

Лучшие
классические
учебники

С. П. СТРЕЛКОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОЛЕБАНИЙ



Знание
Уверенность
Успех

ЛУЧШИЕ КЛАССИЧЕСКИЕ УЧЕБНИКИ

ФИЗИКА

С. П. СТРЕЛКОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОЛЕБАНИЙ

УЧЕБНИК

**Издание третье,
исправленное**



**Санкт-Петербург • Москва • Краснодар
2005**

ББК 22.213

С 84

Стрелков С. П.

С 84 Введение в теорию колебаний: Учебник. 3-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2005. — 440 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 5-8114-0614-2

Учебник составлен на основе курса лекций по теории колебаний, читавшихся автором на физическом факультете Московского Государственного университета им. М. В. Ломоносова в 1950–1960 гг.

В представленном курсе излагаются основные законы колебательных процессов в физике, а также методы теоретического исследования и расчета простейших колебательных систем.

Выбор материала и характер изложения в значительной мере определяется научными традициями кафедры, сложившимися под влиянием лекций ее основателя академика Л. И. Мандельштама.

Книга адресована студентам университетов и высших технических учебных заведений.

ББК 22.213

Оформление обложки
С. ШАПИРО, А. ЛАПШИН

Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.

© Издательство «Лань», 2005
© С. П. Стрелков, наследники, 2005
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9

ЧАСТЬ I

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Г л а в а 1. Собственные колебания в линейных системах с одной степенью свободы	13
§ 1. Определение числа степеней свободы систем	13
§ 2. Собственные колебания в консервативной системе с одной степенью свободы	14
§ 3. Основные элементы гармонического колебания и колебания энергии	21
§ 4. Собственные колебания в неконсервативной системе с одной степенью свободы	23
§ 5. Изображение колебательных процессов в системе с одной степенью свободы на «фазовой плоскости»	28
§ 6. Собственные колебания системы с «отрицательным» затуханием	36
Г л а в а 2. Собственные колебания нелинейной консервативной системы	44
§ 7. Колебания нелинейной консервативной системы	44
§ 8. Колебания физического маятника	48
§ 9. Определение периода колебаний	49
Г л а в а 3. Вынужденные колебания в линейной системе (колебания под действием внешней силы)	53
§ 10. Предварительные замечания	53
§ 11. Действие гармонической (синусоидальной) силы на линейную систему без трения	55
§ 12. Явление резонанса	58
§ 13. Вид колебаний при резонансе	60
§ 14. Вынужденные колебания в системе, обладающей затуханием под действием синусоидальной силы	62
§ 15. Анализ резонансных законов	70
§ 16. Резонансные кривые при постоянной частоте и переменном параметре системы	81
§ 17. Некоторые частные случаи резонанса (резонанс «токов» и «напряжений»)	85

§ 18. Основы теории виброизолирующих устройств (амортизация)	91
Г л а в а 4. Элементы теории регистрирующих приборов	95
§ 19. Основные сведения о регистрирующих приборах	95
§ 20. Квазистатические приборы	96
§ 21. Резонансные приборы	105
§ 22. Приборы, работающие по принципу сейсмографа	105
§ 23. Баллистические приборы	107
Г л а в а 5. Спектральные методы	111
§ 24. Спектр периодической функции (ряд Фурье)	111
§ 25. Сплошной спектр	113
§ 26. Сравнение ряда и интеграла Фурье	116
§ 27. Колебания, вызываемые ударом	123
§ 28. Преобразование Лапласа	128
§ 29. Спектры Лапласа некоторых важных функций	139
Г л а в а 6. Некоторые применения теории резонанса в радиотехнике	142
§ 30. Избирательность	142
§ 31. Неискажаемость	145
§ 32. Прием синусоидальных импульсов	148
§ 33. Частотная модуляция	152
Г л а в а 7. Вынужденные колебания в простейших системах с нелинейными элементами	156
§ 34. Колебания «нелинейной» пружины	156
§ 35. «Нелинейный проводник» и выпрямление переменного тока	157
§ 36. Расчет диодного выпрямителя с RC-фильтром	160
§ 37. Детектирование	162
§ 38. Некоторые практические схемы детектирования	166
§ 39. Гетеродин	169
§ 40. Супергетеродин	170
Г л а в а 8. Параметрические колебания	172
§ 41. Раскачивание качелей	172
§ 42. Схематический расчет параметрических колебаний	174
§ 43. Области параметрического резонанса	177
§ 44. Некоторые сведения из математической теории параметрических колебаний	179
§ 45. Определение областей параметрического резонанса по Мейнеру	180
§ 46. Примеры параметрических колебаний	185
Г л а в а 9. Автоколебания	187
§ 47. Общие сведения об автоколебаниях	187
§ 48. Генератор электромагнитных колебаний	188
§ 49. Анализ и решение нелинейного уравнения генератора	192
§ 50. Влияние выбора рабочей точки характеристики на автоколебания в генераторе	208
§ 51. Анализ генераторных режимов в радиотехнике («квазилинейный метод»)	215
§ 52. Разрывные (релаксационные) автоколебания	221

ЧАСТЬ II

КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ
СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Г л а в а 1. Колебания в системах с двумя степенями свободы	233
§ 53. Замечания об определении числа степеней свободы	233
§ 54. Примеры системы с двумя степенями свободы	235
§ 55. Парциальные системы и полная система	236
§ 56. Собственные колебания в системе двух электрических индуктивно связанных контуров без затухания	239
§ 57. Зависимость собственных частот системы от расстройки между контурами	243
§ 58. Теория собственных колебаний в системе с двумя степенями свободы без трения (общий случай)	246
§ 59. Собственные колебания упруго связанных маятников . .	251
§ 60. Нормальные координаты	253
§ 61. Собственные частоты как экстремальные значения	256
§ 62. Связь и связанность двух систем (взаимодействие двух систем)	258
§ 63. Колебания при сильной связанности	260
§ 64. Собственные колебания в системе с двумя степенями свободы при наличии трения	263
§ 65. Комплексные собственные частоты	266
§ 66. Собственные колебания в связанных индуктивно контурах с небольшим затуханием	267
§ 67. Пример автоколебательной системы с двумя степенями свободы. Флэттер модели крыла	269
§ 68. Действие внешних гармонических сил на систему с двумя степенями свободы без затухания	274
§ 69. Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы при наличии затухания	280
§ 70. Динамическая жесткость и комплексные параметры системы	282
§ 71. Замечания о резонансной частоте системы	288
§ 72. Расчет фильтра промежуточной частоты в супергетеродине	290
Г л а в а 2. Колебания в линейных системах со многими степенями свободы	294
§ 73. Общие свойства линейной колебательной системы со многими степенями свободы	294
§ 74. Собственные колебания в системе без сил трения	299
§ 75. Собственные колебания струны с тремя бусинками	303
§ 76. Нормальные координаты	307
§ 77. Ортогональность нормальных координат	308
§ 78. Энергия собственных колебаний и энергия нормального колебания	311
§ 79. Изменение масштабов нормальных координат	343
§ 80. Примеры нормальных координат	315
§ 81. Случай равенства собственных частот системы	319
§ 82. Равенство чилю одной или нескольких собственных частот	323
§ 83. Колебания в системе со многими степенями свободы при наличии затухания	326
§ 84. Вынужденные колебания в системе без затухания	328

§ 85. Вынужденные колебания в системе со многими степенями свободы при наличии трения	334
§ 86. Анализ колебаний в системе со многими степенями свободы с помощью преобразования Лапласа	336
§ 87. «Цепочки» однородных звеньев (элементов)	339
§ 88. Собственные колебания в цепочке однородных элементов	342
§ 89. Вынужденные колебания в цепочке однородных элементов (фильтры)	348
Г л а в а 3. Применение матриц к теории колебаний в системах со многими степенями свободы	358
§ 90. Колебания в консервативных системах	358
§ 91. О приближенных методах определения собственных частот и векторов	362
§ 92. Замечания	364
§ 93. Колебания в неконсервативных системах	366
§ 94. Физический смысл скалярных произведений комплексных векторов сил и смещений	374
§ 95. Метод Бубнова — Галеркина	376
Г л а в а 4. Колебательные системы с распределенными параметрами	379
§ 96. Одномерная система с распределенными параметрами	379
§ 97. Собственные продольные колебания однородного стержня и двухпроводной линии без затухания	386
§ 98. Пример собственных колебаний при неоднородных граничных условиях	394
§ 99. Ортогональность форм собственных колебаний	395
§ 100. Продольные собственные колебания системы с затуханием	397
§ 101. Вынужденные продольные колебания в однородной системе с распределенными постоянными	398
§ 102. Уравнения изгибных (поперечных) колебаний стержней	406
§ 103. Собственные изгибные колебания стержня	409
§ 104. Поперечные вынужденные колебания стержней	419
§ 105. Представление балки (или стержня) многополюсником и динамическая жесткость	424
Рекомендуемая литература	430
Алфавитный указатель	431

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основным материалом, определяющим содержание книги, были лекции автора по курсу теории колебаний на физическом факультете Московского ордена Ленина Государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Цель курса — введение в изучение специальных разделов теории колебаний. В курсе не только излагаются основные законы колебательных процессов в физике и технике, но и делается попытка научить слушателей методам теоретического исследования и расчета простейших колебательных систем.

Выбор материала, характер изложения принципиальных вопросов в значительной мере определяется теми научными традициями, которые сложились на кафедре теории колебаний физического факультета под влиянием лекций академика Л. И. Мандельштама, основавшего эту кафедру в 1931 году.

Иногда предмет теории колебаний относят к математическим курсам. Однако это не совсем правильно; теория колебаний представляет самостоятельную дисциплину, так как разнообразные применения ее настолько тесно связаны друг с другом, что их необходимо изучать с единой точки зрения: не только математической, а главным образом физической. Изучение колебаний в различных системах с единой физической точки зрения в значительной степени облегчает анализ и исследование тех колебательных процессов, в которых имеет место закономерная связь колебаний различных физических величин, например: электрических и механических. В технике и физике такие устройства встречаются все чаще и чаще. Кроме того, изучение колебательных процессов с единой точки зрения развивает у учащихся способность к анализу явления посредством сравнений и аналогий, которые в свою очередь, чрезвычайно полезны при исследовании новых неизученных процессов.

Во втором издании были исправлены все замеченные ошибки и опечатки, сокращены и переделаны некоторые разделы, так как со времени первого издания прошло уже больше десяти лет. Кроме того, естественно, был сделан целый ряд дополнений, содержание

которых в основном входило в различные вспомогательные курсы по теории колебаний, читавшиеся автором за это время. Главные дополнения: метод Лапласа и спектральные методы, матричное изложение теории колебаний в линейных системах со многими степенями свободы, особенно для неконсервативных и активных систем, и теория поперечных колебаний балок.

Всем товарищам, указавшим на погрешности первого издания, приношу самую глубокую благодарность. При подготовке этого издания мне много помогали Р. А. Силин и Н. К. Михеева, большое спасибо им.

C. Стрелков

ВВЕДЕНИЕ

Нет такой области техники, нет такого раздела физики, в которых мы не встречались бы в той или иной степени с явлениями, в которых имеют место колебания. Радиотехника, электротехника переменных токов и некоторые другие отрасли техники целиком основаны на исследованиях колебательных процессов. В физических науках: в оптике, акустике, механике, электричестве, в теории атома — всюду мы встречаемся с колебаниями.

Физическая сущность тех процессов, в которых имеют место колебания, различна: например, колебания железнодорожного моста и колебания тока в электрическом контуре — совершенно различные явления. Но даже беглое знакомство с законами колебаний в том и другом случае показывает много общего между этими колебательными процессами, как мы их называем. Детальный анализ колебательных процессов, встречающихся в физике и технике, показывает, что основные законы колебаний во всех случаях одинаковы. Такая, в известном смысле, универсальность законов колебательных процессов заставляет выделить изучение их в отдельную дисциплину, которая и носит название *теории колебаний*. Таким образом, задачей курса теории колебаний является изучение с единой точки зрения колебательных процессов, встречающихся в разнообразных физических явлениях и технических устройствах.

Все колебательные процессы, с которыми нам приходится встречаться, можно классифицировать по внешним признакам — по характеру, по форме того закона, по которому некоторая величина, участвующая в процессе, изменяется со временем. Такую классификацию можно назвать *кинематической* в широком смысле этого слова.

Прежде всего все колебательные процессы, практически встречающиеся в физике и технике, разделяются на два класса: *периодические* и *непериодические*. В теории существенное значение имеет и промежуточный класс — почти *периодические* движения.

Периодическим называется такой процесс, при котором колеблющаяся величина, взятая в любой момент времени, через

определенный отрезок времени T имеет то же самое значение. Математическое определение периодической функции таково: функция $f(t)$ называется периодической с периодом T , если

$$f(t+T) = f(t)$$

при любом значении переменной t . Непериодическими можно назвать все остальные функции, не удовлетворяющие сформулированному условию периодичности.

Среди класса периодических колебаний огромную роль играют гармонические колебания, или синусоидальные колебания, при

которых изменение физической величины со временем происходит подобно изменению одной из двух первых тригонометрических функций: синуса или косинуса при линейной зависимости аргумента от времени.

Непериодические колебания гораздо разнообразнее периодических. Мы отметим сейчас только такие, с которыми нам чаще всего придется встречаться в теории колебаний.

«Затухающая» (или «нарастающая») синусоида и лимитационные движения. Колебания по закону «затухающей синусоиды» или, как они иногда называются, «затухающие гармонические», колебания, показаны на рис. 1, а и математически представляют выражением:

$$Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где A , φ , δ и ω — постоянные величины, а t — время. «Наращающие гармонические» колебания показаны на рис. 1, б и ма-

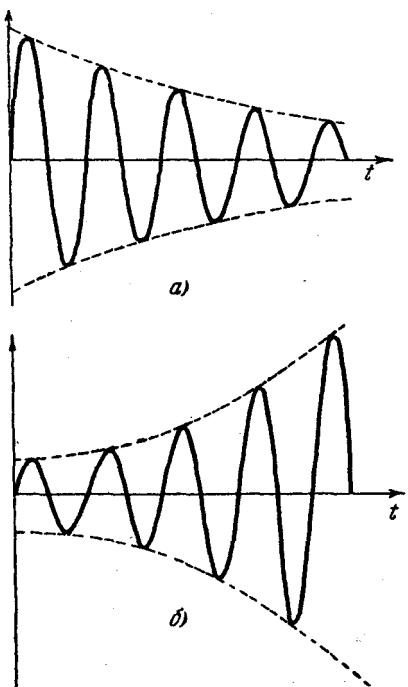


Рис. 1.

тематически они отличаются только знаком у величины δ . Строго говоря, о таких колебаниях следовало бы сказать так: затухающие (или нарастающие) колебания, близкие к гармоническим при достаточно малом значении δ . Поэтому выражение «затухающая синусоида», или «затухающие гармонические колебания», не совсем логично, гармонические колебания не могут затухать. Но название это обычно принято, и мы также примем его. Лучше было

бы говорить, что затухающее колебание представляется произведением двух сомножителей, гармонического $\cos(\omega t + \phi)$ и экспоненциального e^{-at} .

Характерные примеры лимитационных движений показаны на рис. 2. Они представляют собой такие изменения величины, при которых переменная величина с течением времени стремится

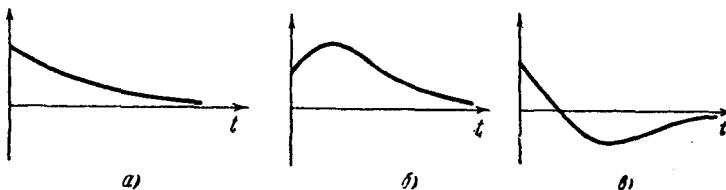


Рис. 2.

к некоторому предельному постоянному значению; математически лимитационные движения можно представить, например, так:

$$(Ae^{-at} - Be^{at}) e^{-\lambda t},$$

где A, B, a и λ — действительные числа, причем $\lambda > a$.

Перечисленные чисто внешние признаки колебательных процессов совершенно недостаточны для систематизации их. Поэтому мы будем классифицировать колебания по основным физическим признакам тех систем, колебательных систем, как мы их будем называть, в которых совершаются колебания.

В связи с этим весь материал курса разделен по сложности систем, в которых происходят колебания, на две части:

- 1) колебания в системах с одной степенью свободы;
- 2) колебания в системах со многими степенями свободы и в системах с бесконечным числом степеней свободы.

В первой части речь идет о простейших, элементарных и вместе с тем основных, фундаментальных процессах всей теории колебаний, поэтому она занимает значительную часть книги. Во второй части рассматриваются более сложные процессы, но принципиально, по существу мало отличающиеся друг от друга.

В каждой части следовало бы рассматривать четыре типа колебательных явлений:

- 1) собственные колебания,
- 2) вынужденные колебания,
- 3) параметрические колебания,
- 4) автоколебания.

Собственные колебания происходят в изолированной системе после внешнего возмущения («толчка»). Характер колебательного процесса в основном определяется только внутренними силами

системы, зависящими от физического строения системы, необходимая энергия доставляется извне при возбуждении колебаний.

Вынужденные колебания происходят под действием заданных внешних периодических сил, которые действуют независимо от колебаний в системе. Характер процесса определяется не только свойствами системы, но и существенно зависит от внешней силы. Энергия колебаний доставляется источником, дающим внешнюю силу.

Параметрические колебания отличаются от вынужденных редом внешнего воздействия. При вынужденных колебаниях извне задана сила или какая-либо другая величина, совершающая колебания, а параметры самой системы остаются при этом постоянными. Параметрические колебания вызываются периодическим изменением какого-либо физического параметра системы (например, массы).

Автоколебания — периодические движения, которые возникают в системе в отсутствие внешнего *периодического* воздействия. Характер колебаний определяется устройством системы. Источник энергии, покрывающий потери энергии на тепло при колебаниях, обычно составляет неотъемлемую часть системы.

С другой стороны, все колебательные процессы можно разделить еще и таким образом на две части: колебания, совершающиеся в линейных и в нелинейных системах. Линейными системами называют такие системы, в которых основной закон колебаний выражается *линейным дифференциальным уравнением*. Очевидно, что нелинейные системы — такие, для которых основной закон выражается *нелинейным дифференциальным уравнением*. Анализ нелинейных колебательных систем очень усложняется отсутствием регулярных методов решения *нелинейных дифференциальных уравнений*. Разница между процессами в линейных и нелинейных колебательных системах сводится к тому, что при анализе колебаний в линейных системах по частным процессам можно сделать вполне определенное заключение о всех возможных в данной системе процессах, а для процессов в нелинейных системах вообще этого сделать нельзя. Поэтому теория колебаний для нелинейных систем довольно сложна, и обычно решаются задачи, относящиеся только к определенному виду нелинейных систем. Для нас существенна теория колебаний в нелинейных системах потому, что все автоко- колебательные системы являются принципиально нелинейными системами.

ЧАСТЬ I

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

ГЛАВА 1

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ 1. Определение числа степеней свободы систем

Число степеней свободы есть число независимых переменных (величин), необходимых для полного описания процессов в системе. Однако при рассмотрении конкретной физической системы определение этих переменных представляет иногда довольно сложную задачу, так как, строго говоря, мы всегда имеем дело с системой обладающей бесконечным числом степеней свободы. Поясним это простым примером.

Тело подвешено на нити (рис. 3). Сколько степеней свободы имеет эта «простейшая» колебательная система?

Ответ зависит и от физических свойств системы и от того, какие процессы мы собираемся исследовать в ней.

Если мы будем рассматривать только те движения, при которых нить не деформируется, т. е. остается прямой и сохраняет постоянную длину; если размеры тела очень малы по сравнению с длиной нити, так что движение тела относительно нити не играет существенной роли, если движение одних точек тела относительно других так же несущественно, — тогда можно рассматривать такую систему как математический маятник, как систему с двумя степенями свободы.

Тело в этом случае можно заменить точкой, обладающей конечной массой, а нить — недеформируемым стержнем, не обладающим массой. Точка может двигаться по сфере, и для однозначного определения положения ее достаточно знать две независимые координаты. С помощью такой схемы мы изучаем только определенные колебания тела на нити.

Если, кроме этого, будут заданы еще такие начальные условия, при которых нить во время колебаний будет находиться в



Рис. 3.

определенной плоскости, то такая схема явится схемой системы с одной степенью свободы.

Таким образом, для анализа определенного процесса в реальной физической системе мы выбрали некоторую его схему, заранее ограничив исследование рядом условий. Не следует забывать, что хотя схема отражает явление только в определенных границах, только при определенных условиях, она дает правильное и полное описание тех движений системы, которые характеризуются координатами, вошедшими в схему.

Но здесь возникают такие вопросы. Как выбрать нужную координату? Как убедиться в том, что в данном случае можно выделить движение, описываемое выбранной координатой?

Только опыт, сравнение результатов математического анализа данной схемы с результатами опыта, физические наблюдения могут нас убедить в правильности выбранных координат, выбранной схемы. Подробный физический анализ и критическое отношение к схемам, исследование процессов, происходящих в системе, — могут дать уверенность в правильности выбора координат.

Для уяснения затронутых здесь вопросов приведем такой пример. Выбирая схему математического маятника, как изложено выше, мы без особых замечаний пренебрегли растяжением нити при колебаниях, а ведь оно всегда есть. Но оно мало и поэтому не окажет существенного влияния на колебания тела. Однако, как известно, есть такой случай, при котором этим малым растяжением нельзя пренебречь. В этом случае, если даже и будут сообщены маятнику такие начальные условия, при которых он «должен» колебаться только в плоскости и тело «должно» двигаться почти по дуге окружности, колебания будут в действительности совсем не такими. Колебания растяжения нити будут нарастать, и энергия этих колебаний через некоторое время сравняется по величине с энергией маятниковых колебаний тела, и даже весь первоначальный запас энергии перейдет в колебания растяжения нити. Таким образом, в данном случае избранная схема системы с одной степенью свободы не годится.

Но тогда как же поступать в таких случаях и как эти случаи отличить? — На эти вопросы дает ответ только опытное и теоретическое исследование процесса колебаний и свойств системы.

§ 2. Собственные колебания в консервативной системе с одной степенью свободы

В механических и электрических изолированных системах процесс движения всегда сопровождается рассеянием энергии, переходом энергии движения в тепловую. Если системе в какой-то момент времени будет сообщен запас энергии, то через некоторое

время весь этот запас в изолированной системе перейдет в тепло, и процесс движения, которым мы интересуемся, прекратится. Таким образом, собственные колебания могут существовать в системе после внешнего возмущения; они всегда будут постепенно ослабляться или, как говорят, затухать.

Но вначале важно рассмотреть теорию колебаний в *консервативных системах*, в таких идеализированных системах, в которых запас механической энергии (или электромагнитной, или той и другой вместе) остается постоянным. Реальные системы, в которых колебания будут сопровождаться переходом энергии в тепловую, будем называть *неконсервативными*.

Рассмотрение процессов в консервативной системе важно с двух точек зрения: во-первых, реальные процессы с очень небольшим затуханием близки к процессам в консервативной системе; во-вторых, исследование их позволит нам выяснить роль различных параметров реальных систем. Пока будем отвлекаться от сил трения в механике и от сопротивления проводников в электричестве. Приведем простейший пример собственных колебаний.

Пусть на пружине, имеющей длину l в ненагруженном состоянии, подвешено тело массы m (рис. 4).

Рассмотрим вертикальные движения тела, которые будут иметь место после толчка под действием силы пружины и силы тяжести.

Закон движения можно записать так:

$$m\ddot{x}_1 = -f_{\text{пр}} + f_{\text{тр}} + P,$$

где $f_{\text{пр}}$ — сила пружины, P — постоянная сила веса, $f_{\text{тр}}$ — сила трения. Условие консервативности $f_{\text{тр}} = 0$. Предполагаем массу пружины настолько малой, что ею можно пренебречь при колебаниях; это только в определенных случаях близко к действительности. Поэтому будем считать, что во время процесса $f_{\text{пр}}$ зависит только от ее деформации, только от координаты x_1 .

Если сила $f_{\text{пр}}$ есть однозначная функция x_1 , то пружина будет идеально упругой. Тогда можно закон зависимости силы пружины от координаты разложить в ряд Тейлора

$$f_{\text{пр}} = f_{\text{пр}}(x_0) + (x_1 - x_0)k + (x_1 - x_0)^2 b + \dots,$$

около значения, соответствующего координате x_0 , которую тело имеет в положении равновесия; k и b — величины постоянные. Экспериментальные данные показывают, что для небольших колебаний всегда можно ограничиться первыми членами раз-

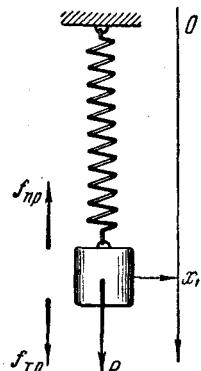


Рис. 4.

ложения в ряд. Если зависимость $f_{\text{пр}}(x_1)$ около точки x_0 в области возможных колебаний можно представить прямой линией, тогда и при любых колебаниях можно считать

$$f_{\text{пр}} = f_{\text{пр}}(x_0) + k(x_1 - x_0),$$

или между силой и деформацией пружины около равновесного состояния существует *линейная зависимость* — закон Гука.

Выберем новую координату $x = x_1 - x_0$, это означает, что мы переместили начало отсчета системы координат в положение равновесия, где $f_{\text{пр}}(x_0) = P$. Тогда уравнение движения запишется так:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.1)$$

или

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \ddot{x} + \omega^2x = 0, \quad (2.2)$$

где $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Таким образом, ω^2 — единственный физический параметр, характеризующий колебательные свойства системы.

Как известно, решение дифференциального уравнения (2.2) имеет вид:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (2.3)$$

где A и B — постоянные величины, зависящие от начальных условий. Отклонение от положения равновесия будет совершать со временем *синусоидальные*, или *гармонические*, колебания с частотой ω . Эти колебания и называются *собственными* колебаниями.

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$ или

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.4)$$

Величину

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.5)$$

называют *круговой собственной частотой* системы в отличие от *обычной частоты* n , равной числу периодов колебаний за единицу времени. Частота n равна $1/T$, и если T измеряется в секундах, то n измеряется в герцах.

Величину k называют *жесткостью* пружины или *коэффициентом жесткости*; размерность ее: n/m , дин/см , кГ/см и т. п. Численно k равно силе, которую нужно приложить к пружине, чтобы изменить ее деформацию на единицу длины.

Следовательно, период собственных колебаний зависит от отношения массы и жесткости системы.

В простых линейных системах с одной степенью свободы (без трения), в которых уравнение движения имеет вид (2.2), собственные колебания будут гармоническими. Частота колебаний определяется параметрами системы. Расчет собственной частоты сводится к определению величин, соответствующих k и m в рассмотренном примере.

Полезно познакомиться с определением собственной частоты для малых колебаний на следующих простых примерах.

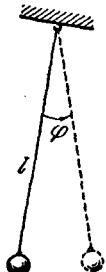


Рис. 5.

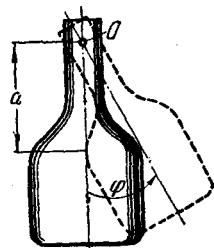


Рис. 6.

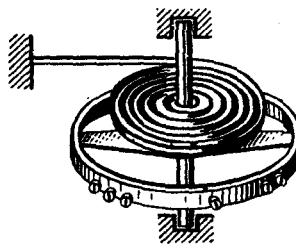


Рис. 7.

1. Колебания «математического» маятника в плоскости (рис. 5). Уравнение для малых колебаний около положения равновесия:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0,$$

где φ — угол отклонения, g — ускорение силы тяжести. Следовательно:

$$\omega^2 = \frac{g}{l}.$$

2. «Физический» маятник — тело, свободно вращающееся около горизонтальной оси O (рис. 6). Тело имеет момент инерции I относительно оси вращения, массу m , расстояние до центра массы от оси вращения a . Уравнение малых колебаний около положения равновесия:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I} \varphi = 0,$$

и поэтому

$$\omega^2 = \frac{mga}{I}.$$

3. Маятник карманных часов (рис. 7). Крутильный маятник — симметричное тело, совершающее колебания около вертикальной оси вследствие упругости спиральной пружины. Если момент

инерции тела около оси — I , а угловая жесткость пружины — c , то $\omega^2 = c/I$.

Угловая жесткость пружины определяется из равенства $M = -c\phi$, где M — момент, с которым действует пружина на тело, если оно повернется на угол ϕ . Размерность $[c]$ будет $\text{нм}/\text{рад}$, или $\text{см}/\text{рад}$ или $\text{кГсм}/\text{рад}$.

4. Электрический колебательный контур состоит из последовательно соединенных конденсатора и катушки, обладающей индуктивностью (рис. 8). Если обозначить через I ток в контуре,

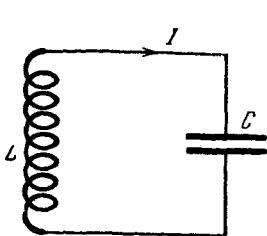


Рис. 8.

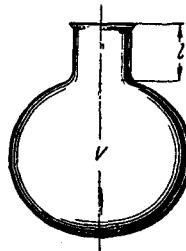


Рис. 9.

а через L и C — индуктивность и емкость соответственно, то уравнение напряжений для контура будет

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0,$$

или

$$LI'' + \frac{1}{C} I = 0,$$

или

$$I'' + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (2.6)$$

Это — уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

При вычислении ω надо брать L и C в одной системе мер: если, например, L — в генри, то C — в фарадах и т. п.

5. Резонатор Гельмгольца — акустический резонатор (рис. 9). Колебания воздуха происходят в сосуде с широким горлышком. Приближенно можно рассматривать воздух в горле сосуда как пробку с массой $m = \rho Sl$, где ρ — плотность воздуха, S — площадь сечения горла, l — длина его. Если представим себе эту массу воздуха смещенной из положения равновесия на величину x , то давление в сосуде объемом V изменится от атмосферного p на величину $\Delta p = -xp\Delta V/V$, где ΔV равно Sx . При расчете изменения давления мы полагали, что давление и объем связаны

адиабатическим законом $pV^\kappa = \text{const}$ и κ — показатель адиабаты. Тогда уравнение движения массы воздуха в горлышке при колебаниях можно записать так:

$$m\ddot{x} = \Delta p \cdot S,$$

или

$$\rho S l \ddot{x} + \kappa \frac{p S^2}{V} x = 0,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{\kappa p S}{\rho V l} x = 0.$$

И в данном случае имеем уравнение гармонических колебаний.

Если напомним, что скорость звука $c = \sqrt{\kappa p / \rho}$, то собственная круговая частота резонатора будет

$$\omega = c \sqrt{\frac{S}{lV}}. \quad (2.7)$$

Следует иметь в виду, что эта схема очень приближена, но поучительна. Воздух в горле мы считаем за «массу», а воздух в сосуде — за «пружину». При гармонических колебаниях все частицы в горле так же, как и в сосуде, движутся, но скорости и смещения различны. В горле происходят большие смещения частиц, чем в сосуде, поэтому, пренебрегая массой воздуха в сосуде, мы отбросили кинетическую энергию, приходящуюся на долю воздуха в сосуде, а учли только его энергию сжатия. Для воздуха в горле, наоборот, пренебрели энергией сжатия, а учли только кинетическую энергию движения.

Величину ошибки можно определить только с помощью точного теоретического расчета колебаний воздуха в сосуде как в системе с бесконечным числом степеней свободы.

Полезен анализ следующих простых систем, который рекомендуем учащимся произвести самостоятельно.

1. Бусинка на невесомой струне с постоянным натяжением; струна закреплена и переброшена через блок («невесомый»); на конец ее подведен груз (рис. 10). Поперечные колебания настолько малы, что движением груза можно пренебречь.

2. Бусинка на натянутой и закрепленной на концах струне (рис. 11).

Рассмотреть малые продольные колебания, полагая, что сила натяжения струны пропорциональна ее деформации.

3. Колебания в сообщающихся сосудах.

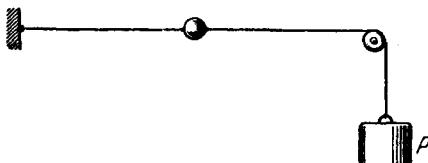


Рис. 10.



Рис. 11.

Рассмотреть вертикальные колебания столба жидкости в сообщающихся сосудах, полагая поперечное сечение обоих сосудов одинаковым. Затем решить ту же задачу, полагая сечения различными.

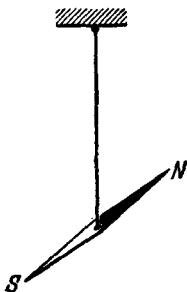


Рис. 12.

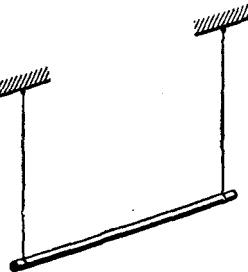


Рис. 13.

4. Колебания магнитной стрелки, подвешенной за середину на нити (рис. 12). Внешнее магнитное поле горизонтально, нить «невесома», но упруга.

5. Рассмотреть малые горизонтальные крутильные колебания однородной палочки (рис. 13), подвешенной за концы на «невесомых» и «нерастяжимых» нитях.

6. Определить период малых вертикальных колебаний системы, показанной на рис. 14.

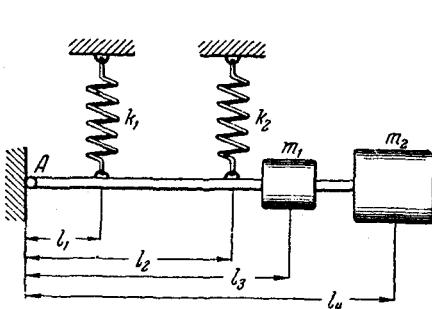


Рис. 14.

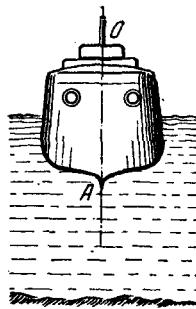


Рис. 15.

Стержень может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку A , и подвешен горизонтально на двух пружинах с жесткостями k_1 и k_2 . На стержне укреплены массы m_1 и m_2 .

7. Малые боковые колебания судна на спокойной воде (рис. 15).

Разберите условия устойчивости однородного тела, плавающего в воде и имеющего форму призмы. Найдите восстанавливающий момент, если линия OA , связанная с судном, будет составлять с вертикалью в плоскости чертежа угол ϕ .

§ 3. Основные элементы гармонического колебания и колебания энергии

Собственная частота, $\omega = \sqrt{k/m}$ — для механической системы и $1/\sqrt{LC}$ — для электрической, зависит только от физических параметров системы. Период колебаний T связан с частотой формулой $T = 2\pi/\omega$.

Движение в системе (колебания) зависит от начальных условий. В общем случае смещение $x(t)$ из положения равновесия зависит от времени так:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (3.1)$$

Если в начальный момент при $t = 0$ $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, то легко получить, что движение будет:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (3.2)$$

или

$$x(t) = D \cos(\omega t - a), \quad (3.3)$$

где

$$D = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}, \quad a = \arctg \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}.$$

Величина D называется *амплитудой* смещения, a — *начальной фазой*. Амплитуда и начальная фаза зависят от начальных условий, а частота — только от устройства системы. Величина, стоящая в аргументе $(\omega t - a)$, называется *фазой*.

Смещение $x(t)$ совершает гармонические колебания, то же можно сказать о скорости $\dot{x}(t)$ и об ускорении $\ddot{x}(t)$. Если $x = D \cos(\omega t - a)$, то $\dot{x} = -\omega D \sin(\omega t - a)$ и $\ddot{x} = -\omega^2 D \cos(\omega t - a)$. Колебания скорости сдвинуты по фазе на $\pi/2$ относительно колебаний смещения, и амплитуда скорости равна ωD . Колебания ускорения происходят в противофазе к колебаниям смещения, и амплитуда ускорения равна $\omega^2 D$. Эти формулы полезно помнить. Так, например, при частоте колебаний в 100 гц $\omega \approx 628$, если амплитуда смещения ~ 1 м.м., то амплитуда скорости ~ 628 м.м/сек $= 0,628$ м/сек и амплитуда ускорения $\sim 628 \cdot 628$ мм/сек² ≈ 40 g, где g — ускорение силы тяжести. По ускорению легко определить силу, которая действует на тело определенной массы, совершающее колебания.

В консервативной системе энергия остается при колебаниях постоянной, но она переходит из одного вида в другой; например, в механических системах — из кинетической в потенциальную и обратно.

Кинетическая энергия

$$E_{\text{кин}} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\omega^2 D^2}{2} \sin^2(\omega t - \alpha) \quad (3.4)$$

будет изменяться с течением времени с частотой 2ω .

Потенциальная энергия будет изменяться примерно так же:

$$E_{\text{пот}} = k \int_0^x dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{kD^2}{2} \cos^2(\omega t - \alpha). \quad (3.5)$$

Легко видеть, что энергия остается постоянной, в самом деле,

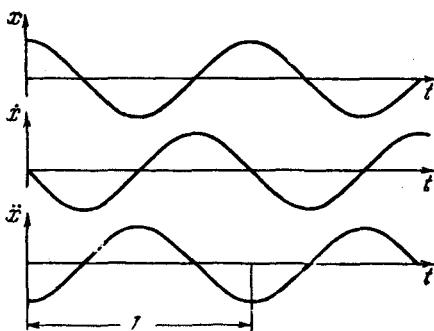


Рис. 16.

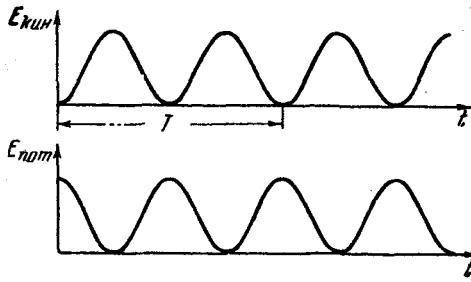


Рис. 17.

$$\begin{aligned} E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} &= \frac{1}{2} kD^2 = \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 D^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

так как $k = m\omega^2$.

Постоянство энергии можно доказать и из уравнения движения. Действительно, если уравнение (2.1) умножим на \dot{x} и преобразуем, то получим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = 0;$$

отсюда

$$\begin{aligned} \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} &= E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \\ &= \text{const.} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Полезно рассмотреть графики, которые наглядно показывают изменение различных величин во времени (рис. 16 и 17).

Иногда бывает очень удобно для вычисления собственной частоты использовать условие постоянства энергии, а именно равенство максимального значения кинетической энергии максимальному значению потенциальной энергии.

Подсчитаем собственную частоту в примере 6 § 2.

Предположим, что угол отклонения стержня $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$; тогда при $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$ вся энергия будет потенциальной и величина ее

$$E_{\text{пот}} = \frac{k_1 l_1^2 \varphi_0^2}{2} + \frac{k_2 l_2^2 \varphi_0^2}{2} = E.$$

При $\varphi = 0, \dot{\varphi} = \omega\varphi_0$ вся энергия будет кинетической и величина ее будет равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{m_1 l_3^2 \varphi_0^2 \omega^2}{2} + \frac{m_2 l_4^2 \varphi_0^2 \omega^2}{2} = E.$$

Максимум кинетической энергии равен максимуму потенциальной энергии и из этого равенства следует:

$$\omega^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{m_1 l_3^2 + m_2 l_4^2}.$$

Вычисления таким путем значительно проще, чем составление уравнения движения. Такой способ часто применяется при практических расчетах.

Упражнения

- 1) Определить этим методом частоту в примере 3 предыдущего параграфа.
- 2) Определить частоту собственных колебаний в сообщающихся сосудах, если поперечное сечение плавно меняется вдоль сосуда.

§ 4. Собственные колебания в неконсервативной системе с одной степенью свободы

При собственных колебаниях в механической системе энергия во время колебаний уменьшается, работа сил трения равна механической энергии, переходящей в тепло.

Силы трения в механике при скольжении тел относительно друг друга или при движении тела в жидкости или газе (называемые в этом случае силами сопротивления) зависят от скорости

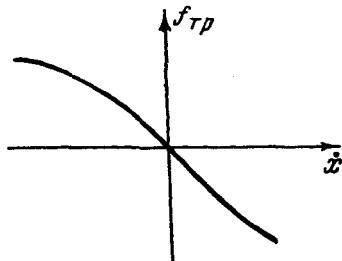


Рис. 18.

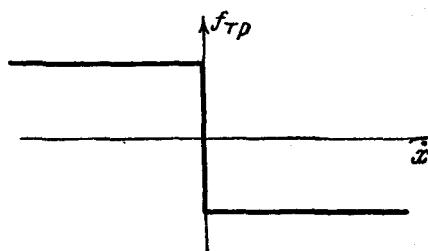


Рис. 19.

и вообще направлены против скорости. График зависимости силы трения от скорости для общего случая изображен на рис. 18; заметьте, что элементарная работа $f_{\text{тр}} dx = f_{\text{тр}} \dot{x} dt < 0$ (всегда отрицательна).

Даже в «простейшем» случае, в случае трения сухих поверхностей твердых тел, сила трения зависит от скорости, как показано

на рис. 19. Сила трения в этом случае имеет неопределенное значение при $\dot{x} = 0$ («сила трения покоя»). При теоретическом анализе колебаний в системах, где имеют место силы трения сухих поверхностей, возникают существенные трудности из-за наличия скачка силы трения при $\dot{x} = 0$.

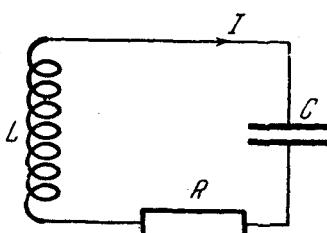
Сила трения или, лучше, сила сопротивления телу, движущемуся в среде, зависит от скорости, от формы и размеров тела и от свойств среды. При малых значениях числа Рейнольдса можно считать, что *сила трения пропорциональна первой степени скорости*. С увеличением скорости (с увеличением числа Рейнольдса) закон силы сопротивления тел изменяется; далее с увеличением скорости можно считать силу трения пропорциональной квадрату скорости. При механических колебаниях почти всегда можно считать *силу трения пропорциональной первой степени скорости*. Кроме этого, в реальных упругих телах имеет место сила «внутреннего» трения. При маленьких деформациях силу трения можно считать пропорциональной скорости деформации, следовательно, наличие такой силы трения внесет только некоторые изменения в величину коэффициента силы трения, но не изменит ее закона. Для некоторых тел будет существенным влияние «упругого гистерезиса», или неоднозначной зависимости упругой силы от деформации. В процессе увеличения деформации упругая сила больше, чем в процессе уменьшения, при том же значении деформации. Наличие упругого гистерезиса также вызывает потери энергии, но теория собственных колебаний при упругом гистерезисе становится

сложной и выходит за рамки нашего курса.

Уравнение для колебаний груза на пружинке (рис. 4), уравнение (2.1) при наличии силы трения, зависящей линейно от скорости, примет такой вид:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0, \quad (4.1)$$

Рис. 20.



где $h\dot{x}$ — сила трения, h — коэффициент силы трения, имеющий размерность $\text{н}\cdot\text{сек}/\text{м}$ или $\text{кГ}\cdot\text{сек}/\text{см}$ или $\text{дин}\cdot\text{сек}/\text{см}$. В электрическом контуре (рис. 20), содержащем индуктивность L и емкость C , омическое сопротивление R будет аналогом коэффициента силы трения в механике.

Действительно, если за переменную выберем не ток I , а q — заряд на конденсаторе, причем $\dot{q} = I$, по определению, то уравнение напряжений для контура, соответствующее уравнению (2.6), будет иметь вид:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0. \quad (4.2)$$

Очевидно, что с точки зрения математики уравнение (4.1) ничем не отличается от уравнения (4.2). Полезно провести аналогию между этими двумя системами: если смещение x аналогично заряду q , то масса m аналогична самоиндукции L , коэффициент сопротивления h — омическому сопротивлению R , жесткость k — обратной величине емкости $1/C$.

Для анализа колебательного процесса уравнения (4.1), (4.2) можно представить в одном виде:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (4.3)$$

где под x понимаем или смещение или заряд, а

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{h}{2m} \text{ или } \frac{R}{2L} \\ \text{и} \quad \omega^2 &= \frac{k}{m} \text{ или } \frac{1}{LC}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Физический процесс собственных колебаний в системе определяют две величины ω и δ , которые в силу (4.4) связаны с параметрами системы. Размерность $[\delta] = 1/\text{сек}$.

Уравнение (4.3) есть уравнение затухающих колебаний и его общее решение имеет вид:

$$x = D e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t - \alpha), \quad (4.5)$$

D и α — константы, зависящие от начальных условий, а

$$\omega_1^2 = \omega^2 - \delta^2. \quad (4.6)$$

Ясно, что при $\delta \rightarrow 0$ (4.5) стремится к выражению, которое было получено для собственных колебаний в консервативной системе.

Напомним ход решения уравнения (4.3). Всякое дифференциальное линейное уравнение имеет частное решение вида $A e^{\lambda t}$. Подставляем его в (4.3) и, сокращая на $A e^{\lambda t}$, получаем уравнение для определения λ :

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0.$$

Решения этого уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega_1,$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Можно записать общее решение (4.3) в таком виде:

$$x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t} (A e^{i\omega_1 t} + B e^{-i\omega_1 t}), \quad (4.7)$$

где A и B — константы, зависящие от начальных условий.

Так как $x(t)$ — действительное число, то A и B комплексно-сопряженные величины, поэтому A и B можно заменить через

новые действительные константы D и α с помощью равенств $2A = De^{-ia}$, $2B = De^{ia}$. Сделав это, получим (4.5).

Решение (4.5) представляет затухающие колебания (рис. 21). Величина δ называется *коэффициентом затухания*: она характеризует время, в течение которого продолжаются собственные колебания.

Иногда употребляют другую величину:

$$\tau_0 = \frac{1}{\delta} = \frac{2m}{h} = \frac{2L}{R}, \quad (4.8)$$

называемую «постоянной времени» системы.

Из формулы (4.5) можно видеть, что через время τ_0 величина максимальных отклонений от положения равновесия уменьшится в e раз (примерно в 3 раза) *).

Обычно говорят, что колебания по формуле (4.5) представляют «затухающую синусоиду»; этот термин допустим при небольшом затухании, так как такое колебание на небольшом отрезке времени *похоже* на синусоиду. Однако следует иметь в виду нелогичность этого названия и ясно понимать, что (4.5), строго говоря, совсем не синусоида. Мы также говорим, что «амплитуды» колебаний *убывают* в затухающем колебании, но амплитуда — это понятие,

неразрывно связанное с синусоидой, для которой амплитуда — постоянная величина. В силу общепринятости мы будем пользоваться такими выражениями, понимая их нелогичность.

Кривая, представленная на рис. 21, по уравнению (4.5) совсем не периодическая. Однако говорят о величине $T_1 = 2\pi/\omega_1$, которую можно назвать *условным периодом*.

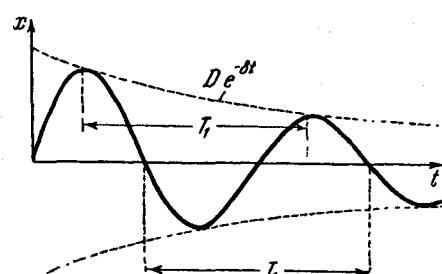


Рис. 21.

Условный период это — время между двумя последовательными прохождениями положения равновесия в одну сторону или между двумя крайними отклонениями в одну сторону. Правильнее величину T_1 называть периодом *гармонического сомножителя* затухающего колебания.

Часто пользуются для характеристики затухания не величинами δ (или τ_0), а безразмерной величиной

$$\vartheta = \delta T_1 = 2\pi \frac{\delta}{\omega_1}, \quad (4.9)$$

называемой *декрементом*.

*) $e = 2,71828\dots$ основание натуральных логарифмов.

Легко видеть, что если в данный момент t отклонение (смещение) имеет величину $x = Ne^{-\delta t}$, то через T_1 оно будет:

$$x_1 = Ne^{-\delta(t+T_1)}; \quad \text{отсюда } \frac{x_1}{x} = e^{-\delta T_1};$$

это можно записать так: $\delta T_1 = \ln\left(\frac{x}{x_1}\right)$, или по (4.9)

$$\vartheta = \ln\left(\frac{x}{x_1}\right). \quad (4.10)$$

Выражение (4.10) можно понимать как определение декремента.

Так как (4.10) справедливо для любого момента t , то лучше взять значение x в тот момент, когда оно достигает наибольшего значения; тогда *натуральный логарифм отношения двух последовательных «амплитуд»* (в одну сторону) равен декременту. Значит, декремент характеризует убывание размахов колебаний. Легко видеть, что целая часть числа $1/\vartheta$ равна числу колебаний, после которого «амплитуда» уменьшается в e раз (примерно в 3 раза).

Таким образом, δ (или τ_0) определяет *время затухания*, продолжительность процесса, ϑ (или $1/\vartheta$) — число колебаний при затухании, число колебаний во время процесса. Например, если $\tau_0 = 0,01$ сек., это значит, что через 0,03 сек. «амплитуда» уменьшится в e^3 (~ 25) раз. Если $\vartheta = 0,01$, то это значит, что через 100 колебаний «амплитуда» уменьшится в 2,7 (~ 3) раза.

Укажем обычные величины средних значений декрементов некоторых систем:

- | | |
|---------------------------------------|----------------------------|
| 1) акустические колебательные системы | $\sim 10\%$ |
| 2) электрические контуры | $\sim 2-5\%$ |
| 3) камертон | $\sim 0,1\%$ |
| 4) кварцевая пластинка | $\sim 10^{-2}-10^{-3}\%$. |

Отсюда видно, что камертон совершает почти 1000 колебаний, пока колебания уменьшаются в три раза.

В дальнейшем будут выяснены различные способы определения декремента системы. Но его можно определить из опытов, по записи собственных колебаний. Обычно строят график, где по оси ординат откладывается натуральный логарифм «амплитуд», а по оси абсцисс — в том же масштабе число колебаний. Наклон прямой, вернее — тангенс наклона, дает величину декремента.

Часто такой способ применяют и для выяснения закона трения; если точки, соответствующие логарифмам «амплитуд», не лежат на прямой, то, следовательно, трение по крайней мере не пропорционально скорости.

В заключение этого параграфа приведем вид собственных затухающих колебаний в самой общей форме. Пусть при $t = 0$

колеблющаяся система имеет начальные значения $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Подставляя эти значения в (4.5) и в производную от $x(t)$, получаем:

$$D \cos \alpha = x_0, \quad -\delta x_0 + \omega_1 D \sin \alpha = \dot{x}_0,$$

откуда

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 \delta + \dot{x}_0}{\omega_1 x_0},$$

$$D^2 = x_0^2 + \frac{(x_0 \delta + \dot{x}_0)^2}{\omega_1^2};$$

подставляя значения α и D в (4.5), опять получаем общее выражение для собственных колебаний при заданных начальных условиях:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0 \delta + \dot{x}_0)^2}{\omega_1^2}} e^{-\delta t} \cos \left[\sqrt{\omega^2 - \delta^2} \cdot t - \operatorname{arctg} \frac{x_0 \delta + \dot{x}_0}{\omega_1 x_0} \right]. \quad (4.11)$$

Проследим, как будет изменяться характер колебаний при увеличении трения. Если в системе непрерывно увеличивать трение, увеличивать δ , то ясно, что при $\delta = \omega$ (и далее при $\delta > \omega$) такой вид выражения (4.11) для $x(t)$ будет не совсем удобен. Лучше записать $x(t)$ просто в экспоненциальных функциях времени как в формуле (4.7). Значение $\delta = \omega$ называется *критическим* значением коэффициента затухания. Как можно видеть из (4.6), ω_1 в этом случае обращается в нуль и, следовательно, условный период и декремент ϑ (4.9) обращаются в бесконечность. При $\delta > \omega$ (при затухании, большем критического) значения ω_1 и ϑ будут мнимы.

Движение в этом случае будет иметь уже неколебательный характер; система, выведенная из положения равновесия, постепенно все уменьшая скорость, стремится к нему или, пройдя только один раз через положение равновесия, также постепенно возвращается к нему. Такое движение называют *лимитационным*; подробнее мы рассмотрим его в следующем параграфе. Следовательно, критическое значение коэффициента затухания определяет границу между колебательным (4.11) и лимитационным движением в системе.

§ 5. Изображение колебательных процессов в системе с одной степенью свободы на «фазовой плоскости»

Для анализа всех возможных движений (собственных колебаний) в системе с одной степенью свободы пользуются «фазовой плоскостью». В механике и статистической физике вводится понятие «фазового пространства»; в данном случае это пространство вырождается в плоскость.

Анализ движений в линейной колебательной системе с помощью фазовой плоскости имеет перед изложенными выше обычными способами только преимущество наглядности, в то время как для нелинейной системы он является мощным средством исследования, как это было показано А. А. Андроновым и А. А. Виттом. Поэтому на примере собственных колебаний в линейной системе подробнее познакомимся с этим методом.

Динамическое состояние системы (описываемой дифференциальным уравнением второго порядка) однозначно определено двумя переменными: координатой и скоростью. Действительно, задание любых произвольных начальных значений этих двух величин однозначно определяет весь дальнейший процесс; решение дифференциального уравнения — единственное для данных начальных значений *).

Представим себе декартову плоскость (x, y); по оси абсцисс откладывается координата x движения массы, а по оси ординат — соответствующая этой координате скорость $\dot{x} = y$. Точка с координатами $x(t), y(t)$ называется *изображающей точкой*. Из дифференциального уравнения движения, например (4.3), можно получить уравнение, связывающее непосредственно x и y ; это будет уравнение *интегральной кривой* на фазовой плоскости, — кривой, по которой движется со временем изображающая точка. Интегральную кривую иногда называют *фазовой траекторией*.

Так, для линейной колебательной системы, представляемой уравнением (4.3), можно записать два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -(2\delta y + \omega^2 x).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Система двух уравнений (5.1) совершенно эквивалентна (4.3). От системы двух дифференциальных уравнений можно перейти к уравнению, не содержащему времени. Разделим в (5.1) второе уравнение на первое и получим дифференциальное уравнение интегральной кривой на фазовой плоскости:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\delta y + \omega^2 x}{y}.\tag{5.2}$$

Решение этого уравнения $y = f(x, C)$ дает семейство интегральных кривых, которое представляет все возможные процессы в данной системе.

*) Если, конечно, функции, входящие в уравнение, удовлетворяют определенным условиям в данной точке (условиям Коши—Липшица).

В общем случае для любой системы с одной степенью свободы оба уравнения, аналогичные (5.1), можно записать так:

$$\frac{dx}{dt} = y = Q(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = P(x, y),$$

где P и Q — известные функции от x и y . Тогда уравнение кривых на фазовой плоскости будет:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (5.3)$$

Если функция P/Q ограничена и однозначна в определенной области плоскости (x, y) , то по теореме Коши при данных x и y есть только одно единственное решение этого уравнения. Это значит, что через данную точку проходит одна и только одна интегральная кривая и что интегральные кривые нигде не могут пересекаться. В тех же точках, где эти условия не выполняются, интегральные кривые могут и пересекаться. Такие точки очень важны при изучении движения системы, они называются *особыми точками*.

Состояние равновесия соответствует нулевым значениям скорости и ускорения, т. е. состояния равновесия системы будут в точках x_0 и y_0 , где $\dot{y} = 0$, $\ddot{x} = 0$, или

$$P(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

Очевидно по (5.3), что в точке x_0, y_0

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}. \quad (5.4)$$

В этих точках функция P/Q , входящая в уравнение (5.3), имеет неопределенное значение и, значит, эти точки — *особые точки дифференциального уравнения*.

Следовательно, состояния равновесия системы соответствуют *особым точкам* дифференциального уравнения фазовых траекторий.

Рассмотрим состояние равновесия для системы (5.2). Оно соответствует $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Действительно, $x = 0$ вследствие выбора начала координат, и в состоянии равновесия скорость должна быть равна нулю, т. е. $y = 0$. Тогда уравнение (5.2) в этой точке имеет вид (5.4). Точка $x_0 = 0, y_0 = 0$ является *особой точкой*; через нее могут проходить несколько интегральных кривых, или интегральные кривые могут пересекаться в точках, соответствующих состоянию равновесия. Из (5.4) прямо видно, что направление касательной к интегральной кривой в особой точке, соответствующей положению равновесия, *неопределено*; интегральная кривая

может «проходить» через особую точку, вообще говоря, по различным направлениям.

Отметим некоторые очевидные условия движения изображающей точки по интегральным кривым, которые облегчают анализ картины кривых. В *верхней* полуплоскости (при $y > 0$) изображающая точка движется всегда *вправо*, в сторону увеличения x , здесь проекция скорости движения по фазовой траектории на ось x всегда положительна. В *нижней* полуплоскости ($y < 0$), наоборот, точка движется только *влево*. Интегральная кривая *пересекает* ось абсцисс ($y = 0$) всегда под *прямым углом*, и точка пересечения интегральной кривой с осью абсцисс не может быть точкой *перегиба*.

1. «Фазовый портрет» гармонических колебаний (семейство интегральных кривых для линейной консервативной колебательной системы на фазовой плоскости)

При $\delta = 0$ уравнение интегральных кривых (5.2) будет

$$\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}.$$

Его легко проинтегрировать. Действительно, $y dy + \omega^2 x dx = 0$, и поэтому уравнение семейства интегральных кривых $y^2 + \omega^2 x^2 = \text{const} = C$.

Это есть семейство эллипсов с общим центром в начале координат — в особой точке (рис. 22). Например, если $x(0) = 0$, $y(0) = v$, то уравнение эллипса, соответствующего данным начальным условиям, будет иметь такой вид:

$$\frac{y^2}{v^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \cdot x^2 = 1.$$

Задавая константе C все возможные значения, получим фазовую плоскость, заполненную подобными эллипсами, вложенными один в другой. Изображающая процесс точка движется по одному из эллипсов со скоростью ω :

$$|\omega| = \sqrt{y^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{y^2 + \omega^2 x^2},$$

ω есть скорость движения изображающей точки по фазовой плоскости; ее не следует путать с действительной скоростью, с ординатой изображающей точки.

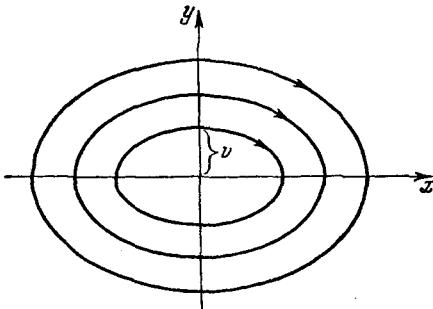


Рис. 22.

Время, за которое изображающая точка обходит эллипс, равно периоду колебаний $2\pi/\omega$ и одинаково для всех эллипсов.

Состояние равновесия имеет место при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, соответствующая ему особая точка содержит целую интегральную кривую — эллипс, «свернувшийся» в точку. Такая особая точка называется *центром*.

2. «Фазовый портрет» затухающих колебаний

Уравнение интегральных кривых в этом случае имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\delta y + \omega^2 x}{y}. \quad (5.2)$$

Его можно решить непосредственно. Однако предпочтем иной путь, не решая уравнения, определить хотя бы качественно ход интегральных кривых. Этот прием особенно полезен в том случае, когда нужно решить не уравнение (5.2), а нелинейное уравнение вида (5.3), которое общими методами решить вообще нельзя, но «фазовый портрет» в этом случае многое дает для понимания процессов в системе.

Для этой цели можно воспользоваться методом *изоклин*. Метод заключается в том, что на фазовой плоскости наносятся кривые, которые пересекают интегральные кривые только под одним определенным углом. Рассматривая ряд изоклин, можно «сообразить», каков будет ход интегральных кривых. Если по изоклинам нельзя установить ход интегральных кривых, то можно еще рассмотреть, как будут пересекаться интегральными кривыми определенные заданные кривые на плоскости.

Уравнение изоклин легко получить из уравнения (5.2). Положим

$$\frac{dy}{dx} = a,$$

a — определенная постоянная величина; тогда, подставляя в (5.2) вместо dy/dx величину a , получим уравнение изоклины:

$$y = -\frac{\omega^2}{a + 2\delta} x. \quad (5.5)$$

При различных a это будет пучок прямых, проходящих через начало координат.

Попробуем еще узнать, нет ли среди изоклин этого семейства интегральной кривой. Иначе говоря, попробуем найти такое значение a , при котором $y = ax$ будет и интегральной кривой и изоклиной.

Подставляя $y = ax$ в (5.5), получаем:

$$a = -\frac{\omega^2}{\omega^2 + 2\delta},$$

или

$$a = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}. \quad (5.6)$$

При *колебательном* движении, когда $\omega > \delta$ таких изоклинов (или таких интегральных кривых) нет. При *лимитационном* движении (§ 4), когда $\omega < \delta$, есть две интегральные кривые в виде прямых, проходящих через начало.

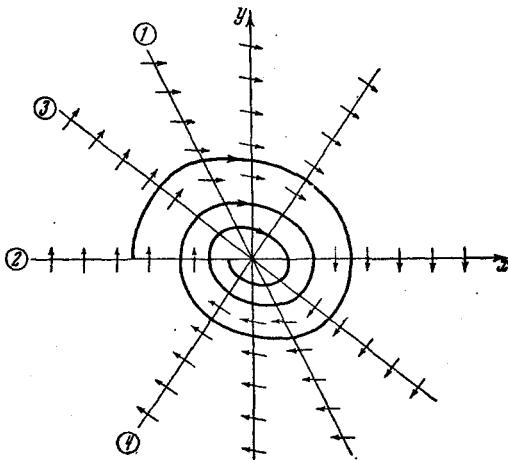


Рис. 23.

Зададим величине a различные значения и построим ряд изоклинов для случая колебательного движения в рассматриваемой системе ($\omega > \delta$) (рис. 23):

- 1) $a = 0, \quad y = -\frac{\omega^2}{2\delta}x;$ 3) $a = 1, \quad y = -\frac{\omega^2}{1+2\delta}x;$
- 2) $a = \infty, \quad y = 0;$ 4) $a = -1, \quad y = \frac{\omega^2}{1-2\delta}x.$

При $x = 0$, т. е. на оси ординат, $\left(\frac{dy}{dx}\right) = -2\delta$.

Начертив достаточное количество изоклинов, легко провести интегральную кривую. Совершенно очевидно, что в этом случае она будет иметь вид спирали, скручивающейся к началу координат. Из любого начального положения изображающая точка с течением времени приближается к началу координат, система стремится к положению равновесия. Если начертим на фазовой плоскости одну спираль, то все остальные спирали, например,

начинающиеся на отрезке mn , будут, не пересекаясь, «вливаться» в начало, оставаясь все время в промежутке между двумя соседними витками одной и той же спирали (рис. 24).

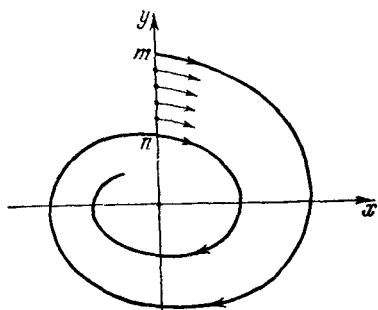


Рис. 24.

Если $\delta > \omega$, то движение будет неколебательным или лимитационным (его называют, не совсем правильно, «апериодическим»)*). «Фазовый портрет» в этом случае принципиально изменяется: появляются две прямые, интегральные кривые — изоклины, угловой коэффициент которых определяется по формуле (5.6),

- 1) $y = -(\delta + \alpha)x$,
- 2) $y = (\alpha - \delta)x$,

где

$$\alpha^2 = \delta^2 - \omega^2.$$

Все интегральные кривые, лежащие между этими прямыми, должны, не пересекаясь, пройти в начало координат, не выходя из угла между ними (рис. 25). Легко убедиться, что кривые в первой четверти «падают» вниз, уходя вправо и пересекая ось под прямым углом, поворачиваются к началу координат, достигая низшей точки на

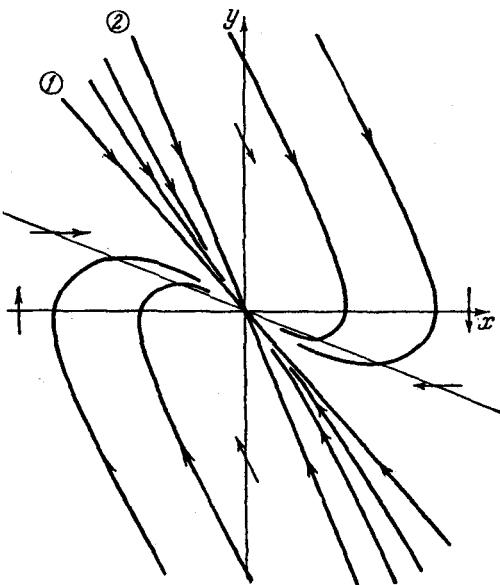


Рис. 25.

*) Так как рассмотренное колебательное затухающее движение уже является непериодическим.

прямой $y = -\frac{\omega^2}{2\delta}x$, где касательные имеют нулевой угол наклона, и уходят в начало координат.

Принимая во внимание, что интегральные кривые нигде не должны пересекаться, легко можно качественно начертить совокупность интегральных кривых на фазовой плоскости. (Из точных расчетов известно, что интегральные кривые, подходя к началу координат, касаются прямых $y = (a - \delta)x$ и $y = -(a + \delta)x$.)

Особая точка в начале координат в этом случае носит название *устойчивого узла*.

Полезно отметить, что изоклины — интегральные кривые — и оси координат разделяют всю фазовую плоскость на шесть различных областей (рис. 26); движения, начинающиеся из этих областей, имеют характерный вид. Изменение x в зависимости от времени будет иметь различный вид, если в начальный момент изображающая точка лежит в одной из следующих областей фазовой плоскости, обозначенных на рис. 26.

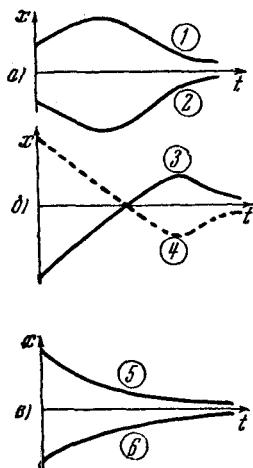


Рис. 27.

Из областей 1 и 2, соответствующих начальным условиям: отклонение массы от положения равновесия и толчок от положения равновесия, движение имеет вид, изображенный на рис. 27, а. Если изображающая точка начинает движение из областей 3 и 4, то начальные условия будут: отклонение от положения равновесия и значительный толчок к положительному равновесию. Толчок таков, что масса один раз переходит через положение равновесия, движение показано на рис. 27, б. Движение из областей 5 и 6 соответствует начальным условиям: отклонение от положения равновесия и небольшой толчок к положению равновесия; движение показано на рис. 27, в.

Следует отметить, что хотя картины на фазовой плоскости принципиально отличаются друг от друга в случаях $\delta > \omega$ и $\delta < \omega$, однако практически кривые при $\delta \approx \omega$ на фазовой плоскости очень похожи друг на друга вне зависимости от того, что $\delta > \omega$ или $\omega > \delta$.

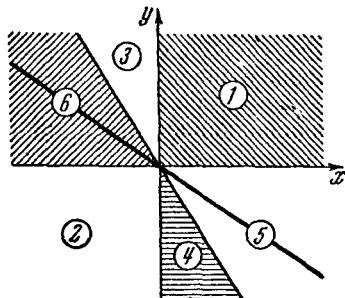


Рис. 26.

При изменении δ картина интегральных кривых на фазовой плоскости («фазовый портрет») изменяется следующим образом. Фокус в начале координат переходит в узел. Именно: с увеличением δ (при постоянном ω) спирали все увеличиваются свой шаг, быстро стремясь (без заворотов) к началу, при $\delta = \omega$ появляется прямая — интегральная кривая — $y = -\delta x$, пересекать которую «спирали» уже не могут, далее (с увеличением δ) из одной прямой — интегральной кривой — появляются две, и угол между ними растет.

Рассмотрение трансформации фазовой картины с изменением параметров системы очень поучительно для физического понимания процессов в системе. Смотря на «фазовый портрет» при определенных заданных значениях параметров, можно представить все возможные движения в данной системе при любых начальных значениях. Отмечая изменение картины с изменением параметров, вы представляете все движения, которые может иметь данная физическая система при всевозможных значениях параметров. Например, расположение и характер особых точек на фазовой плоскости дают возможность сделать ряд заключений о процессах в данной системе, правда, чисто качественного характера.

Однако иногда на основе фазовой картины можно сделать и количественные расчеты; это особенно ценно при анализе колебаний в нелинейных системах.

В линейной колебательной системе с затуханием имеются только два параметра δ и ω . В зависимости от соотношения между

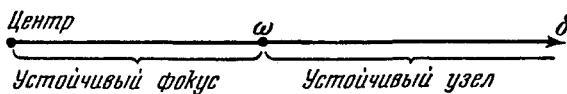


Рис. 28.

ними можно коротко изобразить характер процессов в данной системе (рис. 28). На рис. 28 полагаем, что δ — переменная, а ω — постоянная величина, вдоль оси отложено δ , и области значений δ соответствуют определенным видам фазовой картины.

§ 6. Собственные колебания системы с «отрицательным» затуханием

Сила трения или падение напряжения на омическом сопротивлении электрического контура играют особую роль, так как они связаны с переходом энергии в тепло, с уменьшением запаса механической или электромагнитной энергии системы.

Действительно, из основного уравнения для механических колебаний

$$m\ddot{x} + kx = -h\dot{x}$$

получаем, умножив его на \dot{x} и преобразовав:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = -h\dot{x}^2, \quad (6.1)$$

или для электрического контура

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = -R\dot{q}^2.$$

Следовательно, колебания затухают, так как все системы обладают трением (или сопротивлением).

Однако это не всегда так. Есть такие реальные системы, в которых имеет место сила, пропорциональная скорости \dot{x} или \dot{q} , но обратная по знаку силе трения, или напряжение, обратное по знаку падению напряжения на сопротивлении. Об этих системах говорят, что они обладают «отрицательным трением», или «отрицательным сопротивлением». Сила «отрицательного трения» или «отрицательное сопротивление» — формальные названия и особого физического смысла в них искать не следует. Физически это значит, что в системе имеются источники энергии, которые дают силы (или напряжения) такого типа. Как это происходит, лучше всего видеть на конкретном примере, которым может служить регенеративный приемник.

1. Регенеративный приемник

Схема регенеративного приемника показана на рис. 29. В цепь сетки электронной лампы включен колебательный контур (L , C , R), а в цепь анода включена катушка L_a , индуктивно связанныя с катушкой контура («катушка обратной связи»).

Прежде чем анализировать данную схему, сделаем несколько замечаний о свойствах электронной лампы. Анодный ток i_a через лампу является функцией сеточного и анодного напряжений, или функцией разности потенциалов между катодом и сеткой v_c и разности потенциалов между катодом и анодом v_a . Вообще

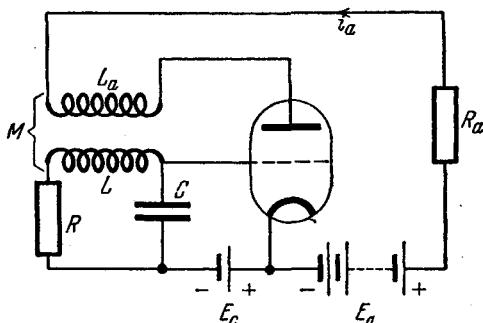


Рис. 29.

ток i_a есть функция $v_c + Dv_a$, где D — постоянная величина, называемая проницаемостью лампы. Если изменять v_c , то будет изменяться ток i_a , а так как в цепи анода есть нагрузка, то v_a зависит от i_a . Однако величина D очень мала ($1/100$ или $1/10$), поэтому и влияние изменений v_a на i_a обычно очень мало. В первом приближении можно считать i_a функцией только сеточного напряжения. Зависимость i_a от v_c (при постоянном v_a) имеет вид, показанный на рис. 30; существенно, что зависимость эта нелинейная.

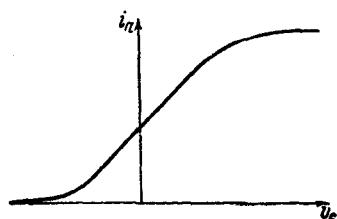


Рис. 30.

Выберем напряжение батареи E_a и E_c так, чтобы при колебаниях около равновесия потенциал сетки был отрицателен относительно катода. Это всегда можно сделать. В таком случае величина сеточного тока будет ничтожно мала, и можно считать, что ток в цепи катод—сетка равен нулю.

Обозначим заряд на конденсаторе через q , и тогда уравнение для колебательного контура запишем так:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \pm M \frac{di_a}{dt}, \quad (6.2)$$

где знак коэффициента индуктивной связи между катушками зависит от относительного направления витков в катушках. Очевидно, что перемена концов в любой из катушек (при неизменном их расположении) ведет к изменению знака M , поэтому мы и поставили \pm .

Далее подберем E_a и E_c так, чтобы «рабочая точка» была примерно на середине характеристики (рис. 31). Рабочая точка (i_{a0}) (v_{c0}) — значения тока и напряжений в состоянии равновесия при отсутствии колебаний анодного тока в лампе. Тогда при небольших колебаниях можно приближенно представить характеристику лампы прямой линией:

$$i_a = i_{a0} + S(v_c - v_{c0}),$$

где S — постоянная величина, называемая «крутизной».

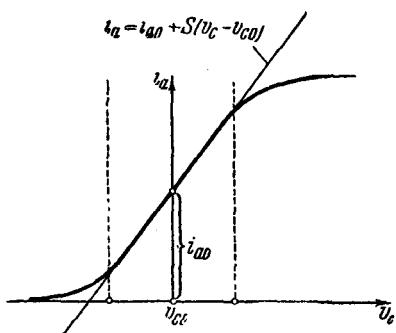


Рис. 31.

Легко видеть по схеме, что $v_c - v_{co} = q/C$ равно напряжению на конденсаторе; тогда уравнение характеристики лампы примет вид:

$$i_a - i_{a0} = \frac{Sq}{C} \quad (*).$$

Подставляя это значение i_a в уравнение (6.2), получаем:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \pm \frac{MS}{C}\dot{q}, \quad (6.3)$$

или

$$L\ddot{q} + \left(R \mp \frac{MS}{C}\right)\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Обозначив, как обычно, $\omega^2 = 1/LC$ и $2\delta = R/L \mp MS/LC$, мы формально приходим к уравнению затухающих колебаний (4.3) в его стандартной форме. Но теперь коэффициент затухания δ зависит от коэффициента связи M и крутизны характеристики S .

Обычно величину M подбираем так, чтобы уменьшить затухание δ ; это, как узаем далее, необходимо для улучшения приема сигнала, и тогда собственные колебания в контуре затухают значительно слабее, чем без обратной связи.

Изменяя расстояние между катушками, увеличивая M , можно сделать $\delta = 0$ и затем отрицательной. Тогда контур будет иметь *отрицательное затухание*. Поэтому вообще колебательную систему, движение в которой описывается уравнением (4.3) при $\delta < 0$, можно назвать системой с *отрицательным затуханием*.

Колебания в такой системе будут нарастать по экспоненциальному закону (рис. 32):

$$q = A e^{\delta t} \cos(\omega_1 t + \alpha).$$

От сколь угодно маленького начального толчка колебания будут нарастать до бесконечности.

Теория дает бесконечные колебания, которых в действительности никогда не бывает. Почему так? Дело в том, что основное уравнение (6.3) составлено нами в предположении линейной зависимости между q и i_a ; это справедливо только в линейной части характеристики лампы между пунктирными линиями на рис. 31.

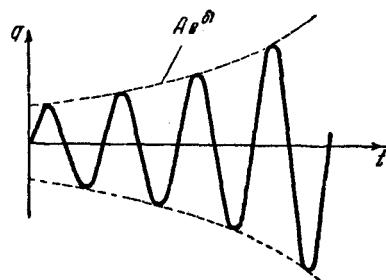


Рис. 32.

^{*}) Очевидно: $v_{co} = E_c$, если током сетки можно пренебречь, и $v_{ao} = E_a - i_{ao}R_a$.

Как только q возрастает до таких значений, что $v_c - v_{co} = q/C$ будет заходить за пунктирные линии, то уравнение (6.3) станет неверным. Для решения вопроса о том, что будет с колебаниями далее, нужно решать *нелинейное уравнение*.

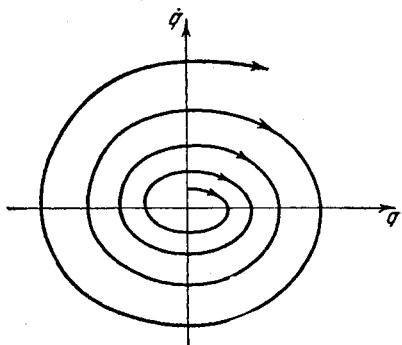


Рис. 33.

На фазовой плоскости (q, \dot{q}) колебания в контуре представляются для линейной области раскручивающейся спиралью (рис. 33). Особая точка, соответствующая состоянию равновесия, в этом случае называется *неустойчивым фокусом*. Далее, в разделе автоколебаний (глава 9) будут указаны методы решения нелинейной задачи. Там мы увидим, что нарастание колебаний прекратится и в системе установятся периодические стационарные колебания (автоколебания).

2. Маятник с отрицательным затуханием

На гладкий вращающийся вал A плотно насажена муфта B , соединенная в одно целое со стержнем маятника C (рис. 34). Если вал вращается с постоянной угловой скоростью Ω , то момент силы трения вала о муфту при определенной зависимости его от скорости скольжения будет причиной возникновения отрицательного затухания в системе. Сила трения скольжения зависит от скорости скольжения ω ; следовательно, момент силы трения зависит от относительной скорости вращения вала и муфты. Можно так подобрать давление и материал муфты и вала, что момент силы трения, действующий на маятник в зависимости от угловой скорости скольжения ω , будет иметь вид, показанный на рис. 35. При небольшой скорости вращения момент остается постоянным, а далее начинает *падать* до некоторой величины, после чего опять начинает *воздрастать*.

Вал вращается со скоростью Ω , и относительная угловая скорость скольжения равна $\omega = \Omega - \dot{\phi}$, где $\dot{\phi}$ — угловая скорость вращения маятника при колебаниях.

Уравнение вращательных колебаний маятника можно записать для малых колебаний так:

$$I\ddot{\phi} + b\dot{\phi} + Mg\alpha\phi = f(\Omega - \dot{\phi}), \quad (6.4)$$

где ϕ — угол отклонения маятника от вертикали, $b\dot{\phi}$ — момент силы трения (кроме сил трения о вал), $Mg\phi$ — момент силы тяжести (M — масса маятника, a — расстояние от центра массы маятника до оси, g — ускорение силы тяжести), $f(\Omega - \dot{\phi})$ — момент силы трения о вал, I — момент инерции маятника.

Рассмотрим такие небольшие колебания, что $|\dot{\phi}| \ll \Omega$; тогда момент сил трения можно разложить в ряд Тейлора:

$$f(\Omega - \dot{\phi}) = f(\Omega) - c\dot{\phi} + d\dot{\phi}^3 + \dots,$$

$$\text{где } c = \left(\frac{\partial f}{\partial \omega} \right)_{\Omega}.$$

Если ограничимся линейными членами этого ряда и подставим в уравнение

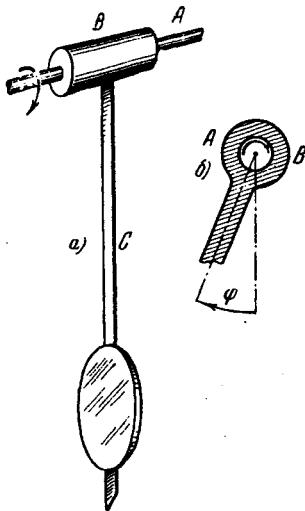


Рис. 34.

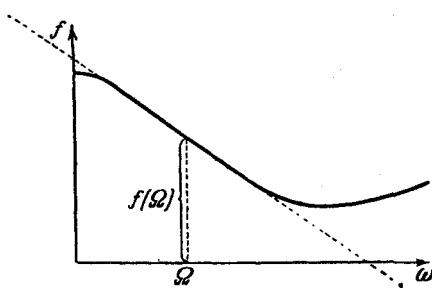


Рис. 35.

(6.4), то получим уравнение колебаний маятника

$$I\ddot{\phi} + b\dot{\phi} + Mg\phi = f(\Omega) - c\dot{\phi}.$$

Переменим начало отсчета угла отклонения ϕ или введем новую координату $\psi = \phi - \frac{f(\Omega)}{Mg}$; тогда уравнение колебаний маятника

$$I\ddot{\psi} + (b + c)\dot{\psi} + Mg\psi = 0, \quad (6.5)$$

очевидно, вполне эквивалентно (6.3). Величина коэффициента затухания

$$\delta = \frac{1}{2I} (b + c).$$

Если $c = 0$, то подвес является «идеальным»; это значит, что сила трения о вал не вносит затухания в колебания маятника. Равенство $c = 0$ означает, что «рабочая точка» выбрана в том месте характеристики, где сила трения не зависит от скорости. Н. Е. Жуковский указал на возможность осуществления «идеального подвеса» в этом случае.

Если скорость вращения вала Ω подобрана так, что $c = \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_{\Omega} < 0$, как показано на рис. 35, или «рабочая точка» выбрана на падающей части характеристики момента трения, то трение о вал будет «отрицательным» и затухание колебаний уменьшится относительно затухания колебаний этого же маятника на идеальном подвесе.

При отрицательном значении c , которое по модулю больше b , система имеет отрицательное затухание, и от любого небольшого толчка в ней начинаются *нарастающие* колебания.

Полезно заметить, что можно и без сложных рассуждений убедиться в том, что вращение вала будет раскачивать маятник при наличии падающей характеристики момента трения. Действительно, при колебаниях маятника на вращающемся валу за один полупериод колебаний, за который вал и маятник идут в одну сторону, момент трения вала о муфту помогает колебаниям маятника, работа сил трения увеличивает энергию колебаний маятника. За следующий полупериод, когда вал и маятник движутся в разные стороны, скорость скольжения больше, а момент трения меньше, чем в предыдущем случае, и работа момента трения, отнимающая энергию у маятника, будет меньше. Следовательно, за целый период вал передает энергию маятнику и увеличивает амплитуду колебаний.

С течением времени амплитуда колебаний будет возрастать, если процесс происходит в линейной области характеристики момента сил трения (рис. 35). Но как только колебания достигнут таких значений, что момент трения будет выходить за пределы линейного участка, колебания, как и в предыдущем случае, будут определяться нелинейным уравнением. При некотором значении амплитуды колебаний возрастание прекратится, и в системе возникнут устойчивые периодические колебания (автоколебания) *).

Следует отметить, что примеры с отрицательным затуханием не так редки, как может показаться на первый взгляд.

Итак, рассматривая собственные колебания, мы встречаем два различных класса явлений, различие которых заключается в знаке сил трения: 1) затухающие колебания и 2) нарастающие колебания. Существенно, что для первых линейная теория дает полное описание процесса, пренебрежение нелинейными членами во многих случаях не ведет к принципиальному расхождению теории с опытом. Для второго класса это не так; здесь линейная теория приводит к противоречию с опытом. Линейная теория в состоянии описать правильно только начальную стадию

*) На возможность возникновения таких колебаний указал Фроуд (см. [11]).

процесса, а в дальнейшем течении процесса небольшая нелинейность играет принципиальную роль.

Однако линейная теория в этом случае вполне надежно определяет условие, при котором могут в системе возникнуть нарастающие колебания; это условие $\delta < 0$, которое называют условием *самовозбуждения* системы. Для практических задач определение условий самовозбуждения часто очень существенно.

В заключение заметим следующее. Формально можно утверждать, что при $\delta = 0$ рассмотренные нами системы будут совершать *незатухающие* колебания с любой амплитудой, конечно, в области линейности. В действительности, в реальной системе невозможно осуществить точное равенство $\delta = 0$; физические параметры всегда будут с течением времени немного изменяться и δ будет больше или меньше нуля, оставаясь все же очень маленькой величиной. Изменение же знака поведет к принципиальному изменению характера движений в системе, и в этом случае будут иметь место неустойчивые колебания, то нарастающие, то затухающие.

ГЛАВА 2

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

§ 7. Колебания нелинейной консервативной системы

До сих пор мы рассматривали собственные колебания линейных систем. Теперь рассмотрим колебания нелинейных систем, движение в которых описывается нелинейным дифференциальным

уравнением. Решение нелинейных уравнений представляет почти не преодолимые трудности, поэтому для физического анализа нелинейных колебаний в каждом частном случае приходится применять свой специальный прием.

В механике встречаются примеры, в которых зависимость между силой (упругой) и деформацией нелинейна. Закон прямой пропорциональности (закон Гука) вообще справедлив только для малых деформаций; с увеличением деформации величина силы начинает обычно нарастать медленнее, чем деформация. При колебаниях сложных конструкций бывает иногда, что с изменением деформаций вступают в

«работу» новые упругие элементы или, наоборот, выключаются некоторые из «работавших».

Пример такой системы показан на рис. 36. В направляющих колеблется тело массы m на пружине k . С увеличением колебаний будут вступать в работу пружины k_1 , k_2 , так что если даже считать пружины линейными, характеристика упругих сил будет нелинейной. Примерный вид такой характеристики показан на рис. 37.

В механике нелинейность в инерционном члене встречается редко. В электричестве могут быть нелинейными как «упругие», так и «инерционные» члены. Например, колебательный контур,

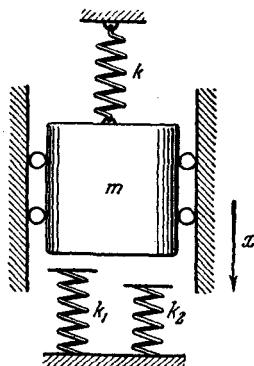


Рис. 36.

катушки, которого содержит железо, будет описываться уравнением такого вида:

$$n \frac{d\Phi}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

где Φ — поток индукции через катушку, q — заряд на конденсаторе, n — число витков катушки и C — емкость конденсатора.

Если можно пренебречь явлением гистерезиса, то характеристика зависимости Φ от тока \dot{q} будет иметь примерно такой

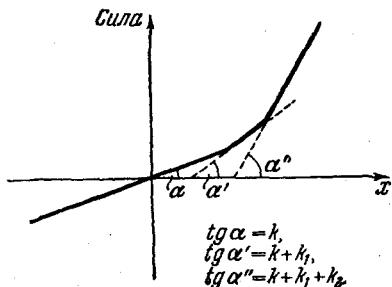


Рис. 37.

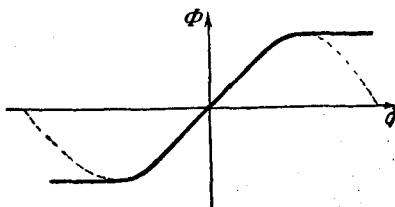


Рис. 38.

вид, как показано на рис. 38. Соответствующим подбором коэффициентов α и γ в области около $\dot{q} = 0$ можно приближенно представить характеристику потока индукции полиномом третьей степени:

$$\Phi = \alpha \dot{q} - \gamma \dot{q}^3.$$

Примерный ход этой кривой показан на рис. 38 пунктиром. На рисунке видно, что аналитическая формула только в определенных пределах отражает реальную характеристику. Можно расширить область, в которой аналитическая характеристика близка к реальной, если взять аналитическое выражение ее в виде полинома более высокой степени.

Рассмотрим пример механических колебаний с нелинейной характеристикой упругой силы.

Уравнение собственных колебаний массы m на пружине с нелинейной характеристикой можно записать так:

$$m \ddot{x} + f(x) = 0, \quad (7.1)$$

где $f(x)$ — сила пружины.

В консервативной системе энергия остается постоянной, поэтому очень удобно вести рассмотрение колебаний с помощью фазовой плоскости. Так как каждая фазовая траектория соответствует определенной величине энергии, то закон сохранения

энергии дает уравнение фазовой траектории. Действительно, из (7.1) после умножения на \dot{x} и интегрирования следует:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \int_{x_0}^x f(x) dx = E_0, \quad (7.2)$$

где E_0 — начальный запас кинетической энергии при $x = x_0$. Уравнение энергии (7.2) дает зависимость y от x , т. е. уравнение траектории на фазовой плоскости. Если обозначим величину потенциальной энергии пружины через $U(x)$, по определению $U(x) - U(x_0) = \int_{x_0}^x f(x) dx$, то уравнение фазовой траектории (7.2) можно переписать так:

$$y = \sqrt{\frac{2[E - U(x)]}{m}}, \quad (7.3)$$

где $E = E_0 + U(x_0)$ — начальный запас полной энергии. Если зависимость $U(x)$ для данной системы дана графически, то по ней

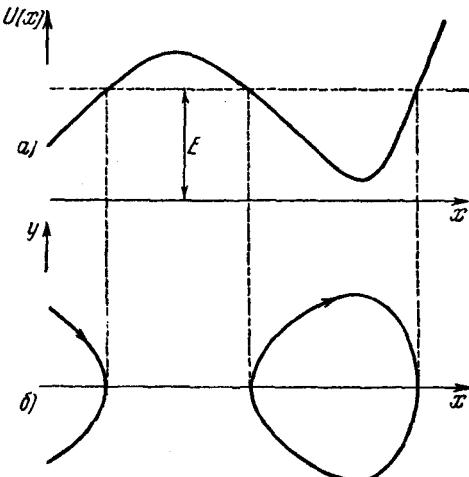


Рис. 39.

уже легко построить траекторию на фазовой плоскости, пользуясь уравнением (7.3).

Пусть $U(x)$ имеет такой вид, как показано на рис. 39, а. Отложим по оси ординат величину E , точки пересечения кривой $U(x)$ и E соответствуют $y = 0$, или пересечению оси x фазовой кривой. На рис. 39, б в том же масштабе по оси x начерчена фазо-

вая траектория. Ясно, что она имеет место при $U(x) < E$ и симметрична относительно оси x . Задавая E различные значения, получим поле кривых на фазовой плоскости.

Минимум потенциальной энергии будет соответствовать устойчивому положению равновесия, вблизи минимума (за исключением особых случаев) выражение для энергии $U(x)$ можно (на небольшом участке) заменить куском параболы. Это соответствует линейной характеристике силы пружины, следовательно, фазовые кривые вблизи точек равновесия будут похожи на эллипсы. Около минимума фазовые кривые будут замкнутыми кривыми, вложенными одна в другую.

Около максимумов потенциальной энергии, которые соответствуют неустойчивому положению равновесия, картина движения принципиально будет другой. Особенности этой картины можно видеть на рис. 40, где показаны отрезки четырех фазовых кривых, соответствующих энергиям E_1 , E_2 , E_3 и E_4 .

Через положение равновесия (рис. 40, б) проходят две кривые (E_3). Они отделяют области, в которых фазовые кривые имеют принципиально различный вид. Такие кривые называют *сепаратрисами*. Кривые E_1 , E_2 соответствуют движениям, не доходящим до положения равновесия; энергия этих движений недостаточна для того, чтобы масса перешла через положение равновесия. Увеличивая энергию движения выше значения E_3 , переходим к новому виду движения, при котором масса переходит через положение равновесия и двигается далее в том же направлении.

При рассмотрении движений важно знать сепаратрисы, ибо небольшое изменение начального запаса энергии ведет к принципиальному изменению характера движения, если движение соответствует траектории, лежащей вблизи сепаратрисы.

Движения около точки x_0 представляют движения около неустойчивого состояния равновесия. Все изображающие точки

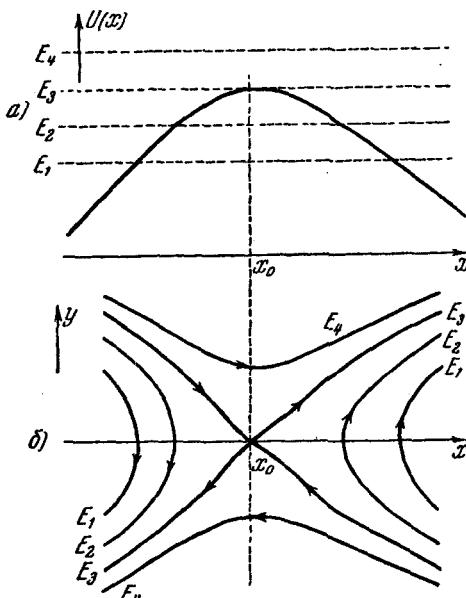


Рис. 40.

уходят от положения равновесия (за исключением тех, которые движутся по двум ветвям сепаратрисы).

Если вблизи максимума потенциальную энергию можно представить параболой, то упругая сила будет линейна и направлена от положения равновесия. В этом случае, как легко убедиться, интегральные кривые около особой точки будут гиперболами, а сепаратрисы их асимптотами. Особая точка, соответствующая неустойчивому положению равновесия в этом случае, называется *седлом*, по аналогии с топографическими линиями равной высоты горной седловины.

§ 8. Колебания физического маятника

В качестве примера фазовой картины движений (и колебаний) консервативной системы рассмотрим колебания физического маятника.

Если x — угол отклонения маятника от положения равновесия, а P — его вес, то потенциальная энергия

$$U(x) = Pa(1 - \cos x), \quad (8.1)$$

где a — расстояние точки подвеса до центра массы маятника. Кинетическая энергия $\frac{1}{2} I \dot{x}^2$, где I — момент инерции маятника относительно точки подвеса. Уравнение баланса энергии:

$$E - Pa(1 - \cos x) = \frac{1}{2} I \dot{x}^2.$$

Обозначая $\dot{x} = y$, как обычно, получаем уравнение фазовой траектории:

$$y = \sqrt{\frac{2}{I} [E - Pa(1 - \cos x)]}. \quad (8.2)$$

Вид этих траекторий и построение их показаны на рис. 41. Собственно колебательное движение (кривые E_1, E_2) имеет место только в том случае, если начальная кинетическая энергия (при $x_0 = 0, 2\pi, \dots$) меньше $2Pa$, в противном случае происходит вращение маятника в одну сторону с прохождением через верхнюю точку $x = \pi, 3\pi, \dots$ с конечной скоростью. Правда, при этом движении скорость колеблется, принимая максимальное значение в нижней точке, а минимальное — в верхней.

Кривые, проходящие через точки $\pi, 3\pi, \dots$ (соответствующие $E_3 = 2Pa$), — сепаратрисы. Очевидно, движение не будет синусоидальным, ибо фазовые траектории не являются эллипсами, однако они будут очень близки к эллипсам в областях, близких

к точкам $y = 0$, $x_0 = 0$, 2π , ... Эти точки соответствуют нижнему положению равновесия, и движение вблизи него, как известно,

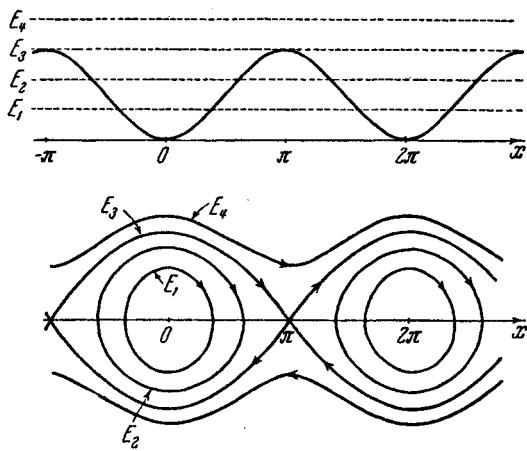


Рис. 41.

будет почти гармоническим. В этом легко убедиться, если разложить $\cos x$, стоящий в уравнении фазовой траектории (8.2), в ряд около x_0 и ограничиться квадратичным членом разложения.

§ 9. Определение периода колебаний

Из уравнения (7.3) в случае периодического колебательного движения можно определить величину половины периода или отрезка времени, за которое масса проходит от x_0 — наибольшего отклонения в одну сторону — до максимального отклонения x_1 в другую сторону.

Уравнение (7.3) можно написать так:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}, \quad (9.1)$$

или

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}}.$$

Если E — кинетическая энергия в положении устойчивого равновесия (где U имеет максимальное значение), а x_0 и x_1 — крайние значения отклонения массы от положения равновесия (в этих

точках $y = 0$), тогда, интегрируя (9.1), получим:

$$\frac{1}{2} T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}, \quad (9.2)$$

где T — полный период колебаний. Величины x_0 и x_1 получим из (7.3) для данного E , положив в нем $y = 0$. Из формулы (9.2) видно, что период колебаний зависит от начальной энергии, от величины размахов колебаний. Поэтому понятие собственной частоты системы как свойства данной системы теряет свой смысл, ибо система может иметь различные периоды колебаний. Формулу для периода физического маятника легко можно получить из (9.2), подставив в нее $U(x) = Pa(1 - \cos x)$. Из этой формулы видно, что период колебаний маятника T может изменяться в зависимости от начальных условий

$$\text{от } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{Pa}} \text{ до } \infty.$$

Период будет равен бесконечности при движении изображающей точки по сепаратрисе ($E = Pa$), рис. 41.

Обычно зависимость периода колебаний нелинейной консервативной системы от начальных условий называется *неизохронностью* собственных колебаний системы в отличие от *изохронности* собственных колебаний линейных систем (гармонических колебаний).

Практически часто не удается взять интеграл (9.2), определяющий период колебаний, обычными приемами. Решение этой задачи

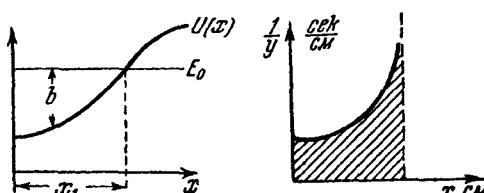


Рис. 42.

Рис. 43.

для физического маятника привело к открытию новых функций (эллиптических), определением которых является интеграл (9.2) после подстановки в него выражения для потенциальной энергии маятника (8.1). Поэтому приходится прибегать к приближен-

ным методам интегрирования. В тех случаях, когда не требуется большой точности, можно интеграл (9.2) взять графически по схеме, которая показана на рис. 42.

Применяя обозначения, смысл которых виден на рис. 42, можно (9.1) записать так:

$$y = \sqrt{\frac{2b}{m}} \text{ см/сек};$$

тогда часть интеграла (9.2) можно записать так:

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{y} \text{ сек.}$$

Построим график величины $1/y$ как функцию x и, определяя по масштабу величину заштрихованной области, получим приближенное значение искомой величины (рис. 43).

Практически обращение $1/y$ при $x = x_1$ в бесконечность не вызывает никаких затруднений.

Рассмотрим еще один пример: собственные колебания массы на пружинах с зазором («люфтом») (рис. 44, а). Масса m совершает горизонтальные колебания в направляющих без трения, но пружины, прикрепленные к стенкам, коротки, и есть некоторый промежуток («люфт»), на котором сила пружины не действует на массу. Характеристика упругой силы $f(x)$ дана на рис. 44, б,

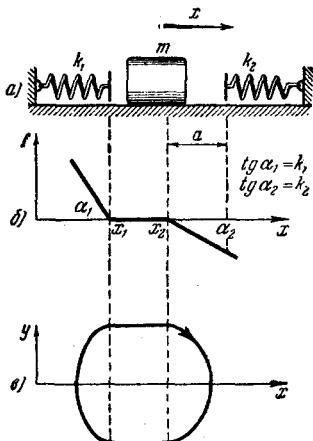


Рис. 44.

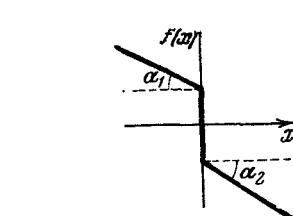


Рис. 45.

причем мы полагаем, что характеристика каждой пружины линейна и жесткости их равны k_1 и k_2 . На участке $x_2 - x_1$ («люфт») движение массы будет происходить по инерции, и здесь фазовая траектория параллельна оси x . На участке, где $x < x_1$, куски фазовых кривых представляют половинки эллипсов, соответствующих гармоническим колебаниям с частотой $\sqrt{k_1/m}$, по которым изображающая точка движется до того момента, пока масса не вступит в область зазора $x_1 \leq x \leq x_2$. При $x > x_2$ изображающая точка пойдет по половине эллипса, соответствующего гармоническому колебанию с частотой $\sqrt{k_2/m}$ (рис. 44, в).

Совершенно очевидно, что период колебаний T будет равен:

$$T = \pi \sqrt{\frac{m}{k_1}} + \frac{2l}{v_0} + \pi \sqrt{\frac{m}{k_2}} = \frac{2l}{v_0} + \pi \sqrt{m} \left(\frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}} \right),$$

где v_0 — максимальная скорость и l — величина люфта.

Очевидно, что с увеличением v_0 период стремится к

$$T_0 = \pi \sqrt{m} \left(\frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}} \right),$$

а с уменьшением v_0 до нуля $T \rightarrow \infty$. Толчок пружины будет настолько мал, что масса будет как угодно долго идти в зазоре.

Здесь уместно заметить, что в предельном случае, при $v_0 \rightarrow 0$, наша схема, схема консервативной системы, очень далека от действительности.

Упражнение

Придумать механическую систему, характеристика упругих сил которой имеет вид, изображенный на рис. 45, проанализировать собственные колебания в этой системе на фазовой плоскости и определить период колебаний.

ГЛАВА 3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ (КОЛЕБАНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ)

§ 10. Предварительные замечания

До сих пор мы рассматривали собственные колебания. Во время таких колебаний система изолирована от всяких внешних воздействий. Колебания в изолированных системах возникают только после внешнего возмущения *). Внешнее возмущение определяет начальное отклонение и начальную скорость — начальные условия, а начальные условия однозначно определяют амплитуду и начальную фазу колебаний. Частота колебаний ω и коэффициент затухания δ определяются устройством системы. Наоборот, колебания в системе под действием внешней периодической силы, или, как будем их называть, *вынужденные колебания*, определяются не только физическим устройством системы, не только параметрами системы (ω и δ), но и внешней силой.

Уравнение колебаний в линейной механической колебательной системе под действием внешней силы $f(t)$ запишется так:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = f(t), \quad (10.1)$$

где $f(t)$ — заданная функция времени, не зависящая от параметров системы и от процессов в ней.

Заметим, что в механическом случае не так просто «задать» внешнюю силу. Часто говорят: возьмите электромагнит, задайте ток через электромагнит, и магнитная сила, действующая на тело (если оно состоит из магнитного вещества), будет изменяться пропорционально силе тока. Это верно только в том случае, если колебания массы происходят в однородном магнитном поле, а это не всегда просто осуществить.

*) Даже и в случае нарастающих колебаний!

Одним из простейших способов внешнего воздействия на механическую колебательную систему механическим путем является задание смещения некоторой определенной точки, например так, как это показано на рис. 46. От специального механизма задается определенное смещение $u(t)$ точки A . Пусть x — отклонение массы m вниз от положения равновесия; тогда уравнение движения массы без учета силы трения можно записать так:

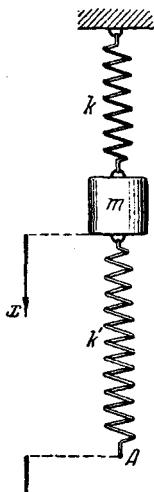


Рис. 46.

или

$$m\ddot{x} + kx = k'(u - x),$$

$$m\ddot{x} + (k + k')x = k'u(t).$$

Значит, на систему с частотой $\sqrt{\frac{k+k'}{m}}$ действует сила $k'u(t)$. Если мы желаем таким образом задать внешнюю силу, действующую на массу, висящую на пружине с жесткостью k , т. е. на систему с частотой $\sqrt{k/m}$, то необходимо подобрать жесткость пружины так, чтобы $k' \ll k$, а $u(t)$ так, чтобы $k'u(t)$ имело достаточную величину.

При электрических колебаниях внешнее воздействие чаще всего задается как электродвижущая сила индукции в электрическом контуре. Если нет обратного влияния колебаний тока в системе на величину внешнего потока индукции, то такую силу можно считать заданной функцией времени.

Отметим, что бывают и другие способы воздействия на колебательную систему, например: внешнее воздействие может изменять параметры системы (ω и δ). Это — принципиально другой вид внешнего воздействия, *параметрический*, который далее будет рассмотрен особо.

Анализ вынужденных колебаний в линейной системе значительно облегчается благодаря *суперпозиции* колебаний. Суперпозиция, или *принцип суперпозиции*, заключается в том, что колебания, вызываемые различными внешними силами, независимы друг от друга.

Пусть внешняя сила $f_1(t)$ вызывает колебание $x_1(t)$, а внешняя сила $f_2(t)$ колебание $x_2(t)$. Тогда колебание, вызываемое в этой же системе силой $f = f_1(t) + f_2(t)$, будет $x_1(t) + x_2(t)$. Колебания, вызываемые различными внешними силами, складываются друг с другом, так же как и *внешние силы*, если они действуют одновременно на систему. Доказательство можно получить непосредственной подстановкой в уравнение, например, (10.1).

Далее рассмотрим колебания под действием периодической силы. Но, как известно, любую периодическую силу с периодом T

можно представить в виде суммы гармонических *) сил, причем частота каждой из этих сил равна $2\pi n/T$, где n — целое положительное число. Поэтому для решения задачи о действии периодической силы на линейную систему достаточно знать в силу принципа суперпозиции результат действия на систему синусоидальной (гармонической) силы определенной частоты.

§ 11. Действие гармонической (синусоидальной) силы на линейную систему без трения

Одна «чистая» гармоническая внешняя сила редко встречается на практике. Однако имеется много случаев, в которых приближенно можно принимать действующей одну гармоническую силу, например, при колебаниях, вызываемых небалансированным ротором машины при его равномерном вращении. Здесь можно считать, что центробежная сила дает чисто гармоническую силу в заданном направлении с частотою оборотов машины.

Точно так же и в электротехнике гармоническая внешняя э. д. с. возникает в плоском витке (или катушке), если он вращается равномерно в однородном магнитном поле. А так как практически однородное поле трудно осуществить, то всегда внешняя э. д. с. не «чисто» гармоническая, или, вернее, состоит из нескольких гармонических сил.

Сначала рассмотрим действие гармонической силы на систему без трения. Уравнение движения для механической системы в этом случае будет:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos pt, \quad (11.1)$$

где F_0 — амплитуда внешней силы (постоянная величина), p — круговая частота внешней силы. Уравнение удобнее переписать так:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos pt, \quad (11.2)$$

где $\omega^2 = k/m$.

Математически задача заключается в отыскании $x(t)$ при заданных $x(0)$ и $\dot{x}(0)$. Как известно, общее решение $x(t)$ будет суммой частного решения неоднородного уравнения (11.2) и общего решения однородного уравнения, которое получим из (11.2), если положим $F_0 = 0$.

Найдем частное решение. Допустим, что оно гармоническое с частотою p . Пусть $x(t) = X_0 \cos(pt + \varphi)$; подставим это

*) Напомним, что мы всюду гармонической или синусоидальной функцией называем функцию, зависящую от времени так, как синус или косинус зависят от своего аргумента.

выражение в (11.2) и найдем такие постоянные значения X_0 и φ , при которых оно будет удовлетворяться при любом t :

$$X_0 (\omega^2 - p^2) \cos(pt + \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos pt. \quad (11.3)$$

Из (11.3) очевидно, что оно удовлетворяется, если $\varphi = 0$ и

$$X_0 = \frac{F_0}{m(\omega^2 - p^2)} = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}. \quad (11.4)$$

Следовательно, при данных условиях существует частное решение гармонического вида с частотой p , частотой внешней силы. Таким образом, общее решение, или колебания в системе в общем случае, будет иметь вид:

$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \cos pt + A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (11.5)$$

где A и B — постоянные величины, определяемые из начальных условий.

Первый член (11.5) представляет *вынужденные колебания*, последующие — *собственные колебания*. Вынужденные происходят с частотой внешней силы, амплитуда их определяется амплитудой и частотой внешней силы и параметрами системы. Собственные происходят с частотой ω , а амплитуда и фаза их зависят от внешней силы и от начальных условий, как и ранее в случае изолированной системы. Следовательно, колебания будут происходить с двумя частотами p и ω , и результирующее колебание не будет *гармоническим*.

В том случае, когда p немного отличается от ω , то сложные колебания (11.5) в системе называются *биениями*, которые имеют вид то возрастающих, то ослабляющихся колебаний. Для примера допустим, что $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Тогда, подставляя это в (11.5) и в производную от $x(t)$, получаем при $t = 0$:

$$x(0) = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} - A = 0,$$

$$\dot{x}(0) = \omega B = 0.$$

Таким образом, при этих начальных условиях общее решение:

$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} (\cos pt - \cos \omega t), \quad (11.6)$$

или после тригонометрических преобразований:

$$x(t) = \frac{2 \frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \sin \frac{p - \omega}{2} t \cdot \sin \frac{p + \omega}{2} t. \quad (11.7)$$

График таких колебаний дан на рис. 47.

При $p \approx \omega$ выражение (11.7) и график можно приближенно рассматривать как гармоническое колебание частоты $\omega \approx \frac{p + \omega}{2}$ с переменной «амплитудой», период изменения амплитуды

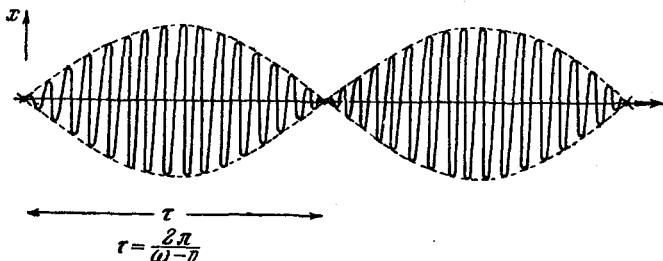


Рис. 47.

$T = \frac{2\pi}{\omega - p}$. Иначе говоря, «частота биений» $\frac{2\pi}{T} = \omega - p$ равна разности собственной частоты и частоты внешней силы.

Заметим, что в отсутствие трения ($\delta = 0$) колебания, вообще говоря, всегда будут состоять из гармонических колебаний двух частот. Только при некоторых определенных начальных значениях $x(0)$ и $\dot{x}(0)$ колебания в системе будут гармоническими с частотой p . Например, в случае

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin pt$$

при начальных условиях $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = pX_0$ общее решение будет иметь вид:

$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \sin pt.$$

Следует иметь в виду, что как бы мала ни была величина затухания, всегда по прошествии достаточного времени собственные колебания затухают и в системе остаются только вынужденные колебания с частотой p . Однако в начальный момент, при небольшом затухании, процесс в системе близок к идеализированному, который был рассмотрен в этом параграфе.

§ 12. Явление резонанса

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней силы представлена формулой (11.4). Обозначим $\frac{F_0}{k} = a$, a есть «статическое смещение» пружины под действием постоянной силы, величина которой F_0 . Отношение частот p/ω обозначим γ . Тогда формулу (11.4) можно записать так:

$$X_0 = \frac{a}{1 - \gamma^2}, \quad (12.1)$$

амплитуда колебаний зависит от «статического смещения» a и от отношения частот γ . График (12.1) показан на рис. 48.

При низких частотах, $\gamma \ll 1$, амплитуда колебаний почти равна статическому смещению; колебания происходят в фазе с колебаниями внешней силы; влияние массы мало; пружина деформируется так, как если бы массы не было. С увеличением частоты амплитуда колебаний начинает возрастать, и при приближении γ к единице возрастание амплитуды становится очень большим, так что при $\gamma \rightarrow 1$ амплитуда $X_0 \rightarrow \infty$. Это явление носит название *резонанса*.

Теория дает бесконечно большое значение амплитуды когда частота внешней силы равна частоте собственных колебаний системы. Конечно, в реальной системе немыслимы колебания бесконечной амплитуды. Это значит, что при $\gamma \rightarrow 1$ наша схема (отсутствие трения) принципиально не отражает явления в действительной системе.

При $\gamma > 1$ амплитуда колебаний уменьшается и при $\gamma \rightarrow \infty$ она стремится к нулю. Сдвиг по фазе между колебаниями x и колебаниями силы изменяется при переходе через резонанс скачком на величину π . До резонанса сила и смещение находятся в

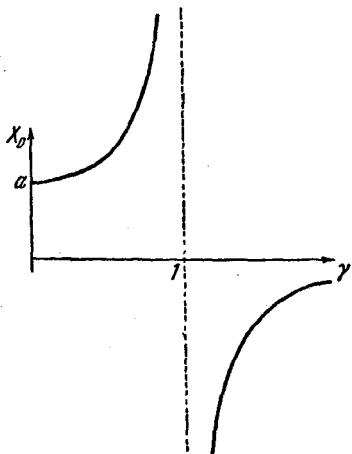


Рис. 48.

фазе так же, как при очень малых частотах, после резонанса сила и смещение — в противофазе.

Полезно рассмотреть подробнее механизм вынужденных колебаний и проследить за изменением во времени всех сил при колебаниях. Величину \ddot{x} можно назвать силой инерции; тогда уравнение движения (11.1) можно толковать так: внешняя сила равна сумме силы инерции и силы упругости пружины.

При вынужденных колебаниях $x_1 = X_0 \cos pt$: сила инерции $\ddot{m}x_1 = -X_0 mp^2 \cos pt = -mp^2x_1$ всегда в противофазе со смещением, сила пружины $kX_0 \cos pt = kx_1$ всегда в фазе со смещением. До резонанса $X_0 > 0$, внешняя сила в фазе со смещением, после резонанса — в противофазе.

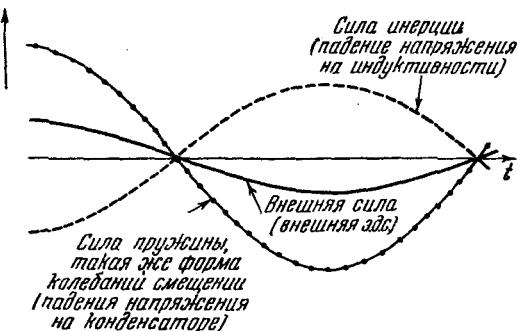


Рис. 49.

График изменения сил во времени для случая, когда $p < \omega$, показан на рис. 49. Сила пружины в фазе с внешней силой, сила инерции — в противофазе, разность этих сил равна внешней силе. До резонанса сила пружины всегда по абсолютной величине больше внешней силы, $k > mp^2$, только при маленьких частотах $p \rightarrow 0$ разность между ними очень мала (сила инерции мала).

График изменения сил во времени после резонанса при $p > \omega$ представлен на рис. 50. Сила инерции в фазе с внешней силой и всегда больше внешней силы, так как $mp^2 > k$; при очень больших частотах разность между ними очень мала, сила инерции почти равна внешней силе. Так как смещение всегда в фазе с силой пружины, то до резонанса внешняя сила и смещение находятся в фазе, а после резонанса — наоборот. При $p \rightarrow 0$ масса не играет роли, ускорение мало, и внешняя сила почти равна силе пружины; при больших частотах $p \rightarrow \infty$ сила пружины очень мала, внешняя сила равна силе инерции.

При установившихся вынужденных колебаниях внешняя сила уравновешивается разностью силы инерции и упругой силы. При

приближении к резонансу $k \rightarrow mr^2$, и поэтому сила инерции будет почти равна упругой силе. Для того чтобы уравновесить определенную конечную внешнюю силу, необходима очень большая амплитуда колебаний смещений, только тогда две близкие большие величины дадут нужную конечную разность.

При вынужденных колебаниях в электрическом контуре без затухания имеет место та же самая картина, если считать, что

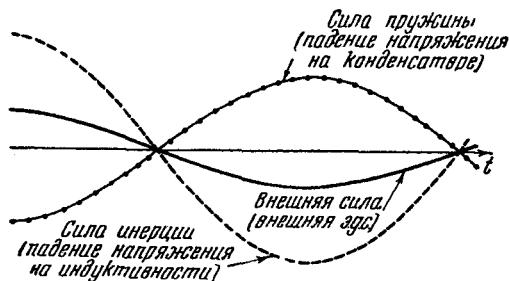


Рис. 50.

заряд на конденсаторе q_1 аналогичен смещению x_1 . Тогда сила инерции аналогична падению напряжения на индуктивности ($L\ddot{q}_1$), сила пружины аналогична напряжению на конденсаторе ($\frac{q}{C}$) и внешняя сила — внешней э. д. с. Напряжение на индуктивности всегда *противоположно* по фазе напряжению на конденсаторе. До резонанса напряжение на конденсаторе больше напряжения на индуктивности, и внешняя э. д. с. — в фазе с напряжением на конденсаторе, а после резонанса наоборот, напряжение на индуктивности в фазе с внешней э. д. с. (см. рис. 49 и 50).

§ 13. Вид колебаний при резонансе

Как уже было сказано, при резонансе (при $\gamma = 1$) амплитуда вынужденных колебаний обращается в бесконечность. Но каков будет характер колебаний после включения внешней силы? Ведь они не могут стать сразу бесконечными. Колебания будут возвращаться постепенно, но как? Для решения этого вопроса нужно иначе представить общее решение уравнения (11.2). Общий прием мы рассмотрим далее (§ 27), а пока на примере, который был разобран выше (§ 11), посмотрим, что будет с решением (11.7) в пределе при $\gamma \rightarrow 1$ или $r \rightarrow \omega$.

При определенных начальных условиях, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, общее решение полного уравнения (11.2) выразилось формулой

(11.7), которую теперь запишем в следующем виде:

$$x = \frac{2F_0}{m(\omega^2 - p^2)} \sin \frac{\omega - p}{2} t \sin \frac{\omega + p}{2} t.$$

Это решение можно переписать так:

$$x = \frac{F_0}{m(\omega + p)} \frac{\sin \frac{\omega - p}{2} t}{\frac{\omega - p}{2} t} t \sin \frac{\omega + p}{2} t,$$

и в этом выражении перейти к пределу при $p \rightarrow \omega$. Тогда получаем, что при любом конечном t

$$x = \frac{F_0}{2\omega m} t \sin \omega t. \quad (13.1)$$

Значит, при резонансе не будет установившихся гармонических колебаний. Колебания будут расти пропорционально времени (рис. 51).

Физически это решение не представляет такой бессмыслицы, как решение в прежнем виде с бесконечной амплитудой. Во всяком случае (при маленьком затухании) в начале процесса дело обстоит в реальной системе почти так, как мы получили в теории. Но, очевидно, что с увеличением размахов колебаний в любой физической системе наступят условия, при которых исходное уравнение (11.1) не будет верным. Линейный закон силы упругости справедлив только на определенном интервале изменения x , затем скорость движения будет возрастать, и поэтому силой трения, как бы ни мал был коэффициент трения, нельзя пренебречь.

Заметим, что вид решения при резонансе будет почти такой же и при $x(0) \neq 0$ и $\dot{x}(0) \neq 0$. Можно показать, что если подставить эти начальные условия в (11.5) и перейти к пределу $p \rightarrow \omega$, то получим выражение (13.1) плюс еще два члена:

$$x(0) \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \dot{x}(0) \sin \omega t,$$

представляющие собственные колебания, наличие которых не изменяет выводов, сделанных ранее из формулы (13.1).

Все приведенные результаты справедливы и для электрических колебаний. В этом случае вместо F_0 надо поставить амплитуду

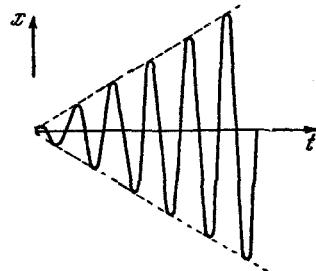


Рис. 51.

внешней э. д. с. — \mathcal{E}_0 , вместо x — заряд на конденсаторе q и т. д., как было показано в § 4. Тогда уравнение

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos pt$$

совершенно эквивалентно уравнению (11.2). Только не следует забывать, что обычно в электротехнике при написании законов колебаний в контуре берут другие величины — ток или потенциал.

§ 14. Вынужденные колебания в системе, обладающей затуханием под действием синусоидальной силы

Уравнение вынужденных колебаний для механической системы при наличии силы трения будет:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_0 \cos pt, \quad (14.1)$$

для электрической, где q — заряд на конденсаторе:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}_0 \cos pt. \quad (14.2)$$

Эти оба уравнения можно написать в виде одного уравнения:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2x = f_0 \cos pt, \quad (14.3)$$

где x — или смещение, или заряд; $\delta = h/2m$ или $R/2L$,

$$\omega^2 = k/m \text{ или } 1/LC, \quad f_0 = F_0/m \text{ или } \mathcal{E}_0/L,$$

соответственно для каждого случая.

Если в (14.3) через x обозначим ток в колебательном контуре, то $f_0 = \mathcal{E}_0 p/L$ и величины δ и ω , конечно, не изменяются. Во всех случаях, когда под x понимают различные физические величины, следует обращать внимание на правильную запись f_0 .

Решение (14.3), как известно из математики, можно записать так:

$$x(t) = x_1(t) + Ae^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (14.4)$$

где $x_1(t)$ есть частное решение неоднородного уравнения (14.3) (вынужденные колебания), и второй член представляет общее решение однородного уравнения (4.3) (собственные колебания); A и φ — постоянные величины, определяемые из начальных условий.

Вследствие трения в системе собственные колебания с течением времени исчезнут и останутся только вынужденные колебания. Поэтому в большинстве (конечно, не всегда) приложений теории нас интересует именно эта часть решения.

1. Метод комплексных амплитуд

Далее займемся анализом вынужденных колебаний. При отыскании вынужденных колебаний часто пользуются методом комплексных амплитуд. Он представляет ряд удобств, с его помощью просто, коротко и наглядно устанавливается физическая связь между величинами, характеризующими колебательный процесс.

Суть метода заключается в следующем: вместо уравнения (14.3) рассматриваем частное решение уравнения

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega^2 y = f_0 e^{ip t}, \quad (14.5)$$

где все параметры имеют то же значение, что и в уравнении (14.3), но y — комплексная функция времени, а $i = \sqrt{-1}$. Очевидно, вследствие линейности (14.3) и (14.5) реальная часть y будет решением (14.3). Или если $y = u + iv$ есть решение при $f_0 e^{ip t}$, то u есть решение того же уравнения при $f_0 \cos pt$, а v — при $f_0 \sin pt$.

Найти решение (14.5) математически значительно проще, чем (14.3). Действительно, пусть частное решение (14.5) есть $y_1 = \bar{X} e^{ip t}$. Подставляя его в (14.5) и сокращая на $e^{ip t}$, получаем:

$$\bar{X} (-p^2 + 2\delta i p + \omega^2) = f_0,$$

или

$$\bar{X} = \frac{f_0}{\omega^2 - p^2 + i2\delta p}. \quad (14.6)$$

Обозначая комплексную величину $\bar{X} = X_0 e^{i\varphi}$, легко вычислить обычным способом модуль:

$$X_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2\delta^2}} \quad (14.7)$$

и аргумент

$$\varphi = \arctg \frac{2\delta p}{p^2 - \omega^2}.$$

Следовательно, частное решение (14.3) — вынужденные колебания — имеет следующий вид:

$$x_1 = \operatorname{Re}(\bar{X} e^{ip t}) = \operatorname{Re}(X_0 e^{i(p t + \varphi)}) = X_0 \cos(pt + \varphi). \quad (14.8)$$

Формулы (14.6) и (14.7) дают амплитуду вынужденных колебаний X_0 и сдвиг фаз между колебаниями смещения и силы; они показывают зависимость этих величин от частоты p , от амплитуды силы f_0 и параметров системы. С точки зрения математики на этом и заканчивается вся теория вынужденных колебаний; например, формула (14.6) дает исчерпывающие ответы на все вопросы. Но нам необходимо дать подробный анализ этой формулы и

выяснить ряд физических свойств системы, которые определяют характер вынужденных колебаний.

