник благодаря профессору Бюрингу, внимательно прочитавшему книгу. Список литературы также был слегка переработан в связи с изменениями в тексте. Издание стало возможным при финансовой поддержке РФФИ и благодаря предусмотренному в контракте с издательством Оксфордского университета разрешению на безвозмездный перевод книги на русский язык.

С. Славянов
Санкт-Петербург, сентябрь 2001

Введение

Книги по специальным функциям входят в основной математический инструментарий физиков и инженеров. К сожалению, большинство из них написаны в стиле XIX века и содержат в основном знания о специальных функциях, являющихся решениями уравнений гипергеометрического класса. В то же время в многочисленных областях современной физики применяются решения более сложных как линейных, так и нелинейных уравнений, так что и такие функции следует ныне включать в число специальных. К примеру, трансценденты Пенлеве — решения нелинейных уравнений Пенлеве — недавно получили признание как специальные функции нелинейной физики. Необходимые в приложениях формулы для более громоздких исходных уравнений и соответствующих специальных функций оказываются более сложными, их трудно найти в литературе без надлежащего путеводителя. С другой стороны, современные информационные технологии предлагают для работы с источниками использовать вместо книг программные продукты, которые решают задачи поиска информации, организации перекрестных ссылок и других подобных действий единообразно, на основе соответствующих компьютерных средств.

В данной книге авторы представляют подход к теории специальных функций как к области знаний, лежащей на пересечении математики, физики и компьютерных технологий. Книга сопровождается программным продуктом, доступным потребителю, который позволяет читателю изучать технические детали при помощи компьютера. Строгие доказательства занимают здесь не слишком много места: основное внимание мы уделяли разнообразным связям между уравнениями и специальными функциями, что позволяет лучше проникнуть в тонкости теории. Мы старались иллюстрировать теорию наглядными примерами, таблицами, схемами, что, как мы надеемся, поможет лучшему пониманию материала.

Специальные функции возникают как решения дифференциальных уравнений, разностных уравнений, при попытке вычисления определенных интегралов, в теории представлений групп и т.д. В настоящей книге мы будем обсуждать подход к этим функциям как к решениям дифференциальных уравнений, точнее — уравнений второго порядка.

Не встретив обычного исторического представления уравнений, стандартных обозначений и общепринятого вывода формул, не удивляйтесь. Причина заключается в том, что в книге представлен нетрадиционный подход к этой области знаний на основе новых структурных элементов.

Перечислим основные из них.

- Мы основываемся на понятиях s -ранга сингулярной точки и s -мультисимвола дифференциального уравнения, которые являются эффективным средством классификации уравнений. Они позволяют разделить обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) второго порядка по классам и типам. Эти понятия оказываются также полезными при изучении (нелинейных) уравнений Пенлеве.
- Сама форма уравнения, представляющая различные детали множества эквивалентных уравнений, является на практике еще одним важным структурным элементом. В книге описаны стандартные формы уравнений: каноническая, нормальная и самосопряженная, которая часто появляется в физических приложениях. Формулы для стандартных форм более компактны, чем формулы для более сложных форм уравнения.
- Динамический структурный элемент — это процедуры конфлюэнции и редукции уравнений. Процедура конфлюэнции означает слияние двух особых точек уравнения, сопровождающееся предельным переходом в пространстве параметров. Она позволяет распространять свойства решений исходного уравнения на решения конфлюэнтных уравнений. Процедура редукции уравнения — это механизм, изменяющий тип уравнения при специализации его параметров. Если две особые точки уравнения сливаются без предельного перехода в пространстве параметров, мы говорим о процедуре слияния.

В данной книге отражены результаты некоторых недавних исследований авторов. Среди них новые асимптотические результаты (С. Славянов, гл. 3), обобщения разложений Яффе (В. Лай, гл. 1, 3), новые интегральные соотношения (С. Славянов, гл. 3), обобщения схемы Римана (В. Лай, С. Славянов, гл. 1), связи между уравнениями Гойна и уравнениями Пенлеве (С. Славянов, гл. 5), рекуррентные соотношения для матричных элементов (С. Славянов, приложения); полные ссылки можно найти в библиографическом списке. В то же время результаты, описанные в книге, не являются плодом только индивидуальной работы авторов. Ее следует рассматривать как попытку удовлетворить потребности читателей, использующих специальные функции в качестве инструмента в научных и инженерных исследованиях.

Большая часть книги была написана в Баден-Вюртемберге, в тех местах, где родился великий философ Г.И.Ф. Гегель. Возможно, в этом была причина того факта, что многие структурные элементы возникают в области триад. Не выписывая точных определений, которые можно найти ниже, мы представляем важнейшие из них.

- Гипергеометрические уравнения — уравнения Гойна — уравнения Пенлеве.

- Фуксовы уравнения — конфлюэнтные уравнения — редуцированные конфлюэнтные уравнения.
- Класс уравнений — тип уравнения — форма уравнения.
- Дифференциальное уравнение — разностное уравнение — интегральное уравнение.
- Регулярная особая точка — иррегулярная особая точка — иррегулярная неветвящаяся (unramified) особая точка.
- Локальное решение — собственная функция — полиномиальное решение.
- Локальный параметр — скейлинговый параметр — аксессуарный параметр.
- Процедура конфлюэнции — процедура редукции — процедура слияния.

Во время написания книги два молодых сотрудника Санкт-Петербургского университета, Алексей Акопян и Алексей Пирожников, разработали программный продукт **SFTools**, сопровождающий текст. Этот программный продукт описан в приложении В, условия приобретения соответствующего CD-ROM можно найти там же.

В книге, подобной данной, с большим числом явных формул и отсутствием промежуточных выкладок, типографские ошибки практически неизбежны. Однако авторы надеются, что читатель сможет проверить выкладки, если результат ему действительно необходим, и будет терпимым в том случае, когда ему достаточно лишь познакомиться с предметом.

Некоторые замечания по содержанию и структуре книги.

- В первой главе представлена общая теория линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами и их решений. При этом предполагается, что читатель знаком с общими понятиями теории дифференциальных уравнений и теории функций комплексной переменной.
- Следующие две главы посвящены уравнениям и специальным функциям гипергеометрического класса и класса Гойна соответственно.
- В четвертой главе обсуждаются примеры приложений в физике. Авторы старались выбрать эти примеры из различных областей.
- Пятая глава представляет собой вводный текст в теорию уравнений Пенлеве.
- Некоторые разделы теории, не получившие отражения в основном тексте, но, по мнению авторов, полезные в общем контексте книги, собраны в приложениях.

Формулировки утверждений, доказательств, примеров отмечены знаком $\square$. Повсюду в данной книге ε означает произвольно малую положительную константу.

Благодарности. Книга, подобная данной, не может являться результатом труда только ее авторов, она неизбежно представляет собой плод работы многих людей и организаций. Она не могла бы быть написана без поддержки многих соавторов и коллег. Покойный ныне профессор Феликс Арскотт привлек наше внимание к дифференциальным уравнениям Гойна и щедро делился с нами своими обширными знаниями по этому предмету. Мы ценим вклад профессора Ронво, который выдвинул идею написания первой книги об уравнениях Гойна, опубликованную также издательством Оксфордского университета.

Мы выражаем свою признательность Карлхайнцу Баю (Штутгарт), который осуществил большинство численных расчетов для конкретных примеров. Почти все эти выкладки были сделаны впервые и требовали глубокого знания численного анализа. Ему частично помогал Алексей Акопян из Санкт-Петербургского университета. Мы благодарны за ценные дискуссии профессору сэру Майклу Берри (Бристоль), профессору Вольфгангу Бюрингу (Гейдельберг), профессору Александру Казакову (Санкт-Петербург), профессору Питеру Лески (Штутгарт), профессору Андрэ Ворошу (Саклэ), профессору Бруно Салви (Инриа) и профессору Дитеру Шмидту (Эссен).

Нам приятно сказать спасибо Институту теоретической и прикладной физики Штутгартского университета и Институту металловедения Макса Планка (Штутгарт) за поддержку и гостеприимство. Финансовая поддержка Немецкого научного общества (Бонн), Общества Макса Планка, Фонда Сороса и Российского Фонда фундаментальных исследований была очень существенна для реализации проекта. Все эти организации дали возможность авторам эффективно взаимодействовать, что так важно для научных дискуссий. Один из нас (С. Славянов) признателен доктору Майклу Цайзеру за гостеприимство в Штутгарте.

Отдельная благодарность профессору Альфреду Зеегеру (Штутгарт). Он был организатором совещания в честь столетия уравнения Гойна, откуда и началось сотрудничество авторов. Более того, он был соавтором нескольких наших публикаций, скрупулезно исправлял тексты статей, результаты которых вошли в данную книгу, и сохранял живой интерес к этому проекту более двух десятков лет. И последнее (по порядку, но не по значению): он редактировал текст данной книги. Один из авторов (С. Славянов) признателен ему за персональную и финансовую поддержку.

Нам приятно поблагодарить издательство Оксфордского университета (OUP) за публикацию данной книги на повсюду признанном высоком уровне.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с полиномиальными коэффициентами

1.1. Регулярные особые точки и фуксовы уравнения

1.1.1. Регулярные и фуксовы особые точки

Отправная точка и важный объект исследования данной книги — обыкновенные линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

$$L_z y(z) := P_0(z)y''(z) + P_1(z)y'(z) + P_2(z)y(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.1.1)$$

с полиномиальными коэффициентами $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$ на комплексной z -плоскости. Штрих в (1.1.1) соответствует дифференцированию по z . Предполагается, что полиномы в (1.1.1) не обладают общими множителями, зависящими от z . Степени полиномов $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$ обозначаются k_0 , k_1 , k_2 . Кроме z -плоскости можно рассматривать решения уравнения (1.1.1) на римановой сфере C_R . Это позволяет включить точку $z = \infty$ в наши рассмотрения. Комплексная z -плоскость с добавленной точкой $z = \infty$ обозначается $\mathbb{C}$. Уравнение (1.1.1) имеет два линейно независимых решения. Общее решение уравнения (1.1.1) представляет собой произвольную линейную комбинацию этих частных решений.

Все точки $\mathbb{C}$, в окрестности которых обычная задача Коши (т.е. начальная задача с произвольными начальными данными: $y(z_0) = y_0$, $y'(z_0) = y'_0$) для (1.1.1) может быть решена, называются *обыкновенными точками* уравнения. Точку $z = \infty$ можно рассматривать, сделав подстановку $z = 1/\xi$ и сведя проблему к обсуждению точки $\xi = 0$ — в зависимости от того, является она обыкновенной точкой или нет, таковой объявляется и исходная точка. В окрестности обыкновенной точки все частные решения уравнения (1.1.1) являются голоморфными функциями (см. [15]).

Задача Коши не может быть решена в *особых точках* уравнения (1.1.1). *Особые точки (сингулярности)* уравнения (1.1.1) — это нули полинома $P_0(z)$ (мы обозначим их z_j , $j = 1, \dots, n$) и, возможно, точка $z = \infty$.

Пример. Уравнение Бесселя

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \nu^2)y(z) = 0 \quad (1.1.2)$$

имеет две особые точки, а именно $z = 0$ и $z = \infty$. Все другие точки $\mathbb{C}$ являются обыкновенными точками уравнения (1.1.2). $\square$

В общем случае особая точка является точкой ветвления по крайней мере одного частного решения уравнения (1.1.1). Исключениями являются так называемые *ложные особые точки*, которые мы обсудим ниже.

Функция $f(z)$, имеющая особенность в точке $z = z^*$ ($z^* \neq \infty$), называется функцией *конечного порядка* в z^* , если существует такое вещественное число ρ , что на любом луче в $\mathbb{C}$, заканчивающемся в z^* ,

$$\lim_{z \rightarrow z^*} f(z)(z - z^*)^\rho = 0.$$

В случае $z^* = \infty$ предыдущее определение заменяется на

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z^{-\rho} = 0.$$

Примеры. Функции $z^3 \ln z$, $z^{7/3} e^z$ являются функциями конечного порядка в $z = 0$. Функции $\sin(1/z)$, $z^3 \exp(1/z^2)$ не являются функциями конечного порядка в $z = 0$, а функция $z^{7/3} e^z$ не является функцией конечного порядка в $z = \infty$. $\square$

Если два линейно независимых частных решения уравнения (1.1.1) являются функциями конечного порядка в особой точке $z = z^*$, то такая точка называется *регулярной особой точкой*, в ином случае — *иррегулярной особой точкой* уравнения (1.1.1).

Пример. Точка $z = 0$ является регулярной особой для (1.1.2), в то время как точка $z = \infty$ является иррегулярной особой. $\square$

Описанная классификация особых точек построена на свойствах решений уравнения. Другой подход к классификации точек основан на изучении самого уравнения, точнее — полиномов $P_n(z)$ в $z = z^*$. Если функция $P(z) = P_1(z)/P_0(z)$ имеет полюс не выше первого порядка, а функция $Q(z) = P_2(z)/P_0(z)$ — не выше второго порядка в особой точке $z = z^*$, эта точка называется *фуксовой особой точкой*. Особая точка на бесконечности является фуксовой, если

$$P(z) = O(z^{-1}), \quad Q(z) = O(z^{-2}).$$

Определение особой точки на бесконечности сводится к обсуждению конечной точки z^* с помощью подстановки $z^{-1} \mapsto z - z^*$.

Пример. Особая точка $z = 0$ является для уравнения (1.1.2) фуксовой; в то же время точка $z = \infty$ не является таковой. $\square$

Теорема 1.1. *Особая точка уравнения (1.1.1) является регулярной особой тогда и только тогда, когда она фуксова.*)* $\square$

Данная теорема утверждает эквивалентность понятий “регулярная особая точка” и “фуксова особая точка” для особых точек уравнения (1.1.1).**)

1.1.2. Фуксовы уравнения и их преобразования

Уравнение (1.1.1) называется *фуксовым*, если все его особые точки являются регулярными особыми точками (фуксовыми). Уравнение с полиномиальными коэффициентами вида (1.1.1), которые не являются фуксовыми, называются в данной книге *нефуксовыми уравнениями*.

Примеры. Уравнение Эйлера

$$z^2 y''(z) - (a + b - 1) z y'(z) + a b y(z) = 0 \quad (1.1.3)$$

с двумя регулярными особыми точками $z = 0$, $z = \infty$ является фуксовым, в то время как (1.1.2) является нефуксовым уравнением. $\square$

Свойство уравнения быть фуксовым сохраняется при преобразованиях $\mathbb{C}$ (преобразованиях Мёбиуса):

$$z \mapsto \xi, \quad \xi = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ab - cd \neq 0, \quad (1.1.4)$$

которые тем самым устанавливают эквивалентность среди множества фуксовых уравнений. Таким образом, без потери общности в дальнейшем будет предполагаться (без специальных упоминаний), что для обсуждающихся фуксовых уравнений точка $z = \infty$ является особой. Набор особых точек уравнения (1.1.1) обозначается $\{z_j; \infty\}$, $j = 1, \dots, n$. Во избежание в дальнейшем исключительных случаев мы считаем также, что $n \geq 1$ ***).

Для фуксовых уравнений могут быть определены специфические линейные преобразования зависимой переменной, называемые *s-гомотопными преобразованиями*. Понятие s-гомотопного преобразования будет распространено ниже также на нефуксовы уравнения.

*) Доказательство изложено во многих учебниках (см., например, [50]).

**) Это утверждение несправедливо в случае систем уравнений (см. [19]), для которых понятия регулярной особой точки и фуксовой точки не эквивалентны.

***) Уравнение (1.1.1) имеет по крайней мере одну особую точку.

Положим, что

$$S: y \mapsto v, \quad y(z) = G(z)v(z), \quad (1.1.5)$$

где $G(z)$ — решение вспомогательного уравнения с полиномиальными коэффициентами

$$Q_0(z)G'(z) + Q_1(z)G(z) = 0. \quad (1.1.6)$$

Положим, в дополнение, что множество нулей полинома $Q_0(z)$ совпадает с множеством точек $\{z_j\}$, причем все нули простые, так что $Q_0(z)$ можно представить в виде

$$Q_0(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j),$$

и что $Q_1(z)$ является полиномом степени не выше чем $n - 1$ с произвольными коэффициентами. При этих условиях мы можем сказать, что уравнение (1.1.6) является *присоединенным* относительно фуксова уравнения (1.1.1). Уравнение (1.1.6) имеет явное решение

$$G(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)^{\mu_j} \quad (1.1.7)$$

с произвольными μ_j , часть из которых может быть равна нулю. Формулы (1.1.5)–(1.1.6) преобразуют уравнение (1.1.1) в новое фуксово уравнение

$$\begin{aligned} P_0 v''(z) + \left(P_1 - 2P_0 \frac{Q_1}{Q_0} \right) v'(z) \\ + \left(P_2 + \left[\frac{Q_1^2 + Q_0' Q_1}{Q_0^2} - \frac{Q_1}{Q_0} \right] P_0 - \frac{Q_1}{Q_0} P_1 \right) v(z) = 0. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Мы считаем фуксово уравнение *неприводимым фуксовым уравнением*, если не существует преобразования (1.1.5)–(1.1.6), для которого число особых точек в (1.1.8) меньше, чем число особых точек в (1.1.1). В ином случае уравнение является *приводимым фуксовым уравнением*. Особенности, которые пропадают после по крайней мере одного преобразования вида (1.1.5)–(1.1.6), называются *устраняемыми фуксовыми особыми точками*.

Преобразование (1.1.5)–(1.1.6), примененное к неприводимому фуксову уравнению, называется *s-гомотопным преобразованием* уравнения. Эти *s-гомотопные* преобразования образуют второй набор соотношений эквивалентности на множестве неприводимых фуксовых уравнений.

Уравнение, которое эквивалентно данному неприводимому фуксову уравнению, называется *формой* этого уравнения. Все формы исходного уравнения образуются с помощью или преобразований Мёбиуса, или *s-гомотопных* преобразований, или их комбинаций.

Уравнение, которое эквивалентно данному неприводимому фуксову уравнению и для которого все корни полинома $P_0(z)$ просты, называется *канонической формой* исходного уравнения. Каноническая форма данного уравнения определяется не единственным образом. Имеется дискретное конечное множество преобразований Мёбиуса и s -гомотопных преобразований, сохраняющих каноническую форму. Преобразование произвольного неприводимого фуксова уравнения к канонической форме построено в следующем параграфе.

Примеры. (1) Для фуксова уравнения

$$(1 - z^2)y''(z) - y'(z) + y(z) = 0 \quad (1.1.9)$$

присоединенным является уравнение

$$(1 - z^2)G'(z) + (az + b)G(z) = 0$$

с произвольными a, b .

(2) Уравнение

$$\begin{aligned} z(z-1)^2y''(z) - [a(z-1)^2 + 2bz(z-1)]y'(z) \\ + [b(b-1)z + ab(z-1)]y(z) = 0 \end{aligned}$$

является приводимым, так как особая точка $z = 1$ может быть устранена преобразованием $y(z) = (z-1)^{-b}v(z)$.

(3) Уравнение

$$zv''(z) + (a - b + 1)v'(z) = 0 \quad (1.1.10)$$

эквивалентно уравнению (1.1.3) и является его канонической формой. Преобразование $S: v(z) = z^{b-a}w(z)$ сохраняет каноническую форму. $\square$

Уравнение, которое эквивалентно данному неприводимому фуксову уравнению и для которого точка $z = \infty$ является регулярной особой, мы называем *естественной формой* исходного уравнения. Любое фуксово уравнение может быть приведено с помощью преобразования Мёбиуса переменной z к его естественной форме (не единственным способом).

1.1.3. Характеристические показатели

В любой конечной регулярной особой точке z_j уравнения (1.1.1) может быть построено *характеристическое уравнение* ^{*)} — алгебраическое уравнение второго порядка

$$\rho(\rho - 1) + p_j\rho + q_j = 0, \quad (1.1.11)$$

^{*)} Смысл этого уравнения для исходного дифференциального уравнения пояснен в следующем разделе.

где

$$p_j = \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{P_1(z)}{P_0(z)}, \quad q_j = \operatorname{Res}_{z=z_j} (z - z_j) \frac{P_2(z)}{P_0(z)}.$$

Вычет функции $F(z)$ в точке z_j обозначим $\operatorname{Res}_{z=z_j} F(z)$. Корни $\rho_m(z_j)$, $m = 1, 2$, характеристического уравнения (1.1.11) называют *характеристическими показателями* или *показателями Фробениуса* в точке z_j . Для регулярной особой точки на бесконечности характеристическое уравнение выглядит следующим образом:

$$\rho(\rho + 1) + p_\infty \rho + q_\infty = 0, \quad (1.1.12)$$

где

$$p_\infty = -\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{P_1(z)}{P_0(z)}, \quad q_\infty = \operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{zP_2(z)}{P_0(z)}.$$

Корни уравнения (1.1.12) $\rho_m(\infty)$, $m = 1, 2$, называются *характеристическими показателями на бесконечности* (показателями Фробениуса на бесконечности).

Лемма 1.1. Для каждого неприводимого фуксова уравнения в естественной форме существует преобразование (1.1.5), которое переводит его в каноническую форму. Это преобразование не единственно. Доказательство. Преобразование может быть построено явным образом с помощью выбора величин μ_j в (1.1.7), равных любым из характеристических показателей в точке z_j . $\square$

Примеры. Уравнение (1.1.3) переводится в каноническую форму (1.1.10) с помощью преобразования $y = z^{-b}w$. Преобразование $y = z^{-a}w$ переводит уравнение (1.1.3) в каноническую форму, отличную от (1.1.10). $\square$

Теорема 1.2. Характеристические показатели особых точек фуксова уравнения подчиняются условию Фукса [43]

$$\sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^2 \rho_m(z_j) + \sum_{m=1}^2 \rho_m(\infty) = n - 1. \quad (1.1.13)$$

Доказательство. Ни преобразование Мёбиуса, ни s -гомотопные преобразования не изменяют уравнение (1.1.13). Тем самым фуксово уравнение можно рассматривать в канонической естественной форме. Согласно (1.1.11)–(1.1.12)

$$\sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^2 \rho_m(z_j) = n - \sum_{j=1}^n p_j,$$

$$\rho_{1,2}(\infty) = -\frac{1 - p_\infty}{2} \pm \left(\frac{(1 - p_\infty)^2}{4} - q_\infty \right)^{1/2}.$$

Теорема о вычетах — согласно которой сумма вычетов мероморфной функции по всем особым точкам равна нулю — приводит к (1.1.13). $\square$

Среди регулярных особых точек уравнения (1.1.1) можно выделить подмножество *элементарных* особых точек [50]. Регулярная особая точка $z = z_k$ называется *элементарной особой точкой*, если разность между характеристическими показателями в этой точке равна $1/2$. Специальная роль элементарных особых точек основана на существовании s -гомотопного преобразования (1.1.5)–(1.1.6) и квадратичного преобразования независимой переменной

$$T: z \mapsto t, \quad z - z_k = t^2,$$

которые совместно “устраняют” элементарную особую точку. Подробное исследование элементарных особых точек можно найти в [50].

Примеры. (1) Регулярная особая точка $z = 1$ для уравнения (1.1.9) является элементарной.

(2) Фуксово уравнение с тремя особыми точками называется уравнением Римана. Каноническая естественная форма этого уравнения — гипергеометрическое уравнение. Уравнение, которое имеет среди трех регулярных особых точек одну элементарную, может быть приведено к присоединенному уравнению Лежандра. Уравнение, которое среди трех регулярных особых точек имеет две элементарные, может быть преобразовано к уравнению для полиномов Чебышева. $\square$

Эти примеры более подробно будут обсуждаться в следующей главе.

1.1.4. Решения Фробениуса

В окрестности конечной регулярной особой точки z_j могут быть построены два специальных частных решения, называемых *решениями Фробениуса*. Если разность характеристических показателей в данной особой точке удовлетворяет условию

$$\rho_1(z_j) - \rho_2(z_j) \neq l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (1.1.14)$$

решения Фробениуса имеют вид

$$y_m(z_j, z) = (z - z_j)^{\rho_m(z_j)} \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk}(z_j)(z - z_j)^k, \quad m = 1, 2. \quad (1.1.15)$$

Если особая точка уравнения находится в точке $z = \infty$, разложения (1.1.15) следует заменить:

$$y_m(\infty, z) = z^{-\rho_m(\infty)} \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk}(\infty)z^{-k}, \quad m = 1, 2. \quad (1.1.16)$$

Решения Фробениуса линейно независимы.

Если коэффициенты в уравнении (1.1.1) удовлетворяют условию

$$\rho_1(z_j) - \rho_2(z_j) = l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (1.1.17)$$

в одном из решений Фробениуса может появиться логарифмический вклад

$$y_2(z_j, z) = (z - z_j)^{\rho_2(z_j)} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(z_j)(z - z_j)^k + A_j y_1(z_j, z) \ln(z - z_j). \quad (1.1.18)$$

Подобная конструкция существует и для модификации уравнения (1.1.16), имеющей особую точку при $z = \infty$:

$$y_2(\infty, z) = z^{-\rho_2(\infty)} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(\infty) z^{-k} + A_{\infty} y_1(\infty, z) \ln z. \quad (1.1.19)$$

Теорема 1.3. Коэффициенты $c_{mk}(z_j)$, $c_{mk}(\infty)$ в правых частях (1.1.15), (1.1.16) определяются рекурсивно, единственным образом, подстановкой рядов в дифференциальное уравнение и обнулением коэффициентов при последовательных степенях $(z - z_j)$. Исключением являются величины $c_{m0}(z_j)$ и $c_{m0}(\infty)$, которые можно фиксировать нормировкой. Коэффициенты $c_{2k}(z_j)$ и константа A_j в правых частях (1.1.18), (1.1.19) могут быть получены аналогичным образом, за исключением коэффициентов c_{20} и c_{21} . Первый из них фиксируется нормировкой, второй можно взять равным нулю. Ряды в (1.1.15), (1.1.18) сходятся в круге с центром $z = z_j$, чей радиус равен расстоянию между z_j и ближайшей соседней особой точкой уравнения. Ряды в (1.1.16), (1.1.19) сходятся при $z > d$, где $d = \max_j |z_j|$.*) $\square$

Положив коэффициенты c_{2l} ненулевыми, мы просто добавляем ко второму решению первое решение с подходящим множителем. Если выполняется условие (1.1.17), но в то же время $A_j = 0$ для второго решения Фробениуса, точка $z = z_j$ называется *ложной особой точкой*. С помощью подстановки $y(z) = (z - z_j)^{\rho_2(z_j)} w(z)$ исходное уравнение преобразуется к уравнению, для которого общее решение $w(z)$ является голоморфной функцией в окрестности точки $z = z_j$. Первая производная $w(z)$ в элементарной особой точке $z = z_j$ фиксирована по отношению к функции, и именно это обстоятельство приводит к невозможности решить произвольную задачу Коши в этой точке.

Пример. Регулярная особая точка $z = 0$ является ложной особой точкой уравнения (1.1.2) для полуцелых значений параметра ν , больших чем $1/2$. $\square$

*) Доказательство теоремы можно найти во многих учебниках (см., например, [50]).

1.2. Иррегулярные особые точки и конфлюэнтные уравнения

1.2.1. s -ранг особой точки

Каждой особой точке (регулярной или иррегулярной особой) уравнения (1.1.1) может быть поставлен в соответствие ее s -ранг (*ранг особой точки*).

При этом s -ранг $R(z_j)$ конечной иррегулярной особой точки z_j определяется поведением полиномов $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$ в уравнении (1.1.1) при $z = z_j$, а именно

$$R(z_j) = \max\left(K_1(z_j), \frac{K_2(z_j)}{2}\right), \quad (1.2.1)$$

где $K_1(z_j)$ — кратность нуля функции $P_0(z)/P_1(z)$ в точке z_j , $K_2(z_j)$ — порядок нуля функции $P_0(z)/P_2(z)$ в той же точке.

Если иррегулярная особая точка располагается на бесконечности, $z = \infty$, ее s -ранг $R(\infty)$ определяется как

$$R(\infty) = \max\left(K_1(\infty), \frac{K_2(\infty)}{2}\right), \quad (1.2.2)$$

где $K_1(\infty) = k_1 - k_0 + 2$, $K_2(\infty) = k_2 - k_0 + 4^*)$. Нетрудно проверить, что определение (1.2.1) совпадает с определением (1.2.2) после подстановки $z \mapsto (z - z_j)^{-1}$.

Согласно определениям регулярной и иррегулярной особых точек и (1.2.1), (1.2.2) s -ранги иррегулярных особых точек являются целыми или полуцелыми числами, превосходящими единицу.

Иррегулярная особая точка с полуцелым s -рангом называется *ветвящейся иррегулярной особой точкой*. В случае целого s -ранга соответствующая особая точка считается *неветвящейся особой точкой*.

Определение s -ранга регулярной особой точки требует предварительного обсуждения и учета некоторых исторических традиций. Прямой путь ввести это понятие — использовать те же соотношения, как и в случае иррегулярной особой точки, которые приведут к s -рангу, равному единице.

Однако необходимость выделения подмножества элементарных особых точек из множества регулярных особых точек дает основание присвоить элементарной особой точке s -ранг, равный $1/2$. Подобное определение было использовано авторами книги в нескольких публикациях. Таким образом, определение s -ранга регулярной особой точки можно дать не единственным образом.

*) Напомним, что k_0, k_1, k_2 — степени полиномов $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$.

В данной книге мы отклоняемся от традиционного подхода, изложенного в ряде классических учебников и подчеркивающего исключительную роль элементарных особых точек. Наш основной объект — регулярные особые точки, “строительные камни”, рассматриваемые в целом. Для краткости и простоты мы не станем в большинстве случаев отделять подмножество элементарных особых точек от множества регулярных особых точек и будем использовать, главным образом, следующее определение:

s-ранг регулярной особой точки равен единице, независимо от того, является она элементарной или нет, что соответствует (1.2.1)–(1.2.2).

Примеры. *s-ранг* особой точки уравнения Бесселя (ср. (1.1.2)), расположенной на бесконечности, равен $R(\infty) = 2$. Особая точка является неветвящейся. В свою очередь, *s-ранг* особой точки уравнения

$$y''(z) - (z + \lambda)y(z) = 0, \quad (1.2.3)$$

которая расположена на бесконечности, равен $R(\infty) = 5/2$. Особая точка является разветвленной. $\square$

Другое определение *s-ранга* основано на поведении частных решений уравнения (1.1.1) в их особых точках.

Уравнению (1.1.1) можно сопоставить символ $T(z, D)$ — полином по двум переменным z и D — согласно соотношению

$$T(z, D) := P_0(z)D^2 + P_1(z)D + P_2(z), \quad (1.2.4)$$

где D — дифференцирование, z — независимая переменная.

Практическая классификация типов особых точек может быть реализована на основе исследования свойств нулей *символьного характеристического уравнения*

$$T(z, D) = 0. \quad (1.2.5)$$

Так как уравнение (1.2.5) имеет степень 2 по D , его решения могут быть представлены в окрестности особых точек с помощью рядов Пюизо:

$$D_m(z_j) = (z - z_j)^{-\mu_{mj}} \sum_{k=0}^{\infty} h_{mk}(z_j)(z - z_j)^{k/2}, \quad h_{m0}(z_j) \neq 0,$$

$$D_m(\infty) = z^{\mu_{m\infty}-2} \sum_{k=0}^{\infty} h_{mk}(\infty)z^{-k/2}, \quad h_{m0}(\infty) \neq 0,$$

где $m = 1, 2$; $j = 1, \dots, n$, а целое или полуцелое μ_{mj} удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2} \leq \mu_{mj}.$$

Первый член этих разложений дает оценку логарифмической производной частных решений уравнению (1.1.1) в окрестности соответствующей особой точки:

$$|(\ln y_m(z_j, z))'| \leq K|z - z_j|^{-\mu_{mj}-\varepsilon}, \quad \mu_{mj} \geq 1, \quad K > 0, \quad \varepsilon > 0,$$

с подходящей константой K , определяемой коэффициентами полиномов в уравнении (1.1.1) и произвольно малой ε . В случае регулярной особой (фуксовой) точки оценка заменяется:

$$|(\ln y_m(z_j, z))'| \leq K|z - z_j|^{-1-\varepsilon}, \quad \mu_{mj} = \frac{1}{2}, 1.$$

Подобные оценки выполняются для особых точек, расположенных на бесконечности.

Определения s -ранга можно сформулировать в терминах оценок для решений следующим образом:

– s -ранг конечной иррегулярной особой точки есть

$$R(z_j) = \max_{m=1,2} \mu_{mj}; \quad (1.2.6)$$

– s -ранг иррегулярной особой точки на бесконечности есть

$$R(\infty) = \max_{m=1,2} \mu_{m\infty}; \quad (1.2.7)$$

– s -ранг регулярной особой (фуксовой) точки равен единице.

Пример. Символьное характеристическое уравнение для уравнения (1.1.2) выглядит следующим образом:

$$z^2 D^2 + zD + (z^2 - v^2) = 0.$$

Соответствующие величины $\mu_{m\infty}$ равны 2. □

1.2.2. Нефуксовы уравнения

Набор s -рангов особых точек уравнения (1.1.1) образует его s -мультисимвол.

Неприводимые уравнения, у которых совпадают s -мультисимволы, принадлежат к одному типу уравнений.

Уравнение (1.1.1) называется:

- *нефуксовым уравнением*, если кроме регулярных особых точек оно имеет по крайней мере одну иррегулярную особую точку;
- *конфлюэнтным уравнением*, если оно имеет иррегулярные особые точки, но не имеет разветвленных иррегулярных особых точек;
- *редуцированным конфлюэнтным уравнением*, если оно имеет по крайней мере одну разветвленную иррегулярную особую точку.

Как и в случае фуксовых уравнений, мы здесь предполагаем, что одна из особых точек находится на бесконечности.

Примеры. (1) Уравнение (1.1.2) имеет s -мультисимвол $\{1; 2\}$ и является конфлюэнтным уравнением.

(2) Уравнение (1.2.3) имеет s -мультисимвол $\{5/2\}$ и является приводимым конфлюэнтным уравнением. $\square$

1.2.3. s -гомотопные преобразования

Преобразования фуксовых уравнений (1.1.5)–(1.1.6) могут быть обобщены для нефуксовых уравнений. Эти обобщения вновь основаны на присоединенном уравнении первого порядка, подобном (1.1.5)–(1.1.6), но с другими свойствами полиномов $Q_0(z)$, $Q_1(z)$.

Преобразование уравнения (1.1.1), определяемое соотношениями

$$S: y(z) \mapsto v(z), \quad L_z \mapsto \tilde{L}_z, \quad (1.2.8)$$

$$y(z) = G(z)v(z), \quad L_z = G(z)\tilde{L}_z G^{-1}(z), \quad \tilde{L}_z v(z) = 0, \quad (1.2.9)$$

$$Q_0(z)G'(z) + Q_1(z)G(z) = 0, \quad (1.2.9)$$

называется s -гомотопным преобразованием этого уравнения тогда и только тогда, если:

- набор нулей полинома $Q_0(z)$ содержится в наборе особых точек $\{z_j\}$ уравнения (1.1.1);
- кратности $r(z_j)$ нулей z_j , $j = 1, \dots, n$, полинома $Q_0(z)$ в (1.2.9) не превосходят s -ранги особых точек z_j , $j = 1, \dots, n$, уравнения (1.1.1);
- разность между степенями l_0 , l_1 полиномов $Q_0(z)$, $Q_1(z)$ удовлетворяет условию

$$l_1 - l_0 \leq R(\infty) - 2.$$

Отношение $Q_1(z)/Q_0(z)$ может затем быть разложено на простейшие дроби согласно

$$\frac{Q_1(z)}{Q_0(z)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{r(z_j)-1} h_{jk}(z - z_j)^{-k-1} + \sum_{k=1}^{l_1-l_0+1} f_k z^{k-1}. \quad (1.2.10)$$

Явное выражение для функции $G(z)$, определяющей s -гомотопное преобразование (1.2.8), следует из соотношений (1.2.9)–(1.2.10):

$$G(z) = \exp\left(-\int \frac{Q_1(z)}{Q_0(z)} dz\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{l_1-l_0+1} f_k \frac{z^k}{k}\right) \times \prod_{j=1}^n (z - z_j)^{h_{j0}} \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{r(z_j)-1} h_{jk} \frac{(z - z_j)^{-k}}{(-k)}\right). \quad (1.2.11)$$

Пример. Для уравнения (1.1.2) присоединенным уравнением является

$$zG'(z) - (az + b)G(z) = 0. \quad (1.2.12)$$

□

При s -гомотопном преобразовании исходного уравнения s -ранг особых точек или сохраняется, или уменьшается.

Если существует s -гомотопное преобразование, которое уменьшает s -ранг иррегулярной особой точки, то она называется *приводимой особой точкой*. Если существует s -гомотопное преобразование, которое переводит особую точку в обыкновенную точку уравнения, такая особая точка называется *устранимой*. Если особая точка не является ни приводимой, ни устранимой, она называется *неприводимой особой точкой*.

Прямо из определения s -гомотопного преобразования нетрудно проверить, что ветвящиеся иррегулярные особые точки всегда являются неприводимыми особыми точками уравнения. Это будет доказано ниже в лемме 1.3.

Нефуксово уравнение, все особые точки которого неприводимы, называется *неприводимым уравнением*, в ином случае — *приводимым*.

Примеры. (1) Уравнение (1.1.2) является неприводимым.

(2) Уравнение

$$zy''(z) + (2z + a)y'(z) + (z + a)y(z) = 0$$

приводимо. Особая точка на бесконечности с s -рангом $R(\infty) = 2$ может быть преобразована в регулярную точку преобразованием $y(z) = e^{-z}w(z)$. □

s -гомотопные преобразования порождают отношение эквивалентности между неприводимыми конфлюэнтными уравнениями; другое отношение эквивалентности порождается с помощью преобразований Мёбиуса независимой переменной.

Эквивалентные нефуксовы уравнения называются *формами* уравнения.

В дальнейшем, если об обратном не сказано явным образом, все особые точки нефуксовых уравнений предполагаются неприводимыми, как это было выше для фуксовых уравнений.

1.2.4. Асимптотические решения в иррегулярных особых точках

В окрестности иррегулярной особой точки могут быть построены локальные “решения” в виде формальных асимптотических рядов, в общем случае расходящихся (решения Томе) [124], [41], [109]. Они не являются решениями в обычном математическом смысле. Однако существуют настоящие решения в упомянутой окрестности, для которых решения Томе

можно рассматривать как асимптотические разложения в подходящих секторах или на подходящих лучах с конечными точками в иррегулярной особой точке. Если иррегулярная особая точка конечная и неветвящаяся, эти ряды имеют вид

$$y_m(z_j, z) = (z - z_j)^{\alpha_{m0}(z_j)} \exp\left(\sum_{k=1}^{R(z_j)-1} \frac{\alpha_{mk}(z_j)}{(-k)} (z - z_j)^{-k}\right) \times \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk}(z_j)(z - z_j)^k, \quad m = 1, 2, \quad (1.2.13)$$

и называются *нормальными решениями*. Здесь рассматривается только общий случай. В частных случаях, при специальных значениях коэффициентов, так же, как в решениях Фробениуса, может появиться логарифмический член. Если иррегулярная особая точка конечная и ветвящаяся, такие ряды представляются в виде

$$y_m(z_j, z) = (z - z_j)^{\alpha_{m0}(z_j)} \exp\left(\sum_{k=1/2}^{R(z_j)-1} \frac{\alpha_{mk}(z_j)}{(-k)} (z - z_j)^{-k}\right) \times \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk}(z_j)(z - z_j)^{k/2}, \quad m = 1, 2, \quad (1.2.14)$$

где суммирование в показателе выполняется по целым и полуцелым величинам индекса суммирования k . Ряды (1.2.14) называются *субнормальными решениями*. Если особая точка находится в точке $z = \infty$, разложение (1.2.13) заменяется на

$$y_m(\infty, z) = z^{-\alpha_{m0}(\infty)} \exp\left(\sum_{k=1}^{R(\infty)-1} \frac{\alpha_{mk}(\infty)}{k} z^k\right) \times \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk}(\infty) z^{-k}, \quad m = 1, 2, \quad (1.2.15)$$

а разложение (1.2.14) — на

$$y_m(\infty, z) = z^{-\alpha_{m0}(\infty)} \exp\left(\sum_{k=1/2}^{R(\infty)-1} \frac{\alpha_{mk}(\infty)}{k} z^k\right) \times \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk}(\infty) z^{-k/2}, \quad m = 1, 2. \quad (1.2.16)$$

Строгое математическое обсуждение соотношений (1.2.13)–(1.2.16) будет приведено в разделе 1.4. Здесь мы рассмотрим только формальные свойства коэффициентов в (1.2.13)–(1.2.16).

Множители перед рядами (1.2.13)–(1.2.16) называются *характеристическими множителями* решений Томе, а величины α_{mk} в (1.2.13), (1.2.15) и в (1.2.14), (1.2.16) — *характеристическими показателями второго рода* порядка k или характеристическими показателями Томе порядка k соответственно. Для каждой иррегулярной особой точки они образуют две *конечные характеристические последовательности*, которые можно вычислить явно, рекуррентным образом, в терминах коэффициентов уравнения.

Лемма 1.2. *Характеристические показатели Томе в ветвящейся иррегулярной особой точке удовлетворяют следующему условию:*

— *характеристические показатели целого порядка:*

$$\alpha_{1k} = \alpha_{2k};$$

— *характеристические показатели полуцелого порядка:*

$$\alpha_{1k} = -\alpha_{2k}.$$

Доказательство. Рассмотрим конечную ветвящуюся иррегулярную особую точку z_j . Представим характеристический множитель в этой точке в виде

$$\exp\left(\int (\varphi_1(z) + \varphi_2(z)) dz\right), \quad (1.2.17)$$

где функция $\varphi_1(z)$ включает в себя только целые характеристические показатели, а функция $\varphi_2(z)$ — только полуцелые. Подставим решения Томе в уравнение и выберем члены, растущие в особой точке. Последовательно устраняя эти члены, мы определяем величины $\alpha_{mk}(z_j)$. Разделим эти члены на две части: одна содержит только целые степени $(z - z_j)$, вторая — полуцелые степени. В результате получаем уравнения:

$$\varphi_2^2 + \varphi_1^2 + \frac{P_2}{P_0} + \varepsilon_2 = 0, \quad (1.2.18)$$

$$2\varphi_2\varphi_1 + \varphi_2 \frac{P_1}{2P_0} + \varphi_2' + \varepsilon_1 = 0, \quad (1.2.19)$$

где функции $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z)$ не содержат членов, растущих в $z = z_j$. Из (1.2.18)–(1.2.19) непосредственно следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 1.3. *Ветвящиеся особые точки неприводимы.*

Доказательство Сравнивая характеристические множители для решений Томе, которые включают только полуцелые степени в показателе экспоненты, с функцией $v(z)$ в s -гомотопном преобразовании, которое включает только целые степени в показателе экспоненты, приходим к требуемому результату. $\square$

1.2.5. Канонические формы

На основе представлений (1.2.13)–(1.2.16) можно определить канонические формы неприводимых нефуксовых уравнений.

Итак, уравнение (1.1.1) является *каноническим*:

- в конечной неразветвленной иррегулярной особой точке z_j , если одна из последовательностей характеристических показателей Томе в этой точке содержит только нулевые члены;
- в неветвящейся иррегулярной особой точке $z = \infty$, если для одного из решений Томе в этой точке характеристические показатели Томе положительного порядка равны нулю;
- в ветвящейся иррегулярной особой точке z_j (также и в $z = \infty$), если характеристические показатели Томе положительного целого порядка равны нулю;
- в конечной регулярной особой точке, если один из показателей Фробениуса в этой точке равен нулю.

Каноническая форма неприводимого уравнения (1.1.1) (как фуксова, так и нефуксова) — это такая форма уравнения, которая является канонической в каждой особой точке.

Естественной формой нефуксова уравнения является такая форма, для которой точка с максимальным s -рангом находится на бесконечности.

Лемма 1.4. Для того чтобы нефуксово уравнение было каноническим в неразветвленной конечной особой точке z_j , необходимо и достаточно, чтобы кратность нуля функции $P_0(z)/P_1(z)$ совпадала с s -рангом этой точки и кратность нуля функции $P_0(z)/P_2(z)$ не превосходила s -ранг в этой точке. $\square$

Лемма 1.5. Для того чтобы нефуксово уравнение было каноническим в разветвленной конечной иррегулярной особой точке z_j , необходимо и достаточно, чтобы функция $P_0(z)/P_1(z)$ не обращалась в нуль в этой точке.

Доказательство. Утверждение следует из анализа уравнения (1.2.19) для характеристических показателей Томе целого порядка. Они равны нулю, если $P_1(z)/P_0(z)$ не имеет особенностей в точке z_j . Наоборот, если они равны нулю, тогда этих особых точек не может быть. $\square$

Лемма 1.6. Любое неприводимое нефуксово уравнение может быть приведено к естественной канонической форме с помощью суперпозиции изоморфизмов z -плоскости и s -гомотопных преобразований.

Доказательство. Преобразование к естественной форме очевидно. Приведение к канонической форме в каждой элементарной или регулярной особой точке возможно с помощью метода, показанного в разделе 1.1.

Рассмотрим конечную неветвящуюся точку. В этой точке функция $v(z)$ выбирается так, чтобы привести к s -гомотопному преобразованию, которое переводит уравнение в каноническую форму в этой точке; $v(z)$ — характеристический множитель для обоих решений Томе в этой точке. Характеристические показатели в других особых точках не изменяются при этом преобразовании, кроме характеристических показателей Томе нулевого порядка на бесконечности.

Рассмотрим конечную ветвящуюся точку z_j . В этом случае функция $v(z)$ выбирается так, чтобы она породила s -гомотопное преобразование, переводящее уравнение в каноническую форму в данной точке, согласно

$$v(z) = (z - z_j)^{\alpha_{10}(z_j)} \exp \left(\sum_{k=1}^{R(z_j)-3/2} \frac{\alpha_{mk}(z_j)}{(-k)} (z - z_j)^{-k} \right),$$

где k принимает только целые значения и $\alpha_{mk}(z_j)$ являются характеристическими показателями целого порядка в этой точке. $\square$

Если особая точка находится на бесконечности, необходимо исключить множитель $(z - z_j)^{\alpha_{10}(z_j)}$ из функции, реализующей s -гомотопное преобразование. В ином случае это преобразование нарушает правильное поведение в некоторой конечной точке.

1.2.6. Обобщение теоремы Фукса

Здесь мы сформулируем обобщение теоремы Фукса для нефуксовых уравнений [108] и докажем его с помощью определений, введенных выше.

Теорема 1.4. Пусть число регулярных особых точек неприводимого нефуксова уравнения в виде (1.1.1) равно n_r , число конечных иррегулярных особых точек равно n_i и само уравнение записано в его естественной форме. Тогда выполняется следующее равенство [70]:

$$\sum_{j=1}^{n_r} \sum_{m=1}^2 \rho_m(z_j) + \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{m=1}^2 \alpha_{m0}(z_j) + \sum_{m=1}^2 \alpha_{m0}(\infty) = \sum_{j=1}^{n_i+n_r} R(z_j) + R(\infty) - 2. \quad (1.2.20)$$

В левой его части просуммированы все характеристические показатели Томе нулевого порядка α_{m0} и показатели Фробениуса ρ_m , а в правой части — все s -ранги особых точек уравнения.

Доказательство. s -гомотопные преобразования не могут изменить величины ни в левой, ни в правой части этого равенства. Таким образом, можно начинать с канонической натуральной формы уравнения. Предположим сначала, что рассматриваемое уравнение не имеет ветвящихся особых точек. Для функций $f(z)$ с полюсом в точке z_j можно рассмотреть

разложение ряда Лорана в этой точке на главную часть $G_j(z)$ и регулярную часть $r.p.$, именно

$$\frac{P_1(z)}{P_0(z)} = G_j(z) + r.p., \quad G_j(z) = \sum_{k=1}^{R(z_j)} a_{-k}(z_j)(z - z_j)^{-k}. \quad (1.2.21)$$

Обозначим T_j логарифмическую производную характеристического множителя в точке z_j :

$$T_j(z) = \alpha_{m0}(z_j)(z - z_j)^{-1} + \sum_{k=1}^{R(z_j)-1} \alpha_{mk}(z_j)(z - z_j)^{-k-1}. \quad (1.2.22)$$

Подставим в уравнение (1.1.1) такое решение Томе, чей характеристический множитель не равен единице, и соберем члены, содержащие сингулярности. Для рекуррентных вычислений характеристических показателей Томе используется следующее уравнение:

$$T_j^2 + G_j T_j + T_j' = 0. \quad (1.2.23)$$

С помощью выбора $\alpha_{1k}(z_j)$ можно устранить особенности порядка от $-2R(z_j)$ до $-R(z_j) - 1$ включительно. Рекуррентное соотношение для α_{1k} записывается в виде:

$$\begin{aligned} \alpha_{1k-1}(z_j) &= -a_{-k}(z_j), \quad k = 2, \dots, R(z_j); \\ \alpha_{10}(z_j) &= R(z_j) - a_{-1}(z_j). \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Все $\alpha_{2k}(z_j) = 0$, так как уравнение имеет каноническую форму. Тем же способом можно рассмотреть остальные иррегулярные особые точки. В случае регулярной особой точки справедливо аналогичное соотношение, а именно

$$\rho_1(z_j) = 1 - a_{-1}(z_j).$$

Рассмотрим неветвящуюся иррегулярную особую точку на бесконечности. В ее окрестности представление (1.2.21) заменяется на

$$\begin{aligned} \frac{P_1(z)}{P_0(z)} &= G_\infty(z) + O(z^{-2}), \quad G_\infty(z) = \sum_{k=-1}^{R(\infty)-2} b_k z^k, \\ \frac{P_2(z)}{P_0(z)} &= \frac{c_\infty}{z^2} + O(z^{-3}), \end{aligned}$$

а уравнение (1.2.23) — на

$$T_j^2 + G_\infty T_j + T_j' + \frac{c_\infty}{z^2} = 0.$$

Здесь следует включить не только члены, растущие на бесконечности, но и все другие члены вплоть до $O(z^{-3})$. Характеристические показатели Томе нулевого порядка получаются из этого уравнения приравнованием коэффициентов при одинаковых степенях:

$$\begin{aligned}\alpha_{20}(\infty) &= -\frac{c_\infty}{b_{R(\infty)-2}} + (R(\infty) - 2) + \sum_{j=1}^{n_i+n_r} a_{-1}(z_j), \\ \alpha_{10}(\infty) &= \frac{c_\infty}{b_{R(\infty)-2}}.\end{aligned}\quad (1.2.25)$$

Добавляя равенства (1.2.24) и (1.2.25), приходим к конечному результату (1.2.20).

Применяя к правой и левой части (1.2.20) изоморфизм $\mathbb{C}$, можно проверить прямым вычислением, что начальный выбор естественной формы уравнения имеет значение только для *представления* результата, но не влияет на сам результат.

Положим теперь, что имеются ветвящиеся иррегулярные особые точки уравнения (1.1.1). Рассмотрим конечную ветвящуюся особую точку z_j . В этой точке функция $P_2(z)/P_0(z)$ не имеет особенностей, и можно снова использовать уравнение (1.2.19) для поиска характеристических показателей Томе $\alpha_{m0}(z_j)$, откуда

$$\alpha_{m0}(z_j) = \frac{R(z_j)}{2}, \quad m = 1, 2. \quad (1.2.26)$$

Из (1.2.26) следует, что добавление конечных разветвленных особых точек в уравнение (1.1.1) не изменяет соотношения (1.2.20). Рассмотрим изменения в уравнении (1.2.20), когда $z = \infty$ — ветвящаяся особая точка. Уравнение (1.2.19) дает следующее выражение для коэффициентов $\alpha_{m0}(\infty)$:

$$2\alpha_{m0}(\infty) = R(\infty) - 2 + \sum_{j=1}^{n_r+n_i} a_{-1}(z_j), \quad m = 1, 2. \quad (1.2.27)$$

Из (1.2.27) следует, что и в случае разветвленных иррегулярных особых точек справедлива формула (1.2.20). $\square$

Обобщение теоремы Фукса (1.2.20), как и сама теорема Фукса, есть следствие теоремы о вычетах. Она дает простой тест для проверки правильности вычислений различных характеристических показателей.

Пример. Для уравнения Бесселя (1.1.2) $\alpha_{m0}(\infty) = 1/2$, $\rho_m(0) = \pm v$. С другой стороны, $R(0) + R(\infty) = 3$. Выполняется соотношение (1.2.20). $\square$

1.3. Конфлюэнция и редукция

1.3.1. Сильная и слабая конфлюэнции.

Теорема о конфлюэнции

В широком смысле слова *конфлюэнция* означает слияние двух особых точек уравнения (1.1.1), сопровождающееся таким изменением (в зависимости от расстояния между сливающимися особыми точками) коэффициентов полиномов $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$ (свободных параметров уравнения), что возникающая в результате особая точка предельного уравнения имеет s -ранг больше, чем s -ранги исходных особых точек.

Здесь необходимы некоторые уточняющие замечания:

- При конфлюэнции могут быть предварительно использованы дополнительные s -гомотопные преобразования.
- При конфлюэнции могут возникать редуцированные особые точки, которые можно устранить подходящим s -гомотопным преобразованием.
- Для того чтобы избежать отмеченных выше осложнений, следует применять предварительную “подготовку” уравнения, а именно преобразование его к форме, для которой процедура конфлюэнции может быть реализована наиболее простым образом.
- Кроме того, необходимо заботиться о числе параметров. Предполагается, что исходное уравнение имеет максимальное число свободных параметров (т. е. коэффициентов полиномов $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$), совместимых с s -мультисимволом и формой уравнения.
- Если число свободных параметров уравнения после процедуры конфлюэнции уменьшается на единицу, конфлюэнция называется *сильной*.
- Если число свободных параметров уравнения уменьшается больше, чем на единицу, конфлюэнция называется *слабой*.

Может быть доказана следующая теорема об аддитивности s -ранга при сильной конфлюэнции [108] (при слабой конфлюэнции мы имеем субаддитивность)*):

Теорема 1.5. *Рассмотрим нефуксово уравнение в его нормальной форме, для которого особая точка, расположенная в $z_1 = 0$, характеризуется s -рангом R_1 , а особая точка, расположенная в $z_1 = \varepsilon$, — s -рангом R_2 . Пусть при предельном переходе $\varepsilon \rightarrow 0$ происходит сильная конфлюэнция. Тогда при этом возникает особая точка $z_c = 0$, которой соответствует s -ранг $R_c = R_1 + R_2$.*

*) Чтобы избежать некоторых специальных случаев, исходное уравнение берется в нормальной форме — т. е. без члена с первой производной.

Доказательство. Выделим главные части рядов Лорана функции $P_2(z)/P_0(z)$ в окрестностях двух выбранных особенностей:

$$\frac{P_2(z)}{P_0(z)} = G_1(z) + G_2(z) + r.p.,$$

$$G_1(z) = \sum_{k=1}^{2R_1} a_k z^{-k}, \quad G_2(z) = \sum_{k=1}^{2R_2} b_k (z - \varepsilon)^{-k}. \quad (1.3.1)$$

Значками *r.p.* мы отмечаем регулярные части. Сумма $G_1(z) + G_2(z)$ может быть преобразована в дробь:

$$G_1(z) + G_2(z) = \frac{\sum_{k=1}^{2R_1} a_k z^{2R_1-k} (z - \varepsilon)^{2R_2} + \sum_{k=1}^{2R_2} b_k (z - \varepsilon)^{2R_2-k} z^{2R_1}}{z^{2R_1} (z - \varepsilon)^{2R_2}}. \quad (1.3.2)$$

Если все коэффициенты a_k, b_k не зависят от ε , то в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ возникает особая точка с s -рангом, равным максимуму s -рангов исходных точек. Для того чтобы реализовалась конфлюэнция, необходимо, чтобы эти коэффициенты росли как некоторые степени ε^{-1} . Из вида знаменателя в (1.3.2) следует, что невозможно получить s -ранг образующейся особой точки больше, чем R_c . Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству возможности выбора такой функциональной зависимости коэффициентов a_k, b_k от ε , чтобы реализовалась сильная конфлюэнция. Это может быть показано прямыми вычислениями. Пусть знаменатель в (1.3.1) обращается в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ в полином $G_c(z)$ по обратным степеням z :

$$G_c(z) = \sum_{k=1}^{2(R_1+R_2)} f_{2(R_1+R_2)-k} z^{-k}.$$

Тогда, приравнявая нулю коэффициенты при каждой степени z , можно получить систему уравнений. Ее удобно записать в виде двух подсистем: из первой рекуррентным образом можно найти коэффициенты a_k в виде полиномов по ε^{-1} :

$$\begin{aligned} a_{2R_1}(-\varepsilon)^{2R_2} &= f_{2R_2+2R_1}, \\ a_{2R_1-1}(-\varepsilon)^{2R_2} + \Omega_1(a_{2R_1}, \varepsilon^{-1}) &= f_{2R_2+2R_1-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_1(-\varepsilon)^{2R_2} + \Omega_{2R_1-1}(a_{2R_1}, \dots, a_2, \varepsilon^{-1}) &= f_{2R_2+1}, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

а из второй получить коэффициенты b_k в виде полиномов по ε^{-1} :

$$\begin{aligned} b_1 + \Omega_{2R_1}(a_{2R_1}, \dots, a_1, \varepsilon^{-1}) &= f_1, \\ b_2 + \Omega_{2R_1+1}(a_{2R_1}, \dots, a_1, b_1, \varepsilon^{-1}) &= f_2, \\ &\dots\dots\dots \\ b_{2R_2} + \Omega_{2R_1+2R_2-1}(a_{2R_1}, \dots, a_1, b_1, \dots, b_{2R_2-1}, \varepsilon^{-1}) &= f_{2R_2}. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Здесь Ω_k — функции, которые линейны по первому аргументу и являются полиномами по остальным аргументам. Выбирая коэффициенты a_k, b_k рекуррентно — согласно (1.3.3)–(1.3.4) — в виде функций, которые линейны по свободным параметрам f_k и являются полиномами по ε^{-1} в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получаем сильную конфлюэнцию в уравнении (1.1.1). $\square$

1.3.2. Принцип конфлюэнции

Предположим, что решения уравнения (1.1.1) удовлетворяют кроме самого уравнения (1.1.1) определенным (однородным) тождествам, которые могут быть записаны как

$$T^{(j)}y(z) = 0. \quad (1.3.5)$$

Теперь сформулируем так называемый неформальный “принцип конфлюэнции”. Следует взять операторную функцию $T^{(j)}$, зависящую от тех же свободных параметров, что и $L^{(j)}$, и тем же способом. Эту параметризацию мы обозначим $T^{(j)}(\varepsilon)$. Предположим, что $L^{(j)}, T^{(j)}$ — начальные операторы и что $L^{(k)}, T^{(k)}$ получены в результате конфлюэнции, откуда следует, что кроме (1.3.5) выполняются также соотношения

$$L^{(j)}(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon^n L^{(k)}(1 + o(1)), \quad T^{(j)}(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon^m T^{(k)}(1 + o(1))$$

для подходящих положительных n и m . Пусть, кроме того, $y(z)$ будет решением уравнений с начальными операторами, а $\tilde{y}(z)$ — уравнения с оператором $L^{(k)}$. Тогда следует ожидать, что при некоторых дополнительных предположениях $\tilde{y}(z)$ является решением уравнения

$$T^{(k)}\tilde{y}(z) = 0. \quad (1.3.6)$$

Этот принцип может быть применен при разнообразных практических вычислениях, приводя к снижению “хаоса” в мире специальных функций.

1.3.3. Редукция уравнений

В работе Айнса [50] показано, что любую особую точку уравнения (1.1.1) можно рассматривать как результат конфлюэнции (или последовательности конфлюэнций), причем начальное уравнение имеет только элементарные особые точки. Таким образом, конфлюэнции элементарных особых точек могли бы служить основой для классификации линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Однако, с нашей точки зрения, использование только конфлюэнции не дает в действительности возможности построить классы дифференциальных уравнений и соответствующие классы специальных функций так, чтобы функции из

одного класса обладали аналогичными свойствами. Более того, элементарные особые точки, по-видимому, не являются достаточно удобными исходными особыми точками. В противоположность этому регулярные особые точки, взятые в целом, являются более подходящими основными объектами.

Если брать в качестве исходных объектов регулярные особые точки, то одновременное использование двух процедур, а именно конфлюэнции и редукции, позволяет легко получать все возможные нефуксовы уравнения — и конфлюэнтные, и редуцированные конфлюэнтные. Под *редукцией* в особой точке с целым s -рангом мы понимаем такую специализацию коэффициентов полиномов $P_1(z)$, $P_2(z)$, которая уменьшает s -ранг этой особой точки на $1/2$, обращая неветвящуюся иррегулярную особую точку в ветвящуюся.*)

Заметим, что необходимая редукция может быть реализована не для каждой формы уравнения. Например, нельзя реализовать редукцию для канонической формы уравнения, необходимо предварительно привести его к нормальной форме с помощью s -гомотопного преобразования. Причина этого в том, что для ветвящейся особой точки должна быть справедлива лемма 1.2.

На основе параллельного использования процедур конфлюэнции и редукции мы определим в следующем параграфе понятие класса линейных однородных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами.

1.3.4. Классы и типы уравнений

Порождающим уравнением для класса M_n линейных однородных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами мы называем наиболее общее фуксово уравнение с $n + 1$ регулярными особыми точками, имеющее произвольные коэффициенты полиномов $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$ и совместимое с выбранной формой уравнения.

Уравнения, эквивалентные данному порождающему уравнению, а также появляющиеся при спецификации параметров, после редукции и конфлюэнции, и эквивалентные этим новым уравнениям, образуют *класс* M_n уравнений с полиномиальными коэффициентами. Более точное определение основано на понятии s -мультисимвола. Для каждого мультисимвола может быть определена количественная характеристика

$$\tau = \sum_j R(z_j) + R(\infty), \quad (1.3.7)$$

*) Можно также рассматривать редукцию регулярной особой точки (не элементарной) в элементарную регулярную особую точку.

которая принимает целые и полуцелые значения. Мы приписываем классу M_n все уравнения, для которых справедливо

$$n - 1 \leq \tau \leq n. \quad (1.3.8)$$

В случае $n - 1 = \tau$ добавляется дополнительное условие: по меньшей мере два s -ранга должны быть полуцелыми.

Примеры. (1) Уравнение

$$L_z^{\{;1\}} y(z) = D^2 y(z) = 0$$

является порождающим для класса M_0 , а уравнение Эйлера

$$L_z^{\{1;1\}}(\rho)y(z) = (zD^2 - \rho D)y(z) = 0$$

— порождающим для класса M_1 . Однако оба этих класса имеют решения в терминах элементарных функций и должны быть исключены при систематическом изложении теории специальных функций.

(2) Гипергеометрическое уравнение — фуксово уравнение с тремя особыми точками

$$L_z^{\{1,1,1\}}(a,b;c)y(z) = (z(1-z)D^2 + (c - (a+b+1)z)D - ab)y(z) = 0$$

— порождающее для гипергеометрического класса, или M_2 . Хотя число параметров соответствует типу уравнения, они входят в уравнение не совсем стандартным образом, поскольку формулы для характеристических показателей при этом упрощаются.

(3) Уравнение Гойна — фуксово уравнение с четырьмя особыми точками

$$\begin{aligned} L_z^{\{1,1,1,1\}}(a,b;c,d;t)y(z) - \lambda y(z) = \\ = (z(z-1)(z-t)D^2 + (c(z-1)(z-t) + dz(z-t) \\ + (a+b+1-c-d)z(z-1))D + (abz - \lambda))y(z) = 0 \end{aligned}$$

является порождающим для класса Гойна, или M_3 . Параметр λ выделен среди других, так как он является аксессуарным и играет особую роль спектрального параметра. $\square$

Порождающее уравнение для класса M_n может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} L_z^{\{1,\dots,1\}} y(z) - \lambda y(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j) y''(z) + \sum_{j=1}^n c_j \prod_{i=1, i \neq j}^n (z - z_i) y'(z) \\ + \left(\sum_{j=1}^{n-2} a_j z^j - \lambda \right) y(z) = 0, \quad (1.3.9) \\ z_1 = 0, \quad z_2 = 1. \end{aligned}$$

Таблица 1.1. Символы s -ранга гипергеометрических уравнений в естественной форме

Название уравнения	Число неприводимых параметров			
	3	2	1	0
Гипергеометрическое уравнение	$\{1, 1; 1\}$	$\{\frac{1}{2}, 1; 1\}$	$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1\}$	$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$
Уравнение Эйлера			$\{1; 1\}$	$\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$
Уравнение Лапласа				$\{1\}$
Конфлюэнтное гипергеометрическое уравнение		$\{1; 2\}$	$\{\frac{1}{2}; 1\}$ $\{1; \frac{3}{2}\}$	$\{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\}$
Конфлюэнтное уравнение Эйлера				$\{2\}$
Биконфлюэнтное гипергеометрическое уравнение			$\{3\}$	$\{\frac{5}{2}\}$

Примечание. Жирные линии отмечают специализацию параметров; тонкие линии указывают процессы конфлюэнции; соотношения между исходными и итоговыми уравнениями после специализации параметров и процессов конфлюэнции отмечены стрелками, направленными на итоговые уравнения.

Опять-таки параметр λ выделен среди других. Как нетрудно подсчитать из уравнения (1.3.9), число параметров, характеризующих порождающее уравнение для класса M_n , равно $3(n - 1)$.

Среди уравнений одного класса можно выделить различные *типы* уравнений.

Тип уравнения однозначно фиксируется его s -мультисимволом.

Определение числа типов уравнений является чисто комбинаторной задачей. Результат зависит от того, выделяются ли элементарные особые

Таблица 1.2. Символы s-ранга уравнений Гойна

Название уравнения	Число неприводимых параметров					
	6	5	4	3	2	
Уравнение Гойна (УГ)	$\{1, 1, 1, 1\}$	$\{\frac{1}{2}, 1, 1, 1\}$	$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1\}$	$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$	$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$	
Конфлюэнтное уравнение Гойна (КУГ)		$\{1, 1, 2\}$	$\{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ $\{1, 1, \frac{3}{2}\}$	$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\}$ $\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$	$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$	
Биконфлюэнтное уравнение Гойна (БУГ)			$\{1, 3\}$	$\{\frac{1}{2}, 3\}$ $\{1, \frac{5}{2}\}$	$\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$	
Дважды конфлюэнтное уравнение Гойна (ДУГ)			$\{2, 2\}$	$\{\frac{3}{2}, 2\}$	$\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$	
Триконфлюэнтное уравнение Гойна (ТУГ)				$\{4\}$	$\{\frac{7}{2}\}$	

Примечание. Жирные линии отмечают специализацию параметров; тонкие линии указывают процессы конфлюэнции; соотношения между исходными и итоговыми уравнениями после специализации параметров и процессов конфлюэнции отмечены стрелками, направленными на итоговые уравнения.

точки из других регулярных особых точек с данным s -рангом. В последнем случае гипергеометрический класс включает в себя 5 типов уравнений (их s -мультисимволы представлены в табл. 1.1), а класс Гойна — 10 типов уравнений (см. табл. 1.2).

1.3.5. Стандартные формы уравнений

Как уже упоминалось, любое неприводимое уравнение может быть приведено с помощью преобразования Мёбиуса и s -гомотопного преобразования к различным формам. Выше были определены каноническая, каноническая естественная, нормальная, нормальная естественная формы уравнения. Здесь мы этот список продолжим и кроме того приведем s -гомотопные преобразования, переводящие уравнения из одной формы в другую.

Для данного типа уравнения *порождающая форма* может быть выделена как та форма уравнения, которая включает в себя максимальное число параметров и совместима с типом уравнения. Порождающее уравнение класса M_n в его общей форме характеризуется $4n$ параметрами. Каждая сильная конфлюэнция и каждая редукция уменьшают число параметров на единицу. Общая форма уравнения неудобна для практических вычислений. В предыдущих разделах была определена каноническая естественная форма уравнения. Она принадлежит к *стандартным формам*. Другие стандартные формы: *нормальная естественная форма* и *самосопряженная естественная форма*.

Нормальная форма уравнения определенного типа эквивалентна общей форме этого типа уравнения и не содержит члена с первой производной. Если, в дополнение, на бесконечности лежит особая точка с наибольшим s -рангом, а другие особые точки, если они существуют, расположены при $z = 0$ и $z = 1$, то такая форма уравнения называется *нормальной естественной формой*.

Уравнение с полиномиальными коэффициентами данного типа может быть также преобразовано к самосопряженной форме.

Ниже приведены преобразования, переводящие одну форму (включая каноническую) в нормальную и самосопряженную. Предположим, что исходное уравнение записано в виде:

$$L_z y(z) = [R(z)D^2 + P(z)D + Q(z)]y(z) = 0, \quad D = \frac{d}{dz}. \quad (1.3.10)$$

Уравнение (1.3.10) с помощью s -гомотопного преобразования

$$y(z) = \exp\left(-\int \frac{P(z)}{2R(z)} dz\right) w(z) = G(z)w(z) \quad (1.3.11)$$

может быть преобразовано к нормальной форме

$$N_z w(z) = (D^2 + \tilde{Q}(z))w(z) = 0, \quad N_z = G(z)L_z G^{-1}(z), \quad (1.3.12)$$

где

$$\tilde{Q}(z) = Q(z) - \frac{P^2(z)}{4R(z)} - \frac{P'(z)}{2}. \quad (1.3.13)$$

С помощью несколько иного s -гомотопного преобразования

$$y(z) = R^{1/2}(z) \exp\left(-\int \frac{P(z)}{2R(z)} dz\right) v(z) = H(z)v(z) \quad (1.3.14)$$

то же уравнение может быть преобразовано к самосопряженной форме

$$M_z v(z) = (DR(z)D + \hat{Q}(z))v(z) = 0, \quad M_z = H(z)L_z H^{-1}(z), \quad (1.3.15)$$

где

$$\hat{Q}(z) = \frac{R''(z) - P'(z)}{2} - \frac{(P(z) - R'(z))^2}{4R} + Q(z). \quad (1.3.16)$$

Пример. Предположим, что уравнение (1.3.10) является фуксовым и записано в каноническом виде. В этом случае формулы (1.3.11)–(1.3.13) и (1.3.14)–(1.3.16) упрощаются:

$$R(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j), \quad \frac{P(z)}{2R(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{2(z - z_j)},$$

$$c_j = \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{P(z)}{R(z)}.$$

□

Каноническую, нормальную и самосопряженную естественные формы можно рассматривать как стандартные для данного типа. Каноническая форма обычно используется для сходящихся разложений решений уравнения, нормальная — для построения асимптотик решений, а самосопряженная — для исследования граничных задач.

1.3.6. Инварианты s -гомотопных преобразований

Существует функция, которая сохраняется при s -гомотопных преобразованиях, переводящих одну форму уравнения в другую.

Лемма 1.7. *Полином*

$$F(z) = 4R(z)Q(z) - (P(z) - R'(z))^2 - 2(P'(z) - R''(z)) \quad (1.3.17)$$

инвариантен относительно s -гомотопных преобразований.

Доказательство. Произвольное s -гомотопное преобразование переводит дифференциальный оператор L_z в уравнении (1.3.10) в новый оператор $\hat{L}_z = S^{-1}(z)L_z S(z)$, где функция $S(z)$ определяет s -гомотопное преобразование. Вычисляя образы полиномов $R(z)$, $P(z)$, $Q(z)$ — полиномы $\hat{R}(z)$, $\hat{P}(z)$, $\hat{Q}(z)$, мы получаем

$$\begin{aligned}\hat{R}(z) &= R(z), \\ \hat{P}(z) &= P(z) + \frac{2S'(z)R(z)}{S(z)}, \\ \hat{Q}(z) &= Q(z) + \frac{S''(z)R(z)}{S(z)} + \frac{S'(z)P(z)}{S(z)}.\end{aligned}$$

Из этих вычислений следует, что $\hat{F}(z) = F(z)$. $\square$

Очевидно, каждый коэффициент полинома $F(z)$ в (1.3.17) также инвариантен относительно s -гомотопных преобразований. Как следствие, сохраняются, к примеру, разности между показателями Фробениуса для отдельной регулярной особой точки и между показателями Томе нулевого порядка.

1.4. Типы решений

1.4.1. Собственные функции сингулярной задачи Штурма–Лиувилля

В предыдущих разделах исследовались локальные решения уравнения (1.1.1), которые были определены с помощью сходящихся или расходящихся в окрестности особой точки рядов. Это исследование будет продолжено, но здесь мы введем некоторые глобальные решения.

Предположим, что две особые точки z_1, z_2 находятся на вещественной оси и интервал $[z_1, z_2]$ не содержит других особых точек. Эти особые точки могут также располагаться на бесконечности. Возможна ситуация, когда обсуждаемый интервал совпадает с $]-\infty, +\infty[$. Параметры уравнения полагаются вещественными. Допустим, что данное уравнение записано в самосопряженной форме

$$(-Dr(z)D + q(z))v(z) = \lambda v(z), \quad (1.4.1)$$

при этом λ играет роль спектрального параметра. Тогда при некоторых конкретных требованиях на параметры уравнения дополнительные условия определяют сингулярную задачу Штурма–Лиувилля для уравнения (1.4.1) на интервале $[z_1, z_2]$, выделяя решение $v(z)$ с подходящим локальным поведением в конечных точках рассматриваемого интервала.

Вообще говоря, если уравнение (1.4.1) является фуксовым с $n + 1$ особыми точками, может быть поставлено $n + 1$ таких задач Штурма–Лиувилля. Для произвольных значений параметров они эквивалентны в том смысле, что любой интервал $[z_1, z_2]$ может быть переведен в $[0, 1]$ подходящим преобразованием Мёбиуса.

В случае гипергеометрического уравнения соответствующие собственные функции являются полиномами, а именно полиномами Якоби (с точностью до простых подстановок). В гипергеометрическом классе уравнений возникают еще два множества собственных функций для двух типов конфлюэнтных уравнений. Первое множество выражается в терминах полиномов Лагерра, а второе — в терминах полиномов Эрмита. Во всех упомянутых случаях имеются точные выражения для соответствующих собственных значений. Для редуцированного конфлюэнтного уравнения, принадлежащего гипергеометрическому классу, не существует хорошо поставленной сингулярной задачи Штурма–Лиувилля в смысле, описанном выше.

Собственные функции сингулярных задач Штурма–Лиувилля для уравнений класса Гойна не являются, вообще говоря, полиномами. Они изучаются в третьей главе.

Возникает вопрос, существуют ли полиномиальные решения уравнений класса Гойна. Ответ будет положительный, если один из характеристических показателей второго порядка принимает целое значение, однако число полиномиальных решений конечно (соответственно упомянутому выше целому числу). Другой способ поставить граничную задачу с полиномиальными решениями связан с рассмотрением многоспектральной задачи [117].

1.4.2. Центральная и боковая задачи связи

Более общей, чем сингулярная задача Штурма–Лиувилля, является центральная двухточечная задача связи. Предположим, что в окрестности особой точки z_1 построены два линейно независимых локальных решения $v_1(z_1, z)$, $v_2(z_1, z)$ уравнения (1.4.1), а два других линейно независимых решения $\tilde{v}_1(z_2, z)$, $\tilde{v}_2(z_2, z)$ построены в окрестности особой точки z_2 . Эти пары решений связаны друг с другом с помощью матрицы перехода Ω_{12} :

$$\tilde{\mathbf{V}} = \Omega_{12} \mathbf{V}. \quad (1.4.2)$$

Пусть вектор $\mathbf{V}$ составлен из решений $\mathbf{V}(z) = (v_1(z_1, z), v_2(z_1, z))$, а вектор $\tilde{\mathbf{V}}$ составлен из другой пары решений $\tilde{\mathbf{V}}(z) = (\tilde{v}_1(z_2, z), \tilde{v}_2(z_2, z))$. Решить центральную двухточечную задачу связи означает построить матрицу Ω_{12} . Ситуация, когда один из внедиагональных матричных элементов матрицы Ω_{12} равен нулю, может быть связана с соответствующей сингулярной задачей Штурма–Лиувилля. Центральная двухточечная задача

связи в случае уравнений гипергеометрического класса может быть решена в терминах гамма-функции. В случае уравнений класса Гойна можно получить только асимптотические формулы, если параметры уравнения принимают большие или малые значения. Другой подход связан с возможностью определить матрицу Ω_{12} с помощью вычислений. Численные алгоритмы, позволяющие получить по крайней мере соответствующие собственные значения, обсуждаются в разделах 1.6 и 3.6.

Вслед за центральной задачей связи можно рассмотреть боковую задачу связи. Представим себе простую петлю, обходящую особую точку уравнения (1.4.1) против часовой стрелки. Без потери общности можно считать эту особую точку расположенной в точке $z = z_j$. В начальной точке z^* этой петли локально определена пара решений уравнения $U(z) = (u_1(z^*, z), u_2(z^*, z))$. После обхода особой точки z_j аналитическое продолжение решений приводит к новой паре решений $\hat{U}(z) = (\hat{u}_1(z^*, z), \hat{u}_2(z^*, z))$. Эти пары связаны друг с другом, так что можно ввести матрицу Υ_j :

$$\hat{U} = \Upsilon_j U. \quad (1.4.3)$$

Очевидно, что матрица Υ_j не зависит от точки z^* . Если особая точка — регулярная, начальная пара решений может быть выбрана в виде решений Фробениуса. Тогда матрица Υ_j диагональна:

$$\Upsilon_j = \begin{pmatrix} e^{i2\pi\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{i2\pi\rho_2} \end{pmatrix}, \quad (1.4.4)$$

причем ρ_1 и ρ_2 совпадают с показателями Фробениуса в z_j .*)

Для фуксова уравнения задача аналитического продолжения любого набора решений, фиксированных в окрестности одной особой точки, в окрестность другой особой точки и выражение результата аналитического продолжения с помощью набора решений, фиксированных поведением в окрестности второй особой точки, сводится к определению матриц Ω_{ik} и Υ_j . Среди этих матриц необходимо знать только некоторые основные. Для нас важно лишь то, что эти основные матрицы представляют собой *данные монодромии* для рассматриваемого уравнения.

Эти данные монодромии в явном виде известны только в случае, когда уравнение имеет две или три регулярные особые точки (при этом они выражаются с помощью гамма-функции).

Более сложная ситуация возникает при рассмотрении иррегулярных особых точек. В окрестности иррегулярной особой точки (за исключением ситуаций, когда коэффициенты принимают специальные значения)

*) Мы предполагаем, что разность характеристических показателей не является целым числом. В противном случае матрица Υ_j может состоять из жордановых блоков.

могут быть построены два решения уравнения (1.1.1) в следующем виде:

$$y_m(z_j, z) = (z - z_j)^{\rho_m(z_j)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{mk}(z_j)(z - z_j)^k, \quad m = 1, 2. \quad (1.4.5)$$

Величины $\rho_m(z_j)$ называются *показателями Флоке*, а сами решения — *решениями Флоке*. Разница с решениями Фробениуса, определенными в окрестности регулярной особой точки, заключается в том, что вместо ряда Тейлора используется ряд Лорана. Однако это приводит и к более содержательной разнице. В то время как показатели Фробениуса вычисляются как корни характеристического уравнения, для вычисления показателей Флоке в (1.4.5), вообще говоря, нет явного алгоритма. Кроме того, трудно отделить решения (1.4.5) друг от друга как с теоретической точки зрения, так и при численных исследованиях. Соответственно, более часто используются другие решения для изучения данных монодромии, именно они исследуются в следующем параграфе.

1.4.3. Линии Стокса в окрестности особой точки. Матрицы Стокса

В первом разделе этой главы были определены решения Томе в окрестности иррегулярной особой точки. Однако эти решения — в противоположность решениям Фробениуса — являются чисто формальными объектами. Причина этого в том, что соответствующие ряды являются в общей ситуации расходящимися и имеют лишь асимптотический смысл. Но еще более важно то, что эти асимптотические ряды не представляют каждое решение в полной окрестности особой точки. Это связано с так называемым явлением Стокса. В данной книге мы лишь вкратце обсудим это явление, отсылая за подробным рассмотрением к другим источникам (см. [41], [109]).

Предположим, что мы рассматриваем иррегулярную особую точку с s -рангом $R(z_j)$. Без потери общности эту особую точку можно поместить на бесконечности и взять уравнение в его нормальной форме

$$(D^2 - q(z))w(z) = 0. \quad (1.4.6)$$

Ведущий член функции $q(z)$ может иметь вид

$$q(z) = z^{2R-4}(1 + O(z^{-1})).$$

Тогда ведущий множитель в решении Томе будет

$$f(z) = \exp(\pm \varphi(z)) = \exp\left(\pm \int \sqrt{z^{2R-4}} dz\right) = \exp\left(\pm \frac{z^{R-1}}{R-1}\right). \quad (1.4.7)$$

На $2R - 2$ лучах

$$\gamma_l, \quad l = 0, \dots, 2R - 3: \quad \arg z = \frac{\pi l}{R - 1} \quad (1.4.8)$$

функция φ в (1.4.7) принимает вещественные значения. Более того, справедливо

$$\varphi(ze^{i\pi l/(R-1)}) = e^{i\pi l} \varphi(z).$$

Описанные лучи (1.4.8) называются лучами Стокса. Они служат границами секторов Стокса

$$S_l, \quad l = 0, \dots, 2R - 3: \quad \frac{\pi(l+1)}{R-1} > \arg z > \frac{\pi l}{R-1}. \quad (1.4.9)$$

В каждом секторе Стокса S_l можно рассмотреть еще один луч, разделяющий сектор пополам:

$$\delta_l, \quad l = 0, \dots, 2R - 3: \quad \arg z = \frac{\pi(l+1/2)}{R-1}. \quad (1.4.10)$$

На луче (1.4.10) функция $\varphi(z)$ принимает чисто мнимые значения. Эти лучи называются антистоксовыми.

На лучах Стокса функция $f(z)$ экспоненциально увеличивается при знаке плюс и экспоненциально уменьшается при знаке минус. При этом соответствующие решения Томе называются *доминантными* на лучах Стокса в первом случае и *рецессивными* на лучах Стокса — во втором.

На антистоксовых лучах решения Томе являются *осциллирующими* *).

Теорема 1.6. *Для каждого луча Стокса существует одно решение уравнения (1.4.6), асимптотически приближаемое (по Пуанкаре) на этом луче рецессивным решением Томе. Это приближение справедливо также в смысле экспоненциальных асимптотик. Для каждого сектора Стокса существуют два решения уравнения (1.4.6), асимптотически приближаемые по Пуанкаре в этом секторе соответствующими решениями Томе. Эти приближения можно также рассматривать как экспоненциальные асимптотики.* $\square$

Мы не приводим здесь доказательство этой фундаментальной теоремы, отсылая к книгам по асимптотикам, написанным на основе определения асимптотик по Пуанкаре (см., например, [39], [41]). Доказательство утверждения теоремы об экспоненциальных асимптотиках основано на теории ресургенции [120].

*) Это означает, что их вещественные и мнимые части принимают, среди прочих, нулевое значение.

