100 БАЛЛОВ

И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

ГЕОМЕТРИЯ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ

РАССТОЯНИЯ И УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Базовые задачи на нахождение расстояний и углов в пространстве, развивающие геометрические представления и лежащие в основе решения любых задач по стереометрии

Ответы и решения ко всем задачам

ЭКЗАМЕН

100 БАЛЛОВ

И.М. Смирнова
В.А. Смирнов

ЕГЭ
Геометрия

Рекомендовано ИСМО Российской Академии Образования для подготовки выпускников всех типов образовательных учреждений РФ к сдаче экзаменов в форме ЕГЭ

РАССТОЯНИЯ И УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Базовые задачи на нахождение расстояний и углов в пространстве, развивающие геометрические представления и лежащие в основе решения любых задач по стереометрии
Ответы и решения ко всем задачам

Издание второе, переработанное и дополненное

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА, 2009

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21я72
С50

Смирнова, И.М.

С50 Геометрия. Расстояния и углы в пространстве: учебно-методическое пособие / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство «Экзамен», 2009. — 158, [2] с. (Серия «ЕГЭ. 100 баллов»)

ISBN 978-5-377-02368-5

Предлагаемая вниманию старшеклассников книга предназначена для подготовки к ЕГЭ и к другим экзаменам, содержащим геометрические задачи.

Она содержит необходимый теоретический материал, а также базовые задачи: на нахождение расстояний и углов в пространстве, развивающие геометрические представления, лежащие в основе решения любых задач по стереометрии. Представлены ответы и решения ко всем задачам. Пособие является прекрасным дополнением к учебникам по геометрии.

Предназначена старшеклассникам, абитуриентам, учителям математики и репетиторам.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21я72

Подписано в печать с диапозитивов 30.09.2008. Формат 84x108/32.
Гарнитура «Таймс». Бумага типографская. Уч.-изд. л. 3,71.
Усл. печ. л. 8,4. Тираж 5 000 экз. Заказ № 7775(2).

ISBN 978-5-377-02368-5

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Как подготовиться к экзамену по геометрии и научиться решать задачи? Казалось бы, для этого нужно решать задачи, предлагавшиеся на экзаменах в прошлые годы. Однако, если следовать только этому рецепту, то результат может оказаться вовсе не тем, который ожидается.

В каждом новом году экзаменационные задачи отличаются от задач прошлых лет, и из того, что Вы узнали, как решаются задачи, предлагавшиеся на экзаменах в прошлые годы, не следует, что Вы сможете решить другие задачи.

Важно, чтобы задачи, которые Вы решаете, готовясь к экзамену, носили развивающий, системный характер, создавали базу для решения других задач.

Анализ результатов вступительных экзаменов в ВУЗы, а также ЕГЭ в части геометрии показывает, что основные трудности решения задач по стереометрии связаны не столько с недостатками, вызванными незнанием формул и теорем или неумением их применять, сколько с недостаточно развитыми пространственными представлениями, неумением правильно изобразить пространственную ситуацию, установить взаимное расположение точек, прямых и плоскостей, указанных в задаче.

Здесь мы приведем задачи на взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве, нахождение расстояний и углов между ними. Уровень трудности задач с возрастанием их номера возрастает. Для облегчения нахождения решений все задачи сопровождаются рисунками, на которых можно производить необходимые построения. Предлагаемые задачи не только развивают пространственные представления, но и лежат в основе решения многих других задач на вычисление площадей и объемов пространственных фигур, позволяют сформировать и отработать необходимые навыки решения этих задач. От того, как Вы научитесь решать эти базовые задачи, во многом зависит успешность решения многих других задач.

В начале каждого раздела помещен необходимый теоретический материал.

В конце книги помещены ответы и решения ко всем задачам. Однако не спешите смотреть ответ. Вне зависимости от того, удалось Вам решить задачу или нет, большую пользу для развития пространственных представлений оказывают размышления над задачей, анализ ее условия, проведение дополнительных построений, выяснение взаимного расположения точек, прямых и плоскостей, указанных в условии задачи, и даже просто разглядывание рисунка.

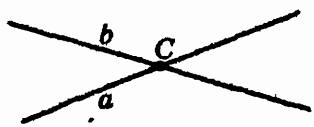
В качестве учебника по геометрии для подготовки к ЕГЭ рекомендуем использовать учебник:

Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия 10–11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений. — М.: Мнемозина, 2006.

1. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

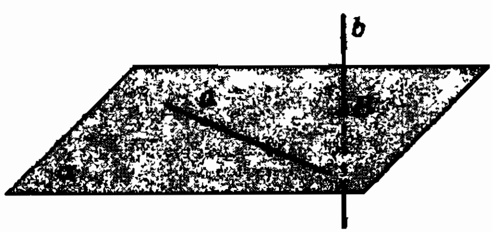
Две прямые в пространстве могут пересекаться, быть параллельными или скрещивающимися.

Две прямые в пространстве называются пересекающимися, если они имеют одну общую точку.



Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

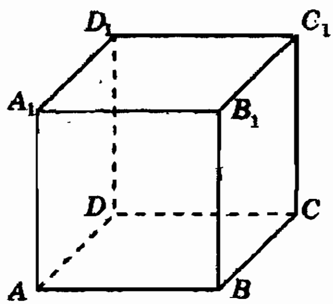
Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.



Признак скрещивающихся прямых. Если одна прямая лежит в данной плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти две прямые скрещиваются.

ЗАДАЧИ

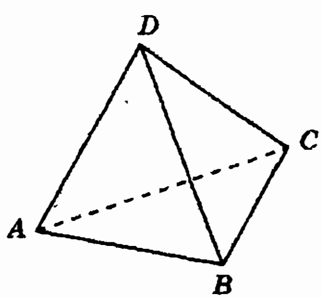
1. Как в пространстве расположены прямые AB и CC_1, проходящие через вершины куба $A \dots D_1$?



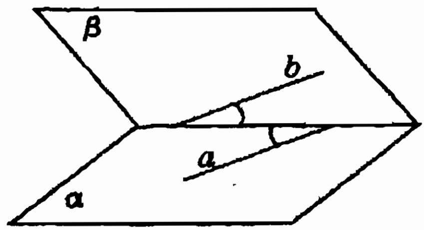
2. Как в пространстве расположены прямые AC и BD_1, проходящие через вершины куба $A \dots D_1$?

3. Как в пространстве расположены прямые AC_1 и BD_1, проходящие через вершины куба $A \dots D_1$?

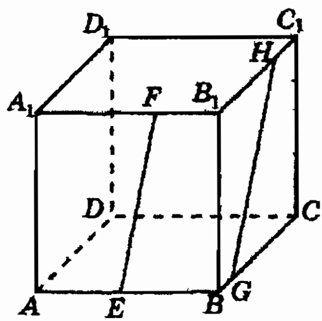
4. Как в пространстве расположены прямые AB и CD, проходящие через вершины тетраэдра $ABCD$?



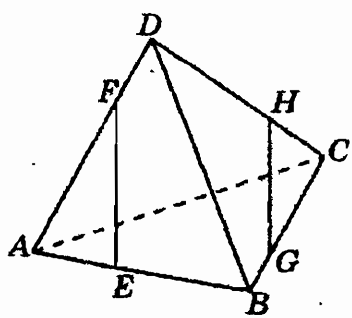
5. Как расположены в пространстве прямые a и b, проведенные в плоскостях α и β?



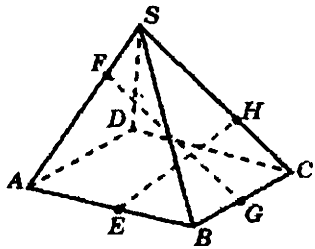
6. Как в пространстве расположены прямые EF и GH, проведенные в плоскостях граней куба $A...D_1$?



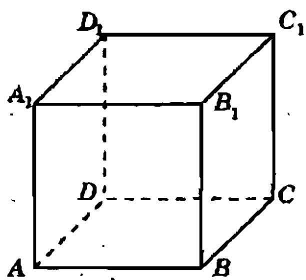
7. Как в пространстве расположены прямые EF и GH, проведенные в плоскостях граней тетраэдра $ABCD$?



8. Как в пространстве расположены прямые EH и FG, проведенные через точки, лежащие на ребрах пирамиды $SABCD$?

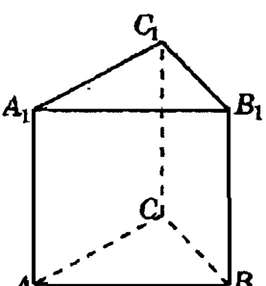


9. Дан куб $A...D_1$. Назовите прямые, проходящие через вершины куба и параллельные прямой AB.

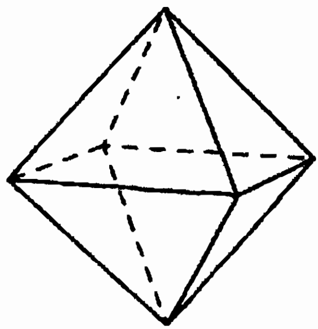


10. Сколько имеется пар параллельных прямых, содержащих ребра куба $A\ ...D_1$?

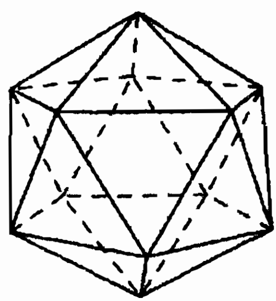
11. Сколько имеется пар параллельных прямых, содержащих ребра правильной треугольной призмы?



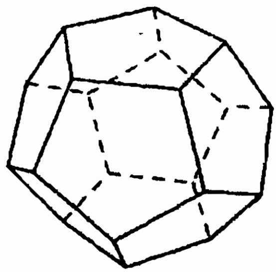
12. Сколько имеется пар параллельных прямых, содержащих ребра октаэдра?



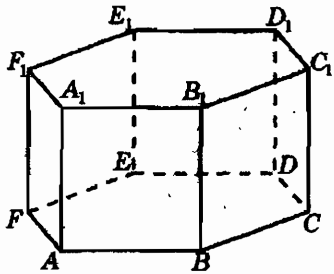
13. Сколько имеется пар параллельных прямых, содержащих ребра икосаэдра?



14. Сколько имеется пар параллельных прямых, содержащих ребра додекаэдра?

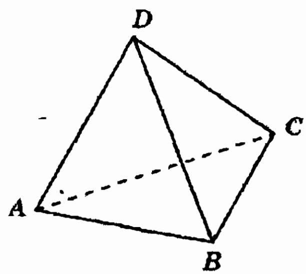


15. Укажите прямые, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы $A \ldots F_1$, параллельные ребру AB.

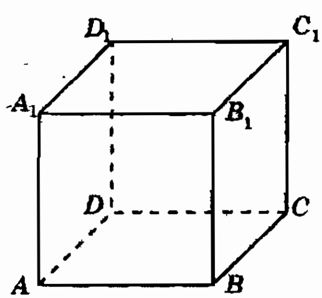


16. Сколько имеется пар параллельных прямых, содержащих ребра правильной шестиугольной призмы?

17. В тетраэдре $ABCD$ укажите пары скрещивающихся ребер.

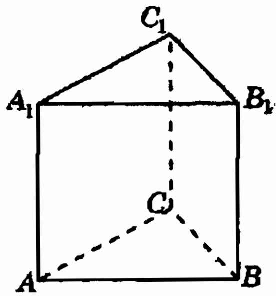


18. Дан куб $A \ldots D_1$. Назовите прямые, содержащие ребра этого куба и скрещивающиеся с прямой AB.

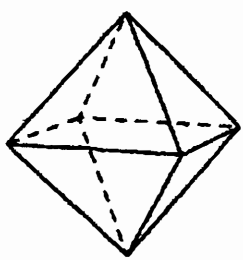


19. Сколько имеется пар скрещивающихся прямых, содержащих ребра куба $A \dots D_1$?

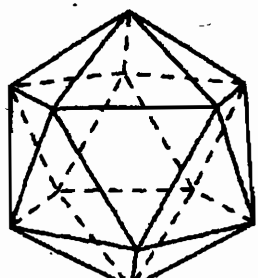
20. Сколько имеется пар скрещивающихся прямых, содержащих ребра правильной треугольной призмы?



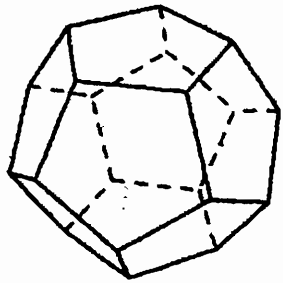
21. Сколько имеется пар скрещивающихся прямых, содержащих ребра октаэдра?



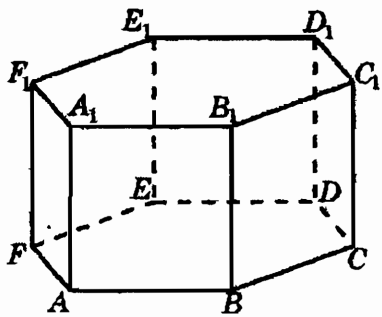
22. Сколько имеется пар скрещивающихся прямых, содержащих ребра икосаэдра?



23. Сколько имеется пар скрещивающихся прямых, содержащих ребра додекаэдра?

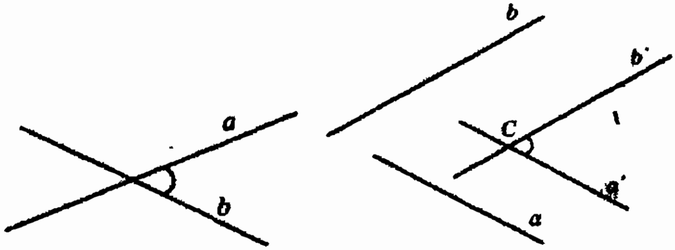


24. Сколько имеется пар скрещивающихся прямых, содержащих ребра правильной шестиугольной призмы?



2. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами, лежащими на этих прямых, с вершиной в точке их пересечения.

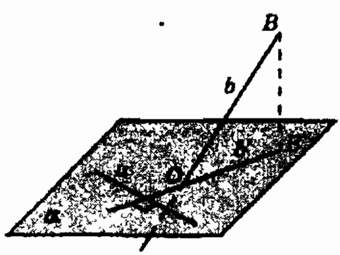


Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

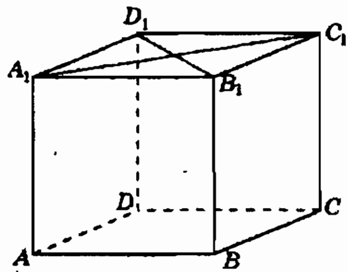
Для установления перпендикулярности скрещивающихся прямых используют следующую теорему о трех перпендикулярах.

Теорема. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.

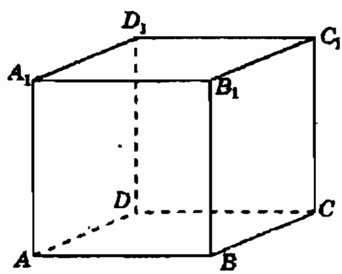


ЗАДАЧИ

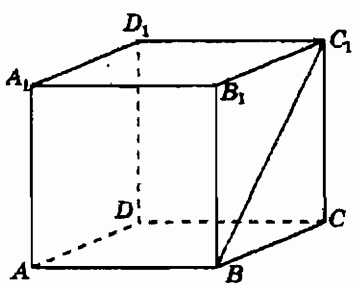
1. В кубе $A \ldots D_1$ найдите углы между прямыми A_1C_1 и B_1D_1.



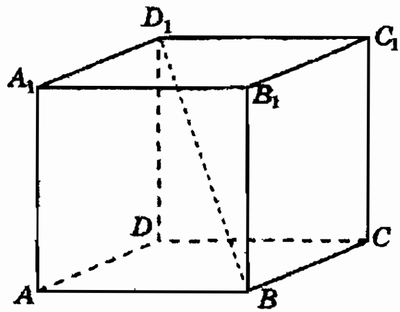
2. В кубе $A \ldots D_1$ найдите углы между прямыми AA_1 и BC.



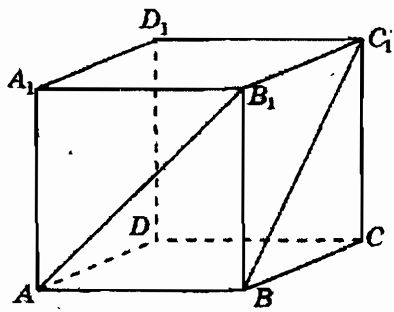
3. В кубе $A \ldots D_1$ найдите углы между прямыми AA_1 и BC_1.



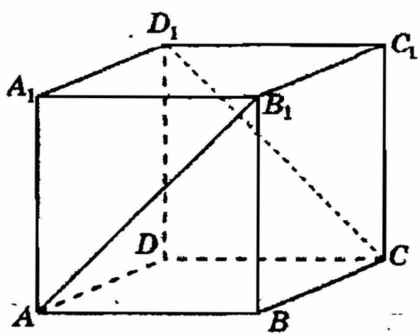
4. В кубе $A \ldots D_1$ найдите углы между прямыми AA_1 и BD_1.



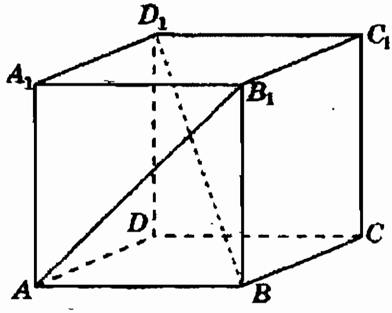
5. В кубе $A \ldots D_1$ найдите углы между прямыми AB_1 и BC_1.



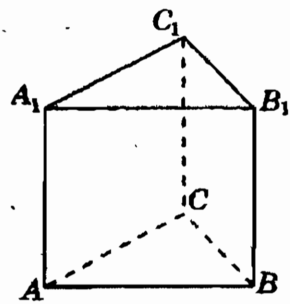
6. В кубе $A \ldots D_1$ найдите углы между прямыми AB_1 и CD_1.



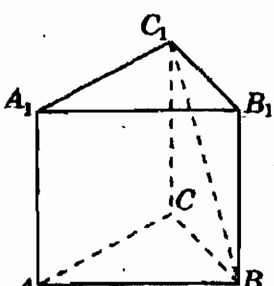
7. В кубе $A \ldots D_1$ найдите углы между прямыми AB_1 и BD_1.



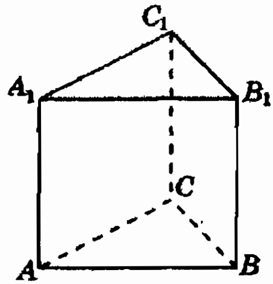
8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и BC.



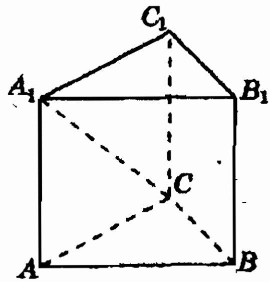
9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1.



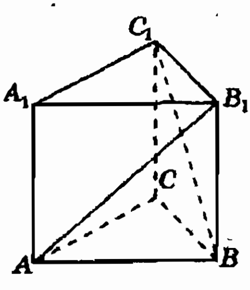
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и A_1C_1.



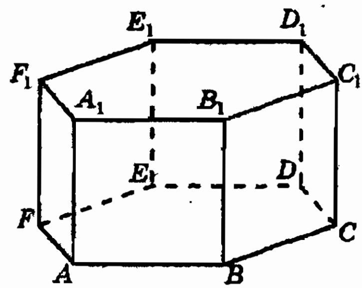
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и A_1C.



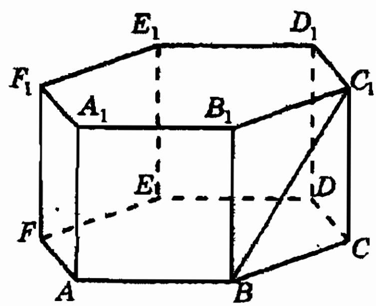
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.



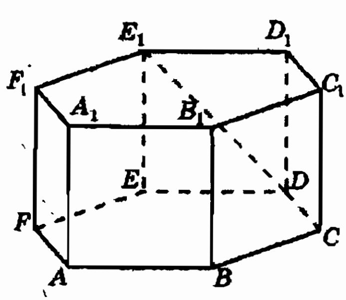
13. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и B_1C_1.



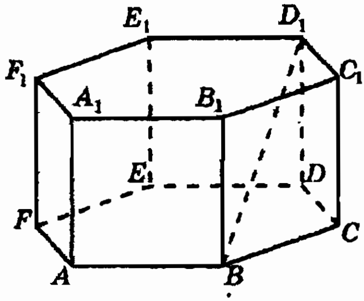
14. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1.



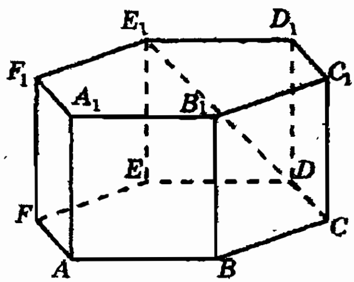
15. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и DE_1.



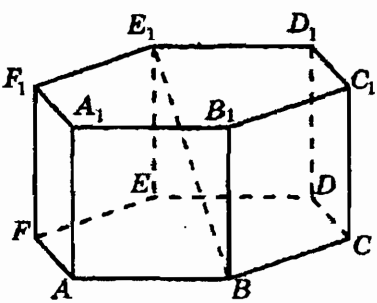
16. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и BD_1.



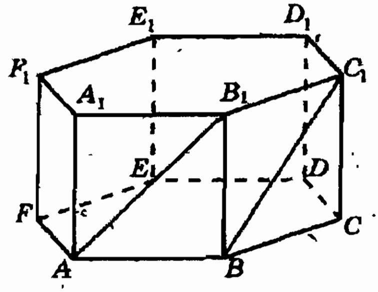
17. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и CE_1.



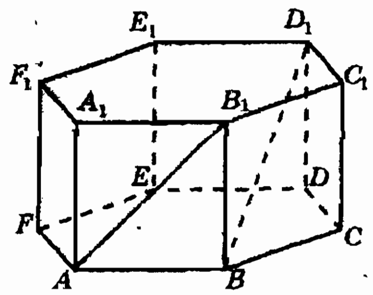
18. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и BE_1.



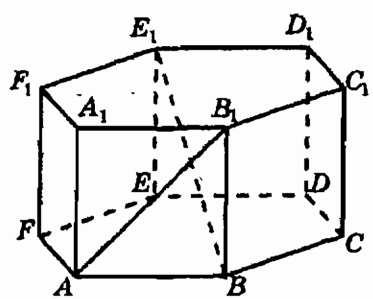
19. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.



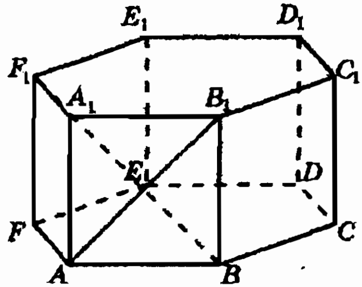
20. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1.



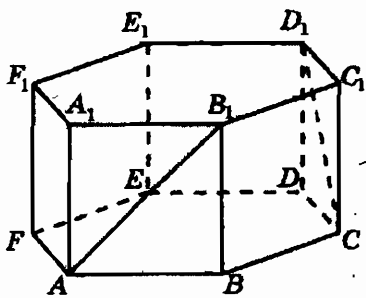
21. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BE_1.



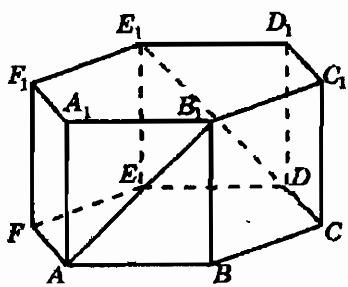
22. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BF_1.