Прежде всего заметим, что комплексными величинами удобно пользоваться для сложения (и вычитания) гармонических колебаний одной частоты. Действительно, комплексная величина $B e^{i(pt + \phi)}$ может быть представлена вектором, проведенным из начала координат, имеющим абсолютную величину B и совершающим вращение со временем около начала с угловой скоростью p . Очевидно, проекция этого вектора в момент времени t на действительную ось есть $B \cos(pt + \phi)$. Следовательно, сумма двух

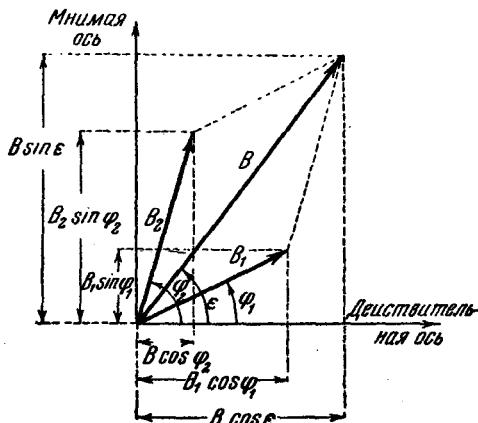


Рис. 52.

колебаний $B_1 \cos(pt + \phi_1)$ и $B_2 \cos(pt + \phi_2)$ есть проекция на действительную ось суммы двух векторов $B_1 e^{i(pt + \phi_1)}$ и $B_2 e^{i(pt + \phi_2)}$. Так как оба вектора врачаются с одной скоростью, то они сохраняют неизменное положение относительно друг друга, поэтому достаточно начертить положение векторов для какого-либо момента времени, например $t = 0$, как это и показано на рис. 52. Из последнего отчетливо видна связь между амплитудами и фазами различных колебаний. Если $\bar{X}_1 = B_1 e^{i\phi_1}$, $\bar{X}_2 = B_2 e^{i\phi_2}$, и $\bar{X} = B e^{i\epsilon}$, то, очевидно, $\bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2$; таким образом коротко записывается связь между амплитудами и фазами.

В обычной форме мы имеем громоздкие формулы

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}$$

и

$$\tan \epsilon = \frac{B_1 \sin \phi_1 + B_2 \sin \phi_2}{B_1 \cos \phi_1 + B_2 \cos \phi_2}.$$

С этими формулами неудобно работать, особенно если необходимо складывать и вычитать большое количество колебаний. Поэтому гораздо проще производить все эти вычисления с помощью чертежа, на котором комплексные амплитуды вычерчены в соответствующем масштабе, как на рис. 52. По-видимому, этим отчасти и объясняется широкое распространение метода комплексных амплитуд.

По определению, комплексной амплитудой гармонического колебания $X_0 \cos(pt + \phi)$ будем называть величину $\bar{X} = X_0 e^{ip\theta}$, которая дает амплитуду X_0 и фазу колебания ϕ . Если умножим комплексную амплитуду на $e^{ip\theta}$ и возьмем действительную (или мнимую) часть, то получим гармоническое колебание, которое представляет данная комплексная амплитуда.

Следовательно, при сложении и вычитании большого числа гармонических колебаний одной частоты будем заменять их комплексными амплитудами и производить все действия с ними графически или аналитически, как с комплексными величинами. И только в окончательном результате переходим от комплексных амплитуд к гармоническим колебаниям.

При вынужденных колебаниях, возбуждаемых гармонической силой, все величины, участвующие в данном процессе, изменяются с одной и той же частотой, с частотой внешней силы p . Если \bar{X} есть комплексная амплитуда смещения, то $\dot{\bar{X}}$ — комплексная амплитуда скорости — будет:

$$\dot{\bar{X}} = ip\bar{X},$$

а комплексная амплитуда ускорения:

$$\ddot{\bar{X}} = ip\dot{\bar{X}} = -p^2\bar{X}.$$

Эти формулы можно получить, дифференцируя выражение для смещения $y = \bar{X}e^{ip\theta}$ и полагая $\dot{y} = \dot{\bar{X}}e^{ip\theta}$ и $\ddot{y} = \ddot{\bar{X}}e^{ip\theta}$. Из приведенных формул видно, что колебания скорости опережают по фазе на $\pi/2$ колебания смещения *) и амплитуда их в p раз больше. Колебания ускорения в противофазе с колебаниями смещения и амплитуда ускорения в p^2 раз больше амплитуды смещения.

2. Комплексные параметры

Уравнение колебаний дает связь между комплексными амплитудами. Так, например, для механических колебаний из основного уравнения

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_0 \cos pt, \quad (14.9)$$

*) Здесь нужно вспомнить, что $i = \sqrt{-1} = e^{i\pi/2}$.

заменяя $F_0 \cos pt$ через $F_0 e^{ipt}$ и подставляя $\bar{X} e^{ipt}$ вместо x , получаем:

$$\bar{X}(-mp^2 + iph + k) = F_0 \quad (14.10)$$

— формулу, связывающую комплексные амплитуды смещения и силы.

При таком рассмотрении обычно вводят *комплексные параметры* системы. Комплексную величину, стоящую в скобках, называют *комплексной* (или *динамической*) *жесткостью* *системы*. Обозначим ее через \bar{K} ; тогда равенство (14.10) можно записать так:

$$\bar{X} \cdot \bar{K} = F_0 \text{ или } \bar{X} = \frac{F_0}{\bar{K}}. \quad (14.11)$$

Величина комплексной амплитуды смещения \bar{X} равна амплитуде силы F_0 , деленной на *динамическую жесткость* системы \bar{K} .

Для комплексных амплитуд получается соотношение, аналогичное соотношению между статическими величинами. Если на систему действует постоянная сила F , которая вызывает смещение x , то смещение равно силе, деленной на жесткость

$$x = \frac{F}{k}.$$

Эта формула совершенно аналогична (14.11), только в (14.11) вместо постоянных величин приняты комплексные амплитуды этих же величин и вместо обычной жесткости — динамическая жесткость:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= k - mp^2 + iph = K_0 e^{i\varphi}, \\ K_0 &= \sqrt{(k - mp^2)^2 + (hp)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{hp}{k - mp^2}. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Рассматривая формулы (14.11) и (14.12), сразу можно сказать: колебания смещения отстают по фазе от колебаний силы на φ , а амплитуда смещений равна амплитуде силы, деленной на K_0 . Таким образом, зная динамическую жесткость системы, мы знаем величину колебаний смещения и сдвиг фаз вынужденных колебаний смещения относительно силы. Динамическая жесткость зависит от параметров системы и частоты.

Переход от (14.9) к (14.10) можно мыслить как другой вид записи дифференциального уравнения, как введение операторных символов. Но для физики колебаний введение комплексных параметров имеет особый смысл. Введение комплексных величин позволяет просто, точно и коротко характеризовать колебательные свойства системы с точки зрения вынужденных колебаний *).

*) Вообще, комплексными параметрами можно пользоваться и для неустановившихся колебаний.

Не следует забывать, что эти методы применимы только для *линейных систем*. В нелинейных же системах, как будет ясно из дальнейшего, мы встретимся с частотами, отличными от частоты внешней силы p , и поэтому там нельзя ввести комплексные величины в качестве характеристики физических свойств системы.

Динамическую жесткость K можно представить как сумму трех жесткостей: динамической жесткости массы — mp^2 , жесткости пружины k , динамической жесткости трения iph . Каждую из них можно понимать следующим образом.

Пусть на массу m действует сила $F_0 \cos pt$, масса изолирована ($k = 0, h = 0$); тогда, очевидно, колебания x будут в противофазе с силой и амплитуда их равна F_0/mp^2 . Динамическая жесткость массы растет с увеличением частоты; совершенно ясно, что при большой частоте сила конечной амплитуды вызовет ничтожное смещение массы, «масса плохо передает колебания большой частоты».

Пружина — это элемент системы, для которого статическая и динамическая жесткости одинаковы и равны k . Динамическая жесткость пружины постоянна и не зависит от частоты. Физически такая идеализация допустима только для таких частот, при которых еще можно пренебречь массой и трением пружины при колебаниях.

Элемент линейного трения, под которым мы понимаем часть устройства системы, определяющую силу трения hx , имеет динамическую жесткость iph . Динамическая жесткость элемента трения мнимая; это значит, что в системе, в которой преобладает сила трения ($k = 0, m = 0$), внешняя сила будет опережать по фазе на 90° колебания смещения. Динамическая жесткость элемента трения растет по модулю с увеличением частоты, влияние сил трения с увеличением частоты возрастает.

Механическую колебательную систему (рис. 53, а), где элемент h обозначает элемент линейного трения с коэффициентом h , можно схематически изобразить в виде, представленном на рис. 53, б. Элемент A , допускающий только горизонтальное перемещение, находится под действием силы F_0 и «подпирается» тремя «упругими» элементами, жесткость которых записана на них. Эту схему можно рассматривать формально как статическую систему, в которой все «упругие» элементы

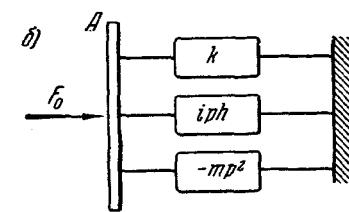
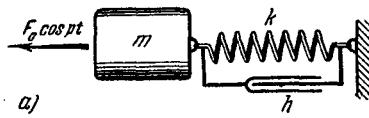


Рис. 53.

«работают» в параллель, и, следовательно, жесткости отдельных элементов складываются при определении жесткости всей системы, т. е. справедлива формула (14.12).

Такие «статические» схемы колебательных систем могут быть построены и в более сложных случаях.

Выражение (14.12) можно представить графически (рис. 54). По действительной оси откладываем $k - ipr^2$, по мнимой $ip\bar{h}$, \bar{K} представляется вектором, повернутым на угол φ относительно действительной оси. Заметим, что все величины имеют размерность [n/m], [$k\Gamma/cm$] и [$\text{дин}/cm$].

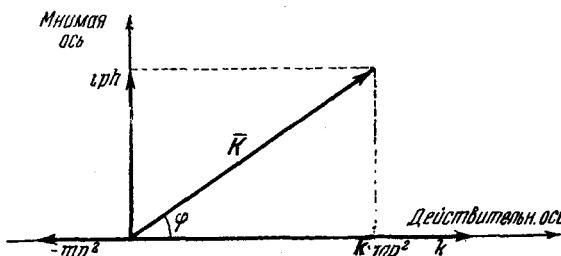


Рис. 54.

Если за переменную величину, характеризующую колебательный процесс, взять не смещение, а скорость, то связь между комплексной амплитудой скорости $\dot{\bar{X}}$ и амплитудой силы выразится через другую комплексную величину, называемую *комплексным коэффициентом трения* (или механическим импедансом).

По определению, комплексный коэффициент трения \bar{H} должен удовлетворять следующему равенству:

$$\dot{\bar{X}} \bar{H} = F_0. \quad (14.13)$$

Из этого равенства легко установить связь между комплексным коэффициентом трения и динамической жесткостью. Действительно, $\dot{\bar{X}} = ip\dot{\bar{X}}$; подставив это в (14.13), получим:

$$ip\dot{\bar{X}} \bar{H} = F_0,$$

сравним с (14.11) и получим:

$$\bar{H} = \frac{\bar{K}}{ip}. \quad (14.14)$$

Комплексный коэффициент трения равен динамической жесткости, деленной на ip . Для механической колебательной системы с одной

степенью свободы комплексный коэффициент трения равен по (14.12)

$$\bar{H} = h + i \left(mp - \frac{k}{p} \right). \quad (14.15)$$

Комплексные параметры и комплексные амплитуды были введены электротехниками главным образом для расчета цепей переменного тока и широко применяются как в электротехнике, так и в радиотехнике. В электротехнике обычно вводят *комплексное сопротивление* цепи. Комплексное сопротивление связывает комплексные амплитуды тока и э. д. с. в цепи, так же как сила тока и э. д. с. связаны через сопротивление в цепи постоянного тока. В электрическом

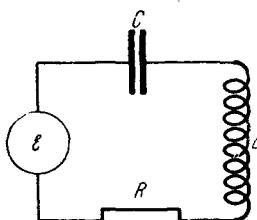


Рис. 55.

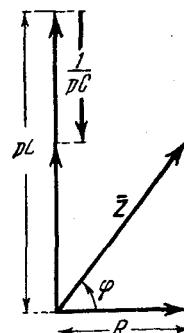


Рис. 56.

колебательном контуре с омическим сопротивлением R (рис. 55) уравнение напряжений для тока I запишется так:

$$LI + RI + \frac{1}{C} \int I dt = \bar{E} e^{ipt}.$$

Положим, что ток равен $\bar{I} e^{ipt}$; тогда подстановка этого выражения в уравнение дает:

$$\bar{I} \left(ipL + R + \frac{1}{ipC} \right) = \bar{E}; \quad (14.16)$$

отсюда комплексное сопротивление

$$\frac{\bar{E}}{\bar{I}} = R + i \left(pL - \frac{1}{pC} \right) = \bar{Z} = Z_0 e^{i\varphi}. \quad (14.17)$$

Величина Z_0 имеет размерность сопротивления и в практической системе единиц измеряется в омах. Модуль комплексного сопротивления Z_0 дает отношение амплитуд колебаний э. д. с. и тока. Аргумент комплексного сопротивления дает сдвиг фаз между колебаниями э. д. с. и тока в замкнутой цепи, э. д. с. опережает ток на угол φ . Для вычисления удобно комплексное сопротивление \bar{Z} представить графически так, как показано на рис. 56.

Модуль комплексного сопротивления

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(pL - \frac{1}{pC}\right)^2},$$

аргумент комплексного сопротивления, или сдвиг по фазе между током и э. д. с.,

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{R}{pL - \frac{1}{pC}}.$$

Понятие комплексного сопротивления цепи можно применить к любой электрической цепи. Пусть в сложной электрической цепи действует гармоническая э. д. с. Комплексным сопротивлением цепи, приключенной к зажимам источника э. д. с., называют комплексную величину, на которую следует умножить комплексную амплитуду тока, чтобы получить амплитуду э. д. с. Забегая вперед, скажем, что в этом случае в цепи будет установившийся режим вынужденных колебаний с частотою внешней э. д. с.; через источник э. д. с. будет идти ток, совершающий гармонические колебания с частотою p . Способы определения комплексного сопротивления сложной цепи будут рассмотрены далее.

§ 15. Анализ резонансных законов

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты, от амплитуды внешней силы и от параметров системы. Фаза — от частоты и параметров системы.

В теории мы считаем физические параметры R , L и C (и h , m , k) величинами постоянными, практически же это условие выполняется только в определенном интервале частот для каждой данной системы. Например, в механике при больших частотах нельзя пренебречь массой пружины, влияние даже небольшой массы будет существенно при больших частотах. Точно так же нельзя пренебречь упругостью массы, которая при больших частотах будет двигаться не как абсолютно твердое тело, а будет деформироваться. В электричестве сопротивление R благодаря скин-эффекту и излучению зависит от частоты *), сказывается индуктивность подводящих проводов при больших частотах и т. д.

Более точно можно определить границы приложения теории только после того, как познакомимся с колебаниями в распределенных системах, а пока, рассматривая постоянные параметры,

*) В этом случае R не следует называть омическим, поэтому иногда называют его ваттным, ибо R связано с потерей энергии.

надо иметь в виду ограниченность применения такой схемы при увеличении частоты внешнего воздействия.

Как при собственных колебаниях, так и при вынужденных весь процесс характеризуют *два параметра* системы: *собственная частота*

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

и *декремент*

$$\vartheta = \frac{2\pi\delta}{\omega_1} = \frac{\pi R}{L \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{L}{R^2C} - \frac{1}{4}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{mk}{h^2} - \frac{1}{4}}}, \quad (15.1)$$

величину которого при небольшом затухании, $(R/2L)^2 \ll 1/LC$, можно вычислять по следующей формуле:

$$\vartheta \approx \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}, \text{ или } \vartheta \approx \frac{\pi h}{\sqrt{mk}}. \quad (15.2)$$

В теории вынужденных колебаний часто вместо декремента вводят другую величину, называемую «добротностью» Q колебательной системы, которая по определению равна:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega L}{R} = \frac{\sqrt{mk}}{h} = \frac{m\omega}{h} = \frac{\omega}{2\delta}. \quad (15.3)$$

Добротность — безразмерная величина, как и декремент, физический смысл которой будет выяснен далее. Пока же, подставляя (15.3) в (15.1), установим связь между добротностью и декрементом:

$$\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}. \quad (15.4)$$

При маленьких декрементах системы добротность — величина, обратная декременту, а именно:

$$\vartheta \approx \frac{\pi}{Q}, \quad Q \approx \frac{\pi}{\vartheta}. \quad (15.5)$$

При больших декрементах соотношение между добротностью и декрементом определяется формулой (15.4). Очевидно, что при $Q = \frac{1}{2}$ декремент равен бесконечности. Это, как мы знаем (§ 4), имеет место на границе колебательного режима. При $Q < \frac{1}{2}$ собственные движения в системе, возникающие после толчка, будут неколебательными, лимитационными.

1. Амплитуда тока (или скорости)

При сравнении теории с опытом удобно выражать результаты опыта и теории в безразмерном виде. Поэтому рассмотрим отношение амплитуды тока при вынужденных колебаниях в контуре к максимальной амплитуде, предполагая, что амплитуда внешней э. д. с. остается постоянной, изменяется только ее частота p от 0 до ∞ .

Если обозначим комплексную амплитуду тока $\bar{I} = I_0 e^{i\varphi}$, то из формулы (14.16) определим величину амплитуды колебаний тока:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(pL - \frac{1}{pC}\right)^2}}, \quad (15.6)$$

где \mathcal{E}_0 — амплитуда внешней э. д. с. Легко убедиться, что при $p = \frac{1}{\sqrt{CL}} = \omega$ ток I_0 будет максимальным. Когда частота внешней силы будет равна собственной частоте системы, амплитуда тока будет максимальна и равна

$$I_{0m} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Отношение квадратов амплитуд тока I_0^2/I_{0m}^2 обозначим через v^2 . По формуле (15.6)

$$v^2 = \frac{I_0^2}{I_{0m}^2} = \frac{R^2}{R^2 + \left(pL - \frac{1}{pC}\right)^2}. \quad (15.7)$$

Напишем правую часть формулы (15.7) в безразмерных величинах, обозначив $p/\omega = \gamma$ и $\omega L/R = Q$:

$$v^2 = \left(\frac{I_0}{I_{0m}}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + Q^2(\gamma^2 - 1)^2}. \quad (15.8)$$

Эта формула представляет резонансную кривую для квадратов амплитуд тока (или скорости) в безразмерном виде. Точно такое выражение мы получим, например, при помощи (14.13), (14.14) и (14.5), для отношения квадратов амплитуд колебаний скорости (или амплитуд кинетической энергии) в механической системе, где

$$v^2 = \left(\frac{\dot{X}_0}{\dot{X}_{0m}}\right)^2 = \frac{m\dot{X}_0^2}{m\dot{X}_{0m}^2}. \quad (15.9)$$

График функции v^2 (15.8) для различных значений Q дан на рис. 57. С увеличением Q острота резонансной кривой вблизи

максимума увеличивается. При больших значениях добротности величина v^2 в области, далекой от резонанса, очень мала и круто нарастает до единицы вблизи $\gamma = 1$. Наоборот, резонансная кривая при маленьких Q становится расплывчатой, амплитуда тока в значительной области (около $\gamma = 1$) не изменяется.

Когда график, соответствующий формуле (15.8), получают на основании экспериментальных данных, то им часто пользуются для определения добротности системы. Действительно, если для

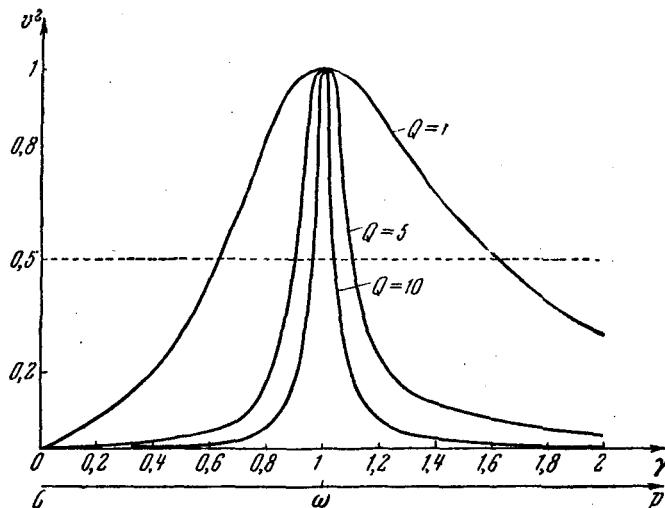


Рис. 57.

заданного значения γ_1 найдем из опыта величину v_1 , то по формуле (15.8) находим Q . Для определения γ_1 обязательно еще экспериментально определить значение ω , т. е. частоты, при которой амплитуда будет максимальной. Практически обычно поступаем так: строим график v^2 в зависимости от p , находим ω и отмечаем масштаб γ , затем определяем величину γ_1 , соответствующую $v_1^2 = \frac{1}{2}$; тогда из формулы (15.8) получаем:

$$v_1^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{Q^2}{\gamma_1^2} (\gamma_1^2 - 1)^2};$$

отсюда

$$Q = \pm \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 - 1}}; \quad (15.10)$$

знак выбирается так, что $Q > 0$.

Следовательно, (15.10) представляет простую формулу, по которой можно определить Q , зная величину γ_1 , соответствующую значению $v_i^2 = \frac{1}{2}$. Очевидно, при двух значениях γ_1 по обе стороны от резонанса v_i^2 будет равно $\frac{1}{2}$ (рис. 57). По формуле (15.8) можно убедиться, что при любом значении $\gamma' = 1/v$ величина v будет та же самая. Следовательно, если линия $v^2 = \frac{1}{2}$ пересекает резонансную кривую в двух точках γ_1 и γ' , то $\gamma_1\gamma' = 1$. Подставляя это в формулу (15.10), получаем:

$$Q = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma'}. \quad (15.11)$$

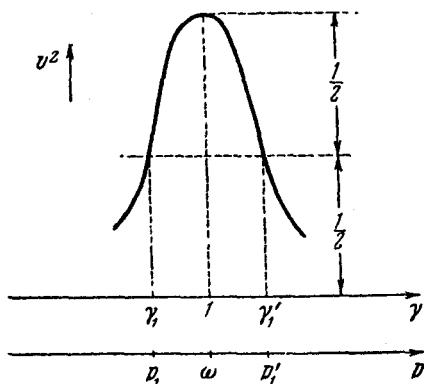


Рис. 58.

Значит, добротность системы равна обратной величине отрезка $\gamma_1 - \gamma'$, который называют *относительной шириной резонансной кривой*. Если значения γ_1 и γ' , соответствующие границам относительной ширины резонансной кривой, выразим через обычные единицы частоты p_1 и p'_1 (рис. 58), разность которых $p'_1 - p_1$ называют *шириной резонансной кривой*, то формулу для определения добротности (15.11) можно записать так:

$$Q = \frac{\omega}{p_1 - p'_1}. \quad (15.12)$$

Добротность системы равна собственной частоте, деленной на ширину резонансной кривой.

Ширина резонансной кривой есть мера избирательности колебательного контура (или колебательной системы). Она указывает область тех частот, для которых энергия вынужденных колебаний будет больше 50% энергии колебаний при резонансе для той же амплитуды силы. Ширина резонансной кривой связана формулами (15.11) и (15.12) с добротностью, поэтому добротность системы характеризует ее избирательность. При больших значениях Q можно приближенно считать резонансную кривую рис. 57 симметричной относительно резонанса для значений v^2 от 1 до $\frac{1}{2}$. В этом случае при отклонении частоты в любую сторону от резонансной на половину ширины резонансной кривой энергия вынужденных колебаний будет равна примерно 50% энергии колебаний при резонансе.

Например, пусть $Q = 100$; это значит, что если частота внешней силы отличается от резонансной на величину, меньшую 0,5%,

то энергия колебаний в системе больше половины энергии при резонансе. Хорошие электрические контуры обычно имеют добротность от 30 до 50, если не принимать особых мер к повышению ее. Камертон (и вообще механические системы) имеет гораздо более высокую добротность $Q \approx 3000$. Это значит, что достаточно отойти от собственной частоты на величину $\sim 0,06\%$, как энергия вынужденных колебаний уменьшится более чем вдвое.

2. Амплитуда смещений (или амплитуда заряда на конденсаторе)

Амплитуду вынужденных колебаний смещения в механической колебательной системе находим из формул (14.10) и (14.12):

$$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mp^2)^2 + (hp)^2}}; \quad (15.13)$$

разделив на k и вводя обычные обозначения, получим:

$$X_0 = \frac{a}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}, \quad (15.14)$$

где «статическое смещение» $a = F_0/k$, как было принято ранее в (12.1).

Комплексная амплитуда \bar{V} колебаний потенциала на конденсаторе будет связана с комплексной амплитудой тока в контуре \bar{I} следующим равенством: $\bar{V} = \bar{I}/ipC$, которое следует из $V = \int Idt/C$. Тогда для амплитуд гармонических колебаний имеет место следующее равенство:

$$V_0 = \frac{I_0}{pC}. \quad (15.15)$$

Вводя обычные обозначения и подставляя I_0 из (15.6), получаем амплитуду потенциала на конденсаторе:

$$V_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}. \quad (15.16)$$

Комплексная амплитуда заряда на конденсаторе \bar{q} отличается от амплитуды потенциала \bar{V} только постоянным множителем C (емкость конденсатора).

Очевидно, что формулы (15.14) и (15.16) можно переписать в безразмерном виде:

$$u = \frac{X_0}{a} = \frac{V_0}{\mathcal{E}_0} = \frac{q_0}{\mathcal{E}_0 C_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}. \quad (15.17)$$

Формула (15.17) дает в безразмерном виде амплитуду колебаний смещения и потенциала на конденсаторе. Семейство кривых для различных значений Q показано на рис. 59.

С увеличением γ при постоянном и достаточно большом Q величина амплитуды резко возрастает вблизи $\gamma = 1$; это возрастание амплитуды и называется *резонансом*.

Все кривые на рис. 59 начинаются при $u = 1$. Значит, при небольших частотах амплитуда колебаний смещения равна ста-

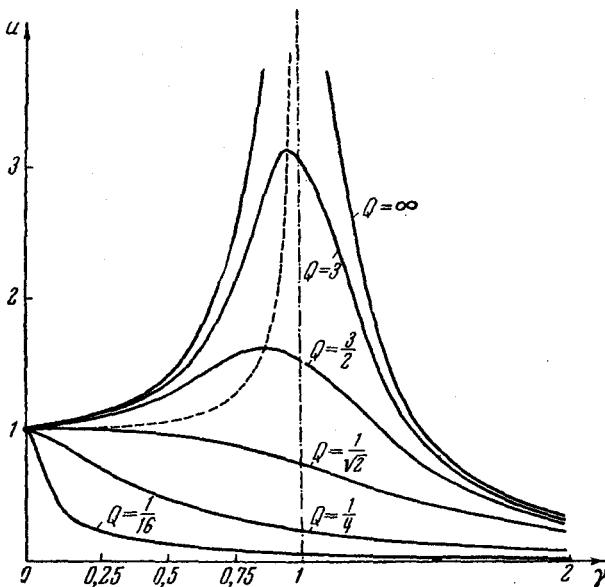


Рис. 59.

тическому смещению при любом Q , или потенциал на конденсаторе равен э. д. с. при любом Q . С увеличением γ величина u возрастает особенно резко при больших значениях Q ; подходя к $\gamma = 1$, она достигает максимума при значении γ_0 , меньшем единицы, и затем плавно уменьшается до нуля при $\gamma \rightarrow \infty$. Кривая, соответствующая Q_1 , лежит всюду выше кривой, соответствующей Q_2 , если $Q_1 > Q_2$. Напомним, что Q обратно по величине декременту при больших значениях добротности ($Q \gg 1$).

Из формулы (15.17) видно, что при резонансе при $\gamma = 1$ величина u равна Q . Это может служить определением добротности. Например, добротностью контура называют отношение амплитуды колебаний на конденсаторе при резонансе к амплитуде внешней силы. На этом принципе построены приборы для определения Q .

Однако здесь нужно уточнить, что будем называть резонансом. Или резонанс имеет место тогда, когда частота внешней силы равна собственной частоте системы без затухания ($\gamma = 1$), или резонансным будем считать то значение γ_0 , при котором амплитуда колебаний смещения достигает максимума. В случае резонансной кривой для амплитуды тока (15.8) максимальное значение амплитуды тока будет при $\gamma = 1$, а для амплитуды смещений это не так. Действительно, дифференцируя знаменатель (15.17), найдем, что он будет минимальным при

$$\gamma_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \quad (15.18)$$

Таким образом, только при больших значениях добротности $\gamma_0 \rightarrow 1$. На рис. 59 пунктиром отмечена кривая максимумов резонансных кривых.

Максимальное значение u получим, подставив (15.18) в (15.17),

$$u_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}. \quad (15.19)$$

Из (15.18) и (15.19) видно, что при больших Q максимальное значение u близко к Q , а γ_0 близко к единице. Поэтому при больших значениях добротности Q практически нет существенной разницы между обоими определениями резонансной частоты.

При малых значениях Q различные определения резонансной частоты дадут различные значения. Поэтому условимся называть резонансом тот случай, когда $\gamma = 1$, т. е. резонанс имеет место при совпадении частоты внешней силы с собственной частотой системы (без затухания). Но будем помнить, что амплитуда вынужденных колебаний тока (или скорости) максимальна при резонансе, амплитуда же вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе (заряда на конденсаторе, смещения) совсем не будет максимальной при резонансе. Только при больших Q приближенно максимум амплитуды будет при резонансе.

Как видно из (15.18), с уменьшением добротности Q максимальное значение амплитуды смещения передвигается к $\gamma = 0$. При $Q = 1/\sqrt{2} \approx 0,7$ максимум амплитуды будет при нулевой частоте, $\gamma_0 = 0$, и значение $u_{\max} = 1$. Трение в системе настолько велико, что амплитуда колебаний смещения при всех частотах будет меньше статического смещения. Для $Q < 1/\sqrt{2}$ кривые u пойдут еще ниже (рис. 59).

Напомним, что по (15.3)

$$Q = \frac{\omega}{2\delta}.$$

Для собственных колебаний при $\omega = \delta$ переходим к неколебательному процессу, к лимитационному движению; поэтому значение $Q = \frac{1}{2}$ называют *критическим*, так же как и соответствующее ему затухание (§ 4).

3. Амплитуда ускорений (или напряжения на индуктивности)

В практических приложениях теории колебаний резонансная кривая для амплитуды ускорений встречается реже, однако для некоторых задач очень важен вид этой кривой.

Комплексная амплитуда ускорения $\tilde{X} = -p^2 \bar{X}$, или $\ddot{X}_0 = -p^2 X_0$; тогда по (15.14) легко получим нужную формулу для

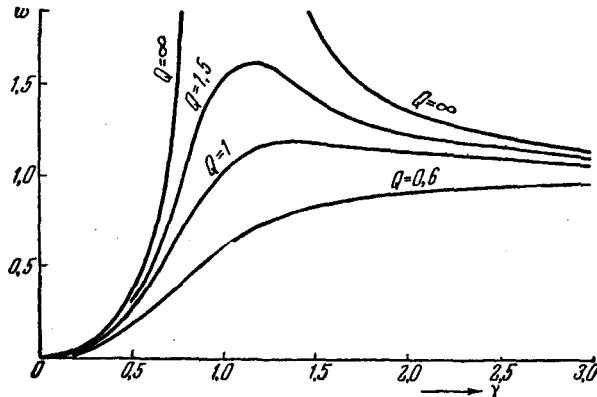


Рис. 60.

определения резонансной кривой амплитуды ускорений. Комплексная амплитуда напряжения на индуктивности $\tilde{V}_L = ipL\bar{I}$ или $V_{L0} = pLI_0$; воспользовавшись этим соотношением и (15.6), получим резонансную кривую для амплитуды напряжений на индуктивности. Резонансная кривая для ускорений в безразмерном виде выражается формулой:

$$w = \frac{\ddot{X}_0}{F_0} = \frac{V_{L0}}{\mathcal{E}_0} = \frac{Q\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2 + Q^2}(\gamma^2 - 1)^2}. \quad (15.20)$$

График w дан на рис. 60.

Резонансные кривые имеют совсем другой вид: при $\gamma = 0$ $w = 0$. При $\gamma = 1$ (резонанс) $w = Q$ *). Амплитуда достигает

*) Так же, как для резонансной кривой смещения.

максимума при значении $\gamma_0 > 1$, затем она падает при увеличении γ и стремится к 1 при $\gamma \rightarrow \infty$. Из формулы (15.20) легко найти значение максимума и убедиться, что при больших значениях добротности Q он будет при $\gamma \approx 1$. Из элементарных физических рассуждений очевидно, что при больших частотах амплитуда колебаний напряжения на индуктивности будет почти равна амплитуде внешней э. д. с.

В колебательном контуре можно измерить амплитуду тока или же, если потери в конденсаторе малы, амплитуду напряжения на конденсаторе, амплитуду же напряжения на индуктивности практически измерить нельзя, так как омическое сопротивление катушки нельзя отделить от ее индуктивности; обычно главную часть омического сопротивления контура представляет сопротивление провода, которым намотана катушка.

В механических системах чаще всего регистрируется амплитуда смещений, иногда (например, при электромагнитной записи)— амплитуда скорости колебаний. Для определения сил инерции, действующих на части колеблющейся массы, очень важно знать также и амплитуду ускорения.

4. Фаза вынужденных колебаний

Когда речь идет о фазе, то следует иметь в виду, по крайней мере, *два колебания одной частоты*, о сдвиге фаз между которыми только и можно говорить. Когда имеется несколько гармонических колебаний одной и той же частоты, то фазу одного колебания можно принять за начальную и все колебания рассматривать относительно этой начальной фазы. До сих пор мы считали фазу внешней силы начальной и поэтому полагали ее равной нулю.

Сдвиг по фазе между колебаниями смещения и силы можно определить по (14.7). Считая, что сила опережает смещение на угол φ , и приведя к принятым нами безразмерным величинам Q и γ , этот сдвиг по фазе, согласно (14.12), можно записать так:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{Q(1 - \gamma^2)}. \quad (15.21)$$

График зависимости φ от γ показан на рис. 61а.

Для $Q \rightarrow \infty$ (отсутствие затухания) при $\gamma = 1$ происходит скачок фазы на π . Для больших Q изменение фаз главным образом происходит вблизи резонанса, вблизи $\gamma = 1$. При резонансе $\gamma = 1$ (для всех Q) $\varphi = \pi/2$ сдвиг по фазе между смещением и силой — 90° , смещение отстает по фазе на $\pi/2$ от силы *). Также

*). Отметим, что можно считать *резонансной* такую частоту, при которой сдвиг по фазе между силой и смещением равен 90° .

отстает по фазе от внешней э. д. с. на ту же самую величину ϕ колебание напряжения на конденсаторе (или заряда конденсатора q).

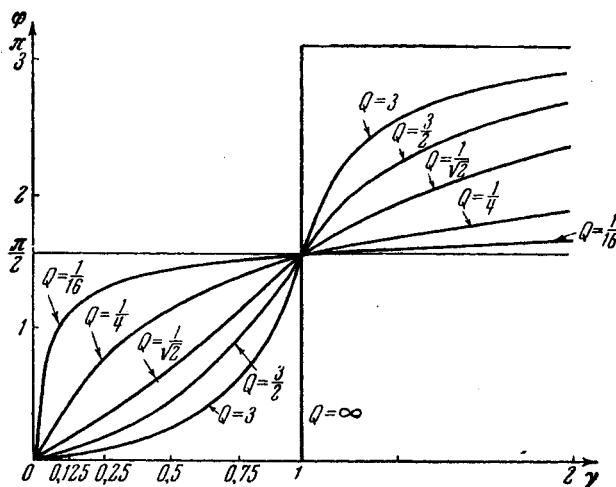


Рис. 61а.

Сдвиг фаз остальных величин (тока, скорости и т. д.) легко получить из формулы (15.21) прибавлением или вычитанием $\pi/2$

в соответствии со следующими формулами для комплексных амплитуд:

$$\bar{X} = ip\bar{X},$$

$$\bar{\dot{X}} = ip\bar{\dot{X}} = -p^2\bar{X}, \quad (15.22)$$

или

$$\bar{I} = \bar{q} = ip\bar{q}, \quad \bar{V}_C = \frac{\bar{I}}{ipC} = \frac{\bar{q}}{C},$$

$$\bar{V}_L = ipL\bar{I} = -p^2\bar{L}\bar{q}. \quad (15.23)$$

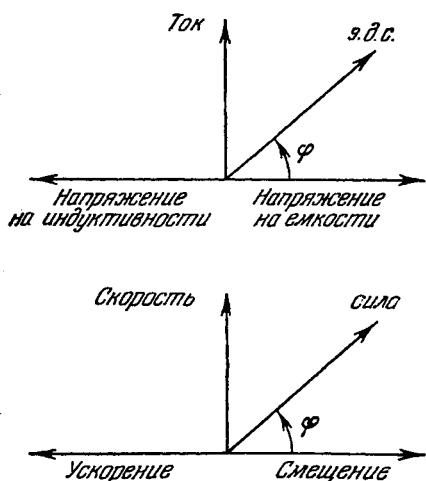


Рис. 61б

напряжения на индуктивности опережают колебания тока в ка-

тушке на $\pi/2$, а напряжение на конденсаторе отстает от колебаний тока на $\pi/2$. Если примем за нуль фазы фазу тока, то фаза э. д. с. будет $\Phi = \frac{\pi}{2}$.

§ 16. Резонансные кривые при постоянной частоте и переменном параметре системы

Анализ резонансных кривых для амплитуд и фаз вынужденных колебаний сделан нами в предположении, что частота внешней силы *переменная*, а параметры системы остаются неизменными. Между тем в ряде практических приложений рассматривают резонансные кривые, которые получаются при изменении какого-либо *параметра* системы (например, жесткости или емкости) при *постоянной* частоте внешней силы. Следует иметь в виду, что резонансные зависимости в этом случае отличаются от рассмотренных нами: здесь изменяется не только отношение собственной частоты к частоте внешней силы, но и строение колебательной системы, например добротность системы уже не является постоянной величиной. В этом случае одна резонансная кривая представляет колебания в непрерывном ряде различных колебательных систем.

Отметим существенные особенности этих резонансных зависимостей, которые можно получить из анализа основных формул (15.6) и (15.13). Прежде всего заметим, что резонансные явления можно наблюдать в системе только при изменении параметров жесткости (емкости) или массы (индуктивности), которые можно назвать *основными параметрами колебательной системы*.

Из формулы (15.13) видно, что при изменении какого-либо основного параметра резонанс наступит при $k = mp^2$, и максимальная амплитуда колебаний смещения будет равна

$$X_{0m} = \frac{F_0}{hp}. \quad (16.1)$$

Обозначим резонансное значение переменного параметра и значение постоянного параметра индексом нуль; тогда

$$m_0 p^2 = k_0, \quad (16.2)$$

что можно толковать как условие резонанса. В данном случае резонанс наступает при точном *совпадении* частоты внешней силы с *собственной* частотой системы без затухания.

Будем рассматривать резонансные зависимости так же, как и выше, в безразмерном виде, и обозначим отношение амплитуды колебаний смещения к резонансному ее значению через y ; тогда

из (15.13) и (16.1) следует

$$y^2 = \frac{X_0^2}{X_{0M}^2} = \frac{h^2 p^2}{(k - mp^2)^2 + h^2 p^2}. \quad (16.3)$$

Обозначим $\frac{k}{k_0} = x$ при переменной жесткости (или $\frac{m}{m_0} = x$ при переменной массе) и введем добротность системы при резонансе

$$Q_0 = \frac{\sqrt{m_0 k_0}}{h} = \frac{k_0}{hp} = \frac{m_0 p}{h}; \quad (16.4)$$

тогда формула для резонансной кривой квадратов амплитуд смещения (16.3) в безразмерном виде будет

$$y^2 = \frac{1}{(1-x^2)Q_0^2 + 1}. \quad (16.5)$$

Резонансные кривые, соответствующие (16.5), показаны на рис. 62.

Отметим, что резонансные кривые в данном случае совершенно симметричны относительно резонансной точки.

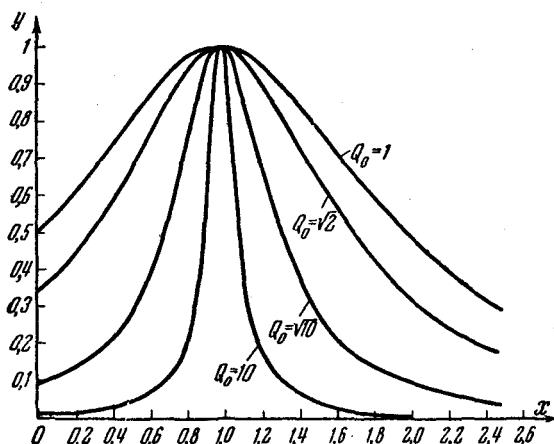


Рис. 62.

Хотя добротность системы и переменна вдоль резонансной кривой, но значение добротности при резонансе Q_0 является параметром резонансной кривой и определяет ее характер. Ширина резонансной кривой здесь также просто связана с добротностью Q_0 .

Так как кривая симметрична, то можно назвать половиной относительной ширины резонансной кривой величину изменения

переменного параметра $\Delta x = \frac{\Delta k}{k_0}$ (или $\Delta x = \frac{\Delta m}{m_0}$), при которой энергия колебаний (квадрат амплитуды) уменьшится в два раза против резонансного значения. Тогда из (16.5) следует уравнение для определения Δx

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{(\Delta x)^2 Q^2 + 1};$$

отсюда

$$Q_0 = \frac{1}{\Delta x}, \quad (16.6)$$

т. е. добротность системы при резонансе равна обратной величине половины относительной ширины резонансной кривой для квадратов амплитуд в отличие от резонансной кривой при переменной частоте, где добротность обратна относительной ширине резонансной кривой для квадратов амплитуд.

При определении резонансной кривой вида (16.5) частота колебаний остается постоянной, поэтому отношение амплитуд смещений будет равно отношению амплитуд скорости и амплитуд ускорений, т. е.

$$y = \frac{X_0}{X_{0M}} = \frac{pX_0}{pX_{0M}} = \frac{\dot{X}_0}{\dot{X}_{0M}} = \frac{\ddot{X}_0}{\ddot{X}_{0M}}.$$

Из этого следует существенная особенность резонансных зависимостей при переменных параметрах системы — *форма резонансных кривых для амплитуд смещения, скорости и ускорения одинакова*, в отличие от того, что мы видели при переменной частоте внешней силы.

Для электрического контура, как это можно получить из (15.6), резонансная кривая, представляющая отношения квадратов амплитуд токов, будет

$$\left(\frac{I_0}{I_{0M}} \right)^2 = \frac{R^2}{R^2 + \left(\frac{1}{pC} - pL \right)^2}. \quad (16.7)$$

Если обозначим $x = C_0/C$ при переменной емкости и $x = L/L_0$ — при переменной индуктивности, где значение индекса нуль то же, что и раньше, то для отношения амплитуд токов в электрическом контуре

$$y = \frac{I_0}{I_{0M}},$$

так же как и для механической системы имеет место формула (16.5) и резонансные кривые, показанные на рис. 62. Условие резонанса теперь записывается так:

$$p^2 L_0 C_0 = 1,$$

и добротность контура при резонансе

$$Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{L_0 \rho}{R} = \frac{1}{\rho C_0 R},$$

которая таким же образом связана с шириной резонансной кривой (16.6).

Очевидно, что для амплитуды колебаний заряда на конденсаторе $\frac{I_0}{p}$ будут те же самые резонансные кривые рис. 62, потому что частота колебаний остается постоянной.

Для амплитуд колебаний потенциала на конденсаторе, равных $\frac{I_0}{\rho C_0}$, при переменной индуктивности и для амплитуд колебаний напряжения на индуктивности $I_0 \rho L_0$ — при переменной

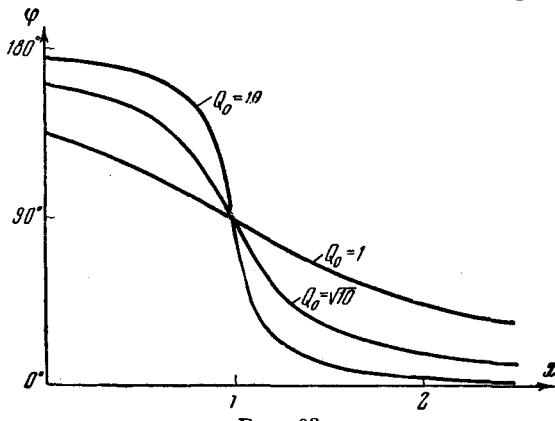


Рис. 63.

емкости — форма резонансных кривых будет такая же, как это следует из формулы (16.5), так как эти амплитуды колебаний пропорциональны амплитуде колебаний тока. Амплитуды колебаний потенциала на конденсаторе при переменной емкости и амплитуды напряжений на индуктивности при переменной индуктивности уже не будут пропорциональны амплитудам тока, и поэтому для них форма резонансной кривой будет иной; ее легко получить из (15.6); максимум амплитуды здесь будет иметь место *не* точно при резонансе, а при большем значении x , вблизи 1 при большом Q_0 . Практически резонансные кривые для амплитуд напряжений на индуктивности не встречаются, так как невозможно отделить индуктивность катушки от ее омического сопротивления.

Кривая, показывающая сдвиг по фазе между колебаниями силы и смещения в зависимости от изменения основного параметра системы, будет иметь несколько иной вид, она будет антисиммет-

рична относительно резонанса. Уравнение этой кривой можно получить из формулы (14.12), пользуясь обозначениями (16.2) и (16.4); в случае изменения жесткости $x = \frac{k}{k_0}$ оно будет иметь такой вид:

$$\varphi = \arctg \frac{1}{Q_0(x-1)}. \quad (16.8)$$

Зависимость сдвига фаз от x при различных значениях добротности Q_0 показана на рис. 63.

§ 17. Некоторые частные случаи резонанса (резонанс «токов» и «напряжений»)

Возможны различные способы внешнего воздействия на колебательную систему. В электротехнике и радиотехнике имеют существенное значение два случая включения э. д. с., которые можно назвать, как обычно, последовательным и параллельным включением э. д. с. в колебательный контур.

До сих пор мы рассматривали последовательное включение источника э. д. с. в контур (рис. 64, а). Но можно включить источник внешней силы параллельно (рис. 64, б).

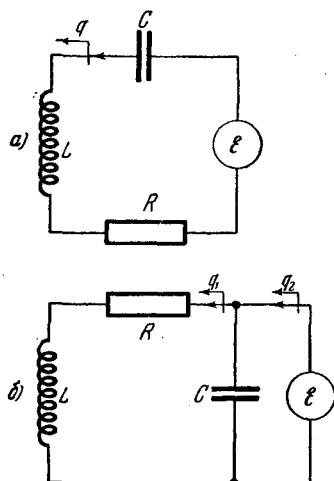


Рис. 64.

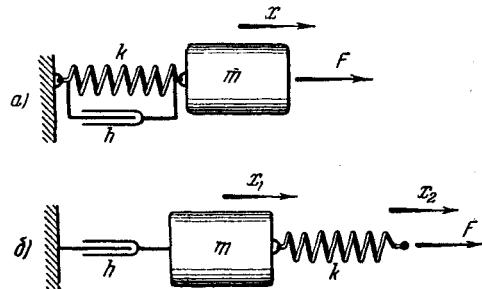


Рис. 65.

Полезно сейчас же рассмотреть механические аналоги этих электрических схем. Аналог первой схемы нам хорошо известен (рис. 65, а); внешняя сила действует на массу m , укрепленную на пружине жесткости k , обладающей трением, коэффициент которого равен h .

Аналог второй схемы показан на рис. 65, б. Внешняя сила F действует на массу m через пружину жесткости k ; при движении массы возникает сила трения с коэффициентом h .

Пусть x_1 и x_2 — смещения из положения равновесия массы и конца пружины, соответственно (рис. 65, б). Тогда уравнение движения тела массы m можно записать так:

$$F = k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1. \quad (17.1)$$

Обозначим через q_2 — количество электричества, прошедшее ко времени t через сечение провода у источника в направлении, показанном стрелкой, а q_1 — количество электричества, прошедшее через сечение провода в катушке (рис. 64, б). Тогда уравнения напряжений для схемы параллельного включения э. д. с. будут

$$\mathcal{E} = \frac{1}{C}(q_2 - q_1) = L\ddot{q}_1 + R\dot{q}_1, \quad (17.2)$$

если в момент $t = 0$ количество электричества на обкладках конденсатора равно нулю. Легко видеть, что уравнения (17.1) и (17.2) совершенно одинаковы, поэтому можно рассмотреть любое из них.

Перепишем (17.1) в комплексных амплитудах

$$\bar{F} = k(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) = \bar{X}_1(-mp^2 + ihp).$$

Исключаем \bar{X}_1 и получаем:

$$\bar{X}_2 = \bar{F} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{-mp^2 + ihp} \right).$$

По этой формуле определим динамическую жесткость системы таким образом:

$$\bar{K} = \frac{\bar{F}}{\bar{X}_2} = \frac{k(iph - mp^2)}{k - mp^2 + ihp}. \quad (17.3)$$

Записывая (17.2) в комплексных амплитудах, исключая \bar{q}_1 и замечая, что комплексная амплитуда тока $\bar{I}_2 = ip\bar{q}_2$, получим комплексное сопротивление контура:

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \frac{\bar{E}}{\bar{I}_2} = \frac{1}{\frac{1}{R + ipL} + ipC} = \\ &= \frac{R + ipL}{1 + ipC(R + ipL)} = R \frac{1 + i\gamma Q}{1 - \gamma^2 + i\frac{\gamma}{Q}}; \end{aligned} \quad (17.4)$$

выражение для \bar{Z} несравненно более сложное, чем при последовательном включении э. д. с. (14.17).

Для выяснения физического различия между параллельным и последовательным включением э. д. с. рассмотрим вначале нашу задачу в отсутствии омического сопротивления (или трения).

Положим пока в (17.3) и (17.4) $R = 0$ и $h = 0$. Тогда динамическая жесткость механической системы (рис. 65, б) будет

$$\bar{K} = \frac{kmp^2}{mp^2 - k} = k \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} = k\chi. \quad (17.5)$$

Комплексное сопротивление электрического параллельного контура также равно

$$\bar{Z} = \frac{ipL}{1 - p^2LC} = \frac{1}{ipC} \cdot \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} = \frac{\chi}{ipC}, \quad (17.6)$$

где, очевидно, $\chi = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}$ — безразмерная величина, зависящая только от отношения частот $\gamma = p/\omega$.

График зависимости безразмерной величины χ от γ дан на рис. 66. При $\gamma \rightarrow 0$, при низких частотах, динамическая жесткость

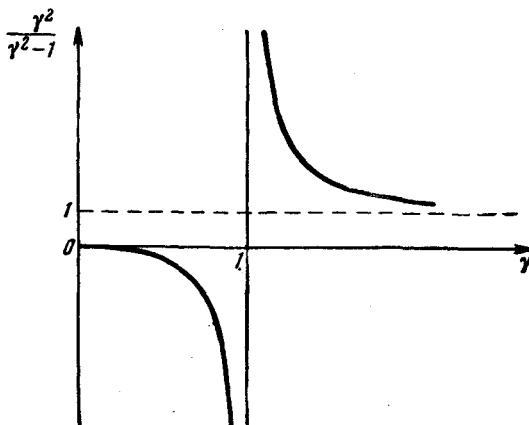


Рис. 66.

(или комплексное сопротивление) равна нулю. Физически это очевидно: под действием постоянной силы смещение тела с массой m будет бесконечно большим, или источник с постоянной э.д.с. дает бесконечно большой ток через цепь с индуктивностью, так как омическое сопротивление ветви равно нулю. При $\gamma \rightarrow \infty$ динамическая жесткость $\rightarrow k$, тело «стоит» на месте и не совершает колебаний, внешняя сила уравновешивается деформацией пружины, а комплексное сопротивление контура равно комплексному сопротивлению емкостной ветви $1/ipC$, сопротивление индуктивной цепи бесконечно.

При $\gamma = 1$ динамическая жесткость и комплексное сопротивление стремятся к бесконечности. Физически это означает, что точка x_2 «стоит» на месте и не совершает колебаний, масса m

совершает колебания на пружине с собственной частотой $\omega = p$, и амплитуда и фаза колебаний таковы, что действие внешней силы уравновешивается силой деформации пружины при колебаниях.

В электрическом случае при $\gamma = 1$ точно так же происходят колебания в контуре с частотой $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Ток в обеих ветвях равен и противоположен по фазе, следовательно, ток в общей цепи $\dot{q}_2 = 0$, а это значит, что сопротивление контура бесконечно велико.

С помощью графика, показанного на рис. 66, можно найти зависимость изменения динамической жесткости (или комплексного сопротивления) от частоты внешней силы. Фаза колебаний определяется знаком x , при $p < \omega$ точка x_2 колеблется в противофазе с силой, при $p > \omega$ — в фазе с силой.

В электрическом контуре ток в общей цепи при $p < \omega$ отстает по фазе от э. д. с. на $\pi/2$, при $p > \omega$ опережает по фазе на $\pi/2$. При $p = \omega$ происходит скачок фазы на π , как и в случае механической системы.

Легко видеть из основных уравнений (17.1) и (17.2), что амплитуды колебаний (x_1 , x_2 , q_1 , q_2 и др.) никогда, ни при каких значениях частоты p не становятся бесконечными. Например, амплитуда тока через ветвь с индуктивностью будет монотонно падать с увеличением p , а амплитуда тока через емкостную ветвь, наоборот, будет возрастать монотонно с увеличением p . Следовательно, этот случай можно назвать *резонансом сопротивления* (или *резонансом динамической жесткости*), потому что ни ток, ни напряжение не обращаются в бесконечность, а сопротивление (или жесткость) обращается в бесконечность при $\gamma = 1$.

Но если задавать внешнее воздействие другим способом, а именно, если осуществить такое устройство, при котором амплитуда силы тока во внешней цепи при любой частоте будет оставаться постоянной, или же если задано смещение точки x_2 , то картина процессов в системе будет совсем иная. «Заданы» колебания тока через контур, приключенный параллельно, «задано» смещение конца пружины, а как это осуществлено, какие нужны для этого э. д. с. и силы — это пока не существенно.

В этом случае уравнения будут иметь совсем другой вид. Действительно, если $x_2 = a \cos pt$ (или $\dot{q}_2 = b \cos pt$), то уравнение (17.1) можно записать так:

$$m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 = ka \cos pt. \quad (17.7)$$

Уравнение (17.7) совершенно одинаково с уравнением (14.1) при действии внешней силы на массу m . Дифференцируя (17.2) и обозначая $\dot{q}_1 = I_1$, а $\dot{q}_2 = b \cos pt$, получим:

$$LI_1 + RI_1 + \frac{I_1}{C} = \frac{b}{C} \cos pt, \quad (17.8)$$

такое же уравнение для тока, как (14.2) для заряда. Теперь колебания в контуре (или колебания массы m) будут иметь такой же характер, как и при последовательном включении э. д. с. в контур. Здесь будет резонанс (при $R = 0$ и $h = 0$ можно «получить»

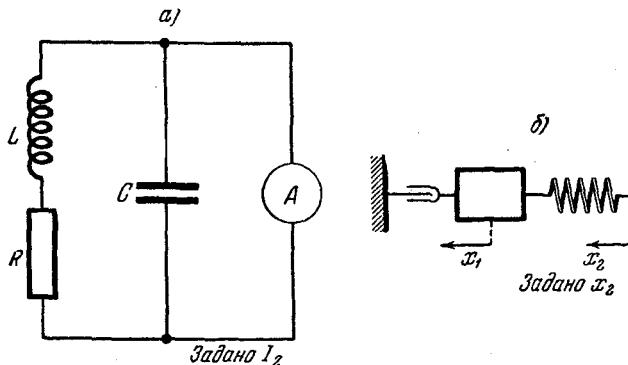


Рис. 67.

бесконечные амплитуды токов, напряжений, смещений и т. д.). Поэтому и называют этот случай «резонансом токов». При таком названии имеют в виду не только электрическую цепь (или механическую систему), а и способ воздействия. Схематически представлять «резонанс токов»

лучше так, как показано на рис. 67. Таков же принцип устройства известного прибора Поля для демонстрации вынужденных колебаний. Схема прибора показана на рис. 68: A — спиральная пружина, один конец которой соединен с маховиком на оси, другой же совершают заданное гармоническое колебательное движение.

Для параллельного контура вынужденные колебания при включении э. д. с. имеют совсем другую картину, поэтому этот случай естественно называть *резонансом сопротивлений*. Модуль комплексного сопротивления параллельного контура по (17.4) будет

$$Z_0 = R \sqrt{\frac{1 + \gamma^2 Q^2}{(1 - \gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}. \quad (17.9)$$

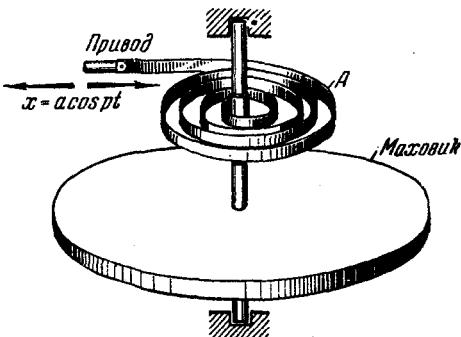


Рис. 68.

График зависимости Z_0 от частоты (или от γ) показан на рис. 69.

Максимум сопротивления будет при $\gamma_0 < 1$, приближенно для больших значений Q

$$\gamma_0 \approx 1 - \frac{1}{Q^2} + \frac{1}{6Q^4}.$$

Очевидно, с увеличением Q максимальное сопротивление будет

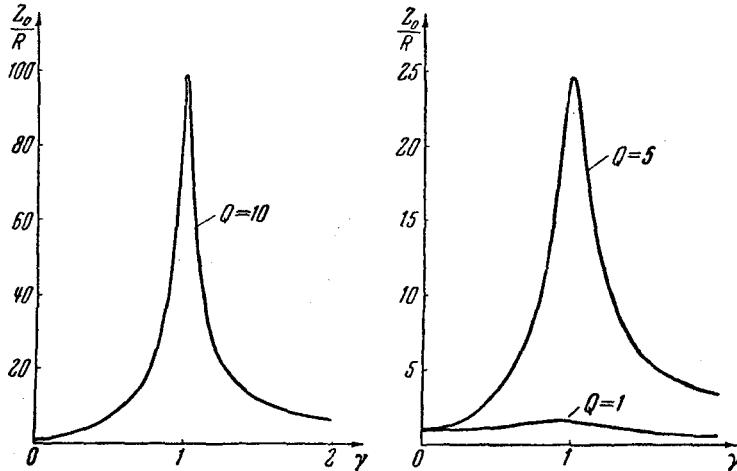


Рис. 69.

примерно при $\gamma = 1$. При увеличении частоты ($\gamma \rightarrow \infty$) сопротивление стремится к нулю. При резонансе ($\gamma = 1$)

$$Z_0 = RQ \sqrt{Q^2 + 1},$$

для больших значений Q приближенно

$$Z_0 \approx RQ^2 = \frac{L}{CR} = Q \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (17.10)$$

(вспоминая, что $Q = \sqrt{\frac{L}{C}}$).

Сопротивление контура при резонансе резко возрастает и пропорционально квадрату добротности. Параллельно включенный контур при резонансе практически эквивалентен омическому сопротивлению. Формула (17.10) часто применяется при расчетах в радиотехнике.

Полезно записать и точную формулу для полного значения комплексного сопротивления при резонансе ($\gamma = 1$):

$$\bar{Z}_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{L}{C}}(Q - i) \quad (17.11)$$

как это легко получить из (17.4), положив $\gamma = 1$.

При большом Q мнимой компонентой \bar{Z} можно пренебречь, и поэтому приближенно можно считать сопротивление чисто ваттным (17.10).

§ 18. Основы теории вибропоглощающих устройств (амортизация)

Периодические вибрации, например те, которые возникают вследствие работы машин, вызывают ряд нежелательных последствий. Электрические машины, турбины и т. д. из-за несбалансированности вращающихся частей становятся источником вибраций. Моторы внутреннего сгорания из-за наличия возвратно-поступательных движений некоторых частей и выхлопа газов являются источником периодических возмущений (сил). Обычно силы возмущения увеличиваются с ростом числа оборотов машины. Поэтому задача ослабления вибраций является актуальной технической задачей. Она решается или специальным конструированием упругого фундамента, или устройством упругой подвески работающей машины. Если машина жестко укреплена, то сила возмущения, действующая на машину, почти целиком передается на фундамент и далее — на прилегающие к нему тела.

Упругое крепление при определенных условиях будет ослаблять силу возмущения, передаваемую на фундамент.

Схематически упругая подвеска (упругий фундамент) представлена на рис. 70. Машина и соединенные с ней части фундамента показаны массой m , фундамент изображен пружиной жесткости k , обладающей трением с коэффициентом h . Допустим, что на машину действует периодическая сила $F = F_0 \cos pt$. Эта сила вызывает колебания машины. Подсчитаем силу F' , которая будет действовать на основание фундамента при колебаниях; она состоит из силы деформации пружины и силы трения.

Обозначим через x вертикальное смещение массы из положения равновесия; тогда сила

$$F' = kx + hx, \quad (18.1)$$

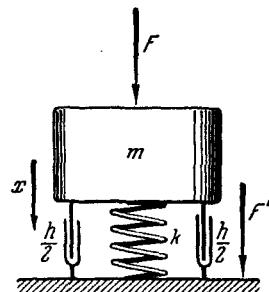


Рис. 70.

или в комплексных амплитудах

$$\bar{F}' = (k + i\gamma p) \bar{X},$$

где \bar{X} — комплексная амплитуда смещения массы x .

Возмущающая сила \bar{F} в комплексном виде будет связана по (14.10) с амплитудой смещения следующим образом:

$$\bar{F} = (-mp^2 + k + ihp) \bar{X}. \quad (18.2)$$

В данном случае для нас не важно соотношение фаз между

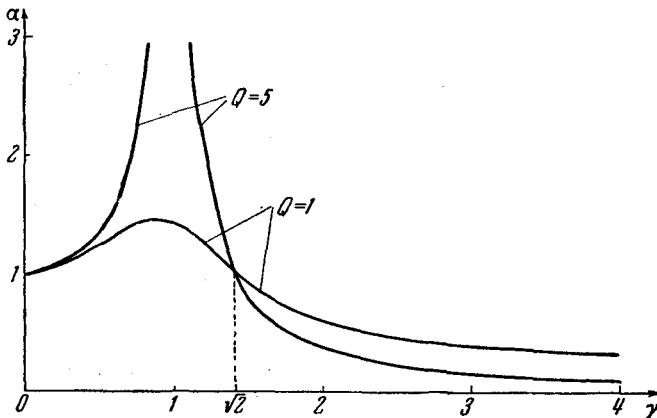


Рис. 71.

силами \bar{F}' и \bar{F} , а необходимо только отношение амплитуд этих сил F'_0 и F_0 .

Из (18.1) и (18.2) следует

$$F'_0 = \sqrt{k^2 + (hp)^2} X_0,$$

$$F_0 = \sqrt{(k - mp^2)^2 + (hp)^2} X_0.$$

Обозначим через α отношение амплитуд. Величина α называется коэффициентом демпфирования. Тогда

$$\alpha = \frac{F'_0}{F_0} = \sqrt{\frac{k^2 + (hp)^2}{(k - mp^2)^2 + (hp)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}{(1 - \gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}. \quad (18.3)$$

Зависимость α от колебательных параметров системы (Q и γ)

дает полный ответ на интересующие нас вопросы. График этой зависимости дан на рис. 71.

Все кривые (для любого Q) проходят через точки $(0, 1)$ и $(\sqrt{2}, 1)$, следовательно, только при $\gamma > \sqrt{2}$ выгодна амортизирующая подвеска ($\alpha < 1$). Собственная частота колебаний машины на упругом фундаменте (или подвеске) должна быть значительно меньше частоты возмущающих сил: $\omega \ll p/\sqrt{2}$. Чем меньше собственная частота колебаний машины на упругости амортизирующего устройства, тем лучше его качество.

Если на машину действует несколько сил с различными частотами, то надо обеспечить достаточно малое значение α для силы с меньшей частотой. Для сил более высоких частот амортизирующее действие будет еще лучше.

Наличие затухания или увеличение его (уменьшение Q) ухудшает амортизирующее действие подвески, следовательно, следует по возможности увеличивать Q . Однако это практически полезно делать для стационарных установок, у которых возмущающая сила состоит *только* из совокупности гармонических сил:

$$F = \sum_n F_{0n} \cos(p_n t + \Phi_n),$$

как это мы полагали в теории. Но, например, для мотора, работающего на самолете, возмущающие силы состоят *не только* из гармонических компонент. Самолет, даже на прямолинейном курсе, всегда подвержен нерегулярным толчкам, которые вызывают собственные колебания (не учитываемые этой теорией).

Собственные колебания машины на упругой подвеске при большом Q долго не будут затухать и поэтому, в свою очередь, станут источником нежелательных вибраций. При расчете амортизации в этих случаях идут на некоторое уменьшение Q подвески даже за счет увеличения α в области высоких частот периодических возмущающих сил.

Действие амортизатора можно представлять себе так: тело некоторой массы на упругой подвеске колеблется под действием возмущающей силы с некоторой амплитудой, но подвеска настолько «мягка» (малая жесткость), что переменная сила деформации подвески мала. Силы возмущения в значительной части уравновешиваются силой инерции массы, как говорят, «масса демпфирует».

Теория амортизации так проста только при линейных силах упругости и трения и в том случае, если основание фундамента (или упругой подвески) можно считать, как это мы делали, абсолютно жесткими. В действительности силы упругости и трения

часто бывают нелинейными (иногда даже принципиально, а не в силу ошибок при конструировании) и это значительно усложняет теорию. Общей теории в этом случае нет и для каждого частного случая приходится различными путями решать задачу.

Амортизация приборов и других устройств, для которых нежелательны вибрации, но которые размещаются на таких телах, как самолет, вагон, корабль, автомобиль и т. п., практически осуществляется также с помощью упругой подвески с затуханием. Теорию амортизации приборов (в рамках линейной схемы) разберем в следующей главе, в разделе сейсмических приборов.

ГЛАВА 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РЕГИСТРИРУЮЩИХ ПРИБОРОВ

§ 19. Основные сведения о регистрирующих приборах

Из большого многообразия различных приборов, показывающих значение какой-то определенной физической величины, рассмотрим здесь принципы устройства только некоторых типов приборов, действующих на основе изложенных выше резонансных законов и предназначенных для регистрации быстропеременных во времени величин. Будем называть такие приборы *регистрирующими*.

Почти все приборы или, по крайней мере, те, о которых идет здесь речь, построены на основе определенной закономерной связи между измеряемой величиной и силой. Например, в магнитоэлектрическом приборе, показывающем силу тока, момент магнитных сил, действующих на катушку, пропорционален току. А момент сил измеряется обычно по величине деформации пружины, которая вызывается этим моментом (принцип динамометра). Поэтому одним из основных элементов прибора является пружина, которая иногда называется «восстанавливающей».

В том же магнитоэлектрическом приборе момент магнитных сил поворачивает катушку (и стрелку), пока он не будет равен моменту силы, действующей на катушку со стороны «восстанавливающей» пружины.

Простейшая схема регистрирующего прибора дана на рис. 72.

F — сила, вызываемая измеряемой величиной y , x — показания прибора, пропорциональные деформации пружины под действием силы F . Тарировка прибора: $x = f(y)$. Основные характеристики прибора: 1) диапазон изменения измеряемой величины, 2) чувствительность $\sim \frac{dx}{dy}$, 3) точность $\Delta y/y$, Δy — величина, которую

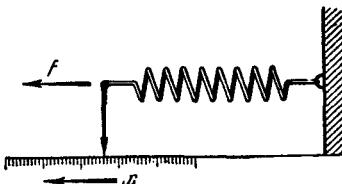


Рис. 72.

может отметить прибор. Качество прибора оценивается еще и постоянством его показаний и т. п. Все это относится как к приборам, показывающим статические величины, так и к регистрирующим приборам.

Сейчас нас интересует основное требование к регистрирующему прибору. Его можно сформулировать так: запись показаний прибора представляется в виде $x(t)$; насколько эта функция похожа на функцию $y(t)$? Можно ли записать равенство $y(t) = Bx(t)$, где B — постоянная величина?

Забегая вперед, следует отметить, что нет таких приборов, которые были бы предназначены для регистрации *любых* процессов. Каждый прибор дает искажения, причем эти искажения можно сделать малыми только для определенного класса процессов. Поэтому качество прибора можно оценивать по регистрации процессов такого класса, на который он рассчитан. Здесь — противоречие: мы должны знать процесс, для регистрации (по нему мы только и узнаем его) которого нам необходимо построить прибор. Это противоречие решается путем последовательного приближения; поэтому часто при изучении новых явлений возникают недоразумения. Для устранения этих недоразумений необходимо точно знать рамки применимости данного прибора и его ошибки при регистрации им процессов иного вида. Здесь существенную помощь оказывает знание основ теории регистрирующих приборов.

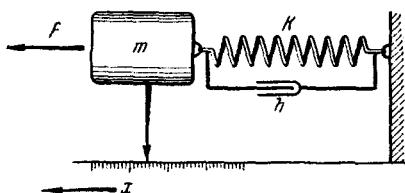
Разделим все интересующие нас приборы на четыре типа: 1) квазистатические, 2) резонансные, 3) сейсмические и 4) баллистические.

§ 20. Квазистатические приборы

Квазистатическими приборами мы называем такие приборы, которые регистрируют переменные величины так же, как и статические. Идеалом приборов такого рода была бы пружина со стрелкой без массы. В действительности, при измерении переменных величин пружина и стрелка (и некоторые дополнительные части) обязательно движутся, поэтому нельзя пренебречь силами инерции и трением.

Рис. 73.

Схема прибора такого рода показана на рис. 73. Все элементы схемы считаем линейными. Нелинейность в регистрирующих приборах вообще крайне нежелательна, но, к сожалению, иногда приходится с ней мириться.



Статическая чувствительность *) прибора, построенного по схеме рис. 73, обратно пропорциональна жесткости пружины ($\frac{\partial x}{\partial F} = \frac{1}{k}$). Переменные процессы прибор будет регистрировать, как статические, только приближенно и только при следующих условиях:

$$|m\ddot{x}| \ll |kx|, \quad |h\dot{x}| \ll |kx|. \quad (20.1)$$

Очевидно, чем больше эти неравенства, тем меньше будут ошибки прибора при регистрации переменных сил $F(t)$. Но вообще в таком виде пользоваться условием (20.1) невозможно, так как надо заранее знать весь процесс, который предполагается регистрировать. Для периодических же процессов, благодаря линейности, условие (20.1) приобретает определенный вид. Для одной синусоиды частоты p условие малых искажений (20.1) можно записать в таком виде:

$$mp^2 \ll k, \quad hp \ll k,$$

или, употребляя обычные обозначения,

$$p \ll \omega \text{ или } \gamma \ll 1, \quad \gamma \ll Q. \quad (20.2)$$

Следовательно, если собственная частота прибора много больше частоты записываемых колебаний и добротность много больше $\gamma = p/\omega$, то синусоидальное колебание будет записано приближенно правильно. И периодическое колебание, наивысшая гармоника которого равна p , также будет записано правильно.

Однако условия (20.2) не всегда можно выполнить. Первое условие обычно ведет к чрезмерному падению чувствительности прибора, так как для квазистатических приборов динамическая и статическая чувствительности одинаковы. Поэтому желательно сделать более точную оценку границы высших частот, которые прибор может регистрировать без больших искажений.

Для процессов, которые можно представлять суммой синусоид, такую оценку легко сделать. Пусть на прибор действует сила

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(p_n t + \varphi_n).$$

*) Чувствительность прибора при измерении постоянных величин.

Тогда, применяя к каждому члену (15.14) и учитывая собственные колебания, показания прибора можно записать так:

$$x(t) = De^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \kappa) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{k \sqrt{(1 - \gamma_n^2)^2 + \frac{\gamma_n^2}{Q^2}}} \times \\ \times \cos(p_n t + \varphi_n - \varepsilon_n),$$

где

$$\gamma_n = \frac{p_n}{\omega} \text{ и } \varepsilon_n = \operatorname{arctg} \frac{\gamma_n}{Q(1 - \gamma_n^2)}.$$

Начальный участок регистрации искажен собственными колебаниями. Через некоторое время $st_0 = s/\delta$, собственные колебания уменьшаются в e^s раз. Достаточно взять $s \approx 5$, и тогда собственные колебания будут менее 1% первоначальной величины.

Для точного воспроизведения процесса необходимо, чтобы для всех частот p_n величины $a_n = (1 - \gamma_n^2)^2 + \frac{\gamma_n^2}{Q^2}$, как и величины $\beta_n = \frac{\gamma_n}{Q(1 - \gamma_n^2)}$, были примерно одинаковыми. Так как при $\gamma \rightarrow 0$ $a \rightarrow 1$ и $\beta \rightarrow 0$, то следует подбирать так Q прибора, чтобы при возможно больших значениях γ_n величина a_n мало отличалась от единицы, а β_n от нуля.

Кривая $1/\sqrt{a}$ представляет уже известную нам зависимость, показанную на рис. 59. Из кривых для $a = 1/\sqrt{a}$ и $\varphi = \operatorname{arctg} \beta$ (рис. 61, a) при различных значениях Q видно, что сформулированные выше требования противоречивы. Для того чтобы a было ближе к 1, необходимо выбирать небольшое Q , примерно порядка 1. Но при этом Q (рис. 61, a) возникнут большие искажения по фазе, так как при $Q \approx 1$, $\varphi = \operatorname{arctg} \beta$ заметно нарастает с увеличением γ .

При мер. $Q \approx 0,9$. Значение γ_0 , при котором можно ожидать (в области $\gamma \leq 1$) наибольшего отклонения a от единицы, по формуле (15.18) равно

$$\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot 0,8}} \approx \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Значение \sqrt{a} при γ_0 будет

$$\sqrt{\left(1 - \frac{6}{16}\right)^2 + \frac{6}{16 \cdot 0,8}} \approx \frac{15}{16}.$$

Ход $1/\sqrt{\alpha}$ при $Q = 0,9$ показан на рис. 74; на этом графике видно, что наибольшее искажение по амплитуде до $\gamma = 1$ достигает 10%. В этом случае казалось бы можно увеличить максимальное значение p_n до собственной частоты прибора. Но максимальное значение сдвига фаз $\varphi = \arctg \beta$ будет достигать 90° , а это недопустимо, если мы желаем регистрировать процесс без искажений. Даже при $\gamma_n = 1/2$ максимальная величина $\beta_n = 20/27$. Сдвиг по фазе, который прибор дает для высшей гармоники, будет $\approx 35-40^\circ$.

В некоторых случаях можно допустить такие искажения, но их следует иметь в виду. Следовательно, прибор, Q которого равно 0,9, имеет ограниченное применение даже в области частот около γ_n макс $\approx 1/2$.

Практически, при конструировании прибора приходится идти на компромисс между искажениями по фазе и искажениями

по амплитуде. Вот результаты примерных расчетов. Если выбрать γ_n макс $\approx 1/3$ и допустить небольшие искажения по фазе (не больше 6°), то при максимальных частотах прибор будет давать 25% искажения по амплитуде; добротность Q этого прибора ≈ 7 . Если же диапазон регистрируемых частот сократить до γ_n макс $\approx 1/4$ и допустить искажения по фазе в 6° , то искажение по амплитуде будет составлять $\approx 7\%$ (Q прибора ≈ 4).

Из этих примерных расчетов и из кривых рис. 59 и 61, *a* видно, что для получения хорошего прибора нужно стремиться к уменьшению диапазона измеряемых частот. Например, при γ_n макс $= 0,1$ добротность почти не влияет на амплитуду и немного больше влияет на фазу.

Изложенные результаты показывают, что Q нужно выбирать как можно больше. Однако этого делать нельзя по следующим, практически очень важным соображениям. При большом Q в приборе долго не будут затухать собственные колебания, которые совершенно искажат запись процесса. Поэтому следует выбрать малое Q (близкое к 1).

Практически очень трудно построить механический прибор, работающий в диапазоне до 10% собственной частоты, если необходимо записывать без искажений частоты выше 500—1000 гц.

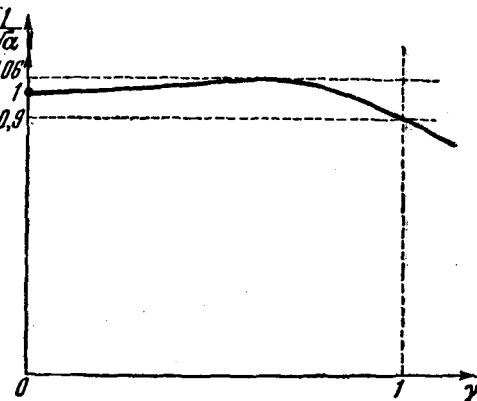


Рис. 74.

Наиболее совершенными с этой точки зрения являются пьезоэлектрические и емкостные приемники давления. Для пьезоэлектрических приемников легко получить собственную частоту в диапазоне радиочастот, так что для звукового диапазона ($\gamma_{n\text{ макс}} \ll 1$) такие приемники являются в этом смысле вполне совершенными и очень часто используются в качестве микрофонов. Но запись колебаний низкой частоты с помощью пьезоэлектрических приемников очень затруднительна из-за высоких требований к изоляции входной цепи усилительной лампы.

Небольшая чувствительность емкостных приемников давления, имеющих высокую собственную частоту, заставляет идти на уменьшение их собственной частоты; если прибор предназначен для регистрации низких частот, до 100—200 гц, то обычно частота выбирается ≈ 1000 гц.

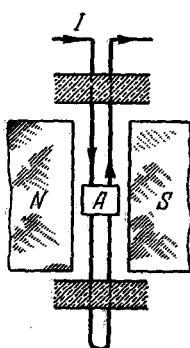


Рис. 75.

Самым важным и распространенным прибором этого типа является шлейфовый осциллограф. Шлейфовый осциллограф предназначен для оптической записи колебаний тока. Этот прибор сконструирован следующим образом: в магнитном поле натянута на изоляторах петля из тонкой прочной проволоки, к проволочкам приклеено небольшое зеркальце *A* (рис. 75). При пропускании тока через петлю одна из проволочек отклоняется вперед, а вторая — назад, зеркальце поворачивается. Угол поворота пропорционален силе тока. На зеркальце *A* падает световой луч, отклонение которого фиксируется на движущейся фотобумаге или на экране.

Собственная частота регистрирующего элемента прибора определяется толщиной нитей, допустимым напряжением материала нитей, массой и размерами зеркальца. Можно сделать собственную частоту порядка 10 000 гц. Но чувствительность такого шлейфа невелика. Поэтому обычно собственные частоты шлейфа лежат в диапазоне 2000—5000 гц. Для подбора соответствующей величины затухания колебаний зеркальца петлю с зеркальцем помещают в прозрачное масло, обладающее определенным коэффициентом вязкости.

Если при записи периодического процесса на движущуюся фотобумагу интересуются только формой кривой, показывающей протекание процесса, то можно снизить требования к повышению собственной частоты, о которых было сказано выше. Но при этом вся кривая будет сдвинута во времени на некоторый отрезок. Прежде всего отметим еще раз следующее: если сдвиг по фазе для всех частот будет равен нулю, то не будет искажений при записи

на бумагу, конечно, в случае отсутствия искажений по амплитуде. Форма записи и движение зеркальца во времени будут в точности соответствовать действительному процессу.

Если же сдвиг по фазе для всех частот одинаков, то будут искажения в форме записи процесса на фотобумаге и в движении

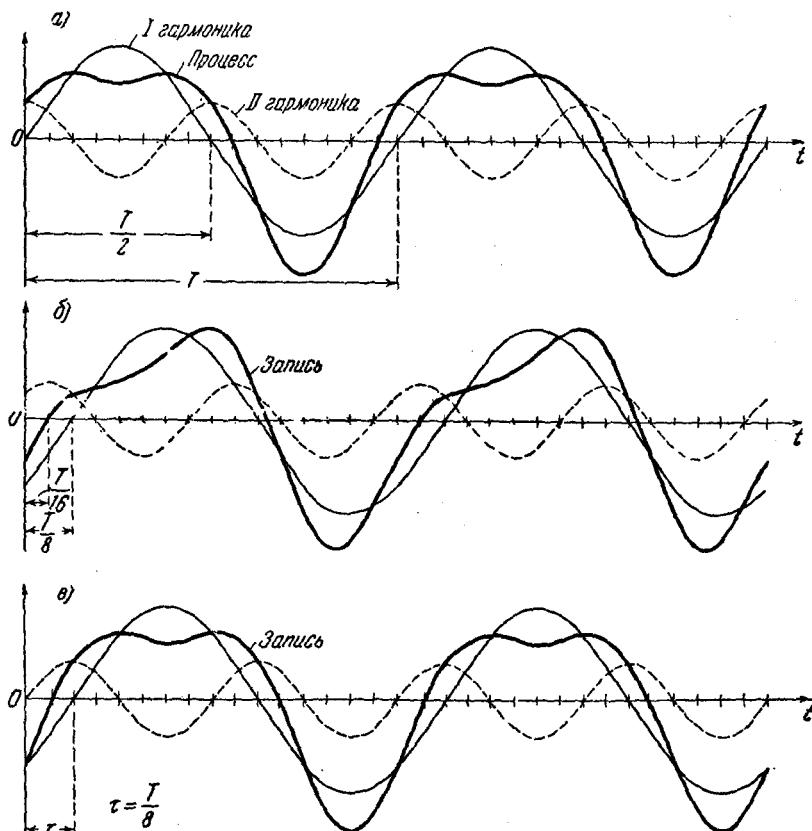


Рис. 76.

зеркальца. Это можно легко понять, если разобрать простой пример.

Пусть процесс состоит из двух синусоид, из которых одна имеет частоту в два раза более другой (рис. 76, а).

Допустим, что обе синусоиды сдвинуты по фазе на $\phi = \pi/4$; тогда запись и движение зеркальца во времени изобразятся на

рис. 76, б. Действительно, первая гармоника отстает по времени на

$$\frac{\Phi}{2\pi} T = \frac{\pi}{4 \cdot 2\pi} T = \frac{1}{8} T,$$

а вторая на

$$\frac{\Phi}{2\pi} \frac{T}{2} = \frac{1}{16} T,$$

и форма кривой, которую описывает отражение от зеркальца во времени, будет искажена.

Если же свойства прибора таковы, что в нем происходит сдвиг по фазе пропорционально частоте $\varphi_n = \text{const } p_n$, то не будет искажения в форме кривой. Действительно, запаздывание по времени каждой составляющей будет одинаково для всех частот

$$\tau = \frac{\varphi_n}{2\pi} T_n = \frac{\Phi_n}{2\pi} \frac{2\pi}{p_n} = \text{const.}$$

На рис. 76, в показана запись того же процесса при условии, что сдвиг по фазе равен

$$\varphi_n = \frac{T}{8} p_n.$$

Сдвиг по фазе первой гармоники

$$\varphi_1 = \frac{T}{8} \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4},$$

сдвиг по фазе второй гармоники

$$\varphi_2 = \frac{T}{8} \frac{4\pi}{T} = \frac{\pi}{2},$$

ибо $p_1 = \frac{2\pi}{T}$, а $p_2 = \frac{4\pi}{T}$. Следовательно, смещение во времени первой гармоники

$$\tau_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi} T = \frac{1}{8} T,$$

второй гармоники

$$\tau_2 = \frac{\varphi_2}{2\pi} \frac{T}{2} = \frac{1}{8} T.$$

Смещения будут одинаковы, и форма кривой будет неизменна, но сдвинута во времени на $\frac{1}{8}T$. При записи и сравнении различных процессов, состоящих из гармонических колебаний, это смещение не имеет никакого значения, если, конечно, все шлейфы имеют одинаковые ω и Q .

Уменьшая Q , можно среди семейства кривых зависимости φ от γ при различных Q подобрать такую, которая на некотором,

достаточно большом, начальном участке будет близка к прямой (рис. 61, а).

Для процессов, закон изменения которых во времени не может быть представлен синусоидами, нельзя дать в общем случае оценки качества воспроизведения процесса данным прибором. Но в каждом частном случае, зная примерно характер изменения величины, можно сделать такую оценку с помощью простых вычислений (20.1).

Обычно для анализа качества прибора пользуются рассмотрением кривой записи скачкообразного изменения измеряемой величины.

Допустим, сила *) (рис. 77, а) делает мгновенный скачок. Каковы будут отклонения x , если перед этим масса m была в покое (рис. 77, б)? Вычисление показаний $x(t)$ в этом случае не предстает затруднений. На рис. 77 показаны две кривые; одна — для системы без трения (при $Q \rightarrow \infty$). Эта кривая отчетливо показывает необходимость трения в приборе. Без трения стрелка прибора будет совершать колебания

с периодом $2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$ и первый взмах будет в два раза больше предельного отклонения F/k .

Элементарные вычисления показывают, что

$$x(t) = \frac{F}{k} \left[1 - \frac{\omega}{\omega_1} e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \varphi) \right],$$

где, как обычно,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \delta = \frac{\omega}{2Q},$$

$$\omega_1^2 = \omega^2 - \delta^2, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega_1}{\delta}.$$

Первое максимальное отклонение прибора наступит через отрезок времени t_1 после скачка силы

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_1},$$

*) Например, сила тока в шлейфовом осциллографе.

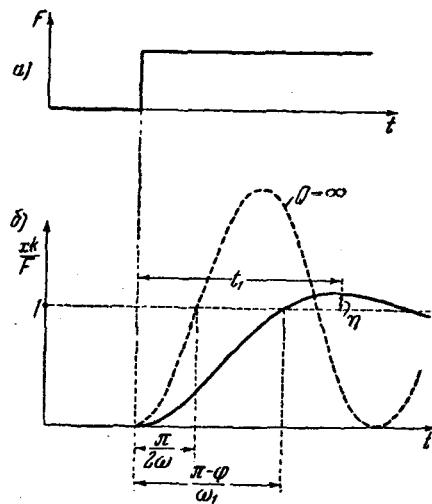


Рис. 77.

а максимальное превышение над отклонением F/k в процентах будет

$$\eta = 100e^{-\frac{\pi \delta}{\omega_1}} \% = 100e^{-\frac{\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}} \%.$$

На границе колебательного режима (при $Q = 1/2$) $\eta = 0$ и $t_1 = \infty$, так как $\omega_1 \rightarrow 0$. Отклонение прибора в этом случае только через очень большое время достигнет значения F/k .

Заметим, что при $Q = 1$ $\eta \approx 55\%$ и только при $Q = 5/8$ $\eta \approx 27\%$. Так что если нежелательно превышение над предельным значением F/k , то трение в приборе практически должно быть совсем немного меньше критического (соответствующего $Q = 0,5$). Но быстрота отклонения прибора, характеризуемая временем $t_1 = \frac{\pi}{\omega_1}$, при этом сильно возрастает. Анализ искажений показаний прибора при толчке измеряемой величины помогает определить искажения при записи непериодических процессов.

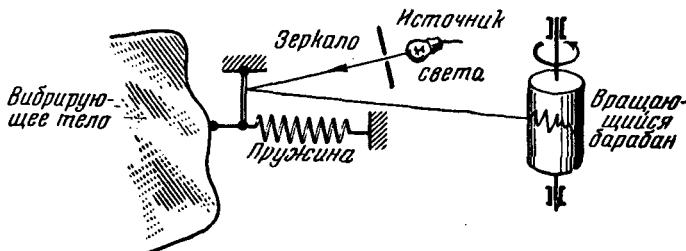


Рис. 78.

В заключение отметим некоторые, часто встречающиеся квазистатические приборы.

- 1) Шлейфовый осциллограф.
 - 2) Оптические и приставные вибрографы (схема которых показана на рис. 78); запись в приставных вибрографах иногда происходит прямо царапанием стрелки на движущейся восковой бумаге.
 - 3) Конденсаторные микрофоны.
 - 4) Индикаторы давления — пьезокварцевые, емкостные и мембранные.
 - 5) Акселерометры — приборы для измерения ускорений.
- Схематически принцип действия акселерометра состоит в следующем. В приборе имеется масса, закрепленная на пружине, свободный конец пружины присоединяется жестко к телу, ускорение которого желают измерить. Деформация пружины показывает ускорение, которое испытывает тело в направлении деформации пружины.

§ 21. Резонансные приборы

Резонансные приборы предназначены для определения амплитуды или частоты одного гармонического колебания, входящего в состав сложного колебания. Примерами приборов такого типа являются вибрационный гальванометр, волномер и т. п.

Показания вибрационного гальванометра пропорциональны амплитуде колебаний тока определенной частоты, на которую настроен прибор. В принципе каждый прибор этого типа представляется колебательной системой с большим значением Q , с острой резонансной кривой. Прибор совсем не «отвечает» на колебания других частот, на которые он не настроен.

Чувствительность такого прибора пропорциональна Q . Вибрационный гальванометр устроен примерно так же, как и шлейфовый осциллограф, только собственная частота крутильных колебаний зеркальца на нитях равна частоте измеряемого тока. Применение приборов такого типа пригодно для установившихся процессов.

Волномер представляет электрический колебательный контур с достаточно большим значением Q , имеющий конденсатор переменной емкости. Обычно угол поворота ручки конденсатора отсчитывается по лимбу; на шкале лимба указана частота, на которую настроен контур при данном положении ручки. Точность определения частоты зависит от ширины резонансной кривой. Так как половина ширины резонансной кривой $\Delta x = 1/Q$, то точность определения частоты волномера тем выше, чем больше добротность контура.

§ 22. Приборы, работающие по принципу сейсмографа

Для измерения вибраций в железнодорожных вагонах, на кораблях, на самолетах и т. п. необходимы особые приборы, которые называют «сейсмическими». Они все построены по тому же принципу, что и сейсмограф — прибор, регистрирующий колебания почвы.

В таких случаях требуется измерить колебания точки тела относительно «неподвижной» системы отсчета, не имея возможности «опираться» на нее. Поэтому задача прибора прежде всего заключается в том, чтобы создать тело, покоящееся относительно «неподвижной» системы отсчета, а затем уже измерить колебания какой-либо точки колеблющегося тела относительно него.

Эта задача принципиально решается «массой, подвешенной на пружине». Действительно, рассмотрим колебания массы

m на пружинке, прикрепленной к вибрирующему вертикально телу (рис. 79).

Пусть x_1 — координата точки вибрирующего тела относительно неподвижной системы отсчета, x_2 — координата отклонения массы m относительно вибрирующего тела. Точка подвески пружины и шкала, на которой отмечается x_2 , совершают движение, как и точка с координатой x_1 . Уравнение движения массы m относительно системы отсчета, связанной с x_1 , будет

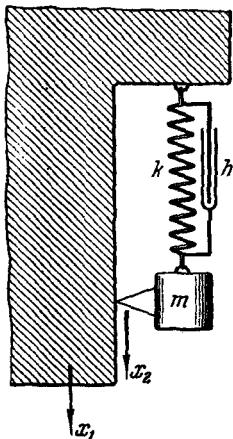


Рис. 79.

$$m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = -m\ddot{x}_1, \quad (22.1)$$

где к силам, действующим на массу, прибавлена сила инерции — $m\ddot{x}_1$.

Если колебания тела и точки подвески пружины совершаются по синусоидальному закону $x_1 = A \cos pt$, то уравнение движения (22.1) примет вид

$$m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = mA p^2 \cos pt.$$

Колебания массы m по формулам (14.4) и (15.14) состоят из собственных и вынужденных:

$$x_2 = De^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \alpha) + \frac{A\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}} \cos(pt - \varphi) \quad (22.2)$$

и

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{Q(1-\gamma^2)}.$$

Собственные колебания затухают через некоторое время после включения прибора. Амплитуда вынужденных колебаний равна

$$X_{20} = A \frac{\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}. \quad (22.3)$$

Отношение амплитуды колебаний к величине A в зависимости от γ было представлено на рис. 60.

При $\gamma \gg 1$ амплитуда колебаний X_{20} (22.3) будет почти равна A , и фаза φ близка к π . Если частота колебаний вибрирующего тела p много больше собственной частоты $\omega = \sqrt{k/m}$, то запись колебаний x_2 будет с точностью до знака равна колебаниям x_1 .

Колебания в этом случае можно представить себе так. Конец пружины, присоединенный к вибрирующему телу, движется с очень большой частотой, так что груз остается практически неподвижным и представляет собой «неподвижную систему отсчета», относительно которой мы и определяем колебания тела, смещения которого равны x_1 .

Для приборов сейсмического типа соотношение между собственной частотой и частотами записываемых колебаний обратно тому, которое имеет место для квазистатических приборов.

Вопрос о выборе Q решается почти так же, как и для квазистатических приборов. Для понижения границы записываемых без искажения частот желательно уменьшать Q , как видно по амплитудной кривой (см. рис. 60), а искажения по фазе уменьшаются при увеличении Q . Если записываемые процессы строго периодичны, то лучше увеличивать Q . Если же на процесс колебаний накладываются нерегулярные возмущения от толчков, как это всегда имеет место при записи вибраций, например на летящем самолете, то необходимо идти на искажение по фазе в нижней части диапазона записываемых частот и уменьшать Q до величин ~ 1 . В противном случае медленно затухающие собственные колебания груза m сильно искажат запись вибраций.

Амортизирующая подвеска приборов и других агрегатов к вибрирующему основанию, как это имеет место, например, на самолете, обычно конструируется на принципе сейсмографа. Прибор прикрепляется при помощи упругих прокладок так, чтобы собственная частота колебаний массы прибора на прокладках была мала по сравнению с частотами вибраций основания.

§ 23. Баллистические приборы

Баллистические приборы предназначены для определения импульса кратковременно действующих сил. Конечно, таким образом можно измерять не только силы, но и величины, закономерно связанные с импульсом, например, баллистический гальванометр измеряет количество заряда, прошедшего через сечение проводника.

На систему (рис. 80, а) действует внешняя сила F , изменение которой со временем показано на рис. 80, б. Если известно $F(t)$, то легко найти $x(t)$. Но во многих случаях нам не известен закон $F(t)$, да нам его и не нужно знать, нужно определить только импульс, равный заштрихованной площади рис. 80, б, или

$$\int_0^t F(t) dt.$$

Если бы сила F действовала на свободную массу m , то

$$\int_0^t F(t) dt = mv(t),$$

импульс был бы равен скорости тела с точностью до некоторого постоянного коэффициента. Но в нашей схеме на массу действуют еще силы пружины и трения. Однако если время действия силы τ очень мало по сравнению с собственным периодом T , периодом колебаний массы на пружине, а кроме того, τ так же мало по сравнению с «собственным временем» $\tau_0 = 1/\delta$, то можно приближенно считать, что в момент τ ма-

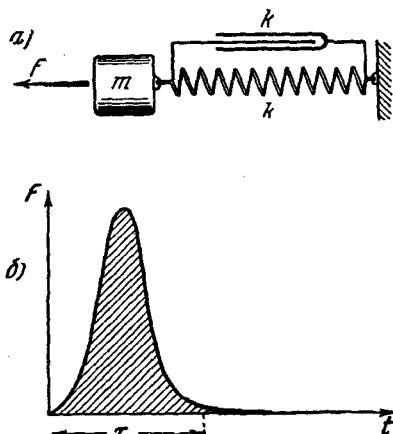


Рис. 80.

дают. Зная параметры системы, по этим колебаниям и определяют v_0 , а следовательно, и измеряемый импульс.

Величину максимальной ошибки, которую мы делаем, принимая начальную скорость v_0 пропорциональной импульсу, можно просто оценить. Пусть в течение времени τ (время удара) действует постоянная сила F (рис. 81). Определим движение массы без учета пружины и трения, а затем, зная движение, определим величину неучтенных нами силы пружины и силы трения.

Действительно, во время действия силы F в интервале $0 < t < \tau$ скорость $v = Ft/m$, смещение $x = Ft^2/2m$. Сила пружины при этом движении

$$kx = \frac{1}{2} \frac{k}{m} Ft^2 = \frac{1}{2} \omega^2 t^2 F = 2\pi^2 F \left(\frac{t}{T}\right)^2;$$

следовательно, во время удара сила пружины меньше

$$2\pi^2 F \left(\frac{\tau}{T}\right)^2. \quad (23.1)$$

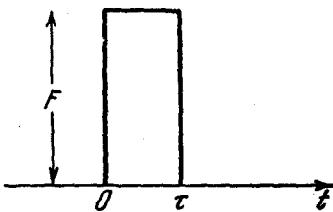


Рис. 81.

Сила трения $hv = \frac{h}{m} Ft = 2\delta Ft = 2F \frac{t}{\tau_0}$, поэтому она меньше $2F \frac{\tau}{\tau_0}$; (23.2)

вспомним, что $Q = \frac{\omega}{2\delta} = \pi \frac{\tau_0}{T}$, следовательно, сила трения меньше

$$2F \frac{\tau}{T} \frac{T}{\tau_0} = 2F \frac{\tau}{T} \frac{\pi}{Q}. \quad (23.3)$$

Например, при $\frac{\tau}{T} = 0,01$ и $Q = 10$ мы совершим ошибку не более $2\pi^2 (0,01)^2 \approx 0,002$, отбрасывая силу пружины, и не более $2 \cdot 0,01 \pi/Q \approx 0,006$, отбрасывая силу трения.

Таким образом, ошибка в определении v_0 в этом случае при $\tau/T = 0,01$ и $Q = 10$ на будет превышать 1%. Необходимо иметь в виду, что вычисленная таким способом ошибка будет больше, чем в действительности.

Величину v_0 обычно определяют по величине первого отклонения массы m от положения равновесия, т. е. по величине B (рис. 82).

По формуле (4.11) смещение массы после удара будет равно

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-\delta t} \cos \left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right),$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}. \quad (23.4)$$

Момент времени t_1 , в который масса дойдет до крайнего положения $x = B$, будет

$$t_1 = \frac{1}{\omega_1} \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{\delta} = \frac{1}{\omega_1} \operatorname{arctg} \sqrt{4Q^2 - 1},$$

где мы учитывали, что по формулам (15.3) и (23.4)

$$\omega_1^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right).$$

Величина

$$B = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-\delta t_1} \sin \alpha = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-\frac{\delta a}{\omega_1}} \sin \alpha, \quad (23.5)$$

где $a = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{\delta}$.

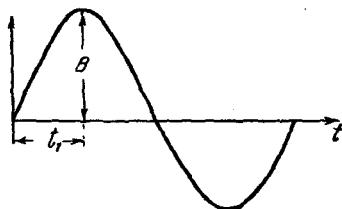


Рис. 82.

Все величины в этой формуле, кроме v_0 и B , являются постоянными, поэтому все это входит в константу прибора β , и рабочая формула имеет простой вид:

$$v_0 = \frac{1}{m} \int_0^{\tau} F dt = \beta B, \quad (23.6)$$

где по (23.5)

$$\beta = \frac{\omega_1}{\sin \alpha} e^{\frac{\delta \alpha}{\omega_1}}.$$

Таким образом, первое отклонение пропорционально импульсу. Константу β (или $m\beta$) обычно определяют соответствующей градуировкой прибора, но теоретические формулы необходимы при выборе и расчете прибора.

ГЛАВА 5

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

При анализе собственных и вынужденных колебаний часто применяют *спектральные методы*. Сущность этих методов заключается в том, что переменные физические величины заменяются их спектрами. И законы, связывающие изменения различных величин, представляются закономерными связями между спектрами этих же величин.

§ 24. Спектр периодической функции (ряд Фурье)

Любая периодическая функция $f(t)$, представляющая колебания силы или другой величины, может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье, т. е. представлена суммой гармонических колебаний с частотами, кратными $p = \frac{2\pi}{T}$, где T — период функции.

Допустим, что внешняя сила, действующая на систему, равна $f(t)$, тогда

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos npt + b_n \sin npt, \quad (24.1)$$

где

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos npt dt, \quad (24.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin npt dt, \quad (24.3)$$

$a_0/2$ — постоянная составляющая силы или среднее значение $f(t)$ за период.

Совокупность величин a_n и b_n — представляет *спектр* $f(t)$, а совокупность величин $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ — *амплитудный спектр* $f(t)$.

В соответствии с принципом суперпозиции вынужденные колебания смещений в механической системе по (15.14) и (15.21) будут

$$x(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(npt - \varphi_n) + b_n \sin(npt - \varphi_n)}{k \sqrt{(1 - \gamma_n^2)^2 + \frac{\gamma_n^2}{Q^2}}}, \quad (24.4)$$

где $\gamma_n = \frac{n\omega_0}{\omega_0}$, $\varphi_n = \arctg \frac{\gamma_n}{Q(1 - \gamma_n^2)}$ и ω_0 — собственная частота системы без затухания.

Конечно, такое выражение можно записать и для колебаний заряда на конденсаторе контура, если $f(t)$ — э. д. с., последовательно включенная в контур, и k в (24.4), заменить на $1/C$, где C — емкость конденсатора контура.

Для удобства вычислений лучше перейти к записи ряда Фурье в комплексной форме. Напомним, как делается этот переход. Подставляя в каждый член ряда (24.1)

$$\cos npt = \frac{1}{2} (e^{inp t} + e^{-inp t})$$

и

$$\sin npt = \frac{1}{2i} (e^{inp t} - e^{-inp t}),$$

получим:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{inp t}, \quad (24.5)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-inp t} dt. \quad (24.6)$$

Выражение для коэффициентов c_n (24.6) можно получить непосредственно из (24.5), умножая обе половины равенства на $e^{-inp t}$ и интегрируя почленно за период T .

Совокупность величин $|2 c_n|$ представляет амплитудный спектр $f(t)$, а совокупность аргументов c_n — фазовый спектр.

Выражение (24.4) для вынужденных колебаний смещения представляется еще проще в комплексной форме, в таком виде:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{c_n}{K(inp)} e^{inp t}, \quad (24.7)$$

где c_n — комплексные коэффициенты ряда Фурье внешней силы $f(t)$, а $K(ipr) = k - mn^2p^2 + i\hbar np$ — динамическая жесткость системы для частоты pr . При написании формулы (24.7) учитывались (14.11) и (14.12). Таким образом, спектр вынужденных колебаний $x(t)$ можно найти делением каждой комплексной амплитуды спектра внешней силы c_n на соответствующее ее частоте значение динамической жесткости системы $K(ipr)$. Несколько условно можно сказать так: спектр вынужденных колебаний «равен» спектру внешней силы, «деленному» на динамическую жесткость системы.

Например, если действует сила с амплитудным спектром, показанным на рис. 83, на систему, собственная частота которой совпадает с частотой четвертой гармоники силы, то спектр вынужденных колебаний $x(t)$ будет иметь вид, показанный на рис. 84.

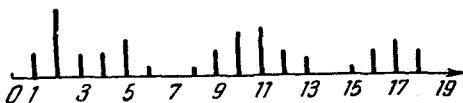


Рис. 83.

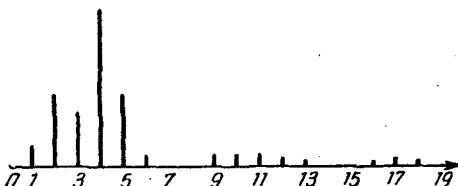


Рис. 84.

§ 25. Сплошной спектр

При изучении колебаний, вызываемых в системе любой внешней непериодической силой, можно воспользоваться представлением ее в виде *интеграла Фурье*. Как мы видели, возможность разложения периодической функции в ряд Фурье дает простые способы отыскания вынужденных колебаний под действием любой периодической силы. Применяя ряд Фурье, мы описывали только установившиеся вынужденные колебания и совсем не могли в таком виде представить непериодические силы и так называемые *переходные процессы, или процессы установления*.

Все эти процессы имеют *сплошной спектр*, в отличие от *дискретного спектра* периодических процессов.

В математике доказывается, что любое ограниченное по величине воздействие, начавшееся в момент t_1 и кончившееся в момент t_2 , может быть представлено интегралом Фурье в виде совокупности бесконечного числа гармонических колебаний с бесконечно малыми амплитудами. Точнее, любая функция $f(t)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = A, \quad (25.1)$$

где A — определенное число, может быть представлена так:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (25.2)$$

Функцию частоты $G(i\omega)$ называют *плотностью комплексного спектра* (спектр Фурье) функции $f(t)$. Комплексная функция $G(i\omega)$ вычисляется по формуле

$$G(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (25.3)$$

и может быть записана так:

$$G(i\omega) = G_0(\omega) e^{i\varphi(\omega)}; \quad (25.4)$$

тогда гармоническая составляющая интеграла (25.2) с частотой ω примет следующий вид:

$$\frac{1}{\pi} G_0(\omega) d\omega \cos [\omega t + \varphi(\omega)].$$

Это гармоническое колебание с амплитудой $\frac{d\omega}{\pi} G_0(\omega)$ и фазой $\varphi(\omega)$. $G_0(\omega)$ — функция частоты или *плотность амплитудного спектра*, $\varphi(\omega)$ — спектр фаз. Важно отметить, что спектр непериодической функции — *сплошной*, в отличие от *дискретного* (линейчатого) спектра (ряд Фурье).

Теперь поступим обычным путем. Если на механическую систему с одной степенью свободы действует гармоническая сила $\frac{1}{2\pi} G(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$, то в результате она вызовет такие колебания смещения:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{G(i\omega)}{K(i\omega)} e^{i\omega t} d\omega, \quad (25.5)$$

где $K(i\omega) = k - m\omega^2 + ih\omega$ — динамическая жесткость системы для колебаний частоты ω .

Согласно принципу суперпозиции колебания смещения $x(t)$ под действием силы $f(t)$ по (25.2) и (25.5) можно записать так:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(i\omega)}{K(i\omega)} e^{i\omega t} d\omega. \quad (25.6)$$

Такое представление колебаний будет вполне точным, если до момента t_1 (до включения силы $f(t)$) система была в покое.

Выражение (25.6) в свою очередь естественно рассматривать как представление $x(t)$ в виде интеграла Фурье, а функцию

$$B(i\omega) = \frac{G(i\omega)}{K(i\omega)} \quad (25.7)$$

— как спектральную плотность колебаний смещения $x(t)$, вызванных силой $f(t)$. Формулу (25.7) можно толковать так: *спектр колебаний $B(i\omega)$ смещения равен спектру внешней силы $G(i\omega)$, деленному на динамическую жесткость системы $K(i\omega)$* . Фактически соотношение между спектрами внешней силы и смещения такое же, как и между комплексными амплитудами этих величин (14.11), или же аналогично соотношению между их статическими значениями.

Последнее утверждение обобщается еще далее: можно показать, что при любых процессах в линейной системе соотношение между спектрами различных величин такое же, как между их комплексными амплитудами при вынужденных гармонических колебаниях. Колебательные (динамические) свойства системы представлены ее динамической жесткостью $K(i\omega)$ или другой аналогичной характеристикой системы *) (динамической массой, комплексным сопротивлением электрической цепи и т. п.).

Напомним, что все эти выводы (без особых оговорок) применяются для таких процессов, о которых известно, что при $t \rightarrow \pm \infty$ они обращаются в нуль.

Представляя непериодическую силу и колебания спектрами, мы уже не разделяем колебания на вынужденные и собственные: в формуле (25.6) $x(t)$ представляет весь неустановившийся (переходный) процесс целиком.

Применение спектров, комплексных амплитуд и частотных характеристик позволяет значительно упростить аппарат анализа колебаний. Так, например, можно символически записать обычную нашу задачу в виде блок-схемы, показанной на рис. 85. «Вход» $f(t)$ — внешняя сила, «выход» $x(t)$ — колебания смещения в системе, которая представлена частотной характеристикой $1/K(i\omega)$. То, что спектр $G(i\omega)$ однозначно представляет (или отображает) $f(t)$ и наоборот, далее будем обозначать следующим образом:

$$f(t) \div G(i\omega).$$

Поэтому рис. 85 следует понимать так: если $f(t) \div G(i\omega)$ и $x(t) \div B(i\omega)$, то между спектрами имеет место соотношение (25.7), или спектр выхода равен спектру входа, умноженному на частотную характеристику системы. Сложная физическая связь между величинами $x(t)$ и $f(t)$ представляется простым произведением.

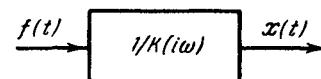


Рис. 85.

*) Все эти характеристики называют *частотными характеристиками* системы, поскольку они существенно зависят от частоты.

К составлению уравнения (25.7) можно подойти несколько иным, более общим путем, если нам известно дифференциальное уравнение системы.

Предполагаем, что интересующие нас величины являются ограниченными функциями t и их производные по времени обращаются в нуль при $t \rightarrow \pm \infty$. В практических задачах эти условия почти всегда соблюдаются. Все процессы колебаний начинаются в определенный момент и продолжаются конечное время.

Прежде всего отметим, что если $B(i\omega)$ — спектральная плотность $x(t)$, то произведение $i\omega B(i\omega)$ — спектральная плотность производной по времени от $x(t)$. Умножение спектра на $i\omega$ превращает его в спектр производной.

Действительно, по определению $\frac{dx}{dt} \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-i\omega t} dt$.

Возьмем по частям интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-i\omega t} dt = x(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega B(i\omega),$$

так как по условию $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} x(t) = 0$. Следовательно,

$$i\omega B(i\omega) \doteq \frac{dx}{dt}. \quad (25.8)$$

Если же все производные до $n - 1$ включительно также обращаются в нуль при $t \rightarrow \pm \infty$, то, очевидно:

$$(i\omega)^n B(i\omega) \doteq \frac{d^n x}{dt^n}. \quad (25.9)$$

Тогда можно истолковать задачу об отыскании колебаний в системе с одной степенью свободы под действием силы $f(t)$ следующим образом. Соответствующее уравнение

$$m \ddot{x} + h \dot{x} + kx = f(t) \quad (25.10)$$

умножаем почленно на $e^{-i\omega t}$ и интегрируем по t от $-\infty$ до $+\infty$, в результате получаем:

$$[(i\omega)^2 m + i\omega h + k] B(i\omega) = G(i\omega), \quad (25.11)$$

или уже известное нам соотношение (25.7) между спектрами $B(i\omega)$ и $G(i\omega)$, так как выражение в квадратных скобках есть динамическая жесткость $K(i\omega)$.

Переход от (25.10) к (25.11) можно описать так: заменим величины их спектральными плотностями, а $\frac{d^n}{dt^n}$ через $(i\omega)^n$, и тогда дифференциальное уравнение задачи превращается в соотношение между спектрами.

§ 26. Сравнение ряда и интеграла Фурье

Для выяснения разницы и сходства между рядом и интегралом Фурье рассмотрим на одном частном случае переход от ряда к интегралу, от линейного спектра к сплошному. Проследим изменения спектра периодически следующих друг за другом одинаковых импульсов синусоидальных колебаний при увеличении периода.

Допустим, что число колебаний в каждом импульсе равно N и период каждого колебания τ . Такая последовательность импульсов представляется периодической функцией $f(t)$ с периодом $2T$, показанной на рис. 86, а. Эта функция может быть разложена в ряд по синусам

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t, \quad (26.1)$$

где

$$b_n = \frac{E_0}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin pt \sin n\Omega t dt,$$

$\Omega = \frac{\pi}{T}$ — основная частота функции $f(t)$ и $p = \frac{2\pi}{\tau}$ — частота колебаний в импульсе.

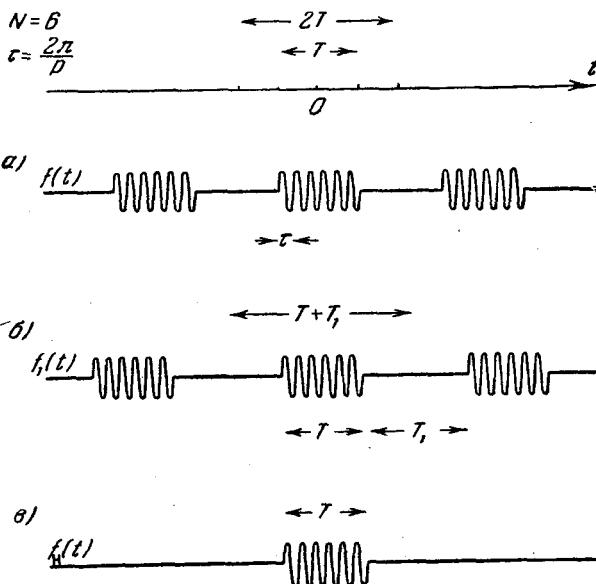


Рис. 86.

Далее будем рассматривать спектры других периодических функций $f_1(t)$, которые имеют интервалы T_1 между теми же синусоидальными импульсами (рис. 86, б). Проследим за изменением спектра при увеличении интервала T_1 между импульсами. Разложение в ряд будет иметь тот же вид (26.1), но

$$b_n = \frac{2E_0}{T + T_1} \int_{-T/2}^{T/2} \sin pt \sin n\Omega_1 t dt, \quad (26.2)$$

причем $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T + T_1}$ и b_n будут уменьшаться до нуля с увеличением T_1 до ∞ . При $T_1 \rightarrow \infty$ мы будем иметь дело с одним импульсом продолжительности T , т. е. с непериодической функцией $f_1(t)$ (рис. 86, а).

Допустим, что на рис. 87, а показан амплитудный спектр последовательности импульсов рис. 86, а, а на рис. 87, б — спектр $f_1(t)$, при $T_1 = 3T$. Действительно, по формуле (26.2) видно, что $\Omega_1 = \frac{2\pi}{4T} = \frac{\pi}{2T}$, расстояние между линиями уменьшилось вдвое:

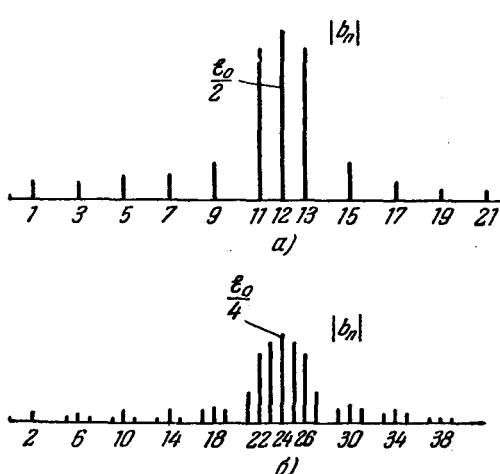


Рис. 87.

щаться в три, четыре,... раза относительно спектра на рис. 87, а, и величина амплитуд уменьшится в три, четыре, ... и т. д. раза. В пределе при $T_1 \rightarrow \infty$ спектральные линии сольются, и величина амплитуд будет стремиться к нулю.

Поэтому при сравнении спектров импульсов с различными интервалами удобней было бы сразу вычислить интеграл

$$b_n(T + T_1) = 2E_0 \int_{-T/2}^{T/2} \sin pt \sin n\Omega_1 t dt = 2E_0 \int_{-T/2}^{T/2} \sin pt \sin \omega t dt, \quad (26.3)$$

где $n\Omega_1 = \omega$ для всех значений Ω_1 . Простые вычисления показывают, что

$$b_n(T + T_1) = 2E_0 \left[\frac{\sin \frac{(p - \omega)T}{2}}{p - \omega} - \frac{\sin \frac{(p + \omega)T}{2}}{p + \omega} \right] = 4E_0 \frac{p \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 - p^2} \quad (26.4)$$

амплитуда на рис. 87, б вдвое меньше для тех составляющих, которые имеют одинаковую частоту в «старом» и «новом» спектрах, так как в формуле (26.2) интеграл для них будет иметь одно и то же значение, а множителем в первом случае (рис. 87, а) будет $1/T$, и во втором — $1/2T$. Те составляющие на рис. 87, б, которых не было на рис. 87, а, тоже будут иметь соответствующие амплитуды. Рассуждая аналогично, можно вычертить спектр при $T_1 = 5T$, при $T_1 = 7T$ и т. д. Спектральные линии будут сгущаться в три, четыре,... раза относительно спектра на рис. 87, а, и величина амплитуд уменьшится в три, четыре, ... и т. д. раза. В пределе при $T_1 \rightarrow \infty$ спектральные линии сольются, и величина амплитуд будет стремиться к нулю.

является функцией ω , при вычислении учитывали, что $pT = 2\pi N$. При $p = \omega$ величина $b_n(T + T_1) = \mathcal{E}_0 T$. Вид кривой, представляющей зависимость $b_n(T + T_1)$ от ω , показан на рис. 88. Заметим, что при $\omega = p \pm 2\pi m/T$ выражение (26.4) обращается в нуль, где m — целое число. С помощью кривой на рис. 88 можно легко вычислить искомые спектры *) рассмотренных ранее периодических функций $f_1(t)$. Для этого отмечаем на

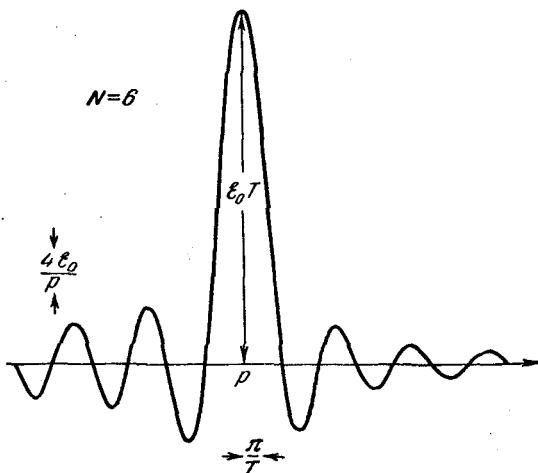


Рис. 88.

оси ω точки, соответствующие целому кратному основной частоты $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T + T_1}$, множим ординаты этих точек на величину $\frac{1}{T + T_1}$ и получаем спектр данной периодической функции $f_1(t)$.

Так как кривая $b_n(T + T_1)$ явно не зависит от T_1 , то она имеет смысл и при $T_1 \rightarrow \infty$, т. е. для непериодической функции, представляющей один синусоидальный импульс продолжительности T . В действительности $b_n(T + T_1)$ и представляет с точностью до множителя спектральную плотность этого импульса.

В этом можно убедиться, непосредственно вычисляя спектральную плотность $G(i\omega)$ одиночного синусоидального импульса по формуле (26.3). Запишем функцию спектральной плотности для одиночного импульса $f_1(t)$ (рис. 86, а):

$$G(i\omega) = \mathcal{E}_0 \int_{-T/2}^{T/2} \sin pte^{-i\omega t} dt. \quad (26.5)$$

*) Не только амплитуды гармонических составляющих, но и их фазы: 0 или π .

С другой стороны, выпишем комплексную амплитуду n -й составляющей спектра периодической функции $f_1(t)$:

$$c_n = \frac{\mathcal{E}_0}{T + T_1} \int_{-T/2}^{T/2} \sin pte^{-in\Omega_1 t} dt. \quad (26.6)$$

Сравнивая (26.5) и (26.6) видим, что

$$G(i\omega) = c_n(T + T_1) \quad (26.7)$$

при условии $\omega = n\Omega_1$, т. е. по спектральной плотности одиночного импульса синусоидальных колебаний (функции $f_1(t)$) всегда найдем спектр любой периодической функции $f_1(t)$.

Разделяя интеграл (26.6) на действительную и мнимую части, получаем:

$$c_n(T + T_1) = -\frac{i b_n}{2}(T + T_1). \quad (26.8)$$

Непосредственным вычислением интеграла (26.5), учитывая соотношение $pT = 2\pi N$, можно показать, что

$$G(i\omega) = 2i\mathcal{E}_0 \frac{p \sin \frac{\omega T}{2}}{p^2 - \omega^2}. \quad (26.9)$$

Это вполне согласуется с (26.4), (26.7) и (26.8).

На рис. 88 фактически вычерчена кривая $\frac{2}{i} G(i\omega)$, которая представляет спектральную плотность одиночного импульса, умноженную на $2/i$.

Добавим, что полученные результаты можно применить для импульса $\psi(t)$ любого вида продолжительности T . Сначала найдем его спектральную плотность $G(i\omega)$ и по ней, пользуясь формулой (26.7), построим амплитудный спектр $2|c_n|$ для каждой периодической функции $\psi_1(t)$, представляющей повторение через T_1 данного импульса *). Действительно, по (26.3)

$$G(i\omega) = \int_{-T/2}^{+T/2} \psi(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (26.10)$$

а по (26.6), для периодической функции $\psi_1(t)$ с периодом $T + T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1}$,

$$c_n = \frac{1}{T + T_1} \int_{-T/2}^{+T/2} \psi(t) e^{-in\Omega_1 t} dt. \quad (26.11)$$

Иными словами, формула (26.7) справедлива для импульса любой формы.

*.) При этом построении находится и фазовый спектр, ибо $\arg c_n$ равен сдвигу фаз n -й гармоники.

Например, для П-образного импульса (рис. 89, б) продолжительности T спектральная плотность

$$G(i\omega) = \mathcal{E}_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega t} dt = \mathcal{E}_0 T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}, \quad (26.12)$$

она показана на рис. 89, а. На этом же рисунке вертикальными линиями отложены величины спектральных компонент периодической функции $\psi_1(t)$, показанной на рис. 89, в. Легко

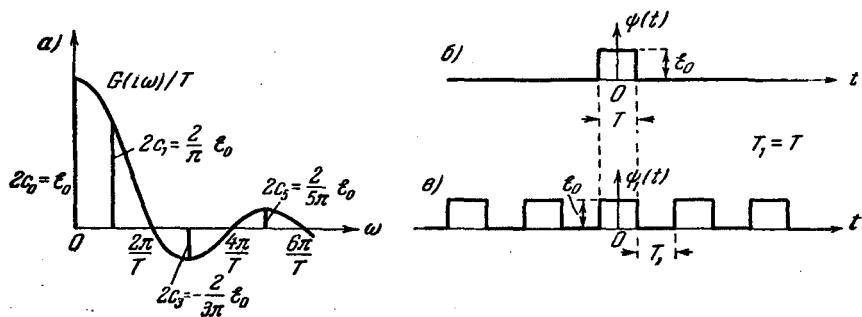


Рис. 89.