К этой теореме необходимы некоторые пояснения. Предположим, что мы имеем решение Томе в виде (1.2.15). Тогда определение асимптотического разложения по Пуанкаре выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 y_{ml}(\infty, z) &\sim z^{-\alpha_{m0}(\infty)} \exp\left(\sum_{k=1}^{R(\infty)-1} \frac{\alpha_{mk}(\infty)}{k} z^k\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk}(\infty) z^{-k}, \\
 m &= 1, 2, \quad l = 1, \dots, 2(R-1), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad z \in S_l \\
 &\iff \text{для любого } N \quad y_{ml}(\infty, z) z^{\alpha_{m0}(\infty)} \exp\left(-\sum_{k=1}^{R(\infty)-1} \frac{\alpha_{mk}(\infty)}{k} z^k\right) \\
 &\quad - \sum_{k=0}^N c_{mk}(\infty) z^{-k} = O(z^{-N-1}).
 \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

В случае субнормального решения выполняется

$$\begin{aligned}
 y_{ml}(\infty, z) &\sim z^{-\alpha_{m0}(\infty)} \exp\left(\sum_{k=1/2}^{R(\infty)-1} \frac{\alpha_{mk}(\infty)}{k} z^k\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk}(\infty) z^{-k/2}, \\
 m &= 1, 2, \quad l = 1, \dots, 2(R-1), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad z \in S_l \\
 &\iff \text{для любого } N \quad y_{ml}(\infty, z) z^{\alpha_{m0}(\infty)} \exp\left(-\sum_{k=1/2}^{R(\infty)-1} \frac{\alpha_{mk}(\infty)}{k} z^k\right) \\
 &\quad - \sum_{k=0}^N c_{mk}(\infty) z^{-k/2} = O(z^{-(N+1)/2}).
 \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Для экспоненциальных асимптотик может быть сформулировано следующее утверждение:

Теорема 1.7. Для каждого луча Стокса существует одно решение уравнения (1.4.6), асимптотически приближаемое в смысле экспоненциальных асимптотик на этом луче доминантным решением Томе. $\square$

Доказательство этой теоремы, предложенное математиками, основано на специальных методах суммирования расходящихся асимптотических рядов [120], [8], [14]. Однако при практическом оперировании с реальными решениями уравнения и соответствующими доминантными решениями Томе всегда можно опираться на эвристические соображения. Соответствующие результаты можно найти в следующей главе.

1.5. Обобщенная схема Римана

1.5.1. Введение

В этом разделе предложено обобщение схемы Римана (P -символа Римана). Эта схема пригодна как для фуксовых, так и для нефуксовых уравнений (ср. раздел 1.1). Схема описывает:

- s -ранг особых точек;
- положение особых точек;
- характеристические показатели Фробениуса;
- характеристические показатели Томе для нормальных и субнормальных решений.

Стандартная схема Римана используется только для фуксовых уравнений. Это таблица, представляющая локальные характеристики уравнения — положение особых точек и их характеристические показатели. Она поясняет свойства уравнения и упрощает его преобразования к различным эквивалентным формам.

Уравнение Римана с тремя регулярными особыми точками можно записать в виде

$$y''(z) + \sum_{j=1}^3 \frac{1 - \rho_1(z_j) - \rho_2(z_j)}{z - z_j} y'(z) + \left[\prod_{j=1}^3 (z - z_j) \right]^{-1} \sum_{j=1}^3 \rho_1(z_j) \rho_2(z_j) \frac{\prod_{i \neq j} (z_j - z_i)}{z - z_j} y(z) = 0. \quad (1.5.1)$$

Приведем соответствующую схему Римана

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \rho_1(z_1) & \rho_1(z_2) & \rho_1(z_3) \\ \rho_2(z_1) & \rho_2(z_2) & \rho_2(z_3) \end{pmatrix}; z, \quad (1.5.2)$$

в первой строчке которой указано положение особых точек уравнения z_j , $j = 1, 2, 3$, а в двух последующих — характеристические показатели Фробениуса $\rho_m(z_j)$, $m = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$. Схема (1.5.2) полностью определяет уравнение (1.5.1) в том смысле, что оно может быть восстановлено по схеме. Это, однако, невозможно для уравнений с большим числом особых точек.

Так как уравнение Римана принадлежит к классу фуксовых уравнений, его характеристические показатели подчиняются условию Фукса (см. теорему 1.1.)

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^2 \rho_m(z_j) = 1. \quad (1.5.3)$$

Это означает, что число независимых параметров в (1.5.1), также как и в (1.5.2), равно 8.

Далее, s -гомотопное преобразование зависимой переменной

$$S: y \mapsto w, \quad y = uw, \quad u = \prod_{j=1}^3 (z - z_j)^{-\mu_j}$$

с дополнительным условием, сохраняющим бесконечную точку в качестве неособой точки уравнения,

$$\sum_{j=1}^3 \mu_j = 0$$

переводит уравнение Римана само в себя и изменяет две последние строчки схемы Римана согласно соотношениям

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \rho_1(z_1) + \mu_1 & \rho_1(z_2) + \mu_2 & \rho_1(z_3) + \mu_3 \\ \rho_2(z_1) + \mu_1 & \rho_2(z_2) + \mu_2 & \rho_2(z_3) + \mu_3 \end{pmatrix}; z$$

Преобразование Мёбиуса независимой переменной

$$M: z \mapsto x, \quad x = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

изменяет первую строчку (1.5.2) согласно соотношению

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \rho_1(z_1) & \rho_1(z_2) & \rho_1(z_3) \\ \rho_2(z_1) & \rho_2(z_2) & \rho_2(z_3) \end{pmatrix}; x$$

где

$$x_1 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \quad x_2 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}, \quad x_3 = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}.$$

1.5.2. Обобщенная схема Римана

Обобщение стандартной схемы Римана основано на включении в схему характеристических показателей Томе для иррегулярных особых точек.

Обобщенная схема Римана (ОСР) — это таблица, состоящая из столбцов различной длины. Каждый столбец соответствует особой точке исходного уравнения. В первой строчке записаны s -ранги особых точек, во второй — указано положение особых точек. Все другие строчки содержат характеристические показатели в особых точках, расположенные в соответствии с их порядком, от самого низкого к более высоким. В последнем столбце помещены независимая переменная и, ниже, аксессуарные параметры (в данной книге не более одного).

Следует сделать два замечания:

- 1) В случае иррегулярной особой точки с полуцелым s -рангом только один показатель Томе $\alpha_{1k}(z_j)$, $k = 1/2, 1, \dots$, в предписанном порядке представлен в схеме. Другой показатель Томе, относящийся к другому решению, может быть восстановлен с помощью леммы 1.2.
- 2) В случае иррегулярной особой точки с целым s -рангом показатели Томе образуют две характеристические последовательности, соответствующие двум нормальным решениям. Члены этих последовательностей перемежаются друг друга в столбцах ОСР. Это означает, что нельзя переставлять пару характеристических показателей, а можно переставлять только характеристические последовательности.

Согласно определению, столбец в ОСР, относящийся к особой точке z_j с s -рангом $R(z_j)$, включает в себя $2R(z_j) + 2$ числа (алгебраических символа), из которых $2R(z_j)$ являются характеристическими показателями.

Приведем несколько примеров для лучшего понимания.

Примеры. (1) ОСР для уравнения Римана (1.5.1) вместо (1.5.2) заменяется следующей схемой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & ; z \\ \rho_1(z_1) & \rho_1(z_2) & \rho_1(z_3) \\ \rho_2(z_1) & \rho_2(z_2) & \rho_2(z_3) \end{pmatrix}.$$

(2) Предположим, что две особые точки в (1.5.1), например z_2 и z_3 , сливаются, образуя в результате уравнение с регулярной особой точкой z_1 и иррегулярной особой точкой z_2 , s -ранг которых $R(z_j) = 2$.

Соответствующая ОСР выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ z_1 & z_2 & ; z \\ \rho_1(z_1) & \alpha_{10}(z_2) \\ \rho_2(z_1) & \alpha_{20}(z_2) \\ & \alpha_{11}(z_2) \\ & \alpha_{21}(z_2) \end{pmatrix}.$$

(3) Рассмотрим уравнение

$$y''(z) + ay'(z) + (bz + c)y(z) = 0, \quad (1.5.4)$$

обладающее только одной особой точкой, именно $z = \infty$, s -ранг которой $R(\infty) = 5/2$. Решения этого уравнения могут быть выражены в терминах функции Эйри. Показатели Томе можно вычислить непосредственно:

$$\begin{aligned}\alpha_{m\frac{3}{2}}(\infty) &= \pm\sqrt{b}, & \alpha_{m1}(\infty) &= -\frac{a}{2}, \\ \alpha_{m\frac{1}{2}}(\infty) &= \pm\sqrt{b}\left(\frac{c}{2} - \frac{a^2}{8}\right), & \alpha_{m0}(\infty) &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Это соответствует следующей ОСР:

$$\begin{pmatrix} 5/2 \\ \infty \\ 1/4 \\ 1/4 \\ b^{1/2}(c/2 - a^2/8) \\ -a/2 \\ b^{1/2} \end{pmatrix} ; z \quad (1.5.5)$$

□

1.5.3. Приложения

Следующий шаг в наших исследованиях — продемонстрировать использование ОСР в простых преобразованиях зависимой и независимой переменных. Мы рассмотрим преобразования Мёбиуса, s -гомотопные преобразования и квадратичные преобразования.

Итак, s -гомотопные преобразования интерпретируются в терминах ОСР с помощью подстановки соответствующей ОСР вместо функций y и w . На практике, для того чтобы описать локальное поведение функций, нам необходимо просто перемножить множители перед рядами. В ОСР это приводит к добавлению соответствующих характеристических показателей.

Примеры. (1) Для уравнения с s -мультисимволом $\{1; 2\}$ s -гомотопное преобразование выглядит следующим образом:

$$(z-z_1)^\mu e^{v^{(1)}z} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ z_1 & \infty \\ \rho_1(z_1) & \alpha_{10}(\infty) \\ \rho_2(z_1) & \alpha_{20}(\infty) \\ & \alpha_{11}(\infty) \\ & \alpha_{21}(\infty) \end{pmatrix} ; z = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ z_1 & \infty \\ \rho_1(z_1) + \mu & \alpha_{10}(\infty) - \mu \\ \rho_2(z_1) + \mu & \alpha_{20}(\infty) - \mu \\ & \alpha_{11}(\infty) + v^{(1)} \\ & \alpha_{21}(\infty) + v^{(1)} \end{pmatrix} ; z.$$

(2) В случае (1.5.4) и соответствующей ОСР (1.5.5) s -гомотопное преобразование можно записать так:

$$e^{\nu^{(1)}z} \begin{pmatrix} 5/2 \\ \infty \\ 1/4 \\ 1/4 \\ \sqrt{b}(c/2 - a^2/8) \\ -a/2 \\ \sqrt{b} \end{pmatrix} ; z = \begin{pmatrix} 5/2 \\ \infty \\ 1/4 \\ 1/4 \\ \sqrt{b}(c/2 - a^2/8) \\ -a/2 + \nu \\ \sqrt{b} \end{pmatrix} .$$

□

Рассмотрим линейное преобразование независимой переменной

$$L: z \mapsto az + b.$$

Оно изменяет положение особых точек в конечной области согласно $z_j \mapsto az_j + b$, но не изменяет показатели Томе нулевого порядка и показатели Фробениуса. Показатели Томе более высоких порядков изменяются согласно

$$\alpha_{mj}(\infty) \mapsto a^j \alpha_{mj}(\infty).$$

Пример. Рассмотрим уравнение с s -мультисимволом $\{1; 2\}$. Тогда справедливо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ z_1 & \infty \\ \rho_1(z_1) & \alpha_{10}(\infty) \\ \rho_2(z_1) & \alpha_{20}(\infty) \\ & \alpha_{11}(\infty) \\ & \alpha_{21}(\infty) \end{pmatrix} ; az + b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ az_1 + b & \infty \\ \rho_1(z_1) & \alpha_{10}(\infty) \\ \rho_2(z_1) & \alpha_{20}(\infty) \\ & a\alpha_{11}(\infty) \\ & a\alpha_{21}(\infty) \end{pmatrix} .$$

□

Предположим, что две точки, z_0 и ∞ , являются особыми точками. Обратное преобразование

$$I: z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$$

меняет местами их положение. И значит, меняются местами соответствующие столбцы в ОСР. Любые другие особые точки z_j изменяют свое положение, $z_j \mapsto (z_j - z_0)^{-1}$, сохраняя свои характеристические показатели.

Преобразование Мёбиуса можно рассматривать как суперпозицию линейного преобразования и обратного преобразования.

Рассмотрим квадратичное преобразование

$$Q: z \mapsto (z - z_0)^2. \quad (1.5.6)$$

Пусть z_0 будет элементарной особой точкой. Преобразование (1.5.6) обращает ее либо в регулярную точку уравнения, либо в устранимую особую точку. Особые точки, образы z_0 и ∞ , возникают попарно. Их s -ранги сохраняются, положение особых точек изменяется согласно (1.5.6); s -ранг особой точки на бесконечности изменяется с $R(\infty)$ на $2R(\infty) - 1$. Необходимо подчеркнуть, что квадратичное преобразование может вывести начальное уравнение из рассматриваемого класса.

Вот еще два примера квадратичного преобразования, которые мы обсудим для дальнейшего прояснения ситуации.

Примеры. (1) Рассмотрим ОСР, соответствующую присоединенному уравнению Лежандра. При этом выполняются соотношения:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \infty \\ 0 & m/2 & (1/2 - \nu)/4 \\ 1/2 & -m/2 & (3/2 + \nu)/4 \end{pmatrix}; z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \infty \\ m/2 & m/2 & (1/2 - \nu)/2 \\ -m/2 & -m/2 & (3/2 + \nu)/2 \end{pmatrix}; z. \quad (1.5.7)$$

Из (1.5.7) вытекает, что присоединенное уравнение Лежандра соответствует уравнению с s -мультисимволом $\{1/2, 1; 1\}$.

(2) Рассмотрим уравнение

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + \left(\frac{z^2}{4} - \frac{\nu^2}{4} \right) y(z) = 0.$$

После квадратичного преобразования оно обращается в уравнение Бесселя. Это следует из тождества

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & \infty \\ \nu/2 & 1/4 \\ -\nu/2 & 1/4 \\ & i \end{pmatrix}; z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \infty \\ \nu & 1/2 \\ -\nu & 1/2 \\ & i \\ & -i \end{pmatrix}; z.$$

Таким образом, уравнение Бесселя в сущности можно рассматривать как уравнение с s -мультисимволом $\{1; 3/2\}$. $\square$

Теоремы, описывающие свойства характеристических показателей, упрощаются в терминах ОСР.

Рассмотрим обобщение теоремы Фукса (см. теорему 1.2).

Теорема 1.8. *Предположим, что среди особых точек данного уравнения нет приводимых особых точек. Тогда*

$$\sum_{m=1}^2 \left(\sum_j \rho_m(z_j) + \sum_j \alpha_{m0}(z_j) \right) = \sum_j R(z_j) - 2, \quad (1.5.8)$$

где суммирование по j означает суммирование по всем особым точкам.

Доказательство. s -гомотопное преобразование не может изменить ни правую, ни левую часть тождества (1.5.8), так как дополнительные слагаемые, входящие в характеристические показатели конечных особых точек, сокращаются с дополнительным слагаемым, соответствующим особой точке на бесконечности. Предположим, что уравнение преобразуется к нормальной форме (без члена с первой производной). Для этой формы характеристические показатели можно вычислить с помощью соотношения

$$\rho_m(z_j) = \frac{1}{2} \pm \theta_j. \quad (1.5.9)$$

Пусть уравнение имеет иррегулярную особую точку на бесконечности. Стандартные асимптотические вычисления в этой точке дают показатели Томе

$$\alpha_{m0}(\infty) = \frac{R(\infty) - 2}{2} \pm \theta_\infty. \quad (1.5.10)$$

Суммируя (1.5.9) и (1.5.10), мы приходим к требуемому результату. $\square$

При принятых выше допущениях сумма элементов третьей и четвертой строк ОСР будет связана с суммой элементов первой строки согласно (1.5.8).

ОСР также проясняет процесс конфлюэнции.

Лемма 1.8. *При процессе конфлюэнции двух особых точек сумма числа характеристических показателей в особой точке, которая является результатом слияния, не превосходит суммы чисел характеристических показателей в начальных точках.*

Доказательство. Сначала применяем теорему о субаддитивности s -ранга при процессе конфлюэнции (теорема 1.5). Далее следует учесть определение ОСР. $\square$

Приведенные примеры демонстрируют, что ОСР:

- явно выражает все характеристические свойства локальных решений;
- особенно хорошо применима для поиска полиномиальных решений или решений с иными специальными характеристическими свойствами.

1.6. Центральные двухточечные задачи связи (ЦДЗС)

1.6.1. Введение

Задача Штурма–Лиувилля (задача на собственные значения) для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка несомненно принадлежит к наиболее важным задачам в этой области математики в связи со своими многочисленными приложениями. С общей точки зрения эта задача означает поиск определенных значений параметров (или набора параметров) дифференциального уравнения, таких что соответствующее решение уравнения ведет себя предписанным образом в двух точках. Обычно эти точки являются конечными точками интервала на вещественной оси. Сам интервал при этом может быть конечным, полубесконечным или бесконечным. Если коэффициенты рассматриваемого уравнения являются произвольными функциями, задача обычно исследуется с помощью общих подходов функционального анализа. Однако для дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, которые являются предметом рассмотрения данной книги, для формулировки задач и их решений могут быть применены методы комплексного анализа.

В случае, когда две особые точки исследуемого дифференциального уравнения играют роль соответствующих конечных точек интервала и предписано асимптотическое поведение решения при приближении к этим особым точкам, мы говорим о *центральной двухточечной задаче связи* (ЦДЗС)*).

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с полиномиальными коэффициентами, подобное уравнению (1.1.1):

$$P_0(z) \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + P_1(z) \frac{dy(z)}{dz} + P_2(z) y(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.6.1)$$

где коэффициент $P_2(z) = P_2(z; \lambda)$, будучи полиномом по z , к тому же является линейной функцией параметра λ , тогда как $P_0(z)$ и $P_1(z)$ не зависят от λ . Рис. 1.1 описывает типичную ситуацию для ЦДЗС, где два конца интервала — конечные особые точки, находящиеся в $z = 0$ и в $z = 1$. Граничная задача при этом рассматривается на интервале $[0, 1]$. Следует подчеркнуть, что эта, на вид частная, ситуация по существу адекватно

*В литературе обычно под ЦДЗС понимается поиск матрицы связи, описывающей соотношение между решениями, фиксированными своим поведением в двух конечных точках. Однако, насколько мы знаем, эта более общая задача не решена, за исключением уравнений гипергеометрического класса. Поэтому мы ограничиваемся только задачей о поиске собственных значений.

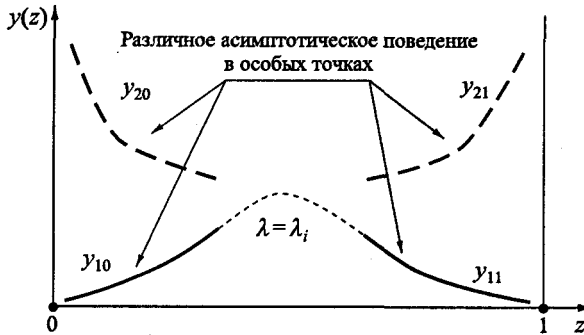


Рис. 1.1. Центральная двухточечная задача связи на конечном интервале с двумя особыми точками

отражает положение дел и в общем случае (см. ниже). Задача заключается в поиске такого значения λ_i для параметра λ , при котором соответствующие решения уравнения (1.6.1) ведут себя предписанным образом (например, убывая) при приближении к $z = 0$ и $z = 1$.

В последующем мы будем иметь дело исключительно с неветвящимися особыми точками.

Различия в положении и типе конечных точек приводят к разным ситуациям. Все они могут быть сведены к следующим трем характерным случаям:

- (1) Обе конечные точки ЦДЗС являются регулярными особыми точками уравнения.
- (2) Одна конечная точка ЦДЗС является регулярной особой точкой, а вторая — иррегулярной особой точкой.
- (3) Обе конечные точки ЦДЗС являются иррегулярными особыми точками уравнения.

Фактически наш анализ справедлив и в том случае, когда одна из двух конечных точек в случае (1) (или (2)) является обыкновенной точкой дифференциального уравнения.

Мы будем обозначать конечные точки интервала, для которого обсуждается ЦДЗС, z_0 и z_1 соответственно.

Основным инструментом нашего подхода являются:

- преобразование Мёбиуса независимой переменной, помещающее соответствующие особенности в $z_0 = 0$ и $z_1 = 1$ (как принято выше), и s -гомотопное преобразование зависимой переменной, после

которого выделенное решение дифференциального уравнения в одной и в другой конечных точках становится ограниченным; *)

- преобразование дифференциального уравнения к разностному уравнению;
- асимптотическое исследование всех частных решений этого разностного уравнения.

1.6.2. Две регулярные особые точки в качестве конечных точек интервала

Как уже упоминалось выше, без потери общности можно полагать, что с помощью преобразования Мёбиуса конечные точки интервала помещены в

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1$$

и на бесконечности находится либо регулярная особая точка, либо обыкновенная точка дифференциального уравнения. Можно считать, что первая пара характеристических показателей для решений Фробениуса в соответствующих особых точках будет следующей: $\rho_1(0) = 0$, $\rho_1(1) = 0$. Этого можно добиться с помощью подходящего s -гомотопного преобразования. Более того, можно считать, что справедливы соотношения

$$\operatorname{Re} \rho_2(0) \leq 0, \quad \operatorname{Re} \rho_2(1) \leq 0. \quad (1.6.2)$$

В большинстве практических задач характеристические показатели вещественны и (1.6.2) сводится к $\rho_2(0) \leq 0$, $\rho_2(1) \leq 0$.

Следствием этих условий является тот факт, что в окрестности каждой особой точки существует одно выделенное ограниченное решение дифференциального уравнения и одно неограниченное решение, как и требовалось выше. ЦДЗС ставится следующим образом: найти такие значения параметра λ (собственные значения), для которых существует решение, ограниченное в обеих особых точках.

Мы рассматриваем ситуацию, когда наше дифференциальное уравнение не имеет особых точек в единичном круге $|z| \leq 1$, кроме точек $z = 0$ и $z = 1$. Следствием наших преобразований является тот факт, что теперь решение дифференциального уравнения (функцию $y_1(z)$), которое ограничено в точке $z_0 = 0$, мы можем разложить в степенной ряд в окрестности точки $z = 0$:

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (1.6.3)$$

*) Взяты совместно, эти два преобразования составляют преобразование Яффе (см. ниже).

Ряд (1.6.3) сходится внутри единичного круга $|z| < 1$. При $z = 1$ он в общей ситуации расходится, так как в этой точке находится другая особая точка дифференциального уравнения.

Асимптотическое поведение функции $y_1(z)$ при $z \rightarrow 1$ вдоль вещественной оси определяется асимптотическим поведением коэффициентов a_n в (1.6.3) при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, чтобы исследовать выполнимость второго граничного условия при $z_1 = 1$, необходимо изучить асимптотическое поведение этих коэффициентов.

Коэффициенты a_n ряда (1.6.3) подчиняются разностному уравнению вида

$$\sum_{k=0}^J \Omega_k(n) a_{n+k} = 0, \quad (1.6.4)$$

где полагается

$$\Omega_k(n) = \Omega_k + \frac{\alpha_k}{n} + \frac{\beta_k}{n^2} + \dots, \quad k = 0, 1, \dots, J, \quad (1.6.5)$$

причем

$$\Omega_J \neq 0 \quad \text{и} \quad \Omega_0 \neq 0. \quad (1.6.6)$$

Равенство (1.6.5) означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_k(n) = \Omega_k$$

для всех k . Это условие соответствует тому, что (1.6.4) является разностным уравнением типа Пуанкаре–Перрона (см. [129]).

Величина J в (1.6.4) определяется числом особых точек (1.6.1) и их s -рангами. Следует упомянуть, что разностное уравнение надо рассматривать совместно с $J - 1$ начальными данными, такими, чтобы (1.6.4) можно было решать рекуррентно после фиксации значения a_0 .

Важным средством изучения разностных уравнений Пуанкаре–Перрона являются соответствующие *характеристические уравнения* (см. [96, с. 9]). Их важность связана с тем фактом, что при определенных условиях в пределе $n \rightarrow \infty$ они описывают отношение двух последовательных членов всех частных решений, входящих в фундаментальную систему соответствующего разностного уравнения. Если характеристическое уравнение имеет только простые корни, соответствующее уравнение Пуанкаре–Перрона называется *регулярным*, а если его корни кратные, то уравнение Пуанкаре–Перрона — *иррегулярное* (см. [6]). Разработка описанных условий являлась центральным результатом ранних работ Оскара Перрона [95], [96], [97].

Если не только конечные точки интервала, но и все другие особые точки исходного дифференциального уравнения являются регулярными, то соответствующее разностное уравнение Пуанкаре–Перрона будет регулярным. Далее, согласно упомянутым выше работам Перрона,

асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ решений уравнения (1.6.4) определяется корнями характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^J \Omega_k t^k = 0. \quad (1.6.7)$$

Пусть эти корни упорядочены, $|t_1| \geq |t_2| \geq \dots \geq |t_J|$. Из наших предположений о том, что $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ и что нет других особых точек дифференциального уравнения, лежащих внутри единичного круга, следует:

$$t_1 = 1, \quad |t_m| < 1, \quad m = 2, \dots, J.$$

Решения характеристического уравнения (1.6.7) предоставляют первичную информацию об асимптотическом поведении частных решений разностных уравнений (1.6.4). Однако для полного описания асимптотического поведения необходимо обратиться к полному асимптотическому описанию фундаментальной системы решений разностного уравнения (1.6.4) при $n \rightarrow \infty$, которая называется *набором Биркгофа* (см. [129, с. 274]). В общей ситуации это весьма сложное представление, которое упрощается для фуксовых уравнений, таких что корни соответствующего характеристического уравнения разделены:

$$s^{(m)}(n) = n^r m \sum_{i=0}^{\infty} C_{mi} n^{-i}, \quad m = 1, 2, \dots, J. \quad (1.6.8)$$

Различные решения, образующие набор Биркгофа $s^{(m)}(n)$, называются *решениями Биркгофа*. Это частные формальные решения разностного уравнения с фиксированным асимптотическим поведением при $n \rightarrow \infty$. Как следствие, получаем:

$$a_n^{(m)} \sim s^{(m)}(n), \quad n \rightarrow \infty, \quad m = 1, 2, \dots, J,$$

где $a_n^{(m)}$ — некоторые истинные решения (1.6.4). Частное решение $a_n^{(1)}$ разностного уравнения (1.6.4), соответствующее корню t_1 , мы называем *максимальным решением* $a_{n, \max}$.

Задача на собственное значение для исходного дифференциального уравнения приводит к требованию, чтобы решение $y(z)$, соответствующее (1.6.3), (1.6.8), было голоморфным при $z_1 = 1$. Это в свою очередь означает, что ряды (1.6.3) должны быть сходящимися в области большей, чем единичный круг. Это увеличение круга сходимости от единичного до такого, который касается ближайшей особой точки вне единичного круга, означает, что ровно *одно* частное решение разностного уравне-

ния (1.6.4), а именно максимальное решение, исчезает. Записывая общее решение (1.6.4) в виде

$$a_n = \sum_{m=1}^J L_m a_n^{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots, J, \quad (1.6.9)$$

и полагая, что $a_n^{(1)}$ является максимальным решением, мы получаем, что

$$L_1(\lambda = \lambda_i) = 0 \quad (1.6.10)$$

— это условие задачи на собственное значение для ЦДЗС, т.е. соответствующие величины λ_i будут собственными значениями ЦДЗС.

Таким образом, мы пришли к следующему результату: *условие на собственное значение для ЦДЗС можно записать в таком виде: коэффициент L_1 при максимальном решении $a_n^{(1)} = a_{n,\max}$ разностного уравнения (1.6.4) в (1.6.9) должен обращаться в нуль.*

Можно задаться вопросом: как следует модифицировать предложенный метод в том случае, когда некоторые особые точки дифференциального уравнения (отличные от конечных точек интервала) находятся внутри единичного круга? Условие для собственных значений (1.6.10) более не является справедливым, так как радиус сходимости ряда (1.6.3) меньше, чем необходимо. Рецепт решения этой проблемы заключается в использовании подходящего преобразования Мёбиуса независимой переменной z , которое сохраняет точки $z = 0$ и $z = 1$ на своих местах, но выводит другие особые точки (лежащие внутри единичного круга) за пределы единичного круга:

$$\xi = \frac{z(1 - z_*)}{z - z_*}, \quad (1.6.11)$$

где z_* — ближайшая к $z = 0$ особая точка.*)

Дальнейшие рассуждения остаются теми же, что и выше.

1.6.3. Одна регулярная и одна иррегулярная особые точки в качестве конечных

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1.6.1), имеющее регулярную особую точку в нуле и иррегулярную особую точку на бесконечности, s -ранг которой мы обозначим $R(\infty)$. Между этими особыми точками, т.е. на положительной вещественной полуоси, решаем ЦДЗС. Как будет показано в главе 4, такая задача часто возникает в физических приложениях. Из анализа особых точек, описанного в предыдущих разделах,

*) Случай $|z_*| = 1$, $z_* \neq 1$ требует специального рассмотрения.

следует, что при приближении к каждой особой точке возможно два разных асимптотических поведения решения уравнения (1.6.1). При $z = 0$ мы имеем ^{*})

$$y_m(0, z) = z^{\pm\rho} [1 + O(z)], \quad m = 1, 2,$$

где $\pm\rho$ — характеристические показатели решений Фробениуса при $z = 0$; $m = 1$ соответствует $+\rho$ и $m = 2$ соответствует $-\rho$; ρ считается вещественным положительным числом.

На бесконечности мы имеем

$$y_m(\infty, z) = \exp\left(\pm\alpha z^{R(\infty)-1} + \sum_{j=1}^{R(\infty)-2} \alpha_{mj} z^j\right) \times z^{\alpha_{m0}} [1 + O(z^{-1})], \quad m = 1, 2,$$

где α — вещественное положительное число; $m = 1$ соответствует $+\alpha$, $m = 2$ — $-\alpha$. Величины α , α_{mj} , α_{m0} являются характеристическими показателями нормальных решений при $z = \infty$.

С помощью этих соотношений ЦДЗС может быть сформулирована более точно: для произвольного значения спектрального параметра λ решение уравнения (1.6.1), которое ведет себя в окрестности $z = 0$ следующим образом:

$$y(z) = z^{+\rho} [1 + O(z)], \quad z \rightarrow 0,$$

(т.е. убывает), имеет асимптотическое поведение

$$\begin{aligned} y(z) = & A(\lambda) \exp\left(+\alpha z^{R(\infty)-1} + \sum_{j=1}^{R(\infty)-2} \alpha_{1j} z^j\right) \cdot z^{\alpha_{10}} [1 + O(z^{-1})] \\ & + B(\lambda) \exp\left(-\alpha z^{R(\infty)-1} + \sum_{j=1}^{R(\infty)-2} \alpha_{2j} z^j\right) \cdot z^{\alpha_{20}} [1 + O(z^{-1})] \end{aligned}$$

при $z \rightarrow \infty$; $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ — некоторые константы, не зависящие от z . ЦДЗС состоит в определении таких значений λ_i параметра λ , для которых $A(\lambda_i) = 0$. Здесь мы неявно подразумеваем, что по крайней мере одно такое значение существует.

Первый шаг при подходе к этой задаче состоит в расщеплении полного асимптотического поведения искомого решения в *обеих* особенностях — конечных точках интервала. В приложениях обычно это асимптотически убывающее поведение, и мы будем иметь в виду именно этот случай.

^{*}) Для простоты мы полагаем, что абсолютные величины двух показателей совпадают с точностью до знака. При этом мы не теряем общности, так как можем добиться выполнения этого предположения с помощью подходящего z -гомотопного преобразования.

Нетрудно понять, что расщепление асимптотического поведения решения — отнюдь не простая задача, так как в общем случае в обеих особых точках имеется степенное поведение. Однако произведение двух степенных членов (так что получается один степенной член) не может описать два степенных разложения в двух особых точках. С этой проблемой можно справиться с помощью следующего преобразования:

$$y'(z) = \exp\left(-\alpha z^{R(\infty)-1} + \sum_{j=1}^{R(\infty)-2} \alpha_{2j} z^j\right) \cdot z^{+\rho} \cdot (z - z_*)^\beta \cdot w(z), \quad (1.6.12)$$

причем

$$\rho + \beta = \alpha_{20}. \quad (1.6.13)$$

Точка z_* может быть регулярной особой точкой изучаемого дифференциального уравнения или обыкновенной точкой. В последнем случае дифференциальное уравнение для функции $w(z)$ имеет особую точку при $z = z_*$. Таким образом, в этом случае (1.6.12) является *преобразованием, порождающим особую точку*. При этом z_* не должна лежать на нашем интервале, т.е. на положительной вещественной полуоси.

После этого преобразования зависимой переменной применим преобразование Мёбиуса независимой переменной

$$z \mapsto x = \frac{z}{z - z_*}. \quad (1.6.14)$$

Итоговое дифференциальное уравнение для $w(x)$ обладает следующими свойствами:

- регулярная особая точка в нуле сохраняется: $z = 0 \mapsto x = 0$;
- иррегулярная особая точка на конце нашего интервала преобразуется в единицу: $z = \infty \mapsto x = 1$;
- интервал, на котором ставится граничная задача, трансформируется из $\{z|[0, \infty]\}$ в $\{x|[0, 1]\}$;
- итоговое дифференциальное уравнение для $w(x)$ должно иметь особую точку на бесконечности. Если исходное уравнение имеет особые точки, отличные от концов интервала, следует взять точку, отличную от концов отрезка. А если исходное уравнение имеет две особые точки, совпадающие с концами интервала, надо создать регулярную особую точку согласно (1.6.12), (1.6.13);
- все другие особые точки, не совпадающие с концами нового интервала, расположены вне единичного круга (ср. (1.6.11)).

Преобразование (1.6.12)–(1.6.14), обладающее описанными свойствами, называется *преобразованием Яффе*.

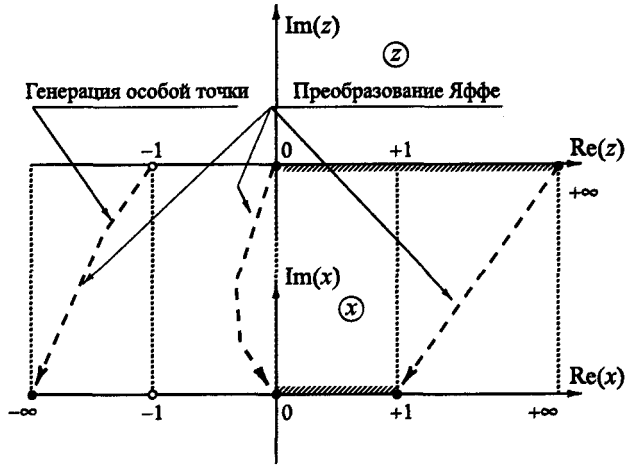


Рис. 1.2. Преобразование Яффе и преобразование, порождающее особую точку

Обсуждаемая ситуация схематически изображена на рис. 1.2. Заполненные (черным) кружки отмечают положение особых точек, в то время как белым кружкам соответствуют либо регулярные точки, либо особые точки уравнения. На рисунке показано, как особые точки трансформируются при преобразовании Мёбиуса $z \mapsto x$ с комплексной z -плоскости на комплексную x -плоскость. Интервал, на котором ставится граничная задача, отмечен штриховкой.

Как следствие наших преобразований ЦДЗС сводится к задаче поиска функции $w(x)$, голоморфной в конечной точке $x = 0$ интервала $[0, 1]$, на котором ставится граничная задача. Тем самым, мы можем разложить функцию $w(x)$ в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$:

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (1.6.15)$$

Ряд в (1.6.15) называется *разложением Яффе* для исходного уравнения и всегда сходится внутри единичного круга. При $x = 1$ он в общем случае расходится, так как в этой точке находится иррегулярная особая точка. Как будет показано ниже, вопрос о сходимости (1.6.15) при $x = 1$ является решающим для ЦДЗС в этом случае.

Коэффициенты a_n в (1.6.15), как и ранее, подчиняются разностному уравнению Пуанкаре–Перрона (см. (1.6.4)–(1.6.6)). Если дифференциальное уравнение не имеет особых точек, кроме точек $x = 0$, $x = 1$ и ре-

гулярной особой точки на бесконечности, порядок разностного уравнения равен R , где R является s -рангом иррегулярной особой точки $x = 1$.

Следует уточнить, что в добавление к разностному уравнению имеется $R - 1$ начальных данных, таких что разностное уравнение разрешимо рекуррентно после фиксации значения a_0 .

Основное различие со случаем, обсуждавшимся в предыдущем разделе, заключается в том, что здесь разностные уравнения имеют *иррегулярный* тип. Это означает, что у соответствующего характеристического уравнения — кратные корни.

Г.Д. Биркгоф [17] показал, что формальные решения разностных уравнений Пуанкаре–Перрона иррегулярного типа можно построить в виде дробных степеней индекса n . Число решений такого сорта совпадает с порядком ассоциированного разностного уравнения. Они называются также *решениями Биркгофа*. Совокупность всех решений Биркгофа данного разностного уравнения называется *набором Биркгофа* (см. [129, с. 274]).

Они имеют вид ^{*)}

$$s^{(m)}(n) = \exp \left[\sum_{j=1}^{R-1} \gamma_{mj} n^{j/R} \right] n^r \sum_{i=0}^{\infty} C_{mi} n^{-i/R}, \quad m = 1, 2, \dots, R, \quad (1.6.16)$$

где R — s -ранг соответствующей иррегулярной особой точки, расположенной на конце интервала, и γ_{mj} , r , C_{mi} — константы, подлежащие определению. Характеристическим свойством задач, которые мы здесь обсуждаем, является тот факт, что набор Биркгофа состоит исключительно из экспоненциально возрастающих и экспоненциально убывающих решений при $n \rightarrow \infty$.

Для единообразия обозначений при обсуждении, с одной стороны, дифференциальных уравнений, а с другой стороны, ассоциированных разностных уравнений, мы будем называть величину $\exp[Q(n)]$ *определяющим множителем* и $\exp[Q(n)]n^r$ *асимптотическим множителем* соответствующего ряда (1.6.16), где $Q(n)$:

$$Q(n) = \sum_{j=1}^{R-1} \gamma_{mj} n^{j/R}.$$

Как будет показано в разделе 3.6, асимптотические множители в (1.6.5) зависят только от α_k , но не от параметров β_k .

Степенные ряды в решениях Биркгофа в общем случае расходятся (см. [6, с. 507]). Таким образом, возникает вопрос, будет ли (аналогично

^{*)} Здесь важное значение имеет предположение, что дифференциальное уравнение не имеет других особых точек, кроме $x = 0$, $x = 1$ и $x = \infty$. В ином случае и другие решения могут попасть в набор Биркгофа.

нормальным решениям То́ме, формальным решениям дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярных особых точек) для соответствующего частного решения $\{a_n^{(m)}\}$ разностного уравнения асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ задаваться одним из решений Биркгофа $s^{(m)}(n)$.

Сформулированной задаче была посвящена опубликованная в начале тридцатых годов XX века большая работа Биркгофа и Тржизинского [18], основанная на двух предшествовавших работах Биркгофа [16], [17] и одной более поздней работе Адамса [6]. С одной стороны, эта статья посвящена более общим разностным уравнениям, чем обсуждаемые здесь. С другой стороны, она не слишком просто написана даже для специалистов в этой области. Вонг и Ли [130] для уравнений второго порядка дали новое доказательство того факта, что решения Биркгофа представляют собой асимптотические решения для иррегулярных разностных уравнений. Они использовали аналогию с нормальными решениями То́ме, которые можно рассматривать как формальные решения линейных дифференциальных уравнений (см. обсуждение этих вопросов у Олвера [90]).

Решения Биркгофа (1.6.16) в качестве асимптотического представления при $n \rightarrow \infty$ фундаментальной системы разностного уравнения (1.6.4) являются аналогом нормальных и субнормальных решений дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярных особых точек.

Замечание. Реальные вычисления коэффициентов γ_{mj} , r , C_{mi} набора Биркгофа осуществляются с помощью метода неопределенных коэффициентов. Эти вычисления следует производить с помощью компьютерных алгебраических методов, так как они весьма громоздки. $\square$

Набор Биркгофа дает возможность получить полное асимптотическое поведение всех частных решений исходного дифференциального уравнения. Однако, как уже упоминалось, вычисление набора Биркгофа является трудной задачей. Как обсуждалось в предыдущем разделе, имеется более простой способ получить по крайней мере часть информации об асимптотическом поведении частных решений разностных уравнений Пуанкаре–Перрона, изучая отношение последовательных членов

$$\frac{a_{n+1}^{(m)}}{a_n^{(m)}}, \quad m = 1, 2, \dots, J, \quad (1.6.17)$$

для каждого из m частных решений разностных уравнений и вычисляя предел при $n \rightarrow \infty$ в (1.6.17) на комплексной n -плоскости. Это можно делать с помощью решения характеристического уравнения. Однако здесь уже недостаточно ограничиться изучением характеристических уравнений нулевого порядка по n , как это было возможно в случае уравнения (1.6.7); в случае иррегулярных разностных уравнений они должны быть первого порядка по n^{-1} . Таким образом, следует записать характе-

ристическое уравнение в виде

$$\sum_{k=0}^R \left(\Omega_k + \frac{\alpha_k}{n} \right) t^k = 0. \quad (1.6.18)$$

Решение этого уравнения с фиксированным асимптотическим поведением по индексу имеет следующий вид:

$$t^{(m)}(n) = 1 + \frac{\gamma_m}{n^{1/R}} + O(n^{-2/R}), \quad n \rightarrow \infty, \quad m = 1, 2, \dots, R, \quad (1.6.19)$$

где различные значения γ_m являются решениями алгебраического уравнения R -го порядка

$$\gamma^R = - \sum_{k=0}^R \alpha_k$$

и R — s -ранг иррегулярной особой точки на конце интервала. Наиболее важной и характерной чертой ЦДЗС в том виде, как она здесь была сформулирована, является тот факт, что все решения (1.6.19) стремятся к $t = 1$ при $n \rightarrow \infty$. Более того, если коэффициенты в (1.6.18) и (1.6.1) вещественны, всегда имеется одно решение, стремящееся к $t = 1$ извне единичного круга $|t| = 1$ *вдоль вещественной оси*, которое, естественно, является максимальным решением $t_{\max}(n)$.

Насколько мы знаем, уравнения вида (1.6.18), с помощью которых можно сосчитать отношение двух последовательных членов иррегулярных разностных уравнений, были впервые введены не в математической литературе, а в физической. Вслед за Яффe [52], который, следуя идее Хунда и Паули, использовал уравнение (1.6.18), Бейтс с сотрудниками [11] взял его как основу при вычислении спектра молекулярного иона водорода, а Е. А. Соловьев [118] впервые показал, что здесь можно допускать и комплексные значения параметров в дифференциальных уравнениях.

Уравнение для собственных значений

Как это было сделано в 1.6.2, мы можем определить *максимальное решение* $a_{n,\max}$ разностного уравнения (1.6.4) следующим образом: оно отвечает наибольшей вещественной части решения $t(n) = t_{\max}(n)$ в (1.6.18). Однако это максимальное решение не играет такой же роли, как в предыдущем случае. Введем следующее разделение: наборы Биркгофа состоят из экспоненциально растущих и экспоненциально убывающих решений. Первые будем называть *доминантными решениями*, вторые — *рецессивными*.

Решить ЦДЗС означает найти условие, которое позволяет определить собственные значения $\lambda = \lambda_i$. Это условие будет выведено в два шага.

Первый шаг имеет в своей основе анализ особых точек, который был описан в 1.6.2, где было выяснено, что общее решение дифференциального уравнения после отделения асимптотического множителя, соответствующего $z = \infty$, или $x = 1$, состоит из одного частного решения, для которого все характеристические показатели равны нулю и которое тем самым стремится к конечному значению при $x \rightarrow 1$. Получение такого частного решения и было целью отщепления асимптотических множителей. Это решение является собственной функцией ЦДЗС.

Таким образом, когда λ не является собственным значением, функция $w(x)$, заданная соотношением (1.6.15), ведет себя следующим образом:

$$w(x) \sim \exp\left(+2 \frac{\alpha}{(1-x)^{R-1}}\right) \quad (1.6.20)$$

при $x \rightarrow 1$. (Множитель 2 появляется после процедуры расщепления.) Как следствие, ряд (1.6.15) является *расходящимся* при $x = 1$. Если λ становится собственным значением, это поведение изменяется:

$$w(x) \sim O(1) \quad (1.6.21)$$

при $x \rightarrow 1$ изнутри единичного круга. Это означает, что ряд (1.6.15) становится *сходящимся* при $x = 1$ или, более точно, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n \quad (1.6.22)$$

сходится и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (1.6.23)$$

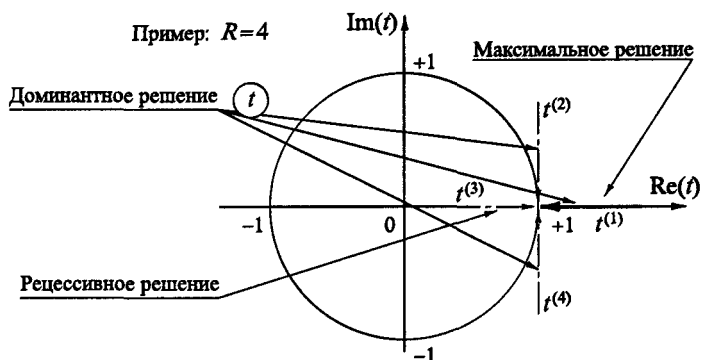
существует и принимает конечное значение. Данная величина при этом равна $w(1)$.

Второй шаг основан на асимптотическом поведении решения a_n разностного уравнения (1.6.4), рассмотренного выше. Записывая общее решение (1.6.4) в виде

$$a_n = \sum_{m=1}^R L_m a_n^{(m)}, \quad (1.6.24)$$

мы заключаем, что L_1 перед максимальным решением должно обратиться в нуль.

В результате получаем: *точное условие для собственного значения ЦДЗС заключается в том, что коэффициент в (1.6.24) перед максимальным решением разностного уравнения (1.6.4) должен обратиться в нуль.*

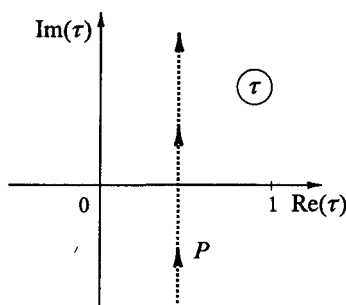
Рис. 1.3. Специальные решения на комплексной t -плоскости

Как это условие для собственного значения может быть реализовано в численной процедуре при проведении конкретных расчетов, будет показано в разделе 3.6 на примере уравнений Гойна.

Здесь нам следует отметить следующий специальный случай. Когда существуют решения Биркгофа, имеющие чисто осциллирующее поведение в первом порядке, ответ на вопрос, являются они экспоненциально убывающими или экспоненциально растущими, может быть получен только при рассмотрении второго асимптотического порядка асимптотического множителя. Пример такого явления дает триконфлюэнтное уравнение, которое обсуждается в разделе 3.6: среди четырех решений Биркгофа есть два решения, которые в первом (главном) асимптотическом порядке являются осциллирующими. Это иллюстрирует рис. 1.3, где показаны частные решения разностного уравнения (1.6.4)–(1.6.6) на t -плоскости. Следующий, более высокий порядок, однако, показывает, что оба этих “осциллирующих” решения являются экспоненциально растущими.

1.6.4. Доказательство

Изложенные ранее результаты опирались на связь между асимптотическим поведением при $x \rightarrow 1$ функции, представленной степенным рядом, подобным (1.6.15), сходящимся в открытом круге $|x| < 1$, и асимптотикой по индексу коэффициентов a_n при $n \rightarrow \infty$. Мы использовали при этом чисто формальные соображения, которые собираемся сделать здесь более строгими. Читатель, не интересующийся математическими доказательствами, может опустить этот параграф.

Рис. 1.4. Путь интегрирования P

Теорема 1.9. Асимптотическое (в зависимости от значка) поведение асимптотических множителей наборов Биркгофа (1.6.16) однозначно определяется поведением (в зависимости от независимой переменной) асимптотических множителей исходного дифференциального уравнения.

Для доказательства этой теоремы нам необходима лемма:

Лемма 1.9. Рассмотрим функцию

$$h(x) := e^{\alpha/(1-x)^s} (1-x)^{-\beta}, \quad s = 1, 2, 3, \dots, \quad x \in \mathbb{C}, \quad (1.6.25)$$

где α, β — комплексные константы. Функции $h(x)$ могут быть представлены степенными рядами в окрестности точки $x = 0$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (1.6.26)$$

с радиусом сходимости, равным единице. Тогда для коэффициентов ряда (1.6.26) существует интегральное представление (ср. уравнение (12) в [10]):

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tau^{-\beta} (1-\tau)^{-(n+1)} e^{\alpha/\tau^s} d\tau, \quad 1 > \sigma > 0, \quad (1.6.27)$$

для достаточно больших n . Путь интегрирования на комплексной τ -плоскости изображен на рис. 1.4.

Доказательство леммы 1.9. Для коэффициентов c_n справедливо следующее интегральное представление:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \xi^{-n-1} (1-\xi)^{-\beta} e^{\alpha/(1-\xi)^s} d\xi. \quad (1.6.28)$$

Контур C , обходящий точку $\xi = 0$ против часовой стрелки, может быть деформирован в сумму интервала $[\sigma - iR, \sigma + iR]$ и соответствующей части окружности ω_R : $|\xi| = \sqrt{\sigma^2 + R^2}$. Для достаточно больших R и n

$$\int_{\omega_R} h(\xi) \xi^{-n-1} d\xi \rightarrow 0$$

и интеграл вдоль интервала $[\sigma - iR, \sigma + iR]$ после подстановки $\xi \mapsto 1 - \xi$ стремится к интегралу в правой части (1.6.28). $\square$

Доказательство теоремы 1.9. Коэффициенты разложения (1.6.15) могут быть представлены в том же виде, что и в (1.6.28):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \xi^{-n-1} w(\xi) d\xi.$$

Согласно уравнению (1.6.20) главная зависимость функции $w(x)$ в (1.6.15) в окрестности особой точки $x = 1$ описывается функцией $h(x)$. Так же, как и при доказательстве леммы, мы получаем

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tau^{-\beta} (1-\tau)^{-(n+1)} e^{\alpha/\tau^s} u(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^K I_k, \quad 1 > \sigma > 0. \quad (1.6.29)$$

Здесь I_k обозначает интегралы по контурам, порожденным особыми точками функции $w(x)$ и лежащими в левой полуплоскости. Интегралы в (1.6.27) могут быть вычислены с помощью метода перевала (см., например, [21, с. 77]). Это означает, что для интеграла вида

$$I = \int_{\mathcal{L}} \exp(v\psi(\tau)) d\tau$$

и для перевальной точки τ_0 , т. е. для решения уравнения

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = 0, \quad (1.6.30)$$

вклад этой перевальной точки может быть вычислен согласно соотношению *)

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{v}} \left| \frac{1}{2} \frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=\tau_0}^{-1/2} e^{v\psi(\tau_0) - i \arg(\psi''(\tau_0))/2}. \quad (1.6.31)$$

*) Штрих означает дифференцирование по τ .

Из (1.6.25) и (1.6.30) следует, что положение перевальных точек τ_0 в старшем приближении описывается решениями уравнения

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} - \frac{s\alpha}{\tau^{s+1}} + \frac{n}{1-\tau} = 0$$

или, в старшем порядке асимптотики:

$$\tau_0^{s+1} \sim \frac{s\alpha}{n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.6.32)$$

Уравнение (1.6.32) показывает, что если α в (1.6.29) вещественно и положительно, всегда есть перевальная точка на интервале $[0, 1]$, близкая к $\tau = 0$. Если α вещественно и отрицательно, на положительной вещественной полуоси нет перевальных точек, но есть по крайней мере две сопряженные перевальные точки на комплексной плоскости.

Учет только той перевальной точки (1.6.32), которая имеет наибольшую вещественную часть, дает ведущий вклад в a_n , а именно член вида (1.6.31). Учет всех перевальных точек приводит к появлению набора Биркгофа (см. [72], [75], [77]) и полному асимптотическому описанию поведения a_n при больших n . Учет интегралов I_k дает асимптотический вклад более низкого порядка.

Если старшие вклады в a_n в общем решении (1.6.24) отсутствуют, это означает, что решение дифференциального уравнения $w(x)$ не имеет растущих асимптотических вкладов (1.6.20) и, таким образом, является собственной функцией. $\square$

Замечание

В стандартной ситуации, для которой мы обсуждали общую процедуру, ЦДЗС задается дифференциальным уравнением (1.6.1), граничные особые точки которого мы поместили: одну — в нуль, вторую — на бесконечность. Первая особая точка является регулярной особой, вторая — иррегулярной особой с s -рангом R . Есть также особый случай, который может быть рассмотрен в рамках описанного выше метода без существенных изменений. Он возникает, когда регулярная особая точка становится обыкновенной точкой исходного уравнения. Тогда ЦДЗС может быть решена методом, аналогичным представленным выше, за исключением следующих моментов:

- согласно теореме Пенлеве [15, с. 11] все частные решения (1.6.3) при $z = x = 0$ голоморфны. Следовательно, в данном случае решения Фробениуса заменяются разложениями Тейлора;
- из этого следует, что число начальных условий для разностного уравнения (1.6.4)–(1.6.6) равно не $R - 1$, а $R - 2$. Таким образом, при

рекурсивном вычислении коэффициентов a_n в (1.6.15) следует фиксировать не только a_0 , но и a_1 . Только после этого набор собственных значений однозначно определен. Если a_0 фиксировано (например, с помощью нормировки), спектр изменяется при изменении a_1 .

1.6.5. Две иррегулярные особые точки

Когда обе граничные особые точки уравнения (1.6.4), $z = 0$ и $z = \infty$, являются иррегулярными особыми (с s -рангами R_2 и R_1 соответственно), общая процедура решения ЦДЗС должна быть модифицирована в одном из своих шагов, а именно следует изменить преобразование Яффе (1.6.9). Особую точку в конце интервала $z = 0$, которая теперь является иррегулярной особой, нельзя сохранять в нуле, ее следует перевести в точку $x = -1$. Таким образом, (1.6.14) преобразуется к виду:

$$z \mapsto x = \frac{z + z_*}{z - z_*}.$$

В дальнейшем предполагается, что исходное дифференциальное уравнение не имеет других особых точек. Однако это предположение имеет значение только для простоты формулировки результатов, но не для справедливости нашего подхода. После применения преобразования Яффе и преобразований, порождающих особые точки, наше дифференциальное уравнение переходит в уравнение, имеющее две иррегулярные особые точки (которые соответствуют концам интервала) в точках $x = -1$ и $x = +1$ и одну регулярную особую точку при $x = -\infty$.

Совокупность преобразования Мёбиуса и преобразования, порождающего особые точки, которые в итоге переводят граничные особые точки уравнения на единичную окружность, мы называем *преобразованием Яффе–Лая*, и в этом случае (1.6.15) становится *разложением Яффе–Лая*. Общая процедура при этом приобретает следующие особенности.

- Разностное уравнение (1.6.4)–(1.6.6) все еще является иррегулярным уравнением Пуанкаре–Перрона. Однако порядок этого уравнения равен $R_1 + R_2$.
- Число начальных условий для соответствующего разностного уравнения (1.6.4)–(1.6.6) равно $R_1 + R_2 - 2$. Таким образом, для рекуррентного вычисления коэффициентов a_n в (1.6.15) следует фиксировать не только a_0 , но и a_1 . Только после этого набор собственных значений определен.

Хотя эта ситуация кажется подобной той, что обсуждалась выше, когда одна граничная особая точка была иррегулярной особой, в то время как другая была регулярной точкой исходного дифференциального

уравнения, следует особо отметить различия. Предположим, что a_0 фиксировано, например, условием нормировки. В то время как в предыдущем случае для любого a_1 существует спектр собственных значений, для данной ситуации это не так. Поскольку мы перевели обе граничные особые точки на единичную окружность, тогда как $w(x)$ в (1.6.15) все еще разлагается в ряд в окрестности точки $x = 0$, мы не можем более априорно выполнить одно граничное условие. Как следствие, должен появиться второй граничный параметр, кроме λ , с помощью которого можно удовлетворить обоим граничным условиям. В качестве второго параметра можно выбрать a_1 .

- Общее решение разностного уравнения (1.6.4) включает в себя две группы решений: решения, для которых $t^{(q)}$ на комплексной t -плоскости (см. (1.6.17)) стремятся либо к $+1$ (первая группа), либо к -1 (вторая группа). В результате набор Биркгофа имеет следующий вид:

$$s^{(m)}(n) = \exp \left[\sum_{j=1}^{R_1-1} \gamma_{mj} n^{j/R_1} \right] n^r \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{mi}}{n^{i/R_1}},$$

$$m = 1, 2, \dots, R_1;$$

$$s^{(m)}(n) = (-1)^n \exp \left[\sum_{j=1}^{R_2-1} \gamma_{mj} n^{j/R_2} \right] n^r \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{mi}}{n^{i/R_2}},$$

$$m = R_1 + 1, R_1 + 2, \dots, R_1 + R_2.$$

- Каждая из этих двух групп имеет доминантные и рецессивные решения.
- Условие на собственные значения здесь состоит из двух частей: оба поднабора доминантных решений в этих двух группах должны исчезать, или, более точно, коэффициенты L_m в (1.6.24) перед доминантными решениями должны равняться нулю.
- Это смешанное условие для собственных значений неудобно с точки зрения численного алгоритма при реальном вычислении собственных значений. Имеется возможность свести его к простому условию, так что на вычислительном уровне дело сводится к обратной рекурсивной процедуре. Данный метод будет разобран на конкретном примере дважды конфлюэнтного уравнения Гойна в главе 3. Для него подмножества доминантных и рецессивных решений содержат (каждое) один член, соответствующий $x = +1$, и один, соответствующий $x = -1$. Таким образом, это уравнение является наиболее простым среди уравнений, имеющих две иррегулярные особые точки в качестве граничных особых точек.

Гипергеометрический класс уравнений

2.1. Схема классификации

2.1.1. Общее представление

Гипергеометрический класс линейных ОДУ второго порядка порождается уравнением Римана — фуксовым уравнением с тремя особыми точками. Он включает в себя пять типов уравнений, которые в основном рассматриваются в стандартной форме:

- порождающее *гипергеометрическое уравнение* (ГУ);
- два типа конфлюэнтных уравнений, которые мы будем называть *конфлюэнтным гипергеометрическим уравнением* (КГУ) и *биконфлюэнтным гипергеометрическим уравнением* (БГУ);
- два типа редуцированных конфлюэнтных уравнений, которые мы будем называть *редуцированным конфлюэнтным гипергеометрическим уравнением* (РКГУ) и *редуцированным биконфлюэнтным гипергеометрическим уравнением* (РБГУ).

Среди этих уравнений только ГУ и КГУ являются “независимыми”. Все другие уравнения могут быть получены из КГУ преобразованием независимой переменной и специализацией параметров.

В литературе известны различные формы КГУ, например *уравнение Уиттекера* или *уравнение Слэтер*. Известны также различные формы БГУ, например *уравнение параболического цилиндра*, *уравнение Эрмита*, *уравнение гармонического осциллятора*. РКГУ не имеет специального названия, но с помощью квадратичного преобразования оно может быть приведено к *уравнению Бесселя*. РБГУ известно как *уравнение Эйри*.

Уравнения гипергеометрического класса описываются только локальными параметрами (нет аксессуарных параметров и скейлинговых параметров), начиная с трех параметров, описывающих ГУ; два параметра есть у КГУ и один параметр — у БГУ и РКГУ.

Для первых трех уравнений существуют полиномиальные решения, которые имеют смысл собственных функций для подходящим образом поставленных граничных задач. Эти решения порождают три бесконечных набора ортогональных полиномов: *полиномы Якоби*, *полиномы Лагерра* и *полиномы Эрмита*. Другие известные наборы ортогональных полиномов — *полиномы Лежандра*, *полиномы Гегенбауэра*, *полиномы Чебышева* — можно рассматривать как специализацию полиномов Якоби.

Разложения типа Фробениуса в качестве частных решений ГУ, КГУ и РКГУ порождают двухчленные рекуррентные соотношения для коэффициентов. Они приводят к явным точным выражениям для рядов и, таким образом, дают рецепты практических вычислений. В случае БГУ и РБГУ разложения в регулярной точке $z = 0$ имеют то же применение.

Решения упомянутых выше уравнений, за исключением РБГУ, удовлетворяют как функции своих параметров трехчленным разностным уравнениям второго порядка. Для тех значений параметров, которые соответствуют полиномиальным решениям, эти разностные уравнения могут быть оборваны с одной стороны. Они дают рекуррентные соотношения, порождающие классические ортогональные полиномы.

С помощью интегральных преобразований, ядрами которых являются элементарные функции, решения уравнений гипергеометрического класса могут быть представлены в терминах элементарных функций. Этот факт дает мощное средство для практических вычислений и также порождает явные формулы (в терминах гамма-функций) для боковой и центральной задач связи (см. ниже).

Мы приведем здесь уравнения гипергеометрического класса в основных стандартных формах, суммируя детали в нескольких таблицах.

2.1.2. Гипергеометрическое уравнение

С помощью s -гомотопных преобразований зависимой переменной и преобразования Мёбиуса независимой переменной уравнение Римана может быть преобразовано к его канонической естественной форме — гипергеометрическому уравнению, называемому также уравнением Гаусса:

$$L_z^{\{1,1;1\}}(a, b; c)y(z) = [z(1-z)D^2 + \{c - (a+b+1)z\}D - ab]y(z) = 0, \quad (2.1.1)$$

$$D = \frac{d}{dz}.$$

Этому уравнению соответствует следующая обобщенная схема Римана (ОСР):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix} ; z. \quad (2.1.2)$$

Дифференциальный оператор, сопряженный (2.1.1), имеет вид:

$$(L_z^{\{1,1;1\}}(a, b; c))^* := L_z^{\{1,1;1\}}(1-a, 1-b; 2-c). \quad (2.1.3)$$

С помощью специального s -гомотопного преобразования

$$S_{c \rightarrow n}: y = Gw, \quad G^{-1}LG = N \Leftrightarrow y = z^{-c/2}(1-z)^{-(c-a-b-1)/2}w$$

уравнение (2.1.1) может быть приведено к нормальной форме

$$N_z^{\{1,1;1\}}(a, b; c)w(z) := \left(D^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1-(1-c)^2}{z^2} + \frac{1-(c-a-b)^2}{(z-1)^2} \right) + \frac{2ab + c(c-a-b-1)}{2z(z-1)} \right) w(z) = 0, \quad (2.1.4)$$

а с помощью преобразования

$$S_{n \rightarrow s-a}: w = Hv, \quad H^{-1}NH = M \Leftrightarrow w = z^{1/2}(1-z)^{1/2}v$$

— к самосопряженной форме

$$M_z^{\{1,1;1\}}(a, b; c)v(z) := \left(Dz(z-1)D - \frac{z(z-1)}{4} \left(\frac{(1-c)^2}{z^2} + \frac{(c-a-b)^2}{(z-1)^2} \right) + \frac{2ab + c(c-a-b)}{2z(z-1)} \right) v(z) = 0. \quad (2.1.5)$$

Полный список стандартных форм гипергеометрического уравнения приведен в табл. 2.1. Кроме того, может также рассматриваться модифицированная форма гипергеометрического уравнения, которая более симметрична относительно конечных особых точек. Предположим, что независимая переменная z заменяется на $(z+1)/2$, так что особые точки $z=0$, $z=1$ переходят в $z=-1$, $z=1$. Вместо b введем параметр d в уравнение (2.1.1) согласно условию

$$a + b + 1 = c + d.$$

Таблица 2.1. Стандартные формы гипергеометрического уравнения ^{*)}

c	$I_z^{\{1,1;1\}} y(z) = 0$	$I_z^{\{1,1;1\}}(a, b; c, d) = z(1-z)D^2 + (c(1-z) - dz)D - ab$	$a + b + 1 = c + d$
c	$\tilde{I}_z^{\{1,1;1\}} y(z) = 0$	$\tilde{I}_z^{\{1,1;1\}}(a, b; c, d) = D^2 + \left(\frac{c}{z} + \frac{d}{z-1}\right) + \frac{ab}{z(z-1)}$	$\tilde{L} = \frac{L}{z(z-1)}$
n	$N_z^{\{1,1;1\}} w(z) = 0$	$N_z^{\{1,1;1\}}(a, b; c, d) =$ $= D^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1 - (1-c)^2}{z^2} + \frac{1 - (1-d)^2}{(z-1)^2} \right) + \frac{ab - cd/2}{z(z-1)}$	$y(z) = z^{-c/2} (1-z)^{-d/2} w(z)$
s-a	$M_z^{\{1,1;1\}} v(z) = 0$	$M_z^{\{1,1;1\}}(a, b; c, d) =$ $= Dz(z-1)D - \frac{z(z-1)}{4} \left(\frac{(1-c)^2}{z^2} + \frac{(1-d)^2}{(z-1)^2} \right) + ab - \frac{cd-1}{2}$	$w(z) = \sqrt{z(1-z)} v(z)$

^{*)} В левом столбце этой и последующих таблиц указана форма уравнения: с — каноническая (от англ. canonical), n — нормальная (normal) и s-a — самосопряженная (self-adjoint).

Тогда модифицированная каноническая форма уравнения имеет вид:

$$[(1-z^2)D^2 - \{c(z-1) + d(z+1)\}D - a(c+d-a-1)]y(z) = 0. \quad (2.1.6)$$

Нетрудно также выписать модифицированные нормальную и самосопряженную формы.

Стандартное решение уравнения (2.1.1), имеющее смысл при $c \neq 0, -1, -2, \dots$, называется *гипергеометрической функцией* $y_1^{\{1,1;1\}}(a, b; c; z = 0, z)$, $y_1(0) = 1$, которая в общепринятых обозначениях записывается как

$$y_1^{\{1,1;1\}}(a, b; c; z = 0, z) = F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z). \quad (2.1.7)$$

Она определяется степенным рядом, построенным в окрестности точки $z = 0$ (это одно из решений Фробениуса):

$$y_1^{\{1,1;1\}}(a, b; c; z = 0, z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{\{1,1;1\}} z^k, \quad (2.1.8)$$

откуда следует рекуррентное соотношение для коэффициентов $g_k^{\{1,1;1\}}$:

$$\begin{aligned} (k+1)(k+c)g_{k+1}^{\{1,1;1\}} &= (k+a)(k+b)g_k^{\{1,1;1\}}, \quad g_0^{\{1,1;1\}} = 1 \\ \Rightarrow g_k^{\{1,1;1\}} &= \frac{\Gamma(k+a)\Gamma(k+b)\Gamma(c)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+c)\Gamma(a)\Gamma(b)}. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Ряд в правой части (2.1.8) сходится внутри единичного круга. Вне этого круга функция $y_1^{\{1,1;1\}}(a, b; c; z = 0, z)$ может быть определена с помощью аналитического продолжения. В комплексной z -плоскости эта функция голоморфна в любой замкнутой области, не включающей точки разреза $[1, \infty[$ (между особыми точками уравнения (2.1.1)).

А s -гомотопное преобразование $S: y = z^{1-c} \check{y}$ приводит уравнение (2.1.1) к другой канонической естественной форме гипергеометрического уравнения:

$$[z(1-z)D^2 + \{2-c-(a+b+3-2c)z\}D - (a+1-c)(b+1-c)]\check{y}(z) = 0. \quad (2.1.10)$$

Для уравнения (2.1.10) также может быть построено решение (2.1.8). Следовательно, второе решение Фробениуса уравнения (2.1.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} y_2^{\{1,1;1\}}(a, b; c; z = 0, z) &= \\ &= z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c; 2-c; z) := G(a, b; c; z). \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Вронсиан этих двух решений может быть получен из соотношений (2.1.8), (2.1.9):

$$W(F, G) = (1 - c)z^{-c}(1 - z)^{c-a-b-1}. \quad (2.1.12)$$

Некоторое осложнение возникает при целых значениях параметра c в формулах (2.1.9), (2.1.11). Эти осложнения можно преодолеть с помощью более удобной нормировки $F \mapsto F/\Gamma(c)$, $G \mapsto G/\Gamma(2 - c)$. Однако при $c = 0$ само уравнение изменяется, переходя в более простое с двумя регулярными особыми точками.

Дальнейшие основные характеристики решений уравнения (2.1.1) таковы: интегральные представления, интегральные соотношения, разностное уравнение, матрицы связи, полиномиальные решения. Они обсуждаются в последующих разделах данной главы.

2.1.3. Конфлюэнтные уравнения

Конфлюэнтное гипергеометрическое уравнение

$$L_z^{\{1;2\}}(a; c; 1)y(z) := (zD^2 + (c - z)D - a)y(z) = 0 \quad (2.1.13)$$

порождено процедурой конфлюэнции $z \mapsto z/b$, $b \rightarrow \infty$, двух регулярных особых точек $z = 1$ и $z = \infty$, приводящей к иррегулярной особой точке на бесконечности, s -ранг которой $R(\infty) = 2$. Уравнение (2.1.13) описывается следующей ОСР:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ 0 & \infty & ; z & \\ 0 & a & & \\ 1 - c & a - c & & \\ & 0 & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}. \quad (2.1.14)$$

Присутствие единицы в списке параметров (2.1.13) объясняется тем фактом, что эта единица соответствует одному из характеристических показателей первого порядка для одного из решений. Дифференциальный оператор L^* , сопряженный (2.1.13), имеет следующий вид:

$$[L_z^{\{1;2\}}(a; c; 1)]^* := L_z^{\{1;2\}}(a - 1; 2 - c; -1). \quad (2.1.15)$$

После s -гомотопного преобразования

$$S_{c \rightarrow n}: \quad y = Gw, \quad G^{-1}LG = N \Leftrightarrow y = z^{-c/2} e^{z/2} w$$

уравнение (2.1.13) преобразуется к нормальной форме

$$N_z^{\{1;2\}}(a; c)w(y) = \left(D^2 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{a - c/2}{z} + \frac{1 - (1 - c)^2}{4z^2} \right) \right) w(z) = 0, \quad (2.1.16)$$

которая известна как уравнение Уиттекера. Полный список стандартных форм КГУ приведен в табл. 2.2.

Имеется два стандартных решения КГУ. Одно решение (решение Фробениуса)

$$y_1^{\{1;2\}}(a; c; z = 0, z)$$

определяется своим поведением в окрестности точки нуль,

$$y_1^{\{1;2\}}(a; c; z = 0, z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{\{1;2\}} z^k. \quad (2.1.17)$$

Оно соответствует так называемой *конфлюэнтной гипергеометрической функции*

$$y_1^{\{1;2\}}(a; c; z = 0, z) = \Phi(a; c; z) = {}_1F_1(a; c; z). \quad (2.1.18)$$

Рекуррентное соотношение для коэффициентов g_k может быть получено либо с помощью принципа конфлюэнции

$$b^k g_k^{\{1, 1; 1\}} \Big|_{b \rightarrow \infty} \rightarrow g_k^{\{1; 2\}},$$

либо прямой подстановкой (2.1.17) в уравнение (2.1.13):

$$\begin{aligned} k(k+c)g_{k+1}^{\{1;2\}} &= (k+a)g_k^{\{1;2\}}, \quad g_0^{\{1;2\}} = 1 \\ \Rightarrow g_k^{\{1;2\}} &= \frac{\Gamma(k+a)\Gamma(c)}{\Gamma(k)\Gamma(k+c)\Gamma(a)}. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Другое решение $y_1^{\{1;2\}}(a; c; z = +\infty, z)$ (соответствующее решению Томе для линии Стокса $\arg z = 0$) определяется поведением на бесконечности. В секторе $|\arg z| \leq \pi$ оно разлагается в асимптотический ряд

$$y_1^{\{1;2\}}(a; c; z = +\infty, z) = z^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{\{1;2\}} z^{-k}.$$

Таблица 2.2. Стандартные формы конфлюэнтного гипергеометрического уравнения

	ГУ $\mapsto$ КГУ		
	$z := \varepsilon z,$ $b := \varepsilon^{-1},$ $\varepsilon \rightarrow 0$	$\varepsilon L^{\{1,1\}} \rightarrow L^{\{1,2\}},$ $\varepsilon^2 \tilde{L}^{\{1,1\}} \rightarrow \tilde{L}^{\{1,2\}},$ $\varepsilon^2 N^{\{1,1\}} \rightarrow N^{\{1,2\}},$ $-\varepsilon M^{\{1,1\}} \rightarrow M^{\{1,2\}}$	
c	$L_z^{\{1,2\}} y(z) = 0$	$L_z^{\{1,2\}}(a; c) = zD^2 + (c - z)D - a$	
c	$\tilde{L}_z^{\{1,2\}} y(z) = 0$	$\tilde{L}_z^{\{1,2\}}(a; c) = D^2 + \left(-1 + \frac{c}{z}\right)D - \frac{a}{z}$	$\tilde{L} = \frac{L}{z}$
n	$N_z^{\{1,2\}} w(z) = 0$	$N_z^{\{1,2\}}(a; c) = D^2 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{a - c/2}{z} + \frac{1 - (1 - c)^2}{4z^2}\right)$	$y(z) = z^{-c/2} e^{z/2} w(z)$
s-a	$M_z^{\{1,2\}} v(z) = 0$	$M_z^{\{1,2\}}(a; c) = DzD + \left(-\frac{z}{4} - a + \frac{c}{2} - \frac{(1 - c)^2}{4z}\right)$	$w(z) = z^{1/2} v(z)$

Таблица 2.3. Стандартные формы биконфлюэнтного гипергеометрического уравнения

	КГУ $\mapsto$ БГУ		
	$z := \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1/2}z,$ $c := \varepsilon^{-1},$ $\varepsilon \rightarrow 0$	$L^{\{1;2\}} \rightarrow L^{\{3\}},$ $\varepsilon M^{\{1;2\}} \rightarrow M^{\{3\}}$	
c	$L_z^{\{3\}}y(z) = 0$	$L_z^{\{3\}}(a) = D^2 - zD - a$	
n, s-a	$N_z^{\{3\}}w(z) = 0$	$N_z^{\{3\}}(a) = D^2 + \left(\frac{1}{2} - a - \frac{z^2}{4}\right)$	$y(z) = e^{z^2/4}w(z)$

Коэффициенты этого ряда $h_k^{\{1;2\}}$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned}
 (k+1)h_{k+1}^{\{1;2\}} &= -(k+a+1-c)(k+a)h_k^{\{1;2\}}, \quad h_0^{\{1;2\}} = 1 \\
 \implies h_k^{\{1;2\}} &= \frac{(-1)^k \Gamma(k+a+1-c) \Gamma(k+a)}{\Gamma(k+1) \Gamma(a+1-c) \Gamma(a)}. \quad (2.1.20)
 \end{aligned}$$

Рекуррентное соотношение (2.1.20) подобно (2.1.19), но решается “в обратном направлении”. Оно приводит — в случае общих коэффициентов — к расходящемуся ряду. Кроме этих решений может быть построено и второе решение Томе:

$$y_2^{\{1;2\}}(a; c; z = \infty, z) = e^z z^{a-c} \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\{1;2\}} z^{-k}, \quad 0 < \arg z < 2\pi. \quad (2.1.21)$$

Это решение является доминантным на луче Стокса $\arg z = 0$. Коэффициенты $f_k^{\{1;2\}}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$(k+1)f_{k+1}^{\{1;2\}} = (k-a+c)(k-a+1)f_k^{\{1;2\}}. \quad (2.1.22)$$

Оба ряда (2.1.20) и (2.1.21) суммируются по Борелю (см. [120], [8]).

Следующим рассмотрим биконфлюэнтное гипергеометрическое уравнение (табл. 2.3). Оно порождается уравнением (2.1.13) после процедуры конфлюэнции регулярной особой точки в $z = 0$ и иррегулярной

особой точки на бесконечности. Итоговая иррегулярная особая точка имеет s -ранг $R(\infty) = 3$:

$$L_z^{\{;3\}}(a)y(z) := (D^2 - zD - a)y(z) = 0. \quad (2.1.23)$$

Уравнение (2.1.23) известно как уравнение Эрмита. Ему соответствует ОСР

$$\begin{pmatrix} 3 \\ \infty & ; z \\ a \\ 1 - a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.24)$$

После s -гомотопного преобразования

$$S_{c \rightarrow n}: \quad y = Gw, \quad G^{-1}LG = N \Leftrightarrow y = e^{z^2/4}w$$

уравнение (2.1.23) приводится к своей нормальной форме

$$N_z^{\{;3\}}(a)w(z) = \left(D^2 + \left(\frac{1}{2} - a - \frac{z^2}{4} \right) \right) w(z) = 0, \quad (2.1.25)$$

которая известна (с точностью до замены a на $-a$) как уравнение параболического цилиндра и после растяжения $z \mapsto \sqrt{2}z$ — как уравнение гармонического осциллятора.

Стандартное решение (2.1.23) — функция $y_1^{\{;3\}}(a; z = +\infty, z)$ (решение Томе) — задается его поведением на бесконечности. В секторе $|\arg z| \leq \pi/2$ оно определяется асимптотическим рядом

$$y_1^{\{;3\}}(a; z = +\infty, z) = z^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{\{;3\}} z^{-k}. \quad (2.1.26)$$

Коэффициенты этого ряда h_k удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} (k+2)h_{k+2}^{\{;3\}} + (k+a)(k+a+1)h_k^{\{;3\}} &= 0, \\ h_0^{\{;3\}} &= 1, \quad h_1^{\{;3\}} = 0; \\ \Rightarrow h_{2k}^{\{;3\}} &= \frac{(-1)^k 2^k \Gamma(k+a/2) \Gamma(k+a/2+1/2)}{\Gamma(k+1) \Gamma(a/2) \Gamma(a/2+1/2)}. \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Таблица 2.4. Соответствие между обозначениями для гипергеометрических и конфлюэнтных гипергеометрических функций

ГУ	$y_1^{\{1,1;1\}}(a, b; c; z = 0, z)$	$y_1(z) _{z=0} = 1$	$F(a, b; c; z)$
	$y_2^{\{1,1;1\}}(a, b; c; z = 0, z)$	$\lim_{z \rightarrow 0} y_2(z) z^{c-1} = 1$	$G(a, b; c; z)$
КГУ	$y_1^{\{1;2\}}(a; c; z = 0, z)$	$y_1(z) _{z=0} = 1$	$\Phi(a; c; z)$
	$y_2^{\{1;2\}}(a; c; z = +\infty, z)$	$\lim_{z \rightarrow +\infty} y_2(z) z^a = 1$	$\Psi(a; c; z)$
БГУ	$y_1^{\{;3\}}(a; z = +\infty, z)$	$\lim_{z \rightarrow +\infty} y_1(z) z^a = 1$	$e^{z^2/4} D_\nu(z)$
	$y_2^{\{;3\}}(a; z = +\infty, z)$	$\lim_{z \rightarrow +\infty} y_2(z) e^{-z^2/2} z^{1-a} = 1$	$e^{z^2/4} V_\nu(z)$

Общепринятое, рецессивное на луче $[0, \infty[$, решение уравнения параболического цилиндра (табл. 2.4)

$$\left(D^2 + \left(\frac{1}{2} + \nu - \frac{z^2}{4}\right)\right)w(z) = 0 \quad (2.1.28)$$

— функция параболического цилиндра $D_\nu(z)$ — выражается в терминах $y_1^{\{;3\}}(a; z = +\infty, z)$ следующим образом:

$$D_\nu(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) y_1^{\{;3\}}(-\nu; z = +\infty, z). \quad (2.1.29)$$

Доминантное решение БГУ — это функция $y_2^{\{;3\}}(a; z = +\infty, z)$, которая может быть выражена в терминах второго линейно независимого решения уравнения параболического цилиндра

$$V_\nu(z) := \frac{\Gamma(-\nu)}{\sqrt{2\pi}} (D_\nu(-z) - \cos \pi \nu \cdot D_\nu(z)); \quad (2.1.30)$$

$$V_\nu(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) y_2^{\{;3\}}(-\nu; z = +\infty, z). \quad (2.1.31)$$

После замены независимой переменной $z^2 \mapsto 2z$ уравнение (2.1.23) преобразуется к специальной форме КГУ, именно

$$\left(zD^2 + \left(\frac{1}{2} - z\right)D - \frac{a}{2}\right)y(z) = 0. \quad (2.1.32)$$

Таблица 2.5. Стандартные формы редуцированного конфлюэнтного гипергеометрического уравнения

	ГУ $\mapsto$ РКГУ		
	$z := \varepsilon^2 z,$ $b = a := \varepsilon^{-1},$ $\varepsilon \rightarrow 0$	$\varepsilon^2 L^{\{1,1;1\}} \rightarrow L^{\{3/2\}},$ $\varepsilon^4 \tilde{L}^{\{1,1;1\}} \rightarrow \tilde{L}^{\{1;3/2\}},$ $\varepsilon^4 N^{\{1,1;1\}} \rightarrow N^{\{3/2\}},$ $-\varepsilon^2 M^{\{1,1;1\}} \rightarrow M^{\{3/2\}}$	
c	$L_z^{\{1;3/2\}} y(z) = 0$	$L_z^{\{1;3/2\}}(c) = zD^2 + cD - 1$	
c	$\tilde{L}_z^{\{1;3/2\}} y(z) = 0$	$\tilde{L}_z^{\{1;3/2\}}(c) = D^2 + \frac{c}{z}D - 1$	$\tilde{L} = \frac{L}{z}$
n	$N_z^{\{1;3/2\}} w(z) = 0$	$N_z^{\{1;3/2\}}(c) = D^2 - \frac{1}{z} + \frac{1 - (1 - c)^2}{4z^2}$	$y(z) = z^{-c/2} w(z)$
s-a	$M_z^{\{1;3/2\}} v(z) = 0$	$M_z^{\{1;3/2\}}(c) = DzD - \frac{(1 - c)^2}{4z} - 1$	$w(z) = z^{1/2} v(z)$

Отсюда следует, что существуют связи между решениями уравнений (2.1.23) и (2.1.32). Одно из таких соотношений может быть найдено сравнением рядов (2.1.39) и (2.1.26). Таким образом,

$$y_1^{\{;3\}}(a; z = +\infty, z) = y_1^{\{1;2\}}\left(\frac{a}{2}; \frac{1}{2}; z = +\infty, \frac{z^2}{2}\right). \quad (2.1.33)$$

Этот факт упрощает изучение решений БГУ.