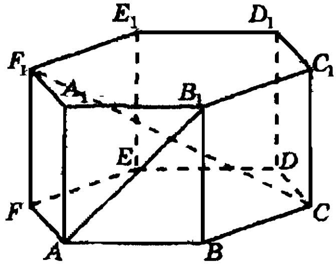
23. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и CD_1.



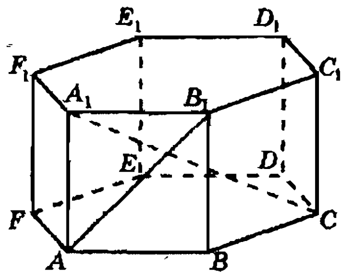
24. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и CE_1.



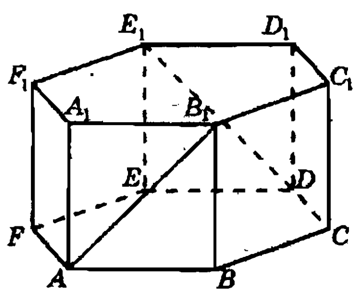
25. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и CF_1.



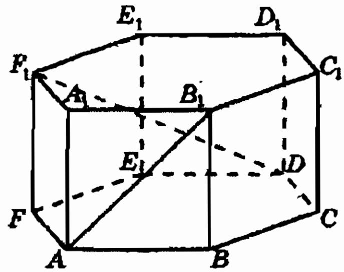
26. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и CA_1.



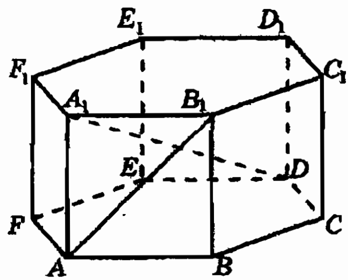
27. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и DE_1.



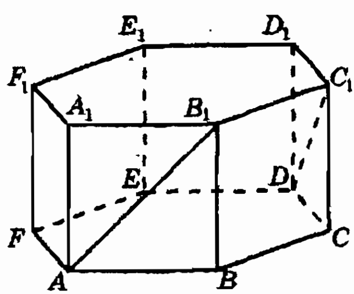
28. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и DF_1.



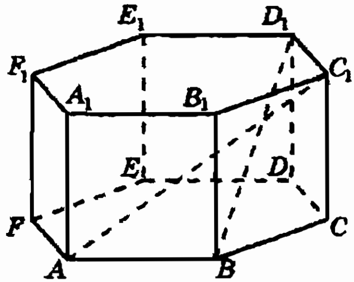
29. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и DA_1.



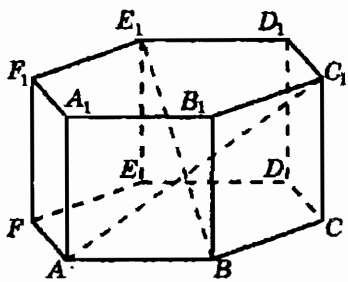
30. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и DC_1.



31. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и BD_1.

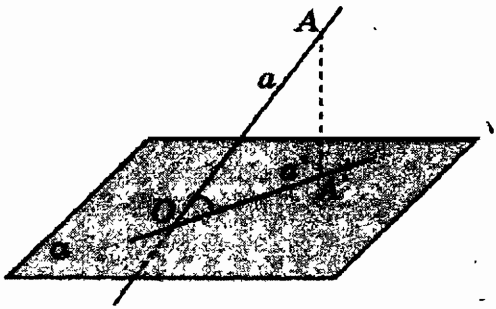


32. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и BE_1.



3. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

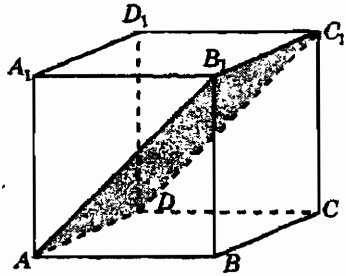
Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.



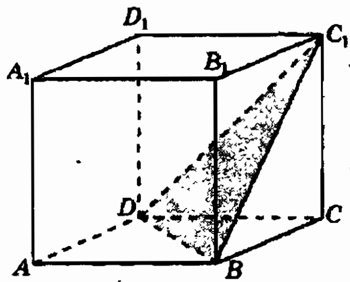
Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол, а угол между прямой и параллельной ей плоскостью считается равным нулю.

ЗАДАЧИ

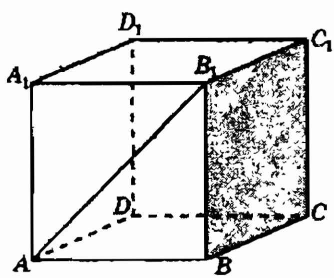
1. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.



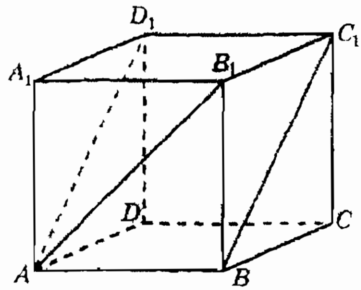
2. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.



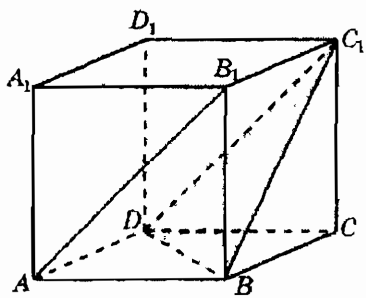
3. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCC_1.



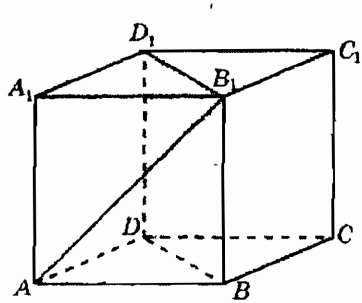
4. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.



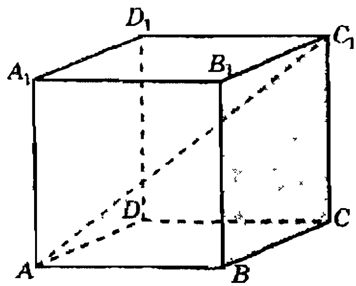
5. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BC_1D.



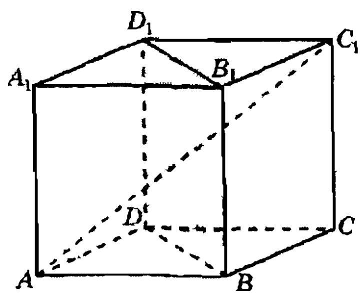
6. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BB_1D_1.



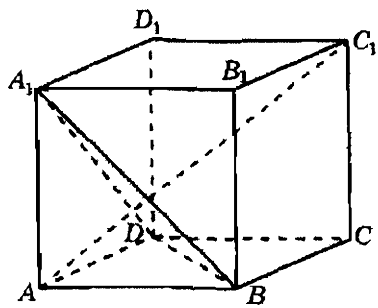
7. В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.



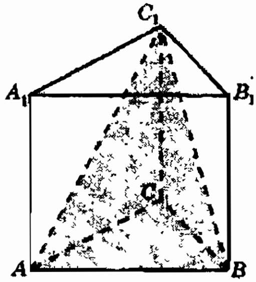
8. В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BB_1D_1.



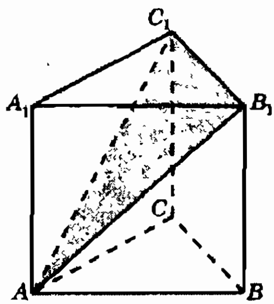
9. В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BA_1D.



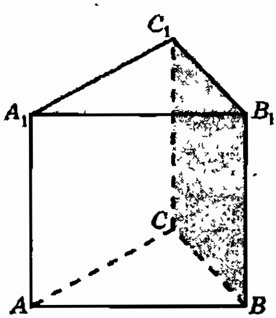
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1.



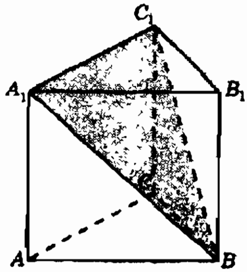
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.



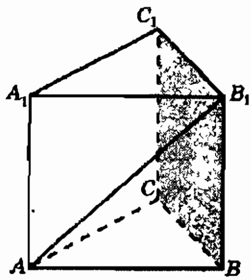
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью BB_1C_1.



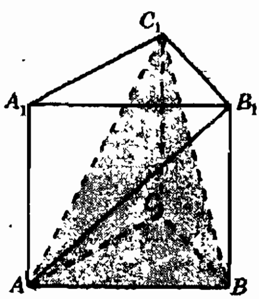
13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью A_1BC_1.



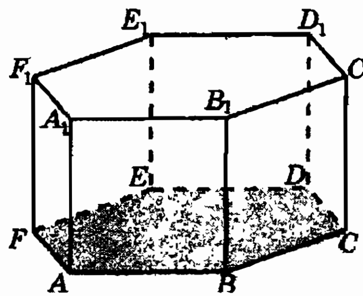
14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BB_1C_1.



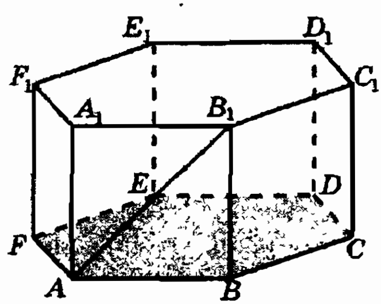
15. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.



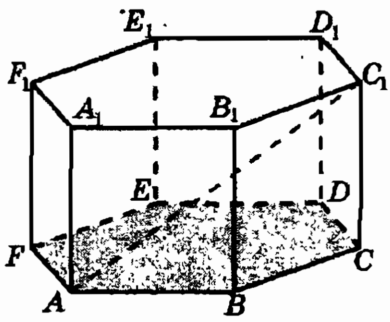
16. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC.



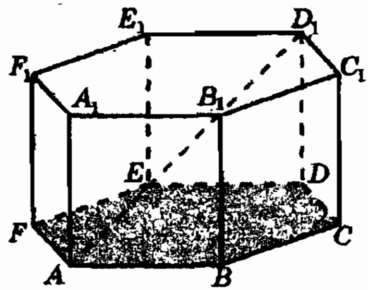
17. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC.



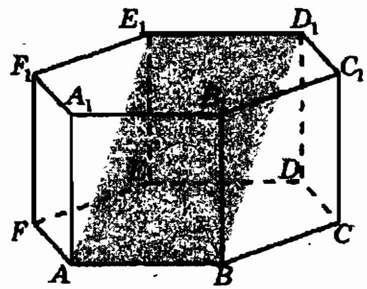
18. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC.



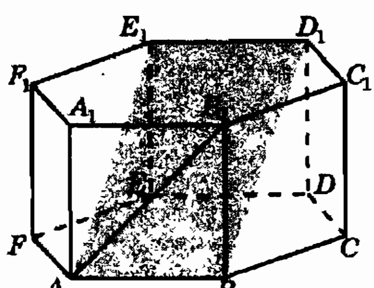
19. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью ABC.



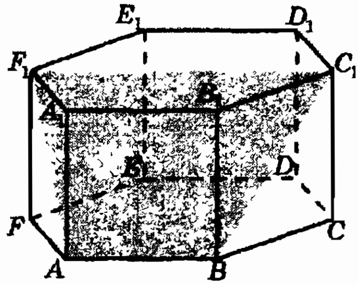
20. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABD_1.



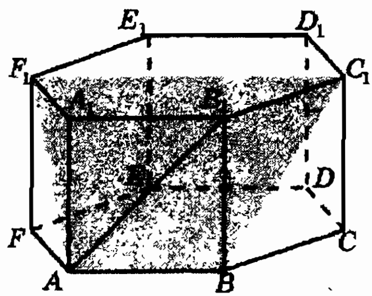
21. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABD_1.



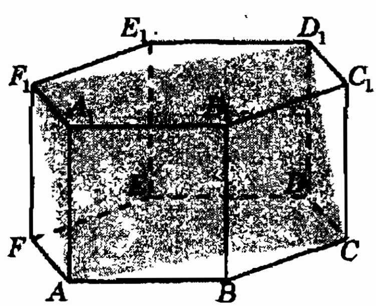
22. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1.



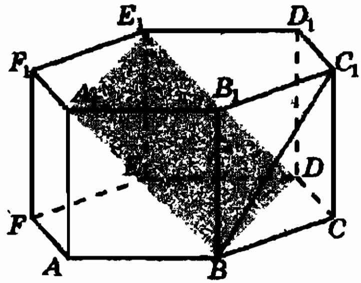
23. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.



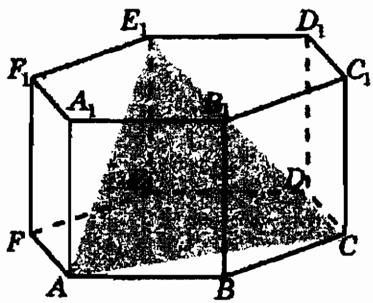
24. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ACD_1.



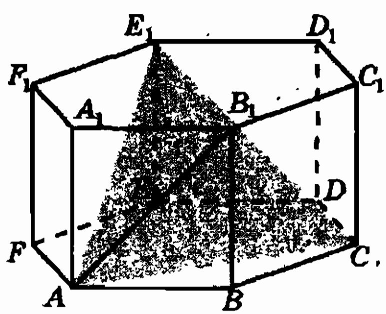
25. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью BDE_1.



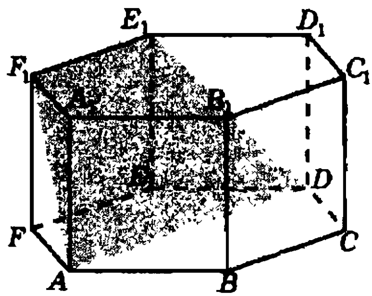
26. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ACE_1.



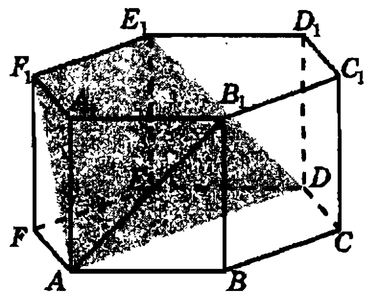
27. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ACE_1.



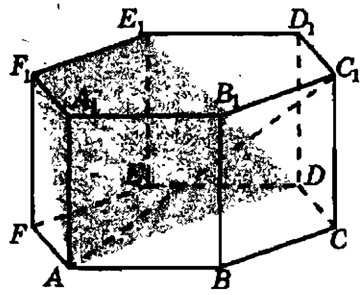
28. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ADE_1.



29. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ADE_1.

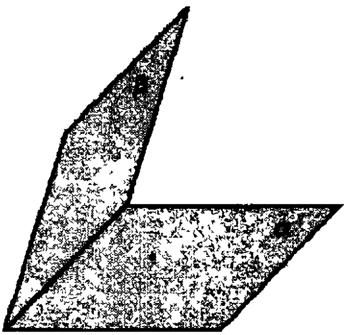


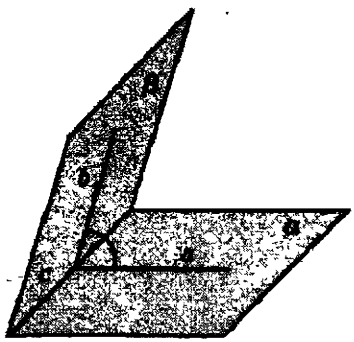
30. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью ADE_1.



4. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой.





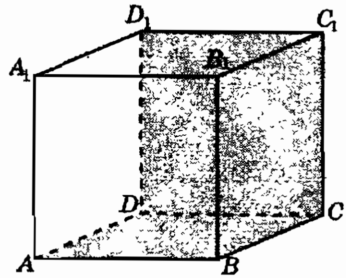
Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный лучами с вершиной на граничной прямой, стороны которого лежат на гранях двугранного угла и перпендикулярны граничной прямой.

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

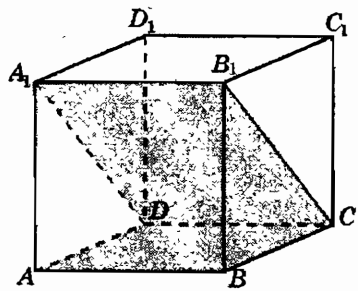
Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

ЗАДАЧИ

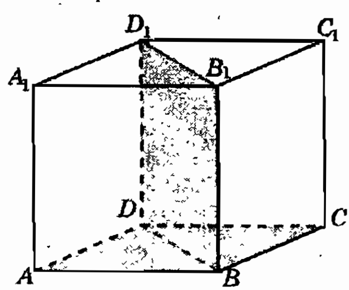
1. В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и CDD_1.



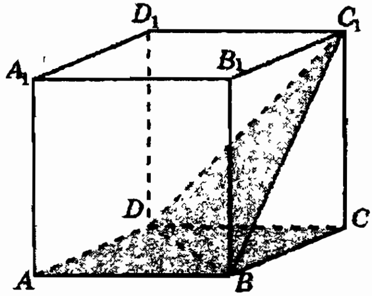
2. В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и CDA_1.



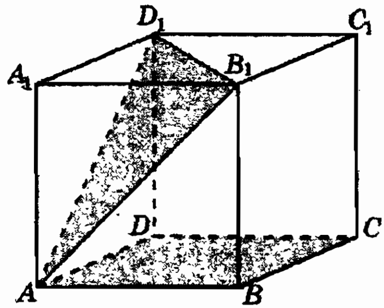
3. В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и BDD_1.



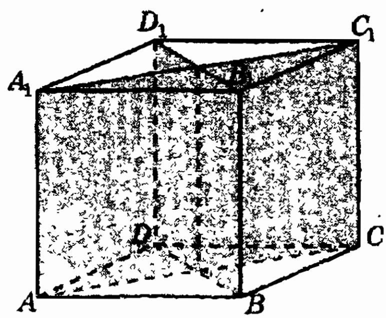
4. В кубе $A\ldots D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и BC_1D.



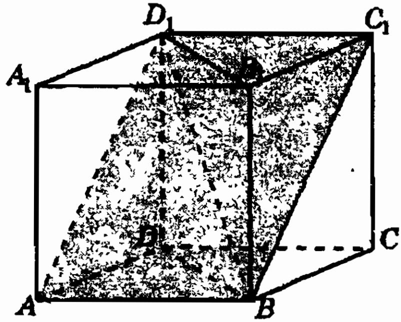
5. В кубе $A\ldots D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и AB_1D_1.



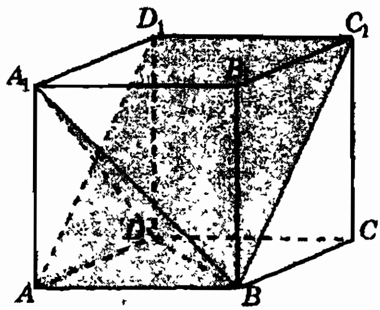
6. В кубе $A\ldots D_1$ найдите углы между плоскостями ACC_1 и BDD_1.



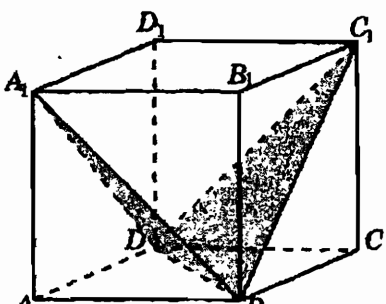
7. В кубе $A \dots D_1$ найдите углы между плоскостями ABC_1 и BB_1D_1.



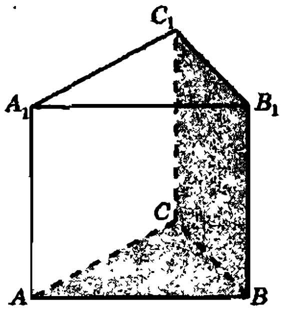
8. В кубе $A \dots D_1$ найдите углы между плоскостями BC_1D_1 и BA_1D.



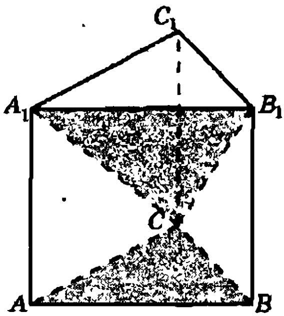
9. В кубе $A \dots D_1$ найдите углы между плоскостями BC_1D и BA_1D.



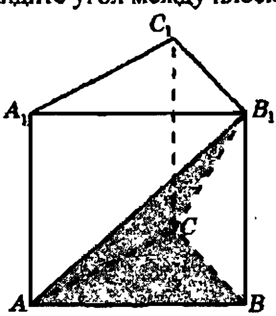
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BB_1C_1.



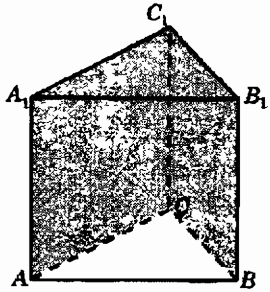
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и A_1B_1C.



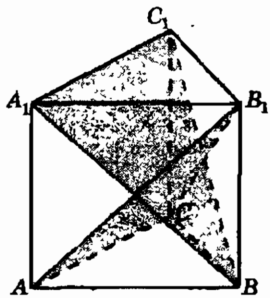
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и ACB_1.



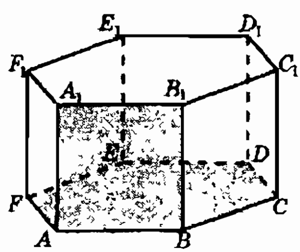
13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и BCC_1.



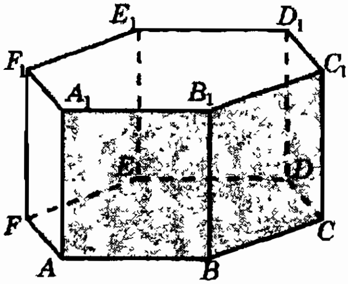
14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACB_1 и A_1C_1B.



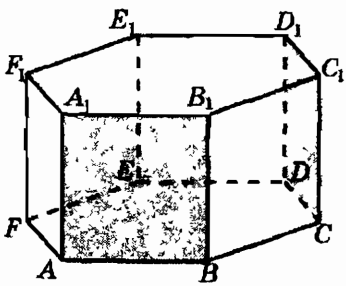
15. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и ABB_1.



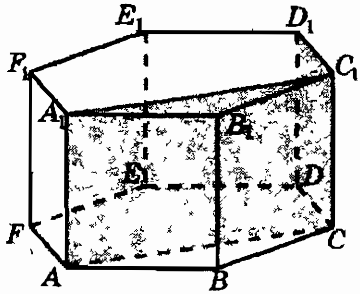
16. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABB_1 и BCC_1



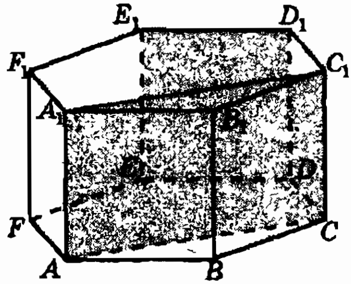
17. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABB_1 и CDD_1.



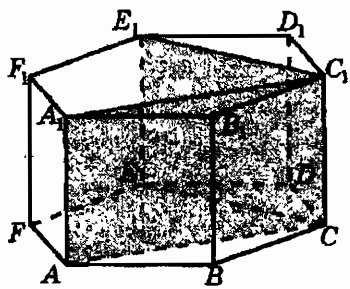
18. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и CDD_1.



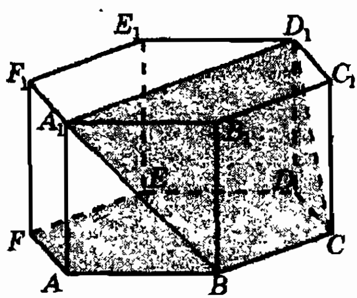
19. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и DEE_1.