убедиться, что в этом случае все $b_n = 0$, поэтому амплитуды гармоник ряда будут:

$$a_n = 2c_n \text{ или } a_0 = \mathcal{E}_0, \quad a_1 = \frac{2\mathcal{E}_0}{\pi}, \quad a_3 = -\frac{2\mathcal{E}_0}{3\pi}, \quad a_5 = \frac{2\mathcal{E}_0}{5\pi} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, следует еще раз подчеркнуть, что спектральные линии периодических функций $\psi_1(t)$ с увеличением T_1 располагаются все гуще и уменьшаются, но, если так можно выразиться, форма «обводов» спектра остается неизменной, она задается спектральной плотностью одного импульса $G(i\omega) \div \psi(t)$. Зная $G(i\omega)$, легко находить спектральные составляющие ряда любой периодической функции $\psi_1(t)$.

Теперь можно наглядно показать, как ряд Фурье переходит в интеграл. Формулу (26.7) лучше переписать так:

$$c_n(T + T_1) = G(in\Omega_1) \quad (26.13)$$

при $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, где $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T + T_1}$.

С увеличением $T_1 \rightarrow \infty$, очевидно,

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} \psi_1(t) \rightarrow \psi(t), \quad \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \Omega_1 \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \lim_{T_1 \rightarrow \infty} c_n \rightarrow 0.$$

Поэтому ряд Фурье для $\psi_1(t)$ запишем следующим образом:

$$\psi_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{in\Omega_1 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Omega_1 G(in\Omega_1) e^{in\Omega_1 t}. \quad (26.14)$$

Обозначим $\Omega_1 = \Delta\omega$ и $n\Omega_1 = \omega$ и перейдем к пределу $T_1 \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \psi_1(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Delta\omega G(i\omega) e^{i\omega t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (26.15)$$

Конечно, это не строгий вывод формулы интеграла Фурье, но он очень наглядно показывает трансформацию ряда в интеграл, подтверждая ранее сказанное.

Укажем на важную общую связь между продолжительностью импульса T и «шириной» его спектра. Ширину сплошного спектра, как и ширину резонансной кривой, определяют условно. Например, для спектра прямоугольного импульса (на рис. 89, а) принимают за меру ширины спектра расстояние $\Delta\omega$ от максимума до ближайшего нуля, то же принимают и для спектра синусоидального импульса (рис. 88).

И в первом и во втором случае

$$\Delta\omega T = 2\pi. \quad (26.16)$$

Если взять интервал частот $\Delta\omega$ в герцах, или $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu$, то формула (26.16) примет простой запоминающийся вид:

$$\Delta\nu T = 1. \quad (26.17)$$

Оказывается, что это общее соотношение имеет место для спектров любых функций: короткие импульсы во времени имеют более расплывчатые спектры, и наоборот. Принимая во внимание условное определение ширины спектра, соотношение (26.17) формулируют так:

$$\Delta\nu T \geq 1. \quad (26.18)$$

Эта формула представляет один из основных законов квантовой механики: соотношение неопределенности, так как колебания и их спектры имеют первостепенное значение в явлениях, изучаемых в волновой или квантовой механике.

§ 27. Колебания, вызываемые ударом

Действие удара на колебательную систему при измерении импульса действующей силы мы рассматривали в § 23. Однако колебания, вызванные резким ударом по системе, очень удобно использовать и для отыскания движений, возникающих под действием любой силы. Об этом скажем далее, а предварительно уточним понятие «мгновенная» сила или «ударная» сила.

Часто называют импульсом «мгновенно» действующую силу, «мгновенно» означает, что время действия силы очень мало по сравнению с характерным для данной задачи интервалом времени. Поскольку в механике принято для силы $f(t)$ определять ее импульс как $\int_{-\infty}^t f(\xi) d\xi$, то будем называть кратковременно действующую силу *ударной*, а интеграл от этой силы за время ее действия — *импульсом*. Функцию времени, описывающую поведение ударной силы, будем называть *ударной функцией*.

В теории колебаний (и в физике) обычно употребляют *пределную ударную силу*, имеющую постоянный импульс P . Пусть ударная сила продолжительности τ имеет вид, показанный на рис. 90, и обозначается

$P\delta(t - t_0)$; до момента $t_0 - \tau/2$ сила равна нулю, при $t_0 - \tau/2 \leq t \leq t_0 + \tau/2$ сила равна P/τ , далее при $t > t_0 + \tau/2$ сила равна нулю. Очевидно, что импульс этой силы

$$\int_{-\infty}^{\infty} P\delta(t - t_0) dt = P$$

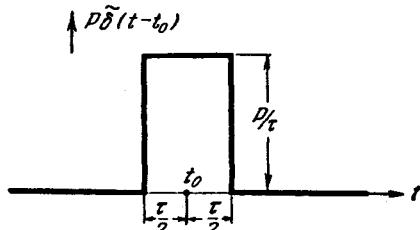


Рис. 90.

при любом τ . Теперь представим себе последовательность функций $P\delta(t - t_0)$ при все уменьшающейся величине τ . Назовем предельной ударной силой с импульсом P , действующей в момент t_0 , величину

$$P\delta(t - t_0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} P\delta(t - t_0), \quad (27.1)$$

очевидно, что величина силы $\rightarrow \infty$, а продолжительность действия $\rightarrow 0$. Если время действия силы τ достаточно мало по сравнению с соответствующим задаче интервалом времени, то при теоретическом анализе ее удобно представлять с помощью функции $\delta(t - t_0)$.

Функцию $\delta(t - t_0)$, представляющую предельную ударную силу единичного импульса в математике, называют «дельта-функцией». Она определяется так: при $t \neq t_0$

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad (27.2)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Из этого определения следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0), \quad (27.3)$$

где $f(t)$ — любая непрерывная в окрестности t_0 функция *). Заметим, что, по определению, $\delta(t - t_0) = \delta(t_0 - t)$.

Для теории очень важно, что амплитудный спектр предельной ударной силы $P\delta(t - t_0)$ имеет постоянную плотность P . Действительно, по определению спектра Фурье (25.3) и (27.3)

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = P e^{-i\omega t_0}. \quad (27.4)$$

Фазовый спектр равен $-\omega t_0$. Если ударная сила действует в момент $t_0 = 0$, то фаза всех составляющих спектра равна нулю. Все компоненты спектра имеют одинаковую амплитуду $d\omega P$ для всех частот **).

Поэтому, если на находящуюся в состоянии равновесия систему подействует сила $P\delta(t - t_0)$, или уравнение движения будет

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = P\delta(t - t_0), \quad (27.5)$$

при $x(t_0 - 0) = \dot{x}(t_0 - 0) = 0$ ***) , то движение после удара, которое обозначим через $Px_1(t - t_0)$, будет иметь по (27.7) и (27.4) следующий спектр:

$$A(i\omega) = \frac{P e^{-i\omega t_0}}{K(i\omega)}. \quad (27.6)$$

*) Из общего определения дельта-функции видно, что она может быть представлена пределом последовательности различных функций, одним частным видом таких функций является $\tilde{\delta}(t - t_0)$.

**) Заметим, что данное изложение недостаточно строгое, нужно доказать и обратное положение, что спектр с плотностью $P e^{-i\omega t_0}$ представляет функцию $P\delta(t - t_0)$. Ограничимся только указанием на то, что это доказано.

***) $x(t_0 - 0)$ означает $x(t_0 - \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$.

Иными словами, предельная ударная сила единичного импульса ($P = 1$), действующая в момент $t_0 = 0$, вызывает движение $x_1(t)$, спектр которого представляется частотной характеристикой системы $1/Z(i\omega)$, или обратной величиной динамической жесткости. Заметим, что плотность амплитудного спектра $Px_1(t - t_0)$ не зависит от момента удара t_0 . Только фазовый спектр зависит от t_0 . Таким образом, знание динамической жесткости (или частотной характеристики системы) позволяет без всяких вычислений определить плотность амплитудного спектра движений, возникающих в системе после удара.

Точно так же в электрическом контуре после действия ударной э. д. с. $P\delta(t - t_0)$

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{\int I dt}{C} = P\delta(t - t_0) \quad (27.7)$$

возникнут колебания тока, плотность спектра которых будет:

$$A(i\omega) = \frac{P e^{-i\omega t_0}}{Z(i\omega)}, \quad (27.8)$$

где $Z(i\omega) = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ — комплексное сопротивление контура. И аналогичным путем находится спектральная плотность для различных величин, колеблющихся после удара.

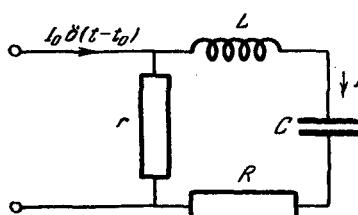


Рис. 91.

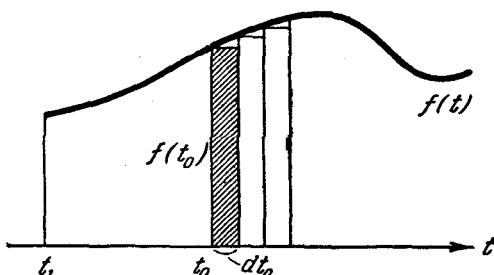


Рис. 92.

Возможны задачи и с ударным током. Например, колебания в контуре (рис. 91). Ток $I_0\delta(t - t_0)$ задан. Спектральная плотность тока I будет:

$$A(i\omega) = \frac{rI_0e^{-i\omega t_0}}{Z(i\omega) + r},$$

где

$$Z(i\omega) = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Движение $x_1(t - t_0)$, которое возникает после удара предельной силой с единичным импульсом, иногда называемое «откликом»,

является также определенной (временной) характеристикой свойств системы. С помощью «отклика» можно представить результат действия любой силы $f(t)$ на систему, если рассматривать эту силу как последовательность следующих друг за другом ударов.

Пусть в момент t_0 действует ударная сила, импульс которой равен $f(t_0) dt_0$ (рис. 92), очевидно, движение после этого удара будет:

$$f(t_0) dt_0 x_1(t - t_0). \quad (27.9)$$

Следовательно, если в момент $t = t_1$, после которого сила $f(t)$ начала действовать, система была в состоянии $x(t_1)$ и $\dot{x}(t_1)$, то движение $x(t)$ можно записать по принципу суперпозиции и (27.9) так:

$$x(t) = x_0(t - t_1) + \int_{t_1}^t f(t_0) x_1(t - t_0) dt_0, \quad (27.10)$$

где $x_0(t - t_1)$ — собственные колебания, определенные начальными условиями $x(t_1)$ и $\dot{x}(t_1)$.

Для нашего примера линейной системы с трением «отклик» по формуле (4.11) имеет вид:

$$x_1(t - t_0) = \frac{1}{m\omega_1} e^{-\frac{h}{2m}(t-t_0)} \sin \omega_1(t - t_0), \quad (27.11)$$

где, как обычно, $\omega_1^2 = \frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}$, так как скорость после удара силой единичного импульса равна $\frac{1}{m}$. Поэтому колебания под действием любой силы $f(t)$ по (27.10) можно записать так:

$$x(t) = x_0(t - t_1) + \frac{1}{m\omega_1} e^{-\frac{ht}{2m}} \int_{t_1}^t f(t_0) e^{\frac{ht_0}{2m}} \sin \omega_1(t - t_0) dt_0. \quad (27.12)$$

Эта формула представляет колебания в системе в виде суммы бесконечного числа бесконечно малых «откликов» (интеграла) и часто очень удобна для вычислений.

Полезно проследить, каким образом получено выражение (27.11) для «откликов» $x_1(t - t_0)$ в нашем примере. Допустим, что на покояющуюся систему действует ударная сила $P\delta(t - t_0)$ (см. рис. 90). Проинтегрируем уравнение движения за время τ

$$\int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} \left[m \frac{d}{dt}(\dot{x}) + h\dot{x} + kx \right] dt = P \int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} \delta(t - t_0) dt \quad (27.13)$$

и получаем

$$m\Delta_\tau(\dot{x}) + h\dot{x}_{cp}\tau + kx_{cp}\tau = P, \quad (27.14)$$

где $\Delta_\tau(\dot{x})$ — приращение скорости за время τ , $\dot{x}_{\text{ср}}$ и $x_{\text{ср}}$ — средние значения скорости и координаты за это же время. Переайдем в (27.14) к пределу $\tau \rightarrow 0$, считая, что $x_{\text{ср}}$ и $\dot{x}_{\text{ср}}$ имеют конечные значения, и получим:

$$\Delta_\tau(\dot{x}) = \frac{P}{m}. \quad (27.15)$$

Теперь покажем, что смещение x после удара не изменится или $x(t_0 + 0) = 0$. Действительно, замечая, что за время τ ускорение не может быть больше $P/m\tau$, можем записать:

$$x\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right) < \frac{P\tau^2}{2m}. \quad (27.16)$$

Переходя в (27.16) к пределу $\tau \rightarrow 0$, получаем $x(t_0 + 0) = 0$. Следовательно, после удара возникнут собственные колебания, определяемые начальными условиями $x(t_0 + 0) = 0$ и $\dot{x}(t_0 + 0) = -P/m$. Эти колебания записываем по формуле (4.11) и при $P = 1$ получаем (27.11).

В качестве примера по формуле (27.12) можно получить выражение для колебаний при резонансе в системе без затухания при $h = 0$. Действительно, пусть $f(t) = B \sin \omega t$ при $t \geq 0$; тогда

$$x = x_1 + \frac{B}{m\omega} \int_0^t \sin \omega \xi \sin \omega(t - \xi) d\xi = x_1 - \frac{1}{2} \frac{Bt}{m\omega} \cos \omega t,$$

где x_1 — собственные колебания и

$$f(t) = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Интересно отметить, что, как мы видели в (27.4), спектр дельта-функции представляется комплексной гармонической функцией частоты

$$\delta(t - t_0^\bullet) \div e^{-i\omega_0 t}, \quad (27.17)$$

так и наоборот,

$$e^{i\omega_0 t} \div 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (27.18)$$

плотность спектра комплексной гармонической функции времени $e^{i\omega_0 t}$ представляется дельта-функцией частоты ω , умноженной на 2π . Действительно, по формуле (27.3) и определению интеграла Фурье

$$e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega. \quad (27.19)$$

Используя это свойство дельта-функции, выражение для спектров интеграла и ряда Фурье удобно записывать одной формулой. Например, если

имеем непериодическую функцию $f(t) \div G(i\omega)$ и тригонометрический ряд $\sum_k c_k e^{i\omega_k t}$, плотность спектра функции

$$f(t) + \sum_k c_k e^{i\omega_k t} \quad (27.20)$$

можно записать так:

$$G(i\omega) + 2\pi \sum_k c_k \delta(\omega - \omega_k). \quad (27.21)$$

Это единое выражение представляет непрерывный и дискретный спектр, каждой компоненте дискретного спектра соответствует спектральная плотность в виде дельта-функции частоты. Рекомендуем убедиться, что

$$\cos \omega_0 t \div \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

и

$$\sin \omega_0 t \div i\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)].$$

§ 28. Преобразование Лапласа

При анализе колебаний методом Фурье мы все колебания разлагали на гармонические составляющие. Поэтому, представляя колебания интегралом Фурье, мы не отделяем вынужденных от собственных, они сливаются в один единый процесс.

Иногда колебания разделяют на *установившиеся* и *переходные*, с другой стороны, их можно разделять на *собственные* и *вынужденные*. Обычно при гармоническом воздействии вынужденные колебания совпадают с установившимися, а переходные процессы представляют сумму вынужденных и собственных колебаний. Однако при анализе колебаний в активных системах приходится рассматривать нарастающие колебания и не только периодические внешние воздействия. Если воздействия будут иметь форму затухающих или нарастающих колебаний, то так же можно говорить о вынужденных колебаниях, но они в этом случае уже не будут установившимися.

Можно обобщить понятие вынужденных колебаний на более широкий класс воздействий, это очень удобно сделать методом Лапласа, который в связи с теорией активных систем (усилителей, систем автоматического регулирования и т. п.) получил большое распространение в теории колебаний. При этом методе собственные и вынужденные колебания автоматически разделяются во всех случаях. Мы полагаем, что математические основы метода известны читателю, поэтому только кратко повторим необходимые для дальнейшего основы метода, без строгих доказательств.

Преобразование Лапласа применимо для относительно более широкого класса функций t , а именно функций, тождественно равных нулю при $t < 0$ и нарастающих вообще по модулю со временем не быстрее какой-то определенной функции $Ce^{\mu t}$, где C

и γ — известные постоянные действительные числа, например, как показано на рис. 93. Это можно записать так:

$$\begin{aligned} F(t) &\equiv 0 \quad \text{при } t < 0, \\ F(t) &= f(t) \quad \text{при } t \geq 0, \end{aligned} \quad (28.1)$$

причем $|F(t)| \leq Ce^{\gamma t}$.

Очевидно, что ограничения, накладываемые на $F(t)$, практически не существенны, функциями вида $F(t)$ можно представить все возможные в линейных системах процессы.

Спектром Лапласа или преобразованием Лапласа данной функции $F(t)$ называют, по определению,

$$\varphi(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad (28.2)$$

где p — комплексное число с условием

$$\operatorname{Re}(p) \geq \gamma.$$

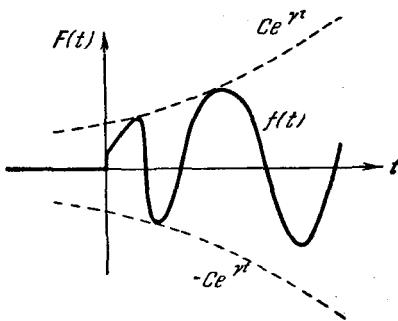


Рис. 93.

Преобразование (28.2) обозначают кратко так: $\varphi(p) = L[F(t)]$ или, так же как для преобразования Фурье,

$$\varphi(p) \doteq F(t). \quad (28.3)$$

Мы будем пользоваться и тем и другим обозначением. В выкладках можно писать и так:

$$\varphi(p) = L[f(t)] \quad \text{или} \quad \varphi(p) \doteq f(t),$$

имея в виду определение (28.1). Обратное преобразование Лапласа, определение функции $F(t)$ по заданному спектру, имеет вид

$$F(t) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\beta}^{a+i\beta} \varphi(p) e^{pt} dp, \quad (28.4)$$

где интеграл берется по прямой, параллельной мнимой оси и имеющей абсциссу a . Выражение (28.4) записывается кратко так:

$$F(t) = L^{-1}[\varphi(p)] \quad \text{или} \quad f(t) = L^{-1}[\varphi(p)]. \quad (28.5)$$

Преобразование Лапласа может быть объяснено некоторым изменением преобразования Фурье, но мы этим заниматься не

будем, отсылаем читателя к специальным курсам *). Но простое, наглядное толкование формулы (28.4) считаем очень полезным: фактически она представляет разложение любой функции $F(t)$ на бесконечную сумму бесконечно малых затухающих (или нарастающих) колебаний. Действительно, пусть

$$\varphi(p) = u(\delta, \omega) + iv(\delta, \omega), \quad (28.6)$$

причем $p = -\delta + i\omega$, полагая, что затухание δ и частота ω — действительные величины, p можно называть комплексной частотой **). Тогда подынтегральное выражение для интервалов от ω до $\omega + d\omega$ и от $-\omega$ до $-(\omega + d\omega)$ можно представить так:

$$[(u + iv)e^{(-\delta + i\omega)t} + (u - iv)e^{(-\delta - i\omega)t}] i d\omega, \quad (28.7)$$

ведь на пути интегрирования $dp = id\omega$, $-\delta = a = \text{const}$, $\varphi(p^*) = \varphi^*(p)$, если $f(t)$ — действительная величина.

Теперь интеграл (28.4) после очевидных преобразований можно переписать так:

$$\frac{e^{at}}{\pi} \int_0^\infty (u \cos \omega t - v \sin \omega t) d\omega, \quad (28.8)$$

иными словами, элементом этого интеграла будет затухающее (или нарастающее) колебание с показателем a , «амплитудой» $\frac{1}{\pi} \sqrt{u^2 + v^2} d\omega$ и «фазой» $\vartheta(\omega) = \arctg \frac{v}{u}$. Заметим, кстати, что $\varphi(p) = \varphi_0(\delta, \omega) e^{ie(\delta, \omega)}$, где $\varphi_0 = \sqrt{u^2 + v^2}$. Следует отметить, что a — до известной степени произвольная величина, на нее наложено только одно условие $a \geq \gamma$, а не меньше чем показатель нарастания γ . Этим произволом можно воспользоваться и вести разложение при подходящем значении a , в частности, оно может быть равно нулю ($a = 0$). В этом случае преобразование Лапласа совпадает с преобразованием Фурье. (Только не следует забывать при сравнении, что имеются в виду преобразование функций, равных нулю при $t < 0$ и стремящихся соответствующим образом к нулю при $t \rightarrow \infty$.)

Для приложений важно следующее: если

$$L[f(t)] = \varphi(p),$$

то

$$L\left(\frac{df}{dt}\right) = p\varphi(p) - f(+0), \quad (28.9)$$

*) Например, А. И. Лурье, Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, Гостехиздат, 1951. М. Гардин и Дж. Барнес, Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными, Физматгиз, 1961. Г. Дёч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Физматгиз, 1958.

**) Мы ради сокращения будем далее вместо комплексной частоты $p = -\delta + i\omega$ писать «частота».

где $f(+0)$ представляет $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon)$ при $\epsilon > 0$ или предел функции $f(t)$ в нуле «сверху». Доказательство формулы (28.9) получается интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} L\left(\frac{df}{dt}\right) &= \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = f(t)e^{-pt} \Big|_{+0}^\infty + p \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = \\ &= -f(+0) + p\Phi(p), \end{aligned}$$

учитывая, что $f(t)e^{-pt}$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, так как $Re(p) = \alpha > \gamma$.

Спектр производной равен спектру функции, умноженному на p минус значение функции при нуле с плюсом. Отличие от аналогичной формулы для спектра Фурье в том, что спектр производной явно зависит от начального значения самой функции.

Путем многократного применения формулы (28.9) можно показать, что

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) &= p^n \Phi(p) - p^{n-1} f(+0) - \\ &\quad - p^{n-2} f'(+0) - \dots - p f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0), \quad (28.10) \end{aligned}$$

спектр n -й производной зависит от начальных значений всех производных $f(t)$ до $n-1$ включительно *).

Теперь стандартная задача о колебаниях в простейшей линейной системе под действием любой силы $f(t)$ при начальных условиях $x(0)$ и $\dot{x}(0)$, описываемая уравнением

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = f(t),$$

может быть представлена таким соотношением между спектрами:

$$(mp^2 + hp + k)\Phi(p) = \psi(p) + (mp + h)x(0) + m\dot{x}(0),$$

где $\Phi(p) = L(x)$ и $\psi(p) = L(f)$. Это равенство получается преобразованием Лапласа обеих сторон основного дифференциального уравнения с учетом формулы (28.10) и начальных условий для x и \dot{x} . Следовательно, спектр движений в системе можно представить так:

$$\Phi(p) = \frac{\psi(p)}{mp^2 + hp + k} + \frac{(mp + h)x(0) + m\dot{x}(0)}{mp^2 + hp + k}. \quad (28.11)$$

*). При применении этой формулы естественно предполагается, что $f(t)$ и все производные $n-1$ непрерывны при $t > 0$. Далее, ради сокращения формул мы будем писать для начальных значений функции и производных 0 в аргументе вместо $+0$, подразумевая предельное значение при нуле с плюсом.

Далее требуется по спектру определить движение в системе $x(t)$, или произвести обратное преобразование Лапласа. В некоторых проблемах достаточно ограничиться рассмотрением только спектра (28.11).

Напомним основы общей теории определения функции $x(t)$ по ее спектру $\varphi(p)$. Применяя теорию вычетов для вычисления интеграла (28.4) можно показать *), что

$$x(t) = \sum_j \frac{1}{(m_j - 1)!} \left\{ \frac{d^{m_j - 1}}{dp^{m_j - 1}} [\varphi(p)(p - p_j)^{m_j} e^{pt}] \right\}_{p=p_j}, \quad (28.12)$$

где сумма берется по всем полюсам функции спектра $\varphi(p)$. Формула написана в предположении, что полюс $\varphi(p)$ в точке p_j имеет порядок m_j .

Если спектр $\varphi(p)$ имеет полюсы только первого порядка, то (28.12) примет простой вид:

$$x(t) = \sum_j [\varphi(p)(p - p_j)]_{p=p_j} e^{p_j t}. \quad (28.13)$$

Это выражение означает, что колебание $x(t)$ состоит из суммы постоянных (по времени) членов, каждый из которых умножен на $e^{p_j t}$. Физически полюсы спектра $\varphi(p)$ есть «частоты» колебаний $x(t)$.

Практически часто встречается случай, когда $\varphi(p)$ может быть разложена на сумму простых дробей

$$\varphi(p) = \sum_j \frac{a_j}{p - p_j},$$

по (28.13) тогда

$$x(t) = \sum_j a_j e^{p_j t}.$$

Движение $x(t)$ есть сумма «колебаний» с комплексными частотами p_j и «амплитудами» a_j . Иначе, $x(t)$ состоит из суммы членов, содержащих «колебательные множители»: $e^{\delta_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_j)$, где $p_j = \delta_j + i\omega_j$ при $\delta_j = 0$ гармонические, при $\omega_j = 0$ экспоненциальные.

Если спектр $\varphi(p)$ имеет полюсы более высокого порядка, то в решении по (28.12) будут иметь место полиномы по t , умноженные на e^{pt} . Например, если в точке p_k спектр $\varphi(p)$ имеет полюс третьего порядка, а остальные полюсы p_j — первого порядка. Тогда

$$\varphi(p) = \sum_j \frac{a_j}{p - p_j} + \frac{b_1}{p - p_k} + \frac{b_2}{(p - p_k)^2} + \frac{b_3}{(p - p_k)^3}, \quad (28.14)$$

*) См., например, И. И. П р и в а л о в, Введение в теорию функций комплексного переменного, Физматгиз, 1960.

и в точке p_k вторая производная по p от $\varphi(p)$ $(p - p_k)^3 e^{pt}$ будет:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dp^2} \left\{ \left[\sum_j \frac{a_j (p - p_k)^3}{p - p_j} + b_1 (p - p_k)^2 + b_2 (p - p_k) + b_3 \right] e^{pt} \right\}_{p=p_k} = \\ = 2b_1 e^{p_k t} + 2t b_2 e^{p_k t} + t^2 b_3 e^{p_k t} = (2b_1 + 2b_2 t + b_3 t^2) e^{p_k t}. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле (28.12)

$$x(t) = \sum_j a_j e^{p_j t} + (b_1 + b_2 t + \frac{1}{2} b_3 t^2) e^{p_k t}. \quad (28.15)$$

Последний член в формуле для $x(t)$, соответствующий полюсу высокого порядка $\varphi(p)$, имеет более сложный вид: произведение «колебательного» множителя $e^{p_k t}$ на полином от t , порядок которого на единицу меньше порядка полюса.

Можно еще и так записать общую формулу, например, для полюса третьего порядка. Пусть $\varphi(p) (p - p_k)^3 = D(p)$; тогда член, соответствующий этому полюсу, будет иметь вид:

$$\frac{1}{2} e^{p_k t} \{ D''(p_k) + 2t D'(p_k) + t^2 D(p_k) \},$$

где

$$D'(p_k) = \left[\frac{d}{dp} D \right]_{p=p_k}$$

и

$$D''(p_k) = \left[\frac{d^2}{dp^2} D \right]_{p=p_k}.$$

Вернемся к основной задаче. Допустим, что спектр внешней силы $\psi(p)$ имеет только простые полюсы в точках p_j и p_j^* ; это означает, что сила

$$f(t) = \sum_j a_j e^{p_j t} + a_j^* e^{p_j^* t} = \sum_j 2a_{j0} e^{-\delta_j t} \cos(\omega_j t + \varepsilon_j), \quad (28.16)$$

где $p_j = -\delta_j + i\omega_j$ и $a_j = a_{j0} e^{i\varepsilon_j}$. Не следует забывать, что $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$, нет воздействия до момента $t = 0$. После $t = 0$ при $t \geq 0$ внешняя сила $f(t)$ представляет сумму затухающих или нарастающих (и в частном случае при $\delta_j = 0$ незатухающих) колебаний, гармонический множитель которых имеет частоту ω_j .

Таким образом, широкий класс воздействий, состоящих из суммы «затухающих» колебаний, представляется спектром с простыми полюсами в комплексно-сопряженных точках плоскости p , абсциссой которых является коэффициент «затухания» $(-\delta_j)$ и ординатой — частота ω_j . Полюсы, представляющие затухающие

колебания ($\delta > 0$), лежат в левой половине плоскости p , представляющие нарастающие колебания ($\delta < 0$) — в правой, а чисто гармонические колебания ($\delta = 0$) — на мнимой оси.

Здесь уместно заметить, что полюсы спектра Лапласа, лежащие на мнимой оси, представляют не строго гармонический процесс, но процесс, который при $t \geq 0$ имеет вид гармонической функции, а при $t < 0$ тождественно равен нулю. Так же нужно подчеркнуть, что прямая, параллельная мнимой оси, вдоль которой мы суммируем $\psi(p) e^{pt} dp$ — спектральные составляющие $f(t)$, всегда лежит справа от полюсов спектра $\psi(p)$, справа от точек, представляющих комплексные частоты компонент $f(t)$. Поэтому любые затухающие колебания можно разложить в спектр, составляющими которого будут незатухающие колебания, таким же образом гармонические колебания можно разложить в спектр, составляющими которого будут нарастающие колебания, но не наоборот, нельзя разложить незатухающие колебания в спектр, составляющими которого будут затухающие колебания. А затухающие колебания могут быть разложены в спектр с нарастающими со временем составляющими.

Спектр внешней силы имеет такой вид:

$$\psi(p) = \sum_j \frac{a_j}{p - p_j}, \quad (28.17)$$

подставляя его в (28.11), получаем спектр $x(t)$:

$$\Phi(p) = \sum_j \frac{a_j}{(p - p_j)(mp^2 + hp + k)} + \frac{(mp + h)x(0) + mx(0)}{mp^2 + hp + k}. \quad (28.18)$$

Полином в знаменателях разложим на множители:

$$mp^2 + hp + k = m(p - \lambda)(p - \lambda^*) = m[p^2 - (\lambda + \lambda^*)p + \lambda\lambda^*].$$

Очевидно, что $\lambda + \lambda^* = -\frac{h}{m}$, $\lambda\lambda^* = \frac{k}{m}$. Величину $\lambda = -\delta_0 + i\omega_0$ называют комплексной собственной частотой, $2\delta_0 = \frac{h}{m}$ и $\delta_0^2 + \omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Общее решение $x(t)$, или обращение спектра (28.18), будет иметь по формуле (28.13) такую, на первый взгляд громоздкую, форму:

$$\begin{aligned} x(t) = & \sum_j \frac{a_j}{mp_j^2 + hp_j + k} e^{p_j t} + \frac{e^{\lambda t}}{m(\lambda - \lambda^*)} \sum_j \frac{a_j}{\lambda - p_j} + \\ & + \frac{e^{\lambda^* t}}{m(\lambda^* - \lambda)} \sum_j \frac{a_j}{\lambda^* - p_j} + \frac{e^{\lambda t}(m\lambda + h)}{m(\lambda - \lambda^*)} x(0) + \\ & + \frac{e^{\lambda^* t}(m\lambda^* + h)}{m(\lambda^* - \lambda)} x(0) + \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \lambda^*} \dot{x}(0) + \frac{e^{\lambda^* t}}{\lambda^* - \lambda} \dot{x}(0). \end{aligned} \quad (28.19)$$

Первая сумма в $x(t)$ представляет «вынужденные колебания», каждый член этой суммы изменяется со временем по закону $e^{p_j t}$,

так же как соответствующий член во внешней силе, только «амплитуда» колебаний равна «амплитуде» внешней силы a_j , умноженной на соответствующий «резонансный» множитель

$$A(p_j) = \frac{1}{mp_j^3 + hp_j + k}, \quad (28.20)$$

который представляет значение величины $A(p)$ или *спектральной характеристики системы* в точке p_j .

Следующие члены представляют собственные колебания с частотами λ и λ^* — собственными комплексными частотами. Если величина $\sum_j \frac{a_j}{\lambda - p_j} = Be^{i\varphi}$, то второй и третий члены (28.19) можно записать так:

$$\frac{1}{m\omega_0} Be^{-\delta_0 t} \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (28.21)$$

амплитуда этих собственных колебаний B зависит и от внешней силы — эти колебания можно назвать «сопровождающими» собственными колебаниями, вызванными включением внешней силы при $t = 0$.

Остальные четыре члена представляют обычные собственные колебания, возникающие вследствие того, что при $t = 0$ наша система не находилась в состоянии равновесия. Если $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$, то эти собственные колебания равны нулю, остаются только собственные колебания вида (28.21).

Таким образом, можно подвести итог: полюсы спектра колебаний $\Phi(p)$ (28.18) являются либо «частотами» внешней силы p_j , либо собственными «частотами» λ и λ^* , и решения, соответствующие первой группе полюсов $\Phi(p)$ (в точках p_j), представляют вынужденные колебания, соответствующие второй группе полюсов (в точках λ и λ^*) — собственные. Заметим, что термин «установившиеся» вместо «вынужденные» здесь уже, очевидно, нецелесообразно применять, ибо движения затухающих или нарастающих колебаний, соответствующие p_j (при p_j комплексном или действительном), нельзя назвать установившимися. Применяя метод Лапласа, мы имеем возможность «автоматически» отделить вынужденные колебания от собственных.

В том же случае, когда все p_j чисто мнимые, внешняя сила (при $t > 0$) представляет сумму гармонических колебаний — представляет установившийся процесс; тогда вынужденные колебания [первая сумма в (28.19)] будут установившимися, а весь процесс при $0 < t < \frac{n}{\delta_0}$ будет переходным, где n — некоторое число. Собственные колебания, затухающие по закону $e^{-\delta_0 t}$, будут иметь заметную величину только при t , близком к нулю;

так, например, при $t = \frac{n}{\delta_0}$ они уменьшаются в e^n раз и при $n \gg 1$ будут ничтожно малы по сравнению с вынужденными, и далее весь процесс $x(t)$ можно считать установившимся. Практически часто достаточно считать $n = 3$.

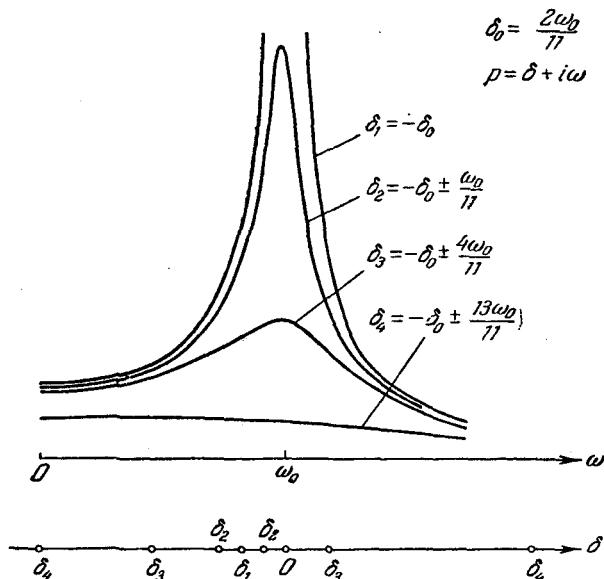


Рис. 94.

При указанном разделении собственных и вынужденных колебаний, возникающих под действием силы вида

$$f(t) = a_j e^{p_j t} + a_j^* e^{p_j^* t} = 2 a_{j0} e^{\delta t} \cos(\omega t + \varepsilon),$$

где $a_j = a_{j0} e^{i\varepsilon}$ и $p_j = \delta + i\omega$, можно несколько обобщить и уточнить обычное определение резонанса. До сих пор в курсе шла речь о резонансе только в случае гармонического воздействия, теперь уже можно говорить о резонансе при силах любого вида — затухающих и нарастающих. Ради сокращения будем далее условно называть $a_j e^{p_j t}$ «силой», помня при этом, что действительная сила представляется суммой $a_j e^{p_j t} + a_j^* e^{p_j^* t}$.

Пользуясь обозначениями формул (28.19) и (28.20), вынужденное колебание, вызванное «силой» $a_j e^{p_j t}$, можно записать так:

$$a_j A(p_j) e^{p_j t},$$

где

$$A(p) = A_0(\delta, \omega) e^{i\varepsilon(\omega, \delta)}, \quad (28.22)$$

Поэтому резонансную зависимость «амплитуды» колебаний дает величина

$$A_0(\delta, \omega)^*), \quad (28.23)$$

которая является функцией двух переменных и ее можно представить поверхностью над плоскостью δ, ω , или можно считать,

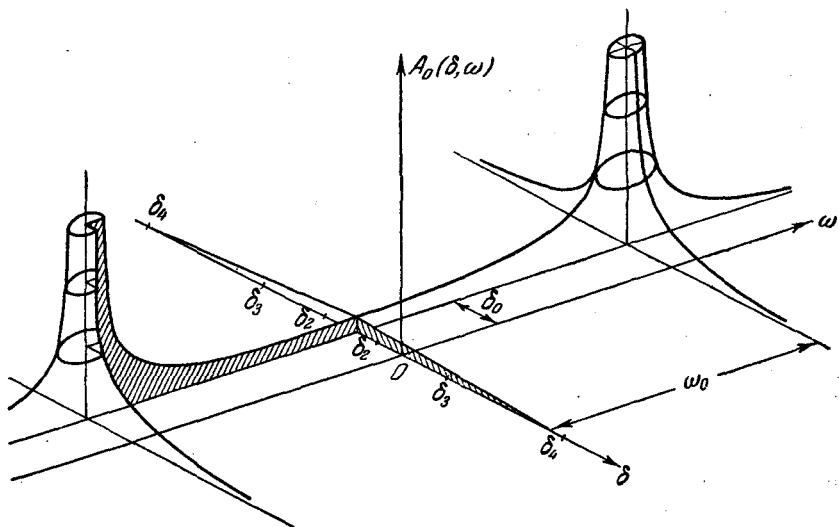


Рис. 95.

что δ параметр, а ω — независимое переменное ($0 \leq \omega \leq \infty$), тогда $A_0(\delta, \omega)$ представляется целым семейством кривых, которые можно назвать «резонансными кривыми», но лучше было бы называть кривыми резонансных множителей.

На рис. 94 показано несколько таких резонансных кривых для системы, имеющей собственные частоты $\lambda = -\delta_0 + i\omega_0$ и $\lambda^* = -\delta_0 - i\omega_0$. На рис. 95 схематически изображена поверхность $A_0(\delta, \omega)$ для этой же системы. Кривая δ_1 , показанная на рис. 94, совпадает с обычной резонансной кривой смещений (рис. 59) для системы без затухания, здесь же эта кривая показывает зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты при возбуждении силой, имеющей затухание, равное собственному затуханию δ_0 . Увеличение амплитуды A_0 до бесконечности при приближении ω к ω_0 не представляет колебаний с очень большими амплитудами при больших значениях t , так как действительное

* Так как колебания вообще негармонические, то название «амплитуда» для (28.23) следует понимать условно.

движение в этом случае имеет отклонение $A_0 e^{-\delta_0 t}$, которое со временем затухает и стремится к нулю при любом A_0 . При точном резонансе (при $\omega = \omega_0$) движение системы также будет ограничено и стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Действительно, в этом случае $p_j = \lambda$ и $\varphi(p)$ (28.18) имеет два полюса второго порядка в первой сумме и соответствующее им решение по (28.12) примет такой вид:

$$(b_2 t + b_1) e^{\lambda t} + (b_2^* t + b_1^*) e^{\lambda^* t}, \quad (28.24)$$

это выражение можно переписать так:

$$e^{-\delta_0 t} (a t + b) \sin(\omega_0 t + \kappa). \quad (28.25)$$

Естественно, что, какое бы значение ни принимали константы a и b , выражение (28.25) не будет стремиться к ∞ при $t \rightarrow \infty$, множитель $e^{-\delta_0 t}$ всегда будет достаточно мал.

Кривая резонансного множителя, обозначенная δ_2 на рис. 94, соответствует затухающим колебаниям с коэффициентами затухания: $\omega_0/11$ и $3\omega_0/11$. Кривые δ_3 и δ_4 на рис. 94 представляют резонансные множители для затухающих и нарастающих вынужденных колебаний, нарастающие колебания имеют коэффициенты нарастания $2\omega_0/11$ и ω_0 , а затухающие — коэффициенты затухания $6\omega_0/11$ и $15\omega_0/11$, соответственно кривым δ_3 и δ_4 . На рис. 94 и 95 отмечено положение тех сечений комплексной плоскости p по оси δ , для которых вычислены резонансные кривые δ_2 , δ_3 , δ_4 . Очевидно, что резонансные кривые одинаковы для сечений, находящихся на одинаковых расстояниях от прямой, проходящей через полюсы λ , λ^* . Как можно видеть, все колебательные свойства системы определяет функция $A(p)$, являющаяся обратной величиной динамической жесткости системы $K(p)$ (14.12). Поэтому $A(p)$ называют *спектральной характеристикой* системы: полюсы ее — собственные частоты, модуль — «амплитуды» вынужденных колебаний.

Заметим, что семейство резонансных кривых (резонансных множителей), обозначенных на рис. 94, похоже на семейство обычных резонансных кривых для смещения в системах с различным затуханием (рис. 59) и одинаковым k/m . Каждое из этих двух семейств представляет различные сечения поверхности $A_0(\delta, \omega)$, показанной на рис. 95, и физически различные случаи: в первом показаны резонансные множители по ω при различных затуханиях воздействия для одной системы (δ_0, ω_0) , во втором — резонансные кривые по ω при гармоническом воздействии на различные системы, имеющие различное затухание δ_0 и ω_0 , при условии $\delta_0^2 + \omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Все рассмотренные кривые только множителем отличаются от различных сечений поверхности спектра Лапласа для функции $e^{-\delta_0 t} \sin \omega_0 t$.

Действительно,

$$A(p) = \frac{1}{mp^2 + hp + k} \div \frac{1}{m\omega_0} e^{-\delta_0 t} \sin \omega_0 t,$$

где $k = m(\omega_0^2 + \delta_0^2)$ и $2\delta_0 m = h$ (см. далее (29.7)).

§ 29. Спектры Лапласа некоторых важных функций

Сначала отметим одну, практическую важную особенность спектров. Если $f(t) \div \varphi(p)$, то спектр $f(t - \tau)$ «смещенной» на τ той же функции равен $\varphi(p) e^{-pt}$. Определение функции $f(t - \tau)$ можно пояснить рис. 96.

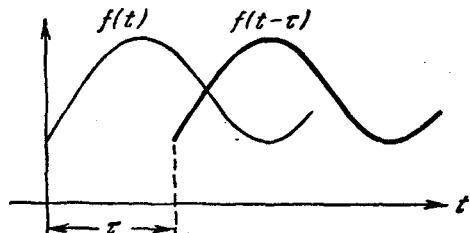


Рис. 96.

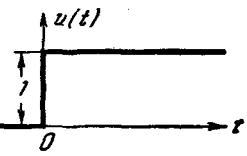


Рис. 97.

Для вычисления основных спектров, нужных нам в теории колебаний, желательно знать преобразования следующих функций: $Ae^{p_0 t}$, At^n и $At^n e^{p_0 t}$, где A — число.

Спектр $Ae^{p_0 t}$

$$L(Ae^{p_0 t}) = A \int_0^\infty e^{(p_0 - p)t} dt = \frac{A}{p - p_0}$$

с учетом, что

$$\operatorname{Re}(p) \geq \operatorname{Re}(p_0);$$

таким образом,

$$Ae^{p_0 t} \div \frac{A}{p - p_0}. \quad (29.1)$$

Спектром экспоненциальной функции $e^{p_0 t}$ является простейшая дробная функция p , имеющая простой полюс в точке p_0 .

Спектр At^n вычисляется интегрированием по частям:

$$L(At^n) = A \int_0^\infty t^n e^{-pt} dt = -A \frac{t^n e^{-pt}}{p} \Big|_0^\infty + \\ + A \frac{n}{p} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-pt} dt + \dots = A \frac{n!}{p^{n+1}},$$

или

$$At^n \doteq A \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (29.2)$$

Спектр t^n имеет полюс $n + 1$ порядка в нуле.

Здесь укажем на одну интересную функцию, которая при $t > 0$ имеет значение A , а при $t < 0$ равна нулю (функцию Хевисайда); обозначим ее $Au(t)$ (рис. 97). Можно написать $Au(t) = \lim_{n \rightarrow 0} At^n$ при $t > 0$; тогда по предыдущей формуле

$$Au(t) \doteq \frac{A}{p} \quad (29.3)$$

— функция, имеющая простой полюс в нуле, — представляет спектр функции Хевисайда.

И еще полезно знать спектр $At^n e^{p_0 t}$, который также легко получить интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} L(At^n e^{p_0 t}) &= A \int_0^\infty t^n e^{(p - p_0)t} dt = \\ &= \frac{At^n e^{(p_0 - p)t}}{p_0 - p} \Big|_0^\infty - \frac{An}{p_0 - p} \int_0^\infty t^{n-1} e^{(p_0 - p)t} dt + \dots = \frac{An!}{(p - p_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

или

$$At^n e^{p_0 t} \doteq \frac{An!}{(p - p_0)^{n+1}}. \quad (29.4)$$

При выводе, конечно, считалось, что $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$.

Представим себе спектры функций, равных нулю при $t < 0$ и равных $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$ при $t > 0$. Запишем $\sin \omega_0 t$ по формуле Эйлера и, учитывая (29.1), получим

$$\sin \omega_0 t \doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega_0} - \frac{1}{p + i\omega_0} \right),$$

или

$$\sin \omega_0 t \doteq \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}; \quad (29.5)$$

аналогично

$$\cos \omega_0 t \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega_0} + \frac{1}{p + i\omega_0} \right),$$

или

$$\cos \omega_0 t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}. \quad (29.6)$$

Спектры $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$ имеют простые полюсы в точках $i\omega_0$, $-i\omega_0$.

Спектр затухающих колебаний

$$e^{-\delta t} \sin \omega_0 t = \frac{1}{2i} [e^{(-\delta + i\omega_0)t} - e^{-(\delta + i\omega_0)t}]$$

будет, очевидно,

$$\frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p + \delta - i\omega_0} - \frac{1}{p + \delta + i\omega_0} \right] = \frac{\omega_0}{(p + \delta)^2 + \omega_0^2}, \quad (29.7)$$

также и для

$$e^{-\delta t} \cos \omega_0 t \div \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p + \delta - i\omega_0} + \frac{1}{p + \delta + i\omega_0} \right] = \\ = \frac{p + \delta}{(p + \delta)^2 + \omega_0^2}. \quad (29.8)$$

Эти же формулы пригодны и для нарастающих колебаний — они будут отличаться только знаком у δ .

Сравнивая формулы для затухающих и гармонических колебаний, мы видим, что их спектры отличаются друг от друга только сдвигом на δ параллельно действительной оси.

Разлагать данную функцию на бесконечную совокупность нарастающих гармонических или затухающих колебаний можно по любой прямой параллельной мнимой оси, проходящей справа от полюсов ее спектра или, в крайнем случае, прямой, проходящей через полюс, лежащий правее всех.

В этом случае коэффициент затухания (нарастания) у всех элементарных бесконечно малых колебаний один и тот же. Однако теоретически возможно разложение по любому пути, проходящему справа от полюсов и уходящему в $\pm\infty$ параллельно мнимой оси. Здесь уже элементарные колебания будут иметь и различные δ .

ГЛАВА 6

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ РЕЗОНАНСА В РАДИОТЕХНИКЕ

§ 30. Избирательность

Первая задача каждого радиоприемного устройства заключается в том, чтобы выделить из совокупности электромагнитных возмущений, посылаемых в данное место всеми радиостанциями мира, электромагнитные сигналы только одной определенной станции, программу которой желают прослушать, записать и т. д. Свойство выделять сигналы только одной станции и не принимать сигналов других станций называется *избирательностью* радиоприемника. Каждая радиотелефонная станция посылает электромагнитную волну определенной частоты («несущую»), модулированную звуковой частотой.

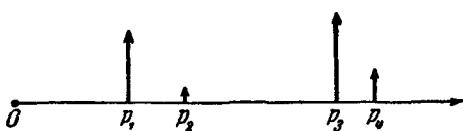


Рис. 98.

Пока предположим, что каждая станция излучает синусоидальную волну определенной частоты. Частота обычных радиостанций простирается от сотен *кгц* до 20—30 *Мгц*. Пусть все станции работают одновременно; тогда в антenne приемника будет сложная совокупность электромагнитных колебаний различной частоты. Спектр этих колебаний можно представить так, как показано на рис. 98.

Ток, наводимый сигналом в катушке антенны, можно представить так:

$$I(t) = \sum_{n=1}^N I'_{0n} \cos(\rho_n t + \varepsilon'_n). \quad (30.1)$$

Нам нужно выделить колебания только одной станции с частотой p_1 и не пропустить колебаний остальных в приемник. Для решения этой задачи пользуются резонансными свойствами элек-

трического контура. Сигнал подают на электрический контур (рис. 99), обычно включенный в цепь сетки первой лампы. Тогда напряжение на конденсаторе контура V_c , как известно по (15, 16), будет иметь такой вид:

$$V_c = \sum_{n=1}^N \frac{\mathcal{E}_{on}}{\sqrt{(1 - \gamma_n^2)^2 + \frac{\gamma_n^2}{Q^2}}} \cos(p_n t - \varphi_n + \varepsilon_n), \quad (30.2)$$

где \mathcal{E}_{on} — амплитуда э. д. с. частоты p_n , наводимой из антенны в контур, $\gamma_n = p_n/\omega$ и Q — добротность контура. Сдвиг по фазе φ_n определится по формуле (15.21).

Но сдвиг по фазе в данной задаче не представляет интереса.

Для того чтобы выделить сигнал с частотой p_i , необходимо изменить собственную частоту контура приемника и сделать ее равной p_i (как говорят, «настроить» контур на частоту p_i). Тогда в контуре будут такие колебания частоты p_i :

$$\mathcal{E}_{oi} Q \cos\left(p_i t + \varepsilon_i + \frac{\pi}{2}\right).$$

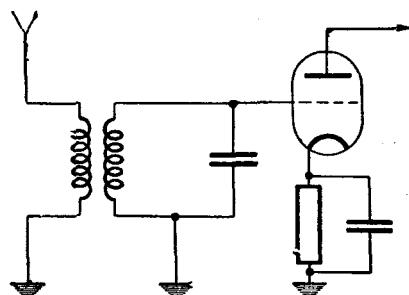


Рис. 99.

Если Q достаточно велико ($Q > 10$), то колебания частоты p_i будут преобладать над остальными колебаниями, которые будут значительно меньше.

Резонансные свойства электрического колебательного контура позволяют выделить сигнал определенной станции. Таким образом, видно, что избирательные свойства контура определяются добротностью контура. Чем больше добротность, тем большая избирательность.

Но практически для определения достаточной избирательности приемника необходимо знать частоты и относительную силу сигналов ближайших по частоте станций. Ясно, что для выделения слабого сигнала некоторой станции, среди близких по частоте сильных сигналов других станций, нужна значительно большая добротность контура, чем для выделения сильного сигнала среди слабых сигналов ближайших (по частоте) станций. Рассмотренные ранее (§ 15) резонансные зависимости дают все необходимые данные для расчета достаточной добротности контура, если известны силы сигналов и частоты принимаемой и соседних («мешающих») станций.

При мер. Работают две станции с частотами

$$\frac{P_1}{2\pi} = 700 \text{ кгц} \quad \text{и} \quad \frac{P_2}{2\pi} = 720 \text{ кгц},$$

причем сигнал одной из них в два раза сильнее сигнала другой.

Какое необходимо Q приемного контура, чтобы выделить слабую станцию?

Будем считать, что прием будет удовлетворительным, если принимаемый сигнал будет в 4 раза сильней сигнала соседней станции («помехи»). Пусть \mathcal{E} — сигнал слабой станции, а $2\mathcal{E}$ — сигнал второй.

Расстройка между частотами станций в относительных величинах $\Delta_\gamma = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}$, амплитуда сигнала в контуре от слабой станции, на которую настроен приемник:

$$V_{10} = \mathcal{E}Q.$$

Амплитуда сигнала от второй станции по (30.2) будет

$$V_{20} = \frac{2\mathcal{E}}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}.$$

Подставим в эту формулу $\gamma = 1 + \Delta\gamma$ или $\gamma^2 \approx 1 + 2\Delta\gamma$; тогда

$$V_{20} \approx \frac{2\mathcal{E}Q}{\sqrt{4(\Delta\gamma)^2 Q^2 + 1 + 2\Delta\gamma}},$$

пренебрегая малыми членами под радикалом, получим:

$$V_{20} \approx \frac{\mathcal{E}Q}{\Delta\gamma \sqrt{Q^2 + 1/(2\Delta\gamma)^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{V_{10}}{V_{20}} = 4 \approx \Delta\gamma \sqrt{Q^2 + 1/(2\Delta\gamma)^2},$$

или

$$Q \approx 140.$$

Это очень большое значение Q , такое значение практически трудно осуществить в обычном контуре с сосредоточенными постоянными. Прием нужной станции при заданных условиях нельзя осуществить с помощью одного контура. Поэтому для получения необходимой избирательности приемника сигнал пропускают после первого контура еще через один (или два) контур, настроенный на частоту слабой станции.

Сформулируем теперь условие достаточной избирательности контура. Напомним, что половина ширины резонансной кривой в относительных единицах равна $1/2Q$ (15.11).

Если расстояние по частоте между двумя ближайшими станциями Δp , а p — частота принимаемой станции, то $\Delta p/p$ должно быть больше половины ширины резонансной кривой, или

$$\frac{\Delta p}{p} > \frac{1}{2Q}. \quad (30.3)$$

Отсюда добротность контура должна быть больше $\frac{p}{2\Delta p}$, или

$$Q > \frac{p}{2\Delta p} \quad (30.4)$$

есть условие, определяющее нижнюю границу допустимых значений Q контура, применение которого может обеспечить нужную избирательность, конечно, предполагая, что сигналы ближайших по частоте станций примерно одинаковы.

§ 31. Неискажаемость

Рассматривая задачу об избирательности, мы пришли к выводу: чем больше Q приемного контура, тем лучше. Однако это не совсем правильно, если необходимо получить *неискаженное воспроизведение* в контуре приемника модулированных сигналов,

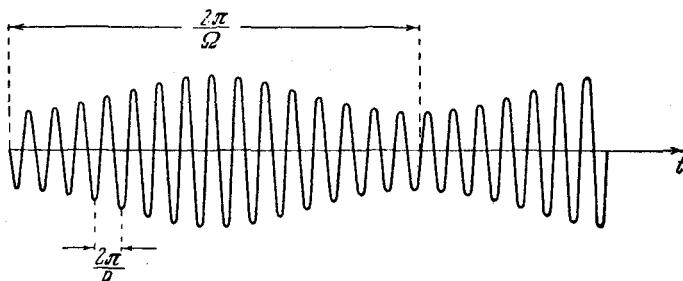


Рис. 100.

посылаемых радиостанцией. Допустим, что станция посылает сигнал частоты p , модулированный по амплитуде низкой (звуковой) частотой Ω (рис. 100). Выражение для сигнала, изображенного на рис. 100 можно записать так:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(1 + k \cos \Omega t) \cos pt, \quad (31.1)$$

где k — величина коэффициента модуляции, $k < 1$.

Необходимо, чтобы колебания в контуре имели такой же вид, как и сигнал, или, по крайней мере, мало отличались от него.

В данном случае на приемный контур действует негармоническая э. д. с. (несинусоидальная), а теория резонанса разработана для синусоидальных воздействий, поэтому необходимо сначала разложить сигнал (26.1) на сумму гармонических колебаний. Это очень просто сделать, ибо, как следует из простых тригонометрических преобразований:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos pt + \frac{\mathcal{E}_0 k}{2} \cos(p + \Omega)t + \frac{\mathcal{E}_0 k}{2} \cos(p - \Omega)t. \quad (31.2)$$

Формула (26.2) показывает, что модулированный по амплитуде сигнал (26.1) есть сумма трех гармонических колебаний с частотами p , $p + \Omega$ и $p - \Omega$. Следовательно, сигнал имеет сложный спектр, который показан на рис. 101. Частота p называется «несущей», а частоты $p + \Omega$ и $p - \Omega$ — «боковыми».

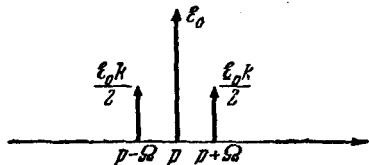


Рис. 101.

баний каждой гармонической составляющей в контуре должна быть пропорциональна амплитудам этих же составляющих в сигнале и притом не должно возникать заметных дополнительных сдвигов по фазе в каждой компоненте.

При каких условиях это можно осуществить, принимая во внимание, что контур настроен на несущую частоту?

Это возможно только тогда, когда ширина резонансной кривой много больше, чем $\frac{2\Omega}{p}$. В этом случае все три колебания будут располагаться по частоте где-то около вершины резонансной кривой, и амплитуды их будут изменены почти в одинаковое число раз. В противном случае, если ширина резонансной кривой достаточно мала, то можно выделить любую из трех компонент модулированного сигнала, и в контуре будут иметь место почти синусоидальные колебания, колебания одной частоты. Контур «выделил» одну спектральную компоненту и тем самым совершенно искал сигнал, передаваемый станцией. Ведь практически нас интересует в приемнике низкая частота (звуковая), а в данном случае никаких следов звуковой частоты в приемном контуре не будет.

Следовательно, условие неискажаемости

$$\frac{1}{Q} > \frac{2\Omega}{p}, \quad (31.3)$$

или ширина резонансной кривой должна быть больше ширины спектра сигнала. Это условие можно записать и так:

$$Q < \frac{p}{2\Omega}. \quad (31.4)$$

Условие (31.4) дает верхнюю границу величины Q . Таким образом, чем больше Q , тем лучше избирательность и хуже неискажаемость. Практически приходится выбирать компромиссное решение между двумя противоречивыми требованиями, между (31.4) и (30.4).

Заметим, что при передаче речи или музыки сигнал радиостанции модулирован не одной частотой Ω , поэтому в спектре сигнала не две боковые частоты, а «боковые полосы» частот спектра, соответствующие диапазону звуковых частот примерно от 16 Гц до 10 кГц.

Все наши рассуждения останутся в силе, если за Ω примем наивысшую звуковую частоту. Действительно, если наивысшая частота передается без больших искажений, то более низкие частоты будут воспроизводиться контуром еще с меньшими искажениями.

Условие неискажаемости (31.4) легко выполнить в области высоких радиочастот, например, в диапазоне коротких волн. Максимальное значение Ω для звуковых сигналов — порядка $2\pi \cdot 10^4$ сек⁻¹; поэтому при 15 Мегац (длина волны 20 м)

$$\frac{p}{2\Omega} = \frac{15 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4} = 750.$$

Условию $Q < 750$ легко удовлетворить. Но в телевизионном приемнике высокого качества необходимо без искажения передать боковую полосу частот, простирающуюся до 75 кГц от несущей частоты. Передача такой широкой полосы частот без искажения возможна только при очень высоких частотах в ультракоротковолновом диапазоне радиоволн (менее 10 м).

Требование неискажаемости можно получить и другим, менее строгим, путем. Модулированный сигнал (31.1), если $\Omega \ll p$ и $k < 1$, можно представлять как «почти синусоидальное» колебание с «переменной амплитудой». Необходимо, чтобы колебания в контуре приемника изменяли свою «амплитуду» в соответствии с изменениями «амплитуды» внешнего сигнала. Такие изменения возможны тогда, когда «амплитуда» будет изменяться настолько медленно, что в каждый момент процесс в контуре можно считать почти «установившимся» и колебания в контуре приближенно рассматривать как вынужденные колебания. Как известно, это будет в том случае, если

$$\tau_0 \ll \frac{2\pi}{\Omega}, \quad (31.5)$$

где $\tau_0 = 1/\delta$ — «постоянная времени» приемного контура. Или время установления колебаний в контуре, имеющее величину примерно τ_0 , будет значительно меньше периода изменения «амплитуды» — $2\pi/\Omega$.

Вспомним по формулам (4.8) и (15.3), что

$$\tau_0 = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R} = \frac{2\sqrt{L}\sqrt{LC}}{R\sqrt{C}} = \frac{2Q}{p}. \quad (31.6)$$

Так как контур полагаем настроенным на частоту p , то $p = \omega = 1/\sqrt{LC}$. Подставляя выражение τ_0 в условие неискажаемости (31.5), получим почти ту же формулу, как и ранее (31.4),

$$Q \ll \pi \frac{p}{Q}. \quad (31.7)$$

Отличие в постоянном множителе не существенно для такой формулы.

§ 32. Прием синусоидальных импульсов

Для отчетливого представления тех искажений, которые возникают в контуре, разберем еще один пример — прием идеальных синусоидальных импульсов контуром, настроенным на частоту колебаний в импульсе.

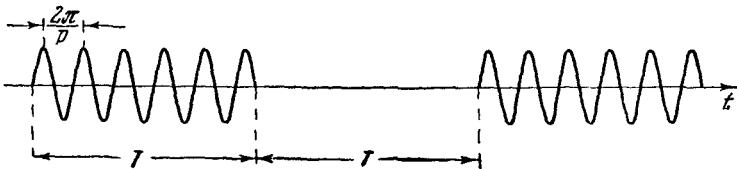


Рис. 102.

Рассмотрим колебания в контуре под действием «синусоидальных импульсов». Импульсы — идеальные: некоторое время T э. д. с., действующая в контуре, представляется в виде отрезка синусоиды, затем в промежутке T воздействия нет, э. д. с. равна нулю, и т. д. (рис. 102).

Заметим, что практически нельзя получить сигнал точно такого вида, поэтому мы и называем его идеальным.

Прежде всего посмотрим, какие были бы колебания в контуре, если бы контур был также идеальным, т. е. $Q \rightarrow \infty$. Пусть в контуре, собственная частота которого $\omega = p$, нет колебаний, и в некоторый момент действует импульс. Тогда картина колебаний будет примерно такой, как показано на рис. 103.

За время T колебания в контуре будут нарастать «линейно», затем в период отсутствия внешнего импульса колебания будут

продолжаться с постоянной амплитудой. Далее, с началом следующего импульса начнется опять «линейное» нарастание. Ясно, что такой процесс в контуре совершенно не подобен сигналу (рис. 102), а колебания в контуре совсем не воспроизводят сигнала. Контур с небольшим затуханием, близкий к идеальному контуру, не пригоден для радиоприемника: очень большое Q контура ведет к большим искажениям.

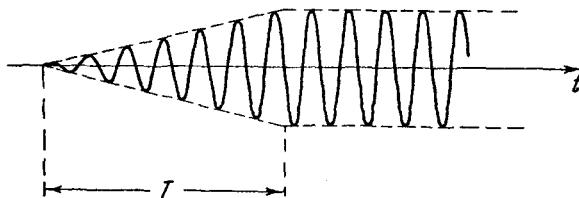


Рис. 103.

Теперь рассчитаем колебания в контуре с определенным Q при включении импульса сигнала. Определим величину потенциала на конденсаторе $V_c(t)$, полагая, что внешняя э. д. с. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin pt$, и в начальный момент $V_c(0) = 0$ и $\dot{V}_c(0) = 0$. Уравнение для потенциала на конденсаторе контура

$$\ddot{V}_c + \frac{R}{L} \dot{V}_c + \frac{1}{LC} V_c = \frac{\mathcal{E}_0}{LC} \sin pt. \quad (32.1)$$

Если контур «настроен в резонанс», то $p^2 = 1/LC$ и по (14.4.), (14.7) и (14.8) получаем общее решение

$$V_c = \mathcal{E}_0 Q \left[-\cos pt + e^{-\delta t} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega_1^2}} \cos \left(\omega_1 t - \arctg \frac{\delta}{\omega_1} \right) \right],$$

или приближенно при большом Q

$$V_c \approx -\mathcal{E}_0 Q (1 - e^{-\delta t}) \cos pt. \quad (32.2)$$

Следовательно, колебания в контуре будут иметь вид, изображенный на рис. 104.

После включения сигнала колебания в контуре будут нарастать по показательному закону $1 - e^{-\delta t}$, и после $t = T$, за время отсутствия сигнала, колебания затухают по закону $e^{-\delta t}$. Если постоянная времени контура τ_0 будет мала по сравнению с продолжительностью импульса T , т. е.

$$\tau_0 = \frac{1}{\delta} = \frac{2Q}{p} \ll T, \quad (32.3)$$

то колебания контура будут почти точно воспроизводить сигнал, за исключением начального и конечного участка импульса.

Условие (32.3) — это почти прежнее *условие неискажаемости* (31.5), которое было получено из качественных рассуждений. Только теперь можно дать и количественную оценку искажению.

Например, пусть $\tau_0 \approx \frac{1}{7} T$; тогда амплитуда колебаний в контуре в конце импульса только на $e^{-7} \approx 0,001$ долю будет отличаться от установившегося значения или к началу следующего импульса колебания затухнут до 0,1% от амплитуды, которая имеет место в конце действия импульса. Практически можно считать, что колебаний в контуре не будет к началу следующего импульса и под действием следующего импульса повторится та же

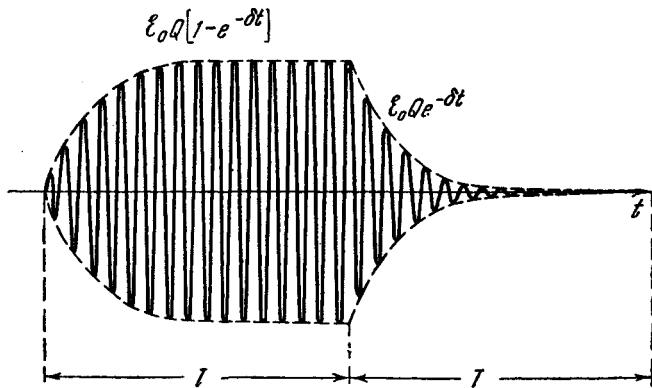


Рис. 104.

самая картина. Если же $\tau_0 \approx T$, то будут большие искажения, колебания за время отсутствия сигнала не затухнут, и поэтому решение необходимо повторять для каждого следующего импульса.

Приведем решение этой же задачи спектральным методом. Ради простоты вычислений положим, что сигнал имеет четное число N периодов синусоиды; тогда $2T = \frac{2\pi}{p} 2N = \frac{4\pi N}{p}$ будет периодом сигнала и $\Omega = \pi/T$ — основной частотой (рис. 86, а). Сигнал будет периодической функцией времени, которую можно разложить в ряд Фурье. Ради упрощения выкладок положим, что сигнал представлен функцией

$$f(t) = E_0 \sin pt$$

при

$$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

и

$$\frac{2n+1}{2} T \leq |t| \leq \frac{2n+3}{2} T, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots;$$

а для остальных интервалов времени t

$$f(t) = 0.$$

Иначе наш сигнал представляется периодической функцией $f(t)$, разложение которой в ряд мы рассматривали в § 26, стр. 117. Тогда

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t, \quad (32.4)$$

где по формуле (26.4), учитывая, что $T = T_1$, $\omega = n \frac{\pi}{T}$ и $pT = 2\pi N$, вычисляем

$$b_n = \frac{E_0}{\pi N} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\left(\frac{n}{2N}\right)^2 - 1}. \quad (32.5)$$

Из этой формулы ясно, что четные гармоники равны нулю, за исключением случая $n = 2N$, так как при n четном $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$.

При $n = 2N$ частота гармоники $n\Omega = 2N\Omega = 2N \frac{P}{2N} = p$. Это и

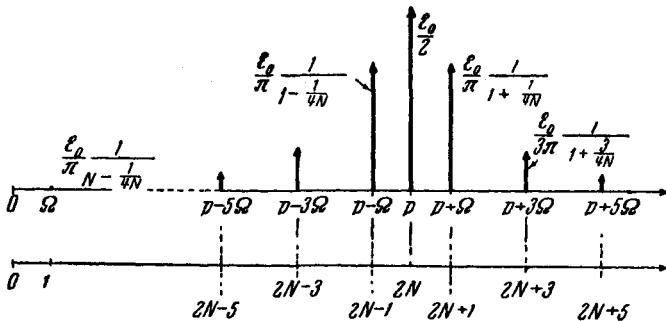


Рис. 105.

есть составляющая ряда Фурье, имеющая частоту p , и амплитуда этой составляющей равна

$$b_{2N} = \frac{E_0}{2}.$$

Спектр сигнала представлен на рис. 105.

Рассматривая спектр, видим, что никакой контур не может точно воспроизвести сигнал, искажения обязательны, спектр простирается в широком интервале частот. Однако если Q таково, что

ширина резонансной кривой больше 2Ω , т. е. по крайней мере три основные спектральные линии укладываются у вершины резонансной кривой, то колебания в контуре уже будут воспроизводить характерные черты сигнала. Опять это приводит к условию

$$\frac{1}{Q} > \frac{2\Omega}{p}$$

или

$$Q < \frac{1}{2} \frac{p}{\Omega}. \quad (32.6)$$

На величину добротности контура накладывается ограничение такого же порядка, как и ранее (31.4) и (31.7). При заданном Q и p это является ограничением на величину Ω или на скорость передачи следующих друг за другом импульсов.

На первый взгляд кажется, что колебания в контуре будут похожи на колебания, модулированные частотой Ω , которые были показаны ранее на рис. 100. Однако это совсем не так, резонансная кривая имеет «хвосты», простирающиеся по частоте от 0 до ∞ ; поэтому все спектральные составляющие сигнала, хотя в ослабленном виде, будут иметь место в контуре. И так как таких составляющих много, то пренебрегать ими нельзя. Если бы мы просуммировали все члены (32.4) (а не три!), то получили бы такую же кривую, которая показана на рис. 104.

Поэтому при точном расчете колебаний в контуре необходимо каждую составляющую (32.4) умножить на соответствующий резонансный множитель по (24.4), ввести изменение фазы и взять сумму всех гармонических составляющих.

§ 33. Частотная модуляция

Кроме амплитудной модуляции, возможна еще фазовая и частотная модуляции. Сигнал, модулированный по частоте, можно рассматривать как сигнал, модулированный по фазе. Но эти понятия можно различать, ибо они характеризуются различными величинами для одного и того же сигнала.

Сигнал, синусоидально модулированный по фазе, имеет вид:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(pt + \alpha \sin \Omega t), \quad (33.1)$$

фаза изменяется по линейному (pt) и гармоническому закону ($\alpha \sin \Omega t$), а частота этого сигнала изменяется следующим образом:

$$p + \alpha \Omega \cos \Omega t. \quad (33.2)$$

Действительно, для сигнала $\mathcal{E}_0 \cos \psi(t)$ частотой следует называть $d\psi/dt$, производную от фазы ψ по времени. Частота сигнала

(33.1) модулирована и, как видно из (33.2), глубина модуляции частоты определяется безразмерным коэффициентом

$$\frac{\alpha \Omega}{p} < 1. \quad (33.3)$$

Коэффициент α определяет величину модуляции фазы, он изменяется в радианах и может принимать любые значения.

Интересно отметить, что после первых предложений применить частотную модуляцию некоторые видели в ней возможность устранения противоречия между избирательностью и неискажаемостью. Рассуждали примерно так: если взять контур с очень большим Q , с острой резонансной кривой (рис. 106) и настроить его так, чтобы средняя частота p приходилась на крутом спаде резонансной кривой, то при очень небольшом изменении частоты сигнала получатся большие изменения амплитуды колебаний в контуре.

Это, конечно, ошибка. Ведь резонансная кривая имеет смысл только для установившихся колебаний. Применять ее для неустановившихся колебаний приближенно можно тогда, когда частота изменений сигнала относительно мала, а именно тогда, когда постоянная времени контура τ_0 мала по сравнению с периодом модуляции, или, так же как и при амплитудной модуляции, учитывая (31.6), можем записать:

$$\tau_0 \ll \frac{2\pi}{\Omega}, \quad \frac{2Q}{p} \ll \frac{2\pi}{\Omega}, \quad Q \ll \pi \frac{p}{\Omega}. \quad (33.4)$$

Опять, для того чтобы колебания в контуре следовали за изменением частоты сигнала, приходится брать контур с маленьким Q , с пологой резонансной кривой, и избирательность контура не может быть очень высокой.

К такому же выводу можно придти на основе спектрального анализа сигнала, модулированного по частоте (или по фазе).

Сигнал, модулированный по фазе (33.1), очевидно, можно записать так:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos pt \cos(\alpha \sin \Omega t) - \mathcal{E}_0 \sin pt \sin(\alpha \sin \Omega t). \quad (33.5)$$

Его можно разложить на гармонические составляющие. Действительно, разложение $\cos(\alpha \sin \varphi)$ и $\sin(\alpha \sin \varphi)$ в ряд Фурье,

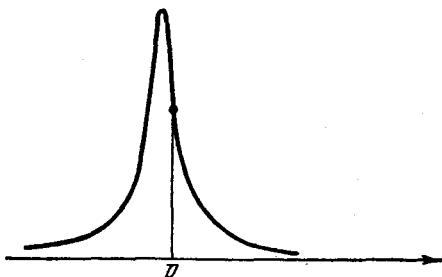


Рис. 106.

как известно из теории, имеет такой вид:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \sin \varphi) &= I_0(\alpha) + 2I_2(\alpha) \cos 2\varphi + 2I_4(\alpha) \cos 4\varphi + \dots \\ \sin(\alpha \sin \varphi) &= 2I_1(\alpha) \sin \varphi + 2I_3(\alpha) \sin 3\varphi + \\ &\quad + 2I_5(\alpha) \sin 5\varphi + \dots, \quad (33.6)\end{aligned}$$

где $I_n(\alpha)$ есть бесселева функция первого рода порядка n . Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \mathcal{E}_0 [I_0(\alpha) \cos pt + 2I_2(\alpha) \cos pt \cos 2\Omega t + \dots \\ &\quad \dots - 2I_1(\alpha) \sin pt \sin \Omega t - 2I_3(\alpha) \sin pt \sin 3\Omega t - \dots] = \\ &= \mathcal{E}_0 [I_0(\alpha) \cos pt - I_1(\alpha) \cos(p - \Omega)t + \\ &\quad + I_1(\alpha) \cos(p + \Omega)t + I_2(\alpha) \cos(p - 2\Omega)t + \\ &\quad + I_2(\alpha) \cos(p + 2\Omega)t - \dots]. \quad (33.7)\end{aligned}$$

Таким образом, сигнал, модулированный по частоте, содержит целый ряд боковых частот $p \pm n\Omega$, и воспроизведение частотно-модулированного сигнала — еще более трудная задача, чем амплитудно-модулированного. Сигнал, модулированный по частоте, вообще имеет значительно более широкий спектр. Но при малых α далекие компоненты (большое n) будут очень малы и искажения их в воспроизведении мало будут влиять на вид сигнала.

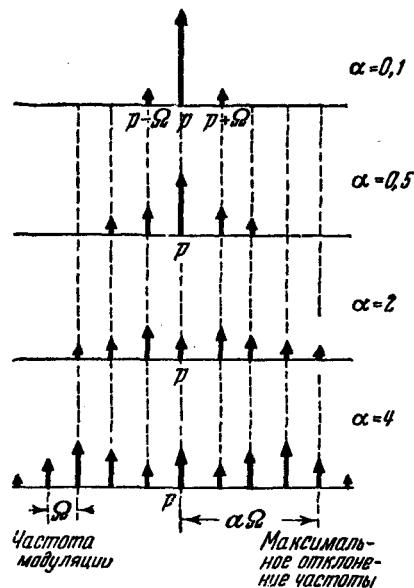


Рис. 107.

тивоположные фазы, в отличие от спектра модулированного по амплитуде сигнала.

Спектры сигналов, модулированных по частоте при различных значениях α , показаны на рис. 107.

При маленьких значениях α можно приближенно, простым тригонометрическим преобразованием, получить спектральный состав (триплет). Спектр в этом случае будет похож на спектр амплитудно-модулированного сигнала, но боковые компоненты будут иметь про-

На рис. 107 видно, что, например, при $\alpha = 4$ необходима гораздо меньшая добротность контура — по крайней мере в четыре раза, — чем при амплитудной модуляции. Следовательно, с точки зрения уменьшения «тесноты в эфире» частотная модуляция значительно менее выгодна, чем амплитудная. Однако за последнее время на очень высоких частотах предпочитают частотную модуляцию. Это делают ради уменьшения влияния посторонних случайных помех при радиоприеме, которое можно осуществить в схемах с частотной модуляцией.

ГЛАВА 7

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

§ 34. Колебания «нелинейной» пружины

Задача о вынужденных колебаниях в системах, которые содержат нелинейные элементы, — одна из сложных задач теории колебаний. В этой главе мы рассмотрим простейшие нелинейные системы, содержащие только один нелинейный элемент. Такие «простейшие» нелинейные системы имеют большое практическое значение.

Разберем вначале простой пример. Представим себе пружину, деформация которой не пропорциональна действующей силе. Пусть характеристика *сила — деформация* для данной пружины будет иметь вид, представленный на рис. 108. В некотором интервале можно характеризовать, зависимость деформации пружины x от действующей силы F , представить аналитически, например, в таком виде:

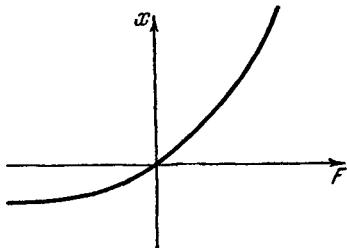


Рис. 108.

В некотором интервале можно характеризовать, зависимость деформации пружины x от действующей силы F , представить аналитически, например, в таком виде:

$$x = \alpha F + \beta F^2 + \gamma F^3. \quad (34.1)$$

Теперь допустим, что сила F изменяется со временем по закону синуса. Каковы будут колебания деформации x ?

Пусть $F = F_0 \sin pt$. Колебания x будут, конечно, периодическими, но не будут синусоидальными. Действительно, подставляя синусоидальную силу в (34.1), получаем:

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha F_0 \sin pt + \beta F_0^2 \sin^2 pt + \gamma F_0^3 \sin^3 pt = \frac{\beta F_0^2}{2} + \\ &+ \left(\alpha F_0 + \frac{3}{4} \gamma F_0^3 \right) \sin pt - \frac{\beta F_0^2}{2} \cos 2pt + \frac{\gamma F_0^3}{4} \sin 3pt. \end{aligned} \quad (34.2)$$

Колебания совершаются около смещенного положения равновесия $\frac{1}{2} \beta F_0^2$; колебания состоят из суммы гармонических с частотами: p , $2p$, $3p$. В результате действия гармонической силы сместились положение равновесия и появились новые частоты $2p$, $3p$, которых нет в действующей на пружину силе.

Заметим, что если бы каким-либо способом задали синусоидальное изменение x , то получили бы несинусоидальную, искаженную нелинейностью форму изменения силы F во времени. Кстати, практически очень трудно задать синусоидальную силу, действующую на пружину: задать же синусоидальное смещение конца пружины значительно проще, например, от кривошипа, врачающегося с постоянной скоростью.

Каким образом можно заметить, что колебания конца пружины происходят около смещенного положения равновесия? Для этого к концу пружины нужно присоединить «фильтр высоких частот». В данном случае «фильтром» может быть масса на пружинке, собственная частота колебаний которой много меньше p (рис. 109).

На пружину A действует гармоническая сила, пружина совершает негармонические колебания x . Груз m на пружине k не может совершать колебаний высокой частоты p , но передвигается в другое положение при колебаниях конца пружины A , смещение y показывает «постоянную составляющую» этих колебаний. Принцип устройства этого «указателя смещений» аналогичен сейсмическому прибору, описанному в § 22.

Рассмотренные механические колебания сравнительно редко встречаются на практике, но в электронике и радиотехнике довольно часто приходится иметь дело с аналогичными явлениями (выпрямление и детектирование), которые имеют очень важное значение.

§ 35. «Нелинейный проводник» и выпрямление переменного тока

«Линейным» проводником называют такой проводник, для которого падение напряжения пропорционально току, идущему по нему. Сопротивление проводника в этом случае не зависит от величины тока и напряжения.

«Нелинейным» называется проводник, для которого график зависимости между напряжением и током представляется непрямой

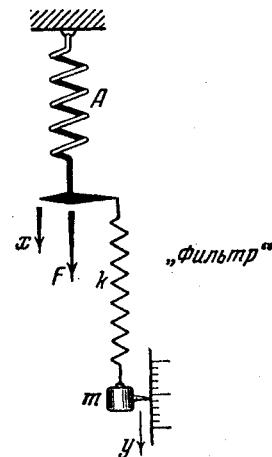


Рис. 109.

линией. Типичным примером проводников такого рода является электронная лампа, которая обладает односторонней проводимостью. Характеристика анодного тока лампы, зависимость анодного тока лампы I_a от напряжения между анодом и катодом, представлена на рис. 110 a . Сопротивление лампы определяют так:

$$R_a = \frac{\partial V_a}{\partial I_a}. \quad (35.1)$$

Это означает, что при достаточно малых изменениях напряжения (и тока) около некоторого постоянного значения V_a электронная лампа эквивалентна «линейному» проводнику с сопротивлением R_a .

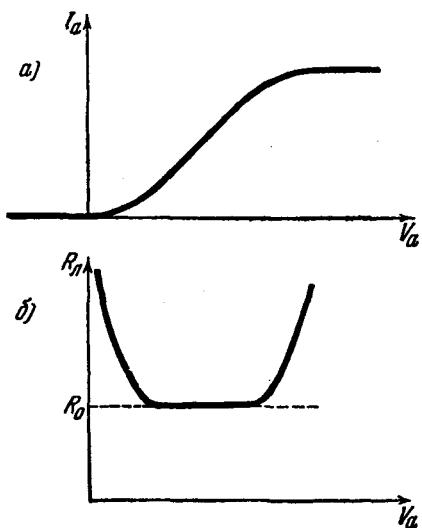


Рис. 110.

То же самое можно сказать и о том случае, когда имеют место большие изменения анодного напряжения (и тока), но лежащие в пределах почти прямолинейной части характеристики лампы.

Сопротивление R_a (35.1) называют дифференциальным сопротивлением нелинейного проводника. Сопротивление электронной лампы изменяется от очень больших значений до некоторого конечного значения R_0 в середине подъема характеристики, рис. 110 b .

Рассмотрим колебания тока в диоде, в электронной лампе, содержащей только два электрода: катод и анод. Предположим,

что анодное напряжение изменяется по гармоническому закону; как будет изменяться ток? Определим *рабочий участок* на характеристике *): выбираем постоянное напряжение на аноде лампы V_{a0} и интервал изменения напряжения.

Для удобства расчета колебаний представляют приближенно зависимость между изменениями тока и напряжения на рабочем участке в виде полинома некоторой степени. Число членов полинома, или порядок этого полинома, определяется необходимой степенью приближения и видом характеристики на рабочем участке.

*) Полагаем, что колебания происходят около некоторого постоянного значения напряжения (и тока) и не выходят за пределы некоторого участка напряжения (и тока) вблизи этого значения. Такой участок характеристики называют *рабочим*.

Положим, что участок характеристики может быть аппроксимирован таким многочленом третьей степени:

$$I_a = I_{a0} + \alpha V + \beta V^2 + \gamma V^3, \quad (35.2)$$

где V — переменная часть анодного напряжения, I_{a0} — ток покоя, или ток при $V = 0$.

Если задано $V = V_0 \cos pt$, или на аноде диода имеется гармоническое напряжение кроме постоянного V_a , то ток через лампу будет несинусоидальным и постоянная составляющая тока изменится; она будет равна

$$I_{a0} + \frac{1}{2} \beta V_0^2, \quad (35.3)$$

как легко видеть из сравнения формул (35.2) с (34.1) и (34.2).

Кроме колебаний с частотой p , возникнут колебания (гармоники) с частотой $2p$ и $3p$. Величина амплитуд различных гармоник зависит от вида характеристики на рабочем участке и амплитуды V_0 .

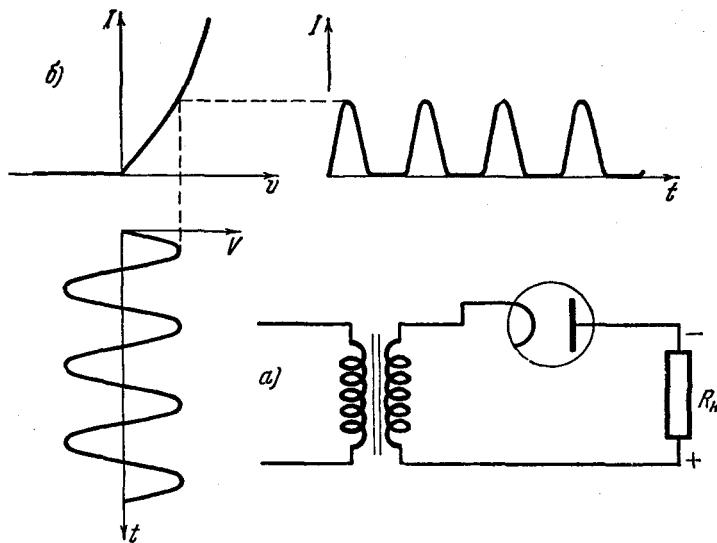


Рис. 111.

Односторонняя проводимость диода или нелинейность характеристики используется в выпрямителе, назначение которого — превращать переменный ток в постоянный. Если подадим на диод только переменное напряжение (рис. 111), то в цепи диода через сопротивление R_H пойдет пульсирующий ток одного направления.

Для превращения этого пульсирующего тока в постоянный необходим «фильтр», устраниющий переменную составляющую. Обычно для этой цели ставят в цепь дроссель, т. е. катушку с достаточно большой индуктивностью, или параллельно нагрузке конденсатор

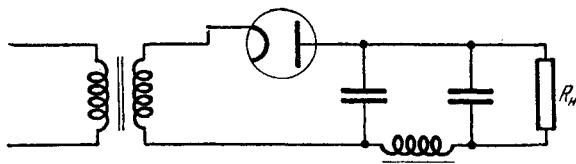


Рис. 112.

(рис. 112); тогда на сопротивлении R_H будет почти постоянное напряжение, так как переменный ток встречает большое сопротивление L_p в последовательной нагрузке цепи и малое сопротивление $1/C_p$ в параллельной цепи. Для этого необходимо, чтобы $L_p \gg 1/C_p$ и $R_H \gg 1/C_p$ *).

§ 36. Расчет диодного выпрямителя с RC -фильтром

Предположим, что характеристику диода на рабочем участке можно представить отрезками прямой линии (рис. 113). Такую нелинейную характеристику можно назвать *кусочно-линейной*.

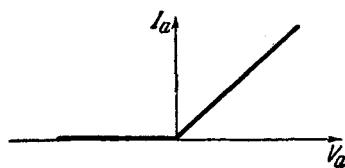


Рис. 113.

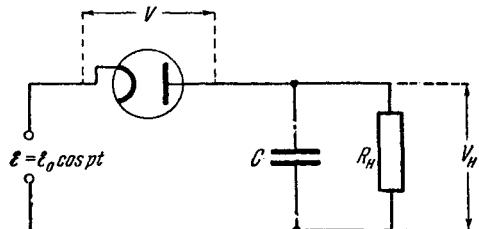


Рис. 114.

При положительном напряжении на аноде сопротивление лампы имеет определенную постоянную величину R_0 . При отрицательном напряжении сопротивление диода бесконечно.

Рассчитаем выпрямитель по схеме, показанной на рис. 114.

*) Сопротивление конденсатора переменному току $1/C_p$ много меньше сопротивления нагрузки R_H .

Если условие $\rho CR_n \gg 1$ соблюдается, то падением переменного напряжения на нагрузке можно пренебречь, но постоянным напряжением V_n на нагрузке пренебречь нельзя, его следует учитывать.

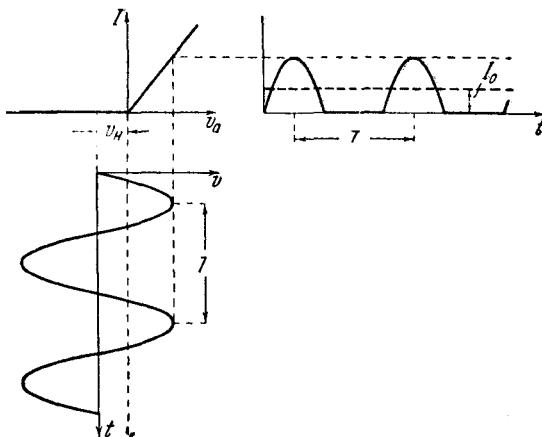


Рис. 115.

Допустим, что через сопротивление R_n течет постоянный ток I_0 , тогда $V_n = I_0 R_n$ и напряжение на диоде будет

$$V \approx \mathcal{E} - V_n = \mathcal{E} - I_0 R_n. \quad (36.1)$$

На аноде лампы будет плюс только в те моменты, когда положительное \mathcal{E} больше V_n , остальное время диод будет заперт (рис. 115).

Часть положительного полупериода подводимого напряжения будет «отсечена», а поэтому в расчет вводят «угол отсечки». Определение «угла отсечки» ϑ видно на рис. 116. Угол отсечки ϑ одинаков для напряжения и тока и этим следует воспользоваться.

Действительно,

$$\mathcal{E}_0 \cos \vartheta = V_n = I_0 R_n, \quad (36.2)$$

это видно из (36.1), затем

$$I_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\vartheta \frac{V}{R_n} d(pt) = \frac{\mathcal{E}_0}{\pi R_n} \int_0^\vartheta (\cos pt - \cos \vartheta) d(pt), \quad (36.3)$$

так как

$$\mathcal{E} - V_n = V = \mathcal{E}_0 (\cos pt - \cos \vartheta),$$

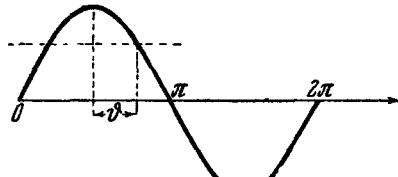


Рис. 116.

Взяв интеграл (36.3), получаем:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\pi R_0} (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta). \quad (36.4)$$

Формула (36.4) дает зависимость между углом отсечки ϑ и постоянной составляющей тока I_0 . Сравнивая (36.4) с I_0 из (36.2), находим формулу для определения угла отсечки по параметрам схемы

$$\frac{\pi R_0}{R_{\text{н}}} = \operatorname{tg} \vartheta - \vartheta. \quad (36.5)$$

Расчет идет так: по данным R_0 и $R_{\text{н}}$ определяем ϑ , а затем I_0 и $V_{\text{н}}$. Для небольших углов отсечки ϑ можно пользоваться простой приближенной формулой. Полагая в (36.5)

$$\operatorname{tg} \vartheta \approx \vartheta + \frac{1}{3} \vartheta^3 + \dots,$$

после очевидных преобразований получим формулу

$$\vartheta \approx \sqrt[3]{\frac{3\pi R_0}{R_{\text{н}}}}, \quad (36.6)$$

которой обычно и пользуются в радиотехнических расчетах.

§ 37. Детектирование

Детектированием в радиотехнике называется процесс получения колебаний низкой (звуковой) частоты из модулированного сигнала высокой частоты.

Как мы видели ранее (§ 31), модулированный по амплитуде сигнал высокой частоты представляет совокупность трех высоких частот p , $p + \Omega$, $p - \Omega$, где p — «несущая» высокая частота, Ω — звуковая частота. В сигнале нет колебаний звуковой частоты Ω ; чтобы получить их, необходимо детектирование, которое представляет собой трансформацию частот сигнала. Такую трансформацию можно осуществить только с помощью нелинейного проводника.

Вначале посмотрим, что произойдет с сигналом, если пропустим его через диод; характеристику диода для простоты анализа будем считать «кусочно-линейной» (рис. 117).

Через диод пройдет пульсирующий ток. Если одновременно с диодом включен фильтр RC , то при условиях $RCp \gg 1$ и $RC\Omega \ll 1$ через сопротивление R пройдет ток I_0 , который совершает колебания с частотой Ω . Действительно, при условии $RC\Omega \ll 1$ «средняя» составляющая импульсов ведет себя как «постоянная» составляющая в случае выпрямителя, так как сопротивление кон-

денсатора $1/C\Omega$ для колебаний с частотой Ω больше сопротивления R (или имеет тот же порядок). Ток в цепи диода представлен

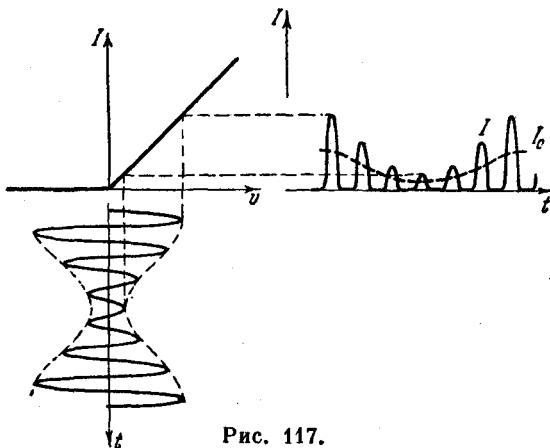


Рис. 117.

схематически на рис. 118; кроме колебаний звуковой частоты и колебаний высокой «несущей» частоты p , будут присутствовать и гармонические составляющие с частотами $2p$, $3p$ и т. д.

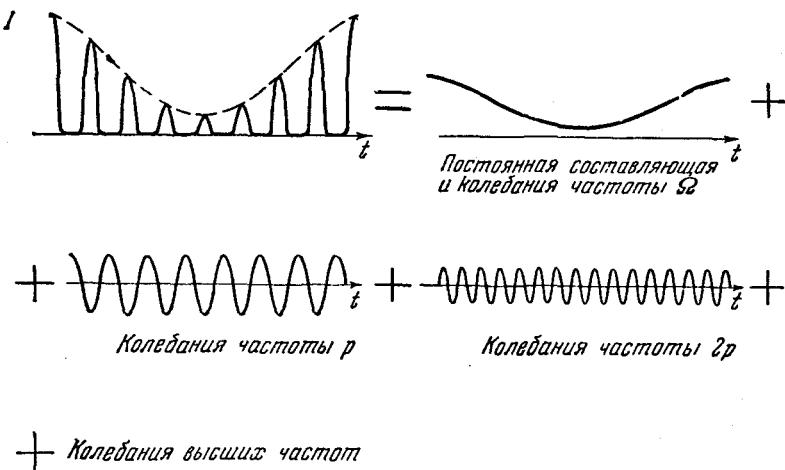


Рис. 118.

Высокие частоты не дадут заметных напряжений на конденсаторе и, следовательно, на R . Колебания «среднего» напряжения на R вызовут изменение угла отсечки и, следовательно, умень-

шение амплитуды тока звуковой частоты. Но если $R < R_0$, то этим изменением можно пренебречь и считать, что амплитуда тока пропорциональна глубине модуляции. В этом приближении допустимо считать, что «кусочно-линейный» детектор воспроизводит без искажений колебания звуковой частоты, которой модулировали сигнал на радиопередаточной станции.

Значительно большие искажения получаются, если приходится пользоватьсяся «квадратичным» детектором или нелинейным проводником, у которого зависимость между током и напряжением выражается на рабочем участке квадратичным законом. Заметим, что один и тот же диод можем рассматривать и как «квадратичный» и как «кусочно-линейный» детектор, в зависимости от расположения и величины рабочего участка или величины поступающего сигнала (рис. 119).

Например, на участке *A* (рис. 119) данный диод имеет характеристику примерно такого вида:

$$I = I_0 + \alpha V + \beta V^2. \quad (37.1)$$

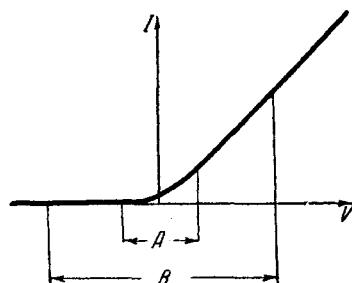


Рис. 119.

Его можно рассматривать как «квадратичный» детектор, а при работе на участке *B* его можно считать «кусочно-линейным» детектором.

Если напряжение, подаваемое на квадратичный детектор (37.1), будет иметь вид модулированного по амплитуде сигнала, как представлено формулой (31.2) и показано на рис. 100, то колебания тока будут сложными. Подставив (31.2) вместо V в (37.1), получим колебания тока I . Линейный член характеристики αV с точностью до множителя воспроизведет напряжение V . Квадратичный же член βV^2 даст колебания со следующими частотами:

$$2p, 2(p + \Omega), 2(p - \Omega), 2p + \Omega, 2p - \Omega, 2\Omega, \Omega \text{ и } 0. \quad (37.2)$$

Эти частоты получаются из квадратов каждого члена, входящего в V , и из попарных произведений тех же членов, дающих суммы и разности частот.

Расчет показывает, что сравнительно простой спектр сигнала (рис. 120, *a*) дает сложный спектр колебаний тока (рис. 120, *b*).

Из сложного спектра «фильтр» отсеивает все частоты, за исключением низкой частоты Ω . Если $V = \mathcal{E}_0(1 + k \cos \Omega t) \cos pt$, то после фильтрации должны остаться колебания частоты Ω с амплитудой $\sqrt{\mathcal{E}_0}k$.

Трудно устраниТЬ фильтром «помеху» — колебания с частотой 2Ω и амплитудой $\frac{1}{4}\beta\mathcal{E}_0^2k^2$. Но при небольшом значении коэффициента глубины модуляции k амплитуда «помехи» будет незначительна и ею можно пренебречь.

Таким образом, пропуская сигнал через нелинейный проводник при детектировании, трансформируют («искажают») приходящий сигнал так, чтобы среди составляющих колебаний имело

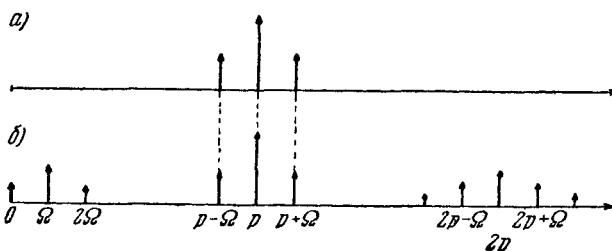


Рис. 120.

место колебание звуковой частоты, той частоты, которой был модулирован сигнал.

Отметим, что линейные проводники (или система линейных проводников, включающих емкость, индуктивность, сопротивление) могут изменить амплитуду и фазу колебаний различных частот, но не могут изменить частоты.

Нелинейным проводником можно воспользоваться для получения удвоенной, утроенной и т. д. частоты. Например, такие

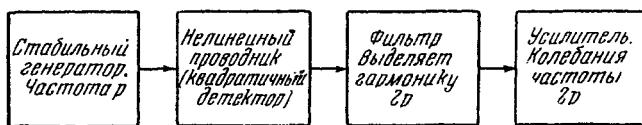


Рис. 121.

умножители частоты применяются в генераторах высокой частоты для получения более стабильных по частоте колебаний, так как для низких частот легче обеспечить постоянство частоты.

Блок-схема такого генератора показана на рис. 121. Можно также представить себе схему, которая дает утройение частоты. Для этого необходим проводник с «кубической» характеристикой, например, такого вида:

$$I = I_0 + \alpha V + \gamma V^3.$$

Ток в таком проводнике при синусоидальном напряжении $V = V_0 \cos pt$ будет содержать третью гармонику частоты $3p$, колебания которой и отфильтровываются от остальных частот.

§ 38. Некоторые практические схемы детектирования

Расчет детектирования при помощи диода был изложен в § 32. Диодное детектирование обычно применяется при сильных сигналах, когда можно считать характеристику диода «кусочно-линейной». Для слабых сигналов диод не выгоден, и поэтому можно детектировать такие сигналы на сгибе характеристики электронной лампы с сеткой, выполняющей одновременно роль усилителя.

Схема анодного детектирования показана на рис. 122. Сигнал \mathcal{E} подается на сетку лампы, фильтр RC находится в анодной цепи. Рабочую точку можно выбрать на нижнем сгибе анодной характеристики или на верхнем (рис. 123). Конечно, одновременно с детектированием здесь происходит и усиление сигнала. В этом отношении особенно выгодна схема сеточного детектирования.

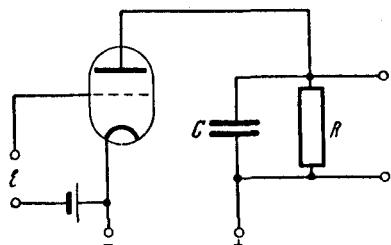


Рис. 122.

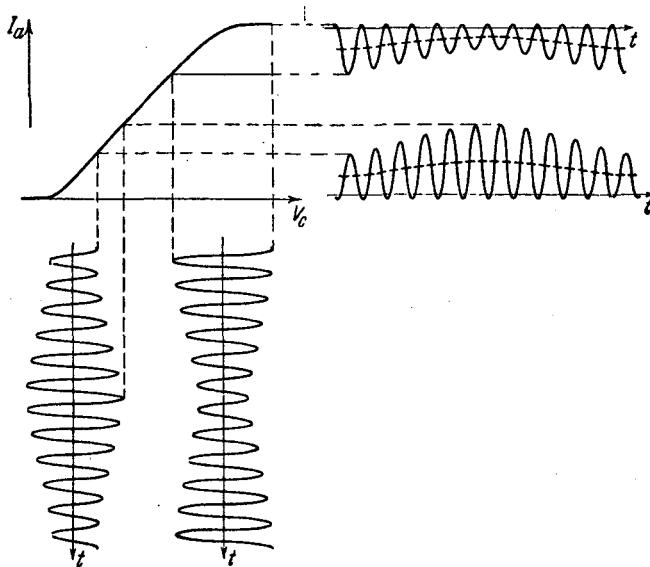


Рис. 123.

Схема сеточного детектирования показана на рис. 124.

В этом случае рабочую точку выбирают на середине анодной характеристики (анодный ток — как функция сеточного напряжения) и на нижнем

сгибе характеристики сеточного тока (ток сетки — как функция напряжения на сетке). Теперь цепь сетки действует как диодный детектор, на сопротивлении R_c возникает напряжение частоты Ω , которое и изменяет анодный

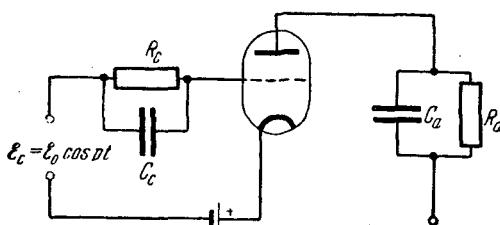


Рис. 124.

ток с этой же частотой. Необходимо подобрать сопротивления и емкости так, чтобы удовлетворялись условия:

$$\begin{aligned} R_c C_c \Omega &\leq 1, \quad R_o C_o p \gg 1, \\ R_a C_a p &\gg 1, \quad R_a C_a \Omega \leq 1. \end{aligned} \quad (38.1)$$

График изменения токов и напряжений можно видеть на рис. 125.

Действие $E_c = E_0 \cos pt$ вызовет постоянное падение напряжения на R_c , равное $\Delta V_c = \Delta I_{c0} R_c$; это напряжение в свою очередь вызовет изменение

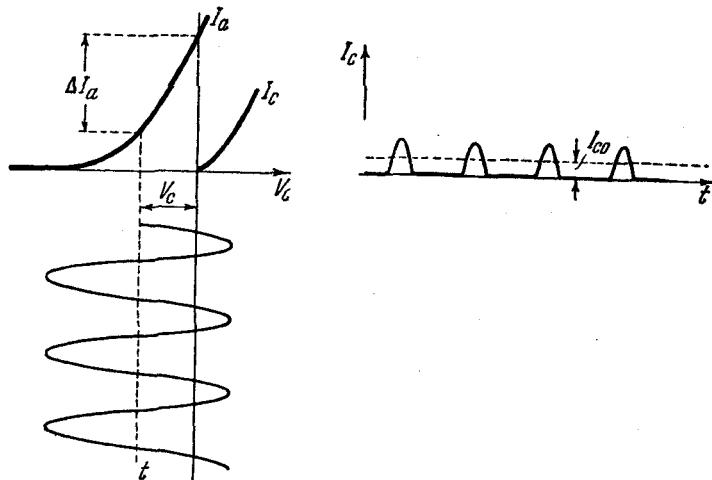


Рис. 125.

анодного тока $\Delta I_a = S \Delta V_c$ и, наконец, изменение напряжения на аноде $\Delta V_a = \Delta I_a R_a$.

Полезное действие детектора и усилителя можно оценивать отношением

$$\frac{\Delta V_a}{E_0}.$$

Произведем приближенный расчет сеточного детектора, полагая сеточную характеристику лампы в общем виде

$$I_c = f(U_c), \quad (38.2)$$

где U_c — напряжение сетка — катод.

Тогда колебания напряжения на сетке при наличии сигнала $\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_0 \cos pt$ приближенно будут равны

$$\Delta U_c = \mathcal{E}_c - \Delta V_c = \mathcal{E}_c - R_c \Delta I_{c0}. \quad (38.3)$$

Аппроксимируем сеточную характеристику (38.2) около $U_c = 0$ полиномом второй степени:

$$\Delta I_c = f'(0) \Delta U_c + \frac{1}{2} f''(0) (\Delta U_c)^2. \quad (38.4)$$

Подставим сюда значение (38.3)

$$\begin{aligned} \Delta I_c &= f'(0) (\mathcal{E}_c - R_c \Delta I_{c0}) + \frac{1}{2} f''(0) (\mathcal{E}_c - R_c \Delta I_{c0})^2 = f'(0) (\mathcal{E}_c - R_c \Delta I_{c0}) + \\ &+ \frac{1}{2} f''(0) [\mathcal{E}_c^2 - 2\mathcal{E}_c R_c \Delta I_{c0} + R_c^2 (\Delta I_{c0})^2], \end{aligned} \quad (38.5)$$

а затем усредним это выражение по времени. Заметим, что средние значения по времени

$$\text{Cp}(\mathcal{E}_c) = 0, \quad \text{Cp}(\mathcal{E}_c^2) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2}, \quad \text{Cp}(\Delta I_c) = \Delta I_{c0},$$

и поэтому для средних значений из формулы (38.5) получим:

$$\Delta I_{c0} = f'(0) (-R_c \Delta I_{c0}) + \frac{1}{2} f''(0) \frac{\mathcal{E}_0^2}{2}, \quad (38.6)$$

если квадратом ΔI_{c0} можно пренебречь.

Из (38.6) окончательно получим среднее значение сеточного тока:

$$\Delta I_{c0} = \frac{f'(0)}{4[1 + f'(0) R_c]} \mathcal{E}_0^2. \quad (38.7)$$

Выражение (38.7) дает величину изменения среднего значения сеточного тока в зависимости от амплитуды напряжения, подводимого к входу катод — сетка. Если характеристика сеточного тока может быть представлена на рабочем участке кривой второго порядка

$$I_c = I_0 + aU_c + \beta U_c^2,$$

то

$$\Delta I_{c0} = \frac{\beta}{2[1 + aR_c]} \mathcal{E}_0^2$$

или

$$\Delta V_c = R_c \Delta I_{c0} = \frac{\beta R_c}{2[1 + aR_c]} \mathcal{E}_0^2.$$

Следовательно, амплитуда напряжения звуковой частоты в анодной цепи будет пропорциональна

$$\Delta V_a = S R_a \Delta V_c = \frac{\beta R_c R_a S}{2[1 + aR_c]} \mathcal{E}_0^2. \quad (38.8)$$

Амплитуда сигнала на выходе детектора пропорциональна кривизне β сеточной характеристики и крутизне S характеристики анодного тока в рабочей точке.

§ 39. Гетеродин

Гетеродин применяется для приема телеграфных сигналов (рис. 126). Телеграфный сигнал в грубом приближении представляет «синусоидальный импульс», отрезок синусоидальной волны с частотой p (см. рис. 102). В приемнике на колебания частоты p

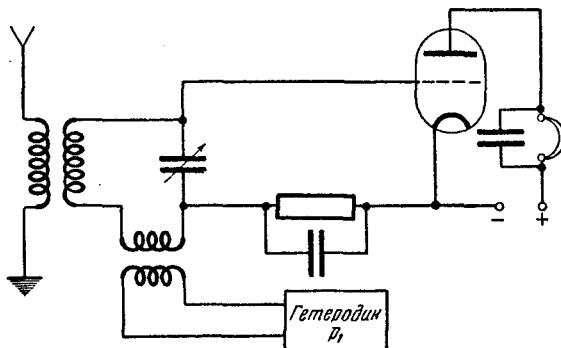


Рис. 126.

накладываются колебания от местного генератора (гетеродина) частоты p_1 *), затем получившиеся биения подаются на детектор, который выделяет звуковую частоту

$$p_1 - p.$$

Колебания звуковой частоты воспринимает телефон в анодной цепи лампы. Спектр колебаний во входном контуре приемника

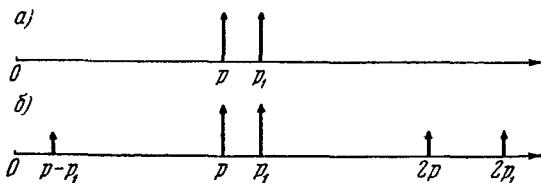


Рис. 127.

показан на рис. 127, а и спектр после квадратичного детектора — на рис. 127, б. Следовательно, гетеродин с детектором трансформирует радиочастоту в звуковую. Очевидно, что в таком виде гетеродин может быть применен для трансформации частоты колебаний вообще, как, например, в супергетеродине.

*) Частота местного генератора p_1 отличается от p на величину звуковой частоты.

§ 40. Супергетеродин

Супергетеродин — одна из распространенных схем современного радиоприемника, предназначенного для надежного приема слабых радиосигналов.

В отличие от приемника прямого усиления, в котором происходит усиление сигналов высокой частоты до детектирования, в супергетеродине основное усиление происходит на *постоянной частоте*, не зависящей от частоты принимаемой станции, на так называемой «промежуточной частоте». Усиление колебаний очень

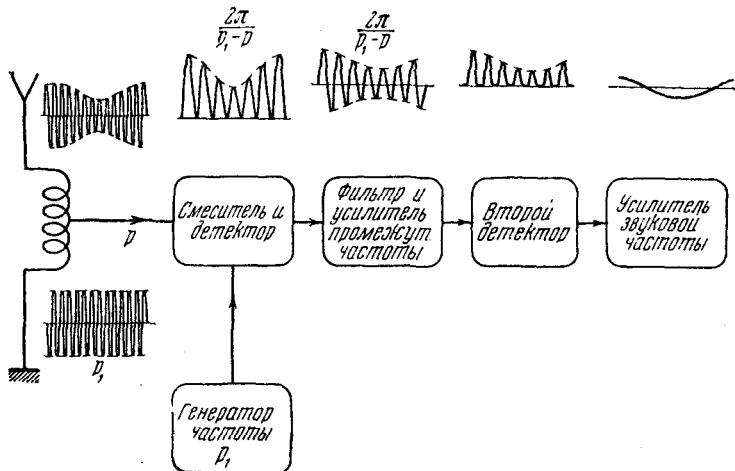


Рис. 128.

высоких частот представляет значительные трудности из-за паразитных емкостей, наличие которых ведет или к снижению коэффициента усиления, или к генерации. Поэтому в супергетеродине на принятый сигнал частоты, близкой к p , может быть немного усиленный, накладывают колебания от местного генератора (гетеродина) частоты p_1 .

Разность несущей частоты p и частоты гетеродина p_1 всегда остается определенной (тоже высокой) частотой. Оба сигнала поступают на детектор, а затем в фильтр, который выделяет колебания, близкие к разностной ($p_1 - p$) «промежуточной» частоте.

Далее стоит резонансный усилитель — усилитель «промежуточной» частоты, настроенный на частоту $p_1 - p$. Так как один из двух сигналов, подаваемых на детектор, модулирован звуковой частотой, то, как легко понять, будут модулированы этой же звуковой частотой и колебания промежуточной частоты, частоты

$p_1 - p$. После усилителя промежуточной частоты колебания поступают на второй детектор, который уже выделяет колебания звуковой частоты. В свою очередь, колебания звуковой частоты поступают на усилитель низкой частоты, если в этом есть необходимость. Настройка приемного контура на частоту принимаемой станции происходит одновременно с изменением частоты гетеродина, так как подвижные пластины конденсаторов обоих контуров (приемного и гетеродина) укреплены на одной оси («блок конденсаторов»).

Спектр сигнала

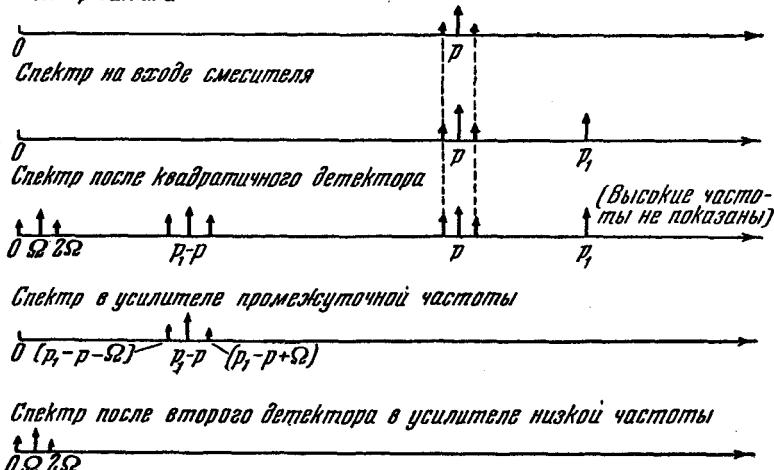


Рис. 129.

Схема основных элементов супергетеродина показана на рис. 128. Над каждым элементом даны чертежи, поясняющие характер колебаний в каждом из каскадов. Последовательная трансформация спектра колебаний показана на рис. 129.

Основное усиление происходит на промежуточной частоте (в обычных радиоприемниках она равна 460—480 кгц). Подаваемый на второй детектор сигнал имеет амплитуду порядка нескольких вольт, и поэтому здесь обычно ставят в качестве детектора диод. В специальных приемниках ультравысоких частот, например для телевидения, иногда производят последовательно несколько раз трансформацию частоты.

Г Л А В А 8

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

В предыдущих главах рассматривались только *собственные и вынужденные колебания*. При собственных колебаниях система, совершающая колебания, *изолирована от всяких внешних воздействий*. При вынужденных колебаниях, имеющих место наряду с собственными, на систему действует переменная внешняя сила; математически это выражается в том, что в уравнение входит член, зависящий явно от времени.

Но возможно внешнее воздействие на колебательную систему совсем иного вида: *непосредственно на систему не действует внешняя сила, но параметры системы (входящие в коэффициенты уравнения) явно зависят от времени*. Внешнее воздействие по определенному закону изменяет параметры системы.

Колебания, имеющие место в системе, при этих условиях называются *параметрическими*, они могут быть *затухающими и нарастающими* со временем. Главный интерес при изучении этих колебаний представляют нарастающие колебания и определение условий их возникновения. Явление возникновения нарастающих колебаний при параметрическом воздействии обычно называют *параметрическим возбуждением колебаний* (или *параметрическим резонансом*).

Основные законы параметрического резонанса и будут рассмотрены в этой главе.

§ 41. Раскачивание качелей

Простейшим примером параметрического возбуждения колебаний является раскачивание качелей. Качели в данном случае можно представить в виде маятника («математического») с переменной длиной.

Пусть длина l маятника изменяется по гармоническому закону (рис. 130), точка A совершает колебания с частотой p и амплитудой a .

Тогда уравнение вращения около оси, проходящей через точку O , можно записать так:

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = -mgl \sin \varphi,$$

или

$$ml^2\ddot{\varphi} + 2ml\dot{\varphi}\frac{dl}{dt} + mgl \sin \varphi = 0. \quad (41.1)$$

Положим, что

$$l = l_0 \left(1 + \frac{a}{l_0} \cos pt\right). \quad (41.2)$$

Будем рассматривать задачу о колебаниях маятника при следующих предположениях: $a/l_0 \ll 1$, т. е. длина маятника мало изменяется по сравнению со средней длиной маятника l_0 , амплитуды

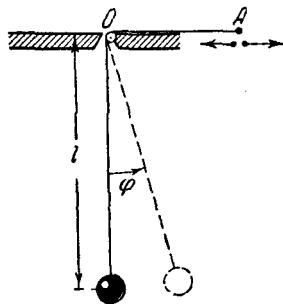


Рис. 130.

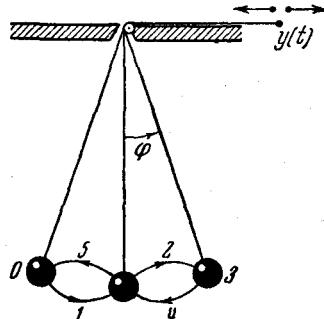


Рис. 131.

колебаний маятника малы: $\sin \varphi \approx \varphi$. Тогда уравнение движения (41.1) можно записать в таком виде:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_0 + a \cos pt} \varphi = 0, \quad (41.3)$$

или в общем виде

$$\ddot{\varphi} + \psi(t)\varphi = 0. \quad (41.4)$$

Уравнение (41.4) представляет уравнение колебаний почти «гармонической» системы, «частота» которой зависит явно от времени — это и есть простейший вид уравнения системы, в которой могут возникнуть нарастающие параметрические колебания. О решении уравнения (41.3) скажем далее, а теперь простыми способами проанализируем явления, которые могут иметь место при периодическом изменении длины маятника.

Допустим, что по какой-то внешней причине (от случайного толчка) маятник совершает собственные колебания с частотой, соответствующей примерно

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}},$$

где g — ускорение силы тяжести. В это же время изменяется и длина маятника. Пусть частота изменений длины маятника в два раза больше частоты собственных колебаний и фаза такова, как показано на рис. 131 и 132.

Груз m совершает движение так: от точки 1 до точки 2 груз поднимается, от точки 2 до точки 4 опускается и т. д., как обозначено стрелками на рис. 131. Колебания точки подвеса $y(t)$ и колебания маятника $\phi(t)$ изображены на рис. 132.

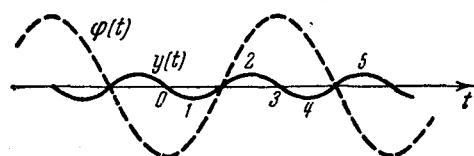


Рис. 132.

Можно заметить, что когда маятник имеет малую скорость (находится близко к крайнему положению), груз *опускается*, а когда маятник имеет наибольшую скорость колебаний (проходит около положения равновесия), груз *поднимается*. Отсюда можно заключить, что натяжение нити при *поднимании* груза *больше*, чем при *опускании*. А это значит: внешняя система, которая изменяет длину маятника, *совершает положительную работу*, передает энергию маятнику. Амплитуда колебаний маятника в этом случае должна возрастать, если нет трения при движении маятника. При наличии трения, если работа внешней системы будет больше потерь энергии на трение при колебаниях, то амплитуда колебаний будет также возрастать. Это явление называется *параметрическим резонансом*. Таким способом раскачиваются на качелях, приседая и поднимаясь в такт с качаниями качелей.

§ 42. Схематический расчет параметрических колебаний

Ради простоты выкладок и выяснения физической сущности явления рассмотрим схематическую модель системы, совершающей параметрические колебания, в которой длина маятника изменяется скачком. Как и ранее, положим, что период изменения длины l в два раза менее периода собственных колебаний маятника, а фаза изменения такова, что подъем происходит в тот момент, когда маятник проходит через равновесное положение

(рис. 133). Работа внешней силы при подъеме массы m будет

$$mga + \frac{mv^2}{l_0} a, \quad (42.1)$$

где $v = l_0\Phi_0\omega$ — скорость маятника в среднем положении, a — величина подъема, Φ_0 — амплитуда колебаний. К силе тяжести прибавляется еще центробежная сила mv^2/l_0 . Работа (42.1) совершена извне внешней системой при поднимании груза маятника m .

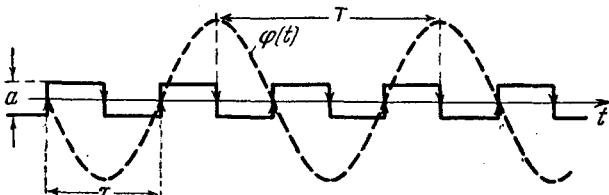


Рис. 133.

При опускании маятника в крайней точке, где скорость равна нулю ($v = 0$), работа, совершенная маятником над внешней системой, равна

$$mga \cos \Phi_0$$

или, при малом Φ_0 ,

$$mga \left(1 - \frac{1}{2}\Phi_0^2\right). \quad (42.2)$$

Это — энергия, отданная маятником внешней системе при опускании груза m . Таким образом, за период колебаний T маятник получит энергию

$$\Delta E = 2a \left(\frac{mv^2}{l_0} + \frac{mg}{2}\Phi_0^2\right).$$

Полагая, что $\frac{a}{l} \ll 1$ и $\Phi_0 \ll 1$, можно по закону сохранения энергии приближенно считать:

$$\frac{mv^2}{2} \approx \frac{1}{2} mgl_0\Phi_0^2.$$

Тогда

$$\Delta E \approx 6 \frac{a}{l_0} \frac{mv^2}{2}$$

или, обозначая полную энергию колебаний $E = \frac{mv^2}{2}$, можем так записать;

$$\Delta E \approx 6 \frac{a}{l_0} E. \quad (42.3)$$

Через период энергия колебаний увеличивается на величину, пропорциональную всей энергии колебаний. Можно показать, что в этом случае энергия колебаний возрастает по показательному закону, а именно, если в некоторое время энергия колебаний была E_0 , то через n периодов она будет

$$E_n = E_0 e^{n\alpha T}, \quad (42.4)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{T} \ln \left(1 + \frac{6a}{l_0} \right).$$

Важно, что с увеличением времени рост энергии будет увеличиваться, амплитуда колебаний будет быстрей нарастать.

Если в системе есть трение, то нарастание колебаний имеет место только в том случае, когда работа внешних сил больше потерь энергии на трение за период. Потери на трение можно приблизенно определить следующим образом. Пусть коэффициент трения равен h , тогда работа момента сил трения $h\dot{\varphi}$ за период, при условии, что $\varPhi \approx \Phi_0 \sin \omega_0 t$, будет

$$\Delta W = \int_0^T h\dot{\varphi}^2 dt = \omega_0^2 h \Phi_0^2 \int_0^T \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{1}{2} h \omega_0^2 \Phi_0^2 T. \quad (42.5)$$

Вспоминая, что полная энергия $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 \Phi_0^2 l_0^2}{2}$ и декремент затухания (4.9) $\vartheta \approx \frac{hT}{2ml_0}$, получаем

$$\Delta W \approx 2\vartheta E. \quad (42.6)$$

Убыль энергии за период вследствие трения при почти синусоидальных колебаниях пропорциональна энергии колебаний.