2.1.4. Редуцированные конфлюэнтные уравнения

Рассмотрим сначала редуцированное конфлюэнтное гипергеометрическое уравнение (табл. 2.5)

$$L_z^{\{1;3/2\}}(c)y(z) := (zD^2 + cD - 1)y(z) = 0. \quad (2.1.34)$$

Оно появляется в результате процедуры слабой конфлюэнции из ГУ:

$$\begin{aligned}
 z &\mapsto z\varepsilon^2, \quad b \mapsto \varepsilon^{-1}, \quad a \mapsto \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \\
 \implies \quad \varepsilon^2 L_z^{\{1,1;1\}}(a, b; c) &\rightarrow L_z^{\{1;3/2\}}(c).
 \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

Ему соответствует ОСР

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & & \\ 0 & \infty & & \\ 0 & c/2 - 1/4 & & \\ 1 - c & c/2 - 1/4 & & \\ & 1 & & \end{pmatrix} ; z \quad (2.1.36)$$

Одно из его решений Фробениуса $y_1^{\{1;3/2\}}(c; z = 0, z)$ определяется рядом Тейлора в окрестности точки $z = 0$:

$$y_1^{\{1;3/2\}}(c; z = 0, z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{\{1;3/2\}} z^k. \quad (2.1.37)$$

Рекуррентное соотношение для коэффициентов $g_k^{\{1;3/2\}}$ может быть получено процедурой конфлюэнции

$$\begin{aligned} b^k a^k g_k^{\{1,1;1\}} \big|_{b,a \rightarrow \infty} &\rightarrow g_k^{\{1;3/2\}}, \\ k(k+c) g_{k+1}^{\{1;3/2\}} &= g_k^{\{1;3/2\}}, \quad g_0^{\{1;3/2\}} = 1 \\ \implies g_k^{\{1;3/2\}} &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(k)\Gamma(k+c)}. \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

Второе линейно независимое частное решение $y_1^{\{1;3/2\}}(c; z = +\infty, z)$ (субнормальное решение Томе), рецессивное на луче $[0, \infty]$, определяется своим поведением на бесконечности. В секторе $|\arg z| \leq 2\pi$ оно разлагается в асимптотический ряд

$$y_2^{\{1;3/2\}}(c; z = +\infty, z) = z^{-c/2+1/4} \exp(-2z^{1/2}) \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{\{1;3/2\}} z^{-k/2}. \quad (2.1.39)$$

Коэффициенты этого ряда $h_k^{\{1;3/2\}}$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} 4(k+1)h_{k+1}^{\{1;3/2\}} + \left(k + \frac{3}{2} - c\right) \left(k + c - \frac{1}{2}\right) h_k^{\{1;3/2\}} &= 0, \quad h_0^{\{1;3/2\}} = 1 \\ \implies h_k^{\{1;3/2\}} &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{\Gamma(k+3/2-c)\Gamma(k+c-1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(3/2-c)\Gamma(c-1/2)}. \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

Уравнение (2.1.34) не является “независимым” в том смысле, что с помощью квадратичного преобразования $z \mapsto z^2$ s-ранг на бесконечности

изменяется с $R(\infty) = 3/2$ до $R(\infty) = 2$, при этом уравнение (2.1.34) из РКГУ становится формой КГУ. Более точные вычисления показывают, что

$$y_1^{\{1;3/2\}}(c; z=0, z) = e^{-2\sqrt{z}} y_1^{\{1;2\}}\left(c - \frac{1}{2}; 2c - 1; z=0, 4\sqrt{z}\right) \quad (2.1.41)$$

и

$$y_1^{\{1;3/2\}}(c; z=+\infty, z) = e^{-2\sqrt{z}} y_1^{\{1;2\}}\left(c - \frac{1}{2}; 2c - 1; z=+\infty, 4\sqrt{z}\right). \quad (2.1.42)$$

В приложениях уравнение (2.1.34) встречается редко. Более часто возникают решения уравнения Бесселя

$$\left\{ zD^2 + D + \left(z - \frac{v^2}{z} \right) \right\} v(z) = 0 \quad (2.1.43)$$

и решения модифицированного уравнения Бесселя

$$\left\{ zD^2 + D - \left(z + \frac{v^2}{z} \right) \right\} v(z) = 0. \quad (2.1.44)$$

Оба уравнения выписаны здесь в самосопряженной форме. Уравнение (2.1.43) получается из (2.1.44) при подстановке $z \mapsto iz$. Стандартное решение Фробениуса уравнения (2.1.44) — это функция Бесселя $J_\nu(z)$:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)}. \quad (2.1.45)$$

Другие решения, заданные своим поведением на бесконечности, — две функции Ханкеля

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[i \left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} i^k h_k z^{-k} \right), \quad (2.1.46)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2};$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[-i \left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k h_k z^{-k} \right), \quad (2.1.47)$$

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2},$$

где использовано обозначение:

$$h_k = \frac{\Gamma(k+\nu+1/2)\Gamma(k-\nu+1/2)}{2^k \Gamma(k)}.$$

Решениями модифицированного уравнения Бесселя являются *модифицированная функция Бесселя* $I_\nu(z)$:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^{2k} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} \quad (2.1.48)$$

и *функция Макдональда* $K_\nu(z)$:

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-z} \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \right], \quad -\pi < \arg z < \pi. \quad (2.1.49)$$

С другой стороны, подстановка $z \mapsto 2\sqrt{z}$ преобразует уравнение (2.1.44) к виду:

$$\left(zD^2 + D - \left(z + \frac{\nu^2}{z} \right) \right) v(z) = 0. \quad (2.1.50)$$

Согласно табл. 2.5, уравнение (2.1.50) является самосопряженной формой РКГУ, причем $\nu = 1 - c$ или $-\nu = 1 - c$. Следовательно, справедливы следующие соотношения между функциями (2.1.37) и (2.1.48):

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu y_1^{\{1;3/2\}} \left(1 + \nu; z = 0, \frac{z^2}{4} \right), \quad (2.1.51)$$

а также между функциями (2.1.39) и (2.1.49):

$$K_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu y_1^{\{1;3/2\}} \left(1 + \nu; z = +\infty, \frac{z^2}{4} \right). \quad (2.1.52)$$

Последнее уравнение, принадлежащее гипергеометрическому классу, — редуцированное биконфлюэнтное гипергеометрическое уравнение (РБГУ) — известно в литературе как уравнение Эйри (табл. 2.6 и 2.7)

$$L_z^{\{5/2\}} y(z) = (D^2 - z)y(z) = 0. \quad (2.1.53)$$

Ему соответствует ОСР

$$\begin{pmatrix} 5/2 \\ \infty \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; z. \quad (2.1.54)$$

Таблица 2.6. Стандартные формы редуцированного биконфлюэнтного гипергеометрического уравнения

	РКУ $\mapsto$ РБУ	
	$z := \varepsilon^{-2}z - \varepsilon^{-3},$ $c := 2\varepsilon^{-3},$ $\varepsilon \rightarrow 0$	$\varepsilon^4 M^{\{1;3/2\}} \rightarrow M^{\{5/2\}}$
c, n, s-a	$N_z^{\{5/2\}} w(z) = 0$	$N_z^{\{5/2\}} = D^2 - zD$

Стандартное решение уравнения (2.1.53) — функция $y_1^{\{5/2\}}(z = +\infty, z)$ (решение Томе) — фиксировано своим поведением на бесконечности. В секторе $|\arg z| \leq 2\pi/3$ оно представляется асимптотическим рядом

$$y_1^{\{5/2\}}(a; z = +\infty, z) = z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{\{5/2\}} z^{-k}. \quad (2.1.55)$$

Коэффициенты этого ряда $h_k^{\{5/2\}}$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned}
 (k+3)h_{k+3}^{\{5/2\}} + \frac{1}{16}(2k+1)(2k+5)h_k^{\{5/2\}} &= 0, \\
 h_0^{\{5/2\}} &= 1, \quad h_1^{\{5/2\}} = 0, \quad h_2^{\{5/2\}} = 0 \\
 \implies h_k^{\{5/2\}} &= \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+1)\Gamma(a)}.
 \end{aligned} \quad (2.1.56)$$

Предшествующий список уравнений, принадлежащих гипергеометрическому классу, охватывает уравнения с элементарной особой точкой. Полагая $c = 1/2$ в (2.1.1), мы сводим точку $z = 0$ к элементарной особой точке. После подстановки $z \mapsto z^2$ уравнение (2.1.1) в этом случае преобразуется к канонической форме присоединенного уравнения Лежандра:

$$\{(1-z)^2 D^2 - 2(a+b+1)zD - 4ab\}y(z) = 0. \quad (2.1.57)$$

При условии $a+b=0$ вторая особая точка $z=1$ становится элементарной, уравнение сводится к виду

$$\left\{ \sqrt{z(1-z)} D \sqrt{z(1-z)} D + a^2 \right\} y(z) = 0 \quad (2.1.58)$$

и может быть решено с помощью элементарных функций. При $a = 1/4$ особая точка на бесконечности становится элементарной.

Таблица 2.7. Соответствие между обозначениями для редуцированных конфлюэнтных гипергеометрических функций

РКТУ	$y_1^{\{1,3/2\}}(c; z = 0, z)$ $y_2^{\{1,3/2\}}(c; z = \infty, z)$	$y_1(z) \Big _{z=0} = 1$ $\lim_{z \rightarrow +\infty} y_2(z) \sqrt{z} = 1$	$I_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu y_1\left(1+\nu; \frac{z^2}{4}\right)$ $K_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu y_2\left(1+\nu; \frac{z^2}{4}\right)$
РБГУ	$y_1^{\{1,5/2\}}(z = \infty, z)$ $y_2^{\{1,5/2\}}(z = \infty, z)$	$\lim_{z \rightarrow +\infty} y_1(z) z^{1/4} \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) = 1$ $\lim_{z \rightarrow +\infty} y_2(z) z^{1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) = 1$	$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} y_1(z)$ $\text{Bi}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} y_2(z)$

Для $c = 1/2$ КГУ сводится к уравнению, которое после подстановки $z \mapsto z^2$ переходит к канонической форме биконфлюэнтного гипергеометрического уравнения. При том же значении параметра a и той же подстановке РКГУ преобразуется в уравнение для модифицированных функций Бесселя с индексом $1/2$.

2.2. Разностные уравнения

2.2.1. Общие соображения

Специальным функциям гипергеометрического класса могут быть поставлены в соответствие не только дифференциальные уравнения, но также разностные уравнения и дифференциально-разностные уравнения. Разностный оператор может действовать на сетке дискретной переменной, которая дуальна комплексной переменной дифференциального уравнения. Эти типы разностных уравнений возникают, например, для коэффициентов разложений в ряд решений изучаемых уравнений. Они были представлены в предыдущем разделе. С другой стороны, независимой дискретной переменной может служить любой из параметров a, b, c в уравнении (2.1.1). В последнем случае соответствующие разностные уравнения обычно называются *соотношениями смежности*.

2.2.2. Разностные уравнения для гипергеометрических функций

Мы введем три формальных оператора T, Z, D , где Z — умножение на z , D — дифференцирование по z , а $T = Z(1 - Z)D$. В этих терминах гипергеометрическое уравнение имеет вид:

$$(TD + (c - (a + b + 1)Z)D)y = aby. \quad (2.2.1)$$

Обозначим оператор в левой части L :

$$L = TD + (c - (a + b + 1)Z)D.$$

Простые вычисления приведут к следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} LZ &= ZL + 2T - (a + b + 1)Z + c, \\ LT &= TL - 2ZL + (a + b - 1)T + L. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Кроме стандартного решения гипергеометрического уравнения — функций ^{*)} $F(a, b; c; z)$ — рассматриваются также функции со сдвинутым

^{*)} Мы используем здесь стандартное обозначение для гипергеометрической функции.

параметром a . Важно подчеркнуть, что характеристические показатели в особых точках $z = 0$, $z = 1$ фиксированы. Следовательно, сдвиг по a приводит к сдвигу по b в обратном направлении и рассматриваемые функции таковы: $F(a + j, b - j; c; z)$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots$. Все функции $F(a + j, b - j; c; z)$ нормированы условием

$$F(a + j, b - j; c; z)|_{z=0} = 1. \quad (2.2.3)$$

Для краткости мы введем обозначение:

$$F_j := F(a + j, b - j; c; z), \quad \lambda_j := (a + j)(b - j).$$

Уравнение (2.2.1) для набора представленных функций заменяется на

$$LF_j = \lambda_j F_j. \quad (2.2.4)$$

Наша цель — доказать следующее утверждение [113].

Теорема 2.1. *Гипергеометрические функции $F(a, b; c; z)$ удовлетворяют следующим разностным и дифференциально-разностным уравнениям:*

$$\begin{aligned} zF(a, b; c; z) &= \frac{a(b-c)}{(a-b)(a-b+1)} F(a+1, b-1; c; z) \\ &+ \frac{c(a+b-1)-2ab}{(a-b+1)(a-b-1)} F(a, b; c; z) \\ &+ \frac{b(a-c)}{(a-b)(a-b-1)} F(a-1, b+1; c; z), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} z(1-z)F'(a, b; c; z) &= \frac{ab(b-c)}{(a-b)(a-b+1)} F(a+1, b-1; c; z) \\ &+ \frac{ab(2c-a-b-1)}{(a-b+1)(a-b-1)} F(a, b; c; z) \\ &+ \frac{ab(a-c)}{(a-b)(a-b-1)} F(a-1, b+1; c; z). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Доказательство. Предположим, что функции TF_0 , ZF_0 разложены в ряды

$$TF_0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j F_j, \quad ZF_0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j F_j. \quad (2.2.7)$$

Действуя оператором L на обе части равенств (2.2.7), получаем:

$$\begin{aligned} LZ F_0 &= \lambda_0 Z F_0 + 2 T F_0 - (a + b + 1) Z F_0 + c F_0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j h_j F_j, \\ L T F_0 &= \lambda_0 T F_0 - 2 \lambda_0 Z F_0 + (a + b - 1) T F_0 + L F_0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j g_j F_j \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda_j - (a + b + 1)) h_j F_j + 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j F_j + c F_0 &= 0, \\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda_j + a + b - 1) g_j F_j - 2 \lambda_0 \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j F_j + \lambda_0 F_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Приравнявая нулю коэффициенты перед различными функциями F_j , мы получаем следующую неоднородную систему для коэффициентов g_0, h_0 :

$$\begin{aligned} (a + b - 1) g_0 - 2 a b h_0 + a b &= 0, \\ 2 g_0 - (a + b + 1) h_0 + c &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Решением системы (2.2.10) будет

$$h_0 = \frac{c(a + b - 1) - 2ab}{(a - b + 1)(a - b - 1)}, \quad g_0 = \frac{ab(2c - a - b - 1)}{(a - b + 1)(a - b - 1)}. \quad (2.2.11)$$

Согласно (2.2.9) коэффициенты g_j, h_j удовлетворяют однородной системе уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda_0 - \lambda_j + a + b - 1) g_j - 2 \lambda_0 h_0 &= 0, \\ 2 g_0 + (\lambda_0 - \lambda_j - (a + b + 1)) h_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Для существования нетривиального решения этих уравнений требуется, чтобы определители Δ_j равнялись нулю:

$$(\lambda_j - \lambda_0)^2 + 2(\lambda_j - \lambda_0) - (a - b)^2 + 1 = 0, \quad (2.2.13)$$

откуда следует:

$$(j^2 + j(a - b) + a - b - 1)(j^2 + j(a - b) - a + b - 1) = 0. \quad (2.2.14)$$

При произвольных a, b определитель равен нулю только при $j = 1$ и $j = -1$. Для того чтобы вычислить коэффициенты g_1, g_{-1}, h_1, h_{-1} , необходимо добавить условия

$$g_{-1} + g_0 + g_1 = 0, \quad h_{-1} + h_0 + h_1 = 0, \quad (2.2.15)$$

которые следуют из нормировки (2.2.3) и уравнения (2.2.7). Взяв вместе уравнения (2.2.12), (2.2.14) и (2.2.15), мы получаем следующие значения g_1, g_{-1}, h_1, h_{-1} :

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{ab(b-c)}{(a-b)(a-b+1)}, & g_{-1} &= \frac{ab(a-c)}{(a-b)(a-b-1)}, \\ h_1 &= \frac{a(b-c)}{(a-b)(a-b+1)}, & h_{-1} &= \frac{b(a-c)}{(a-b)(a-b-1)}. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Коэффициенты g_j, h_j подчиняются следующим условиям симметрии:

$$g_1(a, b) = g_{-1}(b, a), \quad h_1(a, b) = h_{-1}(b, a).$$

При обсуждении бесконечных рядов наши соображения носили формальный характер. Однако при конечном числе членов и известных коэффициентах можно действовать оператором L на TF_0 и ZF_0 и непосредственно проверять справедливость соотношений (2.2.5) и (2.2.6). $\square$

Если $a = -n$, $c = \alpha + 1$, $b = \alpha + \beta + n + 1$, рекуррентные соотношения (2.2.4), (2.2.5) обращаются в рекуррентные соотношения, порождающие полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}((1-z)/2)$, с указанной выше нормировкой.

2.2.3. Конфлюэнтные гипергеометрические функции

С помощью процедуры конфлюэнции нетрудно получить из соотношений (2.2.5)–(2.2.6) рекуррентные соотношения для конфлюэнтной гипергеометрической функции $\Phi(a; c; z)$, нормированной соотношением $\Phi(a; c; z)|_{z=1} = 1$:

$$z\Phi(a; c; z) = a\Phi(a+1; c; z) + (c-2a)\Phi(a; c; z) + (a-c)\Phi(a-1; c; z), \quad (2.2.17)$$

$$z\Phi'(a; c; z) = a(\Phi(a+1; c; z) - z\Phi(a; c; z)). \quad (2.2.18)$$

В случае РКГУ разностные уравнения можно обсуждать прямо для модифицированных функций Бесселя. Рассмотрим два оператора: S — деление на z и D — дифференцирование. Если взять оператор $L = z^2 D^2 + zD - (z^2 + \nu^2)$ из уравнения (2.1.44), выполняется следующее коммутационное соотношение:

$$LD = DL - 2SL + D - 2\nu^2 S, \quad LS = SL + S - 2D.$$

Предположим, что

$$DI_\nu(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k I_{\nu+k}(z), \quad SI_\nu(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k I_{\nu+k}(z). \quad (2.2.19)$$

Действуя на члены в обеих частях уравнения (2.2.19) оператором L , мы приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k(2\nu + k - 1)a_k + 2\nu^2 b_k) I_{\nu+k}(z) &= 0, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k(2\nu + k - 1)b_k + 2a_k) I_{\nu+k}(z) &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что функции $I_\nu(z)$ являются линейно независимыми. Из этого факта следует, что при любом k выполняется линейная однородная система уравнений для a_k, b_k :

$$\begin{aligned} k(2\nu + k - 1)a_k + 2\nu^2 b_k &= 0, \\ k(2\nu + k - 1)b_k + 2a_k &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Только при $k = \pm 1$ определитель этой системы равен нулю, так что существует ненулевое решение (2.2.20):

$$a_1 = -\nu b_1, \quad a_{-1} = \nu b_{-1}. \quad (2.2.21)$$

Явные значения a_1, b_1, a_{-1}, b_{-1} получаются прямым вычислением первых членов разложений в ряд в окрестности точки $z = 0$. В итоге получаем следующие соотношения для модифицированных функций Бесселя:

$$DI_\nu(z) = \frac{1}{2}(I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z)), \quad SI_\nu(z) = \frac{1}{2\nu}(I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z)). \quad (2.2.22)$$

Подобные соотношения справедливы и для функций Бесселя:

$$DJ_\nu(z) = \frac{1}{2}(J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)), \quad SJ_\nu(z) = \frac{1}{2\nu}(J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)). \quad (2.2.23)$$

В случае БГУ изучаются более известные функции $D_\nu(z)$. Это решения уравнения (2.1.28). Можно опять-таки получить коммутационные соотношения, обозначая дифференциальный оператор, соответствующий этому уравнению, через L и вводя, как и выше, операторы D и Z :

$$LD = DL + \frac{Z}{2}, \quad LZ = ZL + 2D.$$

Предположим, что выполняется

$$DD_v(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k D_{v+k}(z), \quad ZD_v(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k D_{v+k}(z). \quad (2.2.24)$$

Тогда, действуя на обе части представления (2.2.24) оператором L , мы приходим, как и в предыдущем случае, к однородной системе уравнений для коэффициентов a_{v+k} , b_{v+k} :

$$2a_k + kb_k = 0, \quad \frac{1}{2}b_k + ka_k = 0. \quad (2.2.25)$$

Только при $k = \pm 1$ определитель соответствующей системы уравнений равняется нулю, так что существует ненулевое решение

$$b_1 = -2a_1, \quad b_{-1} = 2a_{-1}. \quad (2.2.26)$$

Фактические значения a_1 , a_{-1} вычисляются сравнением первых членов соответствующих асимптотических разложений в окрестности бесконечности. Это приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} DD_v(z) &= -\frac{1}{2}D_{v+1}(z) + \frac{v}{2}D_{v-1}(z), \\ ZD_v(z) &= D_{v+1}(z) + vD_{v-1}(z). \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

2.3. Интегральные представления и интегральные соотношения

2.3.1. Предварительные леммы

Здесь будут получены некоторые интегральные формулы для решений уравнений гипергеометрического класса. Мы опишем наиболее общие соотношения, которые справедливы для всех уравнений и всех локальных решений и для которых можно проследить принцип конфлюэнции.

В качестве основного интегрального соотношения рассмотрим следующее:

$$y(z) = \int_C K\{\varphi(z, \xi)\} v(\xi) d\xi. \quad (2.3.1)$$

При этом предполагается, что ядро $K(\varphi)$ выражено в терминах элементарных функций, функция $\varphi(z, \xi)$ является одним из двух мономов

$$\varphi_1(z, \xi) = z\xi, \quad (2.3.2)$$

$$\varphi_2(z, \xi) = z - \xi, \quad (2.3.3)$$

а C — подходящий контур на комплексной ξ -плоскости. Функция $y(z)$ принадлежит гипергеометрическому классу. Если функция $v(\xi)$ может

быть выражена в терминах элементарных функций, то уравнение (2.3.1) будет *интегральным представлением*. Если эта функция является решением уравнения гипергеометрического класса, тогда уравнение (2.3.1) называется *интегральным соотношением*. Если $K\{\varphi(z, \xi)\} = \exp(z\xi)$, то мы получаем обобщение преобразования Лапласа.

Возможные приложения формул (2.3.1) включают в себя:

- вывод матриц монодромии для функций гипергеометрического класса;
- получение численных значений спецфункций.

Для удобства мы еще раз выпишем дифференциальные уравнения гипергеометрического класса:

$$L_z^{\{1,1;1\}}y(z) = [z(1-z)D^2 + \{c - (a+b+1)z\}D - ab]y(z) = 0, \quad (2.3.4)$$

$$L_z^{\{1;2\}}y(z) = (zD^2 + (c-z)D - a)y(z) = 0, \quad (2.3.5)$$

$$L_z^{\{1;3/2\}}y(z) = (zD^2 + cD - 1)y(z) = 0, \quad (2.3.6)$$

$$L_z^{\{;3\}}y(z) = (D^2 - zD - a)y(z) = 0, \quad (2.3.7)$$

$$L_z^{\{;5/2\}}y(z) = (D^2 - z)y(z) = 0. \quad (2.3.8)$$

В дальнейшем интегральные и дифференциальные операторы обсуждаются на формальном уровне строгости. Это означает, что все интегралы предполагаются сходящимися, а все внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям, — обращающимися в нуль. Выполнение этих условий может быть достигнуто с помощью дополнительных условий на параметры уравнения и подходящим выбором контура интегрирования.

Лемма 2.1. Пусть L_z и $\hat{L}_\xi$ — линейные дифференциальные операторы второго порядка с полиномиальными коэффициентами. Предположим, что функции $y(z)$ и $v(\xi)$ удовлетворяют уравнениям

$$L_z y(z) = 0, \quad (2.3.9)$$

$$\hat{L}_\xi v(\xi) = 0 \quad (2.3.10)$$

и связаны друг с другом соотношением (2.3.1). Тогда в качестве ядра $K(z, \xi)$ можно выбрать решение уравнения в частных производных:

$$(L_z - f(z)\hat{L}_\xi^*)K(z, \xi) = 0 \quad (2.3.11)$$

с подходящей функцией $f(z)$.

Доказательство. Доказательство следует из уравнений

$$\begin{aligned} L_z y(z) &= \int_C v(\xi)(L_z - f(z)\hat{L}_\xi^*)K(z, \xi)d\xi + \int_C f(z)K(z, \xi)\hat{L}_\xi v(\xi)d\xi \\ &= \int_C v(\xi)(L_z - f(z)\hat{L}_\xi^*)K(z, \xi)d\xi = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Лемма 2.2. Предположим, что $\tilde{L}_\xi$ является линейным дифференциальным оператором первого порядка с полиномиальными коэффициентами, а функция $v(\xi)$ — решением уравнения

$$\tilde{L}_\xi v(\xi) = 0. \quad (2.3.12)$$

Если справедливо интегральное соотношение (2.3.1), то в качестве ядра $K(z, \xi)$ может быть выбрано решение уравнения в частных производных

$$(L_z - f_1(z)\tilde{L}_\xi^*D_\xi - f_2(z)\tilde{L}_\xi^*)K(z, \xi) = 0, \quad D_\xi = \frac{d}{d\xi}, \quad (2.3.13)$$

с подходящими функциями $f_1(z), f_2(z)$.

Доказательство. Доказательство следует из уравнений

$$\begin{aligned} L_z y(z) &= \int_C v(\xi)(L_z - f_1(z)\tilde{L}_\xi^*D_\xi - f_2(z)\tilde{L}_\xi^*)K(z, \xi)d\xi \\ &\quad + \int_C K(z, \xi)(f_1(z)D_\xi\tilde{L}_\xi + f_2(z)\tilde{L}_\xi)v(\xi)d\xi \\ &= \int_C v(\xi)(L_z + f_1(z)\tilde{L}_\xi^*D_\xi - f_2(z)\tilde{L}_\xi^*)K(z, \xi)d\xi = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Наша ближайшая цель — факторизация уравнений (2.3.11), (2.3.12) и сведение их к обыкновенным дифференциальным уравнениям по переменным (2.3.2), (2.3.3). Ключевым шагом при этой факторизации является факторизация слагаемого со второй производной, так как он не содержит никаких свободных параметров, которые дают определенную свободу действий.

2.3.2. Интегральные представления

Первый пример ядра, при котором происходит факторизация, представляет собой ядро типа

$$K(z, \xi) = K(\eta), \quad \eta = z\xi.$$

В этом случае используется конструкция (2.3.12)–(2.3.13). Предположим

$$\tilde{L}_\xi = \xi(\xi - 1)D_\xi + (\sigma - (\rho + \sigma)\xi), \quad (2.3.14)$$

что соответствует решению $v(z) = z^\sigma(1 - z)^\rho$. Тогда, при $f_1(z) = z^{-1}$, $f_2(z) = 0$, мы получаем из (2.3.13) следующее представление:

$$\begin{aligned} -L_z + \frac{1}{z} \tilde{L}_\xi^* D_\xi &= \eta(\eta - 1)D_\eta^2 + \{(a + b + 1)\eta - (\sigma + 1)\}D_\eta \\ &\quad + ab + \xi(\rho + \sigma + 2 - c)D_\eta. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Последний член в (2.3.15) обнуляется вследствие условия $\rho = c - \sigma - 2$, которое дает нам значение параметра ρ . Выбирая специальные значения параметра σ , можно получить несколько модификаций формулы (2.3.14). Приведем наиболее известные и широко применяемые результаты.

Теорема 2.2. Положим $\sigma = b - 1$ в (2.3.15). Тогда решением уравнения (2.3.12) будет $(1 - z\xi)^{-a}$. Следовательно, при условии $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ регулярное при $z = 0$ решение уравнения (2.3.4) — гипергеометрическая функция $F(a, b; c; z)$ — имеет интегральное представление:

$$\begin{aligned} y^{\{1,1;1\}}(a, b; c; z = 0, z) &= F(a, b; c; z) \\ &= B^{\{1,1;1\}} \int_0^1 (1 - z\xi)^{-a} (1 - \xi)^{c-b-1} \xi^{b-1} d\xi \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

с подходящим множителем $B^{\{1,1;1\}}$, определяемым нормировкой

$$(B^{\{1,1;1\}})^{-1} = \int_0^1 (1 - \xi)^{c-b-1} \xi^{b-1} d\xi = \frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}. \quad (2.3.17)$$

Интеграл в правой части сходится равномерно в любой компактной области, не содержащей точек интервала $[1, \infty[$. $\square$

Справедливы также формулы, возникающие из (2.3.16)–(2.3.17) при подстановке $a \leftrightarrow b$ с соответствующей заменой условий на параметры. Если взять $z = 1$ в (2.3.16), получится предельное значение гипергеометрической функции $F(a, b; c; 1)$ в другой особой точке $z = 1$:

$$F(a, b; c; 1) = B^{\{1,1;1\}} \int_0^1 (1 - \xi)^{c-b-a-1} \xi^{b-1} d\xi = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}. \quad (2.3.18)$$

Целая “лестница” интегральных соотношений для решений конфлюэнтных вариантов уравнений гипергеометрического класса (2.3.5)–(2.3.8) может быть получена с помощью принципа конфлюэнции.

Интегральное представление конфлюэнтных гипергеометрических функций имеет вид:

$$y^{\{1;2\}}(a; c; z = 0, z) = \Phi(a; c; z) = B^{\{1;2\}} \int_0^1 e^{z\xi} \xi^{a-1} (1-\xi)^{c-a-1} d\xi, \quad (2.3.19)$$

где $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$ и

$$(B^{\{1;2\}})^{-1} = \int_0^1 (1-\xi)^{c-a-1} \xi^{a-1} d\xi = \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}{\Gamma(c)}. \quad (2.3.20)$$

Из (2.3.16) с помощью подстановки $\xi \mapsto -\sqrt{ab}\xi$ при $a, b \rightarrow \infty$ получаем соотношение

$$y^{\{1;3/2\}}(c; z = +\infty, z) = B^{\{3/2\}} \int_0^\infty e^{-z\xi} \xi^{c-2} e^{-1/\xi} d\xi \quad (2.3.21)$$

для выбранного подходящим образом решения уравнения (2.3.6).

После подстановки в (2.3.19) $\xi \mapsto -\xi c^{-1/2}$ имеем при $\operatorname{Re} a > 1$

$$y^{\{3\}}(c; z = +\infty, z) = B^{\{3\}} \int_0^\infty e^{z\xi - \xi^2/2} \xi^{a-2} d\xi \quad (2.3.22)$$

для подходящим образом выбранного решения уравнения (2.3.5).

Чтобы выписать интегральное представление для решения уравнения Эйри (2.3.8), мы используем преобразование (2.3.21) вместе с заменой переменной интегрирования

$$\sqrt{z\xi} + \frac{\xi}{\sqrt{z}} = -2(2c)^{-1/3}s. \quad (2.3.23)$$

В результате получаем

$$y^{\{5/2\}}(z = +\infty, z) = B^{\{5/2\}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left[i\left(zs + \frac{s^3}{3}\right)\right] ds. \quad (2.3.24)$$

Пределы интегрирования в (2.3.24) выбраны из условия сходимости интеграла.

2.3.3. Интегральные соотношения

Мы начнем с использования ядра $K(z, \xi)$ в (2.3.1) в виде

$$K(z, \xi) = K(\xi), \quad \xi = z - t. \quad (2.3.25)$$

Предположим, что $L_z^{\{1,1;1\}}$ и $\hat{L}_\xi^{\{1,1;1\}*}$ являются дифференциальными операторами, соответствующими уравнению (2.3.4), но с разными наборами параметров: a, b, c и a', b', c' соответственно. Тогда выражение $L_z^{\{1,1;1\}} - \hat{L}_\xi^{\{1,1;1\}*}$ представимо в виде

$$\begin{aligned} L_z^{\{1,1;1\}} - \hat{L}_\xi^{\{1,1;1\}*} &= [1 - (z + \xi)] \xi D_\xi^2 \\ &+ \left[c + c' - \frac{1}{2} (a + a' + b + b') (z + \xi) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (a - a' + b - b') \xi \right] D_\xi - (ab - a'b'). \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Выражение (2.3.26) факторизуется:

$$\begin{aligned} L_z^{\{1,1;1\}} - \hat{L}_\xi^{\{1,1;1\}*} &= (1 - (z + \xi)) (\xi D_\xi^2 - (v - 1) D_\xi) \\ &+ \frac{1}{2} (a - a' + b - b') (\xi D_\xi - v), \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

если выполняются следующие соотношения между коэффициентами a, b, c и a', b', c' :

$$\begin{aligned} a + a' + b + b' + 2v &= 0, \quad c + c' + v - 1 = 0, \\ 2(ab - a'b') &= v(a - a' + b - b'). \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

В этом случае уравнение

$$(L_z - \hat{L}_\xi^*) K(z, \xi) = 0 \quad (2.3.29)$$

имеет решение

$$K(z, \xi) = (z - \xi)^v \quad (2.3.30)$$

с произвольным параметром v .

Система (2.3.28) имеет 2 набора решений:

$$\begin{aligned} a'_1 &= -a - v, & b'_1 &= -b - v, & c'_1 &= 1 - c - v; \\ a'_2 &= -b - v, & b'_2 &= -a - v, & c'_2 &= 1 - c - v. \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Рассмотрим наши дифференциальные операторы как операторные функции, зависящие от (комплексных) параметров. Так как в функцию

$L(a, b; c)$ параметры a и b входят симметричным образом, достаточно проверить только одно множество корней (2.3.31). Если выбрано первое множество, то выполняется соотношение

$$\hat{L}^{\{1,1;1\}*}(a, b; c) = L^{\{1,1;1\}}(-a - v, -b - v; 1 - c - v). \quad (2.3.32)$$

Оператор $\hat{L}^{\{1,1;1\}}$ соответствует уравнению (2.3.4), но с новым набором параметров a'', b'', c'' . Этот факт может быть выражен с помощью $\hat{L}^{\{1,1;1\}*}$ следующим образом:

$$\hat{L}^{\{1,1;1\}}(a, b; c) = \hat{L}^{\{1,1;1\}*}(1 - a, 1 - b; 2 - c). \quad (2.3.33)$$

Сравнивая (2.3.32) и (2.3.33), мы получаем

$$\hat{L}^{\{1,1;1\}}(a, b; c) = L^{\{1,1;1\}}(1 + a + v, 1 + b + v; 1 + c + v). \quad (2.3.34)$$

Формулы (2.3.30), (2.3.34) совместно с анализом сходимости и при специальном выборе параметров порождают некоторые интегральные соотношения для гипергеометрических функций.

Предположим, что контур интегрирования C является двойной петлей, охватывающей точки $\xi = 1$, $\xi = z$ в обоих направлениях, и функция $G(a, b; c; z)$ является вторым частным решением гипергеометрического уравнения, ветвящимся в точке нуль. Тогда гипергеометрическая функция $F(a, b; c; z)$ связана с $G(a, b; c; z)$:

$$F(a, b; c; z) = D \int_C (\xi - z)^v G(1 + a + v, 1 + b + v; 2 + a + b + v - c; 1 - \xi) d\xi; \quad (2.3.35)$$

подходящий множитель D определяется нормировкой.

Более полезные и известные результаты получаются при специальном выборе параметра v .

Из теоремы Фукса следует, что гипергеометрическое уравнение (2.3.4) имеет решение вида

$$v(z) = z^\sigma (1 - z)^\rho \quad (2.3.36)$$

с ненулевыми σ, ρ тогда и только тогда, когда либо $a = 1$, либо $b = 1$. К тому же если, к примеру, $b = 1$, то $\sigma = 1 - c$ и $\rho = c - b - 1$.

Таким образом, если параметр v в (2.3.31) принимает значения $v = -a$ или $v = -b$, то функция $v(z)$ может быть выбрана элементарной в форме (2.3.36).

Предположим, что параметры гипергеометрического уравнения удовлетворяют следующему условию: $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$. Тогда регулярное

в $z = 0$ решение уравнения (2.3.4) — гипергеометрическая функция $F(a, b; c; z)$ — имеет следующее интегральное представление:

$$F(a, b; c; z) = D^{\{1, 1; 1\}} \int_1^\infty (\xi - z)^{-a} (\xi - 1)^{c-b-1} \xi^{a-c} d\xi, \quad (2.3.37)$$

причем множитель $D^{\{1, 1; 1\}}$ определяется нормировкой.

Ограничения на параметры могут быть преодолены с помощью другого выбора контура интегрирования.

Третий набор утверждений возникает при выборе $\nu = -a - n - 1$ с неотрицательными целыми n . В этом случае гипергеометрическое уравнение имеет полиномиальное решение, что приводит к нижеследующему предположению.

Пусть $\nu = -a - n - 1$. Тогда функция $F(a, b; c; z)$ может быть представлена в виде

$$F(a, b; c; z) = \delta \int_1^\infty (\xi - z)^\nu F(-n, b - a - n; 1 + b - c - n; 1 - \xi) d\xi, \quad (2.3.38)$$

где множитель δ определяется нормировкой

$$\delta = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}. \quad (2.3.39)$$

Эквивалентность (2.3.35) и (2.3.38) нетрудно показать с помощью подстановки $\xi \mapsto \xi^{-1}$ под знаком интеграла.

2.4. Центральные двухточечные задачи связи

В данном разделе центральная двухточечная задача связи рассматривается несколько в ином контексте, чем в других главах настоящей книги. Объяснение этого лежит в особых свойствах специальных функций, принадлежащих гипергеометрическому классу, а именно в факте существования явных формул в терминах гамма-функции, связывающих локальные решения, фиксированные своим поведением в различных особых точках. Такие формулы отсутствуют для более общих классов спецфункций и заменяются некоторыми трансцендентными процедурами, которые могут быть реализованы только численными расчетами.

2.4.1. Стандартные наборы решений гипергеометрического уравнения

В каждой регулярной особой точке гипергеометрического уравнения может быть построен стандартный фундаментальный набор решений Фробениуса. В разделе 2.1 были представлены два таких решения, фиксированных поведением в $z = 0$, а именно $F(a, b; c; z)$, $z^{1-c}F(a + 1 - c, b + 1 - c; 2 - c; z)$. В каждой особой точке $z = 1$, $z = \infty$ можно определить аналогичную пару локальных решений. Каждые две пары этих решений могут быть связаны матрицей, которая называется матрицей связи. Матрицы связи можно выразить в терминах гамма-функции. Причина этого факта — в наличии интегральных представлений для гипергеометрической функции. Однако описанные шесть решений не исчерпывают все возможные локальные решения. Например, могут быть выполнены s -гомотопные преобразования при $z = 1$ и $z = \infty$, сохраняющие каноническую форму уравнения, что приводит к новым локальным решениям в окрестности точки $z = 0$. Но эти решения — те же самые функции, имеющие другие обозначения. Например, выполняется соотношение

$$F(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c; z). \quad (2.4.1)$$

Чтобы доказать соотношение (2.4.1), достаточно сравнить схему Римана для соответствующих функций и их поведение в точке $z = 0$. Более того, список локальных решений может быть расширен, если кроме s -гомотопных преобразований зависимой переменной рассматривать преобразования Мёбиуса независимой переменной. На этом пути нетрудно вывести соотношение:

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= (1 - z)^{-a} F\left(a, c - b; c; \frac{z}{z - 1}\right) \\ &= (1 - z)^{-b} F\left(c - a, b; c; \frac{z}{z - 1}\right). \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Всего таким образом может быть получено 24 так называемых решения Куммера. Среди них только 6, упомянутых выше, являются основными. Они и будут объектом дальнейших рассмотрений.

В окрестности точки $z = 0$ фундаментальный набор решений уравнения (2.1.1) может быть фиксирован следующим образом:

$$\vec{U}_0(z) = \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(a, b; c; z) \\ z^{1-c} F(a + 1 - c, b + 1 - c; 2 - c; z) \end{pmatrix}. \quad (2.4.3)$$

Здесь предполагается, что параметр c не является целым.

В окрестности другой особой точки $z = 1$ соответствующий набор решений описывается соотношениями:

$$\vec{U}_1(z) = \begin{pmatrix} u_3(z) \\ u_4(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(a, b; a + b + 1 - c; 1 - z) \\ (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; 1 + c - a - b; 1 - z) \end{pmatrix}. \quad (2.4.4)$$

На формальном уровне этот второй набор может быть получен из первого подстановкой

$$z \mapsto 1 - z, \quad c \mapsto a + b + 1 - c.$$

Третий набор решений, фиксированный поведением вблизи бесконечности, задается соотношениями

$$\vec{U}_\infty(z) = \begin{pmatrix} u_5(z) \\ u_6(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-a} F(a, b; a + b + 1 - c; 1/z) \\ z^{-b} F(c - a, c - b; 1 - c - a - b; 1/z) \end{pmatrix}. \quad (2.4.5)$$

Наборы решений (2.4.3), (2.4.4) выражаются друг через друга с помощью матрицы связи $S^{(10)}$:

$$\vec{U}_0(z) = S^{(10)} \vec{U}_1(z). \quad (2.4.6)$$

Матричные элементы $S_{jk}^{(10)}$, $j = 1, 2$; $k = 1, 2$, вычисляются с помощью формулы

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-a-b-1} dt = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}, \quad (2.4.7)$$

которая следует из интегрального представления гипергеометрической функции (см. (2.3.16)). Хотя для сходимости интегралов требуются некоторые ограничения на параметры, конечное выражение справедливо везде, где гамма-функция не обращается в бесконечность.

Предположим, что значения параметров удовлетворяют условиям

$$0 < c < 1, \quad 0 < c - a - b < 1.$$

В этом случае решения $u_2(z, z = 0)$, $u_4(z, z = 1)$ стремятся к нулю, когда z стремится к нулю и единице соответственно. Из соотношения связи (2.4.6) при $z = 0$ следует:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(10)} u_3(1) + S_{12}^{(10)} u_4(1) \\ S_{21}^{(10)} u_3(1) + S_{22}^{(10)} u_4(1) \end{pmatrix}.$$

В точке $z = 1$ выполняется соотношение

$$\begin{pmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(10)} \\ S_{21}^{(10)} \end{pmatrix}.$$

Эти два соотношения дают возможность получить матричные элементы матрицы связи:

$$\begin{aligned} S_{11}^{(10)} &= u_1(1), & S_{21}^{(10)} &= u_2(1), \\ S_{22}^{(10)} &= -\frac{u_2(1)u_3(1)}{u_4(1)}, & S_{12}^{(10)} &= \frac{1 - u_1(1)u_3(1)}{u_4(1)}. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Из (2.4.3), (2.4.4), (2.4.7) следует, что

$$\begin{aligned} u_1(1) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \\ u_2(1) &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}, \\ u_3(1) &= \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a+b+1-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)}, \\ u_4(1) &= \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1+c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}. \end{aligned}$$

С помощью непосредственных выкладок на основе тригонометрических тождеств и формулы отражения для гамма-функции (см. (А.2.6) в приложении А) элементы матрицы связи приводятся к виду:

$$\begin{aligned} S_{11}^{(10)} &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \\ S_{21}^{(10)} &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}, \\ S_{22}^{(10)} &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \\ S_{12}^{(10)} &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)}. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Элементы матрицы $S^{(\infty 0)}$ вычисляются аналогичным образом. Из соотношения (2.4.7) следует, что, если $a > b$,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \infty} (-z)^a u_1(z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} (-z)^a u_2(z) &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}, \\ u_3(1) &= \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a+b+1-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)}, \\ u_4(1) &= \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1+c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}.\end{aligned}$$

В результате мы получаем необходимые матричные элементы:

$$\begin{aligned}S_{11}^{(\infty 0)} &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}, \\ S_{12}^{(\infty 0)} &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}, \\ S_{21}^{(\infty 0)} &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \\ S_{22}^{(\infty 0)} &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)}.\end{aligned}\tag{2.4.10}$$

2.4.2. Соотношения связи для конфлюэнтного гипергеометрического уравнения

Локальные решения могут быть построены и для регулярной особой точки $z = 0$, и для иррегулярной особой точки $z = \infty$. В последнем случае имеются два решения, соответствующих линии Стокса $\arg z = 0$, два решения, соответствующих линии Стокса $\arg z = \pi$, и два решения, соответствующих линии Стокса $\arg z = -\pi$. Все они имеют интегральные представления. На их основе можно построить матрицы, аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе. Однако решения в окрестности иррегулярной особой точки соответствуют решениям Томе (формальным асимптотическим рядам). Матрицы связи для соответствующих асимптотических рядов намного более поучительны с точки зрения практических вычислений.

Принципиальным моментом является вопрос о том, соответствует ли асимптотическое разложение на линии Стокса однозначным образом самому решению. В случае рецессивного решения этот факт известен уже

давно (см., например, [90], [41], [109]). Однако последние исследования в области так называемого ресургентного анализа [120], [14], [8] показывают, что при определенном понимании асимптотических рядов это верно также и для доминантных решений. Строгое доказательство этого факта даже в простом случае выходит за рамки нашего изложения. Следовательно, приведенные ниже наглядные вычисления некоторых соотношений связи на основе процедуры конфлюэнции ни в коей мере не являются строгими. Другие соотношения приведены без доказательства в табл. 2.8.

Выпишем исходное соотношение для гипергеометрических функций:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b+1-c; 1-z) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z). \quad (2.4.11)$$

Перепишем уравнение (2.4.11) в более привычных обозначениях, учитывая (2.4.2):

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} z^{-a} \\ &\quad \times F\left(a, a-c+1; a+b+1-c; 1-\frac{1}{z}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} z^{a-c} \\ &\quad \times F\left(c-a, 1-a; c-a-b+1; 1-\frac{1}{z}\right) \\ &= A(b)f_1(b; z) + B(b)f_2(b; z). \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$A(b) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} b^{-a}, \quad B(b) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} b^{c-a}.$$

При этом определение функций $f_1(b; z)$ и $f_2(b; z)$ становится очевидным. Согласно принципу конфлюэнции, функции в левой и правой частях уравнения (2.4.12) стремятся при $b \rightarrow \infty$ к частным решениям конфлюэнтного гипергеометрического уравнения. Найдем сначала пределы $\lim_{b \rightarrow \infty} A(b)$ и $\lim_{b \rightarrow \infty} B(b)$. Это возможно при некоторых дополнительных ограничениях — когда либо $\pi - \varepsilon > \arg b > \varepsilon$, либо $-\pi + \varepsilon < \arg b < -\varepsilon$. Допустим, что выполняется последнее предположение. Сохраняя старший

Таблица 2.8. Формулы связи для конфлюэнтных гипергеометрических функций

Решения	Луч или сектор	Решения Томе
$\Psi(a; c; z)$	$\arg z = 0$ $ \arg z < 2\pi - \varepsilon$	$y_1^{\{1,2\}}(a; c; z)$
$\Psi(a; c; z)$	$\arg z = 2\pi$	$y_1^{\{1,2\}}(z) + i e^{i\pi(c-a)} \sin[\pi(c-a)] \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(a)} y_2^{\{1,2\}}(z)$
$\Phi(a; c; z)$	$\arg z = 0$	$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} \cos(\pi a) y_1^{\{1,2\}}(z) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} y_2^{\{1,2\}}(z)$
$\Phi(a; c; z)$	$\pi - \varepsilon > \arg z > \varepsilon$	$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} e^{i\pi a} y_1^{\{1,2\}}(z) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} y_2^{\{1,2\}}(z)$

член асимптотик гамма-функций (см. в приложении А формулу Стирлинга (А.1.8)) и определение экспоненты

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{b}\right)^b = e,$$

приходим к следующим предельным выражениям:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} A(b) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} e^{i\pi a}, \quad \lim_{b \rightarrow \infty} B(b) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}.$$

Коэффициенты разложения в ряд функции

$$F\left(a, a-c+1; a+b+1-c; 1-\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \left(1-\frac{1}{z}\right)^k$$

подчиняются рекуррентному соотношению

$$(k+1)(k+a+b+1-c)h_{k+1} = (k+1)(k+a+1-c)h_k,$$

которое переходит при $b \rightarrow \infty$ в рекуррентное соотношение (2.1.20) для конфлюэнтной гипергеометрической функции $\Psi(a; c; z)$. С помощью аналогичных соображений мы находим, что коэффициенты r_k разложения в ряд

$$F\left(c-a, 1-a; c-a-b+1; 1-\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \left(1-\frac{1}{z}\right)^k$$

подчиняются рекуррентному соотношению (2.1.22) при $b \rightarrow \infty$. В результате мы приходим к следующей формуле связи для решений КГУ, справедливой при $\pi - \varepsilon > \arg z > \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \Phi(a; c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} e^{i\pi a} y_1^{\{1;2\}}(a; c; z = \infty, z) \\ &+ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} y_2^{\{1;2\}}(a; c; z = \infty, z). \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Выбирая параметр b в верхней полуплоскости, получаем формулу связи для z из нижней полуплоскости, подобную формуле (2.4.13). Необходимо только заменить $e^{i\pi a}$ на $e^{-i\pi a}$. На вещественной оси мы берем среднее арифметическое обоих выражений (см. [109]).

Таблица 2.9. Формулы связи для функций параболического цилиндра

Решение	Луч или сектор	Решения Томе
$D_v(z)$	$\arg z = 0$ $\arg z < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$	$y_1(a; z)$
$D_v(z)$	$\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$	$y_1(a; z) \pm e^{i\pi(v+1)} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(-v)} y_2(a; z)$
$D_v(z)$	$\pi - \varepsilon > \arg z > \frac{\pi}{2} + \varepsilon$	$y_1(a; z) + e^{i\pi(v+1)} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} y_2(a; z)$
$D_v(z)$	$\arg z = \pi$	$\cos(\pi v) e^{-i\pi v} y_1(a; z) + e^{i\pi(v+1)} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-v)} y_2(a; z)$
$V_v(z)$	$\arg z = 0$	$y_2(a; z)$

Таблица 2.10. Формулы связи для функций Эйри

Решение	Луч или сектор	Решения Томе
$2\sqrt{\pi} \operatorname{Ai}(z)$	$\arg z = 0$ $ \arg z < \frac{2\pi}{3} - \varepsilon$	$y_1^{\{5/2\}}(z)$
$2\sqrt{\pi} \operatorname{Ai}(z)$	$\arg z = \pm \frac{2\pi}{3}$	$y_1^{\{5/2\}}(z) \pm \frac{i}{2} y_2^{\{5/2\}}(z)$
$2\sqrt{\pi} \operatorname{Ai}(z)$	$\frac{4\pi}{3} - \varepsilon > \arg z > \frac{2\pi}{3} - \varepsilon$	$y_1^{\{5/2\}}(z) + i y_2^{\{5/2\}}(z)$
$\sqrt{\pi} \operatorname{Bi}(z)$	$\arg z = 0$	$y_2^{\{5/2\}}(z)$
$\sqrt{\pi} \operatorname{Bi}(z)$	$\frac{2\pi}{3} - \varepsilon > \arg z > \varepsilon$	$y_2^{\{5/2\}}(z) + \frac{i}{2} y_1^{\{5/2\}}(z)$
$\sqrt{\pi} \operatorname{Bi}(z)$	$\arg z = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{4} y_2^{\{5/2\}}(z) + \frac{i}{2} y_1^{\{5/2\}}(z)$

Дальнейшее использование матриц связи для гипергеометрических функций (см. (2.4.9), (2.4.10)) приводит к другим формулам связи для решений КГУ. Список формул связи между настоящими решениями конфлюэнтного гипергеометрического уравнения (конфлюэнтными гипергеометрическими функциями) и решениями Томе (которые в свою очередь однозначно соответствуют подходящим настоящим решениям) приведен в табл. 2.8.

Аналогичным образом могут быть построены формулы связи для других уравнений, принадлежащих гипергеометрическому классу. Однако простейший путь связан с использованием явных выражений для решений этих уравнений в терминах решений КГУ. Именно, если мы используем уравнение (2.1.33), то приходим к формулам связи между общепринятыми решениями биконфлюэнтного гипергеометрического уравнения (уравнения параболического цилиндра) и решениями Томе (табл. 2.9). Формулы связи для модифицированных функций Бесселя сразу следуют из формул связи для гипергеометрических функций (см. (2.1.51)–(2.1.52)). В заключение рассмотрим формулы связи между общепринятыми решениями редуцированного биконфлюэнтного гипергеометрического уравнения (функции Эйри) и решениями Томе этого уравнения (табл. 2.10).

2.5. Полиномиальные решения

2.5.1. Введение

Три уравнения гипергеометрического класса: именно гипергеометрическое уравнение, конфлюэнтное гипергеометрическое уравнение, биконфлюэнтное гипергеометрическое уравнение — порождают три системы ортогональных полиномов. Эти системы называются классическими ортогональными полиномами Якоби, Лагерра и Эрмита. По историческим причинам, а также в связи с приложениями уравнения для этих полиномов и их стандартное описание слегка отличаются от тех, что мы использовали ранее. Таким образом, мы сначала рассмотрим полиномы, которые будем называть гипергеометрическими полиномами и которые отнюдь не совпадают с общепринятыми объектами математической физики. Их значение определяется тем фактом, что они наследуют известные свойства гипергеометрических функций, обсуждавшиеся выше. Далее свойства гипергеометрических полиномов будут продолжены для более известных полиномов Якоби и их специальных случаев: полиномов Лежандра и полиномов Гегенбауэра. Процедура конфлюэнции позволяет получить соответствующие формулы для полиномов Лагерра и полиномов Эрмита.

Важно подчеркнуть, что упомянутые системы полиномов находятся в соответствии с наборами собственных функций, порожденных подходящими граничными условиями для исходного уравнения. Собственные значения этих граничных задач явно выражаются в терминах параметров уравнения. Мы обсуждаем в основном такие свойства полиномов, которые важны с точки зрения граничных задач.

В этом разделе мы полагаем, что все параметры вещественны. Это предположение упрощает формулировку результатов. С другой стороны, при описании ситуации с комплексными значениями параметров достаточно использовать аналитическое продолжение.

2.5.2. Полиномиальные решения гипергеометрического уравнения

Предположим, что параметр a принимает отрицательное целое значение $-n$, а параметр b — значение $n+b$ в разложении в ряд для гипергеометрической функции. Дополнительно будем считать, что выполняется условие $b > c > 1$. Тогда ряд (2.1.8) обрывается, и в результате получается полином порядка n . Будем называть эти полиномы *гипергеометрическими полиномами* и обозначать их $P_n^{\{1,1;1\}}(b;c;z)$. Ни это понятие, ни эти обозначения не являются распространенными в литературе. Однако они будут использованы нами как исходный пункт для более общепринятых

рассмотрений. Выполняется

$$\begin{aligned} P_n^{\{1,1;1\}}(b;c;z) &= F(-n, n+b; c; z) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k z^k \frac{n! \Gamma(c) \Gamma(k+n+b)}{k! (n-k)! \Gamma(n+b) \Gamma(k+c)}. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Гипергеометрические полиномы $P_n^{\{1,1;1\}}(b;c;z)$ удовлетворяют слегка измененному гипергеометрическому уравнению

$$z(1-z)y''(z) + (c - (b+1)z)y'(z) + n(b+n)y(z) = 0. \quad (2.5.2)$$

Нетрудно вычислить значения гипергеометрических полиномов в точках $z=0, z=1$:

$$\begin{aligned} P_n^{\{1,1;1\}}(b;c;0) &= 1, \\ P_n^{\{1,1;1\}}(b;c;1) &= (-1)^n \frac{\Gamma(c) \Gamma(n+b+1-c)}{\Gamma(n+c) \Gamma(b+1-c)}. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Последнее соотношение из этих двух формул следует из известного значения гипергеометрической функции в единице (см. (2.3.18)) и следующего соотношения для гамма-функции:

$$\frac{\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-b-n)} = (c-b-1) \dots (c-b-n) = \frac{\Gamma(n+b+1-c)}{\Gamma(b+1-c)}.$$

Часто также требуется знать коэффициент полинома при старшей степени

$$\kappa_n: P_n^{\{1,1;1\}}(b;c;z) \sim \kappa_n z^n, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.5.4)$$

Из уравнения (2.5.1) следует, что

$$\kappa_n = (-1)^n \frac{\Gamma(c) \Gamma(2n+b)}{\Gamma(n+b) \Gamma(n+c)}. \quad (2.5.5)$$

Гипергеометрические полиномы могут быть выражены в явном виде как результат дифференцирования элементарных функций.

Теорема 2.3. Следующая формула (формула Родрига) справедлива для гипергеометрических полиномов:

$$\begin{aligned} P_n^{\{1,1;1\}}(b;c;z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(n+c)} z^{1-c} (1-z)^{c-b} \\ &\quad \times \frac{d^n}{dz^n} [(z(1-z))^n z^{c-1} (1-z)^{b-c}] \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(n+c)} \frac{1}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} [(z(1-z))^n \rho(z)], \\ \rho(z) &= z^{c-1} (1-z)^{b-c}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

При этом функция $\rho(z)$ называется *весовой функцией*.

Доказательство. Вспомогательная функция $\varphi(z) = \rho(z)(z(1-z))^n$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$z(1-z)\varphi'(z) = (n+c-1-z(2n+b-1))\varphi(z).$$

Рассмотрим еще одну вспомогательную функцию $\psi(z)$, которая является n -й производной от предыдущей:

$$\psi(z) = D^n \varphi(z), \quad D^n = \frac{d^n}{dz^n}.$$

Дифференцируя $n+1$ раз уравнение для $\psi_n(z)$, мы получим уравнение для $\psi(z)$:

$$z(1-z)\psi''(z) + (2-c-z(3-b))\psi'(z) + (n+1)(1-n-b)\psi(z) = 0, \quad (2.5.7)$$

которое в действительности является гипергеометрическим уравнением. Ему соответствует обобщенная схема Римана

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & n+1 \\ c-1 & b-c & 1-b+n \end{array} ; z \right); \quad (2.5.8)$$

отсюда нетрудно увидеть, что после s -гомотопного преобразования

$$y(z) = z^{1-c} (1-z)^{c-b} \psi(z)$$

уравнение для функции $y(z)$ совпадает с уравнением для гипергеометрических полиномов. Сравнивая значения $y(z)$ и гипергеометрических полиномов в нуле, получаем:

$$y(0) = \frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(c)}.$$

Это завершает доказательство. □

Уравнение для гипергеометрических полиномов можно преобразовать к самосопряженной форме подстановкой

$$\begin{aligned} v_n(b; c; z) &= z^{(c-1)/2} (1-z)^{(b-c)/2} P_n^{\{1,1;1\}}(b; c; z) \\ &= (\rho(z))^{1/2} P_n^{\{1,1;1\}}(b; c; z). \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Квазиполиномы $v_n(b; c; z)$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z(1-z) \frac{d}{dz} v_n(b; c; z) - \frac{z(1-z)}{4} \left(\frac{(1-c)^2}{z^2} + \frac{(c-b)^2}{(1-z)^2} \right) v_n(b; c; z) \\ + \lambda_n v_n(b; c; z) = 0, \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

где

$$\lambda_n = n(n+b-c) + \frac{c(c-b)}{2} + \frac{c-1}{2}. \quad (2.5.11)$$

В результате получаем, что квазиполиномы $v_n(b; c; z)$ образуют бесконечное множество функций, ортогональных на интервале $[0, 1]$. Другими словами, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Гипергеометрические полиномы образуют бесконечную систему полиномов, ортогональных на $[0, 1]$ с весовой функцией $\rho(z) = z^{c-1}(1-z)^{b-c}$:*

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_n(b; c; z) v_m(b; c; z) dz &= \int_0^1 P_n^{\{1,1;1\}}(b; c; z) P_m^{\{1,1;1\}}(b; c; z) dz \\ &= N_n^2(b, c) \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. $\square$

В приложениях важно знать значение нормировочного коэффициента $N_n^2(b, c)$:

$$\begin{aligned} N_n^2(b, c) &= \int_0^1 v_n^2(b; c; z) dz = \int_0^1 \rho(z) [P_n^{\{1,1;1\}}(b; c; z)]^2 dz \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(n+c)} \int_0^1 P_n^{\{1,1;1\}}(b; c; z) \frac{d^n}{dz^n} [z^{n+c-1} (1-z)^{n+b-c}] dz \\ &= \frac{\Gamma^2(c) \Gamma(2n+b)}{\Gamma(n+b) \Gamma^2(n+c)} \int_0^1 [z^{n+c-1} (1-z)^{n+b-c}] dz \\ &= \frac{\Gamma^2(c) \Gamma(n+b-c+1)}{(2n+b) \Gamma(n+b) \Gamma(n+c)}. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

При вычислении этих значений были использованы формула Родрига для одного из сомножителей, интегрирование по частям и вычисление интегралов с помощью гамма-функции

$$\int_0^1 [z^{n+c-1}(1-z)^{n+b-c}] dz = \frac{\Gamma(n+c)\Gamma(n+b-c+1)}{\Gamma(2n+b+1)}. \quad (2.5.14)$$

Общее интегральное представление для гипергеометрической функции с помощью интеграла по интервалу $[0, 1]$ (см. (2.3.16)) непригодно для гипергеометрических полиномов, так как при выбранных значениях параметров интеграл расходится. Однако с помощью теоремы Коши и формулы Родрига можно получить интегральное представление другого типа:

$$P_n^{\{1,1;1\}}(b;c;z) = z^{1-c}(1-z)^{c-b} \frac{(n+1)!\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(n+c)} \oint \frac{\xi^{n+c-1}(1-\xi)^{n+b-c}}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi. \quad (2.5.15)$$

Это представление, например, справедливо для $0 < z < 1$ с разрезами на комплексной ξ -плоскости $]-\infty, 0]$ и $[1, +\infty[$, и интегрирование происходит по контуру, обходящему против часовой стрелки точку $\xi = z$.

Кроме формулы Родрига для получения явных или численных значений гипергеометрических полиномов часто используют рекуррентные соотношения. Соответствующие формулы можно легко получить из уравнений (2.2.5)–(2.2.6):

$$\begin{aligned} zP_n^{\{1,1;1\}}(b;c;z) &= -\frac{n(b-c)}{(b+n)(b+n-1)} P_{n-1}^{\{1,1;1\}}(b;c;z) \\ &= \frac{c(b-n-1)+2nb}{(b+n+1)(b+n-1)} P_n^{\{1,1;1\}}(b;c;z) \\ &\quad - \frac{b(n+c)}{(b+n)(b+n+1)} P_{n+1}^{\{1,1;1\}}(b;c;z), \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

$$\begin{aligned} z(1-z)[P_n^{\{1,1;1\}}(b;c;z)]' &= -\frac{nb(b-c)}{(b+n)(b+n-1)} P_{n-1}^{\{1,1;1\}}(b;c;z) \\ &\quad - \frac{nb(2c+n-b-1)}{(b+n+1)(b+n-1)} P_n^{\{1,1;1\}}(b;c;z) \\ &\quad + \frac{nb(n+c)}{(b+n)(b+n+1)} P_{n+1}^{\{1,1;1\}}(b;c;z). \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Разница с уравнениями (2.2.5)–(2.2.6) заключается в том, что рекуррентные соотношения для гипергеометрических полиномов обрываются

с левой стороны, удовлетворяя начальным условиям

$$P_0^{\{1,1;1\}}(b;c;z) = 1, \quad P_{-1}^{\{1,1;1\}}(b;c;z) = 0. \quad (2.5.18)$$

Второе условие есть формальное определение для $P_{-1}^{\{1,1;1\}}(b;c;z)$.

2.5.3. Полиномы Якоби

Полиномы Якоби отличаются от гипергеометрических полиномов тем, что они имеют:

- другой интервал рассмотрения;
- другое определение параметров;
- другую нормировку.

Разумеется, эти факты не являются “внутренними” свойствами полиномов. Следовательно, соответствующие формулы требуют лишь некоторой модификации. Мы подставляем в уравнение (2.5.12) новую независимую переменную $z \mapsto (1+z)/2$ и новые параметры $c-1 := \alpha$, $b-c := \beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$(1-z^2)y''(z) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)z)y'(z) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(z) = 0. \quad (2.5.19)$$

Соответствующая ОСР выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & -n \\ -\beta & -\alpha & n + \alpha + \beta + 1 \end{pmatrix}; z. \quad (2.5.20)$$

Полиномиальные решения этого уравнения называются *полиномами Якоби* и обозначаются $P_n^{(\alpha,\beta)}$. Их нормируют с помощью значений в крайних точках

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \frac{\Gamma(\beta + n + 1)}{n! \Gamma(\beta + 1)} \quad \text{или} \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)}. \quad (2.5.21)$$

При этом выполняется следующее соотношение между гипергеометрическими полиномами и полиномами Якоби:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^n \Gamma^2(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + 1)}{n! \Gamma^2(\alpha + 1) \Gamma(\beta + n + 1)} P_n^{\{1,1;1\}}(z). \quad (2.5.22)$$

И теперь теорему 2.3 можно переформулировать.

Теорема 2.5. Полиномы Якоби образуют систему полиномов, ортогональных на интервале $[-1, 1]$ с весовой функцией $\rho(z) = (1-z)^\alpha(1+z)^\beta$ и нормировкой

$$N_n^2(\alpha, \beta) = \int_{-1}^1 \rho(z) [P_n^{(\alpha, \beta)}(z)]^2 dz = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \quad (2.5.23)$$

□

Выбранная нормировка упрощает формулу Родрига для полиномов Якоби:

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(z) &= \frac{1}{(-2)^n n!} z^{-\beta} (1-z)^{-\alpha} \frac{d^n}{dz^n} [(1-z^2)^n (1+z)^\beta (1-z)^\alpha] \\ &= \frac{1}{(-2)^n n!} \frac{1}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} [(1-z^2)^n \rho(z)]. \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

Мы получаем также следующее интегральное представление:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \frac{1}{\rho(z)} \oint \frac{\rho(\xi) (1-\xi^2)^n}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi. \quad (2.5.25)$$

Рекуррентные соотношения (2.5.16)–(2.5.18) для гипергеометрических полиномов порождают (после учета новой нормировки) соответствующие рекуррентные соотношения для полиномов Якоби:

$$\begin{aligned} z P_n^{(\alpha, \beta)}(z) &= \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(z) \\ &\quad - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} P_n^{(\alpha, \beta)}(z) \\ &\quad + \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(z), \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

$$\begin{aligned} (1-z^2)[P_n^{(\alpha, \beta)}(z)]' &= (n+\alpha+\beta+1) \\ &\quad \times \left[-\frac{2n(n+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(z) \right. \\ &\quad + \frac{2n(\alpha-\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} P_n^{(\alpha, \beta)}(z) \\ &\quad \left. + \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(z) \right]. \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

Соотношения (2.5.26)–(2.5.27) часто используются для вычисления значений полиномов Якоби.

2.5.4. Специализация полиномов Якоби

Под специализацией полиномов Якоби мы понимаем системы полиномов, которые возникают при подходящей специализации параметров α, β . При этом может измениться и нормировка полиномов. Мы обсудим следующие специализации полиномов Якоби:

- полиномы Гегенбауэра;
- полиномы Лежандра;
- полиномы Чебышева.

Полиномы Гегенбауэра C_n^ν (их часто называют также *ультрасферическими полиномами*) получаются при условии $\alpha = \beta = \nu - 1/2$, $\nu > 1/2$ в уравнении (2.5.19), так что

$$(1 - z^2)y''(z) - (2\nu + 1)zy'(z) + n(n + 2\nu)y(z) = 0. \quad (2.5.28)$$

Уравнению (2.5.28) соответствует ОСП

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & -n \\ 1/2 - \nu & 1/2 - \nu & n + 2\nu \end{pmatrix}; z. \quad (2.5.29)$$

Во избежание осложнений формулировки результатов значение $\nu = 1/2$ в последующих формулах будет опускаться. Эта величина соответствует ситуации, когда полиномы Гегенбауэра специализируются в полиномы Лежандра. Нормировка C_n^ν фиксируется следующим образом:

$$C_n^\nu(1) = \frac{\Gamma(n + 2\nu)}{n! \Gamma(2\nu)}. \quad (2.5.30)$$

Уравнение (2.5.28) не изменяется при подстановке $z \mapsto -z$. Следовательно, полиномы Гегенбауэра являются четными или нечетными функциями, в соответствии с четностью числа n . Выбранная нормировка приводит к такому выражению для полиномов Гегенбауэра в терминах полиномов Якоби:

$$C_n^\nu(z) = \sigma_n P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(z), \quad \sigma_n = \frac{\Gamma(n + 2\nu)\Gamma(\nu + 1/2)}{\Gamma(2\nu)\Gamma(n + \nu + 1/2)}. \quad (2.5.31)$$

Соотношение (2.5.31) приводит к формуле Родрига

$$C_n^\nu(z) = \sigma_n \frac{1}{(-2)^n n!} \frac{1}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} [(1 - z^2)^n \rho(z)], \quad (2.5.32)$$

$$\rho(z) = (1 - z^2)^{\lambda-1/2}.$$

В качестве аналога теоремы 2.5 получаем следующее.

Теорема 2.6. *Полиномы Гегенбауэра образуют систему полиномов, ортогональных на интервале $[-1, 1]$ с весовой функцией $\rho(z) = (1 - z^2)^{\nu-1/2}$. Для них выбирается нормировка*

$$N_n^2(\nu) = \int_{-1}^1 \rho(z) [C_n^\nu(z)]^2 dz = \frac{2^{2\nu-1} \Gamma^2(\nu + 1/2)}{n!(n + \nu) \Gamma^2(2\nu)}. \quad (2.5.33)$$

□

Практические вычисления значений полиномов Гегенбауэра часто производятся с помощью рекуррентных соотношений, которые следуют из (2.5.26)–(2.5.27):

$$(n + 1)C_{n+1}^\nu(z) = 2(n + \nu)zC_n^\nu(z) - (n + 2\nu - 1)C_{n-1}^\nu(z), \quad (2.5.34)$$

$$(1 - z^2) \frac{d}{dz} C_n^\nu(z) = -nzC_n^\nu(z) + (n + 2\nu - 1)C_{n-1}^\nu(z). \quad (2.5.35)$$

Полиномы Лежандра $P_n(z)$ возникают при специализации полиномов Якоби при $\alpha = \beta = 0$ или специализации полиномов Гегенбауэра при $\nu = 1/2$. Они являются регулярными в двух регулярных особых точках $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$ решениями дифференциального уравнения

$$((1 - z^2)y'(z))' + n(n + 1)y(z) = 0. \quad (2.5.36)$$

Нормировка выбирается следующим образом:

$$P_n(1) = 1, \quad (2.5.37)$$

так что

$$P_n(z) = C_n^{1/2}(z) = P_n^{(0,0)}(z).$$

Уравнению (2.5.36) соответствует ОСР

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & n + 1 \end{pmatrix}; z. \quad (2.5.38)$$

Формула Родрига для полиномов Лежандра имеет вид:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n]. \quad (2.5.39)$$

При этом весовая функция равна единице. Из формулы Родрига следует интегральное представление, которое называют интегралом Шлефли:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(\xi^2 - 1)^n}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad (2.5.40)$$

где γ — контур, обходящий против часовой стрелки точку $\xi = z$.

Для полиномов Лежандра мы обсудим еще один объект, связанный с набором ортогональных полиномов — производящую функцию. Функция двух переменных $G(z, t)$ называется *производящей функцией* для множества полиномов $P_n(z)$ (не обязательно полиномов Лежандра), если ее ряд Тейлора по переменной t имеет вид

$$G(z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(z) t^j \quad (2.5.41)$$

с коэффициентами $P_j(z)$. Предположим, что $P_j(z)$ — полиномы Лежандра. Для достаточно малых t

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\xi^2 - 1}{2(\xi - z)} \right)^j t^j = \left(1 - \frac{t(\xi^2 - 1)}{2(\xi - z)} \right)^{-1}.$$

Комбинируя с уравнениями (2.5.40)–(2.5.41), мы приходим к следующему выражению:

$$G(z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(z) t^j = \frac{-1}{\pi i} \oint_{\gamma'} \frac{d\xi}{t\xi^2 - 2\xi + (2z - t)},$$

где контур γ' обходит ближайший к нулю при малых t корень знаменателя. Вычисляя интеграл с помощью теории вычетов, мы получаем итоговое выражение

$$G(z, t) = (1 - 2zt + t^2)^{-1/2}. \quad (2.5.42)$$

Производящая функция может быть построена для полиномов Якоби и полиномов Гегенбауэра, но соответствующие формулы более сложные, чем (2.5.42), и их вывод более громоздок.

Приведем основную теорему для полиномов Лежандра.

Теорема 2.7. *Полиномы Лежандра образуют систему полиномов, ортогональных на интервале $[-1, 1]$, их нормировка задается условием*

$$N_n^2 = \frac{2}{2n+1}. \quad (2.5.43)$$

□

Полиномы Лежандра обычно вычисляются с помощью трехчленного рекуррентного соотношения (ср. (2.5.26))

$$(n+1)P_{n+1}(z) = (2n+1)zP_n(z) - nP_{n-1}(z), \quad (2.5.44)$$

а производные полиномов — с помощью соотношения

$$(1-z^2) \frac{d}{dz} P_n(z) = -n(zP_n(z) - P_{n-1}(z)). \quad (2.5.45)$$

Полиномы Чебышева — это специализация полиномов Якоби с весовой функцией $\rho(z) = (1-z^2)^{\pm 1/2}$. Полиномы Чебышева первого рода $T_n(z)$ соответствуют знаку “−”, а полиномы Чебышева второго рода $U_n(z)$ — знаку “+”. Все формулы для этих полиномов нетрудно получить путем их представления в терминах полиномов Гегенбауэра:

$$T_n(z) = \frac{n}{2} C_n^0(z), \quad U_n(z) = C_n^1(z). \quad (2.5.46)$$

2.5.5. Полиномы Лагерра

Один из вариантов введения полиномов Лагерра связан с изучением конфлюэнтного гипергеометрического уравнения, аналогично тому, как это было сделано для гипергеометрических полиномов. Другой вариант подразумевает использование процедуры конфлюэнции. Мы представим оба подхода. Полиномы Лагерра $L_n^\alpha(z)$ возникают при фиксации параметров $a = -n$, $c = \alpha + 1$ в конфлюэнтном гипергеометрическом уравнении и в разложении Тейлора для конфлюэнтных гипергеометрических функций. Однако нормировки этих полиномов выбираются различным образом. В большинстве учебников по спецфункциям [26], [5], [90] принимается нормировка

$$L_n^\alpha(0) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}, \quad (2.5.47)$$

где $(\dots)_n$ — символ Похгаммера, в то время как в книгах по физике [87], [68] встречаются другие обозначения и нормировки.

Полиномы Лагерра удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$zy''(z) + (\alpha+1-z)y'(z) + ny(z) = 0. \quad (2.5.48)$$

Уравнения (2.5.47), (2.5.48) вместе с (2.1.17) приводят к следующей связи между полиномами Лагерра и конфлюэнтной гипергеометрической функцией:

$$L_n^\alpha(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \Phi(-n; \alpha+1; z). \quad (2.5.49)$$

Весовая функция для полиномов Лагерра может быть получена в результате процедуры конфлюэнции в выражении для весовой функции гипергеометрических полиномов

$$\lim_{b \rightarrow \infty} z^{c-1} \left(1 - \frac{z}{b}\right)^{b-c} = z^{c-1} e^{-z}.$$

При выбранной нами нормировке формула Родрига имеет вид:

$$L_n^\alpha(z) = \frac{1}{n! \rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} z^n \rho(z), \quad \rho(z) = z^\alpha e^{-z}. \quad (2.5.50)$$

Приведем основную теорему для полиномов Лагерра.

Теорема 2.8. *Полиномы Лагерра образуют систему полиномов, ортогональных на интервале $[0, \infty]$, с весовой функцией $\rho(z) = z^\alpha e^{-z}$. Нормировка фиксируется соотношением*

$$N_n^2 = \frac{1}{n!} \int_0^\infty L_n^\alpha(z) \frac{d^n}{dz^n} z^{n+\alpha} e^{-z} dz = \int_0^\infty z^{n+\alpha} e^{-z} dz = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}. \quad (2.5.51)$$

При практических вычислениях полиномы Лагерра получают с помощью рекуррентных соотношений

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(z) + (z-2n-\alpha-1)L_n^\alpha(z) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(z) = 0. \quad (2.5.52)$$

2.5.6. Полиномы Эрмита

Полиномы Эрмита $H_n(z)$ возникают как полиномиальные решения биконфлюэнтного гипергеометрического уравнения (см. (2.1.23)) при $a = -n$. Ряды (2.1.26) при этих значениях параметров обрываются. Полиномы Эрмита являются четными или нечетными функциями в соответствии с четностью параметра n . Формула Родрига для полиномов Эрмита имеет вид:

$$H_n(z) = \frac{(-1)^n}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} \rho(z), \quad \rho(z) = e^{-z^2}. \quad (2.5.53)$$

Выражение для весовой функции $\rho(z)$ может быть получено с помощью процедуры конфлюэнции из выражения для весовой функции для полиномов Лагерра. Старший коэффициент полинома получается при изучении асимптотического поведения $H_n(z) \sim 2^n z^n$.

Теорема 2.9. *Полиномы Эрмита образуют систему полиномов, ортогональных на интервале $[-\infty, \infty]$ с весовой функцией $\rho(z) = e^{-z^2}$. Нормировка фиксируется соотношением*

$$N_n^2 = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} dz = 2^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (2.5.54)$$

□

Выполняется следующее рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(z) - 2zH_n(z) + 2nH_{n-1}(z) = 0. \quad (2.5.55)$$

Так как биконфлюэнтное гипергеометрическое уравнение может быть получено из конфлюэнтного гипергеометрического уравнения подстановкой $z \mapsto z^2$, полиномы Эрмита могут быть выражены в терминах полиномов Лагерра.

Уравнения класса Гойна

3.1. Схема классификации

3.1.1. Уравнение Гойна

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка класса Гойна порождаются уравнением Гойна — фуксовым уравнением с четырьмя особыми точками. Уравнение Гойна было впервые исследовано К. Гойном [48]. Через сто лет А. Зеегер, А. Ронво и В. Лай организовали юбилейную конференцию, где говорилось о достижениях в этой области [106]. Наибольшее внимание было уделено конфлюэнтным уравнениям Гойна, которые впервые во всех деталях были представлены в статьях [32], [33]. В результате появилась первая книга об уравнениях Гойна [100].

Общая форма уравнения Гойна задается 12 комплексными параметрами, из которых 4 определяют положение особых точек, 7 являются характеристическими показателями особых точек (характеристические показатели связаны в силу теоремы Фукса) и 1 параметр — нелокальный, называемый аксессуарным. Можно фиксировать с помощью преобразования Мёбиуса положение трех особых точек в $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_4 = \infty$ соответственно и привести уравнение к форме, для которой три характеристических показателя равны нулю. Тогда число параметров уравнения равно шести.

Четыре конфлюэнтных уравнения возникают из уравнения Гойна при различных процедурах конфлюэнции. Пять редуцированных конфлюэнтных уравнений появляются в результате слабой конфлюэнции. Если рассматривать элементарные особые точки как специальные типы особых точек, в класс Гойна добавляется еще десять уравнений. Полная схема классификации была приведена в табл. 1.2.

Выпишем стандартную каноническую естественную форму уравнения Гойна:

$$\begin{aligned}
 L_z^{\{1,1,1;1\}}(a, b; c, d; t)y(z) - \lambda y(z) := \\
 := \left[z(z-1)(z-t)D^2 + \{c(z-1)(z-t) + dz(z-t) \right. \\
 \left. + (a+b+1-c-d)z(z-1)\}D + (abz - \lambda) \right] y(z) = 0. \quad (3.1.1)
 \end{aligned}$$

Локальные характеристические свойства этого уравнения описываются соответствующей ОСР:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t & \infty \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1-c & 1-d & c+d-a-b & b \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ ; z \\ ; \lambda \\ \end{matrix}.$$

Другие стандартные формы уравнения (3.1.1) можно найти в табл. 3.1.

В окрестностях каждой из четырех регулярных особых точек могут быть построены локальные решения уравнения (3.1.1). Стандартное решение уравнения (3.1.1), пригодное при

$$c \neq 0, -1, -2, \dots, \quad |z| < \min(|t|, 1),$$

называется функцией Гойна (решение Фробениуса)

$$y_1^{\{1,1,1,1\}}(z) = y_1^{\{1,1,1,1\}}(a, b; c, d; t; \lambda; z=0, z), \quad y_1^{\{1,1,1,1\}}(0) = 1.$$

Это одно из решений Фробениуса в окрестности точки $z=0$, определяемое степенным рядом

$$y_1^{\{1,1,1,1\}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{\{1,1,1,1\}} z^k. \quad (3.1.2)$$

Коэффициенты $g_k^{\{1,1,1,1\}}$ получаются из трехчленного рекуррентного соотношения, которое возникает после подстановки (3.1.2) в уравнение (3.1.1):

$$\begin{aligned} & t(k+1)(k+c)g_{k+1}^{\{1,1,1,1\}} \\ & - \{k[(k-1+c)(1+t) + dt + a + b + 1 - c - d] + \lambda\}g_k^{\{1,1,1,1\}} \\ & + (k-1+a)(k-1+b)g_{k-1}^{\{1,1,1,1\}} = 0, \quad g_0^{\{1,1,1,1\}} = 1. \end{aligned}$$

Другое частное решение уравнения Гойна задается функцией

$$\begin{aligned} y_2^{\{1,1,1,1\}}(a, b; c, d; t; \lambda; z=0, z) = \\ = z^{1-c} y_1^{\{1,1,1,1\}}(a+1-c, b+1-c; 2-c, d; t; \lambda'; z=0, z), \\ \lambda' = \lambda + (a+b+1-c)(1-c). \end{aligned}$$

Таблица 3.1. Стандартные формы уравнения Гойна

c	$L_z^{\{1,1,1,1\}}(a, b; c_j; t) =$ $= r(z)D^2 + \sum_{j=1}^3 c_j(z - z_{j+1})(z - z_{j+2})D + abz,$ $j = j(\text{mod } 3)$ $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = t$	$\sum_{j=1}^3 c_j = a + b + 1$ $r(z) = \prod_{j=1}^3 (z - z_j)$
c	$\left(\tilde{L}_z^{\{1,1,1,1\}} - \frac{\lambda}{r(z)} \right) y(z) = 0$	$\tilde{L} = \frac{L}{r(z)}$
n	$\left(N_z^{\{1,1,1,1\}} - \frac{\tilde{\lambda}}{r(z)} \right) w(z) = 0$	$y(z) = \prod_{j=0}^3 (z - z_j)^{-c_j/2} w(z)$ $\tilde{\lambda} = \lambda - \sum_{j=1}^3 c_j c_{j+1} z_{j+2}$
s-a	$\left(M_z^{\{1,1,1,1\}} - \tilde{\lambda} \right) v(z) = 0$	$w(z) = r^{1/2}(z)v(z)$ $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} + \sum_{j=1}^3 \frac{z_j}{2}$

Можно выписать модифицированную форму (3.1.1) с более симметричным положением особых точек:

$$\begin{aligned} L_z^{\{1,1,1;1\}}(a, b; c, d; t)y(z) - \lambda y(z) = \\ = \{(z^2 - 1)(z - t)D^2 + [c(z - 1)(z - t) + \\ + d(z + 1)(z - t) + (a + b + 1 - c - d)(z^2 - 1)]D \\ + (abz - \lambda)\}y(z) = 0. \end{aligned}$$

Параметры a, b, c, d, t, λ , характеризующие (3.1.1), можно разделить на три группы:

- (1) локальные (безразмерные) параметры a, b, c, d , определяющие характеристические показатели решений Фробениуса в особых точках;
- (2) скейлинговый параметр t , определяющий положение одной из особых точек;
- (3) аксессуарный параметр λ . Обычно он играет роль спектрального параметра.