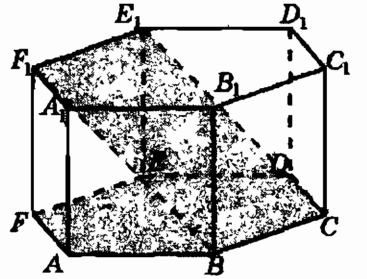
20. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и CEE_1.



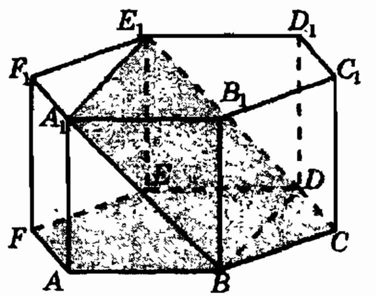
21. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BCD_1.



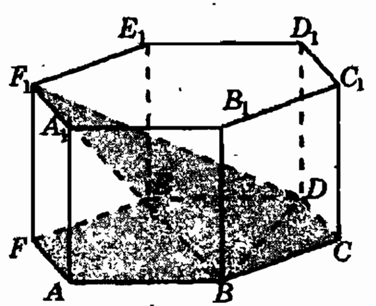
22. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BCE_1.



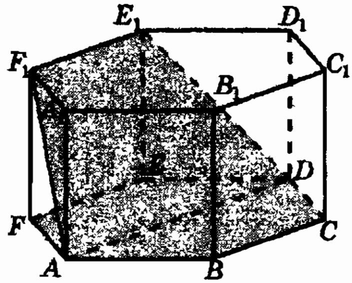
23. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BDE_1.



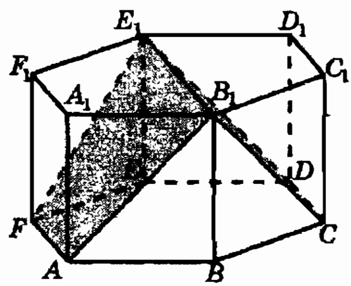
24. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BDF_1.



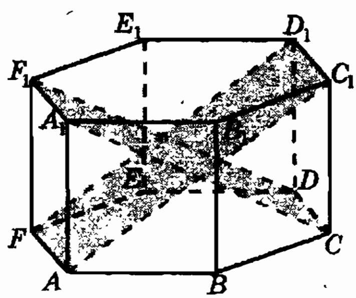
25. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и ADE_1.



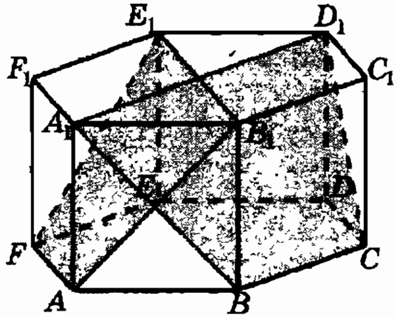
26. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями CDE_1 и AFE_1.



27. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями CDF_1 и AFD_1.

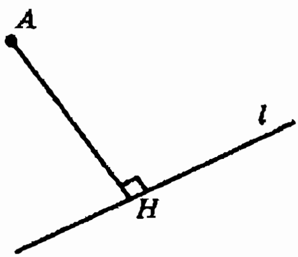


28. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BCD_1 и AFE_1.



5. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

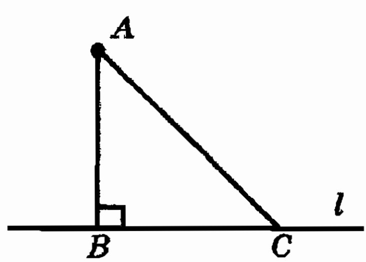
Расстоянием от точки до прямой в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.



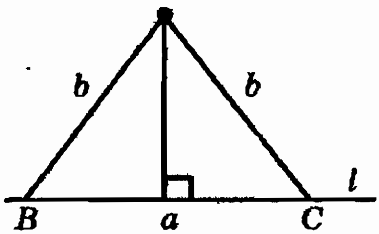
Для нахождения расстояния от точки A до прямой l перпендикуляр AH, опущенный из данной точки на данную прямую, представляют в качестве высоты треугольника, одной вершиной которого является точка A, а сторона BC, противолежащая этой вершине, лежит на прямой l. Зная стороны этого треугольника, можно найти и его высоту.

При этом возможны следующие случаи:

1. Треугольник ABC – прямоугольный, угол B – прямой. В этом случае искомым перпендикуляром является сторона AB.



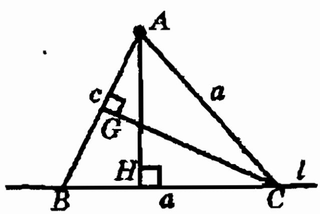
2. Треугольник ABC – равнобедренный, $AB = AC$. Пусть $AB = AC = b$, $BC = a$.



Искомый перпендикуляр находится из прямоугольного треугольника ABH:

$$AH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

3. Треугольник ABC – равнобедренный, $AC = BC$. Пусть $AB = c$, $AC = BC = a$.



Сначала найдем высоту CG.

$$CG = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

Площадь треугольника ABC равна

$$\frac{1}{2}AB \cdot CG = \frac{1}{2}c\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{4a^2 - c^2}}{4}.$$

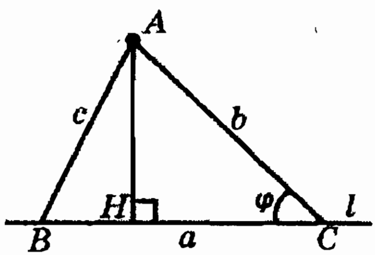
С другой стороны, площадь этого треугольника равна

$$\frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}a \cdot AH.$$

Приравнивая первое и второе значения площади, получим значение искомого перпендикуляра

$$AH = \frac{c\sqrt{4a^2 - c^2}}{2a}.$$

4. Треугольник ABC – произвольный. Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle ACB = \varphi$.



По теореме косинусов имеет место равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi.$$

Откуда

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

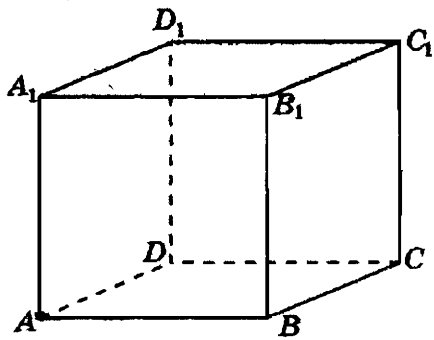
Зная косинус угла φ, можно найти его синус

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi},$$

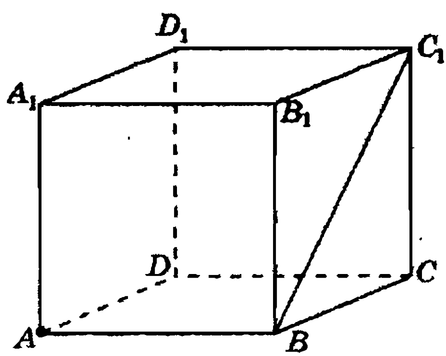
а зная синус φ, можно найти высоту $AH = b \cdot \sin\varphi$.

ЗАДАЧИ

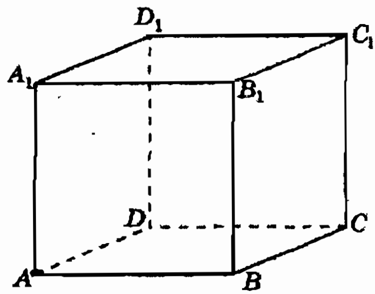
1. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BC.



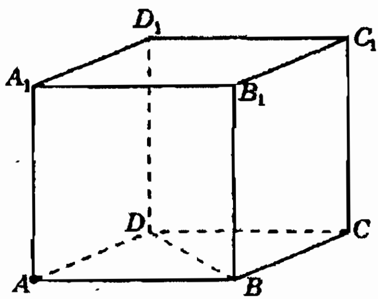
2. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.



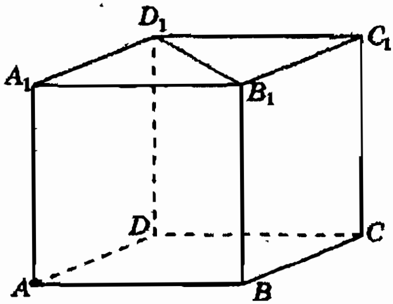
3. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.



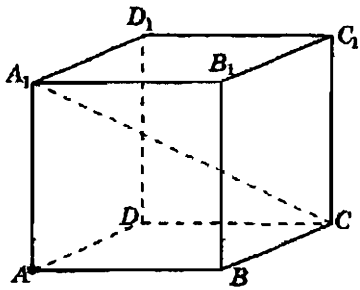
4. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD.



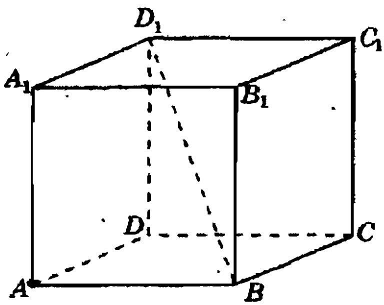
5. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой B_1D_1.



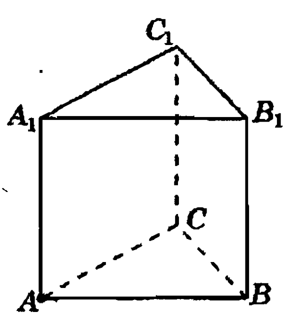
6. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой A_1C.



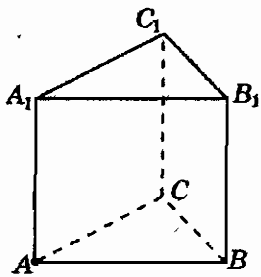
7. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1.



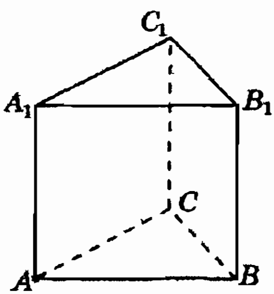
8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC.



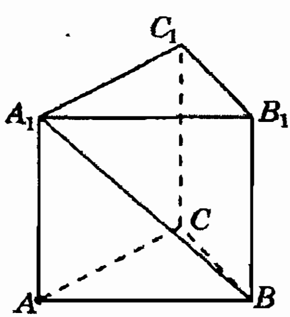
9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BB_1.



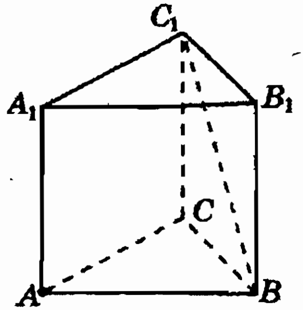
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.



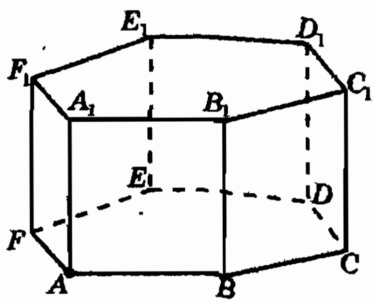
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BA_1.



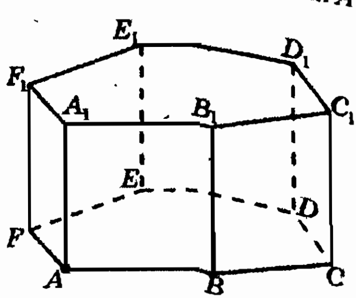
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.



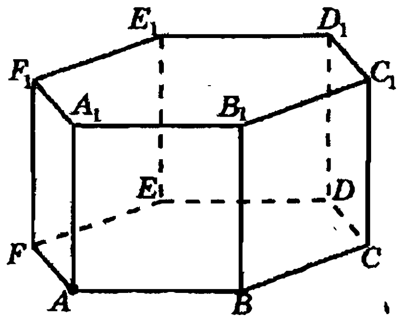
13. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BB_1.



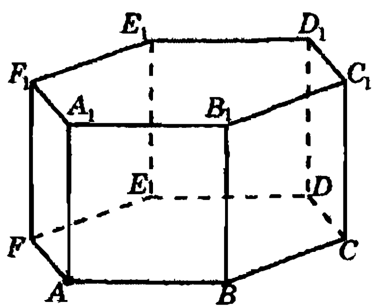
14. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CC_1.



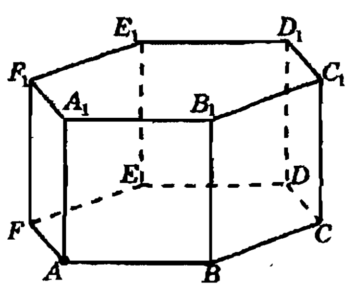
15. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой DD_1.



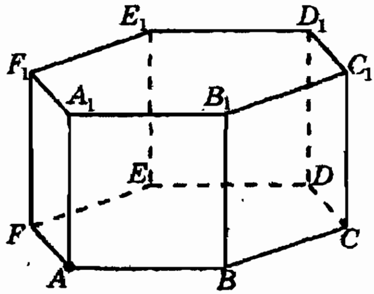
16. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой DE.



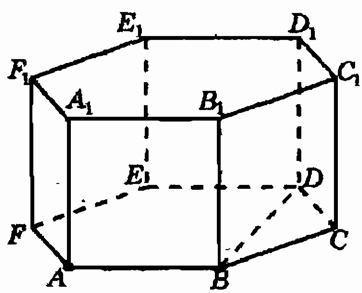
17. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой DC.



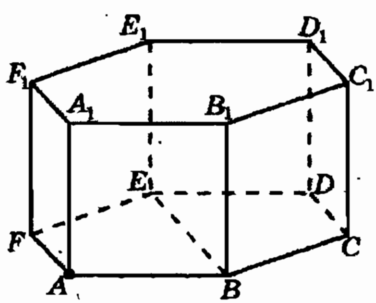
18. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC.



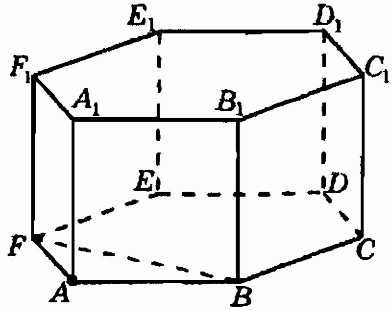
19. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BD.



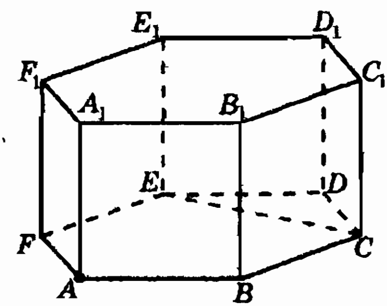
20. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BE.



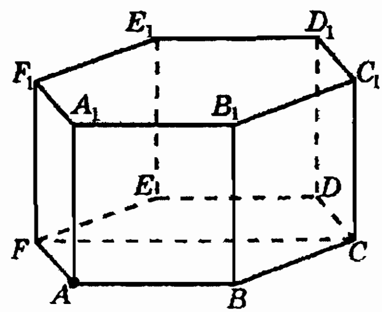
21. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BF



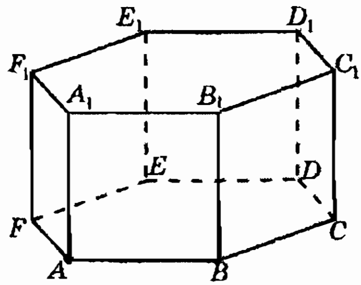
22. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CE.



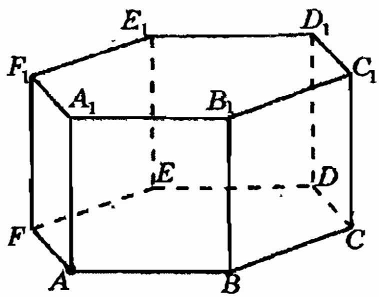
23. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CF.



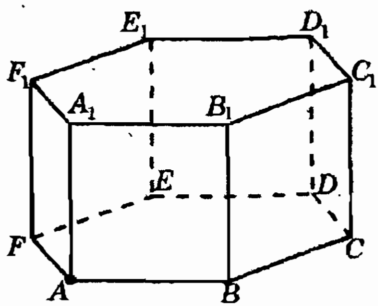
24. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой A_1B_1.



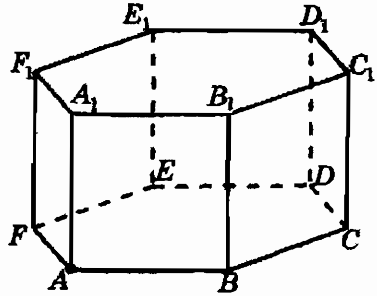
25. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой D_1E_1.



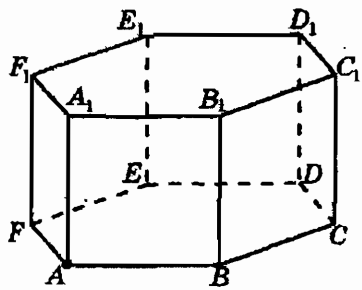
26. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1.



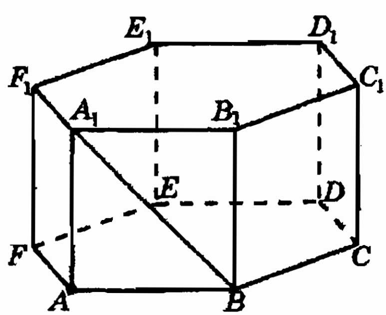
27. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.



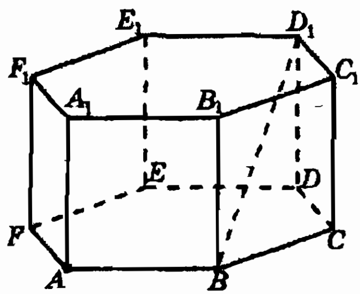
28. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой E_1F_1.



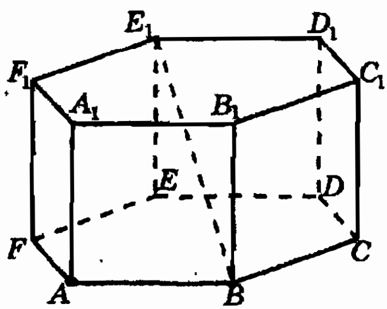
29. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BA_1.



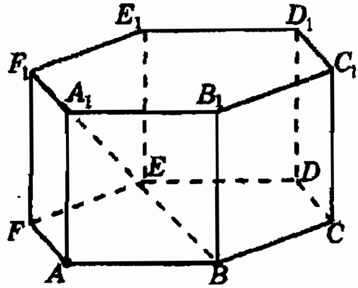
30. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BD_1.



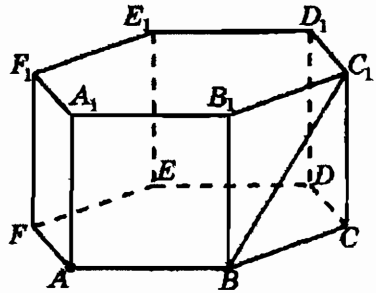
31. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BE_1.



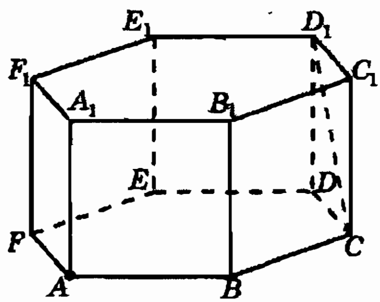
32. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BF_1.



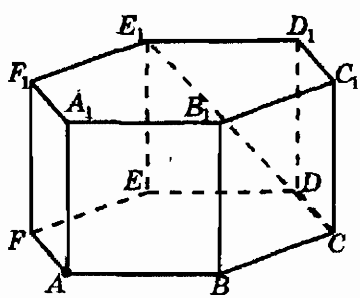
33. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.



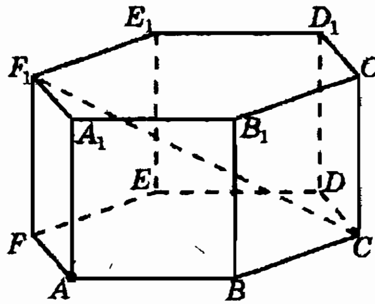
34. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CD_1.



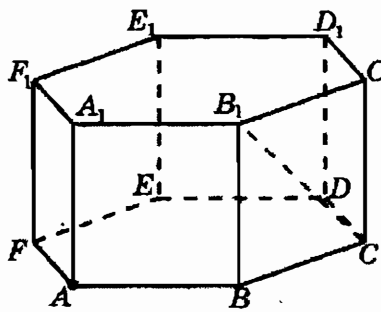
35. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CE_1.



36. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CF_1.

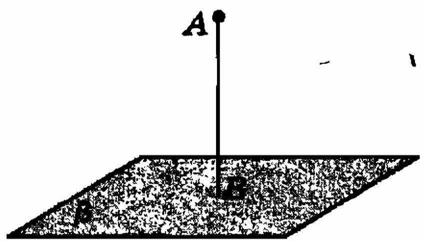


37. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CB_1.



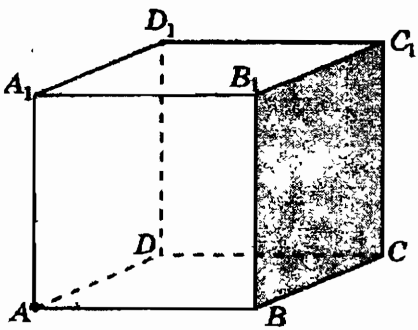
6. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Расстоянием от точки до плоскости в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

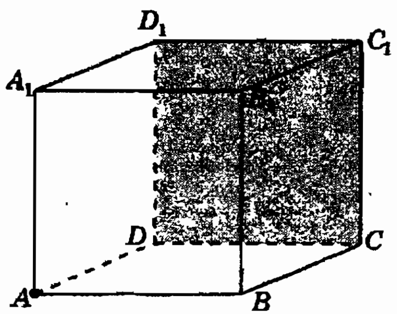


ЗАДАЧИ

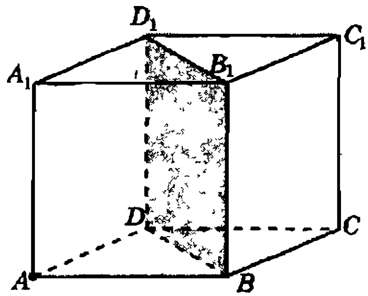
1. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BCC_1.



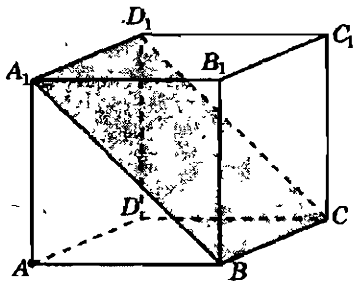
2. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от A точки до плоскости CDD_1.



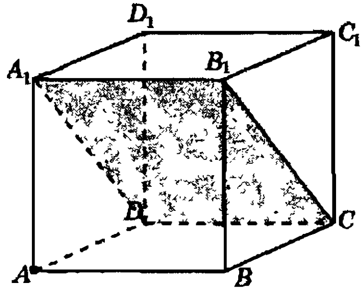
3. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BB_1D_1.



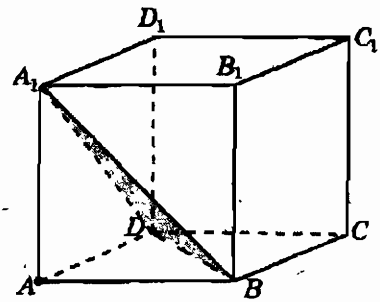
4. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BCD_1.