Таким образом, условие возрастания колебаний или условие *параметрического возбуждения* колебаний получим, сравнивая (42.3) и (42.6), в следующем виде:

$$\frac{3a}{l_0} > \vartheta. \quad (42.7)$$

Заметим, что при $3a/l_0 = \vartheta$ теоретически должны существовать незатухающие колебания с любой амплитудой, при $3a/l_0 < \vartheta$ колебания будут затухать. Режим колебаний, соответствующий точке $3a/l_0 = \vartheta$, не может физически осуществиться, так как при любом, даже очень небольшом изменении параметров система перейдет или в область нарастающих, или в область затухающих колебаний.

Параметрический резонанс существенно отличается от обычного резонанса тем, что колебания теоретически должны бы

нарастать до бесконечной амплитуды даже при наличии трения в системе, в отличие от обычного резонанса. В действительности же наблюдаются периодические колебания при параметрическом резонансе, как, например, в случае раскачивания качелей, а изложенные рассуждения не объясняют существования таких колебаний. Фактически только при малых амплитудах, когда система линейна, происходит такое нарастание энергии, о котором шла речь в теории. С увеличением амплитуды колебаний существенную роль будут играть нелинейные члены уравнения, которые не учитывались, поэтому амплитуда колебаний будет ограниченной. Таким образом, вопрос о существовании устойчивых периодических движений в системе с периодическими коэффициентами относится к нелинейной теории колебаний.

Если же условия параметрического резонанса, например (42.7), не соблюдаются, то в системе будут иметь место после толчка в любой момент времени только затухающие параметрические колебания.

§ 43. Области параметрического резонанса

Анализируя параметрический резонанс, мы считали, что период изменения параметра точно в два раза меньше периода собственных колебаний. Примерно такая же картина будет наблюдаться, если период изменения параметра будет *близок* по величине к половине собственного периода. Только здесь будет наблюдаться влияние сдвига фаз между колебаниями маятника

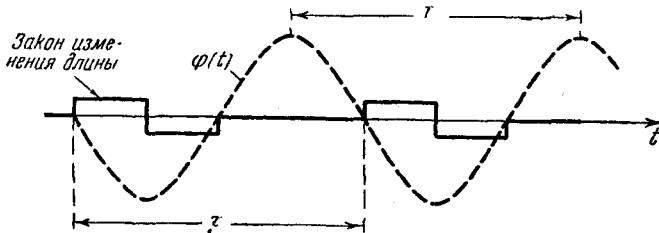


Рис. 134.

и изменением длины и параметрические колебания (затухающие) и нарастающие) будут иметь характер биений.

Такое простое рассмотрение приводит к мысли, что параметрический резонанс возможен и при других соотношениях периодов изменения параметра и собственных колебаний. Например, возрастающие параметрические колебания возможны, если *периоды совпадают*, т. е. за полупериод собственных колебаний маятник так же поднимается и опускается, как и ранее, а в следующий полупериод длина остается неизменной и т. д. (рис. 134).

Вспоминая условие (42.7), приходим к выводу, что в этом случае условие параметрического резонанса будет

$$\frac{3a}{l_0} > 2\theta, \quad (43.1)$$

так как только за полупериод энергия передается маятнику. При том же затухании для возбуждения колебаний нужна большая глубина модуляции параметра, чем в предыдущем случае (§ 42), когда период изменения параметра был равен половине периода собственных колебаний.

Возможно возбуждение колебаний и в том случае, когда период изменения параметра τ равен $\frac{3}{2} T$, т. е. полутора периодам собственных колебаний, например, если поднимают и

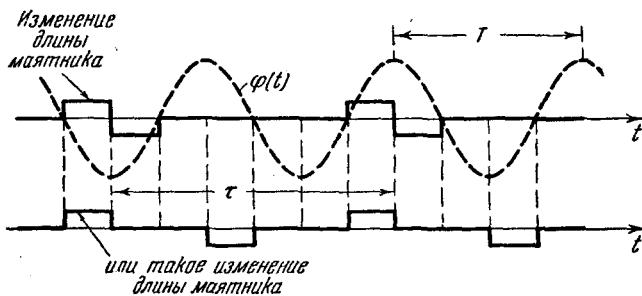


Рис. 135.

опускают груз маятника по одному разу за три полупериода собственных колебаний (рис. 135). В этом случае условие параметрического резонанса примет вид

$$\frac{a}{l_0} > \theta. \quad (43.2)$$

Рассуждая так же, можно показать, что при определенном соотношении фаз возможен параметрический резонанс, если период изменения параметра τ удовлетворяет следующему равенству:

$$\tau \approx n \frac{T}{2}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (43.3)$$

Как показывают более точные расчеты (§ 45) и опыты, явления параметрического резонанса будут иметь место, если условия (40.3) выполняются приближенно, или, что существуют определенные области по частоте модуляции параметра, в которых возможно наличие параметрического резонанса.

Изложенный анализ параметрических колебаний был слишком упрощен, мы полагали скачкообразную форму изменения параметра и определенную фазу по отношению к собственным колебаниям. Предположение о скачкообразном изменении параметра должно оказаться только на формулах для условий возбуждения и не должно иметь принципиального значения. Характер явления будет оставаться таким же и при плавном изменении параметра.

Но «фаза» имеет принципиальное значение. Действительно, если переменить фазу модуляции относительно собственных колебаний, то получим не нарастание колебаний, а, наоборот, затухание их. Таким образом, для нарастающих колебаний, при параметрическом резонансе необходима «правильная фаза» модуляции параметра относительно собственных колебаний.

Однако в действительности маленькие собственные колебания возникают в системе под действием случайных причин, могут иметь место всевозможные начальные фазы собственных колебаний. Когда период модуляции и глубина ее будут удовлетворять условиям нарастающих колебаний, всегда будут иметь место нарастающие колебания потому, что среди *случайно* возникающих собственных колебаний всегда найдется такое, фаза которого «правильна», и оно будет нарастать.

Теперь посмотрим качественно, что следует ожидать, если частота модуляции параметра будет немного отлична от частоты параметрического резонанса (43.3).

В этом случае на некотором участке времени «фаза» колебаний параметра будет содействовать нарастанию колебаний в системе и колебания будут нарастать. Далее «расстройка» по фазе между колебаниями и модуляцией параметра будет увеличиваться, и колебания перестанут нарастать, работа внешних сил будет равна нулю. Затем будет время, в течение которого фаза колебаний и модуляций параметра примет такие значения, при которых внешняя сила будет совершать вредную работу, и колебания, уменьшаясь, затухнут. В системе возникнут колебания, похожие на «биения». Но что будет преобладать, возрастание или затухание, таким простым рассуждением нельзя установить, мы слишком схематизировали явление. Этот вопрос окончательно может решить только математическая теория явления.

§ 44. Некоторые сведения из математической теории параметрических колебаний

Мы здесь не можем входить во все подробности теории, отметим только некоторые сведения из математической теории и укажем в следующем параграфе простейший способ определения границ (или областей) параметрического резонанса.

В общем виде уравнение параметрических колебаний в системе с одной степенью свободы имеет такой вид:

$$\ddot{x} + \psi_1(t) \dot{x} + \psi_2(t) x = 0, \quad (44.1)$$

где x — искомая функция, а $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — заданные периодические функции с периодом τ .

С помощью подстановки

$$x = ue^{-\frac{1}{2} \int \psi_1 dt}$$

можно преобразовать (44.1) к такому уравнению:

$$\ddot{u} + \Phi(t) u = 0, \quad (44.2)$$

где

$$\Phi(t) = \psi_2(t) - \frac{1}{2} \psi_1(t) - \frac{1}{4} \psi_1^2(t).$$

Таким образом, анализ в системе с затуханием (даже с периодически изменяющимся) всегда принципиально можно провести, зная решение уравнения с периодическими коэффициентами в системе без затухания.

Для уравнения

$$\ddot{u} + \Phi(t) u = 0, \quad (44.2)$$

как следует из математической теории, имеет место общее решение в таком виде:

$$u(t) = e^{\lambda_1 t} \varphi_1(t) + e^{\lambda_2 t} \varphi_2(t), \quad (44.3)$$

где λ_1 и λ_2 — некоторые постоянные, так называемые «характеристические показатели» уравнения, а $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — периодические функции с периодом τ .

Для физического анализа часто бывает достаточно определения λ_1 и λ_2 , или даже только действительных частей этих характеристических показателей: если определены только знаки действительных частей λ_1 и λ_2 , то известны условия, при которых возникает параметрический резонанс.

§ 45. Определение областей параметрического резонанса по Мейснеру

Положим, что длина маятника изменяется скачкообразно с периодом τ , как мы полагали в предыдущих параграфах, например так, как показано на рис. 131. Тогда по (44.3) можно составить общее решение из элементов такого вида:

$$u(t + \tau) = e^{\lambda \tau} u(t). \quad (45.1)$$

В самом деле по (44.3):

$$u(t) = e^{\lambda t} \varphi(t), \text{ где } \varphi(t + \tau) = \varphi(t),$$

тогда

$$u(t + \tau) = e^{\lambda t} e^{\lambda \tau} \varphi(t + \tau) = e^{\lambda \tau} e^{\lambda t} \varphi(t) = e^{\lambda \tau} u(t).$$

Следовательно, решение вида (45.1) через период τ изменяется в a раз, где

$$a = e^{\lambda \tau}. \quad (45.2)$$

Очевидно, что если $|a| > 1$, то колебания будут возрастать с течением времени.

Уравнение движения маятника при скачкообразном изменении длины (рис. 133) можно записать так:

$$\text{при } 0 < t < \frac{1}{2} \tau \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l_0 - \frac{a}{2}} \varphi = 0, \quad (45.3)$$

$$\text{при } \frac{1}{2} \tau < t < \tau \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l_0 + \frac{a}{2}} \varphi = 0$$

и т. д.

Если обозначим

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l_0 - \frac{a}{2}}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l_0 + \frac{a}{2}}, \quad (45.4)$$

то можем записать решение на каждом участке времени так:

$$\text{при } 0 < t < \frac{1}{2} \tau$$

$$\varphi_1 = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t,$$

$$\text{при } \frac{1}{2} \tau < t < \tau$$

$$\varphi_2 = A_1 \cos \omega_2 t + B_1 \sin \omega_2 t. \quad (45.5)$$

Совокупность этих двух решений линейных уравнений можно рассматривать как решение уравнения с периодическим изменением параметра. Для этого необходимо, чтобы эти решения удовлетворяли следующим условиям:

$$\varphi_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = \varphi_2\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad a\varphi_1(0) = \varphi_2(\tau), \quad (45.6)$$

$$\dot{\varphi}_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = \dot{\varphi}_2\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad a\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(\tau).$$

Условия (45.6) требуют непрерывности решения и его производной и «увеличения» решения через период на множитель a (45.2).

Интересно знать возможные величины α в зависимости от параметров системы. Если это будет найдено, то будут установлены условия возникновения параметрического резонанса.

Подставив φ_1 и φ_2 в условия (45.6), получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} A \cos \frac{1}{2} \omega_1 \tau + B \sin \frac{1}{2} \omega_1 \tau - A_1 \cos \frac{1}{2} \omega_2 \tau - B_1 \sin \frac{1}{2} \omega_2 \tau = 0, \\ -A \omega_1 \sin \frac{1}{2} \omega_1 \tau + B \omega_1 \cos \frac{1}{2} \omega_1 \tau + A_1 \omega_2 \sin \frac{1}{2} \omega_2 \tau - \\ -B_1 \omega_2 \cos \frac{1}{2} \omega_2 \tau = 0, \quad (45.7) \\ A\alpha - A_1 \cos \omega_2 \tau - B_1 \sin \omega_2 \tau = 0, \\ B\omega_1 \alpha + A_1 \omega_2 \sin \omega_2 \tau - B_1 \omega_2 \cos \omega_2 \tau = 0. \end{aligned}$$

Система (45.7) — система четырех однородных уравнений относительно постоянных A , B , A_1 и B_1 ; она будет иметь нетривиальные решения только в том случае, если определитель системы равен нулю:

$$\left| \begin{array}{cccc} \cos \frac{1}{2} \omega_1 \tau & \sin \frac{1}{2} \omega_1 \tau & -\cos \frac{1}{2} \omega_2 \tau & -\sin \frac{1}{2} \omega_2 \tau \\ -\omega_1 \sin \frac{1}{2} \omega_1 \tau & \omega_1 \cos \frac{1}{2} \omega_1 \tau & \omega_2 \sin \frac{1}{2} \omega_2 \tau & -\omega_2 \cos \frac{1}{2} \omega_2 \tau \\ \alpha & 0 & -\cos \omega_2 \tau & -\sin \omega_2 \tau \\ 0 & \alpha \omega_1 & \omega_2 \sin \omega_2 \tau & -\omega_2 \cos \omega_2 \tau \end{array} \right| = 0. \quad (45.8)$$

Определитель (45.8) есть квадратное уравнение относительно α , его можно записать так:

$$\alpha^2 - 2P\alpha + 1 = 0, \quad (45.9)$$

где

$$P = \cos \frac{1}{2} \omega_1 \tau \cos \frac{1}{2} \omega_2 \tau - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1 \omega_2} \sin \frac{1}{2} \omega_1 \tau \sin \frac{1}{2} \omega_2 \tau. \quad (45.10)$$

Решение (45.9) будет

$$\alpha_{1,2} = P \pm \sqrt{P^2 - 1}.$$

Заметим, что $\alpha_1 \alpha_2 = 1$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 2P$.

При $P > 1$ корни действительны и положительны, один из них больше единицы. Следовательно, при $P > 1$ в системе возможны нарастающие решения. При $P < -1$ корни действительны, причем один из них отрицателен и по модулю больше единицы. В этом случае решения также будут нарастающими, но отклонение при колебаниях через период τ меняет свой знак.

При $-1 < P < +1$ решения для a будут комплексны, причем $|a_1| = |a_2| = 1$. Действительно, в данном случае

$$a_1 = P + i\sqrt{1 - P^2}, \quad a_2 = P - i\sqrt{1 - P^2}.$$

И, следовательно, $|a_1| = |a_2| = 1$. Это значит, что решения в данном случае не будут возрастающими.

Следовательно, при $P = 1$ $a_1 = a_2 = 1$ и при $P = -1$ $a_1 = a_2 = -1$; или при $|P| = 1$ решения будут чисто *периодическими*, причем при $P = 1$ решение будет иметь период τ , а при $P = -1$ период будет равен 2τ .

Таким образом, условие $|P| = 1$ представляет те значения параметров, при которых система находится на границе области нарастающих решений, на границе области параметрического резонанса.

Обозначим:

$\omega^2 = g/l_0$ — квадрат средней собственной частоты маятника;

$\varepsilon = a/2l_0$ — глубина модуляции длины маятника;

$\gamma = \tau/T = \omega\tau/2\pi$ — отношение периода модуляции параметра к периоду собственных колебаний маятника при длине его, равной l_0 . Вспомним определения собственных частот ω_1 и ω_2 (45.4) и запишем в новых обозначениях:

$$\omega_1\tau = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1-\varepsilon}} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon}},$$

$$\omega_2\tau = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\varepsilon}} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1+\varepsilon}},$$

$$\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Выражение (45.10) для P можно теперь записать так:

$$P = \cos \frac{\pi\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon}} \cos \frac{\pi\gamma}{\sqrt{1+\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin \frac{\pi\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon}} \sin \frac{\pi\gamma}{\sqrt{1+\varepsilon}}. \quad (45.11)$$

Границы области параметрического резонанса определяются из условия $|P| = 1$.

Легко убедиться, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ условие для границ примет такой вид:

$$\cos 2\pi\gamma \rightarrow \pm 1, \quad (45.12)$$

это условие выполняется при

$$\gamma = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

Поэтому кривые на плоскости (ε, γ) , соответствующие периодическим решениям, будут пересекать ось γ в точках $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

(рис. 136). Заштрихованные области на рис. 136 соответствуют тем значениям ε и γ , при которых $|P| > 1$, или при которых будет иметь место параметрический резонанс. Границы этих областей, соответствующие $|P| = 1$, дают те значения ε и γ , при которых будут периодические решения. Границы области параметрического резонанса около точек $\gamma = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{2}$, $\gamma = \frac{5}{2}$ и т. д. соответствуют значению $P = -1$ и, следовательно, период движений, относящихся к точкам этих границ, будет равен 2π , двум периодам изменения параметра. Границы областей параметри-

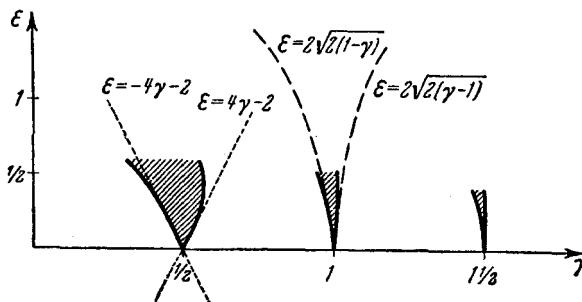


Рис. 136.

ческого резонанса около точек $\gamma = 1, 2, 3, \dots$ соответствуют $P = 1$, т. е. периодическим решениям с периодом изменения параметра τ .

Вычисления показывают, что с увеличением ε области параметрического резонанса расширяются, резонанс возможен не только при точном совпадении частот, но и вблизи этих частот. С увеличением γ области параметрического резонанса сужаются; это легко видеть, если приближенно определить границы области параметрического резонанса при малых значениях ε вблизи точек $\gamma = \frac{1}{2}, 1, \dots$ и т. д., разлагая (45.11) в ряд по малой величине ε . На рис. 136 пунктиром показаны эти границы: вблизи $\gamma = \frac{1}{2}$ они представляют пересекающиеся прямые, а вблизи $\gamma = 1$ — отрезки соприкасающихся в точке $\gamma = 1$ парабол. Уравнения границ записаны на рис. 136.

Наличие затухания в системе сократит области параметрического резонанса.

Следует заметить, что все математические вычисления для скачкообразного изменения параметра сделаны без всяких приближений и поэтому выражение, полученное из (45.11) при $P = 1$, определяет границу параметрического резонанса при любом значении ε . В случае синусоидального изменения параметра при малом ε можно приближенно определить границы областей параметрического резонанса методом последовательных приближений.

§ 46. Примеры параметрических колебаний

Параметрические колебания довольно часто встречаются в технике. В радиотехнике есть ряд устройств, связанных с явлением параметрического резонанса в электрических контурах.

В электротехнике известна параметрическая машина Мандельштама — Папалекси. Машина может служить генератором переменного электрического тока. Принцип ее устройства показан на рис. 137.

В катушку электрического контура вносят алюминиевый стержень B , затем периодически изменяют глубину погружения стержня с частотой, соответствующей $\gamma = 1/2$, которая близка к удвоенной собственной частоте контура, омическое сопротивление R представляет нагрузку. Конечно, в образцах опытных машин модуляция индуктивности контура осуществляется более удобным технически способом, например вращением зубчатого алюминиевого диска.

Колебания тока в такой машине — периодические с постоянной амплитудой. Нелинейные закономерности, которые мы не рассматривали, допускают существование установившихся периодических колебаний при параметрическом резонансе.

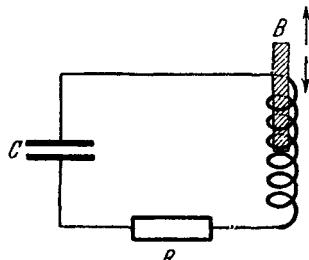


Рис. 137.

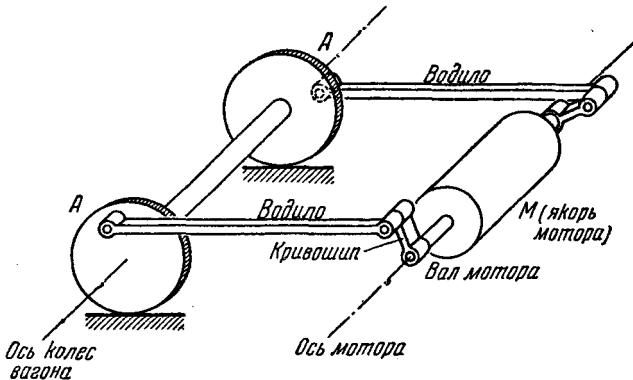


Рис. 138.

Можно привести еще пример: колебания в спарниках электровозов. Схема устройства, передающего движение от мотора к колесам вагона, показана на рис. 138. Вал мотора через кривошипы, имеющиеся на его концах, и водила соединен с колесами вагона. Во время хода точка A совершает круговое движение

(относительно вагона). Рассмотрим крутильные колебания якоря M , обусловленные упругостью вала, кривошипа и водила и моментом инерции якоря. Можно показать, что коэффициент жесткости якоря на кручение зависит от положения точки A на окружности колеса и, следовательно, частота крутильных колебаний якоря будет изменяться периодически во время хода вагона.

При скорости вагона, соответствующей области параметрического резонанса, возникали очень большие вибрации, которые приводили к авариям. Исследование законов параметрических колебаний позволило устраниить поломки и аварии в описываемой системе.

За последние годы явление параметрических колебаний нашло большое применение в радиотехнике сверхвысоких частот в виде *параметрических усилителей*, так как ранее применявшиеся ламповые усилители практически непригодны для усиления очень слабых сигналов высоких частот из-за собственных шумов. Основным элементом таких усилителей является электрический контур с периодически изменяемой емкостью (или индуктивностью). Часто в качестве переменной емкости употребляют полупроводниковый диод, емкость которого зависит от напряжения и поэтому ее очень просто изменять. Выбирают частоту и величину изменения емкости так, чтобы вся система была близка к границе параметрического резонанса. При этих условиях слабые внешние сигналы определенной частоты вызывают в контуре вынужденные колебания значительной амплитуды. Этот эффект и позволяет применять такой контур в качестве усилителя. Собственные шумы контура с переменной емкостью (особенно при наличии охлаждения) относительно очень малы. Только квантовые усилители могут конкурировать с параметрическими усилителями при приеме слабых сигналов сверхвысоких частот.

ГЛАВА 9

АВТОКОЛЕБАНИЯ

§ 47. Общие сведения об автоколебаниях

В главе 1, § 6 были рассмотрены системы, в которых возможны почти синусоидальные колебания с нарастающей амплитудой. В таких системах возможны автоколебательные процессы.

Автоколебания принципиально отличаются от остальных колебательных процессов тем, что для поддержания стационарного режима в таких системах *не нужно периодических воздействий извне*. Колебания скрипичной струны при равномерном движении смычка, колебания в генераторе радиоволн, колебания в органной трубе, колебания маятника часов и т. д. являются типичными примерами автоколебательных процессов.

Во всякой реальной системе при стационарном колебательном процессе энергия переходит в тепло или передается другим телам. Поэтому каждая автоколебательная система должна иметь источник энергии, который покрывал бы ее расход. Обычно источник энергии устроен так, что он дает *постоянное* во времени воздействие. Устройство автоколебательной системы таково, что при колебаниях в ней источник производит *переменное* действие, которое и поддерживает стационарный колебательный процесс. Переменное воздействие обеспечивает необходимый приток энергии, покрывающий потери при колебаниях.

При анализе автоколебательных систем (правда, не для всех случаев) полезно различать следующие основные элементы: 1) основную колебательную систему и 2) звено «обратной связи», управляющее источником энергии. Основная колебательная система в изолированном виде способна совершать затухающие собственные колебания. Обратная связь связывает основную колебательную систему с источником. Колебания в основной системе так влияют на источник энергии, что он дает переменную силу, действующую через обратную связь на основную систему.

Рассмотрим для примера простую схему генератора электромагнитных колебаний — схему лампового генератора (рис. 139).

Колебательный контур, состоящий из L , R и C и находящийся в анодной цепи лампы, представляет основную колебательную систему. Катушка L' и катодная лампа составляют цепь обратной связи.

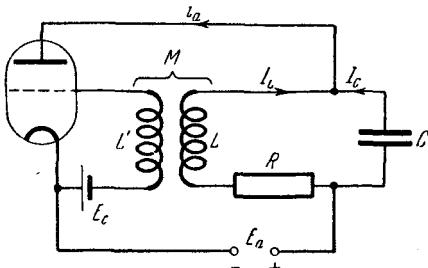


Рис. 139.

Механизм возникновения колебаний можно представить себе так: от какого-то небольшого случайноготолчка в контуре LC возникли собственные колебания, которые через катушку L' воздействуют на сетку лампы и тем самым изменяют ток i_a , идущий через лампу и контур: колебания тока i_a , проходя через контур, усиливают колебания в нем.

Амплитуда колебаний в контуре начинает возрастать, пока колебания анодного тока не достигнут наибольшей возможной величины. Процесс нарастания колебаний называется *самовозбуждением*. При установившемся автоколебательном процессе все потери энергии при колебаниях восполняет анодная батарея.

Основные характерные особенности автоколебательного процесса:

- 1) «самовозбуждение» колебаний,
- 2) зависимость частоты и амплитуды установившихся автоколебаний только от параметров системы,
- 3) произвольность фазы автоколебаний.

Здесь уместно вспомнить, что при собственных колебаниях частота определяется параметрами системы, а амплитуда и фаза — начальными условиями; при вынужденных колебаниях частота определяется внешней силой, а амплитуда и фаза определяются системой и внешней силой.

§ 48. Генератор электромагнитных колебаний

Схема генератора показана на рис. 139 и условия самовозбуждения автоколебаний были выведены в § 6. Теперь более подробно рассмотрим теорию колебаний в генераторе.

Пусть в контуре по какой-либо причине возникли колебания; тогда они будут иметь место во всех цепях системы. Обозначим: I_C — ток через конденсатор, I_L — ток через катушку контура и i_a — анодный ток лампы. Параметры катушки связи и контура

указанны на рис. 139. Запишем уравнение для напряжений в контуре:

$$L\dot{I}_L + RI_L - \frac{1}{C} \int I_C dt = 0, \quad (48.1)$$

и условие равенства токов в разветвлении:

$$i_a = I_L + I_C. \quad (48.2)$$

Обозначив, как обычно, $\omega^2 = 1/LC$ и $2\delta = R/L$ и исключая I_C из (48.1) и (48.2), получим основное уравнение генератора

$$\ddot{I}_L + 2\delta I_L + \omega^2 I_L = \omega^2 i_a. \quad (48.3)$$

Анодный ток лампы i_a зависит от разности потенциалов между сеткой и катодом V_c и разности потенциалов V_a между анодом и катодом: i_a есть функция $V_c + DV_a$, где D — константа.

Величину

$$V_y = V_c + DV_a \quad (48.4)$$

называют управляющим напряжением, а D «проницаемостью».

Зависимость i_a от V_y — обычно нелинейная и имеет примерно вид, показанный жирной линией на рис. 140*). Точка A на характеристистике лампы, соответствующая режиму лампы в отсутствие колебаний, называется «рабочей точкой». Если омическим сопротивлением контура можно пренебречь, то управляющее напряжение в рабочей точке определяется постоянным напряжением батареи:

$$V_{y0} = E_c + DE_a, \quad (48.5)$$

где E_c — постоянное напряжение сеточной батареи, а E_a — анодной.

В том случае, когда рабочая точка выбрана на середине характеристики, для математического анализа генератора можно приближенно представить характеристику лампы на рабочем участке полиномом третьей степени такого вида:

$$i_a = i_{a0} + S \left[\Delta V - \frac{(\Delta V)^3}{3K^2} \right], \quad (48.6)$$

*) Характеристики анодного тока современных электронных ламп обычно не имеют верхнего изгиба, но фактически анодный ток ограничен по величине вследствие других причин. Это приводит к непринципиальному усложнению теории. Поэтому в начале изучения электронных генераторов целесообразно рассмотреть более простой случай характеристики, указанной на рис. 140.

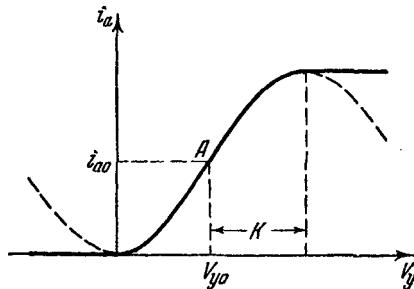


Рис. 140.

где $\Delta V = V_y - V_{y0}$ есть отклонение управляющего напряжения от постоянного V_{y0} — равновесного. Теоретическая кривая (48.6) отмечена на рис. 140 пунктиром.

Постоянные величины S и K определяются свойствами лампы: S — крутизна характеристики, измеряемая обычно в ma/v , представляет производную тока по напряжению в рабочей точке A ; K — «напряжение насыщения», которое, как можно видеть из формулы (48.6), равно такому значению ΔV , при котором $di_a/d(\Delta V) = 0$.

Заметим, что теоретическая кривая по формуле (48.6) только на некотором участке вблизи точки A будет близка к действительной зависимости, примерно на участке величиной $2K$. Если при колебаниях напряжение ΔV будет значительно выходить из пределов этого участка, то теория, учитывающая закон, представленный (48.6), не будет уже количественно отражать процессов в генераторе. Однако такое «грубое приближение», учитывающее нелинейную зависимость анодного тока от управляющего напряжения, будет гораздо точнее и вернее отображать реальный процесс, чем теория, предполагающая линейную зависимость между i_a и V_y , которую рассматривали выше (§ 6).

Если бы рабочая точка была выбрана не на середине характеристики, то для аппроксимации характеристики (рис. 140) полиномом надо было бы взять в (48.6) еще члены, содержащие вторую и другие степени ΔV .

Установим связь между управляющим напряжением и колебаниями в контуре. По схеме рис. 139 видно, что напряжение на аноде лампы V_a равно:

$$V_a = E_a - L \frac{dI_L}{dt} - RI_L. \quad (48.7)$$

Полагаем, что во время процесса ток в цепи сетки равен нулю; тогда напряжение на сетке лампы

$$V_c = E_c \pm M \frac{dI_L}{dt}. \quad (48.8)$$

В формуле (48.8) перед коэффициентом связи M поставлено два знака, так как перемена концов одной из катушек при неизменном расположении их ведет к изменению знака коэффициента M .

Подставив (48.7) и (48.8) в формулу для управляющего напряжения (48.4), получим:

$$V_y = V_c + DV_a = E_c + DE_a + (\pm M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DR/I_L. \quad (48.9)$$

Вспоминая (48.5), изменение управляющего напряжения можно записать так:

$$\Delta V = (\pm M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DRI_L. \quad (48.10)$$

Предполагаем, что в генераторе будут иметь место почти синусоидальные процессы с частотой, близкой к собственной частоте ω . Тогда при достаточно большой добротности контура можно пренебречь последним членом в (48.10). Действительно, $DLDI_L/dt$ имеет амплитуду $DL\omega I_{L0}$, где I_{L0} — амплитуда тока; последний член имеет амплитуду DRI_{L0} , которая при $Q = \frac{\omega L}{R}$ будет в Q раз меньше амплитуды предыдущего члена ($Q \gg 1$).

Введем новую переменную $x = I_L - i_{a0}$; тогда уравнение генератора (48.3), учитывая характеристику лампы (48.6) и (48.10), можно после преобразования записать так:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (a - \gamma \dot{x}^2) \dot{x}, \quad (48.11)$$

где для сокращения приняты следующие обозначения:

$$a = \omega^2 (\pm MS - LSD - RC),$$

$$\gamma = \omega^2 \frac{S(\pm M - LD)^3}{3K^2}. \quad (48.12)$$

Уравнение (48.11) — нелинейное дифференциальное уравнение, содержащее третью степень от \dot{x} . Таким образом, анализ процессов в генераторе сводится к решению и исследованию нелинейного дифференциального уравнения (48.11).

Прежде чем перейти к этому вопросу, отметим, что важный практический вопрос о возбуждении колебаний в генераторе, или, как говорят, о «самовозбуждении колебаний», можно решить (в данном случае) рассмотрением линейного приближения уравнения (48.11), полагая в нем $\gamma = 0$. Это физически значит, что мы пока рассматриваем только малые колебания около состояния равновесия, при которых характеристику лампы (48.6) можно считать линейной (см. рис. 140).

Тогда вместо (48.11) можем записать:

$$\ddot{x} - a\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (48.13)$$

Из этого уравнения видно, что колебания будут нарастать, если $a > 0$, или по (48.12)

$$MS - LDS - RC > 0. \quad (48.14)$$

Обычно член LDS очень мал; тогда, как и ранее (§ 6), получаем «условие самовозбуждения»

$$M > \frac{RC}{S} \text{ или } S > \frac{RC}{M}. \quad (48.15)$$

В том случае, когда генератор имеет колебательный контур в цепи катод — сетка, а катушку обратной связи в анодной цепи (рис. 141), уравнение генератора при тех же предположениях будет иметь несколько иной вид.

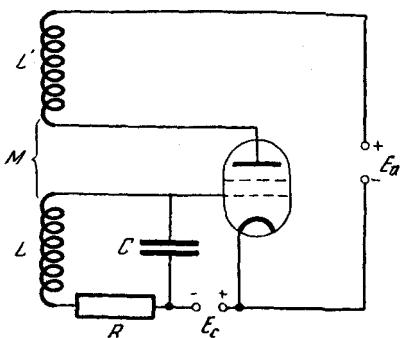


Рис. 141.

Если возьмем такую характеристику лампы, которая показана на рис. 140 и представлена (48.6), то уравнение генератора будет

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (a - \gamma x^2) \dot{x}, \quad (48.16)$$

где x — напряжение на конденсаторе контура, а

$$a = \pm M S \omega^2 - \frac{R}{L}, \quad (48.17)$$

$$\gamma = \pm \frac{\omega^2 M S}{K^2}.$$

Отличие (48.16) от (48.11), если не обращать внимания на

величину параметров a и γ , только в виде нелинейного члена: ранее в (48.11) было $\gamma \dot{x}^3$, теперь в (48.16) — $\gamma x^2 \dot{x}$. Рекомендуем читателю в качестве упражнения проделать вывод уравнения (48.16). Отметим, что при анализе уравнений (48.11) и (48.16) не будет принципиальной разницы между ними, кроме некоторого различия в окончательном результате, о котором будет сказано ниже.

§ 49. Анализ и решение нелинейного уравнения генератора

В математике нет регулярных методов решения нелинейных уравнений. Поэтому приходится пользоваться приближенными методами.

Многие методы приближенного решения нелинейного уравнения генератора разработаны советскими учеными и инженерами. Технические методы расчета электронных генераторов были созданы М. В. Шулейкиным, А. И. Бергом, М. А. Бонч-Бруевичем и др.; на основе этих методов Ю. Б. Кобзаревым и др. разработана «квазилинейная» теория генератора. Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым около 30 лет назад предложен символический метод решения нелинейных задач и, в частности, задачи об электронном генераторе. Примерно в то же время физиками и радиотехниками школы Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси на основе работ знаменитого русского математика А. М. Ляпунова и французского ученого А. Пуанкаре были предложены специальные методы анализа нелинейных уравнений автоколебательных систем. Изложение всех этих методов выходит за пределы нашей книги, поэтому мы ограничимся изложением только некоторых из них.

1. Метод переменной амплитуды (метод Вандер Поля)

Этот метод является простейшим способом приближенного решения уравнения генератора для случая, когда колебания в нем близки к синусоидальным. Математическое обоснование метода было дано Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси.

Допустим, что решение уравнения (48.11) имеет такой вид:

$$x(t) = A(t) \cos \omega t, \quad (49.1)$$

где $A(t)$ — «медленно меняющаяся» функция времени t . Или при изменении t на несколько периодов $T_0 = 2\pi/\omega$ величину $A(t)$ можно считать почти постоянной.

Справедливость представления решения в таком виде можно легко объяснить, если величины α и γ достаточно малы. Действительно, при $\alpha \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0$ решение (48.11) будет чисто гармоническим; если α и γ достаточно малы, решение должно быть близко к гармоническому, по крайней мере на некотором участке времени. При больших значениях α и γ предположение (49.1) сделать нельзя.

Но в случае генератора почти гармонических колебаний величины α и γ действительно являются малыми величинами и поэтому предположение (49.1) имеет определенные основания.

Математически условия медленности изменения $A(t)$ можно записать так:

$$\begin{aligned} T_0 \frac{dA}{dt} &\ll A \text{ или } \frac{dA}{dt} \ll \omega A, \\ T_0 \frac{d^2A}{dt^2} &\ll \frac{dA}{dt} \text{ или } \frac{d^2A}{dt^2} \ll \omega^2 A. \end{aligned} \quad (49.2)$$

Подставив (49.1) в уравнение генератора (48.11), получим:

$$\begin{aligned} -2 \frac{dA}{dt} \omega \sin \omega t + \frac{d^2A}{dt^2} \cos \omega t &= \left[\alpha - \gamma \left(-\omega A \sin \omega t + \frac{dA}{dt} \cos \omega t \right)^2 \right] \times \\ &\times \left(-\omega A \sin \omega t + \frac{dA}{dt} \cos \omega t \right). \end{aligned} \quad (49.3)$$

Принимая во внимание условия «медленности» (49.2), после некоторых простых тригонометрических преобразований можем написать уравнения (49.3) так:

$$\begin{aligned} \left(2 \frac{dA}{dt} - \alpha A + \frac{3}{4} \gamma \omega^2 A^3 \right) \sin \omega t &= \\ &= \frac{1}{4} \gamma \omega^2 A^3 \sin 3\omega t + \text{малые члены.} \end{aligned} \quad (49.4)$$

Далее предполагается, что функция $A(t)$ будет представлять приближенное решение уравнения генератора и тогда, когда

имеет место следующее дифференциальное уравнение для $A(t)$, так называемое «уравнение амплитуды»:

$$2 \frac{dA}{dt} - aA + \frac{3}{4} \gamma \omega^2 A^3 = 0. \quad (49.5)$$

Уравнение (49.5) можно понимать как следствие (49.4), если допустимо пренебречь в нем малыми членами и членом с частотой 3ω . Математически справедливость такого пренебрежения

здесь не обоснована, это сделано Мандельштамом и Папалексиси, о чем скажем ниже.

Теперь задача сводится к интегрированию линейного уравнения (49.5) для «амплитуды» $A(t)$, которое можно записать так:

$$2 \int \frac{dA}{\left(a - \frac{3}{4} \gamma \omega^2 A^2 \right) A} = t.$$

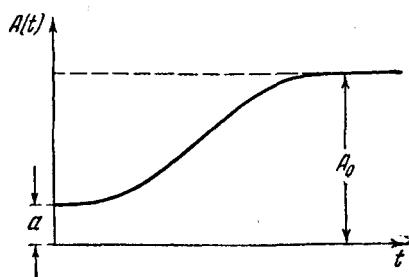


Рис. 142.

Выполняя интегрирование и преобразуя, получаем зависимость «амплитуды» $A(t)$ от времени:

$$A(t) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\frac{3}{4} \gamma \omega^2 - \left(\frac{3}{4} \gamma \omega^2 - \frac{a}{a^2} \right) e^{-at}}}, \quad (49.6)$$

где a — начальная «амплитуда». При $t \rightarrow \infty$ $A(t)$ стремится к пределу

$$A_0 = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{a}{3\gamma}}, \quad (49.7)$$

это — амплитуда стационарного автоколебательного режима.

График $A(t)$ показан на рис. 142. Амплитуда колебаний от некоторого начального значения a нарастает почти по показательному закону $a \exp \frac{at}{2}$, затем нарастание постепенно прекращается, и амплитуда становится постоянной. Колебания принимают стационарный характер, в генераторе имеет место *стационарный автоколебательный режим*.

Отметим, что только приближенно стационарный режим можно представлять себе как гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой A_0 . В действительности стационарный автоколебательный режим всегда *негармонический*, но достаточно близок по виду к тому гармоническому режиму, который найден теоретическим путем.

Картину возбуждения колебаний можно представлять теперь так. От некоторого начального толчка возникли колебания с «амплитудой» a , которые через некоторое время, «время установления», практически очень небольшое, превратятся в стационарные автоколебания.

Для того чтобы убедиться в том, что *стационарный периодический режим*, который теоретически будет осуществлен при $t \rightarrow \infty$, будет существовать и в реальной системе, необходимо исследовать (определить) устойчивость полученного стационарного режима. Это исследование можно сделать, анализируя (49.6) или, еще проще, прямо уравнение (49.5).

Действительно, пусть $A(t) > A_0$, т. е. «амплитуда» больше стационарной; тогда,

$$\frac{dA}{dt} < 0.$$

Следовательно, «амплитуда» убывает с течением времени и режим колебаний стремится к стационарному. Так же при $A(t) < A_0$ всегда

$$\frac{dA}{dt} > 0.$$

«Амплитуда» колебаний $A(t)$ от любых начальных значений стремится к стационарному значению A_0 . Следовательно, после переходного режима в генераторе, свободном от всяких внешних воздействий, возникает устойчивый стационарный периодический процесс.

Автоколебания на фазовой плоскости представляются так называемым *пределным циклом* (рис. 143). Пределный цикл есть замкнутая кривая на фазовой плоскости, к которой в пределе, при $t \rightarrow \infty$ стремятся все интегральные кривые. Изображающая точка внутри цикла движется по раскручивающейся спирале и приближается к *циклу*; а вне цикла движение происходит по скручивающейся спирали и точка также приближается к циклу.

Пределный цикл представляет *стационарный режим* с определенной амплитудой, не зависящей от начальных условий, а определяющейся только устройством системы. Существование предельного цикла на фазовой плоскости есть основной признак автоколебательной системы вообще. Очевидно, что при автоколебательном процессе фаза колебаний может быть любой.

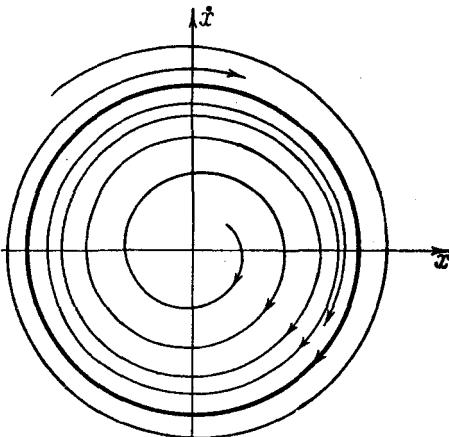


Рис. 143.

Действительные автоколебания в системе будут отличаться от синусоидальных, предельный цикл будет не эллипсом, но близкой к нему кривой. Стационарный гармонический режим с амплитудой A_0 очень близок к действительным автоколебаниям.

Таким образом, сравнительно простой приближенный метод правильно дает основные, существенные элементы физической картины процессов, возникающих в генераторе, и практически достаточно точно определяет величину колебаний.

Отметим для справок, что если генератор имеет контур в цепи сетка — катод (рис. 139), уравнение которого дано ранее (48.16), то амплитуда стационарного режима будет

$$A_0 = 2 \sqrt{\frac{a}{\gamma}}, \quad (49.8)$$

а уравнение для амплитуды

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} A \left(a - \frac{1}{4} \gamma A^2 \right). \quad (49.9)$$

Рекомендуем в качестве упражнения произвести проверку формул (49.8) и (49.9).

2. О б о с н о в а н и е м е т о д а м е д л е н н о м е п я ю щ и х с я а м п л и т у д

Хотя приближенное решение уравнений автоколебательных систем, изложенное в предыдущем разделе этого параграфа, вполне правильно, однако такое утверждение можно было сделать только после работы Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, посвященной этому вопросу. Действительно, получение основного «уравнения амплитуд» (49.5) из (49.4) после пренебрежения третьей гармоникой совершенно не очевидно. Так как методом переменной амплитуды пользуются при исследовании автоколебаний, то рассмотрим более строгий способ получения приближенных «уравнений амплитуд», предложенный Мандельштамом и Папалекси в более общей форме.

Уравнение автоколебательной системы, например (48.11) или (48.16), можно в общем виде записать так:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}), \quad (49.10)$$

где $f(x, \dot{x})$ — некоторый полином от x и \dot{x} , а μ — «малый параметр», некоторая малая величина, характеризующая относительную величину правой части. Очевидно, что при $\mu \rightarrow 0$ система обращается в гармоническую: если $\mu \neq 0$, но достаточно мало, то система близка к гармонической. Здесь рассматриваются только

такие нелинейные уравнения. Предположим, что решение уравнения (49.10) можно записать так:

$$x(t) = u(t) \sin \omega t - v(t) \cos \omega t, \quad (49.11)$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — некоторые функции времени. Очевидно, что это всегда можно сделать. Так как введено две функции u и v , то можно на них наложить еще одно дополнительное условие, которое и выберем в таком виде:

$$\dot{u} \sin \omega t - \dot{v} \cos \omega t = 0. \quad (49.12)$$

Подставляя (49.11) в уравнение (49.10) и учитывая (49.12), получаем:

$$\dot{u} \cos \omega t + \dot{v} \sin \omega t =$$

$$= \frac{\mu}{\omega} f \{ u \sin \omega t - v \cos \omega t, \quad \omega(u \cos \omega t + v \sin \omega t) \}. \quad (49.13)$$

Если умножим (49.13) на $\cos \omega t$, а (49.12) на $\sin \omega t$ и сложим, то получим:

$$\ddot{u} = \frac{\mu}{\omega} f \cos \omega t, \quad (49.14)$$

где в функцию f вставлены значения x и \dot{x} по формуле (49.11) с условием (49.12).

Точно таким же образом, умножая (49.13) на $\sin \omega t$, а (49.12) на $\cos \omega t$ и вычитая, получаем второе уравнение:

$$\ddot{v} = \frac{\mu}{\omega} f \sin \omega t. \quad (49.15)$$

$f(x, \dot{x})$ — по условию полином, поэтому правые части уравнений (49.14) и (49.15) можно представить всегда в виде функций от u и v , умноженных на $\sin n\omega t$ и $\cos n\omega t$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots, k$, k равно показателю старшей степени полинома f . Следовательно, уравнения (49.14) и (49.15) можно записать так:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \frac{\mu}{\omega} \left\{ f_1(u, v) + \sum_n \psi_n(u, v) \sin n\omega t + \varphi_n(u, v) \cos n\omega t \right\}, \\ \ddot{v} &= \frac{\mu}{\omega} \left\{ f_2(u, v) + \sum_n \psi'_n(u, v) \sin n\omega t + \varphi'_n(u, v) \cos n\omega t \right\}. \end{aligned} \quad (49.16)$$

Уравнения (49.16) являются точными уравнениями для определения функций u и v .

Пока сделана только замена переменных; вместо уравнения (49.10) имеются два уравнения первого порядка для функций u и v (49.16), которые связаны условием (49.12).

Однако, если иметь в виду решения, близкие к гармоническим, при малом μ , то следует ожидать, что $u(t)$ и $v(t)$ будут очень мало изменяться в течение периода $T_0 = 2\pi/\omega$, так как при $\mu = 0$ u и v будут постоянными величинами. Поэтому можно при приближенном определении u и v отбросить в уравнениях (49.16) члены, содержащие $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, и решать так называемые «укороченные» уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{u}_0 &= \frac{\mu}{\omega} f_1(u_0, v_0), \\ \dot{v}_0 &= \frac{\mu}{\omega} f_2(u_0, v_0),\end{aligned}\quad (49.17)$$

которые несравненно более просты, чем уравнения (49.16).

Авторами метода было строго доказано, что решения (49.17) на определенном участке времени, тем большем, чем меньше μ , близки к решениям (49.16). Доказательство простое, но требует значительного места, поэтому мы его опустим *).

Метод составления «укороченных» уравнений (49.17) здесь вполне ясен, и им часто пользуются при решении автоколебательных задач. Необходимо в правую часть уравнения (49.10) подставить

$$\begin{aligned}x &= u \sin \omega t - v \cos \omega t, \\ \dot{x} &= \omega(u \cos \omega t + v \sin \omega t),\end{aligned}$$

умножить на $\cos \omega t$ (или на $\sin \omega t$), выделить член, не содержащий синусов и косинусов, и подставить его в правую часть (49.17) вместо $\mu f_1(u_0, v_0)$ (или вместо $\mu f_2(u_0, v_0)$).

При таком способе получения «укороченных» уравнений для приближенного определения амплитуд $u_0(t)$ и $v_0(t)$ можно уяснить вопрос, почему в уравнении (49.16) члены с $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ не играют существенной роли. Так как функции u и v меняются очень мало за достаточно большое число периодов T_0 , то влияние в (49.16) членов с синусами и косинусами будет с течением времени компенсироваться, ибо среднее значение от гармонической функции равняется нулю.

Укороченные уравнения для генератора с контуром в цепи анода (уравнение (48.11)), будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{u}_0 &= \frac{1}{2} \left[\alpha u_0 - \frac{3}{4} \gamma \omega^2 u_0 (u_0^2 + v_0^2) \right], \\ \dot{v}_0 &= \frac{1}{2} \left[\alpha v_0 - \frac{3}{4} \gamma \omega^2 v_0 (u_0^2 + v_0^2) \right],\end{aligned}\quad (49.18)$$

*.) См. А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, 1959,

которые подстановкой $A^2 = u_0^2 + v_0^2$ могут быть сведены к уравнению

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} A \left(a - \frac{3}{4} \gamma \omega^2 A^2 \right), \quad (49.19)$$

совершенно совпадающему с (49.5). Из системы уравнений (49.18) видно, что

$$\frac{\dot{u}_0}{u_0} = \frac{\dot{v}_0}{v_0}.$$

Поэтому функции u_0 и v_0 отличаются только на произвольный постоянный множитель и, следовательно, решение (49.19) дает все необходимое. Произвольный множитель определяет только начальную фазу автоколебаний, которая может быть какой угодно.

3. Метод Андronова и Витта (метод малого параметра)

А. А. Андронов и А. А. Витт разработали метод определения и исследования периодических решений уравнения генератора (нелинейного уравнения вида (49.10)) при помощи рядов. Этот метод подробно изложен его авторами в книге «Теория колебаний» Андронова, Витта и Хайкина. Здесь мы не имеем места для полного описания этого метода, поэтому ограничимся кратким изложением его основ.

Введем в уравнение (48.11) некоторый безразмерный параметр μ следующим образом:

$$\alpha = \mu \bar{\alpha}, \quad \gamma = \mu \bar{\gamma};$$

тогда (48.11) можно записать так:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu (\bar{\alpha} - \bar{\gamma} \dot{x}^2) \dot{x}, \quad (49.20)$$

или в общем виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}). \quad (49.21)$$

Если $\mu \rightarrow 0$, то решения уравнения (49.21) стремятся к гармоническим. При $\mu = 0$ решения уравнения (49.21) на фазовой плоскости будут представлены совокупностью концентрических эллипсов. Предполагаем, что (49.21) имеет какое-то определенное периодическое решение; тогда, в силу непрерывности изменения решения уравнения при изменении параметра, периодическое решение уравнения будет при малом $\mu \neq 0$ представляться некоторой замкнутой кривой, расположенной вблизи одного из эллипсов системы при $\mu = 0$. Если будет найден этот эллипс, то будет уже многое известно о периодическом решении уравнения (49.21).

Пусть таким эллипсом, соответствующим приближенному решению

$$x_0(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (49.22)$$

будет эллипс B на фазовой плоскости (рис. 144). Предельный цикл, соответствующий точному периодическому решению, расположится как-то вблизи этого эллипса, цикл обозначен кривой C . Выберем начало отсчета времени так: изображающая точка приближенного решения x_0 при $t = 0$ находится в точке $1 (A, 0)$, а изображающая точка для истинного периодического решения находится в точке $2 (A(1 + \beta), 0)$, причем $\beta \ll 1$. Ясно, что расположение начальных точек на оси абсцисс не имеет принципиального значения.

Тогда истинное периодическое решение $x(t)$ можно представить разложенным в такой ряд:

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \beta x_2(t) + \mu^2 x_3(t) + \mu \beta x_4(t) + \dots \quad (49.23)$$

Это решение имеет период

$$T = T_0 + \tau = \frac{2\pi}{\omega} + \tau,$$

где τ — маленькая величина при достаточно малом μ . Очевидно, что начальные значения

приближенного решения (49.22) и точного решения (49.23) при $t = 0$ для движений, начинающихся из точек 1 и 2 (рис. 144), можно записать так:

$$\begin{aligned} x_0(0) &= A, & \dot{x}_0(0) &= 0, \\ x(0) &= A(1 + \beta), & \dot{x}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (49.24)$$

где $\beta \ll 1$, так как цикл прилегает близко к эллипсу. Заметим, что

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \mu_1 \dot{x}_1(t) + \beta \dot{x}_2(t) + \mu^2 \dot{x}_3(t) + \dots \quad (49.25)$$

и поэтому начальные условия для остальных функций, входящих в (49.23), будут:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_3(0) = x_4(0) = \dots = 0, \\ x_2(0) &= A, \\ \dot{x}_1(0) &= \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = \dots = 0. \end{aligned} \quad (49.26)$$

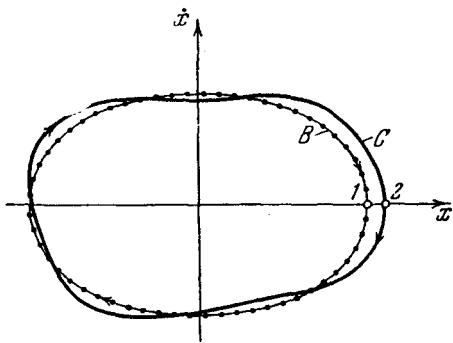


Рис. 144.

Подставляя (49.23) в уравнение (49.20) и приравнивая члены при одинаковых степенях μ , при β , $\mu\beta$ и т. д., получаем следующую систему уравнений для последовательного определения функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ...:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= (\bar{\alpha} - \bar{\gamma} \dot{x}_0^2) \dot{x}_0, \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= 0, \\ \ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 &= (\bar{\alpha} - 3\bar{\gamma} \dot{x}_0^2) \dot{x}_1, \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (49.27)$$

Уравнения (49.27) при начальных условиях (49.26) и (49.24) можно последовательно решить и получить с любой степенью точности решение $x(t)$ (49.23). Очевидно, решения уравнений (49.27) будут:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos \omega t, \\ x_1 &= \int_0^t (\bar{\alpha} - \bar{\gamma} \dot{x}_0^2) \dot{x}_0 \sin \omega(t - \xi) d\xi, \\ x_2 &= A \cos \omega t, \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (49.28)$$

Таким образом, на некотором отрезке времени можно представить любое решение уравнений (49.20), но мы ищем периодическое решение, поэтому (49.23) должно еще удовлетворять следующим условиям периодичности:

$$x(T) = x(0), \quad \dot{x}(T) = \dot{x}(0). \quad (49.29)$$

где $T = T_0 + \tau$ и $T_0 = 2\pi/\omega$ — период нулевого приближения $x_0(t)$.

Очевидно, что $x(T)$ можно разложить в ряд

$$x(T) = x(T_0) + \tau \dot{x}(T_0) + \frac{1}{2} \tau^2 \ddot{x}(T_0) + \dots, \quad (49.30)$$

который, учитывая (49.23) и (49.25), можно записать так:

$$\begin{aligned} x(T) &= x_0(T_0) + \mu x_1(T_0) + \beta x_2(T_0) + \dots \\ &\quad \dots + \tau [\dot{x}_0(T_0) + \mu \dot{x}_1(T_0) + \beta \dot{x}_2(T_0) + \dots] + \dots \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в первое условие (49.29) и принимая во внимание (49.28) и (49.24), получаем:

$$\begin{aligned} x(T) &= A + \mu x_1(T_0) + \beta A + \dots + \tau [\mu \dot{x}_1(T_0) + \dots] + \dots \\ &\quad \dots = x(0) = A + A\beta. \quad (49.31) \end{aligned}$$

Следовательно, для того чтобы удовлетворить условиям периодичности с точностью до членов первого порядка μ , необходимо подобрать величину A так, чтобы

$$x_1(T_0) = 0,$$

или по (49.28):

$$\int_0^{T_0} (\bar{a} - \omega^2 \bar{\gamma} A^2 \sin^2 \omega \xi) A \sin^2 \omega \xi d\xi = 0. \quad (49.32)$$

Выполняя выкладки в (49.32), получаем условие для определения амплитуды A в следующем виде:

$$\bar{a} - \frac{3}{4} \omega^2 \bar{\gamma} A^2 = 0;$$

отсюда амплитуда нулевого приближения x_0 периодического решения:

$$A = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{\bar{a}}{3\bar{\gamma}}} = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{\mu \bar{a}}{3\mu \bar{\gamma}}} = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{\bar{a}}{3\bar{\gamma}}}. \quad (49.33)$$

Следовательно, амплитуда нулевого приближения имеет такое же значение, как и полученная ранее, по методу переменной амплитуды (49.7). A — амплитуда того гармонического колебания системы при $\mu = 0$, которое близко к действительному автоколебательному движению. Эллипс гармонического колебания с амплитудой A лежит вблизи предельного цикла (рис. 144). Форма автоколебаний определена пока только в нулевом приближении: ее можно определить точнее, если есть необходимость, пользуясь формулами (49.28).

Практически часто нет необходимости определять точно форму автоколебаний, важнее знать изменение периода τ .

Если выписать условия периодичности для производной $\dot{x}(t)$ (49.29) и использовать (49.30), то можно определить и величину τ .

Действительно, второе условие (49.29):

$$\begin{aligned} \dot{x}(T) &= \dot{x}(0) = 0 = \dot{x}(T_0) + \tau \ddot{x}(T_0) + \dots \\ \dots &= \dot{x}_0(T_0) + \mu \dot{x}_1(T_0) + \beta \dot{x}_2(T_0) + \dots + \tau \ddot{x}_0(T_0) + \tau \mu \ddot{x}_1(T_0) + \\ &\quad + \tau \beta \ddot{x}_2(T_0) + \dots = \mu \dot{x}_1(T_0) + \tau \ddot{x}_0(T_0) + \dots \end{aligned} \quad (49.34)$$

Удовлетворяя условию (49.34) для членов первого порядка, получаем:

$$\tau = -\mu \frac{\dot{x}_1(T_0)}{\dot{x}_0(T_0)}, \quad (49.35)$$

или по (49.28):

$$\tau = \frac{\mu}{A\omega^2} \dot{x}_1(T_0). \quad (49.36)$$

Отметим, что в общем случае, когда уравнение типа (49.21) записано в виде (49.10), формула для определения стационарной амплитуды нулевого приближения, аналогичная (49.32), будет иметь такой вид:

$$\int_0^{T_0} f(A \cos \omega \xi, -\omega A \sin \omega \xi) \sin \omega \xi d\xi = 0. \quad (49.37)$$

В этом легко убедиться, если провести все рассуждения для нелинейного уравнения с малым параметром в общем виде (49.21). Формула (49.37) представляет амплитуду при $\sin \omega t$ в разложении функции $f(x, \dot{x})$ в тригонометрический ряд после подстановки $x = A \cos \omega t$.

Уравнение для определения стационарной амплитуды (49.37) можно получить значительно проще следующим путем. Для уравнения генератора в виде (49.10) всегда можно при достаточно малом μ записать любое решение так:

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots \quad (49.38)$$

Подставляя выражение (49.38) в уравнение (49.20) и приравнивая нулью члены с одинаковыми степенями μ , получим следующую систему уравнений для последовательного определения функций x_0, x_1, x_2, \dots :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= (\bar{a} - \bar{\gamma} \dot{x}_0^2) \dot{x}_0, \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= (\bar{a} - 3\bar{\gamma} \dot{x}_0^2) \dot{x}_1, \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \quad (49.39)$$

Решением уравнения нулевого приближения, первого уравнения из (49.39) являются гармонические колебания

$$x_0 = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (49.40)$$

Для функции $x_1(t)$ имеем такое уравнение:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -[\bar{a} - \bar{\gamma} \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)] A \omega \sin(\omega t + \varphi). \quad (49.41)$$

Уравнение (49.41) есть уравнение с правой частью, как при вынужденных колебаниях без затухания, при этом в правой части есть члены с частотой ω . Следовательно, в решении будут члены, содержащие множителем времени t , — резонансные члены. Значит, $x_1(t)$ будет с течением времени неограниченно возрастать. Поэтому, вообще говоря, при любом t нулевое приближение x_0 (гармоническое колебание) будет как угодно отличаться от решения x .

Если предположим, что при малом μ периодическое решение уравнения (49.20) остается всегда близким к какому-то гармоническому колебанию вида (49.40) с амплитудой A_0 , т. е. периодическое решение при малом μ при любом t близко к $A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, то в правой части (49.41) должны отсутствовать члены с частотой ω — резонансные члены. Тогда при $t \rightarrow \infty$ решение для $x_1(t)$ будет ограниченным и, следовательно, при малом μ искомое периодическое решение $x(t)$ будет близко к $x_0 = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Для определения A_0 необходимо приравнять нулью в (49.41) амплитуду у членов с частотой ω , или, как говорят, «уничтожить резонансные члены»

в (49.41). Выполняя выкладки, которые мы уже делали ранее, получаем известное выражение (49.33).

Однако следует отметить, что на этом простом пути это все, что мы можем получить. Так можно делать, когда необходимо только знание амплитуды периодического решения в нулевом приближении. Для вычисления периодического решения с любой степенью точности и для определения периода этого решения также с любой степенью точности, при малом значении μ , необходимо прибегать к более строгим методам.

4. Устойчивость периодического решения

Найдя тем или иным путем периодическое решение уравнения генератора, еще нельзя сказать, что генератор будет совершать колебания, соответствующие этому решению. Необходимо еще решить вопрос об устойчивости полученного периодического решения.

Допустим, что система совершает определенные периодические колебания и в какой-то момент времени внешнее возмущение, которое всегда может иметь место в реальной системе, выводит систему из периодического режима. Что будет далее?

Если система через некоторое время вернется к прежнему периодическому режиму, следовательно, он *устойчив* и будет продолжаться далее. Если нет, то периодический режим неустойчив и фактически не может существовать в системе в течение какого-либо заметного времени.

Пусть уравнение генератора

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}) \quad (49.42)$$

имеет периодическое решение $x_n(t)$, устойчивость которого необходимо определить. В некоторый момент решение имеет вид

$$x_n(t) + z(t), \quad (49.43)$$

где $z(t)$ — результат возмущения. Полагая, что z мало по сравнению с x_n и подставляя (49.43) в (49.42), получим:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n + \ddot{z} + \omega^2 x_n + \omega^2 z &= \mu f(x_n + z, \dot{x}_n + \dot{z}) = \\ &= \mu f(x_n, \dot{x}_n) + \mu z \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_n, \dot{x}_n} + \mu \dot{z} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)_{x_n, \dot{x}_n} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда, пренебрегая членами высших порядков, получим для z уравнение с периодическими коэффициентами

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \mu \left[z \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_n, \dot{x}_n} + \dot{z} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)_{x_n, \dot{x}_n} \right]. \quad (49.44)$$

Пусть z_1 и z_2 — фундаментальная система решений уравнения (49.44). Можно утверждать, что одно из фундаментальных решений — чисто периодическое, потому что основное уравнение

(49.42) не зависит явно от t . Действительно, в этом случае решение уравнения (49.42) обязательно содержит одну константу, аддитивную времени t , т. е. если $x_n(t)$ есть решение, то и $x_n(t + C)$ также есть решение, где C — любая константа.

Тогда можно представить себе такое возмущение, которое изменит только константу C на величину ΔC ; возмущенное периодическое решение имеет вид: $x_n(t, C + \Delta C)$. Результат возмущения в данном случае можно принять за одно из фундаментальных решений (49.44) и записать так:

$$z_1 = x_n(t, C + \Delta C) - x_n(t, C).$$

Это решение будет чисто периодическим, ибо разность двух периодических функций с одним и тем же периодом есть периодическая функция.

Если запишем уравнение (49.44) в таком виде:

$$\ddot{z} + p(t) \dot{z} + q(t) z = 0, \quad (49.45)$$

где, очевидно, $p = -\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_n, \dot{x}_n}$, а

$$q = -\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_n, \dot{x}_n} + \omega^2,$$

то по теореме Лиувилля

$$\dot{z}_1 z_2 - z_1 \dot{z}_2 = B e^{- \int p dt}, \quad (49.46)$$

где B — постоянная величина. В этом случае, когда

$$\int p dt > 0 \quad (49.47)$$

и возрастает со временем, то по (49.46) при $t \rightarrow \infty$

$$\dot{z}_1 z_2 - z_1 \dot{z}_2 = 0.$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$\ln z_1 = \ln z_2 + \ln C \text{ или } z_2 = C z_1,$$

где C — константа. Следовательно, в этом случае и z_2 будет периодической ограниченной функцией. Таким образом, условием устойчивости является условие (49.47).

Условие устойчивости (49.47) для удобства практического применения лучше всего сформулировать в таком виде. Функция $p(t) = -\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_n, \dot{x}_n}$ — периодическая, поэтому ее можно разложить в ряд Фурье, или $p(t) = -\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_n, \dot{x}_n} = a_0 +$ сумма

синусов и косинусов с частотами, кратными основной; a_0 — постоянный член в разложении функции — $\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_n, \dot{x}_n}$ в тригонометрический ряд.

Если

$$a_0 > 0, \quad (49.48)$$

то условие (49.47) удовлетворяется, и решение $x_n(t)$ устойчиво. Наоборот, при $a_0 < 0$ решение $x_n(t)$ может быть неустойчиво.

Таким образом, для определения устойчивости решения нужно взять производную от правой части основного нелинейного уравнения (49.42) по \dot{x} , подставить в нее исследуемое периодическое решение, разложить ее в тригонометрический ряд и определить только знак постоянного члена. Если знак постоянного члена — минус, то решение устойчиво.

В нашем случае для уравнения генератора (49.20)

$$\mu \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\mu f) = a - 3\gamma \dot{x}^2.$$

Подставляя сюда нулевое приближение периодического решения $x_0 = A_0 \cos \omega t$, получаем:

$$\mu \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)_{\dot{x}_0} = a - \frac{3}{2} A_0^2 \omega^2 \gamma - \frac{3}{2} \gamma \omega^2 A_0^2 \cos 2\omega t.$$

Постоянный член, если по (49.7) $A_0 = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{a}{3\gamma}}$, равен:

$$a - \frac{3}{2} \omega^2 \gamma \frac{4}{\omega^2} \frac{a}{3\gamma} = -a,$$

a — положительная величина, следовательно, решение, нулевое приближение которого равно $x_0 = A_0 \cos \omega t$, устойчиво.

Из изложенного видно, что теоретический анализ автоколебаний довольно сложен и громоздок. Пока мы ограничились случаем, когда рабочая точка (рис. 140) находится в середине характеристики; а если это не так, то число членов полинома, представляющего характеристику на рабочем участке (48.6), увеличивается и вычисления становятся еще более громоздкими. Поэтому чаще всего употребляется метод «укороченных уравнений» (49.17), он быстрее и сравнительно простыми способами ведет к цели.

Существуют и другие методы анализа автоколебательных систем, например, упомянутый выше метод Крылова и Боголюбова. К сожалению, здесь мы не можем рассмотреть его, так как это требует значительного места. Укажем только на один простой метод анализа автоколебательных систем, правда не очень строгий, энергетический метод К. Ф. Теодорчика. Этот метод по сравнению с вышеописанными имеет сравнительно простой аппарат.

5. Энергетический метод Теодорчика

Проще всего показать основную идею энергетического метода анализа автоколебаний на примере. Поэтому рассмотрим применение этого метода к решению задачи об автоколебаниях в генераторе с контуром в цепи катод — сетка (рис. 141). Уравнение генератора (48.16)

$$\ddot{V} + \omega^2 V = (\alpha - \gamma V^2) \dot{V}, \quad (49.49)$$

где V — напряжение на конденсаторе контура. Помножив (49.49) на \dot{V} и вспомнив, что $\omega^2 = 1/LC$, можем преобразовать его так:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{LC^2 \dot{V}^2}{2} + \frac{CV^2}{2} \right] = LC^2(\alpha - \gamma V^2) \dot{V}^2, \quad (49.50)$$

где член $\frac{LC^2 \dot{V}^2}{2}$ представляет магнитную энергию тока, ибо ток контура $I = CV$. Следовательно, в (49.50) справа стоит производная от полной электромагнитной энергии контура:

$$E = \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} CV^2.$$

Если в контуре генератора имеется какой-либо процесс $V(t)$, то

$$W(t) = LC^2 \int_0^t (\alpha - \gamma V^2) \dot{V}^2 dt \quad (49.51)$$

представляет изменение электромагнитной энергии колебаний за время t . Если этот процесс стационарный и периодический, то интеграл (49.51) равен нулю, или

$$\int_0^T (\alpha - \gamma V_0^2) \dot{V}_0^2 dt = 0, \quad (49.52)$$

где T — период колебаний. Таким образом, всякий периодический процесс $V_0(t)$ должен удовлетворять условию (49.52), и наоборот, это условие может оказать существенную помощь при отыскании возможных периодических режимов.

Однако из условия (49.52) нельзя определить форму колебаний, вид функции $V_0(t)$. На основе опыта или сравнения можно предположить, что колебания имеют почти синусоидальную форму с частотой ω , и по условию (49.52) легко найти амплитуду стационарных колебаний. С помощью условия (49.51) можно также исследовать устойчивость стационарных колебаний; если при увеличении амплитуды колебаний интеграл (49.51) становится

отрицательным, а при уменьшении — положительным, то данное стационарное колебание устойчиво.

В методе Теодорчика необходимо задать форму, и тогда решение находится очень просто. В следующем параграфе покажем применение этого метода для анализа режимов генератора с контуром в цепи катод — сетка.

§ 50. Влияние выбора рабочей точки характеристики на автоколебания в генераторе

Энергетическим методом можно очень просто установить зависимость автоколебательного режима генератора от места рабочей точки на характеристике лампы. Ранее предполагалось, что рабочая точка, точка, соответствующая режиму лампы в отсутствие колебаний, лежит на середине характеристики (рис. 140). При разрыве цепи конденсатора в схеме (рис. 141) ток через лампу будет i_{a0} , а управляющее напряжение

$$V_{y0} = E_c + DE_a.$$

Точка i_{a0} и V_{y0} (рис. 138) — середина характеристики, место максимальной крутизны S_0 . По формуле (48.6) крутизна S в любой точке будет

$$S = \frac{di_a}{d(\Delta V)} = S_0 \left[1 - \frac{(\Delta V)^2}{K^2} \right]. \quad (50.1)$$

Следовательно, крутизна убывает симметрично по обе стороны от рабочей точки, что видно и на рис. 138.

Режим автоколебаний, который возникает в данном случае, называется *мягким* режимом. Для возникновения этого режима нужны маленькие начальные толчки, теоретически сколь угодно малые, как это видно из (49.6). При плавном изменении параметров схемы плавно изменяется величина амплитуды стационарных колебаний.

Действительно, по формулам (49.8) и (48.17) амплитуда напряжения на конденсаторе при стационарных колебаниях

$$A_0 = 2K \sqrt{1 - \frac{RC}{MS}}. \quad (50.2)$$

Также и амплитуда колебаний тока в генераторе с контуром анодной цепи (рис. 139) по (49.7) и (48.12) будет

$$A_0 = \frac{2K}{\omega(M-LD)} \sqrt{\frac{MS - RC - LSD}{(M-LD)S}}. \quad (50.3)$$

Формула (50.3) может быть упрощена, если пренебречь членом LD , малым по сравнению с M ; тогда амплитуда колебаний тока в генераторе

$$A_0 \approx \frac{2K}{\omega M} \sqrt{1 - \frac{RC}{MS}}. \quad (50.4)$$

Из формул для амплитуды стационарных автоколебаний (50.2) и (50.4) видно, что с плавным увеличением R амплитуда колебаний будет плавно уменьшаться; с уменьшением R амплитуда возрастает и т. д.

Когда выбирают рабочую точку не в середине характеристики, тогда уже нельзя представить ее полиномом третьей степени. Например, если рабочая точка сдвинута немного вниз, как показано на рис. 145, то необходимо, по крайней мере, учесть еще квадратичный член и выражение характеристики будет иметь вид:

$$i_a = i_{a0} + S\Delta V + \beta_1(\Delta V)^2 - \beta_2(\Delta V)^3. \quad (50.5)$$

Характеристика может быть составлена из трех кривых: прямой $S \cdot \Delta V$, параболы $\beta_1(\Delta V)^2$ и кубической параболы $\beta_2(\Delta V)^3$ (рис. 146). Тогда теоретическая кривая (50.5) при соответствующем подборе коэффициентов будет близка к действительной характеристике (рис. 145) только на некотором участке.

Если же рабочая точка будет еще более опускаться вниз, например в точку A и ниже (рис. 145), то для более правильного представления ее полиномом необходимо взять в полиноме, по крайней мере, еще члены четвертой и пятой степеней: $\beta_3(\Delta V)^4$ и $\beta_4(\Delta V)^5$. Вычисления в этом случае усложняются, но, как можно убедиться далее, для определения амплитуды нулевого приближения члены характеристики с четными степенями (с β_1 и β_3) не имеют никакого значения: амплитуда автоколебаний в нулевом приближении не зависит от них. Это видно из рассмотрения формулы (49.37).

Действительно, формула (49.37) показывает, что при разложении $f(x_0, \dot{x}_0)$ — правой части уравнения (49.10) — в тригонометрический ряд, если в нее вместо x_0 подставить $A \cos \omega t$, амплитуда при $\sin \omega t$ будет равна нулю. Четные члены характеристики, входящие слагаемыми в $f(x_0, \dot{x}_0)$, в правую часть уравнения (49.10), определяют постоянную составляющую и члены

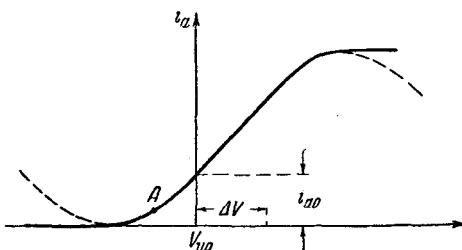


Рис. 145.

с частотами 2ω , 4ω , ..., следовательно, они не войдут в формулу для определения амплитуды, полученную из (49.37).

Почему величина четных членов характеристик не влияет на амплитуду, можно просто усмотреть с помощью энергетического

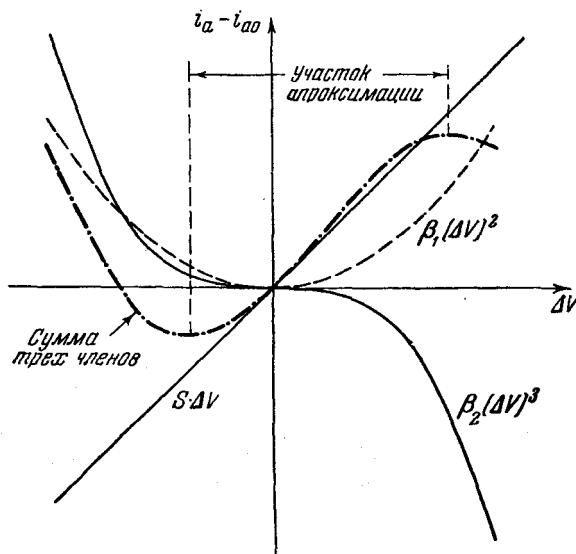


Рис. 146.

метода. Запишем уравнения генератора с контуром в цепи сетки (48.16) в следующем виде:

$$\ddot{V} + \omega^2 V = -\frac{R}{L} \dot{V} + \frac{M}{LC} \frac{di_a}{dt}, \quad (50.6)$$

где V — напряжение на конденсаторе контура, R — сопротивление, L — индуктивность контура.

Если обозначим через $S = \frac{di_a}{dV}$ крутизну характеристики, то уравнение (50.6) можно переписать так:

$$\ddot{V} + \omega^2 V = \omega^2 M \left(S - \frac{RC}{M} \right) \dot{V},$$

так как

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{di_a}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = S \dot{V}.$$

Тогда энергетическое условие для амплитуды, соответствующее формуле (49.52), можно представить так:

$$W_1 = \int_0^T \left(S - \frac{RC}{M} \right) \dot{V}_0^2 dt = 0, \quad (50.7)$$

где V_0 — колебания напряжения на конденсаторе при стационарном процессе.

Если характеристика анодного тока в общем случае записана так:

$$i_a = i_{a0} + S_0 V + \beta_1 V^2 + \beta_2 V^3 + \beta_3 V^4 + \beta_4 V^5,$$

то крутизна

$$S = S_0 + 2\beta_1 V + 3\beta_2 V^2 + 4\beta_3 V^3 + 5\beta_4 V^4. \quad (50.8)$$

Подставив (50.8) в формулу (50.7), видим, что члены с β_1 , β_3 всегда будут равны нулю, если приближенно $V_0 = A \cos \omega t$. Физически это значит: энергия, доставляемая в контур за период, зависящая от четных членов характеристики, равна нулю при любом значении A .

Можно наглядно подтвердить этот вывод, если брать интеграл (50.7) графическим способом следующим путем. Пусть $V_0 = A \cos \omega t$; тогда

$$\dot{V}_0 = \omega V \sqrt{A^2 - V_0^2}. \quad (50.9)$$

Учитывая, что $\dot{V}_0 dt = dV_0$, подставляем (50.9) в (50.7) и получаем:

$$W_1 = \omega \oint \left(S - \frac{RC}{M} \right) \sqrt{A^2 - V_0^2} dV_0. \quad (50.10)$$

Интеграл (50.10) следует представлять как интеграл по контуру. Величину его можно определить графически. На рис. 147, *a* дана характеристика лампы, а на рис. 147, *б* — крутизна этой характеристики S , на рис. 147, *в* — кривая $S - \frac{RC}{M}$ и эллипс, соответствующий сомножителю $\sqrt{A^2 - V_0^2}$; все кривые начерчены в одном масштабе по оси V_0 . Интеграл (50.10) мы берем вдоль оси V_0 от $-A$ до $+A$, умножая значение кривой $S - \frac{RC}{M}$ на значения верхней части эллипса, а затем от $+A$ до $-A$, умножая значение кривой на значения нижней ветви эллипса.

Очевидно, что элементы интеграла (50.10), соответствующие значениям V_0 , лежащим между линиями a и b (рис. 147, в), будут положительными, и наоборот, лежащие вне этого участка будут отрицательными. Следовательно, необходимо изменять значение A

до тех пор, пока положительная часть интеграла (50.10) не будет равна отрицательной. То значение A , при котором $W_1 = 0$, и будет амплитудой стационарного режима, который приближенно представлен синусоидой. Преимущество такого способа в том, что его можно применять при любом виде характеристики i_a . Например, легко видеть, что антисимметричная часть крутизны S , соответствующая четным членам характеристики, всегда дает в интеграле (50.10) величину, равную нулю. Действительно, одинаковые элементы интеграла слева и справа от нуля (рис. 148) будут давать одинаковые величины различных знаков при антисимметричной характеристике S . Следовательно, кривую для крутизны характеристики можно разбить на две части: симметричную S_c и несимметричную S_h , и отбросить несимметричную часть.

По определению

$$S_c = \frac{S(V_0) + S(-V_0)}{2},$$

$$S_h = \frac{S(V_0) - S(-V_0)}{2}.$$

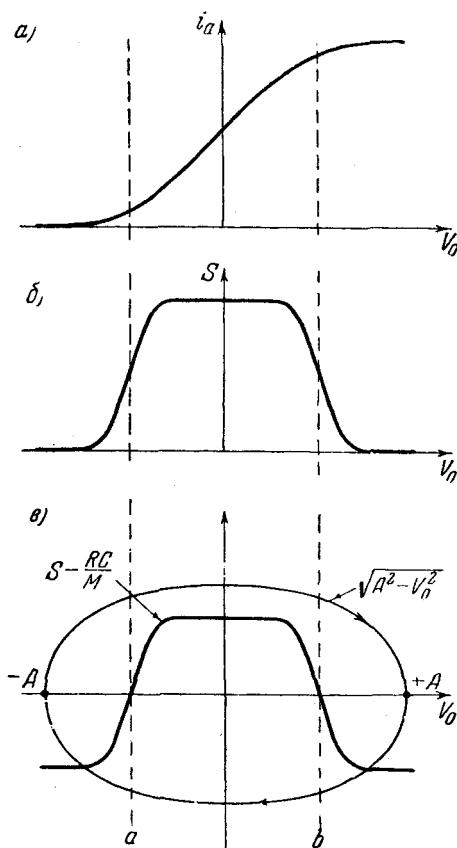


Рис. 147.

Отсюда видно, что если рабочая точка выбрана на характеристике выше точки B и ниже B' (рис. 149), то симметричная часть крутизны характеристики в рабочей точке ($V_0 = 0$) будет иметь максимум. Точки B и B' соответствуют значению $1/2 S_{\max}$. Если рабочая точка лежит вне пределов интервала BB' , то симметричная часть крутизны имеет минимум в рабочей точке.

На рис. 150 показаны симметричная и несимметричная части характеристики, когда рабочая точка лежит в интервале BB' (рис. 149, а) и вне его. Случай, когда рабочая точка лежит вне интервала BB' , соответствует жесткому режиму автоколебаний. В этом случае графическое вычисление интеграла энергии (50.10) следует производить при помощи кривых, показанных на рис. 151.

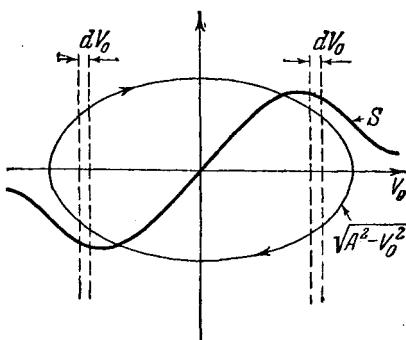


Рис. 148.

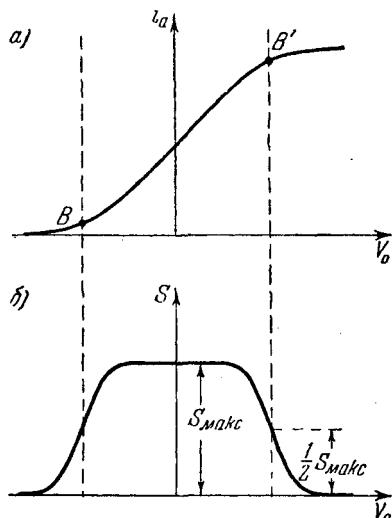


Рис. 149.

Из рис. 151 видно, что если амплитуда колебаний напряжений на конденсаторе контура A лежит в интервале Oa' , то интеграл энергии будет отрицателен. Это значит, что колебания с такой

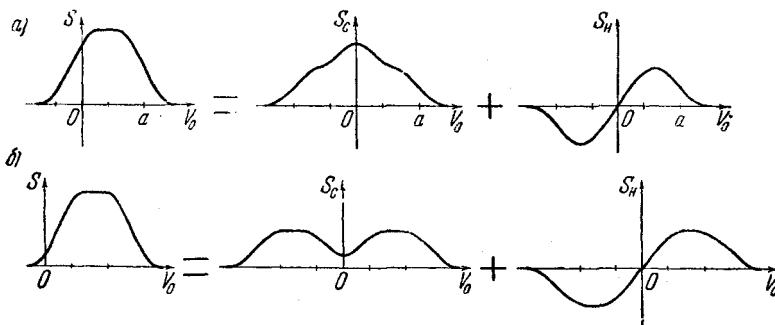


Рис. 150.

амплитудой должны затухать. Если A лежит в интервале Ob' , то интеграл при некотором значении A_0 станет равен нулю и при дальнейшем увеличении A будет положительной величиной. Стационарный режим с амплитудой A_0 будет неустойчивым.

Небольшое уменьшение A поведет к тому, что интеграл энергии станет отрицательным, и колебания будут затухать; увеличение A ведет к положительным значениям интеграла энергии и к возрастианию амплитуды колебаний. И совершенно очевидно, что при

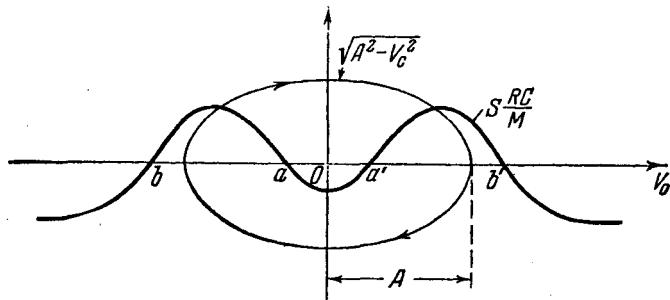


Рис. 151.

каком-то значении $A > Ob'$ будет второй стационарный режим, и этот режим будет устойчивым.

Обращаясь к формуле (50.8), видим, что

$$S_c = S_0 + 3\beta_2 V^2 + 5\beta_4 V^4,$$

$$S_n = 2\beta_1 V + 4\beta_3 V^3.$$

Членов с коэффициентами β_1 и β_3 не следует учитывать, и если крутизна в рабочей точке больше $1/2 S_{\text{макс}}$, то отбрасывание члена с коэффициентом β_4 существенно не изменит решения; вернее, отбрасывание этого члена не ведет к принципиальной ошибке.

Если же крутизна в рабочей точке меньше половины максимального ее значения, то режим может быть жестким и для анализа необходимо учесть пятый член в полиноме, которым была аппроксимирована характеристика лампы на рабочем участке.

Заметим, что коэффициенты $S_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ зависят от выбора рабочей точки. Следует также иметь в виду, что нечетные члены характеристики не влияют на автоколебательный режим только при приближенном рассмотрении, в котором мы полагаем автоколебания синусоидальными; точнее, так будет всегда, если колебания во взятом приближении будут симметричны относительно нуля.

Из рассмотрения рис. 151 можно убедиться, что картина интегральных кривых на фазовой плоскости будет иметь в случае жесткого режима примерно такой вид, как это показано на рис. 152. Если начальные значения лежат внутри неустойчивого предель-

ного цикла a' , то колебания затухают. Если начальные условия таковы, что изображающая точка лежит вне устойчивого цикла, то эта точка с течением времени придет на устойчивый предель-

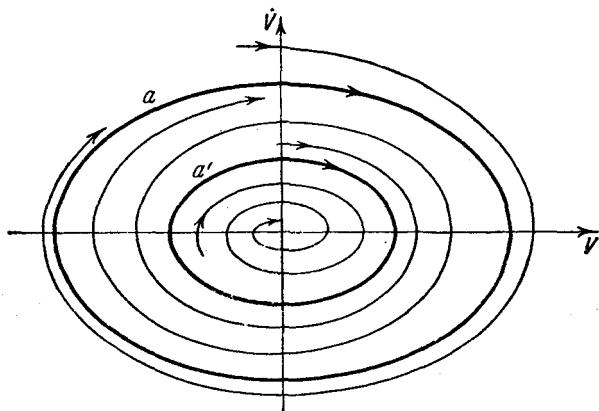


Рис. 152.

ный цикл a , в системе будет иметь место стационарный периодический автоколебательный режим.

Картину на фазовой плоскости можно легко получить и рассмотренными ранее методами: методом переменной амплитуды и методом малого параметра.

§ 51. Анализ генераторных режимов в радиотехнике («квазилинейный метод»)

Изложенная выше физическая теория автоколебательных процессов дает вполне правильное описание их. Но в радиотехнике пользуются более простым, так называемым «квазилинейным методом». Суть его заключается в следующем: вначале задачу о генераторе решают так же, как о колебаниях в линейной системе, а затем в решение вносят поправки, отражающие нелинейные свойства системы. Очевидно, что такой метод не всегда может дать верные ответы на не изученные еще вопросы, возникающие при исследовании новых автоколебательных систем.

Однако благодаря наглядности и простоте «квазилинейный метод» оказывает существенную помощь при эксперименте с радиотехническими генераторами и при техническом их расчете.

Основную цель этого метода можно показать на примере. Возьмем генератор с контуром в цепи анода и представим его в виде усилителя (или четырехполюсника), как это показано на

рис. 153. Ради простоты считаем, что в режиме генерации (при стационарных колебаниях) ток сетки равен нулю *). Задаем на сетке гармоническое напряжение $V_0 \cos \omega t$ и ведем расчет напряжения на выходе V_b ; оно, конечно, в силу нелинейности характеристики лампы будет несинусоидальным. Разлагаем напряжение V_b в ряд Фурье, берем первую гармонику и подбираем так величины V_0 и ω , чтобы первая гармоника колебания напряжения

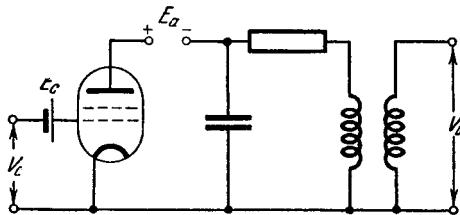


Рис. 153.

на выходе была равна $V_0 \cos \omega t$. Тогда очевидно, что при соединении накоротко выхода со входом $V_0 \cos \omega t$ представляет стационарный режим лампового генератора незатухающих колебаний.

Физически такой подход оправдывается относительной малостью высших

гармоник на выходе вследствие фильтрующего действия контура. Несмотря на то, что в анодном токе лампы высшие гармоники совсем не малы.

Для упрощения расчетов употребляют различные приемы. Один из них это способ *осредненной или средней крутизны характеристики лампы*, иногда ее называют *крутизной колебательной характеристики лампы*. Мы изложим его только для того случая, когда можно считать, что анодный ток определяется только сеточным напряжением (тетрод, пентод). В этом случае, если подадим на сетку лампы переменное *синусоидальное* напряжение с амплитудой V_0 , то возникнут колебания анодного тока с той же частотой, но, вообще говоря, совсем не гармонические. Разложим периодические колебания анодного тока в ряд Фурье и возьмем только основную гармонику. Пусть амплитуда колебаний анодного тока основной частоты, частоты колебаний сеточного напряжения, будет равна I_a . Тогда средняя крутизна по определению будет

$$\bar{S} = \frac{I_a}{V_0}. \quad (51.1)$$

Это определение средней крутизны можно распространить и на триод, но там V_0 представляет амплитуду управляющего напряжения.

Очевидно, что \bar{S} зависит от величины амплитуды V_0 , и эта зависимость различна для различного положения рабочей точки.

*) В общем случае это предположение совсем не обязательно.

Легко убедиться в том, что если рабочая точка выбрана в середине характеристики (рис. 154, а), то средняя крутизна будет зависеть от амплитуды на сетке так, как показано на рис. 154, б. Средняя крутизна \bar{S} падает с увеличением амплитуды, при $V_0 = 0$ средняя крутизна $\bar{S} = S_0$, крутизна характеристики анодного тока в рабочей точке. Если рабочая точка выбрана в нижней части характеристики (рис. 155, а), то средняя крутизна будет иметь вид, показанный на рис. 155, б. В этом случае средняя крутизна с увеличением V_0 нарастает, достигает максимума и затем опять спадает.

Рассмотрим колебания в генераторе с контуром в цепи анода (рис. 139) и предположим, что в контуре имеют место периодические колебания с частотой ω , близкой к собственной частоте контура. Тогда на сетку лампы подается синусоидальное напряжение этой же частоты, но через лампу проходит несинусоидальный ток. Однако благодаря резонансным свойствам контура ток частоты 2ω , 3ω и т. д. не окажет почти никакого влияния на колебания в контуре, которые практически определяются только колебаниями анодного тока основной частоты ω .

Пусть амплитуда колебаний тока в катушке контура I_{L0} (рис. 139); тогда амплитуда напряжения на сетке

$$\bar{V}_0 = i\omega M I_{L0}. \quad (51.2)$$

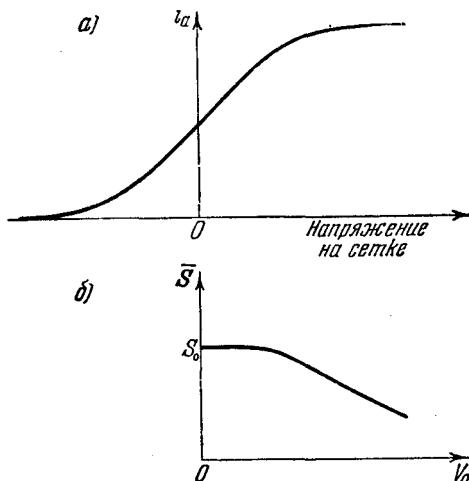


Рис. 154.

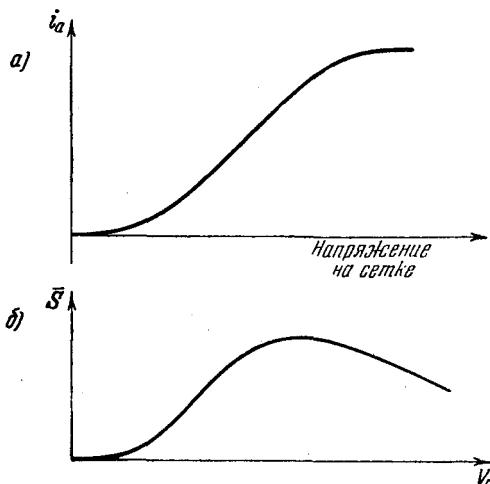


Рис. 155.

Амплитуда напряжения на контуре

$$V_k = I_{L0} (R + i\omega L) \approx i\omega L I_{L0}, \quad (51.3)$$

так как можно пренебречь величиной R по сравнению с $i\omega L$ при большом значении добротности контура.

С другой стороны, по формуле (17.10) амплитуда напряжения на контуре \bar{V}_{k0} и амплитуда анодного тока, тока через контур I_a , будут связаны следующим соотношением:

$$\bar{V}_{k0} \approx \frac{L}{CR} I_a. \quad (51.4)$$

Подставляя (51.2) в (51.1), получим:

$$I_a = \omega M \bar{S} I_{L0},$$

затем подставим это значение амплитуды тока в (51.4) и, сравнивая с формулой (51.3), получим окончательное выражение, устанавливающее зависимость между средней крутизной и параметрами системы при стационарном режиме в таком виде:

$$\bar{S} = \frac{RC}{M}. \quad (51.5)$$

Следовательно, в генераторе будут периодические колебания с частотой ω , если средняя крутизна, зависящая от амплитуды колебаний, будет удовлетворять условию (51.5).

Обычно для определения стационарного режима берут график средней крутизны (рис. 156) и находят пересечение средней крутизны с линией RC/M , и таким путем определяют амплитуду колебаний на сетке V_{oc} . Зная V_{oc} и найдя из формул (51.2) и (51.3)

$$\frac{\bar{V}_k}{V_0} \approx \frac{L}{M},$$

определяют амплитуду напряжения на контуре в стационарном режиме:

$$V_{kc} \approx \frac{L}{M} V_{oc}.$$

Из рис. 156 видно, что если $RC/M > \bar{S}_{\max}$, то колебания в генераторе невозможны. С плавным уменьшением R или с плавным увеличением M амплитуда колебаний будет плавно возрастать, следовательно, в генераторе будет мягкий режим колебаний.

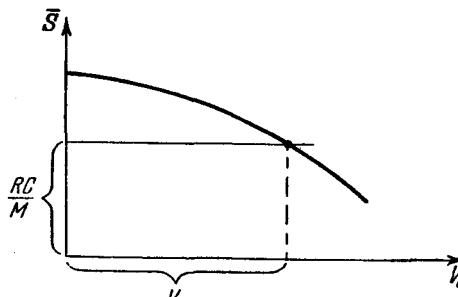


Рис. 156.

Условие устойчивости стационарного режима (51.5) можно выяснить таким образом. Если гармонические (вернее, очень близкие к гармоническим) колебания, имеющие место в контуре, таковы, что амплитуда колебаний на сетке V_0 меньше амплитуды стационарных колебаний V'_{0c} , то, как показано на рис. 156, это означает, что соответствующая данному V_0 средняя крутизна лампы больше RC/M или

$$\bar{S}(V_0) > \frac{RC}{M}.$$

Это условие означает: амплитуда колебаний анодного тока, создаваемая колебаниями на сетке, настолько велика, что колебания анодного тока будут увеличивать колебания в контуре. Таким же путем можно прийти к выводу, что при амплитуде колебаний V_0 , для которой

$$\bar{S}(V_0) < \frac{RC}{M}, \quad (51.6)$$

колебания в контуре будут убывать. Такие рассуждения подтверждают, что режим, соответствующий условию (51.5), будет устойчивым.

Условие стационарного режима (51.5) в данном случае имеет такой же простой вид, как и условие самовозбуждения (48.15), но только ранее крутизна S была постоянной величиной, не зависящей от амплитуды колебаний, теперь же средняя крутизна \bar{S} — величина переменная, зависящая от амплитуды колебаний на сетке. Переменная средняя крутизна учитывает *нелинейность* характеристики лампы.

Аналогичными рассуждениями можно установить, что для случая смещенной от среднего положения рабочей точки, когда кривая средней крутизны имеет вид, показанный на рис. 157, режим автоколебаний будет жестким. Проведем на этом графике прямую RC/M и получим два возможных стационарных режима V'_{0c} и V''_{0c} , если $\bar{S}_{\max} > RC/M$. Легко видеть: если колебания в контуре таковы, что $V_0 < V'_{0c}$, то они должны затухать, ибо соответствующая им средняя крутизна меньше RC/M ; если $V'_{0c} < V_0 < V''_{0c}$, то колебания должны возрастать, так как в этом случае средняя крутизна больше RC/M . Следовательно, стационарный режим, соответствующий амплитуде V'_{0c} , будет неустойчивым. Такие же рассуждения показывают, что стационарный режим, соответствующий V''_{0c} , будет устойчивым.

На рис. 157 можно проследить изменение режима колебаний при изменении параметров. Например, если из состояния, которое изображено на чертеже, будем переходить к другим режимам

генератора, плавно увеличивая R — сопротивление контура, то амплитуда колебаний будет плавно падать до некоторого значения V_{oc}'' , которое соответствует максимуму средней крутизны; затем, при дальнейшем увеличении R колебания в генераторе совсем прекратятся — прекратятся *скачком*. При обратном уменьшении R колебания не возникнут при $R_0 = M/CS_{\max}$, при котором они исчезли, а начнутся при значении $R_1 < R_0$, которое соответствует опусканию прямой RC/M почти до точки B , причем колебания возникнут скачком, с амплитудой, соответствующей точке B' (рис. 157), и амплитуда колебаний будет больше, чем та, которая соответствует R_0 .

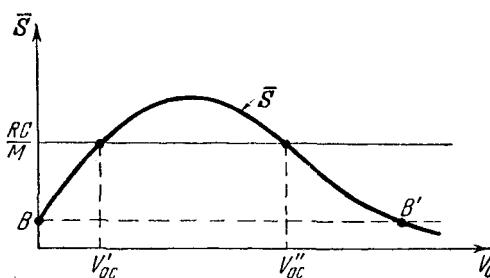


Рис. 157.

нения R будет иметь вид, примерно изображенный на рис. 158. Такая же картина будет наблюдаться и при плавном изменении M .

Наличие скачков к нулю, возникновение колебаний скачком, «гистерезисная» зависимость амплитуды от параметра — характеристики признаки *жесткого режима*.

В заключение заметим, что «*квазилинейный метод*», очень близкий в некотором отношении к энергетическому методу, значительно проще и удобнее, чем изложенные ранее более точные методы анализа нелинейных уравнений автоколебательных систем. Действительно, простота здесь достигается тем, что *постулируют синусоидальный закон колебаний*, пренебрегают в первом приближении всеми гармониками и т. д.

Однако следует иметь в виду, что допустимость всего этого доказывается только строгой теорией: зная результаты этой теории, можно уверенно в каждом частном случае пользоваться квазилинейными методами. Целый ряд новых явлений открыт и исследован с помощью точной теории. Поэтому при исследовании неизученных колебательных систем следует обращаться

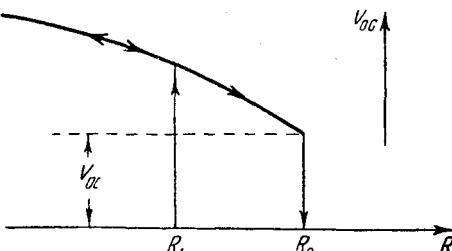


Рис. 158.

к строгим методам анализа нелинейных уравнений. После того как такой анализ сделан для определенного класса автоколебательных систем, можно и даже следует пользоваться простыми методами — квазилинейным и энергетическим.

§ 52. Разрывные (релаксационные) автоколебания

Рассмотренные нами в предыдущих параграфах автоколебательные системы с почти гармоническими колебаниями всегда имели в своем составе в качестве основного элемента линейную колебательную систему (контура) с большим значением добротности. Без обратной связи в основной колебательной системе могли совершаться слабо затухающие собственные колебания, близкие к гармоническим. В автоколебательной системе при «обратной связи» основной элемент определяет частоту и форму автоколебаний.

Однако это не всегда так бывает. Например, если добротность контура сильно уменьшить, а «обратную связь» увеличить, то в генераторе может быть автоколебательный режим, при котором колебания будут сильно отличаться от гармонических. При определенных условиях характер автоколебаний настолько сильно отличается от гармонических, что колебания имеют вид почти «разрывных» колебаний. *Разрывными* (или *релаксационными*) называют такие автоколебания, при которых имеет место скачкообразное изменение во времени некоторых колеблющихся величин. Конечно, строго говоря, таких колебаний не может быть, но изменения происходят настолько быстро, что приближенно их правильно рассматривать как «скакчаобразные» изменения, как это, например, делается при рассмотрении удара. В действительности удар не происходит мгновенно, скорость ударяющихся тел меняется не скачком, но настолько быстро, что для очень многих явлений достаточно правильно изменение скорости считать скакчаобразным. Так же обстоит дело и при разрывных колебаниях. Простейшим примером системы, в которой совершаются разрывные колебания, может служить известное еще в древности устройство переключающегося источника, схема которого показана на рис. 159.

В пробку воронки *A* вделана изогнутая трубка *B* (спирон). Вода из крана *C* заполняет воронку; как только уровень воды достигнет определенной высоты, начнет действовать спирон и вода

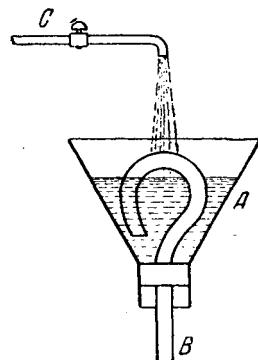


Рис. 159.

будет выливаться из воронки. Если расход воды через сифон значительно больше притекающей воды из крана C , то уровень воды опустится через некоторое время настолько, что сифон перестанет действовать и начнется опять наполнение воронки.

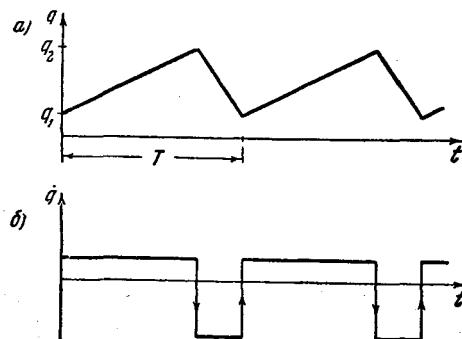


Рис. 160.

Процесс колебаний количества воды в воронке q показан на графике рис. 160, а, а колебания расхода воды \dot{q} показаны на рис. 160, б.

Количество воды в воронке совершает «пилообразные» колебания, изменяясь непрерывно, а расход воды \dot{q} совершает колебания со «скачками». Конечно, только пренебрегая инерцией воды, устремляющейся в сифон в момент его включения, можно приблизенно считать колебания расхода скачкообразными.

и автоколебания разрывными. Период колебаний определяется емкостью воронки, притоком воды через кран и расходом ее через сифон.

На таком же простом принципе устроен ряд электрических систем, предназначенных для генерации пилообразных колебаний, необходимых для самых разнообразных целей, прежде всего для развертки в катодном осциллографе. Например, колебания в схеме с неоновой лампой, с тиатроном и т. д. имеют тот же характер. Схема системы с тиатроном показана на рис. 161. От источника постоянного напряжения через диод заряжается конденсатор C , параллельно конденсатору включен тиатрон, газовая лампа с управляющей сеткой. Процесс колебаний происходит так: перед включением конденсатор не заряжен и тиатрон не проводит тока, по включении напряжения конденсатор заряжается через диод; диод работает в режиме насыщения, и ток через него практически во время зарядки остается постоянным, поэтому напряжение на конденсаторе (и заряд q) растет пропорционально времени. Как только

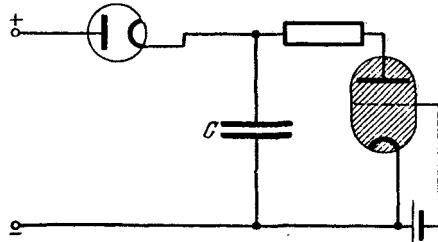


Рис. 161.

напряжение на конденсаторе достигнет определенной величины (заряд при этом равен q_2), тиатрон вспыхивает и конденсатор разряжается через него. Ток тиатрона много больше тока диода, поэтому напряжение на конденсаторе быстро падает до такой величины (заряд q_1), при которой тиатрон гаснет, и снова начинается процесс зарядки конденсатора. Очевидно, что здесь полная аналогия с перемежающимся источником: заряд на конденсаторе аналогичен количеству воды в воронке, ток через конденсатор аналогичен расходу воды, емкость конденсатора — емкости воронки. Роль сифона выполняет тиатрон, роль крана, наполняющего воронку, — диод и т. д. Колебания заряда q и тока через конденсатор \dot{q} будут иметь такой же вид, как и колебания количества воды и расхода ее, которые были показаны на рис. 160. Расчет периода колебаний, если известны емкость конденсатора и характеристики диода и тиатрона, не представляет затруднений.

Рассмотрим более сложную систему, в которой возможны разрывные колебания, упрощенный генератор RC . Эта система интересна еще тем, что изменением параметров в ней просто

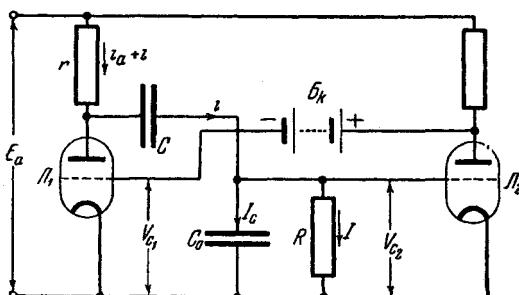


Рис. 162.

получить и близкие к гармоническим автоколебаниям и разрывные, и, конечно, все промежуточные колебания. Принципиальная схема такого генератора показана на рис. 162, где, как обычно, опущены некоторые несущественные детали. Лампа L_1 входит в состав колебательной системы и является основной, L_2 предназначена для изменения фазы колебаний и рассчитана так, что работает только в линейном участке своей характеристики, поэтому переменное напряжение на сетке первой лампы V_{c1} равно kV_{c2} , где k — коэффициент усиления лампы L_2 и V_{c2} — переменное напряжение на сетке второй лампы. Принимая во внимание обозначения рис. 162, можно написать следующие уравнения,

пренебрегая сеточными токами:

$$\begin{aligned} IR &= \frac{1}{C_0} \int I_c dt, \\ i &= I + I_c, \\ IR + \frac{1}{C} \int i dt + (i + i_a) r &= 0, \\ V_{c1} = kV_{c2} &= -kIR, \\ i_a &= f(V_{c1}) = f(-kIR), \end{aligned} \quad (52.1)$$

где все переменные величины представляют отклонение от равновесных значений. Исключая в (52.1) все величины, кроме I , получим уравнение колебаний тока I

$$rRC_0\dot{I} + \left[r + R\left(1 + \frac{C_0}{C}\right) \right] I + rf(-kIR) + \frac{1}{C} \int I dt = 0. \quad (52.2)$$

Анализируя уравнение (52.2), отметим, что на линейном участке характеристики лампы L_1 , где можно положить

$$f(-kRI) = -kSRI,$$

уравнение (52.2) представляет линейное уравнение некоторого эквивалентного колебательного контура. Параметры этого эквивалентного колебательного контура таковы:

$$\begin{aligned} \text{индуктивность } L_{\text{эк}} &= rRC_0, \\ \text{сопротивление } R_{\text{эк}} &= r + R\left(1 + \frac{C_0}{C}\right) - kSrR, \\ \text{емкость } C_{\text{эк}} &= C. \end{aligned} \quad (52.3)$$

Очевидно, что соответствующим подбором величины, в первую очередь k — коэффициента усиления второй лампы и S — крутизны первой лампы, можно сделать сопротивление эквивалентного контура достаточно малым, при котором собственные колебания тока I будут почти гармоническими затухающими колебаниями.

Увеличивая k (или S), можно сделать сопротивление $R_{\text{эк}}$ отрицательным; при этом состояние равновесия в системе будет уже неустойчивым и возникнут *нарастающие колебания*. Иначе говоря, условие

$$R_{\text{эк}} < 0, \text{ или } kS > \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{C_0}{C}\right) \quad (52.4)$$

представляет *условие самовозбуждения* колебаний в генераторе RC (рис. 162). Если при самовозбуждении абсолютное значение $R_{\text{эк}}$ достаточно мало и рабочая точка лампы L_1 находится примерно

на середине характеристики, то в системе будут нарастать колебания, близкие к гармоническим, и установится, как и в обычных рассмотренных ранее генераторах, режим автоколебаний почти синусоидальной формы. Частота автоколебаний будет близка к частоте эквивалентного контура, и, как легко получить из (52.3), она приблизительно равна:

$$\frac{1}{\sqrt{rRCC_0}}. \quad (52.5)$$

В этом случае система, показанная на рис. 162, представляет генератор типа RC практически гармонических колебаний. Такие генераторы в некоторых отношениях представляют ряд преимуществ и находят широкое применение.

Подчеркнем существенное отличие роли электронной лампы в генераторе типа RC от той, которую она имеет в генераторе

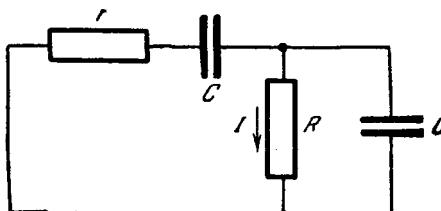


Рис. 163.

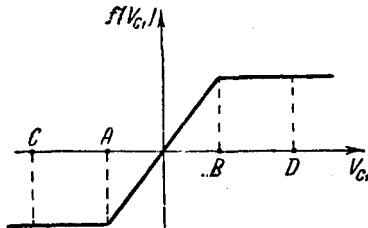


Рис. 164.

с колебательным контуром. Хотя исследуемая система при выключенной первой лампе (разорвана цепь накала катода) и представляет систему с двумя степенями свободы, составленную из двух контуров с сопротивлениями и емкостями (рис. 163), и колебания тока в этой системе управляются дифференциальным уравнением второго порядка, однако изменения тока I всегда будут «лимитационными», или эквивалентный колебательный контур будет «апериодическим» (Q контура $< \frac{1}{2}$). Включение только первой лампы при соединении сопротивления R прямо на ее сетку *увеличит* сопротивление эквивалентного контура. Приключение второй лампы, *перевернув фазу*, дает возможность уменьшить сопротивление эквивалентного контура (как видно по (52.3)) так, что он станет колебательным контуром с большим значением добродинности.

Следовательно, схема генератора RC в результате ничем не отличается от известных схем с колебательным контуром. Но в этой схеме очень легко перейти к *разрывным* автоколебаниям, например, уменьшением емкости конденсатора C_0 . Рассмотрим

колебания в схеме, показанной на рис. 162, при $C_0 = 0$. Уравнение колебаний тока I получим из (52.2), положив в нем $C_0 = 0$; это означает, что индуктивность эквивалентного контура стремится к нулю. Уравнение для I имеет вид:

$$(r + R)I + rf(-kRI) + \frac{1}{C} \int I dt = 0. \quad (52.6)$$

Обозначим заряд, создаваемый током I на конденсаторе C , через q , или

$$q = \int I dt, \quad \dot{q} = I. \quad (52.7)$$

Тогда уравнение (52.6) можно переписать так:

$$C(r + R)\dot{q} + rCf(-kR\dot{q}) + q = 0; \quad (52.8)$$

оно дает связь между \dot{q} и q ; это уравнение фазовой траектории возможных колебаний заряда q .

Траекторию на фазовой плоскости (q, \dot{q}) можно легко вычислить, зная график характеристики $f(V_{c1}) = f(-kR\dot{q})$. Предположим, для простоты чертежа, что характеристика состоит из трех прямых линий (рис. 164). Тогда, если условие самовозбуждения (52.4)

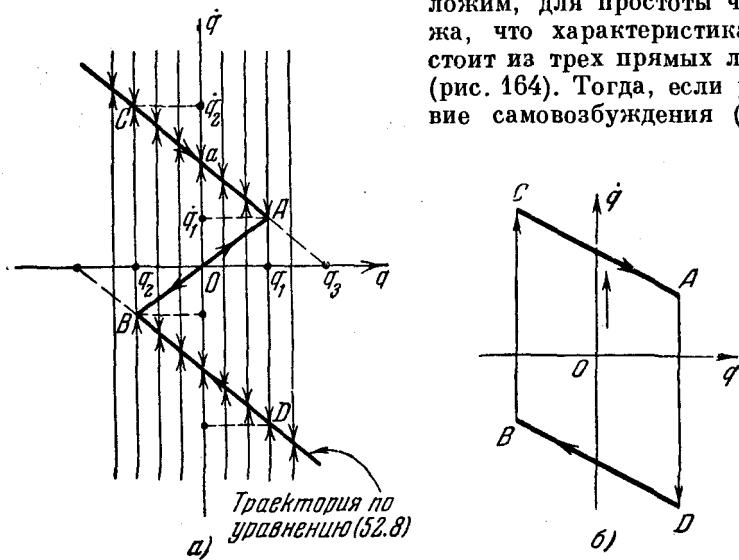


Рис. 165.

выполняется, траектория (52.8) на фазовой плоскости имеет вид, показанный на рис. 165, а, движение изображающей точки показано стрелками. Таким образом, колебания в системе будут происходить так, что изображающая точка может двигаться по

ломаной линии $CAOBD$. А что же происходит в остальных точках фазовой плоскости? Об этом мы ничего из уравнения (52.8) узнать не можем, ибо это уравнение первого порядка и содержит только одну произвольную постоянную, фазовая плоскость вырождается в кривую, которая и начерчена жирно на рис. 165, а. Поэтому обратимся к уравнению второго порядка (52.2) и рассмотрим, как из него получено уравнение первого порядка (52.6) при $C_0 \rightarrow 0$. На кривой $CAOBD$, по уравнениям (52.6) и (52.2), при $C_0 \rightarrow 0$ ток $I = \dot{q}$ может иметь некоторое конечное значение, которое получим из решения уравнения (52.6). В других точках фазовой плоскости (q, \dot{q}) из уравнения (52.2) при $C_0 \rightarrow 0$ следует, что $\dot{I} = \ddot{q} \rightarrow \infty$, так как в этих точках уравнение (52.6) не имеет места и первый член (52.2) должен быть при $C_0 \rightarrow 0$ конечной величиной. Следовательно, в других точках фазовой плоскости будут в пределе движения с бесконечными значениями $\frac{d}{dt}(\dot{q})$, с бесконечной скоростью изменения тока, «*скакки тока*». Другими словами, фазовые траектории уравнения (52.2) при $C_0 \rightarrow 0$ вырождаются в прямые линии, параллельные оси \dot{q} , по которым изображающая точка «*движется мгновенно*». Легко убедиться, сравнивая (52.2) и (52.6), что справа от кривой $CAOBD$ «*скакки*» происходят вниз ($\ddot{q} = -\infty$), а слева от этой кривой «*скакки*» происходят вверх ($\ddot{q} = +\infty$).

Теперь можно представить себе возможные движения изображающей точки из начала, из положения равновесия, и вместе с этим — процесс колебаний. Изображающая точка могла бы выйти из начала по линии OA , или по линии OB , но так как движения по обеим этим линиям неустойчивы, то изображающая точка совершил скачок при сколь угодно малом отклонении на ветвь CA (или на ветвь BD); движение точки по этой ветви *устойчиво* и точка будет двигаться к точке A (или к точке B); дойдя до точки A , изображающая точка подойдет к неустойчивой области и должна совершить скачок на ветвь BD , по которой она будет двигаться до скачка в точке B , и т. д. Таким образом, в системе возникнет периодическое движение, которое соответствует «*циклу*» $CADBC$, состоящее из плавных изменений q и \dot{q} на участках CA и DB и скачков из точки A в точку D и из точки B в C (рис. 165, б).

Зная «цикл» на фазовой плоскости, можно определить изменение заряда q на конденсаторе и тока $\dot{q} = I$. Так как участки CA и DB представляют прямые, на которых $\dot{q} = -mq + n$, где m и n — определенные постоянные величины, то при движении изображающей точки по этим участкам заряд q будет изменяться по показательному закону; например, $q = \dot{q}_2 e^{-mt} + q_3 (1 - e^{-mt})$; для участка, начинающегося от точки C , значения величин q_2

и q_3 видны на рис. 165, а. Кривые изменения заряда и тока, найденные таким путем, показаны на рис. 166, а и б.

Рассматривая эти кривые и цикл на фазовой плоскости, видим, что колебания происходят таким образом, что конденсатор C разряжается или заряжается, когда лампа L_1 или полностью

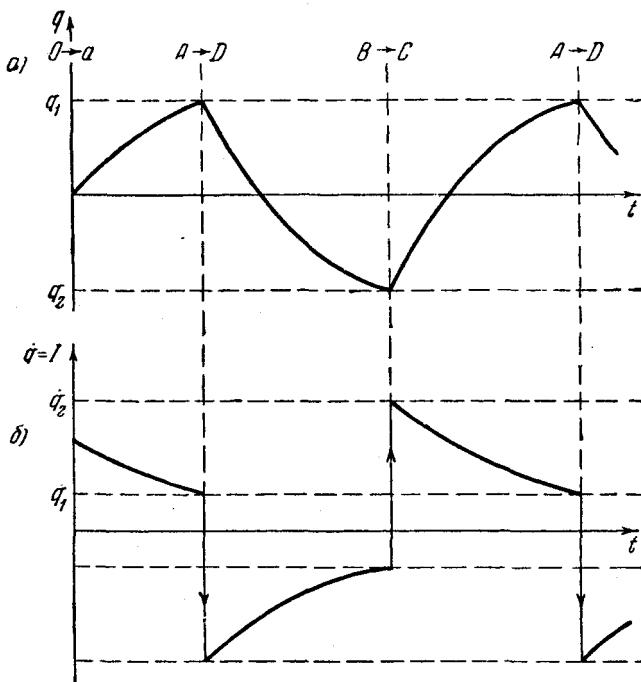


Рис. 166.

заперта — при движении от C к A , или работает в режиме насыщения — при движении от D к B (рис. 164). По включении начинается зарядка конденсатора (движение по aA) после скачка тока, ток зарядки падает и, следовательно, падает вместе с ним напряжение на сетке лампы L_2 и анодный ток этой лампы, поэтому напряжение на аноде L_2 возрастает и возрастает V_{c1} — напряжение на сетке L_1 . Дойдя до точки нижнего сгиба характеристики (точка A), ток заряда конденсатора меняется скачком ($A \rightarrow D$), напряжение на сетке L_2 становится отрицательным, конденсатор начинает разряжатьсяся, причем ток разряда падает, отрицательное напряжение на сетке L_2 уменьшается, следовательно, анодное напряжение второй лампы V_{c1} падает (движение по DB), затем ток скачком изменяется ($B \rightarrow C$) и начинается опять зарядка кон-

денсатора. Анодное напряжение и ток лампы меняются скачками; после скачков тока вверх при зарядке конденсатора C анодное напряжение первой лампы $E_a - Ir$ возрастает; при разрядке конденсатора анодное напряжение $E_a - i_a r + Ir$ падает, так как ток I имеет противоположное направление. Следовательно, и в этой системе, как и в простейшей (рис. 161), происходит попе-ременно зарядка и разрядка конденсатора C в зависимости от того, «заперта» или «открыта» лампа L_1 , но процесс зарядки «ве-дет» через лампу L_2 к «открытию» лампы L_1 и наоборот, что и вызывает скачки. Эта сложная система принципиально ведет себя так же, как и перемежающийся источник с сифоном; так же дело обстоит и в других системах, совершающих разрывные колебания.

В заключение отметим, что разрывные колебания предста-вляют лишь схематически картину действительного процесса; в действительности скачки тока происходят не мгновенно, а очень быстро, малая емкость во время скачка имеет существенное зна-чение, и потому путь изображающей точки на фазовой плоско-сти не будет параллелен оси \dot{q} , а будет иметь изгиб наружу, но изгиб этот очень мал, поэтому приближенно его можно принять за прямую, и скачки тока, показанные на рис. 166, не мгновен-ные, а относительно быстрые изменения тока, занимающие неко-торое время. Подчеркнем еще, что для правильного анализа разрывных колебаний необходимо было рассматривать предельный переход от уравнения (52.2) к уравнению (52.6), только тогда мы могли понять явления, происходящие при скачке.

Можно было бы очень наглядно представить себе все возмож-ные движения в рассмотренной системе, если разобрать довольно сложное изменение картины на фазовой плоскости при плавном изменении C_0 до нуля. Однако всегда следует иметь в виду суще-ственные преимущества схематизации автоколебаний разобран-ного типа как разрывных колебаний: теория разрывных колеба-ний значительно проще, чем точная теория непрерывных колеба-ний, и в то же время эта теория дает достаточно точные резуль-таты для практических расчетов генераторов *пилообразных* коле-баний.

Необходимо отметить, что рассмотренная система в том виде, как она показана на рис. 162, практически не употребляется для генерации синусоидальных и релаксационных колебаний. Во-первых, сейчас почти нет ламп с током насыщения, во-вторых, использование батареи B_k явно нерационально. Поэтому для генерации разрывных колебаний употребляются *мультивибра-торы*, схема которых показана на рис. 167. Это симметричная си-стема, и каждая лампа выполняет такую же роль, как первая лампа в схеме на рис. 162.

Здесь при соблюдении условий возбуждения происходит поочередная (в «противофазе») зарядка и разрядка двух конденсаторов, поочередное открытие и запирание ламп. Процесс происходит так: когда первая лампа заперта, то ее конденсатор заряжается и напряжение на сетке второй лампы падает. В это же время ток идет через вторую лампу, ее конденсатор разряжается и напряжение на сетке первой лампы повышается.

Как только оно достигает нижнего загиба характеристики, то происходит скачок тока во всех цепях — через первую лампу пойдет ток и конденсатор C_1 начинает разряжаться через нее; этот скачок тока запирает вторую лампу и ее конденсатор начинает заряжаться — лампы поменялись ролями. И таким же образом процесс продолжается

далее. Каждая лампа здесь поочередно «работает» почти также, как и первая лампа в схеме рис. 162, с тем отличием, что во время разрядки конденсатора ток лампы теперь изменяется, а там он был постоянным (ток насыщения).