При условиях $c = d = c + d - a - b = 1/2$ уравнение (3.1.1) имеет три элементарные особые точки в $z = 0$, $z = 1$ и $z = t$ и известно под названием уравнения Ламе в алгебраической форме [67].

3.1.2. Конфлюэнтное уравнение Гойна

Среди конфлюэнтных уравнений класса Гойна первым появляется однократно конфлюэнтное уравнение Гойна (КУГ):

$$\begin{aligned} L_z^{\{1,1;2\}}(a; c, d; t)y(z) + \lambda y(z) := [z(z - 1)D^2 \\ + \{-tz(z - 1) + c(z - 1) + dz\}D + (-ta z + \lambda)]y(z) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Оно порождается уравнением (3.1.1) после процедуры конфлюэнции, при которой сливаются особые точки $z = t$ и $z = \infty$. Соответствующие предельные переходы описаны в табл. 3.2. Число параметров при процедуре конфлюэнции уменьшается на один. Имеется несколько стандартных форм КУГ.

Уравнению (3.1.3) соответствует ОСР

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & & \\ 0 & 1 & \infty & ; z & \\ 0 & 0 & a & ; \lambda & \\ 1 - c & 1 - d & c + d - a & & \\ & & 0 & & \\ & & t & & \end{pmatrix}. \quad (3.1.4)$$

Таблица 3.2. Стандартные формы конфликтного уравнения Гойна

	УГ $\mapsto$ КУГ		
	$t := \varepsilon^{-1}, \quad b := p\varepsilon^{-1},$ $\varepsilon \rightarrow 0, \quad p := t$	$-\varepsilon L^{\{1,1,1,1\}} \rightarrow L^{\{1,1,2\}}$	
c	$(L_z^{\{1,1,2\}} + \lambda)y(z) = 0$	$L_z^{\{1,1,2\}}(a; c_j; t) =$ $= r(z)D^2 + \left(\sum_{j=1}^2 c_j(z - z_{j+1}) - tr(z)\right)D - atz,$ $j = j(\bmod 2)$	$z_1 = 0, z_2 = 1,$ $c_1 = c, c_2 = d$ $r(z) = \prod_{j=1}^2 (z - z_j)$
c	$\left(\bar{L}_z^{\{1,1,2\}} + \frac{\lambda}{r(z)}\right)y(z) = 0$	$\bar{L}_z^{\{1,1,2\}}(a; c_j; t) = D^2 + \left(\sum_{j=1}^2 \frac{c_j}{z - z_j} - t\right)D - \frac{atz}{r(z)}$	$\bar{L} = \frac{L}{r(z)}$
n	$\left(N_z^{\{1,1,2\}} + \frac{\tilde{\lambda}}{r(z)}\right)w(z) = 0$	$N_z^{\{1,1,2\}}(a; c_j; t) =$ $= D^2 - \frac{t^2}{4} + \sum_{j=1}^2 \frac{1 - (1 - c_j)^2}{4(z - z_j)^2} - \frac{1}{r(z)}\left(a - \sum_{j=1}^2 \frac{c_j}{2}\right)tz$	$y(z) = \prod_{j=1}^2 (z - z_j)^{-c_j/2} e^{iz/2} w(z),$ $\tilde{\lambda} = \lambda + \sum_{j=1}^2 \frac{c_j c_{j+1}}{4} + t \sum_{j=1}^2 \frac{c_j z_{j+1}}{2}$
s-a	$\left(M_z^{\{1,1,2\}} + \hat{\lambda}\right)v(z) = 0$	$M_z^{\{1,1,2\}}(a; c_j; t) =$ $= Dr(z)D - \frac{1}{4}r(z)\left(t^2 + \sum_{j=1}^2 \frac{(1 - c_j)^2}{(z - z_j)^2}\right) - \left(ab - \sum_{j=1}^2 \frac{c_j}{2}\right)tz$	$w(z) = r^{1/2}v(z)$ $\hat{\lambda} = \tilde{\lambda} - \frac{1}{2}$

В соотношениях (3.1.3)–(3.1.4) обозначение λ сохранено для аксессуарного параметра, a, c, d — для локальных параметров. Скейлинговый параметр t теперь не определяет положение особой точки, а фиксирует положение точек поворота. Мы обсудим этот факт в разделе 3.5.

В приложениях часто появляется самосопряженная форма КУГ. В этой форме регулярные особые точки находятся в точках $z = \pm 1$:

$$\frac{d}{dz}(z^2 - 1) \frac{d}{dz} v(z) + \left(-t^2(z^2 - 1) + 2ta z - v - \frac{m^2 + s^2 + 2msz}{z^2 - 1} \right) v(z) = 0. \quad (3.1.5)$$

Уравнение (3.1.5) называется обобщенным сфероидальным уравнением (ОСУ). К этому виду приводится уравнение (3.1.1) после подстановки $z \mapsto 2z - 1$. С физической точки зрения уравнение (3.1.5) является уравнением Шредингера с двумя кулоновскими и двумя центробежными потенциалами. Если последние совпадают, т.е. если $s = 0$, ОСУ превращается в кулоновское сфероидальное уравнение [65]

$$\frac{d}{dz}(z^2 - 1) \frac{d}{dz} v(z) + \left(-t^2(z^2 - 1) + 2ta z - v - \frac{m^2}{z^2 - 1} \right) v(z) = 0. \quad (3.1.6)$$

Если $a = 0$, уравнение (3.1.6) становится сфероидальным уравнением

$$\frac{d}{dz}(z^2 - 1) \frac{d}{dz} v(z) + \left(-t^2(z^2 - 1) - v - \frac{m^2}{z^2 - 1} \right) v(z) = 0. \quad (3.1.7)$$

Уравнение (3.1.7) при $m = 1/2$ является алгебраической формой уравнения Матье

$$\frac{d}{dz}(z^2 - 1) \frac{d}{dz} v(z) + \left(-t^2(z^2 - 1) - v - \frac{1}{4(z^2 - 1)} \right) v(z) = 0.$$

Дальнейшие модификации КУГ будут обсуждаться в главе 4. Для уравнения (3.1.3) могут быть построены локальные решения в окрестностях регулярных особых точек $z = 0$, $z = 1$ и иррегулярной особой точки $z = \infty$. Стандартное решение КУГ в окрестности точки $z = 0$ может быть представлено при $c \neq 0, -1, -2, \dots$, $|z| < 1$ с помощью ряда Тейлора:

$$y_1^{\{1,1;2\}}(a; c, d; t; \lambda; z = 0, z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{\{1,1;2\}} z^k. \quad (3.1.8)$$

Для коэффициентов $g_k^{\{1,1;2\}}$ справедливо трехчленное рекуррентное соотношение, которое можно получить, подставляя ряд (3.1.8) в уравнение (3.1.3):

$$(k+1)(k+c)g_{k+1}^{\{1,1;2\}} - \{k[(k-1+c)(1+t) + d+t] - \lambda\}g_k^{\{1,1;2\}} + t(k-1+a)g_{k-1}^{\{1,1;2\}} = 0, \quad g_0^{\{1,1;2\}} = 1. \quad (3.1.9)$$

Другой способ получить (3.1.9) — применить процедуру конфлюэнции к уравнению (3.1.3). Второе стандартное частное решение в окрестности точки $z = 0$ задается функцией

$$y_2^{\{1,1;2\}}(a; c, d; t; \lambda; z = 0, z) = z^{1-c} y_1^{\{1,1;2\}}(a+1-c; 2-c, d; t; \lambda'; z = 0, z),$$

$$\lambda' = \lambda + (a+1-c)(1-c).$$

С другой стороны, второе решение КУГ может быть построено как локальное решение в окрестности бесконечности (решение Томе), являющееся рецессивным решением при $\operatorname{Re} t > 0$:

$$y_1^{\{1,1;2\}}(a; c, d; t; \lambda; z = +\infty, z) = z^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{\{1,1;2\}} z^k, \quad (3.1.10)$$

причем справедливо следующее трехчленное соотношение для коэффициентов $h_k^{\{1,1;2\}}$:

$$t(k+1)h_{k+1}^{\{1,1;2\}} + [(k+a)(k+a+1+t-d-c) + \lambda]h_k^{\{1,1;2\}} + (k+a-c)(k-1+a)h_{k-1}^{\{1,1;2\}} = 0, \quad h_0^{\{1,1;2\}} = 1.$$

Процедуры конфлюэнции для особых точек КУГ можно реализовать двумя способами: слиянием регулярной особой точки $z = 1$ и иррегулярной особой точки на бесконечности, получая в итоге иррегулярную особую точку на бесконечности с s -рангом $R = 3$, либо слиянием двух регулярных особых точек $z = 0$ и $z = 1$, получая иррегулярную особую точку в $z = 0$ с s -рангом $R = 2$.

В первом случае в результате возникает биконфлюэнтное уравнение Гойна (БУГ):

$$L_z^{\{1;3\}}(a; c; t)y(z) + \lambda y(z) := [zD^2 + (-z^2 - tz + c)D + (-az + \lambda)]y(z) = 0. \quad (3.1.11)$$

Ему соответствует следующая ОСР:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & & \\ 0 & \infty & ; z & \\ 0 & a & ; \lambda & \\ 1-c & c+1-a & & \\ & 0 & & \\ & t & & \\ & 0 & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}.$$

Другие стандартные формы уравнения (3.1.11) и соответствующие процедуры конфлюэнции приведены в табл. 3.3. Уравнение (3.1.11) возникает при изучении вращающегося осциллятора в квантовой механике, задачах рассеяния на параболоиде и т. д.

Стандартное решение БУГ в окрестности $z = 0$, справедливое при $c \neq 0, -1, -2, \dots$, описывается функцией

$$y_1^{\{1;3\}}(a; c; t; \lambda; z = 0, z) := \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{\{1;3\}} z^k. \quad (3.1.12)$$

Коэффициенты $g_k^{\{1;3\}}$ подчиняются трехчленным рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} (k+1)(k+c)g_{k+1}^{\{1;3\}} + (tk+\lambda)g_k^{\{1;3\}} - (k-1+a)g_{k-1}^{\{1;3\}} &= 0, \\ g_0^{\{1;3\}} &= 1. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Рецессивное решение Томе на плюс бесконечности имеет вид

$$y_1^{\{1;3\}}(a; c; t; \lambda; z = +\infty, z) := z^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{\{1;3\}} z^{-k}, \quad (3.1.14)$$

причем справедливо следующее трехчленное соотношение для коэффициентов $h_k^{\{1;3\}}$:

$$\begin{aligned} (k+1)h_{k+1}^{\{1;3\}} + [t(k+a)+\lambda]h_k^{\{1;3\}} + (k+a-c)(k-1+a)h_{k-1}^{\{1;3\}} &= 0, \\ h_0^{\{1;3\}} &= 1. \end{aligned}$$

Второй вариант процедуры конфлюэнции, описанный выше, приводит к дважды конфлюэнтному уравнению Гойна (ДУГ) (табл. 3.4)

$$\begin{aligned} L_z^{\{2;2\}}(a; c; t)y(z) + \lambda y(z) &:= \\ := (z^2 D^2 + (-z^2 + cz + t)D + (-az + \lambda))y(z) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Ему соответствует ОСР

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \\ 0 & \infty & ; z \\ 0 & a & ; \lambda \\ 2-c & c-a & \\ 0 & 0 & \\ -t & 1 & \end{pmatrix}.$$

Таблица 3.3. Стандартные формы биконфлюэнтного уравнения Гойна

	КУГ $\mapsto$ БУГ		
	$z := \varepsilon z, \quad t := -\varepsilon^{-2},$ $d := p\varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2},$ $\varepsilon \rightarrow 0, \quad p := t$	$-\varepsilon L^{\{1,1,2\}} \rightarrow L^{\{1,3\}}$	
c	$(L_z^{\{1,3\}} + \lambda)v(z) = 0$	$L_z^{\{1,3\}}(a; c; t) = zD^2 + (-z^2 - tz + c)D - az$	
c	$(\bar{L}_z^{\{1,3\}} + \frac{\lambda}{z})y(z) = 0$	$\bar{L}_z^{\{1,3\}}(a; c; t) = D^2 + (-z - t + \frac{c}{z})D - a$	$\bar{L} = \frac{L}{z}$
n	$(N_z^{\{1,3\}} + \frac{\lambda}{z})w(z) = 0$	$N_z^{\{1,3\}}(a; c; t) =$ $= D^2 + \frac{1 - (1-c)^2}{4z^2} - \frac{1}{4}((z+t)^2 - 2(c+1) + 4a)$	$y(z) = e^{z^2/4 + tz/2 - c/2} w(z)$ $\bar{\lambda} = \lambda - \frac{ct}{2}$
s-a	$(M_z^{\{1,3\}} + \lambda)v(z) = 0$	$M_z^{\{1,3\}}(a; c; t) =$ $= DzD - \frac{(1-c)^2}{4z} - \frac{z}{4}((z+t)^2 - 2(c+1) + 4a)$	$w(z) = z^{1/2} v(z)$ $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}$

Таблица 3.4. Стандартные формы дважды конфлюэнтного уравнения Гойна

	КУГ $\mapsto$ ДУГ		
	$z := \varepsilon^{-1}z, \quad t := \varepsilon,$ $c := c - p\varepsilon^{-1},$ $d := p\varepsilon^{-1},$ $\varepsilon \rightarrow 0, \quad p := t$	$- \varepsilon L^{\{1,1,2\}} \rightarrow L^{\{2,2\}}$	
c	$(L_z^{\{2,2\}} + \lambda)y(z) = 0$	$L_z^{\{2,2\}}(a; c; t) = z^2 D^2 + (-z^2 + t + cz)D - az$	
c	$(\tilde{L}_z^{\{2,2\}} + \frac{\lambda}{z^2})y(z) = 0$	$\tilde{L}_z^{\{2,2\}}(a; c; t) = D^2 + \left(-1 + \frac{t}{z^2} + \frac{c}{z}\right)D - \frac{a}{z}$	$\tilde{L} = \frac{L}{z^2}$
n	$(N_z^{\{2,2\}} + \frac{\tilde{\lambda}}{z^2})w(z) = 0$	$N_z^{\{2,2\}}(a; c; t) = D^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2z^2}\right)^2 - \frac{a - c/2}{z} + \frac{t(1 - c/2)}{z^3}$	$y(z) = e^{z/2 + t/(2z)} z^{-c/2} w(z)$
s-a	$(M_z^{\{2,2\}} + \hat{\lambda})v(z) = 0$	$M_z^{\{2,2\}}(a; c; t) = D_z^2 D - \left(\frac{z}{2} - \frac{t}{2z}\right)^2 - \left(a - \frac{c}{2}\right)z + \frac{t(1 - c/2)}{z}$	$w(z) = zv(z)$

Таблица 3.5. Стандартные формы триконфлюэнтного уравнения Гойна

	БУГ $\mapsto$ ТУГ		
	$z := \varepsilon^{-1}z + \varepsilon^{-3},$ $t := -2\varepsilon^{-3},$ $c := -\varepsilon^{-6} - p\varepsilon^{-2},$ $\varepsilon \rightarrow 0, \quad p := t$	$\varepsilon L^{\{1;3\}} \rightarrow L^{\{4\}}$	
c	$(L_z^{\{4\}} + \lambda)y(z) = 0$	$L_z^{\{4\}}(a; t) =$ $= D^2 + (-z^2 - t)D - az$	
n	$(N_z^{\{4\}} + \bar{\lambda})w(z) = 0$	$N_z^{\{4\}}(a; t) =$ $= D^2 - \frac{1}{4}(z^2 + t)^2 - az$	$y(z) = e^{z^3/6+tz/2}w(z)$

Определим два решения Томе для (3.1.15). Одно из них является рецессивным при $z \rightarrow +\infty$

$$y_1^{\{2;2\}}(a; c; t; \lambda; z = +\infty, z) := z^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{\{2;2\}} z^{-k}, \quad (3.1.16)$$

причем справедливо следующее трехчленное рекуррентное соотношение для коэффициентов $h_k^{\{2;2\}}$:

$$\begin{aligned}
 -(k+1)h_{k+1}^{\{2;2\}} + [k(k+1+2a-c) + \lambda + a(a+1-c)]h_k^{\{2;2\}} \\
 - t(k-1+a)h_{k-1}^{\{2;2\}} = 0, \quad h_0^{\{2;2\}} = 1.
 \end{aligned}$$

Другое решение Томе, рецессивное при $z \rightarrow +0$ ($\text{Re } t > 0$), может быть построено в форме

$$y_1^{\{2;2\}}(a; c; t; \lambda; z = +0, z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\{2;2\}} z^k, \quad (3.1.17)$$

где коэффициенты $f_k^{\{2;2\}}$ подчиняются трехчленному рекуррентному соотношению:

$$t f_{k+1}^{\{2;2\}} + [k(k+c-1) + \lambda] f_k^{\{2;2\}} - (k-1-a) f_{k-1}^{\{2;2\}} = 0,$$

$$f_0^{\{2;2\}} = 1.$$

Последнее уравнение, возникающее при сильной процедуре конфлюэнции, — триконфлюэнтное уравнение Гойна (ТУГ) (табл. 3.5). Оно имеет одну иррегулярную особую точку на бесконечности, которая является результатом слияния всех четырех регулярных особых точек исходного УГ. Это уравнение характеризуется s -мультисимволом $\{;4\}$:

$$L_z^{\{;4\}}(a;t)y(z) + \lambda y(z) := (D^2 + (-z^2 - t)D + (-az + \lambda))y(z) = 0. \quad (3.1.18)$$

Ему соответствует ОСР

$$\begin{pmatrix} 4 \\ \infty & ; z \\ a & ; \lambda \\ 2 - a \\ 0 \\ t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормальная форма уравнения (3.1.18) известна в литературе как дифференциальное уравнение, описывающее квантовый ангармонический осциллятор. Рецессивное на плюс бесконечности решение Томе может быть построено в виде:

$$y_1^{\{;4\}}(a;t;\lambda;z = +\infty, z) := z^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{\{;4\}} z^{-k}, \quad (3.1.19)$$

причем для коэффициентов $h_k^{\{;4\}}$ выполняется следующее трехчленное рекуррентное соотношение:

$$(k+1)h_{k+1}^{\{;4\}} + [k(k-1+2a) + \lambda + a(a+1)]h_k^{\{;4\}} + t(k-1+a)h_{k-1}^{\{;4\}} = 0, \quad h_0^{\{;4\}} = 1.$$

3.1.3. Редуцированные конфлюэнтные уравнения Гойна

Здесь мы рассмотрим редуцированные конфлюэнтные уравнения Гойна. Эти уравнения можно рассматривать как результат процедуры слабой конфлюэнции. Существуют 5 уравнений этого сорта. Все они имеют по крайней мере одну особую точку с полуцелым s -рангом. Мы приведем только сами уравнения. Решения Томе в форме субнормальных асимптотических рядов обсуждаться не будут.

Таблица 3.6. Стандартные формы редуцированного конфликтного уравнения Гойна

	УГ $\mapsto$ РКУГ		
	$a := b := p^{1/2} \varepsilon^{-1}$, $t := \varepsilon^{-2}$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $p := t$	$-\varepsilon L^{\{1,1,1\}} \rightarrow L^{\{1,1,3/2\}}$	
c	$(L_z^{\{1,1,3/2\}} + \lambda) y(z) = 0$	$L_z^{\{1,1,3/2\}}(c_j; t) = r(z) D^2 + \left(\sum_{j=1}^2 c_j (z - z_{j+1}) \right) D - tz$, $j = j(\text{mod } 2)$	$z_1 = 0, z_2 = 1$, $c_1 = c, c_2 = d$ $r(z) = \prod_{j=1}^2 (z - z_j)$
c	$\left(\tilde{L}_z^{\{1,1,3/2\}} + \frac{\lambda}{r(z)} \right) y(z) = 0$	$\tilde{L}_z^{\{1,1,3/2\}}(c_j; t) = D^2 + \left(\sum_{j=1}^2 \frac{c_j}{z - z_j} \right) D - \frac{tz}{r(z)}$	$\tilde{L} = \frac{L}{r(z)}$
n	$\left(N_z^{\{1,1,3/2\}} + \frac{\nu}{r(z)} \right) w(z) = 0$	$N_z^{\{1,1,3/2\}}(c_j; t) = D^2 + \sum_{j=1}^2 \frac{1 - (1 - c_j)^2}{4(z - z_j)^2} - \frac{tz}{r(z)}$	$y(z) = \prod_{j=1}^2 (z - z_j)^{-c_j/2} w(z)$ $\nu = \lambda + \sum_{j=1}^2 \frac{c_j(c_{j+1} + 2tz_{j+1})}{4}$
s-a	$(M_z^{\{1,1,3/2\}} + \mu) v(z) = 0$	$M_z^{\{1,1,3/2\}}(c_j; t) = DrD - \frac{r(z)}{4} \sum_{j=1}^2 \frac{(1 - c_j)^2}{(z - z_j)^2} - tz$	$w(z) = r^{1/2} v(z)$ $\mu = \nu - \frac{1}{2}$

Первым выпишем редуцированное конфлюэнтное уравнение Гойна (РКУГ) (табл. 3.6):

$$(L_z^{\{1,1;3/2\}}(a;c,d;t) + \lambda)y(z) := (z(z-1)D^2 + (c(z-1) + dz)D + (-tz + \lambda))y(z) = 0. \quad (3.1.20)$$

Оно появляется после процедуры слабой конфлюэнции — когда особые точки $z = t$ и $z = \infty$ сливаются согласно

$$t \mapsto \frac{1}{\varepsilon}, \quad b \mapsto \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad a \mapsto \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad \lambda \mapsto -\frac{\lambda}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow \infty \\ \Rightarrow -\varepsilon L_z^{\{1,1,1;1\}}(a,b;c,d;t) \mapsto L_z^{\{1,1;3/2\}}(c,d;t).$$

Этому уравнению соответствует ОСР

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & \infty & ;z \\ 0 & 0 & (c+d)/2 - 1/4 & ;\lambda \\ 1-c & 1-d & (c+d)/2 - 1/4 \\ & & \sqrt{t} \end{pmatrix}.$$

Из (3.1.20) может быть получено редуцированное биконфлюэнтное уравнение (РБУГ) (табл. 3.7). Оно имеет иррегулярную особую точку на бесконечности с s -рангом $R(\infty) = 5/2$:

$$(L_z^{\{1;5/2\}}(c;t) + \lambda)y(z) := (zD^2 + cD + (-z^2 - tz + \lambda))y(z) = 0. \quad (3.1.21)$$

Ему соответствует ОСР

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & \infty & ;z \\ 0 & 1/4 - c/2 & ;\lambda \\ 1-c & 1/4 - c/2 \\ & t/2 \\ & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Если вместо процедуры сильной конфлюэнции в точке $z = 0$ имеет место процедура слабой конфлюэнции, мы получаем редуцированное дважды конфлюэнтное уравнение Гойна (РДУГ) (табл. 3.8). При этом, однако, необходимо предварительное преобразование уравнения. Именно, вместо функции $y(z)$ в (3.1.3) возьмем функцию $\check{y}(z)$:

$$y(z) = \prod_{j=1}^2 (z - z_j)^{-c_j/2} \check{y}(z).$$

Таблица 3.7. Стандартные формы редуцированного биконфлюэнтного уравнения Гойна

	КУГ $\mapsto$ РБУГ		
	$\tilde{L}_z^{\{1,1/2\}} \mapsto \tilde{L}_z^{\{1,1/2\}}$ $\left(\tilde{L}_z^{\{1,1/2\}} - \frac{\lambda}{z} \right) \tilde{y}(z) = 0$	$\tilde{L}_z^{\{1,1/2\}}(a; c; t) =$ $= D^2 + \frac{c}{z} D - \frac{t^2}{4} + \frac{1 - (1-d)^2}{4(z-1)^2} + \frac{ct}{2z} + \frac{(-a+d/2)t}{z-1}$	$y = (z-1)^{-d/2} e^{t/2} \tilde{y}$
	$z := \varepsilon^2 z, \quad t := 1,$ $4a := p\varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-6},$ $d := \varepsilon^{-3},$ $\varepsilon \rightarrow 0, \quad p := t$	$\varepsilon^{-4} \tilde{L}_z^{\{1,1/2\}} \rightarrow \tilde{L}_z^{\{1/2\}}$	
c	$(\tilde{L}_z^{\{1/2\}} - \lambda) y(z) = 0$	$L_z^{\{1/2\}}(c; t) = zD^2 + cD - z^2 - tz$	
c	$\left(\tilde{L}_z^{\{1/2\}} - \frac{\lambda}{z} \right) y(z) = 0$	$\tilde{L}_z^{\{1/2\}}(c; t) = D^2 + \frac{c}{z} D - z - t$	$\tilde{L} = \frac{L}{z}$
n	$\left(M_z^{\{1/2\}} - \frac{\mu}{z} \right) w(z) = 0$	$M_z^{\{1/2\}}(c; t) = D^2 - z - t + \frac{1 - (1-c)^2}{4z^2}$	$y(z) = z^{-c/2} w(z)$ $\mu = \lambda$
s-a	$(N_z^{\{1/2\}} - \nu) v(z) = 0$	$N_z^{\{1/2\}}(c; t) = DzD - z^2 - tz - \frac{(1-c)^2}{4z}$	$w(z) = z^{1/2} v(z)$ $\nu = \mu$

Таблица 3.8. Стандартные формы редуцированного двачлы конформного уравнения Гойна

	КУГ $\mapsto$ РДУГ		
	$z := \varepsilon^{-2}z, \quad t := \varepsilon^2, \quad d := -c,$ $c := \left(\frac{2p}{\varepsilon}\right)^{1/2},$ $\varepsilon \rightarrow 0, \quad p := t$	$\varepsilon^{-4} \tilde{L}_{\{1,1,2\}} \rightarrow L_{\{3/2,2\}}$	
c	$(L_{\{3/2,2\}} + \lambda)y(z) = 0$	$L_{\{3/2,2\}}(a; t) = z^2 D^2 - z^2 D - az - \frac{t}{z}$	
c	$\left(\tilde{L}_{\{3/2,2\}} - \frac{\lambda}{z^2}\right)y(z) = 0$	$\tilde{L}_{\{3/2,2\}}(a; t) = D^2 - D - \frac{t}{z^3} - \frac{a}{z}$	$\tilde{L} = \frac{L}{z^2}$
n	$\left(N_{\{3/2,2\}} + \frac{\nu}{z^2}\right)w(z) = 0$	$N_{\{3/2,2\}}(a; t) = D^2 - \frac{1}{4} - \frac{t}{z^3} - \frac{a}{z}$	$y(z) = e^{z/2}w(z)$
s-a	$(M_{\{3/2,2\}} + \mu)v(z) = 0$	$M_{\{3/2,2\}}(a; t) = Dz^2 D - \frac{z^2}{4} - az - \frac{t}{z}$	$w(z) = zv(z)$

Таблица 3.9. Стандартные формы ДРДУГ

	РКУГ $\mapsto$ ДРДУГ	
	$z := -\varepsilon^{-2}z, t := -p\varepsilon^2,$ $c := 2^{1/2}\varepsilon^{-1}, \varepsilon \rightarrow 0, p := t$	$\varepsilon^{-4}M^{\{1,1;3/2\}} \rightarrow M^{\{3/2;3/2\}}$
n	$\left(N_z^{\{3/2;3/2\}} + \frac{v}{z^2}\right)w(z) = 0$	$N_z^{\{3/2;3/2\}}(t) = D^2 - \frac{t}{z} - \frac{1}{z^3}$
s-a	$(M_z^{\{3/2;3/2\}} + \mu)w(z) = 0$	$M_z^{\{3/2;3/2\}}(t) = Dz^2D - tz - \frac{1}{z}$

КУГ преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 (\tilde{L}_z^{\{1,1;2\}}(a; c_j; t) + \tilde{\lambda}) \ddot{y}(z) = r(z) \left(D^2 - tD + \sum_{j=1}^2 \frac{1 - (1 - c_j)^2}{4(z - z_j)^2} \right. \\
 \left. + t \sum_{j=1}^2 \frac{c_j}{2(z - z_j)} - \frac{at}{z - 1} + \frac{\tilde{\lambda}}{r(z)} \right) \ddot{y}(z) = 0.
 \end{aligned}$$

Из этого уравнения после слабой конфлюэнции мы получаем:

$$(L_z^{\{3/2;2\}}(a; t) + \lambda) y(z) := \left(z^2 D^2 - z^2 D + \left(-az - \frac{t}{z} + \lambda \right) \right) y(z) = 0. \quad (3.1.22)$$

Данному уравнению соответствует ОСР

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 2 \\ 0 & \infty & ; z \\ 3/4 & a & ; \lambda \\ 3/4 & -a \\ \sqrt{t} & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Дважды редуцированное дважды конфлюэнтное уравнение Гойна имеет вид (табл. 3.9)

$$(L_z^{\{3/2;3/2\}}(t) + \lambda) y(z) = \left(z^2 D^2 + \left(-z + \lambda - \frac{t}{z} \right) \right) y(z) = 0. \quad (3.1.23)$$

Таблица 3.10. Стандартные формы редуцированного триконфлюэнтного уравнения Гойна

	БУГ $\mapsto$ РТУГ	
	$z := \varepsilon^{-4}z - \varepsilon^{-10}, \quad t := 3\varepsilon^{-10} - p\varepsilon^2,$ $\lambda := 3\varepsilon^{-20} - p\varepsilon^{-8} - v\varepsilon^{-2}, \quad c := 2\varepsilon^{-15} + 1$ $\varepsilon \rightarrow 0, \quad p := t, \quad v := \lambda$	$\varepsilon^{-8}N^{\{1;5/2\}} \rightarrow N^{\{7/2\}}$
n	$(N_z^{\{7/2\}} + v)w(z) = 0$	$N_z^{\{7/2\}}(t) = D^2 - z^3 - tz$

Ему соответствует ОСР

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 2 & \\ 0 & \infty & ;z \\ 3/4 & 1/4 & ;\lambda \\ 3/4 & -1/4 & \\ \sqrt{t} & 1 & \end{pmatrix}.$$

Последним является редуцированное триконфлюэнтное уравнение Гойна (табл. 3.10)

$$(L_z^{\{7/2\}}(t) + \lambda)y(z) := (D^2 + (-z^3 - tz + \lambda))y(z) = 0, \quad (3.1.24)$$

которому соответствует ОСР

$$\begin{pmatrix} 7/2 & & \\ \infty & ;z \\ 3/4 & ;\lambda \\ 3/4 & \\ t & \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

3.2. Типы решений

3.2.1. Решения уравнения Гойна

Среди наиболее важных для физических приложений решений линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка можно выделить несколько типов. Среди них:

- полиномиальные решения,
- собственные функции,
- решения Флоке,
- локальные решения (решения Фробениуса и Томе),
- решения задачи теории рассеяния и т. д.

Предварительное обсуждение этих решений можно найти в разделе 1.4. Здесь мы обсудим их более подробно, начиная с решений уравнения Гойна.

Сначала рассмотрим локальные решения в регулярных особых точках. Мы возьмем в качестве исходной каноническую форму уравнения. Одно из решений Фробениуса в особой точке $z = 0$, а именно $y_1^{\{1,1,1;1\}}(a, b; c, d; t; \lambda; z = 0, z)$, было введено и изучено в предыдущем разделе. В работе [100] эта функция обозначалась $Hl(t, \lambda; a, b, c, d; z)$. Так как имеются 4 особые точки и в каждой могут быть построены 2 решения Фробениуса, общее число локальных решений для данного уравнения равно 8. Однако ясно, что преобразование

$$y(z) = (z - z_j)^{\rho_2(z_j)} u(z), \quad (3.2.1)$$

где z_j — произвольная регулярная особая точка и $\rho_2(z_j)$ — соответствующий ненулевой характеристический показатель, сохраняет каноническую форму уравнения. Это означает, что с помощью (3.2.1) можно построить 24 решения, соответствующих конечным особым точкам. С другой стороны, особую точку на бесконечности можно поменять местами с любой конечной особой точкой, что увеличивает число локальных решений до 72. Разумеется, имеется много простых соотношений между этими решениями. Простейший способ их вывода — использовать схему Римана. Следует подчеркнуть, что все упомянутые решения могут быть выражены в терминах единственной функции $y_1^{\{1,1,1;1\}}(a, b; c, d; t; \lambda; z)$, определенной в предыдущем разделе. Аргументом функции в общем случае является дробно-рациональная функция z , а все параметры, кроме t , меняются. Для уравнения Гойна, в противоположность гипергеометрическому уравнению, нет явных выражений (по крайней мере в терминах гамма-функций) для матриц связи, связывающих решения, фиксированные в разных особых точках.

Собственные функции $y_n(a, b; c, d; t; z)$ мы рассмотрим как решения подходящей ЦДЗС. Подробно эта задача будет исследована в разделе 3.6. Здесь мы приведем только набросок этого исследования. Для простоты мы полагаем, что параметры a, b, c, d, t вещественны, и более того, что $t < 0$. Мы будем также считать, что $c > 0, d > 0$.

Задача на собственные значения для уравнения Гойна на интервале $[0, 1]$ может быть поставлена с помощью граничных условий

$$|y(0)| < \infty, \quad |y(1)| < \infty. \quad (3.2.2)$$

Функция $\omega(z)$, возникающая при преобразовании уравнения Гойна к его самосопряженной форме, представляется в виде

$$w(z) = \omega(z)y(z), \quad \omega(z) = z^{(c-1)/2}(1-z)^{(d-1)/2}(z-t)^{(e-1)/2}. \quad (3.2.3)$$

Собственные функции $y_n(a, b; c, d; t; z)$ подчиняются условию ортогональности с весовой функцией $\omega^2(z)$

$$\int_0^1 \omega^2(z)y_n(z)y_m(z)dz = 0, \quad n \neq m. \quad (3.2.4)$$

Собственные функции можно рассматривать и на других интервалах, например $[t, 0]$. Все наборы собственных функций, соответствующие уравнению Гойна, известны как функции Гойна.

Весьма деликатная проблема связана с выбором знака, с которым спектральный параметр входит в уравнение. С одной стороны, этот выбор не имеет принципиального значения. С другой стороны, более удобным является такой выбор, когда $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Этот факт фиксируется подходящим выбором знака параметра t . Выбранные ранее обозначения соответствуют $t < 0$. Асимптотическое поведение собственных значений обсуждается в следующих разделах. Функции Гойна можно вычислять различными способами. Общий подход к этой задаче представлен в разделе 3.6. Здесь мы обсудим один частный метод, пригодный только для уравнения Гойна (но не для конфлюэнтных его вариантов).

Разложим функции Гойна в ряд гипергеометрических полиномов (см. (2.5.1)):

$$y_n(a, b; c, d; t; z) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j P_j(c+d-1; c; z). \quad (3.2.5)$$

Для того чтобы оправдать выбор параметров этих полиномов, следует выписать дифференциальное уравнение (ср. (2.5.2)), решениями которого они являются:

$$\begin{aligned} K_n P_n(c+d-1; c; z) &= (z(1-z)D^2 + (c - (c+d)z)D \\ &+ n(n+c+d-1))P_n(c+d-1; c; z) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Характеристические показатели уравнения Гойна и уравнения (3.2.6) в особых точках $z = 0$ и $z = 1$ совпадают. Более того, оператор $L_z^{\{1,1,1;1\}}$, соответствующий уравнению Гойна, может быть выражен в терминах оператора K_n и операторов T и Z , введенных в разделе 2.5:

$$L_z^{\{1,1,1;1\}} = (t-z)K_n - (a+b+1-c-d)T + (ab+n(n+d+c-1))Z - t(n+d+c-1). \quad (3.2.7)$$

Это означает, что оператор $L_z^{\{1,1,1;1\}}$ действует на функции в правой части уравнения (3.2.6) как линейная комбинация операторов T и Z . Как следует из уравнений (2.5.16)–(2.5.17), коэффициенты разложения (3.2.5) удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$\alpha_j g_{j+1} + (\beta_j - \lambda)g_j + \gamma_j g_{j-1} = 0. \quad (3.2.8)$$

Вывод явных выражений для коэффициентов α_j , β_j , γ_j в уравнении (3.2.8) требует весьма громоздких вычислений. Эти коэффициенты можно найти в [100]:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= -\frac{(j+1)(j+c+d-a)(j+c+d-b)(j+d)}{(2j+c+d)(2j+c+d+1)}, \\ \beta_j &= \frac{1}{2} \left(\frac{(c-d)[j(j+c+d-1)(2a+2b-c-d) + (c+d-2)ab]}{(2j+c+d-2)(2j+c+d)} \right. \\ &\quad \left. + (1-2t)j(j+c+d-1) + ab \right), \\ \gamma_j &= -\frac{(j+a-1)(j+b-1)(j+c+d-2)(j+c-1)}{(2j+c+d-2)(2j+c+d-3)}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Только для $\lambda = \lambda_n$ решение уравнения (3.2.8) является рецессивным, так что ряд (3.2.5) сходится. Более тщательное изучение сходимости показывает, что в этом случае ряд сходится во внутренней области эллипса с фокусами $z = 0$ и $z = 1$ и с особой точкой $z = t$ на границе. Разложение (3.2.5) было предложено Свартхольмом [121].

Возникает вопрос, могут ли некоторые собственные функции обратиться в полиномы при дополнительных предположениях на параметры уравнения Гойна, как это было в случае гипергеометрического уравнения. Очевидно, что в этом случае собственная функция голоморфна в окрестности точки $z = t$. Необходимым для этого является следующее условие: один из параметров a , b — неположительное целое число. Так как можно выбрать любой из этих параметров, то возьмем

$$a = -n.$$

При этом предположении можно построить точно n собственных функций, соответствующих n собственным значениям. Нетрудно найти первое собственное значение и первую собственную функцию подстановкой полинома соответствующей степени с неопределенными коэффициентами в уравнение Гойна. К примеру, если $a = 0$,

$$y_1 = 1, \quad \lambda_1 = 0.$$

В общем случае для нахождения λ необходимо решить алгебраическое уравнение n -го порядка. Однако имеется надежда получить явные решения для специальных значений коэффициентов.

Для уравнений Гойна можно также ввести решения Флоке, связанные с парой особых точек, например $z = 0, z = 1$. Предположим, что γ является простым замкнутым контуром, обходящим против часовой стрелки эти точки. Введем на этом контуре гладкую параметризацию

$$\gamma: \quad z = \varphi(s), \quad s \in [0, 1], \quad \varphi(0) = \varphi(1) = z_0.$$

Решения Флоке определяются как решения, удовлетворяющие условию

$$y(\varphi(1)) = e^{2\pi i \sigma} y(\varphi(0)). \quad (3.2.10)$$

Величины σ называются *показателями Флоке* или *характеристическими показателями*. Они являются функциями параметров уравнения.

Пример. Пусть $\sigma = k, k \in \mathbb{Z}$. Тогда рассматриваемые функции $y(z)$ голоморфны в области D , содержащей особые точки $z = 0, z = 1$, и следовательно, при условии $c > 1, d > 1$ они являются собственными функциями соответствующей задачи на собственные значения. $\square$

Мы обозначим функции $y(z)$, удовлетворяющие уравнению Гойна и условию (3.2.10), как $Hp(a, b; c, d; t; \lambda; z)$. Они могут быть построены в виде ряда

$$Hp(a, b; c, d; t; \lambda; z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f_{\sigma+n}(z), \quad (3.2.11)$$

где функции $f_{\sigma+n}(z)$ в (3.2.11) имеют то же свойство (3.2.10), связанное с обходом пути, и то же поведение в особых точках $z = 0, z = 1$. Шмидт [103] предложил в качестве таких функций следующие:

$$f_{\sigma+n}(z) = z^{\sigma} F(-\sigma, 1 - c - \sigma; 2 - c - d - 2\sigma; z).$$

Имеется ряд теорем о сходимости соответствующих рядов (3.2.11) (см. [101], [103], [100]). Однако в общем случае зависимость характеристических показателей σ от параметров уравнения Гойна неизвестна и, следовательно, разложения (3.2.11) трудно использовать для практических вычислений.

3.2.2. Конфлюэнтные уравнения Гойна

Рассмотрим сначала конфлюэнтное уравнение Гойна. Два основных локальных решения — одно в регулярной особой точке $z = 0$, другое в иррегулярной особой точке $z = \infty$ — уже были введены в предыдущем разделе. К ним следует добавить еще три решения, соответствующие регулярным особым точкам, и еще три решения, фиксированные поведением на бесконечности (соответствующие различным характеристическим показателям и различным линиям Стокса). Можно увеличить это число перестановкой регулярных особых точек и s -гомотопными преобразованиями, сохраняющими каноническую форму уравнения. Однако это не приводит реально к каким-то принципиально новым решениям.

Рассматривая задачу на собственные значения для уравнения Гойна, мы получаем новую ситуацию. Именно, имеются две разные задачи на собственные значения на интервалах $[0, 1]$ и $[1, \infty[$ соответственно. Случай $] -\infty, 0]$ подобен $[1, \infty[$. При этом предполагается, что $c > 1, d > 1, t > 0$. Собственные функции на $[0, 1]$ называются угловыми, а на $[1, \infty[$ — радиальными. Первые обозначают $y_n^{(a)}(a; c, d; t; z)$, вторые — $y_n^{(r)}(a; c, d; t; z)$. Обе серии собственных функций ортогональны на соответствующих интервалах с весовой функцией

$$\omega^2(z), \quad \omega(z) = z^{(c-1)/2}(1-z)^{(d-1)/2} e^{pz/2},$$

т. е.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega^2(z) y_n^{(a)}(z) y_m^{(a)}(z) dz &= 0, \quad n \neq m, \\ \int_1^\infty \omega^2(z) y_n^{(r)}(z) y_m^{(r)}(z) dz &= 0, \quad n \neq m. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Асимптотическое поведение собственных значений при больших значениях параметра t обсуждается в разделе 3.5. Численная стратегия вычисления собственных функций и собственных значений в радиальном случае — в разделе 3.6.

Угловые собственные функции могут быть построены аналогичным (3.2.5) способом, именно:

$$y_n^{(a)}(a; c, d; t; z) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j P_j(c + d - 1; c; z). \quad (3.2.13)$$

Дальнейшие вычисления подобны (3.2.6)–(3.2.8) и вновь приводят к трехчленному рекуррентному соотношению

$$\sigma_j h_{j+1} + (\rho_j - \lambda) h_j + \kappa_j h_{j-1} = 0. \quad (3.2.14)$$

Коэффициенты σ_j , ρ_j , κ_j в уравнении (3.2.14) могут быть найдены с помощью процедуры конfluenceции:

$$\begin{aligned}\sigma_j &= -t \frac{(j+1)(j+c+d-a)(j+d)}{(2j+c+d)(2j+c+d+1)}, \\ \rho_j &= -t \frac{(c-d)[j(j+c+d-1)+a(c+d-2)/2]}{(2j+c+d-2)(2j+c+d)} \\ &\quad + j(j+c+d-1) - \frac{at}{2}, \\ \kappa_j &= t \frac{(j+a-1)(j+c+d-2)(j+c-1)}{(2j+c+d-2)(2j+c+d-3)}.\end{aligned}\tag{3.2.15}$$

Полиномиальные решения можно получить, только если $a = -n$. При этих значениях параметра a нельзя получить больше, чем n , полиномов. Собственные значения λ вычисляются как корни алгебраического уравнения n -го порядка. При этих значениях λ ряд (3.2.13) обрывается на конечном шаге. Некоторые специальные случаи обсуждаются в [65].

Радиальные собственные функции, соответствующие интервалу $[1, \infty[$, можно разложить в ряды по конfluenceнтным гипергеометрическим функциям. Более детальное обсуждение этих вопросов можно найти в [100].

3.3. Интегральные уравнения и интегральные соотношения

3.3.1. Введение

Интегральные представления для специальных функций гипергеометрического класса, как это следует из предыдущего изложения, позволяют упростить исследование свойств этих функций. Однако нет надежды получить подобные представления в терминах элементарных функций для специальных функций класса Гойна. Более того, интегральные представления этих функций в терминах специальных функций гипергеометрического класса также вряд ли возможны, так как это означало бы наличие интегральных представлений в виде двойных интегралов в терминах элементарных функций.

Однако имеются интегральные соотношения, связывающие специальные функции, принадлежащие классу Гойна, с таковыми же. Ядра этих соотношений выражаются либо в виде элементарных функций, либо также включают в себя специальные функции гипергеометрического класса. Для собственных функций часто можно получить интегральные уравнения типа Фредгольма. Число возможных интегральных соотношений

сравнительно велико. Здесь мы ограничимся теми, которые, по нашему мнению, наиболее интересны с точки зрения приложений. Среди этих приложений мы имеем в виду возможность сравнения значений функций или их асимптотического поведения в окрестности различных особых точек, получение простых оценок для этих функций, вычисление интегралов для специальных функций класса Гойна, изучение свойств монодромии этих уравнений и т.д.

Мы используем здесь те же средства, к которым обращались в главе 2 для гипергеометрических уравнений, именно язык теорем, лемм и т.п. Некоторые формулы были получены одним из авторов совместно с А. Казаковым [57], [58]. Дальнейшие результаты можно найти в [37], [38], [3], [85], [2], [104].

3.3.2. Интегральные уравнения

В качестве исходной точки для каждого уравнения, рассматриваемого ниже, мы берем его каноническую форму, хотя конечные результаты выглядят более элегантно для самосопряженной формы.

Ищем сначала интегральное соотношение в виде

$$y(z) = \mu \int_C A(z, \xi) y^*(\xi) d\xi = Ay^*, \quad (3.3.1)$$

где $y(z)$ — собственная функция двухточечной задачи связи, соответствующей одному из уравнений класса Гойна, а $y^*(\xi)$ — подходящее решение сопряженного уравнения. При анализе нашей задачи в качестве первого шага надо проверить некоторые коммутационные соотношения. При строгом рассмотрении необходимо убедиться в том, что:

- все интегралы являются сходящимися;
- все внеинтегральные члены, появляющиеся при интегрировании по частям, исчезают;
- имеется необходимое асимптотическое поведение рассматриваемых функций в особых точках.

Все эти условия могут быть выполнены при подходящих ограничениях на параметры уравнений и на пути интегрирования. Они будут проверены в конце данного раздела только для одного из рассмотренных уравнений.

В качестве стандартного пути интегрирования берется интервал $[T_1, T_2]$ (конечный или бесконечный) на вещественной оси.

Рассмотрим дифференциальные операторы $L_z^{\{\vec{j}\}}$, связанные с различными уравнениями класса Гойна; здесь $\vec{j}$ означает s -мультисимвол. Само уравнение при этом мы записываем в виде

$$L_z^{\{\vec{j}\}} y(z) + \lambda y(z) = 0. \quad (3.3.2)$$

С помощью замены, которая обсуждалась в разделе 1.4, операторы $L_z^{\{\bar{j}\}}$ преобразуются к самосопряженной форме $M_z^{\{\bar{j}\}}$:

$$M_z^{\{\bar{j}\}} = [G^{\{\bar{j}\}}]^{-1} L_z^{\{\bar{j}\}} G^{\{\bar{j}\}} = M_z^{\{\bar{j}\}*}, \quad (3.3.3)$$

соответствующей уравнению

$$(M_z^{\{\bar{j}\}} + \bar{\lambda})w(z) = 0, \quad w(z) = [G^{\{\bar{j}\}}]^{-1}y(z). \quad (3.3.4)$$

Следует заметить, что

$$M_z^{\{\bar{j}\}} = G^{\{\bar{j}\}} L_z^{\{\bar{j}\}*} [G^{\{\bar{j}\}}]^{-1}, \quad w(z) = G^{\{\bar{j}\}} y^*(z). \quad (3.3.5)$$

Функции $G^{\{\bar{j}\}}(z)$ были приведены в таблицах, представленных в разделе 3.1. Однако для удобства читателя мы перепишем наиболее важные из них еще раз:

$$G^{\{1,1,1;1\}}(z) = z^{(1-c)/2} (1-z)^{(1-d)/2} (z-t)^{(1-e)/2}, \quad (3.3.6)$$

$$G^{\{1,1;2\}}(z) = z^{(1-c)/2} (1-z)^{(1-d)/2} e^{tz/2}, \quad (3.3.7)$$

$$G^{\{1;3\}}(z) = z^{(1-c)/2} e^{z^2/4+tz/2}, \quad (3.3.8)$$

$$G^{\{2;2\}}(z) = z^{(1-c)/2} e^{z/2+t/(2z)}. \quad (3.3.9)$$

Функцию $G^{\{\bar{j}\}}(z)$ для других мультисимволов для краткости опускаем. Явные выражения будут использоваться в тех местах, где это необходимо. Из соотношений (3.3.1), (3.3.3) следует:

$$w(z) = \mu \int_{T_1}^{T_2} K(z, \xi) w(\xi) d\xi = \mu K w, \quad (3.3.10)$$

где

$$K(z, \xi) = [G(z)]^{-1} A(z, \xi) [G(\xi)]^{-1}.$$

Последующие выкладки основаны на нижеприведенной лемме.

Лемма 3.1. *Предположим, что справедливо (3.3.1) и функция $A(z, \xi)$ является решением уравнения в частных производных*

$$(L_z - L_\xi)A(z, \xi) = 0. \quad (3.3.11)$$

Пусть $y^*(\xi)$ — подходящее решение уравнения $(L_\xi^{\{\bar{j}\}*} + \lambda^*)y^*(\xi) = 0$. Тогда $y(z)$ является подходящим решением уравнения (3.3.2).

Доказательство. Доказательство следует из формальных выкладок

$$\begin{aligned} L_z y(z) &= \int_C v(\xi) L_z A(z, \xi) d\xi \\ &= \int_C v(\xi) (L_z - L_\xi) A(z, \xi) d\xi + \int_C A(z, \xi) L_\xi^* v(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

При этом предполагается, что внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям, исчезают.

Далее можно искать решения (3.3.11), разделяя переменные. В данной книге мы обсудим простейшие решения (3.3.11).

Сначала положим, что ядро $A(z, t)$ в (3.3.1) имеет следующий вид:

$$A(z, \xi) = A(\xi), \quad \xi = z + \xi. \quad (3.3.13)$$

Тогда оператор в частных производных $L_z^{\{j\}} - L_\xi^{\{j\}}$ факторизуется для уравнений класса Гойна:

$$L_z^{\{1,1;2\}} - L_\xi^{\{1,1;2\}} = (z - \xi)((\xi - 1)D_\xi^2 + (t(\xi - 1) + c + d)D_\xi + ta), \quad (3.3.14)$$

$$L_z^{\{1;3\}} - L_\xi^{\{1;3\}} = (z - \xi)(D_\xi^2 - (t + \xi)D_\xi - a), \quad (3.3.15)$$

$$L_z^{\{2;2\}} - L_\xi^{\{2;2\}} = (z - \xi)(\xi D_\xi^2 + (t - \xi)D_\xi - a), \quad (3.3.16)$$

$$L_z^{\{;4\}} - L_\xi^{\{;4\}} = -(z - \xi)(\xi D_\xi + a), \quad (3.3.17)$$

$$L_z^{\{1,1;3/2\}} - L_\xi^{\{1,1;3/2\}} = (z - \xi)((\xi - 1)D_\xi^2 + (c + d)D_\xi - t), \quad (3.3.18)$$

$$L_z^{\{1;5/2\}} - L_\xi^{\{1;5/2\}} = (z - \xi)(D_\xi^2 - (\xi + t)), \quad (3.3.19)$$

$$L_z^{\{;7\}} - L_\xi^{\{;7\}} = (z - \xi)(\xi D_\xi^2 + \rho D_\xi - 1). \quad (3.3.20)$$

Предъявленные равенства проверяются прямыми выкладками.

Другая возможность связана с выбором ядра $A(z, t)$ в виде

$$A(z, \xi) = A(\eta), \quad \eta = z\xi. \quad (3.3.21)$$

Тогда дифференциальные операторы $L_z^{\{\vec{j}\}} - L_\xi^{\{\vec{j}\}}$ могут быть факторизованы согласно соотношениям

$$L_z^{\{1,1,1;1\}} - L_\xi^{\{1,1,1;1\}} = (z - \xi)(\eta(\eta - t)D_\eta^2 + ((a + b + 1)\eta - c\xi)D_\eta + ab), \quad (3.3.22)$$

$$L_z^{\{1,1;2\}} - L_\xi^{\{1,1;2\}} = (z - \xi)(\eta D_\eta^2 - (t\eta + c)D_\eta - ta), \quad (3.3.23)$$

$$L_z^{\{1;3\}} - L_\xi^{\{1;3\}} = -(z - \xi)(\eta D_\eta^2 + (\eta + c)D_\eta + a), \quad (3.3.24)$$

$$L_z^{\{2;2\}} - L_\xi^{\{2;2\}} = -(z - \xi)((\eta - t)D_\eta + a), \quad (3.3.25)$$

$$L_z^{\{1,1;3/2\}} - L_\xi^{\{1,1;3/2\}} = -(z - \xi)(\eta D_\eta^2 + cD_\eta + t). \quad (3.3.26)$$

От уравнений (3.3.2) перейдем к уравнениям (3.3.4) и к соответствующим задачам Штурма–Лиувилля. Вместо интегрального соотношения (3.3.1) мы ищем интегральное уравнение Фредгольма

$$w(z) = \lambda \int_{T_1}^{T_2} K^{\{\vec{j}\}}(z, t)w(t)dt. \quad (3.3.27)$$

Как следует из (3.3.3) и (3.3.4),

$$K^{\{\vec{j}\}}(z, t) = A^{\{\vec{j}\}}(z, t)[G^{\{\vec{j}\}}(z)]^{-1}[G^{\{\vec{j}\}}(t)]^{-1}. \quad (3.3.28)$$

Предположим, что набор собственных функций для уравнения (3.3.27) совпадает с набором собственных функций, порожденных для интервала $[T_1, T_2]$ одним из уравнений (3.3.4). Тогда следующие необходимые условия, возникающие при интегрировании по частям в (3.3.11), должны быть выполнены:

$$R(t)[w(t)D_t K(z, t) - K(z, t)D_t w(t)] \Big|_{T_1}^{T_2} = 0. \quad (3.3.29)$$

Так как уравнение (3.3.29) зависит от z как от параметра, точки T_1 и T_2 должны быть особыми точками дифференциального уравнения (если нет дополнительной симметрии соответствующего уравнения).

В дальнейшем будет сформулировано несколько теорем. Все они могут быть доказаны с помощью одинаковых рассуждений. Пример доказательства дан в параграфе 3.3.3. Оно распадается на два основных этапа:

- 1) проверку сходимости соответствующих интегралов,
- 2) проверку справедливости (3.3.29).

Следует, однако, отметить, что приведенные ниже теоремы не исчерпывают все возможные случаи.

Теорема 3.1. *Предположим, что выполняются следующие условия для параметров уравнения Гойна: $c > 1$, $d > 1$ и $t < 0$. Тогда граничные условия*

$$|w(0)| < \infty, \quad |w(1)| < \infty \quad (3.3.30)$$

порождают для самосопряженной формы УГ (см. (3.3.4)) задачу Штурма–Лиувилля на интервале $[0, 1]$ с бесконечным числом соответствующих собственных функций $\{w_n(z)\}$ и соответствующих собственных значений $\{\lambda_n\}$. Этот набор собственных функций совпадает с набором собственных функций интегрального уравнения Фредгольма с эрмитовым ядром

$$w(z) = \mu \int_0^1 [G^{\{1,1,1,1\}}(z)G^{\{1,1,1,1\}}(\xi)]^{-1} F\left(a, b; c; \frac{z\xi}{a}\right) w(\xi) d\xi, \quad (3.3.31)$$

где $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция, а $G^{\{1,1,1,1\}}(z)$ определено в (3.3.6). $\square$

Этот результат является частным случаем более общего интегрального уравнения, полученного в [37]. В данном специальном случае уравнения Гойна все граничные задачи, соответствующие различным интервалам, по существу не отличаются друг от друга.

Интегральные уравнения, соответствующие конфлюэнтным вариантам уравнения Гойна, отличаются не только ядром, но и интервалом.

Теорема 3.2. *Предположим, что параметры конфлюэнтного уравнения Гойна удовлетворяют условиям $c > 1$, $d > 1$. Тогда граничные условия (3.3.30) порождают для самосопряженной формы КУГ (3.1.3) задачу Штурма–Лиувилля на интервале $[0, 1]$ с бесконечным набором соответствующих собственных функций $\{w_n(z)\}$ и соответствующих собственных значений $\{\lambda_n\}$. Этот набор собственных функций совпадает с набором собственных функций двух различных интегральных уравнений Фредгольма с эрмитовыми ядрами*

$$w(z) = \mu \int_0^1 [G^{\{1,1,2\}}(z)G^{\{1,1,2\}}(\xi)]^{-1} \Phi(a; c; -tz\xi) w(\xi) d\xi, \quad (3.3.32)$$

$$w(z) = \mu \int_0^1 [G^{\{1,1,2\}}(z)G^{\{1,1,2\}}(\xi)]^{-1} \Phi(a; c + d; -t(z + \xi - 1)) w(\xi) d\xi. \quad (3.3.33)$$

Здесь $G^{\{1,1,2\}}(z)$ определяется (3.3.7), а $\Phi(a; c; z)$ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция. $\square$

Еще два интегральных уравнения возникают, когда вместо интервала $[0, 1]$ берется интервал $[1, \infty[$. В этом случае требуется одно дополнительное условие, именно $t > 0$, к тому же следует поставить граничное условие на бесконечности. Эти уравнения имеют вид:

$$w(z) = \lambda \int_1^{\infty} [G^{\{1,1;2\}}(z)G^{\{1,1;2\}}(\xi)]^{-1} \Psi(a; c; -t\xi) w(\xi) d\xi,$$

$$w(z) = \mu \int_1^{\infty} [G^{\{1,1;2\}}(z)G^{\{1,1;2\}}(\xi)]^{-1} \Psi(a; c + d; -t(z + \xi - 1)) w(\xi) d\xi.$$

Конфлюэнтная гипергеометрическая функция Φ при этом заменяется функцией Ψ — другим решением конфлюэнтного гипергеометрического уравнения. Частные случаи уравнений (3.3.32) изучались в [3] в связи с задачей двух кулоновских центров.

Далее следует БУГ.

Теорема 3.3. *Предположим, что параметры c, t удовлетворяют условию*

$$t > 0, \quad c > 1.$$

Пусть $\{w_n(z)\}$ — собственные функции, соответствующие граничным условиям

$$|w(0)| < \infty, \quad |w(\infty)| < \infty \quad (3.3.34)$$

для БУГ (3.1.11) на интервале $[0, \infty[$. Тогда $\{w_n(z)\}$ являются также собственными функциями следующего интегрального уравнения Фредгольма:

$$w(z) = \mu \int_0^{\infty} [G^{\{1;3\}}(z)G^{\{1;3\}}(\xi)]^{-1} \Phi\left(\frac{a}{2}; \frac{1}{2}; \infty, \frac{(z + \xi - t)^2}{2}\right) w(\xi) d\xi. \quad (3.3.35)$$

□

Другое возможное интегральное уравнение соответствует граничной задаче на интервале $]-\infty, 0]$. Интегральное уравнение (3.3.35) является частным случаем уравнения, полученного в [85].

При произвольных значениях параметров в (3.3.24) мы не получаем соответствующего интегрального уравнения. Однако если параметр a является неположительным целым числом, имеется такое интегральное уравнение:

$$w(z) = \mu \int_0^{\infty} [G^{\{1;3\}}(z)G^{\{1;3\}}(\xi)]^{-1} \Psi(a; c; -z\xi) w(\xi) d\xi. \quad (3.3.36)$$

Здесь Ψ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция, которая при наших предположениях сводится к полиному (полиному Лагерра).

В случае ДУГ возможны два ядра.

Теорема 3.4. Предположим, что $t > 0$. Тогда граничные условия (3.3.34), поставленные для самосопряженной формы ДУГ, порождают набор собственных функций $\{w_n(z)\}$, которые одновременно являются собственными функциями двух интегральных уравнений Фредгольма

$$w(z) = \mu \int_0^{\infty} [G^{\{2;2\}}(z)G^{\{2;2\}}(\xi)]^{-1} (z\xi + t)^{-a} w(\xi) d\xi, \quad (3.3.37)$$

$$w(z) = \mu \int_0^{\infty} [G^{\{2;2\}}(z)G^{\{2;2\}}(\xi)]^{-1} \Psi(a; c; z + \xi) w(\xi) d\xi. \quad (3.3.38)$$

□

Для ТУГ не имеется интегрального уравнения с выбранным нами типом ядра, которое эквивалентно граничной задаче для самосопряженной формы ТУГ с соответствующими условиями при $\pm\infty$. Аналогичное замечание справедливо и для редуцированного ТУГ.

При рассмотрении редуцированных конфлюэнтных уравнений мы сначала выписываем сами уравнения, так как они слегка отличаются от уже принятых обозначений. Редуцированное КУГ берем в виде

$$L_z^{\{1,1;3/2\}} y(z) + \lambda y(z) := z(z-1)y''(z) + (c(z-1) + dz)y'(z) + (-tz + \lambda)y(z) = 0. \quad (3.3.39)$$

Множитель $G^{\{1,1;3/2\}}(z)$ равен

$$G^{\{1,1;3/2\}}(z) = z^{(1-c)/2} (1-z)^{(1-d)/2}.$$

Факторизация согласно (3.3.13) приводит к соотношению

$$L_z^{\{1,1;3/2\}} - L_{\xi}^{\{1,1;3/2\}} = (z - \xi)((\xi - 1)D_{\xi}^2 + (c + d)D_{\xi} - t),$$

в то время как после факторизации согласно (3.3.21) получаем

$$L_z^{\{1,1;3/2\}} - L_{\xi}^{\{1,1;3/2\}} = -(z - \xi)(\eta D_{\eta}^2 + cD_{\eta} - t).$$

В результате мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3.5. Пусть $c > 1$, $d > 1$, $t > 0$. Тогда граничные условия (3.3.34), поставленные для самосопряженной формы редуцированного КУГ (уравнение (3.3.39)), порождают набор собственных функций $\{w_n(z)\}$, которые одновременно являются собственными

функциями интегральных уравнений Фредгольма

$$w(z) = \mu \int_1^{\infty} [G^{\{1, 1; 3/2\}}(z) G^{\{1, 1; 3/2\}}(\xi)]^{-1} (z + \xi - 1)^{(1-c-d)/2} \times K_{1-c-d}(2\sqrt{t(z + \xi - 1)}) w(\xi) d\xi. \quad (3.3.40)$$

Граничные условия (3.3.30) для того же уравнения порождают набор собственных функций $\{w_n(z)\}$, которые совпадают с собственными функциями интегральных уравнений Фредгольма

$$w(z) = \mu \int_0^1 [G^{\{1, 1; 3/2\}}(z) G^{\{1, 1; 3/2\}}(\xi)]^{-1} (z\xi)^{(1-c)/2} \times I_{c-1}(2\sqrt{t z \xi}) w(\xi) d\xi, \quad (3.3.41)$$

где $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя и $K_\nu(x)$ — функция Макдональда (см. раздел 2.1). $\square$

В случае редуцированного БУГ использование стандартной канонической формы приводит к следующему интегральному уравнению.

Теорема 3.6. Пусть $c > 1$. Тогда граничные условия (3.3.34), поставленные для самосопряженной формы редуцированного БУГ (уравнение (3.3.7)), порождают набор собственных функций $\{w_n(z)\}$, которые одновременно являются собственными функциями интегральных уравнений Фредгольма

$$w(z) = \mu \int_0^{\infty} (z\xi)^{(c-1)/2} \text{Ai}(z + \xi - t) w(\xi) d\xi, \quad (3.3.42)$$

где $\text{Ai}(z)$ — стандартное решение уравнения Эйри, убывающее на $+\infty$ (см. раздел 2.1). $\square$

Впервые уравнение (3.3.42) было предложено в [2].

Теорема 3.7. Пусть $t > 0$. Тогда граничные условия (3.3.34), поставленные на интервале $[0, \infty[$ для самосопряженной формы редуцированного ДУГ (уравнение (3.3.8)), порождают набор собственных функций $\{w_n(z)\}$, которые одновременно являются собственными функциями двух интегральных уравнений Фредгольма

$$w(z) = \mu \int_0^{\infty} (zt)^{\rho/2-1} \exp\left(\frac{t}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)\right) (z + \xi)^{(1-c)/2} \times K_{1-c}(2\sqrt{z + \xi}) w(\xi) d\xi, \quad (3.3.43)$$

$$w(z) = \mu \int_0^{\infty} (zt)^{c/2-1} \exp\left(\frac{t}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)\right) \exp\left(\frac{z\xi}{t}\right) w(\xi) d\xi, \quad (3.3.44)$$

где $K_\nu(x)$ — функция Макдональда. $\square$

3.3.3. Пример доказательства

Как указывалось выше, доказательства сформулированных предложений одинаковы. Они включают в себя проверку сходимости соответствующих интегралов и обнуления внеинтегральных членов.

В качестве примера здесь приведено доказательство для уравнения (3.3.44). Самосопряженная форма (3.3.4) выглядит следующим образом:

$$Kw(z) = \frac{d}{dz} z^2 \frac{d}{dz} w(z) + \left(-\frac{t^2}{4z^2} - \frac{t(1-c/2)}{z} + \frac{c(1-c/2)}{2} + \lambda - z \right) w(z) = 0. \quad (3.3.45)$$

Нетрудно описать локальное поведение решений (3.3.31) в нуле и на бесконечности:

$$\begin{aligned} w^{(1)} \Big|_{z \rightarrow +0} &= e^{t/(2z)} z^{c/2-1} (1 + O(z)), \\ w^{(2)} \Big|_{z \rightarrow +0} &= e^{-t/(2z)} z^{-c/2+1} (1 + O(z)), \\ w^{(3)} \Big|_{z \rightarrow +\infty} &= e^{-2\sqrt{z}} z^{-3/4} (1 + O(z^{-1})), \\ w^{(4)} \Big|_{z \rightarrow +\infty} &= e^{2\sqrt{z}} z^{-3/4} (1 + O(z^{-1})). \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

Только решения $w^{(1)}$, $w^{(3)}$ удовлетворяют граничным условиям (3.3.34) при предполагаемом условии $t < 0$. Собственные значения λ_n являются корнями уравнения, возникающего при приравнении нулю вронскиана решений $w^{(1)}$, $w^{(3)}$. Согласно стандартной теореме о спектре сингулярного самосопряженного дифференциального оператора существует бесконечный набор собственных значений, удовлетворяющих условию $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Асимптотические оценки (3.3.46) для собственных функций показывают, что при любых $z \in [0, \infty[$ интеграл в правой части (3.3.44) абсолютно и равномерно сходится и определяет функцию $U(z)$, которая регулярна на луче $]0, \infty[$. Оценки поведения интеграла при малых и больших z дают то же поведение для $U(z)$, что и для соответствующих решений дифференциального уравнения $w_n(z)$.

Заключительный шаг доказательства — проверка того факта, что $U(z)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и $w(z)$. Прямым дифференцированием можно показать, что $L^{\{2;3/2\}}G = GK$, где $K = K^*$ определен (3.3.45) и $G(z) = z^{1-c/2} e^{-t/(2z)}$. Применяя

дифференциальный оператор (3.3.45) к функции $U(z)$, удовлетворяющей (3.3.44), получаем

$$\begin{aligned}
 K_z U(z) &= \mu \int_0^{\infty} [K_z G^{-1}(z) e^{z\xi/t}] G^{-1}(\xi) w(\xi) d\xi \\
 &= \mu \int_0^{\infty} G^{-1}(z) [L_z^{\{2;3/2\}} e^{z\xi/t}] G^{-1}(\xi) w(\xi) d\xi \\
 &= \mu \int_0^{\infty} G^{-1}(z) [L_{\xi}^{\{2;3/2\}} e^{z\xi/t}] G^{-1}(\xi) w(\xi) d\xi \\
 &= \mu \int_0^{\infty} G^{-1}(z) [K_{\xi} G^{-1}(\xi) e^{z\xi/t}] w(\xi) d\xi \\
 &= \mu G^{-1}(z) \left[\xi^2 \left(w(\xi) \frac{d}{d\xi} G^{-1}(\xi) e^{z\xi/t} - G^{-1}(\xi) e^{z\xi/t} w'(\xi) \right) \right] \Big|_0^{\infty} \\
 &\quad + \mu \int_0^{\infty} G^{-1}(z) [G^{-1}(\xi) e^{z\xi/t}] K_{\xi} w(\xi) d\xi = 0. \quad (3.3.47)
 \end{aligned}$$

Все дифференцирования под знаком интеграла и все внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям, исчезают благодаря оценкам (3.3.46) функции $w(z)$. Так как функция $U(z)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и $w_n(z)$, и тем же граничным условиям, она должна быть пропорциональна $w_n(z)$. Соответствующий коэффициент пропорциональности обозначается μ_n .

Собственные значения интегрального уравнения μ_n могут быть вычислены с помощью формулы

$$\mu_n = \left[\int_0^{\infty} \xi^{c/2-1} e^{t/(2\xi)} w_n(\xi) d\xi \right]^{-1} \lim_{z \rightarrow 0} \left[z^{1-c/2} e^{-t/(2z)} w_n(z) \right]. \quad (3.3.48)$$

Предложенный список интегральных уравнений может быть расширен. Во-первых, можно использовать более сложные ядра, чем описанные выше. Во-вторых, можно получить иные интегральные уравнения, если параметры исходного дифференциального уравнения удовлетворяют дополнительным условиям.

3.3.4. Интегральные соотношения

Сначала рассмотрим интегральные соотношения следующего вида:

$$y(z) = S^{(0)}\hat{y}(\xi) = \int_C (z - \xi)^\sigma \hat{y}(\xi) d\xi, \quad (3.3.49)$$

где $y(z)$ и $\hat{y}(\xi)$ — собственные функции некоторой граничной задачи для уравнения Гойна с различными наборами параметров, $\{a, b, c, d, t, \lambda\}$ и $\{a', b', c', d', t', \lambda'\}$ соответственно.

Лемма 3.2. *Уравнение*

$$(L_z^{\{1,1,1;1\}} - \hat{L}_\xi^{\{1,1,1;1\}*})(z - t)^{-\sigma} = 0 \quad (3.3.50)$$

справедливо, если введенные выше параметры связаны друг с другом согласно соотношениям

$$\begin{aligned} (\sigma - a)(\sigma - b) &= 0, & c' &= c + 1 - \sigma, & d' &= d + 1 - \sigma, \\ a' &= 2 - \sigma, & b' &= -2\sigma + a + b + 1, \end{aligned} \quad (3.3.51)$$

$$\lambda' = \lambda + (-\sigma + 1)(a + b + 1 - d + dt + ct) + \sigma(\sigma - 1)(t + 1).$$

Доказательство. Доказательство основано на прямом применении соответствующих операторов и проверки обнуления коэффициентов при различных степенях z и ξ . $\square$

Имеется два корня уравнения (3.3.51) для параметра σ . Однако в силу симметрии уравнения Гойна относительно перестановки параметров a, b дальнейшие результаты не зависят от выбора корня. Таким образом, без потери общности параметры уравнения Гойна для функции $v(z)$ в (3.3.49) могут быть выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned} c' &= c + 1 - a, & d' &= d + 1 - a, \\ a' &= 2 - a, & b' &= b + 1 - a, \\ \lambda' &= \lambda + a(a - 1)(t + 1) - (a - 1). \end{aligned} \quad (3.3.52)$$

Если интегральное преобразование (3.3.49) применить еще раз, мы приходим к исходным значениям коэффициентов уравнения Гойна. Следовательно, справедливо

$$(S^{(0)})^2 = I, \quad (3.3.53)$$

где I — единичный оператор, и (3.3.49) при выполнении (3.3.51) есть преобразование инволюции. Это также следует из того факта, что ядро

преобразования $(S^{(0)})^2$ является ядром Коши. С помощью общего соотношения (3.3.49) можно получить различные частные формулы. Мы будем обсуждать только формулы для собственных функций.

Теорема 3.8. *Предположим, что $t < 0$, $d > a$, $c > 1$, $a + b > c + d$, $a < 1$. Пусть $\{v_n(s)\}$ — набор собственных функций для задачи Штурма–Лиувилля на интервале $[0, 1]$ для уравнения Гойна (3.1.1) с параметрами a', b', c', d', λ' , определенными в (3.3.52). Функции $v_n(s)$ ограничены в $z = 0$ и $z = 1$. Тогда выражение*

$$y_n(z) = \int_0^1 (z-s)^{-a} v_n(s) ds \quad (3.3.54)$$

порождает набор собственных функций $\{y_n(z)\}$, соответствующих задаче Штурма–Лиувилля для уравнения Гойна с параметрами a, b, c, d, λ на интервале $[t, 0]$ ($y_n(z)$ ограничены в $z = 0$ и $z = t$). Доказательство. Интеграл в (3.3.54) сходится, если $z \in]t, 0[$, и ограничен при $z = t$. Он также ограничен при $z = 0$, так как $a < 1$. Внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям, обнуляются благодаря поведению решений в концах интервала интегрирования. Следовательно, функции $y_n(z)$, определенные (3.3.54), являются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Гойна на интервале $[t, 0]$. $\square$

После подстановки $s \mapsto t/s$ интегральное соотношение (3.3.54) преобразуется в другое интегральное соотношение с ядром, зависящим от zs . Ниже мы также изменим интервал интегрирования.

Теорема 3.9. *Предположим, что $t > 1$, $a > c$, $b < 1$, $a + b > c + d$. Пусть $\{w_n(s)\}$ — набор собственных функций задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Гойна на интервале $]-\infty, 0]$ с параметрами $a'', b'', c'', d'', \lambda''$:*

$$a'' = 2 - a, \quad b'' = 2 - c, \quad c'' = 2 - b,$$

$$d'' = b + 2 - c - d, \quad \lambda'' = q - ad + (2 - c)(a + 1) - \varepsilon$$

(функция $w(s)$ ограничена в точках $-\infty$ и 0). Тогда соотношение

$$y_n(z) = \int_{-\infty}^0 \left(1 - \frac{zs}{t}\right)^{-a} w_n(s) ds \quad (3.3.55)$$

порождает набор собственных функций задачи Штурма–Лиувилля $\{y_n(z)\}$ для уравнения Гойна на интервале $[1, t]$ ($y_n(z)$ ограничены в $z = 1$ и $z = t$). $\square$

Хотя интегральные соотношения (3.3.54) и (3.3.55) в сущности совпадают, они порождают две различные последовательности соотношений для конфлюэнтных уравнений. Мы привели только наиболее важные. Дальнейшие результаты изложены в [57]. С помощью конфлюэнции можно реализовать переход $L^{\{1,1,1;1\}} \mapsto L^{\{1,1;2\}}$. В терминах уравнения (3.3.55), ядро которого приводится к экспоненциальной функции, мы получаем интегральное соотношение для собственных функций, соответствующих КУГ.

Теорема 3.10. *Предположим, что $d > 1$, $a < 1$, $t < 0$. Пусть $\{w_n(s)\}$ — набор собственных функций задачи на собственные значения для КУГ (3.1.3) на интервале $]-\infty, 0]$ с параметрами $a' = 2 - c$, $c' = 2 - a$, $d' = a + 2 - c - d$, $t' = -t$, $\lambda' = \lambda + d + c - 2 - t$ ($w_n(s)$ ограничены в точках 0 и $-\infty$). Тогда соотношение*

$$y_n(z) = \int_{-\infty}^0 \exp(-tzs) w_n(s) ds \quad (3.3.56)$$

порождает набор собственных функций $\{y_n(z)\}$ для задачи на собственные значения для КУГ (3.1.3) на интервале $[0, \infty[$ ($y_n(z)$ ограничены в точках 0 и ∞). $\square$

Теорема 3.11. *Предположим, что $c < 1$, $b > 1$. Пусть $\{w_n(s)\}$ — набор собственных функций задачи на собственные значения для БУГ (3.1.11)*

$$(sD_s^2 + (s^2 + t's + c')D_s + a's - \lambda')w(s) = 0 \quad (3.3.57)$$

с параметрами $a' = 2 - c$, $c' = 2 - a$, $t' = -t$, $\lambda' = \lambda + t$ на интервале $]-\infty, 0]$ ($w_n(s)$ ограничены в 0 и ∞). Тогда соотношение

$$y_n(z) = \int_0^{\infty} \exp(-zs) w_n(s) ds \quad (3.3.58)$$

порождает набор собственных функций $\{y_n(z)\}$ задачи на собственные значения для БУГ (3.1.11) на интервале $[0, \infty[$ ($y_n(z)$ ограничены в точках 0 и ∞). $\square$

Теорема 3.12. *Предположим, что $c < 1$, $b > 1$. Пусть $\{w_n(s)\}$ — набор собственных функций задачи на собственные значения для редуцированного КУГ (3.1.20) с параметрами $a' = 2 - c$, $c' = 2 - a$, $t' = -t$, $\lambda' = \lambda + t$ на интервале $]-\infty, 0]$ ($w_n(s)$ ограничены в 0*

и $-\infty$). Тогда соотношение

$$y_n(z) = \int_0^{-\infty} \exp(-zs) w_n(s) ds \quad (3.3.59)$$

порождает набор собственных функций $\{y_n(z)\}$ задачи на собственные значения для ДУГ на интервале $[0, \infty[$ ($y_n(z)$ ограничены в точках 0 и ∞). $\square$

Теорема 3.13. Предположим, что $c > 1$, $d > 1$, $t > 0$. Пусть $\{w_n(s)\}$ — набор собственных функций задачи на собственные значения для ДУГ (3.1.15) с параметрами $a' = 2 - c$, $c' = 4 - c - d$, $t' = -t$, $\lambda' = \lambda + a + c - 2$ на интервале $[0, \infty[$ ($w_n(s)$ ограничены в точках 0 и ∞). Тогда соотношение

$$y_n(z) = \int_{-\infty}^0 \exp(-zs) w_n(s) ds \quad (3.3.60)$$

порождает набор собственных функций $\{y_n(z)\}$ задачи на собственные значения для редуцированного КУГ на интервале $[0, 1[$ ($y_n(z)$ ограничены в точках 0 и ∞). $\square$

Теорема 3.14. Предположим, что $t > 0$. Пусть $\{w_n(s)\}$ — набор собственных функций задачи на собственные значения для ДУГ с параметрами $a' = 4 - a$, $t' = t$, $\lambda' = a - 2 - \lambda$ на интервале $[0, \infty[$ ($w_n(s)$ ограничены в точках 0 и ∞). Тогда соотношение

$$y_n(z) = \int_0^{\infty} \exp(-zs/t) w_n(s) ds \quad (3.3.61)$$

порождает набор собственных функций $\{y_n(z)\}$ задачи на собственные значения для редуцированного ДУГ (3.1.22) на интервале $[0, \infty[$ ($y_n(z)$ ограничены в точках 0 и ∞). $\square$

Предложенный список интегральных соотношений не включает в себя соотношения, которые возникают при специализации параметров рассматриваемых уравнений. Можно также получать соотношения не только между собственными функциями, но и для других специальным образом выбранных решений. Полный список при этом становится слишком большим и здесь не приводится.

Как в случае интегральных уравнений, так и в случае интегральных соотношений предполагалось выполнение следующих условий:

- ядро содержит только один сомножитель;
- ядро либо является элементарной функцией, либо удовлетворяет уравнению гипергеометрического класса.

Вне рамок этих предположений могут быть получены другие соотношения.

3.4. Основные асимптотические формулы при малых t

3.4.1. Введение

По сравнению со специальными функциями гипергеометрического класса для специальных функций класса Гойна может быть получен существенно более богатый набор асимптотических соотношений. Прежде всего это описание асимптотических решений в окрестности иррегулярных особых точек. Соответствующие асимптотические разложения уже описывались ранее в этой главе. Однако множители Стокса в данном случае не могут быть получены в явном виде. Имеется несколько публикаций (см., например, [66], [24], [25], [125]), где предложены некоторые процедуры для вычислений численных значений множителей Стокса в случае некоторых конфлюэнтных уравнений Гойна, однако общий подход отсутствует. Более обнадеживающей выглядит ситуация, когда рассматриваются *критические значения* скейлингового параметра t . Мы называем критическими такие значения, когда либо особенности, либо точки поворота анализируемых уравнений сливаются. В случае уравнения Гойна критическими являются значения $t = 0, 1, \infty$, для КУГ — $t = 0, \infty$, во всех других конфлюэнтных уравнениях $t = \infty$. С другой стороны, можно изучать полуклассические соотношения, возникающие при соответствующем поведении аксессуарного параметра λ . Здесь представлены только результаты для асимптотик по скейлингову параметру, что отражает научные интересы авторов. Асимптотики такого типа позволяют получить количественное объяснение некоторых важных физических эффектов [65]. Изучаются также основные решения двухточечной задачи связи (сингулярная задача Штурма–Лиувилля). Изложение ведется на чисто формальном уровне. Именно, в каждом рассматриваемом случае строится асимптотический анзац решения, который удовлетворяет уравнению с точностью до малых членов.

3.4.2. Уравнение Гойна со сливающимися особыми точками

Ставится следующая задача. Рассмотрим уравнение Гойна, в котором слегка изменены обозначения для скейлингового параметра, $t \mapsto -s$, $s > 0$,

$$L_z y(z) = \lambda y(z), \quad (3.4.1)$$

причем

$$L_z = z(z-1)(z+s)D^2 + [c(z-1)(z+s) + dz(z+s) + ez(z-1)]D + abz \quad (3.4.2)$$

и

$$D = \frac{d}{dz}$$

при малых значениях положительной величины s . Каково поведение собственных функций $y_n(z)$ и соответствующих собственных значений λ_n граничной задачи (центральной двухточечной задачи связи) для уравнения (3.4.1) и граничных условий

$$|y(0)| < \infty, \quad |y(1)| < \infty \quad (3.4.3)$$

на интервале $[0, 1]$ при $s \rightarrow 0$?

Можно изучить также несколько других подобных задач. Во-первых, выбрать интервал $]-\infty, s]$, $[s, 0]$ или $[s, \infty[$. Во-вторых, за критическое значение параметра s *) принять $s = -1$ или $s = \infty$. Все такие случаи можно разделить на две группы:

- (1) при критическом значении параметра растяжения s точка $z = -s$ сливается с конечной точкой интервала;
- (2) точка $z = -s$ сливается с особой точкой вне интервала.

Задачи, принадлежащие к группе (2), могут быть рассмотрены с помощью обычной теории возмущений. Задачи из группы (1) сводятся к более сложным явлениям пограничного слоя. Задача (3.4.1)–(3.4.3) принадлежит к группе (1), мы обсудим ее здесь более подробно.