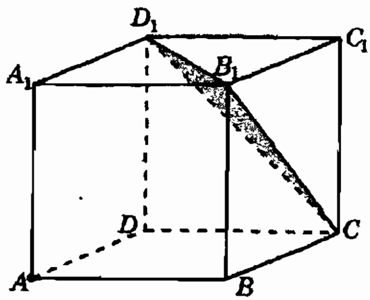
5. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости CDA_1.



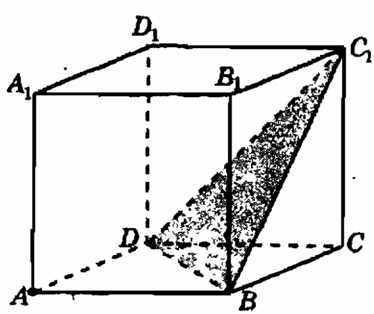
6. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1.



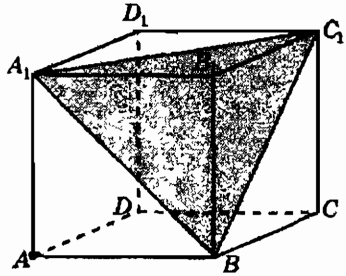
7. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости CB_1D_1.



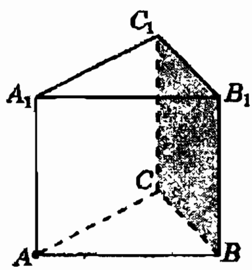
8. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BC_1D.



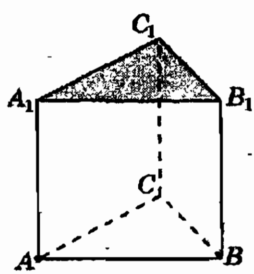
9. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BA_1C_1.



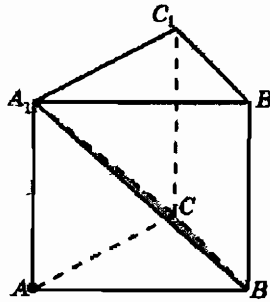
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BB_1C_1.



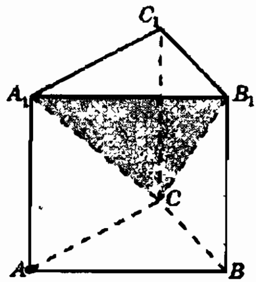
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости $A_1B_1C_1$.



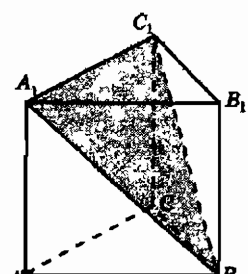
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BCA_1.



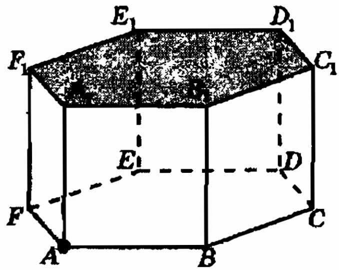
13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C.



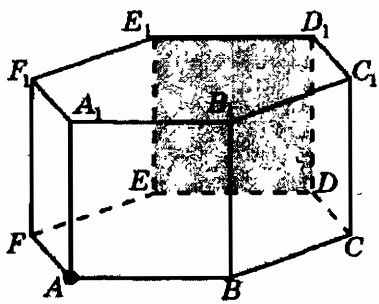
14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1C_1B.



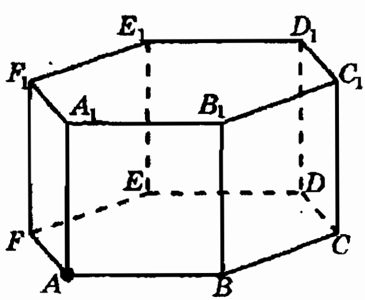
15. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости $A_1B_1C_1$.



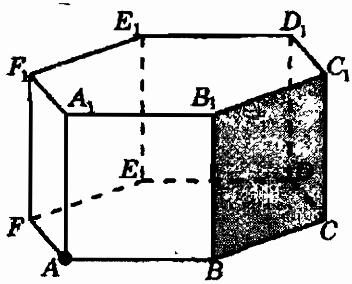
16. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости DEE_1.



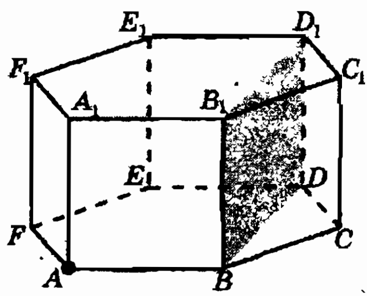
17. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости CDD_1.



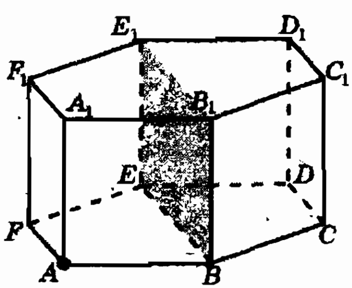
18. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BCC_1.



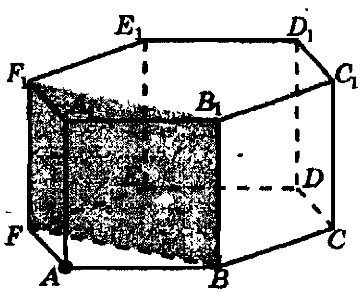
19. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BDD_1.



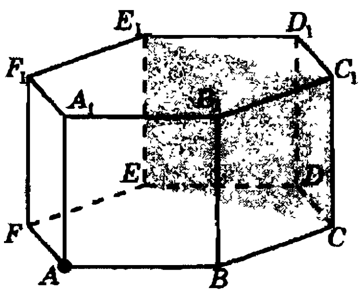
20. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BEE_1.



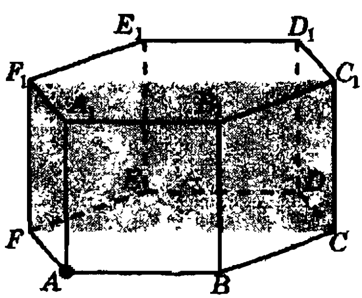
21. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFF_1.



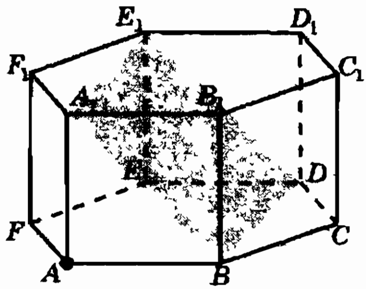
21. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости CEE_1.



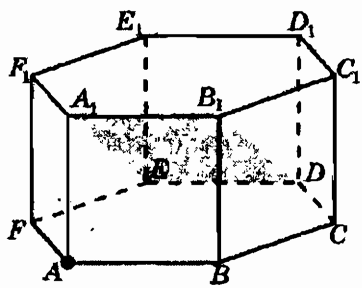
23. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости CFF_1.



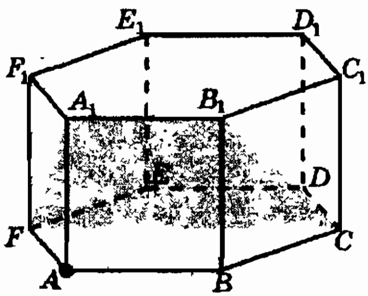
24. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BA_1E_1.



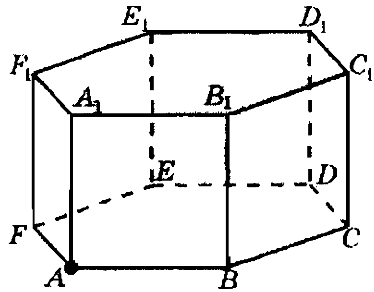
25. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1D.



26. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C.

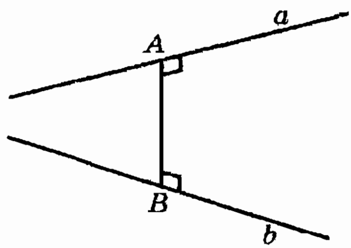


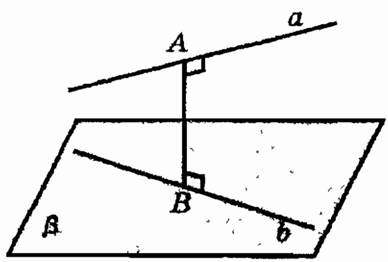
27. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости F_1C_1D



7. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Расстоянием между двумя непересекающимися прямыми в пространстве называется длина общего перпендикуляра, проведенного к этим прямым.





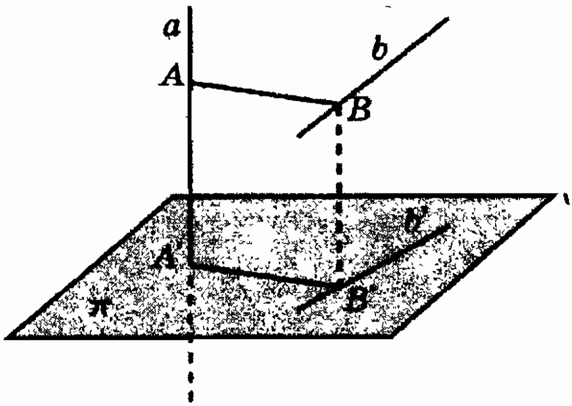
Для нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми используются следующие теоремы.

Теорема 1.

Если две скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях, то расстояние между ними равно расстоянию между этими плоскостями.

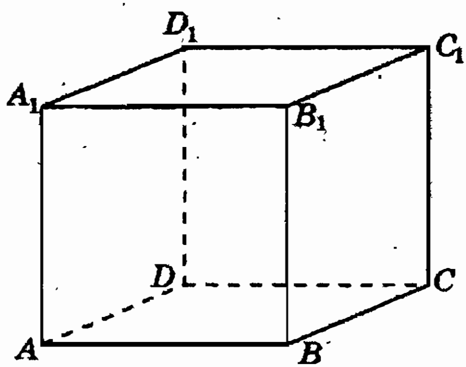
Теорема 2.

Если ортогональная проекция на плоскость π переводит прямую a в точку A', а прямую b в прямую b', то расстояние AB между скрещивающимися прямыми a и b равно расстоянию $A'B'$ от точки A' до прямой b'.

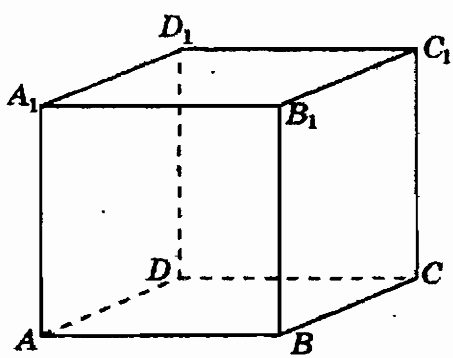


ЗАДАЧИ

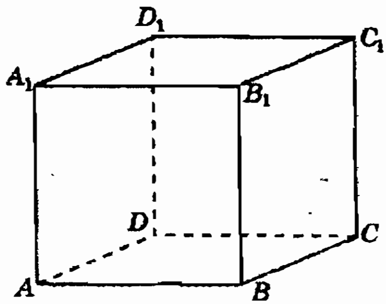
1. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BB_1.



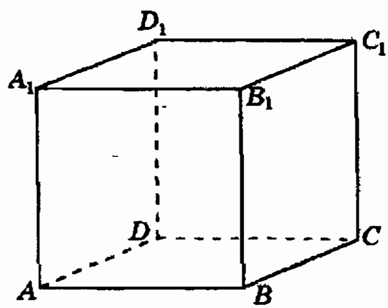
2. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и CC_1.



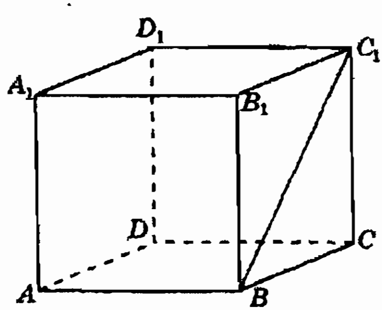
3. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC.



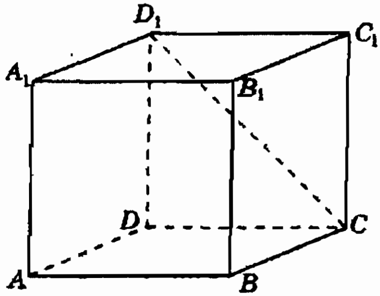
4. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и CD.



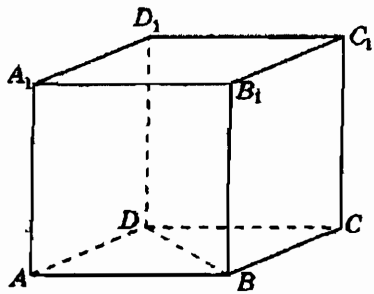
5. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.



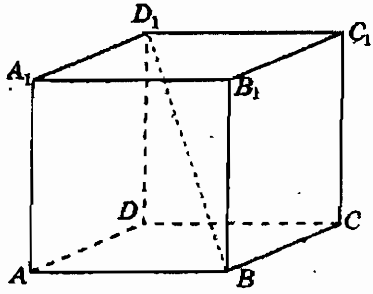
6. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и CD_1.



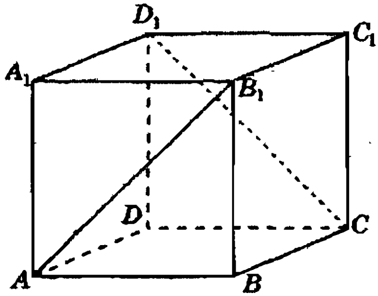
7. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD.



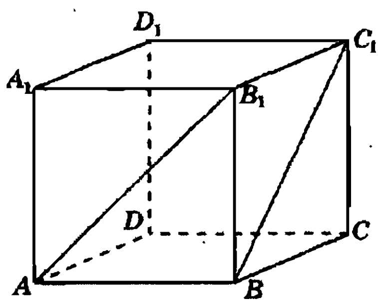
8. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1.



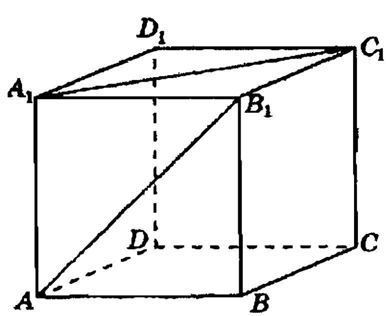
9. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и CD_1.



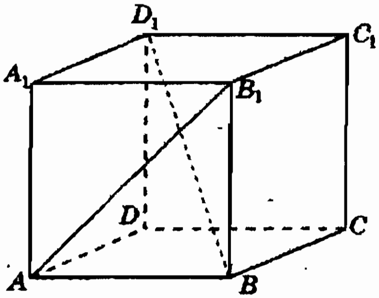
10. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.



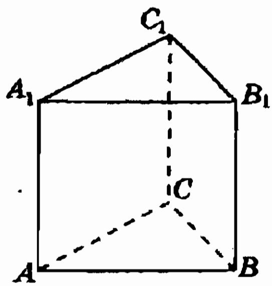
11. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и A_1C_1.



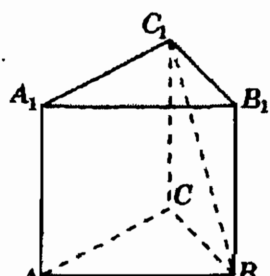
12. В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD_1.



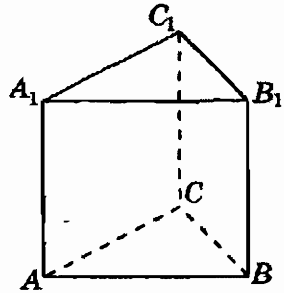
13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC.



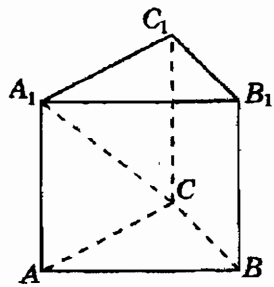
14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.



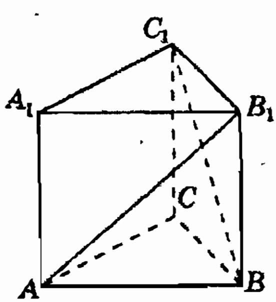
15. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и A_1C_1.



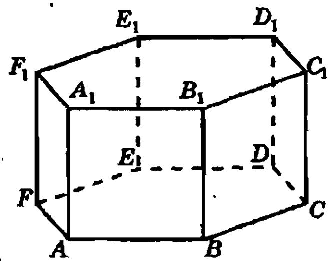
16. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и A_1C.



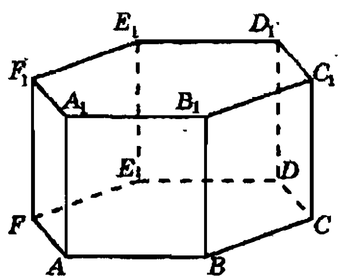
17. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.



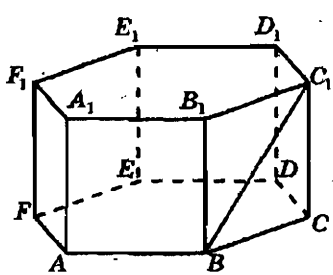
18. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и B_1C_1.



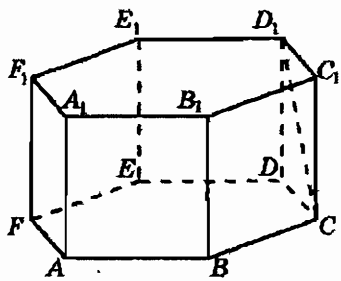
19. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и C_1D_1.



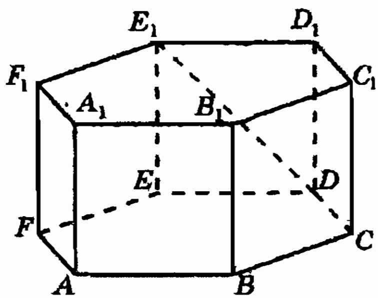
20. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.



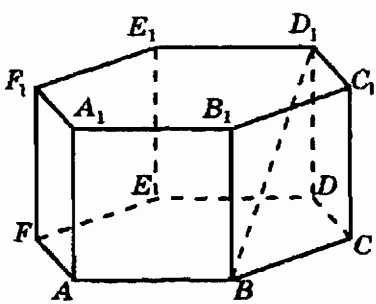
21. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и CD_1.



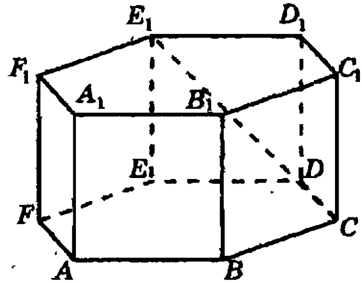
22. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и DE_1.



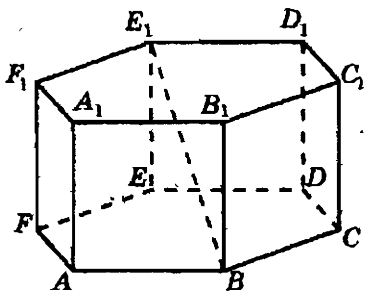
23. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1.



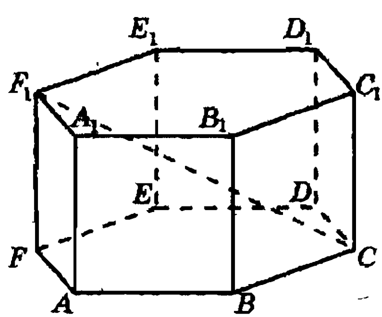
24. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и CE_1.



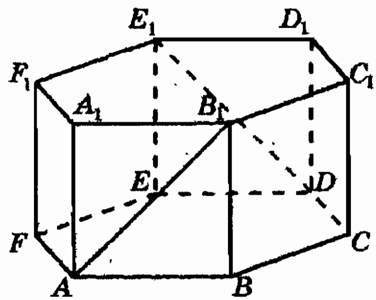
25. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BE_1.



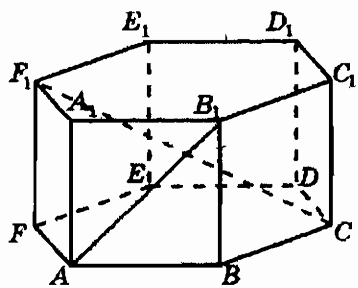
26. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и CF_1.



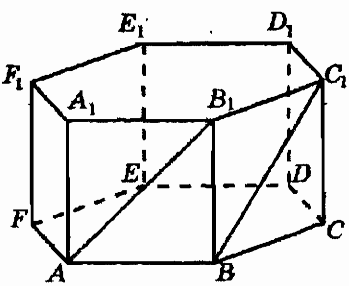
27. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и DE_1.



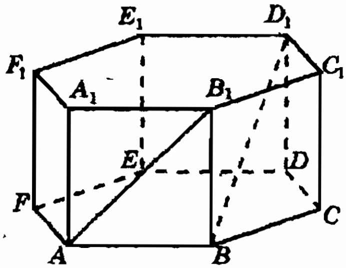
28. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и CF_1.



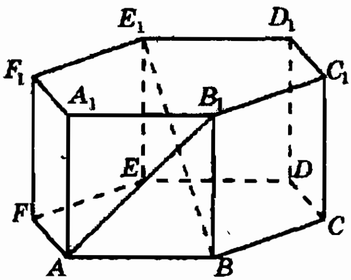
29. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.



30. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD_1.



31. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BE_1.



ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Прямые AB и CC_1 скрещиваются, так как прямая AB лежит в плоскости грани $ABCD$, а прямая CC_1 пересекает эту плоскость в точке C, не принадлежащей этой прямой.

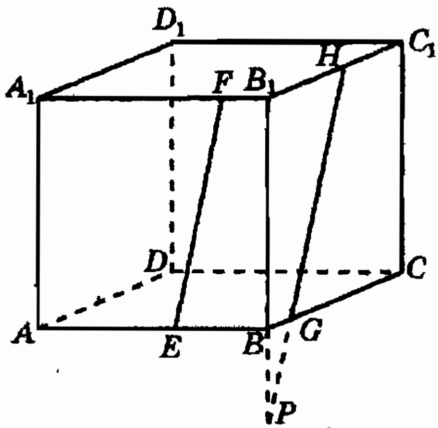
2. Прямые AC и BD_1 скрещиваются, так как прямая AC лежит в плоскости грани $ABCD$, а прямая BD_1 пересекает эту плоскость в точке B, не принадлежащей этой прямой.

3. Пересекаются в центре куба.

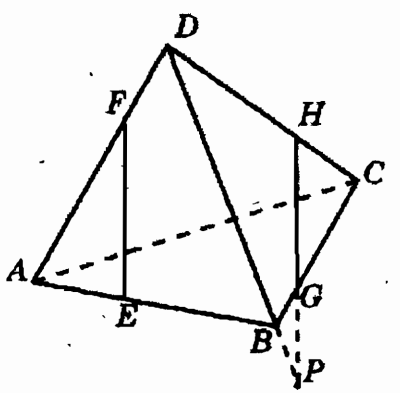
4. Прямые AB и CD скрещиваются, так как прямая AB лежит в плоскости грани ABC, а прямая CD пересекает эту плоскость в точке C, не принадлежащей этой прямой.

5. Прямые a и b скрещиваются, так как прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей этой прямой.

6. Прямые EF и GH скрещиваются, так как прямая EF лежит в плоскости грани ABB_1A_1, а прямая GH пересекает эту плоскость в точке P, не принадлежащей этой прямой.



7. Прямые EF и GH скрещиваются, так как прямая EF лежит в плоскости грани ABD, а прямая GH пересекает эту плоскость в точке P, не принадлежащей этой прямой.