Мы не имеем возможности останавливаться на теории колебаний в мультивибраторе, но для пояснения сказанного покажем на рис. 168 «картину» колебаний в обеих лампах. На рис. 168, *a* изображен ток через первую лампу в зависимости от I_2 — тока через второй конденсатор; тонкими стрелками показаны скачки, а жирными — плавное изменение тока. Под этим графиком показана зависимость $I_2(t)$, ось t направлена вертикально вниз. На рис. 168, *б* показаны аналогичные зависимости для второй лампы и тока $I_1(t)$, только положительное направление I_1 влево.

Если в системе мультивибратора закоротить конденсаторы, то получится не колебательная, но практически очень интересная система — *триггер*. Легко показать, что для этой схемы «естественное» состояние равновесия (токи через лампы одинаковы) будет неустойчивым, и система придет к устойчивому равновесию, когда одна лампа будет заперта, а другая открыта. В силу симметрии схемы открытой может быть любая лампа. Система будет иметь два различных возможных устойчивых положения равновесия. Соответствующим возмущением можно перевести ее из одного положения равновесия в другое. Это обстоя-

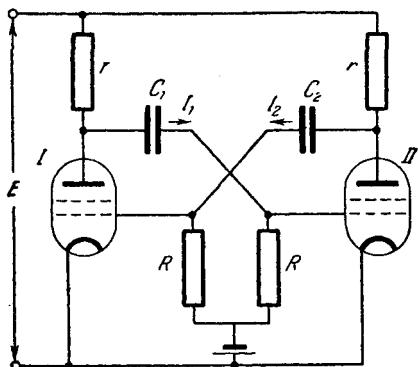


Рис. 167.

тельство и делает возможным применение триггера в качестве основного элемента электронных счетно-решающих устройств. Очевидно, что триггером может быть и мультивибратор (рис. 167), если в нем не удовлетворяются условия самовозбуждения.

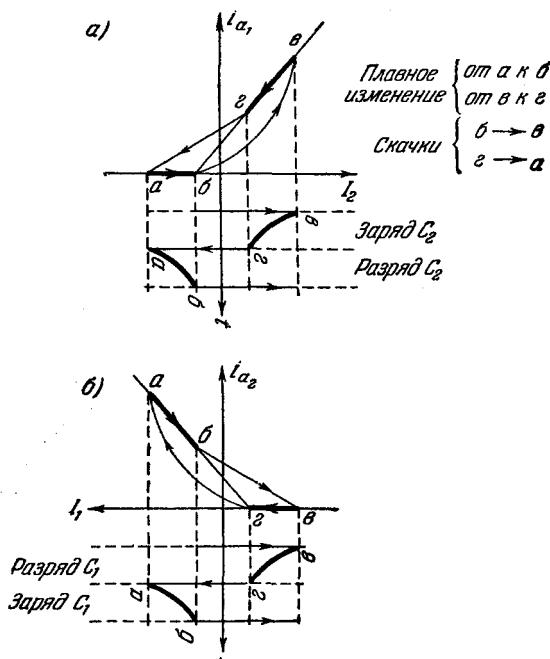


Рис. 168.

Условие неустойчивого состояния равновесия для мультивибратора и «естественного» состояния равновесия триггера одинаково. Его можно записать в таком виде:

$$S > \frac{1}{R} + \frac{1}{r},$$

если помнить, что анодный ток определяется

только сеточным напряжением. Здесь S — крутизна лампы в рабочей точке, r — анодное сопротивление и R — сопротивление в цепи сетки.

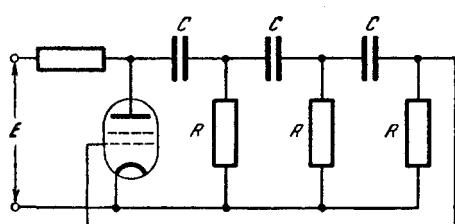


Рис. 169.

Для генерации синусоидальных колебаний с помощью схем, содержащих только R и C (генераторы RC), употребляются также более простые, чем показано на рис. 162, практические системы.

Одна из таких систем показана на рис. 169. Здесь одна лампа и все три «ячейки» RC имеют одинаковые параметры. Условия самовозбуждения и амплитуду колебаний в этом генераторе легко получить «квазилинейным методом», пренебрегая сеточным током и полагая, что анодный ток определяется только сеточным напряжением.

ЧАСТЬ II

КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

ГЛАВА 1

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 53. Замечания об определении числа степеней свободы

При определении числа степеней свободы колеблющейся системы следует иметь в виду те оговорки, которые были сделаны нами ранее, в § 1, при анализе систем с одной степенью свободы. Обычный пример колебательной системы с одной степенью свободы (*груз на пружине*) можно рассматривать как систему с двумя степенями свободы (рис. 170), если иметь в виду и маятникообразные колебания в вертикальной плоскости. Если могут иметь место и колебания груза в другой вертикальной плоскости, то колебания будут происходить, как в системе с тремя степенями свободы. А если зададим такие начальные условия, что возникнут колебания отдельных колец пружины, например в том виде, как это показано на рис. 171, то такие колебания следует рассматривать как колебания в системе с бесконечным числом степеней свободы.

Если тело имеет начальное смещение и скорость, лежащие в одной вертикальной плоскости, то колебания аналогичны колебаниям в системе с двумя степенями свободы и т. д.

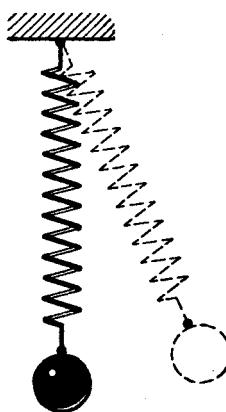


Рис. 170.

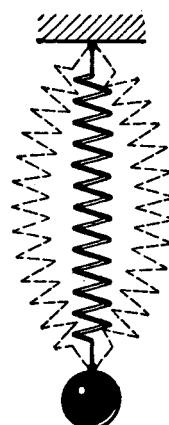


Рис. 171.

Но рассуждать так не всегда правильно. Например, если частота маятниковых колебаний тела на пружине будет близка к собственной частоте вертикальных колебаний того же тела, или частота вертикальных колебаний будет в два раза более частоты маятниковых колебаний, то при возбуждении вертикальных колебаний возникнут маятниковые и наоборот. Здесь имеют место сложные движения, но представить себе основную картину этих сложных колебаний можно. Отведя груз вертикально вниз и отпустив его, мы возбудим вертикальные колебания маятника, но при этом от нашего толчка или от других случайных толчков возникнут небольшие маятникообразные колебания. Система в этом состоянии приближенно будет вести себя, как маятник с переменной длиной. Длина маятника меняется с такой частотой, что возможен параметрический резонанс, и, следовательно, маятниковые колебания начнут усиливаться, конечно, за счет уменьшения энергии вертикальных колебаний. Таким образом, можно считать вертикальные колебания груза, подвешенного на пружине, при определенных начальных условиях, движением с одной степенью свободы, если собственная частота маятниковых колебаний не близка к собственной частоте вертикальных колебаний (или не близка к половине частоты собственных вертикальных колебаний). Движения массы в таком случае будут близки к вертикальным; «незаметные» маятниковые колебания не изменяют принципиально движения системы.

Как будет выяснено в этой части, всякая система имеет столько собственных частот, сколько она имеет степеней свободы, и поэтому вообще пренебрежение некоторыми степенями свободы допустимо только в тех случаях, когда эти степени свободы связаны с частотами, значительно отличающимися по величине от тех частот, с которыми колеблется система при данных начальных условиях. Например, если частота колебаний пружины маятника в такой форме, как это показано на рис. 171, будет очень велика по сравнению с частотой вертикальных колебаний массы на пружине, то боковые колебания пружины очень высокой частоты хотя и возникнут от некоторого случайного толчка, но совсем не будут заметны при вертикальных колебаниях от вертикального начального толчка. Поэтому допустимо считать пружину «безынерционной» и не обращать внимания на небольшое дрожание колец пружины, которое имеет место при вертикальных колебаниях.

Таким образом, возможность приближенного рассмотрения колебаний в сложной системе, как и в более простой, определяется относительной величиной частот, связанных с неучитываемыми координатами.

§ 54. Примеры системы с двумя степенями свободы

1) Двойной физический маятник (рис. 172). Тело A может совершать малые колебания около горизонтальной оси O , тело B

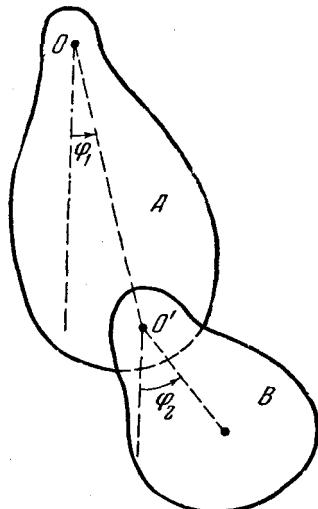


Рис. 172.

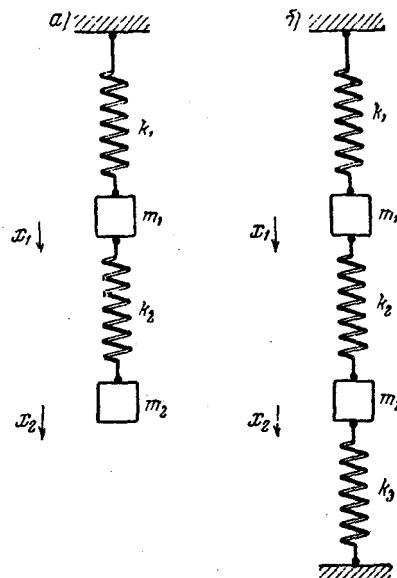


Рис. 173.

совершает также малые колебания вокруг оси O' , параллельной оси O и неподвижно связанной с телом A .

Задача о колебаниях будет решена, если известно расстояние между осями O и O' , расстояния от осей до центров массы этих тел и моменты инерции тел.

2) Два груза, подвешенные на пружинах (рис. 173). Здесь имеются в виду вертикальные колебания двух грузов массы m_1 и m_2 . Пример, показанный на рис. 173, б, принципиально ничем не отличается от примера рис. 173, а.

3) Колебания балки, подвешенной на двух пружинах (рис. 174). В этом случае речь идет о небольших колебаниях в вертикальной плоскости балки, подвешенной на двух пружинах с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 .

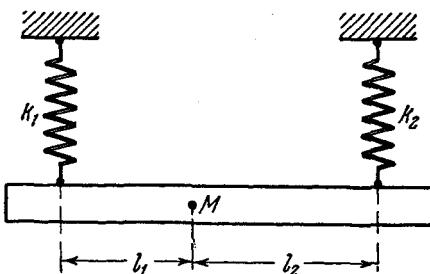


Рис. 174.

Если известно положение центра массы балки, величина массы балки и момент инерции вокруг горизонтальной оси, то задача о колебаниях может быть решена.

4) Колебания в системе, состоящей из двух связанных электрических контуров.

Примеры таких систем можно видеть на рис. 175, а, б, в, г, д. Связь между электрическими колебаниями в двух контурах может

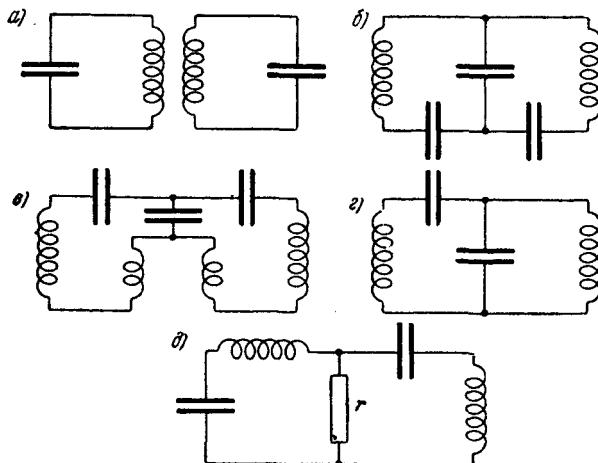


Рис. 175.

быть осуществлена довольно разнообразным способом. Например, на рис. 175, а показана *индуктивная связь*, на рис. 175, б — *емкостная*, на рис. 175, в — *смешанная*, на рис. 175, г — связь также емкостная, но система отлична от системы, показанной на рис. 175, б. На рис. 175, д показан пример *гальванической связи*, связи через омическое сопротивление r в общей цепи.

§ 55. Парциальные системы и полная система

Из приведенных в предыдущем параграфе примеров видно, что сложную систему можно рассматривать как систему, состоящую из двух отдельных систем с одной степенью свободы, *связанных* друг с другом. Слово «*связанные*» здесь означает, что колебания в одной системе влияют на колебания в другой и наоборот.

Для физического анализа явления в сложной системе необходимо знать характер колебаний в отдельных, как мы их будем называть, *парциальных системах*, из которых составлена сложная полная система. Прежде всего нужно знать, из каких парциальных

систем, систем с одной степенью свободы, составлена сложная система; таким образом осуществлена связь, взаимодействие между колебаниями в парциальных системах, и как характер парциальных систем и связь между ними определяют процесс в полной системе. Все это необходимо для того, чтобы выяснить картину взаимодействия между двумя системами; выяснить, чем определяется взаимодействие между двумя контурами, от чего оно зависит и когда практически им можно пренебречь и рассматривать колебания в каждой парциальной системе как в независимой. Обычно отвечают на эти вопросы так: когда связь маленькая, то можно рассматривать каждую систему как отдельную. Это правильно вообще. Но по сравнению с чем связь должна быть малая? И какую связь следует считать достаточно большой? При какой величине связи необходимо анализировать процесс в данной системе, как в сложной системе? — На все эти вопросы можно дать ответ только на основе анализа законов взаимодействия парциальных систем, составляющих сложную полную систему.

Отдельные или *парциальные* системы, из которых составлена полная система, вообще не всегда можно определить однозначно. Например, в случае системы, представленной на рис. 175, а, ясно, из каких контуров состоит полная система, а в случае рис. 175, г и других это совершенно не очевидно. Действительно, систему, показанную на рис. 176, а, можно рассматривать как составленную из двух таких контуров, которые приведены на рис. 176, б, или двух контуров, показанных на рис. 176, в.

В дальнейшем будем связывать парциальные системы с независимыми координатами следующим правилом: парциальная система, соответствующая данной координате, это такая система, которая получится из полной системы в том случае, когда все координаты системы, кроме данной, равны нулю тождественно. Так как впредь всегда будем выбирать нуль каждой координаты в положении равновесия, то тождественное равенство нулю координаты равносильно «жесткому закреплению», невозможности движения по данной координате. Например, система, изображенная

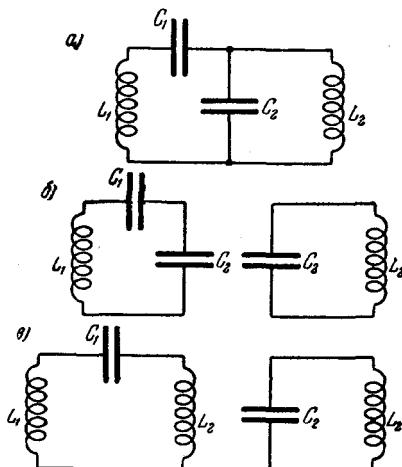


Рис. 176.

на рис. 177, имеет две координаты x_1 и x_2 , соответствующие деформациям пружины из положения равновесия; следовательно, она состоит из двух парциальных систем: 1) соответствует вращению балки в вертикальной плоскости около точки прикрепления к ней пружины k_2 , парциальные колебания совершаются

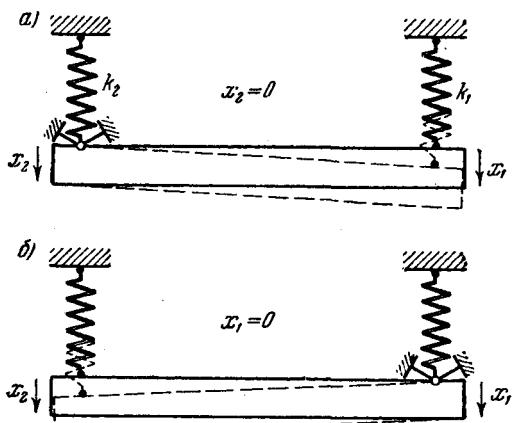


Рис. 177.

на пружине с координатой x_1 (рис. 177, а), 2) соответствует вращению балки около точки прикрепления пружины k_1 (рис. 177, б).

Каждая парциальная система обладает определенной собственной частотой, как система с одной степенью свободы. Будем обозначать парциальные частоты

через n_1 и n_2 .

В случае электрических цепей тождественное равенство нулю какой-то координаты соответствует *разрыву* того элемента цепи, ток в которой мы приняли за независимую координату. Например, в случае системы, изображенной на рис. 178, примем

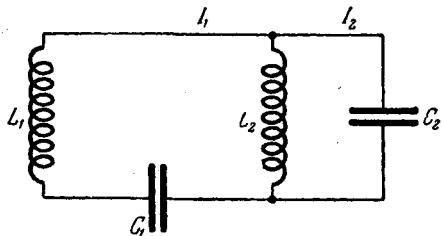


Рис. 178.

токи I_1 и I_2 за независимые координаты, тогда полная система состоит из двух парциальных систем (рис. 179, а и рис. 179, б).

Из этих примеров видно, что разбиение полной системы на парциальные может быть сделано различным способом, в зависимости от выбора независимых координат. Например, для колебаний балки на пружинах (рис. 174 и рис. 177) можно выбрать другие координаты, именно: ξ — отклонение центра массы балки

в вертикальном положении и ψ — поворот балки вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр массы. Тогда парциальные системы будут совсем другими, чем изображенные на рис. 177, одна система соответствует плоскопараллельному вертикальному движению балки, вторая — вращательному движению вокруг оси, проходящей через центр масс. Точно так же и для электрического

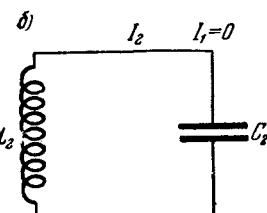
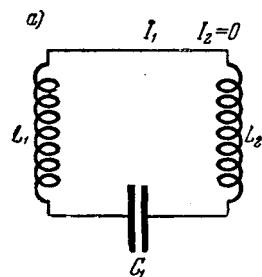


Рис. 179.

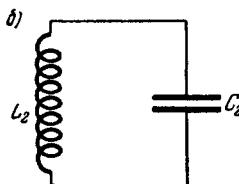
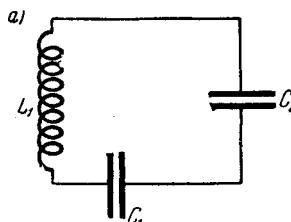


Рис. 180.

контура; например, для контура, показанного на рис. 178, можно взять за координаты токи, идущие через катушки, и тогда парциальные системы будут другие; на рис. 180 изображены контуры, соответствующие этим парциальным системам.

Вообще, в одной полной системе можно выбрать независимые координаты самыми различными способами, следовательно, и разбить на парциальные системы можно также различными способами. Движение в основной системе при данных начальных условиях будет одно и то же, но вид его в различных координатах будет иным.

§ 56. Собственные колебания в системе двух электрических индуктивно связанных контуров без затухания

Рассмотрим электрические колебания в двух контурах, связанных индуктивно; параметры контуров обозначены на рис. 181. Если выберем за независимые координаты токи в контурах I_1 и I_2 , то уравнения для потенциалов в каждом контуре

можно записать так:

$$L_1 \dot{I}_1 + \frac{1}{C_1} \int I_1 dt + M \dot{I}_2 = 0, \quad L_2 \dot{I}_2 + \frac{1}{C_2} \int I_2 dt + M \dot{I}_1 = 0. \quad (56.1)$$

Парциальные частоты контуров будут

$$n_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \quad n_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}. \quad (56.2)$$

Продифференцируем (56.1), воспользуемся обозначением (56.2) и получим систему дифференциальных уравнений для определения токов:

$$\ddot{I}_1 + n_1^2 I_1 + \frac{M}{L_1} \ddot{I}_2 = 0, \quad \ddot{I}_2 + n_2^2 I_2 + \frac{M}{L_2} \ddot{I}_1 = 0. \quad (56.3)$$

Предположим, что система уравнений (56.3) имеет такое частное решение:

$$\begin{aligned} I_1 &= A \cos(\omega t + \varphi), \\ I_2 &= B \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (56.4)$$

где A , B , φ и ω — некоторые постоянные величины. Подставим

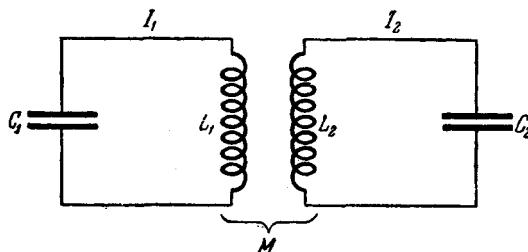


Рис. 181.

(56.4) в (56.3) и получим два обыкновенных уравнения для определения неизвестных величин:

$$(n_1^2 - \omega^2) A - \frac{M}{L_1} \omega^2 B = 0, \quad -\frac{M}{L_2} \omega^2 A + (n_2^2 - \omega^2) B = 0. \quad (56.5)$$

В уравнения (56.5) входят только три величины A , B и ω , следовательно, фаза φ в (56.4) может быть пока произвольна. Уравнения (56.5) представляют систему двух однородных уравнений для амплитуд A и B ; поэтому из (56.5) определяется только отношение между амплитудами, A и B будут иметь определенные

значения только при условии, что детерминант системы (56.5) равен нулю. Или

$$\begin{vmatrix} n_1^2 - \omega^2 & -\frac{M}{L_1} \omega^2 \\ -\frac{M}{L_2} \omega^2 & n_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = (n_1^2 - \omega^2)(n_2^2 - \omega^2) - \frac{M^2}{L_1 L_2} \omega^4 = 0.$$

Это — уравнение, из которого определяется частота колебаний ω . Обозначим: $\kappa^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}$; величину κ называют коэффициентом связи двух контуров; тогда уравнение для частоты можно переписать так:

$$(1 - \kappa^2) \omega^4 - (n_1^2 + n_2^2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 = 0. \quad (56.6)$$

Решение биквадратного уравнения (56.6) дает два значения частоты возможных гармонических колебаний системы — ω_1 и ω_2 :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2(1 - \kappa^2)} \left[n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 + n_2^2)^2 - 4(1 - \kappa^2)n_1^2 n_2^2} \right]. \quad (56.7)$$

Следовательно, гармонические колебания в системе возможны с частотой ω_1 или ω_2 , которые отличны от частот парциальных систем n_1 и n_2 и только стремятся к ним, когда

$$\kappa \rightarrow 0.$$

Определив ω_1 из (56.7) и подставив в систему (56.5), получим отношение между A_1 и B_1 , соответствующими частоте ω_1 . Уравнения (56.5) в этом случае запишутся так:

$$(n_1^2 - \omega_1^2) A_1 - \frac{M}{L_1} \omega_1^2 B_1 = 0,$$

$$\frac{M}{L_2} \omega_1^2 A_1 - (n_2^2 - \omega_1^2) B_1 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{n_1^2 - \omega_1^2}{\frac{M}{L_1} \omega_1^2} = \frac{\frac{M}{L_2} \omega_1^2}{n_2^2 - \omega_1^2} = k_1, \quad (56.8)$$

где k_1 — отношение двух амплитуд частоты ω_1 — величина постоянная, определяющаяся параметрами системы. Следовательно, амплитуда колебаний частоты ω_1 в одном контуре может быть произвольной величиной, но амплитуда колебаний этой же частоты в другом контуре будет всегда находиться в определенном отношении (56.8) к амплитуде в первом контуре. Величину k_1 называют коэффициентом распределения амплитуд частоты ω_1 по координатам.

Точно так же для колебаний частоты ω_2 найдем другое отношение амплитуд k_2 , равное

$$k_2 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{n_1^2 - \omega_2^2}{\frac{M}{L_1} \omega_2^2} = \frac{\frac{M}{L_2} \omega_2^2}{n_2^2 - \omega_2^2}. \quad (56.9)$$

Общее решение уравнения (56.3) или колебания токов в системе контуров в общем случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} I_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ I_2 &= A_1 k_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 k_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (56.10)$$

где A_1 , A_2 , φ_1 и φ_2 — постоянные, зависящие от начальных условий.

Колебания в каждом контуре состоят из двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2 , причем колебания одинаковой частоты имеют одну и ту же фазу в обоих контурах. Отношение амплитуд (коэффициент распределения) колебаний одной частоты зависит от устройства системы и не зависит от начальных условий.

Частоты ω_1 и ω_2 называются *собственными частотами* системы двух контуров. Колебания в системе (формула (56.10)) можно представлять и так: колебания состоят из двух собственных гармонических колебаний частоты ω_1 и ω_2 , каждое колебание имеет место одновременно в обоих контурах. Если связь между контурами не равна нулю, то k_1 и k_2 не могут обратиться в нуль (см. (56.9), (56.8) и (56.7)), следовательно, каждое собственное колебание вообще имеет место в обоих контурах. Нельзя подобрать так начальные условия в *связанных* контурах, чтобы колебания в одном контуре имели частоту ω_1 , а в другом ω_2 . Следовательно, вообще говоря, колебания в каждом контуре будут негармоническими; если частоты ω_1 и ω_2 близки друг к другу, то колебания носят характер *биений*, это значит, что колебания похожи на гармонические, у которых амплитуда изменяется периодически, колебания то нарастают, то затухают.

Однако легко подобрать таким образом начальные условия, что колебания в обоих контурах будут происходить с одной частотой, или ω_1 , или ω_2 , т. е. будут *гармоническими*.

Например, если в начальный момент при $t = 0$ $I_1 = a$, $I_2 = k_1 a$, $\dot{I}_1 = 0$, $\dot{I}_2 = 0$, то, подставляя это в (56.10), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} a &= A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2, \\ k_1 a &= A_1 k_1 \cos \varphi_1 + A_2 k_2 \cos \varphi_2, \\ 0 &= \omega_1 A_1 \sin \varphi_1 + \omega_2 A_2 \sin \varphi_2, \\ 0 &= \omega_1 k_1 A_1 \sin \varphi_1 + \omega_2 k_2 A_2 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений дает $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 = a$. Таким образом, колебания в контурах будут иметь следующий вид:

$$I_1 = a \cos \omega_1 t, \quad I_2 = ak_1 \cos \omega_1 t.$$

Заметим, что это обстоятельство иногда используют для опытного определения *собственных частот*. Если из каких-либо соображений, например из соображений симметрии в двух одинаковых связанных контурах, можно указать такие начальные условия, при которых колебания в контурах должны быть *гармоническими*, то частота этих колебаний есть *собственная частота*.

Особенно ясно применение этого правила для механических систем, например для двух одинаковых связанных пружинкой маятников (рис. 182), если колебания маятников происходят в плоскости, проходящей через точки подвеса. При одинаковых начальных отклонениях маятников в одну сторону каждый из них будет совершать гармонические колебания; частота этих колебаний и есть одна из собственных частот системы, например ω_1 . Если же в начальный момент маятники будут отклонены на одинаковый угол в различные стороны, то колебания будут гармоническими, частота этих колебаний и будет вторая собственная частота ω_2 . Легко сообразить, по колебаниям длины пружины, что частота $\omega_2 > \omega_1$. Парциальные частоты в этом случае одинаковы, и парциальная частота соответствует колебаниям одного маятника при условии, что второй закреплен в положении покоя. Очевидно, что парциальная частота будет больше ω_1 , но меньше ω_2 . Действительно, при колебаниях с частотой ω_1 пружинка не изменяет длины и ее жесткость не влияет на частоту колебаний; при колебаниях с парциальной частотой жесткость пружинки увеличивает частоту колебаний маятника; при колебаниях с частотой ω_2 средняя точка пружинки находится в покое и, следовательно, на каждый маятник действует более жесткая пружина, чем при парциальных колебаниях.

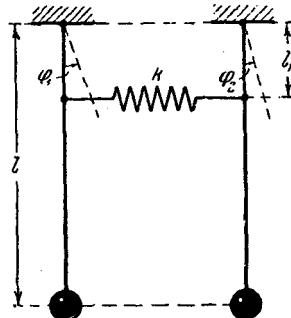


Рис. 182.

§ 57. Зависимость собственных частот системы от расстройки между контурами

Посмотрим, каким образом будут изменяться собственные частоты системы при изменении одной из парциальных частот, например n_2 . Пусть частота n_1 остается постоянной, а n_2 изменяется от 0 до ∞ . Удобно ввести в рассмотрение отношение n_2/n_1 ,

отношение между парциальными частотами. Отношение $n_2^2/n_1^2 = \xi$ характеризует *расстройку* контуров; следует иметь в виду, что расстройка минимальна при $\xi = 1$, максимальная расстройка при $\xi = 0$ и $\xi = \infty$. Если собственные частоты ω_1 и ω_2 будем также относить к частоте n_1 , то получим частотную зависимость в безразмерном виде. Пусть $z_1 = \omega_1^2/n_1^2$, $z_2 = \omega_2^2/n_1^2$ и $z = \omega^2/n_1^2$; тогда уравнение (56.6) можно переписать так:

$$(1 - \kappa^2) z^2 - (1 + \xi) z + \xi = 0. \quad (57.1)$$

оно при заданном коэффициенте связи κ дает z_1 и z_2 как функцию ξ . Легко убедиться, что (57.1) представляет уравнение гиперболы (рис. 183).

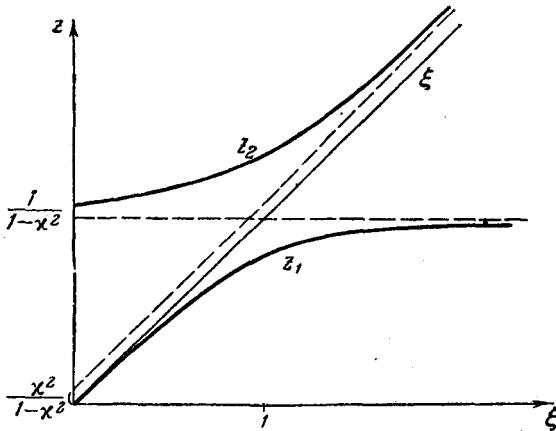


Рис. 183.

При $\xi = 0$ $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{1 - \kappa^2}$; при $\xi \rightarrow \infty$ $z_1 \rightarrow 1$, $z_2 \rightarrow \infty$. Асимптотой ветви z_1 при $\xi \rightarrow \infty$ будет $z = 1$, асимптота второй ветви z_2 имеет уравнение

$$z = \frac{\xi}{1 - \kappa^2} + \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2};$$

она нанесена пунктиром на рис. 183.

Прямую $z = 1$ на рис. 183 можно рассматривать как кривую, соответствующую парциальной частоте n_1 , эта частота не изменяется; прямая $z = \xi$ соответствует парциальной частоте n_2 , z_1 — частоте ω_1 , z_2 — частоте ω_2 . Следовательно, из графика рис. 183 видно, что

$$\omega_2 > n_2 > n_1 > \omega_1 \quad \text{или} \quad \omega_2 > n_1 > n_2 > \omega_1, \quad (57.2)$$

парциальные частоты всегда лежат между собственными. При уменьшении связи ω_1 стремится к ближайшей парциальной частоте: к n_2 при $\xi < 1$ или к n_1 при $\xi > 1$; а ω_2 , при $\xi < 1$ стремится к n_1 и при $\xi > 1$ к n_2 . При заданном κ вблизи совпадения парциальных частот ($\xi = 1$) собственные частоты заметно отличаются от парциальной. При большой расстройке между контурами ($\xi \rightarrow 0$ или $\xi \rightarrow \infty$) собственные частоты близки к парциальным. При $\xi \rightarrow 0$

$$z_2 = \frac{\omega_2^2}{n_1^2} \rightarrow \frac{1}{1 - \kappa^2}, \quad z_1 = \frac{\omega_1^2}{n_1^2} \rightarrow 0, \quad (57.3)$$

или

$$\omega_2 \rightarrow \frac{n_1}{\sqrt{1 - \kappa^2}}, \quad \omega_1 \rightarrow 0.$$

Собственная частота ω_1 при $n_2 \rightarrow 0$ стремится к нулю, а вторая собственная частота $\omega_2 \rightarrow \frac{n_1}{\sqrt{1 - \kappa^2}}$ будет больше частоты второго контура. Таким образом, если конденсатор второго контура будет замкнут, то собственная частота первого контура возрастет. Иными словами, короткозамкнутая катушка индуктивности, находящаяся вблизи колебательного контура, увеличивает его частоту.

При $\xi \rightarrow \infty$ $z_2 = \frac{\omega_2^2}{n_1^2} \rightarrow \infty$; но лучше взять в этом случае

$$\frac{\omega_2^2}{n_1^2} = \frac{z_2}{\xi} \rightarrow \frac{1}{1 - \kappa^2} \quad (57.4)$$

или

$$\omega_2 \rightarrow \frac{n_2}{\sqrt{1 - \kappa^2}}, \quad \text{а} \quad z_1 = \frac{\omega_1^2}{n_1^2} \rightarrow 1 \text{ или } \omega_1 \rightarrow n_1.$$

Собственная частота ω_1 при $n_2 \rightarrow \infty$ стремится к n_1 , а ω_2 — к $n_2/\sqrt{1 - \kappa^2}$.

При $\xi = 1$ при равенстве парциальных частот из (57.1) следует:

$$z_1 = \frac{1}{1 + \kappa}, \quad z_2 = \frac{1}{1 - \kappa} \quad (57.5)$$

или

$$\omega_1 = \frac{n}{\sqrt{1 + \kappa}}, \quad \omega_2 = \frac{n}{\sqrt{1 - \kappa}}.$$

С увеличением связи собственные частоты все более удаляются от парциальных; это удаление имеет место и при большой расстройке, но не в такой степени; действительно, в (57.3) и (57.4) в знаменателе стоит κ^2 , а здесь в (57.5) первая степень κ . Так как $\kappa < 1$, то, следовательно, при настройке контуров на одну парциальную частоту $\xi = 1$, влияние связи κ на разницу между собственными и парциальными частотами *наибольшее*.

§ 58. Теория собственных колебаний в системе с двумя степенями свободы без трения (общий случай)

Две независимые координаты системы обозначим через x_1 и x_2 ; тогда потенциальная энергия системы может быть записана в таком виде:

$$U(x_1, x_2) = \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2. \quad (58.1)$$

В положении равновесия $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, возвращающие в положение равновесия силы линейно зависят от координат. Поэтому в положении равновесия $U(0, 0) = 0$ и $U(x_1, x_2) > 0$, это есть условие того, что положение равновесия устойчиво или потенциальная энергия в положении равновесия имеет минимум.

Известно, что при любых x_1 и x_2 $U(x_1, x_2)$ будет больше нуля, если выполняются следующие условия:

$$\alpha_{11} > 0, \quad \alpha_{22} > 0 \quad \text{и} \quad \alpha_{11}\alpha_{22} > \alpha_{12}^2. \quad (58.2)$$

Собственные колебания представляют движение около устойчивого положения равновесия, поэтому в нашем случае для коэффициентов потенциальной энергии соблюдаются неравенства (58.2).

Кинетическую энергию системы можно записать в общем случае так:

$$T = \beta_{11}\dot{x}_1^2 + 2\beta_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \beta_{22}\dot{x}_2^2. \quad (58.3)$$

Кинетическая энергия — величина положительная, поэтому коэффициенты в выражении энергии должны удовлетворять условиям, аналогичным (58.2), т. е.

$$\beta_{11} > 0, \quad \beta_{22} > 0 \quad \text{и} \quad \beta_{11}\beta_{22} > \beta_{12}^2. \quad (58.4)$$

Уравнения движения системы проще всего составить с помощью уравнений Лагранжа, которые для каждой координаты записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad (58.5)$$

где Q_x — обобщенная сила координаты x , она в нашем случае равна:

$$Q_x = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Поэтому уравнения движения системы в принятых обозначениях будут:

$$\begin{aligned} \beta_{11}\ddot{x}_1 + \beta_{12}\ddot{x}_2 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= 0, \\ \beta_{12}\ddot{x}_1 + \beta_{22}\ddot{x}_2 + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (58.6)$$

Члены с α_{12} и β_{12} характеризуют связь между системами, поэтому можно ввести безразмерные коэффициенты связи:

$$\gamma_1^2 = \frac{\beta_{12}^2}{\beta_{11}\beta_{22}}, \quad \gamma_2^2 = \frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{11}\alpha_{22}}. \quad (58.7)$$

Из условий (58.2) и (58.4) следует, что

$$\gamma_1 < 1, \quad \gamma_2 < 1.$$

Коэффициент γ_1 иногда называют коэффициентом *инерционной* связи, а γ_2 — коэффициентом *упругой* связи. Если $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, то парциальные системы изолированы, и процесс в каждой из них происходит независимо от процессов в другой. Из уравнений (58.6) видно, что парциальные частоты равны

$$n_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}}}. \quad (58.8)$$

Предполагаем, что существует частное решение системы уравнений (58.6) в таком виде:

$$x_1 = A e^{i\omega t}, \quad x_2 = B e^{i\omega t},$$

подставляем его в (58.6) и получаем уравнения для определения A , B и ω :

$$\begin{aligned} (\alpha_{11} - \omega^2 \beta_{11}) A + (\alpha_{12} - \omega^2 \beta_{12}) B &= 0, \\ (\alpha_{12} - \omega^2 \beta_{12}) A + (\alpha_{22} - \omega^2 \beta_{22}) B &= 0. \end{aligned} \quad (58.9)$$

Система двух однородных уравнений относительно A и B имеет решение, если:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega^2 \beta_{11} & \alpha_{12} - \omega^2 \beta_{12} \\ \alpha_{12} - \omega^2 \beta_{12} & \alpha_{22} - \omega^2 \beta_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (58.10)$$

Это и есть уравнение для *определения собственных частот* ω_1 и ω_2 , которое можно переписать так:

$$(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)\omega^4 - (\alpha_{11}\beta_{22} + \alpha_{22}\beta_{11} - 2\alpha_{12}\beta_{12})\omega^2 + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 0. \quad (58.11)$$

Для правильной записи общего решения (58.6) следует иметь в виду, что (58.10) имеет четыре решения: $+\omega_1$, $-\omega_1$, $+\omega_2$, $-\omega_2$, каждому из которых вообще будет соответствовать своя система значений A и B , определяемая (58.9).

Легко доказать, что корни уравнения (58.11) ω_1 и ω_2 всегда действительны, и притом парциальные частоты (58.8) всегда лежат между ω_1 и ω_2 . Пусть

$$\Phi(y) = (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)y^2 - (\alpha_{11}\beta_{22} + \beta_{11}\alpha_{22} - 2\alpha_{12}\beta_{12})y + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2;$$

тогда $\Phi(y) = 0$ есть уравнение для собственных частот. Посмотрим, как Φ зависит от y . Легко убедиться, что по (58.2)

$$\Phi(0) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 > 0,$$

$$\Phi(n_1^2) = \Phi\left(\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}\right) = -\left(\beta_{12}\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}} - \alpha_{12}\right)^2 < 0,$$

$$\Phi(n_2^2) = \Phi\left(\frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}}\right) = -\left(\beta_{12}\frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}} - \alpha_{12}\right)^2 < 0,$$

$$\Phi(\pm\infty) > 0.$$

Следовательно, кривая $\Phi(y)$, представляющая параболу, пройдет так, как показано на рис. 184.

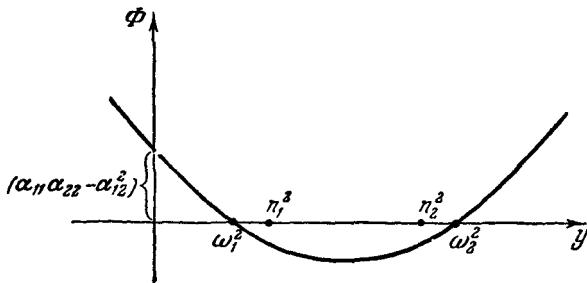


Рис. 184.

Поэтому ω_1^2 и ω_2^2 всегда положительны, n_1^2 и n_2^2 всегда лежат между ω_1^2 и ω_2^2 . Подчеркнем, этот вывод есть следствие того, что потенциальная и кинетическая энергии системы — величины существенно положительные. Физически это значит, что только около устойчивого положения равновесия будут гармонические колебания.

Условие — парциальные частоты лежат между собственными — означает, что при наличии связи высшая собственная частота системы выше большей парциальной, а низшая собственная частота ниже меньшей парциальной частоты, или возникновение связи между двумя изолированными системами ведет к повышению высшей частоты и к понижению низшей частоты. Это простое правило очень полезно при анализе сложной системы.

Из уравнений (58.9) можно найти значение коэффициентов распределения:

$$k_1 = \frac{B_1}{A_1} = -\frac{\alpha_{11} - \omega_1^2 \beta_{11}}{\alpha_{12} - \omega_1^2 \beta_{12}} = -\frac{\alpha_{12} - \omega_1^2 \beta_{12}}{\alpha_{22} - \omega_1^2 \beta_{22}}, \quad (58.12)$$

$$k_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\frac{\alpha_{11} - \omega_2^2 \beta_{11}}{\alpha_{12} - \omega_2^2 \beta_{12}} = -\frac{\alpha_{12} - \omega_2^2 \beta_{12}}{\alpha_{22} - \omega_2^2 \beta_{22}}.$$

Коэффициент k_1 соответствует колебаниям частоты ω_1 , k_2 — колебаниям частоты ω_2 .

Собственные колебания в любой системе с двумя степенями свободы представляются общим решением (58.6) и могут быть записаны так:

$$\begin{aligned}x_1 &= \bar{A}_1 e^{i\omega_1 t} + \bar{A}_1^* e^{-i\omega_1 t} + \bar{A}_2 e^{i\omega_2 t} + \bar{A}_2^* e^{-i\omega_2 t}, \\x_2 &= k_1 (\bar{A}_1 e^{i\omega_1 t} + \bar{A}_1^* e^{-i\omega_1 t}) + k_2 (\bar{A}_2 e^{i\omega_2 t} + \bar{A}_2^* e^{-i\omega_2 t}),\end{aligned}$$

где \bar{A}^* есть сопряженная величина \bar{A} , \bar{A}_1 , \bar{A}_2 — комплексные величины, зависящие от начальных условий: $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$ и $\dot{x}_2(0)$.

Можно записать собственные колебания в сложной системе в тригонометрическом виде. Пусть $2\bar{A}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$, $2\bar{A}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$; тогда

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\x_2 &= k_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + k_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),\end{aligned}\quad (58.13)$$

где A_1 , A_2 , φ_1 , φ_2 — амплитуды и фазы колебаний, которые определяются из начальных условий.

Вспоминая, что парциальные частоты лежат между собственными, можем по формулам (58.12) для коэффициентов распределения установить, что при инерционной связи ($\beta_{12} \neq 0$, $a_{12} = 0$) и при упругой связи ($\beta_{12} = 0$, $a_{12} \neq 0$) знаки коэффициентов k_1 и k_2 различны. Это значит, колебания одной частоты в различных координатах происходят в фазе, а колебания второй частоты — в противофазе.

Для выяснения влияния характера связи на собственные частоты необходимо было бы использовать в общем случае кривую, аналогичную (57.1). Но теперь зависимость между расстройкой и частотой представляется более сложной кривой четвертого порядка, поэтому не будем делать исследования в общем виде, а посмотрим только зависимость собственных частот от коэффициентов связи при равенстве парциальных частот. Если подставим в (58.11)

$$n^2 = \frac{a_{11}}{\beta_{11}} = \frac{a_{22}}{\beta_{22}}$$

и учтем обозначения коэффициентов связи (58.7), то получим:

$$\omega_1^2 = n^2 \frac{1 + \gamma_2}{1 + \gamma_1}, \quad \omega_2^2 = n^2 \frac{1 - \gamma_2}{1 - \gamma_1}. \quad (58.14)$$

Отсюда видно, что изменение инерционной (γ_1) и упругой (γ_2) связи различно влияет на собственные частоты системы. Увеличение γ_1 ведет к понижению ω_1 и к увеличению ω_2 , увеличение γ_2 производит обратное действие. Для правильного понимания влияния характера связи необходимо каждый раз учитывать,

какая из собственных частот (ω_1 или ω_2) больше. Действительно, при $\gamma_1 < \gamma_2$ — преобладание упругой связи, $\omega_1 > \omega_2$; при $\gamma_1 > \gamma_2$ — преобладание инерционной связи, $\omega_1 < \omega_2$. Поэтому увеличение инерционной (индуктивной) связи ведет к сближению собственных частот при преобладании упругой (емкостной) связи, при $\gamma_1 < \gamma_2$; и наоборот, при преобладании инерционной связи — к удалению собственных частот. Следовательно, при оценке влияния связи на собственные частоты важно знать, которая из них преобладает, упругая или инерционная (индуктивная или емкостная), *увеличение преобладающей связи ведет к удалению друг от друга собственных частот, уменьшение — к сближению их.*

Отметим интересный частный случай, когда коэффициенты инерционной и упругой связи равны, $\gamma_1 = \gamma_2$, при равенстве парциальных частот. В этом случае, как видно из (58.14), *собственные частоты равны парциальным*. Наличие связи не изменяет частоты колебаний сложной системы, инерционная (индуктивная) связь компенсирует упругую (емкостную) связь. Из равенства коэффициентов связи следует:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}} = \frac{\beta_{12}}{\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}},$$

отсюда, учитывая равенство парциальных частот, получим:

$$\frac{\alpha_{12}}{\beta_{12}} = \frac{\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}}{\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}} = \frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}} = \frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}}. \quad (58.15)$$

Подставляя (58.15) в формулы для коэффициентов распределения (58.12), получаем:

$$k_1 = \frac{0}{0}, \quad k_2 = \frac{0}{0}. \quad (58.16)$$

Значит, в такой системе будут гармонические колебания одной частоты $\omega_1 = \omega_2 = n$, причем колебания в одной координате совершенно не связаны с колебаниями в другой, отношение амплитуд может принимать любые значения. Это можно было ожидать, ибо упругая сила связи в точности компенсируется инерционной силой связи. Следовательно, если выполняются условия (58.15), то полная система состоит из двух отдельных несвязанных систем, хотя члены связи имеют место и в выражении энергии и в уравнениях. Простейший пример такой системы с двумя степенями свободы показан на рис. 185.

Если обозначим через $q_1(t)$ и $q_2(t)$ заряды, прошедшие через сечения соответствующих проводников к моменту времени t ,

и выберем их за координаты, то легко убедиться, что парциальные частоты одинаковы и равны

$$n = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (58.17)$$

Магнитная энергия системы $T = \frac{1}{2}(L\dot{q}_1^2 + L\dot{q}_2^2 - L\dot{q}_1\dot{q}_2)$. Электрическая энергия $U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}q_1^2 + \frac{1}{C}q_2^2 - \frac{1}{C}q_1q_2\right)$. Очевидно, что,

какие бы колебания ни возникали в первом контуре с частотой n (58.17), разность потенциалов между точками a и b (рис. 185) будет равна нулю и, следовательно, они не окажут никакого влияния на процесс во втором контуре, и наоборот.

Простейшим механическим примером сложной системы с двумя одинаковыми частотами является конический маятник. Действительно, малые колебания такого маятника (при любых начальных условиях) представляют в проекции на горизонтальную плоскость движение по эллипсу, такое, что проекция его на любую линию в этой плоскости является гармоническим движением

с одной и той же частотой $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, где l — длина маятника.

§ 59. Собственные колебания упруго связанных маятников

Применим общую теорию для анализа малых собственных колебаний двух маятников, связанных пружинкой (рис. 186).

Считаем, что стержни маятников и пружина невесомы. Величины параметров системы и координаты обозначены на чертеже. Выражения для кинетической и потенциальной энергии маятников при малых колебаниях имеют следующий вид:

$$T = \frac{m_1 l_1^2}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2 l_2^2}{2} \dot{\varphi}_2^2, \quad (59.1)$$

$$U = \frac{1}{2} l_1 m_1 g \varphi_1^2 + \frac{1}{2} l_2 m_2 g \varphi_2^2 + \frac{k l^2}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2.$$

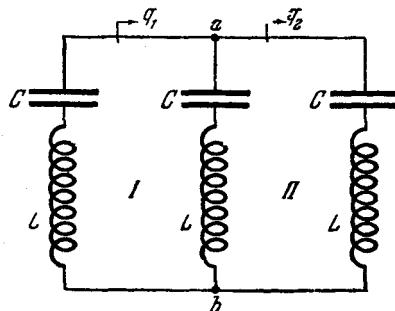


Рис. 185.

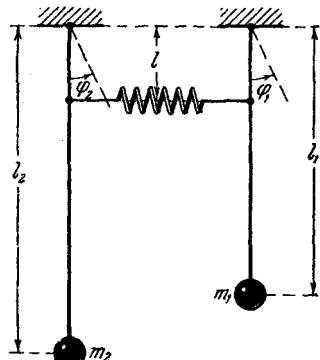


Рис. 186.

Сравним (59.1) с (58.1) и получим значения коэффициентов энергии:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{2} (l_1 m_1 g + k l^2), \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2} (l_2 m_2 g + k l^2), \\ \alpha_{12} &= -\frac{1}{2} k l^2, \quad \beta_{12} = 0, \\ \beta_{11} &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2, \quad \beta_{22} = \frac{1}{2} m_2 l_2^2. \end{aligned} \quad (59.2)$$

Следовательно, парциальные частоты системы:

$$n_1^2 = \frac{g + \frac{k l^2}{l_1 m_1}}{l_1}, \quad n_2^2 = \frac{g + \frac{k l^2}{l_2 m_2}}{l_2}. \quad (59.3)$$

Заметим, что парциальные частоты зависят от жесткости пружины, так как парциальная частота есть частота колебаний одного маятника при втором неподвижном маятнике.

Коэффициенты связи имеют следующие значения:

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2^2 = \frac{k^2 l^4}{(l_1 m_1 g + k l^2)(l_2 m_2 g + k l^2)}. \quad (59.4)$$

Подставляя (59.2), (59.3) и (59.4) в (58.11), получаем уравнение для определения собственных частот:

$$(n_1^2 - \omega^2)(n_2^2 - \omega^2) - \gamma_2^2 n_1^2 n_2^2 = 0. \quad (59.5)$$

Такой же вид имеет уравнение собственных частот двух емкостно связанных электрических контуров.

Можно построить график зависимости собственных частот от отношения парциальных частот $\xi = \frac{n_2}{n_1}$, аналогичный тому, который показан на рис. 183. Вид его будет такой же, за отличием некоторых деталей, например, при $\xi \rightarrow 0$, $\omega_1 \rightarrow 0$, $\omega_2 \rightarrow 1$ и т. д.

Интересно заметить, что когда одинаковые маятники связаны пружиной или $n_1 = n_2 = n$, то собственные частоты

$$\omega_{1,2}^2 = n^2 (1 \mp \gamma_2) \quad (59.6)$$

и коэффициенты распределения по (58.12)

$$k_1 = +1, \quad k_2 = -1.$$

Это означает, что при колебаниях только с первой частотой оба маятника совершают колебания в фазе. После того как оба маятника отклонены на одинаковые углы в одну сторону и отпущены без толчка, они будут совершать гармонические колебания с первой частотой с одинаковыми амплитудами и в фазе друг с другом ($k_1 = +1$). В этом случае не возникает колебаний со второй

частотой из-за симметрии системы, как уже указывалось в § 56.

Частота колебаний ω_1 равна $n\sqrt{1-\gamma} = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Если отведем маятники в разные стороны на одинаковые углы и отпустим без толчка, то колебания маятников будут происходить со второй собственной частотой ω_2 . В этом случае маятники совершают колебания в противофазе и с одинаковой амплитудой ($k_s = -1$).

§ 60. Нормальные координаты

Рассматривая общее выражение для собственных колебаний в системе с двумя степенями свободы (58.13) и замечая, что колебания координаты x_2 состоят из тех же членов, что и колебания координаты x_1 , только каждый из членов умножен на постоянный коэффициент (коэффициент распределения), можно представить гармонические члены как некоторые *новые* координаты системы. Действительно, если обозначим

$$\xi = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \eta = B \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (60.1)$$

то выражение для колебаний (58.13) примет такой вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi + \eta, \\ x_2 &= k_1 \xi + k_2 \eta. \end{aligned} \quad (60.2)$$

Равенства (60.2) можно истолковать как формулы линейного преобразования от координат x_1 и x_2 к новым координатам ξ и η . Если вместо координат x_1 и x_2 выберем новые ξ и η , то, очевидно, по (60.1), каждая из этих координат совершает гармоническое колебание с частотой ω_1 (или ω_2) при любых начальных условиях.

Координаты ξ и η называются *нормальными* координатами системы. Каждая нормальная координата совершает гармоническое колебание с *собственной*, или, как иногда называют, с *нормальной* частотой.

Можно было бы поставить вопрос иначе: нельзя ли линейным преобразованием координат перейти к таким координатам, в которых каждая координата при собственных колебаниях совершает чисто гармоническое колебание; или можно ли найти такие координаты, в которых выражения потенциальной и кинетической энергий будут иметь равными нулю коэффициенты при произведениях координат, т. е.

$$\beta_{12} = 0, \quad a_{12} = 0. \quad (60.3)$$

После соответствующих выкладок можно доказать, что искомое преобразование имеет вид (60.2).

Однако проще показать, что при преобразовании (60.2) условие (60.3) выполняется, и члены с произведением координат и скоростей исчезают в выражении для энергии.

Действительно, потенциальная энергия системы

$$U = \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 = \alpha_{11}(\xi + \eta)^2 + 2\alpha_{12}(k_1\xi + k_2\eta)(\xi + \eta) + \alpha_{22}(k_1\xi + k_2\eta)^2 = \alpha'_{11}\xi^2 + \alpha'_{22}\eta^2, \quad (60.4)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha'_{11} &= \alpha_{11} + \alpha_{22}k_1^2 + 2\alpha_{12}k_1, \\ \alpha'_{22} &= \alpha_{11} + \alpha_{22}k_2^2 + 2\alpha_{12}k_2. \end{aligned} \quad (60.5)$$

Коэффициент

$$\alpha'_{12} = \alpha_{11} + \alpha_{22}k_1k_2 + \alpha_{12}(k_1 + k_2) \quad (60.6)$$

равен нулю, как будет показано ниже. Таким же образом кинетическая энергия примет вид:

$$T = \beta'_{11}\dot{\xi}^2 + \beta'_{22}\dot{\eta}^2, \quad (60.7)$$

где

$$\beta'_{11} = \beta_{11} + \beta_{22}k_1^2 + 2\beta_{12}k_1, \quad \beta'_{22} = \beta_{11} + \beta_{22}k_2^2 + 2\beta_{12}k_2. \quad (60.8)$$

Теперь покажем, что коэффициенты

$$\beta'_{12} = \beta_{11} + \beta_{22}k_1k_2 + \beta_{12}(k_1 + k_2) \quad (60.9)$$

и α'_{12} (60.6) равны нулю.

Из формулы для коэффициента распределения k_1 (58.12) получаем:

$$k_1(\omega_1^2\beta_{12} - \alpha_{12}) = \alpha_{11} - \omega_1^2\beta_{11},$$

$$k_1(\omega_1^2\beta_{22} - \alpha_{22}) = \alpha_{12} - \omega_1^2\beta_{12}$$

или

$$\omega_1^2(\beta_{12}k_1 + \beta_{11}) = \alpha_{11} + \alpha_{12}k_1, \quad (60.10)$$

$$\omega_1^2(\beta_{22}k_1 + \beta_{12}) = \alpha_{12} + \alpha_{22}k_1.$$

Умножим второе равенство на k_2 и сложим с первым; получим:

$$\omega_1^2[\beta_{11} + \beta_{22}k_1k_2 + \beta_{12}(k_1 + k_2)] = \alpha_{11} + \alpha_{22}k_1k_2 + \alpha_{12}(k_1 + k_2). \quad (60.11)$$

Точно таким же путем из формулы для k_2 (58.12) получим, что

$$\omega_2^2[\beta_{11} + \beta_{22}k_1k_2 + \beta_{12}(k_1 + k_2)] = \alpha_{11} + \alpha_{22}k_1k_2 + \alpha_{12}(k_1 + k_2). \quad (60.12)$$

Вычитаем (60.11) из (60.12)

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2)(\beta_{11} + \beta_{22}k_1k_2 + \beta_{12}(k_1 + k_2)) = 0.$$

Так как $\omega_1 \neq \omega_2$, то, следовательно, равенства $\beta_{12} = 0$ и $\alpha'_{12} = 0$ справедливы.

Уравнения движения в координатах ξ и η , уравнения Лагранжа (58.5) будут

$$\begin{aligned}\beta'_{11}\ddot{\xi} + \alpha'_{11}\dot{\xi} &= 0, \\ \beta'_{22}\ddot{\eta} + \alpha'_{22}\dot{\eta} &= 0.\end{aligned}\quad (60.13)$$

Следовательно, собственные колебания в нормальных координатах будут гармоническими колебаниями (60.1) с частотами ω_1 и ω_2 . Формулы для определения собственных частот теперь можно записать, учитывая (60.5) и (60.8), в таком виде:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{\alpha'_{11}}{\beta'_{11}} = \frac{a_{11} + a_{22}k_1^2 + 2a_{12}k_1}{\beta_{11} + \beta_{22}k_1^2 + 2\beta_{12}k_1}, \\ \omega_2^2 &= \frac{\alpha'_{22}}{\beta'_{22}} = \frac{a_{11} + a_{22}k_2^2 + 2a_{12}k_2}{\beta_{11} + \beta_{22}k_2^2 + 2\beta_{12}k_2}.\end{aligned}\quad (60.14)$$

Нормальное колебание можно наблюдать непосредственно. Если специальным устройством осуществить преобразование к нормальной координате, то при собственных колебаниях с любыми начальными условиями нормальная координата будет совершать только гармоническое колебание с одной частотой. Формулы преобразования к нормальным координатам (60.2) можно записать так:

$$\xi = \frac{x_2 - k_2 x_1}{k_1 - k_2}, \quad \eta = \frac{x_2 - k_1 x_1}{k_2 - k_1}.$$

Следовательно, если сделать такое приспособление, которое изменит величину координаты x_1 в k_2 раз и вычтет эту величину из величины координаты x_2 , то оно в результате представит нам гармоническое колебание с частотой ω_1 , или координату, пропорциональную нормальной координате ξ .

Например, для двух связанных пружинкой маятников можно осуществить такое приспособление, схема которого показана на рис. 187. При помощи этого приспособления можно демонстрировать нормальные колебания и нормальные координаты. Подвесы двух маятников длиною L_1 и L_2 находятся в точках O_1 и O_2 . Колебания маятников вызывают вращение двух зеркал \mathcal{Z}_1 и \mathcal{Z}_2 , укрепленных над точками подвеса на параллельных осях, перпендикулярных к плоскости качания маятников. Вращения зеркал вызываются посредством двух легких рычагов B_1 и B_2 , прикрепленных к осям зеркал и соединенных шарнирно с маятниками на расстояниях l'_1 и l'_2 ниже точек O_1 и O_2 соответственно. Углы поворота зеркал, разумеется, небольшие, будут пропорциональны отклонениям маятников x_1 и x_2 . Луч света от источника L падает последовательно на зеркала \mathcal{Z}_1 и \mathcal{Z}_2 , а затем на барабан B . Если рабочая длина рычагов B_1 и B_2 равна l_1 и l_2 соответственно, то отклонение луча на барабане будет пропорционально:

$$x_2 - \frac{L_2 l'_1 l_2}{L_1 l'_1 l_2} x_1.$$

Следовательно, если длины рычагов подобраны так, что

$$k_2 = \frac{L_2 l'_1 l_2}{L_1 l'_1 l_2}, \quad (60.15)$$

то отклонение луча на барабане B в определенном масштабе равно нормальной координате ξ . Вращая барабан B , можно записать на фотобумаге чисто гармонические колебания при любом способе возбуждения собственных колебаний маятников.

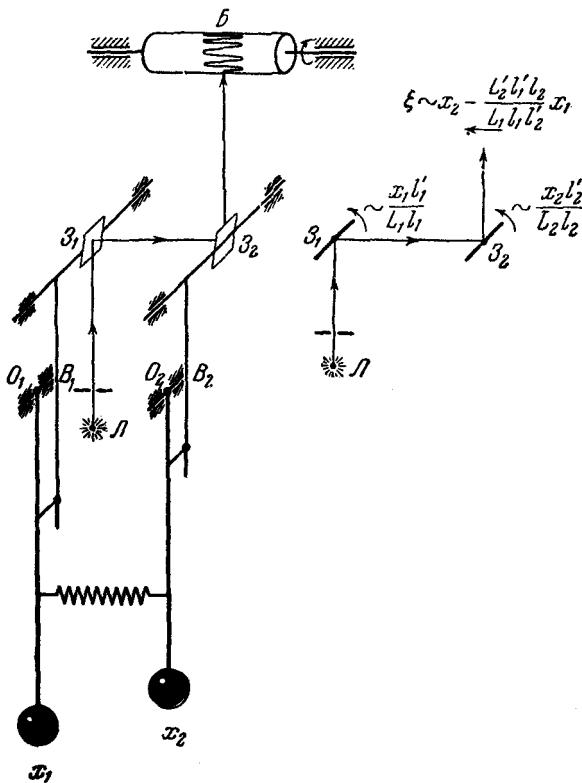


Рис. 187.

Очевидно, что можно выделить таким же образом и вторую нормальную координату. Для связанных электрических контуров тоже принципиально просто осуществить аналогичное устройство, позволяющее наблюдать нормальные колебания.

§ 61. Собственные частоты как экстремальные значения

Для анализа, а иногда и для расчета собственных частот можно пользоваться формулами (60.14), которые связывают собственные частоты с коэффициентами распределения k_1 и k_2 .

Заметим, что формулы (60.14) можно вывести из закона сохранения энергии. Пусть начальные условия выбраны таким образом, что колебания совершаются только с частотой ω_1 , т. е.

$$x_1 = A \cos \omega_1 t, \quad x_2 = k_1 A \cos \omega_1 t.$$

Тогда потенциальная и кинетическая энергии

$$U = (\alpha_{11} + \alpha_{22}k_1^2 + 2\alpha_{12}k_1) A^2 \cos^2 \omega_1 t,$$

$$T = (\beta_{11} + \beta_{22}k_1^2 + 2\beta_{12}k_1) A^2 \omega_1^2 \sin^2 \omega_1 t.$$

Очевидно, что полная энергия E при $t = 0$ равна только потенциальной энергии

$$E = A^2 (\alpha_{11} + \alpha_{22}k_1^2 + 2\alpha_{12}k_1), \quad (61.1)$$

потому что кинетическая энергия T в этот момент равна нулю. Через четверть периода, при $t = \frac{\pi}{2\omega_1}$, вся энергия превратится в кинетическую, а потенциальная будет равна нулю; тогда

$$E = (\beta_{11} + \beta_{22}k_1^2 + 2\beta_{12}k_1) \omega_1^2 A^2. \quad (61.2)$$

Приравнивая (61.1) и (61.2), получаем формулу (60.14). Таким же образом можно получить формулу и для ω_2^2 .

Если из каких-либо соображений известны, хотя бы приближенно, коэффициенты распределения k_1 и k_2 , то формулами (60.14) можно воспользоваться для определения собственной частоты. Практически важно, что формулы (60.14) нечувствительны к небольшим изменениям величин k_1 и k_2 , потому что величины ω_1^2 и ω_2^2 — экстремальные значения следующей функции:

$$f(y) = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}y^2 + 2\alpha_{12}y}{\beta_{11} + \beta_{22}y^2 + 2\beta_{12}y}. \quad (61.3)$$

Экстремумы функции (61.3) будут при $y = k_1$ и $y = k_2$, и, следовательно, сравнивая с (60.14), можем записать $\omega_1^2 = f(k_1)$, $\omega_2^2 = f(k_2)$.

Докажем, что $f(y)$ при $y = k_1$ имеет экстремум. Заметим, что

$$\beta_{11} + \beta_{22}y^2 + 2\beta_{12}y > 0,$$

так как по (58.4)

$$\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 > 0.$$

Производная от $f(y)$ будет равна

$$f'(y) = \frac{(\beta_{11} + \beta_{22}y^2 + 2\beta_{12}y)(2\alpha_{22}y + 2\alpha_{12}) - (\alpha_{11} + \alpha_{22}y^2 + 2\alpha_{12}y)(2\beta_{22}y + 2\beta_{12})}{(\beta_{11} + \beta_{22}y^2 + 2\beta_{12}y)^2}. \quad (61.4)$$

Из формул (60.10) следует:

$$\frac{\alpha_{11} + \alpha_{12}k_1}{\beta_{11} + \beta_{12}k_1} = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{22}k_1}{\beta_{12} + \beta_{22}k_1}. \quad (61.5)$$

Подставляя в (61.4) $y = k_1$ и учитывая (61.5), получаем:

$$f'(k_1) = 0,$$

следовательно, $f(y)$ при k_1 имеет экстремум. Точно таким же путем можно доказать, что $f'(k_2) = 0$. Следовательно, небольшие

изменения величины k_1 почти не изменят $f(k_1)$. Поэтому, если приближенно известны коэффициенты распределения, то можно по формуле (60.14) определить частоты практически с достаточной степенью точности.

Например, при $n_1 = n_2$ из соображений симметрии легко определить k_1 и k_2 и затем по формуле (60.14) — собственные частоты. Если $n_1 \neq n_2$, но очень мало отличаются друг от друга, то можно для вычисления частот подставить в формулы (60.14) известные для случая $n_1 = n_2$ значения k_1 и k_2 .

§ 62. Связь и связанность двух систем (взаимодействие двух систем)

Колебания в двух связанных контурах мы рассматривали как колебания в единой системе, имеющей две степени свободы. Это безусловно правильно. Однако в физических задачах часто приходится решать вопрос: насколько существенно оказывается на процессах в данном контуре (в данной парциальной системе) наличие второго контура и процессы в нем. Вообще всегда два контура связаны друг с другом хоть и очень слабо. Спрашивается, при каких условиях можно пренебречь связью и процесс в каждом контуре рассматривать как в изолированной системе с одной степенью свободы? Обычно ответ таков: когда связь очень мала. Но по сравнению с чем связь должна быть мала?

Ответ на этот вопрос в общем виде довольно сложен, хотя бы потому, что, как мы видели в § 60, упругие силы связи отчасти компенсируют действие инерционных сил связи. Но если в системе имеется связь одного вида, то можно установить общие условия, при которых связь мало влияет на колебания в отдельных парциальных системах, частота колебаний остается почти равной парциальной. Особенно простой вид имеют эти условия для систем с упругой связью.

Собственные частоты колебаний в этом случае по уравнению (59.5) определяются так:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} [n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 + n_2^2)^2 - 4n_1^2 n_2^2 (1 - \gamma_2^2)}],$$

или лучше записать эту формулу в таком виде:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} [n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2 n_2^2 \gamma_2^2}]. \quad (62.1)$$

Очевидно, что если $\gamma_2 \rightarrow 0$, то $\omega_1 \rightarrow n_1$, а $\omega_2 \rightarrow n_2$. Но при каких значениях γ_2 величины собственных частот будут мало отличаться от парциальных? Легко видеть в (62.1), что это будет только при таких значениях γ_2 , которые удовлетворяют условию

$$(n_1^2 - n_2^2)^2 \gg 4\gamma_2^2 n_1^2 n_2^2. \quad (62.2)$$

Л. И. Мандельштам, анализируя этот вопрос, ввел понятие *связанности систем* и предложил следующую величину — *коэффициент связанности*:

$$\sigma = \gamma_2 \frac{2n_1 n_2}{|n_1^2 - n_2^2|}. \quad (62.3)$$

Смысл понятия *связанности двух систем* заключается в том, что не только величина сил связи (γ_2) определяет характер взаимодействия между системами, но и *близость парциальных частот* друг к другу. Если величина $\sigma \ll 1$ (а не γ_2), то взаимодействие между системами мало, *связанность* мала. Очевидно, что при приближении к равенству парциальных частот *), при $n_1 \rightarrow n_2$, коэффициент связанности (62.3) значительно возрастает даже при небольших значениях связи (γ_2). Маленькие силы связи оказывают существенное влияние на процессы, если парциальные частоты близки друг к другу. Наоборот, при большой расстройке, при значительной разнице в парциальных частотах, даже относительно большие силы связи не сказываются на колебаниях каждой отдельной системы.

Это особенно ясно видно из формул для коэффициентов распределения амплитуд k_1 и k_2 , выраженных через коэффициент связанности. Если в формулы (58.12) подставим значение частоты в виде (62.1) и учтем обозначения (58.7) и (62.3), то после простых преобразований получаем:

$$k_1 = \sqrt{\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}} \frac{1 - \sqrt{1 + \sigma^2}}{\sigma}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}} \frac{1 + \sqrt{1 + \sigma^2}}{\sigma}. \quad (62.4)$$

Из (62.4) видно, что при малой связанности, при $\sigma \rightarrow 0$, $k_1 \rightarrow 0$, а $k_2 \rightarrow \infty$. Это означает: когда в первом контуре колебания частоты ω_1 имеют конечную амплитуду, то во втором контуре колебания этой же частоты равны нулю; когда во втором контуре имеют место колебания частоты ω_2 , то в первом контуре колебания этой частоты равны нулю. Следовательно, в первом контуре имеют место только колебания частоты ω_1 (очень близкой к n_1), а во втором контуре — колебания частоты ω_2 (близкой к n_2), или колебания можно считать разделенными, можно пренебречь связью между системами, если *связанность* [но не связь (γ_2)] очень мала ($\sigma \rightarrow 0$).

Так, например, при $n_2 \rightarrow n_1$ связанность σ не будет мала даже при очень малой связи γ_2 .

Коэффициент связанности можно ввести и для инерционной (или индуктивной) связи, но в этом случае будет некоторое небольшое отличие в определении коэффициента, ничего не изменяющее в принципе.

*) «К резонансу», как иногда говорят.

§ 63. Колебания при сильной связности

При одинаковых парциальных частотах ($n_1 = n_2$) при сколь угодно малой связи *связанность* огромна ($\sigma \rightarrow \infty$). В этом случае получается парадоксальный на первый взгляд вывод: две одинаковые системы, как бы слабо они ни были связаны, всегда сильно взаимодействуют. Два контура, как бы далеко они ни были удалены, всегда действуют друг на друга. Для того чтобы разобраться в этом очевидном противоречии известным фактам, рассмотрим подробнее колебания в двух связанных пружинкой маятниках «при резонансе».

Собственные частоты в этом случае по (58.14), или по (59.6),

$$\omega_{1,2}^2 = n^2 (1 \pm \gamma_2),$$

и коэффициенты распределения:

$$k_{1,2} = \pm 1.$$

Следовательно, собственные колебания можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1) + B \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2), \\ \varphi_2 &= A \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1) - B \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2).\end{aligned}\quad (63.1)$$

Если в начальный момент было некоторое смещение только одного маятника $\varphi_1 = a$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = 0$, то каким образом будут колебаться маятники далее? Для решения этого подставим начальные условия в (63.1) и получим:

$$\begin{aligned}a &= A \cos \varepsilon_1 + B \cos \varepsilon_2, \\ 0 &= A \cos \varepsilon_1 - B \cos \varepsilon_2, \\ 0 &= \omega_1 A \sin \varepsilon_1 + \omega_2 B \sin \varepsilon_2, \\ 0 &= \omega_1 A \sin \varepsilon_1 - \omega_2 B \sin \varepsilon_2.\end{aligned}$$

Из последних двух уравнений следует:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.$$

Тогда из первых двух

$$A = B = \frac{1}{2} a,$$

следовательно, колебания будут иметь такой вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{1}{2} a (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} a (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t),\end{aligned}$$

или

$$\varphi_1 = a \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t,$$

$$\varphi_2 = a \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t.$$

Вид колебаний схематически представлен на рис. 188. Колебания первого маятника будут ослабляться, а второго постепенно

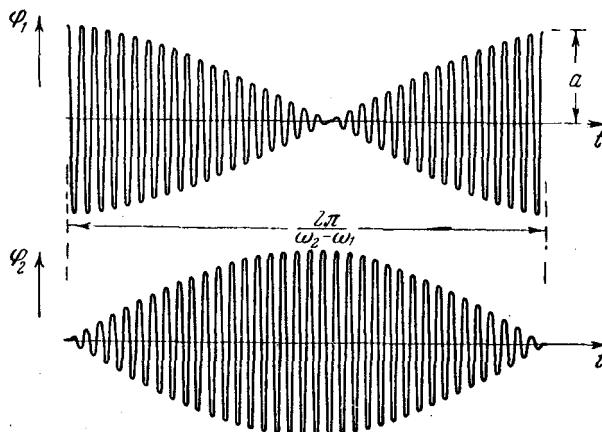


Рис. 188.

увеличиваться; энергия будет перекачиваться от одного маятника к другому. Через время

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad (63.2)$$

вся энергия колебаний целиком передастся ко второму маятнику и далее начнется переход энергии в обратном направлении. Энергия, которой обладает только первая система, *нацело* перекачивается в другую через время t_1 , собственно это и характеризует физически сильное взаимодействие двух систем при резонансе, как бы ни мала была связь между ними. Заметим, что при «расстройке» контуров энергия, имеющаяся у одного контура вначале, никогда не будет целиком передана второму контуру.

Однако время полной перекачки энергии от одного маятника к другому зависит от величины связи. Действительно, по (59.6)

$$\omega_2 - \omega_1 = n(\sqrt{1 + \gamma_2} - \sqrt{1 - \gamma_2}), \quad (63.3)$$

или при малой связи, при $\gamma_2 \ll 1$,

$$\omega_2 - \omega_1 \approx n\gamma_2. \quad (63.4)$$

Подставляем (63.4) в (63.2), получаем время перекачки

$$t_1 \approx \frac{\pi}{n\gamma_2}, \quad (63.5)$$

которое будет обратно пропорционально величине коэффициента связи γ_2 . Следовательно, при очень малой связи время перекачки становится очень большим.

Поэтому полученными результатами нужно осторожно пользоваться при анализе собственных колебаний в обычных реальных системах с затуханием. Наличие хотя бы и очень малого затухания при сильной связанности и малой связи радикально

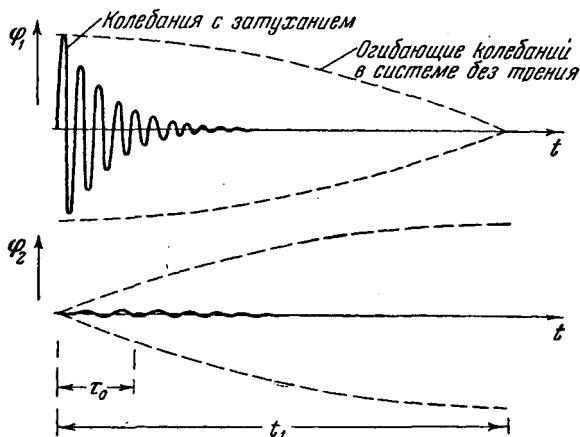


Рис. 189.

изменяет картину колебаний потому, что колебания первого маятника затухнут значительно ранее того, когда они могли бы сколько-нибудь заметно раскачать второй маятник. Колебания маятников примерно показаны на рис. 189. Таким образом, только в том случае, когда время перекачки t_1 много меньше постоянной времени τ_0 парциальных систем, можно применять результаты изложенной выше теории связанности двух систем без затухания.

Рассмотрим условие, накладываемое на величину связи двух маятников, которое получается из

$$\tau_0 \gg t_1.$$

Учитывая (63.5), это условие можно записать в таком виде:

$$\tau_0 = \frac{2m}{h} \gg \frac{\pi}{n\gamma_2}. \quad (63.6)$$

По (59.3) и (59.4)

$$n\gamma_3 = \frac{kl^2}{l_1 \sqrt{m(mgl_1 + kl^2)}},$$

при малой связи

$$n\gamma_3 \approx \frac{k}{m} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\frac{l}{l_1}\right)^{3/2}, \quad (63.7)$$

где k — жесткость пружинки связи, l_1 — длина маятника, l — расстояние до пружинки от точек подвеса, m — масса маятника, h — коэффициент силы трения груза маятника при движении в окружающей среде; трением стержней и трением в подвесах пренебрегаем.

Подставляя (63.7) в (63.6), получаем:

$$h \ll \frac{k}{\pi} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\frac{l}{l_1}\right)^{3/2}. \quad (63.8)$$

Следовательно, при данном малом трении h мы не можем уменьшать связь, которая пропорциональна k и l , настолько, чтобы нарушилось условие (63.8). При данном, хотя и очень малом трении в системе, связь должна быть достаточно велика для того, чтобы картина процессов в реальной системе была близка к той, которую мы получаем пренебрегая силой трения. Иначе, близость теоретических выводов к действительности определяется в данном случае не только величиной сил трения, которыми пренебрегают, но и соотношением между силами трения и силами связи.

Однако нужно заметить, что в теориях строения вещества иногда приходится иметь дело с колебаниями систем без затухания; там результаты теории связанных систем без затухания имеют принципиальное значение. Там приходится считаться с очень малыми связями при наличии разонаса.

§ 64. Собственные колебания в системе с двумя степенями свободы при наличии трения

Наличие силы трения (или омического сопротивления в контуре) при колебаниях принципиально изменит картину процесса. При очень маленьком трении и достаточной связи картина колебаний будет очень близка к той, которую мы рассматривали в предыдущих параграфах, но колебания уже не будут представлять сумму гармонических колебаний, а сумму слабо затухающих колебаний, которые с течением времени прекращаются. При большой величине трения колебания совсем не будут похожи на сумму гармонических.

В дальнейшем предполагаем, что силы трения в системе пропорциональны скорости движения; в этом случае энергию,

переходящую в тепло благодаря силам трения, можно представить функцией рассеяния, вид которой аналогичен виду кинетической и потенциальной энергии. Функция рассеяния определяется таким образом:

$$F = \varepsilon_{11}\dot{x}_1^2 + \varepsilon_{22}\dot{x}_2^2 + 2\varepsilon_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2, \quad (64.1)$$

причем коэффициенты ε_{11} , ε_{22} и ε_{12} подобраны так, что

$$-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \quad \text{и} \quad -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}, \quad (64.2)$$

представляют собой силы трения, действующие вдоль координаты x_1 и x_2 соответственно. Например, для одной степени свободы, в которой сила трения равна $-h\dot{x}$, функция рассеяния $F = \frac{1}{2}h\dot{x}^2$ будет пропорциональна производной от энергии, переходящей в тепло вследствие работы силы трения, или мощности. Так же можно показать, что $F dt$ — количество энергии, переходящей в тепло за время dt .

Уравнения колебаний в системе с двумя степенями свободы в общем виде получим из уравнений Лагранжа, если кинетическую и потенциальную энергию будем представлять в виде (58.3) и (58.4), а силы трения (64.2) прибавим к обобщенным силам Q_x (58.5). Тогда

$$\begin{aligned} \beta_{11}\ddot{x}_1 + \beta_{12}\ddot{x}_2 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \varepsilon_{11}\dot{x}_1 + \varepsilon_{12}\dot{x}_2 &= 0, \\ \beta_{12}\ddot{x}_1 + \beta_{22}\ddot{x}_2 + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \varepsilon_{12}\dot{x}_1 + \varepsilon_{22}\dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (64.3)$$

будут уравнениями колебаний в системе с двумя степенями свободы при наличии трения.

Предположим, что частное решение системы дифференциальных уравнений (64.3) имеет вид

$$x_1 = Ae^{\lambda t}, \quad x_2 = kAe^{\lambda t}, \quad (64.4)$$

где A , k и λ — некоторые постоянные величины. Подставляя (64.4) в (64.3), получаем два уравнения относительно k :

$$\begin{aligned} (\beta_{11}\lambda^2 + \varepsilon_{11}\lambda + \alpha_{11}) + (\beta_{12}\lambda^2 + \varepsilon_{12}\lambda + \alpha_{12})k &= 0, \\ (\beta_{12}\lambda^2 + \varepsilon_{12}\lambda + \alpha_{12}) + (\beta_{22}\lambda^2 + \varepsilon_{22}\lambda + \alpha_{22})k &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда очевидно

$$k = -\frac{\beta_{11}\lambda^2 + \varepsilon_{11}\lambda + \alpha_{11}}{\beta_{12}\lambda^2 + \varepsilon_{12}\lambda + \alpha_{12}} = -\frac{\beta_{12}\lambda^2 + \varepsilon_{12}\lambda + \alpha_{12}}{\beta_{22}\lambda^2 + \varepsilon_{22}\lambda + \alpha_{22}}. \quad (64.5)$$

Из последнего равенства (64.5) следует, что λ должно удовлетворять следующему уравнению:

$$(\beta_{11}\lambda^2 + \varepsilon_{11}\lambda + \alpha_{11})(\beta_{22}\lambda^2 + \varepsilon_{22}\lambda + \alpha_{22}) - (\beta_{12}\lambda^2 + \varepsilon_{12}\lambda + \alpha_{12})^2 = 0, \quad (64.6)$$

которое представляет уравнение четвертой степени относительно λ и имеет, в общем случае, четыре корня:

$$\lambda_{1,2} = -\delta_1 \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = -\delta_2 \pm i\omega_2. \quad (64.7)$$

Поскольку коэффициенты уравнения (64.6) действительны, то возможны следующие комбинации корней: или имеются две пары комплексно-сопряженных корней, у которых действительные части обозначены через $-\delta_1$ и $-\delta_2$ и мнимые — через ω_1 и ω_2 , или — пара действительных корней и пара комплексно-сопряженных, или все корни действительные.

Разберем наиболее общий случай: две пары комплексно-сопряженных корней. Найдя значения λ , подставим их в (64.5) и получим четыре значения k , которые также представляют две пары комплексно-сопряженных величин:

$$\begin{array}{ll} \bar{k}_1 & \text{для } \lambda_1, \quad \bar{k}_2 & \text{для } \lambda_3, \\ \bar{k}_1^* & \text{для } \lambda_2, \quad \bar{k}_2^* & \text{для } \lambda_4. \end{array} \quad (64.8)$$

«Звездочкой» обозначаем комплексно-сопряженную величину.

Теперь можно записать общее решение системы (64.3) в таком виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{A}e^{(-\delta_1 + i\omega_1)t} + \bar{A}^*e^{(-\delta_1 - i\omega_1)t} + \bar{B}e^{(-\delta_2 + i\omega_2)t} + \bar{B}^*e^{(-\delta_2 - i\omega_2)t}, \\ x_2 &= \bar{A}\bar{k}_1 e^{(-\delta_1 + i\omega_1)t} + \bar{A}^*\bar{k}_1^* e^{(-\delta_1 - i\omega_1)t} + \bar{B}\bar{k}_2 e^{(-\delta_2 + i\omega_2)t} + \\ &\quad + \bar{B}^*\bar{k}_2^* e^{(-\delta_2 - i\omega_2)t}. \end{aligned} \quad (64.9)$$

Выражения (64.9) представляют затухающие колебания в системе, которые можно записать в обычном виде.

Действительно, если обозначить:

$$2\bar{A} = Ae^{i\varphi_1}, \quad \bar{k}_1 = k_1 e^{i\kappa_1},$$

$$2\bar{B} = Be^{i\varphi_2}, \quad \bar{k}_2 = k_2 e^{i\kappa_2},$$

то формулы (64.9) примут такой вид:

$$x_1 = Ae^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + Be^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$x_2 = Ak_1 e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \kappa_1) + Bk_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \kappa_2).$$

Четыре величины A , B , φ_1 и φ_2 определяются из начальных условий. Величины δ_1 , δ_2 , ω_1 , ω_2 , k_1 , k_2 , κ_1 , κ_2 определяются параметрами системы.

Колебания в системе являются затухающими колебаниями: каждая координата совершает затухающие колебания с двумя частотами ω_1 и ω_2 и с двумя коэффициентами затухания δ_1 и δ_2 соответственно. Коэффициенты распределения \bar{k}_1 и \bar{k}_2 (64.8) —

величины комплексные; это значит, что начальная фаза колебаний одной и той же частоты в различных координатах — различная, фазы сдвинуты на величины χ_1 и χ_2 , которые зависят от параметров системы.

§ 65. Комплексные собственные частоты

Так как в системе с трением имеют место затухающие собственные колебания, которые не состоят из гармонических, то говорить о собственных частотах, строго говоря, нельзя. Однако есть смысл называть собственными частотами комплексные величины, указанные в формулах (64.7).

Можно ввести понятие *комплексной частоты*, которая соответствует затухающему колебанию: действительная часть комп-

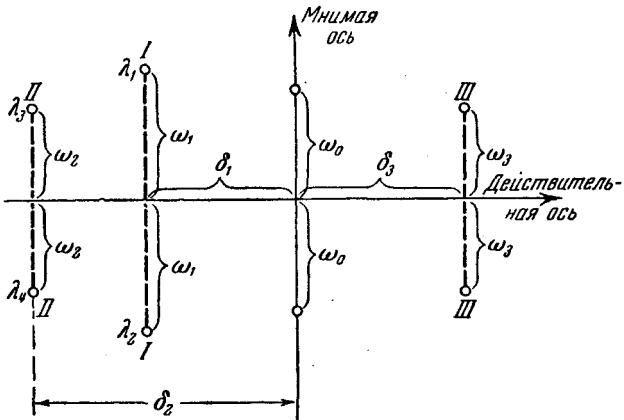


Рис. 190.

лексной частоты равна коэффициенту затухания, мнимая часть — частоте гармонического сомножителя затухающего колебания. Пользуясь этой терминологией, можно сказать, что для чисто гармонического колебания действительная часть соответствующей ему комплексной частоты равна нулю. Частоту колебаний можно представить точками на плоскости комплексного переменного (рис. 190). Точки на мнимой оси соответствуют гармоническому колебанию с частотой ω_0 , точки I и II представляют затухающие колебания, точки III — нарастающие колебания с коэффициентом нарастания δ_3 . Таким образом, введя понятие *комплексной частоты*, можно утверждать, что *собственные частоты системы с трением являются комплексными частотами*. Для системы без трения комплексные собственные частоты будут *чисто мнимые*.

Заметим еще, что уравнение для определения собственных частот (64.6) может иметь все действительные корни. Это будет соответствовать очень большой величине трения, при которой в системе не будет колебаний, а чисто лимитационное движение стремится к нулю: движение каждой координаты составлено из суммы показательных функций, стремящихся к нулю. Все собственные комплексные частоты — действительны. Возможен также случай, когда два корня действительны, а два комплексные (комплексно-сопряженные). Движение состоит из суммы затухающих колебаний и движений по показательному закону к нулю.

Определение собственных частот в общем случае (системы с затуханием) или решение уравнения (64.6) представляет довольно трудную задачу, поэтому практически часто решают ее приближенными приемами. В следующем параграфе приведем пример такого решения.

§ 66. Собственные колебания в связанных индуктивно контурах с небольшим затуханием

Имеем два индуктивно связанных электрических контура (рис. 191) с большой добротностью. Для каждого отдельного контура

$$R \ll \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ или } Q \gg 1. \quad (66.1)$$

Если обозначим I_1 — ток в первом контуре, I_2 — ток во втором контуре, то из уравнений напряжений для каждой цепи следует:

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{I}_1 + M \ddot{I}_2 + R_1 I_1 + \frac{1}{C_1} I_1 &= 0, \\ M \ddot{I}_1 + L_2 \ddot{I}_2 + R_2 I_2 + \frac{1}{C_2} I_2 &= 0. \end{aligned} \quad (66.2)$$

Обозначим $\Delta_1 = \frac{R_1}{2L_1}$, $\Delta_2 = \frac{R_2}{2L_2}$, $n_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$, $n_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$ и $\gamma_1 = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$. Тогда уравнение (64.6) собственных частот принимает такой вид:

$$(\lambda^2 + 2\Delta_1 \lambda + n_1^2)(\lambda^2 + 2\Delta_2 \lambda + n_2^2) - \gamma_1^2 \lambda^4 = 0. \quad (66.3)$$

При $\Delta_1 \rightarrow 0$, $\Delta_2 \rightarrow 0$ решение уравнения (66.3)

$$\lambda_{1,2} \rightarrow \pm i\omega_{1,2},$$

где $\omega_{1,2}$ есть собственные частоты системы из этих же контуров, но без затухания.

Из условия (66.1) следует, что

$$\frac{\Delta_1}{n_1^2} \ll 1, \quad \frac{\Delta_2}{n_2^2} \ll 1.$$

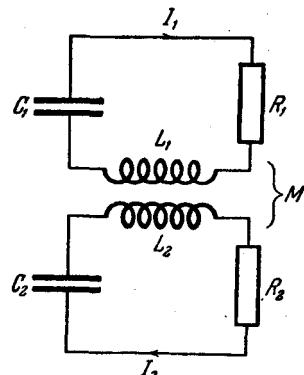


Рис. 191.

Предположим, что частное решение уравнения (66.3) можно приближенно записать так:

$$\lambda = i\omega - \delta, \quad (66.4)$$

где $\delta \ll \omega$; тогда $\lambda^2 = -\omega^2 - 2i\omega\delta$, пренебрегая δ^2 . Подставляем это в уравнение (66.3)

$$[-\omega^2 - 2i\omega\delta + 2\Delta_1(i\omega - \delta) + n_1^2] [-\omega^2 - 2i\omega\delta + 2\Delta_2(i\omega - \delta) + n_2^2] - \gamma_1^2(\omega^4 + 4i\omega^3\delta - 4\omega^2\delta^2) = 0 \quad (66.5)$$

или, пренебрегая членами, содержащими малые сомножители $\delta^2, \delta\Delta_1, \delta\Delta_2$, получаем:

$$[n_1^2 - \omega^2 + 2i\omega(\Delta_1 - \delta)] [n_2^2 - \omega^2 + 2i\omega(\Delta_2 - \delta)] - \gamma_1^2\omega^4 - \gamma_1^24i\omega^3\delta = 0. \quad (66.6)$$

Для системы без затухания ($\delta = 0$)

$$(n_1^2 - \omega^2)(n_2^2 - \omega^2) - \gamma_1^2\omega^4 = 0, \quad (66.7)$$

поэтому из (66.6) получаем следующее уравнение для определения δ :

$$(n_1^2 - \omega^2)\Delta_1 + (n_2^2 - \omega^2)\Delta_2 - [n_1^2 + n_2^2 - 2\omega^2(1 - \gamma_1^2)]\delta = 0. \quad (66.8)$$

Подставляя сюда собственные частоты ω_1 и ω_2 , которые мы найдем, решая (66.7), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{(n_1^2 - \omega_1^2)\Delta_2 + (n_2^2 - \omega_1^2)\Delta_1}{n_1^2 + n_2^2 - 2\omega_1^2(1 - \gamma_1^2)}, \\ \delta_2 &= \frac{(n_1^2 - \omega_2^2)\Delta_2 + (n_2^2 - \omega_2^2)\Delta_1}{n_1^2 + n_2^2 - 2\omega_2^2(1 - \gamma_1^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (66.9)$$

Вспоминая условие $\omega_1 < n_1 < n_2 < \omega_2$ и уравнение для определения собственных частот (64.6), легко доказать, что $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$.

Таким же путем можно приближенно определить значение коэффициентов распределения по (64.5):

$$k = -\frac{\lambda^2 + n_1^2 + 2\lambda\Delta_1}{\gamma_1^2\lambda^2} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}, \quad (66.10)$$

так как $\frac{a_{11}}{\beta_{11}} = n_1^2$, $\frac{e_{11}}{\beta_{11}} = 2\Delta_1$, $\beta_{11} = \frac{1}{2}L_1$, $\beta_{22} = \frac{1}{2}L_2$, $\beta_{12} = M$.

Подставляя (66.4) в (66.10), получаем:

$$k = -\frac{n_1^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta + 2\Delta_1(i\omega - \delta) + \delta^2}{\gamma_1^2(-\omega^2 - 2i\omega\delta + \delta^2)} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}},$$

пренебрегая малыми членами, в которых есть множители $\delta^2, \delta\Delta_1, \gamma_1^2\delta$, находим приближенно величину коэффициентов распределения

$$\bar{k}_{1,2} \approx \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{n_1^2 - \omega_{1,2}^2 - i2\omega_{1,2}(\delta_{1,2} - \Delta_1)}{\gamma^2\omega_{1,2}^2}.$$

*) Заметим, что если в (66.4) напишем $\lambda = -i\omega - \delta$, то получим эти же формулы для δ_1 и δ_2 .

Коэффициенты распределения можно записать еще и так:

$$\bar{k}_{1,2} = k_{1,2} e^{i\kappa_{1,2}}, \quad (66.11)$$

где

$$k_{1,2} \approx \frac{1}{\gamma_1^2 \omega_{1,2}} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \sqrt{\frac{(n_1^2 - \omega_{1,2}^2)^2}{\omega_{1,2}^2} + 4(\Delta_1 - \delta_{1,2})^2},$$

$$\operatorname{tg} \kappa_{1,2} = \frac{2(\Delta_1 - \delta_{1,2})}{n_1^2 - \omega_{1,2}^2} \omega_{1,2}.$$

Тогда колебания в связанных контурах будут иметь следующий вид:

$$I_1 \approx A e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$I_2 \approx A k_1 e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \kappa_1) + B k_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \kappa_2).$$

Собственные колебания в связанных контурах при очень небольшом затухании состоят из двух затухающих колебаний, гармонические сомножители которых имеют частоты ω_1 и ω_2 — собственные частоты связанных контуров, начальные фазы гармонических сомножителей одной частоты в различных координатах различны; они отличаются на величины κ_1 и κ_2 (66.11); коэффициенты затухания δ_1 и δ_2 различных частот различны, и колебания одной и той же частоты затухают одинаково в обоих контурах. Из формул (66.9) видно, что коэффициенты затухания зависят от обоих коэффициентов затухания отдельных контуров Δ_1 и Δ_2 ; если бы только один контур имел затухание, то собственные колебания все равно были бы затухающими. Если парциальные частоты сильно отличаются друг от друга, то

$$n_2^2 - \omega_2^2 \gg n_1^2 - \omega_1^2$$

и, следовательно, по (66.9) δ_1 в основном зависит от Δ_1 и очень мало от Δ_2 , также и δ_2 зависит от Δ_2 и мало от Δ_1 . При малой связи (и связности) $\delta_1 \rightarrow \Delta_1$ и $\delta_2 \rightarrow \Delta_2$ или затухание данного контура определяет затухание частоты, близкой к его парциальной. И коэффициенты распределения в этом случае будут таковы, что в каждом контуре будет преобладать колебание частоты, близкой к его собственной.

Исследование собственных затухающих колебаний в системе с двумя степенями свободы имеет важное значение при изучении неуставновившихся движений.

§ 67. Пример автоколебательной системы с двумя степенями свободы. Флаттер модели крыла

Автоколебательные системы с двумя (и многими) степенями свободы представляют некоторые особенности. Но большей частью возбуждаются колебания с частотой, близкой к одной из собственных, и в этих режимах система ведет себя как система с одной степенью свободы. При плавном изменении параметров возможны скачкообразные переходы с режима одной частоты на режим с другой частотой (и вообще с разными амплитудами), возможна гистерезисная зависимость величин, характеризующих эти режимы, от параметров. Иногда в узкой области значений параметров возможны режимы с несколькими частотами (бигармонические и полигармонические) — все это уже слишком частные случаи теории, и рассмотрение их выходит за рамки книги.

Поэтому остановимся только на расчете условий самовозбуждения некоторой практически очень интересной автоколебательной системы — модели крыла самолета в потоке. Эти автоколебания можно представить схематически, как колебания в системе с двумя степенями свободы, причем интересно, что каждая парциальная система отдельно не может возбудиться, только наличие связи между системами делает ее автоколебательной. В этом принципиальной особенность такой системы. Укажем, что аналогичная особенность может иметь место и в других активных системах, например в системах с усилителями и системах автоматического регулирования.

Во всех этих случаях автоколебания являются крайне нежелательным явлением, обычно приводящим к порче и разрушению

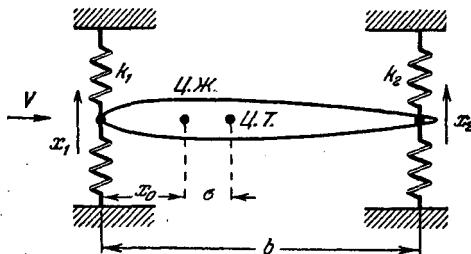


Рис. 192.

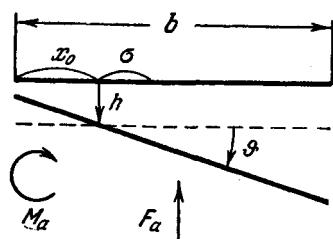


Рис. 193.

той системы, в которой они возникли. Поэтому практически очень важно определить только условия самовозбуждения для устранения возможности возникновения автоколебаний.

Крыло самолета при флаттере совершает сложные гармонические колебания, но для того чтобы представить себе физическую сущность этого явления, достаточно рассмотреть плоские колебания в потоке воздуха жесткой модели крыла, закрепленной на пружинах, как показано схематически на рис. 192.

Опыт с такой системой легко осуществить в аэродинамической трубе, и, как показывают наблюдения, конец крыла самолета в полете совершает примерно такие колебания, как и рассматриваемая модель. Предполагаем, что система имеет две степени свободы x_1 и x_2 , пружины обеспечивают только вертикальные перемещения точек крепления. В пустоте, без аэродинамических сил, такое крыло будет совершать колебания, как жесткая балка, показанная на рис. 177.

Будем рассматривать движение в удобных для расчета аэrodинамических силах координатах: h — смещение вниз точки, называемой «центром жесткости» (ц. ж.), и ϑ — угол поворота крыла (угол атаки) (рис. 193).

Если в центре жесткости приложим вертикальную силу, то вызовем только параллельное смещение крыла. Координата центра жесткости x_0 получается из уравнения *)

$$x_0 k_1 = (b - x_0) k_2,$$

где k_1 и k_2 — жесткости пружин. Если масса крыла m и момент инерции относительно оси жесткости I , то уравнения колебаний крыла можно записать так:

$$m\ddot{h} + m\sigma\ddot{\vartheta} + (k_1 + k_2)h = -F_a, \quad m\sigma\ddot{h} + I\ddot{\vartheta} + c\dot{\vartheta} = M_a, \quad (67.1)$$

где F_a и M_a — аэродинамические силы и момент соответственно, c — жесткость крыла на вращение $c = k_1 x_0^2 + k_2 (b - x_0)^2$, σ — расстояние между центром тяжести крыла и центром жесткости. Аэродинамическая сила F_a направлена вверх. Первое уравнение (67.1) — уравнение поступательных движений крыла, второе — вращательных вокруг оси, проходящей через ц. ж. (оси жесткости).

Парциальные частоты консервативной системы — ω_i и ω_k , $\omega_k^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$ соответствует частоте изгибных колебаний крыла в пустоте, а $\omega_k^2 = \frac{c}{I}$ — частоте вращательных (крутильных) колебаний. Связь между системами инерционная, если центр тяжести лежит на оси жесткости ($\sigma = 0$), то связи нет.

Аэродинамические силы, действующие на колеблющееся крыло в потоке, определяются теоретически из уравнений аэrodинамики для малых возмущений. Для малых колебаний в потоке идеальной жидкости в определенной области частот, с достаточной степенью приближения, сила и момент будут иметь вид:

$$F_a = qS(\alpha_1\dot{\vartheta} + \beta_1\dot{h} + \gamma_1 h), \quad M_a = qSb(\alpha_2\dot{\vartheta} + \beta_2\dot{h} + \gamma_2 h), \quad (67.2)$$

где $q = \frac{\rho V^2}{2}$ — динамический напор, ρ — плотность воздуха, V — скорость потока, S — площадь крыла. Постоянные коэффициенты:

$$\alpha_1 = 2\pi, \quad \beta_1 = \frac{2\pi}{V} \left(\frac{3b}{4} - x_0 \right), \quad \gamma_1 = \frac{2\pi}{V};$$

$$\alpha_2 = \frac{2\pi}{b} \left(x_0 - \frac{b}{4} \right), \quad \beta_2 = \frac{2\pi}{V} \left[\left(x_0 - \frac{b}{4} \right) \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) - \frac{b}{16} \right],$$

$$\gamma_2 = \frac{2\pi}{V} \left(\frac{x_0}{b} - \frac{1}{4} \right) **.$$

*) x_0 отсчитывается от передней кромки крыла.

**) Вычислено по приближенной теории обтекания бесконечного крыла, совершающего малые колебания в потоке идеальной несжимаемой жидкости.

Подставляя (67.2) в (67.1), видим, что получилась система с двумя степенями с «затуханием», причем во всех практически интересных случаях $\gamma_1 > 0$, а $\beta_2 < 0$, т. е. колебания в *парциальных системах с сопротивлением* всегда затухают. Обратим внимание на следующее: если члены инерционной связи $m\ddot{\vartheta}$ в первом и $m\ddot{\vartheta}$ во втором уравнениях имеют одинаковые коэффициенты («взаимны»), то члены связи из-за аэродинамических сил не взаимны, ибо $\beta_1 \neq b\gamma_2$, а члену $a_1\dot{\vartheta}$ нет соответствующего во втором уравнении, так как аэродинамические силы не зависят от h . Это существенное обстоятельство — оно определяется тем, что силы со стороны потока являются «внешними» по отношению к нашей системе и действие их не всегда поведет к затуханию. Член с a_2 будет изменять только жесткость крыла на закручивание.

После некоторого возмущения при данной скорости в системе возбуждаются собственные «затухающие колебания» с двумя частотами:

$$\begin{aligned} h &= C_1 e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \vartheta &= C_1 x_1 e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \varepsilon_1) + C_2 x_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \varepsilon_2), \end{aligned} \quad (67.3)$$

где C_1 , C_2 , φ_1 и φ_2 определяются начальными условиями, а x_1 , x_2 , ε_1 и ε_2 — системой. При малых V всегда δ_1 и δ_2 больше нуля

и собственные колебания действительно затухают. Величины δ_1 , δ_2 , ω_1 и ω_2 зависят от скорости потока V . При некотором значении $V = V_k$, которое называют *критической скоростью флаттера*, один из коэффициентов δ_1 или δ_2 может сделаться равным нулю, и следовательно, в данных условиях крыло может совершать гармонические колебания. А при скорости $V > V_k$ этот коэффициент будет отрицательным и в системе возникнут *нарастающие* по экспоненциальному закону со временем колебания. Следовательно, при $V > V_k$ будет *самовозбуждение*, могут возникнуть автоколебания, амплитуда которых определяется нелиней-

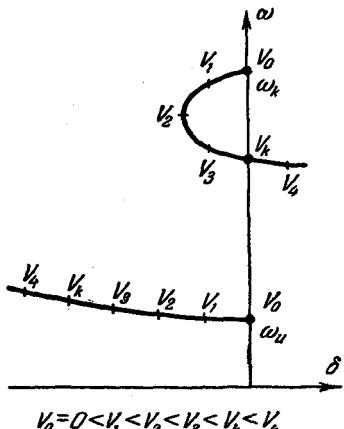


Рис. 194.

ными членами, не учитываемыми в излагаемой теории. Примерную зависимость коэффициентов затухания и частот от скорости потока V можно видеть на рис. 194. Здесь показан случай, когда $\omega_k > \omega_i$. Скорость потока V (или q) выбирается в качестве параметра, по вертикали отложена ω , по горизонтали δ .

Частота высшего тона (кручения) с увеличением скорости V уменьшается, а затухание сначала растет, а затем падает до нуля (при V_k) и становится отрицательным (при $V > V_k$) в зоне флаттера. Частота нижшего тона (изгиб) немного возрастает, и затухание с ростом скорости непрерывно возрастает.

Практически, конечно, важно только определить условия самовозбуждения (определить V_k для данного крыла), ибо полет при наличии автоколебаний недопустим, так как эти колебания приводят к катастрофам.

Значение критической скорости флаттера в нашем случае определить очень просто. Допустим, что система (67.1) после подстановки (67.2) имеет при $V = V_k$ частное решение:

$$h = Ae^{i\omega t}, \quad \theta = Be^{i\omega t}, \quad (67.4)$$

где B может быть и комплексной величиной. Подставляя это в получившуюся систему уравнений, получим, как обычно, следующую систему однородных алгебраических уравнений для A и B :

$$\begin{aligned} \Pi_1 A + \Pi_2 B &= 0, \\ \Pi_3 A + \Pi_4 B &= 0, \end{aligned} \quad (67.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= k_1 + k_2 - m\omega^2 + iqS\gamma_1\omega, \\ \Pi_2 &= qSa_1 - m\sigma\omega^2 + iqS\beta_1\omega, \\ \Pi_3 &= -m\sigma\omega^2 - iqSb\gamma_2\omega, \\ \Pi_4 &= c - I\omega^2 - qSba_2 - iqSb\beta_2\omega. \end{aligned} \quad (67.6)$$

Из условия существования нетривиальных решений для A и B следует уравнение, в котором две неизвестные величины q и ω :

$$\Pi_1\Pi_4 - \Pi_2\Pi_3 = 0. \quad (67.7)$$

Разделяя действительную и мнимую части этого уравнения, получим два уравнения с двумя неизвестными. Найденное отсюда q будет равно $q_{kp} = \frac{1}{2}\rho V_k$, таким образом будет определена граница опасных колебаний. Само уравнение для q_{kp} и частоты флаттера ω_f и частное решение (67.4) мы выписывать не будем — это легко сделает читатель.

Отметим, что выражения для q_{kp} и частоты на границе флаттера ω_f можно получить в явном виде в зависимости от параметров системы. Практически важно исследовать зависимость q_{kp} от парциальных частот ω_i и ω_k , от положения оси жесткости x_0 и от положения центра тяжести σ . Эти исследования показывают, какими путями можно поднять критическую скорость флаттера.

В заключение отметим, что совершенно аналогичные задачи возникнут в теории систем автоматического регулирования. Там, как правило, автоколебания являются крайне нежелательными и все исследование ведется с целью устранения возможности их возникновения в рабочих условиях. Принципиально таким же путем идет исследование систем с большим числом степеней свободы, только уравнение для определения комплексных частот (или критической скорости) будет соответственно более высокого порядка.

§ 68. Действие внешних гармонических сил на систему с двумя степенями свободы без затухания

Рассмотрим действие гармонических внешних сил с одной частотой на систему с двумя степенями свободы. Так как система линейна, то для ее колебаний будет справедлив принцип суперпозиции. Следовательно, зная колебания, возникающие под действием гармонических сил, можно изучить колебания, вызываемые любыми силами, которые состоят из суммы гармонических сил, в частности, периодическими силами любого вида.

Конечно, в действительности всегда приходится иметь дело с системой, обладающей затуханием, однако, как и в предыдущих случаях, для ясности анализа сначала рассмотрим действие периодических сил на систему без затухания.

Пусть на каждую координату системы действует внешняя гармоническая сила частоты p . Тогда в общем виде, принимая обозначения, введенные в § 58, можем написать уравнения колебаний в следующем виде:

$$\begin{aligned} \beta_{11}\ddot{x}_1 + \beta_{12}\ddot{x}_2 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= F_1 \cos pt, \\ \beta_{12}\ddot{x}_1 + \beta_{22}\ddot{x}_2 + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= F_2 \cos pt, \end{aligned} \quad (68.1)$$

где F_1 и F_2 — амплитуды внешних сил.

Очевидно, что колебания в системе будут состоять из *собственных* колебаний и *вынужденных*. Собственные мы рассматривали ранее, а теперь будем анализировать только вынужденные. Поэтому ради простоты выкладок будем пользоваться комплексным методом. Пусть внешние силы имеют вид $F_1 e^{ipt}$ и $F_2 e^{ipt}$, тогда предполагаем вынужденные колебания в таком виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{X}_1 e^{ipt}, \\ x_2 &= \bar{X}_2 e^{ipt}. \end{aligned}$$

Подставляя в (68.1), получаем уравнения для определения

комплексных амплитуд:

$$\bar{X}_1(-\beta_{11}p^2 + \alpha_{11}) + \bar{X}_2(-\beta_{12}p^2 + \alpha_{12}) = F_1, \quad (68.2)$$

$$\bar{X}_1(-\beta_{12}p^2 + \alpha_{12}) + \bar{X}_2(-\beta_{22}p^2 + \alpha_{22}) = F_2.$$

Отсюда

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{D} [F_1(\alpha_{22} - \beta_{22}p^2) - F_2(\alpha_{12} - \beta_{12}p^2)], \quad (68.3)$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{D} [-F_1(\alpha_{12} - \beta_{12}p^2) + F_2(\alpha_{11} - \beta_{11}p^2)],$$

где

$$D = (\alpha_{11} - \beta_{11}p^2)(\alpha_{22} - \beta_{22}p^2) - (\alpha_{12} - \beta_{12}p^2)^2 \quad (68.4)$$

— детерминант системы (68.2).

Если величины F_1 и F_2 действительные, то \bar{X}_1 и \bar{X}_2 также действительны; значит вынужденные колебания в обеих координатах будут в фазе (или в противофазе) с внешними силами, если внешние силы в фазе друг с другом.

Формулы (68.3) представляют зависимость амплитуд вынужденных колебаний в каждой системе от частоты внешних сил p , т. е. *резонансные законы для системы*.

Рассмотрим эти законы. Прежде всего определим те частоты, при которых амплитуды колебаний обращаются в бесконечность, — *резонансные частоты*. Легко видеть, это будут те частоты, при которых

$$D = 0, \quad (68.5)$$

т. е. детерминант системы (68.2) равен нулю. Уравнение (68.5) есть уравнение (58.10) для определения собственных частот, следовательно, *резонанс* (или бесконечная амплитуда вынужденных колебаний) будет в том случае, если частота внешней силы p равна одной из собственных частот системы: ω_1 или ω_2 . Резонанс будет на двух частотах: ω_1 и ω_2 ; при резонансе амплитуды колебаний в обеих координатах стремятся к бесконечности.

Следует отметить одну существенную особенность резонанса в системе с двумя степенями в отличие от резонанса в системе с одной степенью свободы. Там, в системе с одной степенью свободы, при равенстве частот внешней силы и собственной всегда будет резонанс, здесь резонанса *может и не быть* в том случае, когда

$$p = \omega_1$$

и

$$F_1(\alpha_{22} - \beta_{22}\omega_1^2) - F_2(\alpha_{12} - \beta_{12}\omega_1^2) = 0. \quad (68.6)$$

Действительно, тогда

$$X_1 = \frac{0}{0},$$

амплитуда колебаний первой координаты будет ограничена. Амплитуда колебаний второй координаты X_2 также не может быть бесконечна. В этом случае колебания происходят с собственной частотой ω_1 , и поэтому по (58.12) — отношение амплитуд

$$-k_1 = \frac{a_{12} - \beta_{12}\omega_1^2}{a_{22} - \beta_{22}\omega_1^2} = \frac{a_{11} - \beta_{11}\omega_1^2}{a_{12} - \beta_{12}\omega_1^2} = \frac{F_1}{F_2} \quad (68.7)$$

в силу (68.6) равно отношению амплитуд внешних сил — конечной величине.

Условие отсутствия резонанса при совпадении частот можно сформулировать и таким образом: если X_{10} и X_{20} — амплитуды собственных колебаний частоты ω_1 координат x_1 и x_2 соответственно, то по (68.7)

$$k_1 = \frac{X_{20}}{X_{10}} = -\frac{F_1}{F_2},$$

или

$$F_1 X_{10} + F_2 X_{20} = 0.$$

Формально это соотношение похоже на условие ортогональности двух векторов, поэтому иногда говорят: резонанс не может быть, если внешняя сила ортогональна к собственному колебанию. Физически это означает, что при колебаниях работа силы в одной координате равна и противоположна работе силы в другой координате. Внешние силы не совершают работы, следовательно, амплитуды колебаний не могут стремиться к бесконечности. Очевидно, что это может быть только тогда, когда на систему действуют две силы.

Практически важен случай, когда на систему действует одна сила. Например, $F_2 = 0$; тогда амплитуды колебаний по (68.3) выражаются так:

$$X_1 = \frac{F_1}{D} (a_{22} - \beta_{22} p^2), \quad X_2 = \frac{F_1}{D} (\beta_{12} p^2 - a_{12}). \quad (68.8)$$

Отношение амплитуд вынужденных колебаний

$$k_p = \frac{X_2}{X_1} = \frac{\beta_{12} p^2 - a_{12}}{a_{22} - \beta_{22} p^2} \quad (68.9)$$

имеет тот же вид, что и коэффициенты распределения для собственных колебаний (58.12), только вместо ω_1 и ω_2 стоит частота колебаний p . Поэтому отношение амплитуд вынужденных колебаний будет почти таким же, как и при собственных колебаниях, если $p \rightarrow \omega_1$ (или $p \rightarrow \omega_2$).

Резонансная кривая для амплитуды колебаний координаты X_1 , на которую действует внешняя сила, имеет примерно такой вид, как показано на рис. 195а. При $p = 0$ амплитуда имеет определенную величину и при небольшой частоте колебания происходят в фазе с внешней силой, затем при $p \rightarrow \omega_1$ амплитуда нарастает до бесконечности. При $\omega_1 < p < n_2$ амплитуда колебаний падает, колебания происходят в противофазе с колебаниями силы. Следует отметить, что при $p = n_2$ амплитуда колебаний становится равной

нулю. На этом основан ряд применений систем с двумя степенями свободы в качестве фильтров и демпферов. Если частота внешней силы равна парциальной частоте второй системы, на которую не действует внешняя сила, то вынужденные колебания в первой системе отсутствуют, несмотря на то, что на нее действует периодическая сила.

Рассматривая далее рис. 195а, видим, что при $n_2 < p < \omega_2$ колебания происходят в фазе с внешней силой и нарастают до

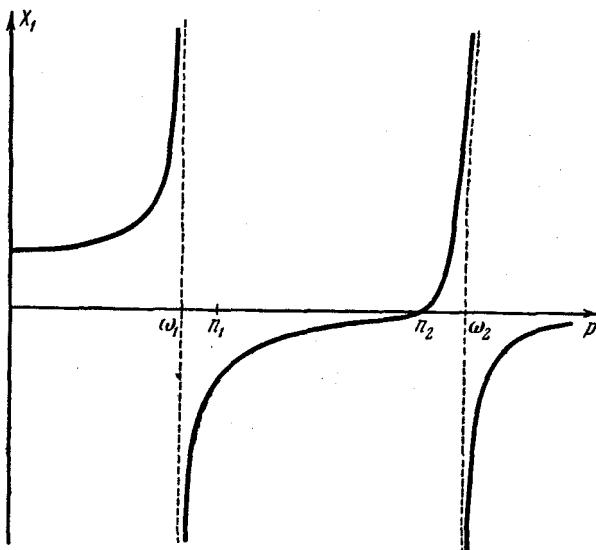


Рис. 195а.

бесконечности при $p \rightarrow \omega_2$. Затем при $p > \omega_2$ колебания — в противофазе с силой и амплитуда их монотонно уменьшается до нуля. Колебания во второй координате можно проследить по формуле (68.8). Зависимость амплитуды X_2 показана на рис. 195б для случая упругой связи между системами, например двумя маятниками (см. § 59).

Заметим, что если системы связаны упругой и инерционной связью, то есть такая частота, при которой X_2 обращается в нуль, а именно:

$$p^2 = \frac{\alpha_{12}}{\beta_{12}}.$$

Если же имеет место только упругая (емкостная) связь, $\alpha_{12} \neq 0$, $\beta_{12} = 0$, или же только инерционная (индуктивная) связь, $\alpha_{12} = 0$,

$\beta_{12} \neq 0$, то нет такого значения частоты внешней силы, при которой амплитуда колебаний X_2 обращается в нуль.

Колебания во второй системе при резонансе ($p = \omega_1$, $p = \omega_2$) имеют бесконечные амплитуды, а при всех остальных возможных частотах имеют конечную амплитуду. При упругой связи между маятниками (§ 59), когда $a_{12} < 0$, отношение амплитуд вынужденных колебаний k_p (68.9) для низких частот при $p < n_2$ положительно, колебания обоих маятников в фазе; для высоких частот

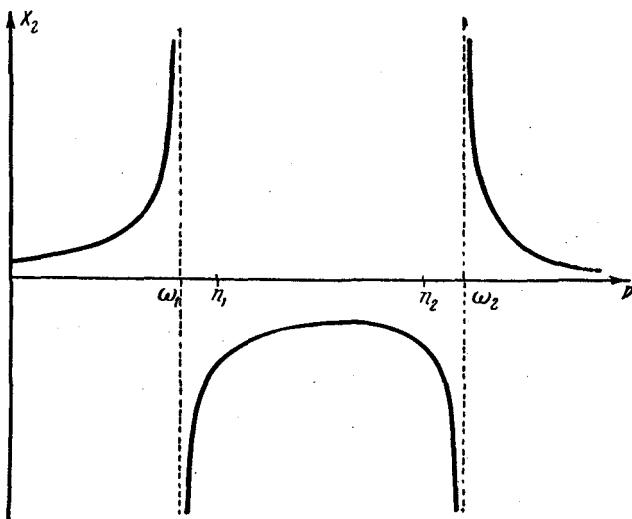


Рис. 1956.

($p > n_2$) величина k_p отрицательна, колебания маятников в противофазе. Все это можно видеть, сравнивая рис. 195а и 195б. Если связь будет инерционной, то соотношение фаз будет другим.

Укажем несколько простейших схем фильтров и демпферов, разработанных на основе теории вынужденных колебаний в системе с двумя степенями свободы. На рис. 196 показана схема электрического фильтра-пробки.

Если частота внешней силы $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos pt$ равна собственной частоте второго контура, $p = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$, включенного последовательно в цепь, то ток в основной цепи (L_1 , C_1) будет равен нулю. Можно фильтр-пробку сделать и так, как показано на рис. 197. И в этом случае, если частота внешней э. д. с. $p = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$, то ток в основной цепи будет равен нулю.

Фильтр на рис. 196 представляет известный нам из первой части резонанс сопротивления контура (или «резонанс токов») (§ 17), поэтому логичнее было бы рассматривать «резонанс токов» как частный случай вынужденных колебаний в системе с двумя степенями свободы.

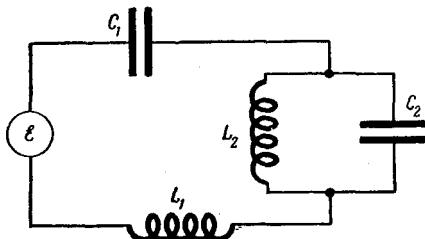


Рис. 196.

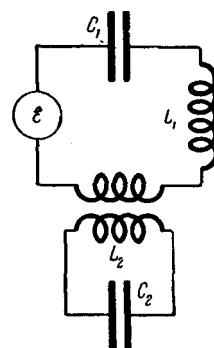


Рис. 197.

Можно так представить себе физическую картину действия фильтра: во втором контуре возникают собственные колебания, которые благодаря связи наводят в основной контур некоторую э. д. с., величина которой равна и противоположна действующей внешней силе. Так как система без затухания, то на поддержание колебаний во втором контуре не требуется энергии. Если же, как это есть в действительности, во всяком контуре есть затухание, то наводимая э. д. с. не будет полностью компенсировать внешнюю э. д. с. и в основном контуре будет идти небольшой ток, но он, конечно, значительно менее того, который имел бы место в отсутствие фильтра.

Принцип устройства динамических демпферов в механических конструкциях схематически показан на рис. 198.

На тело массы m_1 действует внешняя периодическая сила $F_0 \cos pt$; необходимо устраниТЬ колебания тела, вызываемые этой силой. Для этого к телу m_1 подвешивается тело массы m_2 на пружине с жесткостью k_2 . Величину m_2 и жесткость пружины k_2

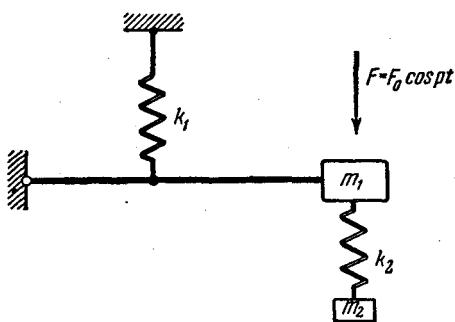


Рис. 198.

подбирают таким образом, чтобы

$$p^2 = \frac{k_2}{m_2},$$

и таким путем устраниют нежелательные колебания тела m_1 .

Практически основная система представляет, например, подшипник вала машины, ротор которой вращается с определенным числом оборотов. Вследствие небольшой несбалансированности ротора подшипник совершают недопустимые вибрации. Устройство на подшипнике динамического демпфера может в значительной степени снизить эти вибрации. Такие демпферы пригодны для ослабления колебаний только определенной или мало изменяющейся частоты.

§ 69. Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы при наличии затухания

Потери энергии на тепло при колебаниях, происходящие вследствие неизбежного трения в системе, изменяют характер вынужденных колебаний, которые мы рассматривали в предыдущем параграфе. Уравнения колебаний в этом случае, если примем обозначения § 64, будут иметь такой вид:

$$\begin{aligned} \beta_{11}\ddot{x}_1 + \beta_{12}\ddot{x}_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \varepsilon_{11}\dot{x}_1 + \varepsilon_{12}\dot{x}_2 &= F_1 \cos pt, \\ \beta_{21}\ddot{x}_1 + \beta_{22}\ddot{x}_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_{21}\dot{x}_1 + \varepsilon_{22}\dot{x}_2 &= F_2 \cos pt. \end{aligned} \quad (69.1)$$

Пользуясь этими уравнениями, легко написать в общем виде выражения для комплексных амплитуд координат x_1 и x_2 . Ради простоты анализа запишем комплексные амплитуды для частного случая, когда $F_2 = 0$, $\beta_{12} = 0$ и $\varepsilon_{12} = 0$, т. е. когда внешняя сила действует только на одну из упруго связанных систем, причем через силы трения связь не осуществляется. В этом случае

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= F_1 \frac{a_{22} - p^2\beta_{22} + ipe_{22}}{\bar{D}}, \\ \bar{X}_2 &= -\frac{a_{12}}{a_{22} - p^2\beta_{22} + ipe_{22}} \bar{X}_1 = \bar{k}_p \bar{X}_1, \end{aligned} \quad (69.2)$$

где

$$\bar{D} = (a_{11} - p^2\beta_{11} + ip\varepsilon_{11})(a_{22} - p^2\beta_{22} + ip\varepsilon_{22}) - a_{12}^2.$$

Очевидно, что при небольшом затухании величины ε_{11} и ε_{22} малы; амплитуды колебаний почти те же самые, что и в отсутствие затухания (68.8), за исключением небольшой области частот вблизи резонансов, где величина модуля будет относительно мала, но не равна нулю. Зависимость амплитуды колебаний X_1 от частоты

имеет примерно такой вид, как показано на рис. 199, на котором пунктиром отмечены амплитуды колебаний в той же системе, но без затухания. Увеличение затухания поведет к сглаживанию и к смещению «резонансных пиков».