Предполагается, что параметры a, b, c, d, e вещественны и что без потери общности выполняются следующие условия:

$$c \geq 1, \quad d \geq 1, \quad e \geq 1, \quad a \geq b, \quad (3.4.4)$$

что приводит к существованию одного аналитического решения и одного неограниченного решения для каждой регулярной особой точки $z = 0$, $z = 1$, $z = -s$ уравнения (3.4.1). Кроме того, предполагается, что a и b не целые. При этом выполняется условие Фукса

$$a + b + 1 - c - d - e = 0. \quad (3.4.5)$$

В качестве следствия уравнений (3.4.5)–(3.4.4) мы получаем

$$a + b \geq 2, \quad a + b - d \geq 1. \quad (3.4.6)$$

Для изучения локального поведения решений (3.4.1) и других вспомогательных уравнений вблизи их особых точек широко используется

*) Конечно, условие $s > 0$ при этом следует отменить.

ОСР. Для уравнения (3.4.1) соответствующая ОСР выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -s & 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1-e & 1-c & 1-d & b \end{pmatrix} ; z ; \lambda \quad (3.4.7)$$

Основная схема дальнейших вычислений включает в себя следующие шаги:

- использование двух различных масштабов (один из которых — масштаб пограничного слоя);
- представление дифференциального оператора в виде суммы $L = L_1 + sL_2$ и вычисление решения с помощью теории возмущений;
- сшивание решений, полученных на различных подинтервалах на их пересечении.

На финальном шаге с помощью последовательных приближений решается характеристическое уравнение для собственных значений. Итоговые результаты содержат члены двух различных типов:

- обычные степенные ряды по переменной s ;
- члены, пропорциональные s^σ , где σ не целое.

Рассмотрим сначала на формальном уровне предельный случай. Полагая $s = 0$ в (3.4.1) и определяя $\lambda^0 = \lambda|_{s=0} = \rho_1(\nu)\rho_2(\nu)$, где неизвестные величины $\rho_1(\nu)$, $\rho_2(\nu)$ удовлетворяют соотношению Фукса,

$$\rho_1(\nu) + \rho_2(\nu) = d - a - b, \quad (3.4.8)$$

мы получаем предельный дифференциальный оператор

$$\begin{aligned} L_z &\rightarrow L_z^0, \\ L_z^0 &= z\{z(z-1)D^2 - [a+b+1-d-(a+b+1)z]D + ab\}; \\ L_z^0 y_n^0 &= \rho_1(\nu)\rho_2(\nu)y_n^0(z). \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Уравнение (3.4.9) имеет в качестве одного из решений стандартную гипергеометрическую функцию

$$y_n^0 = z^{\rho_1} F(a + \rho_1, b + \rho_1; 1 + \rho_1 - \rho_2; z). \quad (3.4.10)$$

Если выбранные значения параметров не целые, второе решение получается с помощью подстановки $\rho_1 \mapsto \rho_2$, $\rho_2 \mapsto \rho_1$ в (3.4.10).

Величины $\rho_1(\nu)$, $\rho_2(\nu)$ зависят от ν , и в силу условия Фукса эта зависимость может быть фиксирована следующим образом:

$$\rho_1(\nu) = \tau_1(a, b, c, d) + \nu, \quad \rho_2(\nu) = \tau_2(a, b, c, d) - \nu. \quad (3.4.11)$$

Собственные значения λ_n получаются в описанном выше виде после построения и решения уравнения для собственных значений в терминах v . Расщепляя члены различного порядка, можно представить оператор L_z как

$$\begin{aligned} L_z &= zM_z^0 + sM_z^1; \\ M_z^0 &= z(z-1)D^2 - (a+b+1-d-(a+b+1)z)D + ab, \\ M_z^1 &= z(z-1)D^2 + (-c+(d+c)z)D. \end{aligned}$$

Вместе с уравнением (3.4.9) исследуется вспомогательное уравнение

$$[zM_z^0 u(z) - \rho_1 \rho_2] u(z) = 0. \quad (3.4.12)$$

Решения уравнения (3.4.12), ограниченные в особой точке $z=1$, обозначаются $u_v(z)$. Выпишем ОСР, определяющую локальное поведение решений уравнения (3.4.12):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \infty \\ \rho_1 & 0 & a \\ \rho_2 & 1-d & b \end{pmatrix} ; z \quad (3.4.13)$$

Функции $u_v(z)$ выражаются в терминах гипергеометрической функции следующим образом (см. [90]):

$$u_v(z) = z^{\rho_1} F(a + \rho_1, b + \rho_1; d; 1-z). \quad (3.4.14)$$

Далее будет показано, что в первом приближении $v \sim n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Представим собственные функции $y_n(z)$ задачи (3.4.1)–(3.4.3), нормированные в соответствии с условием $y_n(0) = 1$, с помощью формального ряда

$$y_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{nm} u_{v+m}(z), \quad g_{n0} = 1. \quad (3.4.15)$$

Это представление справедливо на интервале $[\varepsilon, 1]$, где $\varepsilon = o(s)$. Обозначим данное решение y_n^+ .

Другой ряд необходим в окрестности нуля, где используется иной масштаб для независимой переменной:

$$z := \xi s. \quad (3.4.16)$$

Таким образом, вместо (3.4.1) получим

$$L_\xi y(\xi) = \lambda y(\xi),$$

где

$$L_{\xi} := \xi(\xi + 1)(\xi s - 1)D^2 + [c(s\xi - 1)(\xi + 1) + ds\xi(\xi + 1) + e\xi(s\xi - 1)]D + abs\xi, \quad D = \frac{d}{d\xi}. \quad (3.4.17)$$

Дифференциальный оператор (3.4.17) можно расщепить на сумму двух операторов:

$$\begin{aligned} L_{\xi} &= K_{\xi}^0 + s\xi K_{\xi}^1; \\ K_{\xi}^0 &= -\xi(\xi + 1)D^2 + [-c - (a + b + 1 - d)\xi], \\ K_{\xi}^1 &= \xi(\xi + 1)D^2 + [d + c + (a + b + 1)\xi]D + ab. \end{aligned}$$

Кроме вспомогательного уравнения (3.4.9) можно ввести второе вспомогательное уравнение, справедливое при $\xi = O(1)$:

$$(K_{\xi}^0 v(\xi) - \rho_1 \rho_2) v(\xi) = 0. \quad (3.4.18)$$

ОСР для этого уравнения имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \infty \\ 0 & 0 & -\rho_1 \\ 1-e & 1-c & -\rho_2 \end{pmatrix} ; \xi. \quad (3.4.19)$$

Решения (3.4.18), ограниченные в нуле, обозначим $v_v(\xi)$. Они могут быть выражены в терминах гипергеометрической функции:

$$v_v(\xi) = F(-\rho_1, -\rho_2; c; -\xi). \quad (3.4.20)$$

Собственные функции $y_n(x)$ граничной задачи (3.4.1)–(3.4.3) представляются в виде формальных рядов

$$y_n^-(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{nm} v_{v+m}(\xi). \quad (3.4.21)$$

При этом предполагается, что такой ряд пригоден для описания решения при $z = o(s^{-1})$ и он обозначается y_n^- . Следует подчеркнуть, что коэффициент h_{n0} фиксирован выбранной выше нормировкой. Процедура построения последующих коэффициентов g_{nm} и h_{nm} в разложениях (3.4.15), (3.4.21) основана на формальном ряде

$$g_{nm} = \sum_{j=0}^{\infty} s^{|m|+j} g_{nmj}, \quad (3.4.22)$$

$$h_{nm} = \sum_{j=0}^{\infty} s^{|m|+j} h_{nmj}. \quad (3.4.23)$$

Собственные значения $\lambda_n(\nu)$ разлагаются в формальные ряды

$$\lambda_n(\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j \lambda_{nj}(\nu). \quad (3.4.24)$$

Трехчленные рекуррентные системы уравнений для коэффициентов g_{nm} и h_{nm} и теория возмущений для построения g_{nmj} и h_{nmj} обсуждаются в работе [78]. На первом шаге рекуррентной процедуры собственные значения $\lambda_{n0}(\nu)$ получаются в следующем виде:

$$\lambda_{n0}(\nu) = \rho_1(\nu)\rho_2(\nu), \quad (3.4.25)$$

причем для собственных функций $y_n(z)$ справедливо

$$y_n^+(z) = u_\nu(z), \quad y_n^-(z) = h_{n0}u_\nu(\xi). \quad (3.4.26)$$

Чтобы сшить построенные решения, используются стандартные формулы, связывающие локальные решения гипергеометрического уравнения (см. раздел 2.4). Преобразуя формулы (2.4.6), (2.4.9) с учетом выбранных в данном разделе обозначений, получим асимптотическое поведение y^+ (ограниченных в $z = 1$) в окрестности $z = 0$:

$$\begin{aligned} y^+ \sim & \frac{\Gamma(d) \Gamma(\rho_2(\nu) - \rho_1(\nu))}{\Gamma(b + \rho_2(\nu)) \Gamma(a + \rho_2(\nu))} z^{\rho_1(\nu)} [1 + O(z)] \\ & + \frac{\Gamma(d) \Gamma(\rho_1(\nu) - \rho_2(\nu))}{\Gamma(b + \rho_1(\nu)) \Gamma(a + \rho_1(\nu))} z^{\rho_2(\nu)} [1 + O(z)], \quad z \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

С другой стороны, справедливо также соотношение

$$\begin{aligned} y^- \sim & h_{n0} \frac{\Gamma(c) \Gamma(\rho_1(\nu) - \rho_2(\nu))}{\Gamma(-\rho_2(\nu)) \Gamma(c + \rho_1(\nu))} \xi^{\rho_1(\nu)} [1 + O(\xi^{-1})] \\ & + h_{n0} \frac{\Gamma(c) \Gamma(\rho_2(\nu) - \rho_1(\nu))}{\Gamma(-\rho_1(\nu)) \Gamma(c + \rho_2(\nu))} \xi^{\rho_2(\nu)} [1 + O(\xi^{-1})], \quad \xi \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

y^- ограничена в $z = 0$.

В интервале перекрывания, где справедливы оба асимптотических разложения (3.4.27) и (3.4.28), величины z и ξ могут быть взяты как $z = O(\sqrt{s})$ и $\xi = O(1/\sqrt{s})$. Тем самым можно ввести растянутую переменную ξ :

$$z = \xi\sqrt{s} \quad \text{и} \quad \xi = \xi/\sqrt{s}.$$

Из (3.4.27) и (3.4.28) следует:

$$\begin{aligned} y^+ & \sim A\xi^{\rho_1(\nu)} + B\xi^{\rho_2(\nu)}, \\ y^- & \sim C\xi^{\rho_1(\nu)} + D\xi^{\rho_2(\nu)}, \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

причем имеется симметрия для коэффициентов $A(a, b, d, \rho_1, \rho_2)$, $B(a, b, d, \rho_1, \rho_2)$, $C(c, \rho_1, \rho_2)$, $D(c, \rho_1, \rho_2)$:

$$A(a, b, d, \rho_1, \rho_2) = B(a, b, d, \rho_2, \rho_1), \quad C(c, \rho_1, \rho_2) = D(c, \rho_2, \rho_1).$$

Сами коэффициенты нетрудно получить из уравнений (3.4.27)–(3.4.28). Условием сшивания является обращение в нуль вронскиана решений y^- и y^+ , что дает:

$$AD - BC = 0. \quad (3.4.30)$$

При подстановке значений A, B, C, D в условие сшивания (3.4.30) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(d) \Gamma(c) \Gamma^2(\rho_2(v) - \rho_1(v))}{P(a, b, c, \rho_2) \Gamma(-\rho_1(v))} s^{\rho_2(v)} (1 + O(s)) \\ & - \frac{\Gamma(d) \Gamma(c) \Gamma^2(\rho_1(v) - \rho_2(v))}{P(a, b, c, \rho_1) \Gamma(-\rho_2(v))} s^{\rho_1(v)} (1 + O(s)) = 0, \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

где

$$P(a, b, c, \rho) = \Gamma(a + \rho) \Gamma(b + \rho) \Gamma(c + \rho).$$

Отсюда следует характеристическое уравнение для величин v :

$$\frac{\Gamma^2(\rho_2(v) - \rho_1(v)) \Gamma(-\rho_2(v))}{\Gamma^2(\rho_1(v) - \rho_2(v)) \Gamma(-\rho_1(v))} \frac{P(a, b, c, \rho_1(v))}{P(a, b, c, \rho_2(v))} = s^{\rho_1(v) - \rho_2(v)} (1 + O(s)). \quad (3.4.32)$$

Так как s — малый параметр, левая часть этого уравнения также является малой величиной. Это означает, что одна из гамма-функций, стоящая в знаменателе выражения в левой части уравнения, должна быть большой. Предположим, что

$$v = n + \delta, \quad \rho_1 = v, \quad \rho_2 = d - a - b - v, \quad (3.4.33)$$

где

$$|\delta| \ll 1. \quad (3.4.34)$$

Тогда множитель $\Gamma(-\rho_1)$ в знаменателе выражения в левой части уравнения (3.4.32) принимает большие значения при малых значениях δ . Раскладывая функции в обеих частях (3.4.32) относительно $\delta = 0$, находим

$$\delta = s^{a+b-d+2n} \frac{(-1)^n}{n!} G^0(a, b, c, d, n), \quad (3.4.35)$$

причем

$$G^0(a, b, c, d, n) = \frac{1}{\Gamma(-\rho_2^0)} \frac{\Gamma^2(\rho_1^0 - \rho_2^0)}{\Gamma^2(\rho_2^0 - \rho_1^0)} \frac{P(a, b, c, \rho_2^0)}{P(a, b, c, \rho_1^0)}, \quad (3.4.36)$$

где

$$\rho_1^0 = n, \quad \rho_2^0 = d - a - b - n. \quad (3.4.37)$$

При этом неявно предполагалось, что величины $a, b, c, a+b-d$ в (3.4.32) не являются целыми. Ведущий асимптотический член собственного значения согласно уравнениям (3.4.25), (3.4.37) имеет вид:

$$\lambda_{n0}^0 = n(d - a - b - n). \quad (3.4.38)$$

Вклад от пограничного слоя в окрестности $z = 0$ в собственное значение $\Delta\lambda_n$ может быть вычислен с помощью формулы

$$\Delta\lambda_n = \frac{\partial\lambda}{\partial\nu} \delta + O(\delta^2). \quad (3.4.39)$$

В первом приближении асимптотику собственных значений можно записать как

$$\begin{aligned} \lambda_{n0} = & n(d - a - b - n) (1 + O(s)) \\ & - s^{2n+a+b-d} (2n + a + b - d) \frac{(-1)^n}{n!} G^0(a, b, c, d, n). \end{aligned} \quad (3.4.40)$$

Второй член в соответствии с условием (3.4.6) имеет меньший порядок величины, чем первый член. Однако согласно идеологии экспоненциальных асимптотик его необходимо сохранять в итоговой формуле. Он быстро уменьшается при увеличении n и мал с самого начала, если значение $a + b - d$ велико.

Как упоминалось выше, наличие пограничного слоя приводит к появлению острого пика собственной функции вблизи сливающихся особых точек. Чтобы оценить величину этого пика, мы положим $A = C$, после чего получаем для коэффициента h_0 оценку

$$h_0 = \frac{\Gamma(d) \Gamma(c + n) \Gamma(d - a - b - 2n) \Gamma(n + a + b - d)}{\Gamma(c) \Gamma(d - a - n) \Gamma(d - b - n) \Gamma(2n + a + b - d)} s^{-n} (1 + O(s)). \quad (3.4.41)$$

Из проведенных рассмотрений вытекают следующие заключения. Когда сливаются две регулярные особые точки уравнения Гойна, соответствующая граничная задача характеризуется явлением пограничного слоя. Из-за этого собственные значения не могут быть разложены в чисто степенной ряд по малому параметру (в нашем случае это s). Это связано с тем обстоятельством, что такие разложения включают в себя члены, имеющие точку ветвления в $s = 0$. Такие члены убывают, когда номер собственного числа увеличивается. Для соответствующих собственных функций типично наличие пика вблизи сливающихся особых точек. Эти качественные наблюдения верны, если выполняются условия (3.4.6). В предельной точке $s = 0$ не существует явных выражений для собственных функций, хотя кривые, описывающие собственные значения, имеют предел в данной точке.

3.5. Большие значения скейлингового параметра

3.5.1. Введение

Большие значения скейлингового параметра имеют отношение к так называемым ВКБ-асимптотикам соответствующих ОДУ. Однако в данной книге общая теория будет представлена на примере весьма специфических явлений. Одним из них является квазипересечение собственных значений, другим — явление Стокса для специального случая дважды конфлюэнтного уравнения Гойна.

Первой работой, где анализировалось явление квазипересечения собственных значений для одного из специальных уравнений класса Гойна, была работа Комарова и Славянова [64], в которой обсуждалась квантовомеханическая задача для системы $Z_1 e Z_2$. Система двух кулоновских центров с различными зарядами Z_1, Z_2 рассматривалась при большом расстоянии между центрами. При этом было показано, что в данной модели структура квазипересечения проявляет намного более специфические свойства, чем для произвольной модели.

В работе [114] было предпринято более общее исследование квазипересечения. Было показано, что это типичное явление для большинства уравнений класса Гойна со сливающимися особенностями, за исключением дважды конфлюэнтного уравнения Гойна. Большая часть результатов этого исследования может быть сформулирована следующим образом.

- В моделях, связанных с уравнениями класса Гойна, обычно не наблюдается единичного квазипересечения для двух собственных значений. Если имеется одно квазипересечение, то существует также большое число (в смысле большого параметра задачи) квазипересечений, параметризованных подходящим целым параметром a , который нумерует эти квазипересечения.
- Точки квазипересечений образуют периодическую последовательность.

Общее описание асимптотических методов, используемых в качестве аппарата исследования, можно найти в [109].

3.5.2. Квазипересечения для триконфлюэнтного уравнения

Мы начнем с анализа триконфлюэнтного уравнения Гойна, которое обладает наименьшим числом параметров по сравнению с другими уравнениями, что позволяет рассмотреть явление в его простейшей форме. Подстановка

$$y(z) = G(z)w(z) = \exp\left(\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{2}tz\right)w(z)$$

преобразует ТУГ (3.1.18) к нормальной (шредингеровской) форме без члена с первой производной

$$N_z^{\{;4\}} w(z) + \lambda w(z) = \left(D^2 + \left(\lambda - (a-1)z - \frac{1}{4}(z^2 + t)^2 \right) \right) w(z) = 0, \quad (3.5.1)$$

где $N^{\{;4\}} = [G^{\{;4\}}]^{-1} L^{\{;4\}} G^{\{;4\}}$. В дальнейшем используется обозначение $\tilde{a} := a - 1$. Возможны два различных типа поведения потенциала

$$V(z) = \frac{1}{4}(z^2 + t)^2 - \tilde{a}z$$

при больших t в зависимости от того, положительные или отрицательные значения принимает этот параметр. При положительных значениях t мы имеем одну потенциальную яму в нуле, при отрицательных — две потенциальные ямы, локализованные в окрестностях точек $z = \sqrt{-t}$ и $z = -\sqrt{-t}$. Для наших целей интересен лишь последний случай, так что мы ограничимся только его рассмотрением. Подстановка

$$t \mapsto -t, \quad t > 0, \quad z \mapsto \sqrt{t}z, \quad \lambda \mapsto \sqrt{t}\lambda, \quad t^{3/2} := p$$

приводит к уравнению с большим параметром p и двум парам точек поворота в окрестностях точек $z = \pm 1$

$$\tilde{N}_z^{\{;4\}} w(z) + \lambda w(z) = \left(D^2 + \left(p(\lambda - \tilde{a}z) - \frac{1}{4}p^2(z^2 - 1)^2 \right) \right) w(z) = 0. \quad (3.5.2)$$

Каждую пару можно также рассматривать как точку поворота второго порядка или как кластер точек поворота.

Исчерпывающее изучение асимптотических решений уравнений с двумя близкими точками поворота было проведено одним из авторов, и его можно найти в [109]. Основным техническим средством при этом является преобразование независимой переменной в терминах формальных асимптотических рядов, которое преобразует рассматриваемое уравнение в биконфлюэнтное гипергеометрическое уравнение. Далее требуется сшить решения, построенные для различных потенциальных ям.

На качественном уровне следует разделить три возможные ситуации. В первом случае (1) собственные функции концентрируются в правой потенциальной яме и собственные значения с точностью до экспоненциально малой поправки определяются из условия квантования для правой потенциальной ямы. Экспоненциально малые поправки к собственным значениям можно найти из условия сшивания с собственной функцией в левой потенциальной яме, принимающей экспоненциально малые значения. Второй случай (2) эквивалентен первому, с единственной разницей — перестановкой левой и правой ям. Третий, наиболее интересный,

случай (3) возникает тогда, когда (а) максимальные значения собственных функций в левой и правой ямах имеют один порядок величины (в терминах большого параметра), (б) условие квантования выполнено в обеих ямах одновременно, (в) существуют два собственных значения с экспоненциально малым расщеплением между ними. Собственная функция, соответствующая верхнему собственному значению, имеет дополнительный нуль в подбарьерной области.

В дальнейшем мы обозначаем величины, относящиеся к правой потенциальной яме, верхним индексом “+”, а относящиеся к левой потенциальной яме — индексом “-”.

Сначала вычисляется степенное разложение по большому p для собственных значений λ с помощью условия квантования в правой яме. Это условие было впервые сформулировано Венцелем [127], а затем строго доказано в [109]. Это условие квантования, хотя оно и справедливо лишь в предположении наличия только одной ямы, позволяет получать правильный результат, пренебрегая экспоненциально малыми членами в описанных выше ситуациях (а)–(в).

Собственные функции, локализованные в правой потенциальной яме (в пренебрежении экспоненциально малыми членами), представляются в виде

$$w^+(p, z) = (u^+(p, z))^{1/2} \exp\left(-p \int (u^+(p, z))^{-1} dz\right), \quad (3.5.3)$$

справедливым для полной комплексной окрестности точки $z = 1$. Здесь проявляется тот факт, что эта часть асимптотики для собственной функции не испытывает явления Стокса. Подчеркнем здесь, что последовательные приближения для функции $u^+(p, z)$ могут иметь только полюса (не точку ветвления) при $z = 1$. Устранение ветвления у решения производится множителем $(u^+(p, z))^{1/2}$ и будет обсуждаться ниже. Использование функции $u^+(p, z)$ связано с ее большим удобством при практических вычислениях.

Подстановка (3.5.3) в (3.5.2) дает следующее уравнение для $u^+(p, z)$:

$$p^2 \left(1 - \frac{1}{4} (z^2 - 1)^2 u^2\right) + p(\lambda - \tilde{a}z)u^2 + \frac{1}{2} (u''u - \frac{1}{2} u'^2) = 0. \quad (3.5.4)$$

Условие, согласно которому функция $w(z)$ должна быть однозначной, приводит к условию квантования:

$$-p \operatorname{Res}_{z=1} (u^+(p, z))^{-1} = n^+ + \frac{1}{2}, \quad (3.5.5)$$

где вновь мы пренебрегаем экспоненциально малыми членами. Здесь n^+ является целым числом ($n^+ = 0, 1, \dots$), которое совпадает с числом нулей собственной функции $w^+(p, z)$ в правой яме, а член $1/2$ необходим для устранения ветвления у множителя $(u^+(p, z))^{1/2}$ в (3.5.3). Если

собственная функция экспоненциально мала в правой яме, соотношение между правой и левой частями (3.5.5) остается справедливым, но величина n^+ более не является целой и ниже будет обозначаться ν^+ .

Функции $u^+(p, z)$ и $\lambda^+(p)$ разлагаются в формальные асимптотические ряды

$$u^+(z, p) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z) p^{-k}, \quad (3.5.6)$$

$$\lambda^+(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k p^{-k}. \quad (3.5.7)$$

Последовательные члены в разложениях (3.5.6)–(3.5.7) получаются рекуррентным образом, после приравнивания членов одинакового порядка по p в уравнениях (3.5.4)–(3.5.5). Следует отметить, что для того, чтобы получить λ_k , достаточно знать подходящее число членов в разложениях Тейлора для $u_j(z)$, $j = 0, \dots, k-1$ в окрестности $z = 1$.

Приведем первые три члена разложения (3.5.6):

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{2}{z^2 - 1}, \quad u_1 = \frac{1}{2} (\lambda_0 - \tilde{a}z) u_0^3, \\ u_2 &= \frac{u_0}{2} \left(\lambda_1 u_0^2 + \frac{3}{4} (\lambda_0 - \tilde{a}z)^2 u_0^4 + \frac{1}{2} (u_0'' u_0 - \frac{1}{2} u_0'^2) \right). \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Соответствующие члены разложения для собственных значений λ^+ таковы:

$$\begin{aligned} \lambda^+ &= \lambda^+(n^+, \tilde{a}) = (2n^+ + 1) + \tilde{a} \\ &- \frac{1}{p} \left[\frac{3}{2} ((2n^+ + 1)^2 + \tilde{a}(2n^+ + 1)) + \frac{\tilde{a}^2}{4} + \frac{1}{8} \right] + O(p^{-2}). \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Нет необходимости вычислять еще раз функцию $u^-(p, z)$ и собственное число λ^- , соответствующие левой яме, т.е. точке $z = -1$, так как подстановка

$$z \mapsto -z, \quad a \mapsto 2 - a \quad \text{или} \quad \tilde{a} \mapsto -\tilde{a} \quad (3.5.10)$$

не изменяет уравнение (3.5.2). Тем самым имеется другой набор собственных значений, соответствующих левой яме, которые могут быть получены с помощью (3.5.9)–(3.5.10):

$$\begin{aligned} \lambda^- &= \lambda^-(n^-, -\tilde{a}) = (2n^- + 1) - \tilde{a} \\ &- \frac{1}{p} \left[\frac{3}{2} ((2n^- + 1)^2 - \tilde{a}(2n^- + 1)) + \frac{\tilde{a}^2}{4} + \frac{1}{8} \right] + O(p^{-2}). \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Здесь целые величины n^- соответствуют числу нулей собственной функции $w^-(p, z)$ в левой потенциальной яме.

Если попытаться нарисовать графики для собственных чисел на плоскости $(\tilde{a}, \lambda)$, то видно, что эти кривые (прямые линии в первом приближении) пересекаются в точках с координатами $\tilde{a} = n^- - n^+$, $\lambda = n^+ + n^- + 1$ (λ — координата в первом приближении). Хорошо известно, что у самосопряженной граничной задачи для дифференциального оператора второго порядка собственные значения не вырождаются. Следовательно, получающееся противоречие следует устранить, принимая во внимание экспоненциально малые члены.

Решение уравнения (3.5.2) в правой яме ищется в более сложном виде по сравнению с (3.5.3):

$$w^+(p, z) = [(\xi^+(p, z))']^{-1/2} D_{\nu^+}(\sqrt{p}\xi^+(p, z)), \quad (3.5.12)$$

где $D_{\nu}(t)$ — функция параболического цилиндра (см. (2.1.29)), причем

$$\xi^+(p, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^+ p^{-k}$$

и

$$\nu^+ = n^+ + \delta^+.$$

Как мы увидим позднее, эта форма решения содержит две экспоненты в подбарьерной области.

Для наших целей потребуются два члена асимптотического разложения при больших p для $\xi^+(p, z)$ или, что более удобно для дальнейших вычислений, для $(\xi^+(p, z))^2$. Выполняется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} ((\xi_0^+)^2)' &= 2(z^2 - 1), \\ ((\xi_0^+ \xi_1^+)' &= 2(z^2 - 1)^{-1} \left[\left(\nu_0^+ + \frac{1}{2} \right) \xi_0'^2 - \lambda_0^+ + \tilde{a}z \right], \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

что дает нам

$$\begin{aligned} (\xi^+)^2 &= 2\left(\frac{z^3}{3} - z\right) + \frac{4}{3} + \frac{1}{p}[(2\nu_0^+ + 1)(2\ln(z+1) + \ln(z+2)) \\ &\quad + 2\tilde{a}\ln(z+2)] + O(p^{-2}). \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Мы используем асимптотическую формулу для $D_{\nu}(t)$ при больших отрицательных величинах t , взятую из раздела 2.4. Эта формула не соответствует определению Пуанкаре для асимптотик, но имеет несколько приемлемых объяснений в современной теории экспоненциальных асимптотик [120], [8]. При этом мы получаем:

$$\begin{aligned} D_{\nu^+}(\sqrt{p}\xi^+) &= \cos(\pi\nu^+) e^{-p(\xi^+)^2/4} (-\sqrt{p}\xi^+)^{\nu^+} [1 + O(p^{-1})] \\ &\quad + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu^+)} e^{p(\xi^+)^2/4} (-\sqrt{p}\xi^+)^{-\nu^+-1} [1 + O(p^{-1})], \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

что приводит к следующему результату для решений (3.5.2) в подбарьерной области:

$$\begin{aligned}
 w^+(p, z) = & \cos(\pi\nu^+) e^{-p(z-1)^2(z+2)/6} \left(\sqrt{\frac{2p}{3}} \right)^{\nu^+} \\
 & \times \frac{(z-1)^{\nu^+}}{(z+1)^{\nu^++\bar{a}+1}} [1 + O(p^{-1})] \\
 & + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu^+)} e^{p(z-1)^2(z+2)/6} \left(\sqrt{\frac{2p}{3}} \right)^{-\nu^+-1} \\
 & \times \frac{(z+1)^{\nu^++\bar{a}}}{(z-1)^{\nu^++1}} [1 + O(p^{-1})]. \quad (3.5.16)
 \end{aligned}$$

Такое же решение, построенное для левой ямы и обозначаемое $w^-(p, z)$, записывается в виде

$$\begin{aligned}
 w^-(p, z) = & \cos(\pi\nu^-) e^{-p(z+1)^2(2-z)/6} \left(\sqrt{\frac{2p}{3}} \right)^{-\nu^--1} \\
 & \times \frac{(z+1)^{\nu^-}}{(z-1)^{\nu^--\bar{a}+1}} [1 + O(p^{-1})] \\
 & + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu^-)} e^{p(z+1)^2(2-z)/6} \left(\sqrt{\frac{2p}{3}} \right)^{\nu^-} \\
 & \times \frac{(z-1)^{\nu^--\bar{a}}}{(z+1)^{\nu^-+1}} [1 + O(p^{-1})]. \quad (3.5.17)
 \end{aligned}$$

Сшивая решения w^+ и w^- , мы сначала получим, как необходимое условие, связь между ν^+ , ν^- :

$$\nu^+ - \nu^- = -\bar{a}. \quad (3.5.18)$$

Рассмотрим три объявленных выше случая (1)–(3) в связи с (3.5.18) и условием квантования в обеих ямах. Предположим, что $\bar{a}$ не целое. Тогда либо $\nu^+ = n^+ + \delta^+$, так что собственное значение λ получается из условия квантования для правой ямы (3.5.9), либо $\nu^- = n^- + \delta^-$, так что собственное значение λ получается из условия квантования для левой ямы (3.5.11). Следует отметить, что связь (3.5.18) совместима с упомянутой выше симметрией для собственных значений λ^+ , λ^- .

Экспоненциально малые поправки δ^+ , δ^- нетрудно найти с помощью условия обращения в нуль вронскиана решений w^+ , w^- :

$$W(w^+(p, z), w^-(p, z)) = 0. \quad (3.5.19)$$

Формально в данном случае аргумент только одной из Γ -функций (3.5.16)–(3.5.17) принимает значение вблизи полюса.

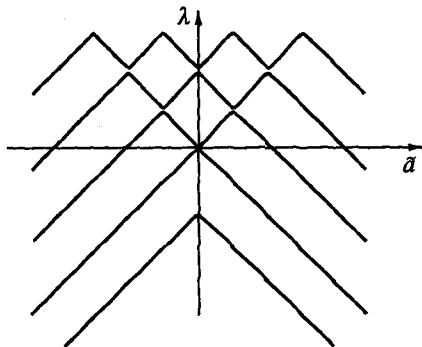


Рис. 3.1. Асимптотическое описание явления квазипересечения

Другая возможность возникает, когда параметр $\tilde{a}$ принимает целое значение. Тогда условия квантования выполнены в обоих потенциальных ямах, и в результате имеем:

$$v^+ = n^+ \pm \delta, \quad v^- = n^- \pm \delta. \quad (3.5.20)$$

Экспоненциально малые значения δ получаются из уравнения (3.5.19). При малых δ оно обращается в квадратное уравнение, которое после упрощения приводится к виду

$$\delta^2 = \frac{e^{-4p/3} (2p/3)^{(n^- + n^+ + 1)}}{2\pi (n^-)! (n^+)!} [1 + O(p^{-1})]. \quad (3.5.21)$$

Отметим, что в данном случае аргументы обеих Γ -функций в (3.5.16)–(3.5.17) находятся вблизи соответствующих полюсов.

Расщепление двух собственных значений $\Delta\lambda$ при квазипересечении вычисляется согласно

$$\Delta\lambda = 4 |\delta| = \frac{4 e^{-2p/3} (2p/3)^{(n^- + n^+ + 1)/2}}{[2\pi (n^-)! (n^+)!]^{1/2}} [1 + O(p^{-1})]. \quad (3.5.22)$$

Результаты асимптотических вычислений представлены на рис. 3.1. Эти кривые можно сравнить с результатами точных вычислений (см. раздел 4.4).

3.5.3. Биконфлюэнтное уравнение Гойна

В случае биконфлюэнтного уравнения (3.1.11) его приведение к шредингеровской форме удобно выполнить в два шага. Во-первых, мы приводим уравнение к самосопряженной форме с помощью подстановки,

подобной (3.5.2):

$$y(z) \mapsto w(z): \quad y(z) = G(z)w(z) = \exp\left(\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}tz + \frac{(1-c)}{2} \ln z\right)w(z), \quad (3.5.23)$$

$$M_z^{\{1;3\}}w(z) = \left(DzD + \left[\lambda + \frac{tc}{2} - \left(a - \frac{1+c}{2}\right)z - \frac{1}{4}z(z+t)^2 - \frac{(1-c)^2}{4z}\right]\right)w(z) = 0, \quad (3.5.24)$$

где $M^{\{1;3\}} = G^{-1}L^{\{1;3\}}G$. Еще раз напомним, что рассматривается случай, когда большой параметр t отрицателен. В итоге получаем типичное кулоновское поведение в нуле и яму, подобную осцилляторной, в окрестности точки $z = t$. После подстановки

$$t \mapsto -p, \quad p > 0, \quad z \mapsto pz,$$

$$\lambda + \frac{pc}{2} \mapsto p\lambda, \quad a - \frac{1+c}{2} \mapsto \tilde{a}, \quad w(z) \mapsto z^{-1/2}w(z)$$

уравнение (3.5.24) обращается в

$$N_z^{\{1;3\}}w(z) = \left(D^2 + \left[p \frac{\lambda - \tilde{a}z}{z} - \frac{p^2}{4}(z-1)^2 - \frac{1-(1-c)^2}{4z^2}\right]\right)w(z) = 0. \quad (3.5.25)$$

Уравнение (3.5.25) рассматривается тем же способом, что и (3.5.2), но “+” теперь отмечает объекты, относящиеся к окрестности точки $z = 1$, т. е. к потенциальной яме, а значок “-” — объекты, относящиеся к кулоновской особенности вблизи нуля.

Представление (3.5.2) и условие квантования (3.5.3) позволяют определить первые члены степенной асимптотики для $u^+(p, z)$ и λ^+ , так же как и (3.5.6), (3.5.8):

$$u_0 = \frac{2}{z-1}, \quad u_1 = (\lambda_0 - \tilde{a}z) \frac{u_0^3}{2z},$$

$$u_2 = \frac{u_0}{2} \left[\lambda_1 \frac{u_0^2}{z} + \frac{3}{8} (\lambda_0 - \tilde{a}z)^2 \frac{u_0^4}{z^2} + \frac{1-(1-c)^2}{4} \frac{u_0^2}{z^2} + \frac{5}{16} u_0^4 \right].$$

Соответствующие члены разложения для собственных значений λ^+ имеют вид:

$$\lambda^+ = \lambda^+(n^+, \tilde{a}) = n^+ + \frac{1}{2} + \tilde{a}$$

$$- \frac{1}{p} \left[\frac{3}{2} \left(\left(n^+ + \frac{1}{2} \right)^2 + 2\tilde{a} \left(n^+ + \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{\tilde{a}^2}{2} + \frac{1}{4} c(c-2) \right] + O(p^{-2}), \quad (3.5.26)$$

где n^+ — целое, отвечающее числу нулей собственной функции в потенциальной яме.

Теперь построим те же члены в окрестности кулоновской потенциальной ямы в нуле. Для этого в выражении для $u_k(z)$ необходимо у $u_0(z)$ изменить знак на противоположный. Для того чтобы вычислить последовательные члены λ^- , следует использовать вместо (3.5.5) иное условие квантования. Оно учитывает не только нули собственной функции, но также возможный нуль или точку ветвления при $z = 0$, согласно величине параметра c , который мы в дальнейшем полагаем положительным [109]:

$$-p \operatorname{Res}_{z=0}(u^-(p, z))^{-1} = n^- + \frac{c}{2}. \quad (3.5.27)$$

Здесь, как и выше, экспоненциально малые члены не учитываются. В (3.5.27) n^- — целая величина ($n^- = 0, 1, \dots$), которая равна числу нулей собственной функции $w^-(p, z)$ в левой кулоновской яме. Вычисления вычета дают асимптотическое выражение для λ^- :

$$\lambda^- = n^- + \frac{c}{2} + \frac{1}{p} \left[\frac{3}{4} \left(n^+ + \frac{c}{2} \right)^2 - \tilde{a} \left(n^- + \frac{c}{2} \right) \right] + \frac{c(c-2)}{4} + O(p^{-2}), \quad (3.5.28)$$

где n^- — целая величина, отвечающая числу нулей собственной функции в кулоновском потенциале. К сожалению, в данном случае нет простого соотношения, связывающего λ^- и λ^+ на основе симметрий уравнения.

Изучение решений в правой яме в случае, если требуется сохранять две экспоненты, полностью подобно рассмотрению в предыдущем разделе, так что мы приведем только формулы, соответствующие (3.5.13), (3.5.14):

$$((\xi_0^+)^2)' = 2(z-1), \quad (\xi_0^+ \xi_1^+)' = \frac{(2\nu^+ + 2\tilde{a} + 1)}{z}, \quad (3.5.29)$$

откуда следует

$$(\xi^+)^2 = z(z-2) + 1 + \frac{1}{p} (2\nu^+ + 2\tilde{a} + 1) \ln z + O(p^{-2}).$$

В окрестности кулоновской особенности собственная функция $w^-(p, z)$ ищется в виде

$$w^-(p, z) = (\xi^-(p, z))^{-1/2} M_{\kappa^-, m}(p\xi^-(p, z)), \quad (3.5.30)$$

где $M_{\kappa, m}(t)$ — ограниченное в нуле решение уравнения Уиттекера при $m = (c-1)/2$, а параметр κ^- следует искать с помощью условия сшивания. Приведем первые члены асимптотического разложения для ξ^- :

$$\xi^-(p, z) = z \left(1 - \frac{z}{2} \right) + \frac{1}{p} \left[\frac{2b - 2\kappa^-}{1-z} - \frac{\kappa^-}{1-z/2} \right] + O(p^{-2}). \quad (3.5.31)$$

Для сшивания асимптотических разложений кроме (3.5.15) требуется формула (см. раздел 2.4)

$$M_{\kappa, m}(p\xi) = \frac{\cos(\pi(m - \kappa + 1/2))}{\Gamma(m - \kappa + 1/2)} e^{-p\xi/2} (p\xi)^{\kappa} [1 + O(p^{-1})] \\ + \frac{1}{\Gamma(m + \kappa + 1/2)} e^{p\xi/2} (p\xi)^{-\kappa} [1 + O(p^{-1})], \quad (3.5.32)$$

где включены обе экспоненты — доминантная и рецессивная. Отметим, что в (3.5.32) выбрана нестандартная нормировка функции $M_{\kappa, m}(t)$. После подстановок (3.5.32)–(3.5.31) в (3.5.30) мы приходим к асимптотическому выражению для $w^-(p, z)$ в подбарьерной области:

$$w^-(p, z) = \frac{\cos(\pi(m - \kappa^- + 1/2))}{\Gamma(m - \kappa^- + 1/2)} \exp\left(-p \frac{z}{2} \left(1 - \frac{z}{2}\right)\right) \\ \times (1 - z)^{\bar{a}-1/2} \left(\frac{pz}{1-z}\right)^{\kappa^-} [1 + O(p^{-1})] \\ + \frac{1}{\Gamma(m + \kappa^- + 1/2)} \exp\left(p \frac{z}{2} \left(1 - \frac{z}{2}\right)\right) \\ \times (1 - z)^{-\bar{a}-1/2} \left(\frac{pz}{1-z}\right)^{-\kappa^-} [1 + O(p^{-1})]. \quad (3.5.33)$$

Другое асимптотическое выражение для функции $w^+(p, z)$ выглядит следующим образом:

$$w^+(p, z) = \cos(\pi\nu^+) \exp\left(p \frac{z}{2} \left(1 - \frac{z}{2}\right) - \frac{p}{4}\right) z^{\nu^+ + \bar{a} + 1/2} \\ \times (\sqrt{p}(1 - z))^{\nu^+} [1 + O(p^{-1})] \\ + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu^+)} \exp\left(-p \frac{z}{2} \left(1 - \frac{z}{2}\right) + \frac{p}{4}\right) z^{-(\nu^+ + \bar{a} + 1/2)} \\ \times (\sqrt{p}(1 - z))^{-\nu^+ - 1} [1 + O(p^{-1})]. \quad (3.5.34)$$

Выпишем необходимое условие сшивания двух построенных асимптотик:

$$\nu^+ + \bar{a} + \frac{1}{2} = \kappa^-. \quad (3.5.35)$$

Как и в предыдущем случае триконфлюэнтного уравнения, использование дисперсионного уравнения для собственных чисел (3.5.19) приво-

дит к двум последовательностям кривых собственных значений, соответствующих собственным функциям, локализованным в окрестности либо $z = 0$, либо $z = 1$. Асимптотические формулы для этих последовательностей в пренебрежении асимптотически малыми поправками уже получены на основе простых рассуждений в (3.5.26) и (3.5.28). Приведенные там последовательности пересекаются на плоскости $(\tilde{a}, \lambda)$, если величина $\tilde{a} + (1 - c)/2$ целая. Однако пересечение запрещено и возникает явление квазипересечения. Возвращаясь к исходным параметрам БУГ, это условие можно записать в виде:

$$c - a = n^+ - n^-. \quad (3.5.36)$$

Расщепление в данной точке кривых, описывающих собственные значения, можно получить с помощью (3.5.19):

$$\delta^2 = \frac{e^{-p/2} p^{(2n^- + n^+ + c + 1/2)}}{\sqrt{2\pi} \Gamma(c) \Gamma(n^- + c) (n^-)! (n^+)!} [1 + O(p^{-1})], \quad (3.5.37)$$

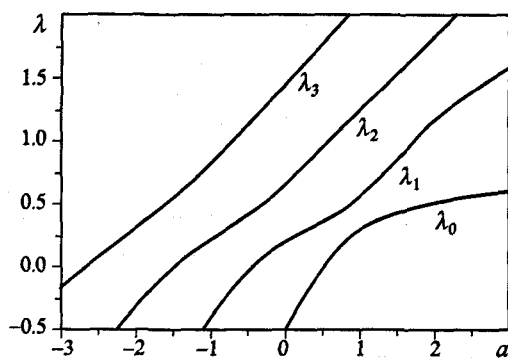
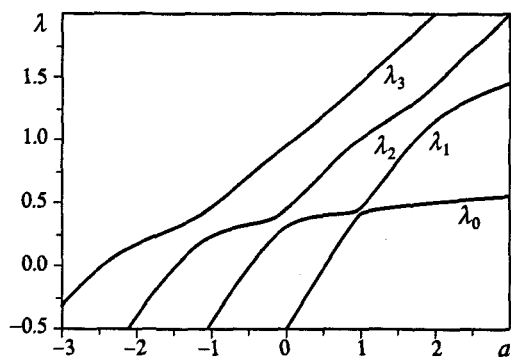
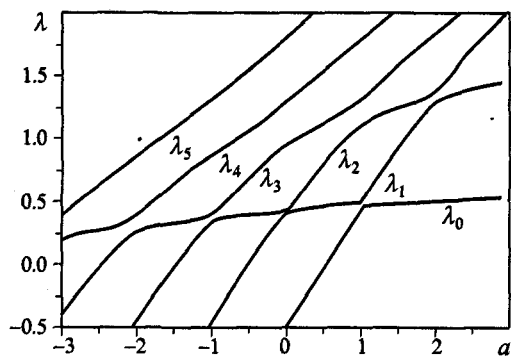
причем

$$v^+ = n^+ \pm \delta, \quad \kappa^- = n^- + \frac{c}{2} \pm \delta.$$

Для иллюстрации этих результатов мы приведем здесь несколько рисунков, с помощью которых читатель сможет получить наглядное представление об этом явлении. Они показывают результаты точных вычислений на основе результатов разделов 1.6 и 3.6 и сравнение их с результатами асимптотических вычислений, представленных выше. Читатель также может обратиться к разделам 4.4 и 4.5, где это явление и его подавление (или исчезновение) проиллюстрировано с помощью вычислительных методов.

Рис. 3.2–3.5*) показывают возникновение и развитие явления при увеличении параметра p . (Метод вычислений описан в разделах 1.6 и 3.6.) На рис. 3.6 отмечена точка квазипересечения для параметров, представленных на рис. 3.5. Рис. 3.7 иллюстрирует результаты асимптотического описания явления, а рис. 3.8 — результаты сравнения асимптотических и точных вычислений. Сплошная линия описывает разницу между двумя кривыми в зависимости от p , полученную в итоге точных вычислений; пунктирная линия изображает ту же величину, полученную в итоге асимптотических вычислений. На рис. 3.9 изображено расщепление кривых в точке пересечения в зависимости от параметра p . Рис. 3.10 показывает потенциал биконфлюэнтного уравнения Гойна (приведенного в шредингеровской форме).

*) Вычисления были выполнены Карлхайнцем Баем. Авторы благодарны ему за предоставление материалов до их опубликования.

Рис. 3.2. Параметры $p = 10, c = 1$ Рис. 3.3. Параметры $p = 20, c = 1$ Рис. 3.4. Параметры $p = 30, c = 1$

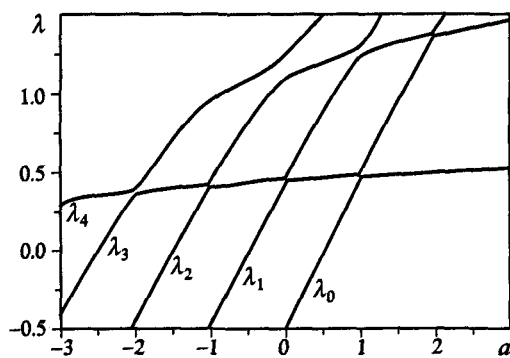
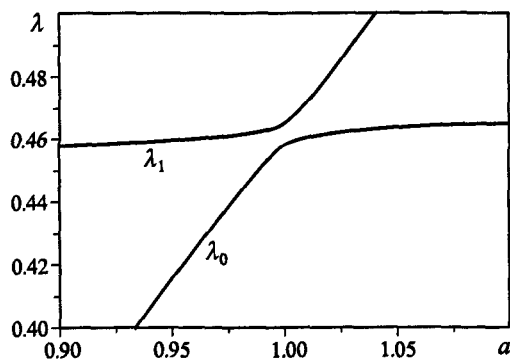
Рис. 3.5. Параметры $p = 40$, $c = 1$ 

Рис. 3.6. Расщепление собственных значений в точке пересечения

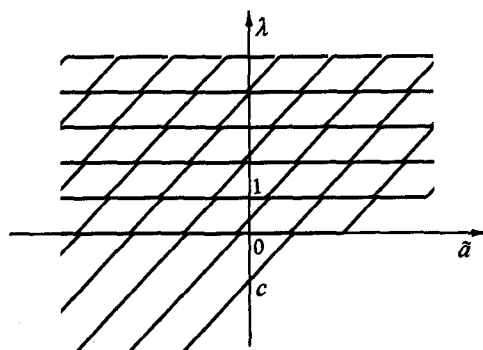


Рис. 3.7. Асимптотическое описание явления квазипересечения

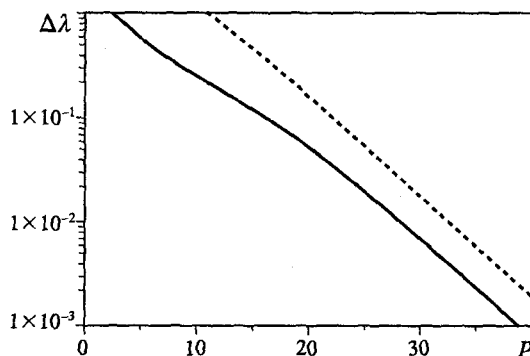


Рис. 3.8. Сравнение асимптотического и численного описания расщепления в точке пересечения

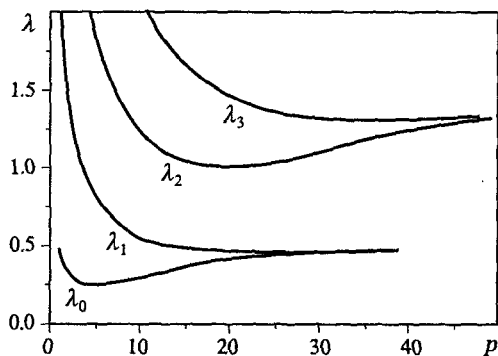


Рис. 3.9. Расщепление в точке пересечения в зависимости от p

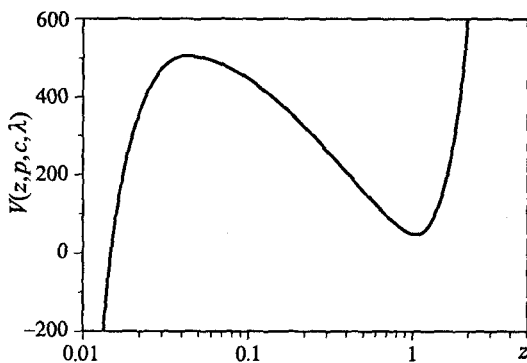


Рис. 3.10. Потенциал в шредингеровской форме

3.5.4. Конфлюэнтное уравнение Гойна

Так как рассмотрение этого случая аналогично уже обсуждавшимся ситуациям, мы приведем только конечные результаты для расщепления критических собственных значений при квазипересечении. Все технические детали вычислений уже обсуждались в предыдущих разделах.

Для построения асимптотик решений мы будем использовать нормальную форму КУГ, которая лучше отражает свойства симметрии, регулярные особые точки мы поместим в $z = \pm 1$, а исходные параметры c, d в уравнении (3.1.3) заменим на параметры m, s согласно $c = m + s + 1, d = m - s + 1$,

$$v''(z) + \left(-p^2 + 2p \frac{\lambda - bz}{1 - z^2} - \frac{m^2 + s^2 + 2msz - 1}{(1 - z^2)^2} \right) v(z) = 0. \quad (3.5.38)$$

“Потенциал” в уравнении (3.5.38) можно рассматривать как сумму двух одномерных кулоновских потенциалов. Тем самым спектр собственных значений распадается при $p \mapsto \infty$ на два кулоновских спектра.

Для собственных значений, относящихся к левой яме, мы имеем:

$$\begin{aligned} \lambda^-(p, \chi, b) = & (2\chi - b) + \frac{1}{2p} \left(-2\chi(\chi - b) + \frac{1}{2} (m^2 + s^2 - 1) \right) \\ & + \frac{1}{4p^2} \left(-\chi(\chi - b)^2 + \chi^2(\chi - b) - \frac{1}{4} (\chi - b)(1 - (m - s)^2) \right. \\ & - \frac{1}{4} \chi(1 - (m + s)^2) + \frac{1}{8p^3} \left(-3\chi^2(\chi - b)^2 - \chi(\chi - b)^3 - \chi^3(\chi - b) \right. \\ & - \chi(\chi - b) - \frac{1}{2} (\chi - b)^2(1 - (m - s)^2) - \frac{1}{2} \chi^2(1 - (m + s)^2) \\ & \left. \left. - \chi(\chi - b)(1 - (m^2 + s^2)) - \frac{1}{16} (1 - (m - s)^2)(1 - (m + s)^2) \right) \right) \\ & + O(p^{-4}), \end{aligned} \quad (3.5.39)$$

где

$$\chi = \kappa^-. \quad (3.5.40)$$

Асимптотическая формула для собственных значений $\lambda^+(p, \chi, -b)$, соответствующих правой кулоновской яме, может быть получена подстановкой

$$\chi \mapsto \kappa^+, \quad b \mapsto -b, \quad m - s \mapsto m + s, \quad m + s \mapsto m - s$$

в (3.5.40). Соотношение между κ^- и κ^+ , которое можно рассматривать или как условие единственности собственного числа, или как условие сшивания, выглядит следующим образом:

$$\kappa^+ = \kappa^- - b. \quad (3.5.41)$$

Для того чтобы получить уравнение для параметра κ^- , мы вычисляем вронскиан асимптотик собственных функций в подбарьерной области и полагаем его равным нулю. Соответствующий результат имеет вид:

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{m+s}{2} - \kappa^+ \right) \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{m-s}{2} - \kappa^- \right) =$$

$$= \frac{e^{-4p} (4p)^{2(\kappa^+ + \kappa^-)}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m+s}{2} + \kappa^+) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m-s}{2} + \kappa^-) \Gamma(\frac{1}{2} + \kappa^+ - \frac{m+s}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \kappa^- - \frac{m-s}{2})} \times (1 + O(p^{-1})). \quad (3.5.42)$$

Система двух связанных уравнений (3.5.41)–(3.5.42) может быть решена последовательными приближениями. При этом будем иметь два набора решений. Если мы отбросим экспоненциально малые члены, то получим либо

$$\kappa^- = n^- + \frac{m-s}{2} + \frac{1}{2}, \quad (3.5.43)$$

либо

$$\kappa^+ = n^+ + \frac{m+s}{2} + \frac{1}{2}. \quad (3.5.44)$$

Здесь n^-, n^+ — целые величины, порождающие собственные значения, соответствующие этим двум наборам. Первый набор отвечает собственным функциям, локализованным вблизи левого конца интервала $]-1, 1[$, второй — собственным функциям, сосредоточенным вблизи правого конца.

Квазипересечения собственных значений на плоскости (b, λ) происходят при выполнении условия

$$b = n^- - n^+ - s. \quad (3.5.45)$$

Можно вычислить расщепление между кривыми собственных значений на этой плоскости:

$$\Delta \lambda = \frac{2(4p)^{n^+ + n^- + m + 1} e^{-2p}}{[(n^+)!(n^-)!(n^+ + m + s)!(n^- + m - s)!]^{1/2}} (1 + O(p^{-1})). \quad (3.5.46)$$

Асимптотики собственных функций в точках квазипересечений можно брать в виде суммы и разности “локальных” асимптотических разложений.

3.5.5. Обсуждение

Здесь будет приведено несколько соображений о происхождении и возможных связях явления квазипересечения. Мы начнем с конфлюэнтных гипергеометрических уравнений с неветвящимися особенностями на

бесконечности. Имеется два таких уравнения, а именно конфлюэнтное гипергеометрическое уравнение и уравнение Вебера для функций параболического цилиндра.

Два формальных асимптотических решения этих уравнений в иррегулярной особой точке на бесконечности можно записать в виде:

$$y_m(z) = \exp(P_m(z))z^{-\alpha_m}v_m(z), \quad m = 1, 2, \quad (3.5.47)$$

где $P_m(z)$ — полином первого или второго порядка (в зависимости от уравнения) и $v_m(z)$ — формальный асимптотический ряд по степеням z^{-1} . На радиальных лучах, где мнимая часть P_m становится равной нулю, имеет место явление Стокса, а это означает, что двумерный вектор, представляющий пару настоящих решений уравнения с помощью формальных асимптотических решений, умножается на матрицу. После приведения в подходящий базис эта матрица имеет треугольный вид. Такая матрица называется матрицей Стокса, а ее недиагональный элемент — множителем Стокса. Это явление можно также рассматривать в пространстве двух вещественных переменных, один — большой параметр r — модуль независимой переменной, а второй параметр φ — угол между упомянутым выше лучом и абсциссой. В этом пространстве на формальном уровне явление Стокса — это разрывность множителя Стокса как функции от φ . Однако для вычислительных приложений может быть использована дальнейшая структура разложений, в качестве формальных разложений можно взять конечное число членов асимптотических разложений, тем большее, чем больше параметр r . Такие процедуры приводят к сглаживанию Берри для явления Стокса [14].

Все эти рассуждения справедливы до тех пор, пока $a = \alpha_1 - \alpha_2$ не является целым. В последнем случае матрица Стокса становится диагональной, и явление Стокса отсутствует. Одно из решений в этом случае совпадает с собственной функцией. Явление исчезновения константы Стокса как функция от параметра a непрерывно. Изучение поведения собственного числа в зависимости от параметра a не имеет большого смысла, так как собственное значение само является целым числом a .

Теперь обратимся к классу Гойна. Формальные асимптотические решения для уравнений с неразветвленными особенностями (которые мы и обсуждаем) снова могут быть представлены в форме, подобной (3.5.47), однако число параметров в данном случае намного больше. Собственное значение не совпадает с параметром a , и кроме асимптотик по большому аргументу можно изучать асимптотики по большому параметру r . В данном случае пространство вещественных параметров четырехмерно и можно исследовать другие явления типа разрывности в этом пространстве. Мы полагаем, что явление квазипересечения собственных значений λ в пространстве (r, a) имеет много общего с явлением Стокса

в пространстве (r, φ) . Оба являются эффектами типа разрывности, когда различные части асимптотики (в смысле экспоненциальных асимптотик) изменяются, оба явления периодичны по второму параметру, оба феномена являются весьма общими. По этим причинам дальнейшее изучение данных явлений должно включать в себя оценки для далеких членов асимптотических разложений по p , изучение сглаживающих функций для больших, но фиксированных p , процедуры восстановления в терминах некоторого преобразования от пространства (p, a) к новому пространству.

3.6. Центральные двухточечные задачи связи

3.6.1. Введение

В данном разделе мы обсудим центральную двухточечную задачу связи (ЦДЗС) для конфлюэнтных вариантов дифференциальных уравнений Гойна. Редуцированные конфлюэнтные уравнения Гойна не будут рассматриваться, так как их исследование еще не выполнено.

Примечательной особенностью наших задач является тот факт, что по крайней мере одна из конечных точек соответствующего интервала является *иррегулярной* особой точкой дифференциального уравнения, в то время как другой конец может быть регулярной точкой, регулярной или иррегулярной особой точкой. Все эти варианты могут действительно реализоваться.

Согласно общей процедуре, описанной в разделе 1.6, первым шагом в нашем подходе является расщепление асимптотических множителей для соответствующих особых точек. Однако мы опускаем этот шаг, начиная не с общей формы уравнения, а с нормальной формы для конфлюэнтных уравнений Гойна. Данный выбор связан с двумя причинами: канонические формы имеют минимальное число параметров среди других форм, что приводит к наиболее простым формулам, а это является важным для нас обстоятельством. Во-вторых, каждый параметр в таком случае имеет определенное значение, что существенно помогает изучению ЦДЗС. Иными словами, мы начинаем *после* отщепления асимптотических множителей частных решений, и, более того, предполагая для (просто) конфлюэнтного уравнения, что один из характеристических показателей (который отвечает особой точке, не лежащей на нашем интервале) равен нулю. Тем не менее читателю не потребуется выполнять необходимое преобразование к общей форме, эту информацию можно найти в [75].

Наш первый шаг будет связан с введением дополнительной особенности в би-, три- и дважды конфлюэнтное уравнение, где это будет необходимо.

Второй шаг наших действий — преобразование Мёбиуса. Так как мы начинаем работать с дифференциальным уравнением в его естественной форме, нам требуется поместить соответствующий интервал между нулем и единицей. Имеется единственное исключение из этого правила: в дважды конфлюэнтном случае одну особенность мы помещаем в -1 , а вторую (на бесконечности) — в $+1$. Это естественное обобщение, так как обе рассматриваемые особые точки — иррегулярные (см. раздел 1.6).

Основной наших рассуждений является тот факт, что итоговые уравнения имеют одно частное решение, голоморфное в нуле и потому представимое в его окрестности степенным рядом. Радиус сходимости этих рядов равен в точности единице, и их коэффициенты удовлетворяют иррегулярным разностным уравнениям типа Пуанкаре–Перрона, порядок которых совпадает с суммой s -рангов иррегулярных особых точек граничной задачи. Более того, все эти разностные уравнения могут быть рекуррентным образом решены, так как имеют достаточное число начальных условий.

Как уже обсуждалось в главе 1, во всех рассматриваемых случаях имеется фундаментальный набор асимптотических решений разностных уравнений, который называется набором Биркгофа. Эти решения Биркгофа могут быть вычислены явно с помощью индексных асимптотик; они приведены ниже. В результате общее решение разностных уравнений может быть представлено в терминах решений Биркгофа.

В итоге мы получаем, что точное условие на собственные значения для центральной двухточечной задачи связи для конфлюэнтных вариантов уравнения Гойна выражается в терминах упомянутого выше общего решения разностного уравнения. Как будет показано в главе 4, этот метод не только может быть сформулирован единообразно для всего класса конфлюэнтных уравнений Гойна, но также пригоден при вычислительной реализации теории.

Мы напомним результаты раздела 1.6, и наша первая задача — более подробно осветить основные шаги предлагаемой процедуры.

3.6.2. Дифференциальные уравнения в канонической форме

Выпишем подходящие для ЦДЗС канонические формы конфлюэнтных уравнений Гойна.

(Однократно) конфлюэнтный случай:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left[-p + \frac{c}{z} + \frac{d}{z+1} \right] \frac{dy}{dz} + \left[\frac{apz + \lambda}{z(z+1)} \right] y = 0. \quad (3.6.1)$$

Биконфлюэнтный случай:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left[-p(z+1) + \frac{c}{z} \right] \frac{dy}{dz} + \left[-pa + \frac{\lambda}{z} \right] y = 0. \quad (3.6.2)$$

Триконфлюэнтный случай:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + [-p(z^2 - 1)] \frac{dy}{dz} + [-paz + \lambda] y = 0. \quad (3.6.3)$$

Дважды конфлюэнтный случай:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left[\frac{c}{z} - \frac{p(z^2 - 1)}{z^2} \right] \frac{dy}{dz} + \left[\frac{-paz + \lambda}{z^2} \right] y = 0. \quad (3.6.4)$$

Во всех выписанных уравнениях предполагается, что параметры a, c, d, p, λ вещественны и, более того, параметры p и c удовлетворяют условию

$$p > 0, \quad c > 1. \quad (3.6.5)$$

Отметим, что не следует здесь и в дальнейшем допускать путаницу в связи с использованием одинаковых обозначений в разных уравнениях.

Для каждого из описанных выше уравнений ЦДЗС может быть поставлена следующим образом.

Рассмотрим положительную вещественную полуось. При приближении к точкам $z = 0$ и $z = \infty$ изнутри интервала $[0, \infty[$ возможно два асимптотических поведения (называемых доминантным и рецессивным) решений каждого из уравнений (3.6.1)–(3.6.4). Как найти значение параметра λ , для которого эти дифференциальные уравнения имеют решения, рецессивные *одновременно* в обеих точках $z = 0$ и $z = \infty$? По существу, эти значения являются собственными значениями $\lambda = \lambda_i$ соответствующей задачи на собственные значения.

Предполагается, что для всех конфлюэнтных случаев концы интервалов находятся в точках $z_1 = 0, z_2 = \infty$. Точка $z_1 = 0$ является:

- обыкновенной точкой уравнения в триконфлюэнтном случае;
- регулярной особой точкой в (однократно) конфлюэнтном и в биконфлюэнтном случаях;
- иррегулярной особой точкой в дважды конфлюэнтном случае.

В триконфлюэнтном случае точка $z = 0$ является обыкновенной точкой уравнения. Таким образом, было бы более естественным расширить интервал от $[0, +\infty[$ до $]-\infty, +\infty[$. Это может быть сделано применением дважды описанной ниже процедуры: сначала — для интервала $[0, \infty[$ и затем — для интервала $]-\infty, 0]$. В последнем случае следует заменить z на $-z$ и p на $-p$. При обсуждении задачи связи на всей вещественной оси мы можем говорить об *естественной ЦДЗС* для *триконфлюэнтного* уравнения Гойна.

На первом шаге произведем линейное преобразование зависимой переменной для каждого из уравнений (3.6.1)–(3.6.4):

$$y = (z + 1)^{-a} w. \quad (3.6.6)$$

Записав уравнения (3.6.1)–(3.6.4) в общем виде

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + P(z) \frac{dy(z)}{dz} + Q(z)y(z) = 0,$$

с помощью (3.6.6) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \left(P(z) - \frac{2a}{z+1} \right) \frac{dw(z)}{dz} + \left(Q(z) - \frac{aP(z)}{z+1} + \frac{a(a+1)}{(z+1)^2} \right) w(z) = 0. \quad (3.6.7)$$

Существенная разница между этими двумя уравнениями заключается в том, что множитель перед $w(z)$ в (3.6.7) может быть оценен следующим образом:

$$\tilde{Q}(z) = Q(z) - \frac{aP(z)}{z+1} + \frac{a(a+1)}{(z+1)^2} = O(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty.$$

В результате (3.6.6) точка $z = -1$ становится приводимой особой точкой (см. [110, с. 296]) в случае уравнений (3.6.2)–(3.6.4).

Далее применим преобразование Мёбиуса для независимой переменной для каждого конфлюэнтного уравнения (3.6.7) согласно

$$x = \frac{z - z_{**}}{z + 1}, \quad (3.6.8)$$

где величина z_{**} равна нулю для (однократно) конфлюэнтного, би- и триконфлюэнтного уравнений и единице для дважды конфлюэнтного уравнения.

Замечание. Здесь следует упомянуть тот факт, что и для самого уравнения Гойна возможна ситуация, когда преобразование Яффе имеет смысл. Предположим, что особыми точками уравнения Гойна являются $z = 0, 1, z^*, \infty$. Более того, предположим, что мы хотим решить ЦДЗС для него на интервале $[0, 1]$. Если для комплексной величины z^* справедливо неравенство $|z^*| < 1$, то в окрестности $z = 0$ радиус сходимости разложения Яффе $\mathcal{R} = |z^*| < 1$, и таким образом, это разложение не достигает второй особой точки $z = 1$. В этом случае следует выполнить следующее преобразование Яффе:

$$x = \frac{z(1 - z^*)}{z - z^*}. \quad (3.6.9)$$

Это преобразование исправляет ситуацию: во-первых, оно сохраняет концы интервала на своих местах, во-вторых, оно делает единичный круг свободным от других особых точек. Таким образом, в данном случае

преобразование Яффе помогает решить ЦДЗС. Оно приводит к регулярному разностному уравнению второго порядка типа Пуанкаре–Перрона и трехчленным рекуррентным соотношениям. $\square$

Выпишем результаты применения преобразования Мёбиуса для каждого конфлюэнтного случая.

(Однократно) конфлюэнтный случай:

$$x(1-x)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + [-px + (c + \{d - 2(a+1)\}x)(1-x)] \frac{dw}{dx} + [\lambda - ac + \{a(a+1) - ad\}x]w = 0. \quad (3.6.10)$$

Биконфлюэнтный случай:

$$x(1-x)^3 \frac{d^2 w}{dx^2} + [-px + (1-x)^2 \{c - 2(a+1)x\}] \frac{dw}{dx} + [\lambda + a(a+1)(1-x)(x-ca)]w = 0. \quad (3.6.11)$$

Триконфлюэнтный случай:

$$(1-x)^4 \frac{d^2 w}{dx^2} + [-2px + p - 2(a+1)(1-x)^3] \frac{dw}{dx} + [\lambda - ap + a(a+1)(1-x)^2]w = 0. \quad (3.6.12)$$

Дважды конфлюэнтный случай:

$$(1-x^2)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + [-8px + 2(1-x^2)\{c - (a+1)(1+x)\}] \frac{dw}{dx} + [4\lambda + \{a(a+1)(1+x) - 2ac\}(1+x) - 4pa]w = 0. \quad (3.6.13)$$

Как уже упоминалось, преобразования (3.6.6), (3.6.8), взятые совместно, мы называем *преобразованиями Яффе* в конфлюэнтном, би- и триконфлюэнтном случаях и *преобразованиями Яффе–Лая* в дважды конфлюэнтном случае. Г. Яффе выяснил в [52] их важность для ЦДЗС, вычисляя спектр ионизованной молекулы водорода. Итоговые уравнения (3.6.10)–(3.6.13) являются уравнениями в *форме Яффе–Лая*. Эта форма замечательна следующими свойствами.

- (1) В нуле имеется либо обыкновенная точка, либо регулярная особая точка уравнения (один из концов интервала).
- (2) На бесконечности всегда есть регулярная особая точка уравнения (возможно, приводимая).
- (3) Точно два конца рассматриваемого интервала лежат на границе или внутри единичного круга $|x| \leq 1$.

- (4) Если один из концов интервала — иррегулярная особая точка, она совпадает с $x = 1$; если оба конца — это точки $x = 1$ и $x = -1$.
- (5) Если один из концов является регулярной особой точкой, то он совпадает с точкой $x = 0$.

Дифференциальные уравнения, возникающие после преобразования Яффе или Яффе–Лая конфлюэнтных уравнений Гойна, имеют вид:

$$P_4(x) \frac{d^2 w}{dx^2} + \sum_{i=0}^3 \Gamma_i x^i \frac{dw}{dx} + \sum_{j=0}^2 \Delta_j x^j w = 0,$$

где $P_4(x)$ — полином четвертого порядка, Γ_i , $i = 0, 1, 2, 3$; Δ_j , $j = 0, 1, 2$ — параметры, которые зависят от параметров исходного уравнения.

Для каждого из конфлюэнтных уравнений (3.6.10)–(3.6.13) применим анзац

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (3.6.14)$$

Коэффициенты a_n удовлетворяют (иррегулярным) разностным уравнениям типа Пуанкаре–Перрона. Это следует из условий (1) и (4) для формы Яффе–Лая. Возникает вопрос, при каких условиях на решения разностного уравнения функция (3.6.14) будет собственной функцией. Формально поведение коэффициентов a_n может быть извлечено с помощью формулы, обратной к (3.6.14):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} x^{-n-1} w(x) dx$$

для подходящего контура Ω (см. [10]).

3.6.3. Разностные уравнения и наборы Биркгофа

Выпишем разностные уравнения для конфлюэнтных уравнений Гойна. (Однократно) конфлюэнтный случай:

a_0 произвольно,

$$sa_1 + (\lambda - ac)a_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta_1}{n^2}\right)a_{n+1} + \left(-2 + \frac{\alpha_0}{n} + \frac{\beta_0}{n^2}\right)a_n \\ + \left(1 + \frac{\alpha_{-1}}{n} + \frac{\beta_{-1}}{n^2}\right)a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

$$\alpha_1 := 1 + c,$$

$$\beta_1 := c,$$

$$\alpha_0 := -p + d - c - 2a,$$

$$\beta_0 := \lambda - ac,$$

$$\alpha_{-1} := 2a - d - 1,$$

$$\beta_{-1} := a(a+1) - d(a-1) - 2a.$$

Биконфлюэнтный случай:

a_0 произвольно,

$$ca_1 + (\lambda - ca)a_0 = 0,$$

$$2(1+c)a_2 + (\lambda - ca - p - 2(1+a+c))a_1 + (a(a+1) + ca)a_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta_1}{n^2}\right)a_{n+1} + \left(-3 + \frac{\alpha_0}{n} + \frac{\beta_0}{n^2}\right)a_n + \left(3 + \frac{\alpha_{-1}}{n} + \frac{\beta_{-1}}{n^2}\right)a_{n-1} \\ + \left(-1 + \frac{\alpha_{-2}}{n} + \frac{\beta_{-2}}{n^2}\right)a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= 1 + c, & \beta_1 &:= c, \\ \alpha_0 &:= -p - 2c - 2a + 1, & \beta_0 &:= \lambda - ac, \\ \alpha_{-1} &:= c + 4a - 5, & \beta_{-1} &:= a(a+1) + c(a-1) - 4a + 2, \\ \alpha_{-2} &:= -2a + 3, & \beta_{-2} &:= -a(a+1) + 4a - 2. \end{aligned}$$

Триконфлюэнтный случай:

a_0, a_1 произвольны,

$$2a_2 + (p - 2(a+1))a_1 + ((\lambda - pa) + a(a+1))a_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} 6a_3 + (-8 + 2p - 4(a+1))a_2 + (-2p + 6(a+1) + (\lambda - pa)) \\ + a(a+1))a_1 - 2a(a+1)a_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\alpha_2}{n} + \frac{\beta_2}{n^2}\right)a_{n+2} + \left(-4 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta_1}{n^2}\right)a_{n+1} \\ + \left(6 + \frac{\alpha_0}{n} + \frac{\beta_0}{n^2}\right)a_n + \left(-4 + \frac{\alpha_{-1}}{n} + \frac{\beta_{-1}}{n^2}\right)a_{n-1} \\ + \left(1 + \frac{\alpha_{-2}}{n} + \frac{\beta_{-2}}{n^2}\right)a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &:= 3, & \beta_2 &:= 2, \\ \alpha_1 &:= p - 4 - 2(a+1), & \beta_1 &:= p - 2(a+1), \\ \alpha_0 &:= -2p + 6a, & \beta_0 &:= \lambda - pa + a(a+1), \\ \alpha_{-1} &:= -6(a+1) + 12, & \beta_{-1} &:= 2(a+1)(3-a) - 8, \\ \alpha_{-2} &:= 2a - 3, & \beta_{-2} &:= (a+1)(a-4) + 6. \end{aligned}$$

Дважды конфлюэнтный случай:

a_0, a_1 произвольны,

$$2a_2 + 2(c - a - 1)a_1 + (4(\lambda - pa) + a(a + 1) - 2ca)a_0 = 0,$$

$$6a_3 + 4(c - a - 1)a_2$$

$$+ \{-8p - 2(a + 1) + 4(\lambda - pa) + a(a + 1) - 2ca\}a_1$$

$$+ 2(a(a + 1) - ca)a_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{\alpha_2}{n} + \frac{\beta_2}{n^2}\right)a_{n+2} + \left(\frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta_1}{n^2}\right)a_{n+1} \\ &+ \left(-2 + \frac{\alpha_0}{n} + \frac{\beta_0}{n^2}\right)a_n + \left(\frac{\alpha_{-1}}{n} + \frac{\beta_{-1}}{n^2}\right)a_{n-1} \\ &+ \left(1 + \frac{\alpha_{-2}}{n} + \frac{\beta_{-2}}{n^2}\right)a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

$$\alpha_2 := 3,$$

$$\beta_2 := 2,$$

$$\alpha_1 := 2(c - a - 1),$$

$$\beta_1 := 2(c - a - 1),$$

$$\alpha_0 := -8p - 2a,$$

$$\beta_0 := 4(\lambda - pa) + a(a + 1) - 2ca,$$

$$\alpha_{-1} := -2(c - a - 1),$$

$$\beta_{-1} := -2(a - 1)(c - a - 1),$$

$$\alpha_{-2} := 2a - 3,$$

$$\beta_{-2} := (a - 1)(a - 2).$$

Ниже приведены характеристические уравнения иррегулярных разностных уравнений типа Пуанкаре–Перрона, соответствующих рассматриваемым дифференциальным уравнениям.

(Однократно) конфлюэнтный случай:

$$(t_s - 1)^2 = 0. \quad (3.6.19)$$

Биконфлюэнтный случай:

$$(t_b - 1)^3 = 0. \quad (3.6.20)$$

Триконфлюэнтный случай:

$$(t_r - 1)^4 = 0. \quad (3.6.21)$$

Дважды конфлюэнтный случай:

$$(t_d - 1)^2(t_d + 1)^2 = 0. \quad (3.6.22)$$

Как следует из публикаций Перрона [95], [96], [97], теорию регулярных разностных уравнений нельзя обобщить на иррегулярные разностные

уравнения так, чтобы из решений характеристического уравнения извлекать информацию о поведении отношения двух последовательных членов соответствующего разностного уравнения. Тем самым, нам следует обратиться к использованию решений Биркгофа, которые были введены в разделе 1.6.

Для каждого из разностных уравнений существуют формальные решения, число которых совпадает с порядком уравнения. Они представляют собой линейно независимые частные решения этих уравнений, асимптотические при $n \rightarrow \infty$ [16], [17], [18]. Совокупность решений Биркгофа для разностного уравнения называется набором Биркгофа [129].

Приведем наборы Биркгофа $s^{(m)}$ для уравнений (3.6.15)–(3.6.18). (Однократно) конфлюэнтный случай:

$$s^{(m)}(n) = \exp(\gamma_m n^{1/2}) n^{r_m} \left[1 + \frac{C_{m1}}{n^{1/2}} + \frac{C_{m2}}{n^{2/2}} + \dots \right],$$

$$m = 1, 2. \quad (3.6.23)$$

Биконфлюэнтный случай:

$$s^{(m)}(n) = \exp(\gamma_{m1} n^{2/3} + \gamma_{m2} n^{1/3}) n^{r_m} \left[1 + \frac{C_{m1}}{n^{1/3}} + \frac{C_{m2}}{n^{2/3}} + \dots \right],$$

$$m = 1, 2, 3. \quad (3.6.24)$$

Триконфлюэнтный случай:

$$s^{(m)}(n) = \exp(\gamma_{m1} n^{3/4} + \gamma_{m2} n^{1/2} + \gamma_{m3} n^{1/4}) n^{r_m} \left[1 + \frac{C_{m1}}{n^{1/4}} + \frac{C_{m2}}{n^{2/4}} + \dots \right],$$

$$m = 1, 2, 3, 4. \quad (3.6.25)$$

Дважды конфлюэнтный случай:

$$s^{(m)}(n) = \rho_m^n \exp(\gamma_m n^{1/2}) n^{r_m} \left[1 + \frac{C_{m1}}{n^{1/2}} + \frac{C_{m2}}{n^{2/2}} + \dots \right],$$

$$m = 1, 2, 3, 4. \quad (3.6.26)$$

Множители перед скобками в правой части (3.6.23)–(3.6.26) называются асимптотическими множителями наборов Биркгофа (ср. раздел 1.6). Выпишем коэффициенты для асимптотических множителей наборов Биркгофа (3.6.23)–(3.6.26).

(Однократно) конфлюэнтный случай:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 2p^{1/2}, \\ \gamma_2 &= -\gamma_1, \\ r_1 &= r_2 = a - 1 - \frac{c+d}{2} =: r. \end{aligned} \quad (3.6.27)$$

Биконфлюэнтный случай:

$$\begin{aligned}\gamma_{m1} &= \frac{3}{2} \exp\left(\frac{2\pi im}{3}\right) p^{1/3}, \\ \gamma_{m2} &= -\frac{3}{2} \exp\left(\frac{4\pi im}{3}\right) p^{2/3}, \\ r_1 = r_2 = r_3 &= \frac{c - 2a + 4}{3} =: r.\end{aligned}\quad (3.6.28)$$

Триконфлюэнтный случай:

$$\begin{aligned}\gamma_{m1} &= \frac{4}{3} \exp\left(\frac{2\pi im}{4}\right) p^{1/4}, \\ \gamma_{m2} &= -\frac{1}{2} \exp\left(\frac{4\pi im}{4}\right) p^{1/2}, \\ \gamma_{m3} &= -\frac{19}{24} \exp\left(\frac{6\pi im}{4}\right) p^{3/4}, \\ r_1 = r_2 = r_3 = r_4 &= \frac{a - 3}{2} =: r.\end{aligned}\quad (3.6.29)$$

Дважды конфлюэнтный случай:

$$\begin{aligned}\rho_m &= +1, \quad m = 1, 2, \\ \rho_m &= -1, \quad m = 3, 4, \\ \gamma_{m1} &= \exp(\pi im) (8p)^{1/2}, \quad m = 1, 2, 3, 4, \\ r_1 = r_2 &= -1 + a - \frac{c}{2}, \\ r_3 = r_4 &= -2 - \frac{c}{2}.\end{aligned}\quad (3.6.30)$$

Как следует из (3.6.27)–(3.6.30), асимптотические множители наборов Биркгофа зависят только от параметров a, c, d, p дифференциальных уравнений (3.6.1)–(3.6.4), но не зависят от аксессуарного параметра λ .

Выше было показано, что из уже обсуждавшейся работы Биркгофа и Тржизинского следует, что для каждого разностного уравнения (3.6.15)–(3.6.18) соответствующие решения Биркгофа представляют собой полный набор частных решений при $n \rightarrow \infty$. Тем самым мы можем выписывать асимптотическое представление общих решений разностных уравнений как линейную комбинацию соответствующих решений Биркгофа:

$$a_n \sim \sum_{m=1}^j L_m s^{(m)}(n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.6.31)$$

Верхний предел в сумме (3.6.31) равен $j = 2$ в (однократно) конфлюэнтном случае, $j = 3$ — в биконфлюэнтном случае и $j = 4$ — в три- и дважды конфлюэнтном случаях. Коэффициенты L_m зависят от параметров дифференциальных уравнений (3.6.1)–(3.6.4) и от начальных данных для решений, но не зависят от индексной переменной n .

Здесь существенным моментом является тот факт, что мы можем различать два характерных типа поведения решений разностных уравнений (3.6.15)–(3.6.18) при $n \rightarrow \infty$. Согласно наборам Биркгофа (3.6.23)–(3.6.26) и (3.6.27)–(3.6.30) мы получаем — при достаточно слабом ограничении $p > 0$ (ср. (3.6.5)) — решения, которые экспоненциально убывают и возрастают. Возрастающие решения мы называем *доминантными*, а убывающие — *рецессивными* (ср. раздел 1.6). ЦДЗС для конфлюэнтных вариантов уравнения Гойна сформулированы в разделе 1.6 как задача поиска собственного значения $\lambda = \lambda_i$ для дифференциального уравнения, т. е. такого значения, при котором коэффициент перед доминантными решениями разностных уравнений (3.6.15)–(3.6.18) в (3.6.31) обращается в нуль.

Как нетрудно увидеть, набор Биркгофа (3.6.23) для (однократно) конфлюэнтного уравнения состоит из одного экспоненциально возрастающего решения и одного экспоненциально убывающего решения. В биконфлюэнтном случае набор Биркгофа (3.6.24) включает в себя одно экспоненциально возрастающее и два экспоненциально убывающих решения. В триконфлюэнтном случае набор Биркгофа (3.6.25) содержит три экспоненциально возрастающих и одно экспоненциально убывающее решения. В дважды конфлюэнтном случае набор Биркгофа (3.6.26) состоит из двух экспоненциально возрастающих и двух экспоненциально убывающих решений. Оба возрастающих решения являются максимальными решениями.

3.6.4. Уравнение для собственных значений

Наша процедура изучения ЦДЗС для конфлюэнтных вариантов уравнения Гойна приводит к иррегулярным разностным уравнениям типа Пуанкаре–Перрона, порядок которых совпадает с суммой s -рангов иррегулярных особых точек исходного дифференциального уравнения.