8. Прямые EH и GF скрещиваются.

9. A_1B_1, CD, C_1D_1.

10. Каждое ребро участвует в трех парах параллельных прямых. У куба имеется 12 ребер.

Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно

$$\frac{12\cdot 3}{2}=18.$$

11. Каждое ребро оснований участвует в одной паре параллельных прямых. Каждое боковое ребро участвует в двух парах параллельных прямых.

Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно

$$\frac{6}{2}+\frac{3\cdot 2}{2}=6.$$

12. Для каждого ребра имеется только одно ребро, ему параллельное. У октаэдра 12 ребер.

Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно 6.

13. Для каждого ребра имеется только одно ребро, ему параллельное. У икосаэдра 30 ребер.

Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно 15.

14. Для каждого ребра имеется только одно ребро, ему параллельное. У додекаэдра 30 ребер.

Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно 15.

15. A_1B_1, DE, D_1E_1, CF, C_1F_1.

16. Каждое ребро оснований участвует в трех парах параллельных прямых. Каждое боковое ребро участвует в пяти парах параллельных прямых.

Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно

$$\frac{12 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2} = 33.$$

17. AB и CD, BC и AD, AC и BD.

18. A_1D_1, B_1C_1, DD_1, CC_1.

19. Каждое ребро участвует в четырех парах скрещивающихся прямых. У куба имеется 12 ребер.

Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно

$$\frac{12 \cdot 4}{2} = 24.$$

20. Каждое ребро оснований участвует в трех парах скрещивающихся прямых. Каждое боковое ребро участвует в двух парах скрещивающихся прямых.

Следовательно, искомое число пар скрещивающихся прямых равно

$$\frac{6 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} = 12.$$

21. Для каждого ребра имеется четыре ребра, с ним скрещивающихся. У октаэдра 12 ребер.

Следовательно, искомое число пар скрещивающихся прямых равно

$$\frac{12 \cdot 4}{2} = 24.$$

22. Для каждого ребра имеется 20 ребер, с ним скрещивающихся. У икосаэдра 30 ребер.

Следовательно, искомое число пар скрещивающихся прямых равно

$$\frac{30 \cdot 20}{2} = 300.$$

23. Для каждого ребра имеется 24 ребра, с ним скрещивающихся. У додекаэдра 30 ребер.

Следовательно, искомое число пар скрещивающихся прямых равно

$$\frac{30 \cdot 24}{2} = 360.$$

24. Каждое ребро оснований участвует в 8 парах скрещивающихся прямых. Каждое боковое ребро участвует в 8 парах скрещивающихся прямых.

Следовательно, искомое число пар скрещивающихся прямых равно

$$\frac{12 \cdot 8}{2} + \frac{6 \cdot 8}{2} = 72.$$

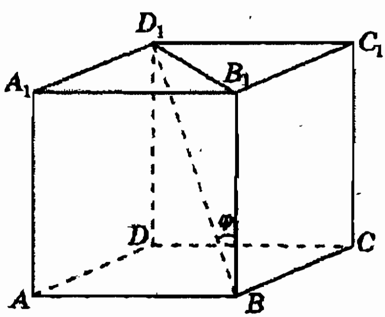
2. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

1. A_1C_1 и B_1D_1 являются диагоналями квадрата $A_1B_1C_1D_1$, следовательно, угол между ними равен 90°.

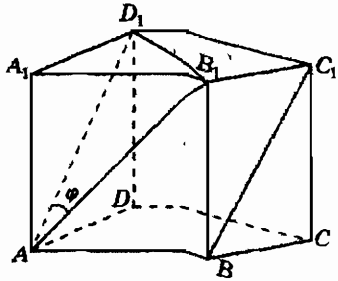
2. Угол между прямыми AA_1 и BC равен углу между прямыми BB_1 и BC, который равен 90°.

3. Угол между прямыми AA_1 и BC_1 равен углу между прямыми BB_1 и BC_1, который равен 45°.

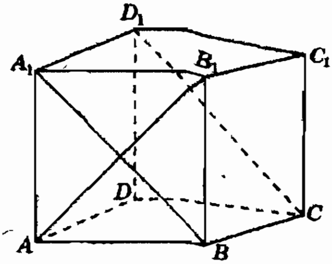
4. Угол между прямыми AA_1 и BD_1 равен углу φ между прямыми BB_1 и BD_1. Для его нахождения рассмотрим прямоугольный треугольник BB_1D_1. Его прилежащий катет BB_1 равен 1, а гипотенуза BD_1 равна $\sqrt{3}$. Следовательно, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



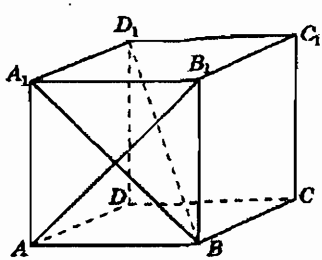
5. Угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен углу φ между прямыми AB_1 и AD_1. Для его нахождения рассмотрим треугольник AB_1D_1. Он является равносторонним, и, следовательно, искомый угол φ равен 60°.



6. Угол между прямыми AB_1 и CD_1 равен углу между прямыми AB_1 и BA_1, который равен 90°.



7. Докажем, что угол между прямыми AB_1 и BD_1 равен 90°. Для этого воспользуемся теоремой о трех перпендикулярах, а именно, если ортогональная проекция наклонной на плоскость перпендикулярна прямой, лежащей в этой плоскости, то и сама наклонная перпендикулярна этой прямой. Ортогональная проекция BD_1 на плоскость ABB_1 есть прямая A_1B, перпендикулярная AB_1. Следовательно, прямая BD_1 также будет перпендикулярна AB_1, т.е. искомый угол равен 90°.

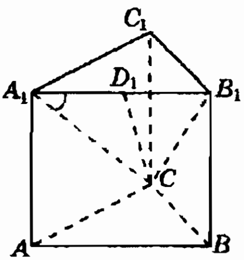


8. Угол между прямыми AA_1 и BC равен углу между прямыми BB_1 и BC, который равен $90°$.

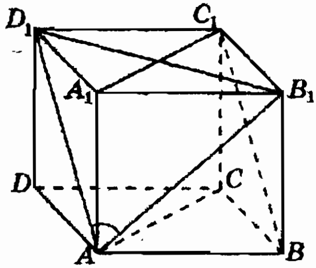
9. Угол между прямыми AA_1 и BC_1 равен углу между прямыми BB_1 и BC_1, который равен $45°$.

10. Угол между прямыми AB и A_1C_1 равен углу между прямыми AB и AC, который равен $60°$.

11. Угол φ между прямыми AB и A_1C равен углу B_1A_1C. В треугольнике B_1A_1C проведем высоту CD_1. В прямоугольном треугольнике A_1CD_1 катет A_1D_1 равен $\frac{1}{2}$, гипотенуза A_1C равна $\sqrt{2}$. Следовательно, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



12. Достроим призму до 4-х угольной призмы. Проведем AD_1 параллельно BC_1. Искомый угол φ будет равен углу B_1AD_1. В треугольнике AB_1D_1: $AB_1 = AD_1 = \sqrt{2}$, $B_1D_1 = \sqrt{3}$. По теореме косинусов получаем, что $\cos\varphi = \frac{1}{4}$.

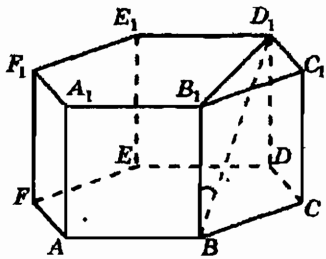


13. Угол между прямыми AA_1 и B_1C_1 равен углу между прямыми BB_1 и B_1C_1, который равен 90°.

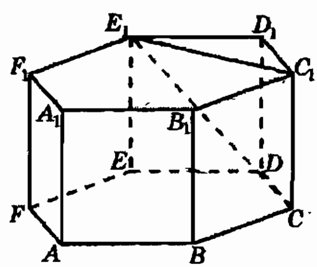
14. Угол между прямыми AA_1 и BC_1 равен углу между прямыми BB_1 и BC_1, который равен 45°.

15. Угол между прямыми AA_1 и DE_1 равен углу между прямыми AA_1 и BA_1, который равен 45°.

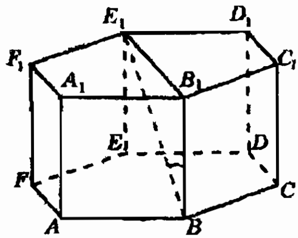
16. Угол φ между прямыми AA_1 и BD_1 равен углу B_1BD_1. В прямоугольном треугольнике B_1BD_1 имеем: $B_1D_1 = \sqrt{3}$, $B_1B = 1$; $BD_1 = 2$. Следовательно, $\varphi = 60°$.



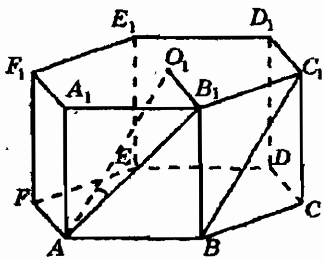
17. Угол между прямыми AA_1 и CE_1 равен углу между прямыми CC_1 и CE_1. Для его нахождения рассмотрим прямоугольный треугольник CC_1E_1. Его катет CC_1 равен 1, а гипотенуза CE_1 равна 2. Следовательно, искомый угол равен 60°.



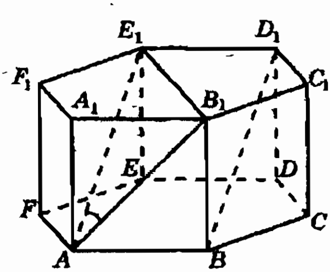
18. Угол φ между прямыми AA_1 и BE_1 равен углу B_1BE_1. В прямоугольном треугольнике B_1BE_1 катет B_1E_1 равен 2; катет B_1B равен 1. Следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = 2$.



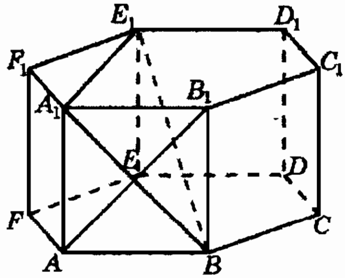
19. Пусть O_1 – центр правильного шестиугольника $A_1 \ldots F_1$. Тогда AO_1 параллельна BC_1, и искомый угол φ между прямыми AB_1 и BC_1 равен углу B_1AO_1. В равнобедренном треугольнике B_1AO_1 имеем: $O_1B_1 = 1$; $AB_1 = AO_1 = \sqrt{2}$. Применяя теорему косинусов, получим $\cos\varphi = \dfrac{3}{4}$.



20. Угол φ между прямыми AB_1 и BD_1 равен углу B_1AE_1. В треугольнике B_1AE_1 имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$; $B_1E_1 = AE_1 = 2$. Следовательно, $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

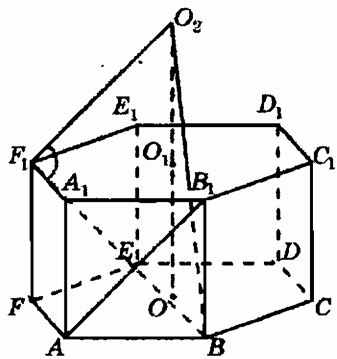


21. Докажем, что угол между прямыми AB_1 и BE_1 равен $90°$. Для этого воспользуемся теоремой о трех перпендикулярах, а именно, если ортогональная проекция наклонной на плоскость перпендикулярна прямой, лежащей в этой плоскости, то и сама наклонная перпендикулярна этой прямой. Ортогональная проекция BE_1 на плоскость ABB_1 есть прямая A_1B, перпендикулярная AB_1. Следовательно, прямая BE_1 также будет перпендикулярна прямой AB_1, т.е. искомый угол равен $90°$.

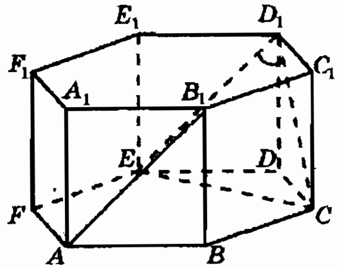


22. Пусть O, O_1 – центры оснований призмы. На оси призмы отложим $O_1O_2 = OO_1$. Тогда прямая F_1O_2 будет параллельна прямой AB_1, и искомый угол φ будет равен углу BF_1O_2. В треугольнике BF_1O_2 имеем: $BO_2 = \sqrt{5}$; $BF_1 = 2$; $F_1O_2 = \sqrt{2}$.

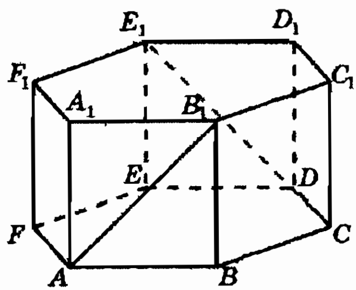
По теореме косинусов имеем $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$.



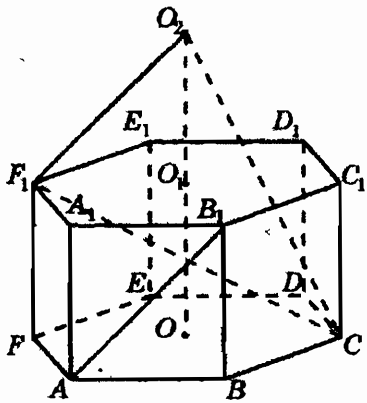
23. Угол φ между прямыми AB_1 и CD_1 равен углу CD_1E. В треугольнике CD_1E имеем: $CD_1 = ED_1 = \sqrt{2}$; $CE = \sqrt{3}$. По теореме косинусов имеем $\cos\varphi = \frac{1}{4}$.



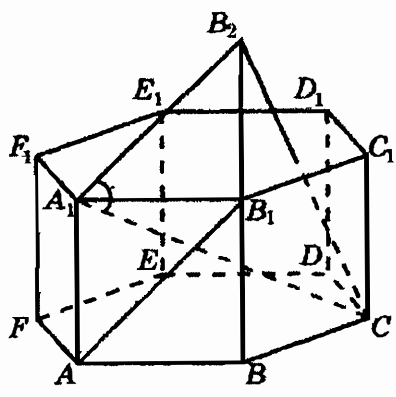
24. Заметим, что прямая CE_1 параллельна прямой BF_1. Следовательно, искомый угол φ между прямыми AB_1 и CE_1 равен углу между AB_1 и BF_1, который был найден ранее, а именно, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{8}$.



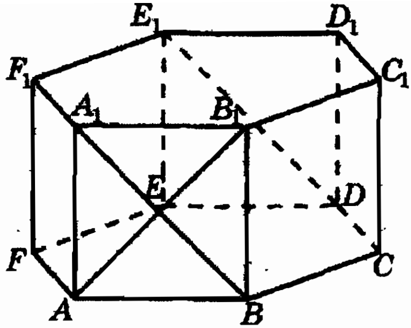
25. Пусть O, O_1 – центры оснований призмы. На оси призмы отложим $O_1O_2 = OO_1$. Тогда прямая F_1O_2 будет параллельна прямой AB_1, и искомый угол φ будет равен углу CF_1O_2. В треугольнике CF_1O_2 имеем: $CO_2 = CF_1 = \sqrt{5}$; $F_1O_2 = \sqrt{2}$. Тогда $\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{10}$.



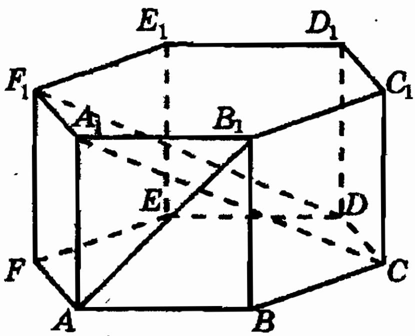
26. На продолжении BB_1 отложим $B_1B_2 = BB_1$. Тогда прямая A_1B_2 будет параллельна прямой AB_1, и искомый угол φ между прямыми AB_1 и CA_1 будет равен углу CA_1B_2. В треугольнике CA_1B_2 имеем: $CA_1 = 2$; $CB_2 = \sqrt{5}$; $A_1B_2 = \sqrt{2}$. Тогда $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{8}$.



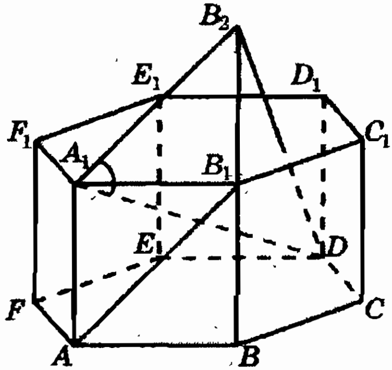
27. Угол между прямыми AB_1 и DE_1 равен углу между прямыми AB_1 и BA_1, который равен 90°.



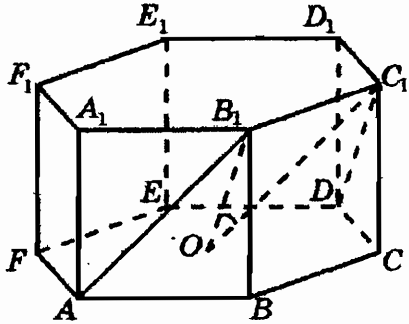
28. Заметим, что прямая DF_1 параллельна прямой CA_1. Следовательно, искомый угол φ между прямыми AB_1 и DF_1 равен углу между AB_1 и CA_1, который был найден ранее, а именно, $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$.



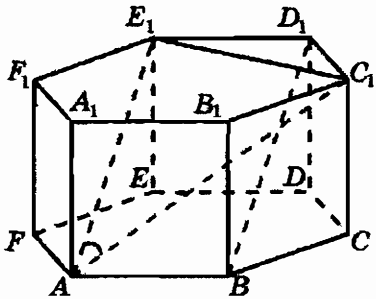
29. На продолжении BB_1 отложим $B_1B_2 = BB_1$. Тогда прямая A_1B_2 будет параллельна прямой AB_1, и искомый угол φ между прямыми AB_1 и DA_1 будет равен углу DA_1B_2. В треугольнике DA_1B_2 имеем: $DA_1 = \sqrt{5}$; $DB_2 = \sqrt{7}$; $A_1B_2 = \sqrt{2}$. Следовательно, искомый угол равен 90°.



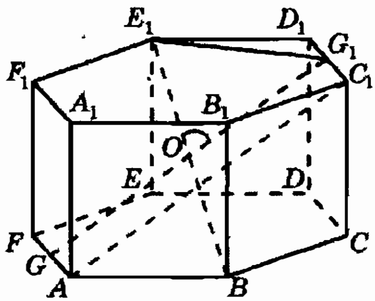
30. Пусть O – центр основания призмы. Отрезки OC_1 и OB_1 будут равны и параллельны отрезкам AB_1 и DC_1, соответственно. Искомый угол φ между прямыми AB_1 и DC_1 будет равен углу B_1OC_1. В треугольнике B_1OC_1 имеем: $OB_1 = OC_1 = \sqrt{2}$; $B_1C_1 = 1$. Тогда, по теореме косинусов $\cos\varphi = \frac{3}{4}$.



31. Заметим, что прямая AE_1 параллельна прямой BD_1. Следовательно, искомый угол φ между прямыми AC_1 и BD_1 равен углу C_1AE_1. В треугольнике C_1AE_1 имеем: $AC_1 = AE_1 = 2$; $C_1E_1 = \sqrt{3}$. По теореме косинусов имеем $\cos\varphi = \frac{5}{8}$.

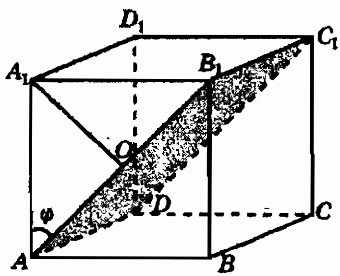


32. Заметим, что отрезок GG_1, проходящий через середины ребер AF и C_1D_1, параллелен и равен отрезку AC_1. Искомый угол φ между прямыми AC_1 и BE_1 равен углу G_1OE_1. В треугольнике G_1OE_1 имеем: $OE_1 = 1$; $OG_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $G_1E_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$. По теореме косинусов имеем $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{10}$.

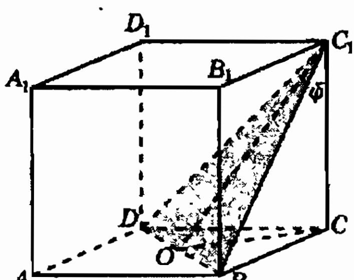


3. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

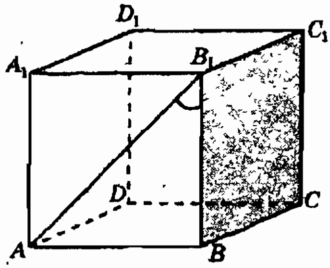
1. Перпендикуляром, опущенным из вершины A_1 на плоскость AB_1C_1, является отрезок A_1O, где O – середина AB_1. Искомый угол φ между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1 равен $45°$.



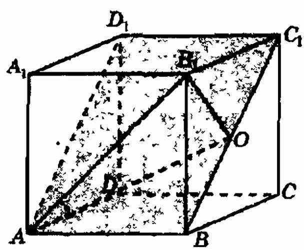
2. Угол между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D равен углу между прямой CC_1 и той же плоскостью. Он равен углу OC_1C, где O – середина BD. В прямоугольном треугольнике OC_1C катет CC_1 равен 1, катет OC равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, для искомого угла φ имеем $tg\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



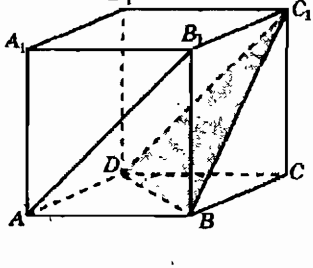
3. Искомый угол между прямой AB_1 и плоскостью BCC_1 равен углу AB_1B, который равен 45°.



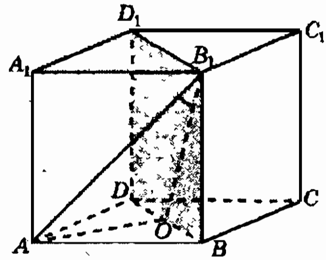
4. Искомый угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 равен углу B_1AO, где O – середина BC_1. В прямоугольном треугольнике B_1AO катет B_1O равен $\sqrt{2}/2$, гипотенуза AB_1 равна $\sqrt{2}$. Следовательно, искомый угол равен 30°.



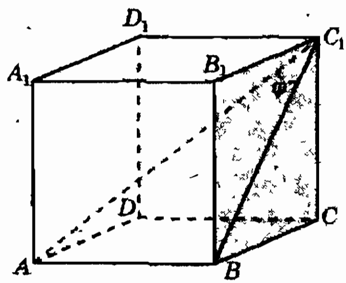
5. Прямая AB_1 параллельна прямой DC_1, лежащей в данной плоскости BDC_1. Следовательно, угол между прямой AB_1 и плоскостью BDC_1 равен 0°.



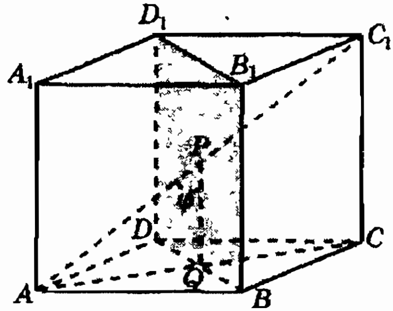
6. Искомый угол между прямой AB_1 и плоскостью BB_1D_1 равен углу AB_1O, где O – середина BD. В прямоугольном треугольнике AB_1O катет AO равен $\sqrt{2}/2$, гипотенуза AB_1 равна $\sqrt{2}$. Следовательно, искомый угол равен 30°.