Как мы отметили в предыдущем параграфе, отношение амплитуд вынужденных колебаний при резонансе в случае возбуждения только одной силой будет такое же, как и при собственных колебаниях этой же частоты. И при небольшом затухании, как это видно

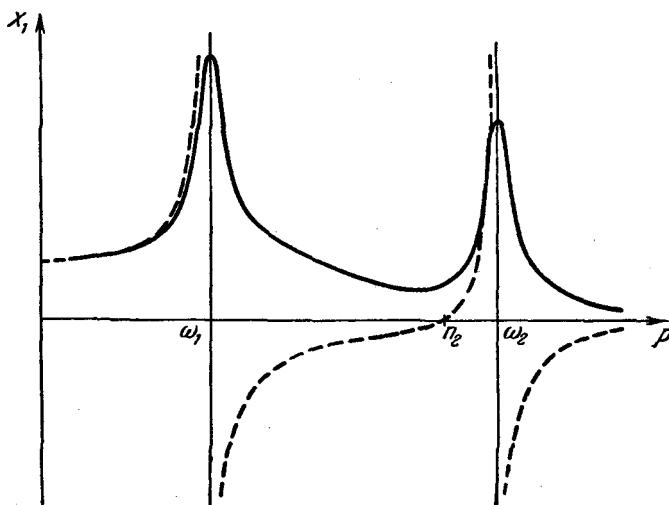


Рис. 199.

из (69.2), отношение амплитуд \bar{k}_p при резонансе будет близко к отношению амплитуд при собственных колебаниях (58.12). Этим обстоятельством и пользуются для изучения собственных колебаний, так как при вынужденных колебаниях значительно проще производить измерения, чем при собственных: при вынужденных колебаниях отношение амплитуд в различных координатах при малом затухании почти равно отношению амплитуд собственных колебаний. Можно видеть из (69.2), что влияние затухания на точность определения отношения амплитуд собственных колебаний будет меньше, если, действуя только на первую координату ($F_2 = 0$), мы будем определять отношение амплитуд для первой частоты ω_1 , так как при $p = \omega_1$ величина $a_{22} - p^2\beta_{22}$, стоящая в знаменателе, не мала, и поэтому влияние трения, представленное членом $i\rho e_{22}$, будет значительно меньше, чем в случае $p = \omega_2$. Для более точного определения отношения амплитуд собственных

колебаний для второй частоты ω_2 следует действовать внешней силой на вторую координату ($F_1 = 0$).

Иными словами, это означает, что если действует сила на первую координату, то отношение между амплитудами при резонансе определяется только параметрами второй координаты и связью. Действительно, если колебания в первой координате заданы, то во второй они уже определяются только связью и параметрами второй координаты. При резонансе на частоте, близкой к парциальной частоте той координаты, на которую действует сила, разность между упругими и инерционными силами во второй координате не мала и поэтому влияние сил трения не так существенно; а при резонансе на второй частоте роль сил трения возрастает вследствие того, что разность упругих и инерционных сил в этом случае во второй координате значительно меньше.

§ 70. Динамическая жесткость и комплексные параметры системы

Расчет вынужденных колебаний при наличии затухания в системе с двумя степенями свободы можно вести при помощи комплексных параметров и стандартных схем, применение которых упрощает анализ и выкладки.

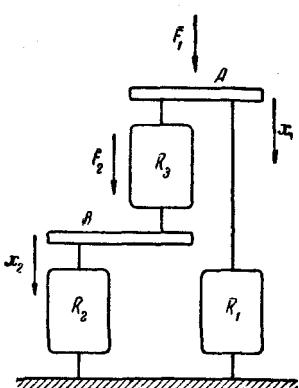


Рис. 200.

смещения происходят вдоль одного направления, например по вертикали, и элементы A и B при деформации опускаются и поднимаются параллельно самим себе.

Элемент с жесткостью K_3 представляет элемент связи. Можно ввести парциальную динамическую жесткость, это будет жесткость элемента данной координаты при закрепленной второй координате.

Любую механическую систему с двумя степенями свободы всегда можно привести к стандартной схеме, которая показана на рис. 200. Два элемента A и B с координатами x_1 и x_2 находятся под действием сил, комплексные амплитуды которых равны \bar{F}_1 и \bar{F}_2 соответственно; эти элементы «опираются» на три звена, обладающие динамическими жесткостями \bar{K}_1 , \bar{K}_2 и \bar{K}_3 , и соединены так, как показано на рис. 200. Динамическая жесткость системы с одной степенью свободы была определена формулой (14.11). Предполагается, что все

Таким образом, \bar{K}_{x_1} — парциальная динамическая жесткость координаты x_1 — будет равна динамической жесткости системы при $x_2 = 0$, или

$$\bar{F}_1 = \bar{K}_{x_1} \bar{X}_1. \quad (70.1)$$

Из схемы видно, что при $x_2 = 0$

$$\bar{F}_1 = (\bar{K}_1 + \bar{K}_3) \bar{X}_1;$$

сравнивая с (70.1), получаем парциальную жесткость координаты x_1

$$\bar{K}_{x_1} = \bar{K}_1 + \bar{K}_3. \quad (70.2)$$

Точно таким же образом найдем парциальную жесткость для координаты x_2

$$\bar{K}_{x_2} = \bar{K}_2 + \bar{K}_3. \quad (70.3)$$

Если на систему действуют две силы, комплексные амплитуды которых равны \bar{F}_1 и \bar{F}_2 , то уравнения, связывающие комплексные амплитуды смещений \bar{X}_1 и \bar{X}_2 с амплитудами сил и динамическими жесткостями элементов системы (рис. 200), получаются из равенства сил для каждой координаты:

$$\text{для } x_1: \bar{F}_1 = \bar{K}_1 \bar{X}_1 + \bar{K}_3 (\bar{X}_1 - \bar{X}_2),$$

$$\text{для } x_2: \bar{F}_2 = \bar{K}_2 \bar{X}_2 - \bar{K}_3 (\bar{X}_1 - \bar{X}_2).$$

Или если ввести парциальные жесткости по (70.2) и (70.3), то эти уравнения будут иметь совсем простой вид:

$$\bar{F}_1 = \bar{K}_{x_1} \bar{X}_1 - \bar{K}_3 \bar{X}_2,$$

$$\bar{F}_2 = -\bar{K}_3 \bar{X}_1 + \bar{K}_{x_2} \bar{X}_2.$$

В таком виде уравнения легко запоминаются и решение их записывается просто:

$$\bar{X}_1 = \frac{\bar{F}_1 \bar{K}_{x_2} + \bar{F}_2 \bar{K}_3}{\bar{K}_{x_1} \bar{K}_{x_2} - \bar{K}_3^2}, \quad \bar{X}_2 = \frac{\bar{F}_1 \bar{K}_3 + \bar{F}_2 \bar{K}_{x_1}}{\bar{K}_{x_1} \bar{K}_{x_2} - \bar{K}_3^2}. \quad (70.4)$$

Напомним, что \bar{K}_3 — динамическая жесткость элемента связи, следовательно, амплитуда колебаний в одной координате зависит от силы, действующей в другой, через \bar{K}_3 .

Составление эквивалентной стандартной схемы (рис. 200) для конкретных механических схем очень просто. Покажем это

на следующем примере. Пусть дана сложная механическая система с двумя степенями свободы, изображенная на рис. 201. Система состоит из двух тел с массами m_1 и m_2 , смещение которых примем за координаты x_1 и x_2 соответственно. Масса m_1 связана пружиной, имеющей жесткость k_1 и обладающей коэффициентом трения h_1 . Тело с массой m_2 связано пружиной, имеющей жесткость k_2 и, кроме того, на это же тело действуют силы трения, коэффициент которых равен h_2 . Между массами присоединена пружина жесткости k_3 , обладающая трением с коэффициентом h_3 .

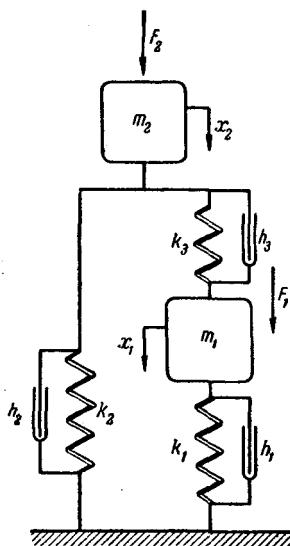


Рис. 201.

Определим парциальную жесткость по координате x_1 ; для этого положим

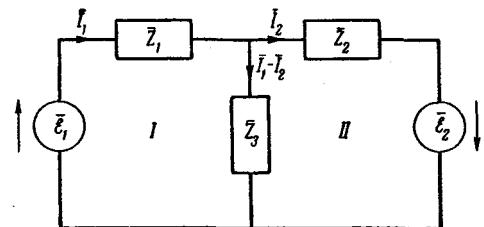


Рис. 202.

$x_2 = 0$, т. е. при неподвижно закрепленной массе m_2 определим динамическую жесткость системы. Она будет равна

$$\bar{K}_{x_1} = \bar{K}_1 + \bar{K}_3 = k_1 - m_1 p^2 + i h_1 p + k_3 + i h_3 p. \quad (70.5)$$

Точно таким же путем определим \bar{K}_{x_2} :

$$\bar{K}_{x_2} = \bar{K}_2 + \bar{K}_3 = k_2 - m_2 p^2 + i h_2 p + k_3 + i h_3 p. \quad (70.6)$$

Сравнивая (70.5) и (70.6), видим, что

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= k_1 - m_1 p^2 + i h_1 p, \\ \bar{K}_2 &= k_2 - m_2 p^2 + i h_2 p, \\ \bar{K}_3 &= k_3 + i h_3 p. \end{aligned} \quad (70.7)$$

Подставляя (70.7) в общие формулы (70.4), легко найдем при данных комплексных амплитудах сил комплексные амплитуды смещений для системы, показанной на рис. 201.

Для двух связанных электрических контуров всегда можно составить стандартную схему, которая показана на рис. 202.

Цепь состоит из двух контуров, в которых действуют внешние э. д. с., комплексные амплитуды которых $\bar{\mathcal{E}}_1$ и $\bar{\mathcal{E}}_2$; \bar{Z}_1 , \bar{Z}_2 , \bar{Z}_3 — комплексные сопротивления каждой отдельной ветви. Если комплексные амплитуды токов обозначим через \bar{I}_1 и \bar{I}_2 , то уравнения напряжений по контурам в комплексных амплитудах запишутся в таком виде:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}}_1 &= \bar{I}_1 \bar{Z}_1 + (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \bar{Z}_3 = \bar{I}_1 \bar{Z}_1 - \bar{I}_2 \bar{Z}_3, \\ \bar{\mathcal{E}}_2 &= \bar{I}_2 \bar{Z}_2 - (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \bar{Z}_3 = \bar{I}_2 \bar{Z}_{11} - \bar{I}_1 \bar{Z}_3,\end{aligned}\quad (70.8)$$

где по аналогии с предыдущим

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_3, \quad \bar{Z}_{11} = \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 \quad (70.9)$$

обозначают комплексные сопротивления парциальных цепей. Зная стандартную схему для электрической цепи и комплексные сопротивления ветвей \bar{Z}_1 , \bar{Z}_2 и \bar{Z}_3 , легко по формулам (70.8) найти комплексные амплитуды токов при данных амплитудах э. д. с., и наоборот.

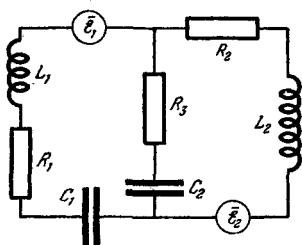


Рис. 203.

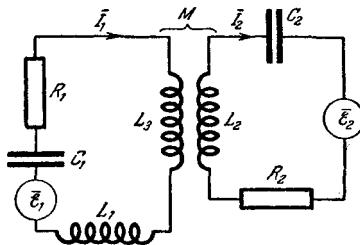


Рис. 204.

Составление стандартной схемы, рис. 202, обычно не вызывает затруднений. Например, в случае электрической цепи, показанной на рис. 203,

$$\bar{Z}_1 = R_1 + i \left(pL_1 - \frac{1}{pC_1} \right),$$

$$\bar{Z}_2 = R_3 + ipL_2,$$

$$\bar{Z}_3 = R_3 + \frac{1}{ipC_3}.$$

Когда электрическую цепь можно разбить на три отдельные ветви, как в данном случае, составление стандартной схемы просто. Иногда некоторое затруднение вызывает составление стандартной схемы для индуктивно связанных контуров (рис. 204), так как

здесь нельзя указать три отдельные ветви. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\bar{Z}_1 &= Z_1 + \bar{Z}_3 = R_1 + i \left[p(L_1 + L_3) - \frac{1}{pC_1} \right], \\ \bar{Z}_{11} &= \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = R_2 + i \left[pL_2 - \frac{1}{pC_2} \right].\end{aligned}\quad (70.10)$$

А уравнения напряжений для этих контуров имеют вид:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}}_1 &= \bar{I}_1 \left\{ R_1 + i \left[p(L_1 + L_3) - \frac{1}{pC_1} \right] \right\} + ipM\bar{I}_2, \\ \bar{\mathcal{E}}_2 &= \bar{I}_2 \left[R_2 + i \left(pL_2 - \frac{1}{pC_2} \right) \right] + ipM\bar{I}_1.\end{aligned}\quad (70.11)$$

Сравнивая (70.10) и (70.11) с системой (70.8), получаем:

$$\bar{Z}_3 = -ipM.$$

Подставляя в (70.10), находим:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_1 &= R_1 + i \left[p(L_1 + L_3) - \frac{1}{pC_1} \right] + ipM, \\ \bar{Z}_{11} &= R_2 + i \left(pL_2 - \frac{1}{pC_2} \right) + ipM.\end{aligned}$$

Если на систему действует одна внешняя сила, то целесообразно ввести понятие *динамической жесткости*, определенной в точке системы. Так, например, в системе, показанной на рис. 200, на координату x_1 действует внешняя гармоническая сила, комплексная амплитуда которой равна \bar{F}_1 ; тогда по (70.4)

$$\bar{X}_1 = \frac{\bar{K}_{x_2}}{\bar{K}_{x_2}\bar{K}_{x_1} - \bar{K}_3^2} \bar{F}_1, \quad \bar{X}_2 = \frac{\bar{K}_3}{\bar{K}_{x_2}\bar{K}_{x_1} - \bar{K}_3^2} \bar{F}_1. \quad (70.12)$$

Комплексные амплитуды смещения пропорциональны комплексной амплитуде силы, поэтому можно ввести новые комплексные параметры системы.

Динамическую жесткость системы в точке, имеющей координату x_1 , можно определить так:

$$\bar{K}_{11} = \frac{\bar{F}_1}{\bar{X}_1} = \frac{\bar{K}_{x_2}\bar{K}_{x_1} - \bar{K}_3^2}{\bar{K}_{x_2}}, \quad (70.13)$$

это — комплексный параметр, который связывает комплексные амплитуды силы и смещения в точке действия силы.

Переходная динамическая жесткость системы от x_1 к x_2

$$\bar{K}_{12} = \frac{\bar{F}_1}{\bar{X}_2} = \frac{\bar{K}_{x_2}\bar{K}_{x_1} - \bar{K}_3^2}{\bar{K}_3}. \quad (70.14)$$

связывает комплексную амплитуду колебаний координаты x_2 , возникающих под действием гармонической силы, действующей на координату x_1 и имеющей амплитуду \bar{F}_1 .

Теперь формулы (70.12) можно записать так:

$$\bar{F}_1 = \bar{K}_{11} \bar{X}_1, \quad \bar{F}_1 = \bar{K}_{12}, \quad \bar{X}_2. \quad (70.15)$$

Совершенно таким же путем можно определить

$$\bar{K}_{22} = \frac{\bar{K}_{x_1} \bar{K}_{x_2} - \bar{K}_3^2}{\bar{K}_{x_1}}, \quad \bar{K}_{21} = \frac{\bar{K}_{x_2} \bar{K}_{x_1} - \bar{K}_3^2}{\bar{K}_3}. \quad (70.16)$$

Очевидно, что $\bar{K}_{21} = \bar{K}_{12}$, т. е. переходные динамические жесткости двух координат одинаковы; это есть следствие принципа взаимности в механических системах.

Совершенно аналогичными рассуждениями можно и для электрической цепи (рис. 203) ввести комплексное сопротивление полной цепи на концах разрыва первой ветви.

Если разорвем цепь в точке A (рис. 205), то полное комплексное сопротивление цепи, принимая во внимание (70.9), будет

$$\bar{Z}_A = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 - \bar{Z}_3^2}{\bar{Z}_1}. \quad (70.17)$$

\bar{Z}_A устанавливает связь между комплексной амплитудой э. д. с., включенной в разрыв в точке A , и комплексной амплитудой идущего через источник э. д. с. тока, возникающего под действием этой же э. д. с.

Аналогично переходной жесткости (70.14) вводят переходное комплексное сопротивление

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 - \bar{Z}_3^2}{\bar{Z}_3}, \quad (70.18)$$

устанавливающее связь между э. д. с. в точке A и током, идущим через вторую ветвь (например, через точку B).

И все задачи о вынужденных колебаниях и связанных контурах решаются при помощи простых формул, например:

$$\mathcal{E}_A = \bar{I}_A \bar{Z}_A, \quad \mathcal{E}_A = \bar{I}_B \bar{Z}_{AB} \text{ и т. п.}$$

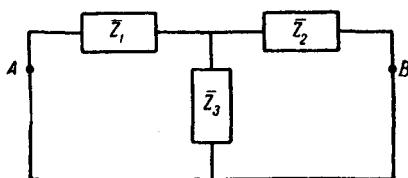


Рис. 205.

§ 71. Замечания о резонансной частоте системы

Как уже было выяснено в предыдущих параграфах, в идеализированной системе без затухания резонанс — бесконечная амплитуда — наступает при точном *совпадении* частоты внешней силы с собственной частотой системы. Наличие затухания приведет к тому, что, вообще говоря, максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний будет вблизи совпадения собственных частот системы и частоты внешней силы. Определение частоты, при которой в той или иной координате наступает максимум амплитуды колебаний какой-либо физической величины (смещения, скорости, ускорения), представляет в данном случае довольно сложную задачу, притом различные величины в разных координатах будут иметь максимумы при различных значениях частоты, как это можно видеть, например, из анализа формулы (69.2). Поэтому не имеет смысла говорить при наличии затухания, что резонанс системы наступает при такой-то частоте, но при *небольшом* затухании *приближенно* можно считать, что резонанс наступает *во всей системе*, при резонансе амплитуды колебаний в обеих координатах практически близки к *максимальным*.

Пользуясь комплексными параметрами системы, можно дать более четкое определение резонанса. Например, для обобщенной системы, показанной на рис. 205 и находящейся под действием одной внешней силы, включенной в точке *A*, можно определить резонансную частоту амплитуды тока первого контура *I_A* как частоту, при которой

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{Z_A} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial P^2} \left(\frac{1}{Z_A} \right) < 0 \quad (71.1)$$

и обратная величина модуля комплексного сопротивления имеет максимум. При небольшом затухании эту частоту можно приближенно считать резонансной частотой системы двух контуров и она практически близка к собственным частотам системы без затухания.

При решении практических задач иногда указывают другие способы приближенного определения резонансной частоты системы. Например, считают резонансной такую частоту, при которой *комплексное сопротивление* (данной цепи) *будет действительным* (или *динамическая жесткость является чисто мнимой*). При небольшом затухании резонансная частота, определенная так, вообще близка к собственной, но она может и не совпадать с собственной, в чем можно убедиться на примере механической системы с двумя степенями свободы, колебания в которой представлены формулой (69.2).

Так же как и для одного контура, кроме резонансных зависимостей при переменной частоте и постоянной амплитуде внеш-

ней силы (э. д. с.), рассмотренных нами ранее (рис. 199), практически часто пользуются резонансными зависимостями несколько иного вида, которые получают следующим образом: оставляют частоту и амплитуду внешней силы постоянной, непрерывно изменяют какой-либо параметр системы и измеряют при этом амплитуду колебаний. Особенности резонансных зависимостей в системе с одной степенью свободы были описаны в § 16.

В системе двух электрических контуров можно получить резонансную кривую изменением частоты внешнего генератора. Схема соедине-

ния приборов при таком измерении показана на рис. 206. В данном случае измеряется амплитуда напряжения на каком-то элементе системы при изменении частоты генератора. И резонансная зависимость будет иметь примерно такой вид, как это показано на рис. 199, т. е. резонансная кривая будет иметь два максимума вблизи резонансных частот ω_1 и ω_2 и минимум вблизи n_2 .

Однако можно настраивать систему контуров в резонанс и получать резонансные кривые изменением какого-либо параметра

системы при постоянной частоте и амплитуде внешней силы. Изменяют или емкость конденсатора, или индуктивность катушки. Резонансные кривые в таком случае, например амплитуда тока как функция емкости, будут иметь совершенно другой вид. Если одна из собственных частот системы равна частоте внешней силы, то резонанс возникает, но форма резонансной кривой не будет похожа на рис. 199.

Допустим, что имеем резонансную кривую при изменении емкости одного из конденсаторов контура; или в общем случае при изменении парциальной частоты одного из контуров. Для понимания особенности такой резонансной кривой полезно рассмотреть график собственных частот примерно в том виде, как он был дан на рис. 183. Здесь (рис. 207) по оси абсцисс отложен

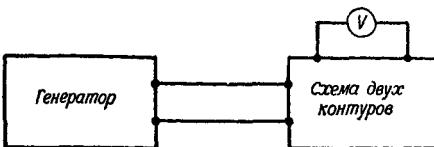


Рис. 206.

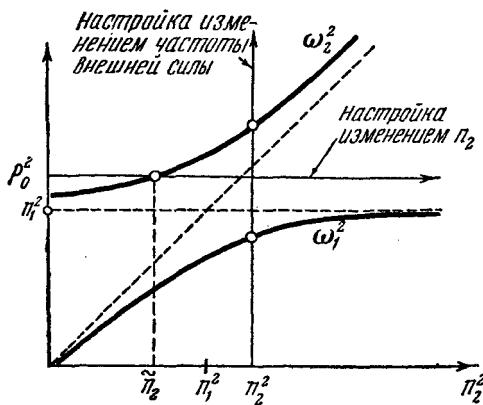


Рис. 207.

изменении емкости одного из конденсаторов контура; или в общем случае при изменении парциальной частоты одного из контуров. Для понимания особенности такой резонансной кривой полезно рассмотреть график собственных частот примерно в том виде, как он был дан на рис. 183. Здесь (рис. 207) по оси абсцисс отложен

квадрат парциальной частоты n_1^2 , по оси ординат — квадраты собственных частот ω_1^2 и ω_2^2 , которые показаны жирными сплошными кривыми.

Величина квадрата частоты неизменной парциальной системы n_1^2 помечена на обеих осях. При настройке изменением частоты внешней э. д. с. при постоянных параметрах системы (n_1 и n_2) мы как бы сечем диаграмму рис. 207 по вертикали и, очевидно, при двух значениях частоты внешней силы она будет совпадать с собственной и при этих значениях будем иметь бесконечные амплитуды, резонанс, если в системе нет затухания, и очень большие колебания при небольшом затухании. При настройке изменением парциальной частоты n_2 , при постоянной частоте внешней силы p_0 , только при одном определенном значении \tilde{n}_2 будем иметь бесконечные амплитуды — резонанс. Резонансная кривая при наличии затухания будет иметь только один максимум, соответствующий точке \tilde{n}_2 , расположенной вблизи пересечения p_0^2 с кривой ω_2^2 ; она будет иметь принципиально иной характер, чем показанная на рис. 199, будет похожа на резонансную кривую в одном контуре.

К такому же выводу можно прийти, если рассмотреть выражение для амплитуды колебаний (69.2) при изменении одного из параметров, например a_{11} (или a_{22}); в этом случае очевидно, что в системе без затухания знаменатель D только при одном значении параметра обратится в нуль.

§ 72. Расчет фильтра промежуточной частоты в супергетеродине

В качестве примера вынужденных колебаний в системе с двумя степенями свободы рассмотрим фильтр промежуточной частоты, состоящий из двух связанных индуктивно контуров. В усилителе промежуточной частоты в анодную цепь лампы, обычно пентода, включена система контуров, например, как показано на рис. 208.

Так как внутреннее сопротивление пентода очень велико, то можно считать, что при данном гармоническом напряжении на управляющей сетке лампы ее анодный ток этим вполне определен. Поэтому будем вести расчет так, что комплексная амплитуда анодного тока — \bar{I}_a — заданная величина. Напряжение на конденсаторе C_2 , комплексная амплитуда которого \bar{U} , подается на сетку следующей лампы; поэтому нас интересует \bar{U} как функция частоты p при данном \bar{I}_a .

Уравнения для комплексных амплитуд токов, идущих в контурах \bar{I}_1 и \bar{I}_2 , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1(R_1 + ipL_1) + (\bar{I}_1 - \bar{I}_a) \frac{1}{ipC_1} + \bar{I}_2 ipM &= 0, \\ \bar{I}_1 ipM + \bar{I}_2 \left[R_2 + i \left(pL_2 - \frac{1}{pC_2} \right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (72.1)$$

Обозначим $\bar{Z}_1 = R_1 + i \left(pL_1 - \frac{1}{pC_1} \right)$ и $\bar{Z}_2 = R_2 + i \left(pL_2 - \frac{1}{pC_2} \right)$ — комплексные сопротивления первого и второго контуров.

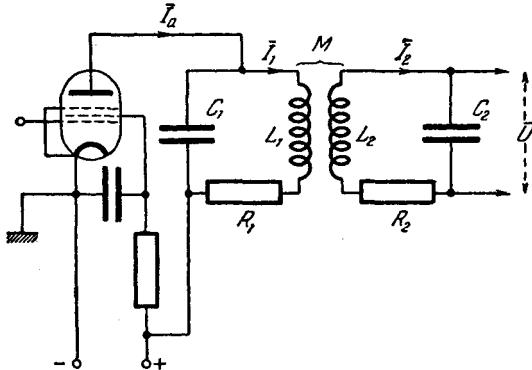


Рис. 208.

Тогда (72.1) можно записать так:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 \bar{Z}_1 + \bar{I}_2 ipM &= \frac{1}{ipC_1} \bar{I}_a, \\ \bar{I}_2 \bar{Z}_2 + \bar{I}_1 ipM &= 0. \end{aligned} \quad (72.2)$$

Амплитуда напряжения на выходе $\bar{U} = \frac{\bar{I}_2}{ipC_2}$, поэтому, исключив \bar{I}_1 из (72.2), получаем:

$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}_a} = \frac{iM}{pC_1C_2(\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + p^2M^2)}. \quad (72.3)$$

Зависимость $\left| \frac{\bar{U}}{\bar{I}_a} \right|$ от частоты p по формуле (72.3) и дает искомую характеристику фильтра.

Посмотрим, каким образом характеристика фильтра будет зависеть от связи между контурами в том случае, когда оба контура одинаковы. Тогда $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$, $R_1 = R_2 = R$,

$$n^2 = \frac{1}{LC}, \quad \bar{Z}_1 = \bar{Z}_2, \quad Q = \frac{L n}{R},$$

и обозначая $\gamma_1 = M/L$, можно преобразовать (72.3) к следующему виду:

$$\frac{\bar{U}}{I_a} = i \frac{L}{CR} \frac{n\gamma_1 Q}{p \left\{ \left[1 + iQ \left(\frac{p}{n} - \frac{n}{p} \right) \right]^2 + \gamma_1^2 Q^2 \left(\frac{p}{n} \right)^2 \right\}}. \quad (72.4)$$

Напомним, что L/CR представляет эквивалентное резонансное сопротивление контура при его параллельном включении.

Теперь желательно рассмотреть отношение $|\bar{U}/I_a|$ как функцию p/n при различных значениях связи γ_1 и добротности контуров. Сначала посмотрим, как зависит $|\bar{U}/I_a|$, при точной настройке контуров в резонанс, от связи и добротности. При $p = n$ формула (72.4) принимает вид:

$$\frac{\bar{U}}{I_a} = i \frac{L}{CR} \frac{\gamma_1 Q}{1 + (\gamma_1 Q)^2}. \quad (72.5)$$

Отсюда видно, что амплитуда при резонансе зависит от величины $\gamma_1 Q$. Безразмерный коэффициент в формуле (72.5) зависит от $\gamma_1 Q$ так, как показано на рис. 209. Следовательно, для резонансной частоты

ты при $\gamma_1 Q = 1$ имеем максимум амплитуды колебаний на выходе фильтра. Связь $\gamma_{kp} = 1/Q$ называется *критической*. Если выберем какое-нибудь определенное значение Q , например $Q = 50$, и будем менять γ_1 , то для различных значений $\gamma_1 Q$ вблизи критического значения связи будем получать резонансные кривые совершенно различного вида; при $\gamma_1 > \gamma_{kp}$ резонансная кривая имеет два максимума, при $\gamma_1 < \gamma_{kp}$ резонансная кривая имеет один максимум в точке $p = n$. Резонансные кривые фильтра будут иметь примерно такой характер, как это показано на рис. 210.

Из кривых этого рисунка видно, что фильтр выделяет относительно широкую полосу частот с почти одинаковым усилением в том случае, когда связь будет немного более критической или $\gamma_1 Q$ немного более 1.

Рассмотрение данного примера показывает, что затухание в контурах при маленькой связи совершенно «уничтожает» резонансные свойства системы. В первом контуре внешнее воздействие

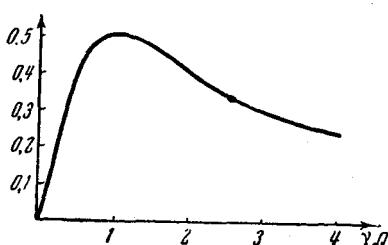


Рис. 209.

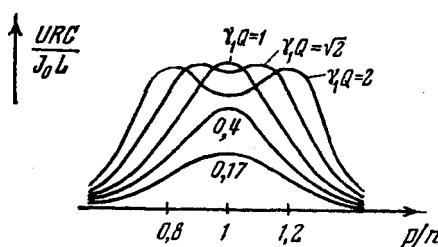


Рис. 210.

возбуждает вынужденные колебания, которые и передаются во второй, при этом силы взаимодействия очень малы и второй контур почти не оказывается на колебаниях первого. Это можно объяснить еще и так: при небольшой связи собственные частоты системы лежат очень близко друг к другу и затухание сравнивает эти максимумы так, что они обращаются в один. С увеличением связи выше критического значения собственные частоты расходятся настолько, что максимумы около каждой собственной частоты выделяются, несмотря на сравнивающее действие затухания. Силы связи в этом случае достаточно велики, э. д. с., наводимые из второго контура в первый, существенно влияют на колебания в первом контуре.

Г Л А В А 2

**КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ
СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ**

**§ 73. Общие свойства линейной колебательной системы
со многими степенями свободы**

Колебательная система, состоящая из ряда связанных маятников (рис. 211), или электрическая цепь, составленная из многих контуров (рис. 212), представляют примеры систем со многими степенями свободы.

Колебания, возникающие в одном из звеньев системы, будут вызывать колебания и в остальных звеньях. Число независимых

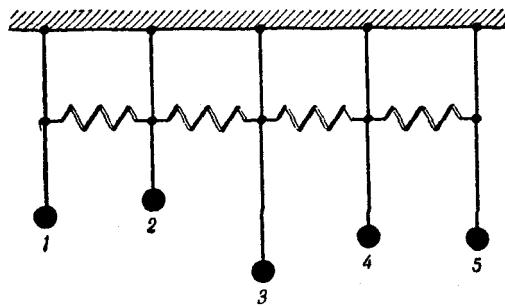


Рис. 211.

координат, при помощи которых описываются все движения в системе, есть число степеней свободы. Так, система, состоящая из маятников (рис. 211), представляет систему с пятью степенями свободы, если иметь в виду движение маятников только в плоскости чертежа. Электрическая система, схема которой показана на рис. 212, имеет тоже пять степеней свободы. Координаты можно выбирать самым различным образом; так, например, в механической системе можно принять за координаты отклонение каждого

маятника, или же угол отклонения одного маятника и длины всех пружин и т. д.; в электрической системе (рис. 212) за координаты можно принять токи в тех точках цепи, которые отмечены на отдельных ветвях черточкой. Достаточность и правильность выбора координат проверяют «закреплением». Например, если «закрепить», оставить постоянными все координаты или «разорвать» ветви, по которым идут токи, принятые за основные координаты, то никаких движений в системе быть не может.

В сложных электрических цепях иногда удобно выбирать координаты в виде контурных токов или узловых напряжений. Цепь

разбивается на замкнутые контуры, например так, как показано на рис. 212. Каждому контуру соответствует замкнутый ток i_j определенного направления, но в каждой ветви вообще идет несколько токов, например, через сечение 2 проходит ток $i_1 - i_2$, через сечение 4 — ток $i_3 - i_4$ и т. д. Выбирать контурные токи можно произвольно. Проще всего делать это так: перечерчивать постепенно схему цепи на чистый лист, наносить один элемент за другим, как только ветвь замкнется, проводить через нее замкнутый

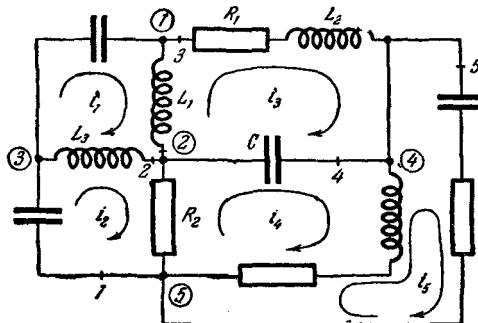


Рис. 212.

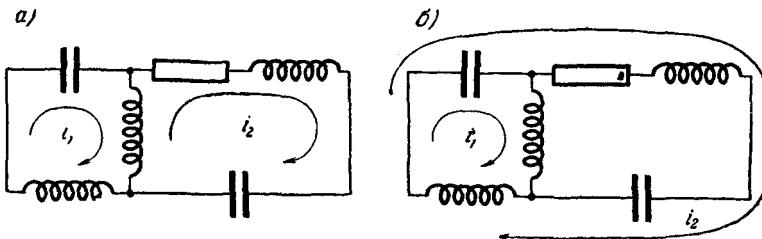


Рис. 213.

контур любым возможным образом. Так, например, при анализе схемы рис. 212 можно контуры выбрать и так, как показано на рис. 213, а, и так, как на рис. 213, б. Принимая контурные токи за независимые переменные, составить уравнения напряжений для каждого контура, учитывая все токи, идущие в ветвях,

образующих контур; так, например, для третьего контура рис. 212 уравнение будет иметь такой вид:

$$R_1 i_3 + L_2 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C} \int (i_3 - i_4) dt + L_1 \frac{d}{dt} (i_3 - i_4) = 0.$$

Аналогично запишутся уравнения для остальных четырех контуров. Совокупность пяти уравнений для пяти контурных токов и представит систему уравнений, описывающую колебания в сложной электрической цепи.

Иногда выбирают за независимые переменные напряжения в узлах — точках соединения нескольких ветвей.

На рис. 212 узлы помечены жирными точками, а их номера указаны рядом в кружочках. Уравнения колебаний в такой системе проще всего записать для комплексных амплитуд. Если желаем перейти к дифференциальным уравнениям, то будем считать $i\omega = \frac{d}{dt}$ и обращаться с этим символом, как с числом. Как это делается, покажем далее на примере.

Обозначим комплексные амплитуды напряжений в узлах через $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3, \bar{U}_4$ и \bar{U}_5 соответственно их номерам. Затем запишем равенство нулю всех токов («приходящих» и «уходящих») для данного узла, это и будут искомые уравнения. Например, для второго узла (2 на рис. 212) это уравнение будет:

$$\frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_2}{i\omega L_1} + \frac{\bar{U}_3 - \bar{U}_2}{i\omega L_3} + \frac{\bar{U}_4 - \bar{U}_2}{1/i\omega C} + \frac{\bar{U}_5 - \bar{U}_2}{R_2} = 0.$$

Соответствующее ему дифференциальное уравнение получим, если помножим его на $i\omega$ и заменим величину $i\omega$ на $\frac{d}{dt}$. Очевидно, это будет:

$$\frac{1}{L_1} (\bar{U}_1 - \bar{U}_2) + \frac{1}{L_3} (\bar{U}_3 - \bar{U}_2) + C \frac{d^2}{dt^2} (\bar{U}_4 - \bar{U}_2) + \frac{1}{R_2} \frac{d}{dt} (\bar{U}_5 - \bar{U}_2) = 0.$$

Выкладки будут более сложными, если комплексные сопротивления ветвей будут представлять полиномы от $i\omega$.

В дальнейшем рассматриваются только линейные системы, движения в которых описываются линейными дифференциальными уравнениями. Это означает, что в законы движения входят только суммы отдельных координат, скоростей и ускорений, помноженных на некоторые постоянные коэффициенты; в них не входят произведения и степени этих величин. Или еще так: силы упругости пропорциональны изменению координат, силы трения пропорциональны скоростям координат, массы остаются постоянными.

Для составления уравнений движения (колебаний) в системе мы будем пользоваться обобщенными уравнениями Лагранжа, поэтому рассмотрим выражение для энергии системы.

Потенциальная (или электростатическая) энергия есть функция координат системы. Пусть движение в системе определяется n независимыми обобщенными координатами

$$q_1, q_2, \dots, q_n. \quad (73.1)$$

В частном случае координаты (73.1) представляют смещения некоторых точек или заряды на проводниках. Пусть потенциальная энергия системы будет

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ или } U(q). \quad (73.2)$$

Как известно, в положении устойчивого равновесия системы потенциальная энергия имеет минимум. В положении равновесия упругие силы равны нулю или

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\right)_{q_0} = 0 \quad (73.3)$$

для всех значений s от 1 до n , где индекс q_0 указывает, что все координаты имеют значения, соответствующие положению равновесия. Изменение потенциальной энергии при изменении координат есть работа, которую совершают упругие силы системы при данном изменении. Если будем считать $x_s = q_s - q_{s0}$ новыми координатами системы относительно положения равновесия, тогда в положении равновесия все $x_s = 0$ *). Для небольших значений величин x_s можно записать:

$$U(q_s) - U(q_0) = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\right)_{q_0} \cdot x_s + \frac{1}{2} \cdot \sum_{s, l=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_s \partial q_l}\right)_{q_0} \cdot x_s x_l + \dots \quad (73.4)$$

Так как важны только изменения потенциальной энергии, то всегда можно положить $U(q_{s0}) = 0$, т. е. отсчитывать величину потенциальной энергии от ее значения в положении равновесия. Тогда, учитывая (73.3), выражение для потенциальной энергии любой системы около положения равновесия можно записать так:

$$U(q_s) = \frac{1}{2} \sum_{s, l=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_s \partial q_l}\right)_{q_0} x_s x_l + \dots \quad (73.5)$$

или, обозначив

$$a_{sl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_s \partial q_l}\right)_{q_0} \quad (73.6)$$

и пренебрегая высшими степенями, можно (73.5) представить в таком виде:

$$U(x, x) = \sum_{s, l=1}^n a_{sl} x_s x_l. \quad (73.7)$$

*) Значение координаты q_s в положении равновесия обозначено q_{s0} .

Напомним, что в (73.7) стоит знак суммирования по двум индексам, «двойная сумма».

Нас интересуют колебания системы около устойчивого положения равновесия, следовательно, величина потенциальной энергии всегда *положительна*, или

$$U(x, \dot{x}) > 0 \quad \text{при } x \neq 0. \quad (73.8)$$

Еще заметим, что из (73.6) следует

$$\alpha_{sl} = \alpha_{ls}. \quad (73.9)$$

Кинетическая энергия или магнитная энергия системы имеет такой вид:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s \dot{y}_s^2 \quad \text{или} \quad T = \frac{1}{2} \sum_{s, l=1}^n L_{sl} I_s I_l, \quad (73.10)$$

где m_s — масса точки, имеющей скорость \dot{y}_s ; для электрической системы L_{sl} — коэффициент взаимной индукции между ветвями, по которым идут токи I_s и I_l , а L_{ss} — коэффициент индуктивности ветви, по которой идет ток I_s .

Пусть переход от координат y_s к обобщенным x_s совершается линейным преобразованием *) такого вида:

$$y_s = \sum_{l=1}^n \gamma_{sl} x_l.$$

Тогда

$$\dot{y}_s = \sum_{l=1}^n \gamma_{sl} \dot{x}_l,$$

и кинетическая энергия

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s \dot{y}_s^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s \sum_{l, p=1}^n \gamma_{sl} \gamma_{sp} \dot{x}_l \dot{x}_p = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l, p=1}^n \dot{x}_l \dot{x}_p \sum_{s=1}^n m_s \gamma_{sl} \gamma_{sp} = \sum_{l, p=1}^n \beta_{lp} \dot{x}_l \dot{x}_p, \end{aligned} \quad (73.11)$$

где обозначено

$$\beta_{lp} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s \gamma_{sl} \gamma_{sp}. \quad (73.12)$$

*) Можно было бы не ограничиваться линейным преобразованием; при любом преобразовании для *малых колебаний* мы пришли бы к тому же.

Из обозначения (73.12) следует, что

$$\beta_{sl} = \beta_{ls}. \quad (73.13)$$

В данном случае при линейном преобразовании формула (73.11) справедлива для любых (не только малых) колебаний.

Кинетическая энергия (73.10) (или магнитная энергия) — величина всегда положительная. Поэтому можно сказать, что в линейной системе, в которой происходят движения около устойчивого положения равновесия, кинетическая энергия представляет положительную однородную квадратичную форму от скоростей (73.11), а потенциальная — положительную однородную квадратичную форму от координат (73.7).

Силы трения (или падения напряжения на сопротивлениях) можно также характеризовать некоторой специальной функцией скоростей (токов). Но, как принято в книге, сначала рассмотрим собственные колебания в системе с n степенями свободы в отсутствие сил трения, поэтому введем эту функцию позже.

§ 74. Собственные колебания в системе без сил трения

Допустим, что нам известны параметры системы, все коэффициенты β_{sl} в (73.11) и a_{sl} в (73.7); тогда при помощи уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} + \frac{\partial U}{\partial x_s} = 0 \quad (74.1)$$

можно написать уравнения движения системы около положения равновесия. Подставляя в (74.1) выражение кинетической (71.11) и потенциальной (73.7) энергии, получаем n дифференциальных уравнений:

$$\sum_{s=1}^n (\beta_{ls} \ddot{x}_s + a_{ls} x_s) = 0, \quad (74.2)$$

для всех значений l от 1 до n . Решения этой системы линейных дифференциальных уравнений представляют собственные колебания в системе.

Частное решение (74.2) можно искать в таком виде:

$$x_s = A_s e^{\lambda t}, \quad (74.3)$$

где A_s и λ — постоянные величины. Подставляя (74.3) в (74.2), получаем алгебраическую систему однородных относительно A_s уравнений

$$\sum_{s=1}^n (\beta_{ls} \lambda^2 + a_{ls}) A_s = 0 \quad (74.4)$$

для всех $l = 1, 2, 3, \dots, n$.

Система однородных уравнений (74.4) будет иметь отличные от нуля решения для A_s только в том случае, когда детерминант этой системы равен нулю. Или

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11}\lambda^2 & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n}\lambda^2 \\ \alpha_{21} + \beta_{21}\lambda^2 & \alpha_{22} + \beta_{22}\lambda^2 & \dots & \alpha_{2n} + \beta_{2n}\lambda^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} + \beta_{n1}\lambda^2 & \dots & \dots & \dots & \alpha_{nn} + \beta_{nn}\lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (74.5)$$

Легко доказать, что все корни этого уравнения n -го порядка относительно λ^2 будут отрицательны.

Действительно, возьмем одно уравнение из системы (74.4), допустим l -е уравнение, которое запишем так:

$$\lambda^2 \sum_{s=1}^n \beta_{ls} A_s + \sum_{s=1}^n \alpha_{ls} A_s = 0,$$

умножим его на A_l ,

$$\lambda^2 A_l \sum_{s=1}^n \beta_{ls} A_s + A_l \sum_{s=1}^n \alpha_{ls} A_s = 0.$$

Проделаем такую же операцию с каждым из уравнений (74.4) и затем все их сложим, в результате будет:

$$\lambda^2 \sum_{s=1}^n \beta_{ls} A_s A_l + \sum_{s=1}^n \alpha_{ls} A_s A_l = 0. \quad (74.6)$$

Вспоминая выражения для потенциальной и кинетической энергий, (74.6) можно переписать так:

$$\lambda^2 = -\frac{U(A, A)}{T(A, A)}.$$

Так как при любых значениях A_s и A_l $T(A, A) > 0$ и $U(A, A) > 0$, по физическому смыслу этих величин, то λ^2 всегда отрицательная величина. Напомним, что кинетическая энергия T — всегда величина положительная, но потенциальная энергия U будет положительна только около устойчивого положения равновесия, если в положении равновесия $U = 0$. Отсюда вблизи неустойчивого положения равновесия возможны положительные значения λ^2 .

Уравнение (74.5) будет иметь n решений для $\lambda^2 : \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \dots$. Пока будем считать, что все они различны. Так как каждая из этих величин отрицательна, то можно обозначить

$$\lambda_p = \pm i\omega_p,$$

где ω_p — действительная величина. Таким образом, уравнение (74.5) имеет $2n$ попарно сопряженных корней. И поэтому частное решение системы уравнений имеет такой вид:

$$x_s = A_s e^{i\omega_p t} + \bar{A}_s^* e^{-i\omega_p t} \quad \text{для всех } s = 1, 2, \dots, n, \quad (74.7)$$

где \bar{A}_s^* — комплексно-сопряженная величина к \bar{A}_s . Очевидно, что каждое из (74.7) есть гармоническое колебание с частотой ω_p .

Следовательно, общее решение системы уравнений (74.2) будет состоять из суммы n гармонических колебаний с частотами

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n. \quad (74.8)$$

Поэтому частоты (74.8) суть *собственные частоты* системы, и уравнение (74.5) есть уравнение, определяющее собственные частоты.

Для каждой собственной частоты ω_p , подставляя ее значение в (74.4), найдем систему уравнений для определения величин \bar{A}_s . Так как для каждого значения ω_p будет своя система уравнений, то обозначим величины \bar{A}_s двумя индексами; таким образом, для \bar{A}_{ps} первый индекс обозначает номер собственной частоты, второй индекс — номер координаты. Система уравнений для \bar{A}_{ps} имеет такой вид:

$$\sum_{s=1}^n (\alpha_{ls} - \omega_p^2 \beta_{ls}) \bar{A}_{ps} = 0 \quad (74.9)$$

для $l = 1, 2, 3, \dots, n$.

Для каждого значения p , номера собственной частоты, имеет место система уравнений (74.9); таким образом, имеется *всего n систем уравнений* для определения \bar{A}_{ps} .

В каждой системе уравнений (74.9), относящейся к частоте ω_p , n неизвестных:

$$\bar{A}_{p1}, \bar{A}_{p2}, \bar{A}_{p3}, \dots, \bar{A}_{pn}. \quad (74.10)$$

А так как система (72.9) представляет систему n однородных уравнений, то она определяет только отношение всех \bar{A}_p к одному из них; следовательно, одно значение \bar{A}_{ps} можно выбрать произвольно, тогда все остальные значения могут быть определены из (74.9).

Поэтому предположим, что \bar{A}_{p1} нам известно, и, отбросив первое уравнение системы (74.9), перепишем ее так:

$$\sum_{s=2}^n (\alpha_{ls} - \omega_p^2 \beta_{ls}) \bar{A}_{ps} = -(\alpha_{l1} - \omega_p^2 \beta_{l1}) \bar{A}_{p1}, \quad (74.11)$$

причем $l = 2, 3, \dots, n$. Это будет уже система $n - 1$ уравнений относительно неизвестных \bar{A}_{ps} с заданной правой частью. Детерминант этой системы отличен от нуля, и поэтому ее решение можно записать следующим образом:

$$\bar{A}_{ps} = k_{ps} \bar{A}_{p1}, \quad (74.12)$$

где k_{ps} — величина действительная, так как все коэффициенты в системе (74.11) действительные. Заметим, что детерминант системы (74.11) отличен от нуля, если ω_p^3 простой (не кратный) корень уравнения (74.5).

Теперь можно записать частное решение (74.7) таким образом:

$$x_{ps} = \bar{A}_{ps} e^{i\omega_p t} + \bar{A}_{ps}^* e^{-i\omega_p t} = k_{ps} (\bar{A}_{p1} e^{i\omega_p t} + \bar{A}_{p1}^* e^{-i\omega_p t}). \quad (74.13)$$

Или полагая, что $\bar{A}_{p1} = \frac{1}{2} A_{p1} e^{i\Phi_p}$, и подставляя это в (74.13), получаем выражение для колебаний частоты ω_p в привычном виде:

$$x_{ps} = A_{p1} k_{ps} \cos(\omega_p t + \Phi_p), \quad (74.14)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$, если учесть, что, по определению, $k_{p1} = 1$. Иногда выражение (74.13) будем представлять и просто так:

$$x_{ps} = A_{ps} \cos(\omega_p t + \Phi_p), \quad (74.15)$$

где учитывается, что $\bar{A}_{ps} = \frac{1}{2} A_{ps} e^{i\Phi_p}$.

Выражение (74.14) означает, что в рассматриваемой системе существует частное движение, при котором каждая координата совершает гармонические колебания с одной частотой ω_p , и при этом все координаты колеблются в фазе (или в противофазе): амплитуда колебаний только в одной, в первой, координате зависит от начальных условий, амплитуды же колебаний во всех остальных координатах находятся в определенном отношении k_{ps} к амплитуде в первой координате; начальная фаза колебаний Φ_p всех координат одинакова.

В частном колебании системы вида (74.13) только две величины произвольны: A_{1p} и Φ_p ; все остальные величины — ω_p и все k_{ps} — определяются устройством системы. Такое частное колебание может иметь место для любой собственной частоты ω_p , поэтому общее решение системы уравнений (74.2) или собственные колебания в рассматриваемой системе в любом случае имеют такой вид:

$$x_s = \sum_{p=1}^n x_{ps} = \sum_{p=1}^n A_{p1} k_{ps} \cos(\omega_p t + \Phi_p) \quad (74.16)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$.

Решение содержит $2n$ постоянных величин $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}$ и $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, которые определяются из начальных условий.

Формулы (74.16) представляют собственные колебания в линейной системе с n степенями свободы. Собственные колебания подчиняются следующим законам: 1) гармонические колебания одной и той же частоты во всех координатах происходят в фазе или в противофазе, 2) если амплитуда колебаний какой-либо частоты

в одной координате задана, то во всех остальных координатах амплитуды колебаний этой же частоты будут иметь определенную величину. Второе условие иногда выражают так: *распределение амплитуд колебаний данной собственной частоты по координатам определяется устройством системы*. Величины k_{ps} , которые можно представить матрицей

$$\begin{vmatrix} 1 & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ 1 & k_{21} & \dots & \dots & k_{2n} \\ 1 & \dots & \dots & \dots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}, \quad (74.17)$$

называются *коэффициентами распределения амплитуд*. Совокупность коэффициентов распределения для частоты ω_p иногда называют *формой* собственного колебания, ибо при одном собственном колебании отношение между значениями различных координат в один и тот же момент времени всегда остается неизменным, это и значит, что собственное колебание обладает присущей ему «формой». Мы относили амплитуды колебаний каждой координаты к амплитуде в первой координате, но можно было бы относить их к амплитуде любой другой координаты. В некоторых случаях, а именно для тех частот, при которых амплитуда колебаний в первой координате будет равна нулю, необходимо относить амплитуды колебаний к амплитуде уже другой не первой координаты, в которой она отлична от нуля.

Для того чтобы яснее представить себе картину собственных колебаний, рассмотрим пример.

§ 75. Собственные колебания струны с тремя бусинками

Рассмотрим поперечные колебания струны с постоянным натяжением, на которой на равном расстоянии друг от друга надеты бусинки; мы будем считать их точками с некоторой массой, так как диаметр бусинок много меньше расстояния между ними. Струну будем полагать невесомой, это значит, что масса струны много меньше массы бусинок. Пример этих колебаний кажется очень теоретическим, искусственным, но на нем удобно показать все существенные особенности колебаний в системе со многими степенями свободы.

Пусть на струне длины $4l$ находятся закрепленные на ней на равных расстояниях три бусинки (рис. 214).

Массы бусинок m , $2m$ и m . Сила натяжения струны F остается постоянной при колебаниях. Колебания происходят в одной плоскости, и малые смещения бусинок, перпендикулярные к струне, обозначены через x_1 , x_2 , x_3 , как указано на рисунке.

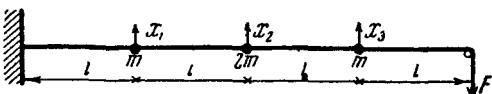


Рис. 214.

В данном примере проще написать уравнения движения каждой массы под действием сил со стороны струны, чем находить эти уравнения общим путем через выражения для энергии.

Полагаем, что x_1, x_2, x_3 очень малы по сравнению с l , поэтому синусы и тангенсы углов наклона струны можно заменить углами. Тогда уравнения движения будут таковы:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= \frac{F}{l} [-x_1 - (x_1 - x_2)], \\ 2m\ddot{x}_2 &= \frac{F}{l} [-(x_2 - x_1) - (x_2 - x_3)], \\ m\ddot{x}_3 &= \frac{F}{l} [-(x_3 - x_2) - x_3]. \end{aligned} \quad (75.1)$$

Для первой бусинки сила Fx_1/l направлена к положению равновесия, а сила $F/l(x_2 - x_1)$ — от положения равновесия, если $x_2 > x_1$, и т. д. Обозначим

$$n_1^2 = \frac{2F}{ml}, \quad n_2^2 = \frac{F}{ml}, \quad n_3^2 = \frac{2F}{ml} = n_1^2, \quad (75.2)$$

это квадраты парциальных частот системы; например, n_1 — парциальная частота колебаний первой бусинки, когда вторая и третья неподвижны.

Тогда уравнения движения (75.1) можно записать так:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{n_1^2}{2} (-x_2 + 2x_1) &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{n_2^2}{2} (-x_1 + 2x_2 - x_3) &= 0, \\ \ddot{x}_3 + \frac{n_1^2}{2} (-x_2 + 2x_3) &= 0. \end{aligned} \quad (75.3)$$

Здесь виден закон, по которому легко написать уравнения для струны с каким угодно числом бусинок. Система уравнений (75.3) есть частный случай системы (74.2) для трех координат с упругой связью, в данном случае все β_{js} при $s \neq j$ равны нулю.

Ищем частное решение (75.3) в таком виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{i\omega t}, \\ x_2 &= A_2 e^{i\omega t}, \\ x_3 &= A_3 e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Подставляем его в (75.3) и получаем:

$$\begin{aligned} (n_1^2 - \omega^2) A_1 - \frac{1}{2} n_1^2 A_2 &= 0, \\ -\frac{1}{2} n_1^2 A_1 + (n_2^2 - \omega^2) A_2 - \frac{1}{2} n_2^2 A_3 &= 0, \\ -\frac{1}{2} n_1^2 A_2 + (n_1^2 - \omega^2) A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (75.4)$$

Равенство нулю детерминанта системы однородных обыкновенных уравнений (75.4) относительно A_1, A_2 и A_3 дает уравнение для определения собственных частот:

$$(n_1^2 - \omega^2) \left[(n_1^2 - \omega^2) (n_2^2 - \omega^2) - \frac{1}{2} n_1^2 n_2^2 \right] = 0. \quad (75.5)$$

Один корень этого уравнения, одна собственная частота

$$\omega_2 = n_1. \quad (75.6)$$

Если вспомним, по (75.2), что $n_1^2 = 2n_2^2$, то получим следующие значения двух других частот:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot n_1, \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot n_1. \end{aligned} \quad (75.7)$$

Отметим, что собственные частоты пронумерованы в порядке возрастания их величин:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3.$$

Теперь подставим эти значения частот в систему (75.4) и найдем коэффициенты распределения амплитуд. Напомним, что по определению для первой частоты

$$k_{12} = \frac{A_2}{A_1}, \quad k_{13} = \frac{A_3}{A_1}.$$

Напишем систему (75.4) для частоты ω_1 , учитывая (75.6) и (75.7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) - k_{12} &= 0, \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) k_{12} - \frac{1}{2} k_{13} &= 0, \\ -k_{12} + \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) k_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (75.8)$$

Решение системы (75.8) будет

$$k_{12} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}), \quad k_{13} = 1.$$

При соответствующих начальных условиях струна совершает колебания только с первой частотой ω_1 , и форма струны при колебаниях в любой момент будет иметь такой вид, как это показано на рис. 215. Все бусинки

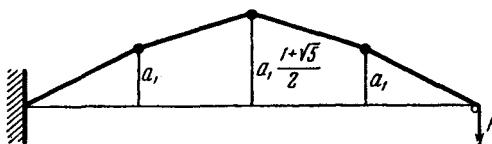


Рис. 215.

совершают колебания в одной фазе, амплитуда колебаний первой и третьей бусинок одинакова, амплитуда средней в $\frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$ раз больше. Если вывести струну, как показано на рис. 215, из положения равновесия и отпустить, то собственные колебания бусинок и струны будут происходить только с первой частотой ω_1 : все бусинки одновременно будут проходить положение равновесия, и в любой другой момент форма струны будет подобна показанной на рис. 215. Эту форму и называют формой собственного колебания с частотой ω_1 .

Таким же путем найдем коэффициенты распределения для двух остальных частот:

для $\omega_2 = n_1$

$$k_{22} = 0, \quad k_{23} = -1,$$

для $\omega_3 = \frac{1}{2} \sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot n_1$

$$k_{32} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}), \quad k_{33} = 1. \quad (75.9)$$

Формы собственных колебаний, соответствующие этим частотам, показаны на рис. 216. Матрица коэффициентов распределения имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \end{vmatrix}. \quad (75.10)$$

Любое собственное колебание при любых начальных условиях может быть представлено суммой этих трех гармонических колебаний: крайние

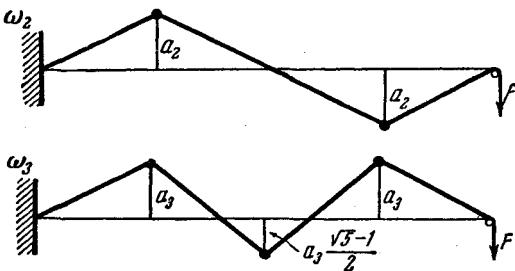


Рис. 216.

бусинки совершают колебания с тремя частотами, а средняя — только с двумя частотами, ибо $k_{22} = 0$.

Только ради наглядности и простоты вычислений было выбрано симметричное расположение бусинок на струне. Очевидно, что таким же путем

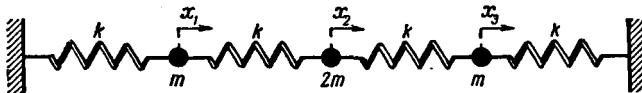


Рис. 217.

можно найти собственные частоты и распределение амплитуд при различных массах бусинок и любом распределении их на струне.

Полученные в этом параграфе результаты можно применить к любой колебательной системе этого типа. Например, собственные колебания систем, показанных на рис. 217 и 218, имеют этот же самый вид. Значение парциаль-

ной частоты в механическом примере равно

$$\omega_1^2 = \frac{2k}{m},$$

и в электрическом:

$$\omega_1^2 = \frac{2}{LC}.$$

В первом примере рассматриваются продольные колебания трех масс, связанных одинаковыми пружинами с жесткостью k , за координаты

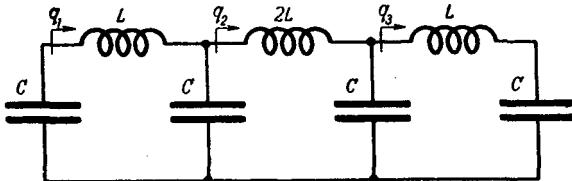


Рис. 218.

выбраны смещения масс. Во втором — электрические колебания в системе трех связанных контуров, за координату выбрана величина заряда, прошедшего к моменту времени t через данную ветвь.

§ 76. Нормальные координаты

Точно так же, как это было сделано ранее для системы с двумя степенями свободы, для упрощения анализа собственных колебаний в системе со многими степенями свободы (74.16) можно ввести *нормальные координаты*, иными словами, такие координаты которые совершают только гармонические колебания после любых начальных условий. Действительно, если зададим n гармонических колебаний

$$\xi_j = A_{j1} \cos(\omega_j t + \Phi_j), \quad (76.1)$$

сумма которых представляет движение *первой* координаты x_1 , то этим самым зададим движение всех остальных координат. Следовательно, величины

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$$

можно считать новыми координатами системы, которые и называются *нормальными*.

Формулы преобразования от обычных координат к нормальным по (76.1) и (74.16) имеют вид:

$$x_s = \sum_{j=1}^n k_{js} \xi_j \quad (76.2)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$.

Допустим, что $\xi_1 = a$, а остальные ξ_j равны нулю. Это означает, что все координаты x_s имеют следующие значения:

$$x_1 = a, \quad x_2 = k_{12}a, \quad x_3 = k_{13}a, \dots, \quad x_n = k_{1n}a. \quad (76.3)$$

В общем же случае значение координаты x_s определяется суммой n составляющих, соответствующих каждой нормальной координате ξ_j .

Преобразование (76.2) можно представить себе как линейное преобразование координат x_s . Можно так поставить задачу о нормальных координатах: возьмем линейное преобразование от координат x_s к координатам ξ_s в общем случае с произвольными коэффициентами, и попробуем отыскать такие значения коэффициентов преобразования, при которых в кинетическую и потенциальную энергию будут входить только квадраты $\dot{\xi}_j$ и квадраты ξ_j , т. е. в них будут отсутствовать члены, определяющие связь между координатами. Тогда уравнения Лагранжа будут:

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = 0, \quad (76.4)$$

где $j = 1, 2, \dots, n$.

Решение поставленной задачи приводит к формулам преобразования (76.2) и искомые коэффициенты в формулах преобразования как раз и будут коэффициентами распределения амплитуд собственных колебаний (k_{js}).

Мы избрали другой более наглядный и простой путь и, очевидно, по определению (76.1) каждое ξ_j удовлетворяет одному из уравнений гармонических колебаний (76.4). При собственных колебаниях системы каждая нормальная координата совершает чистое гармоническое колебание с соответствующей ей собственной частотой, так как каждой собственной частоте соответствует своя нормальная координата. Очевидно, что по определению (76.1) амплитудой j -го нормального колебания можно называть амплитуду колебаний частоты номера j в первой координате, или в другой координате, к которой мы относим амплитуды всех остальных при определении k_{js} .

Любые собственные колебания системы представляют сумму нормальных колебаний, каждое из которых имеет определенную амплитуду и фазу. Зная нормальные колебания, по формулам (76.1) можно установить колебания каждой координаты x_s .

§ 77. Ортогональность нормальных координат

Каждое нормальное колебание имеет определенное распределение амплитуд, определенную форму. Между коэффициентами распределения двух любых нормальных колебаний существует зависимость, которая играет важную роль в теории. Эта зависи-

мость называется условием *ортогональности нормальных координат* (или нормальных колебаний).

Выведем условие ортогональности в общем виде.

Систему уравнений для определения амплитуд или форм нормальных колебаний частоты ω_p можно записать так:

$$\sum_{s=1}^n (\alpha_{ls} - \omega_p^2 \beta_{ls}) A_{ps} = 0 \quad (77.1)$$

для $l = 1, 2, \dots, n$, которую можно прямо получить из (74.2), подставив в него (74.15).

Такую же систему можно записать и для другой частоты ω_j :

$$\sum_{s=1}^n (\alpha_{ls} - \omega_j^2 \beta_{ls}) A_{js} = 0 \quad (77.2)$$

для $l = 1, 2, \dots, n$. Умножим каждое равенство из (77.1) на A_{jl} , а каждое равенство из (77.2) на A_{pl} , затем сложим первую систему равенств и получим:

$$\sum_{l,s=1}^n \alpha_{ls} A_{ps} A_{jl} = \omega_p^2 \sum_{l,s=1}^n \beta_{ls} A_{ps} A_{jl}. \quad (77.3)$$

Складывая так же вторую систему, получившуюся из (77.2), имеем:

$$\sum_{l,s=1}^n \alpha_{ls} A_{js} A_{pl} = \omega_j^2 \sum_{l,s=1}^n \beta_{ls} A_{js} A_{pl}. \quad (77.4)$$

Так как по (73.9) $\alpha_{ls} = \alpha_{sl}$, а по (73.13) $\beta_{sl} = \beta_{ls}$, то суммы, стоящие с правой и с левой стороны равенств (77.3) и (77.4), одинаковы, поэтому при вычитании (77.3) из (77.4) получим:

$$(\omega_j^2 - \omega_p^2) \sum_{l,s=1}^n \beta_{ls} A_{js} A_{pl} = 0 \quad (77.5)$$

для двух любых значений p и j . Если $\omega_j^2 \neq \omega_p^2$, то

$$\sum_{l,s=1}^n \beta_{ls} A_{js} A_{pl} = 0, \quad (77.6)$$

для любых пар значений $j \neq p$. Подставляя это в одну из формул (77.4) или (77.3), можем записать равенство

$$\sum_{l,s=1}^n \alpha_{ls} A_{js} A_{pl} = 0. \quad (77.7)$$

Условия (77.6) и (77.7), наложенные на амплитуды (или формы) двух нормальных колебаний, называются *условиями ортогональности* нормальных колебаний. Очевидно, что эти же условия можно записать и для коэффициентов распределения нормальных колебаний:

$$\sum_{l,s=1}^n \beta_{ls} k_{js} k_{pl} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{l,s=1}^n \alpha_{ls} k_{js} k_{pl} = 0. \quad (77.8)$$

Условия ортогональности можно записать в более простом виде, ясно показывающем их физическую сущность. Из основных уравнений (74.2) видно, что величина $\sum_{s=1}^n \alpha_{ls} x_s = F_l$ представляет *упругую силу*, действующую на координату с номером l . Тогда условия (77.7) можно записать так:

$$\sum_{l=1}^n A_{pl} F_{jl} = 0 \quad (77.9)$$

при $j \neq p$, где $F_{jl} = \sum_{s=1}^n \alpha_{ls} A_{js}$, которая является амплитудой упругой силы координаты l при j -м собственном колебании. Теперь условие (77.9) можно сформулировать так: форма колебаний смещения p -й частоты ортогональна форме колебаний упругих сил j -й частоты.

Аналогично можно истолковать и условия (77.6) — форма колебаний смещения p -й частоты будет ортогональна форме «сил инерции» j -й частоты.

В системе, обладающей только упругой связью, все $\beta_{ls} = 0$ при $s \neq l$, и поэтому матрица коэффициентов кинетической энергии будет диагональна. В этом случае условие ортогональности (77.8) представляет сумму по одному индексу:

$$\sum_{s=1}^n \beta_{ss} k_{ps} k_{js} = 0 \quad (77.10)$$

для всех p и j при $j \neq p$.

Условиями ортогональности часто пользуются при исследовании собственных колебаний системы. Отметим, что при $j = p$ величины

$$\sum_{l,s=1}^n \beta_{ls} k_{js} k_{jl} \quad \text{и} \quad \sum_{l,s=1}^n \alpha_{ls} k_{js} k_{jl} \quad (77.11)$$

не равны нулю; физический смысл этих величин будет выяснен в следующем параграфе.

Заметим кстати, что любое из уравнений (77.1) представляет формулу для определения собственной частоты

$$\omega_j^2 = \frac{\sum_{s=1}^n \alpha_{ls} k_{js}}{\sum_{s=1}^n \beta_{ls} k_{js}}. \quad (77.12)$$

Если известно распределение нормального колебания, то можно при помощи (77.12) определить частоту.

§ 78. Энергия собственных колебаний и энергия нормального колебания

Предположим, что в системе имеет место одно нормальное колебание или собственные колебания состоят из колебаний одной частоты. Пусть

$$x_s = a_j k_{js} \cos(\omega_j t + \varphi),$$

где $s = 1, 2, \dots, n$ и a_j есть амплитуда нормального колебания с частотой ω_j . Тогда полная энергия колебаний будет равна кинетической энергии колебаний в тот момент, когда скорость

$$\dot{x}_s = -\omega_j a_j k_{js} \sin(\omega_j t + \varphi_j)$$

всех координат достигнет максимума; это будет в момент t_0 , который удовлетворяет условию $\omega_j t_0 + \varphi_j = \frac{\pi}{2} m$, где m — любое нечетное целое число.

Кинетическая энергия при любом движении по (73.11)

$$T = \sum_{s, l=1}^n \beta_{ls} \dot{x}_s \dot{x}_l.$$

Так как при одном нормальном колебании все координаты системы колеблются в фазе или противофазе, то скорости всех координат принимают максимальное значение в положении равновесия в один и тот же момент времени t_0 . Очевидно, что кинетическая энергия нормального колебания с индексом j в момент t_0 будет равна полной энергии колебаний E_j . Следовательно,

$$E_j = T(t_0) = a_j^2 \omega_j^2 \sum_{s, l=1}^n \beta_{ls} k_{js} k_{jl}. \quad (78.1)$$

По физическому смыслу энергии величина суммы, стоящей справа в (78.1) или (77.11), не может быть равна нулю. Обозначим

$$B_j = 2 \sum_{s, l=1}^n \beta_{ls} k_{js} k_{jl} \quad (78.2)$$

и заметим, что величина B_j имеет размерность коэффициентов β_{sl} . Например, для механической системы, если x_s — координаты смещений, то B_j имеют размерность массы; для электрической системы, если x_s — заряды, то B_j имеют размерность коэффициентов индуктивности, и т. д.

Энергию нормального колебания можно записать так:

$$E_j = \frac{1}{2} B_j a_j^2 \omega_j^2. \quad (78.3)$$

Если x — координата смещения, то $a\omega$ — скорость, а B — масса. Поэтому в общем случае будем называть величину B_j «эффективной массой» нормальной координаты номера j , понимая, что в зависимости от выбора координат физическое значение B_j будет различно.

Также можно доказать, что полная энергия нормального колебания будет равна потенциальной энергии в момент t_1 , который определяется из условия

$$\omega_j t_1 + \Phi_j = m\pi, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots$$

В момент t_1 все координаты x_s будут находиться в наибольшем отклонении от положения равновесия, и скорость всех координат равна нулю. Из этого следует, что

$$E_j = a_j^2 \sum_{s, l=1}^n a_{sl} k_{js} k_{jl}. \quad (78.4)$$

Очевидно, что сумма, стоящая справа, не может быть равна нулю. Аналогично «эффективной массе» нормальной координаты можно ввести «эффективную жесткость» нормальной координаты:

$$S_j = 2 \sum_{s, l=1}^n a_{sl} k_{js} k_{jl}. \quad (78.5)$$

И тогда полная энергия нормального колебания с амплитудой a_j будет равна:

$$E_j = \frac{1}{2} S_j a_j^2. \quad (78.6)$$

Сравнивая (78.3) и (78.6), получаем:

$$B_j \omega_j^2 = S_j,$$

или

$$\omega_j^2 = \frac{S_j}{B_j} = \frac{\sum_{s, l=1}^n a_{sl} k_{js} k_{jl}}{\sum_{s, l=1}^n \beta_{sl} k_{js} k_{jl}}, \quad (78.7)$$

формулу, похожую по виду на формулу для собственной частоты системы с одной степенью свободы.

Можно показать, что кинетическая энергия собственного колебания системы в общем виде равна сумме энергий отдельных нормальных колебаний.

Действительно, пусть имеются собственные колебания системы в таком виде:

$$x_s = \sum_{j=1}^n a_j k_{js} \cos(\omega_j t + \varphi_j).$$

Тогда кинетическая энергия этих колебаний будет

$$\begin{aligned} T &= \sum_{s, l=1}^n \beta_{sl} \dot{x}_s \dot{x}_l = \\ &= \sum_{s, l=1}^n \beta_{sl} \cdot \sum_{j=1}^n a_j k_{js} \omega_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) \sum_{p=1}^n a_p k_{pl} \omega_p \sin(\omega_p t + \varphi_p) = \\ &= \sum_{j, l=1}^n a_j a_p \omega_j \omega_p \sin(\omega_j t + \varphi_j) \sin(\omega_p t + \varphi_p) \cdot \sum_{s, l=1}^n \beta_{sl} k_{js} k_{pl}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условия ортогональности (77.6), получаем:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=1}^n a_j^2 \omega_j^2 \sin^2(\omega_j t + \varphi_j) \cdot \sum_{s, l=1}^n \beta_{ls} k_{js} k_{jl} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n B_j a_j^2 \omega_j^2 \sin^2(\omega_j t + \varphi_j). \quad (78.8) \end{aligned}$$

Таким образом, кинетическая энергия собственных колебаний любого вида есть сумма энергий отдельных нормальных колебаний. Подчеркнем, что это есть следствие *ортогональности* нормальных колебаний (или координат). Таким же образом можно показать, что потенциальная энергия собственных колебаний равна сумме потенциальных энергий отдельных нормальных колебаний.

Если все нормальные координаты будут иметь одинаковые амплитуды, то энергия каждой из них будет пропорциональна по (78.6) «эффективной» жесткости S_j по этой же координате.

§ 79. Изменение масштабов нормальных координат

Определение величины нормального колебания (координаты) частоты ω_j было сделано совершенно произвольно — за единицу измерения нормальной координаты ξ_j мы приняли единицу амплитуды колебаний той же частоты в первой координате x_1 . Величина амплитуды нормальной координаты ξ_j при таком выборе ее «масштаба» была равна a_j , амплитуде колебаний гармонической составляющей колебаний частоты ω_j в координате x_1 . Напомним, что

поэтому в матрице коэффициентов распределения (74.17) в первом столбце все элементы были равны единице, $k_{j1} = 1$. Очевидно, что можно совершенно различным образом выбрать единицу нормальной координаты, так как физически задано только отношение амплитуд колебаний данной частоты к *одной* из них. Можно было бы принять за единицу нормальной координаты единицу амплитуды в какой-то другой координате x_i , притом различной для различных частот; можно было бы считать, что единица нормальной координаты просто в определенное число раз больше или меньше амплитуды колебаний соответствующей частоты в первой координате x_1 , и т. д. Этим обстоятельством часто пользуются в теории колебаний для упрощения формул и выкладок. Например, можно так выбрать единицы измерения нормальных координат, чтобы «эффективные массы» нормальных координат в новом масштабе имели *одинаковую* для всех нормальных координат величину.

Пусть амплитуда каждой нормальной координаты в новом масштабе будет b_j и пусть она связана с a_j следующим соотношением:

$$b_j = \sqrt{\frac{B_0}{B_j}} a_j, \quad (79.1)$$

где B_0 — некоторая произвольная постоянная величина, имеющая размерность B_j . Очевидно, что произвол в выборе единицы здесь остается — произвольна величина B_0 . Тогда по (78.3) полная энергия нормального колебания, в новых координатах будет

$$E_j = \frac{1}{2} B_0 \omega_j^2 b_j^2. \quad (79.2)$$

Следовательно, в этом масштабе нормальных координат оказывается, что если все нормальные координаты имеют одинаковую амплитуду, то полная энергия каждого нормального колебания пропорциональна квадрату его частоты.

Амплитуду гармонического колебания частоты ω_j , входящего в обычную координату x_s , равную $k_{js}a_j$, можно записать так:

$$k_{js}a_j = k_{js} \sqrt{\frac{B_0}{B_j}} \cdot b_j = \varepsilon_{js} b_j, \quad (79.3)$$

где обозначено

$$\varepsilon_{js} = \sqrt{\frac{B_0}{B_j}} k_{js}. \quad (79.4)$$

В новом масштабе нормальных координат коэффициенты распределения имеют матрицу ε_{js} , в которой все элементы, вообще говоря, отличны от единицы. Первая строка этой матрицы содержит элементы

$$\varepsilon_{j1} = \sqrt{\frac{B_0}{B_j}}. \quad (79.5)$$

Условия ортогональности нормальных координат также могут быть записаны и для ε_{js} . Действительно, умножим первое равенство (77.8) на

$$\overline{\sqrt{\frac{B_0}{B_j} B_p}},$$

учтем (79.4) и получим:

$$\sum_{l=1}^n \beta_{sl} \varepsilon_{js} \varepsilon_{pl} = 0$$

при $j \neq p$.

Умножив (78.2) на B_0 и разделив на B_j , условие равенства «эффективных масс» нормальных координат в этом масштабе можно записать так:

$$2 \sum_{s, l=1}^n \beta_{sl} \varepsilon_{js} \varepsilon_{jl} = B_0, \quad (79.6)$$

где по формуле (79.4) введены новые коэффициенты распределения.

Пользуясь нормальными координатами, соответствующими матрице ε_{js} , можно значительно упростить вычисления собственных колебаний.

Очевидно, возможны и другие способы подбора масштабов нормальных координат. Например, можно так выбрать масштаб нормальных координат, чтобы энергия нормального колебания была пропорциональна квадрату амплитуды; для этого введем новые коэффициенты распределения:

$$\delta_{js} = \sqrt{\frac{S_0}{S_j}} k_{js}, \text{ где } S_0 \text{ — постоянная величина.}$$

§ 80. Примеры нормальных координат

1. Струна с бусинками

Рассмотрим нормальные координаты и нормальные колебания на примере, который мы разбирали в § 75.

Формулы преобразования от обычных координат x к нормальным координатам ξ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{(\sqrt{5}-1)(x_1+x_3)+4x_2}{4\sqrt{5}}, & \xi_2 &= \frac{x_1-x_3}{2}, \\ \xi_3 &= \frac{(1+\sqrt{5})(x_1+x_3)-4x_2}{4\sqrt{5}}, \end{aligned} \quad (80.1)$$

они получены после подстановки коэффициентов распределения (75.10) в (76.2).

Распределение амплитуд нормальных колебаний, которое можно представить при помощи матрицы k_{js} (75.10), показано на рис. 215 и 216. Только следует считать, что $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ или каждое нормальное колебание имеет в первой координате амплитуду, равную единице.

Можно легко убедиться, что условия ортогональности (77.8) соблюдаются. Для пары произведений, включающих второе (ω_2) нормальное колебание, это очевидно, ибо амплитуда второй координаты (x_2) всегда равна нулю. Для произведения первой и третьей частоты условие (77.8) также выполняется:

$$\sum_{s=1}^3 \beta_{ss} k_{1s} k_{3s} = m \left[\frac{1}{2} - \frac{(1+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{4} + \frac{1}{2} \right] = 0.$$

Из условий ортогональности следует, что любая произвольная форма струны, состоящая из трех отрезков, всегда может быть однозначно представлена суммой трех собственных форм, соответствующих нормальным колебаниям с определенными амплитудами. Коэффициенты в выражении

для кинетической энергии имеют следующие значения:

$$\beta_{11} = \frac{m}{2}, \quad \beta_{22} = m, \quad \beta_{33} = \frac{m}{2}, \quad (80.2)$$

$$\beta_{sl} = 0, \quad \text{если } s \neq l,$$

так как

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2. \quad (80.3)$$

«Эффективные массы» (78.2) различных нормальных колебаний имеют следующие значения:

$$B_1 = 2 \sum_{s=1}^3 \beta_{ss} k_{1s}^2 = 2m \left[\frac{1}{2} + \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} + \frac{1}{2} \right] = m(5 + \sqrt{5}),$$

$$B_2 = 2 \sum_{s=1}^3 \beta_{ss} k_{2s}^2 = 2m \left[\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \right] = 2m, \quad (80.4)$$

$$B_3 = 2 \sum_{s=1}^3 \beta_{ss} k_{3s}^2 = 2m \left[\frac{1}{2} + \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4} + \frac{1}{2} \right] = m(5 - \sqrt{5}).$$

Если каждое нормальное колебание будет иметь амплитуду a , то энергия колебаний по (78.1), (75.7) и (75.2) будет:

$$E_1 = \frac{1}{2} m(5 + \sqrt{5}) \omega_1^2 a^2 = \frac{1}{8} m(5 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) n_1^2 a^2 = \frac{F}{2l}(5 - \sqrt{5}) a^2,$$

$$E_2 = m \omega_2^2 a^2 = \frac{F}{2l} a^2,$$

$$E_3 = \frac{1}{2} m(5 - \sqrt{5}) \omega_3^2 a^2 = \frac{1}{2} m(5 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) n_1^2 \frac{a^2}{4} = \frac{F}{2l}(5 + \sqrt{5}) a^2.$$

Энергия второго колебания будет наименьшей.

Полезно представить себе распределение нормальных колебаний в таком масштабе, при котором каждая нормальная координата будет иметь однаковую «эффективную массу», например $B_0 = m$. Тогда матрица ε_{js} на основании (75.10), (79.4) и (80.4) будет иметь следующий вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{5}} & \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5} + \sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{5}} & \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5} - \sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{5}} \end{vmatrix}. \quad (80.5)$$

Формулы преобразования от нормальных координат $\xi'_j = b_j \cos(\omega_j t + \varphi_j)$ к обычным будут такими:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{5}} \xi'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \xi'_2 + \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{5}} \xi'_3, \\x_2 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5} + \sqrt{5}} \xi'_1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5} - \sqrt{5}} \xi'_3, \\x_3 &= \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{5}} \xi'_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \xi'_2 + \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{5}} \xi'_3.\end{aligned}\quad (80.6)$$

Формы колебаний струны, соответствующие одинаковым величинам амплитуд нормальных колебаний при данных масштабах нормальных координат, показаны на рис. 219.

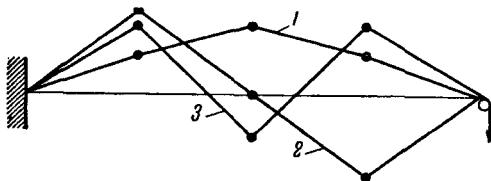


Рис. 219.

туд нормальных колебаний при данных масштабах нормальных координат, показаны на рис. 219.

2. Анизотропный осциллятор

Нормальные колебания в системе со многими степенями свободы можно ясно представить себе, рассматривая собственные колебания анизотропного гармонического осциллятора. Механическая модель такого осциллятора состоит из грузика, закрепленного на шести пружинах (рис. 220). Состояние равновесия совпадает с началом прямоугольной системы координат (x, y, z) , вдоль оси x натянуты пружины с жесткостью k_1 , вдоль оси y — с жесткостью k_2 , по оси z — с жесткостью k_3 . Далее имеются в виду только малые колебания грузика, амплитуда которых очень мала по сравнению с длиной пружин. Только при отклонении грузика из положения равновесия вдоль осей координат (вдоль пружин) возвращающая сила будет направлена к положению равновесия. При всех иных смещениях возвращающая сила не будет направлена к положению равновесия. Направления осей координат называются *главными направлениями*, по которым деформация и упругие возвращающие силы направлены вдоль одной и той же прямой.

Только после отклонения и толчка вдоль одной из осей координат (вдоль какой-либо пары пружинок) грузик будет совершать чистые гармонические колебания вдоль этой прямой; с частотой $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k_1}{m}}$ — по оси x , $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_2}{m}}$ — по оси y и $\omega_3 = \sqrt{\frac{2k_3}{m}}$ — по оси z . Эти три оси и будут, по определению, *осьми нормальных координат* (они и ортогональны). Здесь геометрическое условие взаимной перпендикулярности полностью соответствует условию ортогональности (77.8).

Уравнение колебаний в системе координат x , y , z будет иметь очень простой вид, так как эта система нормальных координат

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + 2k_1x &= 0, \\ m\ddot{y} + 2k_2y &= 0, \\ m\ddot{z} + 2k_3z &= 0. \end{aligned}$$

Для другой системы, например прямоугольной, оси которой не совпадают с направлением пружин, в уравнении присутствуют члены упругой связи,

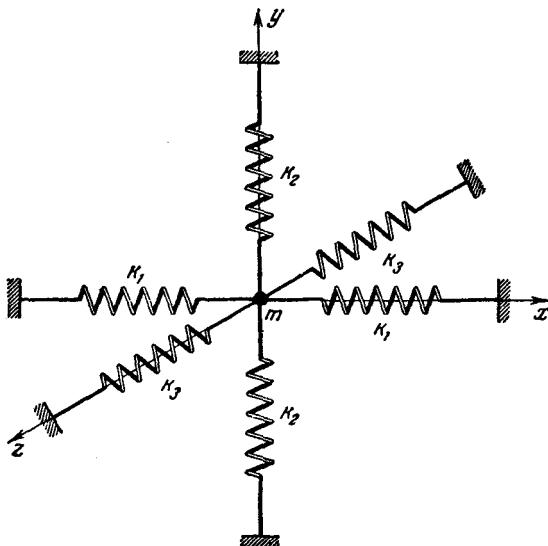


Рис. 220.

а вообще для какой-то косоугольной системы координат в уравнениях были бы члены упругой и инерциальной связи.

После любого колебания грузика при любых начальных условиях проекции на оси координат состоят из трех гармонических колебаний с тремя частотами ω_1 , ω_2 и ω_3 , а гармонические колебания одной частоты во всех трех проекциях имеют одну и ту же фазу и определенные отношения между амплитудами (распределение). Так будет всегда при рассмотрении колебаний относительно любой системы координат, за исключением нормальной (x , y , z). Здесь любые колебания дают только гармонические проекции на оси координат с частотой ω_1 — по оси x , ω_2 — по оси y и ω_3 — по оси z . Фазы и амплитуды этих колебаний вообще различны и зависят только от начальных условий. Любое движение состоит из трех взаимно перпендикулярных колебаний на соответствующих пружинках, имеющих различные частоты, все эти колебания взаимно не связаны друг с другом; это видно из устройства системы. При движении, например, параллельно оси x на грузик действуют силы только пружинок вдоль этой оси, силы остальных пружинок остаются постоянными и направлены перпендикулярно движению, следовательно, они не оказывают влияния на закон движения.

Заметим, что в данном примере нормальные координаты найти просто, они сразу видны, не так как, например, в случае колебаний бусинок на струне. Хотя если бы расположение пружинок в модели анизотропного осциллятора было не под прямым углом, тогда отыскать нормальные координаты без вычислений значительно труднее. Возьмем, например, такое закрепление грузика на четырех пружинах, как показано на рис. 221: три пружины закреплены на плоскости, одна сверху, все пружины различной жесткости. Можно показать, что в этом случае имеются три взаимно перпендикулярных главных направления, смещения вдоль которых будут вызывать силу, направленную к положению равновесия. Эти три направления и будут осьми нормальных координат, которые не так легко определить при различных жесткостях пружин, при различном закреплении концов. Для этого нужны вычисления, аналогичные тем, которые мы делаем при определении нормальных координат.

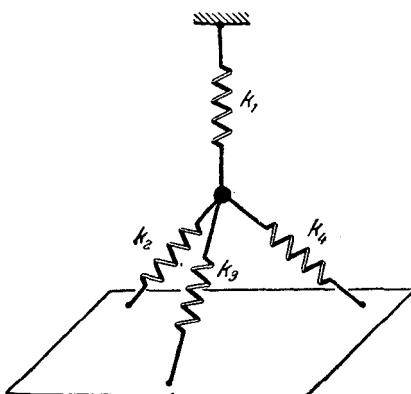


Рис. 221.

§ 81. Случай равенства собственных частот системы

Следует отметить, что все наши рассуждения в предыдущих параграфах справедливы только в том случае, если все ω_i различные, т. е. уравнение частот не имеет кратных корней. Условие ортогональности в таком виде, как это записано в (77.8), и все следствия из него имеют силу только при различных собственных частотах.

Если две собственные частоты одинаковы, то из уравнений для амплитуд собственного колебания этой частоты нельзя определить отношение амплитуд различных координат к *одной* из них, так как детерминант системы (74.11) будет равен нулю *). В этом случае можно произвольно задать *две* амплитуды и определить все остальные в зависимости от этих двух. Амплитуда колебаний этой частоты в остальных координатах будет состоять из суммы двух членов, каждый из которых находится в определенном отношении к *одной* из заданных амплитуд.

Допустим, в системе уравнений (74.9) мы выберем амплитуды в двух координатах, например \bar{A}_{p1} и \bar{A}_{p2} , за основные, тогда

*) Математическое исследование показывает, что если мы имеем k -кратный корень уравнения частот (74.5), то все миноры, порядок которых выше $n - k$, равны нулю, а среди миноров порядка $n - k$ есть по крайней мере один отличный от нуля (см., например, Б у л г а к о в, Колебания, Госиздат, 1954, стр. 575).

этую систему можно записать так:

$$\sum_{s=3}^n (a_{ls} - \omega_p^2 \beta_{ls}) \bar{A}_{ps} = -(a_{l1} - \omega_p^2 \beta_{l1}) \bar{A}_{p1} - (a_{l2} - \omega_p^2 \beta_{l2}) \bar{A}_{p2}, \quad (81.1)$$

где $l = 3, 4, \dots, n$. Так как величина ω_p^2 является двухкратным корнем уравнения (74.5), то можно показать, что детерминант системы (81.1) отличен от нуля (см. примечание на стр. 319). Решая алгебраическую систему относительно $n - 2$ переменных, получим:

$$\bar{A}_{ps} = k_{ps} \bar{A}_{p1} + k'_{ps} \bar{A}_{p2} \quad (81.2)$$

для $s = 3 \dots n$. Все коэффициенты в системе уравнений (81.1) действительны, следовательно, и величины k_{ps} и k'_{ps} действительны. Поэтому, если

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{A}_{p1} e^{i\omega_p t} + \bar{A}_{p1}^* e^{-i\omega_p t} = A_{p1} \cos(\omega_p t + \varphi_1), \\ x_2 &= \bar{A}_{p2} e^{i\omega_p t} + \bar{A}_{p2}^* e^{-i\omega_p t} = A_{p2} \cos(\omega_p t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (81.3)$$

где $\bar{A}_{p1} = \frac{1}{2} A_{p1} e^{i\varphi_1}$, $\bar{A}_{p2} = \frac{1}{2} A_{p2} e^{i\varphi_2}$, то колебания в любой s -й координате будут:

$$x_{ps} = k_{ps} A_{p1} \cos(\omega_p t + \varphi_1) + k'_{ps} A_{p2} \cos(\omega_p t + \varphi_2). \quad (81.4)$$

Совершенно ясно, что таким же путем можно вывести и представить себе колебания в системе, если несколько собственных частот будут равны или когда уравнение (74.5) имеет корень высокой кратности.

Заметим, что каждая из совокупности амплитуд колебаний частоты ω_p , которые можно представить так:

$$\begin{aligned} A_{p1}(1, 0, k_{p3}, \dots, k_{pn}), \\ A_{p2}(0, 1, k'_{p3}, \dots, k'_{pn}), \end{aligned} \quad (81.5)$$

будет ортогональна к форме собственных колебаний любой (некратной) частоты ω_j , но между собой эти формы колебаний частоты ω_p вообще не ортогональны. Действительно, повторяя выкладки § 77, мы видим, что для этих форм из (77.5) не следует (77.6), так как частоты равны.

Однако всегда можно взять в качестве второй формы такую их линейную комбинацию, которая будет ортогональна к одной из них. Действительно, примем за ортогональную следующую форму, которая имеет компоненты:

$$A'_{ps} = A_{p1} k_{ps} - \gamma A_{p2} k'_{ps}. \quad (81.6)$$

Подберем множитель γ так, чтобы форма с амплитудами A'_{ps} была ортогональна к форме с амплитудами $A_{p1} k_{ps}$. Для этого, в соответ-

ствии с формулой (77.8), умножим (81.6) на $A_{p1}k_{pl}$, затем на β_{sl} и просуммируем все по s и l , и потребуем, чтобы эта сумма была равна нулю, или

$$\sum_{s,l} \beta_{sl} A_{p1}^2 k_{pl} k_{ps} - \gamma \sum_{s,l} \beta_{sl} A_{p2} A_{p1} k_{pl} k'_{ps} = 0. \quad (81.7)$$

Следовательно, если выберем в (81.7) величину

$$\gamma = \frac{A_{p1} \sum_{s,l} \beta_{sl} k_{pl} k_{ps}}{A_{p2} \sum_{s,l} \beta_{sl} k_{pl} k'_{ps}}, \quad (81.8)$$

то форма с амплитудами A'_{ps} будет ортогональна к форме с амплитудами $A_{p1}k_{ps}$, и, таким образом, формы всех собственных колебаний будут ортогональны друг к другу, как и в случае различных частот.

Все, что было сказано здесь о колебаниях в случае равенства двух собственных частот, можно распространить аналогичным путем на случаи равенства трех, четырех и т. д. собственных частот.

Хорошим простейшим примером системы с равными собственными частотами является обыкновенный «конический» маятник (рис. 222); грузик, подвешенный на нити, шарик на дне сферической чаши *). Этот маятник имеет две степени свободы и, очевидно, две равные частоты $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. После любого возмущения движение грузовика будет происходить по эллипсу, проекция которого на любую вертикальную плоскость представляет гармоническое колебание с частотой ω . Нормальные координаты могут лежать в любых двух плоскостях, пересекающихся по вертикали, проходящей через точку подвеса. Эти плоскости можно выбрать ортогональными; тогда «формы» собственных колебаний будут ортогональны. В данном случае условие ортогональности (77.8) имеет и обычный геометрический смысл.

Приведем пример электрической системы с равными частотами.

Представим себе электрическую цепь, схема которой показана на рис. 223. Это система с тремя степенями свободы. Подберем параметры так, чтобы $1/\sqrt{LC}$ равнялось одной из собственных частот парциальной системы, получившейся из основной при

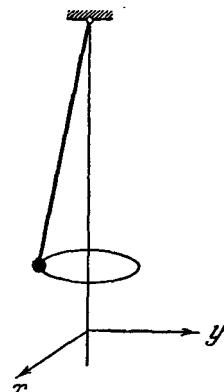


Рис. 222.

*) Имеются в виду малые колебания.

$q_3 = 0$. Разорвем цепь, соответствующую \dot{q}_3 , и пусть собственные частоты оставшейся системы будут

$$\omega_1 \text{ и } \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Тогда легко видеть, что при $q_1 = q_2 = 0$ частота оставшегося контура (I) будет $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Допустим, что по какой-то причине возникли собственные колебания в этом контуре; они не возбудят никаких колебаний в остальной части электрической системы.

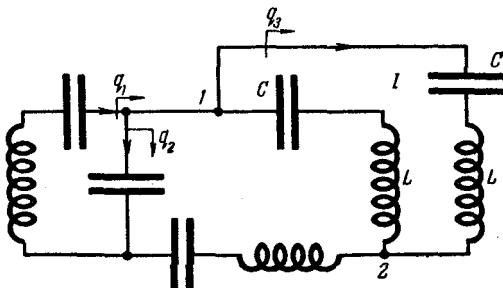


Рис. 223.

Действительно, в этом контуре ток частоты ω не создает напряжения между точками I и 2 , так как сопротивления емкости ($1/\omega C$) и индуктивности (ωL) равны, а фазы падения напряжения на них противоположны. С другой стороны, если в части системы, не включающей контур I , возникнут колебания с собственной частотой

$$\omega_2 = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

то они также не будут возбуждать колебаний в контуре I по той самой причине. Следовательно, в системе возможны два гармонических колебания с одной частотой ω_2 , причем амплитуды колебаний этой частоты в различных частях системы могут быть совершенно произвольными, вернее, они зависят только от начальных условий.

Если же в системе из двух контуров возникнут колебания второй частоты ω_1 , то тогда контур I уже не будет изолирован от этих колебаний и, следовательно, третья собственная частота системы (рис. 223) будет отлична от ω_1 , и для нее имеет место обычное распределение амплитуд. Достаточно задать амплитуду колебаний этой частоты в одной ветви системы и амплитуды во всех остальных будут определены.

Полезно рассмотреть еще колебания «вырожденного» анизотропного осциллятора *). Если пары пружин (см. рис. 220) вдоль осей x и z будут одинаковы, то и собственные частоты при колебаниях вдоль этих осей будут также одинаковы ($\omega_1 = \omega_3 = \omega$), но не равны частоте колебаний вдоль оси y . Любое направление в плоскости (x, z) будет главным; здесь смещение будет совпадать по направлению с возвращающей силой, и коэффициент пропорциональности между силой и смещением будет один и тот же, равный $2k_1 = 2k_3$. Следовательно, колебания после любого отклонения в этой плоскости будут иметь одну и ту же частоту ω . Они будут совершенно подобны колебаниям конического маятника.

Любое направление в плоскости (x, z) нормальное, и координата вдоль оси y является нормальной. Очевидно, что такой осциллятор имеет бесконечно много систем нормальных ортогональных координат: любая система координат, у которой одна ось совпадает с осью y , а две другие лежат в плоскости (x, z) , очевидно, является нормальной.

Напомним, что уравнения движения анизотропного осциллятора, записанные в какой-то иной системе координат (не нормальной и ортогональной), будут содержать члены связи и ничем не будут по общему виду отличаться от уравнений других колебательных систем с тремя степенями свободы.

§ 82. Равенство нулю одной или нескольких собственных частот

Что означает, если при решении уравнения для собственных частот получился один или несколько нулевых корней?

Для выяснения этого лучше всего рассмотреть простые примеры. Нулевые корни будут иметь место при колебаниях свободной, незакрепленной системы, например для систем, показанных на рис. 224. Система из двух связанных пружиной масс (рис. 224, *a*) имеет две степени свободы. Вычисляя обычным способом, формально получаем «две» частоты собственных колебаний

$$\omega_1 = 0 \text{ и } \omega_3 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}.$$

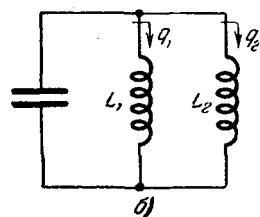


Рис. 224.

*) В физике иногда называют системы с равными собственными частотами «вырожденными».

Фактически мы имеем колебания только с одной частотой ω_2 , а второе собственное колебание с нулевой частотой соответствует равномерному движению всей системы, точнее равномерному движению центра масс системы. Действительно, так как силы, действующие со стороны пружины на массы одинаковы по модулю, то

$$m_2 \ddot{x}_2 + m_1 \ddot{x}_1 = 0$$

или

$$m_2 x_2 + m_1 x_1 = At + B,$$

где A и B — постоянные величины. По определению, $m_2 x_2 + m_1(x_1 + l) = (m_1 + m_2)x_{\text{ц}}$, где l — длина нерастянутой пружины, а $x_{\text{ц}}$ — координата центра масс системы. Поэтому

$$(m_1 + m_2)x_{\text{ц}} = At + B + m_1 l,$$

центр масс может двигаться с постоянной скоростью A . Конечно, если принять за начало отсчета центр массы системы, то мы получим систему с одной степенью свободы, совершающую колебания с частотой ω_2 . Таким образом, здесь мы имеем дело с системой, обладающей одной «колебательной» степенью свободы.

Так же обстоит дело и во втором примере, показанном на рис. 224, б. Постоянный ток любой величины, текущий по контуру,

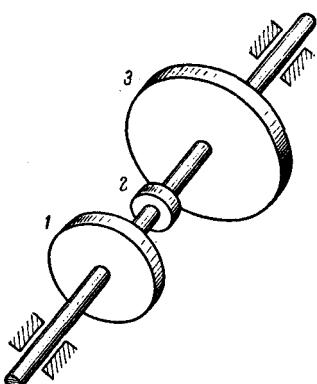


Рис. 225.

составленному из двух индуктивностей L_1 и L_2 , соответствует «колебанию» с нулевой частотой. Это легко проверить расчетом: при постоянном токе во втором контуре заряд на конденсаторе нуль, следовательно, $q_1 = -q_2$. Всегда имеет место равенство $L_1 \dot{q}_1 = L_2 \dot{q}_2$, поэтому в данном случае $\dot{q}_1 = \frac{A}{L_1 + L_2}$, где A — постоянная.

В третьем примере нужно определить собственную частоту кручения трех маховиков на свободно вращающемся в подшипниках валу (рис. 225). Пусть координаты углов поворотов маховиков будут φ_1 ,

φ_2 , φ_3 , а коэффициенты жесткости на кручение участка вала между маховиками 1 и 2 и для участка между маховиками 2 и 3 обозначим соответственно через c_1 и c_2 . Тогда уравнения движения системы будут:

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 - c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 - c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) + c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 + c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) = 0,$$

где I_1 , I_2 и I_3 — моменты инерции маховиков. Легко убедиться, что уравнение частот этой системы имеет нулевой корень. Но гораздо проще установить связь между координатами, просто сложив все уравнения (80.3). Проделав это, получаем:

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\varphi}_1 + I_2\ddot{\varphi}_2 + I_3\ddot{\varphi}_3 &= 0, \\ I_1\varphi_1 + I_2\varphi_2 + I_3\varphi_3 &= At + \text{const}. \end{aligned}$$

Второе условие можно было написать сразу, до составления уравнений, ибо это есть следствие закона сохранения момента количества движения. Так как к валу не приложены внешние моменты, то момент количества движения должен оставаться постоянным. Вал с маховиками может совершать вращение с постоянной скоростью, и собственные колебания маховиков будут двух частот, так как при колебаниях три координаты связаны этим условием. Если вал находился вначале в покое, то маховики будут совершать такое движение, что общий момент количества движения будет равен нулю.

Общее рассмотрение можно провести так: пусть одна из собственных частот равна нулю, тогда соответствующая ей форма «колебаний» может быть определена по (77.1) из системы уравнений:

$$\sum_{s=1}^n a_{ls} A_{0s} = 0 \text{ при } l = 1, 2, \dots, n. \quad (82.1)$$

Величины A_{0s} определяют соотношение между смещениями координат при нулевой «частоте». Все остальные собственные колебания должны быть ортогональны к этому движению. Поэтому, если обозначим сумму всех остальных колебаний координаты x_s через y_s , то должно выполняться следующее условие:

$$\sum_{l, s=1}^n a_{ls} A_{0s} y_l = 0 (*), \quad (82.2)$$

*) Пусть $y_s = \sum_{j=1}^{n-1} A_{js} \cos(\omega_j t + \varphi_j)$; тогда из условия ортогональности для каждой частоты (77.7) следует:

$$\sum_{s=1}^n A_{0s} \sum_{l=1}^n a_{sl} A_{jl} \cos(\omega_j t + \varphi_j) = 0;$$

складывая такие равенства для всех частот, получаем:

$$\sum_{s=1}^n A_{0s} \sum_{l=1}^n a_{sl} \sum_{j=1}^{n-1} A_{jl} \cos(\omega_j t + \varphi_j) = 0$$

или

$$\sum_{l, s=1}^n A_{0s} a_{sl} y_l = 0.$$

Это условие дает одну связь между координатами y_s . Следовательно, независимых координат, совершающих только колебательные движения будет $n - 1$, и нашу систему можно рассматривать как колебательную систему с $n - 1$ степенями свободы, как это мы и видели на предыдущих примерах.

Точно таким же образом, как это было показано в предыдущем параграфе, можно показать, что когда нулевой корень имеет кратность $m > 1$, колебания можно рассматривать как в системе с $n - m$ степенями свободы, «выбрасывая» движения, соответствующие нулевым «частотам»; только при этом следует учитывать ортогональность форм для каждого из кратных корней.

§ 83. Колебания в системе со многими степенями свободы при наличии затухания

Силы трения в механической системе или наличие сопротивления в электрической вызовут затухание собственных колебаний. При очень малом затухании процесс колебаний будет близок к тому, который мы рассматривали ранее, но возбужденные колебания будут с течением времени ослабевать. В теории мы учтем силы трения, линейно зависящие от скоростей, или постоянное («омическое») сопротивление в электрических цепях. Мы рассмотрим здесь только механическую систему, очевидно, что все сказанное относится к любой электрической цепи, содержащей постоянные сосредоточенные параметры (L , R и C).

Систему обобщенных сил трения можно записать следующим образом:

$$Q_s = - \sum_{l=1}^n \gamma_{sl} \dot{x}_l \quad (83.1)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$; эта система при условии $\gamma_{sl} = \gamma_{ls}$ представляет в самом общем виде силы трения в системе.

Работу сил трения за время dt можно представить так:

$$dW = \sum_{s=1}^n Q_s \dot{x}_s dt = - \sum_{s,l=1}^n \gamma_{sl} \dot{x}_l \dot{x}_s dt. \quad (83.2)$$

Силы трения ведут к потере энергии, работа сил трения (83.2) отрицательна. Для того чтобы подчеркнуть это, мы выбрали при определении обобщенных сил трения (83.1) знак минус.

Уравнения движения при наличии сил трения запишутся при помощи уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} + \frac{\partial U}{\partial x_s} = Q_s$$

следующим образом:

$$\sum_{l=1}^n (\beta_{sl}\ddot{x}_l + \gamma_{sl}\dot{x}_l + \alpha_{sl}x_l) = 0 \quad (83.3)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$.

Это — система линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Отыскиваем, как обычно, частное решение в таком виде:

$$x_l = \bar{A}_l e^{\lambda t}. \quad (83.4)$$

Находим систему n алгебраических уравнений для амплитуд \bar{A}_l , подставляя (83.4) в (83.3),

$$\sum_{l=1}^n (\beta_{sl}\lambda^2 + \gamma_{sl}\lambda + \alpha_{sl}) \bar{A}_l = 0, \quad (83.5)$$

причем $s = 1, 2, \dots, n$. Условие совместности однородных уравнений (83.5) относительно \bar{A}_l дает уравнение для определения λ .

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}\lambda^2 + \gamma_{11}\lambda + \alpha_{11} & \dots & \beta_{1n}\lambda^2 + \gamma_{1n}\lambda + \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1}\lambda^2 + \gamma_{n1}\lambda + \alpha_{n1} & \dots & \beta_{nn}\lambda^2 + \gamma_{nn}\lambda + \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (83.6)$$

Решение уравнения (83.6) дает $2n$ значений λ . Так как уравнение имеет действительные коэффициенты, то все комплексные корни будут попарно сопряженными, поэтому обозначим

$$\lambda_j = -\delta_j \pm i\omega_j, \quad (83.7)$$

где δ_j и ω_j — действительные величины. Величину λ_j можно назвать комплексной собственной частотой системы. Можно доказать, что все δ_j будут положительными. Это очевидно и из того, что система не содержит источников энергии и колебания в ней будут затухать.

Заметим, что для колебательных систем, содержащих источники энергии, как, например, для автоколебательных систем, для сложных систем автоматического регулирования в некоторой области изменения переменных вблизи состояния равновесия уравнения движения будут иметь такой же вид, как и (83.3). Но в этом случае уже возможны любые знаки у действительной части комплексной частоты, у δ_j : в системе возможны нарастающие со временем колебания за счет источников энергии, включенных в систему.

Полагая, что все корни λ_j различны, подставляя их в (83.5), получаем так же, как и ранее, уравнения для определения

коэффициентов распределения. Очевидно, что теперь коэффициенты распределения будут комплексны. Определим их так:

$$\bar{A}_{js} = \bar{k}_{js} \bar{A}_{j1}. \quad (83.8)$$

Если $2\bar{A}_{j1} = A_{j1}e^{i\varphi_j}$ и $\bar{k}_{js} = k_{js}e^{i\theta_{js}}$, то, собирая все частные решения, получаем общее решение в таком виде:

$$x_s = \sum_{j=1}^n A_{j1} k_{js} e^{-\delta_j t} \cos(\omega_j t + \theta_{js} + \varphi_j) \quad (83.9)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$.

Колебания каждой координаты представляют сумму затухающих колебаний с n различными частотами. Величины A_{j1} и φ_j определяются начальными условиями. Заметим, что для каждой координаты фазы в гармоническом сомножителе одной и той же частоты ω_j различны из-за наличия θ_{js} .

Расчет собственных частот и собственных колебаний в системе с большим числом степеней свободы (пять или более) представляет очень большую вычислительную работу, которая может быть выполнена различными приемами только с помощью быстродействующих электронных счетных машин.

§ 84. Вынужденные колебания в системе без затухания

Кажется, что эта задача имеет чисто теоретическое значение, однако для решения ряда вопросов, встречающихся в технических приложениях теории колебаний, часто, вследствие сложности анализа вынужденных колебаний с затуханием, рассматривают колебания под действием внешней силы, приложенной к идеальной системе, лишенной трения, так как при некоторых условиях колебания в ней достаточно близки к колебаниям при наличии малого затухания.

Рассмотрим вынужденные колебания, возникающие под действием внешних гармонических сил, приложенных к каждой координате системы. Пусть на все координаты действуют гармонические силы одной частоты p ; тогда уравнения движения в системе по (74.1) примут такой вид:

$$\sum_{l=1}^n (\beta_{sl} \ddot{x}_l + \alpha_{sl} x_l) = F_s e^{ipt} \quad (84.1)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$.

Вынужденные колебания будут происходить в каждой координате с частотой внешней силы, поэтому решения, представляющие эти колебания, можно записать в комплексном виде:

$$x_s = \bar{X}_s e^{ipt}. \quad (84.2)$$

Подставляя (84.2) в систему уравнений (84.1), получим алгебраические уравнения для определения амплитуд \bar{X}_s :

$$\sum_{l=1}^n (\alpha_{sl} - p^2 \beta_{sl}) X_l = F_s \quad (84.3)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$. Решая эти уравнения, получим комплексные амплитуды вынужденных колебаний:

$$X_l = \frac{\sum_s D_{sl} F_s}{D(p)}, \quad (84.4)$$

где $D(p) = |\alpha_{sl} - p^2 \beta_{sl}|$ — детерминант системы (84.1), D_{sl} — алгебраические дополнения элементов $\alpha_{sl} - p^2 \beta_{sl}$ в определителе D . Сравнивая $D(p)$ с уравнением для собственных частот системы (74.5), видим, что при $p = \omega_j$, $D(p) = 0$, поэтому амплитуды колебаний X_l становятся бесконечно большими. В системе имеет место *резонанс*, когда частота внешней силы равна одной из собственных частот. Если, конечно, при данной частоте $p = \omega_j$ числитель $\sum_s D_{sl} F_s \neq 0$.

Рассматривая формулы для амплитуд вынужденных колебаний (84.4), мы видим, что в данном случае целесообразно ввести представление о *коэффициенте взаимной динамической жесткости* между силами и координатами при заданной частоте p . Действительно, величину

$$K_{sl}(p) = \frac{D(p)}{D_{sl}(p)} \quad (84.5)$$

можно толковать как динамическую жесткость координаты с индексом l под действием силы, приложенной к координате с индексом s . Теперь выражение (84.4) можно записать так:

$$X_l = \sum_s \frac{F_s}{K_{sl}}. \quad (84.6)$$

Величина K_{ll} представляет динамическую жесткость системы в обычном смысле по координате номера l .

Следовательно, резонанс будет иметь место тогда, когда динамическая жесткость $K_{sl} = 0$, т. е. когда частота вынужденных колебаний равна одной из частот собственных колебаний. Наоборот, при тех частотах p_0 , при которых $K_{sl}(p_0) \rightarrow \infty$, будет успокоение, координата l будет находиться в покое под действием силы, приложенной по координате s , т. е. будет так называемый *резонанс взаимной динамической жесткости*.

Частоты успокоения p_0 имеют простой физический смысл для обычной динамической жесткости K_{jj} , когда та координата,

на которую действует внешняя сила, находится в покое. Это будет при $K_{jj} \rightarrow \infty$ или при $D_{jj}(p_0) = 0$. Легко убедиться, что $D_{jj}(p_0) = 0$ будет уравнением для определения собственных частот в рассматриваемой системе при закрепленной координате x_j (при $x_j = 0$). Действительно, уравнение $D_{jj}(p_0) = 0$ получится из (74.5) вычеркиванием в детерминанте j -й строки и j -го столбца. Или это будет уравнение частот для системы с $(n - 1)$ степенями свободы, которая получится из (74.2) при $x_j = 0$.

Важно отметить, что если мы будем вызывать колебания тем, что зададим смещение одной какой-то координаты, например $x_j = ae^{ipt}$, то резонанс будет как раз на тех частотах, при которых $D_{jj}(p) = 0$. Действительно, из уравнений (74.2) получаем систему

$$\sum_l (a_{sl} - p^2 \beta_{sl}) x_l = a (p^2 \beta_{sj} - a_{sj}), \quad (84.7)$$

где $s = 1, 2, \dots, n$, кроме $s = j$, а сумма в каждом уравнении также берется по всем x_l , кроме $l = j$. Детерминант этой системы, очевидно, D_{jj} .

Резонанс «токов» и «напряжений» в параллельном контуре (§ 17) представляет частный случай этих общих законов.

Для анализа картины вынужденных колебаний можно применить несколько иной метод определения амплитуд вынужденных колебаний, разлагая внешние силы по формам нормальных колебаний смещений. Поставим такой вопрос: каким образом нужно подобрать амплитуды внешних сил, чтобы распределение амплитуд вынужденных колебаний было такое же, как и при собственном колебании с частотой ω_j , иначе говоря, при котором вынужденные колебания имеют вид:

$$x_s = a_j k_{js} e^{ipt}, \quad (84.8)$$

где k_{js} — коэффициенты распределения собственного колебания частоты ω_j ? Пусть это будут внешние силы:

$$\Phi_s e^{ipt}. \quad (84.9)$$

Подставляя (84.8) и (84.9) в основную систему уравнений (84.3), получаем:

$$\sum_{l=1}^n (a_{sl} - \beta_{sl} p^2) k_{jl} a_j = \Phi_s \quad (84.10)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$. Преобразуем сумму в левых частях уравнений (84.10):

$$a_j \left[\sum_{l=1}^n a_{sl} k_{jl} - p^2 \sum_{l=1}^n \beta_{sl} k_{jl} \right] = \Phi_s \quad (84.11)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$.

Учитывая равенство (77.1), можно (84.11) записать так:

$$a_j(\omega_j^2 - p^2) \sum_{l=1}^n \beta_{sl} k_{jl} = \Phi_s \quad (84.12)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$. Из (84.12) видно, что если на каждую координату с индексом s будет действовать сила, амплитуда которой пропорциональна

$$\sum_{l=1}^n \beta_{sl} k_{jl},$$

то в системе возникнут вынужденные колебания с частотой внешней силы и с распределением амплитуд по координатам таким же, как и у собственного колебания с частотой ω_j .

Оказывается, что в общем случае, когда на каждую координату действует сила с любой амплитудой F_s , совокупность этих амплитуд всегда можно разбить на такие суммы:

$$F_s = \sum_{j=1}^n f_j \sum_{l=1}^n \beta_{sl} k_{jl}. \quad (84.13)$$

Ниже мы докажем эту формулу, а сейчас посмотрим вытекающее из нее следствие.

Каждая амплитуда силы состоит из составляющих, соответствующих собственным колебаниям системы. Если на каждую координату x_s действует только одна составляющая из всех сил, а именно такая:

$$f_j \sum_{l=1}^n \beta_{sl} k_{jl}, \quad (84.14)$$

то по (84.12) амплитуды вынужденных колебаний будут иметь такое же распределение, как и при собственной частоте ω_j , а амплитуда a_j будет равна:

$$a_j = \frac{f_j}{\omega_j^2 - p^2}, \quad (84.15)$$

и поэтому вынужденные колебания по (84.8) можно записать так:

$$x_{js} = \frac{f_j k_{js}}{\omega_j^2 - p^2} e^{ipt}, \quad (84.16)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$. В общем же случае, когда действуют силы с амплитудами (84.13), вынужденные колебания составятся из суммы колебаний (84.16) для всех значений индекса j :

$$x_s = \sum_{j=1}^n x_{js} = e^{ipt} \sum_{j=1}^n \frac{f_j k_{js}}{\omega_j^2 - p^2}, \quad (84.17)$$

или амплитуды \bar{X}_s вынужденных колебаний (84.2) равны:

$$\bar{X}_s = \sum_{j=1}^n \frac{f_j k_{js}}{\omega_j^2 - p^2}. \quad (84.18)$$

Из выражений (84.17) и (84.18) можно сделать ряд существенных выводов. Если частота внешней силы равна одной из собственных частот, то амплитуды колебаний *всех* координат стремятся к бесконечности, — имеют место *резонансные* колебания. Если частота внешней силы близка к одной из собственных, то составляющие амплитуд, соответствующие этой частоте, преобладают над остальными, поэтому распределение амплитуд вынужденных колебаний в этом случае примерно такое же, как и при собственных колебаниях данной частоты. Это будет справедливо и при небольшом затухании в системе. На этом основаны способы определения распределения амплитуд собственных колебаний, основная сущность которых заключается в том, что вызывают вынужденные резонансные колебания, соответствующие данной собственной частоте, и измеряют амплитуды вынужденных колебаний каждой координаты. Существенную роль при анализе вынужденных колебаний играют величины f_j ; действительно, для резонанса необходимо не только равенство $p = \omega_j$, но и условие $f_j \neq 0$. Если частота внешней силы равна собственной, но величина f_j равна нулю, то *резонанса нет*, амплитуды вынужденных колебаний будут иметь конечное значение.

Для того чтобы выяснить физический смысл величин f_j , найдем формулы для определения этих величин по заданным F_s . Умножим (84.13) на k_{ms} и просуммируем по s ; тогда получим:

$$\sum_{s=1}^n k_{ms} F_s = \sum_{s=1}^n k_{ms} \sum_{j=1}^n f_j \sum_{l=1}^n \beta_{sl} k_{jl}.$$

Переменим в правой части порядок суммирования

$$\sum_{s=1}^n k_{ms} F_s = \sum_{j=1}^n f_j \sum_{s, l=1}^n \beta_{sl} k_{jl} k_{ms}. \quad (84.19)$$

Учитывая условие ортогональности (77.8) и определение «эффективной массы» (78.2), можем так записать (84.19):

$$\sum_{s=1}^n k_{ms} F_s = \frac{1}{2} B_m f_m,$$

или, меняя индекс и преобразуя, получаем

$$f_j = \frac{2}{B_j} \sum_{s=1}^n k_{js} F_s. \quad (84.20)$$

Можно доказать и обратно, если имеет место (84.20), то должно быть и (84.13), конечно, при условиях (77.8) и (78.2).

Величины f_j можно назвать «проекциями» совокупности сил F_s на нормальную координату. Из (84.20) видно, что f_j пропорционально работе внешних сил в том случае, когда смещение каждой координаты пропорционально амплитуде собственных колебаний при частоте ω_j . Следовательно, $f_j = 0$ означает, что работа внешних сил при $p = \omega_j$ равна нулю и при этой частоте резонанса нет.

Здесь интересно отметить один важный частный случай. Пусть на систему действует только одна сила F_j (по координате j), а при собственных колебаниях с частотой ω_s амплитуда колебаний координаты x_j равна нулю; в этой точке будет «узел» колебаний смещения. Тогда при $p = \omega_s$ резонанса также не будет. Это легко проверить по формуле (84.20).

При м ер. Определить вынужденные колебания струны, которую мы рассматривали в § 75, если на первую бусинку действует сила

$$F_0 \cos pt,$$

а к остальным не приложено сил. Тогда в принятых обозначениях амплитуды сил равны:

$$F_1 = F_0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0,$$

и, вспомниая матрицу k_{js} (75.10) для данного случая и величину эквивалентных масс (78.2), найдем:

$$f_1 = \frac{2F_0}{m(5 + \sqrt{5})}, \quad f_2 = \frac{2F_0}{m}, \quad f_3 = \frac{2F_0}{m(5 - \sqrt{5})}.$$

Следовательно, вынужденные колебания первой координаты по (84.17) будут:

$$x_1 = \frac{2F_0}{m} \left[\frac{1}{(5 + \sqrt{5})(\omega_1^2 - p^2)} + \frac{1}{\omega_2^2 - p^2} + \frac{1}{(5 - \sqrt{5})(\omega_3^2 - p^2)} \right] \cos pt,$$

и точно таким же путем можно записать колебания второй и третьей координат.

Если же на первую и на третью бусинки действуют две такие силы:

$$F_1 = F_0 \cos pt, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -F_0 \cos pt,$$

то, как легко подсчитать,

$$f_1 = 0 \text{ и } f_3 = 0.$$

Значит, если даже p будет равно ω_1 или ω_3 , то резонанса в системе не будет. Это очевидно и из простых рассуждений: при этих частотах обе координаты x_1 и x_3 совершают колебания в фазе и с одинаковыми амплитудами, а силы действуют в противофазе друг к другу; следовательно, работа одной силы равна и противоположна по знаку другой, внешние силы не совершают работы, колебания не будут возрастать до бесконечности.

§ 85. Вынужденные колебания в системе со многими степенями свободы при наличии трения

Расчет вынужденных колебаний в системе со многими степенями свободы при наличии трения производится методом комплексных амплитуд и с принципиальной стороны не представляет ничего сложного. Однако выкладки с увеличением числа степеней свободы становятся очень громоздкими и сложными. Практически их можно провести для систем с большим числом степеней свободы только с помощью быстродействующих электронных счетных машин.

Уравнения движения при наличии затухания и внешних синусоидальных сил частоты p , действующих на каждую координату, в обозначениях, принятых ранее (83.3), можно записать так:

$$\sum_{l=1}^n (\beta_{sl}\ddot{x}_l + \gamma_{sl}\dot{x}_l + \alpha_{sl}x_l) = \bar{F}_s e^{ip t} \quad (85.1)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$, где \bar{F}_s — величины комплексные, потому что силы, действующие на каждую координату, имеют вообще различные фазы. Вынужденные колебания имеют вид:

$$x_s = \bar{X}_s e^{ip t}, \quad (85.2)$$

причем $s = 1, 2, \dots, n$. Для определения амплитуд \bar{X}_s подставляем (85.2) в (85.1) и получаем систему уравнений

$$\sum_{l=1}^n (-\beta_{sl}p^2 + i\gamma_{sl}p + \alpha_{sl}) \bar{X}_l = \bar{F}_s \quad (85.3)$$

для всех $s = 1, 2, \dots, n$. Если обозначим детерминант системы (85.3) через

$$D(ip) = | -\beta_{sl}p^2 + i\gamma_{sl}p + \alpha_{sl} |, \quad (85.4)$$

то решение системы уравнений (85.3) будет:

$$\bar{X}_s = \frac{\sum_{l=1}^n F_l D_{ls}(ip)}{D(ip)}, \quad (85.5)$$

где $D_{ls}(ip)$ — алгебраическое дополнение элемента детерминанта $D(ip)$, соответствующего скрещению s -го столбца и l -й строки.

Для анализа формул (85.5) преобразуем детерминант (83.6) $D(\lambda)$ следующим образом:

$$D(\lambda) = C \prod_{m=1}^n (\lambda - \lambda_m)(\lambda - \lambda_m^*), \quad (85.6)$$

где C — константа, λ_m — корень полинома $D(\lambda)$ и λ_m^* — сопряженный корень. По определению (83.7) λ_m представляют комплексные собственные частоты системы. Корни, конечно, могут быть и действительными, и кратными, но мы рассмотрим только тот общий случай, когда все корни различны и комплексны, что было уже учтено при написании формулы (85.6).