Как мы видели в предыдущем разделе, имеются специальные фундаментальные системы решений разностных уравнений, которым свойственно характерное асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$. Эти системы решений могут быть использованы при формулировке уравнения для собственных значений.

Как следует из вида асимптотических множителей для наборов Биркгофа, в (однократно) конфлюэнтном и биконфлюэнтном случаях на-

бор доминантных решений состоит только из одного, максимального решения (определенного в разделе 1.6), которое мы обозначаем $s^{(1)}(n)$ в (3.6.23)–(3.6.24). Остальные решения являются рецессивными. Условие для собственных значений может быть сформулировано следующим образом (ср. раздел 1.6): в этих конфлюэнтных случаях ЦДЗС разрешима, если коэффициент перед максимальным решением в (3.6.31) в итоговом разностном уравнении равен нулю:

$$L_1(\lambda = \lambda_i; p, a, \dots) = 0.$$

Это результат наших общих рассмотрений в разделе 1.6. К тому же для (однократно) конфлюэнтного уравнения этот факт можно доказать с помощью метода цепных дробей. В биконфлюэнтном случае это можно установить с помощью критерия сходимости Вейерштрасса и теоремы Абеля о предельном значении.

В триконфлюэнтном случае доминантные решения включают в себя три различных частных решения разностного уравнения. Одно из них вещественно (максимальное решение), а два других комплексно сопряжены друг другу и в главном асимптотическом порядке чисто мнимые. Однако, как следует из членов следующего порядка, они также экспоненциально увеличиваются.

Обозначим максимальное решение $s^{(1)}(n)$, тогда уравнение для собственных значений в триконфлюэнтном случае (3.6.3) можно записать так:

$$L_1(\lambda = \lambda_i; p, a, \dots) = 0.$$

Разностное уравнение в дважды конфлюэнтном случае имеет четвертый порядок. Однако вследствие специального характера преобразования Яффе–Лая мы имеем две группы доминантных решений, причем обе состоят из одного максимального решения, обозначаемого $s^{(1)}(n)$ и $s^{(3)}(n)$ в (3.6.26) и (3.6.30). Таким образом, условие на собственные значения в данном случае можно записать как

$$L_1(\lambda = \lambda_i; p, a, c) = L_3(\lambda = \lambda_i; p, a, c) = 0. \quad (3.6.32)$$

Очевидно, что в этом случае нам необходим еще один параметр, чтобы удовлетворить этим двум условиям. В качестве такового можно взять начальный параметр a_1 в (3.6.18), который здесь выступает в роли собственного значения; при этом мы сохраняем параметр a_0 произвольным и выбираем по соображениям нормировки.

3.6.5. Вычислительные аспекты

Конфлюэнтный, биконфлюэнтный и триконфлюэнтный случаи

В (однократно) конфлюэнтном, би- и триконфлюэнтном случаях численная реализация формул при вычислении собственных значений и построении соответствующих кривых очевидна. Следует применить рекуррентные соотношения (3.6.15)–(3.6.18) для непосредственных вычислений. Не следует делать обрезание до того, как проявится асимптотическое поведение *максимального* решения разностного уравнения согласно решению Биркгофа. То, что максимальное решение обнаружится, всегда гарантировано неустойчивостью численной процедуры, при сколь угодно малых значениях L_1 в (3.6.31). Последний член, согласно этому, должен изменяться при изменении спектрального параметра. Нули этого изменения соответствуют собственным значениям ЦДЗС. Важно отметить, что число доминантных решений не оказывает никакого влияния на эту процедуру. В каждом случае все доминантные решения подавляются.

Процесс редукции в дважды конфлюэнтном случае

Дважды конфлюэнтный случай — единственный, когда мы получаем два условия на собственное значение. Есть возможность свести их к единственному уравнению при численной реализации, что и будет сделано ниже.

Рассмотрим уравнение (3.6.18) в виде

$$\begin{aligned} A_0(0)a_0 + A_1(0)a_1 + A_2(0)a_2 &= 0, \\ A_{-1}(1)a_0 + A_0(1)a_1 + A_1(1)a_2 + A_2(1)a_3 &= 0, \\ A_{-2}(n)a_{n-2} + A_{-1}(n)a_{n-1} + A_0(n)a_n + A_1(n)a_{n+1} + A_2(n)a_{n+2} &= 0, \\ n &\geq 2. \end{aligned} \quad (3.6.33)$$

Его можно также переписать в виде бесконечной системы линейных уравнений

$$A \cdot a = 0. \quad (3.6.34)$$

Точное условие для собственных значений может быть представлено следующим образом:

$$\det A = 0. \quad (3.6.35)$$

Система (3.6.34) обрезается при достаточно большом значении n , равном N , так что мы получаем систему $N + 1$ линейных уравнений

$$A^{(N)} \cdot a^{(N)} = 0, \quad (3.6.36)$$

где

$$A^{(N)} = \begin{bmatrix} A_0(0) & A_1(0) & A_2(0) & 0 & 0 \\ A_{-1}(1) & A_0(1) & A_1(1) & A_2(1) & 0 \\ A_{-2}(2) & A_{-1}(2) & A_0(2) & A_1(2) & A_2(2) \\ 0 & A_{-2}(3) & A_{-1}(3) & A_0(3) & A_1(3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_{-2}(N-2) & A_{-1}(N-2) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_{-2}(N-1) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.37)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_2(3) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_0(N-2) & A_1(N-2) & A_2(N-2) & 0 & 0 \\ A_{-1}(N-1) & A_0(N-1) & A_1(N-1) & A_2(N-1) & 0 \\ A_{-2}(N) & A_{-1}(N) & A_0(N) & A_1(N) & A_2(N) \end{bmatrix}$$

$$a^{(N)} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_{N-1} \\ a_N \\ a_{N+1} \\ a_{N+2} \end{bmatrix}. \quad (3.6.38)$$

Так как имеется два экспоненциально растущих решения Биркгофа (3.6.26), обрезание означает, что $a_{N+1} = 0$ и $a_{N+2} = 0$ в системе (3.6.36)–(3.6.38). Число экспоненциально убывающих решений Биркгофа в (3.6.26) также равно двум. Вместе с начальными условиями

$$\begin{aligned} a_N^{(1)} &= 1, & a_{N-1}^{(1)} &= 0, \\ a_N^{(2)} &= 0, & a_{N-1}^{(2)} &= 1 \end{aligned}$$

мы получаем два линейно независимых рецессивных решения

$$a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \quad n = N, N-1, \dots, 0, -1, -2$$

с помощью численно устойчивой обратной рекурсии. Общее рецессивное решение (3.6.36)–(3.6.38) при этом дается

$$a_n = K_1 a_n^{(1)} + K_2 a_n^{(2)}$$

с двумя произвольными константами K_1 и K_2 . Условие (3.6.35) трансформируется с помощью обрезания и процесса обратной рекурсии в

$$\det \begin{pmatrix} a_{-1}^{(1)} & a_{-1}^{(2)} \\ a_{-2}^{(1)} & a_{-2}^{(2)} \end{pmatrix} = 0,$$

так что мы в итоге должны решить это уравнение (равенство нулю определителя два на два), чтобы вычислить характеристические параметры ЦДЗС для дважды конфлюэнтного уравнения Гойна.

Условие на собственные значения для дважды конфлюэнтного случая состоит из двух условий (3.6.32). Это следствие того факта, что обе особые точки на концах интервала находятся на единичной окружности; таким образом, следует построить два условия — для каждой из конечных точек интервала, $x = \pm 1$. Эта ситуация компенсируется тем фактом, что решения разлагаются в ряд в окрестности обыкновенной точки дифференциального уравнения, а не в окрестности регулярной особой, как это происходит во всех других конфлюэнтных случаях. Математически это выражается начальными условиями разностного уравнения (3.6.33), откуда следует, что они рекуррентно разрешимы, только когда выбраны a_0 и a_1 ; таким образом, есть два начальных значения. Фиксируя a_0 по причинам нормировки, мы видим, что имеется один спектральный параметр в задаче в дополнение к параметрам дифференциального уравнения. Целью нашей численной процедуры, очерченной выше, было снизить число спектральных параметров с двух до одного. Это было достигнуто с помощью обратной рекурсии, которая (в результате!) дала нам значение a_1 (или, что то же, отношение a_1/a_0), играющее роль второго спектрального параметра ЦДЗС.

Приложения к физическим задачам

После изложения в предыдущих главах теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, порождающих классические и высшие специальные функции, мы приведем несколько примеров того, какую роль играют описанные выше уравнения в физических задачах. Мы рассмотрим их появление после разделения переменных, центральные задачи связи, процедуры конфлюэнции и вычисление экспоненциально малых эффектов.

Следует упомянуть, что примеры демонстрируют основные структурные элементы теории: анализ особенностей, двумерную классификационную схему, включающую в себя линейные преобразования, специализацию параметров и процедуру конфлюэнции, представление решений и граничные задачи.

Первый раздел посвящен нескольким фундаментальным задачам атомной физики: атом водорода как тривиальный пример центральной двухточечной задачи связи, эффект Штарка как пример появления экспоненциально малых квантовых поправок и задача об ионизованной молекуле водорода, собственные значения которой могут быть вычислены с помощью хорошо известного метода цепных дробей.

Во втором разделе мы обсудим пример слияния двух регулярных особых точек, возникающий в астрофизических приложениях общей теории относительности. При вычислении квазинормальных частот черных дыр в так называемом пределе Керра (для больших угловых скоростей) обнаруживается явление движения навстречу друг другу и слияния двух особенностей. Тут важно отметить, что это не процедура конфлюэнции, так как s -ранг результирующей особенности не изменяется.

В третьем разделе описывается приложение общих методов к задачам физики твердого тела. Во-первых, обсуждается известная линейная модель напряжений для описания движения дислокаций как пример центральной двухточечной задачи связи для уравнения Гойна. В результате читатель здесь увидит, что методы исследования двухточечной задачи связи могут быть существенно обобщены, в то время как структура особенностей на концах интервала остается прежней. Далее приводится пример исследования непрерывного спектра для уравнения типа Шредингера.

Потенциалы двойной ямы весьма часто возникают в физических приложениях. Наиболее важный пример — ангармонический осциллятор четвертой степени. В четвертом разделе мы приведем явное точное вычисление спектра такого квантового ангармонического осциллятора. Хорошо известно, что если ангармонический потенциал имеет форму двойной ямы, то возникает квазипересечение кривых собственных значений, причем эффект является экспоненциально малым относительно высоты барьера (см. раздел 3.5). Это означает, что обычная теория возмущений, которая реально является разложением по степеням малого параметра, неспособна правильно описать этот эффект. В итоге явление квазипересечения можно рассматривать как тест наших методов. Результаты снабжены графиками.

Пятый раздел посвящен явлению подавления квантового туннелирования. В последнем разделе мы обсудим задачу диффузии в электронной микроскопии.

4.1. Задачи атомной и молекулярной физики

4.1.1. Атом водорода

Начнем с описания одной из простейших задач — вычисления спектра атома водорода. Согласно квантовой механике следует рассмотреть уравнение Шредингера с потенциалом $V \sim 1/r$, где r является длиной радиус-вектора, с началом в центре атома:

$$\Delta\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left[\varepsilon + \frac{e^2}{r} \right] \psi = 0,$$

m_e — масса электрона, e — электрический заряд, $\hbar = h/(2\pi)$, где h — постоянная Планка, ε — энергия.

Следует найти значения энергии ε такие, что соответствующее решение ψ будет интегрируемым в $\mathbb{R}^3$. Разделяя переменные в сферических координатах φ, θ, r , согласно

$$\psi_{lm}(\varphi, \theta, r) = Y_{lm}(\varphi, \theta) \cdot y_l(r),$$

где $Y_{lm}(\varphi, \theta)$ — сферические гармоники, и производя замены $r \mapsto z$, $\varepsilon \mapsto E$, получаем для радиальной функции y (мы опускаем в дальнейшем явное указание ее индекса) уравнение в виде

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dy}{dz} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1/\sqrt{-2E}}{z} - \frac{l(l+1)}{z^2} \right] y = 0; \quad (4.1.1)$$

$$z \in \mathbb{C}, \quad E \in \mathbb{R}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Здесь интервалом рассмотрения согласно физической задаче является $\{z|[0, \infty[\}$. Это дифференциальное уравнение является конфлюэнтным гипергеометрическим уравнением с регулярной особой точкой в нуле и иррегулярной особой точкой с s -рангом на бесконечности, равным 2. Асимптотическое поведение решений (4.1.1) на бесконечности описывается соотношениями

$$y_{1,\infty}(z) = e^{-z/2} z^n, \quad (4.1.2)$$

$$y_{2,\infty}(z) = e^{+z/2} z^{-n-1}, \quad (4.1.3)$$

где $n = (-2E)^{-1/2}$, а в нуле — соотношениями

$$y_{1,0}(z) = z^l, \quad (4.1.4)$$

$$y_{2,0}(z) = z^{-l-1}. \quad (4.1.5)$$

Физическое решение должно вести себя как $y_{1,\infty}$ при $z \rightarrow \infty$ и одновременно как $y_{1,0}$ при $z \rightarrow 0$.

Решения Фробениуса в нуле выглядят следующим образом:

$$y_{1,0}(z) = z^l \sum_{j=0}^{\infty} a_{1j} z^j; \quad y_{2,0}(z) = z^{-l-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} z^j,$$

а решения Томе на бесконечности —

$$y_{1,\infty}(z) = e^{-z/2} z^n \sum_{j=0}^{\infty} b_{1j} z^j; \quad y_{2,\infty}(z) = e^{+z/2} z^{-n-1} \sum_{j=0}^{\infty} b_{2j} z^j,$$

причем $n = (-2E)^{-1/2}$. Соответственно, связывая асимптотическое поведение (4.1.2) с (4.1.4), мы ищем решения в виде

$$v(z) = e^{-z/2} z^l \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j,$$

что приводит к разностному уравнению первого порядка

$$c_{j+1} + f_j c_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad (4.1.6)$$

причем

$$f_j = \frac{n - l - 1 - j}{(j+1)(j+2l+2)}.$$

Таким образом,

$$f_j \sim -\frac{1}{j}, \quad j \rightarrow \infty. \quad (4.1.7)$$

После фиксации нормировки волновой функции выбором значения параметра c_0 уравнение (4.1.6) может быть решено рекуррентным образом. Оно имеет два типа решений. Тривиальные решения задаются соотношениями $c_j = 0$ при всех $j \geq n - l - 1$. Другие решения ведут себя как $c_j \sim 1/(j!)$, $j \rightarrow \infty$. В итоге имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \sim e^{+z}.$$

Мы можем сформулировать результат: *уравнение для собственных значений для атома водорода совпадает с критерием обрыва в разностном уравнении (4.1.6): $n - l = j + 1 =: k$, $k \in \mathbb{N}$.*

Тем самым собственные значения для атома водорода по существу являются целыми числами.

4.1.2. Эффект Штарка для атома водорода

Задача вычисления экспоненциально малых поправок широко известна в задачах математической физики. Приложения, в которых появляются несамосопряженные дифференциальные операторы с комплексными собственными значениями, в частности связаны с диффузионными процессами неравновесной термодинамики и квазистационарными состояниями квантовой механики. Первая тема будет обсуждаться ниже, а вторую тему мы обсудим сейчас на примере эффекта Штарка для атома водорода. Этот пример приводится во многих статьях и книгах (см., например, [36]). В дальнейшем мы будем использовать обозначения из [109].

Мы используем атомные единицы ($\hbar = e = m_e = 1$) и считаем, что центр системы координат совпадает с атомом. При этом уравнение Шредингера записывается в виде

$$\left\{ \Delta + 2 \left[E - \left(Fz - \frac{1}{r} \right) \right] \right\} \psi(\mathbf{r}) = 0.$$

Здесь F описывает величину электрического поля, которое направлено вдоль оси z . Разделяя переменные в параболических координатах ξ, η, φ , которые связаны с декартовыми формулами

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad z = \frac{\xi - \eta}{2},$$

согласно

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\xi\eta} V(\xi) U(\eta) e^{im\varphi}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{d\xi^2} + \left(\frac{E}{2} + \frac{\beta_1}{\xi} + \frac{F}{4}\xi + \frac{1-m^2}{4\xi^2} \right) V(\xi) &= 0, \\ \frac{d^2 U}{d\eta^2} + \left(\frac{E}{2} + \frac{\beta_2}{\eta} + \frac{F}{4}\eta + \frac{1-m^2}{4\eta^2} \right) U(\eta) &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Здесь m — магнитное квантовое число, а константы разделения удовлетворяют соотношению

$$\beta_1 + \beta_2 = 1.$$

Как показано в [109], с помощью преобразований

$$\begin{aligned} \xi &\mapsto \xi(-2E)F^{-1}, \\ \eta &\mapsto \xi(-2E)F^{-1}, \\ p &:= (-2E)^{3/2}F^{-1}, \\ \lambda_1 &:= \beta_1(-2E)^{-2}F, \\ \lambda_2 &:= \beta_2(-2E)^{-2}F \end{aligned}$$

уравнения (4.1.8) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{d\xi^2} + \left[p^2 \left(\frac{\lambda_1}{\xi} - \frac{1}{4} - \frac{\xi}{4} \right) + \frac{1-m^2}{4\xi^2} \right] V(\xi) &= 0, \\ \frac{d^2 U}{d\eta^2} + \left[p^2 \left(\frac{\lambda_2}{\eta} - \frac{1}{4} + \frac{\eta}{4} \right) + \frac{1-m^2}{4\eta^2} \right] U(\eta) &= 0. \end{aligned}$$

В результате получаем, что изучение эффекта Штарка для атома водорода приводит к двум связанным редуцированным биконфлюэнтным уравнениям Гойна, особенности которых находятся в нуле и на бесконечности. Особенность в нуле регулярна, а s -ранг особой точки на бесконечности равен $5/2$. Вычисление уровней энергии при этом сводится к двухпараметрической граничной задаче на собственные значения.

4.1.3. Ион молекулы водорода

Ион молекулы водорода [128] имеет девять степеней свободы, а именно координаты x, y, z электрона массы m и $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3$, координаты двух ядер одинаковой массы M . Выпишем уравнение Шредингера этой системы

$$\frac{1}{m} \nabla_{xyz}^2 \psi + \frac{1}{M} \nabla_{\xi_1 \eta_1 \xi_1}^2 \psi + \frac{1}{M} \nabla_{\xi_2 \eta_2 \xi_2}^2 \psi + \frac{8\pi}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} \right) \psi = 0,$$

где r_1, r_2 — расстояния электрона до ядер, r_{12} — расстояние между ядрами, E — энергия.

Так как m/M мало, можно использовать приближение Борна–Оппенгеймера [22], полагая

$$\frac{1}{m} \nabla_{xyz}^2 \psi + \frac{8\pi}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} \right) \psi = 0.$$

Используя вытянутые сфероидальные координаты ξ, η, φ , причем

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r_1 + r_2}{2c}, & 1 \leq \xi < \infty, \\ \eta &= \frac{r_1 - r_2}{2c}, & -1 \leq \eta \leq +1, \end{aligned}$$

φ — азимутальный угол, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, c — расстояние между двумя центрами (ядрами), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (\xi^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ (1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right\} + \left\{ \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right\} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \\ + \frac{8\pi^2 m c^2}{h^2} \left[E(\xi^2 - \eta^2) + \frac{2e^2}{c} \xi \right] \psi = 0. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Разделяя переменные в (4.1.9) в введенных координатах, согласно

$$\psi(\xi, \eta, \varphi) = e^{\pm i n \varphi} X(\xi) Y(\eta)$$

получим

$$\frac{d}{d\eta} \left\{ (1 - \eta^2) \frac{dY}{d\eta} \right\} + \left\{ \lambda^2 \eta^2 - \frac{n^2}{1 - \eta^2} + \mu \right\} Y = 0, \quad -1 \leq \eta \leq +1, \quad (4.1.10)$$

в качестве углового уравнения и

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ (1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right\} + \left\{ \lambda^2 \xi^2 - \kappa \xi - \frac{n^2}{1 - \xi^2} + \mu \right\} X = 0, \quad 1 \leq \xi < \infty, \quad (4.1.11)$$

в качестве радиального уравнения. Последнее мы и обсудим в дальнейшем. Уравнения (4.1.10) и (4.1.11) — конфлюэнтные уравнения Гойна. Здесь e — заряд электрона, E — энергия электрона, h — постоянная Планка, $n \in \mathbb{Z}$ — квантовое число углового момента. $\lambda^2 = -8\pi^2 m c^2 E / h^2$, $\kappa = 16\pi^2 m c e^2 / h^2$ и μ — константы разделения.

В 1933 г. Георг Яффе [52] выписал — следуя рекомендации В. Паули и Ф. Хунда — точное условие для собственных значений для иона молекулы водорода в квантовой механике. Ниже излагается его подход (с исправлением опечатки, вкравшейся в текст его статьи).

Чтобы решить радиальное уравнение (4.1.11), осуществим преобразование Яффе:

$$u = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}. \quad (4.1.12)$$

Оно преобразует особые точки (4.1.11) согласно следующей таблице:

$$\begin{array}{cccccc} \xi: & -\infty & -1 & +1 & +\infty & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ u: & 1 & \pm\infty & 0 & 1 & . \end{array}$$

Яффе (см. [52]; здесь очевидна опечатка в его оригинальной работе) принимает следующий анзац:

$$X(\xi) = e^{-\lambda\xi}(\xi - 1)^{n/2}(\xi + 1)^{-n/2+p-1} \cdot y(\xi),$$

причем

$$y(\xi) = (1 - u)^\rho w(u), \quad \rho = n + 3 - p,$$

где $p = \kappa/2\lambda$.

Выпишем дифференциальное уравнение для $w(u)$:

$$(1 - u)^2 u \frac{d^2 w}{du^2} - \{(n - 2\rho - 1)u^2 + (2\lambda + \rho + 1)2u - (n + 1)\} \frac{dw}{du} + \{\rho(\rho - n)u - v\}w = 0$$

(где $v := \mu + \lambda^2 + (1 - p)(n + 1 + 2\lambda) + 2\lambda n$), которое может быть решено с помощью степенного ряда в окрестности нуля:

$$w(u) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m u^m. \quad (4.1.13)$$

Коэффициенты a_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, этого ряда удовлетворяют линейному разностному уравнению второго порядка типа Пуанкаре–Перрона:

$$a_{m+1} + u_m a_m - v_{m-1} a_{m-1} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.1.14)$$

коэффициенты u_m и v_m которого задаются следующим образом:

$$u_m = -\frac{2m^2 + 2m(2\lambda + n + 1 - p) + v}{(m + 1)(m + n + 1)},$$

$$v_m = -\frac{(m - p)(m + n - p)}{(m + 1)(m + n + 1)}.$$

Разделив (4.1.14) на a_m , мы получаем алгебраическое уравнение второго порядка для a_{m+1}/a_m , решениями которого являются:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = 1 \pm \sqrt{\frac{4\lambda}{m}}. \quad (4.1.15)$$

Эти формулы показывают поведение решений (4.1.14) при $m \rightarrow \infty$. По критерию сходимости Гаусса (см. [61, с. 297]) ряд (4.1.13) сходится при $u = 1$ тогда и только тогда, когда решение (4.1.14) ведет себя как

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = 1 - \sqrt{\frac{4\lambda}{m}}. \quad (4.1.16)$$

В этом случае из теоремы Абеля о предельном значении (см. [61, с. 419]) следует, что (4.1.13) представляет функцию, которая является непрерывной при приближении к единице изнутри единичного круга, и

$$w(u = 1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m$$

дает значение этой функции в этой точке.

Для того чтобы выполнялось (4.1.16), параметры κ , λ , μ должны подчиняться следующему бесконечному цепному соотношению:

$$F := u_0 + \frac{v_0}{u_1 + \frac{v_1}{u_2 + \frac{v_2}{u_3 + \frac{v_3}{u_4 + \dots}}}} = 0. \quad (4.1.17)$$

Это выражение является трансцендентным уравнением для параметров κ , λ , μ , причем λ — спектральный параметр. Как хорошо известно, имеется бесконечный набор троек λ_i , κ_i , μ_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, которые удовлетворяют (4.1.17) и представляют спектр $\lambda = \lambda_i$ иона молекулы водорода.

4.2. Уравнения Тьюкольского в астрофизике

В 1963 г. Рой Патрик Керр [59] нашел глобальное стационарное аксиально-симметричное двухпараметрическое решение уравнений Эйнштейна для гравитации. Пусть c — скорость света в вакууме, G — гравитационная постоянная и M — масса вселенной. Если мы примем систему единиц, в которой $c = G = 2M = 1$, метрика этого решения в координатах Бойера–Линдквиста (t, r, θ, φ) [23] задается соотношениями

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r}{\Sigma}\right) dt^2 + \left(\frac{2ar \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) d\varphi^2. \quad (4.2.1)$$

Здесь a — абсолютное значение углового момента. Мы используем обозначения

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (4.2.2)$$

и

$$\Delta = r^2 - r + a^2. \quad (4.2.3)$$

Это решение представляет модель вращающейся гравитационной сингулярности. В отличие от массы, угловой момент может быть включен в метрику с помощью подходящей нормировки. Это означает, что модель зависит от одного неприводимого параметра. Свойства вращающейся гравитационной сингулярности с разными массами, но с одинаковыми величинами углового момента выражаются друг через друга с помощью преобразования растяжения.

Задачи устойчивости решений полевых уравнений Эйнштейна относительно внешних возмущений, математические задачи рассеяния гравитирующих или электрически заряженных частиц на сингулярности и характеристические собственные колебания метрики привели в конце шестидесятых годов XX в. к поиску дифференциальных уравнений, которые описывают возмущения метрик Керра. После ранних работ ряда авторов (см. [9], [20], [27], [119]) Саул Тьюкольский [123] показал, что возмущения метрик Керра описываются связанными обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка. Эти уравнения по существу являются конфлюэнтными уравнениями Гойна, сейчас они называются уравнениями Тьюкольского. Они играют центральную роль в концепции так называемых *квазинормальных мод* (см. [88]): это квазистационарные колебания метрики, которые ведут себя как плоские волны при асимптотическом приближении к сингулярности с одной стороны и к границе вселенной (на бесконечности) — с другой. Они безотражательно переносят энергию в гравитационную сингулярность и на бесконечность. Чтобы понять эти объекты, можно представить себе, что в момент времени $t = 0$ имеется волновой пакет далеко от центра, такой что при $t \rightarrow +\infty$ он имеет описанное граничное поведение. Такое поведение возможно только для определенных значений частот плоских волн. Эти частоты интерпретируются как собственные частоты метрик Керра, так как они зависят только от свойств метрики и не зависят от временного характера возмущений. Эти моды являются затухающими осцилляциями, для которых в литературе принято понятие *квазинормальных мод*. В наших обозначениях вычисление квазинормальных мод черных дыр не что иное, как центральная двухточечная задача связи для конфлюэнтного уравнения Гойна, которая обсуждалась в предыдущей главе.

Со времени опубликования работы Тьюкольского было приложено много усилий для вычисления квазинормальных мод вращающейся гравитационной сингулярности на основе решения системы двух уравнений Тьюкольского при описанных выше граничных условиях [28], [29], [30],

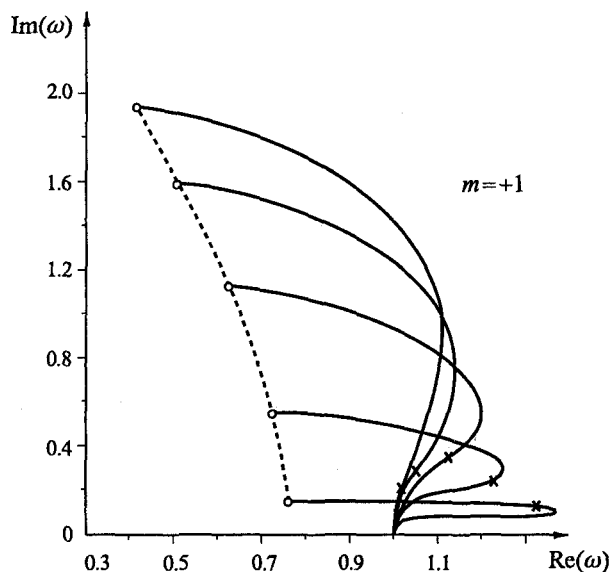


Рис. 4.1. Набросок кривых квазинормальных мод по Ливеру

[34], [79], [80], [82]. Наши исследования основаны на работе Эдварда В. Ливера [81], который провел во второй половине 1980-х годов обширные численные исследования. В результате были получены (комплексные) частоты квазинормальных мод.

Кроме массы гравитационной особенности и параметра, который описывает частоту, имеется лишь один параметр a , содержащийся в уравнениях, который описывает угловой момент системы. Этот параметр изменяется в пределах между нулем (соответствует стационарному предельному случаю) и максимальным значением $a = 1/2$, который имеет смысл предельного значения, допускаемого общей теорией относительности. Решение полевых уравнений, соответствующее исчезающему угловому моменту, сферически симметрично. Это так называемое *решение Шварцшильда* было получено Карлом Шварцшильдом (см. [30, с. 136]) в 1915 г. Противоположный предельный случай с максимальным угловым моментом называется *пределом Керра*.

Из того, что было написано выше, вычисление квазинормальных мод требует отыскания минимальных решений разностных уравнений второго порядка типа Пуанкаре–Перрона, что может быть реализовано либо с помощью метода цепных дробей, либо с помощью метода Биркгофа. Уравнения Тьюкольского не имеют самосопряженного вида; для каждой

квазинормальной моды Ливер [81] получил кривые для частот в комплексной плоскости (рис. 4.1). Более того, поскольку имеется дополнительный, помимо энергии, параметр, эти кривые параметризованы угловым моментом a . В то время как для предельного случая Шварцшильда вычисления могут быть реализованы без осложнений, по мере приближения углового момента к верхнему предельному случаю громоздкость вычислений возрастает. Причина этого заключается в слиянии двух конечных особых точек в одну в уравнениях Тьюкольского. Ливер, однако, без дальнейшего изучения этой задачи принял предположение, высказанное за десять лет до того (см. [34], [99], [119], [122]), что в предельном случае Керра частоты квазинормальных мод вырождаются к *вещественным* значениям и являются просто натуральными числами при соответствующей нормировке. Остался открытым вопрос, может ли метрика в данном предельном случае осциллировать с конечной амплитудой. Для этого следует реализовать процедуру конфлюэнции на уровне дифференциального уравнения и затем решить центральную двухточечную задачу связи для результирующего дифференциального уравнения. Это будет сделано ниже. Следует подчеркнуть, что мы здесь не применяем асимптотику по параметру, а специализируем параметры и затем решаем центральную двухточечную задачу связи для предельного дифференциального уравнения. Первое исследование асимптотики по параметру было сделано в [4].

Вращающиеся гравитационные особенности

Полевые функции гравитационного возмущения метрики Керра могут быть вычислены в координатах Бойера–Линдквиста [23] t, r, θ, φ с помощью анзаца

$$\Phi(t, r, u, \varphi) = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} X_{lm}(u) Y_{lm}(r), \quad (4.2.4)$$

где $u = \cos \theta$. Здесь решения уравнений Тьюкольского обозначены X_{lm} и Y_{lm} .

Выпишем уравнение Тьюкольского для $X_{lm}(u)$

$$\frac{d}{du} \left[(1 - u^2) \frac{dX_{lm}}{du} \right] + \left[a^2 \omega^2 u^2 + 4a\omega u - 2 + A_{lm} - \frac{(m - 2u)^2}{1 - u^2} \right] X_{lm} = 0, \\ -1 \leq u \leq +1, \quad (4.2.5)$$

и уравнение для $Y_{lm}(r)$

$$\Delta \frac{d^2 Y_{lm}}{dr^2} - (2r - 1) \frac{dY_{lm}}{dr} + V(r) Y_{lm} = 0, \\ \frac{1}{2} \leq r < \infty, \quad (4.2.6)$$

где мы использовали обозначение

$$V(r) = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)^2 \omega^2 - 2am\omega r + a^2 m^2 - 2i(am(2r - 1) - \omega(r^2 - a^2))] + [-4i\omega r - a^2 \omega^2 - A_{lm}]. \quad (4.2.7)$$

Величина m является константой разделения, целой величиной, и нумерует собственные функции вместе с величиной l . Величины l , m и a принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} l &= 2, \dots, \infty, \quad l \in \mathbb{N}, \\ m &= -l, \dots, +l, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ 0 &\leq a \leq \frac{1}{2}, \quad a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Необходимо найти такие значения констант разделения A_{lm} и комплексные частоты осцилляций ω , для которых два дифференциальных уравнения (4.2.5) и (4.2.6) имеют решения, удовлетворяющие граничным условиям. Для уравнения (4.2.5) это условие регулярности в особых точках $u = \pm 1$. Для уравнения (4.2.6) следует искать решения, которые переносят энергию по направлению к гравитационной сингулярности и по направлению к бесконечности.

Уравнение (4.2.5), как и (4.2.6), является конфлюэнтным уравнением Гойна, обобщением сфероидального уравнения (см. [86, с. 221]). Разница между этими двумя уравнениями состоит в различных интервалах рассмотрения и способе вхождения физического параметра a в коэффициенты.

В то время как азимутальное уравнение (4.2.5) в предельном случае $a = 1/2$ не изменяет своего характера, радиальное уравнение (4.2.6) становится дважды конфлюэнтным уравнением Гойна после процедуры конфлюэнции:

$$\frac{d^2 Y_{lm}}{dz^2} - \frac{2}{z} \frac{dY_{lm}}{dz} + Q(z) Y_{lm} = 0, \quad (4.2.8)$$

где

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{(1/4) \cdot (m - \omega)^2}{z^4} - \frac{(\omega + 2i)(m - \omega)}{z^3} \\ &+ \frac{(7/4) \cdot \omega^2 - A_{lm}}{z^2} + \frac{2\omega(\omega - 2i)}{z} + \omega^2 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

и

$$z = r - \frac{1}{2}. \quad (4.2.10)$$

Если мы положим $\omega = m$, уравнение (4.2.8) вырождается в конфлюэнтное гипергеометрическое уравнение. Это весьма существенный шаг: если

мы захотим проследить описанную процедуру конфлюэнции при условии выполнения уравнения на собственные значения, нам следует применять асимптотические методы. В результате появятся логарифмические члены в рядах по малому параметру (см. [4], [118]).

Обращаясь к центральной двухточечной задаче связи для (4.2.8), мы начинаем с анзаца в виде

$$y = e^{vz} z^{\mu} (z + 1)^{\alpha} w \quad (4.2.11)$$

и требуем, чтобы множители перед w были асимптотическими множителями решений Фробениуса и нормальных решений, соответственно в двух особых точках $z = 0$ и бесконечности. Тогда уравнение для v выглядит следующим образом:

$$v^2 + \omega^2 = 0, \quad (4.2.12)$$

откуда $v = \pm i\omega$. Так как мы ищем волны, которые переносят энергию на бесконечность, то выбираем знак плюс: $v = +i\omega$.

Величина μ должна быть характеристическим показателем решения Фробениуса при $z = 0$ и подчиняться следующему уравнению:

$$\mu^2 - 3\mu + \frac{7}{4}\omega^2 - A_{lm} = 0. \quad (4.2.13)$$

Получаем два значения μ :

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} (3 \pm k_{l\omega}), \quad (4.2.14)$$

причем

$$k_{l\omega} = \sqrt{9 - 7\omega^2 + 4A_{lm}}. \quad (4.2.15)$$

Если мы ищем волны, переносящие энергию в точку $z = 0$, то следует выбрать знак минус:

$$\mu = \frac{1}{2} (3 - k_{l\omega}). \quad (4.2.16)$$

Величина α в (4.2.11) должна быть выбрана таким образом, чтобы $z^{\mu+\alpha}$ являлась степенной функцией асимптотического множителя нормального решения при $z \rightarrow \infty$ в особенности, расположенной на бесконечности. Таким образом,

$$\alpha = 1 - \frac{\omega(\omega - 2i)}{v} - \mu. \quad (4.2.17)$$

Если мы подставим в дифференциальное уравнение для w разложение

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z+1} \right)^n, \quad (4.2.18)$$

коэффициенты a_n , $n \in \mathbb{N}_0$, будут подчиняться следующему разностному уравнению второго порядка типа Пуанкаре–Перрона:

$$\begin{aligned} a_0 & \text{ произвольно,} \\ \Gamma_1 a_1 + \Delta_1 a_0 &= 0, \\ \left(1 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta_1}{n^2}\right) a_{n+1} + \left(-2 + \frac{\alpha_0}{n} + \frac{\beta_0}{n^2}\right) a_n \\ &+ \left(1 + \frac{\alpha_{-1}}{n} + \frac{\beta_{-1}}{n^2}\right) a_n = 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Выпишем набор Биркгофа для этого уравнения:

$$\begin{aligned} s^{(1)}(n) &= \exp(qn^{1/2})n^r \left[1 + \frac{C_{11}}{n^{1/2}} + \frac{C_{12}}{n^{2/2}} + \dots\right], \\ s^{(2)}(n) &= \exp(-qn^{1/2})n^r \left[1 + \frac{C_{21}}{n^{1/2}} + \frac{C_{22}}{n^{2/2}} + \dots\right], \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

где

$$\begin{aligned} q &= 2\sqrt{-\sum_{i=-2}^{i=0} \alpha_i} = 2\sqrt{-2i\omega}, \\ r &= -\frac{1}{4}(2\alpha_1 - 2\alpha_{-1} - 1) = -\frac{11}{4} - i\omega. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Общее решение уравнения (4.2.20) при $n \rightarrow \infty$ может быть записано в виде:

$$a_n \sim L_1 s^{(1)}(n) + L_2 s^{(2)}(n). \quad (4.2.22)$$

При этом коэффициенты $L_1 = L_1(\omega, A_{l\omega})$ и $L_2 = L_2(\omega, A_{l\omega})$ не зависят от n .

Так как азимутальное уравнение (4.2.5) в пределе Керра не подвергается процедуре конфлюэнции, оно может быть исследовано согласно [81]: аназа

$$X_{lm}(u) = e^{\omega u/2} (1+u)^{|m+2|/2} (1-u)^{|m-2|/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (1+u)^n \quad (4.2.23)$$

приводит к разностному уравнению второго порядка вида:

$$\begin{aligned} b_0 & \text{ произвольно,} \\ \alpha_0^\theta b_1 + \beta_0^\theta b_0 &= 0, \\ \alpha_n^\theta b_{n+1} + \beta_n^\theta b_n + \gamma_n^\theta b_{n-1} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_n^\theta &= -2(n+1)(n+2k_1+1), \quad n=0, 1, 2, \dots, \\ \beta_n^\theta &= n(n-1) + 2n(k_1+k_2+1-\omega) \\ &\quad - [\omega(2k_1-1) - (k_1+k_2)(k_1+k_2+1)] \\ &\quad - \left[\frac{\omega^2}{4} + 2 + A_{l\omega} \right], \quad n=0, 1, 2, \dots,\end{aligned}\quad (4.2.25)$$

и

$$\gamma_n^\theta = \omega(n+k_1+k_2-2), \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

$$k_1 = \frac{1}{2} |\omega + 2|, \quad k_2 = \frac{1}{2} |\omega - 2|. \quad (4.2.26)$$

На вопрос о том, являются ли частоты квазинормальных мод вращающихся гравитационных сингулярностей натуральными числами, можно ответить следующим образом. Назначим параметру ω значение натурального числа, которое мы обсуждаем. С этим значением вычислим параметр $A_{l\omega}$, для которого разностное уравнение (4.2.24) с произвольными начальными условиями b_0 имеет только минимальные решения; здесь нужно помнить, что только те параметры $A_{l\omega}$ имеют физический смысл, для которых величина $k_{l\omega}^2$ является отрицательным вещественным числом. (В ином случае уравнение (4.2.11) потеряло бы свой волновой характер.) Для пары значений $(\omega, A_{l\omega})$ следует проверить с помощью соответствующих вычислений, будут ли величины

$$L_1(\omega, A_{l\omega}) = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n \exp(-qn^{1/2}) n^{-r}] \quad (4.2.27)$$

равны нулю; здесь a_n , $n=0, 1, 2, \dots$, вычисляются рекуррентным образом согласно (4.2.19). Если это так, то мы можем найти квазинормальные моды, в ином случае — нет.

Вычисление значений $A_{l\omega}$ из (4.2.24) может быть реализовано — согласно Ливеру [81] — с помощью метода цепных дробей:

$$0 = \beta_0^\theta - \frac{\alpha_0^\theta \gamma_1^\theta}{\beta_1^\theta - \frac{\alpha_1^\theta \gamma_2^\theta}{\beta_2^\theta - \frac{\alpha_2^\theta \gamma_3^\theta}{\beta_3^\theta - \dots}}}. \quad (4.2.28)$$

В табл. 4.1 представлены некоторые значения $A_{l\omega}$, полученные с помощью метода цепных дробей (4.2.28); в табл. 4.2 — соответствующие величины $k_{l\omega}^2 = 4A_{l\omega} - 7\omega^2 + 9$. По аналогии с теорией сферических гармоник решения азимутального уравнения (4.2.5) можно называть для $\omega < l$ *тессеральными* и для $\omega = l$ *секторальными* (см. [5, сноска на с. 332]). Как можно увидеть из табл. 4.2, для $k_{l\omega}^2$ физически осмысленные решения уравнения (4.2.5) являются исключительно секторальными.

Таблица 4.1. Значения $A_{l\omega}$

ω	l		
	2	3	4
0	$A_{20} = 4$		
1	$A_{21} = 3.1828319$	$A_{31} = 9.58$	$A_{41} = 17.71$
2	$A_{22} = 0.543690$	$A_{32} = 8.25$	$A_{42} = 16.86$
3		$A_{33} = 5.70$	$A_{43} = 15.39$
4			$A_{44} = 13.04$

Таблица 4.2. Величины $k_{l\omega}^2 = 4A_{l\omega} - 7\omega^2 + 9$

ω	l		
	2	3	4
0	$k_{20}^2 = 25$		
1	$k_{21}^2 = 14.72$	$k_{31}^2 = 40.32$	$k_{41}^2 = 72.84$
2	$k_{22}^2 = -16.84$	$k_{32}^2 = 14$	$k_{42}^2 = 48.44$
3		$k_{33}^2 = -31.2$	$k_{43}^2 = 7.56$
4			$k_{44}^2 = -50.84$

Что касается разностного уравнения (4.2.19), мы не можем найти квазинормальную моду для любых пар значений ($\omega = 2, A_{22}$), ($\omega = 3, A_{33}$), ($\omega = 4, A_{44}$), ($\omega = 5, A_{55}$), таким образом, согласно этим вычислениям нельзя подтвердить вышеупомянутое предположение. В пределе Керра гравитационная сингулярность не может более осуществлять характеристические осцилляции — по крайней мере с неисчезающей амплитудой.

Если мы сравним наши результаты с кривыми собственных значений, опубликованными Ливером [81, с. 295], то заметим, что процедура конфлюэнции особых точек для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений может приводить к разрывности кривых собственных значений (см. [73], [74], [78]).

4.3. Движение дислокаций в кристаллических материалах

Пластические деформации в кристаллических материалах вызваны в основном миграцией дислокаций. Кристаллические дислокации — это одномерные нарушения периодической структуры. Они возникают под

воздействием приложенных извне давлений, движутся вдоль так называемых плоскостей скольжения и могут взаимно уничтожать друг друга при встрече дислокаций различного знака. Движение дислокаций неизбежно приводит к необратимому смещению кристаллической решетки в плоскости скольжения.

Мы рассмотрим здесь элементарный шаг дислокации в кристалле с помощью так называемой линейной модели напряжений. Это одномерная нелинейная релятивистская теоретико-полевая формулировка задачи, которая по существу представляет собой некоторый компромисс между математической разрешимостью и физическим содержанием.

4.3.1. Линейная модель напряжений

Рассмотрим бесконечно длинную прямую дислокацию в кристалле и представим ее как движущуюся без трения массивную эластичную струну, которая подвергается напряжению вдоль линии. Влияние окружающих атомов приводит к появлению потенциала (который называется потенциалом Пайерлса), вдоль которого может двигаться дислокация. Движение дислокации может быть вызвано внешним давлением, которое отражается в форме потенциала Пайерлса. Динамическое смещение u такой струны подчиняется следующему нелинейному уравнению в частных производных:

$$\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{dU}{du}, \quad u = u(x, \tau), \quad U = U\left(\frac{u}{c}\right), \quad (4.3.1)$$

где c — расстояние между атомами (постоянная решетки), γ — напряжение вдоль линии (которое определяется внутренними свойствами и характеристиками среды для дислокации) и m — плотность массы струны. Эти три параметра предполагаются постоянными. Мы имеем:

$$U\left(\frac{u}{c}\right) = U_P\left(\frac{u}{c}\right) - b\sigma \frac{u}{c}, \quad (4.3.2)$$

где b — величина вектора Бюргерса (т.е. величина дислокации, которая без потери общности может быть приравнена единице) и σ — величина компоненты внешнего давления, действующей в плоскости скольжения. Потенциал Пайерлса U_P периодичен, ограничен и дифференцируем по крайней мере относительно смещения u . Координаты мы вводим таким образом, что выполняются

$$U(0) = 0, \quad \left. \frac{dU}{du} \right|_{u=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 U}{du^2} \right|_{u=0} \geq 0. \quad (4.3.3)$$

Последнее из этих условий ограничивает внешнее давление σ в плоскости скольжения максимальным значением σ_P (которое называется давлением

Пайерлса), при котором мы имеем

$$\frac{d^2 U}{du^2} = 0. \quad (4.3.4)$$

С помощью подходящего растяжения зависимых и независимых переменных мы включаем физические параметры в приведенные переменные и получаем вместо (4.3.1) одномерное нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} = F(\chi) - s, \quad (4.3.5)$$

где $F(\chi) = dU/d\chi$. Так как давление σ ограничено значениями в интервале $[0, \sigma_P]$, мы можем нормировать s так, чтобы эта переменная изменялась между $s = 0$ и $s = 1$.

Очевидно, что

$$\chi \equiv 0 \quad (4.3.6)$$

является решением (4.3.5). Благодаря периодичности $F(\chi)$ имеется также тривиальное решение в виде

$$\chi \equiv \chi_i, \quad i = 2, 4, 6, \dots, \quad (4.3.7)$$

при $\chi = \chi_i$, и выполняется

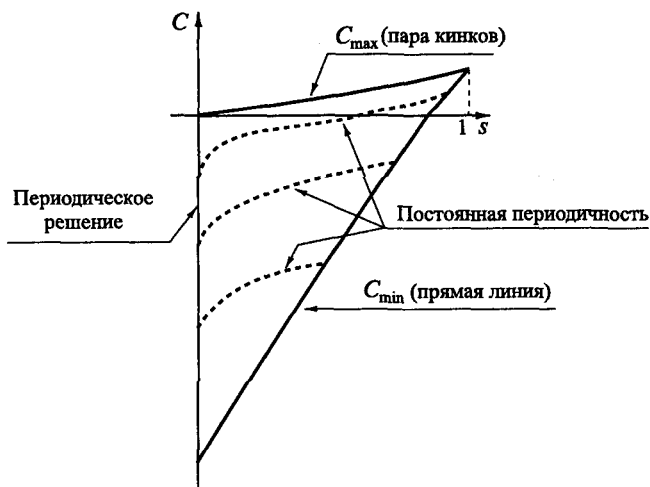
$$F(\chi_i) = 0, \quad \left. \frac{dF}{d\chi} \right|_{\chi=\chi_i} \geq 0. \quad (4.3.8)$$

Эти решения моделируют статическую и устойчивую конфигурацию в виде прямой линии для дислокации.

Имеется также другое тривиальное решение (4.3.5), описывающее неустойчивую конфигурацию в виде прямой линии, именно при $\chi = \chi_i$, $i = 1, 3, 5, \dots$, причем выполняется

$$F(\chi_i) = 0, \quad \left. \frac{dF}{d\chi} \right|_{\chi=\chi_i} \leq 0. \quad (4.3.9)$$

Важный момент в понимании этой модели связан с тем, что, хотя нет других устойчивых решений (4.3.5), кроме тривиальных, имеются неустойчивые решения, не являющиеся прямыми линиями, и среди них есть так называемые парные кинки, которые будут играть важную роль ниже. Они возникают из прямолинейных конфигураций при термодинамическом воздействии колеблющихся атомов кристалла. Реальная форма этой конфигурации зависит от величины s . Таким образом, мы должны изучить статические решения (4.3.5) в целом.

Рис. 4.2. $C-s$ -диаграмма

Нетривиальные статические решения $\chi = \chi_0$ уравнения (4.3.1) задаются интегралом

$$x - x_0 = \int_{\chi}^{\chi_0} \frac{d\chi'}{\sqrt{2[U(\chi') + C]}}, \quad (4.3.10)$$

где x_0 и C — константы интегрирования. Так как $U(\chi)$ зависит от s , выражение (4.3.10) является функцией пары параметров (s, C) . Мы имеем дело с вещественными решениями (4.3.10) и тем самым должны потребовать, чтобы подинтегральное выражение в (4.3.10) оставалось вещественным. Это ограничивает значения C , так что существуют две функции: $C = C_{\min}(s)$ и $C = C_{\max}(s)$ при $0 \leq s \leq 1$, между которыми заключена C (рис. 4.2).

Чтобы получить качественное поведение статических решений χ_0 , описываемых (4.3.10), мы должны посмотреть на нули функции $U(\chi) + C$. Если эта функция имеет нуль второго порядка, асимптотическое поведение $\chi(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ является экспоненциальным. Это именно тот случай, когда выполняется $C = C_{\max}$. Во всех других случаях такое поведение является алгебраическим. В частности, если нуль первого порядка, то получаем $\chi_0(x) \sim (x - x_0)^2$ в окрестности нуля и тем самым — периодическое статическое решение $\chi_0(x)$. Так как мы интересуемся переходом дислокации от прямолинейной устойчивой конфигурации в окрестность

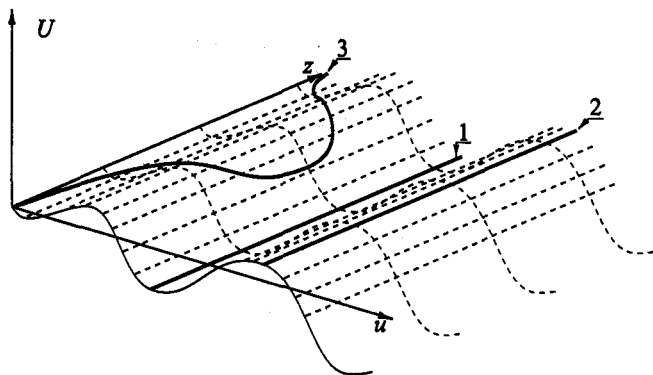


Рис. 4.3. Конфигурация устойчивой прямой (1); неустойчивые конфигурации: прямая линия (2), пара кинков (3)

другой такой же через неустойчивую конфигурацию, очевидно, что следует выбрать $C = C_{\max}$ и игнорировать все другие значения. Мы получим статическое решение, которое стремится к тривиальному устойчивому решению экспоненциально при $x \rightarrow \pm\infty$ и в промежутке образует горбообразную структуру. Это упомянутый выше парный кинк $\chi = \chi_{kp}(x)$: он представляет собой седловую складку (или конфигурацию рождения нуклеации) дислокации, когда реализуется переход от одной долины Пайерлса к соседней нижележащей долине.

При не слишком низких температурах колеблющиеся атомы в окрестности дислокации действуют как термодинамическая тепловая баня при процессе нуклеации парных кинков. Основной макроскопической величиной в этой области является скорость пластической деформации кристалла под приложенным давлением. В предположении, что наша модель применима, она зависит только от скорости рождения парных кинков, которая сама зависит от спектра вибраций прямолинейной устойчивой конфигурации и конфигурации парных кинков (рис. 4.3). Дальнейшие физические детали можно найти в [35], [69], [71], [84] и [94]. Спектр прямолинейной конфигурации вычисляется тривиально, это далеко не так для парного кинка, так как в данном случае задача сводится к решению центральной двухточечной задачи связи для уравнения Гойна. Этим мы сейчас и займемся.

Чтобы вычислить спектр для парного кинка, нам следует линеаризовать (4.3.5) с помощью анзаца

$$\chi(x, \tau) = \chi_{kp}(x) + \chi_1(x, \tau). \quad (4.3.11)$$

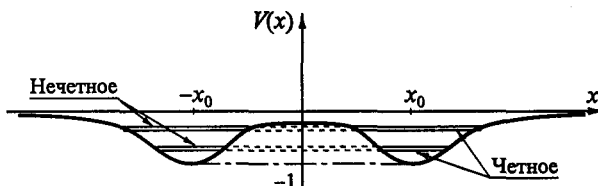


Рис. 4.4. Потенциал уравнения типа Шредингера в физических координатах (стрелками указаны значения энергии)

Предполагая $|\chi| \ll 1$, мы получим

$$\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \tau^2} = \chi_1 \frac{dF(\chi_{kp})}{d\chi_{kp}}. \quad (4.3.12)$$

Разделением переменных

$$\chi_1(x, \tau) = \varphi(x) e^{i\chi\tau} \quad (4.2.13)$$

уравнение (4.3.12) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \left[\chi^2 - \frac{dF(\chi_{kp})}{d\chi_{kp}} \right] \varphi = 0. \quad (4.3.14)$$

Так как мы имеем дело с элементарным шагом перехода дислокации из одной долины Пайерлса в окрестность другой, достаточно рассмотреть потенциал типа двойной ямы (рис. 4.4) (например, полином четвертого порядка) вместо периодического (называемого потенциалом Эшелби). В этом случае уравнение (4.3.14) принимает шредингеровский вид со следующим потенциалом типа двойной ямы (в преобразованных переменных):

$$V(x) \sim \text{sech}^2(x + x_0) + \text{sech}^2(x - x_0).$$

Мы ищем ограниченные решения (4.3.14), которые при $|x| \rightarrow \infty$ либо исчезают, либо становятся периодическими в этом пределе. Предыдущие решения соответствуют дискретным собственным значениям χ_i , а последние — непрерывному спектру двухпараметрической задачи на собственные значения. Используя χ_{kp} в (4.3.14) как независимую переменную, получим:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\chi_{kp}^2} + \frac{d \ln(d\chi_{kp}/dx)}{d\chi_{kp}} \frac{d\varphi}{d\chi_{kp}} + \frac{\chi^2 + dF(\chi_{kp})/d\chi_{kp}}{(d\chi_{kp}/dx)^2} \varphi = 0. \quad (4.3.15)$$

Для потенциала Эшелби уравнение (4.3.15) становится фуксовым дифференциальным уравнением с 4 особыми точками, т.е. уравнением Гойна, и s играет роль аксессуарного параметра.

4.3.2. Дифференциальные уравнения

Здесь мы более подробно рассмотрим математические детали, выполнив вычисления, приводящие к уравнению Шредингера и затем к уравнению Гойна.

Мы начнем с динамического нелинейного уравнения бесконечно длинной эластичной струны

$$\gamma \frac{d^2 u}{dz^2} - m \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dU}{du}. \quad (4.3.16)$$

Здесь γ — напряжение вдоль линии, m — масса на единицу длины, u — смещение струны, U — потенциал; z представляет собой пространственную переменную, t — временную.

Предположим, что имеется статическое решение $u_s(z)$ уравнения (4.3.16). Тогда можно формально написать

$$u(z, t) = u_s(z) + u_d(z, t),$$

получая дифференциальное уравнение для статического решения $u_s(z)$

$$\gamma \frac{d^2 u_s}{dz^2} = \frac{dU}{du_s}. \quad (4.3.17)$$

Разложение потенциала U в ряд Тейлора около u_s даст

$$\frac{dU}{du} = \frac{dU}{du_s} + u_d \frac{d^2 U}{du_s^2},$$

и с помощью линеаризации мы в итоге получаем

$$\gamma \frac{d^2 u_d}{dz^2} - m \frac{d^2 u_d}{dt^2} = u_d \frac{d^2 U}{du_s^2}.$$

В этом уравнении независимые переменные могут быть разделены:

$$u_d(z, t) = \varphi(z) \psi(t),$$

что приводит к

$$\psi(t) = e^{ikt}$$

и к дифференциальному уравнению типа Шредингера для φ

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \left(\frac{m k^2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \frac{d^2 U}{du_s^2} \right) \varphi = 0. \quad (4.3.18)$$

Преобразование независимой переменной от z к u_s с помощью

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{du_s} \frac{du_s}{dz}$$

и

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d^2\varphi}{du_s^2} \left(\frac{du_s}{dz}\right)^2 + \frac{d\varphi}{du_s} \frac{d^2u_s}{dz^2}$$

и интегрирование статического уравнения

$$\frac{d^2u_s}{dz^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{dU}{du_s} \rightarrow \left(\frac{du_s}{dz}\right)^2 = \frac{2}{\gamma} (U(u_s) + C) \quad (4.3.19)$$

приводит к

$$\frac{d^2\varphi}{du_s^2} + \frac{1}{2} \frac{dU/du_s}{U(u_s) + C} \frac{d\varphi}{du_s} + \frac{1}{2} \frac{mk^2 - dU^2/du_s^2}{U(u_s) + C} \varphi = 0. \quad (4.3.20)$$

Взяв вместо $U(u)$ потенциал Эшелби, т. е.

$$U(u) = P(u) - \sigma u, \quad (4.3.21)$$

причем

$$P(u) = 16 U_0 \left(\frac{u}{c}\right)^2 \left(\frac{u}{c} - 1\right)^2, \quad (4.3.22)$$

преобразуем уравнение Шредингера (4.3.18) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{4} \beta^2 \left\{ 4 \left(\frac{\omega^2}{\beta^2} - 1 \right) + 6 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \beta (x + x_0) \right] \right. \\ \left. + 6 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \beta (x - x_0) \right] \right\} \varphi = 0, \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

с учетом замен

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{32 U_0}{\gamma c^2}} z, \quad \beta = \sqrt{1 - 6\varphi^* + 6\varphi^{*2}}, \\ \omega^2 &= \frac{k^2 m c^2}{32 U_0}, \quad x_0 = \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{1 - 2\varphi^* + \beta}{\sqrt{2\varphi^*(1 - \varphi^*)}} \right\}, \\ \varphi^* &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \left\{ \frac{1}{3} [\pi - \arccos s] \right\}. \end{aligned}$$

Более того, мы имеем

$$s = \frac{\sigma}{\sigma_{\max}} \Rightarrow 0 \leq s \leq 1,$$

где величина $\sigma_{\max}$ получена из условий

$$\left. \frac{d^2 P}{du^2} \right|_{u_{\max}} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{dP}{du} \right|_{u_{\max}} = \sigma_{\max}.$$

Уравнение (4.3.20) является фуксовым, и с учетом (4.3.21), (4.3.22) оно имеет 4 особые точки, так что это уравнение Гойна

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dv^2} + \left\{ \frac{1}{v} + \frac{1/2}{v-a} + \frac{1/2}{v-1} \right\} \frac{d\varphi}{dv} \\ + \frac{1}{v(v-a)(v-1)} \left\{ -\frac{\rho^2 a}{v} - 6v + 3(1+a) \right\} \varphi = 0, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\beta^2}} = \sqrt{-\frac{k^2}{4}}, \\ v &= \frac{\varphi - \varphi^*}{\tilde{\varphi} - \varphi^*}, \quad \tilde{\varphi} = 1 - \varphi^* + \sqrt{2\varphi^*(1 - \varphi^*)}, \\ a &= \frac{1 - 2\varphi^* - \sqrt{2\varphi^*(1 - \varphi^*)}}{1 - 2\varphi^* + \sqrt{2\varphi^*(1 - \varphi^*)}} = \text{th}^2\left(\frac{\beta}{2}x_0\right), \quad 0 \leq a \leq 1. \end{aligned}$$

4.3.3. Статические решения

Из уравнения (4.3.19) мы получаем статическое решение, которое выпишем явным образом:

$$z - z_0 = \int_{u_0}^{u_s} \frac{du_s}{\sqrt{(2/\gamma)U(u_s) + C(\sigma)}},$$

откуда следует

$$\varphi_s = \frac{u_s}{c} = \frac{d \operatorname{sn}(\alpha z; k) + e}{f \operatorname{sn}(\alpha z; k) + g}.$$

Здесь d, e, f, g — произвольные константы, sn — эллиптическая функция Якоби (в стандартных обозначениях). Выбирая константу $C(\sigma)$ согласно

$$C(\sigma) = -[16 U_0 \varphi^{*2} (\varphi^* - 1)^2 - c \sigma \varphi^*],$$

где

$$\varphi^* = \frac{u^*}{c},$$

в итоге получаем в качестве статического решения

$$\varphi_s(z) = u^* + \frac{1 - 6\varphi^* + 6\varphi^{*2}}{\sqrt{2\varphi^*(1-\varphi^*)} \operatorname{ch}[4(z-z_0)/w] + 1 - 2\varphi^*},$$

где

$$w = \sqrt{\frac{\gamma}{2U_0}} \frac{c}{\beta}$$

и z_0 произвольно.

4.3.4. Явные вычисления

Мы еще не дали полный вывод уравнения Шредингера (4.3.23) из (4.3.18). Здесь мы приведем главные моменты этих громоздких выкладок.

Начнем с уравнения

$$\frac{d^2 U}{du_s^2} = 32 \frac{U_0}{c^2} \left\{ 6 \left(\frac{u_s}{c} \right)^2 - 6 \frac{u_s}{c} + 1 \right\}.$$

С учетом замены

$$\varphi = \frac{u}{c},$$

подстановки

$$\varphi_s = \varphi^* + \frac{\beta^2}{Z}, \quad u_s = c\varphi_s$$

и

$$Z := \sqrt{2\varphi^*(1-\varphi^*)} \operatorname{ch}(\beta x) + 1 - 2\varphi^*$$

мы получаем

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + [\omega^2 - 1 - \beta^2 V(x)] \varphi = 0,$$

причем

$$V(\varphi_s) = 6(\varphi_s^2 - \varphi_s).$$

Центральный момент здесь — вычисление $V(x)$ из $V(\varphi_s)$. Опуская весьма длинные вспомогательные выкладки, приведем основные шаги:

$$\begin{aligned} \varphi_s^2 - \varphi_s &= \varphi^{*2} - \varphi^* + \beta^2 \frac{(2\varphi^* - 1)Z + \beta^2}{Z^2} = \\ &= \varphi^{*2} - \varphi^* - \beta^2 \frac{d \operatorname{ch}(\beta x) + 1}{[\operatorname{ch}(\beta x) + a]^2} = \\ &= \varphi^{*2} - \varphi^* - \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\operatorname{ch}^2(\beta x_0/2) \operatorname{ch}^2(\beta x/2) + \operatorname{sh}^2(\beta x_0/2) \operatorname{sh}^2(\beta x/2)}{[\operatorname{ch}^2(\beta x_0/2) + \operatorname{sh}^2(\beta x/2)]^2} \\ &= \varphi^{*2} - \varphi^* - \frac{1}{4} \beta^2 \frac{\operatorname{ch}^2[\beta(x-x_0)/2] + \operatorname{ch}^2[\beta(x+x_0)/2]}{\operatorname{ch}^2[\beta(x-x_0)/2] \cdot \operatorname{ch}^2[\beta(x+x_0)/2]}. \end{aligned}$$

Из этих вычислений следует, что

$$V(x) = 6\varphi^{*2} - 6\varphi^* - \frac{3}{2}\beta^2 \left\{ \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2}\beta(x+x_0) \right] + \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2}\beta(x-x_0) \right] \right\},$$

и наконец мы приходим к финальному результату:

$$\begin{aligned} \omega^2 - 1 + \beta^2 V(x) = \frac{1}{4}\beta^2 \left\{ 4 \left[\frac{\omega^2}{\beta^2} - 1 \right] \right. \\ \left. + 6 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2}\beta(x+x_0) \right] + 6 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2}\beta(x-x_0) \right] \right\}. \end{aligned}$$

В итоге мы свели важную математическую задачу в теории пластической деформации кристаллов в рамках принятой нами линейной модели напряжений, а именно вычисление собственных частот конфигурации дислокации типа складки (т.е. парного кинка), к центральной двухточечной задаче связи для уравнения Гойна, которую мы обсудим ниже. Уравнение (4.3.15) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dv^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{v} + \frac{1}{v-a} + \frac{1}{v-1} \right) \frac{d\varphi}{dv} + \frac{1}{v(v-a)(v-1)} \\ \times \left(-\frac{\rho^2 a}{v} - 6v + 3(1+a) \right) \varphi = 0, \quad v \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

здесь $\rho = \rho(\omega^2, s)$, $\omega = \omega(x)$, $v = v(\varphi, s)$ и $a = a(s)$, $0 \leq s \leq 1$. Физически осмысленный интервал — это $0 \leq v \leq 1$, и a изменяется между $a = 0$ и $a = 1$ вдоль вещественной оси, когда s изменяется между $s = 1$ и $s = 0$. Выпишем P -символ Римана уравнения (4.3.24):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & \infty & ; v \\ +\rho & 0 & 0 & 3 & ; 3(1+a) \\ -\rho & 1/2 & 1/2 & -2 & \end{pmatrix}. \quad (4.3.25)$$

Как показано выше, спектр (4.3.25) определяет скорость пластической деформации кристалла под приложенным давлением согласно линейной теории напряжений. Как мы увидим в дальнейшем, спектр (4.3.25) содержит как дискретные собственные значения, так и непрерывную часть. Сначала мы предьявим метод вычисления дискретной части.

4.3.5. Дискретный спектр

Следует отметить, что согласно симметрии парного кинка уравнение (4.3.23) имеет четные и нечетные собственные функции относительно $x = 0$: четным в (4.3.24) соответствует $\rho = 0$, а нечетным — $\rho = 1/2$.

Мы ищем решение, которое стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, т.е. при $v \rightarrow 0$. В терминах уравнения (4.3.24) это означает, что мы ищем функции $\rho = \rho_i(a)$, $i = 1, 2, \dots$, такие что соответствующие решения ведут себя как

$$\varphi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^{n+\rho} \quad (4.3.26)$$

при $v = 0$ и как

$$\varphi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (v-a)^n \quad (4.3.27)$$

при $v = a$ в четном случае или же как

$$\varphi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (v-a)^{n+1/2} \quad (4.3.28)$$

при $v = a$ в нечетном случае. Это двухпараметрическая центральная двухточечная задача связи для уравнения Гойна, которую нетрудно решить. Прежде всего заметим, что и четный и нечетный случаи можно рассматривать одинаковым образом. Нам следует лишь применить s -гомотопное преобразование

$$\varphi(v) = (v-a)^{-1/2} \tilde{\varphi}(v) \quad (4.3.29)$$

в нечетном случае к (4.3.24), так что мы получаем уравнение для $\tilde{\varphi}$ с P -символом

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & \infty & ; v \\ +\rho & -1/2 & 0 & 7/2 & ; 3(1+a) \\ -\rho & 0 & 1/2 & -3/2 & \end{pmatrix}, \quad (4.3.30)$$

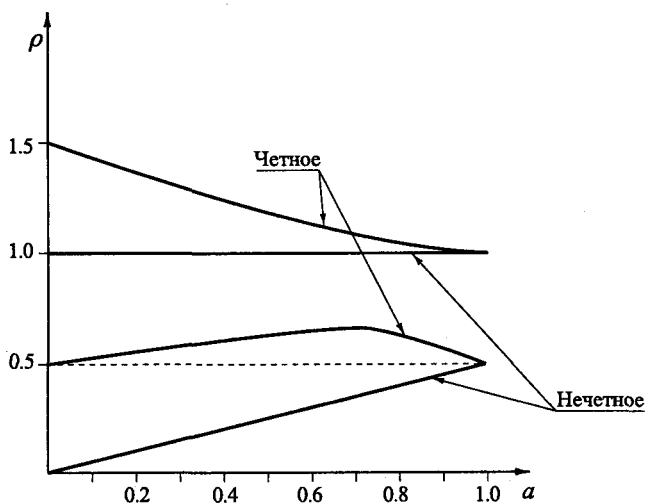
и затем продолжать как в четном случае, который мы сейчас и обсудим. Можно вместо уравнения, соответствующего (4.3.30), перейти к уравнению с ОСП

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & \infty & ; v \\ 0 & 0 & 0 & \rho + 4 & ; (1+a)(2\rho^2 + 3\rho + 5)/2 \\ -2\rho & -1/2 & -1/2 & \rho - 1 & \end{pmatrix}. \quad (4.3.31)$$

Так как не имеет значения, будет ли особая точка $v = a$ изменяться между $v = 0$ и $v = 1$ или между $v = 1$ и $v = \infty$, то можно сделать преобразование

$$\xi = \frac{1-a}{1+a}$$

и вычислять собственные значения в зависимости от ξ .

Рис. 4.5. Кривые собственных значений $\rho = \rho(a)$

Разложение в виде (4.3.26) приводит к разностному уравнению второго порядка типа Пуанкаре–Перрона для коэффициентов a_n :

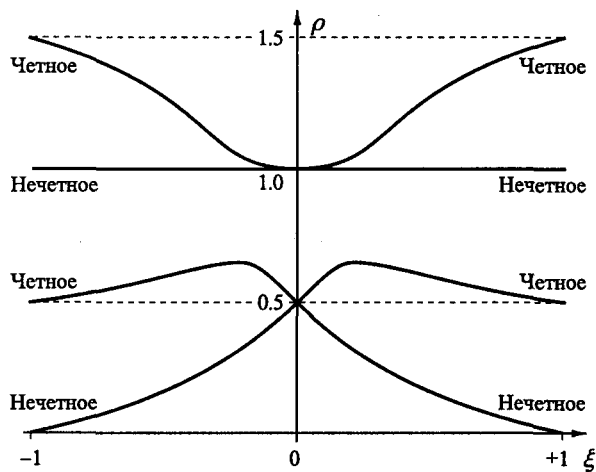
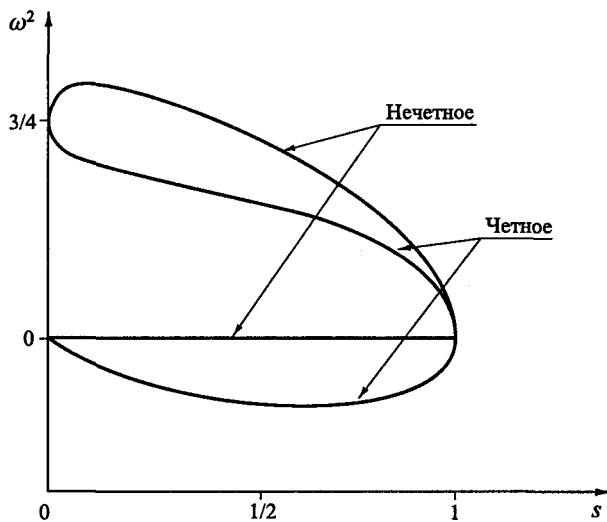
$$\begin{aligned} a_1 f_1 + a_0 f_0 &= 0, \\ f_1(n) a_{n+1} + f_0(n) a_n + f_{-1}(n) a_{n-1} &= 0, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(n) &= \left(a + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta_1}{n^2} \right), \\ f_0(n) &= \left((1+a) + \frac{\alpha_0}{n} + \frac{\beta_0}{n^2} \right), \\ f_{-1}(n) &= \left(a + \frac{\alpha_{-1}}{n} + \frac{\beta_{-1}}{n^2} \right), \end{aligned}$$

α_i и β_i , $i = -1, 0, 1$, зависят от параметра a .

Условие на собственные значения заключается в том, что решения (4.3.26) уравнения (4.3.24) голоморфны при $z = a$. Так как точка $z = a$ является регулярной особой точкой, это означает, что радиус сходимости ряда (4.3.26) изменяется от $\mathcal{R} = a$ в общей ситуации до $\mathcal{R} = 1$ в том случае, когда ρ становится собственным значением. Это приводит к существенному изменению асимптотического поведения a_n при $n \rightarrow \infty$. Имеется общая процедура получения этих специальных значений. Для

Рис. 4.6. Кривые собственных значений $\rho = \rho(\xi)$ Рис. 4.7. Кривые собственных значений $\omega = \omega(s)$

этого выпишем бесконечную цепную дробь:

$$F(\rho, a) = f_0 - \frac{f_1 f_{-1}(1)}{f_0(1) + \frac{f_1(1) f_{-1}(2)}{f_0(2) + \frac{f_1(2) f_{-1}(3)}{f_0(3) + \frac{f_1(3) f_{-1}(4)}{f_0(4) + \dots}}}} = 0. \quad (4.3.33)$$

Как можно показать [26], в том и только в том случае, когда мы имеем собственное значение $\rho = \rho_i(a)$ центральной двухточечной задачи связи, цепная дробь равна нулю, так что $F = 0$ (рис. 4.5). Численные алгоритмы для вычисления бесконечных цепных дробей можно найти в [98]. Это весьма удобный метод для определения дискретного спектра уравнения (4.3.24). Как показано на рис. 4.6 и 4.7, мы получаем четыре дискретных собственных значения: два — соответствующих четным вибрациям и два — нечетным. Есть одна отрицательная кривая, которая соответствует распадающейся моде конфигурации седловой складки, и нулевая кривая, которая в данном случае имеет смысл моды Голдстоуна — возможность сдвига парного кинка вдоль потенциала Пайерлса квазистационарным образом.

4.3.6. Непрерывный спектр

В физических координатах x уравнение (4.3.24) (представляется P -символом (4.3.25)) является уравнением Шредингера:

$$\frac{d\varphi^2}{dx^2} + (E - V(x)) \varphi = 0, \quad (4.3.34)$$

потенциал которого

$$-V(x) = \operatorname{sech}^2(x + x_0) + \operatorname{sech}^2(x - x_0). \quad (4.3.35)$$

Тем самым дискретный спектр состоит только из конечного числа собственных значений при $E < 0$. При $E > 0$ имеется непрерывный спектр с обобщенными (четными и нечетными) собственными функциями, которые характеризуются фазовым сдвигом δ при $x = \pm\infty$ между обобщенными собственными функциями (4.3.34)–(4.3.35) и решениями уравнения Шредингера с потенциалом $V(x) \equiv 0$. В обоих случаях асимптотическое поведение при $|x| \rightarrow \infty$ подобно синусу для нечетной и косинусу для четной собственных функций, т.е. является периодическим. Ниже мы приведем процедуру вычисления фазового сдвига.

В терминах уравнения Гойна опять-таки приходим к центральной двухточечной задаче связи, которую можно поставить следующим образом. Рассмотрим P -символ (4.3.25): точка $v = a$ соответствует точке симметрии $x = 0$ в физической системе и точка $v = 0$ — значениям $x = \pm\infty$. Поэтому четные решения относительно x -координаты соответствуют

характеристическому показателю 0 при $v = a$ и обозначаются φ_e , в то время как нечетные решения — характеристическому показателю $1/2$ и обозначаются φ_o . Поведение продолженных решений при $x = \pm\infty$ описывается линейной комбинацией решений Фробениуса при $v = 0$, так что ρ должно быть положительным мнимым. Для того чтобы эта комбинация решений Фробениуса была вещественна на вещественной оси, одно из них должно быть комплексно сопряженным второму. Как следствие, мы можем общее решение дифференциального уравнения записать в виде:

$$\varphi = A\varphi_1 + \overline{A\varphi_1},$$

причем

$$\varphi_1 = v^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n v^n, \quad A = A(\delta). \quad (4.3.36)$$

Условие для получения необходимого фазового сдвига заключается в том, что для фиксированных значений ρ и a коэффициент A как функция от δ выбран так, что φ линейно зависит от $\varphi_{e,o}$. Математическое условие, непрерывное относительно δ , имеет вид:

$$W(\rho, a; \varphi)[\varphi_{e,o}(v_0); \varphi(v_0)] = 0, \quad (4.3.37)$$

где $W(\rho, a; \varphi)[\varphi_{e,o}(v_0); \varphi(v_0)]$ есть вронскиан $\varphi_{e,o}$ и φ , а $0 < v_0 < a$. Мы реализовали численные выкладки (4.3.37) и приводим результаты в виде графиков, представленных на рис. 4.8–4.10.

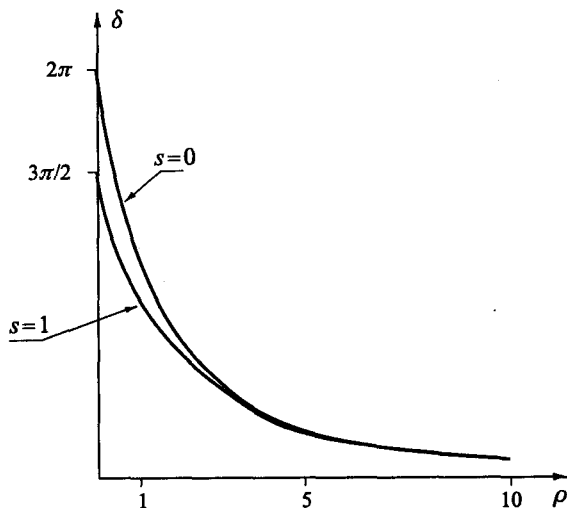


Рис. 4.8. Фазовые сдвиги $\delta = \delta(\rho)$ при $s = 0$ и $s = 1$

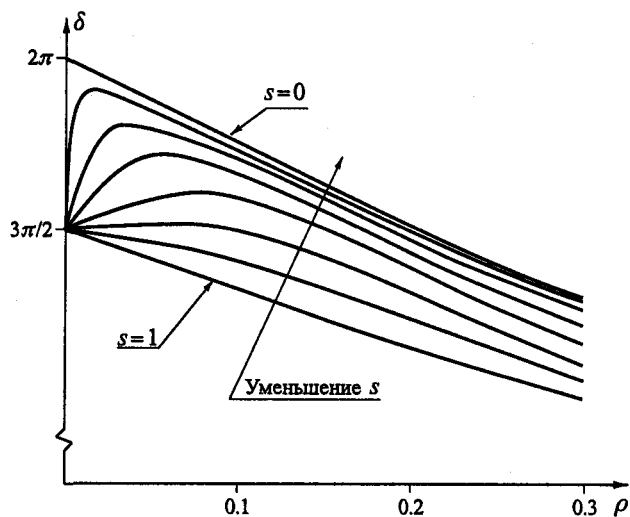


Рис. 4.9. Фазовые сдвиги $\delta = \delta(\rho)$ для четных собственных функций

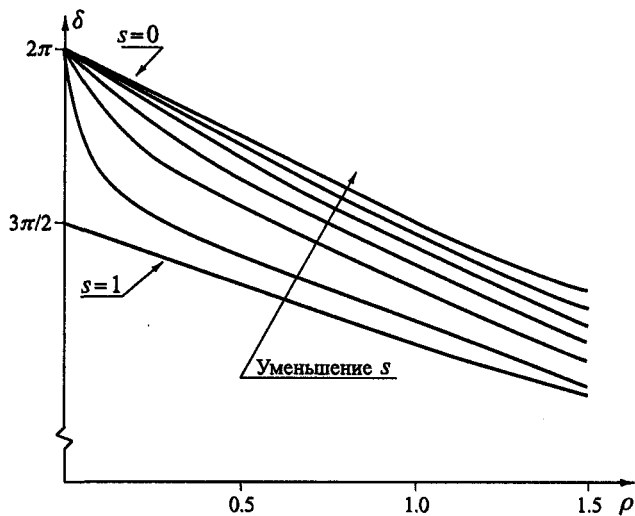


Рис. 4.10. Фазовые сдвиги $\delta = \delta(\rho)$ для нечетных собственных функций

4.3.7. Квантовая диффузия кинков вдоль дислокаций

Описанная выше модель основана на предположении, что потенциал кристалла, в котором движется дислокация, является периодическим только в плоскости скольжения. Это верно, если температура достаточно высока. Если температура понижается, то становится важной периодичность кристалла, что моделируется периодической структурой потенциалов Пайерлса, которая *перпендикулярна* к плоскости скольжения (она называется потенциалом Пайерлса второго порядка). Кинки подвергаются влиянию этого потенциала, двигаясь вдоль потенциала Пайерлса первого порядка. Одновременно при уменьшении температуры появляются квантовые эффекты в этих процессах, которые по существу являются процессами туннелирования кинков сквозь упомянутые выше потенциалы. В работе [40] подробно изложено, как эти квантовые эффекты могут быть описаны с помощью моделей частиц, движущихся в потенциале двойной ямы под воздействием тепловой бани. Двойная яма имеет при этом следующий вид (см. рис. 4.11):

$$U(u) = 16 U_0 \left[\left(\frac{u}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{u}{a} \right)^2 - \frac{s}{3\sqrt{3}} \frac{u}{a} \right]; \quad (4.3.38)$$

здесь u — независимая переменная, U_0 — амплитуда потенциала, a — параметр решетки, s — внешнее давление. Задача — вычислить среднюю скорость перехода частицы из верхней ямы в нижнюю, в предположении, что туннельными процессами нельзя пренебрегать.

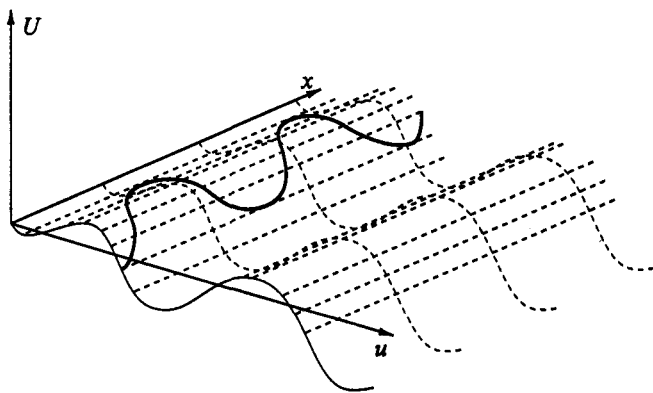


Рис. 4.11. Потенциал Пайерлса

4.4. Туннелирование в двойной яме

Рассмотрения последнего раздела могут быть также проинтерпретированы с точки зрения процессов туннелирования в потенциале двойной ямы. Начнем с уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [E - V(x)]y(x) = 0,$$

причем потенциал $V(x)$ имеет следующую форму:

$$-V(x) = A(\operatorname{sech}^2(x + x_0) + \operatorname{sech}^2(x - x_0)), \quad (4.4.1)$$

где A — константа и x_0 — параметр задачи. Для таких потенциалов глубина ям A остается постоянной, в то время как расстояние между ними $2x_0$ может изменяться. Так как имеется симметрия (4.4.1) относительно $x = 0$, собственные функции могут быть четными и нечетными. Как хорошо известно, расщепления между четными и нечетными собственными значениями зависят экспоненциальным образом от расстояния между ямами. Это отражает экспоненциально малое туннелирование между двумя ямами.