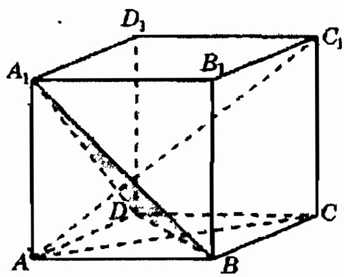
7. Угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1 равен углу AC_1B. В прямоугольном треугольнике AC_1B катет AB равен 1, гипотенуза AC_1 равна $\sqrt{3}$. Следовательно, для искомого угла φ имеем $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



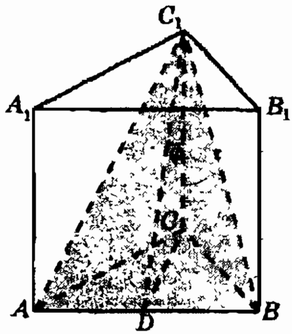
8. Угол между прямой AC_1 и плоскостью BB_1D_1 равен углу APQ, где P – центр куба, Q – центр грани $ABCD$. В прямоугольном треугольнике APQ катет AQ равен $\sqrt{2}/2$, гипотенуза AP равна $\sqrt{3}/2$ Следовательно, для искомого угла φ имеем $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



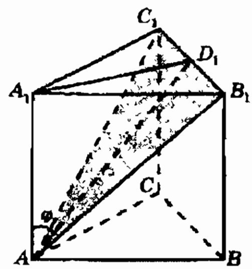
9. Докажем, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости BDA_1. Для этого воспользуемся теоремой о трех перпендикулярах. Ортогональной проекцией прямой AC_1 на плоскость ABC является прямая AC, которая перпендикулярна прямой BD. Следовательно, прямая AC_1 перпендикулярна прямой BD. Аналогичным образом доказывается, что прямая AC_1 перпендикулярна прямой A_1B. Таким образом, прямая AC_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости BDA_1. Значит, она перпендикулярна и самой плоскости, т.е. искомый угол равен 90°.



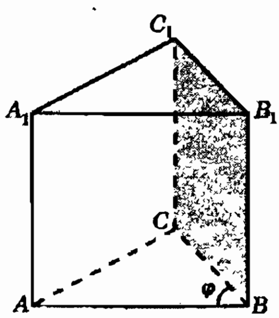
10. Угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1 равен углу между прямой CC_1 и той же плоскостью. Этот угол равен углу CC_1D (D – середина ребра AB) прямоугольного треугольника CC_1D. В этом треугольнике катет CD равен $\sqrt{3}/2$, а катет CC_1 равен 1. Следовательно, для искомого угла φ имеем $tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



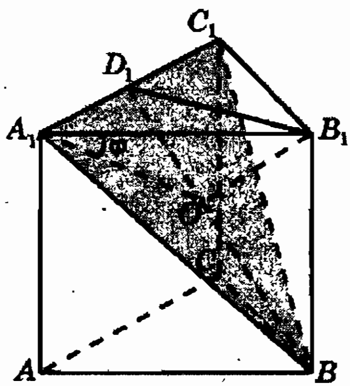
11. Угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1 равен углу A_1AD_1 (D_1 – середина ребра B_1C_1) прямоугольного треугольника A_1AD_1. Катет A_1D_1 этого треугольника равен $\sqrt{3}/2$, а катет AA_1 равен 1. Следовательно, для искомого угла φ имеем $tg\varphi = \sqrt{3}/2$.



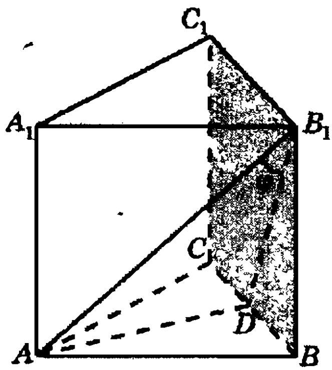
12. Искомый угол φ между прямой AB и плоскостью BB_1C_1 равен углу ABC и равен 60°.



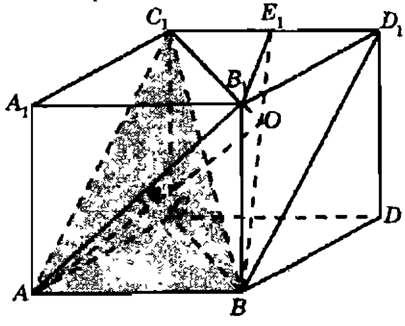
13. Искомый угол φ между прямой AB и плоскостью A_1BC_1 равен углу B_1A_1O, где O – основание перпендикуляра, опущенного из точки B_1 на плоскость A_1BC_1. В прямоугольном треугольнике BB_1D_1 катет BB_1 равен 1, катет B_1D_1 равен $\sqrt{3}/2$. По теореме Пифагора гипотенуза BD_1 равна $\frac{\sqrt{7}}{2}$. Из подобия треугольников B_1OD_1 и BB_1D_1 вытекает равенство $\frac{B_1O}{B_1D_1}=\frac{BB_1}{BD_1}$, из которого находим $B_1O=\frac{\sqrt{21}}{7}$. В прямоугольном треугольнике B_1A_1O катет B_1O равен $\sqrt{21}/7$, а гипотенуза A_1B_1 равна 1. Следовательно, для искомого угла φ имеем $\sin\varphi=\frac{\sqrt{21}}{7}$.



14. Искомый угол φ между прямой AB_1 и плоскостью BB_1C_1 равен углу AB_1D, где D – середина ребра BC. В прямоугольном треугольнике ADB_1 катет AD равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а гипотенуза AB_1 равна $\sqrt{2}$. Следовательно, для искомого угла φ имеем $\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{4}$.



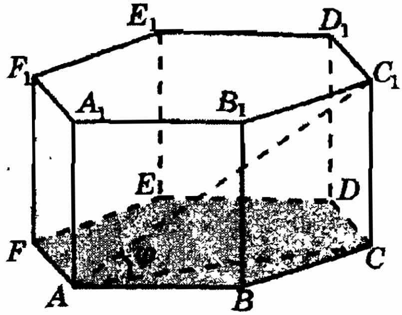
15. Достроим треугольную призму до четырехугольной. Пусть E_1 – середина ребра C_1D_1, B_1O перпендикуляр, опущенный из точки B_1 на плоскость ABD_1. Искомый угол φ между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 равен углу B_1AO. В прямоугольном треугольнике BB_1E_1 катет BB_1 равен 1, катет B_1E_1 равен $\sqrt{3}/2$. По теореме Пифагора гипотенуза BE_1 равна $\sqrt{7}/2$. Из подобия треугольников B_1OE_1 и BB_1E_1 вытекает равенство $\dfrac{B_1O}{B_1E_1}=\dfrac{BB_1}{BE_1}$, из которого находим $B_1O=\sqrt{21}/7$. В прямоугольном треугольнике B_1AO катет B_1O равен $\sqrt{21}/7$, а гипотенуза AB_1 равна $\sqrt{2}$. Следовательно, для искомого угла φ имеем $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$.



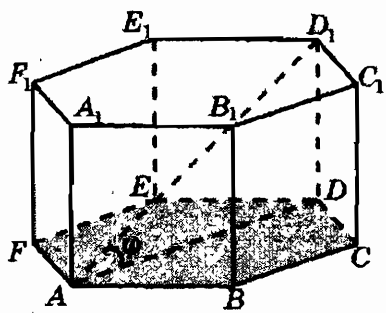
16. 90°.

17. 45°.

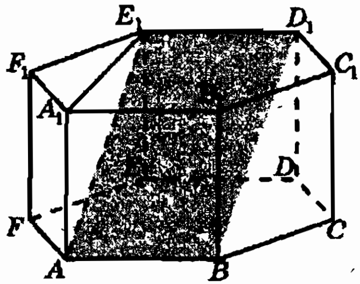
18. Искомый угол φ равен углу C_1AC. В прямоугольном треугольнике ACC_1 имеем: $CC_1 = 1$, $AC_1 = 2$. Следовательно, $\varphi = 30^\circ$.



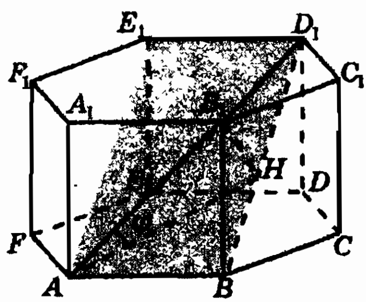
19. Искомый угол φ равен углу D_1AD. В прямоугольном треугольнике ADD_1 имеем: $DD_1 = 1$, $AD = 2$. Следовательно, $tg\varphi = \frac{1}{2}$.



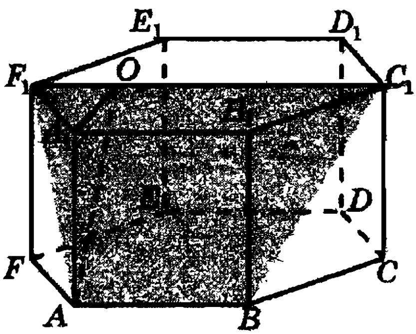
20. Искомый угол φ равен углу A_1AE_1. В прямоугольном треугольнике A_1AE_1 имеем: $AA_1=1$, $A_1E_1 = \sqrt{3}$. Следовательно, $\varphi = 60^\circ$.



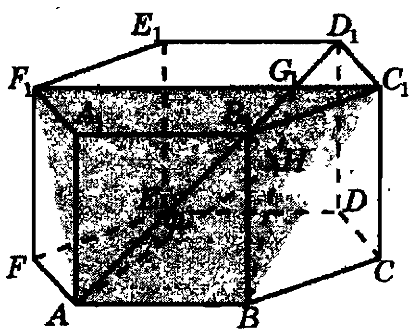
21. Из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1H на прямую BD_1. Искомый угол φ равен углу B_1AH. В прямоугольном треугольнике BB_1D_1 имеем: $BB_1 = 1$, $B_1D_1 = \sqrt{3}$, $BD_1 = 2$. Следовательно, угол BD_1B_1 равен 30° и, значит, $B_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}$. В прямоугольном треугольнике AB_1H имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.



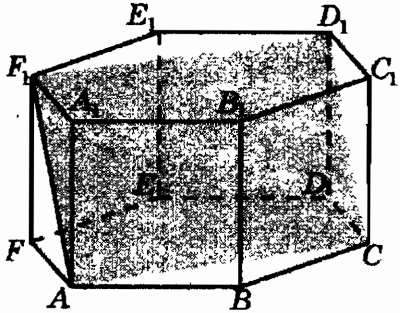
22. Искомый угол φ равен углу A_1AO, где O – основание перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на прямую C_1F_1. В прямоугольном треугольнике A_1AO имеем: $AA_1 = 1$, $A_1O = \sqrt{3}/2$. Следовательно, $tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



23. Проведем прямые C_1F_1, B_1D_1 и обозначим G_1 их точку пересечения. Из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1H на прямую BG_1. Искомый угол φ равен углу B_1AH. В прямоугольном треугольнике BB_1G_1 имеем: $BB_1 = 1$, $B_1G_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BG_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Из подобных треугольников BB_1G_1 и B_1HG_1 находим $B_1H = \frac{\sqrt{21}}{7}$. В прямоугольном треугольнике AB_1H имеем: $B_1H = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $AB_1 = \sqrt{2}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{42}}{14}$.

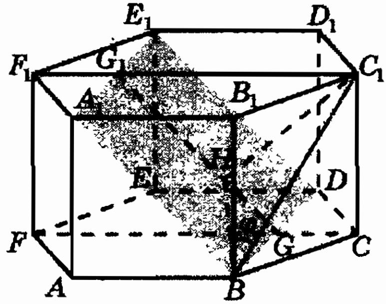


24. Искомый угол φ равен углу A_1AF_1. В прямоугольном треугольнике A_1AF_1 имеем: $AA_1 = 1$, $A_1F_1 = 1$. Следовательно, $\varphi = 45^\circ$.

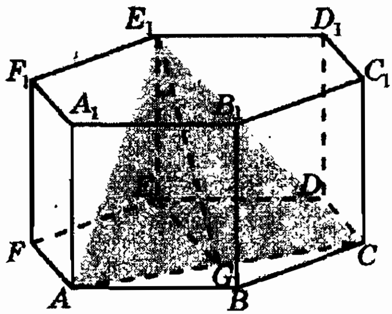


25. Плоскость CFF_1 перпендикулярна плоскости BDE_1 и пересекает ее по прямой GG_1. Прямая GG_1 образует с прямой C_1F_1 угол 45°. Из вершины C_1 опустим перпендикуляр C_1H на прямую GG_1. В прямоугольном треугольнике C_1G_1H имеем: $C_1G_1 = \frac{3}{2}$, $C_1G_1H = 45^\circ$. Следовательно, $C_1H = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. В прямоугольном треугольнике BC_1H имеем: $BC_1 = \sqrt{2}$, $C_1H = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

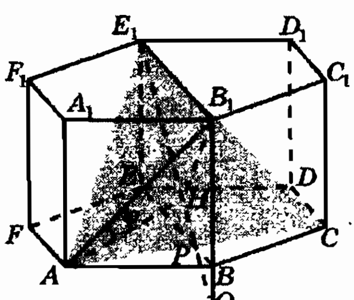
Следовательно, $\sin\varphi = \frac{3}{4}$.



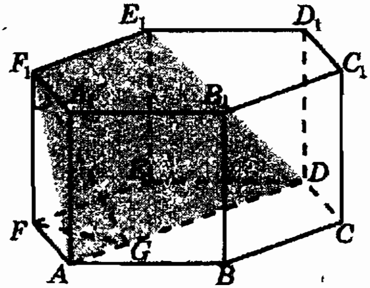
26. Из точки E_1 опустим перпендикуляр E_1G на прямую AC. Искомый угол φ равен углу EE_1G. В прямоугольном треугольнике EE_1G имеем: $EE_1 = 1$, $EG = \frac{3}{2}$. Следовательно, $tg\varphi = \frac{3}{2}$.



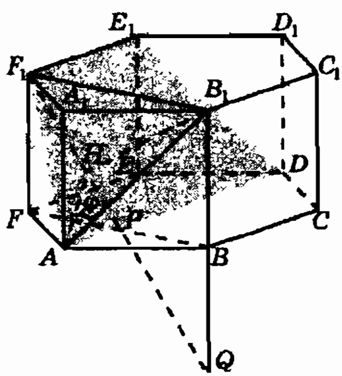
27. Плоскость BB_1E_1 перпендикулярна плоскости ACE_1 и пересекает ее по прямой QE_1. В прямоугольном треугольнике QB_1E_1 имеем: $QB_1 = \frac{4}{3}$, $B_1E_1 = 2$. Высота B_1H этого треугольника равна $\frac{4\sqrt{13}}{13}$. В прямоугольном треугольнике AB_1H имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1H = \frac{4\sqrt{13}}{13}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{26}}{13}$.



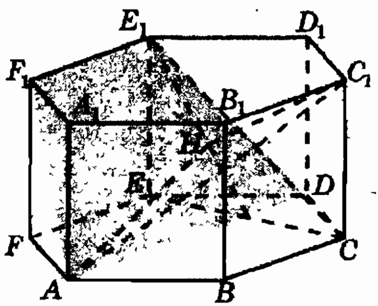
28. Из точки F_1 опустим перпендикуляр F_1G на прямую AD. Искомый угол φ равен углу FF_1G. В прямоугольном треугольнике FF_1G имеем: $FF_1 = 1$; $FG = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



29. Плоскость BB_1F_1 перпендикулярна плоскости ADE_1 и пересекает ее по прямой QF_1. В прямоугольном треугольнике QB_1F_1 имеем: $QB_1 = 2$, $B_1F_1 = \sqrt{3}$. Высота B_1H этого треугольника равна $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. В прямоугольном треугольнике AB_1H имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1H = \frac{2\sqrt{21}}{7}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{42}}{7}$.



30. Прямая B_1C_1 параллельна плоскости ADE_1. Следовательно, расстояние от точки C_1 до плоскости ADE_1 равно расстоянию от точки B_1 до этой плоскости и равно $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$ (см. предыдущую задачу). В прямоугольном треугольнике AC_1H имеем: $AC_1 = 2$, $C_1H = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$. Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



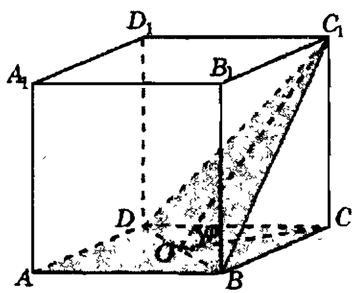
4. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

1. 90°.

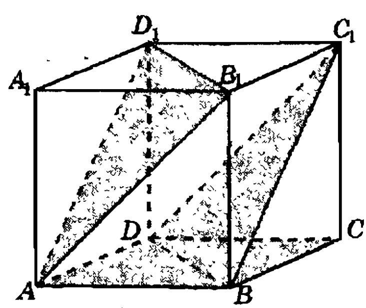
2. 45°.

3. 90°.

4. Обозначим O середину BD. Искомым линейным углом φ между плоскостями ABC и BC_1D будет угол COC_1. В прямоугольном треугольнике COC_1 имеем: $CC_1 = 1$, $CO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $tg\varphi = \sqrt{2}$.



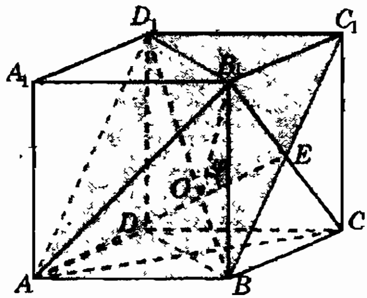
5. Плоскость AB_1D_1 параллельна плоскости BC_1D.



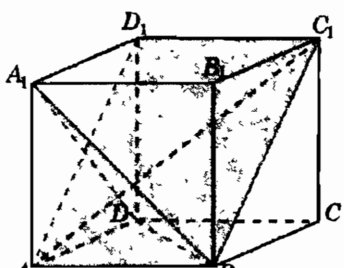
Из предыдущей задачи имеем $tg\varphi = \sqrt{2}$.

6. 90°.

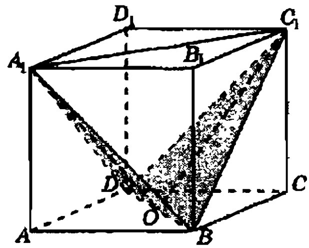
7. Заметим, что плоскость равностороннего треугольника ACB_1 перпендикулярна диагонали BD_1, которая проходит через центр O этого треугольника. Искомым линейным углом между плоскостями ABC_1 и BB_1D_1 будет угол B_1OE, который равен 60°.



8. Заметим, что плоскость равностороннего треугольника BDA_1 перпендикулярна диагонали AC_1, которая проходит через центр этого треугольника. Следовательно, данные плоскости перпендикулярны. Искомый угол между плоскостями BC_1D_1 и BA_1D равен 90°.

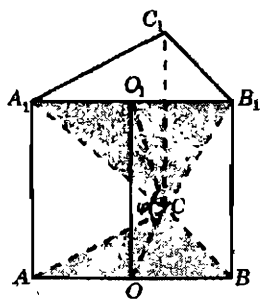


9. Пусть O – середина BD. Искомый угол φ между плоскостями BC_1D и BA_1D равен углу A_1OC_1. Имеем: $A_1C_1 = \sqrt{2}$; $A_1O = C_1O = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Используя теорему косинусов, получим $\cos\varphi = 1/3$.

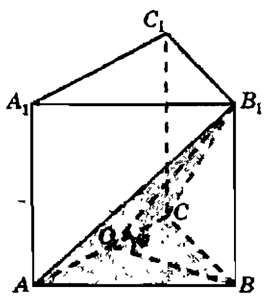


10. 90°.

11. Обозначим O, O_1 — середины ребер AB и A_1B_1. Искомым линейным углом φ между плоскостями ABC и A_1B_1C будет угол OCO_1. В прямоугольном треугольнике OCO_1 имеем $OO_1 = 1$, $OC = \sqrt{3}/2$. Следовательно, $tg\varphi = 2\sqrt{3}/3$.



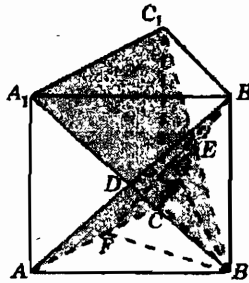
12. Обозначим O — середину ребра AC. Искомым линейным углом φ между плоскостями ABC и ACB_1 будет угол BOB_1. В прямоугольном треугольнике BOB_1 имеем: $BB_1 = 1$; $BO = \sqrt{3}/2$. Следовательно, $tg\varphi = 2\sqrt{3}/3$.



13. 60°.

14. Данные плоскости пересекаются по прямой DE. Обозначим G середину DE и F середину AC. Угол $\varphi = \angle BGF$ будет искомым. В треугольнике BGF имеем: $BF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $BG = FG = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

По теореме косинусов имеем $\cos\varphi = 1/7$.



15. 90°.

16. 120°.

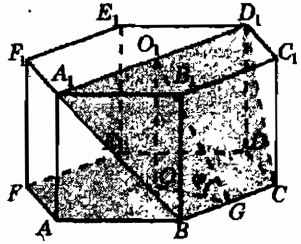
17. 60°.

18. 90°.

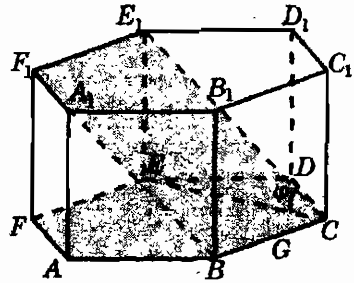
19. 30°.

20. 60°.

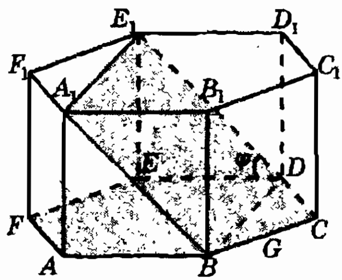
21. Искомый угол φ равен углу O_1GO, где O, O_1 – центры оснований призмы, G – середина BC. В прямоугольном треугольнике O_1GO имеем: $OO_1 = 1$, $OG = \sqrt{3}/2$. Следовательно, $tg\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



22. Искомый угол φ равен углу E_1CE. В прямоугольном треугольнике E_1CE имеем: $EE_1 = 1$, $CE = \sqrt{3}$, $CE_1 = 2$. Следовательно, $\varphi = 30°$.

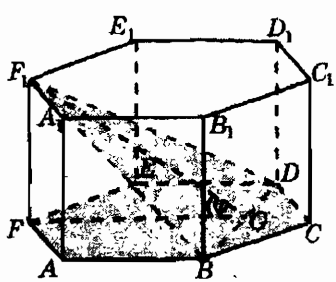


23. Искомый угол φ равен углу E_1DE. Он равен $45°$.



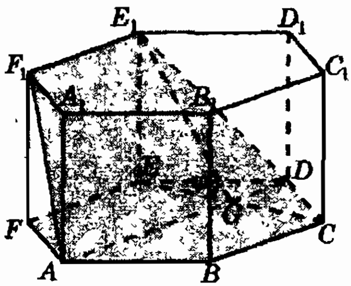
24. Искомый угол φ равен углу F_1GF, где G – середина BD. В прямоугольном треугольнике F_1GF имеем: $FF_1 = 1$, $FG = 3/2$.

Следовательно, $tg\varphi = \dfrac{2}{3}$.