Если обозначим

$$\lambda_m = -\delta_m + i\omega_m,$$

то

$$(ip - \lambda_m)(ip - \lambda_m^*) = (-p^2 + ip2\delta_m + \delta_m^2 + \omega_m^2) = \\ = \sqrt{(\bar{\omega}_m^2 - p^2)^2 + 4\delta_m^2 p^2} \cdot e^{i\varphi_m},$$

где

$$\bar{\omega}_m^2 = \omega_m^2 + \delta_m^2, \quad \operatorname{tg} \varphi_m = \frac{2\delta_m p}{\bar{\omega}_m^2 - p^2}.$$

Следовательно, детерминант

$$D(ip) = C \prod_{m=1}^n (ip - \lambda_m)(ip - \lambda_m^*)$$

можно записать в таком виде:

$$D(ip) = Ce^{-i\sum_{m=1}^n \varphi_m} \prod_{m=1}^n \sqrt{(\bar{\omega}_m^2 - p^2)^2 + 4\delta_m^2 p^2}.$$

Окончательно, если комплексную величину, стоящую в числителе (85.5),

$$\sum_{l=1}^n F_l D_{ls}(ip),$$

записать так:

$$N_s e^{i\theta_s},$$

то формулы (85.5) для амплитуд вынужденных колебаний будут

$$\bar{X}_s = \frac{N_s e^{i(\theta_s - \sum_{l=1}^n \varphi_l)}}{C \prod_{m=1}^n \sqrt{(\bar{\omega}_m^2 - p^2)^2 + 4\delta_m^2 p^2}}. \quad (85.7)$$

Рассматривая (85.7), можно видеть резонансную зависимость. Нет таких значений p , при которых знаменатель обращается в нуль, нет бесконечных значений амплитуд вынужденных колебаний. Если все ω_m значительно удалены друг от друга и коэффициенты затухания δ_m достаточно малы, то при $p \approx \omega_m$ будет ясно выражен резонансный пик, т. е. амплитуды колебаний при этой

частоте во всех координатах будут иметь большое значение. Сдвиг по фазе будет различный для различных координат.

Если значения δ_m очень малы, то формулы (85.7) будут давать значения, близкие к значениям (84.18), и поэтому распределение амплитуд вынужденных колебаний вблизи резонанса будет почти такое же, как и распределение амплитуд собственного колебания при этой частоте. При больших значениях коэффициентов δ_m это совсем не так и распределение амплитуд при резонансе будет совсем не похоже на распределение амплитуд собственного колебания.

Заметим, что и в тех случаях, когда корни детерминанта $D(\lambda)$ (85.6) могут быть действительными, вид формул не изменяется, изменяется только нумерация корней; если каждому комплексному корню давать свой номер и считать по всем индексам от 1 до $2n$, то формулы имели бы правильную нумерацию корней.

§ 86. Анализ колебаний в системе со многими степенями свободы с помощью преобразования Лапласа

К решению задачи о собственных и вынужденных колебаниях в системе с затуханием удобно применить метод преобразования Лапласа. Ради простоты выкладок сначала рассмотрим частный случай: сила F_j действует только на одну координату x_j , при следующих начальных условиях все $x_l(0) = \dot{x}_l(0) = 0$, за исключением $x_j(0)$ и $\dot{x}_j(0)$. Уравнения (85.1) запишем:

$$\sum_{l=1}^n (\beta_{sl}\ddot{x}_l + \gamma_{sl}\dot{x}_l + \alpha_{sl}x_l) = \delta_{sj}F_s, \quad (86.1)$$

при $s = 1, 2, \dots, n$, величина $\delta_{sj} = 0$ при $s \neq j$ и $\delta_{jj} = 1$. Нужно найти $x_l(t)$ при данной силе F_j и данных начальных условиях. Спектр Лапласа $F_j(t)$ нам известен; пусть он равен $\chi_j(p)$, и предположим, что $x_l(t) \doteq \varphi_l(p)$, тогда систему (86.1) можно записать так:

$$\sum_{l=1}^n (\beta_{sl}p^2 + \gamma_{sl}p + \alpha_{sl})\varphi_l(p) = \delta_{sj}\chi_s(p) + \beta_{sj}[px_j(0) + \dot{x}_j(0)] + \gamma_{sj}x_j(0) \quad (86.2)$$

при $s = 1, 2, \dots, n$.

Учитывая обозначения, принятые в (85.5), получаем спектр решения:

$$\begin{aligned} \Phi_l(p) &= \frac{D_{jl}(p)}{D(p)}\chi_j(p) + \\ &+ [px_j(0) + \dot{x}_j(0)] \sum_{s=1}^n \frac{\beta_{sj}D_{sl}(p)}{D(p)} + x_j(0) \sum_{s=1}^n \frac{\gamma_{sj}D_{sl}(p)}{D(p)} \end{aligned} \quad (86.3)$$

при $l = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрение формулы (86.3) приводит к мысли о *спектрах коэффициентов влияния*, которые можно определить следующим образом: функцию

$$C_{lj}(p) = \frac{D_{jl}(p)}{D(p)} \quad (86.4)$$

называем спектром коэффициента влияния на координату x_l силы F_j или спектр колебаний координаты $x_l(t)$, возникающих под действием силы $F_j(t)$, равен спектру этой силы, умноженному на $C_{lj}(p)$.

Введение таких спектров упрощает формулы (86.3) и придает им простой вид:

$$\varphi_l(p) = C_{lj}(p)\chi_j(p) + P_{lj}(p)x_j(0) + Q_{lj}(p)\dot{x}_j(0), \quad (86.5)$$

где

$$P_{lj}(p) = \sum_{s=1}^n C_{ls}(p)[\beta_{sj}p + \gamma_{sj}] \quad (86.6)$$

представляет спектр собственных колебаний координаты x_l , возникающих вследствие начального смещения координаты x_j на единицу, а функция

$$Q_{lj}(p) = \sum_{s=1}^n C_{ls}(p)\beta_{sj} \quad (86.7)$$

— спектр собственных колебаний l -й координаты, возникающих после возмущения в виде единичной начальной скорости координаты x_j .

Первый член формулы (86.5) представляет спектр не только вынужденных колебаний координаты x_l под действием силы $F_j(t)$, но и сопровождающие собственные колебания, вызванные силой F_j . Вынужденные колебания, как уже было указано в § 28, соответствуют полюсам спектра $\chi_j(p)$; а собственные сопровождающие колебания — полюсам спектра $C_{lj}(p)$, или, по (86.4), нулям функции $D(p)$.

Если спектр $C_{lj}(p)$ представляет функцию $A_{lj}(t)$, то часть колебаний $x_l(t)$, имеющая спектр $C_{lj}(p)\chi_j(p)$, может быть записана так:

$$\int_0^\infty A_{lj}(\xi)F_j(t-\xi)d\xi. \quad (86.8)$$

Это колебания координаты $x_l(t)$, вызванные силой $F_j(t)$. Функция $A_{lj}(t)$ представляет колебания той же координаты, возникающие под действием предельной ударной силы единичного импульса (см. § 27) или когда $F_j(t) = \delta(t)$. Действительно, подставляя это

в (86.8), видим, что

$$\int_0^\infty A_{lj}(\xi) \delta(t - \xi) d\xi = A_{lj}(t). \quad (86.9)$$

С другой стороны, если $F_j(t) = \delta(t)$, то $F_j(t) \doteq 1$ или $\chi_j(p) = 1$, и первый член в (86.5) имеет вид $C_{lj}(p)$, который, по определению, является спектром $A_{lj}(t)$.

Когда внешняя сила $F_j(t) = \sum_k a_k e^{p_k t}$, тогда спектр $\chi_j(p)$ будет иметь простые полюсы в точках p_k , и вынужденные колебания $x_l(t)$ будут представляться таким образом: $\sum_k b_k e^{p_k t}$, где величины b_k определяются по (28.12) так:

$$b_k = C_{lj}(p_k) [(p - p_k) \chi_j(p)]_{p=p_k}, \quad (86.10)$$

если, конечно, p_k не равно ни одной из собственных частот системы λ_s , удовлетворяющих уравнению $D(\lambda_s) = 0$. Если какое-то $p_k = \lambda_s$, то будет *резонанс*, и решение для этого члена имеет вид:

$$(At + B) e^{\lambda_s t}, \quad (86.11)$$

где A и B — константы, которые можно найти, применяя формулу (28.12), аналогично тому, как было показано в § 28, стр. 133.

В случае простых корней уравнения для собственных частот $D(\lambda) = 0$ собственные колебания координаты x_l для какой-то частоты λ_s по (28.12) записутся так:

$$[(p - \lambda_s) C_{lj}(p)]_{p=\lambda_s} \chi_j(\lambda_s) e^{\lambda_s t} \quad (86.12)$$

— сопровождающие и

$$\{x_j(0) [(p - \lambda_s) P_{lj}(p)]_{p=\lambda_s} + \dot{x}_j(0) [(p - \lambda_s) Q_{lj}(p)]_{p=\lambda_s}\} e^{\lambda_s t} \quad (86.13)$$

— зависящие от начальных условий j -й координаты.

В случае, если корень уравнения $D(\lambda) = 0$ имеет кратность m , то собственное колебание, соответствующее этому корню, будет иметь вид полинома от t , умноженного на $e^{\lambda_s t}$, по формуле (28.12), но степень полинома от t может быть меньше $m - 1$ в том случае, когда λ_s будет корнем уравнения $D_{sl}(\lambda) = 0$ (или вообще $D_{sl}(\lambda) = 0$). Так как $D_{sl}(\lambda_s)$ является алгебраическим дополнением элемента детерминанта $D(\lambda_s)$, то можно показать, что кратность корня $D_{sl}(\lambda_s) = 0$ будет всегда меньше m , пусть она будет $n < m$. Тогда соответствующий полином от t будет иметь степень $m - n - 1$. Укажем, что в случае консервативной системы (все $\gamma_{sl} \equiv 0$), n всегда равно $m - 1^*$). Другими словами,

* См., например, Б. В. Булгаков, Теория колебаний, Гостехиздат, 1954.

в консервативной системе собственные колебания всегда представляются в виде $\sum_k b_k e^{\lambda_k t}$, где b_k не зависят от времени.

Вид и характер колебаний, представляемых полиномом от t , умноженным на $e^{\lambda_s t}$, при комплексном λ_s для достаточно большого значения t определяется экспоненциальным множителем $e^{\lambda_s t}$, причем главную роль играет множитель затухания $e^{-\delta_s t}$, где $-\delta_s$ — реальная часть λ_s .

Теперь рассмотрим общий случай, когда внешние силы действуют вообще на все координаты и начальные значения всех координат и их скоростей также вообще отличны от нуля. Очевидно, в силу линейности задачи спектр колебаний координаты $x_l(t)$ будет суммой спектров, представленных формулой (86.5); мы можем спектр (86.5) теперь обозначить $\Phi_{lj}(p)$ — как спектр колебаний, вызванных силой по координате с номером j и начальными возмущениями той же координаты. Следовательно, в общем случае спектр колебаний координаты $x_l(t)$ будет равен

$$\sum_{j=1}^n \Phi_{lj}(p). \quad (86.14)$$

И все сказанное выше относительно колебаний, представленных спектром $\Phi_{lj}(p)$, легко можно распространить и на колебания $x_l(t)$, в общем случае имеющие спектр (86.14).

§ 87. «Цепочки» однородных звеньев (элементов)

Система, состоящая из нескольких последовательно связанных друг с другом одинаковых элементов, каждый из которых представляет собой колебательную систему с одной степенью свободы, называется «цепочкой» однородных звеньев. Такие

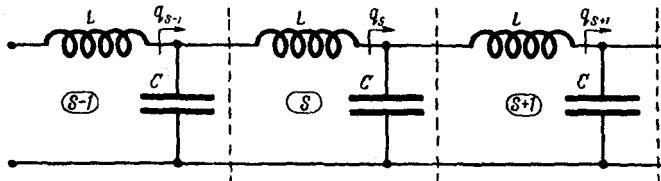


Рис. 226.

цепочки употребляют для выделения (или устранения) колебаний, соответствующих определенной области частот, и в этом случае их называют фильтрами.

1) *Фильтр низких частот.* Цепочка, состоящая из одинаковых катушек и конденсаторов, включенных как показано на рис. 226, представляет фильтр низких частот. Легко видеть, что если на

одном конце цепочки действует э. д. с. определенной частоты, а на другом конце мы измеряем напряжение, то при изменении частоты э. д. с. амплитуда колебаний изменяемого напряжения будет падать с увеличением частоты. Цепочка «пропускает» только низкие частоты.

Уравнения собственных колебаний в цепочке просто составить, если написать выражения для магнитной и электрической энергий. Обозначим заряд, прошедший к моменту времени t через сечение s -й катушки, буквой q_s , полагая, что при $t = 0$ все $q = 0$. Тогда выражения для энергии фильтра низких частот (рис. 226) можно, очевидно, представить так:

$$2T = \sum_s L \dot{q}_s^2, \quad 2U = \frac{1}{C} \sum_s (q_{s+1} - q_s)^2. \quad (87.1)$$

Механическим аналогом фильтра низких частот будет цепочка, состоящая из расположенных по одной линии одинаковых масс m

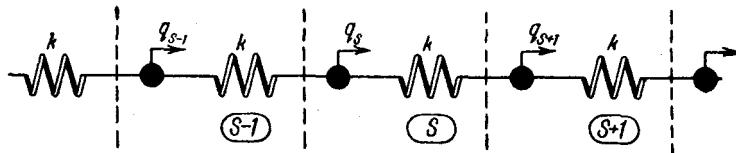
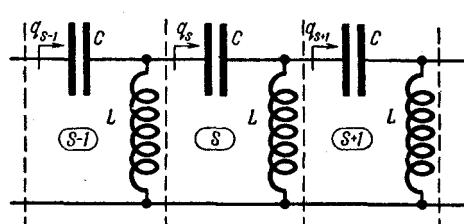


Рис. 227.

и пружинок, соединенных последовательно, коэффициент жесткости которых равен k (рис. 227). Конечно, в данном случае рассматриваются только продольные колебания масс вдоль цепочки. Если обозначим смещение s -й массы через q_s , то кинетическая

и потенциальная энергии определяются из формул



$$2T = \sum_s m \dot{q}_s^2,$$

$$2U = k \sum_s (q_{s+1} - q_s)^2. \quad (87.2)$$

Следовательно, при таком выборе координат колебания в цепочках рис. 226 и 227 будут происходить по совершенно

одинаковым законам. Заметим, что струна с равноотстоящими и одинаковыми бусинками представляет цепочку такого же типа.

2) *Фильтр высоких частот.* Цепочка, составленная из тех же элементов, но включенных так, как показано на рис. 228. Очевидно, что этот фильтр будет задерживать низкие частоты.

Выберем за координаты заряды на конденсаторах q_s , тогда магнитная и электрическая энергии цепочки найдутся из

$$2T = L \sum_s (\dot{q}_{s+1} - \dot{q}_s)^2, \quad 2U = \frac{1}{C} \sum_s q_s^2. \quad (87.3)$$

При данном выборе координат цепочка имеет магнитную связь между элементами, в отличие от предыдущего случая (87.1), где связь была электрической.

Механическим аналогом высокочастотного фильтра может служить цепочка, показанная на рис. 229. Цепочка состоит из «невесомых» стержней, подвешенных на одинаковых пружинках; в середине стержней закреплены небольшие одинаковые грузики с массой 4 г, стержни соединены шарнирно. Рассматриваются только вертикальные колебания пружинок.

Если обозначим координаты смещения концов пружинок через q_s , то выражения для кинетической и потенциальной энергий запишутся так:

$$2T = m \sum_s (\dot{q}_{s+1} - \dot{q}_s)^2, \quad 2U = k \sum_s q_s^2. \quad (87.4)$$

Выражения для энергий имеют тот же вид, что и (87.3). В данном случае элементы механической цепочки обладают инерционной связью.

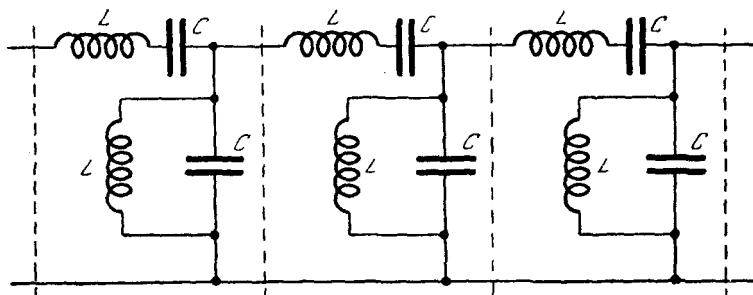


Рис. 229.

Употребляются также фильтры, представляющие собой цепочки иного вида: например, так называемые *полосовые фильтры*, состоящие из элементов такого типа, как показано на рис. 230.

Этот фильтр пропускает область частот, близких к частоте $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Теория колебаний в фильтрах принципиально одинакова во всех случаях, поэтому в следующем параграфе мы проанализируем колебания в простейшем низкочастотном фильтре.

§ 88. Собственные колебания в цепочки однородных элементов

Рассмотрим собственные колебания в цепочке, состоящей из $n + 1$ элементов. Возьмем фильтр низкой частоты (рис. 226 или 227). Уравнения колебаний в такой цепочке при обозначениях, принятых в предыдущем параграфе, можно записать так:

$$L\ddot{q}_s + \frac{1}{C} (2q_s - q_{s+1} - q_{s-1}) = 0, \quad (88.1)$$

для каждого s -го звена цепочки. Только для первого и последнего звеньев уравнения будут иными. Например, если концы цепочки разомкнуты или первый элемент остается неизменным, а у последнего, $(n + 1)$ -го элемента отключен конденсатор, то

$$q_1 = 0, \quad q_{n+1} = 0. \quad (88.2)$$

Если концы цепочки замкнуты на конденсаторы C_1 и C_2 , то уравнение для первой ячейки будет

$$L\ddot{q}_1 + \frac{1}{C} (q_1 - q_s) + \frac{q_1}{C_1} = 0, \quad (88.3)$$

и для последней $(n + 1)$ -й ячейки

$$L\ddot{q}_{n+1} + \frac{1}{C} (q_{n+1} - q_n) + \frac{q_{n+1}}{C_2} = 0. \quad (88.4)$$

Полагая в уравнениях (88.3) и (88.4) $C_1 \rightarrow 0$ и $C_2 \rightarrow 0$, можно получить (88.2); переход к конденсаторам с нулевой емкостью соответствует разомкнутым концам цепочки. Можно также получить из (88.3) и (88.4) уравнения для крайних звеньев при замкнутых накоротко концах цепочки, полагая в них $C_1 \rightarrow \infty$ и $C_2 \rightarrow \infty$. Возможны различные условия на разных концах, например, один замкнут накоротко, другой замкнут на индуктивность L_0 и т. п.

Разберем подробно только случай, когда уравнения крайних ячеек имеют вид (88.3) и (88.4), т. е. рассмотрим собственные колебания в цепочке, замкнутой на конденсаторы C_1 и C_2 .

Нормальное колебание в цепочке можно записать так:

$$q_s = a_s \cos(\omega t + \varphi), \quad (88.5)$$

где ω — искомая величина одной из собственных частот системы. Подставляя (88.5) в (88.1), получим систему алгебраических уравнений для определения амплитуд a_s :

$$(-LC\omega^2 + 2)a_s - a_{s+1} - a_{s-1} = 0, \quad (88.6)$$

где $s = 2, 3, \dots, n$ и, кроме того, два уравнения, соответствующие (88.3) и (88.4). Решение системы уравнений (88.6) можно искать в следующем виде:

$$a_s = Ae^{s\beta}, \quad (88.7)$$

где A и β — константы. Действительно, подставляя (88.7) в (88.6), получаем для определения β следующее уравнение:

$$1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC = \operatorname{ch} \beta. \quad (88.8)$$

Решение этого уравнения будет иметь различный вид в зависимости от величины $\frac{1}{2}\omega^2 LC$.

Если $\frac{1}{2}\omega^2 LC < 2$, то β будет чисто мнимой величиной. Обозначим $\beta = i2\gamma$, тогда $\operatorname{ch} \beta = \operatorname{ch}(i2\gamma) = \cos 2\gamma$. Подставим это в (88.8) и получим:

$$1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC = \cos 2\gamma,$$

$$1 - \cos 2\gamma = 2 \sin^2 \gamma = \frac{1}{2}\omega^2 LC;$$

отсюда

$$\omega^2 LC = 4 \sin^2 \gamma$$

и окончательно

$$\omega \sqrt{LC} = 2 \sin \gamma. \quad (88.9)$$

Следовательно, величины γ и ω связаны уравнением (88.9), и выражение для амплитуд (88.7) можно записать так:

$$a_s = Ae^{is\gamma} + Be^{-is\gamma}, \quad (88.10)$$

где A и B — пока произвольные постоянные величины.

Если $\frac{1}{2}\omega^2 LC > 2$, то в (88.8) величина β будет комплексной.

Пусть $\beta = \mu + iv$; тогда по (88.8)

$$1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC = \operatorname{ch} \beta = \operatorname{ch}(\mu + iv) = \operatorname{ch} \mu \cos v + i \operatorname{sh} \mu \sin v. \quad (88.11)$$

Так как в (88.11) слева действительная отрицательная величина, то $v = \pi$, величина μ определится из (88.11) так:

$$\operatorname{ch} \mu = \frac{1}{2}\omega^2 LC - 1. \quad (88.12)$$

Значения амплитуд различных координат можно в этом случае записать так:

$$a_s = e^{is\pi} (A_1 e^{s\mu} + B_1 e^{-s\mu}),$$

или

$$a_s = (-1)^s (A_1 e^{s\mu} + B_1 e^{-s\mu}), \quad (88.13)$$

где A_1 и B_1 — константы.

Параметр распределения амплитуд по координатам γ (или μ) для данной собственной частоты ω определяется из уравнений (88.9) или (88.12). Каждое из этих уравнений содержит две неизвестные величины (ω и γ или ω и μ). Дополнительную пару уравнений, связывающих эти величины, мы получим из условий на крайних звеньях цепочки, например, из (88.2), (88.3), (88.4) и т. п.

Получим эти уравнения в общем случае, когда начало цепочки замкнуто на конденсатор C_1 , а конец — на конденсатор C_2 . Ранее было записано уравнение для первой ячейки (88.3) и для последней $n + 1$ -й ячейки (88.4). Подставляя в (88.3) и (88.4) гармоническое решение (88.5), получим:

$$\begin{aligned} \left(1 - \omega^2 LC + \frac{C}{C_1}\right) a_1 &= a_2, \\ \left(1 - \omega^2 LC + \frac{C}{C_2}\right) a_{n+1} &= a_n. \end{aligned} \quad (88.14)$$

Обозначим:

$$a_1 = 1 - \omega^2 LC + \frac{C}{C_1}, \quad a_2 = 1 - \omega^2 LC + \frac{C}{C_2} \quad (88.15)$$

и подставим в (88.14) амплитуды из (88.10); преобразуя, получим:

$$\begin{aligned} A(a_1 e^{i\gamma_1} - e^{i\gamma_1}) + B(a_1 e^{-i\gamma_1} - e^{-i\gamma_1}) &= 0, \\ A(a_2 e^{i\gamma_1(n+1)} - e^{i\gamma_1 n}) + B(a_2 e^{-i\gamma_1(n+1)} - e^{-i\gamma_1 n}) &= 0. \end{aligned}$$

Однородные относительно A и B уравнения будут иметь отличные от нуля решения только при условии

$$\begin{aligned} (a_1 e^{i\gamma_1} - e^{i\gamma_1})(a_2 e^{-i\gamma_1(n+1)} - e^{-i\gamma_1 n}) &= \\ = (a_1 e^{-i\gamma_1} - e^{-i\gamma_1})(a_2 e^{i\gamma_1(n+1)} - e^{i\gamma_1 n}). \end{aligned} \quad (88.16)$$

Замечаем, что в (88.16) по обе стороны от знака равенства стоят одинаковые комплексно-сопряженные величины, поэтому каждая из них представляет действительное число. Следовательно, мнимая часть от

$$(a_1 e^{i\gamma_1} - e^{i\gamma_1})(a_2 e^{-i\gamma_1(n+1)} - e^{-i\gamma_1 n})$$

должна быть равна нулю. Это и дает второе уравнение, связывающее γ и ω ; оно имеет такой вид:

$$a_1 a_2 \sin 2\gamma n - (a_1 + a_2) \sin 2\gamma(n-1) + \sin 2\gamma(n-2) = 0. \quad (88.17)$$

Предполагая показательный закон распределения амплитуд колебаний в виде (88.13), совершенно аналогичным путем получим уравнение, связывающее величины μ и ω :

$$a_1 a_2 \operatorname{sh} \mu n - (a_1 + a_2) \operatorname{sh} \mu(n-1) + \operatorname{sh} \mu(n-2) = 0. \quad (88.18)$$

Это уравнение похоже на (88.17), только вместо тригонометрических функций в нем стоят гиперболические.

Решая совместно уравнения (88.9) и (88.17), найдем собственные частоты и соответствующие им значения γ . Затем решим (88.12) вместе с (88.18) и найдем остальные значения ω и соответствующие им величины μ .

Определение собственных частот цепочки из двух уравнений показывает, что собственные частоты зависят от параметров ячеек, составляющих цепочку, и от условий на концах цепочки; при различных условиях на концах одна и та же цепочка будет иметь различные собственные частоты.

Практически решение уравнений для определения частот приходится выполнять графическим путем, и исследование их в общем виде довольно громоздко.

Поэтому разберем только случай собственных колебаний в цепочке, соответствующей фильтру низких частот с незамкнутыми концами. В этом случае, как уже было указано, C_1 и C_2 следует положить равными нулю, и по (88.15) величины

$$\alpha_1 \rightarrow \infty \text{ и } \alpha_2 \rightarrow \infty.$$

Тогда уравнение (88.17) будет

$$\sin 2\gamma n = 0; \quad (88.19)$$

оно имеет решения:

$$2\gamma = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{l\pi}{n}. \quad (88.20)$$

Следовательно, собственные частоты цепочки по (88.9) определяются из такой формулы:

$$\omega_l = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{l\pi}{2n}. \quad (88.21)$$

Соотношение между собственными частотами наглядно показано на рис. 231, на котором четверть окружности радиуса $2/\sqrt{LC}$ разделена на n равных частей и проекции радиусов, проведенных в эти точки дуги, равны величине частот. На рис. 231 показаны частоты для системы, состоящей из 6 ячеек. Обращаясь к рис. 226, видим, что в этом случае $q_1 = q_{n+1} = 0$ и, следовательно, система имеет только $n - 1$ степеней свободы, т. е. для $n = 6$ мы имеем систему с пятью степенями свободы. Действительно, механическая цепочка рис. 227 из шести элементов с закрепленными концами будет иметь такой вид, как показано на рис. 232; здесь закреплены первая и седьмая массы, и цепочка имеет только пять подвижных

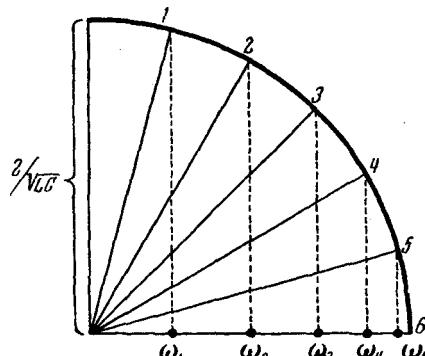


Рис. 231.

масс, пять степеней свободы. В данном случае амплитуды колебаний по (88.10) будут таковы:

$$a_{ls} = A_l e^{i \frac{\pi s l}{n}} + B_l e^{-i \frac{\pi s l}{n}}, \quad (88.22)$$

где учтено (88.20), l — номер частоты и s — номер ячейки.

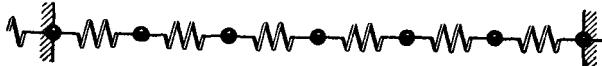


Рис. 232.

Из условия $q_1 = 0$ или $a_{l1} = 0$ следует $A_l e^{i \frac{\pi l}{n}} = -B_l e^{-i \frac{\pi l}{n}}$; поэтому (88.22) можно привести к такому виду:

$$a_{ls} = D_l \sin \frac{i \pi (s-1)}{n}, \quad (88.23)$$

где $D_l = i 2 A_l e^{\frac{i \pi l}{n}}$. Легко проверить, что $a_{l(n+1)} = 0$.

Окончательно собственные колебания в цепочке из n элементов с разомкнутыми концами при любых начальных условиях по (88.5) и (88.23) можно записать так:

$$q_s = \sum_{l=1}^{n-1} D_l \sin \frac{i \pi (s-1)}{n} \cos (\omega_l t + \varphi_l), \quad (88.24)$$

где ω_l определяются из (88.21) для всех l от 1 до $n-1$. Величины амплитуд D_l и фаз φ_l определяются начальным состоянием цепочки. Зададим начальные значения для каждого элемента q_{0s} и \dot{q}_{0s} ; тогда величины D_l и φ_l определяются из 2 ($n-1$) уравнений:

$$\begin{aligned} q_{0s} &= \sum_{l=1}^{n-1} D_l \sin \frac{i \pi (s-1)}{n} \cos \varphi_l, \\ \dot{q}_{0s} &= - \sum_{l=1}^{n-1} D_l \omega_l \sin \frac{i \pi (s-1)}{n} \sin \varphi_l. \end{aligned} \quad (88.25)$$

Распределение амплитуд по элементам для каждой собственной частоты происходит по закону синуса, или форма колебаний может быть определена по закону синуса кратных углов. Координаты во всех ячейках совершают колебания в фазе или в противофазе. Форма колебаний «похожа» на форму стоячей волны в сплошной среде. Любое собственное колебание есть совокупность гармонических колебаний с собственными (нормальными) частотами.

На рис. 233 показано распределение амплитуд для каждого собственного колебания в цепочке с шестью элементами с закрепленными концами, которая показана на рис. 232. Для колебания с частотой $\omega_1 = 2/\sqrt{LC} \sin(\pi/12)$ отклонения всех масс в некоторый момент пропорциональны отрезкам синусоиды, причем вдоль цепочки укладывается полволны, колебания во всех элементах происходят в фазе. Напомним, что q_s представляют смещения в механической цепочке или заряды в случае электрического

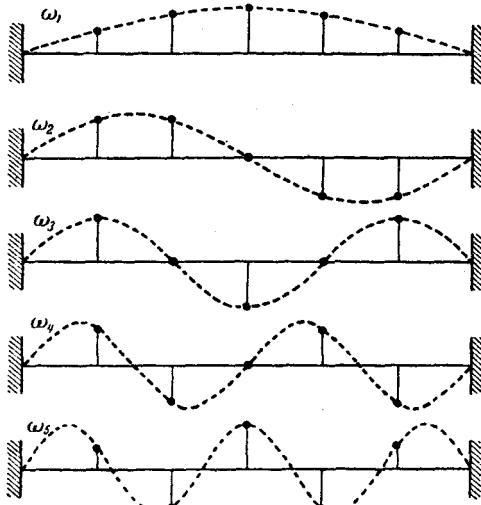


Рис. 233.

фильтра, поэтому распределение амплитуд токов \dot{q}_s будет иметь такой же самый вид, как и распределение амплитуд зарядов, показанное на рис. 233.

Распределение амплитуд колебаний для остальных четырех частот показано также на этом рисунке — на длине цепочки укладывается столько «полуволн», каков номер собственной частоты.

Заметим, что в формуле (88.21) мы брали значения l до $n - 1$; если положим, что $l = n$, то получим еще «частоту», равную $2/\sqrt{LC}$, однако 2γ для этой частоты по (88.20) равно π и, следовательно, амплитуды (88.23) для всех координат при этой «частоте» равны нулю, и поэтому такая «частота» физически не имеет смысла. К этому выводу можно было прийти, рассуждая так: степеней свободы $n - 1$, мы нашли $n - 1$ частот, следовательно, больше не может быть собственных частот. Полагая же в формуле (88.21)

$l > n$, мы будем получать те же самые значения собственных частот.

Очевидно, что в данном случае нет необходимости искать частоты, соответствующие экспоненциальному распределению амплитуд по формулам (88.13), (88.12) и (88.18). Но если сделать расчет, то получим: $\mu = 0$ и $\omega = 2/\sqrt{LC}$; как указано выше, это и означает невозможность собственных колебаний с экспоненциальным распределением амплитуд.

§ 89. Вынужденные колебания в цепочке однородных элементов (фильтры)

В том случае, когда на первую ячейку цепочки однородных элементов действует внешняя э. д. с., а с последней ячейки колебания передаются дальше, цепочку называют фильтром, так как цепочка может «не пропускать» колебаний определенных частот.

Поэтому расчет фильтра представляет определение вынужденных колебаний в цепочке под действием силы, приложенной на

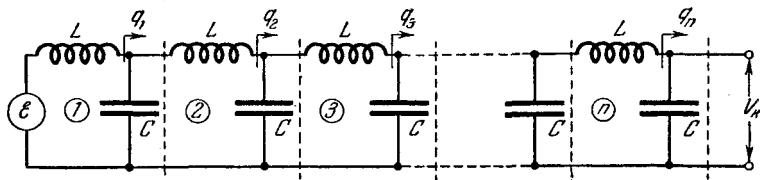


Рис. 234.

одном конце цепочки. Рассмотрим вынужденные колебания в низкочастотном фильтре без нагрузки (рис. 234).

Нас интересует амплитуда и фаза колебаний напряжения V_h на конце «цепочки», если на первое звено действует э. д. с.:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{ip t}.$$

Уравнение колебаний заряда для каждого звена цепочки будет иметь такой же вид, как и при собственных колебаниях, т. е. уравнение (88.1). На последнем звене будет условие (88.2). Отличие только в уравнении колебаний заряда на первом звене цепочки; здесь оно будет

$$L\ddot{q}_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = \mathcal{E}_0 e^{ip t}. \quad (89.1)$$

Искомое напряжение V_h , очевидно, равно q_n/C , поэтому если найдем q_n , то расчет колебаний в фильтре без нагрузки сделан.

По аналогии с собственными колебаниями предположим, что вынужденные колебания заряда, протекающего через индуктивность каждой ячейки, зависят от ее номера s так:

$$q_s = Ae^{\lambda s} e^{ip t}. \quad (89.2)$$

Подставляя это в (88.1) и сокращая на $Ae^{ip t}$, получим для определения неизвестной величины λ уравнение

$$LC p^2 - 2 + e^\lambda + e^{-\lambda} = 0,$$

или, обозначая $LC p^2 = \alpha^2$, запишем его так:

$$\operatorname{ch} \lambda = 1 - \frac{\alpha^2}{2}. \quad (89.3)$$

По определению, α — действительная положительная величина, следовательно, если

$$\alpha < 2, \quad (89.4)$$

то λ будет чисто мнимой величиной. Пусть $\lambda = i\beta$, тогда $\operatorname{ch} \lambda = \cos \beta$, и (89.3) примет такой вид:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\alpha^2}{2}. \quad (89.5)$$

На рис. 235 показано графическое определение корней уравнения (89.5). Это трансцендентное уравнение имеет бесчисленное

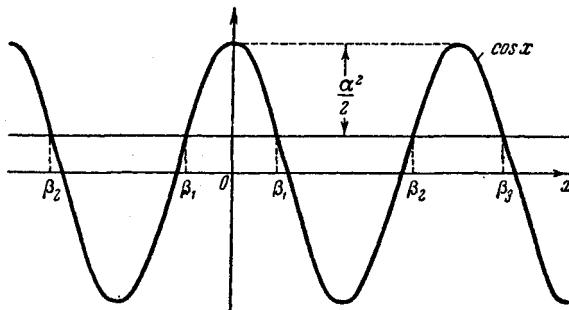


Рис. 235.

множество решений, но смысл имеют только $\pm \beta_1$, ибо остальные отличаются от них на 2π .

Вынужденные колебания заряда в звене с индексом s в комплексном виде будут:

$$q_s = Ae^{i(s\beta_1 + pt)} + Be^{i(-s\beta_1 + pt)}.$$

Если $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos pt$, то

$$q_s = (Ae^{i\beta_1 s} + Be^{-i\beta_1 s}) \cos pt; \quad (89.6)$$

так как это должно быть действительной величиной, то

$$A = A_1 e^{i\varphi}, \quad \text{а} \quad B = A_1 e^{-i\varphi}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} q_s &= 2A_1 \cos(\beta_1 s + \varphi) \cos pt = \\ &= A_1 [\cos(pt + \beta_1 s + \varphi) + \cos(pt - \beta_1 s - \varphi)]. \end{aligned} \quad (89.7)$$

Вынужденные колебания в цепочке имеют «синусоидальное распределение амплитуд», т. е. амплитуда колебаний в каждой ячейке пропорциональна косинусу, величина аргумента которого меняется на определенную величину β_1 от ячейки к ячейке. Такие колебания напоминают «стоячую» волну в среде с распределенными параметрами.

Можно представить колебания в цепочке еще и так: колебания в каждой ячейке состоят из двух компонентов одной и той же частоты p : фаза одного из них скачкообразно нарастает (второго — убывает) от элемента к элементу на одну и ту же величину. Каждый из компонентов, рассматриваемый во всей цепочке, похож на «бегущую волну» в непрерывной среде, с тем только различием, что фаза колебаний меняется скачком от элемента к элементу на одну и ту же величину.

Произвольные величины A и B (или A_1 и φ) должны быть подобраны так, чтобы удовлетворить уравнению в первой ячейке (89.1) и условию на конце цепочки $q_{n+1} = 0$. Для решения (89.7) будет выполняться условие $q_{n+1} = 0$, если фаза равна

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta_1(n+1). \quad (89.8)$$

Подставляя (89.7) в (89.1), определяем амплитуду колебаний заряда:

$$2A_1 = \frac{\mathcal{E}_0 C}{(1 - \alpha^2) \cos(\beta_1 + \varphi) - \cos(2\beta_1 + \varphi)}.$$

Если подставить сюда величину фазы φ из (89.8) и преобразовать, то получим:

$$2A_1 = \frac{\mathcal{E}_0 C}{(\alpha^2 - 1) \sin \beta_1 n + \sin \beta_1 (n-1)}. \quad (89.9)$$

Заметим, что амплитуда колебаний заряда в первой ячейке по (89.7) равна

$$2A_1 \cos(\beta_1 + \varphi),$$

поэтому амплитуда колебаний тока в первой ячейке:

$$I_{01} = 2A_1 p \cos(\beta_1 + \varphi) = 2A_1 p \sin \beta_1 n. \quad (89.10)$$

И колебания тока опережают колебания заряда на $\pi/2$. Отношение амплитуды э. д. с. к амплитуде тока, идущего через источник, можно назвать *входным сопротивлением* фильтра (цепочки). Обозначим

$$W = \frac{\mathcal{E}_0}{I_{01}} \quad (89.11)$$

и, исключая A_1 из (89.9) и (89.10), получим входное сопротивление фильтра низкой частоты:

$$W = \frac{(a^2 - 1) \sin \beta_1 n + \sin \beta_1 (n - 1)}{pC \sin \beta_1 n}. \quad (89.12)$$

Величина амплитуды напряжения на выходе фильтра по (89.7) будет равна:

$$V_h = \frac{q_n}{C} = \frac{1}{C} 2A_1 \cos(\beta_1 n + \varphi), \quad (89.13)$$

или, исключая из (89.13) φ и A_1 , по формулам (89.8) и (89.9) получим:

$$\frac{V_h}{\mathcal{E}_0} = \frac{\sin \beta_1}{(a^2 - 1) \sin \beta_1 n + \sin \beta_1 (n - 1)}. \quad (89.14)$$

Это *коэффициент передачи* фильтром низкой частоты — величина, которая имеет важное практическое значение. Подставляя в (89.14) значения β_1 из (89.5) для различных значений p , получим частотную зависимость коэффициента передачи фильтра.

Из формулы (89.12) видно, что при $\sin \beta_1 n = 0$ входное сопротивление фильтра *бесконечно*. Сравнивая (88.9) и (89.5) и учитывая (88.19), заключаем, что $W \rightarrow \infty$ тогда, когда частота внешней силы p равна одной из собственных частот *разомкнутой на концах цепочки контуров*; в этом случае вход фильтра представляет идеальный изолатор, и в системе имеет место *резонанс сопротивления*, совершенно аналогичный тому, который мы рассматривали в § 17. При резонансе сопротивления в цепочке происходят такие собственные колебания, при которых амплитуда колебаний напряжения на входе разомкнутой на концах цепочки равна амплитуде внешней э. д. с., и они совпадают по фазе; амплитуды колебаний во всех звеньях цепочки и на выходе фильтра вообще имеют конечную величину.

Совершенно иная картина будет, если вместо источника э. д. с. поставить источник тока, задать ток цепи первой ячейки, как это делают при «резонансе токов» (§ 17). Тогда при $W \rightarrow \infty$ в цепочке возникнут колебания с бесконечной амплитудой, *резонансные*

колебания, как это можно видеть из формулы (89.10): при конечном I_{10} и $\sin \beta_1 n \rightarrow 0$ величина $A_1 \rightarrow \infty$. И в механической цепочке, если задать не силу, а смещение первой массы, то амплитуды колебаний будут бесконечно велики, если частота соответствует резонансу динамической жесткости.

Следовательно, при резонансе входного сопротивления, т. е. при тех частотах p , при которых $W \rightarrow \infty$, в системе нет бесконечных амплитуд колебаний, если задана э. д. с. Но если воздействие осуществляется так, что задана величина тока в первом элементе, то при этих частотах будут колебания с бесконечной амплитудой, будет резонанс колебаний.

Теперь определим и те частоты внешней э. д. с., при которых входное сопротивление W обращается в нуль; это означает, что при данных значениях частот амплитуда колебаний тока в первой и остальных ячейках будет бесконечно велика. Такой режим представляет резонансные колебания в фильтре. Сравнивая (89.12) и (89.14), видим, что при $W \rightarrow 0$ напряжение на выходе $V_h \rightarrow \infty$.

Определим частоты резонансных колебаний. Из (89.12) следует, что при резонансных частотах

$$(a^2 - 1) \sin \beta_1 n + \sin \beta_1 (n - 1) = 0. \quad (89.15)$$

Найдем уравнение, определяющее собственные частоты цепочки в том случае, когда начало ее замкнуто, а конец разомкнут. Замкнутое начало означает, что $C_1 \rightarrow \infty$, а разомкнутый конец соответствует $C_2 \rightarrow 0$, поэтому по (88.15)

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \omega^2 LC, \\ a_2 &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (89.16)$$

Подставив (89.16) в формулу (88.17), получим:

$$(1 - \omega^2 LC) \sin 2\gamma n - \sin 2\gamma (n - 1) = 0. \quad (89.17)$$

Вспомним, что $a^2 = p^2 LC$, и сравним (89.17) и (89.15). Из этого сравнения следует $\beta_1 = 2\gamma$. Значит, частота внешней силы в случае резонансных колебаний равна собственной частоте цепочки с замкнутым входом.

Подчеркнем, что при частотах, соответствующих нулевому входному сопротивлению, резонансные колебания (бесконечные амплитуды) будут только в том случае, если задана внешняя э. д. с. Если же, как и выше, будут заданы колебания тока в первой ячейке, то амплитуды колебаний в цепочке будут конечны и резонанса колебаний не будет, как можно видеть из формулы (89.10): при заданном конечном значении I_{10} имеет конечное значение и A_1 , потому что $\sin \beta_1 n \neq 0$.

Следовательно, резонансные колебания в цепочке однородных элементов *) определяются не только частотой внешнего источника, но и способом воздействия на систему. Совершенно различные результаты имеют место при заданной внешней э. д. с. и при заданном извне токе так же, как это было установлено на простых примерах § 17.

В механических системах аналогией резонанса *сопротивления* будет резонанс *динамической жесткости*. И точно так же, при тех частотах p , при которых динамическая жесткость начала цепочки будет обращаться в бесконечность, не будет резонансных колебаний, если задана внешняя сила, действующая на начало цепочки; и будут резонансные колебания, если задано смещение начала механической цепочки.

Анализируя колебания в механической цепочке, например показанной на рис. 227, можно наглядно представить колебания при *резонансе динамической жесткости* в том и другом случаях.

При *заданной внешней силе*, приложенной к первой массе, вынужденные колебания по частоте и распределению амплитуд совпадают с собственными колебаниями при неподвижной первой массе, причем амплитуда этих колебаний такова, что сила, вызванная деформацией второй пружины, в точности равна и противоположна действующей силе, и первая масса находится в покое. Смещение точки приложения внешней силы равно нулю и, следовательно, работа ее также равна нулю, поэтому не может быть в цепочке колебаний с бесконечными амплитудами.

При *заданном смещении* первой массы будет совсем иная картина. Для смещения первой массы следует прилагать силу с бесконечно большой амплитудой, поэтому и смещение второй массы должно быть бесконечно большим, так как сила деформации пружины, соединяющей первую и вторую массы, должна уравновешивать бесконечную внешнюю силу.

Очевидно, что при тех частотах, при которых динамическая жесткость обращается в нуль, все будет наоборот: *задана сила — резонансные колебания, задано смещение — нет резонансных колебаний*.

Можно показать, что в общем случае сложной линейной системы *резонанс сопротивления* в разрыве определенной ветви цепи возникает при тех частотах, которые равны собственным частотам всей цепи при *разомкнутой* той же ветви цепи. Если при резонансе сопротивлений *задать* э. д. с., то *резонансные колебания не будет*; если же *задать ток*, то в цепи *будут резонансные колебания*.

Наоборот, комплексное *сопротивление* в разрыве определенной ветви будет равно нулю при тех частотах, которые равны собственным частотам сложной цепи при *замкнутой накоротко* данной ветви. Если *задать* э. д. с. этой частоты, то в системе будут резонансные колебания, а если задать определенный *ток* через данную ветвь, то резонансных колебаний *не будет*.

Аналогичное положение можно сформулировать и для *динамической жесткости* системы в данной точке; только следует помнить, что *разрыв* электрической цепи соответствует *закреплению* точки воздействия, *замыкание* — *освобождению от всяких внешних связей* данной точки при собственных колебаниях.

До сих пор нами рассмотрены вынужденные колебания в фильтре низкой частоты при условии (89.4) $\alpha < 2$; это означает, что частота колебаний

$$p < \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (89.18)$$

*) Так же и в любой линейной системе.

Таким образом, *синусоидальное* распределение амплитуд вынужденных колебаний и только что рассмотренные резонансные явления имеют место при условии (89.18) при низких частотах. Поэтому частоту

$$\frac{2}{\sqrt{LC}}$$

называют *критической частотой* для фильтра низких частот. Заметим, что коэффициент передачи фильтра (89.14) при частоте меньше критической не обращается в нуль, а при $p = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ он равен нулю. При резонансе колебаний коэффициент передачи равен бесконечности.

Если частота p больше критической,

$$\alpha > 2 \quad \text{или} \quad p > \frac{2}{\sqrt{LC}},$$

то распределение амплитуд колебаний будет представлено показательным законом. Действительно, решение уравнения (89.3) будет аналогично решению уравнения (88.11), и поэтому величину λ в (89.2) можно обозначить так:

$$\lambda = \kappa + i\pi,$$

где κ есть решение уравнения

$$LCp^2 - 2 = 2 \operatorname{ch} \kappa. \quad (89.19)$$

Амплитуды колебаний аналогично (88.13) можно записать так:

$$A_s = (-1)^s (D_1 e^{\kappa s} + D_2 e^{-\kappa s}),$$

а вынужденные колебания —

$$q_s = (-1)^s (D_1 e^{\kappa s} + D_2 e^{-\kappa s}) \cos pt. \quad (89.20)$$

Если учесть, что последняя ячейка разомкнута, $q_{n+1} = 0$, то вынужденные колебания будут:

$$q_s = (-1)^s D_1 [e^{\kappa s} - e^{2\kappa(n+1)-\kappa s}] \cos pt,$$

или

$$q_s = (-1)^s D \operatorname{sh}(n+1-s)\kappa \cos pt, \quad (89.21)$$

где

$$D = -2D_1 e^{\kappa(n+1)}.$$

Колебания в какой-то момент времени вдоль всей цепочки можно представить себе с помощью рис. 236, где жирными отрезками вдоль оси координат отложены величины, пропорциональные

зарядам q_s (или токам) в каждом элементе; так как колебания в двух соседних элементах в противофазе, то отклонения показаны в различные стороны. Амплитуды колебаний спадают по показательному закону вдоль цепочки. Напомним, что при низких частотах ($p < \frac{2}{\sqrt{LC}}$) распределение амплитуд похоже на распределение амплитуд при собственных колебаниях, показанное на рис. 233.

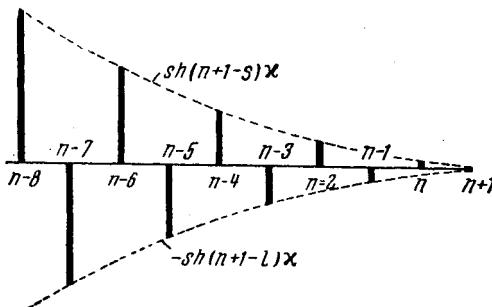


Рис. 236.

Подставляя решение (89.21) в уравнение для первой ячейки (89.1), получим величину амплитуды

$$D = \frac{\mathcal{E}_0}{(\alpha^2 - 1) \operatorname{sh} \kappa n + \operatorname{sh} \kappa (n - 1)}. \quad (89.22)$$

Входное сопротивление аналогично (89.12):

$$W = \frac{(\alpha^2 - 1) \operatorname{sh} \kappa n + \operatorname{sh} \kappa (n - 1)}{pC \operatorname{sh} \kappa n}, \quad (89.23)$$

и коэффициент передачи (89.14)

$$\frac{V_h}{\mathcal{E}_0} = \frac{\operatorname{sh} \kappa}{(\alpha^2 - 1) \operatorname{sh} \kappa n - \operatorname{sh} \kappa (n - 1)}. \quad (89.24)$$

Из (89.19) видно, что с увеличением p растет и κ , поэтому входное сопротивление W будет расти с частотой, и при $p \rightarrow \infty$ оно приближается к pL . Это очевидно непосредственно. Коэффициент передачи также падает с увеличением частоты p , но он сильно уменьшается при увеличении числа элементов цепочки, потому что знаменатель растет почти по показательному закону. Следовательно, выбрав достаточно большое число элементов цепочки, можно сделать коэффициент передачи при всех частотах p , больших критической, практически ничтожной величиной: цепочка «отфильтрует» все частоты выше критической.

Расчет вынужденных колебаний в цепочке при наличии затухания можно провести изложенным способом, пользуясь методом комплексных амплитуд. Цепочку однородных элементов можно представить в таком виде, как показано на рис. 237, где \bar{Z}_1 и \bar{Z}_2 — комплексные сопротивления последовательных и параллельных

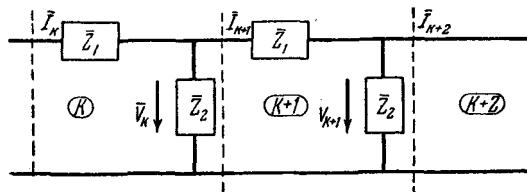


Рис. 237.

элементов звена цепочки соответственно, I_k — комплексная амплитуда тока через элемент \bar{Z}_1 в ячейке с индексом k , V_k — комплексная амплитуда напряжения на \bar{Z}_2 .

Уравнения токов в разветвлениях:

$$\frac{\bar{V}_k}{\bar{Z}_2} + \bar{I}_{k+1} = \bar{I}_k, \quad (89.25)$$

уравнения напряжений по замкнутому контуру:

$$-\bar{V}_k + \bar{I}_{k+1} \bar{Z}_1 + \bar{V}_{k+1} = 0. \quad (89.26)$$

Исключая токи из каждой пары уравнений (89.25) и (89.26), получим:

$$\bar{V}_k - \bar{V}_{k+1} \left(2 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \right) + \bar{V}_{k+2} = 0. \quad (89.27)$$

Каждое уравнение связывает напряжение на трех последовательных элементах. Для крайних ячеек нужно написать уравнения особо. Уравнения (89.27) похожи на (88.6), только коэффициент $2 + (\bar{Z}_1/\bar{Z}_2)$ — величина комплексная, и решение можно также искать в виде

$$\bar{V}_k = Ae^{\lambda k}.$$

Подставляя в (89.27), получаем уравнение для определения λ :

$$\operatorname{ch} \lambda = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2}.$$

Решая это уравнение и подбирая константы, чтобы удовлетворить условиям в первой и последней ячейках, получим вынужденные колебания для любой частоты p . Так как величина λ будет всегда комплексная, то распределение амплитуд представится тригонометрической функцией, умноженной на показательную функцию, и, кроме того, будет иметь место изменение фазы от ячейки к ячейке.

При маленьком затухании картина колебаний в цепочке будет близка к той, которую мы рассматривали для системы без затухания, только амплитуды не будут обращаться в бесконечность при резонансе, но будут велики.

ГЛАВА 3

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 90. Колебания в консервативных системах

Всю теорию колебаний в линейных системах со многими степенями свободы можно кратко изложить с помощью *матриц*. Систему уравнений (74.2) можно записать так:

$$M\ddot{x} + Kx = 0, \quad (90.1)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица масс или инерции,

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица жесткости или коэффициентов упругости,

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

— *n*-мерный вектор смещений. Матрица — совокупность n^2 величин — характеризует физические свойства системы (при определенном выборе координат). Для системы со многими степенями

свободы матрицы M и K — адекватные величины, определяющие ее физические свойства. Величины элементов матриц зависят от той «системы координат», в которой представлен вектор \bar{x} , или просто от выбора координат смещения. Если для механической системы с одной степенью свободы m и k — числа, определяющие ее физические свойства, а x — скаляр, определяющий ее движение, то для системы со многими степенями свободы вместо чисел выступают матрицы M и K , а вместо скаляра x — вектор \bar{x} . Вид основного уравнения (90.1) тот же самый, как и для системы с одной степенью свободы, только для системы с одной степенью свободы матрицы и векторы вырождаются в числа.

1. Собственные колебания

Собственное колебание с частотой ω_j можно записать так:

$$\bar{x}_j = \bar{x}_{0j} e^{i\omega_j t}, \quad (90.2)$$

где \bar{x}_{0j} — вектор амплитуд — не зависит от времени. Подставляя (90.2) в (90.1), получим уравнение

$$(K - \omega_j^2 M) \bar{x}_{0j} = 0,$$

или

$$M^{-1} K \bar{x}_{0j} = \omega_j^2 \bar{x}_{0j} \quad \text{и} \quad K^{-1} M \bar{x}_{0j} = \frac{1}{\omega_j^2} \bar{x}_{0j}. \quad (90.3)$$

Известно, что \bar{x}_{0j} будет отлично от нуля только в том случае, если ω_j^2 будет «собственным значением» матрицы $M^{-1}K$ и вектор \bar{x}_{0j} будет «собственным вектором» той же матрицы. Опять полная аналогия: для одной степени свободы $\omega^2 = k/m$, для многих степеней ω_j^2 равно собственному значению матрицы $M^{-1}K$. Поэтому матрицу $M^{-1}K$ можно называть «частотной» матрицей.

Квадраты собственных частот определяются из характеристического уравнения

$$|K - \lambda^2 M| = 0$$

или

$$|M^{-1}K - \lambda^2 E| = 0, \quad (90.4)$$

где E — единичная матрица. Это есть матричная запись уравнения для собственных частот (74.5) — «векового» уравнения. Его корни суть квадраты собственных частот.

Если все n корней уравнения (90.4) простые, то для каждой собственной частоты ω_j^2 из (90.3) найдем, с точностью до постоянной, амплитудный собственный вектор \bar{x}_{0j} , который мы запишем так:

$$\bar{x}_{0j} = C_j \bar{x}_j, \quad (90.5)$$

где C_j — произвольное число, вообще комплексное, а собственный вектор \bar{x}_j «нормирован», как и раньше; его компонента с индексом единица (или при каком-либо другом индексе) равна 1. Можно доказать (§ 74), что $\omega_j^2 > 0$ и \bar{x}_j имеют действительные компоненты. Поэтому j -е собственное колебание можно записать так:

$$\bar{x}_j = C_j \bar{x}_j e^{i\omega_j t} + C_{j0}^* \bar{x}_j e^{-i\omega_j t} = C_{j0} \bar{x}_j \cos(\omega_j t + \varphi_j), \quad (90.6)$$

где обозначено $2C_j = C_{j0} e^{i\varphi_j}$. Вектор \bar{x}_j можно называть вектором коэффициентов распределения амплитуд. C_{j0} и φ_j зависят от начальных условий.

Совокупность всех собственных колебаний, или, лучше сказать, любые собственные колебания системы можно записать так:

$$\bar{x}(t) = \sum_{j=1}^n C_{j0} \bar{x}_j \cos(\omega_j t + \varphi_j). \quad (90.7)$$

Вектор \bar{x}_j называют еще формой j -го собственного колебания.

2. Нормальные координаты

Вместо обычных координат можно выбрать новые (нормальные) координаты $\eta_i = C_{0i} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$; тогда на основании (90.7) формулы преобразования от новых координат η к старым представляются в таком виде:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^n \eta_j \bar{x}_j. \quad (90.8)$$

Если вектор \bar{x}_j имеет компоненты 1, x_{2j} , x_{3j} , ..., x_{nj} , то (90.8) в развернутом виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \eta_1 + \eta_3 + \dots + \eta_n, \\ x_2 &= x_{21}\eta_1 + x_{22}\eta_2 + \dots + x_{2n}\eta_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &= x_{n1}\eta_1 + x_{n2}\eta_2 + \dots + x_{nn}\eta_n, \end{aligned}$$

или, коротко, закон преобразования от нормальных координат к обычным можно записать в такой форме:

$$\bar{x} = \mathbf{A} \bar{\eta}, \quad (90.9)$$

где матрица \mathbf{A} , транспонированная к матрице коэффициентов распределения (74.17), столбцами которой будут составляющие векторов \bar{x}_j , а $\bar{\eta}$ имеет компонентами η_i — нормальные координаты. По определению, каждая j -я нормальная координата совершает гармоническое колебание с частотой ω_j ; поэтому матрица

$$\mathbf{A}^{-1} M^{-1} K \mathbf{A}$$

будет диагональная, состоящая из квадратов собственных частот системы. Действительно, подставляя (90.9) в (90.1) и умножая на $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}^{-1}$, получаем:

$$\ddot{\bar{\eta}} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{K}\bar{\eta} = 0, \quad (90.10)$$

сравнивая это с очевидными равенствами

$$\ddot{\bar{\eta}}_i + \omega_i^2 \bar{\eta}_i = 0,$$

приходим к сформулированному выше положению, которое теперь можно перефразировать так: «частотная» матрица $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ в нормальных координатах имеет диагональный вид.

3. Ортогональность

Кроме собственных векторов смещений \bar{x}_j , можно ввести и другие: «инерционный» собственный вектор $\bar{\psi}_j = \mathbf{M}\bar{x}_j$, и «упругий» собственный вектор $\bar{\chi}_j = \mathbf{K}\bar{x}_j$. Физический смысл этих векторов ясен: $\bar{\chi}_j$ — вектор амплитуд упругих сил при j -м собственном колебании, $\omega_j^2 \bar{\psi}_j$ — вектор амплитуд сил инерции при том же колебании. Тогда уравнение (90.3) примет вид:

$$\omega_j^2 \bar{\psi}_j + \bar{\chi}_j = 0. \quad (90.11)$$

Умножим скалярно это равенство на вектор \bar{x}_i и получим

$$\omega_j^2 (\bar{\psi}_j \bar{x}_i) + (\bar{\chi}_j \bar{x}_i) = 0. \quad (90.12)$$

Аналогичным образом найдем равенство

$$\omega_i^2 (\bar{x}_j \bar{\psi}_i) + (\bar{x}_j \bar{\chi}_i) = 0. \quad (90.13)$$

По определению

$$(\bar{x}_j \bar{\chi}_i) = (\bar{x}_j \mathbf{K} \bar{x}_i) \quad \text{и} \quad (\bar{x}_j \bar{\psi}_i) = (\bar{x}_j \mathbf{M} \bar{x}_i).$$

Если матрицы \mathbf{M} и \mathbf{K} симметричны, а для консервативных систем это всегда так (§ 73), то

$$(\bar{x}_j \bar{\chi}_i) = (\bar{\chi}_j \bar{x}_i) \quad \text{и} \quad (\bar{x}_j \bar{\psi}_i) = (\bar{\psi}_i \bar{x}_j);$$

учитывая это и вычитая (90.13) из (90.12), получим условия ортогональности

$$(\bar{x}_i \bar{\chi}_j) = 0 \quad \text{и} \quad (\bar{x}_i \bar{\psi}_j) = 0 \quad (90.14)$$

при $\omega_j \neq \omega_i$. Вектор амплитуд i -го собственного колебания ортогонален к упругому (или инерционному) амплитудному вектору любого другого собственного колебания. Заметим, что произведения $(\bar{x}_i \bar{\psi}_j) \omega_j^2$ и $(\bar{x}_j \bar{\chi}_i)$ имеют размерность энергии, поэтому условия (90.14) можно толковать как равенство нулю работы.

4. Внужденные колебания

Если внешние силы представлены вектором $\bar{F}_0 e^{ipl}$, где составляющие \bar{F}_0 — амплитуды сил, соответствующих каждой i -й координате, то уравнение колебаний имеет такой вид:

$$\bar{M}\ddot{\bar{x}} + \bar{K}\bar{x} = \bar{F}_0 e^{ipl}. \quad (90.15)$$

Обозначим искомое вынужденное колебание $\bar{x}_b = \bar{\xi} e^{ipl}$ и найдем для вектора амплитуд вынужденных колебаний:

$$(\bar{K} - p^2 \bar{M}) \bar{\xi} = \bar{F}_0, \quad (90.16)$$

или

$$\bar{\xi} = (\bar{K} - p^2 \bar{M})^{-1} \bar{F}_0.$$

Обратную матрицу можно записать в следующем виде:

$$(\bar{K} - p^2 \bar{M})^{-1} = \frac{A}{|\bar{K} - p^2 \bar{M}|}, \quad (90.17)$$

где A — матрица, союзная с матрицей $\bar{K} - p^2 \bar{M}$; сравнивая (90.16) и (90.17) и вспоминая (90.4), заключаем, что при $p \rightarrow \omega$; амплитуда вынужденных колебаний обращается в бесконечность. Это и означает, что при этих условиях в системе будет резонанс.

Так же кратко можно изложить и способ отыскания формы вынужденных колебаний при помощи разложения вектора $\bar{\xi}$ по собственным колебаниям (§ 84).

§ 91. О приближенных методах определения собственных частот и векторов

Отыскание собственных частот сводится к решению алгебраического уравнения высокого порядка (90.4), что практически представляет большие трудности. Поэтому при решении физических и технических задач часто прибегают к различным приближенным способам. Изложим здесь основы одного из этих методов (пожалуй, самого распространенного) — метода *итераций*.

Требуется найти собственные частоты и векторы системы, описываемой амплитудным уравнением

$$(\bar{K} - \lambda^2 \bar{M}) \bar{x}_0 = 0, \quad (91.1)$$

которое получено из основного уравнения (90.1) после подстановки $\bar{x} = \bar{x}_0 e^{i\lambda t}$. Низшая по величине частота ω_1 и соответствующий ей вектор \bar{x}_{01} находятся следующим путем.

Выбираем произвольно вектор \bar{a} с n компонентами; для сокращения операций желательно, чтобы вектор \bar{a} был близок к искомому \bar{x}_{01} , но принципиально это совсем не обязательно. Умножим

матрицу $K^{-1}M$ на \bar{a} и получим вектор следующего приближения:

$$\bar{a}_1 = K^{-1}M\bar{a}. \quad (91.2)$$

Повторяя ту же операцию над вектором \bar{a}_1 , получаем вектор второго приближения

$$\bar{a}_2 = K^{-1}M\bar{a}_1 = (K^{-1}M)^2 \bar{a}$$

и т. д. Можно показать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{a}_m = C \bar{x}_{01}, \quad (91.3)$$

где C — постоянная величина, и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\bar{a}_{m-1}}{\bar{a}_m} = \omega_1^2. \quad (91.4)$$

Действительно, любой вектор \bar{a} можно разложить по собственным векторам нашей задачи, или

$$\bar{a} = \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{x}_j. \quad (91.5)$$

Помножим это скалярно на $\bar{\psi}_i$ и, учитывая (90.14), найдем, что $\beta_i = (\bar{a} \bar{\psi}_i) / (\bar{x}_i \bar{\psi}_i)^*$.

Умножая матрицу $K^{-1}M$ на (91.5) и учитывая (90.3), получим:

$$\bar{a}_1 = K^{-1}M\bar{a} = \sum_{j=1}^n \beta_j K^{-1}M\bar{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_j^2} \beta_j \bar{x}_j, \quad (91.6)$$

продолжая эту операцию m раз, найдем вектор

$$\bar{a}_m = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\omega_j^{2m}} \bar{x}_j. \quad (91.7)$$

Допустим, что $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$. Теперь запишем (91.7) так:

$$\bar{a}_m = \frac{1}{\omega_1^{2m}} \left[\beta_1 \bar{x}_1 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\omega_1}{\omega_j} \right)^{2m} \beta_j \bar{x}_j \right], \quad (91.8)$$

очевидно, что при m достаточно большом сумма, стоящая в скобках, будет как угодно мала по сравнению с первым членом, ибо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\omega_1}{\omega_j} \right)^{2m} = 0.$$

* Величина $(\bar{x}_i \bar{\psi}_i) \neq 0$, так как она пропорциональна (78.2), аналогично и $(\bar{x}_i \bar{\chi}_i) \neq 0$.

После этого уже легко доказать справедливость формул (91.3) и (91.4).

Практически вычисления оканчиваются тогда, когда вектор \bar{a}_m будет отличаться на постоянный множитель от вектора \bar{a}_{m-1} , кстати этот множитель по (91.4) и будет равен $1/\omega^2$.

Для определения второй частоты ω_2 и \bar{x}_2 необходимо исходное приближение \bar{a} и все последующие приближения ортогонализировать к вектору $\bar{x}_1 = K\bar{x}_1$ (или к $\bar{\Psi}_1 = M\bar{x}_1$). Эту операцию делают так: прибавляют к \bar{a} вектор \bar{x}_1 , помноженный на такой множитель β , чтобы

$$([\bar{a} + \beta \bar{x}_1] \bar{x}_1) = 0. \quad (91.9)$$

Из этого условия находим множитель

$$\beta = -\frac{(\bar{a} \bar{x}_1)}{(\bar{x}_1 \bar{x}_1)}.$$

Таким образом, вектор

$$\bar{a} - \frac{(\bar{a} \bar{x}_1)}{(\bar{x}_1 \bar{x}_1)} \bar{x}_1 \quad (91.10)$$

всегда будет ортогонален к вектору \bar{x}_1 . Совершая процесс итерации над вектором (91.10), в результате найдем ω_2 и \bar{x}_2 . Из-за неизбежных ошибок при выкладках рекомендуется операцию ортогонализации производить после каждой итерации или через одну.

Аналогичным путем можно принципиально искать и более высокие частоты, если точность выкладок достаточна. Заметим, что вектор

$$\bar{a} - \frac{(\bar{a} \bar{x}_1)}{(\bar{x}_1 \bar{x}_1)} \bar{x}_1 - \frac{(\bar{a} \bar{x}_2)}{(\bar{x}_2 \bar{x}_2)} \bar{x}_2 \quad (91.11)$$

будет одновременно ортогонален к \bar{x}_1 и к \bar{x}_2 и т. д.

Формула (91.6) показывает, что, действуя матрицей $K^{-1}M$ на любой вектор \bar{a} , мы делим каждую j -ю его составляющую «вдоль» j -го собственного вектора $\beta_j \bar{x}_j$ на квадрат ее частоты ω_j^2 ; таким образом, в последующих приближениях компоненты более высоких частот относительно уменьшаются, образно сказать «отсеиваются», и в конце концов остается только первый вектор, соответствующий низшей из собственных частот ω_1 . Это и объясняет, что процесс итерации приводит к первому собственному вектору.

§ 92. Замечания

1. Все изложенное относится к тому случаю, когда система не имеет *кратных* собственных частот и частот, *равных нулю*. Случай кратных корней мы не будем здесь описывать. Случай равенства нулю одной или нескольких собственных частот фор-

мально соответствует выполнению условия $|K| = 0$, как можно видеть из (90.4), т. е. матрица K будет особенной и матрица K^{-1} не существует. Физически это будет иметь место для «свободных» систем, допускающих равномерное движение или вращение всей системы в целом. Например, механическая и электрическая системы (рис. 238) будут свободными. Для механических консервативных систем матрица M всегда будет неособенной, поэтому M^{-1} существует. В этом случае процесс итерации можно вести матрицей $M^{-1}K$, но он приведет к вектору \bar{x}_n , соответствующему наивысшей частоте ω_n^2 , как легко понять из рассмотрения (90.3).

2. Все ранее приведенные примеры колебаний можно проанализировать с помощью матриц, особенно наглядным будет применение этого метода для пространственного анизотропного осциллятора (§ 80). В этом случае вектор смещений в теории представляется действительным геометрическим вектором в обычном трехмерном пространстве, компоненты которого вдоль осей координат есть обычные координаты нашей системы. Матрица $M = mE$, где m — масса осциллятора, а K — симметричная матрица коэффициентов упругости системы. Направления трех взаимно ортогональных собственных векторов осциллятора совпадают с тремя главными направлениями матрицы жесткости K , вдоль которых возвращающая сила и смещение лежат на одной прямой. Колебания осциллятора будут происходить в одной плоскости, если эта плоскость проходит через два собственных вектора, здесь колебания происходят с двумя частотами, соответствующими этим векторам.

Расчет главных направлений очень прост. Пусть возвращающая сила, действующая на массу m , будет

$$\bar{F} = -K\bar{x}. \quad (92.1)$$

Найдем такие направления смещений $\bar{\xi}$, для которых вектор \bar{F} будет равен $-a\bar{\xi}$, где a — пока неизвестный скаляр. Это условие можно записать так:

$$-a\bar{\xi} = -K\bar{\xi} \quad \text{или} \quad (K - aE)\bar{\xi} = 0. \quad (92.2)$$

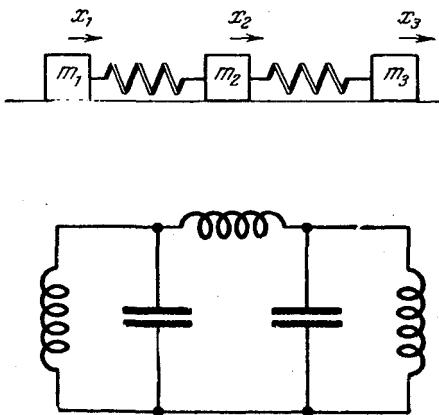


Рис. 238.

Искомые величины a_1, a_2, a_3 находятся из кубического уравнения
 $|K - aE| = 0,$ (92.3)

и являются собственными числами матрицы K , а соответствующие им векторы ξ_1, ξ_2, ξ_3 будут ее собственными векторами. И собственные частоты осциллятора:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{a_2}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{a_3}{m}}. \quad (92.4)$$

Так как матрица $m = mE$, то собственные векторы матрицы $M^{-1}K$ совпадают по направлению с собственными векторами матрицы K . Физически это означает, что различие и связь между координатами определяются анизотропией жесткостных (упругих) свойств системы.

3. Кинетическая энергия системы может быть записана так:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x} M \dot{x}), \quad (92.5)$$

потенциальная:

$$U = \frac{1}{2} (\bar{x} K \bar{x}). \quad (92.6)$$

Действительно, умножая скалярно (90.1) на $\dot{\bar{x}}$, получим:

$$(\dot{\bar{x}} M \ddot{\bar{x}}) + (\dot{\bar{x}} K \bar{x}) = 0, \quad (92.7)$$

а в силу симметрии матриц M и K полные производные

$$\frac{d}{dt} (\dot{x} M \dot{x}) = 2 (\dot{x} M \ddot{x}),$$

$$\frac{d}{dt} (\bar{x} K \bar{x}) = 2 (\dot{\bar{x}} K \bar{x}),$$

поэтому (92.7) можно переписать так:

$$\frac{d}{dt} \{(\dot{x} M \dot{x}) + (\bar{x} K \bar{x})\} = 0, \quad (92.8)$$

что и выражает закон сохранения энергии.

§ 93. Колебания в неконсервативных системах

Общее уравнение колебаний в системе с затуханием (83.3) теперь можно представить так:

$$M \ddot{\bar{x}} + H \dot{\bar{x}} + K \bar{x} = 0, \quad (93.1)$$

где H — матрица коэффициентов трения, $H \dot{\bar{x}}$ представляет диссипативные силы только тогда, когда матрица H симметрична и ее диагональные элементы положительны.

Матрица коэффициентов вязкого трения (матрица H) имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix},$$

при условии $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ и $\gamma_{ii} > 0$.

Уравнение вида (93.1) может описывать колебания не только в *пассивных системах*: механических при наличии вязкого трения, электрических цепей со средоточенными параметрами при наличии омического сопротивления и т. д., но и в *активных системах*, содержащих источники энергии и элементы направленного действия (усилители, сервомоторы и т. д.). В активных системах возможны не только затухающие, но и нарастающие колебания. Заметим, что для активных систем матрицы M , H , K могут быть *несимметричными*. Когда система содержит *однонаправленные* элементы (ламповые усилители, сервомоторы и т. д.), тогда по крайней мере одна из матриц M , H , K несимметрична.

Если матрицы M и K симметричны, то, умножая (93.1) на $\dot{\bar{x}}$ и преобразуя, получаем закон сохранения энергии

$$\frac{d}{dt} \{(\dot{\bar{x}} M \dot{\bar{x}}) + (\bar{x} K \bar{x})\} = -(\dot{\bar{x}} H \dot{\bar{x}}), \quad (93.2)$$

следовательно, величина $(\dot{\bar{x}} H \dot{\bar{x}})$, имеющая размерность мощности, определяет скорость изменения энергии в системе.

1. Собственные колебания

Теорию таких колебаний в неконсервативной системе удобнее излагать, если перейти от системы уравнений второго порядка (93.1) к системе уравнений первого порядка. Это эквивалентно введению новой системы динамических переменных; для механической системы вместо координат смещений (принимаем в качестве независимых координат и смещения, и скорости), для электрической — токи и напряжения и т. д. Такие координаты в физике называют *фазовыми координатами*.

Введем вектор \bar{u} с $2n$ компонентами:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \bar{x} \end{pmatrix}; \quad (93.3)$$

первые n -компонент — скорости, остальные — смещения. Теперь систему уравнений (93.1) можно представить:

$$M\dot{\bar{w}} + H\bar{w} + K\bar{x} = 0, \quad \dot{\bar{x}} - \bar{w} = 0, \quad (93.4)$$

или, полагая, что матрица M неособенная,

$$\ddot{w} + M^{-1}H\bar{w} + M^{-1}K\bar{x} = 0, \quad \dot{\bar{x}} - \bar{w} = 0. \quad (93.5)$$

Учитывая (93.3), эту систему запишем следующим образом:

$$\ddot{\bar{u}} + B\bar{u} = 0, \quad (93.6)$$

где матрица B имеет $2n$ строк и $2n$ столбцов; в «клеточном» виде ее можно записать так:

$$B = \begin{pmatrix} M^{-1}H & M^{-1}K \\ -E & 0 \end{pmatrix}. \quad (93.7)$$

Частное решение (93.6) представим следующим образом:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 e^{\lambda t}. \quad (93.8)$$

Тогда амплитудный вектор \bar{u}_0 удовлетворяет уравнению

$$\lambda \bar{u}_0 + B\bar{u}_0 = 0, \quad (93.9)$$

а собственная частота определяется из характеристического уравнения

$$|\lambda E + B| = 0. \quad (93.10)$$

Матрица B имеет действительные элементы, поэтому корни алгебраического уравнения $2n$ порядка (93.10) будут или действительными, или комплексно-сопряженными. Для действительных корней и собственных векторов решение (93.9) будет иметь действительные компоненты. Для комплексных корней и компоненты собственного вектора будут комплексные.

Далее будем считать, что все корни уравнения (93.10) будут простыми и комплексно-сопряженными. Каждому корню λ_j будет соответствовать комплексно-сопряженный λ_j^* , и поэтому собственное колебание можно записать так:

$$\bar{u}_j = C_j \bar{u}_{0j} e^{\lambda_j t} + C_j^* \bar{u}_{0j}^* e^{\lambda_j^* t} = 2 \operatorname{Re} [C_j \bar{u}_{0j} e^{\lambda_j t}]. \quad (93.11)$$

Если собственная частота $\lambda_j = -\delta_j + i\omega_j$, и собственный вектор $\bar{u}_{0j} = \bar{u}_{0j}^d + i\bar{u}_{0j}^M$, а константа $C_j = C_{0j} e^{i\varphi_j}$, то (93.11) после очевидных преобразований примет такой вид:

$$\bar{u}_j = 2C_{0j} e^{-\delta_j t} [\bar{u}_{0j}^d \cos(\omega_j t + \varphi_j) - \bar{u}_{0j}^M \sin(\omega_j t + \varphi_j)]. \quad (93.12)$$

Собственное колебание характеризуется коэффициентом затухания δ_j и частотой гармонического сомножителя ω_j — все коорди-

наты затухают с одним показателем δ_j и колеблются с одной частотой ω_j . Но каждая координата имеет свою начальную фазу, вообще отличную от фазы остальных, или косинусоидальная компонента имеет одно распределение амплитуд $\bar{u}_{0j}^{\text{д}}$, а синусоидальная — другое $\bar{u}_{0j}^{\text{м}}$. Теперь можно и так сказать: «форма» собственного колебания определяется двумя векторами $\bar{u}_{0j}^{\text{д}}$ и $\bar{u}_{0j}^{\text{м}}$.

Собственные колебания, возникающие после любых начальных условий, будут представлены такой формулой:

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^n [C_j \bar{u}_{0j} e^{\lambda_j t} + C_j^* \bar{u}_{0j}^* e^{\lambda_j^* t}] = 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} [C_j \bar{u}_{0j} e^{\lambda_j t}]. \quad (93.13)$$

Заметим, что этим выражением можно пользоваться и в случае действительных корней, для которых $\omega_j = i\alpha_j$. Тогда пара членов в (93.13) будет представлять два лимитационных движения, соответствующих корням — $\delta_j - \alpha_j$ и $-\delta_j + \alpha_j$. Конечно, возможен и случай $\alpha_j = 0$; тогда пара представляет одно движение. Так как δ_j могут быть положительными и отрицательными, то среди собственных колебательных движений возможны как нарастающие, так и затухающие. В пассивной системе около устойчивого равновесия возможны только затухающие колебательные и лимитационные собственные движения.

Величины C_j определяются из начальных условий $\dot{x}(0)$ и $\ddot{x}(0)$ или из следующих уравнений:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{u}}(0) \\ \ddot{\bar{u}}(0) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n C_j \bar{u}_{0j} + C_j^* \bar{u}_{0j}^*, \quad (93.14)$$

конечно, если нам известны все собственные векторы \bar{u}_{0j} . Как решить эту систему, мы скажем немного далее (93.28).

2. Нормальные координаты

Так же, как и для консервативной системы, и здесь можно ввести *нормальные координаты*, но они в этом случае комплексные. Пусть нам известны все λ_j и \bar{u}_{0j} для данной системы, тогда введем, пока формально, новые координаты

$$\eta_j = C_j e^{\lambda_j t}, \quad (93.15)$$

которые и будем называть комплексными нормальными координатами. Тогда на основе соотношения (93.13) можем записать связь между старыми и нормальными координатами в следующем виде:

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^n \eta_j \bar{u}_{0j} + \eta_j^* \bar{u}_{0j}^* = \sum_{j=1}^n (\eta_j^{\text{д}} \bar{u}_{0j}^{\text{д}} - \eta_j^{\text{м}} \bar{u}_{0j}^{\text{м}}), \quad (93.16)$$

где, очевидно, $\eta_j = \eta_j^{\text{д}} + i\eta_j^{\text{м}}$. Эти формулы можно считать формулами преобразования от нормальных координат η к обычным динамическим переменным u . Название комплексная координата не должно нас смущать, так как формулы (93.16) представляют связь между $2n$ динамическими переменными x и \dot{x} и новыми действительными координатами — величинами $\eta^{\text{д}}$ и $\eta^{\text{м}}$. Запись в виде комплексной величины $\eta = \eta^{\text{д}} + i\eta^{\text{м}}$ — только удобная для вычислений форма записи.

Далее мы покажем, что система (93.16) имеет однозначное решение, и тогда по данным обычным динамическим координатам всегда найдем соответствующие им нормальные.

Но прежде остановимся подробнее на толковании и нагляд-

ном представлении нормальных координат (или собственных колебаний) в неконсервативной системе. В консервативной системе нормальная координата совершает гармоническое движение, а в данном случае комплексная нормальная координата равна $C_j e^{i\omega_j t}$ и имеет две компоненты: действительную — $C_{0j} e^{-\delta_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_j)$ и мнимую — $C_{0j} e^{-\delta_j t} \sin(\omega_j t + \varphi_j)$, поэтому комплексную нормальную координату лучше представлять вектором на комплексной плоскости переменного η (рис. 239). Вектор η_j вращается с угловой скоростью ω_j и убывает по модулю со временем по закону $e^{-\delta_j t}$. Вектор \bar{u}_{0j} имеет комплексные компоненты, поэтому их также удобно изобразить векторами на плоскости комплексного переменного.

На рис. 240а изображены шесть векторов системы с тремя степенями свободы, представляющих компоненты одного собственного колебания. Все эти шесть векторов образуют одну-единую «звездочку» в том смысле, что углы векторов не изменяются со временем. Умножим каждый из векторов «звездочки»

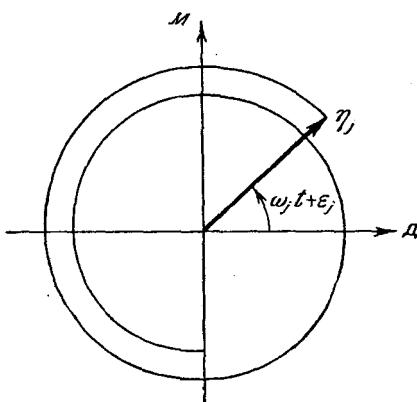


Рис. 239.

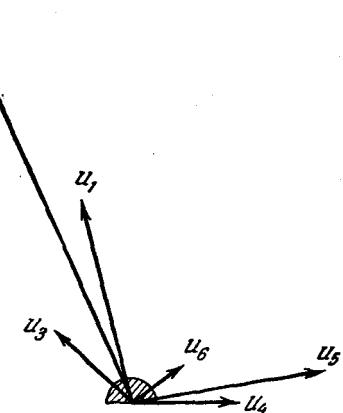


Рис. 240а.

на нормальную координату η ; тогда проекции векторов на действительную ось будут давать половину соответствующей координаты или скорости (рис. 240б): проекция $\eta u_1 = \frac{1}{2} \dot{x}_1$, проекция $\eta u_2 = \frac{1}{2} \dot{x}_2$ и т. д., проекция $\eta u_6 = \frac{1}{2} x_3$. Звездочка уменьшается со временем по закону $e^{-\delta t}$ и вращается с угловой скоростью ω .

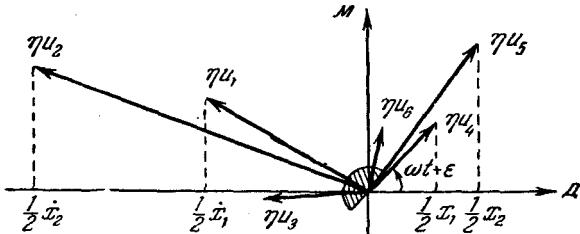


Рис. 240б.

Как видно, в данном нормальном колебании динамические переменные колеблются с разными фазами, но представляющие их векторы — комплексные числа u_1, u_2, \dots, u_6 сохраняют неизменными углы между ними и относительную величину, поэтому «звездочку» (рис. 240а) уже с полным правом можно назвать *формой* нормального или собственного колебания, форма звездочки остается неизменной во времени, наподобие формы собственного колебания в консервативной системе. Здесь форму представляют комплексные компоненты векторов, а там — действительные.

3. Ортогональность

Собственный вектор частоты λ_i , определяется из уравнения (93.9), которое запишем так:

$$\lambda_i \bar{u}_{oi} + B \bar{u}_{oi} = 0. \quad (93.17)$$

Для того чтобы найти векторы, к которым будут ортогональны собственные векторы \bar{u}_{oi} , рассмотрим векторы сопряженной (или транспонированной) системы

$$\lambda_i^* \bar{v}_{oi} + \tilde{B} \bar{v}_{oi} = 0, \quad (93.18)$$

где \tilde{B} — матрица, транспонированная к B , а λ_i — собственная частота рассматриваемой системы. Легко показать, что λ_i и \bar{v}_{oi} будут собственными частотами и векторами некоторой воображаемой системы, описываемой уравнением

$$\dot{\bar{v}} + \tilde{B} \bar{v} = 0. \quad (93.19)$$

где, очевидно, $\eta_j = \eta_j^{\text{д}} + i\eta_j^{\text{м}}$. Эти формулы можно считать формулами преобразования от нормальных координат η к обычным динамическим переменным u . Название комплексная координата

не должно нас смущать, так как формулы (93.16) представляют связь между $2n$ динамическими переменными x и \dot{x} и новыми действительными координатами — величинами $\eta^{\text{д}}$ и $\eta^{\text{м}}$. Запись в виде комплексной величины $\eta = \eta^{\text{д}} + i\eta^{\text{м}}$ — только удобная для вычислений форма записи.

Далее мы покажем, что система (93.16) имеет однозначное решение, и тогда по данным обычным динамическим координатам всегда найдем соответствующие им нормальные.

Но прежде остановимся подробнее на толковании и нагляд-

ном представлении нормальных координат (или собственных колебаний) в неконсервативной системе. В консервативной системе нормальная координата совершает u_2 гармоническое движение, а в данном случае комплексная нормальная координата равна $C_j e^{i\omega_j t}$ и имеет две компоненты: действительную $-C_{0j} e^{-\delta_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_j)$ и мнимую $-C_{0j} e^{-\delta_j t} \sin(\omega_j t + \varphi_j)$, поэтому комплексную нормальную координату лучше представлять вектором на комплексной плоскости переменного η (рис. 239). Вектор η_j вращается с угловой скоростью ω_j и убывает по модулю со временем по закону $e^{-\delta_j t}$. Вектор \bar{u}_{0j} имеет комплексные компоненты, поэтому их также удобно изобразить векторами на плоскости комплексного переменного.

На рис. 240а изображены шесть векторов системы с тремя степенями свободы, представляющих компоненты одного собственного колебания. Все эти шесть векторов образуют одну-единую «звездочку» в том смысле, что углы векторов не изменяются со временем. Умножим каждый из векторов «звездочки»

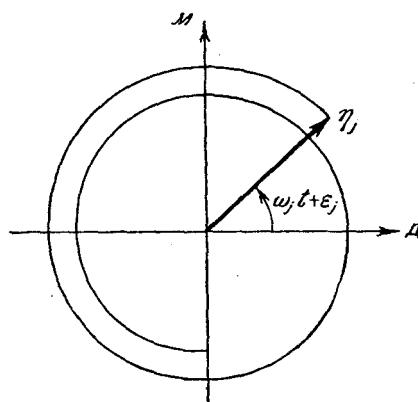


Рис. 239.

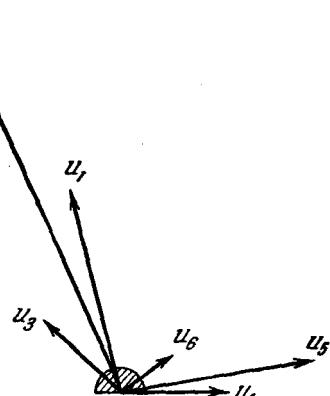


Рис. 240а.

на нормальную координату η ; тогда проекции векторов на действительную ось будут давать половину соответствующей координаты или скорости (рис. 240б): проекция $\eta u_1 = \frac{1}{2} \dot{x}_1$, проекция $\eta u_2 = \frac{1}{2} \dot{x}_2$ и т. д., проекция $\eta u_6 = \frac{1}{2} \dot{x}_3$. Звездочка уменьшается со временем по закону e^{-8t} и вращается с угловой скоростью ω .

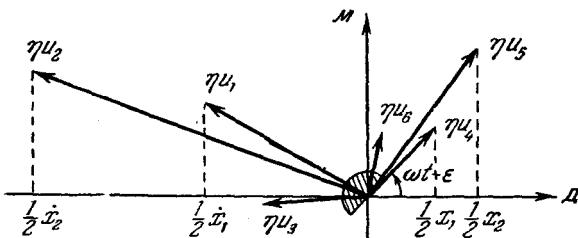


Рис. 240б.

Как видно, в данном нормальном колебании динамические переменные колеблются с разными фазами, но представляющие их векторы — комплексные числа u_1, u_2, \dots, u_6 сохраняют неизменными углы между ними и относительную величину, поэтому «звездочку» (рис. 240а) уже с полным правом можно назвать *формой* нормального или собственного колебания, форма звездочки остается неизменной во времени, наподобие формы собственного колебания в консервативной системе. Здесь форму представляют комплексные компоненты векторов, а там — действительные.

3. Ортогональность

Собственный вектор частоты λ_i определяется из уравнения (93.9), которое запишем так:

$$\lambda_i \bar{u}_{oj} + B \bar{u}_{oj} = 0. \quad (93.17)$$

Для того чтобы найти векторы, к которым будут ортогональны собственные векторы \bar{u}_{oj} , рассмотрим векторы сопряженной (или транспонированной) системы

$$\lambda_i^* \bar{v}_{oi} + \tilde{B} \bar{v}_{oi} = 0, \quad (93.18)$$

где \tilde{B} — матрица, транспонированная к B , а λ_i^* — собственная частота рассматриваемой системы. Легко показать, что λ_i и \bar{v}_{oi} будут собственными частотами и векторами некоторой воображаемой системы, описываемой уравнением

$$\dot{\bar{v}} + \tilde{B} \bar{v} = 0. \quad (93.19)$$

Теперь можно показать, что собственные векторы \bar{u}_{0j} рассматриваемой системы будут ортогональны к собственным векторам \bar{v}_{0i} транспонированной системы. Иными словами, скалярное произведение

$$(\bar{v}_{0i} \bar{u}_{0j}) = 0 \quad (93.20)$$

при $\lambda_j \neq \lambda_i$. Заметим, что в данном случае мы имеем дело со скалярным произведением векторов с комплексными компонентами, и поэтому каждая компонента первого вектора множится на комплексно-сопряженную компоненту второго. Поэтому

$$(\bar{a}\bar{b}) = (\bar{b}\bar{a})^* = (\bar{b}^*\bar{a}^*) \quad \text{и} \quad (A\bar{a}\bar{b}) = (\bar{a}A^*\bar{b}).$$

Умножая скалярно (93.17) слева на \bar{v}_{0i} , а (93.18) справа на \bar{u}_{0j} , получим:

$$\begin{aligned} (\bar{v}_{0i} \lambda_j \bar{u}_{0j}) + (\bar{v}_{0i} B \bar{u}_{0j}) &= 0, \\ (\lambda_j^* \bar{v}_{0i} \bar{u}_{0j}) + (\bar{B} \bar{v}_{0i} \bar{u}_{0j}) &= 0. \end{aligned} \quad (93.21)$$

Эти уравнения можно переписать так:

$$\begin{aligned} \lambda_j^* (\bar{v}_{0i} \bar{u}_{0j}) + (\bar{v}_{0i} B \bar{u}_{0j}) &= 0, \\ \lambda_i^* (\bar{v}_{0i} \bar{u}_{0j}) + (\bar{v}_{0i} B \bar{u}_{0j}) &= 0, \end{aligned} \quad (93.22)$$

ибо $\bar{B}^* = \bar{B}$, так как матрица B имеет действительные элементы. Из (93.22) следует

$$(\lambda_j^* - \lambda_i^*) (\bar{v}_{0i} \bar{u}_{0j}) = 0, \quad (93.23)$$

а отсюда вытекает (93.20), или *условие ортогональности*.

Скалярные произведения

$$(\bar{v}_{0j} \bar{u}_{0j}) \neq 0, \quad (93.24)$$

так как \bar{v}_{0j}^* и \bar{u}_{0j} соответствуют одному и тому же собственному числу λ_j . Подставляя в (93.21) \bar{v}_{0j} , получим:

$$\lambda_j^* = - \frac{(\bar{v}_{0j} B \bar{u}_{0j})}{(\bar{v}_{0j} \bar{u}_{0j})}, \quad (93.25)$$

которое является определенным конечным числом, так же как и $(\bar{v}_{0j} B \bar{u}_{0j})$. Строгое доказательство того, что $(\bar{v}_{0j} \bar{u}_{0j}) \neq 0$ и $(\bar{v}_{0j} B \bar{u}_{0j}) \neq 0$, мы опускаем, оно не сложно, но длинно. Подчеркнем, что при выкладках следует помнить о соответствии между \bar{v}_{0j} и λ_j^* , а также \bar{u}_{0j} и λ_j .

Теперь легко доказать, что любой вектор \bar{a} в пространстве динамических переменных \bar{x} , $\dot{\bar{x}}$ может быть разложен по собствен-

ным векторам \bar{u}_{0j} , рассматриваемой системы. Действительно, пусть

$$\bar{a} = \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{u}_{0j} + \beta'_j \bar{u}_{0j}^*, \quad (93.26)$$

тогда, умножая справа скалярно на \bar{v}_{0i} и \bar{v}_{0i}^* , получаем:

$$\begin{aligned} (\bar{a} \bar{v}_{0i}) &= \beta_i (\bar{u}_{0i} \bar{v}_{0i}), \\ (\bar{a} \bar{v}_{0i}^*) &= \beta'_i (\bar{u}_{0i}^* \bar{v}_{0i}^*) \end{aligned} \quad (93.27)$$

— уравнения для определения коэффициентов β_i и β'_i . Если вектор \bar{a} имеет действительные компоненты, то $\beta_i^* = \beta_i$.

После этого можно определить константы C_i в общем выражении для собственных колебаний (93.13), зная начальные условия $\bar{u}(0)$. Действительно, умножая справа (93.14) на \bar{v}_{0i} , получим:

$$C_i = \frac{(\bar{u}(0) \bar{v}_{0i})}{(\bar{u}_{0i} \bar{v}_{0i})}. \quad (93.28)$$

Аналогичным путем можно представить нормальные координаты через динамические переменные. В самом деле, умножая (93.16) на \bar{v}_{0i} , получим:

$$\eta_i = \frac{(\bar{u} \bar{v}_{0i})}{(\bar{u}_{0i} \bar{v}_{0i})} \quad (93.29)$$

— величину нормальной координаты η_i , соответствующую данному вектору \bar{u} динамических переменных, или формулы преобразования от обычных координат к нормальным.

4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Допустим, что на нашу систему действует внешняя сила

$$\bar{f} = \bar{f}_0 e^{pt} + \bar{f}_0^* e^{p^* t}, \quad (93.30)$$

где p — комплексное число, комплексная частота внешней силы, представляющей затухающее (или нарастающее) колебание, причем начальные фазы сил, действующих на различные координаты, могут быть различными. Тогда уравнение вынужденных колебаний будет:

$$M\ddot{\bar{x}} + H\dot{\bar{x}} + K\bar{x} = \bar{f}, \quad (93.31)$$

где

$$\bar{x} = \bar{x}_0 e^{pt} + \bar{x}_0^* e^{p^* t}. \quad (93.32)$$

Эту систему можно записать также и в динамических переменных; запишем сразу в амплитудах

$$p\bar{u}_0 + B\bar{u}_0 = \bar{F}_0, \quad (93.33)$$

где обозначено $\bar{F}_0 = \begin{pmatrix} M^{-1} \bar{f}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, матрицу B (см. (93.7)). Для определения составляющих вектора \bar{u}_0 разложим силовой вектор \bar{F}_0 и вектор \bar{u}_0 по собственным векторам нашей системы \bar{u}_{0j} . Пусть

$$\bar{F}_0 = \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{u}_{0j} + \beta'_j \bar{u}_{0j}^* \quad (93.34)$$

и

$$\bar{u}_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{u}_{0j} + \alpha'_j \bar{u}_{0j}^*. \quad (93.35)$$

Подставляя (93.34) и (93.35) в уравнение (93.33), находим:

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{p - \lambda_j}, \quad \alpha'_j = \frac{\beta'_j}{p - \lambda_j^*}, \quad (93.36)$$

и теперь вектор \bar{u}_0 можно записать так:

$$\bar{u}_0 = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{p - \lambda_j} \bar{u}_{0j} + \frac{\beta'_j}{p - \lambda_j^*} \bar{u}_{0j}^*. \quad (93.37)$$

Окончательно вынужденное колебание примет вид

$$\bar{u}_b = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\beta_j e^{pt}}{p - \lambda_j} + \frac{\beta_j^* e^{p^* t}}{p - \lambda_j^*} \right] \bar{u}_{0j}. \quad (93.38)$$

Формула показывает, что при $p \approx \lambda_k$ будет иметь место *резонанс*, среди всех составляющих будет преобладать та, которая соответствует \bar{u}_{0k} и приближенно вынужденные колебания можно представить так:

$$\bar{u}_b \approx 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\beta_k e^{pt}}{p - \lambda_k} \bar{u}_{0k} \right]. \quad (93.39)$$

Форма вынужденного колебания будет близка к форме соответствующего собственного колебания. При точном равенстве $p = \lambda_k$ выражение для вынужденных колебаний следует записать несколько иначе.

§ 94. Физический смысл скалярных произведений комплексных векторов сил и смещений

Пусть вектор $\bar{F}_0 e^{\lambda_1 t}$ представляет колебания сил, соответствующих смещениям, описываемым вектором $\bar{x}_0 e^{\lambda_2 t}$, который совершает колебания с частотой λ_2 . Работу этих сил на заданных смещениях, по определению, в случае затухающих колебаний ($\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$) можно записать:

$$W = \int_0^\infty (\bar{F}_0 e^{\lambda_1 t} + \bar{F}_0^* e^{\lambda_1^* t}) (\lambda_2 \bar{x}_0 e^{\lambda_2 t} + \lambda_2^* \bar{x}_0^* e^{\lambda_2^* t}) dt. \quad (94.1)$$

При $t \rightarrow \infty$ колебания будут равны нулю и, следовательно,

$$W = -2 \operatorname{Re} \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_3} (\bar{F}_0 \bar{x}_0^*) + \frac{\lambda_3^*}{\lambda_1 + \lambda_3^*} (\bar{F}_0 \bar{x}_0) \right], \quad (94.2)$$

работа сил представляется действительной частью от скалярных произведений векторов сил на векторы смещений, умноженных на соответствующие коэффициенты. Напомним, что $2 \operatorname{Re} F_0$ представляют значения сил при $t = 0$, а $2 \operatorname{Re} \bar{x}_0$ — смещения при $t = 0$.

В случае одинаковых частот $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta + i\omega$ формула (94.2) будет иметь вид:

$$W = \operatorname{Re} \left[(\bar{F}_0 \bar{x}_0^*) + (\bar{F}_0 \bar{x}_0) - \frac{i\omega}{\delta} (\bar{F}_0 \bar{x}_0) \right]. \quad (94.3)$$

Заметим, что формулой (94.2) можно пользоваться и для приближенной оценки работы нарастающих колебаний за время от $t = 0$ до $t = T$, если $e^{-(\delta_1 + \delta_2)T} \gg 1$. Только в этом случае вместо вектора \bar{F}_0 следует поставить вектор $F_0 e^{\lambda_1 T}$, а вместо вектора \bar{x}_0 — вектор $\bar{x}_0 e^{\lambda_2 T}$ и переменить знак перед окончательным выражением *).

Таким образом, зная скалярные произведения комплексных векторов сил и смещений и их комплексные частоты, мы можем по формуле (94.2) определить работу во всей системе за время от 0 до ∞ для затухающих колебаний. Для нарастающих колебаний с помощью формулы (94.2), или еще более точной, можем определить работу за время от t_1 до $t_1 + T$.

В связи с общими выражениями для работы заметим, что условие ортогональности (93.20) можно еще и так записать:

$$(\bar{v}_{0j} \bar{u}_{0i}) = (\lambda_j^* + \lambda_i^*) (\bar{y}_{0j} M \bar{x}_{0i}) + (\bar{y}_{0j} H \bar{x}_{0i}) = 0, \quad (94.4)$$

где \bar{x}_{0i} — собственный вектор смещений (часть \bar{u}_{0i}), ведь по определению $\bar{u}_{0i} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{0i} \\ \bar{y}_{0i} \end{pmatrix}$, а \bar{y}_{0j} — вектор смещений, удовлетворяющий уравнению

$$\lambda_j^{*2} \tilde{M} \bar{y}_{0j} + \lambda_j^* \tilde{H} \bar{y}_{0j} + \tilde{K} \bar{y}_{0j} = 0, \quad (94.5)$$

сопряженному с основным. Формулу (94.4) легко можно получить, если указать, что \bar{v}_{0j} записывается через решение уравнения (94.1) \bar{y}_{0j} следующим образом:

$$\bar{v}_{0j} = \begin{pmatrix} \tilde{M} \bar{y}_{0j} \\ \lambda_j^* \tilde{M} \bar{y}_{0j} + \tilde{H} \bar{y}_{0j} \end{pmatrix}, \quad (94.6)$$

которое также можно найти, если выписать (93.18) в матрицах \tilde{M} , \tilde{H} и \tilde{K} .

Итак, рассматривая формулу (94.4), видим, что скалярное произведение амплитудных векторов, динамических переменных \bar{u}_{0i} и сопряженных им \bar{v}_{0i} выражаются через скалярные произведения амплитудных векторов, смысл которых нетрудно установить: \bar{y}_{0i} — вектор смещений, $M \bar{x}_{0i}$ — инерционный вектор, вектор $H \bar{x}_{0i}$ можно назвать вектором «трения». Произведения, входящие в (94.4), имеют размерность действия (энергия \times время).

Так как \bar{x}_{0i} удовлетворяет уравнению

$$\lambda_i^2 M \bar{x}_{0i} + \lambda_i H \bar{x}_{0i} + K \bar{x}_{0i} = 0, \quad (94.7)$$

*.) Нетрудно получить из (94.1) и точную формулу для работы в общем случае от $t = t_1$ до $t = t_1 + T$, в которую будут входить уже четыре члена.

то входящие в (94.4) скалярные произведения удовлетворяют очевидному равенству

$$\lambda_i^{*2} (\bar{y}_{0j} M \bar{x}_{0i}) + \lambda_i^* (\bar{y}_{0j} H \bar{x}_{0i}) + (\bar{y}_{0j} K \bar{x}_{0i}) = 0, \quad (94.8)$$

которое получено умножением \bar{y}_{0j} слева на (94.7). Следовательно, условие ортогональности (94.4) устанавливает определенное соотношение между двумя из трех скалярных произведений, входящих в равенство (94.8). Вычитая (94.4) из (94.8), можно видеть, что условие ортогональности приводит к следующему соотношению:

$$(\bar{y}_{0j} K \bar{x}_{0i}) - \lambda_j^* \lambda_i^* (\bar{y}_{0j} M \bar{x}_{0i}) = 0. \quad (94.9)$$

Это равенство, как и (94.8), имеет размерность энергии. Первое произведение представляет работу сил упругости одного тона на смещении любого другого тона сопряженной системы.

§ 95. Метод Бубнова — Галеркина

Практически определение частот и форм колебаний для системы с большим числом степеней свободы, даже при использовании электронно-вычислительных машин, представляет большие трудности. Поэтому очень часто пользуются приближенными методами, например способом итерации, описанным ранее, и др. Способ итерации можно применить и для неконсервативных систем, но мы опишем здесь другой метод, применяемый при решении технических задач, — метод Бубнова — Галеркина *).

Преимущество этого метода в том, что задача о колебаниях в системе со многими степенями свободы сводится к решению эквивалентной задачи с малым числом переменных.

Путь решения таков. Допустим, что приближенное решение можно представить суммой

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m q_i(t) \bar{x}_i^r, \quad (95.1)$$

где $m < n$ или $m \ll n$ и \bar{x}_i^r — заданные постоянные векторы смещений, близкие, по нашему мнению, к формам тех колебаний, которые мы желаем найти. Векторы \bar{x}_i^r мы выбираем, исходя или из наблюдений, или из сравнения с формами колебаний известных нам систем, сходных с исследуемой. Вектор \bar{x}_i^r имеет n компонент и считается данным, требуется определить $q_i(t)$, которые и можно назвать «галеркинскими координатами». Подставляя (95.1) в уравнение системы (93.1), получаем вектор

$$\bar{\Phi} = \sum_{i=1}^m (\ddot{q}_i M + \dot{q}_i H + K) \bar{x}_i^r. \quad (95.2)$$

Вектор $\bar{\Phi}$ вообще отличен от нуля. Равенство $\bar{\Phi} = 0$ означало бы, что (95.1) есть точное решение (93.1). Компоненты вектора $\bar{\Phi}$ можно толковать как силы реакции связей, наложенных на систему и обеспечивающих движение с за-

*.) Раньше этот метод называли методом Галеркина. Но за последние годы выяснилось, что проф. И. Г. Бубнов в «Известиях С. Петербургского Морского института» изложил его в 1913 г. за два года до появления в 1915 г. известной работы акад. Б. В. Галеркина.

данными формами, определяемыми \bar{x}_i^r . По предложению И. Г. Бубнова будем считать эти связи идеальными, что означает: работа сил реакций связи на любом возможном перемещении должна быть равна нулю. Пусть возможное перемещение, допускаемое связями, будет:

$$\delta \bar{x} = \sum_{j=1}^m \delta q_j \bar{x}_j^r. \quad (95.3)$$

Тогда условие идеальности связей можно записать:

$$(\bar{\Phi} \delta \bar{x}) = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^m (\bar{\Phi} \bar{x}_j^r) \delta q_j = 0. \quad (95.4)$$

В силу независимости возможных перемещений (изменений) координат δq_i равенство (95.4) равносильно следующим:

$$(\bar{\Phi} \bar{x}_j^r) = 0, \quad (95.5)$$

где $j = 1, 2, \dots, m$; эти условия означают ортогональность вектора $\bar{\Phi}$ ко всем векторам \bar{x}_j^r . Подставляя в (95.5) значения $\bar{\Phi}$ из (95.2), получаем систему уравнений для определения q_i в таком виде:

$$\sum_{i=1}^m [\ddot{q}_i (M \bar{x}_i^r \bar{x}_j^r) + \dot{q}_i (H \bar{x}_i^r \bar{x}_j^r) + q_i (K \bar{x}_i^r \bar{x}_j^r)] = 0 \quad (95.6)$$

для всех значений $j = 1, 2, \dots, m$. Систему (95.6) можно толковать как эквивалентную основной (93.1), в векторном виде она записывается так:

$$M^r \ddot{\bar{q}} + H^r \dot{\bar{q}} + K^r \bar{q} = 0, \quad (95.7)$$

где вектор \bar{q} имеет компоненты q_1, q_2, \dots, q_m и элементы матриц M^r, H^r и K^r определяются соответственными скалярными произведениями

$$(\bar{x}_i^r \tilde{M} \bar{x}_j^r), \quad (\bar{x}_i^r \tilde{H} \bar{x}_j^r) \text{ и } (\bar{x}_i^r \tilde{K} \bar{x}_j^r).$$

Собственные частоты эквивалентной системы (95.7) будут приближенными частотами основной системы, а по собственным векторам \bar{q}_i^r можно определить приближенно некоторые собственные векторы системы (93.1).

Существенные преимущества этого метода дает при небольших значениях m , например $n = 40$, а $m = 2$ или 3. Но в этом случае успех обеспечен, если \bar{x}_i^r выбраны близко к точным искомым формам. Так как обычно точное решение совсем неизвестно, то определить точность полученного решения очень трудно.

Однако можно дать некоторую условную оценку точности решения таким путем. Пусть мы рассматриваем решение (95.7), имеющее собственную частоту μ_j и собственный вектор \bar{q}_j^0 . Подставляя это решение в (95.2), найдем вектор амплитуд сил реакций, соответствующих этому решению:

$$\bar{\Phi}_j^0 = \mu_j^2 \sum_{i=1}^m q_{ji}^0 M \bar{x}_i^r + \mu_j \sum_{i=1}^m q_{ji}^0 H \bar{x}_i^r + \sum_{i=1}^m q_{ji}^0 K \bar{x}_i^r, \quad (95.8)$$

где q_{ji} — i -я компонента вектора \bar{q}_j^0 . Ради удобства дальнейших выкладок перепишем формулу (95.8) так:

$$\bar{\Phi}_j^0 = \mu_j^0 \bar{a}_j + \mu_j^1 \bar{b}_j + \bar{c}_j; \quad (95.9)$$

принятые здесь обозначения очевидны из сравнения с (95.8). Будем считать: $(\bar{\Phi}_j^0 \bar{\Phi}_j^0)$ — мерой сил реакций связей при j -м колебании, $\mu_j^0 \mu_j^{**} (\bar{a}_j \bar{a}_j)$ — мерой сил инерции при j -м колебании, а $\mu_j \mu_j (\bar{b}_j \bar{b}_j)$ и $(\bar{c}_j \bar{c}_j)$ — мерами сил трения и упругости соответственно. Определим среднюю из мер физических сил в приближенном решении:

$$A_j = \frac{1}{3} [\mu_j^0 \mu_j^{**} (\bar{a}_j \bar{a}_j) + \mu_j \mu_j (\bar{b}_j \bar{b}_j) + (\bar{c}_j \bar{c}_j)]. \quad (95.10)$$

Тогда величину

$$\varepsilon_j = \frac{(\bar{\Phi}_j^0 \bar{\Phi}_j^0)}{A_j}$$

можно принять за условную меру неточности полученного решения, так как в случае точного решения $\varepsilon_j = 0$. А из физических соображений, очевидно, тем больше полученное решение будет отличаться от истинного, чем относительно большую величину имеют силы связей при данном решении. Все наши рассуждения были бы достаточно строги, если бы можно было определить среднюю из мер физических сил точного решения, а не приближенного, как это сделали мы.

ГЛАВА 4

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 96. Одномерная система с распределенными параметрами

Продольные колебания в упругом однородном стержне или колебания в трубе с газом мы представляем себе как колебания системы с бесконечным числом степеней свободы; в данном случае имеют место колебания частиц стержня вдоль его оси. При анализе колебаний в системах с конечным числом степеней свободы всегда считалось, что система состоит из элементов, обладающих только одним определенным физическим свойством. Так, например, цепочка масс и пружинок состоит из *невесомых упругих пружинок и абсолютно жестких масс*. Каждый элемент системы обладает или только *жесткостью* (пружина), или только *инертностью* (масса)*). Каждый как угодно малый элемент стержня обладает *и жесткостью и массой*, и величина жесткости и массы зависит от свойств материала стержня и размеров этого элемента, поэтому такие системы называют *системами с распределенными параметрами*.

Составим уравнение продольных колебаний однородного стержня (или газа в трубе). Обозначим координату частиц, находящихся в каком-то поперечном сечении стержня в состоянии покоя, через x , а смещение частиц этого сечения вдоль оси стержня при колебаниях — через y (рис. 241).

Пусть площадь поперечного сечения стержня S , объемная плотность материала ρ , длина стержня l и модуль упругости материала E . Упругие силы, которые возникают в стержне при перемещении отдельных сечений, можно определить следующим путем.

*) Стого говоря, в действительности это всегда не так; но колебания при низких частотах, как уже указывалось выше, могут рассматриваться с помощью таких систем.

Возьмем элемент стержня длиною dx в недеформированном состоянии и находящийся около сечения с координатой x ; тогда длина этого элемента при деформации будет:

$$dx + y(x + dx) - y(x) = dx + \frac{\partial y}{\partial x} dx.$$

Следовательно, изменение длины элемента равно

$$\frac{\partial y}{\partial x} dx.$$

Элемент будет сжат или растянут. Если элемент dx находится в покое, то силы, приложенные к нему со стороны остальных

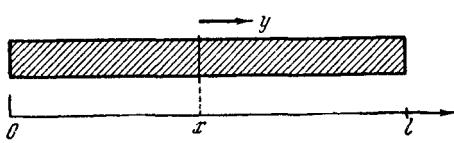


Рис. 241.

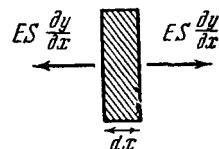


Рис. 242.

частей стержня, одинаковы с обеих сторон элемента и противоположны (рис. 242). При достаточно малых деформациях эти силы по закону Гука равны

$$ES \frac{\partial y}{\partial x}.$$

В случае трубы с газом давление на выделенный элемент dx будет равно

$$\kappa p_0 \left[1 - \frac{\partial y}{\partial x} \right], \quad (96.1)$$

где κ — коэффициент адиабаты и p_0 — давление в покое. Это справедливо при малых деформациях, когда $\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$.

Координата x обозначает определенное сечение стержня, вернее, координату материальных частиц данного сечения в покое, она аналогична номеру звена в однородной цепочке; поэтому на рис. 242 dx обозначает тот элемент, который в покое имел длину dx . Смещение y при колебаниях будет функцией двух переменных: времени t и координаты x . При колебаниях, при движении элемента dx в направлении оси стержня сумма сил, приложенных к нему со стороны соседних элементов, не будет равна нулю, она

должна быть равна массе этого элемента, умноженной на ускорение (рис. 243). Масса элемента $\rho S dx$, ускорение $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, поэтому

$$\rho S dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = ES \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x + dx - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right], \quad (96.2)$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (96.3)$$

Это есть волновое уравнение смещений сечений стержня относительно y . Уравнение колебаний было бы значительно сложнее, если бы ρ и E зависели от x , но составить его можно таким же путем, как и для однородного стержня, если при плавном изменении ρ , S и E полагать, что смещения всех частиц в любом поперечном сечении одинаковы.

Уравнение колебаний смещения y в трубе с газом при адиабатическом законе, как видно из (96.1), и равенства, аналогичного (96.2), будет такое:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\kappa p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

где ρ_0 — плотность газа в покое.

Волновое уравнение вида (96.3) мы получим при рассмотрении колебаний кручения однородных стержней (рис. 244). Там вместо смещения y будет входить угол закручивания φ , вместо ρ — мас-

совый момент инерции единицы длины I , вместо E — жесткость стержня на кручение; для круглых стержней эта величина равна $G I_p$, где G — модуль сдвига, а I_p — момент инерции площади поперечного сечения относительно центра.

Следует также указать, что малые поперечные колебания идеально натянутой струны подчиняются волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

где $y(x, t)$ — смещение точки из положения равновесия, T — напряжение струны, ρ — масса единицы длины (рис. 245).

Мы придем к волновому уравнению, если будем рассматривать электромагнитные колебания в системе, состоящей из двух

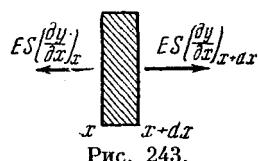


Рис. 243.

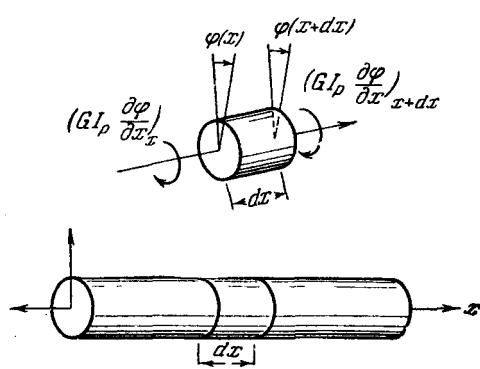


Рис. 244.

параллельных проводов (рис. 246). Точное решение задачи об электромагнитных колебаниях в двух параллельных проводниках длины l должно быть проведено на основе уравнений Максвелла и представляет довольно сложную задачу.

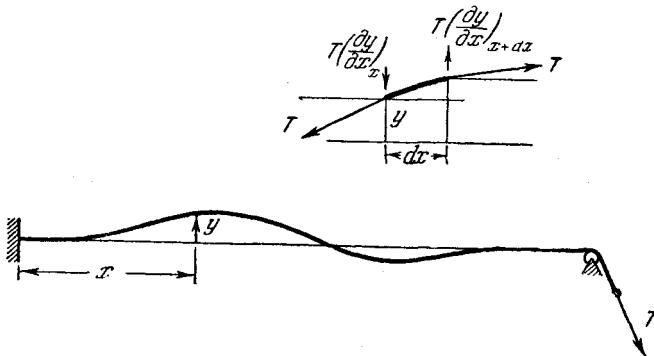


Рис. 245.

Однако если расстояние между проводами d очень мало по сравнению с длиной линии l и сопротивление проводников также мало, то электромагнитное поле вблизи отрезка линии dx (находящегося на расстоянии x от начала) можно приближенно рассматривать как поле, создаваемое зарядами $Q(x)$ и токами $I(x)$,

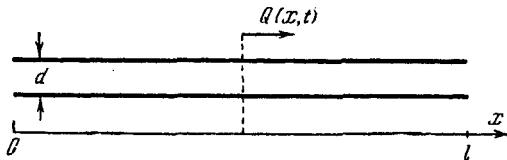


Рис. 246.

имеющими место в данный момент на проводах участка dx , причем эти поля имеют такой же характер, как если бы участок dx был выделен из бесконечно длинной линии с равномерным распределением по длине зарядов $Q(x) = Q_0$ и токов $I(x) = I_0$, и поэтому линии электрического и магнитного поля вне проводников лежат в плоскости, перпендикулярной к проводам. В теории электромагнитного поля показывается, что это положение справедливо для бесконечной линии из идеальных проводников (сопротивление которых равно нулю); для нашей задачи оно справедливо только приближенно.

*) И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, 1957.

Пусть через каждое сечение провода с координатой x к моменту времени t прошло количество электричества $Q_1(x, t)$ и $Q_2(x, t)$ (рис. 247). Тогда, если при колебаниях линии электрического поля оканчиваются только на этих проводах *), то

$$Q_1(x, t) + Q_2(x, t) = 0.$$

Отсюда следует, что токи в каждом сечении линии будут в обоих проводах равны и противоположны. Действительно,

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = - \frac{\partial Q_2}{\partial t},$$

или, если обозначим ток $I(x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t}$, то

$$I_1(x, t) = -I_2(x, t).$$

Далее можно отбросить индексы и просто положить, что если в первом проводе ток $I(x, t)$, то ток, идущий во втором проводе,

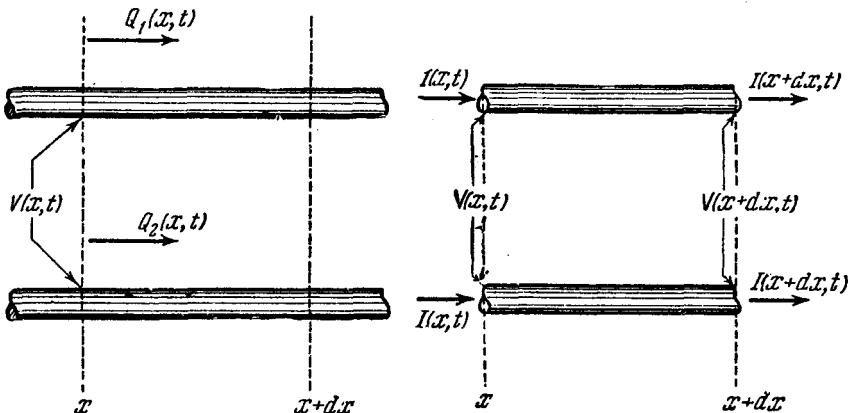


Рис. 247.

Рис. 248.

противоположен и равен ему; так же и для количества электричества $Q(x, t)$.

Разность потенциалов между проводами $V(x, t)$ элемента dx связана емкостью с зарядами на них. Если обозначим емкость между проводами единицы длины линии через C_0 , то емкость между проводами на участке dx будет $C_0 dx$. Заряд на отрезке провода длиною dx будет:

$$Q(x) - Q(x + dx) = -\frac{\partial Q}{\partial x} dx;$$

*.) Иными словами, другие проводники не принимают участия в колебаниях.

этот заряд связан с разностью потенциалов $V(x, t)$ так:

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} dx = C_0 dx V,$$

или

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = C_0 V. \quad (96.4)$$

Падение разности потенциалов V вдоль проводов определяется сопротивлением проводов и индуктивностью. Пусть сопротивление единицы длины линии R_0 ; тогда уравнение разности потенциалов по контуру, образованному проводами на участке dx , и линиями, соединяющими концы отрезков проводов (рис. 248):

$$V(x + dx, t) + R_0 dx I(x, t) - V(x, t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (96.5)$$

где Φ — магнитный поток через контур. Если обозначим индуктивность единицы длины проводов L_0 , то магнитный поток Φ определяется током $I(x, t)$ или

$$\Phi(x, t) = L_0 dx I(x, t). \quad (96.6)$$

Подставляя (96.6) и (96.5) и преобразуя, получаем второе уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -R_0 I - L_0 \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (96.7)$$

Из двух уравнений (96.4) и (96.7) можно получить одно уравнение для зарядов $Q(x, t)$ в таком виде:

$$L_0 C_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + R_0 C_0 \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (96.8)$$

учитывая, что $I = \frac{\partial Q}{\partial t}$, или для напряжений:

$$L_0 C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + R_0 C_0 \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (96.9)$$

Уравнение такого же вида можно записать и для токов. Уравнения вида (96.8) или (96.9) называются *телеграфными уравнениями*.

Если пренебречь омическим сопротивлением проводов, положить $R_0 = 0$, то получим волновое уравнение для Q

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \text{ и для } V \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{L_0 C_0} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (96.10)$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$.

К волновому уравнению можно прийти также, если рассматривать распределенную систему как предельный случай системы с сосредоточенными элементами, когда величина элементов неограниченно уменьшается, а число их соответственно неограничено увеличивается. Возьмем фильтр низкой частоты (рис. 234) и будем делить каждую его ячейку на две одинаковые, так, чтобы индуктивность и емкость всех ячеек оставались постоянными. Продолжая такое деление последовательно одно за другим, в пределе придем к системе с *распределенной индуктивностью* и с *распределенной емкостью*. Система уравнений цепочки (88.1) превратится в пределе в волновое уравнение вида (96.10), роль индекса ячейки в нем играет координата x .