Для конечных значений x_0 справедливо соотношение

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0.$$

Более сложный пример, где это свойство более не сохраняется, дается потенциалом в виде полинома четвертого порядка. Ниже мы вычислим собственные значения и собственные функции такого потенциала в качестве приложения наших результатов анализа центральной двухточечной задачи связи для триконфлюэнтного уравнения Гойна. Мы начнем с нормальной общей формы этого уравнения:

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \left(E + \sum_{k=1}^4 D_k z^k \right) y(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad D_4 \in \mathbb{R}^-. \quad (4.4.2)$$

Физически интересный интервал — вся вещественная ось. Однако исходная центральная двухточечная задача связи определена только между $z = 0$ и $z = \infty$; чтобы справиться с этим обстоятельством, следует решить ЦДЗС дважды: один раз — для положительной, а второй раз — для отрицательной вещественной оси (которые в дальнейшем обозначены верхними индексами “+” и “−”). Причем эти две задачи связи могут быть сшиты при $z = 0$ с помощью условий

$$y^+|_{z=0} = y^-|_{z=0} \quad \text{и} \quad \left. \frac{dy^+}{dz} \right|_{z=0} = \left. \frac{dy^-}{dz} \right|_{z=0}.$$

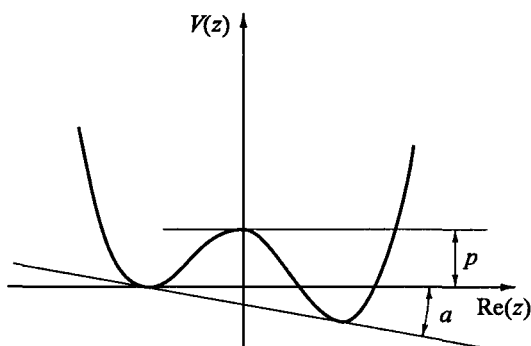


Рис. 4.12. Потенциал двойной ямы с двумя параметрами

Уравнение (4.4.2) записано в неудобной для наших целей форме. Мы предпочитаем взять следующую форму:

$$\frac{d^2}{dz^2} \Psi(z) + \left(-\frac{p^2}{4} (z^2 - 1)^2 + p[E - az] \right) \Psi(z) = 0. \quad (4.4.3)$$

Эта форма содержит три вещественных параметра $(E; a, p)$ физической задачи: E — аксессуарный параметр, играющий роль спектрального параметра, a — параметр, описывающий асимметрию потенциала, $p > 0$ — высота горба между двумя ямами (рис. 4.12).

Отщепляя асимптотический множитель

$$\Psi(z) = \exp\left(\frac{p}{2}\left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right)(z+1)^{-a-1}w(z), \quad (4.4.4)$$

реализуя преобразование Яффе

$$x := \frac{z}{z+1}$$

и используя степенной ряд вида

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (4.4.5)$$

мы приходим к иррегулярному разностному уравнению четвертого порядка типа Пуанкаре–Перрона:

a_0, a_1 произвольны,

$$f_0(0)a_2 + f_{-1}(0)a_1 + f_{-2}(0)a_0 = 0,$$

$$f_1(1)a_3 + f_0(1)a_2 + f_{-1}(1)a_1 + f_{-2}(1)a_0 = 0,$$

$$f_2(n)a_{n+2} + f_1(n)a_{n+1} + f_0(n)a_n + f_{-1}(n)a_{n-1} + f_{-2}(n)a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2, \quad (4.4.6)$$

где для $n \geq 2$ имеем:

$$\begin{aligned} f_2(n) &= 1 + \frac{\alpha_2}{n} + \frac{\beta_2}{n^2}, \\ f_1(n) &= -4 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta_1}{n^2}, \\ f_0(n) &= 6 + \frac{\alpha_0}{n} + \frac{\beta_0}{n^2}, \\ f_{-1}(n) &= -4 + \frac{\alpha_{-1}}{n} + \frac{\beta_{-1}}{n^2}, \\ f_{-2}(n) &= 1 + \frac{\alpha_{-2}}{n} + \frac{\beta_{-2}}{n^2}. \end{aligned}$$

Так как мы можем вычислить решения (4.4.6) рекуррентным образом, нам интересно асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$. Фундаментальная система (4.4.6) в этом пределе представлена решениями Биркгофа ([16], [17], [18], см. также главу 3)

$$s^{(l)}(n) = \exp\left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{lm} n^{(4-m)/4}\right) n^{r_l} \left[1 + \frac{C_{l1}}{n^{1/4}} + \frac{C_{l2}}{n^{2/4}} + \dots\right], \quad l = 1, 2, 3, 4. \quad (4.4.7)$$

Таким образом, мы можем представить общее решение (4.4.6) асимптотически в следующем виде:

$$a_n = \sum_{l=1}^4 L_l s^{(l)}(n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.4.8)$$

Здесь важно то, что при условии

$$\sum_{i=-2}^{i=+2} \alpha_i \neq 0$$

мы имеем

$$\gamma_{11} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{-\sum_{i=-2}^{i=+2} \alpha_i} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{2\sqrt{-D_4}} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{p}, \quad (4.4.9)$$

$$\gamma_{21} = -\gamma_{11}, \quad \gamma_{31} = i\gamma_{11}, \quad \gamma_{41} = -i\gamma_{11}$$

и

$$\gamma_{12} = -\frac{2\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_{-1} - 2\alpha_{-2}}{(9/8)\gamma_{11}^2} = -\frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{-D_4}} = -\frac{1}{2} \sqrt{p},$$

$$\gamma_{22} = \gamma_{12}, \quad \gamma_{32} = -\gamma_{12}, \quad \gamma_{42} = -\gamma_{12}.$$

Константы γ_{l3} и r_l , $l = 1, 2, 3, 4$, можно найти в [75], их реальные значения нам не важны.

Из (4.4.9) мы видим, что γ_{11} принимает положительные вещественные значения, а γ_{12} — отрицательные. Таким образом, в итоге три из четырех решений Биркгофа (4.4.7) экспоненциально растут при n , стремящемся к бесконечности, тогда как четвертое (представленное $s^{(2)}(n)$ в (4.4.7)) экспоненциально убывает в том же пределе.

Асимптотическое поведение собственных решений при $z \rightarrow \infty$ определяется асимптотическим множителем в (4.4.4). Если параметр E не является собственным значением, то асимптотическое поведение функции $w(z)$ в (4.4.4), представленное в (4.4.5), при z , стремящемся

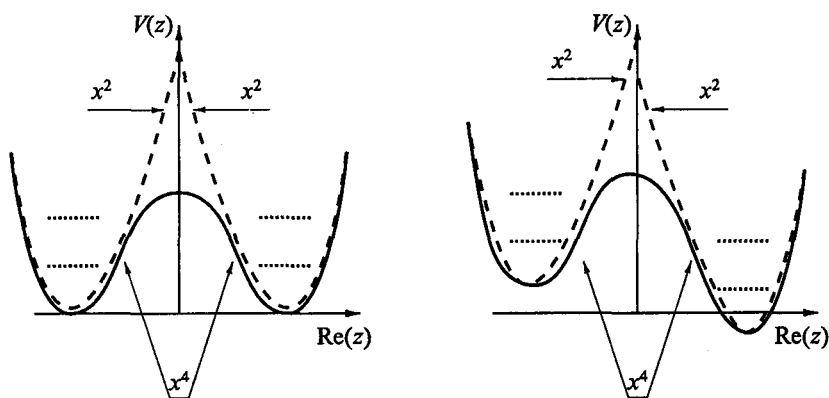


Рис. 4.13. Причины возникновения квазипересечения

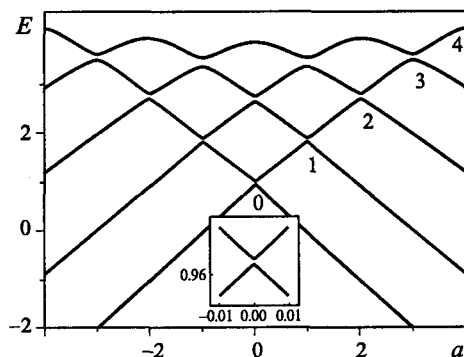


Рис. 4.14. Кривые собственных значений $E = E(a)$ и явления квазипересечения (ср. результаты с асимптотическими вычислениями на рис. 3.1)

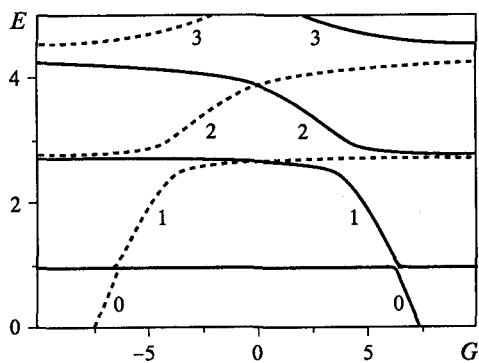


Рис. 4.15. Нижние кривые собственных значений для спектра триконфлюэнтных уравнений Гойна на положительной и отрицательной вещественных полуосях

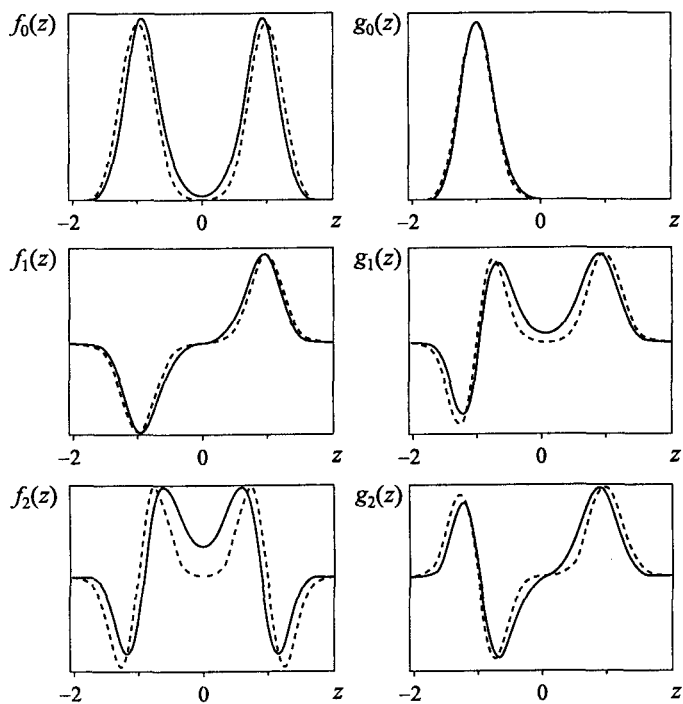


Рис. 4.16. Нижние собственные функции для симметричного (слева) и асимметричного (справа; $a = 1$) квантового ангармонического осциллятора

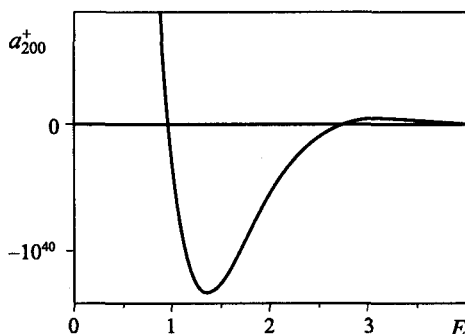


Рис. 4.17. Численная проверка уравнения для собственных значений

к бесконечности, (или когда x стремится к 1) задается как

$$e^{-p(z-z^3/3)}.$$

Когда же параметр E становится собственным значением, ведущий член асимптотики функции $w(z)$ в (4.4.4) при z , стремящемся к бесконечности, должен быть ограничен. Это реализуется тогда и только тогда, когда коэффициенты перед возрастающими решениями в (4.4.8) исчезают:

$$L_1(E; a, p) = L_2(E; a, p) = L_3(E; a, p) = 0. \quad (4.4.10)$$

Реализация численных выкладок на основе (4.4.10) приведена в [12]. На рис. 4.13–4.17 даны механизм возникновения квазипересечений и графики, на которых показаны некоторые кривые собственных значений $E = E_i(a)$ при $p = 15$ и некоторые соответствующие собственные функции, в сравнении с приближениями на основе анзаца Ритца. Как следует из этих графиков, кривые собственных значений показывают явление квазипересечения. Этот экспоненциально малый квантовый туннельный эффект мы смогли описать точно, так как наше разложение является точным.

4.5. Идеальный туннельный барьер

4.5.1. Введение

Дважды конфлюэнтное уравнение Гойна (ДУГ) порождается уравнением Гойна после процедуры конфлюэнции, когда две регулярные особые точки склеиваются в одну иррегулярную особую точку [102]. С вычислительной

и аналитической точек зрения решения ДУГ проявляют весьма специфические особенности, которые делают их весьма полезными при решении некоторых физических задач, например в теории гравитации [75]. Более точно, для ДУГ нет сходящихся решений Фробениуса, так как нет регулярных особых точек, что обычно имеет место в теории спецфункций. Более того, для ДУГ характерна специфическая структура линий Стокса и областей Стокса [41].

В данной книге — после обсуждения дифференциального уравнения, его обобщенной схемы Римана, некоторых основных форм и простых преобразований — мы приведем асимптотический анализ собственных функций и собственных значений, которые возникают в центральной двухточечной задаче связи для двух особых точек, лежащих на вещественной оси. Вслед за этим мы предложим численную процедуру для вычисления собственных значений. Она основана на обобщении разложения Яффе, предложенном В. Лаем [75], и на алгоритме и программном коде, разработанном К. Баем с коллегами [12]. Кроме того, мы выделяем полиномиальные решения, которые появляются при определенных ограничениях. Оба представленных подхода дают численные результаты, которые находятся в хорошем согласии друг с другом.

4.5.2. Формы уравнений

Дважды конфлюэнтное уравнение Гойна (ДУГ) в канонической форме выглядит следующим образом (см. [110]):

$$z^2 \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + (-z^2 + cz + t) \frac{dy(z)}{dz} + (-az + \lambda)y(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.5.1)$$

Здесь c, a — локальные параметры, которые определяют поведение решений в иррегулярно особых точках, расположенных в $z = 0, z = \infty$; t — скейлинговый параметр, определяющий положение точек поворота, λ — аксессуарный параметр.

Поведение решений в особых точках описывается в следующей обобщенной схеме Римана [111]:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & & \\ 0 & \infty & ; z & \\ 0 & a & ; \lambda & \\ 2-c & c-a & & \\ 0 & 0 & & \\ t & 1 & & \end{pmatrix}. \quad (4.5.2)$$

Согласно значениям характеристических показателей, существуют две пары локальных решений в окрестностях особых точек (4.5.1), которые

ведут себя как

$$\begin{aligned}
 y_1(a, c; z = 0, z) &= 1 \cdot (1 + o(1)), \\
 y_2(a, c; z = 0, z) &= z^{2-c} e^{t/z} (1 + o(1)), \\
 y_1(a, c; z = \infty, z) &= z^{-a} (1 + o(1)), \\
 y_2(a, c; z = \infty, z) &= z^{a-c} e^z (1 + o(1)),
 \end{aligned}
 \quad \begin{aligned}
 & \\
 & z \rightarrow +0; \\
 & \\
 & z \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}
 \tag{4.5.3}$$

Хотя уравнение (4.5.1) записано не в самосопряженной форме, может быть поставлена соответствующая сингулярная задача на собственные значения для граничных условий при $t > 0$, $z \in [0, \infty[$

$$|y(0)| < \infty; \quad e^{-z/2} y(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty; \tag{4.5.4}$$

параметр λ играет роль спектрального параметра.

Из (4.5.3) следует, что собственные функции граничной задачи (4.5.1)–(4.5.4) пропорциональны $y_1(a, c; z = 0, z)$ в нуле и пропорциональны $y_1(a, c; z = \infty, z)$ — на бесконечности. Отсюда же следует необходимое условие для того, чтобы собственная функция была полиномом:

$$a = -n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Кроме канонической, и другие формы ДУГ могут быть полезны. Мы приведем сначала преобразование к более естественному масштабу независимой переменной z , так чтобы переходные точки оказались на конечных расстояниях:

$$t \mapsto t^2, \quad z \mapsto tz, \quad \lambda \mapsto t\lambda \tag{4.5.5}$$

$$\Rightarrow \quad z^2 \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + (cz - t(z^2 - 1)) \frac{dy(z)}{dz} + t(-az + \lambda)y(z) = 0. \tag{4.5.6}$$

Взяв в качестве ведущего члена в уравнении (4.5.6) при больших t выражение $t(z^2 - 1)$, можно заметить, что точки перехода теперь в $z = 0$, $z = -1$, $z = 1$, $z = \infty$. Это проще увидеть из нормальной формы ДУГ

$$z^2 \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \left(t \left[\left(\frac{c}{2} - a \right) z + \left(1 - \frac{c}{2} \right) \frac{1}{z} \right] - t^2 \frac{(z^2 - 1)^2}{4z^2} \right) w + t\tilde{\lambda}w = 0, \tag{4.5.7}$$

которая получается из (4.5.6) после подстановки

$$y(z) = \exp \left[\frac{t}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right] z^{-c/2} w(z), \quad \tilde{\lambda} := \lambda - \frac{c(c-2)}{4t}.$$

Обычно при изучении граничной задачи на собственные значения применяют самосопряженную форму ДУГ

$$\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dv(z)}{dz} \right) + \left(t \left[\left(\frac{c}{2} - a \right) z + \left(1 - \frac{c}{2} \right) \frac{1}{z} \right] - t^2 \frac{(z^2 - 1)^2}{4z^2} \right) v + t \tilde{\lambda} v = 0, \quad (4.5.8)$$

где

$$w(z) = zv(z).$$

Мы введем новые переменные

$$a' := a - 1, \quad c' := \frac{c}{2} - 1.$$

В этих терминах уравнение (4.5.7) записывается так:

$$z^2 \frac{d^2 w(z)}{dz^2} - \left(t^2 \frac{(z^2 - 1)^2}{4z^2} + t \left(a' z + c' \frac{1 - z^2}{z} \right) \right) w + t \tilde{\lambda} w = 0. \quad (4.5.9)$$

Уравнение (4.5.9) не изменяется при одновременных подстановках

$$z \mapsto -z, \quad a' \mapsto -a', \quad c' \mapsto -c'.$$

Это означает, что, если мы изучили граничную задачу на собственные значения на положительной полуоси, нет необходимости изучать ее для отрицательной полуоси, так как соответствующие собственные значения $\tilde{\lambda}^-$ получаются из собственных значений для граничной задачи на положительной полуоси $\tilde{\lambda}^+$ с помощью формулы:

$$\tilde{\lambda}^-(a', c') = \tilde{\lambda}^+(-a', -c'). \quad (4.5.10)$$

Формы (4.5.7), (4.5.8), (4.5.9) ДУГ удобны для изучения асимптотических разложений.

Другая форма ДУГ необходима для реализации численных алгоритмов. Во-первых, добьемся, чтобы член $-atz$ отсутствовал в уравнении (4.5.6) переходом к новой зависимой переменной

$$y(z) = (z - 1)^a u(z).$$

Соответствующее уравнение для функции $u(z)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} z^2 \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \left(-tz^2 + t + cz - \frac{2az^2}{z+1} \right) \frac{du(z)}{dz} \\ + \left(-ta - \frac{acz}{z+1} + \frac{a(a+1)z^2}{(z+1)^2} + \tilde{\lambda} \right) u = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение обладает тем преимуществом, что требуемое решение имеет конечные пределы в обеих конечных точках интервала рассмотрения $[0, \infty[$.

Следующий шаг — это преобразование к новой независимой переменной ξ :

$$\xi := \frac{z-1}{z+1},$$

для которой точки комплексной z -плоскости переходят в точки комплексной ξ -плоскости согласно

$$z \mapsto \xi \Rightarrow -1 \mapsto \infty, \quad 0 \mapsto -1, \quad 1 \mapsto 0, \quad \infty \mapsto 1$$

и исходный интервал рассмотрения $[0, \infty[$ переходит в интервал $[-1, 1]$. Это преобразование приводит к уравнению

$$\begin{aligned} (1 - \xi^2)^2 \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} + \{-8t\xi - 2(1 - \xi^2)[c + (a+1)(1 + \xi)]\} \frac{du(\xi)}{d\xi} \\ + \{(1 + \xi)[a(a+1)(1 + \xi) - 2ac] - 4ta + 4t\tilde{\lambda}\} u(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

4.5.3. Асимптотики

Здесь мы используем методы, развитые для случая “близких” точек поворота и описанные в [109].

“Потенциал”, соответствующий уравнениям (4.5.7), (4.5.8), (4.5.9), имеет форму двух потенциальных ям, разделенных иррегулярной особой точкой в нуле.

Линии Стокса, определенные формулой

$$\operatorname{Im} \int_{\pm 1}^z \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2z^2} \right) dz = 0,$$

включают в себя вещественную ось и единичную окружность. Антистоксовы линии, определенные

$$\operatorname{Re} \int_{\pm 1}^z \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2z^2} \right) dz = 0$$

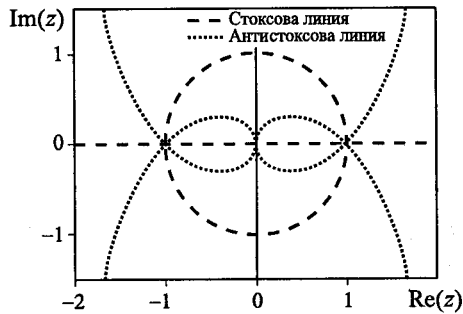
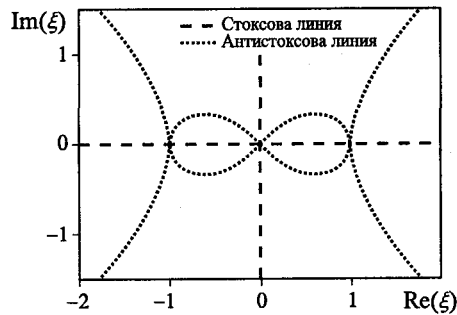
и представленные в полярных координатах r, φ , на z -плоскости выглядят так:

$$r(\varphi) = \frac{1 \pm \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Стоксовы и антистоксовы линии на z -, а также на ξ -плоскости изображены на рис. 4.18 и 4.19.

Мы ищем асимптотические решения $w_n(z)$ поставленной граничной задачи (4.5.9), (4.5.4) в виде

$$w_n(z) = \exp \left(-t \int_1^z s_n(z, t) dz \right), \quad (4.5.12)$$

Рис. 4.18. Линии Стокса на комплексной z -плоскостиРис. 4.19. Линии Стокса на комплексной ξ -плоскости

где новая полуклассическая переменная $s_n(z, t)$ и собственные значения $\tilde{\lambda}_n(t)$ разлагаются в соответствующие ряды по t :

$$s_n(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{nk}(z) t^{-k}, \quad (4.5.13)$$

$$\tilde{\lambda}_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{nk}(a, c) t^{-k}.$$

Важно подчеркнуть, что в любом порядке приближения, когда рассматривается конечное число членов, функция в правой части (4.5.12) однозначна. Это следствие условия квантования.

Правило квантования для нижних собственных значений дается соотношением (см. [63]):

$$-t \operatorname{Res}_{z=1} s_n(z, t) = n, \quad (4.5.14)$$

где $s_n(z, t)$ получается из асимптотического разложения (4.5.13) рекуррентной процедурой

$$z^2 s^2 - \frac{(z^2 - 1)^2}{4z^2} + \frac{1}{t} \left(-\frac{ds(z)}{dz} z^2 - a'z - c' \frac{1 - z^2}{z} + \bar{\lambda} \right) = 0.$$

Выпишем два первых члена разложения (4.5.13):

$$s_{n0} = \frac{z^2 - 1}{2z^2}, \quad s_{n1} = -\frac{c'}{z} + \frac{a' + 1 - \lambda_{n0}}{2(z - 1)} + \frac{a' + 1 + \lambda_{n0}}{2(z + 1)}.$$

Условие квантования (4.5.14) дает

$$\lambda_{n0} = 2n + a' + 1.$$

Вычисление s_{n2} весьма утомительно, и мы приведем только финальный результат для поправки к собственным значениям:

$$\lambda_{n1} = \frac{1}{2}n(n + a' + 1) - \frac{1}{4}(a' + 1)(a' + 2) + c'(2 + a' - c').$$

Важно понимать, что представление (4.5.12) справедливо на всей комплексной z -плоскости без добавления другого экспоненциального члена. Доказательство следует из общей теории явления Стокса, как показано в [41]. В этом смысле собственные функции не обнаруживают явления Стокса. Это отличается от поведения собственных функций для других конфлюэнтных уравнений Гойна!

Собственные числа для граничной задачи на отрицательной полуоси получаются с помощью симметрии (4.5.10). В [114] было показано, что все конфлюэнтные уравнения Гойна, за исключением ДУГ, проявляют явление квазипересечения собственных значений, относящихся к различным потенциальным ямам. В случае ДУГ явления квазипересечения нет, имеется реальное пересечение кривых собственных значений, которое происходит приблизительно при целых значениях a' . Это не противоречит теории, которая запрещает вырождение собственных функций, так как эти собственные функции относятся к совершенно различным граничным задачам на собственные значения. Численное исследование этого явления приведено ниже.

Величины $\bar{\lambda}$ и a' , при которых происходят пересечения собственных значений, обнаруживают следующие, очень специфические качества явления Стокса: в этих точках собственные функции $y_m^-(z)$ и $y_n^+(z)$, относящиеся к ЦДЗС на левой и правой полуосях соответственно, могут быть взяты

в качестве асимптотического базиса, и в этом базисе матрица Стокса тривиальна (т. е. она является диагональной). Насколько известно авторам, ДУГ — единственный пример такого поведения.

Интересно отметить, что при

$$a' = -n - 1$$

возникают полиномиальные собственные функции, для которых формула для собственных значений упрощается до

$$\tilde{\lambda}_n = n + \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{4} n(n-1) + c'(1-n-c') \right) + O(t^{-2}).$$

Полиномиальные решения не могут возникать в точках пересечения, так как это привело бы к редукции двух линейно независимых решений к единственному решению и, таким образом, к вырождению фундаментальной системы решений дифференциального уравнения.

4.5.4. Численный алгоритм

Численные вычисления собственных значений и собственных функций без применения общей теории ЦДЗС не раз обсуждались в литературе (см. [13], [12], [72], [75], [76], [77]). Поэтому мы ограничимся здесь лишь кратким обзором.

Соответствующее решение (4.5.11) может быть разложено в сходящийся ряд в окрестности точки $\xi = 0$:

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \xi^k. \quad (4.5.15)$$

Коэффициенты (4.5.15) подчиняются разностному уравнению четвертого порядка типа Пуанкаре–Перрона с начальным условием:

$$\begin{aligned} g_{-1} = g_{-2} = 0, \\ g_0, g_1 \text{ произвольны,} \\ 2g_2 + 2(c-a-1)g_1 + (4(t\lambda - ta) + a(a+1) - 2ca)g_0 = 0, \\ 6g_3 + 4(c-a-1)g_2 \\ + \{-8t - 2(a+1) + 4(t\lambda - ta) + a(a+1) - 2ca\}g_1 \\ + 2(a(a+1) - ca)g_0 = 0, \\ \left(1 + \frac{\alpha_2}{k} + \frac{\beta_2}{k^2}\right)g_{k+2} + \left(\frac{\alpha_1}{k} + \frac{\beta_1}{k^2}\right)g_{k+1} + \left(-2 + \frac{\alpha_0}{k} + \frac{\beta_0}{k^2}\right)g_k \\ + \left(\frac{\alpha_{-1}}{k} + \frac{\beta_{-1}}{k^2}\right)g_{k-1} + \left(1 + \frac{\alpha_{-2}}{k} + \frac{\beta_{-2}}{k^2}\right)g_{k-2} = 0, \quad k \geq 2, \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

Коэффициенты в (4.5.16) задаются выражениями

$$\begin{aligned}\alpha_2 &:= 3, & \beta_2 &:= 2, \\ \alpha_1 &:= 2(c - a - 1), & \beta_1 &:= 2(c - a - 1), \\ \alpha_0 &:= -8t - 2a, & \beta_0 &:= 4(t\lambda - ta) + a(a + 1) - 2ca, \\ \alpha_{-1} &:= -2(c - a - 1), & \beta_{-1} &:= -2(a - 1)(c - a - 1), \\ \alpha_{-2} &:= 2a - 3, & \beta_{-2} &:= (a - 1)(a - 2),\end{aligned}$$

и соответствующий набор Биркгофа (см. [75], [77]) описывается формулами

$$s^{(m)}(k) = \rho_m^k \exp(\gamma_m k^{1/2}) k^{r_m} \left[1 + \frac{C_{m1}}{k^{1/2}} + \frac{C_{m2}}{k^{2/2}} + \dots \right], \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.5.17)$$

причем

$$\begin{aligned}\rho_m &= 1, & m &= 1, 2, \\ \rho_m &= -1, & m &= 3, 4, \\ \gamma_{m1} &= (-1)^m \sqrt{8t}, & m &= 1, 2, 3, 4, \\ r_1 &= r_2 = -1 + a - \frac{c}{2}, & r_3 &= r_4 = -2 - \frac{c}{2}.\end{aligned}$$

Общее решение (4.5.16) можно асимптотически искать в виде

$$g_k \sim \sum_{m=1}^4 L_m s^{(m)}(k) \quad (4.5.18)$$

с произвольными коэффициентами L_m , зависящими от всех параметров дифференциального уравнения за исключением индекса k .

Ряд (4.5.15) должен сходиться при $\xi = \pm 1$, когда $\tilde{\lambda}$ — собственное значение $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_n$. В этом случае асимптотическое поведение коэффициентов g_n должно быть описано экспоненциально убывающими решениями Биркгофа в (4.5.17), (4.5.18). Это приводит к условиям на собственные значения (см. [77])

$$L_2(\tilde{\lambda}; t, a', c') = L_4(\tilde{\lambda}; t, a', c') = 0. \quad (4.5.19)$$

Как следствие двух условий на собственные значения (4.5.19) получаем, что в нашей задаче должен быть набор из двух спектральных параметров $(\tilde{\lambda}; g_1)$. В то время как параметр g_0 в (4.5.16) может быть нормировкой обращен в единицу, параметр g_1 в (4.5.15) может играть роль второго спектрального параметра. (Можно в качестве второго спектрального параметра брать также отношение g_0 и g_1 .) В результате нашей процедуры мы должны найти множество нулей $(\tilde{\lambda}_n; g_{1n})$ в двухпараметрическом

пространстве $(\tilde{\lambda}; g_1)$. В последующем мы покажем, как привести эту задачу к приемлемой численной процедуре.

Сначала решаем разностное уравнение (4.5.16) с помощью *обратной рекурсии*, как это намечено в [77]. Используя начальные условия

$$g_{N-1}^{(1)} = 1, \quad g_N^{(1)} = g_{N+1}^{(1)} = g_{N+2}^{(1)} = 0$$

для достаточно больших значений N , мы вычисляем коэффициенты $g_{-1}^{(1)}, g_{-2}^{(1)}$, представляющие экспоненциально *убывающие* частные решения (4.5.16) при $k \rightarrow \infty$ (это всегда может быть реализовано независимо от стартовых значений в силу численной неустойчивости).

Второе линейно независимое частное решение $g_k^{(2)}$, $k = N, N-1, N-2, \dots, 2, 1, 0$, уравнения (4.5.16) вычисляется согласно упомянутой выше процедуре, которая начинается при линейно независимом начальном условии:

$$g_{N-1}^{(2)} = 0, \quad g_N^{(2)} = 1, \quad g_{N+1}^{(2)} = g_{N+2}^{(2)} = 0.$$

Общее решение (4.5.16), состоящее из частных решений $g_k^{(1)}$ и $g_k^{(2)}$, записывается в виде

$$g_{-1} = K_1 g_{-1}^{(1)} + K_2 g_{-1}^{(2)}, \quad g_{-2} = K_1 g_{-2}^{(1)} + K_2 g_{-2}^{(2)}$$

с двумя произвольными и k -независимыми константами K_1, K_2 .

Условия на собственные значения (4.5.19) приводятся к виду

$$g_{-1} = g_{-2} = 0. \quad (4.5.20)$$

Условия (4.5.20) следуют из

$$\det A := \begin{pmatrix} g_{-1}^{(1)} & g_{-1}^{(2)} \\ g_{-2}^{(1)} & g_{-2}^{(2)} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.5.21)$$

Нули этого определителя (в зависимости от переменной $\tilde{\lambda}$) дают собственные значения. При численном определении собственного значения это условие обращения в нуль определителя может быть проверено с помощью алгоритма Ньютона.

4.5.5. Результаты

Очевидно, мы можем рассматривать два соответствующих интервала изменения переменной z для исходного уравнения, а именно положительную (отмечаемую индексом “+”) и отрицательную (индекс “-”) вещественные полуоси. Согласно упомянутой выше симметрии мы получаем два сорта кривых собственных значений в координатах $(a', \tilde{\lambda})$ для фиксированных значений t, c' , имеющих $\tilde{\lambda}$ -координату своей осью симметрии.

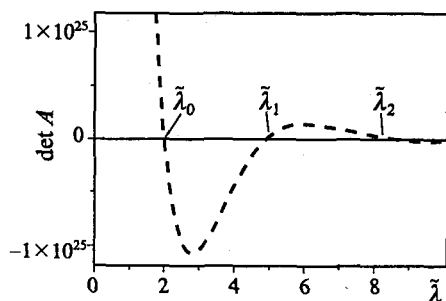


Рис. 4.20. Функция $\det A(\tilde{\lambda})$ при $a' = 1/2$, $c' = 0$, $N = 100$

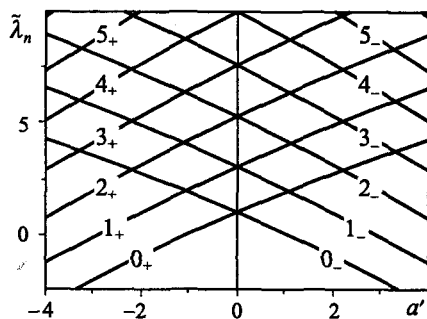


Рис. 4.21. Результаты асимптотических вычислений для кривых собственных значений ($t = 10$, $c' = 0$)

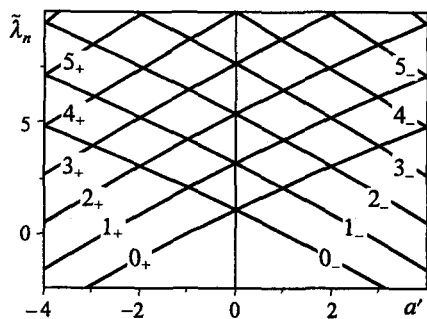


Рис. 4.22. Результаты вычислений для кривых собственных значений ($t = 10$, $c' = 0$)

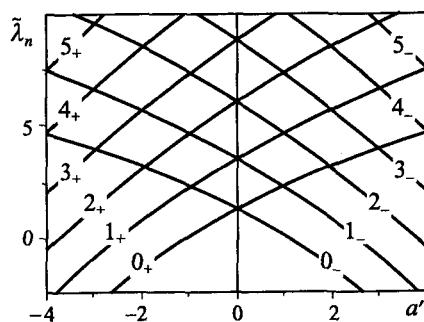


Рис. 4.23. Результаты вычислений для кривых собственных значений
($t = 3, c' = 0$)

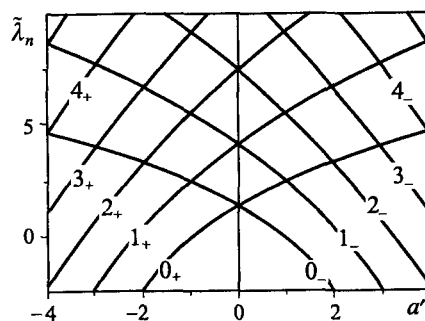


Рис. 4.24. Результаты вычислений для кривых собственных значений
($t = 1, c' = 0$)

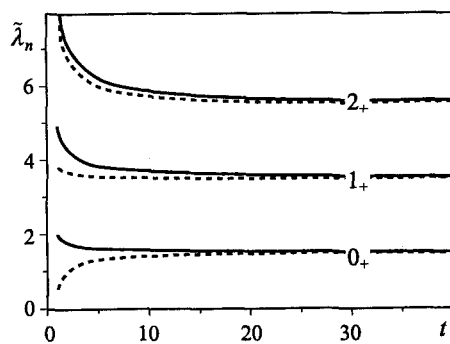


Рис. 4.25. Сравнение асимптотических и численных результатов в зависимости
от t при $a' = 1/2, c' = 0$

Как следует из разностного уравнения (4.5.16), пятичленное рекуррентное соотношение сводится к трехчленному, если $c = a + 1$ или $c' = a'/2$ соответственно. В этом случае между четными и нечетными величинами g_k в (4.5.16) отсутствует перемешивание.

Если рассматривать дифференциальное уравнение как уравнение Шредингера, его потенциал имеет вид двойной ямы, причем обе ямы разделены иррегулярной особой точкой, так что это простейший потенциал, который моделирует подавление туннелирования из одной ямы в другую. Параметр a в этом случае управляет асимметрией между двумя ямами. Если величина параметра a превосходит определенный порог (зависящий от других параметров), появляются собственные значения, лежащие ниже дна более высокой ямы. Следует отметить, что соответствующие собственные функции могут являться обобщенными полиномами.

Далее мы приводим несколько примеров численного определения нетривиальных собственных значений и собственных функций для дважды конфлюэнтного уравнения Гойна, сравнивая эти результаты с асимптотическими.

Рис. 4.20 иллюстрирует поведение определителя (4.5.21) в зависимости от спектрального параметра $\tilde{\lambda}$. Нули этой кривой соответствуют, как и отмечено, собственным значениям. На рис. 4.21–4.23 мы приводим шесть нижних кривых собственных значений $\tilde{\lambda}$ от a' для $c' = 0$ и для $t = 1$, $t = 3$ и $t = 10$. Значок “0” указывает на основное состояние; возбужденные состояния отмечаются значком, соответствующим их номеру n . Центральная двухточечная задача связи для отрицательной полуоси отмечается индексом “–”, положительная — индексом “+”. На рис. 4.24 изображены те же кривые для тех же значений параметров, что и на рис. 4.23, но полученные с помощью асимптотических вычислений. Эти результаты следует сравнить с графиками на рис. 4.22. На рис. 4.25 приведено сравнение асимптотических вычислений для больших значений t и численных расчетов в зависимости от t для фиксированных значений $a' = 1/2$, $c' = 0$ для трех самых нижних кривых собственных значений.

4.5.6. Заключение

Дважды конфлюэнтное уравнение Гойна имеет несколько особенностей; в частности, это дифференциальное уравнение имеет две иррегулярные особые точки, s -ранги которых равны 2. Если поместить эти особенности в нуль и на бесконечность, дифференциальное уравнение становится симметричным относительно инверсии при некоторых ограничениях на параметры. Обобщенное преобразование Яффе создает еще одну дополнительную регулярную особую точку на бесконечности. Такая форма

пригодна для решения центральных двухточечных задач связи на положительной и отрицательной полуосях. Коэффициенты разложений Яффе подчиняются иррегулярному разностному уравнению четвертого порядка типа Пуанкаре–Перрона. Мы показали, что точные уравнения для собственных значений для граничных задач могут быть получены с помощью решений Биркгофа этого разностного уравнения. Кроме того, мы представили численную процедуру, с помощью которой вычислили собственные значения в зависимости от параметров.

Важно подчеркнуть тот прозрачный факт, что в данном случае нет эффекта квазипересечения уровней собственных значений в зависимости от параметра асимметрии.

Результаты численных расчетов мы сравнили с асимптотическим исследованием двухточечной задачи связи. Асимптотические результаты основаны на условии квантования, которое было получено одним из авторов (С. Ю. Славяновым). Как видно из представленных рисунков, даже ведущие члены асимптотики хорошо согласуются с численными расчетами при значениях большого параметра, существенно меньших десяти. Собственные функции дважды конфлюэнтного уравнения Гойна не обнаруживают явления Стокса во всей комплексной плоскости аргумента в том смысле, что на линиях Стокса к существующим асимптотическим решениям не добавляются другие асимптотические решения. Насколько мы знаем, этот факт не был ранее известен ни для этого уравнения, ни для какого-нибудь другого вне гипергеометрического класса.

Кроме вышеупомянутой симметрии мы обнаружили еще одну, которая имеет место относительно двух из трех параметров. В результате кривые собственных значений для центральных двухточечных задач связи на положительной и отрицательной полуосях в зависимости от параметра асимметрии становятся симметричными относительно оси, соответствующей параметру энергии.

Мы обнаружили также конечное множество обобщенных полиномиальных решений при определенных комбинациях параметров. Эти полиномы не содержатся в наборе классических ортогональных полиномов и, по-видимому, не были ранее известны.

4.6. Диффузия в кристаллах, индуцированная излучением

Если кристалл облучается электронами, как, например, в случае электронной микроскопии, такие нарушения решетки, как вакансии и трещины, образуются в большей концентрации, чем при термодинамическом равновесии. Поверхности в такой ситуации служат естественным стоком,

так что в итоге неравновесное распределение релаксирует к равновесной концентрации.

Предположим, что кристалл находится под постоянным облучением, так что постоянно образуются дефекты решетки. На поверхностях происходит процесс уничтожения вакансий, возникающий в основном из-за рекомбинации вакансий и трещин. В результате наблюдается стационарное и пространственно неоднородное распределение вакансий и трещин, для которого выполняется стационарное условие

$$D_V C_V = D_I C_I = f(z)$$

где D — коэффициент диффузии, C — концентрация и z — расстояние до поверхности; индекс V означает вакансии, а I — трещины.

Вычисление $f(z)$ проведено для тонкой пластины в [107]:

$$f(z) = \lambda^2 \left\{ e + k^2 \operatorname{sn}^2 \left(\lambda \sqrt{\frac{\alpha}{6}} z + K(k); k \right) \right\}, \quad -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2}, \quad (4.6.1)$$

причем

$$f(z) = D_V C_V(z), \quad D_V = \text{const}.$$

Здесь sn — эллиптическая функция Якоби, обобщение обычного синуса, имеющая дополнительный параметр k , с помощью которого наша кривая может быть изменена. Другие параметры соотносятся с k следующим образом (см. [107 с. 162]):

$$e = -\frac{1+k^2}{3}, \quad \frac{1}{2} < k \leq 1; \quad \lambda^4 = \frac{9\theta}{\alpha(k^4 - k^2 + 1)}, \quad \theta, \alpha > 0,$$

где α связана с коэффициентами диффузии вакансий и трещин (ср. [107, с. 158, 161]) и θ — скорость рождения вакансий и трещин излучением.

Имеется следующее соотношение между этими параметрами:

$$1 + k^2 = 3k^2 \operatorname{sn}^2 \left(-\lambda \sqrt{\frac{\alpha}{6}} \frac{d}{2} + K(k); k \right).$$

Модуль $K(k)$ эллиптической функции Якоби определяется как

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 v)^{-1/2} dv.$$

Соответствующий график представлен на рис. 4.26.

Стационарное распределение в пластине (см. рис. 4.26) можно использовать для вывода стационарного распределения для полупространства

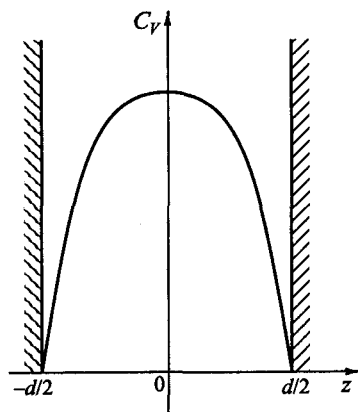


Рис. 4.26. Пространственное распределение вакансий в пластине

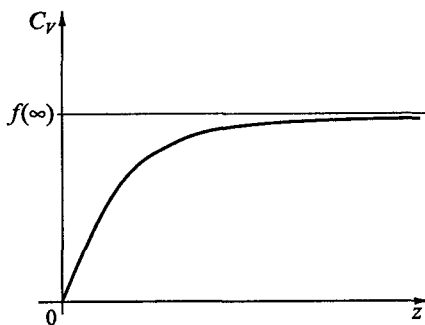


Рис. 4.27. Пространственное распределение вакансий

с помощью предельного перехода $k \rightarrow 1$ и соответствующего сдвига, помещающего поверхность в положение $z = 0$. В результате эллиптическая функция Якоби становится тригонометрической, именно гиперболическим тангенсом:

$$f(z) = 3\sqrt{\frac{\theta}{\alpha}} \left(\operatorname{th}^2(\xi + z_0) - \frac{2}{3} \right), \quad (4.6.2)$$

причем

$$\xi = \left(\frac{\theta\alpha}{4} \right)^{1/4} z, \quad z_0 = \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad f(\infty) = \sqrt{\frac{\theta}{\alpha}}.$$

Эта кривая приведена на рис. 4.27.

Предположим, что в нашем твердом теле имеются меченые атомы, которые могут диффундировать с помощью прыжков в вакансии, возникающие при облучении. На своем пути от поверхности полупространства внутрь твердого тела они будут “чувствовать” пространственно неоднородную концентрацию вакансий, что приведет к пространственно неоднородному коэффициенту диффузии. При этом уравнение диффузии для меченых атомов имеет пространственно неоднородный коэффициент диффузии. Тем самым поток диффузии меченых атомов $j_T(z, t)$ будет подчиняться соотношению:

$$j_T(z, t) = -D_T \text{grad } C_T(z, t), \quad (4.6.3)$$

где D_T — коэффициент диффузии и $C_T(z, t)$ — распределение меченых атомов. Как следует из (4.6.3), диффузия распределения меченых атомов может быть описана следующим линейным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(f(z) \frac{\partial C_T(z, t)}{\partial z} \right) = \frac{\partial C_T(z, t)}{\partial t}. \quad (4.6.4)$$

Предположим, что функция $f(z)$ в (4.6.4) имеет такие же свойства, как и в случае (4.6.2):

- $f(z)$ определена на $\mathbb{R}^+$;
- $f(z)$ монотонно увеличивается между $z = 0$ и $z = \infty$;
- $f(z)$ обращается в нуль при $z = 0$;
- $f(z)$ имеет конечное значение $f(\infty) < \infty$ при $z \rightarrow \infty$.

Тогда мы можем перейти в (4.6.4) к переменной f . Необходимые формулы при этом

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \sqrt{\frac{2\alpha}{3}} \sqrt{f(z) + 2f(\infty)} (f(\infty) - f(z)), \\ \left(\frac{df}{dz} \right)^2 &= \frac{2\alpha}{3} (f(z) + 2f(\infty)) (f(\infty) - f(z))^2, \\ \frac{d^2 f}{dz^2} &= -\alpha (f(\infty) + f(z)) (f(\infty) - f(z)), \end{aligned}$$

с помощью которых мы получаем после разделения переменных согласно

$$C_T(z, t) = C(z) e^{\rho t}$$

обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $C(z)$:

$$\frac{2\alpha}{3} f[f + 2f(\infty)] [f(\infty) - f] \frac{d^2 C}{df^2} + \left(\frac{2\alpha}{3} [f + 2f(\infty)] [f(\infty) - f]^2 - \alpha f [f(\infty)^2 - f^2]^2 \right) \frac{dC}{df} - \rho C = 0.$$

Растяжение

$$x := \frac{f}{f_\infty}$$

в итоге приводит нас к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 C}{dx^2} + \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1/2}{x+2} \right) \frac{dC}{dx} + \frac{\rho}{(x-1)^2 x (x+2)} C = 0. \quad (4.6.5)$$

Это уравнение Гойна, чей обобщенный P -символ имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & +1 & \infty \\ 0 & 0 & -i\sqrt{\rho/3} & 0 \\ 1/2 & 0 & +i\sqrt{\rho/3} & 3/2 \end{pmatrix} ; z.$$

Соответствующий интервал рассмотрения (по физическим соображениям) — отрезок $[0, 1]$. Граничное условие в точке нуль задается тем, что решение (4.6.5) должно быть там голоморфным, в то время как на бесконечности концентрация меченых атомов должна стремиться к нулю достаточно быстро, чтобы распределение меченых атомов было квадратично интегрируемым на $\mathbb{R}^+$.

Следует заметить, что если бы мы использовали распределение вакансий (4.6.1) вместо (4.6.2), то мы также получили бы фуксово дифференциальное уравнение — однако не с четырьмя, а с пятью особыми точками.

Уравнения класса Пенлеве

5.1. Свойство Пенлеве

5.1.1. Неподвижные и подвижные особые точки нелинейных ОДУ

Рассматривается нелинейное ОДУ n -го порядка

$$w^{(n)}(t) = G(w^{(n-1)}, \dots, w, t), \quad (5.1.1)$$

причем функция $G(w^{(n-1)}, \dots, w, t)$ имеет хорошие аналитические свойства относительно своих аргументов, которые мы определим ниже. Решения этого уравнения как функции независимой комплексной переменной t могут иметь особенности, определяемые только аналитическим поведением функции $G(w^{(n-1)}, \dots, w, t)$ (не учитывая начальные значения для решения). Эти особенности называются *неподвижными* особенностями*). В противоположность этим особенностям такие особые точки решений $w(t)$, положение которых нельзя предсказать по коэффициентам уравнения и которые меняют свое положение при изменении начальных данных для решения, называются *подвижными* особенностями. Подвижные особенности могут быть полюсами решения, существенной особенностью, точкой ветвления (алгебраической или трансцендентной).

Примеры. (1) Уравнение

$$w''(t) + w'^2(t) = 0 \quad (5.1.2)$$

имеет решение

$$w(t) = \ln(t + c_1) + c_2$$

Таким образом, уравнение (5.1.2) имеет подвижную особенность $t = -c_1$, которая является трансцендентной точкой ветвления.

(2) Уравнение

$$w''(t)w(t) - 2w'^2(t) = 0$$

*) Некоторые авторы называют также величины w и t , соответствующие неподвижной особенности, *сингулярными значениями*.

имеет решение

$$w(t) = \frac{c_2}{(t + c_1)},$$

с подвижной особой точкой $t = -c_1$, являющейся простым полюсом. $\square$

Линейные уравнения, которые можно рассматривать как специальный случай нелинейных уравнений, не имеют подвижных особенностей. Классификация их неподвижных особых точек была приведена в главе 1.

5.1.2. Свойство Пенлеве и уравнения Пенлеве

В ряде статей, начатых П. Пенлеве [91], [92], [93] и продолженных его учеником Гамбье [45], была решена следующая задача. Рассмотрим нелинейное ОДУ вида

$$q''(t) = F(t, q, q'), \quad (5.1.3)$$

где $F(t, q, q')$ является рациональной функцией своих аргументов*). Возникает вопрос: когда решения такого уравнения не имеют подвижных (зависящих от начальных данных) *критических точек*? Под критическими точками мы понимаем точки ветвления и существенно особые точки. В этом случае подвижными особыми точками могут быть только полюса решения. Отсутствие подвижных критических точек известно как *свойство Пенлеве*. В упомянутых выше публикациях были найдены все уравнения**) вида (5.1.1), обладающие свойством Пенлеве. Среди них имеется много уравнений, разрешимых в терминах элементарных или других известных функций (например, эллиптических функций). Однако несколько уравнений не могут быть приведены к известным уравнениям. Сейчас такие уравнения называют уравнениями Пенлеве и обозначают P^{VI} , P^V , P^{IV} , P^{III} , P^{II} , P^I ; их решения называют трансцендентами Пенлеве. Хотя метод исследования, предложенный Пенлеве, достаточно прост, на практике вычисления требуют разбора многих специальных случаев и ввиду этого весьма трудоемки. Так как оригинальные исследования имеют, по нашему мнению, более исторический, нежели практический интерес, мы приведем лишь список уравнений Пенлеве в дополнение к краткому доказательству того, что по крайней мере одно из них обладает свойством Пенлеве. Стандартный список уравнений Пенлеве включает

*) Обычно F считается полиномом второго порядка по q' .

**) Именно, 50 таких уравнений (см. [50]).

в себя следующие уравнения (см. [49], [47]):

$$P^{VI}: \quad q'' - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-t} \right) q'^2 + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{q-t} \right) q' - \frac{q(q-1)(q-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha + \frac{\beta t}{q^2} + \frac{\gamma(t-1)}{(q-1)^2} + \frac{\delta t(t-1)}{(q-t)^2} \right) = 0; \quad (5.1.4)$$

$$P^V: \quad q'' - \left(\frac{1}{2q} + \frac{1}{q-1} \right) q'^2 + \frac{1}{t} q' - \frac{(q-1)^2}{t^2} \left(\alpha q + \frac{\beta}{q} \right) - \frac{\gamma q}{t} - \frac{\delta q(q+1)}{q-1} = 0; \quad (5.1.5)$$

$$P^{IV}: \quad q'' - \frac{1}{2q} q'^2 - \frac{3}{2} q^3 - 4tq^2 - 2(t^2 - \alpha)q - \frac{\beta}{q} = 0; \quad (5.1.6)$$

$$P^{III}: \quad q'' - \frac{1}{q} q'^2 + \frac{1}{t} q' - \frac{1}{t} (\alpha q^2 + \beta) - \gamma q^3 - \frac{\delta}{q} = 0; \quad (5.1.7)$$

$$P^{II}: \quad q'' - q^3 - tq - \alpha = 0; \quad (5.1.8)$$

$$P^I: \quad q'' - 6q^2 - t = 0. \quad (5.1.9)$$

Выше мы использовали общепринятые обозначения для уравнений Пенлеве. Однако для наших целей необходимо сделать ряд дополнительных замечаний. Прежде всего мы осуществим преобразование в уравнении (5.1.7) от P^{III} к $\tilde{P}^{III}$

$$\tilde{P}^{III}: \quad q'' - \frac{1}{q} q'^2 + \frac{1}{t} q' - \frac{1}{t^2} (\alpha q^2 + \gamma q^3) - \frac{\beta}{t} - \frac{\delta}{q} = 0 \quad (5.1.10)$$

с помощью подстановки

$$t \mapsto \sqrt{t}, \quad q \mapsto \frac{q}{\sqrt{t}}.$$

Мы полагаем, что функция $\tilde{P}^{III}$ более удобна при проведении процедуры конфлюэнции. Она, конечно, обладает свойством Пенлеве.

Применяя растяжение

$$t \mapsto c_1 t, \quad q \mapsto c_2 q$$

с произвольными комплексными c_1, c_2 , возможно свести число свободных параметров в уравнении (5.1.5) до трех, а в уравнении (5.1.7) — как и в (5.1.10) — до двух*).

*) При условии, что некоторые из исходных коэффициентов не принимают нулевое значение ($\delta = 0$ в случае P^V и $\delta = 0, \gamma = 0$ в случае P^{III}).

При выделенных значениях параметров трансценденты Пенлеве могут быть выражены через специальные функции гипергеометрического класса. Для P^{II} это функция Эйри, для P^{III} — функции Бесселя, для P^{IV} — функции параболического цилиндра, для P^V — вырожденные гипергеометрические функции, для P^{VI} — гипергеометрические функции. Например, функция

$$q = (\ln(Ai(z)))'$$

является решением уравнения

$$q'' = q^3 - 2zq + 1.$$

Более подробно такие формулы приведены в [47].

Одним из основных преимуществ уравнений Пенлеве по сравнению с другими нелинейными уравнениями является тот факт, что кроме локальных решений для этих уравнений могут быть построены глобальные решения с предписанным асимптотическим поведением при определенных значениях комплексной независимой переменной. Этот факт следует из теории изомонодромных деформаций, которая недавно оказала существенное влияние на теорию специальных функций [53], [54], [55], [42], [51], [60].

С другой стороны, значение уравнений Пенлеве для физики связано с так называемой АРС-гипотезой (Абловиц, Рамани, Сегур) [1]. Эта гипотеза до сих пор не доказана. Однако все известные факты теории нелинейных уравнений в частных производных (УЧП) подтверждают ее справедливость.

Полностью интегрируемым нелинейным УЧП называют такое уравнение, решения которого могут быть построены с помощью метода обратной задачи. АРС-гипотеза состоит в предположении, что все одномерные редукции таких УЧП сводятся к уравнениям Пенлеве [1].

Пример. Рассмотрим уравнение Кортевега–де Вриза

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x.$$

При построении решения в виде $u(x, t) = f(s)$, где $s = x - ct$ и c — скорость распространения волны, мы получаем ОДУ

$$f''' - 6ff' - cf' = 0$$

или, после интегрирования,

$$f'' - 3f^2 - cf + k = 0.$$

Последнее уравнение совпадает с P^I после растяжения переменных. $\square$

Другим замечательным свойством интегрируемых УЧП является тот факт, что их решения могут иметь в качестве особых точек на подвижных многообразиях только полюса [126]. Это расширение свойства Пенлеве теории ОДУ.

5.1.3. Доказательство того, что подвижные особенности решений P^{II} являются полюсами

Здесь мы приведем набросок доказательства того, что все подвижные особенности трансцендент Пенлеве являются полюсами. Это доказательство было предложено Джоши и Крускалом [56]. Мы обсудим только уравнение P^{II} , поскольку все другие можно рассмотреть аналогичным образом. Предположим, что мы имеем подвижную особенность t_0 на комплексной t -плоскости. Рассмотрим круг с центром в t_0 , который не содержит других особенностей. Если t_0 — точка ветвления, круг имеет разрез — прямую линию, заканчивающуюся в точке t_0 . Предположим, что начальные значения поставлены в точке t_1 , которая лежит на границе круга. Если взять другую точку t_2 в качестве начальной точки, задача сводится к пересчету начального значения с помощью аналитического продолжения решения $q(t)$ вдоль подходящего контура на римановой поверхности от t_2 к t_1 . Метод, предложенный в [56], основан на интегрировании доминантных членов и последовательном итерировании соответствующего интегрального уравнения.

Условие Липшица (см. [31]) нарушается, если $q \rightarrow \infty$ в (5.1.8). Это так называемое сингулярное значение решения. Значит, доминантные члены в P^{II} , как следует из (5.1.8), это

$$q'' - q^3.$$

Для того чтобы их проинтегрировать, требуется интегрирующий множитель q' . В результате возникает интегральное уравнение

$$\frac{q'^2}{2} - \frac{q^4}{4} - t \frac{q^2}{2} + \int_{t_1}^t q^2 dt - at + c_1 = 0. \quad (5.1.11)$$

Здесь константа c_1 фиксирована начальными условиями и внеинтегральным членом. Разделив уравнение (5.1.11) на q^4 , взяв квадратный корень и проинтегрировав, получим

$$\frac{1}{q} = \pm \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{q^2} + \frac{2(at - c_1)}{q^4} - \frac{2}{q^4} \int_{t_1}^t q^2 dt \right)^{1/2} dt + c_2 \quad (5.1.12)$$

в качестве интегрального уравнения, соответствующего (5.1.11). Если в качестве нижнего предела интегрирования в (5.1.12) взять t_0 и c_2

положить равным нулю, мы получим решение, которое удовлетворяет соотношению $q^{-1}|_{t \rightarrow t_0} \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{q} = \pm \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{q^2} + \frac{2(\alpha t - c_1)}{q^4} - \frac{2}{q^4} \int_{t_1}^t q^2 dt \right)^{1/2} dt. \quad (5.1.13)$$

Последовательные итерации уравнения (5.1.13) доказывают, что функция $u(t) = 1/q(t)$ является регулярной функцией в окрестности точки $t = t_0$. Именно, выполняется соотношение

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t - t_0)^k, \quad g_1 \neq 0. \quad (5.1.14)$$

Отсюда следует, что точка t_0 является простым полюсом трансценденты Пенлеве $q(t)$. Подобное рассмотрение других уравнений Пенлеве показывает, что трансценденты Пенлеве могут иметь в качестве подвижных особых точек либо простые полюса, либо полюса второго порядка.

5.2. Гамильтонова структура

5.2.1. Уравнения класса Гойна и уравнения Пенлеве

Со времени публикации работы Мальмквиста [83] известно, что уравнения Пенлеве имеют гамильтонову структуру, т. е. их можно рассматривать как уравнения движения (см. также [89], [49]). В 1996 г. одним из авторов данной книги было обнаружено [115], что уравнения Пенлеве являются уравнениями классического движения (уравнениями Лагранжа–Эйлера) квантовых систем, описываемых различными уравнениями Гойна. В данном разделе мы положим этот факт в основу теории уравнений Пенлеве.

Сначала мы обсудим общий подход к гамильтоновой структуре уравнений Пенлеве. Каждое уравнение класса Гойна в своей канонической форме может быть представлено в виде

$$\frac{1}{f(t)} [P_0(z, t)D^2 + P_1(z, t)D + P_2(z, t)]y(z) = \lambda y(z). \quad (5.2.1)$$

Здесь $P_0(z, t)$, $P_1(z, t)$, $P_2(z, t)$ — полиномы по переменной z порядка не выше третьего, t — скейлинговый параметр, λ — аксессуарный параметр. Если с z и D ассоциировать квантовые переменные $\hat{q}$, $\hat{p}$ ($\hat{q}$ — координата, $\hat{p}$ — импульс) в уравнении (5.2.1), оно приобретает гамильтонову

структуру и может быть переписано в виде

$$H(\hat{q}, \hat{p}, t)y = \lambda y, \quad (5.2.2)$$

где функция H — гамильтониан, адиабатически зависящий от параметра t , которому можно придать смысл переменной времени, λ — энергия. Соответствующий гамильтониан в классической механике квадратичен по классическому импульсу p :

$$H(q, p, t) = \frac{1}{f(t)} [P_0(q, t)p^2 + P_1(q, t)p + P_2(q, t)]. \quad (5.2.3)$$

К этому гамильтониану может быть применено преобразование Лежандра, причем скорость q_t берется вместо импульса p в качестве независимой переменной. Соответствующий лагранжиан $\mathcal{L}(q, q_t, t)$ выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L}(q, q_t, t) = \frac{f(t)}{4P_0(q, t)} \left(q_t - \frac{P_1(q, t)}{f(t)} \right)^2 - \frac{P_2(q, t)}{f(t)}. \quad (5.2.4)$$

Выпишем уравнения Эйлера–Лагранжа для этого лагранжиана:

$$\begin{aligned} q_{tt} = & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\ln P_0(q, t)) q_t^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t} (\ln f(t)) - \frac{\partial}{\partial t} (\ln P_0(q, t)) \right) q_t \\ & + \frac{P_0(q, t)}{f^2(t)} \left(\frac{\partial}{\partial q} \frac{P_1^2(q, t)}{2P_0(q, t)} + f(t) \frac{\partial}{\partial t} \frac{P_1(q, t)}{P_0(q, t)} - 2f(t) \frac{\partial P_2(q, t)}{\partial q} \right). \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Как будет показано в следующем разделе, каждому типу уравнений Гойна соответствует уравнение (5.2.5), которое совпадает с одним из уравнений Пенлеве.

Специальным образом выбранные решения уравнений Пенлеве образуют класс специальных функций нелинейной математической физики — так называемых трансцендент Пенлеве. В этом смысле они расширяют класс специальных функций математической физики для нелинейных явлений.

5.2.2. Альтернативная классификация уравнений Пенлеве

В этом разделе будет доказана следующая основная теорема.

Теорема 5.1. *Каждый тип уравнений класса Гойна порождает уравнение класса Пенлеве в том же смысле, как уравнение Шредингера соответствует уравнениям движения классической динамики. Справедливо и обратное утверждение: каждое уравнение Пенлеве порождено соответствующим уравнением Гойна.* $\square$

Для того чтобы доказать эту теорему, нам необходимо получить уравнения (5.2.5) для отдельных уравнений Гойна и сравнить этот набор уравнений с общепринятыми уравнениями Пенлеве (5.1.4)–(5.1.10). При этом мы будем называть уравнения в форме (5.2.5) уравнениями Пенлеве, но обозначать их иным образом, чем общепринятые уравнения Пенлеве.

Классификация типов уравнений Гойна, основанная на процедуре конфлюэнции, была представлена в главе 3. Если на первом шаге опустить редуцированные конфлюэнтные уравнения, можно различать пять типов уравнений:

- 1) само уравнение Гойна (УГ) — фуксово уравнение с четырьмя регулярными особыми точками;
- 2) однократно конфлюэнтное уравнение Гойна (КУГ) — уравнение с двумя регулярными особыми точками и одной иррегулярной особой точкой на бесконечности;
- 3) биконфлюэнтное уравнение Гойна (БУГ) — уравнение с одной регулярной особой точкой и одной иррегулярной особой точкой на бесконечности, возникающей в результате слияния трех регулярных особых точек;
- 4) дважды конфлюэнтное уравнение Гойна (ДУГ) — уравнение с двумя иррегулярными особыми точками: одной — в нуле и другой — на бесконечности;
- 5) триконфлюэнтное уравнение Гойна (ТУГ) — уравнение с одной иррегулярной особой точкой на бесконечности, возникающей в результате слияния четырех регулярных особых точек.

Этим уравнениям соответствуют следующие гамильтонианы.

УГ:

$$H^{\{1,1,1;1\}}(q, p, t) = -\frac{1}{t(t-1)} \left(q(q-1)(q-t)p^2 + [c(q-1)(q-t) + dq(q-t) + (a+b+1-c-d)q(q-1)]p + abq \right). \quad (5.2.6)$$

КУГ:

$$H^{\{1,1;2\}}(q, p, t) = -\frac{1}{t} \left(q(q-1)p^2 + [-tq(q-1) + c(q-1) + dq]p - atq \right). \quad (5.2.7)$$

БУГ:

$$H^{\{1;3\}}(q, p, t) = -(qp^2 + (-q(q+t) + c)p - aq). \quad (5.2.8)$$

ДУГ:

$$H^{\{2;2\}}(q, p, t) = -\frac{1}{t} (q^2 p^2 + (-q^2 - t + cq)p - aq). \quad (5.2.9)$$

ТУГ:

$$H^{\{4\}}(q, p, t) = -(p^2 + (-q^2 - t)p - aq). \quad (5.2.10)$$

Обращаясь к классической динамике согласно уравнениям (5.2.3)–(5.2.5), мы получаем пять уравнений, которые, следуя терминологии, принятой в теории уравнений Гойна, можно называть соответственно уравнением Пенлеве (УП), конфлюэнтным уравнением Пенлеве (КУП), биконфлюэнтным уравнением Пенлеве (БУП), дважды конфлюэнтным уравнением Пенлеве (ДУП) и триконфлюэнтным уравнением Пенлеве (ТУП). В тех же обозначениях параметров мы получаем пять типов уравнений Пенлеве.

УП:

$$\begin{aligned} P^{\{1,1,1;1\}}: \quad q_{tt} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q-t} \right) q_t^2 \\ & - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{q-t} \right) q_t + \frac{q(q-1)(q-t)}{t^2(t-1)^2} \\ & \times \left(\frac{(a+b+1)^2}{2} - 2ab - \frac{c^2 t}{2q^2} \right. \\ & \left. + \frac{d^2(t-1)}{2(q-1)^2} + \frac{(1-(c+d-a-b)^2)t(t-1)}{(q-t)^2} \right). \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

КУП:

$$\begin{aligned} P^{\{1,1;2\}}: \quad q_{tt} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} \right) q_t^2 - \frac{1}{t} q_t + \frac{1}{t^2} \left(\frac{c^2(q-1)}{2q} - \frac{d^2 q}{2(q-1)} \right) \\ & + \frac{q(q-1)(2q-1)}{2} - \frac{q(q-1)}{t} (1+c+d-2a). \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

БУП:

$$P^{\{1;3\}}: \quad q_{tt} = \frac{q_t^2}{2q} + \frac{3}{2} q^3 + 2t q^2 + \left(\frac{t^2}{2} + 2a - c \right) q - \frac{c^2}{2q}. \quad (5.2.13)$$

ДУП:

$$P^{\{2;2\}}: \quad q_{tt} = \frac{q_t^2}{q} - \frac{q_t}{t} + \frac{1}{q} + \frac{q^2(2a-c) + q^3}{t^2} + \frac{1-c}{t}. \quad (5.2.14)$$

ТУП:

$$P^{\{4\}}: \quad q_{tt} = 2q^3 + 2tq + 2a. \quad (5.2.15)$$

Следующий список гамильтонианов включает в себя те из них, что отвечают редуцированным конфлюэнтным уравнениям Гойна с полужелыми s -рангами иррегулярных особых точек (пять отдельных уравнений).

РКУГ:

$$H^{\{1,1;3/2\}}(q, p, t, c, d) = -\frac{1}{t} [q(q-1)p^2 + (c(q-1) + dq)p - tq]. \quad (5.2.16)$$

РБУГ:

$$H^{\{1;5/2\}}(q, p, t, c) = -(qp^2 + cp - tq - q^2). \quad (5.2.17)$$

РДУГ:

$$H^{\{3/2;2\}}(q, p, t, a) = -\frac{1}{t} (q^2 p^2 - q^2 p - aq - \frac{t}{q}). \quad (5.2.18)$$

ДРДУГ:

$$H^{\{3/2;3/2\}}(q, p, t) = -\frac{1}{t} (q^2 p^2 - q - \frac{t}{q}). \quad (5.2.19)$$

РТУГ:

$$H^{\{7/2\}}(q, p, t) = -(p^2 + (-q^3 - tq)). \quad (5.2.20)$$

Этим гамильтонианам соответствуют следующие уравнения Пенлеве. Первое из них можно назвать редуцированным конфлюэнтным уравнением Пенлеве — РКУП:

$$P^{\{1,1;3/2\}}: \quad q_{tt} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} \right) q_t^2 - \frac{1}{t} q_t + \frac{1}{t^2} \left(\frac{c^2(q-1)}{2q} - \frac{d^2 q}{2(q-1)} \right) + \frac{2q(q-1)}{t}. \quad (5.2.21)$$

Затем мы получаем редуцированное биконфлюэнтное уравнение Пенлеве — РБУП:

$$P^{\{1;5/2\}}: \quad q_{tt} = \frac{q_t^2}{2q} - \frac{c^2}{2q} + 4q^2 - 2tq. \quad (5.2.22)$$

Далее следует редуцированное дважды конфлюэнтное уравнение Пенлеве — РДУП:

$$P^{\{3/2;2\}}: \quad q_{tt} = \frac{q_t^2}{q} - \frac{q_t}{t} + \frac{2aq^2 + q^3}{t^2} - \frac{2}{t}. \quad (5.2.23)$$

Следующее уравнение может быть названо дважды редуцированным дважды конфлюэнтным уравнением Пенлеве — ДРДУП:

$$P^{\{3/2;3/2\}}: \quad q_{tt} = \frac{q_t^2}{q} - \frac{q_t}{t} + \frac{2q^2}{t^2} - \frac{2}{t}. \quad (5.2.24)$$

Последнее уравнение — редуцированное триконфлюэнтное уравнение Пенлеве — РТУП:

$$P\{7/2\}: \quad q_{tt} = 6q^2 + t. \quad (5.2.25)$$

Итак, мы получили новый список уравнений Пенлеве; для того чтобы доказать теорему 5.1, следует сравнить этот список с общепринятыми уравнениями Пенлеве (5.1.4)–(5.1.10).

Уравнение $P\{1,1,1;1\}$ совпадает с P^{VI} , если мы примем следующие соотношения между коэффициентами:

$$\alpha = \frac{(a+b+1)^2}{2} - 2ab, \quad \beta = -\frac{c^2}{2},$$

$$\gamma = \frac{d^2}{2}, \quad \delta = 1 - (a+b-c-d)^2.$$

Для уравнения Пенлеве P^V задача несколько сложнее. Во-первых, с помощью подстановки

$$y \mapsto \frac{y}{y-1},$$

переставляющей сингулярные значения $y = 1$ и $y = \infty$, мы сведем уравнение (5.1.5) к новому уравнению $\tilde{P}^V$:

$$\tilde{P}^V: \quad y_{tt} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) y_t^2 - \frac{1}{t} q_t - \frac{1}{t^2} \left(\frac{\beta(q-1)}{2q} - \frac{\alpha q}{2(q-1)} \right) - \delta q(q-1)(2q-1) - \gamma \frac{q(q-1)}{t}. \quad (5.2.26)$$

Предположим, что δ не равен нулю. Преобразование растяжения $t \mapsto \kappa t$ приводит к новому уравнению с

$$\alpha \mapsto \alpha, \quad \beta \mapsto \beta, \quad \gamma \mapsto \kappa \gamma, \quad \delta \mapsto \kappa^2 \delta.$$

Смысл этого преобразования — в приведении параметра δ в (5.2.26) масштабированием к значению единица. В этом случае $\tilde{P}^V$ совпадает с $P\{1,1;2\}$, если мы положим

$$\alpha = \frac{d^2}{2}, \quad \beta = -\frac{c^2}{2}, \quad \gamma = 1 + c + d - 2a.$$

С другой стороны, если $\delta = 0$, мы можем взять $\gamma = -2$. В этом случае $\tilde{P}^V$ совпадает с $P\{1,1;3/2\}$.

Рассмотрим теперь P^{IV} . После растяжения $q \mapsto \sqrt{2}q$, $t \mapsto t/\sqrt{2}$ мы получим из P^{IV} новое уравнение

$$q_{tt} = \frac{q_t^2}{2q} + \frac{3}{2} q^3 + 2tq^2 + \left(\frac{t^2}{2} - \alpha \right) q + \frac{\beta}{4q}, \quad (5.2.27)$$

которое совпадает с $P\{1;3\}$ при $\alpha = c - 2a$, $\beta = -2c^2$. Что можно сказать относительно уравнения $P\{1;5/2\}$? Ответ дается следующей леммой.

Лемма 5.1. Уравнение $P^{\{1;5/2\}}$ можно привести контактным преобразованием к уравнению P^{II} .

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную линейную систему

$$y_t = c - 2yz, \quad z_t = z^2 - 2y + t. \quad (5.2.28)$$

Если функцию $z(x)$ исключить из уравнения (5.2.28), функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (5.2.22). С другой стороны, функция $z(x)$ удовлетворяет P^{II} , т.е. уравнению (5.2.15). $\square$

Рассматривая уравнение Пенлеве P^{III} , мы начинаем прямо с (5.1.10). Одновременное растяжение $q \mapsto hq$, $t \mapsto \kappa t$ приводит к уравнению

$$q_{tt} = \frac{q_t^2}{q} - \frac{q_t}{t} + \frac{1}{t^2} (h\alpha q^2 + h^2 \gamma q^3) + \frac{\kappa\beta}{ht} + \frac{\kappa^2\delta}{h^2 q}. \quad (5.2.29)$$

Если $\gamma \neq 0$ и $\delta \neq 0$, выбирая $h^2 = \gamma^{-1}$ и $\kappa = h\delta^{-1/2}$ и полагая $h\alpha = 2a - c$, $\kappa\beta/h = 1 - c$, мы приходим к $P^{\{2;2\}}$. Уравнение (5.2.29) также справедливо при $\delta = 0$. Однако при условиях $h\alpha = 2a$ и $\kappa\beta/h = -2$ оно совпадает с $P^{\{3/2;2\}}$. Наконец, можно положить $\delta = 0$, $\gamma = 0$, $h\alpha = 2$ и $\kappa\beta/h = -2$ в (5.2.29), и мы приходим к уравнению $P^{\{3/2;3/2\}}$.

В случае уравнения P^{II} с помощью растяжения

$$t \mapsto 2^{1/3}t, \quad q \mapsto 2^{-1/3}q$$

мы получаем из (5.1.8) уравнение Пенлеве $P^{\{4\}}$.

Уравнение $P^{\{7/2\}}$ совпадает с P^I .

Мы установили взаимно однозначное соответствие между двумя списками уравнений Пенлеве. Таким образом, доказательство теоремы 5.1 завершено. $\square$

5.2.3. Линеаризация уравнений Пенлеве

Рассмотрим возможные линеаризации уравнений Пенлеве. С этой целью мы дополнительно предположим, что $c = 0$. Линеаризация при этом будет означать, что мы берем линейную часть функции $F(q, q_t, t)$ в переменных q, q_t :

$$F(q, q_t, t)|_{c=0} \sim \frac{\partial F(q, q_t, t)|_{c=0}}{\partial q_t} \bigg|_{\substack{q=0, \\ q_t=0}} q_t + \frac{\partial F(q, q_t, t)|_{c=0}}{\partial q} \bigg|_{\substack{q=0, \\ q_t=0}} q. \quad (5.2.30)$$

Линеаризация самого уравнения Пенлеве $P^{\{1,1,1;1\}}$ приводит к уравнению

$$q_{tt} = -\frac{q_t}{t-1} + \left(\frac{(a+b+1)^2 - 4ab}{2(t-1)^2} - \frac{(1-(d-a-b)^2)}{t^2} + \frac{-(a+b+1)^2 + 4ab + d^2 + 2(1-(d-a-b)^2)}{2t(t-1)} \right) q, \quad (5.2.31)$$

эквивалентному гипергеометрическому уравнению. Линеаризация уравнения $P^{1,1;2}$ приводит к уравнению

$$q_{tt} = -\frac{q_t}{t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1+d-2a}{t} + \frac{d^2}{2t^2} \right) q, \quad (5.2.32)$$

эквивалентному конфлюэнтному гипергеометрическому уравнению. Линеаризация уравнения $P^{1,1;3/2}$ приводит к уравнению

$$q_{tt} = -\frac{q_t}{t} + \left(\frac{d^2}{2t^2} + \frac{2}{t} \right) q, \quad (5.2.33)$$

эквивалентному редуцированному конфлюэнтному гипергеометрическому уравнению. Линеаризация уравнения $P^{1;3}$ приводит к уравнению

$$q_{tt} = \left(\frac{t^2}{2} + 2a \right) q, \quad (5.2.34)$$

эквивалентному биконфлюэнтному гипергеометрическому уравнению.

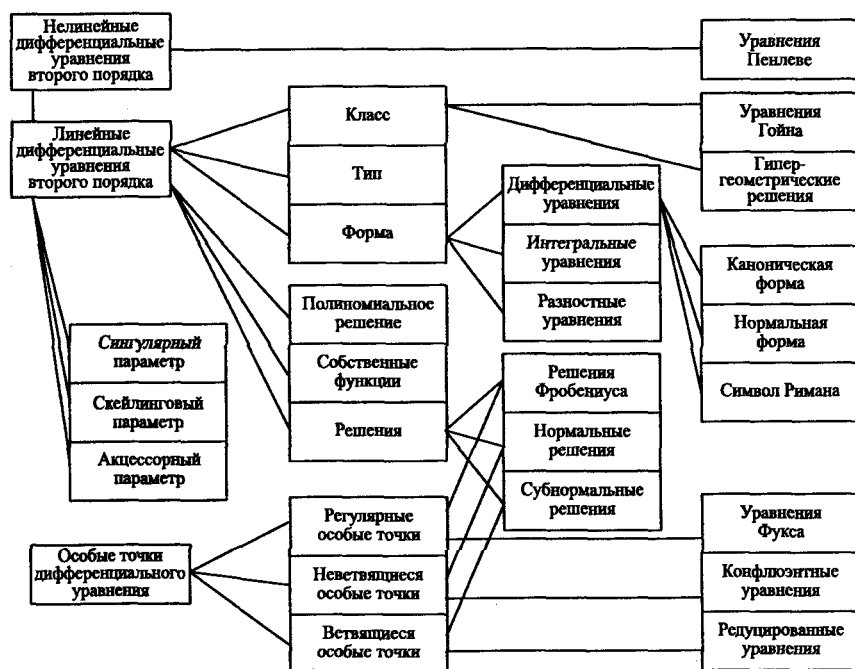


Рис. 5.1. Соотношения между свойствами линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и их особыми точками [116]

И наконец, линейаризация уравнений $P\{;4\}$ и $P\{1;5/2\}$ приводит к уравнению, эквивалентному редуцированному биконфлюэнтному гипергеометрическому уравнению

$$q_{II} = \pm 2tq. \quad (5.2.35)$$

Уравнения Пенлеве $P\{2;2\}$, $P\{3/2;2\}$, $P\{3/2;3/2\}$, $P\{;7/2\}$ не могут быть линейаризованы в предложенном смысле.

Обсуждавшиеся соотношения между классом уравнений Гойна, классом уравнений Пенлеве и гипергеометрическим классом уравнений могут быть представлены с помощью структурных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \{1, 1, 1, 1\} & \rightarrow & \{1, 1, 1\} \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & P^{VI} & \end{array}$$

Здесь горизонтальная стрелка обозначает появление дополнительной особенности; стрелка, направленная вниз, указывает на переход от уравнения Шредингера к уравнению Эйлера–Лагранжа; а стрелка, повернутая вверх, соответствует линейаризации.

Более подробно эти соотношения представлены на рис. 5.1 и 5.2.

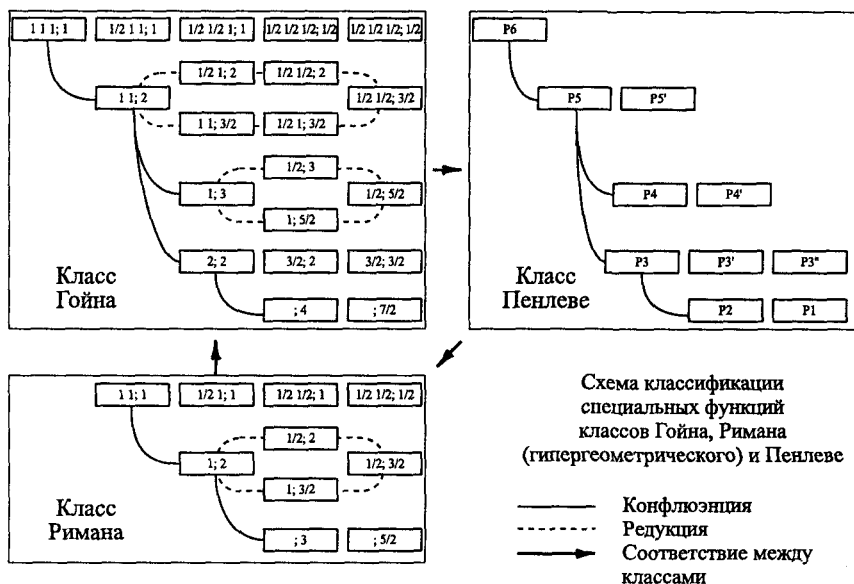


Рис. 5.2. Соотношения между дифференциальными уравнениями классов Гойна, Пенлеве и Римана

5.3. Изомонодромные деформации

Почти с самого начала изучения уравнений Пенлеве интерес к ним вызывался не только свойством Пенлеве их решений; они были также связаны с некоторыми изомонодромными свойствами линейных дифференциальных уравнений [105], [44]. Здесь мы представим некоторые из этих идей, но, как мы полагаем, в новом свете. Исходным моментом является для нас деформация уравнений класса Гойна добавлением ложной особой точки. Уравнения Пенлеве возникают при этом как условие того, что при изменении параметров, определяющих добавленную особую точку, данные монодромии линейного дифференциального уравнения не изменяются. При этом соответствующий список уравнений Пенлеве совпадает с уравнениями (5.2.11)–(5.2.13), (5.2.21)–(5.2.25).