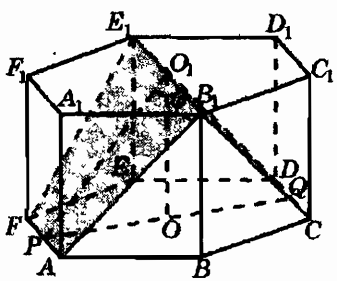


25. Искомый угол φ равен углу E_1GE, где G – середина CE. В прямоугольном треугольнике E_1GG имеем: $EE_1 = 1$, $EG = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

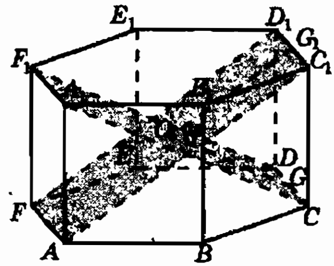
Следовательно, $tg\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



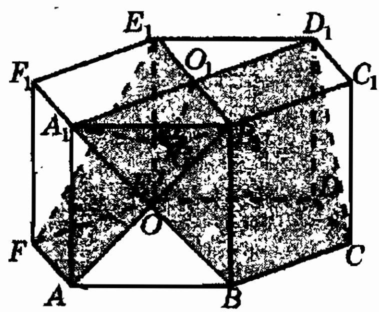
26. Пусть O, O_1 – центры оснований призмы, P, Q – середины ребер AF и CD. Искомый угол φ равен углу PO_1Q. В треугольнике PO_1Q имеем: $PO_1 = QO_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $PQ = \sqrt{3}$. Из теоремы косинусов получаем $\cos\varphi = \frac{1}{7}$.



27. Пусть O – центр призмы, G, G_1 — середины ребер CD и C_1D_1. Искомый угол φ равен углу GOG_1. В треугольнике GOG_1 имеем: $GG_1 = GO = G_1O = 1$. Следовательно, $\varphi = 60^\circ$.



28. Пусть O, O_1 – центры боковой грани и верхнего основания призмы. Искомый угол φ равен углу E_1GB_1, где G – середина OO_1. В треугольнике A_1GB_1 имеем: $A_1B_1 = 1$, $A_1G = B_1G = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Из теоремы косинусов получаем $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$.

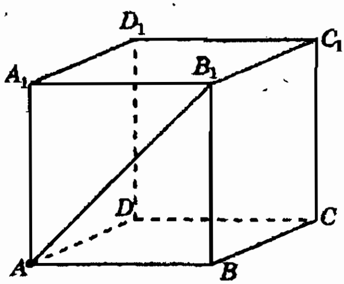


5. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

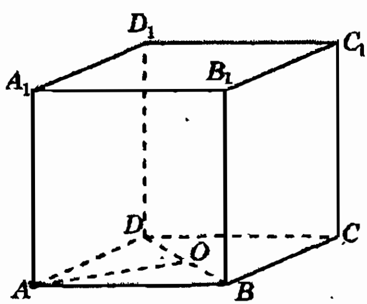
1. 1.

2. 1.

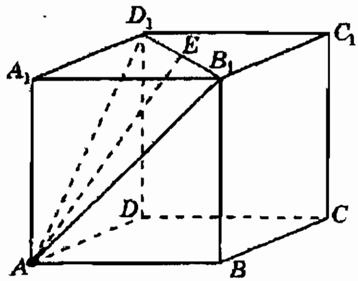
3. Расстоянием от точки A до прямой B_1C_1 является длина отрезка AB_1. Она равна $\sqrt{2}$.



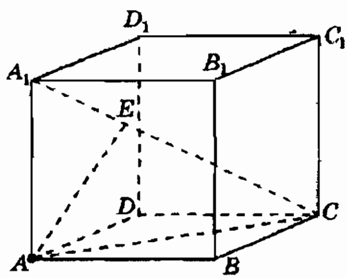
4. Расстоянием от точки A до прямой BD является длина отрезка AO, где O – середина BD. Она равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



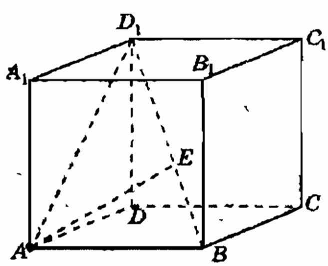
5. Искомое расстояние от точки A до прямой B_1D_1 равно высоте AE равностороннего треугольника AB_1D_1. Имеем, $AB_1 = AD_1 = B_1D_1 = \sqrt{2}$. Следовательно, $AE = \frac{\sqrt{6}}{2}$.



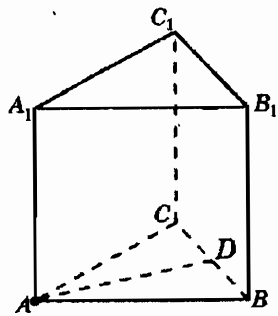
6. Искомое расстояние от точки A до прямой A_1C равно высоте AE прямоугольного треугольника ACA_1. Имеем, $AA_1 = 1$, $AC = \sqrt{2}$, $CA_1 = \sqrt{3}$. Следовательно, $AE = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



7. Искомое расстояние от точки A до прямой BD_1 равно высоте AE прямоугольного треугольника ABD_1. Имеем, $AB = 1$, $AD_1 = \sqrt{2}$, $BD_1 = \sqrt{3}$. Следовательно, $AE = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

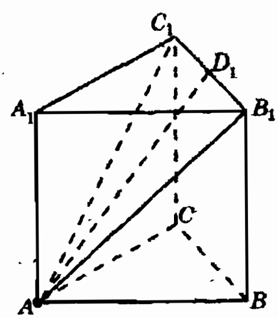


8. Расстоянием от точки A до прямой BC является длина перпендикуляра AD, проведенного из точки A к прямой BC. Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

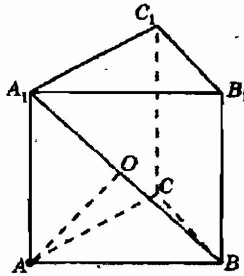


9. 1.

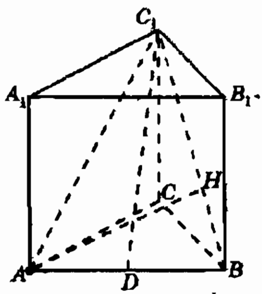
10. Искомое расстояние от точки A до прямой B_1C_1 равно высоте AD_1 равнобедренного треугольника AB_1C_1. Имеем, $B_1C_1 = 1$; $AB_1 = AC_1 = \sqrt{2}$. Следовательно, $AD_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$.



11. Расстоянием от точки A до прямой BA_1 является длина перпендикуляра AO, опущенного из точки A на прямую BA_1. Она равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

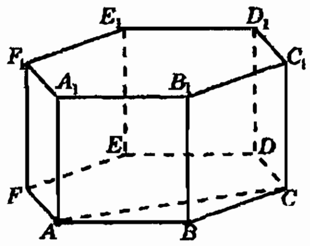


12. Искомое расстояние от точки A до прямой BC_1 равно высоте AH равнобедренного треугольника ABC_1. Имеем, $AB = 1$; $AC_1 = BC_1 = \sqrt{2}$. Следовательно, $C_1D = \sqrt{7}/2$. Удвоенная площадь треугольника ABC_1 может быть вычислена как произведение AB на C_1D, или как произведение BC_1 на AH. Приравнивая эти произведения, получим $AH = \dfrac{AB \cdot C_1D}{BC_1} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

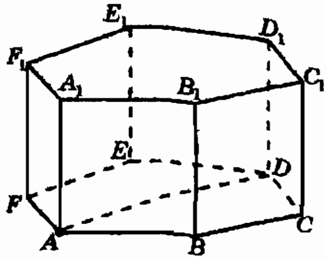


13. 1.

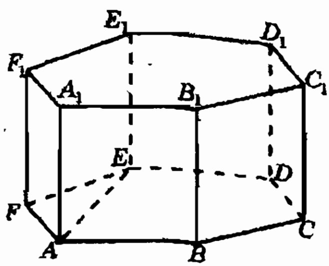
14. Искомым расстоянием является длина отрезка AC. Она равна $\sqrt{3}$.



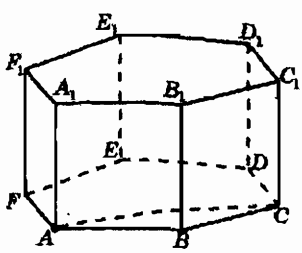
15. Искомым расстоянием является длина отрезка AD. Она равна 2.



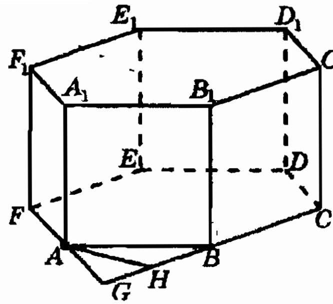
16. Искомым расстоянием является длина отрезка AE. Она равна $\sqrt{3}$.



17. Искомым расстоянием является длина отрезка AC. Она равна $\sqrt{3}$.

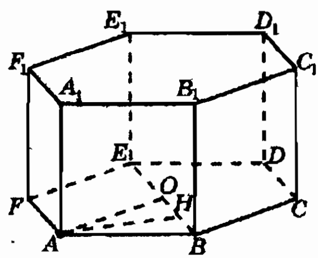


18. Продолжим отрезки CB и FA до пересечения в точке G. Треугольник ABG равносторонний. Искомым расстоянием является длина высоты AH треугольника ABG. Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

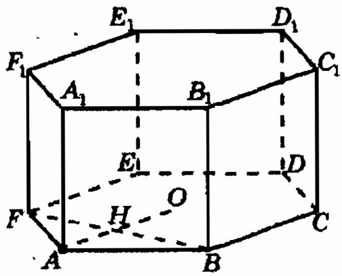


19. 1.

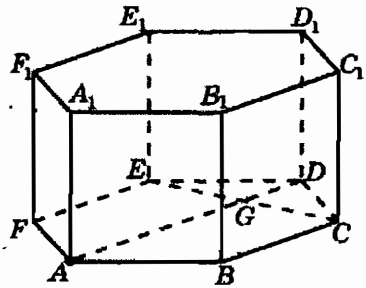
20. Пусть O – центр нижнего основания. Треугольник ABO – равносторонний. Искомое расстояние равно высоте AH этого треугольника. Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



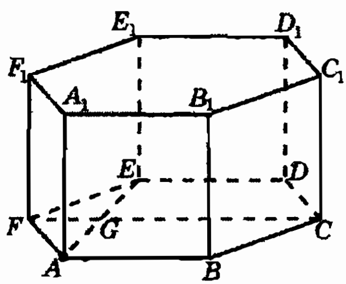
21. Пусть O – центр нижнего основания, H – точка пересечения AO и BF. Тогда AH – искомое расстояние. Оно равно $\frac{1}{2}$.



22. Проведем диагональ AD. Обозначим G – ее точку пересечения с CE. AG – искомое расстояние. Оно равно 3/2.

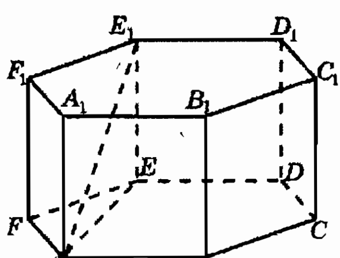


23. Проведем отрезок AE. Обозначим G – его точку пересечения с CA. AG – искомое расстояние. Оно равно $\sqrt{3}/2$.

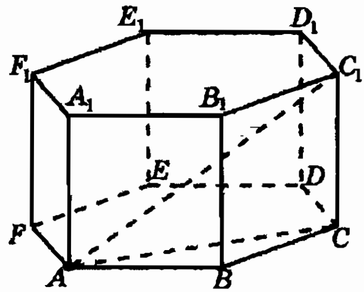


24. 1.

25. Искомым расстоянием является длина отрезка AE_1. В прямоугольном треугольнике AEE_1 имеем: $EE_1 = 1$, $AE = \sqrt{3}$. Следовательно, $AE_1 = 2$.

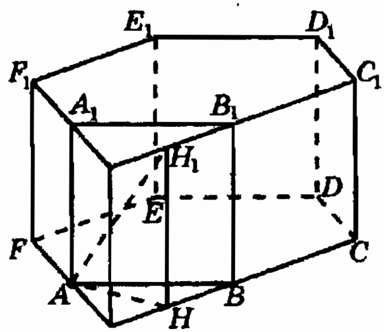


26. Искомым расстоянием является длина отрезка AC_1. В прямоугольном треугольнике ACC_1 имеем: $CC_1 = 1$, $AC = \sqrt{3}$. Следовательно, $AC_1 = 2$.



27. Достроим призму, присоединив к ней правильную треугольную призму $ABGA_1B_1G_1$. Искомым расстоянием является длина отрезка AH_1, где H_1 – середина ребра B_1G_1. В прямоугольном треугольнике AHH_1 имеем: $HH_1 = 1$, $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $AH_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

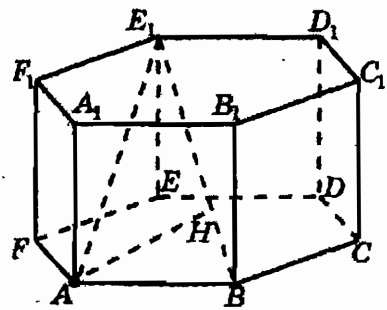


28. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

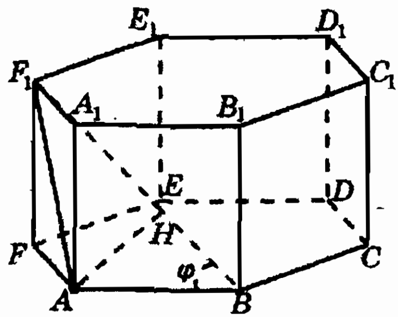
29. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

30. 1.

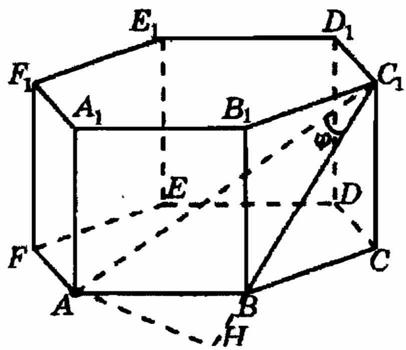
31. Искомое расстояние равно высоте AH прямоугольного треугольника ABE_1, в котором $AB = 1$, $AE_1 = 2$, $BE_1 = \sqrt{5}$. Из подобия треугольников ABE_1 и BHA находим $AH = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.



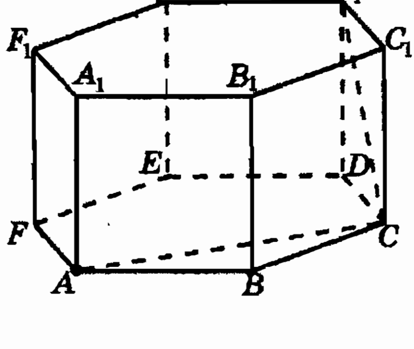
32. Искомое расстояние равно высоте AH треугольника ABF_1, в котором $AB = 1$, $AF_1 = \sqrt{2}$, $BE_1 = 2$. Обозначим φ угол ABF_1. По теореме косинусов, примененной к треугольнику ABF_1, имеем $\cos\varphi = \frac{3}{4}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{7}}{2}$ и, значит, $AH = \frac{\sqrt{7}}{2}$.



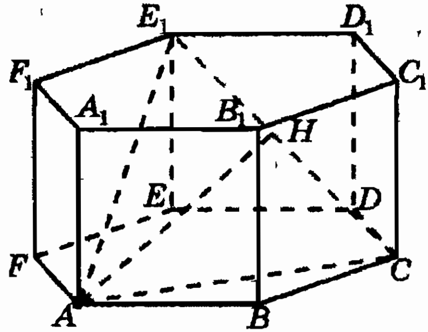
33. Искомое расстояние равно высоте AH треугольника ABC_1, в котором $AB = 1$, $BC_1 = \sqrt{2}$, $AC_1 = 2$. Обозначим φ угол AC_1B. По теореме косинусов, примененной к треугольнику ABC_1, имеем $\cos\varphi = \frac{5\sqrt{2}}{8}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{14}}{8}$ и, значит, $AH = \frac{\sqrt{14}}{4}$.



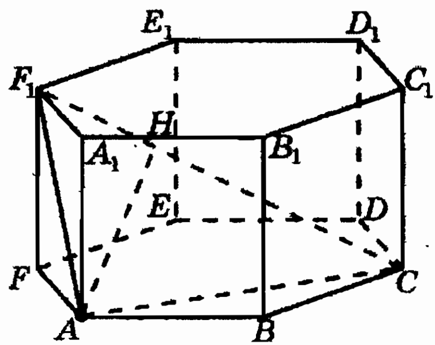
34. Искомое расстояние равно длине отрезка AC. Оно равно $\sqrt{3}$.



35. Искомое расстояние равно высоте AH треугольника ACE_1, в котором $AC = AE_1 = \sqrt{3}$, $CE_1 = 2$. По теореме Пифагора находим $AH = \sqrt{2}$.



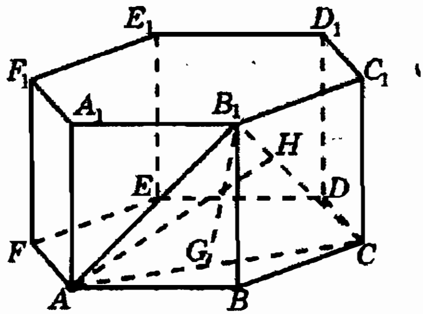
36. Искомое расстояние равно высоте AH прямоугольного треугольника ACF_1, в котором $AC = \sqrt{3}$, $AF_1 = \sqrt{2}$, $CF_1 = \sqrt{5}$. Из подобия треугольников ACF_1 и HAF_1 находим $AH = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$.



37. Искомое расстояние равно высоте AH треугольника ACA_1, в котором $AC = \sqrt{3}$, $AB_1 = CB_1 = \sqrt{2}$. Высота BG этого треугольника равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Его площадь равна $\frac{1}{2}AC \cdot B_1G = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

С другой стороны, эта площадь равна $\frac{1}{2}CB_1 \cdot AH = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AH$.

Приравнивая площади, получим $AH = \frac{\sqrt{30}}{4}$.

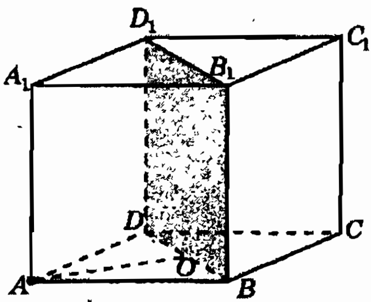


6. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

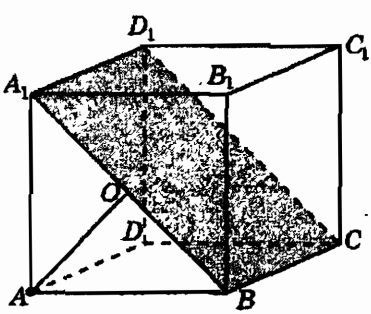
1. 1.

2. 1.

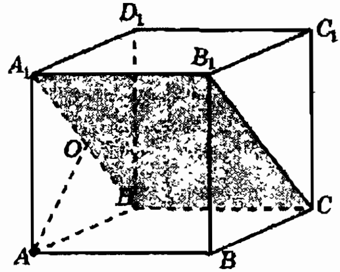
3. Расстоянием от точки A до плоскости BB_1D_1 является длина отрезка AO, где O – середина BD. Она равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



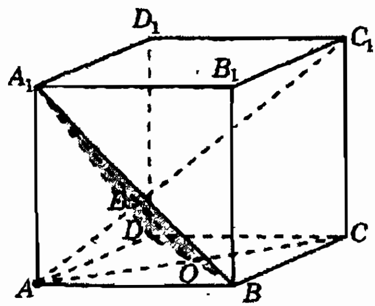
4. Расстоянием от точки A до плоскости BCD_1 является длина отрезка AO, где O – середина BA_1. Она равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



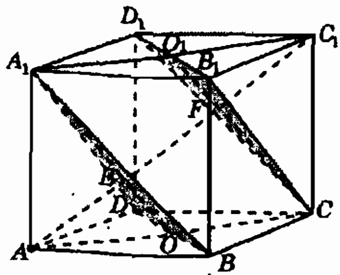
5. Расстоянием от точки A до плоскости CDA_1 является длина отрезка AO, где O – середина DA_1. Она равна $\sqrt{2}/2$.



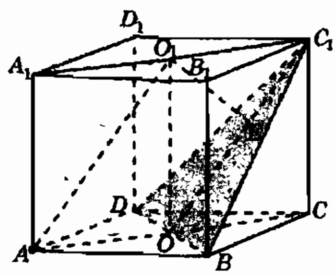
6. Заметим, что диагональ AC_1 куба перпендикулярна плоскости BDA_1. Обозначим O - центр грани $ABCD$, E - точка пересечения AC_1 и плоскости BDA_1. Длина отрезка AE будет искомым расстоянием. В прямоугольном треугольнике AOA_1 имеем $AA_1 = 1$; $AO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $OA_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Следовательно, $AE = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



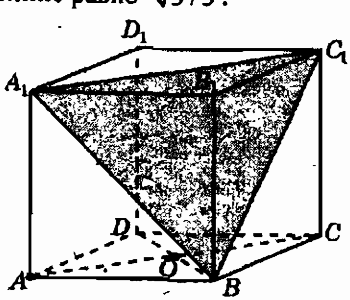
7. Плоскость CB_1D_1 параллельна плоскости BDA_1 и отстоит от вершины C_1 на расстояние $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (см. предыдущую задачу). Учитывая, что длина диагонали куба равна $\sqrt{3}$, получим, что искомое расстояние AF равно $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



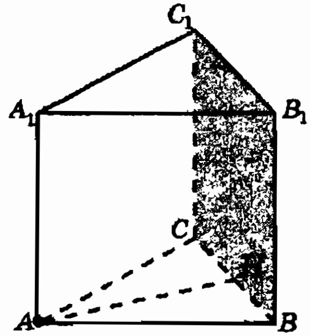
8. Обозначим O и O_1 – центры граней куба. Прямая AO_1 параллельна плоскости BC_1D и, следовательно, расстояние от точки A до плоскости BC_1D равно расстоянию от точки O_1 до этой плоскости, т.е. высоте O_1E треугольника OO_1C_1. Имеем $OO_1 = 1$; $O_1C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $OC_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Следовательно, $O_1E = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



9. Прямая AC параллельна плоскости BA_1C_1. Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от центра O грани $ABCD$ куба до плоскости BA_1C_1. Из предыдущей задачи следует, что это расстояние равно $\sqrt{3}/3$.



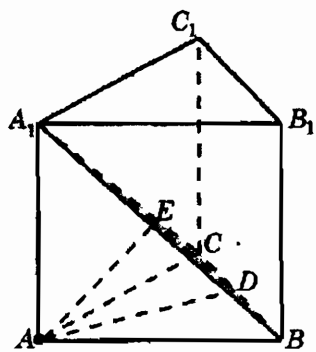
10. Расстоянием от точки A до плоскости BB_1C_1 является длина перпендикуляра AH, опущенного из вершины A на прямую BC. Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



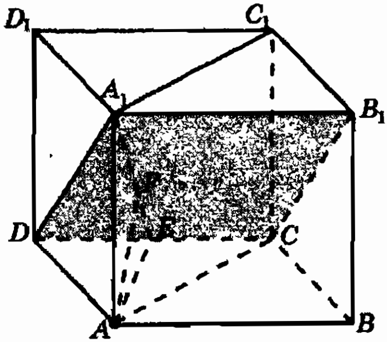
11. 1.

12. Через точки A_1 и D – середину ребра BC, проведем прямую. Искомым расстоянием от точки A до плоскости BCA_1 будет расстояние AE от точки A до прямой AD. В прямоугольном треугольнике ADA_1 имеем, $AA_1 = 1, AD = \frac{\sqrt{3}}{2}, DA_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Следовательно, $AE = \frac{\sqrt{21}}{7}$.