Таким образом, колебания любого элемента рассматриваемых однородных распределенных систем без трения (без сопротивления) определяются *волновым уравнением*, например (96.3) или (96.10). Это означает, что в такой системе может распространяться *неискаженная волна* или имеет место такое решение:

$$y(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (96.11)$$

где f_1 и f_2 — любые функции своего аргумента, а c — скорость распространения волны. Распространение волны в сторону увеличения x показано на рис. 249; если в некоторый момент $t = 0$, $y = f_0(x)$ (рис. 249, а), то смещение y через время t_1 будет иметь вид, показанный на рис. 249, б, т. е. «волна смещения f передвинулась» на величину ct_1 без искажений.

Для стержня скорость распространения волны

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (96.12)$$

Она зависит только от материала стержня, увеличение модуля упругости E ведет к увеличению скорости, увеличение плотности материала стержня ρ , наоборот, уменьшает скорость распространения волны.

Для электрических волн вдоль проводов скорость распространения будет равна

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (96.13)$$

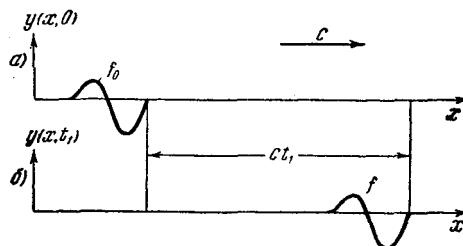


Рис. 249.

Из теории электричества известно, что емкость единицы длины двух параллельных проводов равна

$$C_0 = \frac{\epsilon}{4 \ln \frac{d}{b}} \quad (\text{при } d \gg b), \quad (96.14)$$

где d — расстояние между проводами, b — радиус провода, ϵ — диэлектрическая постоянная среды, окружающей провода, а индуктивность единицы длины проводов равна

$$L_0 = \frac{4\mu}{c_0^2} \ln \frac{d}{b} \quad (\text{при } d \gg b), \quad (96.15)$$

где μ — магнитная проницаемость среды, окружающей провода, а c_0 — скорость света в пустоте. Подставляя (96.14) и (96.15) в (96.13), получаем:

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\mu \epsilon}}, \quad (96.16)$$

т. е. скорость распространения волны зависит только от свойств среды. Перемножив (96.14) и (96.15) и учитывая (96.16), получаем:

$$L_0 = \frac{1}{c^2 C_0} \text{ или } C_0 = \frac{1}{c^2 L_0}.$$

Связь между распределенной индуктивностью и емкостью определяется только средой, а не расположением и величиной диаметра проводников.

§ 97. Собственные продольные колебания однородного стержня и двухпроводной линии без затухания

Собственные продольные колебания упругого стержня определенной длины зависят не только от волнового уравнения (96.3), но и от условий на концах стержня. Волна, бегущая вдоль стержня, будет отражаться от конца, а закон отражения ее определяется физическими условиями на конце.

Например, *концы стержня закреплены*, значит,

$$y(0, t) = 0 \text{ и } y(l, t) = 0, \quad (97.1)$$

где l — длина стержня, начало стержня соответствует координате $x = 0$. Одна волна, бегущая к концу стержня, очевидно, не может удовлетворить условиям (97.1) в каждый момент времени. Поэтому должна возникнуть отраженная волна, бегущая от конца, волна такого вида: сумма *двух волн*, приближающейся и удаляющейся, удовлетворяет условию на конце (97.1).

Когда концы стержня свободны, тогда

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=l} = 0. \quad (97.2)$$

Если на конце стержня с координатой l действует сила пружины, «опирающейся» на незакрепленную массу m (рис. 250), то условие на этом конце можно составить следующим образом. Обозначим смещение массы m из положения равновесия через z , тогда сила пружины, действующей на стержень, будет:

$$k[z - y(l)] = -m \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad (97.3)$$

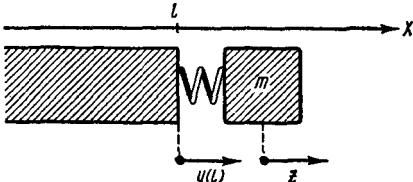


Рис. 250.

где k — коэффициент жесткости пружины. Сила пружины должна быть равна силе деформации элемента на конце:

$$ES \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=l} * . \quad (97.4)$$

Сравнивая (97.3) и (97.4), получаем два уравнения, из которых можно исключить z и \ddot{z} , и условие на конце стержня с координатой l будет:

$$ES \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=l} + \frac{m}{k} \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} \right)_{x=l} \right] + m \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x=l} = 0. \quad (97.5)$$

Точно таким же образом можно записать условие и на другом конце $x = 0$, только производная $\frac{\partial y}{\partial x}$ будет входить с другим знаком. Условие (97.5) представляет общий случай, и оно в пределе при $m \rightarrow 0$ дает то же самое, что и условие (97.2); а при $m \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$ — то же, что и условие (97.1). Это очевидно из простых физических соображений: если $m \rightarrow 0$, то пружина, полагаемая нами невесомой, не может произвести никакого силового воздействия; если $m \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$, то никакая сила не вызовет за конечное время перемещения этого конца стержня. Можно таким же путем учесть силы трения на конце колеблющегося стержня.

Для однородной электрической системы, состоящей из двух параллельных проводов определенной длины, условия на концах просто записать. Они будут различными в зависимости от того, что подключено к линии на конце.

*) Предполагается, что между пружиной и стержнем имеется «невесомый жесткий элемент», передающий усилие между ними.

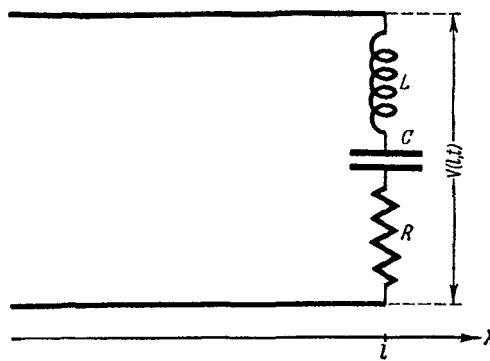
Пусть в общем случае на конце $x = l$ подключена цепь, показанная на рис. 251, состоящая из индуктивности L , емкости C и сопротивления R , включенных последовательно. Тогда условие на конце следует записать так:

$$V(l, t) = L \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right)_{x=l} + R \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_{x=l} + \frac{1}{C} Q(l, t), \quad (97.6)$$

или, если вспомним (96.4), то условие (97.6) будет наложено только на колебания заряда на конце линии

$$L \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right)_{x=l} + R \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_{x=l} + \frac{1}{C} Q(l) + \frac{1}{C_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{x=l} = 0. \quad (97.7)$$

Его также можно записать и для тока, и для потенциала. Когда такая цепь будет включена на конце $x = 0$, условие для этого конца будет аналогично



(97.7), только у $\frac{\partial Q}{\partial x}$ будет другой знак.

Из (97.7) предельным переходом просто получить условия на концах в различных частных случаях. Например, если концы линии *закорочены* (значит, $L \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$, $C \rightarrow \infty$), то

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{x=l} = 0, \quad (97.8)$$

Рис. 251.

или по (96.4)

$$V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = 0,$$

что очевидно из элементарных соображений. Если концы линии *разомкнуты* ($C \rightarrow 0$), то

$$Q(0, t) = 0, \quad Q(l, t) = 0,$$

или

$$I(0, t) = 0, \quad I(l, t) = 0, \quad (97.9)$$

что также очевидно непосредственно.

Зная волновое уравнение для потенциала V вдоль линии (96.10) и условия на концах, можно рассмотреть собственные колебания в линии, предполагая, что волны распространяются от одного конца до другого и отражаются на концах в соответствии с граничными условиями. Но такой метод анализа собствен-

ных колебаний не всегда удобен; чаще гораздо удобнее анализировать колебания методом *стоячих волн*, о которых будет идти речь далее.

Вспоминая собственные колебания в цепочке однородных элементов § 88, можно предположить частное решение волнового уравнения для заряда Q в виде *стоячей волны*:

$$Q(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (97.10)$$

где X есть функция только координаты, а T — только времени.

Подставляя (97.10) в волновое уравнение для заряда (96.10), получаем:

$$\frac{d^2T}{dt^2} X = c^2 T \frac{d^2X}{dx^2} \text{ или } \frac{\frac{d^2T}{dt^2}}{T} = c^2 \frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{X}. \quad (97.11)$$

Так как в (97.11) справа стоит функция только x , а слева — только t , то равенство имеет силу в том случае, когда каждая половина равна одной и той же постоянной величине, например — ω^2 . Тогда уравнение (97.11) эквивалентно двум:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0, \quad \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0. \quad (97.12)$$

Очевидно, что общие решения этих уравнений могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} T &= A \cos \omega t + B \sin \omega t, \\ X &= C \cos \frac{\omega}{c} x + D \sin \frac{\omega}{c} x, \end{aligned} \quad (97.13)$$

где A, B, C и D — постоянные величины, которые вместе с ω должны быть подобраны так, чтобы (97.13) удовлетворяло условиям на концах линии.

При различных условиях на концах получим совершенно различные решения этой задачи. Рассмотрим задачу для какого-либо одного случая, например линии, разомкнутой на одном конце $x = 0$, закороченной на втором $x = l$. В других случаях решение идет аналогичным путем. Следовательно, при любом t функция $X(x)$ должна удовлетворять по (97.8) и (97.9) условиям

$$X(0) = 0, \quad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=l} = 0,$$

или, подставляя сюда (97.13), получаем:

$$C = 0, \quad \frac{D\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = 0; \quad (97.14)$$

D может быть любой величиной, но не равной нулю, следовательно, ω должна быть подобрана так, чтобы выполнялось второе равенство из (97.14). Трансцендентное уравнение

$$\cos \frac{\omega t}{c} = 0$$

имеет бесчисленное множество решений, а именно:

$$\omega_s = \frac{\pi c}{2l} (2s + 1), \quad \text{где } s = 0, 1, 2, \dots \quad (97.15)$$

Из (97.13) видно, что ω имеет физический смысл частоты колебаний. Таким образом, ω_s — собственные частоты колебаний системы. Число собственных частот бесконечно, как и следовало ожидать, ибо система имеет бесконечное число степеней свободы.

Следовательно, в данном случае можно частное решение (97.10) записать в таком виде:

$$Q_s(x, t) = D_s \sin \frac{\omega_s}{c} x \sin (\omega_s t + \varphi_s), \quad (97.16)$$

где вместо констант A , B и D введены две: D_s и φ_s . Для каждой собственной частоты ω_s можно написать (97.16), поэтому общее решение будет

$$Q(x, t) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x, t) = \sum_{s=0}^{\infty} D_s \sin \frac{\omega_s x}{c} \sin (\omega_s t + \varphi_s), \quad (97.17)$$

где постоянные D_s и φ_s определяются начальными условиями, как показано ниже.

Каждое собственное колебание (97.16) представляет синусоидальную стоячую волну: заряд в каждой точке колеблется со временем гармонически в фазе (или в противофазе) с колебаниями заряда в любой другой точке, амплитуды колебаний во всех точках вообще различны. Распределение амплитуд колебаний вдоль линии, представленное функцией $\sin \frac{\omega_s x}{c}$, можно назвать формой собственного колебания. Для нескольких первых частот распределение амплитуд колебаний заряда вдоль линии показано на рис. 252. Форма собственных колебаний заряда для каждой частоты представляет синусоиду, которая проходит через нуль на одном конце линии ($x = 0$) и имеет максимум на другом конце линии ($x = l$). Все это можно установить из простых физических рассуждений, если считать известным, что форма колебаний должна быть синусоидальной. Точки, в которых амплитуда колебаний всегда равна нулю, называются узлами, а те точки, в которых она максимальна, — пучностями. В данном случае мы рас-

сматриваем форму собственных колебаний заряда Q , а так как ток $I = \frac{\partial Q}{\partial t}$, то такая же форма будет иметь место и для колебаний тока. Поэтому можно просто сказать: каждое собственное колебание в однородной линии будет иметь такую форму колебаний тока, при которой узел находится на *разомкнутом* конце, а *пучность* — на *замкнутом*. Зная это, можно просто вычислить собственные частоты ω_s .

Расстояние между двумя соседними узлами (или пучностями) называют *половиной длины волны*. Длину волны обозначают через λ_s , поэтому по (97.16)

$$\lambda_s = \frac{2\pi c}{\omega_s}. \quad (97.18)$$

Если обозначить период собственных колебаний

$$\tau_s = \frac{2\pi}{\omega_s}, \text{ то}$$

$$\lambda_s = c\tau_s, \quad (97.19)$$

т. е. длина волны равна пути, который проходит волна в линии за период собственных колебаний. Поэтому λ_s называют *длиной собственной волны* системы. В нашем случае по рис. 252 длина линии l всегда равна нечетному числу четвертой собственной волны, или по (97.15) и (97.19)

$$l = \frac{\lambda_s}{4}(2s + 1), \text{ где } s = 0, 1, 2, 3, \dots$$

С помощью этого равенства просто определять значения длин собственных волн:

$$\lambda_s = \frac{4l}{2s + 1}, \text{ где } s = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (97.20)$$

При анализе собственных колебаний в однородной распределенной системе с граничными условиями типа (97.8) и (97.9), соответствующими закрепленным или свободным концам стержня *), руководствуясь соображениями относительно расположения

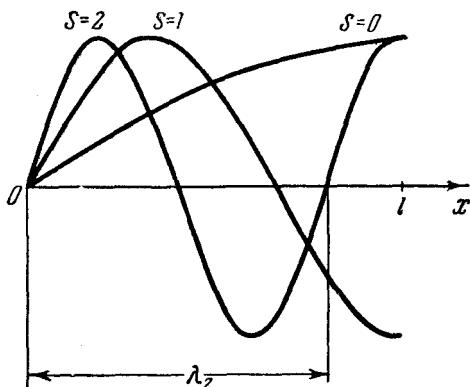


Рис. 252.

*) Или разомкнутой, или закороченной на концах линии двух параллельных проводов.

узлов и пучностей, можно сразу написать формулу, аналогичную (97.20), для определения длин собственных волн, а затем по (97.19) найти собственные частоты, зная скорость распространения волны c .

Например, для стержня, закрепленного с обоих концов (или разомкнутой на концах линии), на концах будут узлы колебаний смещений (зарядов и токов). Для стержня со свободными концами (или замкнутой линии) на концах будут пучности колебаний смещений (или зарядов и токов). Поэтому длина стержня (или линии) l равна целому числу половин собственных волн λ_s :

$$l = \frac{\lambda_s s}{2};$$

отсюда

$$\lambda_s = \frac{2l}{s}, \quad (97.21)$$

где $s = 1, 2, 3, 4, \dots$. Следовательно, по (97.19) собственные частоты будут равны:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{\tau_s} = \frac{2\pi c}{\lambda_s} = \frac{\pi c s}{l}. \quad (97.22)$$

Подставляя сюда значение скорости распространения волн, получаем собственные частоты: для продольных колебаний стержня, заделанного с концов (или свободного):

$$\omega_s = \frac{\pi s}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad s = 1, 2, 3, \dots, \quad (97.23)$$

где E — модуль упругости, а ρ — плотность; для электрических колебаний в системе двух параллельных проводов длины l , закорченных или разомкнутых на концах:

$$\omega_s = \frac{\pi s c}{l \sqrt{\epsilon \mu}}, \quad s = 1, 2, 3, \dots, \quad (97.24)$$

где ϵ и μ — диэлектрическая и магнитная постоянные среды, окружающей линию, $c_0 \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/сек — скорость света в пустоте.

Рассмотрим собственные колебания при данных начальных условиях в электрической линии, разомкнутой на обоих концах. Легко установить, что собственные колебания заряда в данном случае аналогично формуле (97.17) можно записать так:

$$Q(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} D_s \cos \frac{\omega_s}{c} x \sin (\omega_s t + \varphi_s), \quad (97.25)$$

где ω_s определяется по (97.24), а D_s и φ_s — постоянные. Пусть в начальный момент $t = 0$ в линии имеет место распределение зарядов $Q_0(x)$ и токов $I_0(x)$ или

$$Q(x, 0) = Q_0(x), \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_{t=0} = I_0(x).$$

Тогда, подставляя сюда (97.25), получаем:

$$Q_0(x) = \sum_{s=1}^{\infty} D_s \cos \frac{\omega_s x}{c} \sin \varphi_s,$$

$$I_0(x) = \sum_{s=1}^{\infty} D_s \omega_s \cos \frac{\omega_s x}{c} \cos \varphi_s;$$

или, подставляя значение ω_s по (97.24),

$$Q_0(x) = \sum_{s=1}^{\infty} D_s \sin \varphi_s \cos \frac{\pi s x}{l},$$

$$I_0(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\pi s c}{l} D_s \cos \varphi_s \cos \frac{\pi s x}{l}.$$

Мы получили разложение заданных функций Q_0 и I_0 в тригонометрический ряд. Поэтому постоянные D_s и φ_s могут быть определены из следующих, известных из теории тригонометрических рядов, уравнений:

$$\begin{aligned} D_s \sin \varphi_s &= \frac{2}{l} \int_0^l Q_0(x) \cos \frac{\pi s x}{l} dx, \\ D_s \cos \varphi_s &= \frac{2}{\pi s c} \int_0^l I_0(x) \cos \frac{\pi s x}{l} dx, \end{aligned} \tag{97.26}$$

где $s = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, если задано начальное распределение токов $I_0(x)$ и зарядов $Q_0(x)$, то однозначно определены амплитуды D_s (амплитуды в пучности) собственных колебаний заряда и начальные фазы для каждого колебания φ_s . Зная все эти величины, легко найти колебания других величин: тока, разности потенциалов между проводами.

Следует помнить, что под $Q(x, t)$ мы понимаем заряд, прошедший через данное сечение x к моменту времени t , и поэтому разность потенциалов между проводами V пропорциональна $\frac{\partial Q}{\partial x}$

[формула (96.4)]. Обычно задана разность потенциалов $V_0(x)$; тогда по (96.4)

$$V_0(x) = -\frac{1}{C_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{t=0}$$

или

$$Q_0(x) = -C_0 \int_0^x V_0(\xi) d\xi.$$

Анализ и расчет собственных колебаний системы без затухания при неоднородных условиях на конце, например такого вида, как показано формулой (97.7) при $R = 0$, производятся так же, но только выкладки становятся более громоздкими.

§ 98. Пример собственных колебаний при неоднородных граничных условиях

Для того чтобы показать путь определения собственных частот и собственных колебаний при включении на конце линии какого-либо элемента, рассмотрим собственные колебания в линии с конденсатором C на одном конце и замкнутой на другом (рис. 253).

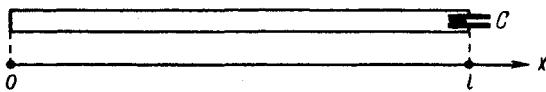


Рис. 253.

В этом случае по (97.7) граничные условия запишутся следующим образом:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad Q(l, t) + \frac{C}{C_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{x=l} = 0. \quad (98.1)$$

Подставляя сюда решение по (97.10) и (97.13), получаем:

$$D = 0, \quad C \left[\cos \frac{\omega l}{c} - \frac{\omega C}{c C_0} \sin \frac{\omega l}{c} \right] = 0. \quad (98.2)$$

Второе равенство (98.2) и дает уравнение для определения собственных частот, которое следует переписать так:

$$\operatorname{ctg} \frac{\omega l}{c} = \frac{C}{C^*} \frac{\omega l}{c}, \quad (98.3)$$

где $C^* = lC_0$ — емкость всей линии. Уравнение (98.3) обычно решают графическим путем. На рис. 254 $\xi = \frac{\omega l}{c}$; тогда корни уравнения (98.3) будут соответствовать значениям $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$, которые представляют абсциссы пересечения прямой $(C/C^*) \xi$ с котангенсойдой. Найдя ξ_1, ξ_2, \dots , получаем

собственные частоты:

$$\omega_1 = \frac{\xi_1 c}{l}, \quad \omega_2 = \frac{\xi_2 c}{l}, \dots \quad (98.4)$$

Из построения (рис. 254) видно, что когда $C \ll C^*$, емкость на конце много меньше емкости всей линии, тогда собственные частоты будут близки к частотам линии, разомкнутой на одном и закороченной на другом конце, они будут иметь значения, близкие к тем, которые можно получить из формул (97.18) и (97.20). Последнее очевидно из элементарных соображений; если емкость на конце очень мала по сравнению с емкостью всей линии, то этот случай близок к разомкнутой на этом конце линии.

Точно так же из построения рис. 254 и простых рассуждений ясно, что при $C \gg C^*$ собственные частоты будут близки к собственным частотам замкнутой на обоих концах линии (97.22).

После того как найдены собственные частоты $\omega_1, \omega_2, \dots$, подставляют значения их в (97.13), учитывают (98.2) и находят форму колебаний для каждого из собственных колебаний. На рис. 255 примерно изображены

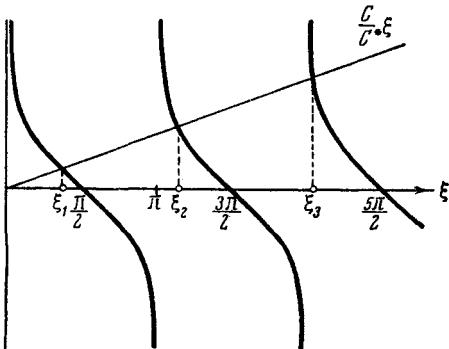


Рис. 254.

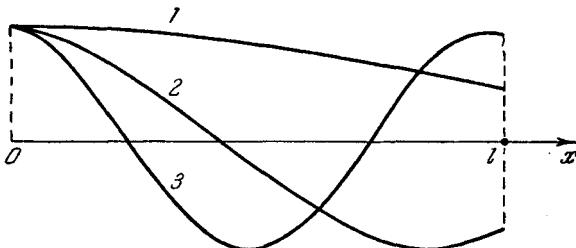


Рис. 255.

формы нескольких первых (низших) собственных колебаний, форма для высоких частот будет приближаться к такой, которая была бы при закороченном конденсаторе.

Полезно рассмотреть с помощью рис. 254, как будут изменяться формы колебаний при изменении емкости C от нуля до бесконечности. Предлагаем сделать это в качестве упражнения.

§ 99. Ортогональность форм собственных колебаний

На формы собственных колебаний наложены условия ортогональности так же, как и на распределения амплитуд в системе со многими степенями свободы (77.8). Эти условия имеют место для любой неоднородной распределенной системы и с любыми

условиями на концах. Но за недостатком места мы выведем их для однородной системы с однородными граничными условиями *).

Пусть для частоты ω_k форма колебаний представлена функцией X_k , а для ω_s форма — X_s . Тогда уравнения (97.12) можно записать так:

$$\begin{aligned} X''_k + \frac{\omega_k^2}{c^2} X_k &= 0, \\ X''_s + \frac{\omega_s^2}{c^2} X_s &= 0. \end{aligned} \quad (99.1)$$

Умножая первое равенство на X_s , а второе на X_k и вычитая одно из другого, получаем:

$$X''_k X_s - X''_s X_k + \frac{1}{c^2} X_k X_s (\omega_k^2 - \omega_s^2) = 0. \quad (99.2)$$

Интегрируем почленно вдоль линии от 0 до l :

$$\int_0^l (X''_k X_s - X''_s X_k) dx = \frac{\omega_s^2 - \omega_k^2}{c^2} \int_0^l X_k X_s dx.$$

Заметим, что

$$X''_k X_s - X''_s X_k = \frac{d}{dx} (X'_k X_s - X'_s X_k),$$

следовательно, первый интеграл равен

$$X'_k(l) X_s(l) - X'_s(l) X_k(l) - X'_k(0) X_s(0) + X'_s(0) X_k(0). \quad (99.3)$$

Если на концах X или X' равно нулю, то и (99.3) равно нулю, следовательно:

$$(\omega_s^2 - \omega_k^2) \int_s^l X_k X_s dx = 0. \quad (99.4)$$

Так как $\omega_s \neq \omega_k$, то для любых двух различных форм собственных колебаний

$$\int_0^l X_k X_s dx = 0 \quad (99.5)$$

при $k \neq s$, которое и представляет собою условие ортогональности собственных форм.

Заметим, что для системы, имеющей неоднородные граничные условия, условия ортогональности (99.5) будут иметь несколько другой вид.

*) Однородными граничными условиями в данном случае называют такие, при которых $y = 0$ или $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ на концах.

§ 100. Продольные собственные колебания системы с затуханием

Если при продольных собственных колебаниях стержня (или при колебаниях газа в трубе) сила трения, вызывающая затухание колебаний, будет пропорциональна скорости смещения бесконечно малого элемента стержня, то анализ собственных колебаний не вызывает больших затруднений. Так же и в случае электрических колебаний, когда приближенно можно считать, что слагающая электрического поля вдоль провода очень мала по сравнению с перпендикулярной к проводу составляющей электрического поля. Тогда имеет место «телефрафное уравнение» (96.8):

$$\frac{1}{C_0} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = L_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + R_0 \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (100.1)$$

Рассмотрим собственные колебания разомкнутой на концах линии; при этих колебаниях выполняются условия

$$Q(0, t) = 0, \quad Q(l, t) = 0. \quad (100.2)$$

Напомним, что для стержня эти условия соответствуют жестко заделанным его концам или в трубе, наполненной воздухом, закрытым концами.

Будем искать решение (100.1) в виде стоячих волн, а именно:

$$Q(x, t) = X(x) T(t), \quad (100.3)$$

где, как и прежде, X — функция только x , а T — только времени t . Подставляем (100.3) в (100.1) и, преобразуя, получаем:

$$c^2 \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{R_0}{L_0} \frac{dT}{dt}, \quad (100.4)$$

где $c = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ — скорость распространения волны. Каждая сторона равенства (100.3) должна быть равна константе, например ω^2 . Тогда уравнение (100.4) эквивалентно следующим двум:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{R_0}{L_0} \frac{dT}{dt} + \omega^2 T &= 0, \\ \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} X &= 0. \end{aligned}$$

Решения этих уравнений можно записать так:

$$\begin{aligned} X &= A \cos \frac{\omega}{c} x + B \sin \frac{\omega}{c} x, \\ T &= D e^{-\delta t} \cos (\omega_1 t + \varphi), \end{aligned} \quad (100.5)$$

где обозначено:

$$\delta = \frac{R_0}{2L_0} \text{ и } \omega_1^2 = \omega^2 - \delta^2.$$

Границные условия (100.2) наложены на функцию $X(x)$ в таком виде:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Эти условия выполняются при

$$A = 0 \text{ и } \sin \frac{\omega l}{c} = 0. \quad (100.6)$$

Последнее уравнение (100.6) определяет возможные значения ω ; они равны собственным частотам системы при $R_0 = 0$:

$$\omega_s = \frac{\pi sc}{l}, \quad (100.7)$$

где $s = 1, 2, 3, 4, \dots$

Подставим (100.7) в (100.5) и (100.3) и найдем выражение для одного собственного колебания

$$D_s e^{-\delta t} \sin \frac{\pi s x}{l} \cos (\sqrt{\omega_s^2 - \delta^2} t + \varphi_s), \quad (100.8)$$

а собственные колебания в общем виде представляют сумму колебаний (100.8) для всех значений $s = 1, 2, 3, \dots$

$$Q(x, t) = e^{-\delta t} \sum_{s=1}^{\infty} D_s \sin \frac{\pi s x}{l} \cos (\sqrt{\omega_s^2 - \delta^2} t + \varphi_s), \quad (100.9)$$

где D_s и φ_s определяются из начальных условий так же, как и ранее (97.26), а ω_s — по формуле (100.7).

Из выражения (100.9) видно, что форма каждого собственного колебания в системе не зависит от затухания. Колебания всех частот затухают одинаково по времени, но декременты затухания различны, они падают с увеличением частоты; поэтому, если для первого тона процесс является колебательным $[(\pi c/l) > \delta]$, то он будет таким же и для всех собственных частот.

§ 101. Вынужденные продольные колебания в однородной системе с распределенными постоянными

В общем случае внешнее воздействие (внешняя сила) будет распределено вдоль системы. Но в практических задачах обычно встречается более простой случай: сила сосредоточена в одном месте (или нескольких местах) системы, чаще на конце. Поэтому

рассмотрим вынужденные продольные колебания без трения под действием силы, приложенной к одному концу стержня с торца (рис. 256).

Другой конец стержня свободен, следовательно, граничные условия нужно записать так:

$$-ES \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} = F(t), \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=l} = 0, \quad (101.1)$$

где y — смещение сечения, имеющего в состоянии покоя координату x .

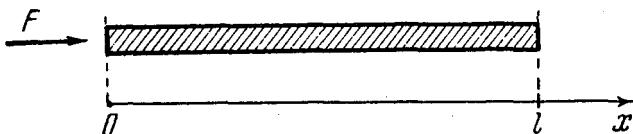


Рис. 256.

В такой постановке задача о продольных колебаниях стержня (или газа в трубе) совершенно эквивалентна задаче об электрических колебаниях в системе, состоящей из двух параллельных проводов без сопротивления, если на одном конце включена д. д. с. $\mathcal{E}(t)$, а другой замкнут накоротко (рис. 257).

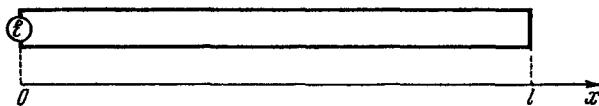


Рис. 257.

Из сравнения уравнений для продольных колебаний в стержне (96.3) с уравнением для колебаний заряда в электрической линии (96.10) следует, что

$$\left. \begin{array}{l} y \text{ можно заменить через } Q, \\ F(t) \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}(t), \\ ES \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \frac{1}{C_0}, \\ \rho S \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad L_0. \end{array} \right\} \quad (101.2)$$

Таким образом, решение задачи о продольных колебаниях стержня после замены по (101.2) дает решение задачи об электрических колебаниях в линии.

Рассмотрим вынужденные продольные колебания стержня под действием внешней синусоидальной силы:

$$F(t) = F_0 e^{ipt}.$$

Предполагаем, как делали выше, что вынужденные колебания происходят с частотой p , или

$$y_b(x, t) = X(x) e^{ipt}. \quad (101.3)$$

Подставляя (101.3) в основное уравнение продольных колебаний (96.3), получаем уравнение для определения формы колебаний

$$c^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + p^2 X = 0,$$

которое имеет общее решение

$$X(x) = A \cos \frac{p}{c} x + B \sin \frac{p}{c} x, \quad (101.4)$$

где A и B — постоянные величины. Очевидно, что X должно удовлетворять условиям (101.1); подставим (101.4) в (101.3), а затем в первое условие (101.1) и получим:

$$-ES \frac{p}{c} Be^{ipt} = F(t) = F_0 e^{ipt};$$

отсюда

$$B = -\frac{cF_0}{pES}.$$

Вспомним, что значение скорости распространения волны $c = \sqrt{E/\rho}$, и запишем:

$$B = -\frac{F_0}{pS \sqrt{E\rho}}. \quad (101.5)$$

Затем подставим (101.5) в (101.4) и подберем A так, чтобы удовлетворить второму условию (101.1); это дает уравнение

$$-\frac{p}{c} \left[A \sin \frac{pl}{c} + \frac{F_0}{pS \sqrt{E\rho}} \cos \frac{pl}{c} \right] = 0;$$

отсюда

$$A = -\frac{F_0}{pS \sqrt{E\rho}} \operatorname{ctg} \frac{pl}{c}. \quad (101.6)$$

Подставляя значения A и B в (101.4), получаем форму вынужденных колебаний:

$$X(x) = -\frac{F_0}{pS \sqrt{E\rho}} \left(\operatorname{ctg} \frac{pl}{c} \cos \frac{px}{c} + \sin \frac{px}{c} \right). \quad (101.7)$$

Умножим это на e^{ipx} и получим $y_b(x, t)$ — вынужденные колебания каждого сечения стержня.

Можно ввести динамическую жесткость стержня в сечении $x = 0$; по определению

$$\bar{K} = \frac{\bar{F}_0}{\bar{X}(0)}, \quad (101.8)$$

или, подставляя сюда из (101.7) $\bar{X}(0)$, получаем:

$$\bar{K} = -S\sqrt{E\rho} \cdot p \operatorname{tg} \frac{pl}{c}. \quad (101.9)$$

Величина $S\sqrt{E\rho}$ зависит только от размеров сечения и материала стержня и не зависит от частоты p . Динамическая жесткость K зависит от частоты, как функция $p \cdot \operatorname{tg} pl/c$. Очевидно, что при некоторых частотах $K(p)$ будет равно нулю; это по (101.8) означает, что $X(0) \rightarrow \infty$, амплитуда колебаний бесконечна, в стержне возникли *резонансные* колебания. Таким образом, как и выше, условие резонансных колебаний

$$K(p_a) = 0.$$

Точно так же будут и такие значения частот p_a , при которых

$$K(p_a) \rightarrow \infty.$$

В этом случае $X(0) \rightarrow 0$, стержень представляет бесконечно жесткую опору для частот p_a . Это обстоятельство используется для демпфирования колебаний.

Исследуя зависимость \bar{K} от частоты, мы знаем только колебания сечения, на которое действует сила, что часто практически и важно. Но для понимания всего процесса колебаний нужно проследить за тем, как будет изменяться и форма колебаний (101.7) с изменением частоты.

Для разнообразия в примерах проведем исследование изменения формы вынужденных колебаний на примере электрических колебаний в линии, о которых мы говорили в начале параграфа.

Предварительно запишем величину входного комплексного сопротивления линии, состоящей из двух параллельных проводов, замкнутых на другом конце (рис. 257). Вспомним, что динамическая жесткость аналогична обратной величине *комплексной емкости*, которой обычно не пользуются, а в электротехнике пользуются комплексным сопротивлением, которое аналогично комплексному коэффициенту трения. Комплексный коэффициент трения (14.14) равен

$$\frac{\bar{K}}{ip} = iS\sqrt{E\rho} \cdot \operatorname{tg} \frac{pl}{c}. \quad (101.10)$$

Поэтому величину $S\sqrt{E_0}$ можно назвать «*волновым коэффициентом трения*». Входное комплексное сопротивление линии Z будет (101.10), в котором сделана замена механических величин на электрические по соотношениям (101.2):

$$Z = i \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \operatorname{tg} \frac{pl}{c}, \quad (101.11)$$

величину $\sqrt{L_0/C_0}$ называют *волновым сопротивлением* линии; оно не зависит от частоты. Входное сопротивление зависит от частоты по закону тангенса, поэтому будут такие значения частоты, при которых сопротивление нуль (резонансные колебания) и при которых сопротивление равно бесконечности (резонанс сопротивления). В последнем случае линия представляет собой идеальный изолятатор, и это обстоятельство используется в технике, например при подвеске линий высокой частоты.

Рассмотрим вынужденные колебания вдоль линии из двух параллельных проводов, показанной на рис. 257. Форма вынужденных колебаний заряда Q будет такая же, как и для u в случае продольных колебаний стержня. Если заменим в (101.7) механические величины на электрические по (101.2), то получим:

$$X(x) = \frac{\mathcal{E}_0}{p} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \left(\operatorname{ctg} \frac{pl}{c} \cos \frac{px}{c} + \sin \frac{px}{c} \right) = - \frac{\mathcal{E}_0 \cos \frac{p}{c} (l-x)}{p \sqrt{\frac{L_0}{C_0} \sin \frac{pl}{c}}}, \quad (101.12)$$

следовательно,

$$Q(x, t) = - \frac{\mathcal{E}_0 \cos \frac{p}{c} (l-x)}{p \sqrt{\frac{L_0}{C_0} \sin \frac{pl}{c}}} \cdot e^{ipt}. \quad (101.13)$$

Удобнее для анализа рассматривать колебания не заряда Q , а потенциала $V(x, t)$. По формуле (96.4) заряд и потенциал связаны друг с другом и, подставляя (96.4) в выражение (101.13), получаем:

$$V(x, t) = \mathcal{E}_0 \frac{\sin \frac{p}{c} (l-x)}{\sin \frac{pl}{c}} e^{ipt}. \quad (101.14)$$

При $x = 0$ $V = \mathcal{E}_0 e^{ipt}$, а при $x = l$ $V = 0$, следовательно, найденное решение удовлетворяет граничным условиям.

Рассмотрим подробнее зависимость формы вынужденных колебаний от частоты p . Возьмем вместо частоты p соответствующую

ей длину волны, которая, по определению,

$$\lambda = c \frac{2\pi}{p}.$$

Тогда форму колебаний напряжения можно записать так:

$$\mathcal{E}_0 \frac{\sin \frac{p}{c}(l-x)}{\sin \frac{pl}{c}} = \mathcal{E}_0 \frac{\sin 2\pi \frac{l-x}{\lambda}}{\sin 2\pi \frac{l}{\lambda}}. \quad (101.15)$$

На рис. 258 показан простой прием графического построения формы колебаний для любого значения λ . По оси ординат откладываем V , а по оси абсцисс от точки $x = l$ назад откладываем

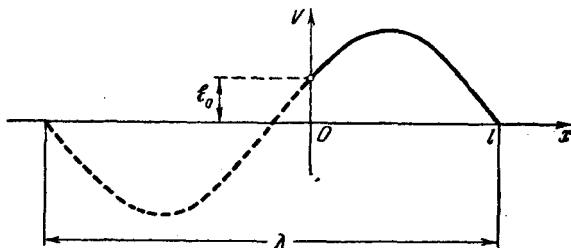


Рис. 258.

отрезок, равный λ , затем из точки $(l, 0)$ назад через точку $(0, \mathcal{E}_0)$ проводим синусоиду, соответствующую длине волны λ , отрезок синусоиды на участке $0 - l$ и дает распределение амплитуд колебаний напряжения.

Построение проводится так же, если $\lambda < l$.

Проследим, как будет изменяться форма колебаний при увеличении частоты p от нуля или при уменьшении λ от ∞ . На рис. 259 приведено несколько различных форм для частот, соответствующих интервалу $0 < p < \frac{\pi c}{l}$.

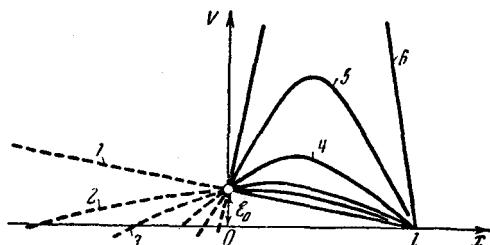


Рис. 259.

Амплитуды колебаний напряжения в пучности начинают резко возрастать, когда частота колебаний приближается к $\pi c/l$, к первой собственной частоте системы, замкнутой на обоих концах, при частотах ниже $\pi c/l$ колебания во всех точках происходят в фазе.

На рис. 260 показаны формы вынужденных колебаний в интервале частот $(\pi c/l) < p < (2\pi c/l)$.

Анализируя формулу (101.15) и рис. 259 и 260, видим, что резонансные колебания наступают тогда, когда частота внешней силы равна собственной частоте замкнутой на обоих концах системы проводов или когда на линии укладывается целое число полуволн. Наоборот, колебания с наименьшей амплитудой (амплитуда колебаний напряжения при них не больше ϵ_0) имеют место тогда, когда частота внешней силы равна собственной частоте этой линии, разомкнутой на том конце, где действует э. д. с.

Это можно толковать еще и так: если частота внешней э. д. с. равна собственной частоте системы и э. д. с. приложена в узле колебаний тока, то резонанса нет.

При вынужденных колебаниях, если длина линии равна нечетному числу четвертей длины волны, то на том конце, где включена э. д. с., — всегда узел тока.

Все результаты такого анализа можно непосредственно перенести на механическую систему, например на колебания стержня, показанного на рис. 256. Под действием синусоидальной силы, приложенной на одном конце свободного стержня, резонансные колебания возникнут в том случае, когда частота внешней силы будет равна собственной частоте свободного с обоих концов стержня, когда при собственных колебаниях в месте приложения силы имеется пучность колебаний смещения.

Если же частота внешней силы будет равна собственной частоте стержня, жестко закрепленного тем концом, на котором действует сила, то резонанса не будет. В стержне возбудятся собственные колебания с такой амплитудой, которая достаточна для того, чтобы обеспечить неподвижность сечения, на которое действует сила; стержень имеет бесконечную жесткость для этих частот.

Совсем иная картина будет при заданном смещении конца. Тогда, точно так же как и при «резонансе тока» (§ 17), резонанс будет иметь место в тех случаях, когда частота внешнего воздействия будет равна собственной частоте стержня с одним закрепленным концом. И наоборот, при собственной частоте

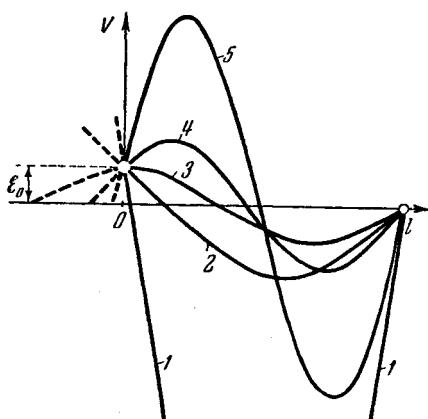


Рис. 260.

свободного стержня *нет резонанса*. Иначе говоря, если задано колебание *смещения в пучности* колебаний смещения, то при совпадении частот (частоты внешнего воздействия и собственной) *резонанса не будет*. Если задано смещение в узле смещений, то *резонанс имеет место* при совпадении частот.

Совершенно то же самое можно повторить относительно электромагнитных колебаний в двух проводах, вызываемых не э. д. с. на конце, а *заданным током*, или при условии, что осуществлено такое устройство, которое обеспечивает колебания тока на конце линии определенной амплитуды и частоты.

Мы проанализировали детально вынужденные колебания, когда внешнее воздействие осуществлено на одном конце системы. Точно таков же путь анализа в тех случаях, когда внешнее воздействие осуществляется *в точке* (в одном сечении), находящейся где-то *между концами* системы.

Для примера рассмотрим задачу о вынужденных продольных колебаниях стержня под действием внешней силы $F_0 e^{i\omega_0 t}$, приложенной в каком-то сечении x_0 . Эту задачу можно просто решить с помощью преобразований Лапласа.

Уравнение колебаний стержня можно записать так:

$$S\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \delta(x - x_0) F_0 e^{i\omega_0 t}, \quad (101.16)$$

где $\delta(x - x_0)$ — дельта-функция. Предположим, что решение имеет вид $X(x)e^{i\omega_0 t}$; тогда для формы колебаний будет следующее уравнение:

$$-\omega_0^2 X = c^2 X'' + \delta(x - x_0) \frac{F_0}{\rho S}. \quad (101.17)$$

Решим его методом преобразований Лапласа. Пусть $\phi(p) \doteq X(x)$ и преобразование уравнения (101.17) по (28.2) дает:

$$-\omega_0^2 \phi = c^2 [p^2 \phi - pX(0) - X'(0)] + e^{-px_0} \frac{F_0}{\rho S} \quad (101.18)$$

или спектр формы колебаний

$$\phi(p) = \frac{p}{p^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2}} X(0) + \frac{1}{p^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2}} X'(0) - \frac{e^{-px_0}}{p^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2}} \frac{F_0}{\rho S c^2}. \quad (101.19)$$

Переходя от спектра к оригиналу, находим:

$$X(x) = X(0) \cos \frac{\omega_0 x}{c} + \frac{c}{\omega_0} X'(0) \sin \frac{\omega_0 x}{c} - \frac{F_0}{\rho_0 \omega_0 S c} \sin \frac{\omega_0 (x - x_0)}{c}, \quad (101.20)$$

причем последний член при $x < x_0$ тождественно равен нулю.

Допустим, что мы рассматриваем свободный стержень; тогда

$$X'(0) = X'(l) = 0$$

и из первого условия, при $x = 0$, следует:

$$X(x) = X(0) \cos \frac{\omega_0 x}{l} - \frac{F_0}{\rho \omega_0 S c} \sin \frac{\omega_0 (x - x_0)}{c}. \quad (101.21)$$

Теперь используем второе граничное условие. Дифференцируя (101.21) и подставляя $x = l$, найдем величину $X(0)$ из уравнения

$$X'(l) = 0 = -X(0) \frac{\omega_0}{c} \sin \frac{\omega_0 l}{c} - \frac{F_0}{\rho S c^2} \cos \frac{\omega_0 (l - x_0)}{c}. \quad (101.22)$$

Подставляя найденное отсюда значение $X(0)$ в (101.20), запишем окончательно форму колебаний так:

$$X(x) = -\frac{F_0}{\rho c \omega_0 S} \left[\frac{\cos \frac{\omega_0 (l - x_0)}{c}}{\sin \frac{\omega_0 l}{c}} \cos \frac{\omega_0 x}{c} + \sin \frac{\omega_0 (x - x_0)}{c} \right], \quad (101.23)$$

где последний член в скобках отличен от нуля при $x > x_0$. Эта формула должна быть справедлива и при $x_0 = 0$, когда сила $F_0 e^{i \omega_0 t}$ приложена на конце. В этом случае (101.23) совпадает с (101.7). Аналогично, подставляя в (101.23) $x_0 = l$, получим форму колебаний при силе, действующей на конце $x = l$.

§ 102. Уравнения изгибных (поперечных) колебаний стержней

При анализе малых поперечных (или изгибных) колебаний тонких цилиндрических стержней можно воспользоваться некоторыми упрощающими предположениями, обычно допускаемыми в курсах прикладной теории упругости или сопротивления материалов.

Представим себе контуры части стержня, как показано на рис. 261. Пусть стержень совершает колебания в плоскости (η , ξ), каждая точка поперечного сечения с координатой ξ смещается на величину $y(\xi, t)$ вниз или вверх при поперечных колебаниях. При определении механических условий деформации стержня принимается, что каждое плоское поперечное сечение недеформированного стержня будет оставаться плоскостью при любой его деформации (гипотеза Бернулли).

Если мысленно выделим из стержня кусок длиной $d\xi$ (рис. 261), то можно считать, что движение этого элемента происходит под действием сил (усилий), приложенных к торцам куска со стороны оставшихся частей стержня. Так как мы считаем, что нет сил,

растягивающих или сжимающих стержень вдоль оси ξ , то нормальная к поперечному сечению результирующая сила должна быть равна нулю. Касательная сила, которую обозначим через $P(\xi, t)$, должна быть направлена вдоль оси η , так как колебания по условию происходят только вдоль оси η . Но при изгибе стержня возникнут в поперечном сечении нормальные напряжения, суммарный момент этих усилий будет направлен вдоль оси ζ , мы обозначим

его через $M(\xi, t)$. Таким путем можно прийти к схеме, которая показана на рис. 262; направления, указанные на рисунке, условно приняты за положительные.

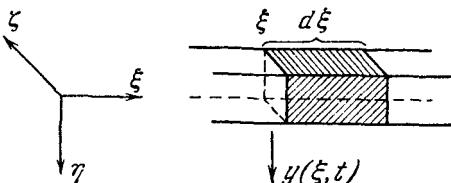


Рис. 261.

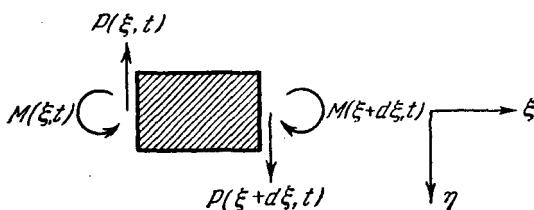


Рис. 262.

Теперь можно записать уравнение механических колебаний выделенного элемента. Если $m(\xi)$ — погонная масса стержня, то

$$m(\xi) d\xi \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P(\xi + d\xi, t) - P(\xi, t) = \frac{\partial P}{\partial \xi} d\xi, \quad (102.1)$$

или уравнение поперечных колебаний примет вид:

$$m(\xi) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial \xi}. \quad (102.2)$$

Сила $P(\xi, t)$ называется *перерезывающей силой*; свяжем ее с деформацией элемента $y(\xi, t)$.

В элементарных курсах физики и сопротивления материалов показывается, что если пренебречь влиянием касательных усилий в сечении на деформации, то для малых деформаций момент нормальных усилий в сечении

$$M(\xi, t) = EI \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \quad (102.3)$$

где E — модуль Юнга материала, $I(\xi)$ — момент инерции площади поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения и параллельной оси ξ , $I = \int \eta^2 dS$.

Момент нормальных усилий в сечении $M(\xi, t)$ можно связать с перерезывающей силой $P(\xi, t)$, если записать условие вращения элемента стержня (см. рис. 262) относительно оси, параллельной оси ξ . Это условие будет таково:

$$M(\xi, t) - M(\xi + d\xi, t) - P(\xi, t) d\xi = J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (102.4)$$

где J — массовый момент инерции элемента стержня, а θ — угол поворота его. Пренебрегая вращением, мы полагаем, что $J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \approx 0$, тогда из (102.4) следует:

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = -P. \quad (102.5)$$

Пользуясь равенствами (102.3) и (102.5), можно записать:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right). \quad (102.6)$$

Подставляя (102.6) в (102.2), получаем уравнение для поперечных колебаний стержня (изгибных колебаний) в следующем виде:

$$m(\xi) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) = 0. \quad (102.7)$$

У однородного цилиндрического стержня (балки) m и EI не зависят от координаты ξ . И для таких стержней уравнение будет проще:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} = 0, \quad (102.8)$$

где $a^2 = \frac{EI}{m}$ — основной физический параметр, характеризующий колебания.

Знакомясь с уравнением в частных производных (102.8), прежде всего следует отметить, что общее волновое решение вида $f(ct \pm \xi)$ не удовлетворяет ему. Возмущения $y(\xi, t)$, произведенные в каком-то месте стержня, будут распространяться вдоль стержня, но форма возмущения будет изменяться в процессе распространения.

Синусоидальная волна вида $y = A \cos(\omega t \pm k\xi)$ распространяется вдоль стержня без искажения (при постоянных ω и k), но скорость распространения волны $c = \frac{\omega}{k}$ зависит от частоты ω , поэтому волны различных частот ω будут распространяться с разной скоростью (дисперсия).

Действительно, подставим $y = A \cos(\omega t + k\xi)$ в основное уравнение (102.8), получим:

$$\omega^2 - k^2 a^2 = 0, \quad \omega = ak, \quad (102.9)$$

отсюда

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{a\omega},$$

или скорость распространения гармонических изгибных волн пропорциональна квадратному корню из частоты. Для изгибных волн имеет место *аномальная дисперсия*, говоря принятым в оптике языком.

§ 103. Собственные изгибные колебания стержня

В практических задачах почти всегда имеем дело с ограниченным стержнем, концы которого либо свободны, либо заделаны определенным образом. В таком стержне после некоторого отклонения из состояния равновесия могут возникнуть стоячие волны, каждая из которых представляет одно *собственное колебание* с определенной частотой, зависящей от параметра a , длины стержня l и характера заделки его концов.

Различные условия на концах стержня.

1) *Свободные концы* характеризуются отсутствием нагрузки на концах (рис. 263, а). Пусть стержень имеет координаты $0 \leq \xi \leq l$; тогда условия на свободных концах будут:

$$P(0, t) = M(0, t) = 0,$$

$$P(l, t) = M(l, t) = 0,$$

или, вспоминая (102.3) и (102.5), эти условия для однородного стержня можно представить так:

$$y'''(0, t) = y''(0, t) = 0, \quad y'''(l, t) = y''(l, t) = 0, \quad (103.1)$$

где штрих обозначает $\frac{\partial}{\partial \xi}$.

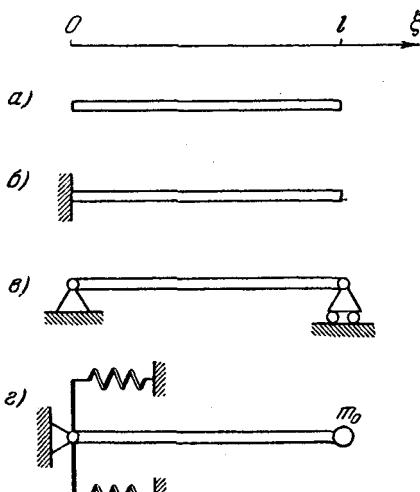


Рис. 263.

2) Консольная однородная балка, стержень заделан одним концом (при $\xi = 0$), другой (при $\xi = l$) свободен (рис. 263, б). Условия будут таковы:

$$y(0, t) = y'(0, t) = 0, \quad y''(l, t) = y'''(l, t) = 0. \quad (103.2)$$

3) Стержень с шарнирно опертыми концами: концы не могут перемещаться, но свободно могут поворачиваться относительно оси, параллельной ξ (рис. 263, в). Условия таковы:

$$\begin{aligned} y(0, t) &= y''(0, t) = 0, \\ y(l, t) &= y''(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (103.3)$$

Как видно, условия, накладываемые на перемещения на концах, имеют или геометрический ($y(0, t) = 0$), или силовой ($M(0, t) = 0$) характер. Но математически все эти условия сводятся к тому, что на каждом конце наложено два условия на смещение y и на вторую производную от него по ξ .

4) Стержень с упругой заделкой или с массой на конце. В этих случаях также получаем определенные условия на те же величины. Например, возьмем стержень с упругой шарнирной заделкой при $\xi = 0$ и с массой m_0 на другом конце (при $\xi = l$) (рис. 263, г). Пусть упругость в шарнире будет c ; это значит, что при повороте в шарнире на угол θ нужно приложить момент сил $c\theta$. Тогда условия на концах можно записать так:

$$\begin{aligned} y(0, t) &= 0, & cy'(0, t) &= EIy''(0, t), \\ m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(l, t) &= (EIy''(\xi, t))'_{\xi=l}, \\ y''(l, t) &= 0, \text{ так как } M(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (103.4)$$

Второе условие для однородного стержня будет:

$$m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(l, t) = EIy'''(l, t).$$

Условия (103.4) более сложны на вид, чем рассмотренные ранее, но все они представляют два условия на каждом конце, и путь решения задач во всех случаях заделки концов одинаков.

Предположим, что в заданном однородном стержне возбуждено одно собственное колебание с частотой ω_j и его можно записать так:

$$y_j(\xi, t) = B_j(\xi) e^{i\omega_j t}, \quad (103.5)$$

где $B_j(\xi)$ — искомая форма собственных колебаний; далее пока будем опускать индекс j .

Подставляя (103.5) в основное уравнение (102.8), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для $B(\xi)$:

$$\omega^2 B - a^2 \frac{d^4 B}{d\xi^4} = 0. \quad (103.6)$$

На искомое решение $B(\xi)$ наложены условия на концах $\xi = 0$ и $\xi = l$ в соответствии с физическими условиями задачи.

Для дальнейшего удобно решить уравнение (103.6) методом Лапласа. Допустим пока, что нам известны при $\xi = 0$ значения $B(0)$, $B'(0)$, $B''(0)$, $B'''(0)$ — значения функции и трех ее производных. Обозначим $L(B) = \varphi(p)$ и применим преобразование Лапласа к уравнению (103.6); тогда

$$\omega^2 \varphi(p) - a^2 [p^4 \varphi(p) - p^3 B(0) - p^2 B'(0) - p B''(0) - B'''(0)] = 0$$

или

$$\begin{aligned} \varphi(p) = & \frac{p^3}{p^4 - b^4} B(0) + \frac{p^2}{p^4 - b^4} B'(0) + \\ & + \frac{p}{p^4 - b^4} B''(0) + \frac{1}{p^4 - b^4} B'''(0), \end{aligned} \quad (103.7)$$

где обозначено $b^2 = \frac{\omega}{a}$. Обратные преобразования легко найти, разлагая дроби в (103.7) на простые или обращаясь к соответствующим таблицам:

$$\begin{aligned} \frac{p^3}{p^4 - b^4} \div \frac{1}{2} [\operatorname{ch} b\xi + \cos b\xi] &= S(b\xi), \\ \frac{bp^2}{p^4 - b^4} \div \frac{1}{2} [\operatorname{sh} b\xi + \sin b\xi] &= T(b\xi), \\ \frac{b^2 p}{p^4 - b^4} \div \frac{1}{2} [\operatorname{ch} b\xi - \cos b\xi] &= U(b\xi), \\ \frac{b^3}{p^4 - b^4} \div \frac{1}{2} [\operatorname{sh} b\xi - \sin b\xi] &= V(b\xi). \end{aligned} \quad (103.8)$$

Функции S , T , U , V называются функциями А. Н. Крылова, так как они были введены им. Тогда окончательное решение уравнения (103.6) можно представить по (103.7) и (103.8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} B(\xi) = & B(0) S(b\xi) + \frac{1}{b} B'(0) T(b\xi) + \\ & + \frac{1}{b^2} B''(0) U(b\xi) + \frac{1}{b^3} B'''(0) V(b\xi). \end{aligned} \quad (103.9)$$

В параметр $b = \sqrt{\omega/a}$ входит неизвестная еще частота колебаний ω , которая может быть определена из граничных условий. Прежде чем перейти к примерам, заметим, что функции Крылова (103.8) связаны простым условием:

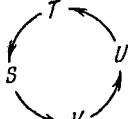


Рис. 264.

$$\begin{aligned} S'(b\xi) &= bV(b\xi), & V'(b\xi) &= bU(b\xi), \\ U'(b\xi) &= bT(b\xi), & T'(b\xi) &= bS(b\xi), \end{aligned} \quad (103.10)$$

которое можно запомнить с помощью рис. 264; производная от функции равна следующей по стрелке, умноженной на b .

Приимеры

1) *Шарнирно опертый стержень.* Условия на концах (103.3) теперь примут вид:

$$B(0) = B''(0) = 0, \quad B(l) = B''(l) = 0,$$

или по (103.9) эти условия можно записать так:

$$B(0) = 0, \quad B''(0) = 0,$$

$$B'(0)T(bl) + \frac{1}{b^3}B'''(0)V(bl) = 0, \quad (103.11)$$

$$B'(0)V(bl) + \frac{1}{b^3}B'''(0)T(bl) = 0.$$

Очевидно, что система двух однородных уравнений относительно $B'(0)$ и $B'''(0)$ только в том случае имеет отличные от нуля решения, если

$$T^2(bl) - V^2(bl) = 0,$$

иначе

$$T(bl) = V(bl) \quad \text{или} \quad T(bl) = -V(bl). \quad (103.12)$$

Подставляя сюда значение функций по (103.8), получаем: $\sin bl = 0$ или $\operatorname{sh} bl = 0$, которые удовлетворяются решением $b = j\pi/l$, где $j = 0, 1, 2, 3, \dots *$). Вспоминая обозначение $b = \sqrt{\omega/a}$, получим значение собственных частот:

$$\omega_j = \frac{a(\pi j)^2}{l^2}, \quad \text{где } j = 1, 2, 3, \dots$$

или

$$\omega_j = \sqrt{\frac{EI}{m}} \left(\frac{\pi j}{l} \right)^2, \quad (103.13)$$

собственные частоты пропорциональны квадратам натуральных чисел.

*) Случай $j=0$ неинтересен, он соответствует состоянию покоя или тривиальному решению для $B(\xi)$.

Форму собственных колебаний $B(\xi)$ найдем, если предварительно из (103.11) и (103.12) установим, что $b^2 B'(0) = -B'''(0)$, и подставим это в (103.9):

$$B_j(\xi) = \frac{B'_j(0)}{b_j} [T(b_j\xi) - V(b_j\xi)]$$

или

$$B_j(\xi) = \frac{B'_j(0)}{b_j} \sin \frac{j\pi\xi}{l}. \quad (103.14)$$

Поскольку $B'_j(0)$ — в известном смысле величина произвольная, она зависит от начальных условий, то собственное колебание (103.5) можно записать так:

$$y_j(\xi, t) = A_j \sin \frac{j\pi\xi}{l} \cos(\omega_j t + \varepsilon_j), \quad (103.15)$$

где A_j, ε_j — величины, зависящие только от начальных условий. Формы собственных колебаний балки, опертой шарнирно, представляются синусоидами (рис. 265), так же как и для продольных колебаний стержня с заделанными концами, но частоты ω_j пропорциональны квадратам натуральных чисел, в отличие от продольных колебаний, где частоты пропорциональны натуральным числам.



Рис. 265.

2) Консольный стержень. Условия на концах (103.2) в этом случае, кроме $B(0) = B'(0) = 0$, запишутся так:

$$B''(l) = \frac{1}{b^3} B''(0) U''(bl) + \frac{1}{b^3} B'''(0) V''(bl) = 0,$$

$$B'''(l) = \frac{1}{b^3} B''(0) U'''(bl) + \frac{1}{b^3} B'''(0) V'''(bl) = 0$$

или по правилам (103.10)

$$\begin{aligned} bB''(0) S(bl) + B'''(0) T(bl) &= 0, \\ bB''(0) V(bl) + B'''(0) S(bl) &= 0. \end{aligned} \quad (103.16)$$

Условие существования нетривиального решения системы (103.16) для $B''(0)$ и $B'''(0)$ имеет вид:

$$S^2(bl) - T(bl) V(bl) = 0 \quad (103.17)$$

и дает уравнение для определения частот. Подставляя в (103.17) значение функции по (103.8), получаем:

$$1 + \operatorname{ch} bl \cos bl = 0 \quad (103.18)$$

или

$$\operatorname{ch} bl = -\operatorname{sc} bl.$$

Это уравнение проще всего решить графическим способом, как показано на рис. 266. На этом рисунке видно, что $\frac{\pi}{2l} < b_1 < \frac{\pi}{l}$, b_3 немного больше $5\pi/2l$, b_4 немного меньше

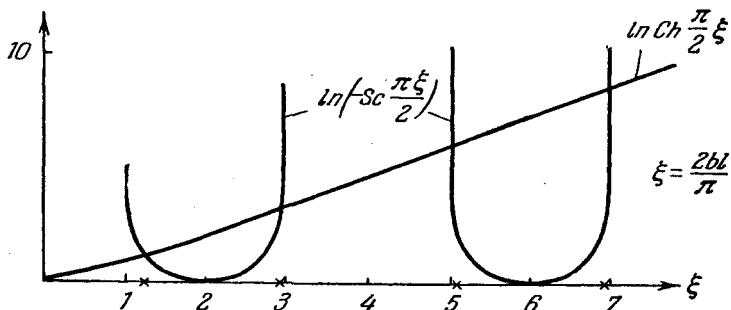


Рис. 266.

$7\pi/2l$ и т. д. Более точные вычисления показывают, что $b_1 = 1,875/l$; $b_2 = 4,694/l$; $b_3 = 7,855/l$. Достаточно большие корни уравнения (103.18) будут практически очень близки к значениям $(2j+1)\pi/2l$, где j — целое число, или при больших j :

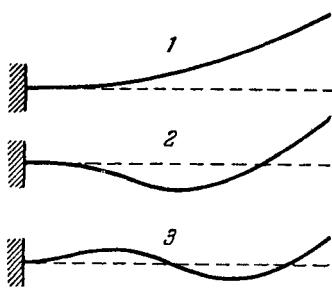


Рис. 267.

будут пропорциональны квадратам нечетных чисел ($7^2, 9^2, 11^2, \dots$). Самые низшие частоты могут сильно отличаться от предельного закона (103.19).

Найдя значение b_1, b_2, \dots , можно записать по (103.9) и (103.16) форму любого собственного колебания; так, например, для j -го тона она в общем запишется так:

$$B_j = A_j \left[U(b_j \xi) - \frac{S(b_j l) V(b_j \xi)}{T(b_j l)} \right] \quad (103.20)$$

или

$$B_j = \frac{A_j}{2} \left[\operatorname{ch} b_j \xi - \cos b_j \xi - \frac{\operatorname{ch} b_j l + \cos b_j l}{\operatorname{sh} b_j l + \sin b_j l} (\operatorname{sh} b_j \xi - \sin b_j \xi) \right].$$

Вид первых трех форм показан на рис. 267. В данном случае, как и во всех других, формы собственных изгибающих колебаний одно-

родных тонких стержней представляются суммой гармонических и гиперболических функций.

3) *Свободный стержень.* Границные условия (103.1) в этом случае будут: $B''(0) = B'''(0) = B''(l) = B'''(l) = 0$, моменты и перерезывающие силы равны нулю. Дифференцируя уравнение (103.9) и учитывая (103.8), запишем:

$$\begin{aligned} B''(l) &= b^2 B(0) U(bl) + bB'(0) V(bl) = 0, \\ B'''(l) &= b^3 B(0) T(bl) + b^2 B'(0) U(bl) = 0. \end{aligned} \quad (103.21)$$

Условие того, что $B(0)$ и $B'(0)$ отличны от нуля, дает уравнение для определения собственных частот:

$$U^2(bl) - T(bl)V(bl) = 0; \quad (103.22)$$

подставляя сюда значения функции (103.8), получаем уравнение частот в таком виде:

$$1 - \operatorname{ch} bl \cos bl = 0. \quad (103.23)$$

Первые три корня этого уравнения $bl = 0, 4,73\dots, 7,85\dots$. Вспоминая, что $b^2 = \omega \sqrt{m/EI}$, находим собственные частоты:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{(4, 73\dots)^2}{l^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}}, \quad \omega_3 = \frac{(7, 85\dots)^2}{l^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}}, \dots$$

Отметим, что в данном случае «нулевые» собственные частоты соответствуют перемещению с постоянной скоростью всего недеформированного стержня и равномерному его вращению. Действительно, легко убедиться в том, что два решения:

$$y_1(\xi, t) = At + B,$$

$$y_2(\xi, t) = (A_1\xi + B_1)t + C,$$

где A, B, A_1, B_1 и C — константы, удовлетворяют уравнению (102.8) и граничным условиям. Первое соответствует только поступательному движению, второе — поступательному перемещению и вращению.

Собственные формы колебаний частоты ω_j по (103.9) и (103.21) будут:

$$B_j(\xi) = B(0) \left[S(b_j\xi) - \frac{U(b_j l) T(b_j \xi)}{V(b_j l)} \right],$$

которые легко переписать через тригонометрические и гиперболические функции, учитывая (103.8). Первые две формы показаны на рис. 268.

При иных граничных условиях путь определения собственных частот и форм совершенно аналогичен, если не считать некоторого усложнения выкладок.

Пусть этот таков: четыре константы $B(0)$, $B'(0)$, $B''(0)$ и $B'''(0)$, через которые выражается форма колебаний в общем

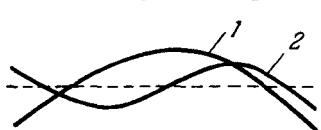


Рис. 268.

виде (103.9), связаны четырьмя однородными линейными условиями на обоих концах (типа (103.11)). Из условия существования ненулевых значений этих констант находим уравнение для определения частот. Отыскав значения собственных частот и подставляя их в

(103.9), находим соответствующие формы колебаний, учитывая, что четыре константы связаны между собой уравнениями типа (103.11), вытекающими из граничных условий.

Совокупность (сумма) отдельных собственных колебаний и будет представлять в общем случае собственные колебания стержня после любых начальных условий:

$$y(\xi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j(\xi) \cos(\omega_j t + \varepsilon_j), \quad (103.24)$$

где в $B_j(\xi)$ входят множителем константы A_j , совокупность которых вместе с ε_j определяется из начальных условий:

$$y(\xi, 0) \text{ и } \frac{\partial y}{\partial t}(\xi, 0).$$

Можно показать, что формы собственных колебаний всегда удовлетворяют условиям ортогональности, которые в случае однородных граничных условий (заделка, свободные концы и шарниро-оперты) будут иметь вид:

$$\int_0^l B_j(\xi) B_k(\xi) d\xi = 0 \quad (103.25)$$

при

$$\omega_j \neq \omega_k.$$

Докажем это для указанных случаев. Для каждой формы имеет место уравнение (103.6):

$$\begin{aligned} \omega_j^2 B_j(\xi) &= a^3 \frac{d^4}{d\xi^4} B_j(\xi), \\ \omega_k^2 B_k(\xi) &= a^3 \frac{d^4}{d\xi^4} B_k(\xi). \end{aligned} \quad (103.26)$$

Умножим первое равенство на $B_k(\xi)$, а второе на $B_j(\xi)$ и проинтегрируем по длине балки. Возьмем по частям интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^l B_k \frac{d^4 B_j}{d\xi^4} d\xi = B_k \left. \frac{d^3 B_j}{d\xi^3} \right|_0^l - \int_0^l \frac{dB_k}{d\xi} \frac{d^3 B_j}{d\xi^3} d\xi = \\ = - \left. \frac{dB_k}{d\xi} \frac{d^3 B_j}{d\xi^3} \right|_0^l + \int_0^l \frac{d^2 B_k}{d\xi^2} \frac{d^2 B_j}{d\xi^2} d\xi = \int_0^l \frac{d^2 B_k}{d\xi^2} \frac{d^2 B_j}{d\xi^2} d\xi, \quad (103.27) \end{aligned}$$

так как во всех указанных случаях условий на концах значения произведений $B_k \frac{d^3 B_j}{d\xi^3}$ и $\frac{dB_k}{d\xi} \frac{d^3 B_j}{d\xi^3}$ равны нулю при $\xi = 0$ и $\xi = l$. Поэтому равенства (103.26) после интегрирования можно записать так:

$$\begin{aligned} \omega_j^2 \int_0^l B_k B_j d\xi = a^2 \int_0^l \frac{d^2 B_k}{d\xi^2} \frac{d^2 B_j}{d\xi^2} d\xi, \\ \omega_k^2 \int_0^l B_j B_k d\xi = a^2 \int_0^l \frac{d^2 B_j}{d\xi^2} \frac{d^2 B_k}{d\xi^2} d\xi, \quad (103.28) \end{aligned}$$

отсюда, вычитая одно из другого, получаем при $\omega_j^2 \neq \omega_k^2$ условия ортогональности (103.25).

При более сложных условиях на концах произведения в формулках (103.27) не будут равны нулю, поэтому условия ортогональности будут иметь несколько более сложный вид. Так, например, для консольной балки с грузом m_0 на свободном конце (103.4) условия ортогональности примут вид

$$\int_0^l B_j B_k d\xi + \frac{m_0}{m} B_j(l) B_k(l) = 0 \quad (103.29)$$

или

$$\int_0^l B_j B_k \left[1 + \frac{m_0}{m} \delta(\xi - l) \right] d\xi = 0 *).$$

Доказательство этого было бы очень полезным упражнением для читателя.

Теперь можно определить константы A_j и ε_j в (103.24) из начальных условий $y(\xi, 0)$, $\frac{\partial y}{\partial t}(\xi, 0)$. Запишем (103.24) для момента времени $t = 0$:

$$y(\xi, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j B_{0j}(\xi) \cos \varepsilon_j, \quad (103.30)$$

*) Где $\delta(\xi - l)$ — дельта-функция.

где $A_j B_{0j}(\xi) = B_j(\xi)$, а для начальной скорости

$$\frac{\partial y}{\partial t}(\xi, 0) = - \sum_{j=1}^{\infty} A_j \omega_j B_{0j}(\xi) \sin \varepsilon_j, \quad (103.31)$$

которое получено после дифференцирования (103.24) по t и подстановки $t = 0$. Умножим оба равенства (103.30) и (103.31) на $B_{k0}(\xi)$ и проинтегрируем по ξ от 0 до l , с учетом условий ортогональности (103.25), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^l y(\xi, 0) B_{k0}(\xi) d\xi &= A_k \cos \varepsilon_k \int_0^l B_{k0}^2(\xi) d\xi, \\ \int_0^l \frac{\partial y}{\partial t}(\xi, 0) B_{k0}(\xi) d\xi &= -A_k \omega_k \sin \varepsilon_k \int_0^l B_{k0}^2(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (103.32)$$

Это и есть два уравнения для определения A_k и ε_k . Такие уравнения могут быть получены для любого значения k . Следовательно, все константы в (103.24) будут определены по начальному состоянию, $y(\xi, 0)$ и $\frac{\partial y}{\partial t}(\xi, 0)$.

В случае сложных граничных условий, например когда равенства ортогональности будут иметь вид (103.29), необходимо (103.30) и (103.31) умножить на

$$B_{0k}(\xi) \left[1 + \frac{m_0}{m} \delta(\xi - l) \right]$$

и далее интегрировать, как обычно.

Заметим, что любая функция на интервале $0 \leq \xi \leq l$ может быть представлена суммой собственных форм $B_{0j}(\xi)$, умноженных на соответствующие коэффициенты a_j . Так, например,

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j B_{0j}(\xi), \quad (103.33)$$

где, как можно видеть из сравнения с (103.30) и (103.32), коэффициенты a_j определяются формулами

$$a_j = \frac{\int_0^l f(\xi) B_{0j}(\xi) d\xi}{\int_0^l B_{0j}^2(\xi) d\xi}. \quad (103.34)$$

§ 104. Поперечные вынужденные колебания стержней

Если на стержень действует распределенная поперечная сила

$$F(\xi, t) = f(\xi) e^{i\omega_0 t},$$

то под действием этих гармонических сил стержень будет совершать вынужденные колебания $y(\xi, t) = y_0(\xi) e^{i\omega_0 t}$. Для однородной балки уравнение колебаний по (102.7) будет

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} = F(\xi, t), \quad (104.1)$$

так как на участок $d\xi$ действует сила $F(\xi, t) d\xi$. Подставляя в (104.1) гармоническую силу $f(\xi) e^{i\omega_0 t}$, получаем для формы вынужденных колебаний $y_0(\xi)$ следующее уравнение:

$$-m\omega_0^2 y_0(\xi) + EI \frac{\partial^4 y_0}{\partial \xi^4} = f(\xi) \quad (104.2)$$

или

$$b_0^4 y_0 - \frac{\partial^4 y_0}{\partial \xi^4} + \frac{1}{EI} f(\xi) = 0,$$

где $b_0^4 = \frac{m\omega_0^2}{EI}$. Пусть $y_0(\xi) = \Phi_0(p)$ и $f(\xi) = \chi(p)$; тогда между спектрами будет такое соотношение:

$$\begin{aligned} \Phi_0(p)(b_0^4 - p^4) + \frac{1}{EI} \chi(p) + p^3 y_0(0) + p^2 y'_0(0) + \\ + p y''_0(0) + y'''_0(0) = 0 \quad (104.3) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Phi_0(p) = \frac{\chi(p)}{EI(p^4 - b_0^4)} + \frac{p^3}{p^4 - b_0^4} y(0) + \frac{p^2}{p^4 - b_0^4} y'(0) + \\ + \frac{p}{p^4 - b_0^4} y''(0) + \frac{1}{p^4 - b_0^4} y'''(0). \end{aligned}$$

Величины $y'''_0(0)$, $y''_0(0)$, $y'_0(0)$ и $y_0(0)$ определяются из граничных условий.

Например, для консольной балки $y'_0(0) = 0$, $y_0(0) = 0$, а поэтому в этом случае форму вынужденных колебаний можно записать по (103.8) так:

$$\begin{aligned} y_0(\xi) = \frac{1}{EI b_0^3} \int_0^\xi f(x) V[b_0(\xi - x)] dx + \\ + \frac{1}{b_0^3} y''_0(0) U(b_0 \xi) + \frac{1}{b_0^3} y'''_0(0) V(b_0 \xi). \quad (104.4) \end{aligned}$$

Величины $y_0''(0)$ и $y_0'''(0)$ можно найти из условий $y_0''(l) = 0$ и $y_0'''(l) = 0$. Дифференцируя (104.4) два раза, получаем:

$$\begin{aligned} y_0''(\xi) &= \frac{1}{EIb_0} \int_0^\xi f(x) T[b_0(\xi - x)] dx + \\ &\quad + y_0''(0) S(b_0\xi) + \frac{1}{b_0} y_0'''(0) T(b_0\xi), \end{aligned}$$

и дифференцируя еще раз

$$\begin{aligned} y_0'''(\xi) &= \frac{1}{EI} \int_0^\xi f(x) S[b_0(\xi - x)] dx + \\ &\quad + y_0''(0) b_0 V(b_0\xi) + y_0'''(0) S(b_0\xi). \quad (104.5) \end{aligned}$$

При дифференцировании мы учитывали (103.10) и то, что $T(0) = U(0) = V(0) = 0$. Удовлетворяя граничным условиям при $\xi = l$, находим два неоднородных уравнения относительно $y_0''(0)$ и $y_0'''(0)$:

$$\begin{aligned} y_0''(0) b_0 S(b_0 l) + y_0'''(0) T(b_0 l) &= \\ &= -\frac{1}{EI} \int_0^l f(x) T[b_0(\xi - x)] dx, \\ y_0''(0) b_0 V(b_0 l) + y_0'''(0) S(b_0 l) &= \\ &= -\frac{1}{EI} \int_0^l f(x) S[b_0(\xi - x)] dx. \quad (104.6) \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно $y_0''(0)$ и $y_0'''(0)$ и подставив результат в (104.4), получим форму вынужденных колебаний. Обозначая ради сокращения, как это принято,

$$\int_0^\xi f(x) T[b_0(\xi - x)] dx = [f*T]_0^\xi,$$

запишем решения (104.6) так:

$$\begin{aligned} y_0''(0) &= \frac{1}{EIb_0} \frac{S(b_0 l) [f*T]_0^l - T(b_0 l) [f*S]_0^l}{T(b_0 l) V(b_0 l) - S^2(b_0 l)}, \\ y_0'''(0) &= \frac{1}{EI} \frac{S(b_0 l) [f*S]_0^l - V(b_0 l) [f*T]_0^l}{T(b_0 l) V(b_0 l) - S^2(b_0 l)} \quad (104.7) \end{aligned}$$

и заметим, что в знаменателе стоит выражение, совпадающее с уравнением для собственных частот консольного стержня (103.17). Значит, если b_0 будет равно одному из b_j или ω_0 будет равно одной из собственных частот, то знаменатель обращается в нуль и,

следовательно, форма колебаний стремится к бесконечности (числитель принимает конечное значение). Это означает, что при совпадении частот $\omega_0 \rightarrow \omega_j$ имеет место резонанс, амплитуды колебаний нарастают до бесконечности.

Можно задачу о вынужденных колебаниях решать и в нормальных координатах, как это делалось для системы со многими степенями свободы. Предположим, что нам известны все собственные частоты изгибных колебаний стержня ω_j и формы собственных колебаний $B_{0j}(\xi)$. Тогда разложим $f(\xi)$ и искомую форму вынужденных колебаний $y_0(\xi)$ по формам собственных колебаний

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j B_{0j}(\xi), \quad y_0(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j B_{0j}(\xi), \quad (104.8)$$

подставим это в уравнение (104.2)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left[b_0^4 B_{0j} - \frac{d^4 B_{0j}}{d\xi^4} \right] EI c_j + a_j B_{0j} \right\} = 0. \quad (104.9)$$

Заменим в этих суммах $\frac{d^4 B_{0j}}{d\xi^4}$ по (103. 6) через $b_j^4 B_{0j}$ и получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty} [(b_0^4 - b_j^4) EI c_j + a_j] B_{0j}(\xi) = 0. \quad (104.10)$$

Так как все $B_{0j}(\xi)$ линейно независимы, то равенство имеет место только в том случае, если для любого j

$$c_j = \frac{a_j}{EI(b_j^4 - b_0^4)} \quad (104.11)$$

или, вспоминая обозначения для b_j и b_0 ,

$$c_j = \frac{a_j}{m_0 (\omega_j^2 - \omega_0^2)}. \quad (104.12)$$

Следовательно, форма вынужденных колебаний будет:

$$y_0(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j B_{0j}(\xi)}{m_0 (\omega_j^2 - \omega_0^2)}. \quad (104.13)$$

Она составлена из форм собственных колебаний, помноженных на соответствующие резонансные множители. Форма вынужденных колебаний вблизи резонанса (при $\omega_0 \rightarrow \omega_j$) будет практически близка к форме j -го собственного колебания, ибо его резонансный множитель будет очень велик по сравнению с множителями других форм. Если для какого-то тона $a_j = 0$, то для него резонанса не будет при $\omega_j = \omega_0$, внешняя сила ортогональна к

собственной форме (см. § 84), работа внешней силы на смещении, пропорциональном данной форме, равна нулю.

В практических задачах чаще приходится иметь дело с сосредоточенными силами (или моментами), приложенными в каком-либо сечении стержня или на конце. Если сила $F_0 e^{i\omega_0 t}$ приложена где-то в точке ξ_1 , то можно воспользоваться результатами расчетов для распределенной силы, полагая

$$f(\xi) = F_0 \delta(\xi - \xi_1), \quad (104.14)$$

где $\delta(\xi - \xi_1)$ есть дельта-функция. Например, для однородного консольно закрепленного стержня уравнение формы колебаний (104.4) будет:

$$\begin{aligned} y_0(\xi) = \frac{F_0}{EIb_0^3} \int_0^\xi \delta(x - \xi_1) V[b_0(\xi - x)] dx + \\ + \frac{1}{b_0^2} y_0''(0) U(b_0\xi) + \frac{1}{b_0^3} y_0'''(0) V(b_0\xi). \end{aligned} \quad (104.15)$$

Заметим, что

$$\int_0^\xi \delta(x - \xi_1) V[b_0(\xi - x)] dx$$

равен нулю при $\xi < \xi_1$ и равен $V[b_0(\xi - \xi_1)]$ при $\xi > \xi_1$. Учитывая это, запишем формулу (104.7) для рассматриваемого случая, где ради сокращения обозначим через

$$\begin{aligned} D(b_0 l) &= T(b_0 l) V(b_0 l) - S^2(b_0 l), \\ y_0''(0) &= \frac{F_0}{EIb_0 D(b_0 l)} \{ S(b_0 l) T[b_0(l - \xi_1)] - T(b_0 l) S[b_0(l - \xi_1)] \}, \\ y_0'''(0) &= \frac{F_0}{EI D(b_0 l)} \{ S(b_0 l) S[b_0(l - \xi_1)] - V(b_0 l) T[b_0(l - \xi_1)] \}. \end{aligned} \quad (104.16)$$

Подставляя это в (104.15), получаем формулу вынужденных колебаний под действием сосредоточенной силы $F_0 e^{i\omega_0 t}$, приложенной в точке ξ_1 :

$$\begin{aligned} y_0(\xi) = \frac{F_0}{EI D(b_0 l) b_0^3} \{ [S(b_0 l) T(b_0(l - \xi_1)) - \\ - T(b_0 l) S(b_0(l - \xi_1))] U(b_0\xi) + [S(b_0 l) S(b_0(l - \xi_1)) - \\ - V(b_0 l) T(b_0(l - \xi_1))] V(b_0\xi) \} + \frac{F_0}{EI b_0^3} V(b_0(\xi - \xi_1)), \end{aligned} \quad (104.17)$$

причем последний член отличен от нуля при $\xi > \xi_1$. Эта формула пригодна и для случая силы, приложенной на свободном конце, а именно при $\xi_1 = l$. Прежде чем вычислять, напомним,

что $S(0) = 1$, а остальные $T(0) = U(0) = V(0) = 0$. Учитывая это, получим для этого случая форму вынужденных колебаний в таком простом виде:

$$y_0(\xi) = \frac{F_0}{EIb_0^3D(b_0l)} [S(b_0l)V(b_0\xi) - T(b_0l)U(b_0\xi)]. \quad (104.18)$$

Если подставить сюда значения функций Крылова (103.8), то получим:

$$\begin{aligned} y_0(\xi) = & \frac{F_0}{4EIb_0^3D(b_0l)} \{ (\operatorname{ch} b_0l + \cos b_0l)(\operatorname{sh} b_0\xi - \sin b_0\xi) - \\ & - (\operatorname{sh} b_0l + \sin b_0l)(\operatorname{ch} b_0\xi - \cos b_0\xi) \}, \end{aligned} \quad (104.19)$$

где

$$D(b_0l) = -\frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch} b_0l \cos b_0l).$$

Это выражение, по которому можно вычислить форму вынужденного колебания вообще для любой частоты ω_0 , за исключением резонансных значений $\omega_0 = \omega_j$.

Если сила действует на конце стержня, то вынужденные колебания можно найти немножко проще. Допустим, сила $F_0 e^{i\omega_0 t}$ действует на конце консольного стержня; тогда предположим, что колебания смещения при изгибе имеют вид $y_0(\xi) e^{i\omega_0 t}$ и удовлетворяют уравнению (102.8); отсюда

$$\omega_0^2 my_0 = EI \frac{d^4 y_0}{d\xi^4}. \quad (104.20)$$

Решая это уравнение при граничных условиях: $y_0(0) = y'_0(0) = 0$, $y''_0(l) = 0$, $y'''_0(l) = \frac{F_0}{EI}$, найдем форму $y_0(\xi)$. Действительно, из уравнения (104.4) находим, считая $f(\xi) = 0$:

$$y_0(\xi) = \frac{1}{b_0^3} y''_0(0) U(b_0\xi) + \frac{1}{b_0^3} y'''_0(0) V(b_0\xi). \quad (104.21)$$

Величины $y''_0(0)$ и $y'''_0(0)$ определяем следующими уравнениями, аналогичными (104.6):

$$\begin{aligned} b_0 S(b_0l) y''_0(0) + T(b_0l) y'''_0(0) &= 0, \\ b_0 V(b_0l) y''_0(0) + S(b_0l) y'''_0(0) &= \frac{F_0}{EI}. \end{aligned} \quad (104.22)$$

Подставляя полученные из этих уравнений значения $y''_0(0)$ и $y'''_0(0)$ в (104.21), находим форму, совпадающую с (104.18).

§ 105. Представление балки (или стержня) многополюсником и динамическая жесткость

В электротехнике при решении задач о колебаниях в сложных цепях пользуются методом многополюсников. Суть метода в том, что отдельные звенья цепи, состоящие из многих сложно связанных друг с другом элементов, представляются «четырехполюсниками», которые соединяются с остальной цепью только четырьмя зажимами (полюсами), два — «вход», два — «выход». Как бы ни было сложно звено, представляемое четырехполюсником, ток и напряжение на выходе для вынужденных колебаний однозначно определяются током и напряжением на входе, и наоборот *).

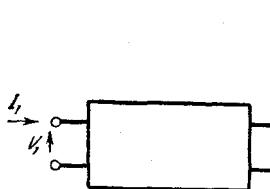


Рис. 269.

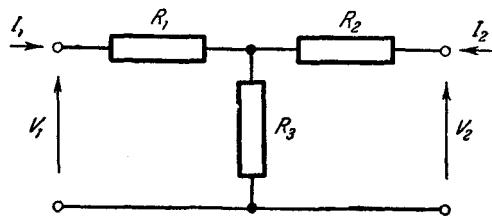


Рис. 270.

Обычно на схемах четырехполюсник изображают четырехугольником (блоком) с двумя зажимами с одной стороны и двумя — с другой (рис. 269). Для линейного четырехполюсника имеем:

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}, \quad (105.1)$$

где A называется *матрицей передачи* четырехполюсника. Например, для цепи (рис. 270) матрица передачи имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{R_2}{R_3} & -\left(R_3 + R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_3}\right) \\ \frac{1}{R_3} & -\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \end{pmatrix}. \quad (105.2)$$

Конечно, это очень простой четырехполюсник, например, цепь, показанная на рис. 271, будет иметь значительно более сложное выражение для элементов матрицы A . На схемах, указанных на рис. 270 и 271, два полюса соединены накоротко, как это часто бывает в радиоцепях, что вообще совсем не обязательно.

Стержень (или балку) можем представить некоторым шестиполюсником. При периодических колебаниях с частотой ω четыре

*.) Для активных четырехполюсников могут быть такие условия, когда только «вход» определяет «выход», но не наоборот.

величины, известные на одном конце, например на конце с координатой $\xi = 0$, определяют состояние всей балки; эти величины: $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ и $y'''(0)$ *). Для однородной балки такой вывод можно сделать, рассматривая (103.9).

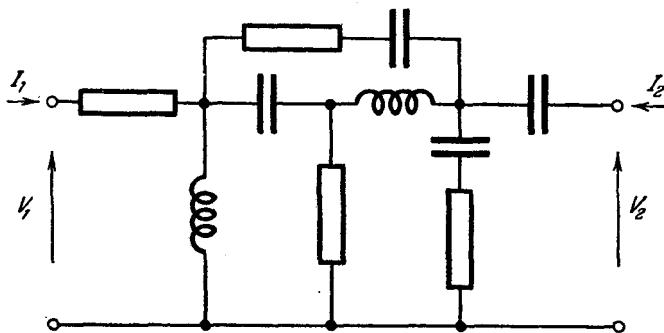


Рис. 271.

Обычно вместо указанных производных пользуются несколькими практическими более удобными величинами:

- 1) амплитуда смещения — $y_0(\xi)$,
- 2) амплитуда угла поворота — $\theta_0(\xi) = y'_0(\xi)$,
- 3) амплитуда момента в поперечном сечении

$$M_0(\xi) = (EI)y''_0(\xi),$$

- 4) амплитуда перерезывающей силы —

$$P_0(\xi) = -\{EIy'''_0(\xi)\}_\xi.$$

(105.3)

Колебания всей балки полностью определяются частотой, параметрами балки и четырьмя величинами: $y_0(0)$, $\theta_0(0)$, $M_0(0)$ и $P_0(0)$. Следовательно, значения $y_0(l)$, $\theta_0(l)$, $M_0(l)$ и $P_0(l)$ на другом конце стержня всегда можно связать с этими же величинами при $\xi = 0$. Или отрезок балки длиной l можно представить схематически эквивалентным шестиполюсником (рис. 272).

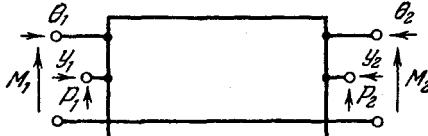


Рис. 272.

Пары величин M и θ и P и y следует считать сопряженными, так же, например, как ток и напряжение, а произведение сопряженных величин дает работу (или мощность).

*.) Статическое нагружение балки может быть так же рассмотрено, оно получается из приведенного далее при $\omega = 0$.

По формуле (103.9) можно записать для однородной балки, с учетом обозначений (105.3), следующие соотношения:

$$\begin{aligned} y_0(l) = & S(bl)y_0(0) + \frac{1}{b}T(bl)\theta_0(0) + \\ & + \frac{1}{EIb^2}U(bl)M_0(0) - \frac{1}{EIb^3}V(bl)P_0(0), \end{aligned}$$

и последовательно дифференцируя (103.9), получим:

$$\begin{aligned} \theta_0(l) = & bV(bl)y_0(0) + S(bl)\theta_0(0) + \\ & + \frac{1}{EIb}T(bl)M_0(0) - \frac{1}{EIb^2}U(bl)P_0(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_0(l) = & EIb^2U(bl)y_0(0) + EIbV(bl)\theta_0(0) + \\ & + S(bl)M_0(0) - \frac{1}{b}T(bl)P_0(0), \quad (105.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_0(l) = & -EIb^3T(bl)y_0(0) - EIb^2U(bl)\theta_0(0) - \\ & - bV(bl)M_0(0) + S(bl)P_0(0). \end{aligned}$$

Эти соотношения можно записать в матричном виде так:

$$\bar{w}(l) = A\bar{w}(0), \quad (105.5)$$

где вектор \bar{w} имеет четыре компоненты, или

$$\bar{w}(\xi) = \begin{pmatrix} y_0(\xi) \\ \theta_0(\xi) \\ M_0(\xi) \\ P_0(\xi) \end{pmatrix},$$

а матрица

$$A = \begin{vmatrix} S(bl) & \frac{1}{b}T(bl) & \frac{1}{EIb^2}U(bl) & -\frac{1}{EIb^3}V(bl) \\ bV(bl) & S(bl) & \frac{1}{EIb}T(bl) & -\frac{1}{EIb^2}U(bl) \\ EIb^2U(bl) & EIbV(bl) & S(bl) & \frac{1}{b}T(bl) \\ -EIb^3T(bl) & -EIb^2U(bl) & -bV(bl) & S(bl) \end{vmatrix} \quad (105.6)$$

имеет простой, легко запоминающийся вид. Она зависит только от изгибной жесткости EI погонной массы m , длины l и частоты колебаний ω .

Пользуясь уравнением (105.5), можно составить уравнения колебаний для стержней при различных условиях на концах.

Например, для стержня со свободными концами ($M_0(0) = P_0(0) = 0$, $M_0(l) = P_0(l) = 0$) уравнения (105.4) будут иметь такой вид:

$$\begin{aligned} y_0(l) &= S(bl)y_0(0) + \frac{1}{b}T(bl)\theta_0(0), \\ \theta_0(l) &= bV(bl)y_0(0) + S(bl)\theta_0(0), \\ 0 &= bU(bl)y_0(0) + V(bl)\theta_0(0), \\ 0 &= bT(bl)y_0(0) + U(bl)\theta_0(0). \end{aligned} \quad (105.7)$$

Из условия существования, отличного от нуля решения для двух последних уравнений, находим уравнение, определяющее собственные частоты. Первые два уравнения дают связь между амплитудами на концах.

Аналогичным путем, с помощью матрицы A , можно быстро и просто находить уравнения собственных частот для любых условий на концах.

При анализе колебаний сложных сооружений, состоящих из однородных стержней (или балок), удобно пользоваться матрицами передачи стержней (105.6). Но во многих задачах проще применить понятие динамической жесткости на конце стержня (или даже в некотором сечении). Динамическую жесткость на конце стержня просто вычислить с помощью матрицы передачи. Рассмотрим несколько примеров.

1) *Динамическая жесткость конца свободной балки.* По определению динамической жесткостью на изгиб конца балки называют:

$$K(0) = \frac{P_0(0)}{y_0(0)}, \quad (105.8)$$

отношение комплексных амплитуд — перерезывающей силы и смещения. В данном случае условия на концах свободной балки будут:

$$P(0) = P_0(0)e^{i\omega t}, \quad M_0(0) = P_0(l) = M_0(l) = 0. \quad (105.9)$$

Тогда из основного равенства

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi=l} = A \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ P_0 \end{pmatrix}_{\xi=0} \quad (105.10)$$

видим, что нужная связь между $y_0(0)$ и $P_0(0)$ получится из двух его последних строк или из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= EIb^3U(bl)y_0(0) + EIbV(bl)\theta_0(0) - \frac{1}{b}T(bl)P_0(0), \\ 0 &= EIb^3T(bl)y_0(0) + EIb^3U(bl)\theta_0(0) - S(bl)P_0(0). \end{aligned} \quad (105.11)$$

Решая эти уравнения относительно $y_0(0)$ (приняв $P_0(0)$ известным), получаем выражение для динамической жесткости

$$K(0) = \frac{P_0(0)}{y_0(0)} = EIb^3 \frac{U^2(bl) - T(bl)V(bl)}{T(bl)U(bl) - S(bl)V(bl)}. \quad (105.12)$$

Как видно из сравнения (105.12) с (105.7), множитель в числителе совпадает по виду с уравнением для собственных частот свободной балки (103.22). Следовательно, при резонансе, когда частота внешней силы равна собственной частоте балки, динамическая жесткость ее конца будет равна нулю, как и следовало ожидать, ведь при резонансе $y_0(0) \rightarrow \infty$.

Отметим, что $K(0) \rightarrow \infty$ в тех случаях, когда ω равна одной из собственных частот того же стержня, но при других условиях на концах, — шарнирно заделанного при $\xi = 0$ и свободного на другом конце. Равенство нулю знаменателя $K(0)$ представляет уравнение для собственных частот при данных условиях. Предлагаем вывести это уравнение, выписывая систему (105.4).

Можно представить себе колебания при $K(0) \rightarrow \infty$ и таким образом. В этом случае собственные колебания совпадают с вынуж-

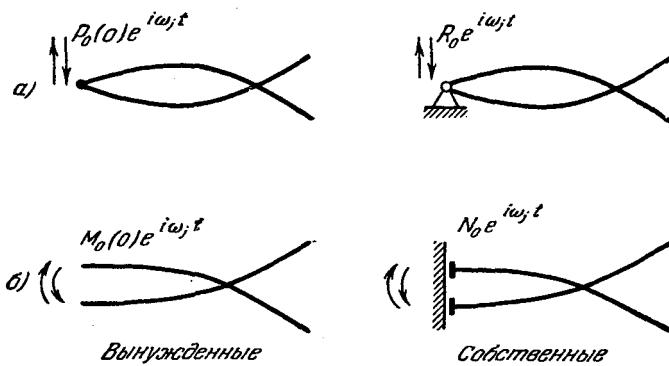


Рис. 273.

денными, при собственных есть вертикальная реакция со стороны шарнира, при вынужденных свободного стержня с той же частотой внешняя сила $P_0(0)e^{i\omega t}$ как раз и обеспечивает силу, равную реакции при собственных поперечных колебаниях стержня, имеющего на этом конце шарнир (рис. 273, а).

2) Угловая динамическая жесткость на конце свободной балки. При колебаниях изгиба можно пользоваться и «угловой» жесткостью на конце. Полагаем, что при $\xi = 0$ на стержень действует

только момент $M_0(0) e^{i\omega t}$. Тогда, по определению, угловой динамической жесткостью на конце будем называть:

$$C(0) = \frac{M_0(0)}{\theta_0(0)}. \quad (105.13)$$

Эту жесткость можно вычислить, выписывая последние две строки системы уравнений

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi=l} = A \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi=0} \quad (105.14)$$

Решая полученные уравнения относительно $\theta_0(0)$ (приняв $M_0(0)$ известным), найдем:

$$C_0(0) = EIb \frac{T(bl)V(bl) - U^2(bl)}{U(bl)V(bl) - S(bl)T(bl)}, \quad (105.15)$$

угловая жесткость при резонансе обращается в нуль при равенстве частот внешней силы и собственной частоты свободной балки (103.22). Она обращается в бесконечность при ω , равной одной из собственных частот того же стержня, но с другими условиями на концах: на одном — $\theta_0(0) = 0$ и $P_0(0) = 0$, на другом $M_0(l) = 0$ и $P_0(l) = 0$. Физические условия, в которых находится стержень, совершающий собственные колебания, можно пояснить схематически рис. 273, б: стержень «заделан» на одном конце в подвижную «невесомую» абсолютно жесткую пластину, препятствующую вращению сечения. Уравнение для собственных частот изгибных колебаний этого стержня совпадает по виду с знаменателем $C(0)$.

Еще можно и так пояснить вынужденные колебания стержня при $C(0) \rightarrow \infty$. Возбудились колебания, частота и форма которых совпадают с собственными, а внешний момент $M_0(0) e^{i\omega t}$ равен реакции «заделки» при собственных, или его действие препятствует повороту свободного конца при вынужденных колебаниях (см. рис. 273, б).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. А и д р о н о в, А. А. В и т т и С. Э. Х а й к и н, Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
 2. Л. И. М а и д е л ь ш т а м, Полное собрание трудов, т. IV, Изд-во АН СССР, 1955.
 3. Б. П. А с е е в, Основы радиотехники, Связьиздат, 1947.
 4. А. Н. К р и л о в, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах, Академкнига, 1949.
 5. А. Н. К р и л о в, Вибрации судов, ОНТИ, 1936.
 6. К. Ф. Т е о д о р ч и к, Автоколебательные системы, Гостехиздат, 1952.
 7. Н. Н. Б о г о л ю б о в и Ю. А. М и т р о п о л ь с к и й, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1963.
 8. Г. С. Г о р е л и к, Колебания и волны, Физматгиз, 1959.
 9. Б. В. Б у л г а к о в, Колебания, Гостехиздат, 1954.
 10. С. П. Т и м о ш е н к о, Теория колебаний в инженерном деле, Физматгиз, 1959.
 11. Дж. В. С т р е т т (Лорд Рэлей), Теория звука, т. I и II, Гостехиздат, 1955.
 12. Д е н - Г а р т о г, Механические колебания, Физматгиз, 1960.
-

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 11, 12, 40, 42, 187, 188
— разрывные (релаксационные) 221, 225
— самовообуждение 188
Акселерометры 104
Амортизация 91, 94
Амплитуда заряда на конденсаторе 75
— комплексная 65, 69, 86
— напряжения на индуктивности 78, 84
— потенциала на конденсаторе 75, 84
— скорости 21, 72, 83
— смещения 21, 75, 83
— тока 72
— ускорения 21, 78, 83
Андронова и Витта метод 199, 215
- Бернулли гипотеза 406
Бесконечная жесткость стержня 404
Бесселева функция 154
Биения 56, 179, 242
Блок конденсаторов 171
Боковые полосы 147
— частоты 146, 147
Бубнова — Галеркина метод 376
- Бан дер Поля метод 193, 215
Вектор амплитудный 375
— инерционный 375
— комплексный силы 374, 375
— — смещения 374, 375
— коэффициентов распределения амплитуд 360
— смещений 375
— собственный 375
— трения 375
— упругий 361
Вибрация 91
Виброграф оптический 104
- Виброграф приставной 104
Виброизолирующее устройство 91
Воздействие внешнее 54
— параметрическое 54
Волновое сопротивление линии 402
— уравнение 381, 385, 388
— —, решение 389
Волновой коэффициент трения 402
Волномер 105
Входное сопротивление фильтра 351
— — — низких частот 351
Вынужденные колебания 11, 53
— — в консервативных системах 362
— — — неконсервативных системах 373
— — — система, обладающей затуханием 62
— — — — — метод комплексных амплитуд 63
— — — — с двумя степенями свободы при наличии затухания 280
— — — фильтрах 348
— — — стержней 419
— — — струны 333
— — —, уравнение в линейной механической системе 53
— продольные колебания в однородной системе с распределенными постоянными 398
Выпрямитель 159
— диодный 160
— —, расчет 160
Выпрямление переменного тока 157
Вычетов теория 132
- Галеркина метод 376
Галеркинские координаты 376
Гальванометр вибрационный 105
Гармонические составляющие 153
Гармоническое колебание 10, 21

- Гармоническое колебание, амплитуда
смещения 21
— —, кинетическая энергия 22
— —, начальная фаза 21
— —, период 21
— —, потенциальная энергия 22
— —, фаза 21
— —, частота 21
Генератор 187, 188, 289
— высокой частоты 165
— ламповый 188
— —, режим автоколебаний жесткий 213, 214, 219, 220
— — — мягкий 208, 218
— RC 223, 225, 231
— —, условие самовозбуждения 224
— —, уравнение 191, 192, 204, 207, 210
Гетеродин 169, 170, 171
Глубина модуляции 179, 183
Границы области параметрического
резонанса 183, 184
Гука закон 16, 44, 380
- Движение непериодическое** 9
— периодическое 9
— почти периодическое 9
- Действие гармонической силы на**
систему без трения 55
— — — — —, вынужденные
колебания 56
— — — — —, собственные
колебания 56
— — — — —, уравнение
движения 55
- Декремент 26, 27, 71, 76.
- Дельта-функция 124, 127, 128, 405,
417, 422
- Демцфер 277, 278
— динамический 279, 280
- Демпфирование колебаний 401
- Детектирование 157, 162
— анидное 166
— диодное 166
— сеточное 166
- Детектор 167, 169, 170
— диодный 167
— квадратичный 164, 165, 169, 171
— кусочно-линейный 164
— сеточный 168
- Деформация 24
— —, упругий гистерезис 24
- Динамическая жесткость 67, 68, 125,
282, 288, 401
— — в точке системы 286
— — массы 67
- Динамическая жесткость на конце
стержня 427
— — парциальная 282, 283
— — переходная 286, 287
— — системы 66, 86, 87, 284
— — стержня 401
— — трения 67
- Динамический напор 271
- Диод 158
— полупроводниковый 186
- рабочий участок характеристики
158
- характеристика 158, 160, 162
- Дисперсия 408
— аномальная 409
- Длина волны 391
— собственной волны системы 391
- Добротность контура 75, 76, 84, 85,
143, 221, 292
- системы 71, 73, 74, 81—83
- Емкость единицы длины линии 383,
386
- Жесткое закрепление** 237
- Жесткость пружины** 16, 67
— — угловая 18
- системы динамическая 66, 86, 87,
284
- — комплексная 66
- Закон сохранения энергии 366, 367
- Затухающее колебание 26
— —, амплитуда 26, 27
— —, декремент 26, 27
— —, коэффициент затухания 26
— —, критическое значение коэф-
фициента затухания 28
— —, постоянная времени системы
26
— —, условный период 26
- Идеальный проводник 382
- Избирательность 142, 143
- Изоклины 32, 35
- Изохронность 50
- Импеданс механический 68
- Импульс 107, 108, 123
- Индикатор давления 104
- Индуктивность единицы длины про-
вода 384, 386
- Интегральная кривая 29—36
- Искажения 104

- Катушка обратной связи 37
 Квазилинейный метод 215, 220, 221,
 232
 Кинетическая энергия 22, 298
 Колебание вынужденное 11, 12, 128
 — гармоническое (синусоидальное)
 10
 — незатухающее 43
 — непериодическое 10
 — —, затухающая (или нарастающая) синусоида 10
 — —, лимитационное движение 10
 — нормальное 255, 308
 — параметрическое 11, 12, 172
 — переходное 128
 — периодическое 10
 — собственное 11, 15, 16, 128
 — установившееся 128
 Колебания в консервативных системах 358
 — — —, закон сохранения энергии 366
 — — — неконсервативных системах 366
 — — — —, закон сохранения энергии 367
 — — — распределенных системах 70
 — — — системах с двумя степенями свободы 233
 — — — — одной степенью свободы 11
 — — — со многими степенями свободы 11
 — — нелинейной пружины 156
 — — при сильной связности 260
 — — физического маятника 48
 — — энергии 21
 Колебательная система 11
 — — линейная 12
 — — нелинейная 12
 — — со многими степенями свободы 294
 Колебательный контур 188
 Комплексная амплитуда вынужденного колебания 329
 — — гармонического колебания 65, 69
 — — емкость 401
 — — жесткость системы 66, 67
 — — собственная частота 266, 327
 Комплексное сопротивление 69, 70, 86, 87, 125, 288, 401
 — —, аргумент 69, 70
 — —, модуль 69, 70
 Комплексные параметры 65, 66, 69, 282, 288
 Комплексный коэффициент трения 68, 401
 — — — для механической системы с одной степенью свободы 69
 Консервативная система 15
 Константа прибора 110
 Контурные токи 295
 Координаты нормальные 253, 255, 307, 360, 369
 — — комплексные 369, 370
 — — обобщенные 297
 — — фазовые 367
 Коши теорема 30
 Коши — Липшица условие 29
 Коэффициент взаимной динамической жесткости 329
 — глубины модуляции 165
 — демпфирования 92
 — жесткости 16
 — распределения амплитуд 241, 248, 250, 260, 303
 — связи двух контуров 241
 — усиления 170
 Коэффициенты связи 247, 249
 Крутизна лампы в рабочей точке 231
 — характеристики лампы 38, 39, 190
 Крылова и Боголюбова метод 192, 206
 — функция 411, 423
- Лагранжа уравнения 246, 255, 264, 299, 326
 — — обобщенные 296
 Ламповый генератор 188
 Лаплас преобразование 128, 129, 131, 336, 405, 411
 — — обратное 129, 132
 — — полюс 134
 — спектр 129, 336
 Лимитационное движение 10, 28, 33, 34, 71, 369
 Лиувилля теорема 205
- Магнитная энергия системы 251
 Максвелла уравнения 382
 Малый параметр 196
 — —, метод 199
 Мандельштама — Папалекси параметрическая машина 185
 Матрица 358
 — единичная 359
 — жесткости 358, 365
 — инерции 358
 — коэффициентов трения 366, 367
 — — упругости 358

- Матрица масс 358
 — передачи 427
 —, собственное значение 359
 —, собственный вектор 359
 —, частотная 359, 361
 Маятник двойной физический 235
 — конический 251, 321
 — крутильный 17
 — математический 13, 14, 17, 172
 —, уравнение малых колебаний 17, 173
 — с отрицательным затуханием 40
 — — —, автоколебания 42
 — — —, идеальный подвес 41
 — — —, уравнение вращательных колебаний 40
 — физический 17
 —, колебания 48
 —, период 50
 —, уравнение баланса энергии 48
 — — —, малых колебаний 17
 — — —, фазовой траектории 48
 — часов 17, 187
 Метод Андронова и Витта 199, 215
 — Бубнова — Галеркина 376
 — Ван дер Поля 193, 215
 — Галеркина 376
 — изоклин 32
 — итерации 362, 365, 376
 — квазилинейный 215, 220, 221, 232
 — комплексных амплитуд 63, 334, 356
 — Крылова и Боголюбова 192, 206
 — малого параметра 215
 — многополосника 424
 — переменной амплитуды 215
 — Теодорника энергетический 206, 207, 220, 221
 Механический импеданс 68
 Модуль сдвига 381
 — упругости 385, 392
 — Юнга 408
 Модуляция амплитудная 145, 146, 152, 153, 155
 — фазовая 152
 — частотная 152, 153, 155
 Мультивибратор 229, 230, 231
- Напряжение управляющее 189
 Настройка контура 143
 Неизохронность 50
 Неискажаемости условия 146, 147, 150
 Неискажаемость 145
 Неконсервативная система 15
- Нелинейность характеристики лампы 219
 Нормальное колебание 255, 308
 — — —, полная энергия 312
 — — —, эффективная жесткость 312, 313
 — — —, — масса 312, 314
 Нормальные колебания анизотропного осциллятора 317
 — — —, вырожденного анизотропного осциллятора 323
 — — —, струны с бусинками 315
 — координаты 253, 255, 307, 360, 369
 — комплексные 369, 370
 — — —, ортогональность 308—310, 313, 314
 — — —, оси 317
- Обобщенные координаты 297
 Обратная связь 187, 221
 Органная труба 187
 Ортогональности условие 361, 372, 375, 416, 417
 Ортогональность 361
 — форм собственных колебаний 395
 — — —, условие 396
 Особая точка 30
 — — —, неустойчивый фокус 40
 — — —, седло 48
 — — —, устойчивый узел 35, 36
 — — —, — фокус 34, 36
 Осциллятор анизотропный 317, 365
 — — —, вырожденный 323
 — — —, кинетическая энергия 366
 — — —, потенциальная энергия 366
 «Отклик» 125, 126
 Отрицательное затухание 36, 39
 — сопротивление 37
 — трение 37
 Отсечки угол 161, 162
- Параметрические колебания 11, 12, 172
 Параметрический резонанс 172—180, 185, 234
 — — —, области 177, 179
 — — —, — по Мейнеру 180
 — — —, усилитель 186
 Параметрическое возбуждение колебаний 172
 — — —, условие 176
 — — —, воздействие 54
 Парциальная система 237—241
 — частота 238—245, 248—252

- Пентод 280
 Переизывающая сила 407, 408
 Пилообразные колебания 222
 — —, генерация 222, 229
 Плотность амплитудного спектра 114
 — комплексного спектра 114
 Подвеска амортизирующая 107
 — упругая 91, 93, 94
 Полюс функции 132
 Потенциальная энергия 22, 297
 Предельная ударная сила 123, 124
 — — —, амплитудный спектр 124
 — — —, фазовый спектр 124
 Предельный цикл 195
 Прибор баллистический 96, 107
 — квазистатический 96
 — —, акселерометр 104
 — —, виброграф оптический 104
 — — —, приставной 104
 — —, индикатор давления емкостный 100, 104
 — — — мембранный 104
 — — — пьезокварцевый 100, 104
 — —, конденсаторный микрофон 104
 — —, шлейфовый осциллограф 103, 104
 — магнитоэлектрический 95
 — регистрирующий 95
 — резонансный 96, 105
 — —, вибрационный гальванометр 105
 — —, волномер 105
 — сейсмический 96, 105
 — —, сейсмограф 105
 Принцип суперпозиции 54, 55, 114, 274
 Проводник линейный 157, 158, 165
 — нелинейный 157, 162, 165
 — —, дифференциальное сопротивление 158
 Проницаемость лампы 38, 189
 Процессы переходные 113, 135
 — установления 113
 Пружина 67
 — идеально упругая 15
 — —, динамическая жесткость 67
 — жесткость 67
 — нелинейная 156
 Пульсирующий ток 159, 160
- Равенство собственных частот системы 319
 Разрывные (релаксационные) автоколебания 221, 225, 229
 Расстройка контуров 244
- Регенеративный приемник 37
 — —, уравнение 38
 Резонанс 58 и д., 275, 288, 329 и д.
 — взаимной динамической жесткости 329
 — входного сопротивления 352
 — динамической жесткости 88, 353
 — напряжений 85, 330
 — параметрический 172—180, 185, 234
 — —, полное комплексное сопротивление контура 91
 — сопротивлений 88, 89, 279, 351, 353
 — токов 85, 89, 279, 330, 351
 Резонансное условие 81, 83
 — отсутствие условия 276
 Резонансная кривая 72, 73, 78, 81, 276, 289—292
 — —, относительная ширина 74
 — —, ширина 74, 84, 122
 Резонансные законы 275
 — колебания 352, 353, 401—404
 — множители 138
 — пики 281
 Резонансных множителей кривая 137, 138
 Резонатор акустический 18
 — Гельмгольца 18
 — —, собственная круговая частота 19
 — —, уравнение гармонических колебаний 19
 Рейнольдса число 24
- Самовозбуждение колебаний 188, 191
 Связанность систем 259, 260, 262
 — —, коэффициент 259
 Связи коэффициент 247, 249
 Связь 237, 247—250, 258—262, 292
 — гальваническая 238
 — емкостная 236, 250, 277
 — индуктивная 236, 250, 259, 277
 — инерционная 247—250, 259, 277
 — —, коэффициент 247
 — критическая 292
 — смешанная 236
 — упругая 247—250, 277
 — —, коэффициент 247
 Сепаратриса 47, 48, 50
 Сила внутреннего трения 24
 — инерции 59, 60
 — мгновенная 123
 — трения 23, 24, 36, 61
 — — — покоя 24

- Сила ударная 123
 Система активная 367
 — консервативная 15
 — неконсервативная 15
 — парциальная 237—241
 — пассивная 367
 — с распределенными параметрами 379
 Скачки тока 227
 Скин-эффект 70
 Скорость звука 19
 — распространения волн 385, 386, 400
 — света в пустоте 386, 392
 Смеситель 170, 171
 Собственные изгибные колебания стержней 409
 — — —, консольная однородная балка 410, 413
 — — —, свободные концы 409, 415
 — — —, упругая заделка 410
 — — —, шарнирно оперты концы 410, 413
 — колебания 11, 15, 16 и д.
 — — в консервативных системах 14, 359
 — — — неконсервативных системах 23, 367
 — — — связанных контурах без затухания 239
 — — — — с небольшим затуханием 267
 — — — система без трения 246, 299
 — — — при наличии трения 263
 — — затухающие 42
 — — линейной системы, изохронность 50
 — — нарастающие 42
 — — —, условие самовозбуждения системы 43
 — — нелинейной системы 44
 — — —, неизохронность 50
 — — струны с бусинками 303
 — — упруго связанные маятники 251
 Соотношение неопределенности 122
 «Сопровождающие» собственные колебания 135
 Спектр амплитудный 111, 112
 — дискретный 113, 114
 — коэффициентов влияния 337
 — Лапласа 139
 — функции Хевисайда 140
 — периодической функции 111
 — сплошной 113, 114
 Спектр сплошной, ширина 122
 — фаз 114
 — фазовый 112
 — Фурье 114, 131
 Спектральная характеристика системы 138
 Спектральные методы 111
 Степени свободы 13, 233
 Стоячая волна 346, 350, 389, 390, 397
 — — —, длина волны 391
 — — —, пучность 390—392
 — — —, узел 390—392
 Супергетеродин 169—171
 Суперпозиция колебаний 54
- Тейлора ряд 15, 41
 Телеграфное уравнение 384, 397
 — — —, решение 397
 Теодорчикка энергетический метод 206, 207, 220, 221
 Теория вычетов 132
 Тиратрон 222, 223
 Трансформация спектра колебаний 171
 — частот 162, 169, 171
 Триггер 230, 231
- Угловая жесткость на конце 428, 429
 — — пружины 18
 Угол атаки 270
 — отсечки 161, 162
 Узел тока 404
 Узловые напряжения 295
 Узлы электрических цепей 296
 Умножитель частоты 165
 Упругий гистерезис 24
 Упруго связанные маятники 251
 — — —, кинетическая энергия 251
 — — —, коэффициент распределения 252, 254
 — — —, — связи 252
 — — —, потенциальная энергия 251
 Уравнение векторное 359
 — изгибных колебаний стержней 406
 — телеграфное 384, 397
 — — —, решение 397
 — фазовой траектории 226
 — характеристическое 359
 Усилитель звуковой частоты 170
 — низкой частоты 171
 — параметрический 186
 — промежуточной частоты 170, 171
 Условие ортогональности 416, 417

- Фаза вынужденных колебаний** 79
Фазовая плоскость 28, 45—47, 226—
 228
 — траектория 29, 45, 227
 — —, уравнение 46
Фазовое пространство 28
Фазовые координаты 367
Фазовый портрет гармонических колебаний 31
 — — затухающих колебаний 32
Фильтр 160, 164, 165, 170, 339, 348
 — входное сопротивление 351
 — высоких частот 157, 340
 — — —, механический аналог 341
 — низких частот 339, 345, 385
 — — —, входное сопротивление 351, 355
 — — —, коэффициент передачи 351, 354, 355
 — — —, критическая частота 354
 — — —, механический аналог 340
 — полосовой 341
 — промежуточной частоты в супергетеродине 290
 — — — —, резонансные криевые 292
 —, резонансные колебания 352
Флаттер, критическая скорость 272, 273
 — модели крыла 269, 270
 — — —, условие самовозбуждения 270, 272
Форма колебаний 403
 — нормального колебания 371
 — собственного колебания 303, 390, 410, 413
Функция Крылова 411, 423
 — непериодическая 10
 — периодическая 10
 — рассеяния 264
 — ударная 123
 — Хевисайда 140
Фурье интеграл 113, 114, 116, 121, 122, 128
 — преобразование 129, 130
 — ряд 111 и д., 150—153, 205, 216
 — спектр 114, 131
- Характеристика лампы** 38
 — —, коэффициент затухания 39
- Характеристика лампы, коэффициент связи** 39
 — —, крутизна 38, 39, 190
 — —, напряжение насыщения 190
 — —, нелинейность 219
 — —, рабочая точка 38, 189, 190
 — —, средняя крутизна 216—219
 — —, управляющее напряжение 189
 — —, уравнение 39
Хевисайда функция 140
 — —, спектр 140
- Частота боковая** 146, 147
 — круговая собственная 16, 21
 — несущая 146
 — нормальная 253, 256, 258, 260
 — обычная 16
 — парциальная 238—245, 248—252
 — промежуточная 170, 171
 — резонансная 288
 — собственная 71, 253—260
 — — двух контуров 242—245
 — успокоения 329
Частотные характеристики системы
 115
Четырехполюсник 424
 — матрица передачи 424
Число степеней свободы 13, 233
- Центр жесткости** 270, 271
- Эквивалентное резонансное сопротивление контура** 292
Электрическая энергия системы 251
Электрический колебательный контур 18
 — — —, уравнение гармонических колебаний 18
Электронная лампа 158
 — —, сопротивление 158
 — —, характеристика 158
Эллиптические функции 50
Эффективная масса 332
- Юнга модуль** 408

Сергей Павлович СТРЕЛКОВ
**ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ КОЛЕБАНИЙ**

Учебник
Издание третье,
исправленное

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*

ЛР № 065466 от 21.10.97 г.
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.001665.03.02
от 18.03.02, выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lspb.spb.ru
www.lanpb1.spb.ru
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Издательство: тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72;
pbl@lspb.spb.ru
print@lspb.spb.ru

Подписано в печать 28.01.2005
Бумага офсетная. Формат 60x84^{1/16}
Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,58
Тираж 2000 экз.

Заказ № 1349

Отпечатано с готовых диапозитивов
во ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

КНИГОИЗДАТЕЛЬСКАЯ
И КНИГОТОРГОВАЯ
ФИРМА



КНИГОИЗДАТЕЛЬСКАЯ
И КНИГОТОРГОВАЯ
ФИРМА

Издательство «ЛАНЬ»

КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА «ЛАНЬ»
МОЖНО ПРИОБРЕСТИ
В ОПТОВЫХ
КНИГОТОРГОВЫХ ОРГАНИЗАЦИЯХ:

ООО «ЛАНЬ-ТРЕЙД»
192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13,
тел./факс: (812)567-54-93,
тел.: (812)567-85-78, (812)567-14-45,
567-85-82, 567-85-91;
trade@lanpbl.spb.ru
www.lanpbl.spb.ru/price.htm

ООО «ЛАНЬ-ПРЕСС»
109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, 6/19,
тел.: (095)178-65-85, 178-57-04;
lanpress@ultimanet.ru

ООО «ЛАНЬ-ЮГ»
350072, Краснодар, ул. Жлобы, 1/1,
тел.: (861)274-10-35;
lankrd98@mail.ru

КНИГОИЗДАТЕЛЬСКАЯ
И КНИГОТОРГОВАЯ
ФИРМА



КНИГОИЗДАТЕЛЬСКАЯ
И КНИГОТОРГОВАЯ
ФИРМА

Издательство «ЛАНЬ»

ПРЕДЛАГАЕТ

❖ Тематика нашего издательства ❖

БИОЛОГИЯ, ХИМИЯ, МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА

СЕЛЬСКОЕ ХОЗЯЙСТВО, ВЕТЕРИНАРИЯ

ЭКОНОМИКА, МУЗЫКА

❖ Формирование контейнеров в любую точку страны ❖

❖ Ответственное хранение по договорным ценам ❖

❖ Гибкая система скидок ❖

ПРИГЛАШАЕМ К СОТРУДНИЧЕСТВУ
АВТОРОВ И ИЗДАТЕЛЬСТВА
ДЛЯ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ

Рукописи не рецензируются и не возвращаются

ЖДЕМ ВАС ПО АДРЕСАМ:

РФ, 192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5

Издательский отдел:

(812) 567-29-35, 567-05-97, 567-92-72

Торговый отдел: 193029, ул. Крупской, 13,

(812) 567-85-78, 567-14-45,

тел/факс 567-54-93

www.lanpb.ru E-mail: lan@pb.ru

pb@lanpb.ru(издательский отдел), print@lanpb.ru(производственный отдел)
trade@lanpb.ru(торговый отдел), post@lanpb.ru(книга почтой)

Филиал в Москве: 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19

(м. Текстильщики) тел.(095) 178-65-85, 178-57-04; E-mail: lanpress@ultimanet.ru

Филиал в Краснодаре: 350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1 (8612)74-10-35

E-mail: lankrd98@mail.ru



Настоящее переиздание учебника «Введение в теорию колебаний» приурочено к 100-летию со дня рождения профессора МГУ Сергея Павловича СТРЕЛКОВА.

Профессор С. П. Стрелков — выдающийся педагог, автор прекрасных учебников по механике, теории колебаний, основатель кафедры физики для механико-математического факультета, которой он руководил на протяжении почти 20 лет до 1974 г. С. П. Стрелков обладал широким естественнонаучным мировоззрением, объединяющим фундаментальные представления и прикладные аспекты физики. Трудами С. П. Стрелкова на кафедре была создана крупная научная школа в области теории колебаний и математического моделирования.

Научная деятельность С. П. Стрелкова в области аэроупругости была тесно связана с ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского. За работы в области аэроупругости профессор С. П. Стрелков был награжден «Золотой медалью им. Н. Е. Жуковского».

ISBN 5-8114-0614-2

A standard linear barcode representing the ISBN number 5-8114-0614-2.

9 785811 406142