Рассмотрим фуксово дифференциальное уравнение с пятью особыми точками, одна из которых, $z = q$, играет роль ложной особой точки

$$D^2y(z) + \left(\frac{c}{z} + \frac{d}{z-1} + \frac{e}{z-t} - \frac{1}{z-q} \right) Dy(z) + \left(\frac{ab}{z(z-1)} + \frac{ht(t-1)}{z(z-1)(z-t)} + \frac{pq(q-1)}{z(z-1)(z-q)} \right) y(z) = 0. \quad (5.3.1)$$

Назовем это уравнение *деформированным уравнением Гойна*. Оно отличается от уравнения Гойна двумя дополнительными членами, имеющими простой полюс при $z = q$: один (с фиксированным вычетом) — перед первой производной и второй (с произвольным вычетом) — перед самой функцией. Уравнение имеет следующую ОСР:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t & q & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1-c & 1-d & 1-e & 2 & b \end{pmatrix} ; z \quad (5.3.2)$$

Выполняется фуксово соотношение

$$c + d + e = a + b + 3. \quad (5.3.3)$$

Несколько необычное введение параметров p и h оправдывается простой соотношения

$$h = \operatorname{Res}_{z=t} \frac{ht(t-1)}{z(z-1)(z-t)}, \quad (5.3.4)$$

$$p = \operatorname{Res}_{z=q} \frac{pq(q-1)}{z(z-1)(z-q)},$$

так что h и p являются вычетами двух членов в уравнении (5.3.1) в особых точках $z = t$ и $z = q$ соответственно. Свойство точки $z = q$ быть ложной

особенностью выполняется в том случае, когда уравнение (5.3.1) имеет локальное решение в виде ряда Тейлора

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z-q)^k, \quad g_0 = 1 \quad (5.3.5)$$

с произвольным g_2 . Для простоты мы обозначим коэффициенты уравнения (5.3.1) как $P(z)$, $Q(z)$, $f(t)$ и $\rho(z)$:

$$P(z) = \frac{c}{z} + \frac{d}{z-1} + \frac{e}{z-t}, \quad Q(z) = \frac{ab}{z(z-1)},$$

$$f(t) = t(t-1), \quad \rho(z) = z(z-1)(z-t),$$

так что уравнение имеет вид

$$D^2y(z) + \left(P(z) - \frac{1}{z-q}\right)Dy(z) + \left(Q(z) + \frac{hf(t)}{\rho(z)} + \frac{pq(q-1)}{z(z-1)(z-q)}\right)y(z) = 0. \quad (5.3.6)$$

Подставляя разложение (5.3.5) в уравнение (5.3.6), мы приходим к рекуррентным уравнениям для коэффициентов g_1 , g_2 разложения

$$-g_1 + p = 0,$$

$$2(1-1)g_2 + (p_0 + q_{-1})g_1 + q_0 = 0, \quad (5.3.7)$$

...

Здесь $p_k, q_k, k = -1, 0$, — коэффициенты разложения Тейлора функций $P(z), Q(z)$ относительно точки $z = q$ соответственно:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z-q)^k, \quad Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(z-q)^k.$$

Их величины напрямую вычисляются из уравнения (5.3.1):

$$p_0 = \frac{c}{q} + \frac{d}{q-1} + \frac{e}{q-t},$$

$$q_0 = \frac{ab}{q(q-1)} - p\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1}\right) + \frac{ht(t-1)}{q(q-1)(q-t)}. \quad (5.3.8)$$

Для того чтобы прояснить эти выкладки, мы перепишем формулы (5.3.8) в терминах уравнения (5.3.6):

$$p_0 = P(q),$$

$$q_0 = Q(q) - p\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1}\right) + \frac{hf(t)}{\rho(q)}. \quad (5.3.9)$$

В этих терминах уравнения (5.3.7) принимают вид

$$\begin{aligned} g_1 &= p, \\ 0 \cdot g_2 + (P(q) + p)p + Q(q) - p\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1}\right) + \frac{hf(t)}{\rho(q)} &= 0, \quad (5.3.10) \\ &\dots \end{aligned}$$

Так как множитель перед g_2 равен нулю, мы приходим к необходимому условию для того, чтобы точка $z = q$ была ложной особенностью. Это условие приводит к следующему соотношению между параметрами h, p, q, t :

$$h(q, p, t) = -\frac{\rho(q)}{f(t)} \left[p^2 + \left(P(q) - \frac{1}{q} - \frac{1}{q-1} \right) p + Q(q) \right] \quad (5.3.11)$$

или, более точно,

$$\begin{aligned} h(q, p, t) &= \frac{1}{t(t-1)} [q(q-1)(q-t)p^2 + ((c-1)(q-1)(q-t) \\ &\quad + (d-1)q(q-t) + eq(q-1))p + ab(q-t)]. \quad (5.3.12) \end{aligned}$$

Очевидно, что функция $h(q, p, t)$ совпадает с гамильтонианом, соответствующим уравнению Гойна (см. (5.2.6)), с точностью до сдвига параметров c и d на единицу:

$$h(q, p, t, a, b, c, d, e) = H^{\{1,1,1;1\}}(q, p, t, a, b, c-1, d-1, e).$$

Объяснение этому — в том факте, что параметры a, b, c, d, e удовлетворяют разным условиям Фукса в случае уравнения Гойна и деформированного уравнения Гойна.

Предположим, что $h(p, q, t)$ — гамильтониан для определенной одномерной классической динамической системы, где p — импульс частицы, q — координата и t — время*). Классический момент частицы определяется уравнениями Гамильтона

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p}. \quad (5.3.13)$$

С другой стороны, уравнения (5.3.11)–(5.3.13) можно рассматривать как условия изомонодрмии. Очевидно, что вычет в точке $z = t$, так же как и вычеты в точках $z = 0, z = 1$, не зависит от поведения функций $p(t), q(t)$ при условиях (5.3.13).

*) Во многих практических приложениях параметр t имеет другой физический смысл. К примеру, в задаче двух кулоновских центров t — расстояние между центрами.

Уравнение (5.3.13) эквивалентно — после преобразования Лежандра и преобразования от импульса p и координаты q к скорости $\dot{q}$ и координате q — уравнению движения Ньютона, которое совпадает с уравнением Пенлеве P^{VI} , как это было показано в предыдущем разделе.

Появление сдвига по параметрам и несколько необычное выражение для деформирующегося члена (5.3.4) связаны с фуксовой структурой уравнения Гойна.

В общей ситуации произвольного уравнения, принадлежащего классу Гойна, кроме самого уравнения Гойна, мы записываем уравнение в виде

$$D^2y(z) + P(z)Dy(z) + \left(Q(z) + \frac{f(t)h}{\rho(z)}\right)y(z) = 0. \quad (5.3.14)$$

Деформированное уравнение с дополнительной ложной особой точкой в точке $z = q$ записывается в виде

$$D^2y(z) + \left(P(z) - \frac{1}{z-q}\right)Dy(z) + \left(Q(z) + \frac{f(t)h}{\rho(z)} + \frac{p}{z-q}\right)y(z) = 0. \quad (5.3.15)$$

Функция $f(t)$ прослеживается по конфлюэнции. Ее выбор для различных уравнений уже обсуждался в предыдущем разделе.

Условие, что уравнение (5.3.15) имеет локальное решение вида (5.3.5), ведет к уравнениям для первых двух коэффициентов

$$\begin{aligned} -g_1 + p &= 0, \\ (P(q) + p)p + \left(Q(q) + \frac{f(t)h}{\rho(q)}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Первое из этих уравнений можно интерпретировать следующим образом: оператор дифференцирования действует подобно умножению на классический импульс p . Второе из этих уравнений можно интерпретировать как подстановку независимой переменной z вместо классической координаты q в уравнение класса Гойна. Как условие совместимости мы получаем следующее соотношение между h, p, q, t :

$$h(p, q, t) = -\frac{1}{t}\rho(q)(p^2 + P(q)p + Q(q)). \quad (5.3.17)$$

Это опять классический гамильтониан, соответствующий уравнению класса Гойна. Условия, сохраняющие деформацию, имеют вид гамильтоновой системы (5.3.13). В каждом случае эта система эквивалентна соответствующему уравнению Ньютона, которое имеет второй порядок и оказывается одним из уравнений Пенлеве, уже описанным в предыдущем разделе. В итоге мы приходим к следующей теореме.

Теорема 5.2. Каждое деформированное уравнение класса Гойна с добавленной ложной особой точкой соответствует (с помощью условия, сохраняющего деформацию) уравнению Пенлеве. Каждое уравнение Пенлеве можно рассматривать как условие изомонодромной деформации для уравнений, принадлежащих классу деформированных уравнений Гойна. $\square$

Представленное выше изложение инспирировано работой Р. Фукса [44]. Альтернативная возможность связана с возможностью использовать вместо ОДУ второго порядка систему уравнений первого порядка. Применять такую систему в связи с уравнениями Пенлеве предложил Шлезингер [105]. Мы дадим здесь набросок подхода, основанного на системе Шлезингера.

Если мы возьмем, к примеру, P^VI , соответствующая система Шлезингера имеет вид

$$\vec{\Psi}_z = A(z, t)\vec{\Psi}, \quad (5.3.18)$$

где $\vec{\Psi}$ — двумерный вектор и $A(z, t)$ — матрица

$$A(z, t) = \frac{A^0}{z} + \frac{A^1}{z-1} + \frac{A^t}{z-t},$$

отражающая структуру особенностей уравнения (5.3.18). Здесь A^0, A^1, A^t — матрицы с постоянными коэффициентами. Собственные значения этих матриц являются характеристическими показателями в соответствующей особой точке (одна из которых находится в нуле). Возникает, однако, весьма громоздкая задача их точного вычисления, которая связана с параметризацией матриц A^0, A^1, A^t с помощью параметров a, b, c, d, e, t . Предположим также, что на бесконечности матрица $A(z, t)$ упрощается до диагональной матрицы A^∞ :

$$A(z, t)|_{z \rightarrow \infty} = -\frac{A^\infty}{z},$$

$$A^\infty = -(A^0 + A^1 + A^t), \quad A^\infty = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Совместно с системой (5.3.16) изучается другая система:

$$\vec{\Psi}_t = B\vec{\Psi}, \quad B := \frac{A^t}{t-z}. \quad (5.3.19)$$

Для $\vec{\Psi}$ должны быть поставлены определенные условия. Именно, при $z \rightarrow \infty$ фундаментальная система решений ведет себя как

$$\Psi(z, t) \rightarrow \begin{pmatrix} z^{x_1} & 0 \\ 0 & z^{x_2} \end{pmatrix}.$$

Тогда условие для деформаций, сохраняющих монодромию (изомонодромных), выглядит следующим образом:

$$A_t - B_z + [A, B] = 0. \quad (5.3.20)$$

Это уравнение совпадает с P^{VI} . Ложная особенность для уравнения второго порядка “спрятана” в системе (5.3.18). Она соответствует нулю в недиагональном матричном элементе матрицы $A(z, t)$. Матрицы A, B называются парой Лакса для соответствующих уравнений Пенлеве. Аналогичным образом можно рассмотреть и все другие уравнения Пенлеве. Авторы данной книги не выводят здесь асимптотические формулы для трансцендент Пенлеве с помощью условия изомонодромной деформации. Читатель может обратиться к работе [51] и более современным публикациям.

Приложение А

Гамма-функция и родственные функции

А.1. Гамма-функция

В этом разделе мы кратко изложим основы теории гамма-функции и введем некоторые другие функции, которые могут быть выражены в терминах гамма-функции, именно бета-функцию и символ Похгаммера.

Исходным является разностное уравнение

$$y(z+1) - zy(z) = 0, \quad (\text{A.1.1})$$

которое рассматривается на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Разностное уравнение для функции $y(z)$ может быть преобразовано к дифференциальному уравнению для функции $\varphi(t)$ с помощью преобразования Меллина [10]

$$y(z) = \int_{\gamma} t^{-z-1} \varphi(t) dt, \quad (\text{A.1.2})$$

где γ — подходящий контур на $\mathbb{C}$. Если мы подставим выражение (A.1.2) в уравнение (A.1.1) и проинтегрируем его по частям, полагая, что внесинтегральные члены пропадают, мы получим

$$y(z+1) - zy(z) = \int_{\gamma} t^{-z} (t^{-2} \varphi(t) + \varphi'(t)) dt = 0.$$

Это приводит к следующему уравнению для функции $\varphi(t)$:

$$\varphi'(t) + t^{-2} \varphi(t) = 0. \quad (\text{A.1.3})$$

Оно имеет решение $\varphi(t) = C \exp(-t^{-1})$, где C — произвольная константа. Если в качестве контура γ взять положительную полуось и сделать в интеграле (A.1.2) подстановку $t := \xi^{-1}$, мы получим в качестве итога такое представление для $y(z)$ *):

$$y(z) = C \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi.$$

*) Существуют и другие решения разностного уравнения (A.1.1). В частности, $y(z) \mapsto y(z)w(z)$ с периодической функцией $w(z)$: $w(z+1) = w(z)$.

Произвольная константа впереди интеграла может быть фиксирована с помощью нормировки $\gamma(1) = 1$. Это приводит к определению гамма-функции, обозначаемой $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi. \quad (\text{A.1.4})$$

Этот интеграл был впервые введен и изучен Эйлером.

Пример. Пусть $z = n + 1$. Тогда

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^n d\xi = n!. \quad (\text{A.1.5})$$

Это означает, что гамма-функция является обобщением факториала. Это объясняет также определение $0! = \Gamma(1) = 1$. $\square$

Так как интеграл в правой части уравнения (A.1.4) равномерно сходится в правой полуплоскости, гамма-функция является там голоморфной функцией. Точное доказательство этого факта приведено во многих учебниках по специальным функциям (см., например, [90]).

Для того чтобы изучить поведение гамма-функции в левой полуплоскости, мы расщепим интеграл в правой части (A.1.4) на два слагаемых, именно

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi + \int_1^{\infty} e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi.$$

Обозначая второй интеграл I_2 и раскладывая первый интеграл в ряд на основе разложения экспоненты в ряд, мы приходим к модифицированному представлению гамма-функции

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + I_2. \quad (\text{A.1.6})$$

Так как интеграл I_2 является целой функцией на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ряд (A.1.6) определяет согласно теореме Вейерштрасса [15] мероморфную функцию, гамма-функция является мероморфной функцией в $\mathbb{C}$ с простыми полюсами в неположительных целых точках $z = 0, -1, -2, \dots$ с вычетами

$$\text{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (\text{A.1.7})$$

Для практических приложений часто необходимо асимптотическое поведение гамма-функции. Предположим, что z вещественно и положитель-

но. После подстановки $z \mapsto z + 1$, $\xi := tz$ интеграл (А.1.4) преобразуется к виду:

$$\Gamma(z + 1) = z^{z-1} \int_0^{\infty} e^{z(\ln t - t)} dt.$$

Седловая точка для функции под знаком интеграла ищется как корень t_s уравнения

$$(\ln t - t)' = 0 \Rightarrow t_s = 1.$$

С помощью формул метода перевала [90] мы приходим к асимптотической формуле Стирлинга для гамма-функции

$$\Gamma(z + 1) = \left(\frac{z}{e}\right)^z \sqrt{2\pi z} [1 + O(z^{-1})]. \quad (\text{А.1.8})$$

Хотя формула (А.1.8) получена для вещественных z , она справедлива в секторе $|\arg z| < \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Дальнейшее продолжение соотношения (А.1.8) ограничено упомянутыми выше полюсами гамма-функции.

А.2. Бета-функция

В терминах гамма-функции может быть выражено несколько полезных интегралов. Например, рассмотрим

$$\Gamma(\mu)\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\xi-\eta} \xi^{\mu-1} \eta^{\nu-1} d\xi d\eta.$$

После подстановки $\xi := r \cos^2 \varphi$, $\eta := r \sin^2 \varphi$ мы получаем

$$\Gamma(\mu)\Gamma(\nu) = 2 \int_0^{\infty} e^{-r} r^{\mu+\nu-1} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2\mu-1} \varphi \sin^{2\nu-1} \varphi d\varphi.$$

Еще одна подстановка $\cos^2 \varphi := \xi$ приводит нас к окончательному результату

$$\Gamma(\mu)\Gamma(\nu) = \Gamma(\mu + \nu) \int_0^1 \xi^{\mu-1} (1 - \xi)^{\nu-1} d\xi. \quad (\text{А.2.1})$$

Интеграл в правой части уравнения (А.2.1) называется бета-функцией и обозначается $B(\mu, \nu)$. Следовательно,

$$B(\mu, \nu) := \int_0^1 \xi^{\mu-1} (1 - \xi)^{\nu-1} d\xi = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)}. \quad (\text{А.2.2})$$

При определенных значениях аргументов μ , ν этот интеграл может быть вычислен явным образом. Например, пусть $\nu = 1 - \mu$, где $0 < \mu < 1$. Из уравнения (А.2.2) следует, что

$$B(\mu, 1 - \mu) = \Gamma(\mu)\Gamma(1 - \mu) = \int_0^1 \xi^{\mu-1}(1 - \xi)^{-\mu} d\xi. \quad (\text{А.2.3})$$

После подстановки $\xi := \cos^2 \varphi$ в уравнение (А.2.3) и дальнейшей замены $\operatorname{ctg}^2 \varphi = t$ мы находим

$$\int_0^1 \xi^{\mu-1}(1 - \xi)^{-\mu} d\xi = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^{2\mu-1} \varphi d\varphi = \int_0^\infty \frac{t^{\mu-1}}{1+t} dt := I. \quad (\text{А.2.4})$$

Интеграл I может быть вычислен с помощью вычетов. Предположим, что контур ω состоит из интервала $[0, R]$ на верхнем берегу разреза $[0, \infty]$, окружности радиуса R и интервала $[R, 0]$ на нижнем берегу разреза. Если $R \rightarrow \infty$, интеграл по окружности исчезает при наших предположениях на значения μ , так что

$$\oint_{\omega} \frac{t^{\mu-1}}{1+t} dt = I(1 - e^{2\pi\mu i}) = 2\pi i \operatorname{Res}_{t=e^{\pi i}} \frac{t^{\mu-1}}{1+t} = -2\pi i e^{\pi\mu i}. \quad (\text{А.2.5})$$

Как следствие уравнения (А.2.5) мы получаем итоговый результат, который обычно называется *формулой отражения* для гамма-функции:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (\text{А.2.6})$$

Хотя этот результат был выведен при определенных ограничениях на аргумент, формула отражения может быть распространена с помощью аналитического продолжения на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ за исключением целых значений.

Пример. Пусть $z = 1/2$. Из (А.2.6) следует, что

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Так как при положительных z гамма-функция положительна, находим:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (\text{А.2.7})$$

□

Другая формула для гамма-функции, называемая *формулой удвоения*, также может быть получена с помощью бета-функции. Рассмотрим равные аргументы для бета-функции:

$$B(\mu, \mu) := \int_0^1 \xi^{\mu-1} (1-\xi)^{\mu-1} d\xi = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)}.$$

После некоторых замен переменных в интеграле имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \xi^{\mu-1} (1-\xi)^{\mu-1} d\xi &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{2\mu-1} (\cos \varphi)^{2\mu-1} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2^{2\mu-2}} \int_0^{\pi/2} (\sin 2\varphi)^{2\mu-1} d\varphi = \frac{1}{2^{2\mu-2}} \int_0^{\pi/2} (\sin \omega)^{2\mu-1} d\omega = \\ &= \frac{1}{2^{2\mu-1}} \int_0^1 \xi^{\mu-1} (1-\xi)^{1/2} d\xi = \frac{1}{2^{2\mu-1}} B\left(\mu, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

и в итоге получаем формулу удвоения для гамма-функции:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{A.2.8})$$

Пример. Пусть $z = n + 1/2$, где n — целое положительное число. Тогда

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!! \sqrt{\pi}}{2^n}. \quad (\text{A.2.9})$$

□

А.3. Символ Похгаммера

С гамма-функцией связана еще одна функция:

$$(z)_n = z(z+1) \dots (z+n-1) = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}, \quad (\text{A.3.1})$$

которая называется *символом Похгаммера*.*) В более современных обозначениях символ Похгаммера записывают как $(z)_n = z^{\underline{n}}$ (см., например, [46]). В данной книге в основном использовалось обозначение (A.3.1). Второе обозначение подчеркивает тот факт, что функция $z^{\underline{n}}$

*) Кроме того, она известна как *факториал Похгаммера*. Обозначение в формуле (A.3.1) используется также для факториала Жордана: $(z)_n = \Gamma(z+1)/\Gamma(z-n+1)$.

играет ту же роль для разностных операторов, что и экспонента для дифференциальных операторов.

Предположим, что E — оператор сдвига: $Ef(z) = f(z+1)$, I — единичный оператор: $If(z) = f(z)$ и Δ — разностный оператор: $\Delta f(z) = (E - I)f(z) = f(z+1) - f(z)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta z^n &= (z+1)z \dots (z-n+2) - z \dots (z-n+1) \\ &= (z+1-z+n-1)z \dots (z-n+1) = nz^{n-1}.\end{aligned}\quad (\text{A.3.2})$$

Дальнейшее применение разностного оператора дает:

$$\Delta^n z^n = n!. \quad (\text{A.3.3})$$

Функция z^n может быть выражена в виде полинома от переменной z с помощью так называемых чисел Стирлинга C_n^j :

$$z^n = \sum_{j=0}^n C_n^j z^j. \quad (\text{A.3.4})$$

Приложение Б

Мультипольные матричные элементы

Б.1. Введение

Пусть $\psi_n(z)$, λ_n — собственная функция и собственное значение спектральной задачи на всей вещественной оси для одномерного уравнения Шредингера

$$(-L + \lambda)\psi = \frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + (\lambda - q(z))\psi(z) = 0, \quad (\text{Б.1.1})$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \psi(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z) = 0.$$

Выполняется следующее условие ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(z) \psi_m(z) dz = \delta_{nm},$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Функция $q(z)$ играет роль потенциала в уравнении Шредингера, она предполагается полиномом четного порядка, удовлетворяющим условию $q(z)|_{z \rightarrow \pm\infty} \rightarrow \infty$. Под мультипольным матричным элементом мы понимаем

$$V_{nm}^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} z^k \psi_n(z) \psi_m(z) dz \quad (\text{Б.1.2})$$

с положительными целыми k . При $n = m$ матричные элементы называются диагональными, в ином случае — недиагональными. Наша цель — получить рекуррентные соотношения для матричных элементов с различными номерами k и фиксированными n и m .

Многие уравнения, обсуждавшиеся в данной книге, могут быть записаны в более общей форме с членом с первой производной, именно

$$(-L + \lambda)\psi = \frac{d}{dz} \left(r(z) \frac{d}{dz} \psi(z) \right) + (\lambda - q(z))\psi(z) = 0. \quad (\text{Б.1.3})$$

И в данном случае можно рассмотреть матричные элементы собственных функций уравнения (Б.1.3). Ниже мы обсуждаем только более простой вариант уравнения (Б.1.1).

Б.2. Вспомогательное дифференциальное уравнение

В основе нашего метода лежат уравнения для квадратов собственных функций и произведений собственных функций, относящихся к различным собственным значениям.

Наша первая задача — доказать несколько лемм.

Лемма Б.1. Квадрат $w_{nn}(z) = (\psi_n(z))^2$ собственной функции (Б.1.1) удовлетворяет уравнению третьего порядка

$$w_{nn}'''(z) + 4(\lambda_n - q)w_{nn}'(z) - 2q'w_{nn}(z) = 0. \quad (\text{Б.2.1})$$

Доказательство. Производные $w(z)$ равны (индексы для краткости мы опускаем):

$$w' = 2\psi\psi', \quad w'' = 2(\psi\psi'' + (\psi')^2),$$

$$w''' = 2(\psi\psi''' + 3\psi'\psi'').$$

С другой стороны мы получаем из уравнения (Б.1.1)

$$2\psi''\psi' = (q - \lambda)w', \quad \psi''\psi = (q - \lambda)w,$$

$$2\psi'''\psi + 3(\lambda - q)w' = w''.$$

Исключая из этих равенств функцию ψ , приходим к (Б.2.1). □

Рассмотрим уравнения

$$y''(z) - f(z)y(z) = 0, \quad u''(z) - g(z)u(z) = 0. \quad (\text{Б.2.2})$$

Функция $v(z)$ определена как произведение решений этих уравнений $v := yu$. Согласно этому определению, справедливы следующие соотношения:

$$v' = y'u + yu', \quad v'' = y''u + yu'' + 2y'u',$$

$$v''' = y'''u + yu''' + 3(y''u' + y'u''),$$

$$v'''' = y''''u + yu'''' + 4(y'''u' + y'u''') + 6y''u''.$$

С другой стороны, из уравнения (Б.2.2) следует:

$$y''u = fv, \quad yu'' = gv, \quad y''u'' = fgv, \quad 2y'u' = v'' - (f + g)v,$$

$$y'''u + y''u' = f'v + fv', \quad yu''' + y'u'' = g'v + gv',$$

$$y''''u + 2y'''u' + y''u'' = f''v + 2f'v' + fv'',$$

$$yu'''' + 2y'u''' + y''u'' = g''v + 2g'v' + gv''.$$

Исключая из этих равенств функции y и u , приходим к

$$\begin{aligned} v''''(z) - 2y'''u' - 2y'u''' - (f + g)v''(z) \\ - 2(f' + g')v'(z) - 4fgv(z) - (f'' + g'')v(z) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.2.3})$$

Имеются дополнительные соотношения:

$$y''u' = fy'u', \quad y'u'' = gy'u,$$

$$y'''u' = fy'u' + f'y'u', \quad y'u''' = gy'u' + g'y'u.$$

Пусть $f = q - \lambda_n$ и $g = q - \lambda_m$, тогда $f' = g'$, $f'' = g''$. В итоге приходим к следующему утверждению.

Лемма Б.2. Произведение собственных функций $v_{nm}(z) = \psi_n(z)\psi_m(z)$ в (Б.1.1) удовлетворяет уравнению четвертого порядка

$$\begin{aligned} v''''_{nm}(z) + 2(\lambda_n + \lambda_m - 2q)v''_{nm}(z) - 6q'v'_{nm}(z) \\ + ((\lambda_n - \lambda_m)^2 - 2q'')v_{nm}(z) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.2.4})$$

□

Следует отметить, что с помощью дифференцирования уравнения (Б.2.1) мы получаем уравнение (Б.2.4) при $n = m$. В других терминах уравнения (Б.2.4), (Б.2.1) могут быть символически записаны как

$$T_4(z, D)v_{nm}(z) = 0, \quad T_3(z, D)w_{nm}(z) = 0, \quad D = \frac{d}{dz}, \quad (\text{Б.2.5})$$

где $T_m(z, D)$ — полином по обеим переменным z, D , причем по D это полином или третьего, или четвертого порядка.

Рассмотрим теперь решения уравнения (Б.1.3). Следующее утверждение является обобщением леммы Б.1.

Лемма Б.3. Квадрат $w_{nn}(z) = (\psi_n(z))^2$ собственной функции, отвечающей уравнению (Б.1.3), удовлетворяет уравнению третьего порядка

$$w_{nn}'''(z) + 3r'w_{nn}''(z) + \left(4(\lambda_n - q) + r'' + \frac{r'^2}{r}\right)w_{nn}'(z) + \left(-2q' + \frac{2(\lambda_n - q)r'}{r}\right)w_{nn}(z) = 0, \quad (\text{Б.2.6})$$

тогда как произведение собственных функций $v_{nm}(z) = (\psi_n(z)\psi_m(z))^2$ удовлетворяет уравнению четвертого порядка (аналогу уравнения (Б.2.4))

$$rv_{nm}'''' + 5r'v_{nm}''' + \left(2\Sigma\lambda - 4q + 4r'' + \frac{4r'^2}{r}\right)v_{nm}'' + \left(-6q' - \frac{3(2q - \Sigma\lambda)r'}{r} + r''' + \frac{3r'r''}{r}\right)v_{nm}' + \left(\frac{(\delta\lambda)^2}{r} - 2q'' - \frac{4q'r'}{r} - \frac{(2q - \Sigma\lambda)r''}{r}\right)v_{nm} = 0, \quad (\text{Б.2.7})$$

где мы использовали обозначение

$$\Sigma\lambda = \lambda_n + \lambda_m,$$

$$\delta\lambda = \lambda_n - \lambda_m. \quad \square$$

Вывод уравнений (Б.2.6)–(Б.2.7) требует выкладок, подобных тем, что были проведены в леммах Б.1 и Б.2, но более громоздких. Оба уравнения могут быть легко преобразованы к виду (Б.2.5).

Б.3. Интегральное преобразование

Для функций $w_{nn}(z)$, $v_{nm}(z)$ можно определить аналог преобразования Лапласа

$$w_{nn}(z), v_{nm}(z) \mapsto u_{nn}(p),$$

$$u_{nm}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-pz)v_{nm}(z)dz, \quad (\text{Б.3.1})$$

$$u_{nn}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-pz)w_{nn}(z)dz.$$

Сходимость интегралов гарантируется поведением собственных функций $\psi_n(z)$ на бесконечности. С другой стороны, согласно свойствам преобразования Лапласа, которые справедливы и в нашем случае, функция $u_{nm}(p)$ должна удовлетворять уравнению

$$T(D_p, -p)u_{nm}(p) = 0. \quad (\text{Б.3.2})$$

Уравнение (Б.3.2) имеет при $p = 0$ регулярную особую точку. Нам необходимо его решение, голоморфное в этой точке. Между этими фактами нет противоречия. Разъясним это на примерах.

Коэффициенты разложения Тейлора функции $u_{nm}(p)$ в действительности являются матричными элементами согласно

$$u_{nm}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_{nm}^{(k)}(-p)^k}{k!} := \sum_{k=0}^{\infty} g_k p^k. \quad (\text{Б.3.3})$$

Наш основной результат может быть сформулирован так.

Теорема Б.1. Матричные элементы собственных функций $V_{nm}^{(k)}$, соответствующих одномерному уравнению Шредингера (Б.1.1) определяются с точностью до тривиальных множителей $(-1)^k k!$ коэффициентами разложения Тейлора подходящего решения (Б.3.2), регулярного в нуле. $\square$

Доказательство уже получено выше.

Сформулированная теорема, будучи общим руководством к действию, оставляет много вопросов без ответа. В самом деле, функция $u_{nm}(p)$ голоморфна в нуле, однако она может иметь в этой точке нуль высокого порядка. Этот факт влияет на вычисления матричных элементов. Другая проблема практических вычислений связана с начальными условиями для решения рекуррентной системы. Чтобы решить эти проблемы, следует разобрать случай “общего положения” и также обсудить ряд конкретных специальных примеров потенциала $q(z)$. В этом разделе мы рассмотрим случай “общего положения”.

Лемма Б.4 Уравнение (Б.3.2) в случае $n \neq m$ может быть записано в виде

$$\left(p^2 q(D_p) + \frac{1}{2} p q'(D_p) - \frac{1}{4} ((\delta\lambda)^2 + 2\Sigma\lambda p^2 + p^4) \right) u_{nm}(p) = 0. \quad (\text{Б.3.4})$$

Доказательство. Преобразуя известное уравнение (Б.2.3) в (Б.3.2) и применяя равенства

$$q(D_p)p^2u = p^2q(D_p)u + 2pq'(D_p)u + q''(D_p)u,$$

$$q'(D_p)pu = pq'(D_p)u + q''(D_p)u,$$

мы приходим к уравнению (Б.3.4). $\square$

Уравнение (Б.3.4) имеет порядок $2N$, что совпадает со степенью полинома $q(z)$. Точка $p = 0$ является регулярной особой точкой уравнения (Б.3.4), и ей соответствуют характеристические показатели $\rho = 0, 1, \dots, 2N-1$. Однако нам необходимо только голоморфное в нуле решение. Более того, его разложение Тейлора должно начинаться с линейного по p члена.

$$u_{nm}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k p^{k+1}. \quad (\text{Б.3.5})$$

Пусть функция $q(D)$ будет

$$q'(D) = \sum_{j=0}^{2N-1} a_j D^j. \quad (\text{Б.3.6})$$

Выпишем первое уравнение, с которого начинается рекуррентная процедура вычисления коэффициентов g_k :

$$\sum_{j=1}^{2N-1} a_j j! g_{j-1} - \frac{1}{4} (\delta\lambda)^2 g_0 = 0 \quad (\text{Б.3.7})$$

и которое линейно связывает $g_0, \dots, g_{2N-2}$. Следовательно, при фиксированных m, n , вычислив численно или асимптотически собственные значения λ_n, λ_m и несколько “основных” матричных элементов (в нашем случае “общего положения” $g_0, \dots, g_{2N-3}$), возможно вычислить другие матричные элементы по соответствующей рекуррентной процедуре, с “начала”. С другой стороны, зная асимптотическое убывание g_k при больших значениях k , можно реализовать эти выкладки “с конца”. В этом случае нам необходимы только собственные значения.

Аналогом уравнения (Б.3.4) при $n = m$ является уравнение

$$\left(pq(D_p) + \frac{1}{2} q'(D_p) - \lambda p + \frac{p^3}{4} \right) u_{nn}(p) = 0. \quad (\text{Б.3.8})$$

Здесь первый член разложения Тейлора функции $u_{nn}(p)$ всегда фиксирован, так как начальный матричный элемент является нормировкой функции $\psi(z)$:

$$u_{nn}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k p^k. \quad (\text{Б.3.9})$$

Исследование рекуррентной процедуры для g_k подобно ее аналогу для случая уравнения (Б.3.4).

Б.4. Гармонический осциллятор

Первый пример связан с биконфлюэнтным гипергеометрическим уравнением. Задача для гармонического осциллятора рассматривается на интервале $]-\infty, \infty[$:

$$\begin{aligned} \psi''(z) + (\lambda - z^2)\psi(z) &= 0, \\ |\psi(-\infty)| < \infty, \quad |\psi(\infty)| < \infty. \end{aligned} \quad (\text{Б.4.1})$$

Собственные функции ψ_n и собственные значения (энергии) λ_n в данном случае известны:

$$\psi_n(z) = e^{-z^2/2} H_n(z), \quad \lambda_n = 2n + 1.$$

Здесь $H_n(z)$ — полиномы Эрмита. Уравнение третьего порядка для квадратов собственных функций выглядит следующим образом:

$$w_{nn}'''(z) + 4(\lambda - z^2)w_{nn}'(z) - 4zw_{nn}(z) = 0. \quad (\text{Б.4.2})$$

Выпишем также уравнение четвертого порядка для произведений собственных функций

$$\begin{aligned} v_{nm}''''(z) + 2(\lambda_n + \lambda_m - 2z^2)v_{nm}''(z) \\ - 12zw_{nm}'(z) + ((\lambda_n - \lambda_m)^2 - 4)v_{nm}(z) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.4.3})$$

Матричные элементы для уравнения (Б.4.2) рассматривались в работе [112]. Здесь мы обсудим уравнение (Б.4.3). Пусть $n - m = l$. Перейдем к уравнению для функции u_{nm}

$$p^2 u_{nm}''(p) + p u_{nm}'(p) - l^2 u_{nm}(p) - \left((n+m+1)p^2 + \frac{p^4}{4} \right) u_{nm}(p) = 0. \quad (\text{Б.4.4})$$

Это уравнение второго порядка с регулярной особой точкой в нуле и иррегулярной особой точкой на бесконечности. Оно является специализацией

биконфлюэнтного уравнения Гойна [100]. Характеристические показатели в нуле равны $\pm l$. Регулярное в нуле решение ищется в виде:

$$u_{nm}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(nm)} p^{l+k}. \quad (\text{Б.4.5})$$

В результате подстановки (Б.4.5) в уравнение (Б.4.4) получаем трехчленное соотношение для коэффициентов c_k :

$$\begin{aligned} 4(l+1)c_2 - (n+m+1)c_0 &= 0, \\ k(k+2l)c_k - (n+m+1)c_{k-2} - \frac{1}{4}c_{k-4} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.4.6})$$

Рекуррентное соотношение (Б.4.6) показывает, что все матричные элементы при фиксированных n, m выражаются в терминах первого ненулевого матричного элемента.

Б.5. Ангармонический осциллятор

В данном случае основное уравнение является специализацией триконфлюэнтного уравнения Гойна. Рассмотрим одну из возможных моделей ангармонического осциллятора на $]-\infty, \infty[$:

$$\begin{aligned} \psi''(z) + (\lambda - t^2(z^2 + 1)^2)\psi(z) &= 0, \\ |\psi(-\infty)| < \infty, \quad |\psi(+\infty)| < \infty. \end{aligned} \quad (\text{Б.5.1})$$

Уравнение (Б.5.1) является специализацией триконфлюэнтного уравнения Гойна (см. раздел 3.1). Растяжением независимой переменной $z \mapsto zt^{-1/2}$ уравнение (Б.5.1) может быть преобразовано к более привычному для физиков виду:

$$\psi''(z) + (\bar{\lambda} - (2z^2 + t^{-1}z^4))\psi(z) = 0, \quad (\text{Б.5.2})$$

где $\bar{\lambda} = \lambda t^{-1} - t$. Пусть $l = n - m$. Тогда четность функции под знаком интеграла в определении матричных элементов равна $k + l$. Если $k + l$ — нечетное целое, соответствующий матричный элемент равен нулю. Уравнение (Б.2.4) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\begin{aligned} v_{nm}'''(z) + 2(\Sigma\lambda - 2t^2(z^2 + 1)^2)v_{nm}''(z) - t^2z(z^2 + 1)v_{nm}'(z) \\ + ((\delta\lambda)^2 - t^2z^2 - 8t^2)v_{nm}(z) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.5.3})$$

После преобразования Лапласа мы приходим к уравнению

$$p^2 u_{nm}''''(p) + 2p u_{nm}'''(p) + 2p^2 u_{nm}''(p) + 2p u_{nm}'(p) + \left(-\frac{(\delta\lambda)^2}{4t^2} + \left(1 - \frac{\Sigma\lambda}{2t^2}\right)p^2 - \frac{p^4}{4t^2} \right) u_{nm}(t) = 0. \quad (\text{Б.5.4})$$

Точка $p = 0$ является регулярной особой точкой уравнения (Б.5.4). Характеристические показатели в этой точке равны $\rho_1 = 0, \rho_{2,3} = 1, \rho_4 = 2$. Одно из решений, соответствующее характеристическому показателю $\rho_{2,3} = 1$, и решение, соответствующее характеристическому показателю $\rho_4 = 2$, голоморфны в нуле и могут быть представлены с помощью разложения Тейлора:

$$u_{nm}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} p^{k+1}, \quad (\text{Б.5.5})$$

$$u_{nm}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+2} p^{k+2}. \quad (\text{Б.5.6})$$

Подстановка этих разложений в уравнение приводит к следующим рекуррентным соотношениям для коэффициентов c_k :

$$\begin{aligned} 12c_3 + \left(-2 - \frac{(\delta\lambda)^2}{4t^2}\right)c_1 &= 0, \\ 240c_5 + \left(6 - \frac{(\delta\lambda)^2}{4t^2}\right)c_3 + \left(1 - \frac{\Sigma\lambda}{2t^2}\right)c_1 &= 0, \\ (k+6)^2(k+7)(k+5)c_{k+7} + \left(2(k+5)(k+3) - \frac{(\delta\lambda)^2}{4t^2}\right)c_{k+5} \\ + \left(1 - \frac{\Sigma\lambda}{2t^2}\right)c_{k+3} - \frac{1}{4t^2}c_{k+1} &= 0, \quad k = 2j; \end{aligned} \quad (\text{Б.5.7})$$

и для коэффициентов d_k :

$$\begin{aligned} 72d_4 - \left(\frac{(\delta\lambda)^2}{4t^2}\right)d_2 &= 0, \\ 600d_6 + \left(16 - \frac{(\delta\lambda)^2}{4t^2}\right)d_4 + \left(1 - \frac{\Sigma\lambda}{2t^2}\right)d_2 &= 0, \\ (k+7)^2(k+8)(k+6)d_{k+8} + \left(2(k+6)(k+4) - \frac{(\delta\lambda)^2}{4t^2}\right)d_{k+6} \\ + \left(1 - \frac{\Sigma\lambda}{2t^2}\right)d_{k+4} - \frac{1}{4t^2}d_{k+2} &= 0, \quad k = 2j; \end{aligned} \quad (\text{Б.5.8})$$

наконец, при $n = m$, что соответствует диагональным матричным элементам, регулярное в нуле решение принимает вид:

$$u_{nn}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k p^k. \quad (\text{Б.5.9})$$

Это приводит к следующим рекуррентным соотношениям для коэффициентов g_k :

$$\begin{aligned} g_4 + 6g_2 + \left(1 - \frac{\lambda_n}{t^2}\right)g_0 &= 0, \\ (k+4)(k+3)(k+2)^2 g_{k+4} + (k+2)(2k+3)g_{k+2} & \\ + \left(1 - \frac{\lambda_n}{t^2}\right)g_k + \frac{1}{4t^2}g_{k-2} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.5.10})$$

Все четные матричные элементы выражаются в терминах интеграла нормировки и квадрупольного матричного элемента.

Приложение В

SFTools — база данных по специальным функциям

В.1. Введение

Мы опишем здесь компьютерный проект по специальным функциям математической физики, который использует единый структурный подход, представленный в данной книге.

Программный продукт *SFTools* был разработан А. Акопяном, А. Пирожниковым, В. Жигуновым и А. Яциком под общим руководством С. Славянова. Среди специальных функций, включенных в базу данных, есть функции гипергеометрического класса, функции Гойна, трансценденты Пенлеве и ортогональные полиномы. Для этих функций приведены основные дифференциальные уравнения с выделением регулярных точек, интегральные соотношения, разложения в ряды, P -символ Римана (схема Римана) и другие важные характеристики. Для того чтобы упорядочить информацию, широко используются процедуры конфлюэнции и редукции уравнений. Это означает, что основные конструкции книги в программном продукте сохранены.

Единый структурный подход к классификации специальных функций в сочетании с современными информационными технологиями позволяет упорядочивать весь материал так, чтобы его использование требовало меньших усилий, чем при традиционном подходе “книжной полки”.

В добавление к формулам, представленным в книге, программный продукт *SFTools* содержит более обширную информацию о полиномиальных решениях дифференциальных и разностных уравнений. Классические ортогональные полиномы, рассматриваемые как частные случаи гипергеометрических функций, были приведены в разделе 2.5.

Более общие полиномы возникают при специализации обобщенных гипергеометрических функций

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p, c_1, \dots, c_q, x) = \sum_n \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n x^n}{(c_1)_n \dots (c_q)_n n!},$$

где $(\dots)_n$ — символ Похгаммера. Для классификации этих полиномов выбрана модифицированная схема Аски–Вильсона [7]. Для каждого из классических полиномов может быть выписано разностное уравнение [62].

С помощью преобразования Меллина для подходящего контура интегрирования

$$\int_{\gamma} t^{-z-1} \varphi(t) dt$$

это уравнение может быть преобразовано в дифференциальное уравнение.

Программа SFTools описывает два класса линейных ОДУ, именно гипергеометрический (Римана) и Гойна, один класс нелинейных ОДУ — трансценденты Пенлеве — и класс классических ортогональных полиномов.

Для классов Римана и Гойна каждое уравнение представлено своим *s*-мультисимволом, которые образуют двумерную структуру, состоящую из горизонтально расположенных кластеров. Внутри кластера все уравнения могут быть получены из первого (левого) уравнения в кластере с помощью последовательности процессов редукции. Внутрикластерные (вертикальные) связи соответствуют процедурам конфлюэнции.

Классификационные схемы для класса Пенлеве и класса классических ортогональных полиномов были построены таким образом, чтобы отразить их соответствие с уравнениями классов Римана и Гойна.

В настоящее время существует пакет, представляющий собой отдельную диалоговую программу, работающую под Microsoft Windows 95 или Windows NT 4.0 и более поздними версиями. Готовится интернет-версия пакета в стандарте языка Math ML с поддержкой браузером AMAYA.

В.2. Отдельная диалоговая версия программы

Нынешняя версия отдельной диалоговой программы разработана с помощью Borland Delphi 3.0 и предназначена для работы под Microsoft Windows 95 или 98, Windows NT 4.0 и более поздними версиями. Полная инсталляция программы требует около 11 мегабайт на жестком диске. Этот объем будет слегка изменяться с дальнейшим развитием пакета. Graphic User Interface поддерживает все видеорежимы. Так как SFTools использует внешние базы данных для работы с научными данными, на компьютере должна быть установлена Borland Database Engine (BDE).

Вся информация о четырех упомянутых выше классах специальных функций организована в одном установочном окне с четырьмя страницами. Классификационные схемы реализованы в элементах, визуально напоминающих кнопки. Каждый элемент соответствует одному отдельному уравнению. Чтобы указать это соответствие, каждая кнопка несет образ

s-мультисимвола (для классов Гойна, Римана и Пенлеве) или сокращенное название полинома. При нажатии элемент подсвечивается красным цветом, и вся информация, доступная для данного уравнения, появляется в информационном окне. Уравнения, конъюнктные по отношению к выбранному, подсвечиваются зеленым цветом. Если указатель мышки передвигается на такой подсвеченным зеленым элемент, открывается новое информационное окно, содержащее аналитические формулы для соответствующего преобразования. В текущей версии SFTools доступна следующая информация:

для класса Пенлеве

- соответствующее уравнение;

для класса Римана

- соответствующее уравнение,
- обобщенная схема Римана (ОСР),
- интегральное представление решений,
- ряды, представляющие решения;

для класса Гойна

- соответствующее уравнение,
- обобщенная схема Римана (ОСР);

для классических полиномов

- соответствующее дифференциальное уравнение,
- условия ортогональности,
- рекуррентные соотношения,
- соответствующее разностное уравнение.

Полезная информация, представляющая математическую теорию, расположена в стандартных MS Windows 32-bit help-файлах и может быть получена при прямом запросе во время работы с пакетом SFTools.

При реализации пакета удалось добиться выполнения следующих четырех основных условий, чтобы SFTools был одновременно мощным и гибким.

- 1) Информация упорядочена таким образом, чтобы к ней был обеспечен легкий доступ с помощью различных средств, таких как редакторы с математической поддержкой, пакеты символических алгебраических вычислений и т. д.
- 2) Добавление новых данных в пакет должно быть легким.
- 3) Добавление новых и редактирование существующих данных должно как можно меньше влиять на другие части программного пакета, таких как GUI, вычислительная часть и т. д.

- 4) Процесс установки пакета и необходимых файлов (например, BDE) автоматизирован и требует минимума усилий пользователя.

Чтобы достичь этих целей, использовано несколько внешних баз данных PARADOX для хранения всех научных данных. Все необходимые функциональные свойства для оперирования этими базами данных обеспечены Borland Database Engine (BDE), что добавляет некоторые требования к системе. С другой стороны, процесс взаимодействия между программистами и учеными становится более удобным при работе с большим количеством информации. Наш собственный опыт показывает, что этот аспект весьма важен для проектов такого рода. Графический интерфейс SFTools был реализован таким образом, чтобы отразить как можно больше свойств классификационной схемы, описанной выше.

Технические детали создания этой частной GUI не слишком отличаются от других GUI, созданных с помощью Borland Delphi Developer. Таким образом, представляется естественным остановиться только на некоторых оригинальных компонентах (или *объектах* в терминах объектно-ориентированного программирования при разработке визуального интерфейса), которые были разработаны авторами пакета. Общей трудностью при создании этих компонент было противоречие между задачей размещения на дисплее всех научных данных, перечисленных выше, с одной стороны, и очень ограниченным объемом информации, которая может быть выведена на дисплей одновременно, с другой стороны.

- Компонента *DropDownBox* имеет возможность сворачиваться/разворачиваться, скрывая или раскрывая информацию, которая содержится в компоненте. Когда компонента находится в свернутом состоянии (демонстрируется свойство *Wrap is On*), освободившееся место занимает компонентами, расположенными ниже данной (если таковые есть). Изменение состояния на *Unwrap* автоматически перемещает все сдвинутые компоненты на их исходные места.
- Компонента *DBZoomImage* была разработана, чтобы показывать свернутый образ в отдельном окне, где пользователь имеет возможность просматривать информацию, которой он заинтересовался. В настоящее время все формулы записаны в виде статических образов в базе данных. Следующим шагом будет создание динамически возникающих формул.

Процесс инсталляции пакета с необходимыми системными файлами модификаций и настройки BDE автоматизирован с помощью утилиты Install Shield Light 1.1, которая также генерирует все необходимые коды и данные.

В.3. Возможное развитие в будущем

В настоящий момент SFTools обеспечивает только статическую информацию. Даже такая информационная система имеет важное значение, так как большое число информации, ранее рассеянной во многих книгах, ныне сконцентрировано в одном месте. К тому же SFTools обеспечивает пользователю возможность легкого доступа ко всем необходимым соотношениям между уравнениями. Авторы понимают, что пакет требует дальнейшего развития и в программном отношении, и с точки зрения математической теории. Укажем несколько направлений возможного будущего развития.

- Объединение с подходящей системой компьютерной алгебры, позволяющей реализовывать все необходимые символические и численные вычисления.
- Вся научная информация, которая ныне включена в систему в виде образов и является статической, будет изменяться к подходящему текстовому представлению в базе данных с возможностью рисовать формулы на экране.
- В пакет должны быть включены асимптотические соотношения для функций Гойна, функций гипергеометрического класса и трансцендент Пенлеве.
- Класс трансцендент Пенлеве требует дальнейшего изучения.

Обеспечение SFTools этими качествами позволит превратить наш продукт в реальный научный инструмент.

Копии SFTools на CD-ROM будут распространяться параллельно с продажей книги. Этот программный продукт рассматривается как shareware. Следовательно, при покупке продукта будут покрываться только основные затраты — затраты на производство CD-ROM и на распространение. В Европе читатель может сделать заказ на пакет в компании Con. Science Dr. Michael Zaiser & Partner. Адрес компании: Torgasse 9, D-71672 Marbach/Neckar, Germany. Информацию можно получить прямо у авторов: С. Славянов, e-mail: slav@slav.usr.pu.ru

Список литературы

- [1] Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. P. 715–721, 1006–1015.
- [2] Абрамов Д. И. // Вестник ЛГУ. 1976. № 2. С. 15–20.
- [3] Абрамов Д. И., Комаров И. В. // ТМФ. 1976. Т. 29. № 2. С. 235–243.
- [4] Abramov D. I., Slavyanov S. Yu. // J. Phys. B. 1978. Vol. 11 (13). P. 2229–2241.
- [5] *Справочник по специальным функциям*: Пер. с англ. / Ред.: М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
- [6] Adams C. R. // Trans. Amer. Math. Soc. 1928. Vol. 30. P. 507–541.
- [7] Askey R., Ismail M. // Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 5. P. 108.
- [8] Balser W. *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1999.
- [9] Bardeen J. M., Press W. H., Teukolsky S. A. // Astrophys. Journal. 1972. Vol. 178. P. 347–369.
- [10] Баркату М. А., Ришар-Жюнг Ф. // Программирование. 1997. № 1. С. 24–43.
- [11] Bates D. R., Ledsham K., Stewart A. L. // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A. 1953/54. Vol. 246. P. 215–240.
- [12] Bay K., Lay W., Akopyan A. // J. Phys. A. 1997. Vol. 30. P. 3057–3067.
- [13] Bay K., Lay W. // J. Math. Phys. 1997. Vol. 38 (5). P. 2127–2131.
- [14] Berry M. V. // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1990. Vol. 430. P. 653–667.
- [15] Bieberbach L. *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1965. (2nd ed.)
- [16] Birkhoff G. D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1911. Vol. 17. P. 243–284.
- [17] Birkhoff G. D. // Acta Math. 1930. Vol. 54. S. 205–246.
- [18] Birkhoff G. D., Trjitzinsky W. J. // Acta Math. 1932. Vol. 60. S. 1–89.
- [19] Болибрух А. А. *21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем* // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1995. Т. 206 (5).
- [20] Brill D. R., Chrzanowski P. L., Pereira C. M., Fackerell E. D., Ipser J. R. // Phys. Rev. D. 1972. Vol. 5. P. 1913–1915.
- [21] Брейн Н. Г., де. *Асимптотические методы в анализе*: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
- [22] Born M., Oppenheimer J. // Ann. d. Physik. 1927. Vol. 84. S. 457.
- [23] Boyer R. H., Lindquist R. W. // J. Math. Phys. 1967. Vol. 8. P. 265–281.
- [24] Bühring W. // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 118. P. 801–812.
- [25] Bühring W. // Meth. Appl. Analysis. 1994. Vol. 1. P. 348–370.

- [26] Бэйтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*: В 3 т.: Пер. с англ. М.: Наука, 1967.
- [27] Carter B. // *Comm. Math. Phys.* 1968. Vol. 10. P. 280–310.
- [28] Chandrasekhar S. // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 1975. Vol. 343. P. 289–298.
- [29] Chandrasekhar S., Detweiler S. // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 1975. Vol. 344. P. 441–452.
- [30] Chandrasekhar S. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford; New York: Oxford University Press, 1983. (The International Series of Monographs on Physics. Vol. 69.)
- [31] Coddington E. A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1955.
- [32] Decarreau A., Dumont-Lepage M. C., Maroni P., Robert A., Ronveaux A. // *Ann. Soc. Sc. de Bruxelles.* 1978. Vol. 92. P. 53–78.
- [33] Decarreau A., Maroni P., Robert A. // *Ann. Soc. Sc. de Bruxelles.* 1978. Vol. 92. P. 151–189.
- [34] Detweiler S. // *Astrophys. Journal.* 1980. Vol. 239. P. 292–295.
- [35] Döttling R., Esslinger J., Lay W., Seeger A. // *Lecture Notes in Physics: Nonlinear Coherent Structures. Proceedings of the 6th Interdisciplinary Workshop on Nonlinear Coherent Structures in Physics, Mechanics, and Biological Systems. Held at Montpellier, France, June 21–23, 1989 / Eds.: M. Barthes and J. Léon.* 1990. Vol. 353. P. 193–201.
- [36] Epstein P. S. // *Phys. Rev.* 1926. Vol. 28. P. 695.
- [37] Erdelyi A. // *Quart. J. Math. (Oxford).* 1942. Vol. 13. P. 107–112.
- [38] Erdélyi A. // *Duke Math. J.* 1942. Vol. 9. P. 48–58.
- [39] Эрдейи А. *Асимптотические разложения*: Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1962.
- [40] Esslinger J. Dissertation thesis. Universität Stuttgart, 1990.
- [41] Fedoryuk M. V. *Asymptotic methods*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1993.
- [42] Flashka H., Newell A. C. // *Comm. Math. Phys.* 1980. Vol. 76. P. 65–116.
- [43] Fuchs L. // *J. reine angew. Math.* 1866. Vol. 66. S. 121–160.
- [44] Fuchs R. // *Math. Ann.* 1907. Vol. 63. S. 301–321.
- [45] Gambier B. // *Acta Math.* 1909. Vol. 33. S. 1–55.
- [46] Грэхем Р., Кнут Д. Е., Паташник О. *Конкретная математика*: Пер. с англ. М.: Мир, 1998.
- [47] Громов В. И., Лукашевич Н. А. *Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве*. Минск: Изд-во Минского ун-та, 1990.
- [48] Heun K. // *Math. Ann.* 1889. Vol. 33. S. 161–179.
- [49] Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Ioshida M. *From Gauss to Painleve: a Modern Theory of Special Functions*. Braunschweig: Vieweg, 1991.

- [50] Ince E. L. *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover Publications, 1956.
- [51] Its A. R., Novokshenov V. Yu. *The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations* // *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1986. Vol. 1191.
- [52] Jaffé G. // *Z. Phys.* 1933. Vol. 87. S. 535–544.
- [53] Jimbo M., Miva T., Ueno K. // *Physica D*. 1981. Vol. 2. P. 306–352.
- [54] Jimbo M., Miva T. // *Physica D*. 1981. Vol. 2. P. 407–448.
- [55] Jimbo M., Miva T. // *Physica D*. 1981. Vol. 4. P. 26–46.
- [56] Joshi N., Kruskal M. // *Studies in Appl. Math.* 1994. Vol. 93. P. 187–207.
- [57] Казаков А. Я., Славянов С. Ю. // *ТМФ*. 1996. Т. 107. № 3. С. 388–396.
- [58] Kazakov A. Ya., Slavyanov S. Yu. // *Meth. Appl. Analysis*. 1996. Vol. 3. № 4. P. 447–456.
- [59] Kerr R. P. // *Phys. Rev. Lett.* 1963. Vol. 11. P. 237–238.
- [60] Kitaev A. V. Sfb 288 Preprint № 272. 1997.
- [61] Knopp K. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1964. (5th ed.)
- [62] Koekoek R., Swarttouw R. *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue*. Netherlands: Delft Univ. of Technology, 1994.
- [63] Коэн Я., Славянов С. Ю. // *Алгебра и анализ*. 1992. Т. 3 (2). С. 355–361.
- [64] Комаров И. В., Славянов С. Ю. // *J. Phys. B*. 1968. Vol. 1. P. 1066–1072.
- [65] Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*. М.: Наука, 1976.
- [66] Ковалевский М. А. // *Сиб. мат. журн.* 1990. № 1.
- [67] Lamé G. *Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes*. Paris, 1857.
- [68] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: В 10 т. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория*. 3-е изд. М.: Наука, 1974.
- [69] Lay W., Seeger A., Esslinger J. // *Journal de Physique, Colloque*. 1989. Vol. 50 (3). P. 107–112.
- [70] Lay W. Diploma thesis. Universität Stuttgart, 1983.
- [71] Lay W. // *Proceedings of the Adriatic Research Conference on Quantum Fluctuations in Mesoscopic and Macroscopic Systems*. Miramare, Trieste, Italy, July 3–6, 1990 / Eds.: H. A. Cerdeira, F. G. Lopez, U. Weiss. World Scientific Pbl., 1991. P. 97–120.
- [72] Лай В. // *ТМФ*. 1994. Т. 101 (3). С. 360–368.
- [73] Lay W. // *Centennial Workshop on Heun's Equation — Theory and Applications*. Schloß Ringberg (Rottach-Egern), Sept. 3–8, 1989 / Eds.: A. Seeger and W. Lay. Max-Planck-Institut für Metallforschung, Institut für Physik. Stuttgart, 1990.

- [74] Lay W. Dissertation thesis. Universität Stuttgart, 1987.
- [75] Lay W. *Das zentrale Zweipunkt-Verbindungsproblem für die Klasse der Heun'schen Differentialgleichungen*. Habilitation thesis. Stuttgart, 1995.
- [76] Lay W. // ZAMM. Vol. 78. Supplement 3 (GAMM 97, Annual Meeting). 1998. S. 991–992.
- [77] Lay W., Slavyanov S. Yu. // J. Phys. A. 1998. Vol. 31. P. 4249–4261.
- [78] Lay W., Slavyanov S. Yu. // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1999. Vol. 455. P. 4347–4361.
- [79] Leaver E. W. // J. Math. Phys. 1986. Vol. 27 (5). P. 1238–1265.
- [80] Leaver E. W. // Phys. Rev. D. 1990. Vol. 41 (10). P. 2986–2997.
- [81] Leaver E. W. // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1985. Vol. 402. P. 285–298.
- [82] Leins M. Dissertation thesis. Universität Tübingen, 1994.
- [83] Malmquist J. // Arkiv. Math. Astr. Fys. 1922/23. Vol. 17. S. 1–89.
- [84] Mann E. // Phys. stat. sol. (b). 1982. Vol. 111. P. 541–553.
- [85] Maroni P. // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1979. Vol. 30. № 4. P. 315–332.
- [86] Meixner J., Schäfer F. W. *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen*. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer, 1954.
- [87] Мессия А. *Квантовая механика*: Пер. с фр. М.: Наука, 1979.
- [88] Nollert H.-P. Dissertation thesis. Universität Tübingen, 1990.
- [89] Okamoto K. // Ann. Mat. Pura Appl. 1986. Vol. 146. P. 337–381.
- [90] Olver F. W. J. *Asymptotics and Special Functions*. New York; London: Academic Press, 1974.
- [91] Painlevé P. // Bull. C. R. Acad. Sci. Paris. 1898. Vol. 126. P. 1697–1700.
- [92] Painlevé P. // Bull. Soc. Math. France. 1900. Vol. 28. P. 201–261.
- [93] Painlevé P. // Acta Math. 1902. Vol. 25. S. 1–85.
- [94] Pantleon W. Diploma thesis. Universität Stuttgart, 1991.
- [95] Perron O. // J. reine angew. Math. 1909. Vol. 136 (1). S. 17–37.
- [96] Perron O. // J. reine angew. Math. 1909. Vol. 137 (1). S. 6–64.
- [97] Perron O. // Acta Math. 1910. Vol. 34. S. 109–137.
- [98] Perron O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Vol. 1–2. Stuttgart: Teubner Verlag, 1954–1957.
- [99] Press W. H., Teukolsky S. A. // Astrophys. Journal. 1973. Vol. 185. P. 649–673.
- [100] *Heun's Differential Equations* / Ed.: A. Ronveaux. Oxford; New York; Tokyo: Oxford University Press, 1995.
- [101] Schmidt D. Dissertation thesis. Köln, 1970.
- [102] Schmidt D., Wolf G. *Double confluent Heun equation* // *Heun's Differential Equations* / Ed.: A. Ronveaux. Oxford; New York; Tokyo: Oxford University Press, 1995.
- [103] Schmidt D. // J. reine angew. Math. 1979. Vol. 309. S. 127–148.
- [104] Schmidt D., Wolf G. // SIAM J. Math. Analysis. 1979. Vol. 10. P. 823–838.

- [105] Schlesinger L. // J. reine angew. Math. 1912. Vol. 141. S. 96–145.
- [106] *Centennial Workshop on Heun's Equation — Theory and Applications*. Schloß Ringberg (Rottach-Egern), Sept. 3–8, 1989 / Eds.: A. Seeger and W. Lay. Max-Planck-Institut für Metallforschung, Institut für Physik. Stuttgart, 1990.
- [107] Seeger A. // Phys. stat. sol. (a). 1975. Vol. 28. P. 157–168.
- [108] Зеерер А., Лай В., Славянов С. Ю. // ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 233–247.
- [109] Славянов С. Ю. *Асимптотика решений одномерного уравнения Шредингера*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991.
- [110] Slavyanov S. Yu., Lay W., Seeger A. *Classification // Heun's Differential Equations* / Ed: A. Ronveaux. Oxford; New York; Tokyo: Oxford University Press, 1995. P. 289–323.
- [111] Slavyanov S. Yu., Lay W., Seeger A. // Int. Journ. Math. Educat. Sci. Techn. 1997. Vol. 28. P. 641–660.
- [112] Slavyanov S. Yu. // J. Phys. A. 1999. Vol. 32. P. 1773–1778.
- [113] Slavyanov S. Yu. // J. Comp. and Appl. Math. 1993. Vol. 49. P. 251–254.
- [114] Slavyanov S. Yu., Veshev N. A. // J. Phys. A. 1997. Vol. 30. P. 673–687.
- [115] Slavyanov S. Yu. // J. Phys. A. 1996. Vol. 29. P. 7329–7335.
- [116] Славянов С. Ю. // ТМФ. 1999. Т. 119. С. 3–19.
- [117] Sleeman B. D. *Multiparameter spectral theory in Hilbert space*. Boston; London: Pitman, 1978.
- [118] Соловьев Е. А. // ЖЭТФ. 1981. Т. 54 (5). С. 893–898.
- [119] Старобинский А. А., Чурилов С. М. // ЖЭТФ. 1974. Т. 38. С. 1–5.
- [120] Sternin B., Schatalov V. *Borel–Laplace Transform and Asymptotic Theory: Introduction to Resurgent Analysis*. CRC-Press, 1995.
- [121] Svartholm N. // Math. Ann. 1939. Vol. 116. S. 413–421.
- [122] Teukolsky S. A., Press W. H. // Astronom. Journal. 1974. Vol. 193. P. 443–461.
- [123] Teukolsky S. A. // Phys. Rev. Lett. 1972. Vol. 29. P. 1114–1118.
- [124] Thomé L.W. // Journal f. Mathematik. 1877. Vol. 83. Heft 2. S. 89–170.
- [125] Voros A. // J. Phys. A. 1999. Vol. 32. P. 5993–6007.
- [126] Weiss J. // J. Math. Phys. 1983. Vol. 24. P. 1405–1413.
- [127] Wentzel G. // Z. Phys. 1926. Vol. 33.
- [128] Wilson A. H. // Proc. Roy. Soc. A. 1928. Vol. 118. P. 617–647.
- [129] Wimp J. *Computations with Recurrence Relations*. Boston; London; Melbourne: Pitman, 1984.
- [130] Wong R., Li H. // J. Comp. and Appl. Math. 1992. Vol. 41 (1–2). P. 65–94.

Предметный указатель

А

Абеля предельная теорема 214
акцессорный параметр 40, 268
антистоксовы лучи 49
АРС-гипотеза 266

Б

Бесселя уравнение 18, 56, 77
— функция 90, 98
— функция модифицированная 98
бета-функция 283
Биркгофа набор 62, 67, 193, 200, 253
— решения 62, 67, 193, 242
Бойера–Линдквиста координаты 214, 217
Борна–Оппенгеймера приближение 212
Бюргерса вектор 223

В

вакансия 258
водород:
 атом 208
 ион молекулы 211
вронскиан 82

Г

гамма-функция 283
 асимптотика Стирлинга 285
 формула отражения 286
 формула удвоения 287
гармонического осциллятора уравнение 77, 86
Гаусса критерий сходимости 214
— уравнение 78
Гегенбауэра полиномы 78, 123

гипергеометрическая функция 81, 94, 102, 105, 107
 конфлюэнтная 83, 97, 103, 113
гипергеометрическое уравнение 40, 77, 78
 биконфлюэнтное 77
 конфлюэнтное 77, 82, 209
 редуцированное биконфлюэнтное 77, 91
 редуцированное конфлюэнтное 77, 88

Гойна уравнение 40, 129, 167, 262, 270
 биконфлюэнтное 135, 181, 270, 296
 дважды конфлюэнтное 136, 246, 270
 дважды редуцированное дважды конфлюэнтное 145
 деформированное 277
 конфлюэнтное 132, 218, 270
 редуцированное биконфлюэнтное 142, 211
 редуцированное дважды конфлюэнтное 142
 редуцированное конфлюэнтное 142
 редуцированное триконфлюэнтное 146
 триконфлюэнтное 140, 175, 240, 270, 296

Голдстоуна мода 236
гравитация 214

Д

дислокация 222
диффузия 258
 квантовая 239
 коэффициент 261
уравнение 261

З

задача связи:

боковая 47

центральная 46, 58, 219

И

изомонодромная деформация 279,
282

интегральное представление 100

— соотношение 100, 152, 163

— уравнение 152, 157

К

квазинормальные моды 215

квазипересечение 175, 190, 245

Керра метрика 215, 217

кинков пара 224, 226, 232, 236

конфлюэнция 36

принцип 38

сильная 36

слабая 36

теорема 36

Л

Лагерра полиномы 78, 116, 126

Лакса пара 282

Лежандра полиномы 78, 123

— уравнение 23, 56

М

модель линейного напряжения 223

монодромии данные 47

Н

нуклеация 226

О

обыкновенная точка 17, 206

особая точка 18

ветвящаяся 25, 33

иррегулярная 18

ложная 18, 24, 279

неветвящаяся 25

неподвижная 263

неприводимая 29, 31

особая точка (*продолжение*)

подвижная 263

приводимая 29

регулярная 18

устраняемая 20, 29

фуксова 18

элементарная 23, 92

П

Пайерлса потенциал 223, 236, 239

параболического цилиндра урав-
нение 77, 86

— — функция 87

Пенлеве свойство 264

— трансцендента 264, 269

— уравнение 264

Планка постоянная 208

пластическая деформация 222

плоскость скольжения 223, 239

полиномы:

гипергеометрические 116

квазиполиномы 119

ортогональные 116

производящая функция 125

ультрасферические 123

Похгаммера символ 283, 287

Пуанкаре–Перрона разностное
уравнение 61, 193, 196,
197, 213, 220, 241, 252

Р

разностное уравнение:

иррегулярное 61

регулярное 61

редукция 39

решение:

доминантное 69, 202

максимальное 62, 202, 204

нормальное 30

рецессивное 69, 202

субнормальное 30

Римана схема 51

— схема обобщенная 52

— уравнение 23, 77, 78

— *P*-символ 51

Родрига формула 118

С

- s -гомотопное преобразование 19, 20, 28
- s -мультисимвол 27, 41
- s -ранг 25, 26
- скейлинговый параметр 132, 167, 268

Слэтер уравнение 77

соотношения смежности 94

Стокса линии 83, 246, 249

— луч 49

— матрица 191, 252

— множитель 191

— область 246

— сектор 49

— явление 175, 191, 251

сферические координаты 208

Т

Томе решение 29, 83, 86, 139

доминантное 49

рецессивное 49, 139

трещина 258

туннелирование 240

Тьюкольского уравнение в астро-
физике 215, 217

У

Уиттекера уравнение 77, 83

уравнение:

класс 39, 77

конфлюэнтное 27

неприводимое 20, 29

нефуксово 19, 27

порождающее 39, 40

приводимое 20, 29

присоединенное 20

редуцированное конфлюэнтное
27

тип 41

форма 20, 29

фуксово 19

характеристическое 21, 61

Ф

Флоке показатель 48, 150

— решение 48, 150

форма уравнения 20

естественная 21, 32, 129

каноническая 21, 32, 129

нормальная 43

общая 43

самосопряженная 43

стандартная 43

Фробениуса показатель 22, 47

— решение 23, 47, 81, 83, 130

Фукса теорема 22, 33, 56

— условие 22

функция конечного порядка 18

Х

характеристическая последова-
тельность 31

характеристический множитель 31

— показатель 22, 31, 150

второго рода 31

Ц

цепные дроби 214, 221, 236

Ч

Чебышева полиномы 78, 123

Ш

Шварцшильда решение 216

Шредингера уравнение 208, 210,
211, 228, 240, 289

Штарка эффект 210

Э

Эйнштейна уравнение поля 214

Эйри уравнение 77, 103

Эрмита полиномы 78, 116, 127, 295

— уравнение 77, 86

Я

Якоби полиномы 78, 116, 121

— эллиптическая функция 230, 259

Яффе преобразование 60, 65, 195,
196, 212, 257

— разложение 66, 195, 258

Научное издание

СЛАВЯНОВ Сергей Юрьевич
ЛАЙ Вольфганг

Специальные функции:
Единая теория, основанная
на анализе особенностей

Редактор *О. М. Рощиненко*

Издательство «Невский Диалект»
195220, Санкт-Петербург, Гражданский пр., 14.
Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 065012 от 18.02.1997.

Подписано в печать 17.05.2002. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура TimeRoman.
Усл. печ. л. 19,5.
Тираж 500 экз.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в типографии «Биофизприбор»
Санкт-Петербург, ул. Сабиловская, 37.



Издательство
НЕВСКИЙ ДИАЛЕКТ
www.nd.spb.ru

представляет

ОПТИКА

Учебное пособие для физических специальностей вузов

Автор **Е. И. Бутиков**,
профессор Санкт-Петербургского государственного университета

Содержание учебного пособия «Оптика» соответствует программе курса общей физики для физических специальностей вузов. Изложение учебного материала проводится на основе электромагнитной теории света с соблюдением требования единства теории и эксперимента. Наряду с традиционными вопросами оптики значительно строже и подробнее, чем обычно, рассматриваются статистические и когерентные свойства оптического излучения, спектральное разложение, электронная теория дисперсии, оптические резонаторы, разрешающая сила оптических и спектральных приборов, фотоэлектрические измерения, свойства лазерного излучения, основы нелинейной оптики. Пособие отражает связанные с появлением лазеров изменения во взглядах на преподавание оптики. Лазеры не только привели к возникновению новых современных научных направлений, таких как нелинейная оптика и голография, но и оказали большое влияние на многие классические разделы оптики.

К каждому параграфу даны контрольные вопросы и задачи, составляющие организационную часть учебного пособия.

Выход в свет — II полугодие 2002 г.

Оптовые закупки

Санкт-Петербург, ЗАО «**Диалект**», т./ф.: (812) 247-1483

Розничная продажа в Санкт-Петербурге

маг. «**Дом книги**», Невский пр., д. 28, Литейный пр., д. 64

маг. «**Техническая книга**», Пушкинская ул., д. 2

маг. «**Родина**», Ленинский пр., д. 127

маг. «**Академкнига**», Тихорецкий пр., д. 4

Книга-почтой через Интернет

маг. «**Книги России**», <http://books.ru>

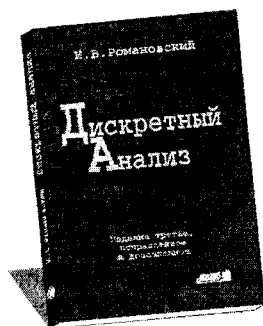
маг. «**Озон**», <http://www.ozon.ru>

маг. «**Труэнт**», <http://research.karelia.ru/medlogic/mks/>



Издательство
НЕВСКИЙ ДИАЛЕКТ
www.nd.spb.ru

представляет



И. В. Романовский ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ

Издание 3-е,
исправленное и дополненное

Учебное пособие для студентов, специализирующихся
по прикладной математике и по информатике

Книга написана по материалам вводного лекционного курса, который автор читает на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета студентам, специализирующимся по прикладной математике и по информатике.

Особое внимание в этой книге уделяется связям между понятиями дискретной математики, возникающими в разных разделах математики, и современными приложениями в информатике.

Книга включает в себя следующие главы:

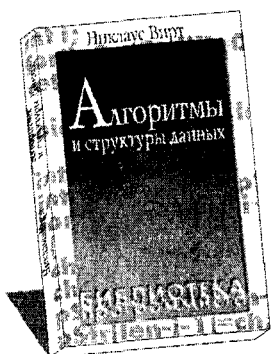
1. Некоторые определения из теории множеств.
2. Комбинаторика.
3. Элементарная теория вероятностей.
4. Строки переменной длины.
5. Сжатие и защита информации.
6. Информационный поиск и организация информации.
7. Предикаты и отношения.
8. Теория графов.
9. Экстремальные задачи.
10. Процессы.
11. Связи дискретного и непрерывного анализов.

Выход в свет — II полугодие 2002 г.



Издательство
НЕВСКИЙ ДИАЛЕКТ
www.nd.spb.ru

представляет



Н. Вирт
**Алгоритмы
и структуры данных**

2-е издание,
исправленное

Книга известного швейцарского специалиста посвящена изложению фундаментальных принципов построения эффективных и надежных программ. В ней содержится также описание и анализ основных алгоритмов. Изложение ведется с использованием языка Модуль-2, что, однако, не снижает ценность излагаемого материала для пользователей других языков программирования.

Для настоящего издания текст заново сверен с оригиналом; в нем исправлены замеченные опечатки.

Для программистов разной квалификации, преподавателей и студентов.

352 с.

Оптовые закупки

Санкт-Петербург, ЗАО «Диалект», т./ф.: (812) 247-1483

Розничная продажа в Санкт-Петербурге

маг. «Дом книги», Невский пр., д. 28, Литейный пр., д. 64

маг. «Техническая книга», Пушкинская ул., д. 2

маг. «Родина», Ленинский пр., д. 127

маг. «Академкнига», Тихорецкий пр., д. 4

Книга-почтой через Интернет

маг. «Книги России», <http://books.ru>

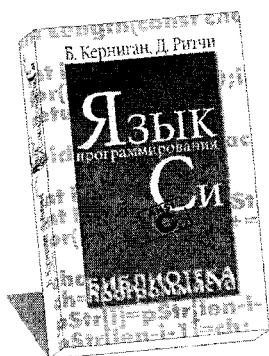
маг. «Озон», <http://www.ozon.ru>

маг. «Труэнт», <http://research.karelia.ru/medlogic/mks/>



Издательство
НЕВСКИЙ ДИАЛЕКТ
www.nd.spb.ru

представляет



Б. Керниган, Д. Ритчи
**ЯЗЫК
ПРОГРАММИРОВАНИЯ
СИ**

3-е издание, исправленное

Книга широко известных авторов, разработчиков языка Си, переработанная и дополненная с учетом стандарта ANSI для языка Си, 2-е английское издание которой вышло в 1988 году, давно стала классикой для всех изучающих и/или использующих как Си, так и Си++. Русский перевод этой книги впервые был выпущен изд-вом «Финансы и статистика» в 1992 г. и с тех пор пользуется неизменным спросом читателей.

Для настоящего, третьего, русского издания перевод заново сверен с оригиналом, в него внесены некоторые поправки, учитывающие устоявшиеся за прошедшие годы изменения в терминологии, а так же учтены замечания, размещенные автором на странице <http://cm.bell-labs.com/cm/cs/cbook/2ediffs.html>.

Для программистов, преподавателей и студентов.

352 с.

Оптовые закупки

Санкт-Петербург, ЗАО «Диалект», т./ф.: (812) 247-1483

Розничная продажа в Санкт-Петербурге

маг. «Дом книги», Невский пр., д. 28, Литейный пр., д. 64

маг. «Техническая книга», Пушкинская ул., д. 2

маг. «Родина», Ленинский пр., д. 127

маг. «Академкнига», Тихорецкий пр., д. 4

Книга-почтой через Интернет

маг. «Книги России», <http://books.ru>

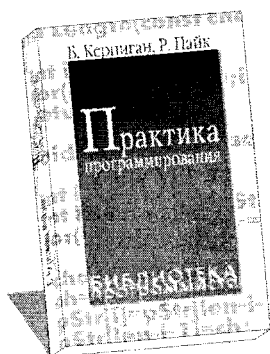
маг. «Озон», <http://www.ozon.ru>

маг. «Труэнт», <http://research.karelia.ru/medlogic/mks/>



Издательство
Невский Диалект
www.nd.spb.ru

представляет



**Б. Керниган,
Р. Пайк**

Практика программирования

Книга написана известнейшими американскими специалистами — авторами многих книг (в том числе переведенных на русский язык) и программистами (разработчиками таких систем, как ОС UNIX, язык программирования Си, язык скриптов AWK и др.). В систематической форме в ней излагаются основанные на многолетнем и разностороннем опыте рекомендации авторов: как надо программировать, как разрабатывать программу, как ее писать, как отлаживать, какие средства выбирать.

Книга нужна каждому активно работающему программисту и студентам, специализирующимся в создании программного обеспечения. Она может (и должна бы) использоваться в качестве учебного пособия по соответствующим курсам.

381 с.

Оптовые закупки

- Санкт-Петербург, ЗАО «Диалект», т./ф.: (812) 247-1483

Розничная продажа в Санкт-Петербурге

маг. «Дом книги», Невский пр., д. 28, Литейный пр., д. 64
маг. «Техническая книга», Пушкинская ул., д. 2
маг. «Родина», Ленинский пр., д. 127
маг. «Академкнига», Тихорецкий пр., д. 4

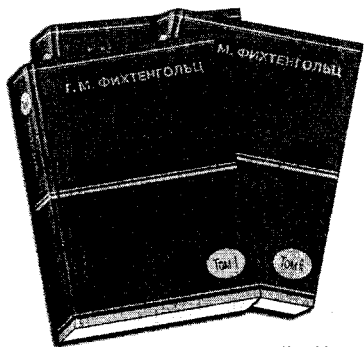
Книга-почтой через Интернет

маг. «Книги России», <http://books.ru>
маг. «Озон», <http://www.ozon.ru>
маг. «Труэнт», <http://research.karelia.ru/medlogic/mks/>



Издательство
НЕВСКИЙ ДИАЛЕКТ
www.nd.spb.ru

представляет



Г. М. Фихтенгольц
**КУРС
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
И ИНТЕГРАЛЬНОГО
ИСЧИСЛЕНИЯ**

8-е издание

Трехтомный «Курс дифференциального и интегрального исчисления» Г. М. Фихтенгольца представляет собой энциклопедию математического анализа, блестяще написанную на основе лекций, которые автор читал в Университете более 30 лет.

Фундаментальный учебник по математическому анализу, выдержавший множество изданий и переведенный на ряд иностранных языков, отличается, с одной стороны, систематичностью и строгостью изложения, а с другой — простым языком, подробными пояснениями и многочисленными примерами, иллюстрирующими теорию.

I том «Курса...» включает в себя дифференциальное исчисление одной и нескольких вещественных переменных и его основные приложения, II том посвящен теории интеграла Римана и теории рядов, III том — кратным, криволинейным и поверхностным интегралам, интегралу Стильбеса, рядам и преобразованию Фурье.

За 50 лет, прошедших после выхода первого издания «Курса...», его текст не устарел и по-прежнему используется студентами университетов, а также различных технических и педагогических вузов в качестве одного из основных учебных пособий по математическому анализу и курсу высшей математики. Более того, несмотря на появление новых хороших учебников, аудитория читателей «Курса...» Г. М. Фихтенгольца за время его существования лишь расширилась и сейчас включает в себя учащихся ряда физико-математических лицеев и слушателей курсов повышения математической квалификации инженеров.

Розничная продажа в Санкт-Петербурге

маг. «**Дом книги**», Невский пр., д. 28, Литейный пр., д. 64

маг. «**Техническая книга**», Пушкинская ул., д. 2

маг. «**Родина**», Ленинский пр., д. 127

маг. «**Академкнига**», Тихорецкий пр., д. 4



Издательство
НЕВСКИЙ ДИАЛЕКТ
www.nd.spb.ru

представляет

Л. В. Канторович, Г. П. Акилов
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

4-е издание, дополненное

Под ред. А. В. Бухвалова

Вышедшая в 1959 году монография Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова «Функциональный анализ» стала первой и образцовой книгой по новому тогда разделу математического анализа. Она была основана на пионерных лекциях, которые Л. В. Канторович читал в середине 1950-х годов в Ленинградском государственном университете. В 1970-е годы книга была существенно переработана и стала широко использоваться в качестве учебника. Она была переведена на английский, французский и итальянский языки. Книга является стандартным источником ссылок в работах по различным разделам функционального анализа, прежде всего теории операторов, методам приближенных вычислений, теории пространств измеримых функций.

Отличительной особенностью книги является связь теории с приложениями, в которых функциональный анализ красиво взаимодействует с классической теорией функций. Книга, в отличие от многих других учебников по функциональному анализу, не похожа ни на книгу по алгебре, ни на книгу по теоретико-множественной топологии. Это уникальная, фирменная черта книги, заложенная Л. В. Канторовичем.

Л. В. Канторович как математик — один из крупнейших концептуалистов двадцатого века. Однако необходимо помнить, что Л. В. Канторович еще и единственный российский нобелевский лауреат по экономике. Ряд разделов, добавленных редактором во втором и последующих изданиях, были включены по инициативе Л. В. Канторовича в качестве инструментария математической экономики. В настоящем издании некоторые разделы расширены и дополнены новыми результатами.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и преподавателей, специализирующихся в области математики, прикладной математики и математической экономики.

Выход в свет — II полугодие 2002 г.

Оптовые закупки

Санкт-Петербург, ЗАО «Дialeкт», т./ф.: (812) 247-1483

Книга-почтой через Интернет

маг. «Книги России», <http://books.ru>

маг. «Озон», <http://www.ozon.ru>

маг. «Труэнт», <http://research.karelia.ru/medlogic/mks/>

Издательство

Невский Диалект



Профессиональная научно-техническая,
медицинская и учебная литература

На сайте издательства представлена подробная информация (выходные данные, предисловия и оглавления) о готовящихся к изданию и уже вышедших книгах, которые можно заказать через интернет-магазин.

Тел.: (812) 247-6961, факс: (812) 247-1483
e-mail: contact@nd.spb.ru

www.nd.spb.ru

Компьютерная студия



Мультимедиа-проекты в области
образования и культуры

Презентационные CD-ROM
Компьютерные фильмы и клипы
Разработка WEB-сайтов
Программирование
Технический консалтинг
Издательские услуги

Тел.: (812) 279-6665, факс: (812) 247-1483
e-mail: contact@mart.spb.ru

www.mart.spb.ru

интернет-магазин
OZON.RU



40122468

ISBN 5-7940-0096-1