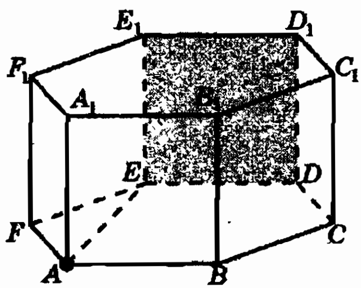
13. Достроим данную треугольную призму до четырехугольной призмы $A \ldots D_1$. Искомым расстоянием от точки A до плоскости A_1B_1C будет расстояние от точки A до плоскости CDA_1 в призме $ACDA_1C_1D_1$. Это расстояние мы нашли в предыдущей задаче. Оно равно $\frac{\sqrt{21}}{7}$.



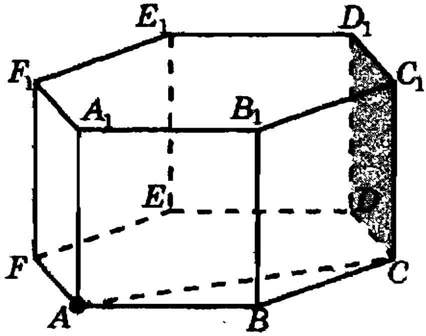
14. Искомое расстояние от точки A до плоскости A_1C_1B равно расстоянию от точки A до плоскости A_1B_1C из предыдущей задачи, т.е. равно $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

15. 1.

16. Искомым расстоянием является длина отрезка AE. Она равна $\sqrt{3}$.

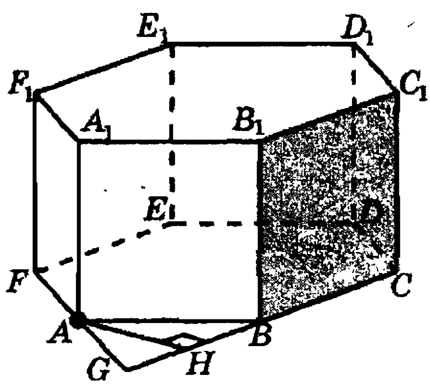


17. Искомым расстоянием является длина отрезка AC. Она равна $\sqrt{3}$.



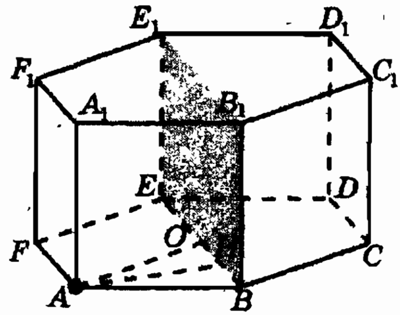
18. Продолжим отрезки CB и FA до пересечения в точке G. Треугольник ABG равносторонний. Искомым расстоянием является длина высоты AH треугольника ABG.

Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

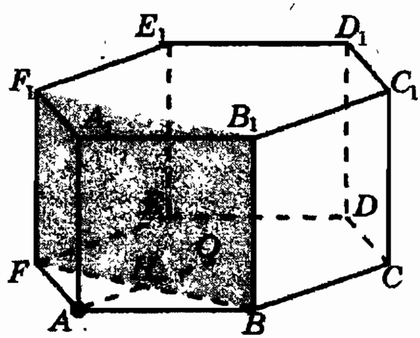


19. 1.

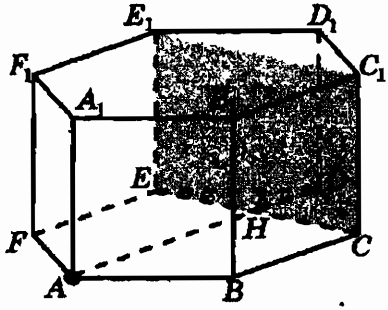
20. Пусть O – центр нижнего основания. Треугольник ABO – равносторонний. Искомое расстояние равно высоте AH этого треугольника. Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



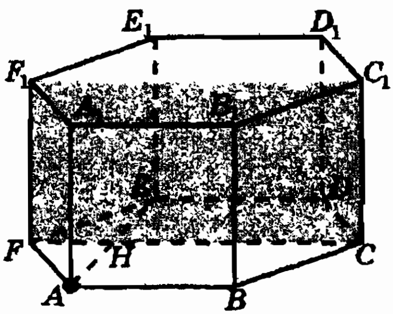
21. Пусть O – центр нижнего основания, H – точка пересечения AO и BF. Тогда AH – искомое расстояние. Оно равно $\frac{1}{2}$.



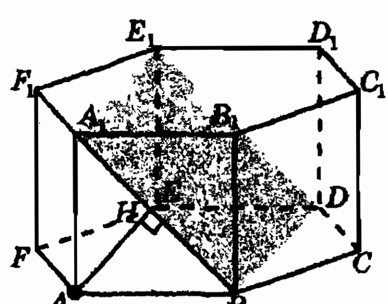
22. Проведем диагональ AD. Обозначим H – ее точку пересечения с CE. AH – искомое расстояние. Оно равно $\frac{3}{2}$.



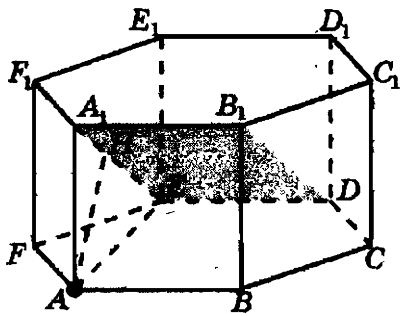
23. Проведем отрезок AE. Обозначим H – его точку пересечения с CA. AH – искомое расстояние. Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



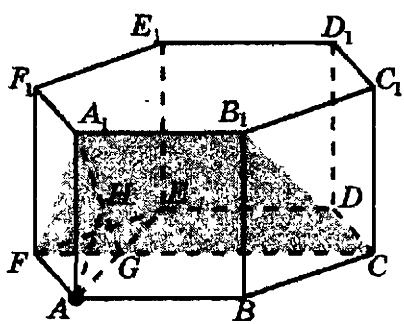
24. Искомым расстоянием является длина перпендикуляра AH, опущенного из точки A на прямую A_1B. Оно равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



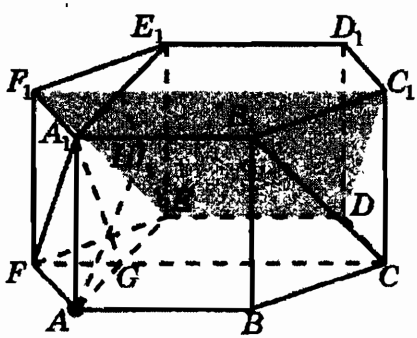
25. Искомым расстоянием является длина перпендикуляра AH, опущенного из точки A на прямую A_1E. Для его нахождения рассмотрим прямоугольный треугольник AEA_1. Имеем $AA_1 = 1$, $AE = \sqrt{3}$, $A_1E = 2$. Следовательно, угол AEA_1 равен 30° и высота AH равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



26. Искомое расстояние равно высоте AH прямоугольного треугольника AGA_1, в котором $AA_1 = 1$, $AG = \frac{1}{2}$, $GA_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Из подобия треугольников AA_1G и HAG находим $AH = \frac{\sqrt{5}}{5}$.



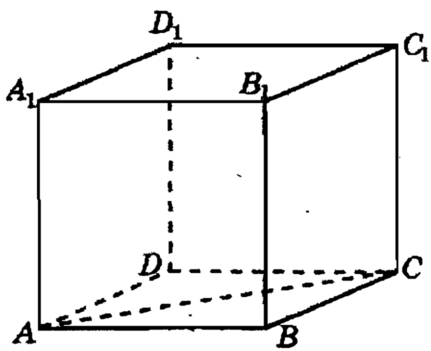
27. Заметим, что данная плоскость параллельна плоскости A_1B_1C из предыдущей задачи, причем $AE = 2AG$. Следовательно, искомое расстояние AH от точки A до плоскости F_1C_1D в два раза больше расстояния от точки A до плоскости A_1B_1C, т.е. равно $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



7. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

1. 1.

2. Расстоянием между прямыми AA_1 и CC_1 является длина отрезка AC. Она равна $\sqrt{2}$.



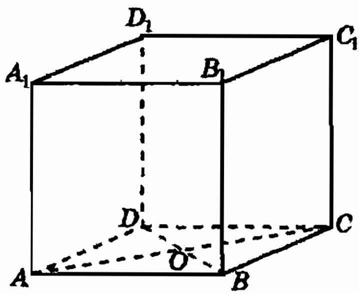
3. Расстоянием между прямыми AA_1 и BC является длина отрезка AB. Она равна 1.

4. Расстоянием между прямыми AA_1 и CD является длина отрезка AD. Она равна 1.

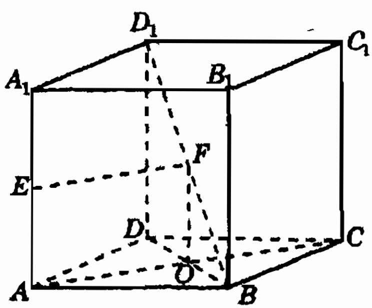
5. Расстоянием между прямыми AA_1 и BC_1 является длина отрезка AB. Она равна 1.

6. Расстоянием между прямыми AA_1 и CD_1 является длина отрезка A_1D_1. Она равна 1.

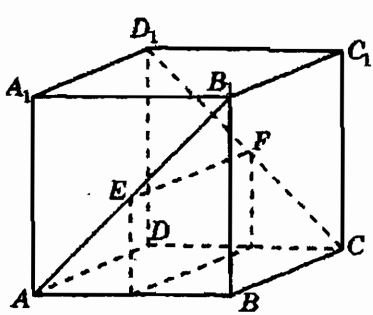
7. Расстоянием между прямыми AA_1 и BD является длина отрезка AO. Она равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



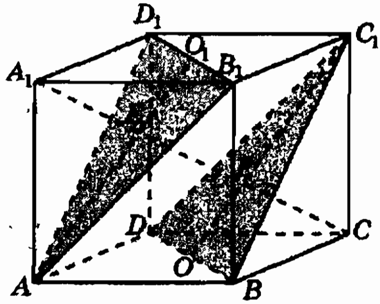
8. Расстоянием между прямыми AA_1 и BD_1 является длина отрезка EF, соединяющего середины AA_1 и BD_1. Она равна $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



9. Расстояние между прямыми AB_1 и CD_1 является длина отрезка EF, соединяющего середины AB_1 и CD_1. Она равна 1.

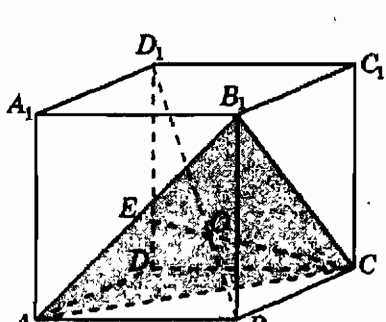


10. Расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 равно расстоянию между параллельными плоскостями AB_1D_1 и BDC_1. Диагональ A_1C перпендикулярна этим плоскостям и делится в точках пересечения на три равные части. Следовательно, искомое расстояние равно длине отрезка EF и равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

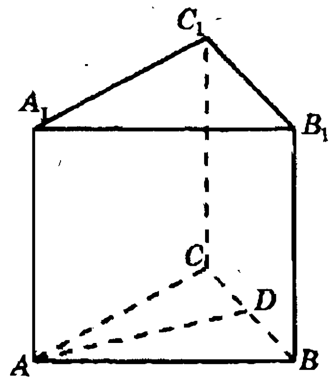


11. Решение аналогично решению предыдущей задачи. Искомое расстояние равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12. Диагональ BD_1 перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ACB_1 и пересекает его в центре O вписанной в него окружности. Искомое расстояние равно радиусу вписанной окружности $OE = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

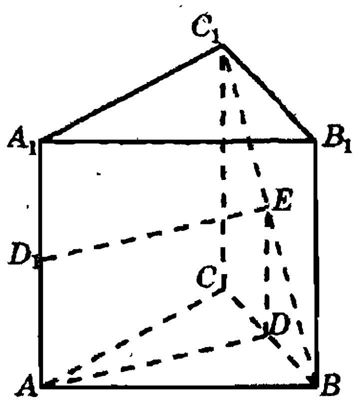


13. Расстоянием между прямыми AA_1 и BC является длина отрезка AD, где D – середина BC. Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



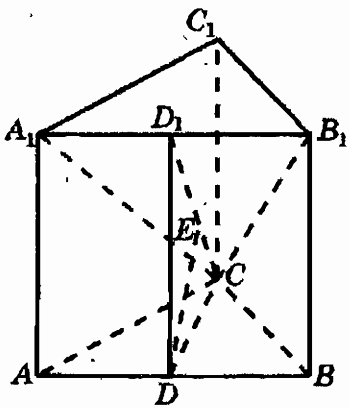
14. Расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 является длина отрезка D_1E, соединяющего середины AA_1 и BC_1.

Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

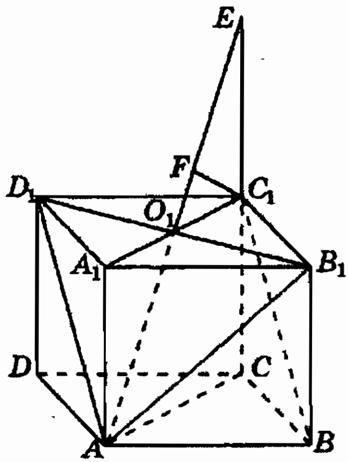


15. Расстояние между прямыми AB и A_1C_1 является длина отрезка AA_1. Она равна 1.

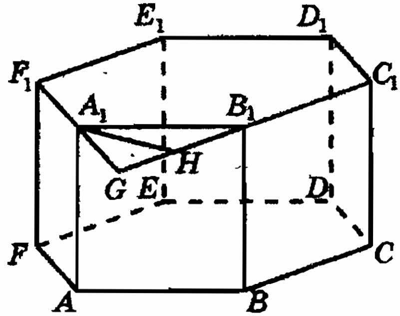
16. Искомое расстояние между прямыми AB и A_1C равно расстоянию между прямой AB и плоскостью A_1B_1C. Обозначим D и D_1 середины ребер AB и A_1B_1. В прямоугольном треугольнике CDD_1 из вершины D проведем высоту DE. Она и будет искомым расстоянием. Имеем, $DD_1 = 1$, $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $CD_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Следовательно, $DE = \frac{\sqrt{21}}{7}$.



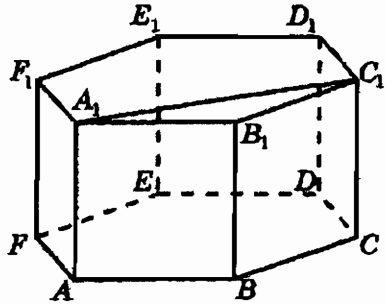
17. Достроим призму до 4-х угольной призмы. Искомое расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 будет равно расстоянию от прямой BC_1 до плоскости AB_1D_1. Отрезок C_1F, перпендикулярный AE, будет перпендикуляром, опущенным из вершины C_1 на эту плоскость. Имеем $O_1C_1 = \frac{1}{2}$, $C_1E = 1$, $O_1E = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, искомое расстояние C_1F равно $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



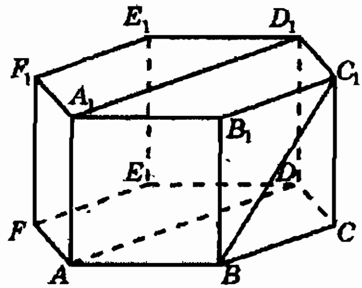
18. Продолжим ребра C_1B_1 и F_1A_1 до пересечения в точке G. Треугольник A_1B_1G – равносторонний. Его высота A_1H является искомым общим перпендикуляром, длина которого равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



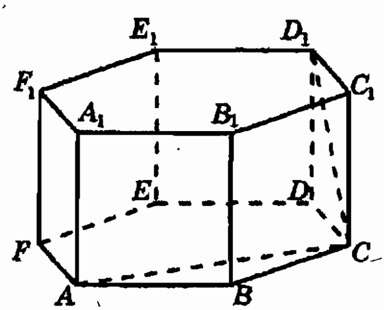
19. Искомым общим перпендикуляром между прямыми AA_1 и C_1D_1 является отрезок A_1C_1. Его длина равна $\sqrt{3}$.



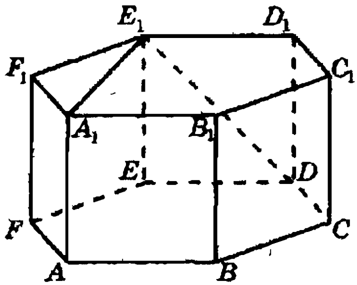
20. Искомым расстоянием между прямыми AA_1 и BC_1 является расстояние между параллельными плоскостями ADD_1 и BCC_1. Расстояние между ними равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



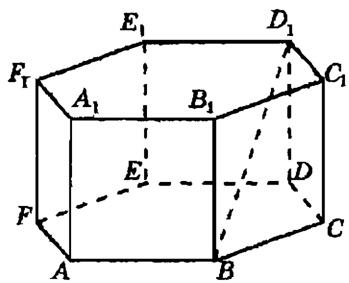
21. Искомым общим перпендикуляром между прямыми AA_1 и CD_1 является отрезок AC. Его длина равна $\sqrt{3}$.



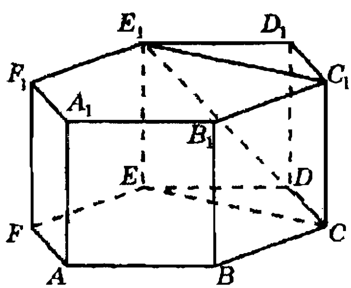
22. Искомым общим перпендикуляром между прямыми AA_1 и DE_1 является отрезок A_1E_1. Его длина равна $\sqrt{3}$.



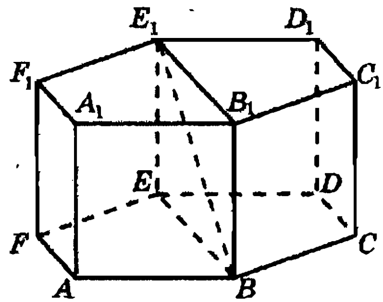
23. Искомым общим перпендикуляром между прямыми AA_1 и BD_1 является отрезок AB. Его длина равна 1.



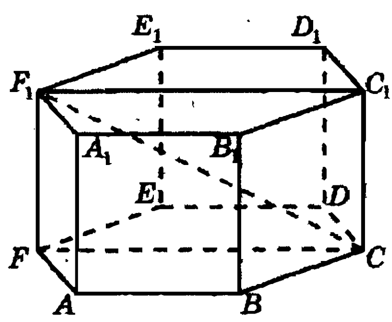
24. Искомым расстоянием между прямыми AA_1 и CE_1 является расстояние между прямой AA_1 и плоскостью CEE_1. Оно равно $\frac{3}{2}$.



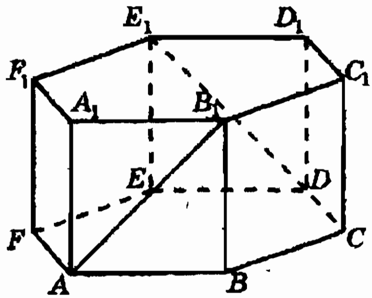
25. Искомым расстоянием между прямыми AA_1 и BE_1 является расстояние между прямой AA_1 и плоскостью BEE_1. Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



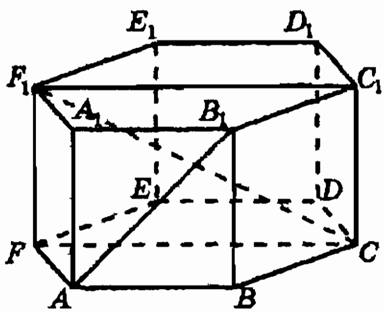
26. Искомым расстоянием между прямыми AA_1 и CF_1 является расстояние между прямой AA_1 и плоскостью CFF_1. Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



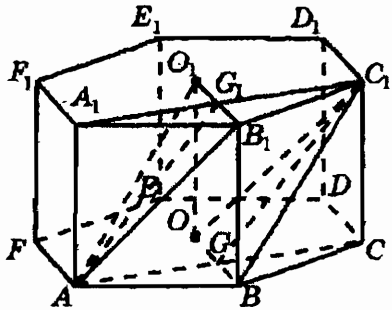
27. Искомым расстоянием между прямыми AB_1 и DE_1 является расстояние между параллельными плоскостями ABB_1 и DEE_1. Расстояние между ними равно $\sqrt{3}$.



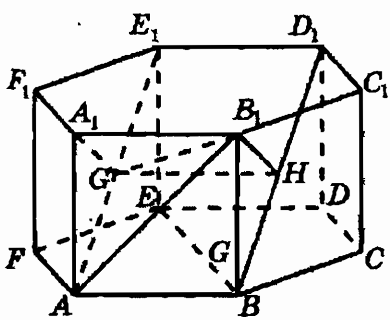
28. Искомым расстоянием между прямыми AB_1 и CF_1 является расстояние между прямой AB_1 и плоскостью CFF_1. Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



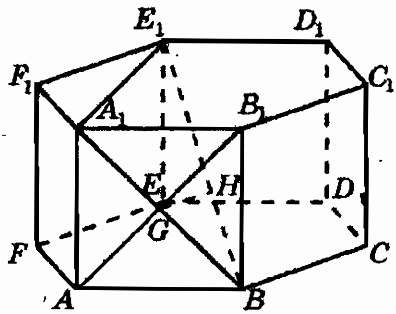
29. Пусть O, O_1 – центры оснований призмы. Плоскости AB_1O_1 и BC_1O параллельны. Плоскость ACC_1 перпендикулярна этим плоскостям. Искомое расстояние d между прямыми AB_1 и BC_1 равно расстоянию между прямыми AG_1 и GC_1. В параллелограмме AGC_1G_1 имеем $AG = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $AG_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Высота, проведенная к стороне AG_1 равна 1. Следовательно, $d = \frac{\sqrt{21}}{7}$.



30. Рассмотрим плоскость A_1B_1H, перпендикулярную BD_1. Ортогональная проекция на эту плоскость переводит прямую BD_1 в точку H, а прямую AB_1 – в прямую GB_1. Следовательно, искомое расстояние d между прямыми AB_1 и BD_1 равно расстоянию от точки H до прямой GB_1. В прямоугольном треугольнике GHB_1 имеем $GH = 1$, $B_1H = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $d = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



31. Рассмотрим плоскость A_1BD, перпендикулярную AB_1. Ортогональная проекция на эту плоскость переводит прямую AB_1 в точку G, а прямую BE_1 оставляет на месте. Следовательно, искомое расстояние d между прямыми AB_1 и BE_1 равно расстоянию GH от точки G до прямой BE_1. В прямоугольном треугольнике A_1BE_1 имеем $A_1B = \sqrt{2}$, $A_1E_1 = \sqrt{3}$. Следовательно, $d = \frac{\sqrt{30}}{10}$.



Учебно-методическое издание

Смирнова Ирина Михайловна
Смирнов Владимир Алексеевич

ЕГЭ
ГЕОМЕТРИЯ
Расстояния и углы в пространстве

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.013269.11.07 от 13.11.2007 г.

Редактор *И.М. Бокова*
Корректор *И.В. Русанова*
Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*
Компьютерная верстка *А.Л. Бабабекова, А.П. Захарова*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).

ГЕОМЕТРИЯ

ЕГЭ

И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

РАССТОЯНИЯ И УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Предлагаемая вниманию старшеклассников книга предназначена для подготовки к ЕГЭ и к другим экзаменам, содержащим геометрические задачи.

Она содержит необходимый теоретический материал, а также базовые задачи: на нахождение расстояний и углов в пространстве, развивающие геометрические представления, лежащие в основе решения любых задач по стереометрии. Представлены ответы и решения ко всем задачам. Пособие является прекрасным дополнением к учебникам по геометрии.

Предназначена старшеклассникам, абитуриентам, учителям математики и репетиторам.

ISBN 978-5-377-02368-5

9 785377 023685

ЭКЗАМЕН